ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке), а кратких сообщений — не более 5—6 страниц машинописного текста. Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 1 Ռ. 20 Կ.
ЦЕНА 1 Р. 20 К.

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 4, 1986 Математика

УДК 517.95

К. А. ЯГДЖЯН

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПАРАМЕТРОМ И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Введение

Целью настоящей работы является построение фундаментального решения (ф.р.) следующей задачи Коши:

$$Lu=f, \tag{0.1}$$

$$D_t^l u|_{t=s}=\psi_l(x),\ l=0,\ 1,\cdots,m-1, \tag{0.2}$$

где $t,\ s\in J=[0,\ T]$, $x\in R^n$, $D_j=-i\partial_j=-i\partial/\partial x_j$, $D_t=-i\partial_t=-i\partial/\partial t$, $T>0$, α — мультииндекс,

$$L=D_t^m+\sum_{j+|\alpha|\leqslant m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t,\ x)\,D_t^j\,D_x^\alpha,$$

$a_{j,\alpha}\in C^\infty(J\times R^n)$, в предположении, что главный символ

$$P_m(t,\ x,\ \tau,\ \xi)=\tau^m+\sum_{j+|\alpha|=m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t,\ x)\,\tau^j\,\xi^\alpha$$

представляется в виде

$$P_m(t,\ x,\ \tau,\ \xi)=\prod_{l=1}^{m}(\tau-\lambda_l(t,\ x,\ \xi)), \tag{0.3}$$

где вещественнозначные функции $\lambda_l(t,\ x,\ \xi)$ удовлетворяют условиям

$$|\lambda_l(t,\ x,\ \xi)|\leqslant c\lambda(t)\,|\xi|,\ l=1,\ 2,\cdots,m, \tag{0.4}$$

$$|\lambda_l(t,\ x,\ \xi)-\lambda_k(t,\ x,\ \xi)|\geqslant\delta\lambda(t)\,|\xi|,\ \delta=\mathrm{const}>0,\ l\neq k,\ l,\ k=1,\cdots,m \tag{0.5}$$

для всех $t\in J$, $(x,\ \xi)\in R^{2n}$, с функцией $\lambda\in C^\infty(J)$, $\lambda(0)=0$, $\lambda'(t)=\partial_t\lambda(t)>0$ при $t>0$. Таким образом, при $t=0$ имеет место нарушение условия строгой гиперболичности оператора L, поэтому мы предположим, что коэффициенты $a_{j,\alpha}$ удовлетворяют условиям работ [1], [2], [3], т. е. для всех k, β и всех α, j, $|\alpha|\neq 0, |\alpha|+j\leqslant m$, выполнены неравенства

$$|D_t^k\,D_x^\beta\,a_{j,\alpha}(t,\ x)|\leqslant C_{k,\beta}\,\lambda^{m-j}(t)\left(\frac{|\ln\lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{m-j-|\alpha|}\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k, \tag{0.6}$$

$$|D_t^k\,D_x^\beta\,\mathrm{Im}\,a_{m-1-|\alpha|,\alpha}(t,\ x)|\leqslant C_{k,\beta}\,\lambda^{|\alpha|}(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{k+1}, \tag{0.7}$$

где $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(s)\,ds$, $c\lambda(t)/\Lambda(t)\leqslant \lambda'(t)/\lambda(t)\leqslant c_0\lambda(t)/\Lambda(t)$, $c>\frac{m-1}{m}$, $|\lambda^{(k)}(t)|\leqslant c_k(\lambda'(t)/\lambda(t))^{k-1}\lambda'(t)$, $t>0$, $k=2, 3,\cdots$. Отметим, что, как показано в [3], условия (0.6), (0.7), вообще говоря, являются необходимыми для корректности задачи Коши.

В этих предположениях ф.р. строится в виде интегрального оператора Фурье (ИОФ) специального класса, описание которого осуществляется разбиением кокасательного расслоения $T^* R^n_x$ на зоны и будет приведено ниже. Отметим здесь только, что эти классы псевдодифференциальных операторов (ПДО) и ИОФ являются обобщениями известных классов Буте де Монвеля [4], использованных, например, в работах [5]—[15]. В [8] с помощью классов Буте де Монвеля построено ф.р. задачи (0.1), (0.2) в том случае, когда $\lambda(t)=t^l$, где l — целое. Во многом мы следуем схеме построения ф.р. именно этой работы, отходя от нее в принципиально ином определении классов ПДО и ИОФ. Мы отказываемся также от понятия квазиоднородности, и по этой причине используем теорию ИОФ с неоднородной фазовой функцией, изложенную в работе Кумано-го [5].

§ 1. Гиперболичность. Классы символов и исчисление ПДО

Обозначим через t_ξ решение уравнения

$$\Lambda(t)\langle\xi\rangle=N\ln\langle\xi\rangle, \tag{1.1}$$

а через $\langle\xi_t\rangle$ — его решение относительно $\langle\xi\rangle$. Здесь $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$.

Для дальнейшего исключительно важную роль играет следующая

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (0.3)—(0.7). *Тогда существуют положительные постоянные M, N_0 такие, что для всех $N>N_0$ корни $\tau_l(t, x, \xi)$, $l=1,\cdots, m$, уравнения (т. е. нули полного символа оператора L)*

$$\tau^m+\sum_{j+|\alpha|\leqslant m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t, x)\,\tau^j\xi^\alpha=0 \tag{1.2}$$

обладают следующими свойствами: для любых k, α, β существуют положительные постоянные δ_1, $C_{k,\alpha,\beta}$, Q такие, что

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \tau_l(t, x, \xi)|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{1-|\alpha|}\lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k, \tag{1.3}$$

$$|\tau_j(t, x, \xi)-\tau_l(t, x, \xi)|\geqslant \delta_1\lambda(t)\langle\xi\rangle,\quad j\neq l, \tag{1.4}$$

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \operatorname{Im}\tau_l(t, x, \xi)|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k\left\{\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}+\right.$$
$$\left.+Q(m-2)\frac{\lambda(t)\ln^2\lambda(t)}{\Lambda^2(t)\langle\xi\rangle}\right\}, \tag{1.5}$$

при всех $t\in[t_\xi, T]$, $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $\langle\xi\rangle\geqslant M$, и всех j, $l=1,\cdots, m$.

Доказательство. Осуществим в (1.2) замену $\tau=\lambda(t)|\xi|\gamma$. Тогда γ будет решением уравнения

$$\gamma^m+\sum_{0<j<m}\Big(\sum_{|\alpha|=m-j}(\lambda(t)|\xi|)^{j-m}a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha+B_{j+1}\Big)\gamma^j=0, \tag{1.6}$$

где

$$B_{j+1}=\sum_{|\alpha|<m-1-j}(\lambda(t)|\xi|)^{j-m}a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha,\ j=0,\cdots,m-1.$$

Согласно условию, при $t\in J$, $x\in R^n$, $\xi\neq 0$, корни $\mu_k(t,x,\xi)$ уравнения

$$\mu^m+\sum_{0<j<m}\Big(\sum_{|\alpha|=m-j}(\lambda(t)|\xi|)^{j-m}a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha\Big)\mu^j=0$$

вещественные и простые. Поэтому, так как (см. (1.16)—(1.18) [3]) для любого положительного ε за счет выбора M, N_0, при всех $t\in[t_\xi,T]$, $x\in R^n$, $\langle\xi\rangle\geqslant M$, имеет место неравенство $|B_1|+\cdots+|B_m|<\varepsilon$, то возмущения B_j малы, и корни уравнения (1.6) аналитически зависят от B_k, т. е. представляются в виде сходящихся степенных рядов, и, следовательно,

$$\tau_k(t,x,\xi)=\lambda(t)|\xi|\mu_k(t,x,\xi)+\lambda(t)|\xi|\sum_{l_1+\cdots+l_m>1}a^k_{l_1,l_2\cdots l_m}(t,x,\xi)B_1^{l_1}B_2^{l_2}\cdots B_m^{l_m}, \tag{1.7}$$

где*

$$a^k_{\underset{j}{0\cdots010\cdots0}}(t,x,\xi)=-\frac{(\mu_k(t,x,\xi))^{j-1}}{\prod\limits_{r\neq k}(\mu_k(t,x,\xi)-\mu_r(t,x,\xi))}.$$

Тем самым (1.3)—(1.5) с $k+|\alpha|+|\beta|=0$ доказаны (см. также (1.20)—(1.22) [3]). Для завершения доказательства леммы необходимо продифференцировать (1.2) и воспользоваться индукцией. Лемма доказана.

Следствие. При всех $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $\langle\xi\rangle\geqslant M$

$$\int_{t_\xi}^{T}|\operatorname{Im}\tau_k(t,x,\xi)|\,dt\leqslant c\,(1+\ln(1+|\xi|)),\ k=1,\cdots,m, \tag{1.8}$$

что естественно назвать условием гиперболичности оператора L с описанной в (0.3)—(0.5) главной частью (см. (1.1) [3]).

Оценки (1.3) лежат в основе предлагаемых ниже классов символов ПДО с параметром t. Отметим здесь, что поверхность $t=t_\xi$ разбивает $[0,T]\times R^n_x\times R^n_\xi$ на две области (зоны), в каждой из которых оператор L требует соответствующего рассмотрения.

Обозначим через $S^m_{\rho,\delta}(R^n_x)$ обычные классы Хермандера ($0\leqslant\delta<1, 0\leqslant\rho\leqslant 1$), а через $C_t(J;S^m_{\rho,\delta})$ — непрерывное отображение J в $S^m_{\rho,\delta}(R^n_x)$.

---

* В [3] в формулах для этих коэффициентов имеется описка, которая, впрочем, не влияет на правильность рассуждений и результаты указанной работы.

Определение 1. Пусть m_1, m_2, m_3 — действительные числа. Через $S\{m_1, m_2, m_3\}$ обозначим множество всех функций $a(t, x, \xi)\in \in C^\infty(J\times R^{2n})$ таких, что с некоторыми m, ρ, δ, $a\in C_t(J; S^m_{\rho,\delta})$, и для любых k, α, β с некоторыми постоянными $C_{k,\alpha,\beta}$ при всех $t\in[t_\xi, T]$, $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $\langle\xi\rangle\geqslant M$, справедливы неравенства

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t, x, \xi)|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m_1-|\alpha|}\lambda^{m_2}(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3+k}. \tag{1.9}$$

Введем также обозначение

$$\mathrm{H}\{m_1, m_2, m_3\}=\bigcap_{\nu=0}^{\infty} S\{m_1-\nu, m_2-\nu, m_3+\nu\}.$$

Имеет место следующее

Предложение 1. (i) *Пусть $a_k(t, x, \xi)\in S\{m_1-k, m_2, m_3\}$, $k=0, 1,\cdots$, и начиная с некоторого номера n $a_k(t, x, \xi)=0$ при $t\in[0, t_\xi]$, $k\geqslant n$. Тогда существует символ $a(t, x, \xi)\in S\{m_1, m_2, m_3\}$ такой, что*

$$a\sim a_0+a_1+a_2+\cdots \mod C_t^\infty(J; S^{-\infty}), \tag{1.10}$$

в том смысле, что при $t\in[0, t_\xi]$ этот ряд конечен и сумма обычная, и что для любого k

$$(a-a_0-a_1-\cdots-a_{k-1})\in S\{m_1-k, m_2, m_3\}, \tag{1.11}$$

и два таких символа отличаются на элемент класса $C_t^\infty(J; S^{-\infty})$.

(ii) *Пусть $b_k(t, x, \xi)\in S\{m_1-k, m_2-k, m_3+k\}$, $k=0, 1,\cdots$, и начиная с некоторого номера n $b_k(t, x, \xi)=0$ при $t\in[0, t_\xi]$, $k\geqslant n$. Тогда существует символ $b(t, x, \xi)\in S\{m_1, m_2, m_3\}$ такой, что*

$$b\sim b_0+b_1+b_2+\cdots \mod \mathrm{H}\{m_1, m_2, m_3\}, \tag{1.12}$$

в том смысле, что при $t\in[0, t_\xi]$ этот ряд конечен и сумма обычная, и что для любого k

$$(b-b_0-b_1-\cdots-b_{k-1})\in S\{m_1-k, m_2-k, m_3+k\}, \tag{1.13}$$

и два таких символа отличаются на элемент из класса $\mathrm{H}\{m_1, m_2, m_3\}$.

Доказательство. Пусть $\chi(t)$ есть C^∞-функция на R^1 такая, что $0\leqslant\chi(t)\leqslant 1$, и $\chi(t)=1$ при $|t|\leqslant 1$, а при $|t|\geqslant 2$ $\chi(t)=0$. Определим также функции $\psi_\varepsilon(\xi)$, $\gamma_\varepsilon(t, \xi)$ по формулам

$$\psi_\varepsilon(\xi)=1-\chi(\varepsilon\langle\xi\rangle),\quad \gamma_\varepsilon(t, \xi)=1-\chi\left(\frac{\varepsilon\Lambda(t)\langle\xi\rangle}{N\ln\langle\xi\rangle}\right),$$

и положим

$$a(t, x, \xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{\varepsilon_\nu}(\xi)\, a_\nu(t, x, \xi), \tag{1.14}$$

$$b(t, x, \xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_{\varepsilon_\nu}(t, \xi)\, b_\nu(t, x, \xi). \tag{1.15}$$

Ясно, что при подходящем выборе последовательности $\{\varepsilon_\nu\}$, $1> >\varepsilon_0>\varepsilon_1>\cdots>\varepsilon_\nu>\cdots\to 0$ ряд (1.14) будет абсолютно сходящимся.

Пусть теперь a и $\tilde{a}$ — два символа со свойством (1.11). Тогда $a(t, x, \xi) - \tilde{a}(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$, и $(a - \tilde{a}) \in S\{m_1 - l - k - m_3, m_2, m_3\}$ для любых l и любых $k \geqslant 0$, поэтому

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta (a(t, x, \xi) - \tilde{a}(t, x, \xi))| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m_1 - l - k - m_3 - |\alpha|} \lambda^{m_2}(t) \times$$
$$\times \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + k} \leqslant C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m_1 - l - |\alpha|} (\langle \xi \rangle \Lambda(t))^{-(m_3 + k)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m_1 - l - |\alpha|}, \quad t \in J,$$

так как $t \geqslant t_\xi$, что и доказывает пункт (i) предложения.

Для доказательства пункта (ii) заметим прежде всего, что

$$|D_t^j D_\xi^\alpha \gamma_\varepsilon(t, \xi)| \leqslant C_{j,\alpha} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \Lambda^{-j}(t) \lambda^j(t).$$

при t таких, что $\varepsilon \Lambda(t) \langle \xi \rangle \geqslant N \ln \langle \xi \rangle$, $\varepsilon < 1$, в то время как $\gamma_\varepsilon(t, \xi) = 0$ при t таких, что $\varepsilon \Lambda(t) \langle \xi \rangle \leqslant N \ln \langle \xi \rangle$. Далее, последовательность $\{\varepsilon_j\}_0^\infty$, $1 \geqslant \varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_1 \geqslant \cdots \geqslant \varepsilon_j \cdots \to 0$ в (1.15) можно выбрать так, чтобы при $t \in [t_\xi, T]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle > M$,

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta [\gamma_{\varepsilon_j}(t, \xi) b_j(t, x, \xi)]| \leqslant 2^{-j} \langle \xi \rangle^{m_1 - j + 1 - |\alpha|} \times$$
$$\times \lambda^{m_2 - j + 1}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + k + j + 1},$$

для всех k, α, β, $k + |\alpha| + |\beta| \leqslant j$, $j = 0, 1, \cdots$. Действительно

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha [\gamma_{\varepsilon_j}(t, \xi) b_j(t, x, \xi)]| =$$
$$= \left| \sum_{l+m=k} \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!\, k!}{\gamma!\, \delta!\, m!\, l!} [D_t^l D_\xi^\gamma \gamma_{\varepsilon_j}(t, \xi)] \cdot [D_t^m D_x^\beta D_\xi^\delta (b_j(t, x, \xi))] \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{l+m=k} \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!\, k!}{\gamma!\, \delta!\, m!\, l!} C_{l,\gamma} \langle \xi \rangle^{-|\gamma|} \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^l C_{m,\beta,\delta}^{(j)} \langle \xi \rangle^{m_1 - j - |\delta|} \times$$
$$\times \lambda^{m_2 - j} \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{m_3 + m + j} \leqslant \langle \xi \rangle^{m_1 - j + 1 - |\alpha|} \lambda^{m_2 - j + 1}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + k + j - 1} \times$$
$$\times \left\{ \frac{1}{\Lambda(t) \langle \xi \rangle} \sum_{l+m=k} \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!\, k!}{\gamma!\, \delta!\, m!\, l!} C_{l,\gamma} C_{m,\beta,\delta}^{(j)} \right\},$$

так что достаточно выбрать

$$\varepsilon_j \leqslant 2^{-j} \left\{ \max_{k+|\alpha|+|\beta| \leqslant j} \sum_{l+m=k} \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!\, k!}{\gamma!\, \delta!\, m!\, l!} C_{l,\gamma} C_{m,\beta,\delta}^{(j)} \right\}^{-1}.$$

Для остатка ряда (1.15) имеем

$$\left| D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \sum_{j=r+1}^{\infty} \gamma_{\varepsilon_j}(t, \xi) b_j(t, x, \xi) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=r+1}^{\infty} 2^{-j} \langle \xi \rangle^{m_1 - j + 1 - |\alpha|} \lambda^{m_2 - j + 1}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + k + j - 1} \leqslant$$
$$\leqslant \langle \xi \rangle^{m_1 - |\alpha| - r} 2^{-(r+1)} \lambda^{m_2 - r}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + k + r} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \left(\frac{1}{\Lambda(t) \langle \xi \rangle}\right)^j \leqslant$$

$$\leqslant C_{k,\alpha,\beta} < \xi >^{m_1-|\alpha|-r} 2^{-(r+1)} \lambda^{m_2-r}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3+k+r}.$$

Таким образом, $\sum\limits_{j=r+1}^{\infty} \gamma_{\varepsilon_j}(t, \xi)\, b_j(t, x, \xi) \in S\{m_1 - r, \quad m_2 - r, \quad m_3 + r\}$.

Предложение доказано.

Определим теперь псевдодифференциальный оператор $a(x, D_x)$ формулой

$$a(x, D_x)\, u(x) = Os - \iint e^{-iy\cdot\xi} a(x, \xi)\, u(x+y)\, (2\pi)^{-n}\, d\xi dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-n} \iint e^{-iy\cdot\xi} \varkappa(\varepsilon\xi, \varepsilon y)\, a(x, \xi)\, u(x+y)\, d\xi dy, \quad u \in B(R^n),$$

где $B(R^n)$ — пространство C^∞-функций в R^n с ограниченными производными, а функция $\varkappa$, $\varkappa(0, 0) = 1$, из пространства Шварца S.

Предложение 2. *Пусть* $a \in S\{m_1, m_2, m_3\}$, $b \in S\{m_1', m_2', m_3'\}$, *и определим* $a\circ b(t, x, \xi)$ *по формуле*

$$a\circ b(t, x, \xi) = Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} a(t, x, \xi+\eta)\, b(t, x+y, \eta)\, (2\pi)^{-n}\, d\eta dy,$$

и пусть $a(t, x, \xi) = 0$ *при* $t \in [0, t_\xi]$. *Тогда* $a\circ b(t, x, \xi) \in S\{m_1 + m_1', m_2 + m_2', m_3 + m_3'\}$, $a(t, x, D_x)\, b(t, x, D_x) = a\circ b(t, x, D_x)$ *и*

$$a\circ b(t, x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(t, x, \xi)\, b_{(\alpha)}(t, x, \xi), \ \mathrm{mod}\ C_t(J;\ S^{-\infty}), \qquad (1.16),$$

где $a^{(\alpha)} = D_\xi^\alpha a$, $b_{(\alpha)} = \partial_x^\alpha b$.

Доказательство. Мы его опускаем, поскольку оно является совершенно типичным для теории ПДО.

Если $A(t)$ — матричный ПДО, то $\sigma(A(t))(x, \xi) \in S\{m_1, m_2, m_3\}$ означает, что элементы $A_{ij}(t, x, \xi)$ символа оператора $A(t)$ принадлежат этому классу при всех i, j.

Лемма 2. *Пусть задана последовательность матричных* $m\times m$ *символов* $\sigma(N^{(\nu)}(t))(x, \xi) \in S\{-\nu, \ -\nu, \ +\nu\}$, $\nu = 1, 2, \cdots$, *и* $\sigma(N^{(\nu)}(t))(x, \xi) = 0$ *при всех* $t \in [0, t_\xi]$, $< \xi > \geqslant M$. *Тогда существует оператор* $N(t)$ *такой, что его символ* $\sigma(N(t))(x, \xi)$ *принадлежит классу* $S\{0, 0, 0\}$ *и*

$$N(t) \sim I + N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t) + \cdots \quad \mathrm{mod}\ \mathrm{H}^0 = \mathrm{H}\{0, 0, 0\}. \qquad (1.17)$$

Более того, $N(t)$ *имеет параметрикс* $N^{\#}(t)$ *такой, что* $\sigma(N^{\#}(t))(x, \xi) \in S\{0, 0, 0\}$, *и*

$$\sigma(N(t)\, N^{\#}(t) - I), \sigma(N^{\#}(t)\, N(t) - I) \in C_t(J;\ S^{-\infty}).$$

Доказательство. Мы его опускаем, поскольку оно аналогично доказательству предложения 1, а построение параметрикса $N^{\#}(t)$, по существу, ничем не отличается от принятого в теории ПДО.

§ 2. Приведение к задаче Коши для системы первого порядка

Пусть $\rho(t, \xi)$ — положительный корень уравнения

$$\rho^m - 1 - |\xi| \lambda^m(t) \Lambda^{1-m}(t) |\ln \langle \xi \rangle|^{m-1} = 0, \tag{2.1}$$

и пусть $h(t, \xi) = \rho(t, \xi) \chi(\Lambda(t) \langle \xi \rangle / N \ln \langle \xi \rangle) + \lambda(t) \langle \xi \rangle (I - \chi(\Lambda(t) \langle \xi \rangle / N \ln \langle \xi \rangle))$, а

$$H(t) = \begin{bmatrix} h^{m-1}(t, D_x), & 0 & , & \vdots & , 0 \\ 0 & h^{m-2}(t, D_x), & & \vdots & , 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \\ 0, & 0, & , & \vdots & , 1 \end{bmatrix},$$

Для вектора $U = {}^t(U_1, U_2, \cdots, U_m) = H(t) {}^t(u, D_t u, \cdots, D_t^{m-1} u)$ уравнение (0,1) приводит к системе

$$L_0 U = \Phi, \tag{2.2}$$

где

$$L_0 = D_t - A(t) - H_t(t) H^{-1}(t), \quad \Phi = H(t) {}^t(0, \cdots, 0, f), \tag{2.2'}$$

$$\sigma(A(t))(x, \xi) = \begin{bmatrix} 0 & , & h & \cdots & , 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & , & 0 & & h \\ -\sum\limits_{|\alpha| < m} a_{0,\alpha}(t, x) \xi^\alpha h^{-m+1}(t, \xi), & & -\sum\limits_{|\alpha| < m-1} a_{1,\alpha}(t, x) \xi^\alpha h^{-m+2}(t, \xi), & \cdots, & -\sum\limits_{|\alpha| < 1} a_{m-1,\alpha}(t, x) \xi^\alpha \end{bmatrix}.$$

Упорядочим корни уравнения (1.2): $\operatorname{Re} \tau_1 < \operatorname{Re} \tau_2 < \cdots < \operatorname{Re} \tau_m$, $t \in [t_\xi, T]$. Выберем постоянные $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ и рассмотрим функции $\varphi_k(t, x, \xi) = d_k \rho(t, \xi) \chi(\Lambda(t) \langle \xi \rangle / N \ln \langle \xi \rangle) + \tau_k(t, x, \xi)(1 - \chi(\Lambda(t) \langle \xi \rangle / N \ln \langle \xi \rangle))$. Очевидно, что $\Delta(t, x, \xi) = \prod\limits_{m > l > j} [(\varphi_l(t, x, \xi) - \varphi_j(t, x, \xi)) / h(t, \xi)]$ является равномерно по $t \in J$ эллиптическим символом нулевого порядка, $h(t, \xi)$ — равномерно по $t \in J$ гипоэллиптическим символом, а

$$-\sum_{|\alpha| < m-j} a_{j,\alpha}(t, x) \xi^\alpha h^{-m+j+1}(t, \xi) \in S\{1, 1, 0\}, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

По системе $\{\varphi_k h^{-1}\}$ составим матрицу Вандермонда $M^\#(t, x, \xi) = V(\varphi_1 h^{-1}, \varphi_2 h^{-1}, \cdots, \varphi_m h^{-1})$, и пусть $M(t, x, D_x)$ — параметрикс для $M^\#(t, x, D_x)$, т. е. $\sigma(M(t) M^\#(t) - I), \sigma(M^\#(t) M(t) - I) \in C_t^\infty(J; S^{-\infty})$. Тогда вектор $V = M(t) U$ будет решением системы

$$D_t V - M(t) A(t) M^\#(t) V - M(t) H_t(t) H^{-1}(t) M^\#(t) V - \\ - M_t(t) M^\#(t) V + R_1(t) U = M(t) \Phi, \tag{2.3}$$

где $\sigma(R_1(t))(x, \xi) \in C_t(J; S^{-\infty})$.

Ясно, что (2.3) можно переписать в следущем виде:

$$D_t V - D(t) V + B(t) V + R_2(t) U = \Phi_1, \tag{2.4}$$

где $D(t)$ — оператор с диагональным символом, элементы которого $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$, $R_2(t, x, \xi) \in C_t(J, S^{-\infty})$, $B(t) \in S\{0, 0, 1\}$, а при $t \in [0, t'_\xi]$ для любых α, β выполняются неравенства

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta B(t, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta}\left(\rho(t, \xi) + \frac{\rho_t(t, \xi)}{\rho(t, \xi)}\right) < \xi >^{-|\alpha|}, \tag{2.5}$$

где t'_ξ — решение уравнения (1.1) с заменой N на $2N$.

Действительно, главный символ $M(t, x, D_x)$ есть $[M^\#(t, x, \xi)]^{-1}$, а при $t \in [t_\xi, T]$ матрица $M(t, x, \xi)\, A(t, x, \xi)\, M^\#(t, x, \xi)$ — диагональная, с $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_m$ на диагонали. Остальные члены разложения

$$\sum_\beta \frac{1}{\beta!}\left(\partial_\xi^\beta \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha M(t, x, \xi)\right)\left(D_x^\alpha A(t, x, \xi)\right) D_x^\beta M^\#(t, x, \xi)\right) \tag{2.6}$$

принадлежат $S\{1 - |\alpha + \beta|, 1, 0\}$, соответственно, а при $|\gamma| \neq 0$ $S\{1 - \gamma|$ $1, 0\} \subset S\{0, 0, 1\}$. Что касается поведения при $t \in [0, t'_\xi]$ разложения (2.6), то учитывая оценку $|D_\xi^\alpha D_x^\gamma A(t, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\gamma} < \xi >^{-|\alpha|} \rho(t, \xi)$, гладко продолжим члены ряда нулем на $[t_\xi, T]$. Тогда его можно просуммировать так, что асимптотическая сумма будет удовлетворять оценке (2.5).

Итак, вернемся к (2.4). Осуществим в зоне $[t_\xi, T]$ полную диагонализацию системы.

Теорема 1. *Существует оператор $N(t)$ такой, что $N(t, x, \xi) \in S\{0, 0, 0\}$, $|\det N(t, x, \xi)| > \mathrm{const} > 0$ на $J \times R_x^n \times R_\xi^n$, и*

$$(D_t - D(t) + B(t))\, N(t) = N(t)\, L_1 \mod C_t(J;\, S^{-\infty}), \tag{2.7}$$

с некоторым L_1 вида

$$L_1 = D_t - D(t) + F(t) + R(t), \tag{2.8}$$

где (i) $F(t, x, \xi)$ — *диагональная матрица,* $F(t, x, \xi) \in S\{0, 0, 1\}$, $F(t, x, \xi) = 0$ *при* $t \in [0, t_\xi]$, (ii) *для любых* α, β *выполнены неравенства*

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta R(t, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta} < \xi >^{-|\alpha|}\left(\rho(t, \xi) + \frac{\rho_t(t, \xi)}{\rho(t, \xi)}\right),\quad t \in [0, t'_\xi], \tag{2.9}$$

и $\sigma R(t) \in \mathrm{H}\{0, 0, 1\}$.

Доказательство. Ищем $N(t)$, $F(t)$ в следующем виде:

$$\begin{cases} N(t) \sim 1 + N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t) + \cdots, \mod \mathrm{H}^\circ, \\ \sigma N^{(\nu)} \in S\{-\nu, -\nu, \nu\},\ N^{(\nu)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi], \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} F(t) \sim F^{(0)}(t) + F^{(1)}(t) + F^{(2)}(t) + \cdots, \mod \mathrm{H}\{0, 0, 1\}, \\ \sigma F^{(\nu)} \in S\{-\nu, -\nu, \nu + 1\},\ F^{(\nu)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi]. \end{cases} \tag{2.11}$$

Пусть $F^{(0)}(t, x, \xi) = \gamma(t, \xi)\, \mathrm{diag}\,[B(t, x, \xi)]$. Здесь $\gamma(t, \xi) = 1 - \chi(\Lambda(t) < \xi > / N \ln < \xi >)$, $\mathrm{diag}\,[B]$ — диагональная часть матрицы B. Положим $N^{(1)}(t, x, \xi) = \gamma(t, \xi)(n_{j,k}^{(1)}(t, x, \xi))$, где

$$n_{j,k}^{(1)}(t, x, \xi) = \begin{cases} b_{j,k}(t, x, \xi)/(\varphi_j(t, x, \xi) - \varphi_k(t, x, \xi)), & j \neq k, \\ 0, & j = k, \end{cases}$$

а $b_{j,k}(t, x, \xi)$ — элементы матрицы $B(t, x, \xi)$. Ясно, что

$$\sigma N^{(1)} \in S\{-1, -1, 1\}, \ N^{(1)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi],$$

$$\sigma F^{(0)} \in S\{0, 0, 1\}, \ F^{(0)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi].$$

Подсчитаем символ оператора

$$\tilde{B}^{(1)} = (D_t - D + B)(I + N^{(1)}) - (I + N^{(1)})(D_t - D + F^{(0)}) =$$
$$= B - [D, N^{(1)}] - F^{(0)} - iN_t^{(1)} + BN^{(1)} - N^{(1)}F^{(0)}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sigma(B\gamma - [D, N^{(1)}] - F^{(0)}) \in S\{-1, 0, 1\} \subset S\{-1, -1, 2\},$$

$$\sigma(-iN_t^{(1)} + BN^{(1)} - N^{(1)}F^{(0)}) \in S\{-1, -1, 2\}.$$

Поэтому, если обозначить $B^{(1)} = \tilde{B}^{(1)} - B(1-\gamma)$, то

$$\sigma B^{(1)} \in S\{-1, -1, 2\}, \text{ и } b_{j,k}^{(1)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi].$$

Далее, пусть $F^{(1)} = \operatorname{diag}[B^{(1)}]$, $\sigma N^{(2)} = (n_{j,k}^{(2)})$, где

$$n_{j,k}^{(2)} \begin{cases} b_{j,k}^{(1)}(t, x, \xi)/(\varphi_j(t, x, \xi) - \varphi_k(t, x, \xi)), & j \neq k, \\ 0, \quad j = k, \end{cases}$$

тогда для оператора $\tilde{B}^{(2)}$ определяемого формулой

$$\tilde{B}^{(2)} = (D_t - D + B)(I + N^{(1)} + N^{(2)}) - (I + N^{(1)} + N^{(2)})(D_t - D + F^{(0)} +$$
$$+ F^{(1)}) = B(1-\gamma) + (B^{(1)} - [D, N^{(2)}] - F^{(1)}) - iN_t^{(2)} + BN^{(2)} - N^{(1)}F^{(1)} -$$
$$- N^{(2)}(F^{(0)} + F^{(1)}),$$

получаем

$$\sigma(B^{(1)} - [D, N^{(2)}] - F^{(1)}) \in S\{-2, -1, 2\} \subset S\{-2, -2, 3\},$$

$$\sigma(-iN_t^{(2)} + BN^{(2)} - N^{(1)}F^{(1)} - N^{(2)}(F^{(0)} + F^{(1)})) \in S\{-2, -2, 3\}.$$

Следовательно, если $B^{(2)} = \tilde{B}^{(2)} - B(1-\gamma)$, то $\sigma B^{(2)} \in S\{-2, -2, 3\}$, и $b_{j,k}^{(2)}(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$. Итак, пусть

$$F^{(\nu)} = \operatorname{diag}[B^{(\nu)}], \ \sigma N^{(\nu+1)} = (n_{j,k}^{(\nu+1)}),$$

где

$$n_{j,k}^{(\nu+1)} \begin{cases} b_{j,k}^{(\nu)}/(\varphi_j - \varphi_k), & j \neq k, \\ 0 \quad , & j = k, \end{cases}$$

$$\tilde{B}^{(\nu+1)} = (D_t - D + B)\left(I + \sum_{\mu=1}^{\nu+1} N^{(\mu)}\right) - \left(I + \sum_{\mu=1}^{\nu+1} N^{(\mu)}\right)\left(D_t - D + \sum_{\mu=0}^{\nu} F^{(\mu)}\right) \cdot$$

($\nu = 0, 1, 2, \cdots$). Для оператора $B^{(\nu+1)} = -B(1-\gamma) + \tilde{B}^{(\nu+1)}$ имеем

$$\sigma B^{(\nu+1)} \in S\{-\nu-1, -\nu-1, \nu+2\}, \text{ и } b_{j,k}^{(\nu+1)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi]. \quad (2.12)$$

Учитывая включение $\sigma(B^{(\nu)} - [D, N^{(\nu+1)}] - F^{(\nu)}) \in S\{-\nu-1, -\nu, \nu+1\} \subset \subset S\{-\nu-1, -\nu-1, \nu+2\}$ по индукции получаем (2.12) для всех

$\nu=0, 1, \cdots$. С помощью предложения 1 строим символы $N(t)$, $F(t)$ такие, что для оператора $\tilde{R}=(D_t-D+B)N-N(D_t-D+F)$ имеет место $\tilde{R}\in H\{0, 0, 1\}$, и $\tilde{R}(t, x, \xi)=B(t, x, \xi)$ при $t\in[0, t_\xi]$. Пусть теперь $N^\#(t)$ — параметрикс оператора $N(t)$. Полагаем $R(t)=$ $=N^\#(t)\tilde{R}(t)$. Теорема доказана.

Итак, согласно теореме 1, оператор $D_t-D(t)+B(t)$ диагонализируем в главном, в том смысле, что в L_1, как будет показано в дальнейшем, $R(t)$ можно рассматривать как возмущение, влияющее только на амплитудные функции ИОФ, входящих в ф. р., и не приводящее к дополнительной потере гладкости в зоне $[t_\xi, T]$.

§ 3. Гамильтоновы поля. Построение фазовой функции

Обозначим через $\lambda(t, x, \xi)$ вещественную часть одной из функций $\varphi_i(t, x, \xi)$, $i=1, 2, \cdots, m$. Рассмотрим систему Гамильтона

$$dq/dt=-\nabla_\xi\lambda(t, q, p),\quad dp/dt=\nabla_x\lambda(t, q, p), \tag{3.1}$$

и для нее задачу Коши:

$$q|_{t=s}=y,\quad p|_{t=s}=\xi. \tag{3.2}$$

Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решение задачи существует при всех $t\in[0, T_0]$, $\xi\in R^n$, $y\in R^n$, $\langle\xi\rangle\geqslant M$, если T_0 достаточно мало. Опишем поведение решения $(q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi))$. Введем вспомогательную точку t_ξ^* с помощью (1.1), где N заменено на N_1, $N_0<N_1<N$.

Лемма 3. *Если* $0<s\leqslant t\leqslant t_\xi$, *или* $0\leqslant t<s<t_\xi$, *то*

$$p(t, s, y, \xi)=\xi,\quad q(t, s, y, \xi)=y-\int_s^t\lambda_\xi(\tau, \xi)\,d\tau. \tag{3.3}$$

Далее, существуют $0<T_0\leqslant T$, M, *такие, что для любых* j, k, α, β *существуют постоянные* $C_{j,k,\alpha,\beta}$, $C_{j,\alpha,\beta}$, *так, что при всех* $y\in R^n$, $\xi\in R^n$, $\langle\xi\rangle\geqslant M$, *справедливы оценки:*

(i) *при* $t_\xi^*\leqslant s\leqslant t<T_0$,

$$|D_t^j D_s^k D_\xi^\alpha D_y^\beta(q(t, s, y, \xi)-y)|\leqslant C_{j,k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\Lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^j\left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k, \tag{3.4}$$

$$|D_t^j D_s^k D_\xi^\alpha D_y^\beta(p(t, s, y, \xi)-\xi|\leqslant C_{j,k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{1-|\alpha|}\Lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^j\left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k; \tag{3.5}$$

(ii) *при* $0\leqslant s<t_\xi^*\leqslant t_\xi\leqslant t\leqslant T_0$

$$|D_t^j D_\xi^\alpha D_y^\beta(q(t, s, y, \xi)-y)|\leqslant C_{j,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\Lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^j; \tag{3.6}$$

(iii) *при* $\overset{\bullet}{t}_\xi \leqslant t \leqslant s \leqslant T_0$

$$|D_t^j D_s^k D_\xi^\alpha D_y^\beta (q(t, s, y, \xi) - y)| \leqslant C_{j,k,\alpha,\beta} < \xi >^{-|\alpha|} \Lambda(s) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^j \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k, \tag{3.7}$$

$$|D_t^j D_s^k D_\xi^\alpha D_y^\beta (p(t, s, y, \xi) - \xi)| \leqslant C_{j,k,\alpha,\beta} < \xi >^{1-|\alpha|} \Lambda(s) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^j \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k. \tag{3.8}$$

Если же $t \leqslant s$, $0 \leqslant t \leqslant \overset{\bullet}{t}_\xi$, *то верны формулы*

$$\left| \begin{array}{l} p(t, s, y, \xi) = p(\overset{\bullet}{t}_\xi, s, y, \xi), \\ q(t, s, y, \xi), = q(\overset{\bullet}{t}_\xi, s, y, \xi) + \displaystyle\int_t^{\overset{\bullet}{t}_\xi} \lambda_\xi(\tau, p(\overset{\bullet}{t}_\xi, s, y, \xi))\, d\tau. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что (3.3) очевидно, т. к. при указанных t и s функция $\lambda(t, x, \xi)$ не зависит от x. (i). Обозначим через $|p|$ норму вектора p. Из (3.1) выводим

$$d|p|^2/dt = 2(p \cdot \nabla_x \lambda(t, q, p)).$$

Но, выбрав $<\xi> \geqslant 2M$, можно написать неравенство

$$|\nabla_x \lambda(t, x, \xi)| \leqslant c\lambda(t)|\xi|, \quad x \in R^n, \quad t \in [0, T], \quad \xi \in R^n.$$

Действительно, на множестве, где $\nabla_x \lambda(t, x, \xi) \neq 0$, это следует из леммы 1. Поэтому

$$|d|p|^2/dt| < c\lambda(t)|p(t)|^2, \quad \overset{\bullet}{t}_\xi \leqslant s \leqslant t < T.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$< p(s) > e^{c[\Lambda(s) - \Lambda(t)]} \leqslant < p(t) > \leqslant < p(s) > e^{c[\Lambda(t) - \Lambda(s)]},$$

где $p(s) = \xi$. Очевидно, что

$$\frac{\Lambda(t) < p(t) >}{N_0 \ln < p(t) >} \geqslant \frac{\Lambda(t) < \xi > \exp(c[\Lambda(s) - \Lambda(t)])}{N_0 \ln(< \xi > \exp(c[\Lambda(t) - \Lambda(s)]))} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\Lambda(s) < \xi >}{N_1 \ln < \xi >} \left\{ \frac{N_1}{N_0} \left(1 + \frac{c[\Lambda(t) - \Lambda(s)]}{\ln < \xi >}\right)^{-1} \exp(c[\Lambda(s) - \Lambda(t)]) \right\}.$$

Для фиксированных N_0, N_1, $N_0 < N_1$ выражение в фигурной скобке может быть сделано больше или равным единице за счет выбора T_0. Таким образом, если $s \geqslant \overset{\bullet}{t}_\xi$, то пара $(t, p(t))$ попадает во вторую зону. С другой стороны,

$$p(t) = \xi + \int_s^t \nabla_x \lambda(\tau, q(\tau), p(\tau))\, d\tau,$$

откуда

$$|p(t, s, y, \xi) - \xi| \int_s^t |\nabla_x \lambda(\tau, q(\tau), p(\tau))|\, d\tau \leqslant c \int_s^t \lambda(\tau) < p(\tau) > d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c < \xi > (\Lambda(t) - \Lambda(s)) \leqslant c < \xi > \Lambda(t),$$

$$|q(t, s, y, \xi) - y| \leqslant \int_s^t |\nabla_\xi \lambda(\tau, q(\tau), p(\tau))| \, d\tau \leqslant c \int_s^t \lambda(\tau) \, d\tau \leqslant c\Lambda(t),$$

равномерно по s, $t_\xi \leqslant s \leqslant t \leqslant T_0$. Итак, (3,4), (3.5) с $j = k = |\alpha| = |\beta| = 0$ доказаны. Получим теперь их с $j = k = 0$, $|\alpha| = |\beta| = 1$. Введем $Q_1 = \nabla_y q(t, s, y, \xi)$, $Q_2 = \nabla_\xi q(t, s, y, \xi)$, $P_1 = \nabla_y p(t, t, y, \xi)$, $P_2 = \nabla_\xi p$ (t, s, y, ξ). Тогда

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} Q_1, & Q_2 \\ P_1, & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_\xi \nabla_x \lambda, & -\nabla_\xi \nabla_\xi \lambda \\ \nabla_x \nabla_x \lambda, & \nabla_\xi \nabla_x \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1, & Q_2 \\ P_1, & P_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} Q_1, & Q_2 \\ P_1, & P_2 \end{pmatrix}_{t=s} = \begin{pmatrix} I, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix}. \end{array}\right.$$

Введем энергию

$$E(t) = \|Q_1 - I\|^2 + \|<\xi> Q_2\|^2 + \|P_2 - I\|^2 + \left\|\frac{1}{<\xi>} P_1\right\|^2.$$

Для нее нетрудно получить неравенство

$$\left|\frac{dE(t)}{dt}\right| \leqslant c\lambda(t) E(t) + c\lambda(t) \sqrt{E(t)}, \quad t_\xi < s \leqslant t \leqslant T_0,$$

из которого, учитывая $E(s) = 0$, выводим

$$E(t) \leqslant c\Lambda^2(t), \quad t_\xi \leqslant s \leqslant t \leqslant T_0,$$

что приводит к рассматриваемому частному случаю (3.4), (3.5). Индукцией по $|\alpha + \beta|$ доказываем (3.4), (3.5) для всех α, β, когда $j = k = 0$. Если $j = 1$, $k = 0$, то указанные оценки для всех α, β следуют из (3.1) и уже доказанных с $j = k = 0$. Для $k = 0$ и произвольных j, α, β, они получаются индукцией по j дифференцированием (3.1) по t нужное число раз.

Для получения производных по параметру s рассматриваем вспомогательную систему

$$\frac{dQ}{dt} = -\nabla_\xi \lambda(t+s, Q, P), \quad \frac{dP}{dt} = \nabla_x \lambda(t+s, Q, P), \tag{3.10}$$

с начальными условиями $Q(0) = y$, $P(0) = \xi$. Тогда $q(t, s, y, \xi) = Q(t-s, s, y, \xi)$, $p(t, s, y, \xi) = P(t-s, s, y, \xi)$. Дифференцируя (3.10) по s и подставляя в получившуюся систему вместо аргумента t значение $t - s$ для энергии $E_1(t-s) = |(D_s Q)(t-s)|^2 + |(D_s(<\xi>P))(t-s)|^2$, легко получаем

$$\left|\frac{dE_1(t-s)}{dt}\right| \leqslant cE_1(t-s) + c\lambda_t(t)\sqrt{E_1(t-s)},$$

что приводит к неравенству

$$\sqrt{E_1(t-s)} \leqslant c\lambda(t) \leqslant c\Lambda(t)\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \leqslant c\Lambda(t)\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}$$

равномерно по $t_\xi^{*} \leqslant s \leqslant t < T_0$. Аналогично оцениваются оставшиеся производные. Итак (i) доказано. Доказательство (iii) почти ничем не отличается от изложенного выше, и мы его не приводим.

Для доказательства (*ii*) заметим, что при $s \leqslant t_\xi^{*} \leqslant t_\xi \leqslant t \leqslant T_0$

$$|q(t, s, y, \xi) - y| = \left|\int_s^t \nabla_\xi \lambda(\tau, q(\tau, s, y, \xi), p(\tau, s, y, \xi))\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_s^{t_\xi} |\nabla_\xi \lambda(\tau, \xi)|\, d\tau + \int_{t_\xi}^t |\nabla_\xi \lambda(\tau, q(\tau, s, y, \xi), p(\tau, s, y, \xi))|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c|\xi|^{\frac{1-m}{m}} \int_0^{t_\xi} \lambda(\tau)\Lambda^{\frac{1-m}{m}}(\tau)|\ln\lambda(\tau)|^{\frac{m-1}{m}}\, d\tau + c\int_{t_\xi}^t \lambda(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\Lambda(t_\xi)\left(\frac{|\ln\lambda(t_\xi)|}{|\xi|\Lambda(t_\xi)}\right)^{\frac{m-1}{m}} + c\Lambda(t) < c\Lambda(t_\xi) + c\Lambda(t) \leqslant c\Lambda(t).$$

С помощью (3.3)—(3.5) получаем оставшиеся неравенства в (3.6).

Для доказательства (3.9) замечаем, что при достаточно малом T_0 (3.8) ($j = k = |\alpha| = |\beta| = 0$) означает, что $t \leqslant t_{p(t)}$, если $t \leqslant t_\xi^{*}$, и, следовательно, $\nabla_x \lambda(t, q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi)) = 0$. Лемма доказана.

Естественно ввести следующее

Определение 2. Пусть m_1, m_2, m_3, m_4, m_5— действительные числа. Через $S_{s<t}\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ (соответственно $S_{t<s}\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$) обозначим множество всех функций $a(t, s, x, \xi) \in C^\infty(J \times J \times R_x^n \times R_\xi^n)$ таких, что с некоторыми m, ρ, δ $a \in C(J \times J; S^m_{\rho,\delta})$, и для любых j, k, α, β с некоторыми постоянными $C_{j,k,\alpha,\beta}$ справедливы неравенства

$$|D_t^j D_s^k D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{j,k,\alpha,\beta} < \xi >^{m_1 - |\alpha|} \lambda^{m_2}(t) \times$$

$$\times \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + j} \lambda^{m_4}(s) \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^{m_5 + k} \tag{3.11}$$

при всех $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $< \xi > \geqslant M$, $s \in J$, $t \in J$, $t_\xi^{*} \leqslant s \leqslant t \leqslant T_0$ (соответственно, $t_\xi^{*} \leqslant t \leqslant s \leqslant T_0$).

Таким образом

$$p(t, s, y, \xi) - \xi \in S_{s<t}\{1; 1, -1; 0, 0\},\ p(t, s, y, \xi) - \xi \in S_{t<s}\{1; 0, 0; 1, -1\}, \tag{3.12}$$

$$q(t, s, y, \xi) - y \in S_{s<t}\{0; 1, -1; 0, 0\},\ q(t, s, y, \xi) - y \in S_{t<s}\{0; 0, 0; 1, -1\}. \tag{3.13}$$

Для построения фазовой функции нам потребуется

Лемма 4. *Пусть* $T_1 (0 < T_1 \leqslant T_0)$ *и* $\varepsilon (0 < \varepsilon \leqslant 1)$ *такие постоянные, что*

$$|\partial q/\partial y - I| \leqslant 1 - \varepsilon, \text{ при } s, t \in [0, T_1],\ y \in R^n,\ \xi \in R^n, < \xi > \geqslant M. \tag{3.14}$$

Тогда для отображения $x=q(t,s,y,\xi):R^n_y\ni y\to x\in R^n_x$ *с параметрами* (t, s, ξ) *существует обратное отображение* $y=y(t,s,x,\xi)$, *причем*

$$y(t,s,x,\xi)-x\in S_{s<t}\{0;1,-1;0,0\},\ y(t,s,x,\xi)-$$
$$-x\in S_{t<s}\{0;0,0;1,-1\},\qquad (3.15)$$

$$|\partial y/\partial x-I|\leqslant(1-\varepsilon)/\varepsilon,\ t,s\in[0,T_1],\ x\in R^n,\ \xi\in R^n, <\xi> \, > M.\qquad (3.16)$$

Далее, для любых k, α, β *с некоторыми постаянными* $C_{k,\alpha,\beta}$ *выполнены неравенства*

$$|D^k_s D^\alpha_\xi D^\beta_x(y(t,s,x,\xi)-x)|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}<\xi>^{-|\alpha|}\Lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k\qquad (3.17)$$

при всех $0\leqslant s\leqslant t^{\bullet}_\xi\leqslant t\leqslant T_1$, $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $<\xi> \, > M$, *и неравенства*

$$|D^k_s D^\alpha_\xi D^\beta_x(y(t,s,x,\xi)-x)|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}<\xi>^{-|\alpha|}\Lambda(s)\left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k\qquad (3.18)$$

при всех $0<t\leqslant t^{\bullet}_\xi\leqslant s\leqslant T_1$, $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $<\xi> \, \geqslant M$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $t\leqslant s$. При $s\leqslant t_\xi$ достаточно воспользоваться (3.3), поэтому будем считать $t_\xi\leqslant t\leqslant s$. Существование отображения $y=y(t,s,x,\xi)$ есть следствие (3.13) и теоремы о неявной функции. Имеем, далее, $x-q(t,s,y(t,s,x,\xi),\xi)=0$, откуда

$$|y(t,s,x,\xi)-x|=|x-q(t,s,y(t,s,x,\xi),\xi)+q(t,s,y(t,s,x,\xi),\xi)-$$
$$-y(t,s,x,\xi)|\leqslant c\Lambda(s).$$

Ясно, что

$$\frac{D(y(t,s,x,\xi)-x)}{Dx}=\left[\frac{D(q(t,s,y,\xi)-y)}{Dy}+I\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[\frac{D(y-q(t,s,y,\xi))}{Dy}\right],\qquad (3.19)$$

и, так как при выборе T_1 достаточно малым, согласно лемме 3 верно (3.14), то из (3.19) выводим (3.16), а из (3.7) получаем $|D_x(y(t,s,x,\xi)-x)|\leqslant c\Lambda(s)$. Остальные производные оцениваются точно так же. Если $0\leqslant t\leqslant t^{\bullet}_\xi\leqslant t_\xi\leqslant s\leqslant T_1$, то

$$\left|\frac{\partial q}{\partial y}-I\right|\leqslant\left|\frac{\partial q(t^{\bullet}_\xi,s,y,\xi)}{\partial y}-I\right|+\left|\int_t^{t^{\bullet}_\xi}\lambda_{\xi\xi}(\tau,p(t^{\bullet}_\xi,s,y,\xi))d\tau\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial p(t^{\bullet}_\xi,s,y,\xi)}{\partial y}\right|\leqslant c\Lambda(s)+c\Lambda(s)<\xi>\int_0^{t^{\bullet}_\xi}|\lambda_{\xi\xi}(\tau,p(t^{\bullet}_\xi,s,y,\xi))|\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant c\Lambda(s)\left\{1+<\xi>^{\frac{1-m}{m}}\cdot\int_0^{t^{\bullet}_\xi}\lambda(\tau)\Lambda^{\frac{1-m}{m}}(\tau)|\ln\lambda(\tau)|^{\frac{m-1}{m}}d\tau\leqslant\right.$$
$$\leqslant c\Lambda(s)\{1+N_1^{1/m}(|\ln\lambda(t^{\bullet}_\xi)|)/<\xi>\}\leqslant c\Lambda(s),$$

поэтому обратная функция $y = y(t, s, x, \xi)$ существует, и

$$|y(t, s, x, \xi) - x| \leqslant |(t_\xi^\bullet, s, y, \xi) - y| + \left|\int_t^{t_\xi} \lambda_\xi(\tau, p(t_\xi^\bullet, s, y, \xi))\,d\tau\right| \leqslant c\Lambda(s).$$

Аналогично оцениваются оставшиеся производные в (3.18). Случай $s \leqslant t$ ничем не отличается от рассмотренного. Лемма доказана.

Перейдем теперь к построению фазовой функции. Рассмотрим для уравнения эйконала

$$iD_t\Phi - \lambda(t, x, \nabla_x\Phi) = 0 \tag{3.20}$$

задачу Коши

$$\Phi|_{t=s} = x\cdot\xi. \tag{3.21}$$

Лемма 5. *Если* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_\xi$ *или* $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant t_\xi$, *то*

$$\Phi(t, s, x, \xi) = x\cdot\xi + \int_s^t \lambda(\tau, \xi)\,d\tau. \tag{3.22}$$

Далее

$$\Phi(t, s, x, \xi) - x\cdot\xi \in S_{s<t}\{1;\, 1, -1;\, 0, 0\},$$
$$\Phi(t, s, x, \xi) - x\cdot\xi \in S_{t<s}\{1;\, 0, 0;\, 1, -1\}. \tag{3.23}$$

Для любых k, α, β с некоторыми постоянными $C_{k,\alpha,\beta}$ справедливы оценки

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta(\Phi(t, s, x, \xi) - x\cdot\xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} < \xi >^{1-|\alpha|}\Lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k, \tag{3.24}$$

при всех $0 \leqslant s \leqslant t_\xi^\bullet \leqslant t_\xi \leqslant t \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$, *и неравенства*

$$|D_s^k D_\xi^\alpha D_x^\beta(\Phi(t, s, x, \xi) - x\cdot\xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} < \xi >^{1-|\alpha|}\Lambda(s)\left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k, \tag{3.25}$$

при всех $0 \leqslant t \leqslant t_\xi^\bullet \leqslant t_\xi \leqslant s \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$.

Доказательство. Формула (3.22) очевидна. Рассмотрим случай $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1$. Пусть $y = y(t, s, x, \xi)$ — отображение из леммы 4. Определим функцию $u = u(t, s, y, \eta)$ по формуле

$$u(t, s, y, \eta) = y\cdot\eta + \int_s^t \{\lambda - p\cdot\nabla_\xi\lambda\}(\tau, q(\tau, s, y, \eta), p(\tau, s, y, \eta))\,d\tau.$$

Тогда решение задачи (3.20), (3.21) задается формулой (см. доказательство теоремы 3.1 [5])

$$\Phi(t, s, x, \xi) = u(t, s, y(t, s, x, \xi), \xi). \tag{3.26}$$

Утверждение (3.24) и первое из (3.23) являются следствиями этой формулы и лемм 1, 3, 4. Случай $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T_1$ аналогичен. Лемма доказана.

§ 4. Ф. р. задачи Коши для элементарного оператора

Согласно лемме 5, функция $\Phi(t, s, x, \xi)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым в работе Кумано-го [5] к неоднородным фазовым функциям.

Определим теперь ИОФ $A_\Phi = a_\Phi(x, D_x)$ с фазовой функцией $\Phi(x, \xi)$ и символом $a(x, \xi) \in S^m$ по формуле

$$A_\Phi u(x) = Os - \iint e^{i(\Phi(x,\xi) - x'\xi)} a(x, \xi)\, u(x')\, (2\pi)^{-n}\, d\xi dx'$$

$(u \in B(R^n))$. Основные свойства таких операторов можно найти в § 2 [5].

Определим в области $[0, T_1] \times R^n_x$ элементарный гиперболический оператор первого порядка

$$L = D_t - \lambda(t, x, D_x) + f(t, x, D_x), \tag{4.1}$$

где $\lambda(t, x, \xi)$ — та же функция, что и в § 3, $f(t, x, \xi) \in S\{0, 0, 1\}$, и $f(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} Lu = \varphi(t) \text{ на } [s, T_1] \times R^n_x, \\ u|_{t=s} = \psi \quad (0 \leqslant s < T_1), \end{cases} \tag{4.2}$$

для малых T_1. Построим, предварительно, параметрикс задачи (4.2) с $\varphi(t) = 0$, т. е. оператор $\tilde{E}_\Phi(t, s)$ такой, что

$$\begin{cases} L\tilde{E}_\Phi(t, s) = 0 \mod C_{t,s}(S^{-\infty})\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1, \\ \tilde{E}_\Phi(s, s) = I \text{ (тождественный оператор).} \end{cases} \tag{4.3}$$

Ищем $\tilde{E}_\Phi(t, s)$ в виде ИОФ:

$$\tilde{E}_\Phi \psi(x) = Os - \iint e^{i(\Phi(t,s,x,\xi) - y\cdot\xi)}\, \tilde{e}(t, s, x, \xi)\, \psi(y)\, (2\pi)^{-n}\, d\xi dy, \tag{4.4}$$

с символом, разлагающимся в асимптотический ряд

$$\tilde{e}(t, s, x, \xi) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu(t, s, x, \xi), \mod C_{t,s}(S^{-\infty}). \tag{4.5}$$

Определим как в [8]

$$g(t, s, x, \xi) = -i \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi)) \cdot \partial_x^\alpha \Phi(t, s, x, \xi) + \\ + f(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi)), \tag{4.6}$$

$$Z = D_t - \sum_{|\alpha|=1} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi))\, D_x^\alpha + g(t, s, x, \xi). \tag{4.7}$$

Если $e_{\nu,\Phi}(t, s)$ — ИОФ с символом $e_\nu(t, s, x, \xi)$, то

$$\sigma(Le_{\nu,\Phi}(t, s))(x, \xi) = Ze_\nu + r_\nu(t, s, x, \xi), \tag{4.8}$$

где

$$r_\nu(t, s, x, \xi) \sim -\sum_{|\alpha|\geq 2} \frac{1}{\alpha!} \{D_y^\alpha(\lambda^{(\alpha)}(t, x, \tilde{\nabla}_x\Phi(t, s, x, y, \xi)) e_\nu(t, s, y, \xi))\}_{y=x},$$

$$\mod C_{t,s}(S^{-\infty}) \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \tag{4.9}$$

$$\tilde{\nabla}_x\Phi(t, s, x, y, \xi) = \int_0^1 \nabla_x\Phi(t, s, y + \theta(x-y), \xi)\, d\theta. \tag{4.10}$$

Итак, пусть

$$\begin{cases} Ze_0 = 0, \ Ze_\nu + r_{\nu-1} = 0, \ 0 \leq s \leq t \leq T_1, \\ e_0(s, s) = 1, \ e_\nu(s, s) = 0 \quad (\nu = 1, 2 \cdots). \end{cases} \tag{4.11}$$

Согласно (3.24), (3.25) [8] для $e_0(t, s, x, \xi)$, $e_\nu(t, s, x, \xi)$ имеем

$$e_0(t, s, x, \xi) = \exp[-i \int_s^t g(\sigma, s, q(\sigma, s, y(t, s, x, \xi), \xi), \xi) d\sigma], \tag{4.12}$$

$$e_\nu(t, s, x, \xi) = -i \int_0^t r_{\nu-1}(\sigma, s, q(\sigma, s, y(t, s, x, \xi), \xi), \xi) \times$$

$$\times [-i \int_\sigma^t g(\sigma', s, q(\sigma', s, y(t, s, x, \xi), \xi), \xi)\, d\sigma']\, d\sigma \ (\nu = 1, 2, \cdots), \tag{4.13}$$

с помощью которых нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 6. *Если* $0 \leq s \leq t \leq t_\xi$, *то для всех* $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geq M$,

$$e_0(t, s, x, \xi) = 1, \ e_\nu(t, s, x, \xi) = 0 \ (\nu = 1, 2, \cdots). \tag{4.14}$$

Далее, выберем положительную постоянную K так, что

$$K > \lim_{N\to\infty,\, M\to\infty} \ \sup_{\substack{x\in R^n,\ t\in[t_\xi,\ T_1] \\ \xi\in R^n,\ <\xi> \geq M}} \left\{\frac{\Lambda(t)}{\lambda(t)} \operatorname{Im} f(t, x, \xi)\right\}, \tag{4.15}$$

если же $\operatorname{Im} f(t, x, \xi) = 0$ *(при всех* $t \in [0, T_1]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$*), то* $K=0$. *Тогда существуют* N_0, M *такие, что для любых* l, j, α, β *существуют постоянные* $C_{l,j,\alpha,\beta}$, $C_{l,\alpha,\beta}$ *такие, что для* $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ *выполнены неравенства*

$$|D_t^l D_s^j D_\xi^\alpha D_x^\beta e_\nu(t, s, x, \xi)| \leq C_{l,j,\alpha,\beta} <\xi>^{-|\alpha|-\nu} \Lambda^{K+\nu}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^l \times$$

$$\times \Lambda^{-K}(s) \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^j \left|\ln \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(s)}\right|^{l+j+|\alpha|+|\beta|}, \tag{4.16}$$

при всех $t_\xi \leq s \leq t \leq T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geq M$, *и неравенства*

$$|D_t^l D_\xi^\alpha D_x^\beta e_\nu(t, s, x, \xi)| \leq C_{l,\alpha,\beta} <\xi>^{K-|\alpha|-\nu} \Lambda^{K+\nu}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^l \times$$

$$\times (\ln <\xi>)^{l+|\alpha|+|\beta|}, \tag{4.17}$$

при всех $0 \leq s \leq t_\xi \leq t_\xi \leq t \leq T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geq M$.

Следствие. Так как $e_\nu \in \bigcap\limits_{0<\varepsilon<1} S\{K+\varepsilon-\nu,\ K,\ -K\}$, $\nu=1,2,\cdots$, равномерно по $s\in J$, $s\leqslant t$ то, согласно предложению 1, $\bar{e}(t, s, x, \xi)$. из (4.5) существует, удовлетворяет неравенствам (4.16), (4.17) с $\nu=0$, и является символом искомого параметрикса (4.4).

Таким образом, с символом $r_\infty(t, s, x, \xi)\in C_{t,s}(S^{-\infty})$, $s\leqslant t$, имеем

$$\widetilde{L e_\Phi}(t, s, x, D_x)=r_\infty(t, s, x, D_x),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_1. \tag{4.18}$$

Замечание. Параметрикс $\bar{E}_\Phi$ можно представить в виде $\widetilde{E}_\Phi(t, s)=A(t, s)+B_\Phi(t, s)$, где $A(t, s)$ — ПДО с символом $\chi(\langle\xi\rangle/ /\langle\xi_t\rangle)(\exp\{i\int\limits_s^t\lambda(\tau, \xi)\,d\tau\}$, $B_\Phi(t, s)$ — ИОФ с символом $(1-\chi(\langle\xi\rangle/ \langle\xi_t\rangle))\,\bar{e}(t, s, x, \xi)$, а функция χ определена в § 1.

С помощью $\bar{E}_\Phi(t, s)$, $R_\infty(t, s)=r_\infty(t, s, x, D_x)$ ф. р. строится обычным образом использованием теории ПДО с кратными символами (см., например, [5]), Полагая $W_1(t, s)=-iR_\infty(t, s)$, $W_{\nu+1}(t, s)= =\int\limits_s^t W_1(t, \theta)\,W_\nu(\theta, s)\,d\theta\ (\nu=1, 2,\cdots)$, мы получаем ф. р. в форме

$$E_\Phi(t, s)=\widetilde{E}_\Phi(t, s)+\int\limits_s^t\widetilde{E}_\Phi(t, \theta)\sum_{\nu=1}^{\infty}W_\nu(\theta, s)\,d\theta, \tag{4.19}$$

с символом $e(t, s, x, \xi)=\widetilde{e}(t, s, x, \xi)+\bar{e}_\infty(t, s, x, \xi)$, где $\bar{e}_\infty(t, s, x, \xi)\in \in C_{t,s}(S^{-\infty})$, $s\in J$, $s\leqslant t$.

Теорема 2. *Выберем постоянную k как в лемме 6. Тогда на $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_1$ существует единственный символ $e(t, s, x, \xi)$, удовлетворяющий неравенствам (4.16), (4.17) с $\nu=0$ при соответствующих значениях t, s, x, ξ, и, следовательно, принадлежащий равномерно по $s\in J$, $s\leqslant t$, классу $\bigcap\limits_{0<\varepsilon<1} S\{K+\varepsilon, K, -K\}$, так что ИОФ $E_\Phi(t, s)=e_\Phi(t, s, x, D_x)$ с фазовой функцией из леммы 5 является фундаментальным решением задачи Коши для L (4.1) в области $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, т. е.*

$$\begin{cases} LE_\Phi(t, s)=0,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_1,\\ E_\Phi(s, s)=I\ (\textit{тождественный оператор}). \end{cases} \tag{4.20}$$

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось только проверить единственность ф. р. Это будет проделано ниже.

Рассмотрим теперь задачу Коши L (4.1) в области $0\leqslant t\leqslant s\leqslant T$. Построим предварительно параметрикс $\bar{E}_\Phi(t, s)$, т. е. ИОФ такой, что

$$\begin{cases} L\bar{E}_\Phi(t, s)=0 \mod C_{t,s}(S^{-\infty}),\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T_1,\\ \bar{E}_\Phi(s, s)=I\ (\text{тождественный оператор}), \end{cases} \tag{4.21}$$

где $\Phi(t, s, x, \xi)$ — фазовая функция из леммы 5, а символ $\tilde{e}(t, s, x, \xi)$ разлагается в ряд (4.5). Справедлива

Лемма 7. *Если* $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant t_\xi$, *то для всех* $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle\xi\rangle \geqslant M$

$$e_0(t, s, x, \xi) = 1, \quad e_\nu(t, s, x, \xi) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots). \tag{4.22}$$

Далее, выберем положительную постоянную K' *так, что*

$$K' > \lim_{N\to\infty,\, M\to\infty} \; {}^n\sup_{\substack{x\in R,\; t\in[t_\xi,\, T_1]\\ \xi\in R^n,\; \langle\xi\rangle > M}} \left\{-\frac{\Lambda(t)}{\lambda(t)}\operatorname{Im} f(t, x, \xi)\right\}, \tag{4.23}$$

если же $\operatorname{Im} f(t, x, \xi) = 0$ (*при всех* $t \in [0, T_1]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$), *то* $K' = 0$. *Тогда существуют* N_0, M *такие, что для любых* l, j, α, β *существуют постоянные* $C_{l,j,\alpha,\beta}$, $C_{j,\alpha,\beta}$ *такие, что для* $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ *выполнены неравенства*

$$|D_t^l D_s^j D_\xi^\alpha D_x^\beta e_\nu(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{l,j,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{-|\alpha|-\nu} \Lambda^{K'+\nu}(s) \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^j \times$$

$$\times \Lambda^{-K'}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^l \cdot \left|\ln\frac{\Lambda(s)}{\Lambda(t)}\right|^{l+j+|\alpha|+|\beta|}, \tag{4.24}$$

при всех $t_\xi^\bullet \leqslant t \leqslant s \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle\xi\rangle \geqslant M$, *и неравенства*

$$|D_s^j D_\xi^\alpha D_x^\beta e_\nu(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{j,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{K'-|\alpha|-\nu} \Lambda^{K'+\nu}(s) \times$$

$$\times \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^j (\ln\langle\xi\rangle)^{j+|\alpha|+|\beta|}, \tag{4.25}$$

при всех $0 \leqslant t \leqslant t_\xi^\bullet \leqslant t_\xi \leqslant s \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle\xi\rangle \geqslant M$.

Следствие. Так как $e_\nu \in \bigcap_{0<\varepsilon<1} S_s\{K'+\varepsilon-\nu, K', -K'\}$, $\nu = 1, 2, \cdots$, равномерно по $t \in J$, $t \leqslant s$, то, согласно предложению 1, $\tilde{e}(t, s, x, \xi)$ из (4.5) существует, удовлетворяет неравенствам (4.24), (4.25) с $\nu = 0$, и является символом искомого параметрикса (4.21).

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству леммы 6, и мы его не приводим. Теперь уже нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Выберем постоянную* K' *как в лемме 7. Тогда на* $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T_1$ *существует единственный символ* $e(t, s, x, \xi)$, *удовлетворяющий неравенствам* (4.24), (4.25) *с* $\nu = 0$ *при соответствующих значениях* t, s, x, ξ, *и, следовательно, принадлежащий равномерно по* $t \in J$, $t \leqslant s$, *классу* $\bigcap_{0<\varepsilon<1} S_s\{K'+\varepsilon, K', -K'\}$, *так что* ИОФ $E_\Phi(t, s) = e_\Phi(t, s, x, D_x)$ *с фазовой функцией из леммы 5 является фундаментальным решением задачи Коши для* L (4.1) *в области* $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T_1$, *т. е.*

$$\begin{cases} LE_\Phi(t, s) = 0, \; 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T_1, \\ E_\Phi(s, s) = I \; (\textit{тождественный оператор}). \end{cases} \tag{4.26}$$

Единственность в теореме 2 (соответственно, в теореме 3) доказывается рассмотрением сопряженной задачи Коши для формально сопряженного оператора и использованием построенного в теореме 3 (соответственно в теореме 2) ф. р..

Замечания. (i) Для всех $0 \leqslant s, \tau, t \leqslant T_1$ имеет место $E_\Phi(t, s) = E_\Phi(t, \tau) E_\Phi(\tau, s)$. (ii) Очевидно, что „потеря гладкости" в теоремах 2, 3 равна $K+\varepsilon$, $K'+\varepsilon$, соответственно, где ε — любое положительное число. (iii) При $\operatorname{Im} f(t, x, \xi) = 0$ задачу Коши для L (4.1) можно исследовать и обычным энергетическим методом, и, в частности, получить оценки производных $D_x^\alpha u$ решения $u(t, x)$.

Следствие 1. Задача Коши (с L из (4.1))

$$\begin{cases} Lu = \varphi(t) \text{ на } [0, T_1] \\ u|_{t=s} = \psi \quad (0 \leqslant s \leqslant T_1), \end{cases} \tag{4.27}$$

с $\varphi(t) \in C_t(J; S(R^n))$, $\psi \in S(R^n)$ имеет единственное решение $u(t, s, x)$, и оно представимо в виде

$$u(t, s, x) = E_\Phi(t, s)\psi(x) + i\int_s^t E_\Phi(t, \sigma)\varphi(\sigma, x)\,d\sigma. \tag{4.28}$$

Следствие 2. Пусть $m \times m$ $(m \geqslant 2)$ матричный диагональный оператор L_2 имеет вид

$$L_2 = D_t - D(t) + F(t), \tag{4.29}$$

где $D_{ij}(t) = \delta_{ij}\lambda_i(t, x, D_x)$, $F_{ij}(t) = \delta_{ij} f_i(t, x, D_x)$, а λ_i, f_i, $i = 1, \cdots, m$, как в теоремах 2, 3, и пусть $E_{j,\Phi_j}(t, s)$ — ф. р. задачи Коши для $L_j^\sim = D_t - \lambda_j(t, x, D_x) + f_j(t, x, D_x)$. Тогда ф. р. задачи Коши

$$\begin{cases} L_2 U = \Phi(t) \text{ на } [0, T_1] \\ U|_{t=s} = \Psi \quad (0 \leqslant s \leqslant T_1), \end{cases} \tag{4.30}$$

существует, единственно и имеет вид

$$E_2(t, s) = \begin{bmatrix} E_{1,\Phi_1}(t, s) & & 0 \\ & \ddots & \\ & & E_{m,\Phi_m}(t, s) \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

Приведем, наконец, один, почти очевидный, факт.

Предложение 3. *Пусть $a(t, x, \xi)$ — символ, удовлетворяющий оценкам*

$$|D_t^j D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t, x, \xi)| \leqslant C_{j,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{m_1-|\alpha|}\lambda^{m_2}(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3+j}(\ln\langle\xi\rangle)^{|\alpha+\beta|+j} \tag{4.32}$$

при всех $t \in [t_\xi, T_1]$, а $r(t, x, \xi) \in \mathrm{H}\{m_1', m_2', m_3'\}$, причем $a(t, x, \xi) = r(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$. И пусть $A_\Phi = a_\Phi(t, x, D_x)$ — ИОФ с фазовой функцией из леммы 5, а $R = r(t, x, D_x)$. Тогда как $R_1 = A_\Phi R$, так и $R_2 = RA_\Phi$ являются ПДО с символами

$$r_j(t, x, \xi) \in \mathrm{H}\{m_1+m_1', m_2+m_2', m_3+m_3'\}, \quad j = 1, 2, \tag{4.33}$$

и $r_j(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Обозначим $\tilde{a}(t, x, \xi) = e^{i(\Phi(t, x, \xi) - x\cdot\xi)}\, a(t, x, \xi)$. Тогда при $t > t_\xi$

$$|D_t^j D_\xi^\alpha D_x^\beta \tilde{a}(t, x, \xi)| \leqslant C_{j,\alpha,\beta} <\xi>^{m_1-|\alpha|} \lambda^{m_2}(t)(\Lambda(t) <\xi>)^{|\alpha+\beta|+j} \times$$
$$\times \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3+j} (\ln <\xi>)^{|\alpha+\beta|+j}.$$

Покажем, что для любых ν, γ, β, j,

$$|D_\xi^\gamma D_x^\beta D_t^j \tilde{a}^{(\alpha)}(t, x, \xi)) r_{(\alpha)}(t, x, \xi)| \leqslant C_{\gamma,\beta,j,\nu} <\xi>^{m_1+m_1'-\nu-|\alpha+\gamma|} \times$$
$$\times \lambda^{m_2+m_2'-\nu}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3+m_3'+\nu+j}. \tag{4.34}$$

Действительно, так как $r \in \mathrm{H}\{m_1', m_2', m_3'\}$, то для любого τ имеем

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^j (\Lambda(t) <\xi> \ln <\xi>)^\tau r(t, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,j} <\xi>^{m_1'-\nu-|\alpha|} \lambda^{m_2'-\nu}(t) \times$$
$$\times \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3'+\nu+j} (<\xi> \Lambda(t))^{-2\tau} (<\xi> \Lambda(t) \ln <\xi>)^\tau,$$

и поскольку $(<\xi> \Lambda(t))^{-\tau} \leqslant c(\ln <\xi>)^{-\tau}$. при $\tau > 0$, $t \geqslant t_\xi$, то получаем (4.34). Итак, для любого τ $(<\xi>\Lambda(t) \ln <\xi>)^\tau r_{(\alpha)} \in \mathrm{H}\{m_1', m_2', m_3'\}$, откуда $\tilde{a}^{(\alpha)} r_{(\alpha)} \in \mathrm{H}\{m_1 + m_1' - |\alpha|, m_2 + m_2', m_3 + m_3'\}$. Далее,

$$r_1(t, x, \xi) = \sum_{|\alpha|<l} \frac{1}{\alpha!} \tilde{a}^{(\alpha)}(t, x, \xi) r_{(\alpha)}(t, x, \xi) +$$
$$+ l \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^{l-1} h_{\alpha,\theta}(t, x, \xi)\, d\theta,$$

где для любого целого $\nu \geqslant 0$

$$h_{\alpha,\theta}(t, x, \xi) = Os - \iint e^{iy\cdot\eta} <\eta>^{-\nu} \tilde{a}^{(\alpha)}(t, x, \xi + \theta\eta) \times$$
$$\times <D_y>^\nu r_{(\alpha)}(t, x+y, \xi)\, d\eta\, dy\, (2\pi)^{-n}.$$

Но семейство $\{h_{\alpha,\theta}(t, x, \xi\}_{|\alpha|=l,\, 0<\theta<1}$ ограничено в $\mathrm{H}\{m_1 + m_1', m_2 + m_2', m_3 + m_3'\}$, откуда получаем

$$r_1(t, x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \tilde{a}^{(\alpha)}(t, x, \xi) r_{(\alpha)}(t, x, \xi), \ \mathrm{mod}\ C_t(S^{-\infty}) \tag{4.35}$$

и, следовательно, (4.33). Аналогично рассматривается R_2. Предложение доказано.

§ 5. Фундаментальное решение задачи Коши для системы $L_1 U = \Phi$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} L_1 U = \Phi(t) \text{ на } [0, T_1] \\ U|_{t=s} = \Psi, \end{cases} \tag{5.1}$$

для матричного ПДО L_1 вида (2.8), описанного в теореме 1. Ф. р. задачи (5.1) будем искать в виде

$$E_1(t,s)=E_2(t,s)(I+Q(t,s))+Q_\infty(t,s), \tag{5.2}$$

где $\sigma Q_\infty(t,s)\in C_{t,s}(S^{-\infty})$. Для операторов L_1, у которых в лемме 1 $Q(m-2)=0$, $E_2(t,s)$ можно выбрать из следствия 2 § 4, и предложение 3 окажется достаточным для дальнейшего построения. В общем же случае мы воспользуемся следующим вариантом теоремы Ю. В. Егорова [18], [19]. Введем бозначение

$$K(t,\xi)=\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}+Q(m-2)\,\frac{\lambda(t)\ln^2\lambda(t)}{\Lambda^2(t)<\xi>}.$$

Предложение 4. *Пусть $E_\Phi(t,s)$, $E_\Phi(s,t)$ — ф. р., задаваемые теоремами 2, 3, соответственно, с $K'=K=0$, $0\leqslant s\leqslant t$. Предположим, что $r(t,x,\xi)/K(t,\xi)\in S[0,0,0]$, и $r(t,x,\xi)=0$ при $t\in[0,t_\xi]$, $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $<\xi>\geqslant M$. Тогда $E_\Phi(s,t)\,r(t,x,D_x)\,E_\Phi(t,s)$ есть ПДО $r_1(t,s,x,D_x)$ с символом $r_1(t,s,x,\xi)$ таким, что $r_1(t,s,x,\xi)=0$ при $t\in[0,t_\xi]$, и удовлетворяющим оценкам*

$$|D_t^l D_\xi^\alpha D_x^\beta r_1(t,s,x,\xi)|\leqslant C_{l,\alpha,\beta}K(t,\xi)<\xi>^{-|\alpha|}\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^l\times$$

$$\times(\ln<\xi>)^{l+|\alpha|+|\beta|} \tag{5.3}$$

при всех $t\in[0,T_1]$, $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $<\xi>\geqslant M$, равномерно по $s\in J$, $s\leqslant t$.

Доказательство. Достаточно повторить схему второго доказательства теоремы Ю. В. Егорова, изложенного на стр. 172—175 [19], либо воспользоваться соответствующими теоремами из [5]. Отметим здесь только то, что главный символ оператора $r_1(t,s,x,D_x)$ в точке (x_0,ξ_0) равен $r(t,s,y_0,\eta_0)$, где точка (y_0,η_0) получается из (x_0,ξ_0) движением по траектории потока, порожденного векторным полем (3.1) за время от s до t. Подробности мы оставляем читателю.

Вернемся к (5.2). Здесь $Q(t,s)$ — ПДО, который будет построен как решение задачи Коши $(R_0(t,s)=R(t,s))$

$$\begin{cases} D_tQ(t,s)+R(t,s)\,Q(t,s)+R_0(t,s)\in C_{t,s}(S^{-\infty}),\\ Q(s,s)=0 \quad (0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_1),\end{cases} \tag{5.4}$$

или эквивалентного интегрального уравнения с ПДО-значным ядром

$$Q(t,s)+i\int_s^t R(\tau,s)\,Q(\tau,s)\,d\tau+i\int_s^t R_0(\tau,s)\,d\tau\in C_{t,s}(S^{-\infty}),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_1. \tag{5.5}$$

Справедливо следующее

Предложение 5. *Пусть $R(t,s)$, $R_0(t,s)$ — матричные ПДО с символами $r(t,s,x,\xi)$, $r_0(t,s,x,\xi)$, соответственно. Предположим, что с некоторыми p, K, m для любых α, β с положительными постоянными $C_{\alpha,\beta}$, C_0 при всех $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_1$, $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $<\xi>\geqslant M$ выполнены неравенства*

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta r(t,s,x,\xi)\|\leqslant C_{\alpha,\beta}<\xi>^{-|\alpha|}(\ln<\xi>)^{|\alpha+\beta|}g(t,\xi), \tag{5.6}$$

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta r_0(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{p-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha+\beta|} g(t, \xi), \quad (5.6_0)$$

$$\int_0^{T_1} g(\tau, \xi)\, d\tau \leqslant K \ln \langle \xi \rangle, \quad g(t, \xi) \leqslant C_0 \langle \xi \rangle^m. \quad (5.7)$$

Тогда существует решение $Q(t, s)$ задачи (5.4) с символом $q(t, s, x, \xi)$, удовлетворяющим при всех $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geqslant M$ неравенствам

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta q(t, s, x, \xi)| \leqslant C'_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{K+p-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{2|\alpha+\beta|}, \quad (5.8)$$

и, следовательно, принадлежащим классу $q \in C_t([s, T_1]; \bigcap_{0<\varepsilon<1} S^{K+p+\varepsilon}) \cap \cap C_t^1([s, T_1]; \bigcap_{0<\varepsilon<1} S^{K+p+m+\varepsilon})$. Это решение единственно по модулю $C_t^1(S^{-\infty})$.

Доказательство. Выберем собственные представители классов эквивалентности операторов $R(t, s)$, $R_0(t, s)$ и построим собственный оператор $Q(t, s)$. Достаточно рассмотреть случай $p = 0$. Решение будем искать в виде

$$q \sim q_0 + q_1 + q_2 + \cdots \pmod{C_t^1(S^{-\infty})}, \quad (5.9)$$

где

$$D_t q_k + r q_k + r_k = 0, \quad q_k(s, s) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \quad (5.10)$$

$$r_k = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=k-l} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha r)(D_x^\alpha q_l), \quad k = 1, 2, \cdots, \quad (5.11)$$

$$q_k = -i \int_s^t r_k(s_1)\, ds_1 + \sum_{l=2}^{\infty} (-i)^l \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots$$
$$\cdots \int_s^{s_{l-1}} ds_l\, r(s_1) \cdots r(s_{l-1})\, r_k(s_l). \quad (5.12)$$

Введем оператор $(Ir)(t) = \int_s^t r(s_1)\, ds_1$. Если g — скалярная функция, то $\underbrace{Ig\, Ig \cdots Ig}_{l} = (Ig)^l / l!$. Перепишем (5.12) в виде

$$q_k = -i\, Ir_k + \sum_{l=2}^{\infty} (-i)^l \underbrace{Ir\, Ir \cdots Ir}_{l}\, Ir_k.$$

Лемма 8. *Для любых α, β, k ($k = 1, 2, \cdots$) имеют место неравенства*

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta r_k(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,k} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|-k} g(t, \xi) (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha+\beta|+2k} \times$$
$$\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+2k-1}}{l!} (Ig)^l, \quad (5.13)$$

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta q_k(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,k} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|-k} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha+\beta|+2k} \times$$
$$\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+2k}}{(l+1)!} (Ig)^{l+1}. \quad (5.14)$$

Доказательство проведем индукцией по k. Так как из (5.12)

$$q_0 = \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l \underbrace{Ir\,Ir\cdots Ir}_{l} r_0,$$

то

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta q_0\| \leqslant C_{\alpha,\beta} <\xi>^{-|\alpha|} (\ln <\xi>)^{|\alpha+\beta|} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|}}{l!} (Ig)^l.$$

Осуществим переход к $k=1$. Так как

$$r_1 = \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha r)(D_x^\alpha q_0),$$

то

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta r_1\| \leqslant C_{\alpha,\beta} <\xi>^{-|\alpha|-1} (\ln <\xi>)^{2+|\alpha+\beta|} g \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+1}}{l!} (Ig)^l,$$

откуда

$$<\xi>^{|\alpha|+1} (\ln <\xi>)^{-2-|\alpha+\beta|} \|D_\xi^\alpha D_x^\beta q_1\| \leqslant C_{\alpha,\beta} \Big\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+1}}{(l+1)!} (Ig)^{l+1} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{|\alpha+\beta|} \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)^i \underbrace{Ig\,Ig\cdots Ig}_{l} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1-i}}{m!} (Ig)^m \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha,\beta} \Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1}}{(m+1)!} (Ig)^{m+1} + \sum_{i=0}^{|\alpha+\beta|} \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)^i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1-i}}{(m+l)!} (Ig)^{m+l} \Big\}.$$

Но при $i > 0$ имеем

$$\sum_{l=2}^{\infty} (l-1)^i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1-i}}{(m+l)!} (Ig)^{m+l} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} (l-1)^i \sum_{k=l}^{\infty} \frac{(k+1-l)^{|\alpha+\beta|+1-i}}{(k+1)!} (Ig)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (Ig)^{k+1} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{k} (l-1)^i (k+1-l)^{|\alpha+\beta|+1-i} \leqslant C_{\alpha,\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^i k^{|\alpha+\beta|+2-i}}{(k+1)!} (Ig)^{k+1} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha,\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{|\alpha+\beta|+2}}{(k+1)!} (Ig)^{k+1}.$$

Если же $i = 0$, то

$$\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1}}{(m+l)!} (Ig)^{m+l} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1}}{(m+1)!} (Ig)^{m+1} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1}}{(m+l)!} (Ig)^{m+l} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (Ig)^{k+1} \sum_{l=1}^{k} (k+1-l)^{|\alpha+\beta|+1} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha,\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{|\alpha+\beta|+2}}{(k+1)!} (Ig)^{k+1}.$$

Таким образом, (5.14) при $k = 1$ доказано. Предположим теперь, что для k (5.13), (5.14) доказаны, и докажем их для $k+1$. Имеем

$$r_{k+1} = \sum_{l=0}^{k} \sum_{|\gamma|=k+1-l} \frac{1}{\gamma!} (\partial_\xi^\gamma r)(D_x^\gamma q_l),$$

откуда

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta r_{k+1}\| = \Big\| \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \sum_{l=0}^{k} \sum_{|\gamma|=k+1-l} \frac{1}{\gamma!}\frac{\alpha!}{\alpha_1!\,\alpha_2!}\frac{\beta!}{\beta_1!\,\beta_2!} \times$$

$$\times (\partial_\xi^{\gamma+\alpha_1} D_x^{\beta_1} r)(\partial_\xi^{\alpha_2} D_x^{\gamma+\beta_2} q_l)\Big\|.$$

Поэтому рассмотрим при $l \neq 0$ норму следующей матрицы:

$$\|(\partial_\xi^{\gamma+\alpha_1} D_x^{\beta_1} r)(\partial_\xi^{\alpha_2} D_x^{\gamma+\beta_2} q_l)\| \leqslant C_{\gamma,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,l} \langle\xi\rangle^{-|\gamma+\alpha_1+\alpha_2|-l} g \times$$

$$\times (\ln\langle\xi\rangle)^{(2l+|\alpha+\beta|+2|\gamma|)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha_2+\gamma+\beta_2|+2l}}{(m+1)!}(Ig)^{m+1} = C\ldots\langle\xi\rangle^{-|\alpha|-(k+1)} g\times$$

$$\times(\ln\langle\xi\rangle)^{|\alpha+\beta|+2(k+1)} \sum_{m=1}^\infty \frac{m^{(k+1)+l+|\alpha+\beta|-|\alpha_1+\beta_1|}}{(m+1)!}(Ig)^{m+1} \leqslant$$

$$\leqslant C\ldots\langle\xi\rangle^{-|\alpha|-(k+1)}(\ln\langle\xi\rangle)^{|\alpha+\beta|+2(k+1)}\sum_{m=2}^\infty \frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1}}{m!}(Ig)^m.$$

Если же $l = 0$, то

$$\|(\partial_\xi^{\gamma+\alpha_1} D_x^{\beta_1} r)(\partial_\xi^{\alpha_2} D_x^{\gamma+\beta_2} q_0)\| \leqslant C_{\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|-(k+1)} g\times$$

$$\times(\ln\langle\xi\rangle)^{|\alpha+\beta|+2(k+1)}\sum_{m=1}^\infty \frac{m^{|\alpha_2+\gamma+\beta_2|}}{m!}(Ig)^m \leqslant C\ldots\langle\xi\rangle^{-|\alpha|-(k+1)} g\times$$

$$\times(\ln\langle\xi\rangle)^{|\alpha+\beta|+2(k+1)}\sum_{m=1}^\infty\frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1}}{m!}(Ig)^m.$$

Таким образом, (5.13) доказано. Рассмотрим теперь q_{k+1}:

$$\langle\xi\rangle^{|\alpha|+(k+1)}(\ln\langle\xi\rangle)^{-|\alpha+\beta|-2(k+1)}\|D_\xi^\alpha D_x^\beta q_{k+1}\| \leqslant C_{\alpha,\beta,k}\times$$

$$\times\Big\{\sum_{m=1}^\infty \frac{m^{|\alpha+\beta|+(2k+1)-1}}{(m+1)!}(Ig)^{m+1} + \sum_{l=0}^{|\alpha+\beta|}\sum_{l=2}^{\infty}(l-1)^l \sum \frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1-l}}{(m+l)!}(Ig)^{m+l}\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant C\ldots\sum_{m=1}^\infty\frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)}}{(m+1)!}(Ig)^{m+1}.$$

Лемма доказана.

Окончание доказательства предложения 5. Из (5.14) следует, что

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta q_k(t,s,x,\xi)\| \leqslant C_{\alpha,\beta,k}\langle\xi\rangle^{K-k-|\alpha|}(\ln\langle\xi\rangle)^{2(|\alpha+\beta|+2k)} \qquad (5.15)$$

равномерно по $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_1$. Отсюда $q_k\in C_t([s, T_1]; \bigcap_{0<\varepsilon<1} S^{K+\varepsilon-k})$.

Для доказательства единственности заметим, что сопряженная к (5.4) задача Коши удовлетворяет тем же условиям (5.6)—(5.7), так что достаточно воспользоваться стандартными рассуждениями (см., например, стр. 173 [21]). Предложение доказано.

Замечание. В предложении осуществлено построение экспоненты матричного ПДО в том случае, когда он не удовлетворяет условиям ни одной из известных нам теорем (см., например, [21]). Интересно выяснить, можно ли сформулировать и доказать в теории полугрупп подобное предложение средствами функционального анализа.

Итак, если $Q(m-2)=0$, выбор $E_2(t, s)$ уже указан. В общем же случае через $E_2(t, s)$ обозначим ф. р. задачи Коши для диагонального ПДО с символом

$$\delta_{ij}(\tau - \operatorname{Re}\varphi_j(t, x, \xi) + \operatorname{Re} f_j(t, x, \xi)), \quad i, j = 1, \cdots, m$$

(здесь δ_{ij} — символ Кронекера, τ—двойственная к t переменная), так что соответствующие $E_{j, \Phi_j}(t, s)$ имеют символы $e_j(t, s, x, \xi)$, удовлетворяющие оценкам (4.16), (4.17), (4.24), (4.25) с $K=K'=\nu=0$. Очевидно также, что вместо ф. р. можно воспользоваться параметриксами. В первом случае получаем ядро $R(t, s) = E_2(s, t)\, R(t)\, E_2(t, s)$, во втором, допуская некоторую вольность в обозначениях, $-R(t, s) = E_2(s, t)[-\operatorname{Im} D(t) + \operatorname{Im} F(t) + R(t)]\, E_2(t, s)$. В двух случаях в (5.4), (5.5) $R_0(t, s) = R(t, s)$. В силу предложений 3, 4 выполнены условия предложения 5, так как нетрудно убедиться в том, что (см. [3])

$$\int_0^{t_\xi} \left(\rho(t, \xi) + \frac{\rho_t(t, \xi)}{\rho(t, \xi)} \right) dt \leqslant C \ln \langle \xi \rangle, \tag{5.16}$$

$$\int_{t_\xi}^{T} K(t, \xi)\, dt \leqslant C \ln \langle \xi \rangle. \tag{5.17}$$

Таким образом, нами доказана следующая основная

Теорема 4. *Пусть L и L—операторы вида* (2.4), (2.2), соответственно, *и пусть $E_1(t, s)$—фундаментальное решение задачи Коши для L_1* (2.8). *Тогда фундаментальные решения $E(t, s)$ и $E_0(t, s)$ задач Коши для L и L_0 могут быть найдены в форме*

$$\left| \begin{array}{l} E(t, s) = N(t)\, E_1(t, s)\, N^{\#}(t) + R_\infty(t, s), \\ \sigma(R_\infty(t, s))(x, \xi) \in C_{t, s}(S^{-\infty}), \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1, \end{array} \right. \tag{5.18}$$

и

$$\left| \begin{array}{l} E_0(t, s) = M^{\#}(t)\, N(t)\, E_1(t, s)\, N^{\#}(t)\, M(t) + \widetilde{R}_\infty(t, s), \\ \sigma(\widetilde{R}_\infty(t, s))(x, \xi) \in C_{t, s}(S^{-\infty}) \ (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1), \end{array} \right. \tag{5.19}$$

соответственно, где $M(t)$, $N(t)$, $M^{\#}(t)$, $N^{\#}(t)$ описаны в § 2. Более того $E(t, s)$ и $E_0(t, s)$ прздставляются в виде сумм ИОФ с фазовыми функциями $\Phi_j(t, s, x, \xi)$, $j = 1, \cdots, m$, и с символами, описанными выше.

С помощью теоремы 4 и преобразования $H(t)$ § 2 легко доказывается основная теорема настоящей работы.

Теорема 5. *Пусть оператор L* (0.1) *удовлетворяет условиям* (0.3)—(0.7). *Тогда решение задачи Коши* (0.1), (0.2) *с $f(t) \in B_t(S)$ и $\psi_j \in S$, $j = 0, 1, \cdots, m-1$, существует, единственно на $[s, T] \times R^n$ $(0 \leqslant s < T)$ и может быть записано в виде*

$$u(t, x)=\sum_{j=0}^{m-1} E_0^{1, j+1}(t, s, x, D_x) \psi_j+i \int_s^t E_0^{1, m}(t, \sigma, x, D_x) f(\sigma, x) d\sigma,$$

где $E_0^{1, j}$ есть $(1, j)$-элемент фундаментального решения E_0 задачи Коши оператора

$$D_t+\begin{bmatrix} 0 & , & 1 & , \cdots, & 0 \\ 0 & , & 0 & , 1 \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_{0, \alpha}(t, x) D_x^\alpha, & & \sum\limits_{|\alpha| \leq m-1} a_{1, \alpha}(t, x) D_x^\alpha, & \cdots, & \sum\limits_{|\alpha| \leq 1} a_{m-1, \alpha}(t, x) D_x^\alpha \end{bmatrix}.$$

Как следствие из этой теоремы можно получить корректность задачи Коши, доказанную в [2], [3], а также уточнить потерю гладкости. Далее, построенный параметрикс и фундаментальное решение позволяют доказать необходимость для C^∞-корректности задачи Коши условий (0.6), (0.7), и исследовать вопрос распространения и ветвления особенностей в той полноте, как это сделано в [10], [14], [20], [17].

В заключение автор выражает благодарность всем участникам руководимого А. Б. Нерсесяном семинара за полезные обсуждения настоящей работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 10. VII. 1985

Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Բազմապատիկ բնութագրիչներով օպերատորների համար Կոշու խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը և նրա հետ կապված պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների դասը *(ամփոփում)*

Հոդվածում կառուցվում է Կոշու խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը փոփոխական պատիկությամբ բնութագրիչ արմատներով բարձր կարգի հիպերբոլական տիպի օպերատորների համար։ Ենթադրվում է, որ օպերատորների ցածր կարգի անդամների գործակիցները բավարարում են որոշ պայմանների, որոնք հանդիսանում են C^∞-կոռեկտության անհրաժեշտ պայմաններ բավականին ընդհանուր դասերի հավասարումների համար [3]։ Ֆունդամենտալ լուծման կառուցումը կատարվում է օպերատորի սիմվոլի որոշման տիրույթը երկու գոտիների տրոհման և t պարամետրից կախված համապատասխան ձևով որոշված պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների և Ֆուրյեի ինտեգրալ օպերատորների որոշ դասերի օգնությամբ։ Նշված դասերը ընդհանրացնում են Բուտե դե Մոնվելի հայտնի պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների դասերը, որոնց սահմանումը հիմնված է կվազիհամասեռության գաղափարի վրա։

K. H. YAGDJIAN. *Fundamental solutions for a degenerate hyperbolic operators and related pseudo-differential operators* (summary)

The paper deals with the operators which have variable multiplicity characteristics. It is assumed that the coefficients satisfy some conditions which in general are necessary for C^∞-well-posedness of the Cauchy problem [3]. We construct the fundamental solutions of the Cauchy problem by means of zonal subdivision of the cotangent bundle. Some classes of pseudo-differential operators which are generalization of the well-known Boutet de Monvel classes are used. (Engl. transl. see Souviet J. of Contemporary Math. Anal., 1986, v. 21, n. 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. А. Ягджян.* О корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений. Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 15, № 6, 1980, 475—487. (Engl. transl.:Souviet J. of Contemporary Math. Anal., 1980, v. 15, n. 6, 54—65).
2. *S. Tarama.* Sur le probleme de Cauchy pour une class des operateurs differetieles du type faiblement hyperbolique, Jour. Math. Kyoto Univ., 1982, v. 22, n. 2, 333—368.
3. *К. А. Ягджян.* Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для операторов с кратными характеристиками. Изв. АН АрмССР, «Математика», 20, № 1, 1985, 3—25 (Engl. transl.: Souviet J. of Contemporary Math. Anal. 1985, v. 20, n. 1, 1—23).
4. *L. Boutet de Monvel.* Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, Gomm. Pure Appl. Math., 1974, v. 27, 585—639.
5. *H. Kumano-go.* A calculus of Fourier integral operators on R^n and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type, Comm. Partial Diff. Equation, 1976, v. 1, n. 1, 1—44.
6. *A. Yoshikawa.* Constaction of a parametrix for the Cauchy problem of some, weakly hyperbolic equation I, II, III, Hokkaido Math. J., 1977, v. 6, n. 2, 313—344, 1978, v. 7, n. 1, 1—26, n. 1, 127—141.
7. *H. Kumano-go.* Fundamental solution for a hyperbolic system with diagonal principal part. Comm. Partial Diff. Equation, 1979, v. 4, n. 9, 959—1015.
8. *K. Shinkai.* On the fundamental solution for a degenerate hyperbolic system. Osaka J. Math., 1981, v. 18, n. 1, 257—288.
9. *K. Taniguchi and Y. Tozaki.* A hyperbolic equation with double characteristics which has a solution with branching singularities, Math. Japonica, 1980, v. 25, n. 3, 279—300.
10. *K. Shinkai.* Branching of singularities for a degenerator hyperbolic system, Comm. Partial Diff. Equation, 1982, v. 7, n. 5, 581—607.
11. *K. Amano and G. Nakamura.* Branching of singularities for degenerate hyperbolic operators, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 1984, v. 20, n. 2, 225—275.
12. *A. Yoshikawa.* Fundamental solutions to the Cauchy problem of some weakly hyperbolic equation, Proc. Japan Acad., 1977, v. 53, 103—107.
13. *N. Hanges.* Parametrices and propagation of singularities for operators with noninvolutive charecteristics, Indiana Univ. Math. J., 1979, v. 28, n. 1, 87—97.
14. *В. Я. Иврий.* О волновых фронтах решений некоторых псевдодифференциальных уравнений, Функц. анализ и его прилож., 1976, 10, № 2, 71—72.
15. *Y. Morimoto.* Fundamental solutions for a hyperbolic equations with involutive charecteristics of variable multiplicity, Comm. Partial Diff. Equation, 1979, v. 4, n. 6, 609—643.
16. *C. Iwasaki and Y. Morimoto.* Propagation of singularities of solutions for a hyperbolic system with nilpotent charecteristics, I, II, Comm. in PDE v. 7, n. 7, 1982, 743—794, Comm. in PDE, v. 9, n. 15, 1984, 1407—1436.
17. *W. Ichinose.* Propagation of singularities of solutions for a hyperbolic system with double characteristics, Osaka J. Math., 1982, v. 19, n. 1, 171—187.
18. *Ю. В. Егоров.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа, М., «Наука», 1984.
19. *М. Тейлор.* Псевдодифференциальные операторы, М., «Мир», 1985.
20. *Г. Р. Александрян.* Параметрикс и распространение волнового фронта решения задачи Коши для одного модельного уравнения, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1984, 19, № 3, 219—232 (Engl. transl.: Souviet J. of Contemporary Math. Anal, 1984, v. 19, n. 3, 33—46).
21. *Ф. Трев.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, т. 1, 2, М., «Мир», 1984.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXI, № 4, 1986 Математика

УДК 517.537

А. А. ДАНИЕЛЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫХ ПОЛИНОМОВ НА КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

n°1. Введение. В работах [1], [2], [5] рассматривается задача о представлении функции $f(z)$, определенной на единичной окружности в виде предела равномерно ограниченной на окружности последовательности полиномов.

В [1] М. В. Келдыш указал достаточное условие на функцию, при котором имеет место отмеченное представление. Некоторые дополнения к теореме М. В. Келдыша были даны в работе [2] С. Н. Мергеляна и А. А. Талаляна. Полное решение этой задачи было получено С. В. Колесниковым [5], который доказал, что для упомянутой представимости $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была ограниченной, принадлежала первому классу Бэра и существовала ограниченная аналитическая функция в единичном круге, угловые граничные значения которой совпадали бы с $f(z)$ почти всюду на единичной окружности. Таким образом, очевидные необходимые условия являются также достаточными.

Мы будем рассматривать аналогичные задачи, где вместо единичного круга взято произвольное компактное множество комплексной плоскости.

Сначала будем характеризовать все те функции, определенные на границе ∂E компактного множества E со связным дополнением, каждая из которых допускает точечное приближение с помощью равномерно ограниченной на E последовательностью полиномов (теоремы 1 и 2). Здесь используются результаты работ [3], [4] и некоторые рассуждения из [5].

Далее, рассматривается более общая задача, которая заключается в следующим. Пусть K — компактное множество и F его замкнутое подмножество (оно может, в частности, совпадать с K). Требуется описать те функции, определенные на F, каждая из которых на F является пределом равномерно ограниченной на K последовательности полиномов (теорема 4). Фактически мы докажем более общее предложение (теорема 3), из которого также следуют одна теорема Рубеля и Шилдса [6] и некоторое ее дополнение (теоремы 5 и 6).

n°2. Пусть E — компактное множество на комплексной плоскости со связным дополнением. Множество E° внутренних точек E состоит из объединения счетного числа односвязных областей D_n: $E^0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$.

Пусть $f(z)$ — ограниченная функция, определенная на границе ∂E множества E и функция $z = \psi_n(w)$ конформно отображает единичный круг

U на область D_n $(n = 1, 2, \ldots)$. $\psi_n(w)$ — ограниченная аналитическая функция и, следовательно, почти всюду на единичной окружности ∂U она имеет угловые граничные значения, каждое из которых является достижимой граничной точкой для области D_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, можем доопределить функцию $\psi_n(w)$ также почти всюду на окружности ∂U и рассмотреть функцию $f(\psi_n(w)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, которая определена почти всюду на ∂U.

Учитывая, что дополнение к E связно, нетрудно видеть, что две различные компоненты D_n и D_m множества E° могут иметь не более одной общей граничной достижимой точки (доказательство более общего утверждения см. в [7], гл. VI, лемма 4.1).

Определение. Пусть $\Phi(z)$ — ограниченная аналитическая функция на множестве E°. Скажем, что $f(z)$ почти всюду на ∂E совпадает с граничными значениями функции $\Phi(z)$ в смысле конформного отображения, если угловые граничные значения функции $\Phi(\psi_n(w))$ почти всюду на единичной окружности совпадают с функцией $f(\psi_n(w))$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Аналогично, скажем, что последовательность определенных на ∂E функций $\{q_m(z)\}$ сходится к $f(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения, если функции $q_m(\psi_n(w))$, $m = 1, 2, \cdots$, определенные почти всюду на единичной окружности, сходятся к функции $f(\psi_n(w))$ $(n = 1, 2, \cdots)$ почти всюду на той же окружности.

Ниже встречающиеся все меры μ являются конечными комплексными борелевскими мерами, каждая из которых определена на некотором компактном подмножестве комплексной плоскости.

Нам нужны следующие определения (см. [4]).

1. Компактное множество C комплексной плоскости назовем сбалансированным, если граница B множества C совпадает с границей неограниченной компоненты дополнения C относительно комплексной плоскости. Открытое множество G комплексной плоскости будем называть сбалансированным, если G ограничено, замыкание C множества G сбалансированно и G служит внутренностью C.

2. Пусть C — компактное сбалансированное множество в комплексной плоскости. Через $M(C)$ обозначается класс всех мер μ на границе B множества C, таких, что

$$\int (t-z)^{-1}\, d\mu(t) = 0$$

для всех z вне C. Если G—открытое сбалансированное множество с замыканием C, то по определению $M(G) = M(C)$.

Из определения следует, что $\int f d\mu = 0$, если $\mu \in M(C)$ и f аналитична в некоторой окрестности C.

3. Пусть G — односвязное открытое множество в комплексной плоскости. Мы назовем последовательность $\{\gamma_i\}$ определяющей границу G, если (I) каждое γ_i есть объединение конечного числа непересекающихся спрямляемых простых замкнутых кривых, лежащих в G, никакие два из которых не принадлежат одной и той же компоненте G, и (II) произвольное ком-

пактное подмножество $S \subset G$ для всех достаточно больших i лежит в объединении ограниченных компонент дополнения γ_i относительно комплексной плоскости.

Аналитический дифференциал $d\omega$ на открытом множестве G комплексной плоскости означает комплексный дифференциал первого рода на G вида $d\omega = f(z)dz$, где $f(z)$ — аналитическая функция на G.

4. Пусть G — ограниченное односвязное открытое множество комплексной плоскости. Обозначим через $H(G)$ класс всех аналитических дифференциалов $d\omega$ на G, для которых существует последовательность $\{\gamma_i\}$ компактных подмножеств G, определяющая границу G, и положительное число K, такие, что

$$\int_{\gamma_i} |d\omega| < K$$

для всех значений i. Если $d\omega \in H(G)$, то $\|d\omega\|$ обозначает нижнюю грань всех таких чисел K. Если G связно, то очевидно, что класс $H(G)$ конформно инвариантен. Это означает, что если φ есть взаимно однозначное конформное отображение G на V, то $H(V)$ состоит из всех дифференциалов вида $\varphi(d\omega)$, $d\omega \in H(G)$. Очевидно также, что тогда $\|d\omega\| = \|\varphi(d\omega)\|$.

5. Пусть G-ограниченное односвязное открытое множество в комплексной плоскости, и пусть B—граница G. Говорят, что мера μ есть граничная мера дифференциала $d\omega$ из $H(G)$, если последовательность $\{\gamma_i\}$ из определения 4 может быть выбрана так, чтобы выполнялось дополнительное требование:

$$\int_{\gamma_i} h d\omega \to \int h d\mu$$

когда $i \to \infty$, для всех непрерывных функций h на $G \cup B$.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что понятие открытого сбалансированного множества G из определения 1 совпадает с понятием открытого множества Каратеодори (при связном G—области Каратеодори), которое часто встречается в литературе.

Отметим, что при компактном множестве E со связным дополнением класс $M(E)$ из определения 2 совпадает с классом всех мер μ на ∂E, которые ортогональны всем полиномам.

Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Пусть E—компактное множество на комплексной плоскости со связным дополнением, $f(z)$—ограниченная функция, определенная на ∂E, $\{q_m(z)\}$ — последовательность непрерывных на ∂E функций, которая сходится к $f(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения. Для того, чтобы существовала равномерно ограниченная на E последовательность полиномов $\{P_m(z)\}$, сходящаяся к $f(z)$ во всех точках z, в которых $\{q_m(z)\}$ сходится к $f(z)$ (и в частности почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения), необходимо и достаточно, чтобы на E^0 существовала ограниченная аналитическая функция $\Phi(z)$, граничные значения которой совпадали бы с функцией $f(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения.*

Доказательство необходимости почти очевидно. Действительно, так как $P_m(z)$ сходится к $f(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения, то при любом $n (n=1, 2, \cdots)$ $P_m(\psi_n(w))$ сходится к $f(\psi_n(w))$ почти всюду на окружности ∂U, и учитывая равномерную ограниченность последовательности аналитических в круге U функций $P_m(\psi_n(w))$ $(m=1, 2, \cdots)$, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим равенства

$$\int_{|w|=1} f(\psi_n(w))\, w^k\, dw = 0, \quad k=0, 1, 2, \cdots,$$

откуда следует, что существует ограниченная аналитическая функция $\Phi_n(w)$ в круге U, граничные значения которой почти всюду на единичной окружности совпадают с функцией $f(\psi_n(w))$. Полагая $\Phi(z) = \Phi_n(\psi_n^{-1}(z))$, $z \in D_n (n=1, 2, \cdots)$, на множестве E^0 будем иметь желаемую функцию ($\psi_n^{-1}(z)$ — обратная функции $\psi_n(w)$).

Прежде чем перейти к доказательству достаточности , заметим, что, без нарушения общности, можем считать последовательность $\{q_m(z)\}$ непрерывных функций равномерно ограниченной на ∂E.

Доказательство достаточности состоит из нескольких пунктов.

1) Пусть D_n $(n = 1, 2, ...)$ — компонента множества E°. Покажем, что

$$\lim_{m\to\infty} \int q_m\, d\mu = 0 \quad \text{при всех } \mu \in M(D_n). \tag{1}$$

По теореме 3 из [4] существует взаимно однозначное соответствие между классом $M(D_n)$ и классом $H(D_n)$ аналитических дифференциалов, которое получается соотнесением любому аналитическому дифференциалу $d\omega = g(z)\, dz \in H(D_n)$ своей граничной меры $\mu \in M(D_n)$.

Как отмечено выше класс $H(D_n)$ конформно инвариантен. Поэтому при конформном отображении $\psi_n(w)$ единичного круга U на область D_n класс $H(U)$ состоит из всех аналитических дифференциалов вида $g(\psi_n(w))\, d\psi_n(w)$, где $g(z)\, dz$ — аналитический дифференциал из $H(D_n)$. Значит существует взаимно однозначное соответствие между классами мер $M(D_n)$ и $M(U)$, которое получается соотнесением мере $\mu \in M(D_n)$ граничной меры $\nu \in M(U)$ аналитического дифференциала $g(\psi_n(w))\, d\psi_n(w) \in H(U)$, где $g(z)\, dz \in H(D_n)$ — аналитический дифференциал, граничной мерой которого является μ.

Для таких мер $\mu \in M(D_n)$ и $\nu \in M(U)$, по теореме 4 из [3] имеем

$$\int q_m(z)\, d\mu(z) = \int_{|w|=1} q_m(\psi_n(w))\, d\nu(w). \tag{2}$$

Эта теорема сформулирована для таких сбалансированных областей, дополнение замыкания которых также связно. Но как отмечено в [4] (в доказательстве леммы 9), она верна и без последней оговорки. Так что мы можем применить ее для области D_n.

Так как $\nu \in M(U)$, то по теореме Ф. и М. Риссов

$$\int\limits_{|w|=1} q_m(\psi_n(w))\, d\nu(w) = \int\limits_{|w|=1} q_m(\psi_n(w))\, F(w)\, dw,$$

где $F(w)$ — граничная функция некоторой функции из класса H^1. По условию теоремы почти всюду на окружности ∂U равномерно ограниченная последовательность функций $q_m(\psi_n(w))$ $(m=1, 2, \cdots)$, сходится к $f(\psi_n(w))$, которая является граничной функцией для ограниченной аналитической функции $\Phi(\psi_n(w))$. Следовательно, последний интеграл стремится к нулю при $m \to \infty$.

Таким образом, учитывая (2), получаем соотношение (1).

2) Замечая очевидные соотношения $M(D_n) \subset M(E)$ $(n=1, 2, \cdots)$, докажем следующее: если $\mu \in M(E)$, то существуют меры $\mu_n \in M(D_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$, для которых выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \mu - \sum_{n=1}^{k} \mu_n \right\| = 0. \tag{3}$$

На множестве E^0 определим аналитический дифференциал $d\omega = g(z)\, dz$, где

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu(t)}{t-z}, \quad z \in E^0.$$

Его сужение на D_n обозначим через $d\omega_n$: $d\omega_n = g(z)\, dz$, $z \in D_n$. По теореме 2 из работы [4] $d\omega_n \in H(D_n)$. Если μ_n — граничная мера дифференциала $d\omega_n$, то по теореме 1 из [4] $\mu_n \in M(D_n)$ и

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu_n(t)}{t-z}, \quad z \in D_n.$$

Так как мера $\mu - \sum\limits_{n=1}^{k} \mu_n \in M(E)$ $(k=1, 2, \cdots)$, то по теореме 3 из [4] она является граничной мерой аналитического дифференциала $g_k(z)\, dz \in H(E^0)$, где

$$g_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\left(\mu - \sum\limits_{n=1}^{k} \mu_n\right)}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu(t)}{t-z} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{k} \int \frac{d\mu_n(t)}{t-z} = \begin{cases} 0; & z \in D_n,\ n \leqslant k \\ g(z); & z \in D_n,\ n > k, \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\left\| \mu - \sum_{n=1}^{k} \mu_n \right\| = \| g_k(z)\, dz \|. \tag{4}$$

Так как $g_k(z)\, dz = g(z)\, dz = d\omega_n$, при $z \in D_n$, $n > k$, и, как показано в доказательстве теоремы 3 из [4],

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| d\omega_n \| \leqslant \| \mu \|,$$

то согласно лемме 6 из [4]

$$\|g_k(z)\,dz\| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \|d\omega_n\|.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$, и с учетом равенства (4), соотношение (3) доказано.

3) Покажем, что

$$\lim_{m\to\infty} \int q_m\,d\mu = 0, \text{ при всех } \mu \in M(E). \tag{5}$$

Возьмем $\mu \in M(E)$ и пусть $\mu_n \in M(D_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ — меры, для которых справедливо соотношение (3).

Имеем

$$\left|\int q_m\,d\mu - \sum_{n=1}^{k} \int q_m\,d\mu_n\right| \leqslant \max_{\partial E} |q_m(z)| \cdot \left\|\mu - \sum_{n=1}^{k} \mu_n\right\|,$$

и по (3) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int q_m\,d\mu_n = \int q_m\,d\mu$$

сходится к своей сумме равномерно относительно m. Следовательно

$$\lim_{m\to\infty} \int q_m\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \int q_m\,d\mu_n.$$

Так как $\mu_n \in M(D_n)$, то согласно (1) все слагаемые последней суммы равны нулю, откуда следует соотношение (5).

4) Завершим доказательство теоремы.

Пусть C—пространство всех непрерывных функций на ∂E, A — пространство всех тех непрерывных на ∂E функций, которые непрерывно и аналитично продолжаются на множество E°. Если φ — непрерывный линейный функционал на фактор-пространстве C/A, то

$$\varphi(q+A) = \int q\,d\mu,$$

где $q+A$ — элемент пространства C/A, т. е. $q+A = \{q+u : u \in A\}$, $q \in C$, а μ — мера на ∂E, ортогональная ко всем функциям из класса A, т. е. $\mu \in M(E)$. Следовательно, по соотношению (5) имеем

$$\lim_{m\to\infty} \varphi(q_m + A) = 0,$$

т. е. последовательность $\{q_m + A\}$ слабо сходится к нулю в пространстве C/A.

Проведем рассуждения, аналогичные сделанным в [5]. Слабая сходимость $\{q_m + A\}$ к нулю по известной теореме (см. [8], стр. 173), обеспечивает существование некоторой последовательности конечных линейных выпуклых комбинаций его элементов, которая сходится к нулю по норме фактор-пространства C/A. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация

$$\sum_{m=1}^{k} \lambda_m (q_m + A) = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m q_m + A, \quad \sum_{m=1}^{k} \lambda_m = 1, \quad \lambda_m \geqslant 0,$$

такая, что ее фактор-норма меньше чем ε. Следовательно, по определению фактор-нормы, существует функция $u(z) \in A$, такая, что

$$\max_{\partial E}\left|\sum_{m=1}^{k} \lambda_m q_m(z) - u(z)\right| < \varepsilon.$$

Применив сказанное к последовательности $q_m(z)$, $q_{m+1}(z), \cdots$, и взяв $\varepsilon = \frac{1}{m}$ $(m = 1, 2, \cdots)$, получим функцию $u_m(z) \in A$. Легко видеть, что последовательность функций $\{u_m(z)\}$ равномерно ограничена на ∂E и сходится к $f(z)$ во всех точках z, где $\{q_m(z)\}$ сходится к $f(z)$.

Так как дополнение множества E связно, то по теореме С. Н. Мергеляна о равномерных полиномиальных приближениях, последовательность $\{u_m(z)\}$ можем заменить последовательностью полиномов $\{P_m(z)\}$, которая имеет сформулированные в теореме свойства.

Теорема доказана.

зультатах [4].

Замечание 2. В [3] Бишоп отмечает, что в его работе [4] будет получено соотношение (3). Но в [4] в явном виде это соотношение не имеется. Так как (3) при доказательстве теоремы 1 существенно используется, то мы приводим его полное доказательство, основанное именно на ре-

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает следующий результат, который показывает какие функции, определенные на ∂E, могут быть представлены в виде точечного предела равномерно ограниченных полиномов.

Теорема 2. *Пусть E—компактное множество на комплексной плоскости со связным дополнением, $f(z)$—ограниченная функция первого класса Бэра, определенная на ∂E. Для того, чтобы на ∂E $f(z)$ являлась точечным пределом равномерно ограниченной на E последовательности полиномов, необходимо и достаточно, чтобы на E° существовала ограниченная аналитическая функция, граничные значения которой почти всюду на ∂E совпадали бы с функцией $f(z)$ в смысле конформного отображения.*

Замечание 3. Если существует последовательность непрерывных функций $\{q_m(z)\}$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, для которой имеют место также неравенства

$$\max_{\partial E} |q_m(z)| \leqslant M + \varepsilon_m,$$

где $M > 0$ и $\varepsilon_m \to 0$, то последовательность полиномов, существование которой утверждает теорема 1, можно сделать равномерно ограниченной на ∂E числом M.

Действительно, не теряя общности можем считать, что числа ε_m стремятся к нулю монотонно. Тогда очевидно, что функции $u_m(z)$, полученные в доказательстве теоремы 1, удовлетворяют неравенствам

$$\max_{\partial E} |u_m(z)| < M + \varepsilon_m + \frac{1}{m}.$$

Нетрудно видеть, что в качестве желаемой последовательности можно взять $\{Q_m(z)\}$,

$$Q_m(z)=\frac{M}{M+\varepsilon_m+\frac{2}{m}}P_m(z),$$

где полином $P\quad(z)$ удовлетворяет условию

$$|u_m(z)-P_m(z)|<\frac{1}{m},\ z\in\partial E.$$

n°. 3. Пусть E, D_n, U, $\psi_n(w)$ — те же, что и в предыдущем пункте. Напомним, что функцию $\psi_n(w)$ можно доопределить на некотором подмножестве S_n полной меры единичной окружности. Очевидно, $\psi_n(w)$ — борелевская функция на S_n и точки множества $\psi_n(S_n)$ являются достижимыми граничными точками для D_n.

Повторяя схему рассуждений, проведенных в лемме 4.2 гл. VI [7], нетрудно убедиться, что $\psi_n(w)$ — взаимно однозначная функция на множестве S_n.

Пусть H_n — замкнутое множество на границе области D_n: $H_n\subset\partial D_n$. Обозначим

$$L_n=\{w\in S_n:\psi_n(w)\in H_n)\} \tag{6}$$

и покажем, что L_n — измеримое (по Лебегу) множество на единичной окружности ∂U.

Действительно, по теореме Лузина существуют замкнутые множества $F_k\subset S_n$ $(k=1,\ 2,\cdots)$ такие, что $m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k)=2\pi$ (m — мера Лебега) и на каждом F_k сужение функции $\psi_n(w)$ непрерывно, следовательно $\psi_n(F_k)$ — замкнутое множество. Так как $\psi_n(w)$ — взаимно однозначное отображение множеств F_k и $\psi_n(F_k)$, то обратная функция $\psi_n^{-1}(z)$ непрерывна на множестве $\psi_n(F_k)$ $(k=1,\ 2,\cdots)$. Обозначая для краткости

$$C_n=\psi_n^{-1}\left(\psi_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\right)\cap H_n\right)$$

и вынося знак объединения из скобок, получим, что C_n — множество типа F_σ на единичной окружности. Отсюда, учитывая легко проверяемые соотношения $C_n\subset L_n$, $L_n\setminus C_n\subset S_n\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$ и то, что $S_n\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$ — множество меры нуль, получаем наше утверждение.

Определение. Пусть H — замкнутое подмножество на ∂E, $H_n=\partial D_n\cap H$ и L_n определена с помощью H_n как в (6). Пусть $\varphi(z)$ — ограниченная функция на H, $\Phi(z)$ — ограниченная аналитическая функция на E°. Скажем, что $\varphi(z)$ почти всюду на H совпадает с граничными значениями функции $\Phi(z)$ в смысле конформного отображения, если угловые граничные значения функции $\Phi(\psi_n(w))$, $|w|<1$, почти всюду на множестве L_n совпадают с функцией $\varphi(\psi_n(w))$ $(n=1,\ 2,\cdots)$.

Пусть теперь K — произвольное компактное множество на комплексной плоскости. Обозначим через E дополнение относительно комплексной плоскости той смежной с K области, которая содержит точку ∞. Пусть H — замкнутое подмножество на ∂E, B — произвольное множество, такое, что $B\subset K\setminus\partial E$.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(z)$ — ограниченная функция, определенная на множестве $H \cup B$, сужение которой на H принадлежит первому классу Бэра. Для того, чтобы на K существовала равномерно ограниченная последовательность полиномов $\{P_k(z)\}$, которая на множестве $H \cup B$ сходится к функции $\varphi(z)$, необходимо и достаточно, чтобы на E° существовала ограниченная аналитическая функция $f(z)$, такая, что 1) $f(z) = \varphi(z)$ при $z \in B$; 2) $\varphi(z)$ почти всюду на H совпадает с граничными значениями функции $f(z)$ в смысле конформного отображения.*

Доказательство. Необходимость. Так как $\{P_k(z)\}$ равномерно ограничена на ∂E, то существует ее подпоследовательность $\{P_{k_m}(z)\}$, которая сходится к ограниченной и аналитической в E° функции $f(z)$. Выполнение условия 1) очевидно.

Равномерно ограниченные аналитические в круге U функции $P_{k_m}(\psi_n(w))$, $m=1, 2, \cdots$ сходятся к $f(\psi_n(w))$, а их граничные значения на множестве L_n сходятся к функции $\varphi(\psi_n(w))$ $(n=1, 2, \cdots)$. Следовательно, по теореме Хинчина—Островского граничные значения аналитической функции $f(\psi_n(w))$ почти всюду на множестве L_n совпадают с функцией $\varphi(\psi_n(w))$ $(n=1, 2, \cdots)$, т. е. имеет место условие 2).

Достаточность. Пусть S_n — множество, о котором шла речь в начале настоящего пункта. Обозначим через Q_n множество тех точек окружности ∂U, в которых аналитическая и ограниченная в единичном круге функция $f(\psi_n(w))$ имеет угловые граничные значения, и пусть $R_n = S_n \cap Q_n$ $(n=1, 2, \cdots)$. R_n — борелевское множество полной меры на единичной окружности ∂U. Функцию, определяемую граничными значениями функции $f(\psi_n(w))$, на множестве R_n будем обозначать через $h_n(w)$.

Определим функцию $f(z)$ также в точках множества $\psi_n(R_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$. Если $z_0 \in \psi_n(R_n)$, то существует точка $w_0 \in R_n$ такая, что $\psi_n(w_0) = z_0$. Тот радиус единичного круга, который кончается в точке w_0, обозначим через r. Очевидно, что $\psi_n(r)$ — жорданова кривая, которая определяет достижимую граничную точку z_0 области D_n. Когда точка z по кривой $\psi_n(r)$ стремится к z_0, функция $f(z)$ имеет предел, равный $h_n(w_0)$, который и будем считать значением функции $f(z)$ в точке z_0. Следовательно, при $z \in \psi_n(R_n)$,

$$f(z) = h_n(w), \text{ где } w = \psi_n^{-1}(z). \tag{7}$$

Имея в виду, что две различные компоненты множества E° могут иметь не более одной общей граничной достижимой точки (см. п.° 2), можем утверждать, что определенная таким образом граничная функция $f(z)$ теряет свою однозначность не более чем в счетном числе точек. Удалив из R_n соответствующие им при конформном отображении $z = \psi_n(w)$ точки, обеспечим однозначность функции $f(z)$ на множестве $\psi_n(R_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$, причем, как и прежде, R_n остается борелевским множеством полной меры.

Пусть M_n — дополнение множества L_n на единичной окружности. Множество $R_n \cap M_n$ измеримо и $\psi_n(w)$, $h_n(w)$ — измеримые на нем функции. Очевидно также, что $m(R_n \cap M_n) = m(M_n)$.

По теореме Лузина можем получить такую последовательность $T_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \cdots$ замкнутых подмножеств множества $R_n \cap M_n$, что сужения функций $\psi_n(w)$ и $h_n(w)$ на $T_k^{(n)}$ непрерывны и $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k^{(n)}\right) = m(M_n)$.

Можем считать, что $T_{k-1}^{(n)} \subset T_k^{(n)}$; в противном случае множество $T_k^{(n)}$ заменили бы множеством $\bigcup_{m=1}^{k} T_m^{(n)}$. Так как $z = \psi_n(w)$ — непрерывное на $T_k^{(n)}$ и взаимно однозначное отображение между множествами $T_k^{(n)}$ и $\psi_n(T_k^{(n)})$, то обратная функция $w = \psi_n^{-1}(z)$ непрерывна на $\psi_n(T_k^{(n)})$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

Из соотношения (7) получаем, что $f(z) = h_n(\psi_n^{-1}(z))$ при $z \in \psi_n(R_n)$. Суперпозиция функций $w = \psi_n^{-1}(z)$ и $h_n(w)$ непрерывных соответственно на множествах $\psi_n(T_k^{(n)})$ и $T_k^{(n)}$ непрерывна на $\psi_n(T_k^{(n)})$. Таким образом, сужение функции $f(z)$ на замкнутом множестве $\psi_n(T_k^{(n)})$ $(k = 1, 2, \cdots)$ — функция непрерывная.

По условию теоремы существует равномерно ограниченная последовательность $\{\varphi_m(z)\}$ непрерывных на H функций, которая сходится к $\varphi(z)$ на H. Замечая, что замкнутые множества H, $\psi_n(T_{m-n+1}^{(n)})$, $n = 1, 2, \cdots, m$, попарно не пересекаются, определим непрерывную функцию $f_m(z)$ на множестве $H \cup \bigcup_{n=1}^{m} \psi_n(T_{m-n+1}^{(n)}) \subset \partial E$, полагая ее значения равными $\varphi_m(z)$ на H и $f(z)$ — на $\bigcup_{n=1}^{m} \psi_n(T_{m-n+1}^{(n)})$. Эти функции $f_m(z)$ определены на разных замкнутых подмножествах множества ∂E но очевидно, что все они ограничены одной и той же константой. Следовательно, можно построить равномерно ограниченную на ∂E последовательность $\{g_m(z)\}$ непрерывных функций, такую, что $g_m(z)$ является непрерывным продолжением функции $f_m(z)$ на множестве ∂E.

Пусть $g(z)$ — ограниченная функция на ∂E, определенная следующим образом: $g(z) = \varphi(z)$, при $z \in H$, $g(z) = f(z)$, при $z \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{m} \psi_n(T_{m-n+1}^{(n)})$, $g(z) = 0$, при остальных z из множества ∂E.

Из конструкции множеств $T_k^{(n)}$, с учетом соотношения (7) и условия 2) теоремы, следует, что функция $g(z)$ почти всюду на ∂E совпадает с граничными значениями ограниченной и аналитической функции $f(z)$ в смысле конформного отображения.

Так как $T_{k-1}^{(n)} \subset T_k^{(n)}$, то $\psi_n(T_{k-1}^{(n)}) \subset \psi_n(T_k^{(n)})$. Откуда, учитывая построение последовательности $\{g_m(z)\}$, легко видеть, что она сходится к функции $g(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения, при этом на множестве H $\{g_m(z)\}$ всюду сходится к функции $g(z) = \varphi(z)$.

Таким образом, для ограниченной функции $g(z)$, определенной на ∂E, удовлетворены все условия теоремы 1, и согласно ей существует равномерно ограниченная на E последовательность полиномов $\{P_m(z)\}$, которая сходится к функции $g(z)$ во всех точках $z \in \partial E$, где $\{g_m(z)\}$ сходится к $g(z)$. В частности, на множестве $H\{P_m(z)\}$ всюду сходится к функции $g(z) = \varphi(z)$.

Покажем, что $\{P_m(z)\}$ сходится к функции $\varphi(z)$ и на множестве B, чем будет завершено доказательство теоремы. По условию 1) теоремы для этого достаточно показать, что $\{P_m(z)\}$ сходится к функции $f(z)$ при $z \in E^\circ$. Последнее будет установлено, если убедимся, что при $m \to \infty$ последовательность $\{P_m(\psi_n(w))\}$ сходится к функции $f(\psi_n(w))$ в круге $|w| < 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Последовательность $\{P_m(z)\}$ сходится к функции $g(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения, а как было отмечено выше, $g(z)$ почти всюду на ∂E в том же смысле совпадает с граничными значениями функции $f(z)$. Это означает, что равномерно ограниченные функции $P_m(\psi_n(w))$, $m = 1, 2, \cdots$, определенные почти всюду на единичной окружности ∂U, сходятся почти всюду на этой окружности к функции $h_n(w)$. По представлению интегралом Коши функций $P_m(\psi_n(w))$, $|w| < 1$, $m = 1, 2, \cdots$, через соответствующие граничные функции $P_m(\psi_n(w))$, $|w| = 1$, $m = 1, 2, \cdots$, а функции $f(\psi_n(w))$, $|w| < 1$ — ее граничной функцией $h_n(w)$, $|w| = 1$ с учетом теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем, что функции $P_m(\psi_n(w))$, $m = 1, 2, \cdots$, сходятся в круге $|w| < 1$ к функции $f(\psi_n(w))$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Теорема доказана.

Замечание 4. В ходе доказательства было получено, что $\{P_m(z)\}$ сходится к функции $f(z)$ всюду на E°, а также почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения.

Замечание 5. Взяв в теореме 3 $H = \varnothing$ и обозначая

$$M = \sup_{z \in E^\circ} |f(z)|,$$

покажем, что в условиях теоремы 3 можно выбрать такую последовательность полиномов, которая сходится к функции $f(z)$ на E° и на множестве E равномерно ограничена числом M.

Действительно, построенные в доказательстве теоремы 3 непрерывные функции $f_m(z)$, определенные соответственно на замкнутых множествах $\bigcup_{n=1}^{m} \psi_n(T_{m-n+1}^{(n)})$, равномерно ограничены числом M. Пусть $\Delta(z)$ — функция, определенная следующим образом: $\Delta(z) = z$, при $|z| \leqslant M$, $\Delta(z) = M \cdot \frac{z}{|z|}$, при $|z| > M$. Если $g_m(z)$ — непрерывное продолжение функции $f_m(z)$ на множестве ∂E, но непрерывные на ∂E функции $\Delta(g_m(z))$, как и сами функции $g_m(z)$, сходятся почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения к $g(z)$, полученной в доказательстве теоремы 3. Но функции $\Delta(g_m(z))$ равномерно ограничены числом M. Таким образом, кроме условий теоремы 1, удовлетворено также условие замечания 3, и наше утверждение доказано.

Замечание 6. При $H = \varnothing$ из доказательства теоремы 3, в частности, следует, что если $f(z)$ — любая ограниченная аналитическая функция на E°, то существует ограниченная функция $g(z)$ на ∂E, совпадающая почти всюду на ∂E с граничными значениями функции $f(z)$ с смысле конформного отображения.

Решение отмеченной в n° 1 задачи дает теорема 4, являющаяся следствием теоремы 3 (определение K и E приведено выше).

Теорема 4. *Пусть F — замкнутое подмножество компакта K, $\varphi(z)$ — ограниченная функция первого класса Бэра на F. Для того, чтобы существовала равномерно ограниченная на K последовательность полиномов $\{P_k(z)\}$, которая на множестве F сходится к функции $\varphi(z)$, необходимо и достаточно, чтобы на E° существовала ограниченная аналитическая функция $f(z)$, такая, что 1) $f(z)=\varphi(z)$, при $z\in F\setminus\partial E$, 2) $\varphi(z)$ почти всюду на $F\cap\partial E$ совпадает с граничными значениями функции $f(z)$ в смысле конформного отображения.*

Чтобы доказать эту теорему достаточно в предыдущей теореме взять в качестве H множество $F\cap\partial E$, в качестве B—множество $F\setminus\partial E$.

Пусть G — ограниченное открытое множество. Обозначим $K=\overline{G}$ и пусть E связано с K так, как выше. Взяв в теореме 3 $H=\varnothing$ и $B=G$, получим теорему Рубеля--Шилдса.

Теорема 5. (Рубель, Шилдс [6]). *Пусть $\varphi(z)$ — ограниченная аналитическая функция на G. Для того, чтобы на G существовала равномерно ограниченная последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$, сходящаяся к $\varphi(z)$ на G, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(z)$ аналитически и ограниченно продолжалась на множестве E°.*

Замечание 7. Рубель и Шилдс [6] доказали, что если

$$M=\sup_{z\in E^\circ}|\varphi(z)|,$$

то последовательность полиномов, существование которой утверждает теорема 5, можно взять равномерно ограниченной на E° числом M. То же самое непосредственно следует также из нашего замечания 5.

Приводимое ниже следствие теоремы 3 дополняет теорему Рубеля—Шилдса в том смысле, что отвечает на вопрос о сходимости последовательности $\{P_n(z)\}$ также в точках множества ∂E.

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 всегда можно взять такую равномерно ограниченную на E последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$, которая, сходясь на E° к функции $\varphi(z)$, сходится также почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения. Для того, чтобы эта последовательность была кроме того сходящейся во всех точках множества ∂E необходимо и достатчно, чтобы на ∂E существовала ограниченная функция первого класса Бэра, совпадающая почти всюду на ∂E с граничными значениями функции $\varphi(z)$ в смысле конформного отображения.*

Первая часть теоремы следует из замечания 4, вторая часть — из теоремы 3, если ее применить для компакта E, взяв при этом $H=\partial E$ и $B=E^\circ$.

Кировакавский педагогический институт

Поступила 29. X. 1985

Ա. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ. Կոմպլեքս հարթության կոմպակտ բազմությունների վրա հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների հաջորդականությամբ ֆունկցիաների ներկայացման մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում բնութագրված են կապակցված լրացումով կոմպակտ բազմության եզրում որոշված այն ֆունկցիաները, որոնցից յուրաքանչյուրին հնարավոր է կետայնորեն մոտարկել այդ կոմպակտի վրա հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների հաջորդականությամբ։ Լուծված է նաև ավելի ընդհանուր խնդիր, որում կոմպակտի եզրի փոխարեն վերցված է նրա կամայական փակ ենթաբազմությունը։

Որպես հետևանքներ ստացված են Ռուբելի և Շիլդսի մի թեորեմը և նրա որոշ լրացումը։

A. A. DANIELIAN. *On representation of functions by uniformly bounded sequences of polynomials on the complex plane compact sets* (summary)

The paper describes the functions, defined on the boundary of a compact set with connected complement, which can bepointwisely approximated by the uniformly bounded on that compact sequence of polynomials. A more general problem is also solved, where instead of the boundary of a compact an arbitrary closed subset of the latter is taken.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* О последовательностях полиномов, ограниченных в совокупности, Матем. сб., 42, 1935, 719—724.
2. *С. Н. Мергелян, А. А. Талалян.* Об одном классе точечно-разрывных функций. ДАН Арм.ССР, XXXII, № 4, 1961, 183—187.
3. *Э. Бишоп.* Структура некоторых мер. Сборник переводов «Некоторые вопросы теории приближений», М., ИЛ, 1963, 74—86.
4. *Э. Бишоп.* Граничные меры аналитических дифференциалов. Сборник переводов «Некоторые вопросы теории приближений», М., ИЛ, 1963, 87—100.
5. *С. В. Колесников.* Об одной теореме М. В. Келдыша, касающейся поточечной сходимости последовательности полиномов, Матем. сб., 124 (166), № 4 (8), 1984.
6. *L. A. Rubel and A. L. Shields.* Bounded approximation by polinomials, Acta Math., 112, 1964, 145—162.
7. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, М., «Мир», 1973.
8. *К. Иосида.* Функциональный анализ, М., «Мир», 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 4, 1986 Математика

УДК 517.982

Г. О. АКОПЯН

ОБ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Регулярность решений гипоэллиптического уравнения с постоянными коэффициентами $P(D)\,u=\sum_{\alpha}\gamma_\alpha D^\alpha u=0$ определяется ростом функции $d(\xi)$ — расстояния от точки $\xi\in R_n$ до поверхности $\{\zeta;\ \zeta\in C_n,\ P(\zeta)=0\}$ (см. [1], теорема 4.4.1).

Г. Г. Казаряном в работе [4] введено понятие веса гипоэллиптичности $h(\xi)=h(P,\xi)$ для одного класса регулярных (невырожденных) операторов, изученных С. М. Никольским [2] и В. П. Михайловым [3], обобщающее понятие показателя гипоэллиптичности, при помощи которого получены наилучшие оценки для производных решений уравнения $P(D)u=0$ в терминах классов Жевре.

Цель настоящей работы — получение наилучших оценок в терминах классов Жевре для производных решений нерегулярных (вырожденных) уравнений, изученных в работах Б. Пини [5], Г. Г. Казаряна [6], [7], В. Н. Маргаряна [8] и других. Вес гипоэллиптичности для таких операторов выписывается явно. При этом мы описываем то множество $\mathfrak{M}(P)$, которое порождает вес гипоэллиптичности $h(P,\xi)$ данного нерегулярного гипоэллиптического оператора $P(D)$. Отметим, что в работе [9] было доказано, что для произвольного гипоэллиптического оператора $P(D)$ множество $\mathfrak{M}(P)$ является вполне правильным выпуклым множеством.

§ 1. Определения и постановка задачи

Пусть R_n, $E_n(C_n)$ — n-мерные эвклидовы пространства точек $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$ с вещественными (соответственно $\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ — комплексными) координатами, Z_n^+ — n-мерное пространство мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами, $R_n^{(0)}=\left\{\xi;\ \xi\in R_n,\ \prod_{j=1}^n \xi_j\neq 0\right\}$, $R_n^+=\{\xi;\ \xi\in R_n,\ \xi_j>0,\ j=1,\cdots,n\}$.

Для $\xi\in R_n$, $\mu\in R_n^+$, $\lambda\in R_n^{(0)}\cap R_n^+$, $\alpha\in Z_n^+$, $t>0$, положим

$$|\xi|=\sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_j^2},\quad |\xi|_\lambda=\sqrt{\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{2/\lambda_j}},\quad |\xi^\mu|=|\xi_1|^{\mu_1}\cdots|\xi_n|^{\mu_n},\quad t^\lambda\xi=(t^{\lambda_1}\xi_1,\cdots$$

$$t^{\lambda_n}\xi_n),\quad |\alpha|=\sum_{j=1}^n \alpha_j,\quad \xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n},\quad D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n},$$

где $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j=1,\cdots, n)$ — обобщенные по С. Л. Соболеву производные.

Пусть $P(D)=\sum_{\alpha}\gamma_\alpha D^\alpha$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными комплексными коэффициентами и $P(\xi)=\sum_{\alpha}\gamma_\alpha\xi^\alpha$ — отвечающий ему характеристический многочлен (полный символ) (сумма здесь распространяется по некоторому конечному набору мультииндексов, который обозначим через (P), т. е. $(P)=\{\alpha;\ \alpha\in Z_n^+,\ \gamma_\alpha\neq 0\}$). Оператор $P(D)$ называется гипоэллиптическим, если все непрерывные решения уравнения $P(D)\,u=0$ являются бесконечно дифференцируемыми.

Определение 1.1 Пусть $\mathbf{A}=\{\nu^k\}_{k=1}^m$, $\nu^k\in R_n$. Характеристическим многогранником (х. м.) $\mathbf{N}=\mathbf{N}(\mathbf{A})$ набора $\mathbf{A}$ назовем наименьший выпуклый многогранник в R_n, содержащий все точки набора $\mathbf{A}$.

Определение 1.2. Характеристическим многогранником (х. м.) или многогранником Ньютона многочлена $P(\xi)=\sum_{\alpha}\gamma_\alpha\xi^\alpha$ называется минимальный выпуклый многогранник $\mathbf{N}(P)$ в R_n, содержащий все точки $\alpha\in(P)\cup\{0\}$.

Определение 1.3. Многогранник $\mathbf{N}$ называется вполне правильным (в. п.), если а) $\mathbf{N}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат и б) все координаты внешних нормалей $(n-1)$-некоординатных граней $\mathbf{N}$ положительны.

Легко показать (см., например, [10]), что х. м. $\mathbf{N}\ (P)$ гипоэллиптического оператора является вполне правильным многогранником.

Обозначим k-мерные $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ грани многогранника $\mathbf{N}$ через $\mathbf{N}_i^k$ $(i=1,\cdots, M_k)$, $(n-1)$-мерная грань $\mathbf{N}_i^{n-1}$ $(i=1,\cdots, M_{n-1})$ многогранника $\mathbf{N}$ называется главной (см. [3]), если единичная внешняя нормаль $\lambda^i=(\lambda_1^i,\cdots,\lambda_n^i)$ этой грани имеет хотя бы одну положительную координату. Главная грань $\mathbf{N}_i^{n-1}$ называется вполне правильной (в. п.) (см. [7]), если $\lambda_j^i>0$ $(j=1,\cdots, n)$. Точка $\alpha\in\mathbf{N}$ называется главной (соответственно, вполне правильной (в. п.)) (см. [3], [7]), если α является предельной хотя бы для одной $(n-1)$-мерной главной (соответственно в. п.) грани многогранника $\mathbf{N}$. Грань $\mathbf{N}_i^k$, $k<n-1$ называется главной (соответственно в. п.), если она состоит из главных (соответственно в. п.) точек.

Определение 1.4. (См. [3], [7]). Грань $\mathbf{N}_i^k$ $(i=1,\cdots, M_k;\ k=0,\cdots, n-1)$ х. м. $\mathbf{N}(P)$ многочлена $P(\xi)$ назовем регулярной (невырожденной), если подмногочлен $P^{i,k}(\xi)$, отвечающий грани $\mathbf{N}_i^k$, удовлетворяет условию

$$P^{i,k}(\xi)=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}_i^k}\gamma_\alpha\xi^\alpha\neq 0,\ \ \xi\in R_n^{(0)}.$$

Грани, не являющиеся регулярными, будем называть нерегулярными. Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) назовем регулярным (невырожденным), если все главные грани х. м. $\mathbf{N}\ (P)$ регулярны. В противном случае оператор $P(D)$ назовем нерегулярным (вырожденным).

Обозначим через $\Lambda_i^k = \Lambda_i^k(P)$ множество тех внешних (относительно N) нормалей λ k-мерной в. п. некоординатной грани N_i^k $(0 \leqslant k \leqslant n-1,\ 1 \leqslant i < M_k)$, для которых $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j = 1$. После такой нормировки можно считать, что все компоненты векторов из Λ_i^k рациональны.

Пусть $\nu^k \in R_n^+$ $k = 1, \cdots, m$. Обозначим через $h(\xi)$ функцию $h(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{m} |\xi^{\nu^k}|$, а через $\mathrm{N}(h)$ х. м. набора $\{\nu^k\}_{k=1}^{m}$.

Определение 1.5 (см. [4]). Функция $h(\xi)$ называется весом гипоэллиптичности оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$), если для некоторой постоянной $c > 0$

$$A(\xi) = \sum_{|\alpha| \neq 0} \left| \frac{D^{\alpha} P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leqslant \frac{c}{h(\xi)},\ \xi \in R_n, \tag{1.1}$$

и для любого $\nu \in R_n^+ \setminus \mathrm{N}(h)$, $\nu \neq 0$ существует последовательность $\{\xi_s\}_{s=1}^{\infty}$ такая, что $\xi^s \to \infty$ и

$$(h(\xi^s) + |(\xi^s)^{\nu}|) \cdot A(\xi^s) \to \infty, \text{ при } s \to \infty.$$

§ 2. Вес гипоэллиптичности для одного класса нерегулярных гипоэллиптических операторов

Обозначим через P множество гипоэллиптических операторов с постоянными коэффициентами, все k-мерные главные грани $(k < n-1)$ х. м. $\mathrm{N}(P)$ которых регулярны и положим

$$\mathfrak{M}(P) = \{\nu;\ \nu \in R_n^+;\ |\xi^{\nu}| \cdot A(\xi) \leqslant \mathrm{const} < \infty,\ \xi \in R_n\}.$$

Легко заметить, что для любого гипоэллиптического многочлена $P(\xi)$ $\mathrm{N}(h) \subset \mathfrak{M}(P)$ и если $\mathfrak{M}(P)$-многогранник, то функция $h(\xi) = \sum\limits_{n=1}^{m} |\xi^{l^k}|$, где $l^k \in R_n^+$ $(k = 1, \cdots, m)$ вершины многогранника $\mathfrak{M}(P)$, является весом гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)$.

Пусть все грани х. м. $\mathrm{N}(P)$ оператора $P(D) \in \mathrm{P}$ регулярны за исключением, быть может, единственной главной грани $\mathrm{N}_{i_0}^{n-1}$, $\lambda^0 \in \Lambda^{n-1}$ — нормаль грани $\mathrm{N}_{i_0}^{n-1}$ (которая определяется однозначно), $0 < \delta \leqslant 1$. Положим

$$\sum (P^{i_0, n-1}) = \{\tau \in R_n^{(0)},\ P^{i_0, n-1}(\tau) = 0,\ |\tau| = 1\},$$

$$B(\delta) = \{\nu;\ \nu \in R_n^+,\ (\lambda^0, \nu) \leqslant \delta,\ (\lambda, \nu) \leqslant 1,\ \lambda \in \Lambda^{n-1}\}.$$

Лемма 2.1. *Если все главные грани х. м. оператора $P(D) \in \mathrm{P}$ регулярны, а грань $\mathrm{N}_{i_0}^{n-1}$ — не регулярна, то для некоторого числа $0 < \delta_0 < 1$ $\mathfrak{M}(P) = B(\delta_0)$.*

Доказательство. Пусть $\tau \in \sum (P^{i_0, n-1})$, $0 < \varepsilon < 1$, $\theta \in R_1$, $l(\lambda)$ — наименьшее натуральное число такое, что $l(\lambda)/\lambda_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ — целые (существование такого числа следует из рациональности λ_i $(i = 1, \cdots, n)$), положим

$$Q_\varepsilon(\xi, \theta, \tau) = \sum_{l=1}^{n} \left[\left(\frac{\xi_l}{\tau_l} \right)^{2l(\lambda)/\lambda_l} - \theta^{2l(\lambda)} \right]^2 - \varepsilon \cdot \theta^{4l(\lambda)},$$

$Q_\varepsilon(\xi, \theta, \tau)$ является многочленом от $(n+1)$ вещественных переменных: $\theta, \xi_1, \cdots, \xi_n$. Пусть $d(\xi)$ — расстояние от точки $\xi \in R_n$ до поверхности $\{\zeta;\ \zeta \in C_n,\ P(\zeta) = 0\}$ и

$$M(\theta, \tau) = \inf_{Q_\varepsilon(\xi, \theta, \tau) < 0} d(\xi).$$

Тогда

$$-M(\theta, \tau)^2 = \sup\{-|\xi - \zeta|^2\},$$

где верхняя грань берется по всем вещественным θ, ξ, для которых $Q_\varepsilon(\xi, \theta, \tau) \leqslant 0$ и по всем $\zeta \in C_n$, $P(\zeta) = 0$, или, что то же самое, для всех $\theta \in R_1$ и $\xi \in R_n$, для которых выполняется неравенство

$$(1 - \sqrt{\varepsilon})\theta^{2l(\lambda)} \leqslant \left(\frac{\xi_l}{\tau_l} \right)^{2l(\lambda)/\lambda_l} \leqslant (1 + \sqrt{\varepsilon})\theta^{2l(\lambda)}, \tag{2.1}$$

и по всем $\zeta \in C_n$, $P(\zeta) = 0$. Если рассматривать переменную $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ как $2n$ вещественных переменных, то по лемме 2.1 из приложения к работе [1] следует, что существуют рациональные числи $A(\tau)$, $a(\tau)$ такие, что при $\theta \to \infty$

$$M(\theta, \tau) = A(\tau)\,\theta^{a(\tau)}(1 + o(1)). \tag{2.2}$$

Так как $P(D) \in \mathbf{P}$, то $M(\theta, \tau) \to \infty$ при $\theta \to \infty$ и, следсвательно $A(\tau) \neq 0$, $a(\tau) > 0$.

Обозначим

$$\delta_0 = \inf_{\tau \in \Sigma(P^{l_0, n-1})} a(\tau).$$

Из гипоэллиптичности оператора $P(D)$ следует, что $\delta_0 > 0$ (см [1], теорема 4.1.3). Докажем, что $B(\delta_0) = \mathfrak{M}(P)$.

Сначала покажем, что $\mathfrak{M}(P) \subset B(\delta_0)$. Пусть, наоборот, при выполнении условий леммы существует вектор $\nu \in \mathfrak{M}(P) \setminus B(\delta_0)$, $\nu \neq 0$. В силу леммы 3.5 работы [4] достаточно рассмотреть случай $1 \geqslant (\nu, \lambda^0) > \delta_0$. По определению числа δ_0 существует точка $\tau^0 \in \Sigma(P^{l_0, n-1})$ такая, что

$$\delta_0 \leqslant a(\tau^0) < (\nu, \lambda^0). \tag{2.3}$$

Из определений $M(\theta, \tau^0)$, $a(\tau^0)$ и $A(\tau^0)$ следует существование последовательности $\{\theta_s\}_{s=1}^{\infty}$ (и, следовательно, последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$) такой, что $\theta_s \to \infty$ (и, следовательно, по (2.1) $\xi^s \to \infty$) и

$$d(\xi^s) = A(\tau^0)\,|\xi^s|_{\lambda^0}^{a(\tau^0)}(1 + o(1)) \tag{2.4}$$

при $s \to \infty$.

Тогда в силу леммы 4.1.1 работы [1], из (2.1) и (2.4) имеем

$$|(\xi^s)^\nu| \cdot A(\xi^s) \geqslant c\,\theta_s^{(\nu, \lambda^0)} \cdot A(\xi^s) \geqslant c_1 |\xi^s|_{\lambda^0}^{(\nu, \lambda^0)} d^{-1}(\xi^s). \tag{2.5}$$

Из (2.3) и (2.5) получим, что $\nu \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$. Таким образом, доказано, что $\mathfrak{M}(P) \subset B(\delta_0)$.

Для доказательства обратного включения $B(\delta_0)\subset\mathfrak{M}(P)$ воспользуемся методом Михайлова—Казаряна (см. [3], [7]). Пусть, наоборот, существует точка $\nu\in B(\delta_0)\setminus\mathfrak{M}(P)$, $\nu\neq 0$. Тогда существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ такая, что при $s\to\infty$ $\xi^s\to\infty$,

$$|(\xi^s)^{\nu}|\cdot A(\xi^s)\to\infty. \tag{2.6}$$

Не умоляя общности, можно считать, что $\xi_i^s>0$ $(i=1,\cdots,n;\ s=1,2,\cdots)$. Положим

$$\lambda_i^s=\frac{\ln\xi_i^s}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln\xi_k^s)^2}},\quad(i=1,\cdots,n),\ \rho_s=\exp\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\ln\xi_k^s)^2},$$

тогда

$$\xi^s=\rho_s^{\lambda^s}\ (\xi_i^s=\rho_s^{\lambda_i^s}\quad i=1,\cdots,n),\ s=1,2,\cdots,$$

Так как для всех $s=1,2,\cdots$ векторы λ^s находятся на единичной сфере, то у последовательности $\{\lambda^s\}$ есть предельная точка λ^{∞} и за счет, быть может, взятия подпоследовательности можно считать, что $\lambda^s\to\lambda^{\infty}$. Из выпуклости х. м, $\mathbf{N}$ следует, что λ^{∞} является внешней нормалью к одной и только одной грани х. м. $\mathbf{N}$.

Возьмем в Z_n^+ какой-нибудь базис $(e^{1,1},e^{1,2},\cdots,e^{1,n})$, $e^{1,1}=\lambda^{\infty}$. Тогда $\lambda^s=\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_{1,i}^s e^{1,i}$ причем, так как $\lambda^s\to\lambda^{\infty}=e^{1,1}$, при $s\to\infty$, то $\chi_{1,1}^s\to 1$, а при $i=2,\cdots,n$ $\chi_{1,i}^s=o(\chi_{1,1}^s)=o(1)$. За счет выбора подпоследовательности можно считать, что при $s\to\infty$

$$\frac{\lambda^s-\chi_{1,1}^s e^{1,1}}{|\lambda^s-\chi_{1,1}^s e^{1,1}|}=\frac{\sum\limits_{i=2}^{n}\chi_{1,i}^s e^{1,i}}{\left|\sum\limits_{i=2}^{n}\chi_{1,i}^s e^{1,i}\right|}\to e^{2,2}.$$

Перейдем в подпространстве, натянутом на $(e^{1,1},\cdots,e^{1,n})$ к новому базису $(e^{2,2},\cdots,e^{2,n})$, тогда $\lambda^s=\chi_{1,1}^s e^{1,1}+\sum\limits_{i=2}^{n}\chi_{2,i}^s e^{2,i}$, причем очевидно $\chi_{2,2}^s=o(\chi_{1,1}^s)=o(1)$, $\chi_{2,i}^s=o(\chi_{2,2}^s)$, $i=3,\cdots,n$.

Поступая аналогично в подпространстве с базисом $(e^{2,3},\cdots,e^{2,n})$, и т. д. получим (после переобозначений), что

$$\lambda^s=\sum_{i=1}^{n}\chi_i^s e^i,\ \chi_1^s\to 1,\ \chi_{i+1}^s=o(\chi_i^s),\ i=1,\cdots,n-1.$$

При этом существует номер s_0 такой, что для всех $s\geqslant s_0$

$$\chi_i^s>0\ (i=1,\cdots,m),\ \chi_i^s=0\ (i=m+1,\cdots,n),\ m\leqslant n.$$

Рассмотрим грани $\mathbf{N}_{j_1}^{q_1},\cdots,\mathbf{N}_{j_m}^{q_m}$ х. м. $\mathbf{N}$, удовлетворяющие условиям, что $\mathbf{N}_{j_1}^{q_1}$ лежит в опорной гиперплоскости к $\mathbf{N}$ с внешней нормалью e^1 (после нормировки $\min(e_1^1,\cdots,e_n^1)=1$, $e^1\in\Lambda_{j_1}^{q_1}$), а каждая грань

$N^{q_i}_{j_i}$ $(i=2,\cdots,m)$ лежит в опорной гиперплоскости (рассматриваемой изолированно) к предыдущей с нормалью e^i. При этом если существует несколько подграней грани $N^{q_i}_{j_i}$ с нормалью e^{i+1}, то в качестве $N^{q_{i+1}}_{j_{i+1}}$ условимся брать ту, для которой (e^{i+1}, α) больше. Из построения граней $N^{q_1}_{j_1},\cdots, N^{q_m}_{j_m}$ видно, что для размерности этих граней выполнено соотношение $k_1 > k_2 > \cdots > k_m$.

Пусть $P^{j_i, q_i}(\xi)$ — подмногочлен многочлена $P(\xi)$, отвечающий грани $N^{q_i}_{j_i}$ и α—произвольная точка, принадлежащая всем $N^{q_i}_{j_i}(i=1,\cdots,n)$, т. е. $\alpha\in N^{q_m}_{j_m}$. Изучим поведение многочленов $P(\xi^s)$ и $D^\alpha P(\xi^s)$ при $\rho_s\to\infty$, $\xi^s=\rho_s^{\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_i^s e^i}$. Ради простоты записи опустим s в обозначениях. За счет выбора подпоследовательности можно считать, что при некотором $r\,(1\leqslant r\leqslant m)$ $\rho^{\chi_r}\to\infty$, $\rho^{\chi_{r+1}}\to b\geqslant 1$ (при $r=n$ положим, по определению, $\chi_{n+1}=0$). Тогда из e^i однородности многочленов $P^{j_i, q_i}(\xi)$ (см. [3]), из выпуклости х. м. N и его граней, получаем при некоторых $\sigma_1,\cdots,\sigma_r$, $1\leqslant r\leqslant m$ (e^{n+1} — какой-нибудь единичный вектор, $\chi_{n+1}=0$)

$$P(\xi)=\rho^{(\alpha,\chi_1 e^1)}\left[P^{j_1, q_1}\left(\rho^{\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_i e^i}\right)+\tilde{o}(\rho^{-\sigma_1\chi_1})\right]=\cdots=$$

$$=\rho^{\alpha\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_i e^i\right)}\cdot\left[P^{j_r, q_r}\left(\rho^{\sum\limits_{i=r+1}^{n}\chi_i e^i}\right)+\tilde{o}(\rho^{-\sigma_r\chi_r})\right]. \qquad (2.7)$$

Так как $\rho^{\chi_{r+1}}\to b>0$, то $\rho^{\sum\limits_{i=r+1}^{n}\chi_i e^i}\to b^{e^{r+1}}\equiv\eta$. Очевидно при всех $i=1,\cdots$ $\cdots, n$ $0<\eta_i<\infty$ (η_i — конечные степени положительного числа b).

Рассмотрим два следующих случая:

а) $P^{j_r, q_r}(\eta)\neq 0$, б) $P^{j_r, q_r}(\eta)=0$.

Рассуждая так, как это делается в [3] или [7], легко доказать, что в случае а)

$$|(\xi^s)^\nu|\cdot A(\xi)<\text{const}<\infty,\quad s=1,2,\cdots.$$

Это противоречит нашему предположению.

В случае б) грань $N^{q_r}_{j_r}$ совпадает с нерегулярной гранью $N^{n-1}_{i_0}$, $r=m=1$, $q_r=n-1$, $e^1=t\lambda^0\,(t\in R_1)$ являетея внешней нормалью грани $N^{n-1}_{i_0}$, $\in\sum(P^{i_0, n-1})$.

Пусть $s\to\infty$, имеем

$$|\xi^s|_{\lambda^0}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|\xi^s_j|^{2/\lambda^0_j}}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\rho_s^{\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_j^s e^i_j}\right)^{2/\lambda^0_j}}=$$

$$=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\rho_s^{2\chi^s_1 t}\,(1+\tilde{o}(1))}=\sqrt{n}\,\rho_s^{\chi^s_1 t}\,(1+o(1)),$$

т. е.

$$\xi^s/|\xi^s|_{\lambda^0}^{\lambda^0} \to \tau_i/(\sqrt{n})^{\lambda^0} = \tau \in \sum (P^{l_0, n-1})$$

и $Q_s(\xi^s, |\xi^s|_{\lambda^0}, \tau) \leqslant 0$ при достаточно больших s. Используя это, в силу (2.2) получим, что при $s \to \infty$

$$d(\xi^s) \geqslant M(\xi^s|_{\lambda^0}, \tau) = A(\tau)\cdot|\xi^s|_{\lambda^0}^{a(\tau)}(1 + o(1)).$$

Но поскольку

$$|(\xi^s)^\nu| \leqslant c|\xi^s|_{\lambda^0}^{(\nu, \lambda^0)},$$

то из леммы 4.1.1 работы [1] с учетом того, что $(\nu, \lambda^0) \leqslant \delta_0$ $(\nu \in B(\delta_0))$, с некоторыми положительными постоянными c, c_1, c_2 имеем

$$|(\xi^s)^\nu|\cdot A(\xi^s) \leqslant c|\xi^s|_{\lambda^0}^{(\nu, \lambda^0)}\cdot A(\xi^s) \leqslant c_1|\xi^s|_{\lambda^0}^{a(\tau)}\cdot A(\xi^s) \leqslant c_1 d(\xi^s)\cdot A(\xi^s) \leqslant c_2,$$

Это противоречит (2.5) и показывает, что $B(\delta_0)) \setminus \mathfrak{M}(P) = \varnothing$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. Пусть все главные грани х. м. оператора $P(D) \in \mathbf{P}$ за исключением главных нерегулярных граней $\mathbf{N}_1^{n-1}, \cdots, \mathbf{N}_i^{n-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant M_{n-1})$ регулярны, тогда существуют числа δ_l $0 < \delta_l < 1$ $(i = 1, \cdots, M_{n-1})$ такие, что $\mathfrak{M}(P) = B(\delta_1, \cdots, \delta_l) = \{\nu;\ \nu \in R_n^+;\ (\lambda^j, \nu) \leqslant \delta_j\ j = 1, \cdots, i,\ (\lambda, \nu) \leqslant 1\ \lambda \in \Lambda^{n-1}\}$, где λ^j — внешняя нормаль грани $\mathbf{N}_j^{n-1}$ $(j = 1, \cdots, i)$.

Доказательство проводится аналогично.

Так как по доказанной лемме 2.1 множество $\mathfrak{M}(P)$ является многогранником, то если обозначить через e^k, $k = 0, \cdots, M'$ вершины многогранника $\mathfrak{M}(P)$ и

$$h(\xi) = \sum_{k=0}^{M'} |\xi^{e^k}|, \tag{2.8}$$

то функция $h(\xi)$, порождаемая многогранником $\mathfrak{M}(P)$, является весом гипоэллиптичности оператора $P(D) \in \mathbf{P}$.

§ 3. Оценка производных решений внутри области

Пусть $\mathbf{N} = \mathbf{N}(P)$ — в. п. х. м., $h(\xi)$ — вес оператора $P(D) \in \mathbf{P}$, многогранник $\mathfrak{M}(P)$ определяется как выше и $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ — произвольная точка из $\mathfrak{M}(P)$ с рациональными компонентами. Обозначим через $k(\nu)$ наименьшее натуральное число такое, что $k(\nu)\cdot\nu \in Z_n^+$.

Положим также $N(P) = \{u;\ u \in C(E_n),\ P(D)u = 0\}$. Справедлива следующая

Теорема 3.1. *Пусть $h(\xi)$ — вес гипоэллиптичности оператора $P(D) \in \mathbf{P}$ и $\nu \in \mathfrak{M}(P)$. Пусть $u \in N(P)$ и K — произвольный компакт из E_n. Тогда существует постоянная $c = c(K) > 0$ такая, что для всех $j = 0, 1, \cdots$*

$$\sup_{x \in K} |D^{[k(\nu)\cdot\nu]j} u(x)| \leqslant c^j j^{k(\nu)j}. \tag{3.1}$$

Доказательство теоремы 3.1 ничем не отличается от доказательства теоремы 3.1 работы [4].

Мы покажем, что результат теоремы 3.1 является неулучшаемым. С этой целью сначала докажем следующее вспомогательное предложение.

Лемма 3.1. *Пусть* $\nu \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$ *и* $(\nu, \lambda) < 1$, $\lambda \in \Lambda^{n-1}$. *Тогда существует последовательность* $\zeta^s \in C_n$, $s = 1, 2, \cdots$ *и постоянная* $c > 0$ *такие, что* $P(\zeta^s) = 0$ *и* $|\operatorname{Im} \zeta^s| \leqslant c\ (\operatorname{Re} \zeta^s)^\nu|$.

Доказательство. Так как $\nu \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$, то существует последовательность ξ^s, $s = 1, 2, \cdots$, такая, что при $s \to \infty$

$$|(\xi^s)^\nu| \cdot A(\xi^s) \to \infty. \tag{3.2}$$

По лемме 4.1.1 работы [1] из (3.2) следует, что при $s \to \infty$

$$d(\xi^s) = \bar{o}\,|(\xi^s)^\nu|). \tag{3.3}$$

Из определения функции $d(\xi)$ следует, что для каждого $s = 1, 2, \cdots$ существует точка $\zeta^s \in C_n$ такая, что $P(\zeta^s) = 0$ и $d(\zeta^s) = |\zeta^s - \zeta^s|$. Из соотношения (3.3) получим при $s \to \infty$

$$|\operatorname{Im} \zeta^s| = \bar{o}(|(\zeta^s)^\nu|).$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\xi_i^s > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $s = 1, 2, \cdots$. Обозначим

$$\xi^s = \rho_s^{\lambda^s}\ (\xi_i^s = \rho_s^{\lambda_i^s}\ i = 1, \cdots, n),\ s = 1, 2, \cdots,$$

где

$$\rho_s = \exp\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\ln \xi_i^s)^2}\right),\ \lambda^s = (\lambda_1^s, \cdots, \lambda_n^s),\ \lambda_i^s = \ln \xi_i^s / \rho_s,\ i = 1, \cdots, n.$$

Аналогично доказательству леммы 2.1 получим представление (2.7), где возможны 2 следующих случая:

а) $P^{j_r, q_r}(\eta) \neq 0$ и б) $P^{j_r, q_r}(\eta) = 0$.

В случае а) простые выкладки показывают, что при условии $(\lambda, \delta) < 1$, $\lambda \in \Lambda^{n-1}$,

$$|(\zeta^s)^\delta| \cdot A(\xi^s) \leqslant \text{const} < \infty,$$

что противоречит соотношению (3.2).

Рассмотрим случай б): $P^{j_r, q_r}(\eta) = 0$, тогда $r = m = 1$, $q_r = n - 1$, $e^1 = t\lambda^0 (t \in R^1)$ является внешней нормалью некоторой нерегулярной грани $N_{i_0}^{n-1}$, $i_0 = 1, \cdots, M_{n-1}$, $\eta \in \sum (P^{i_0, n-1})$. При этом имеем при $s \to \infty$

$$|\xi^s|_{\lambda^0} = \sqrt{n}\, \rho_s^{\chi_1^s \cdot t}(1 + \tilde{o}(1)),$$

т. е.

$$\xi^s / |\xi^s|_{\lambda^0}^{\lambda^0} \to \eta / \sqrt{n})^{\lambda^0} = \tau \in \sum (P^{i_0, n-1}).$$

Положим $t_s = |\xi^s|_{\lambda^0}$, и пусть $s \to \infty$, тогда

$$\xi^s = \tau \cdot t_s^{\lambda^0}(1 + \tilde{o}(1)), \tag{3.5}$$

где $\tau \in \sum (P^{i_0, n-1})$.

Из (3.3) следует, что

$$|\mathrm{Re}\,(\zeta_i^s - \xi_i^s)| = \bar{o}\,(|(\xi^s)^\nu|).$$

Отсюда, с учетом (3.5) и условия $(\nu, \lambda^0) < 1$, получим с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$c_1^{-1}|\xi_i^s| \leqslant |\mathrm{Re}\,\xi_i^s| \leqslant c_1|\xi_i^s|. \tag{3.6}$$

Из (3.4) и (3.6) следует существование постоянной $c_2 > 0$ такой, что

$$|\mathrm{Im}\,\xi^s| \leqslant c_2|(\mathrm{Re}\,\xi^s)^\nu|.$$

Лемма 3.1 доказана.

Теперь уже мы можем доказать основной результат настоящего параграфа.

Теорема 3.2. *Пусть $\Omega \in R_n$ — произвольное открытое множество. Пусть все главные грани х. м. опрератора $P(D) \in \mathbf{P}$ регулярны, а грань $\mathbf{N}_{i_0}^{n-1}$ не регулярна, $x_0 \in \Omega$. Если для любой функции $u \in N(P, \Omega) = \{V,\ V \in C(\Omega),\ P(D)\,V = 0\}$ существуют постоянная $c = c(u) > 0$, мультииндекс $\alpha \neq 0$ и рациональное число $l = l(u)$ такие, что*

$$|D^{j\cdot\alpha}u(x^0)| < c^j j^{l\cdot j},\ j = 1, 2, \cdots, \tag{3.7}$$

то

$$\frac{\alpha}{l} = \left(\frac{\alpha_1}{l}, \cdots, \frac{\alpha_n}{l}\right) \in \mathfrak{M}(F) = B(\hat{\delta}_0).$$

Доказательство. Пусть в $N(P, \Omega)$ определена топология, индуцированная из $L_2^{loc}(\Omega)$. По теореме 4.1, 2 работы [1] (см. замечание после этой теоремы) эта топология совпадает с топологией индуцированной из $C^\infty(\Omega)$. Тогда для любого натурального числа m множество

$$F_m = \{u;\ u \in N(P, \Omega),\ |D^{j\cdot\alpha}u(x^0)| \leqslant m^j \cdot j^{l\cdot j},\ j = 1, 2, \cdots\}$$

замкнуто, а из неравенства (3.7) следует, что

$$N(P, \Omega) = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m.$$

Тогда из теоремы Бэра о категориях и из того, что $N(P, \Omega)$ является пространством Фреше, следует существование натурального числа m_0 такого, что множество F_{m_0} имеет внутреннюю точку. Так как, с другой стороны, очевидно, F_{m_0} является выпуклым и симметрическим множеством, то начало координат является внутренней точкой для F_{m_0}. Это означает, что существует число $t > 0$ и компакт $K \subset \Omega$ такие, что F_{m_0} содержит всякую функцию $u \in N(P, \Omega)$, L_2-норма которой по компакту K не превосходит t, т. е. для всех $l = 1, 2, \cdots$

$$|D^{j\cdot\alpha}u(x^0)| \leqslant m_0 j^{l\cdot j}\, t^{-1} \cdot \left[\int_K |u(x)|^2\,dx\right]^{1/2} \tag{3.8}$$

как только

$$\int_K |u(x)|^2\,dx \leqslant t^2.$$

Так как неравенство (3.8) однородно по u, и оно верно при $\int\limits_K |u(x)|^2\,dx \leqslant t^2$, то неравенство (3.8) справедливо для любой функции $u \in N(P, \Omega)$.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы.

Пусть наоборот, при выполнении условий теоремы $a/l \overline{\in} \mathfrak{M}(P) = B(\delta_0)$. Так как $\mathfrak{M}(P)$ замкнуто, то в силу того, что $a/l \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$, следует существование числа $b > 1$, для которого $a/b \cdot l \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$, т. е. $(\lambda^0, a/b \cdot l) > \delta_0$, где λ^0 — внешняя нормаль грани $\mathbf{N}_{i_0}^{n-1}$.

Пусть $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ — такая последовательность из C_n, что $P(\xi^s) = 0$ $(s = 1, 2, \cdots)$, $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$.

Рассмотрим последовательность функций

$$U_s(x) = \exp\{i(x - x^0, \xi^s)\}, \; s = 1, 2, \cdots.$$

Очевидно, что $U_s \in N(P, \Omega)$. В силу неравенства (3.8) для всех $s = 1, 2, \cdots$

$$|(\xi^s)^{j\cdot a}| \leqslant [\operatorname{mes} K]^{1/2} \cdot m_0^j \cdot j^{j \cdot l}\, t^{-1} e^{a|\operatorname{Im}\xi^s|}, \tag{3.9}$$

где a — верхняя грань $|x - x^0|$, при $x \in K$.

В силу теоремы 4.1.3 работы [1] для гипоэллиптического оператора $P(D)$ имеем, что при $s \to \infty$ $|\operatorname{Im}\xi^s| \to \infty$. Тогда из неравенства (3.9) следует, что для всех $s = 1, 2, \cdots$

$$|(\xi)^{s[|\operatorname{Im}\xi^s|]\cdot a}| \leqslant (\operatorname{mes} K)^{1/2} \cdot m_0^{[|\operatorname{Im}\xi^s|]} \cdot [\,|\operatorname{Im}\xi^s|\,]^{l\cdot[|\operatorname{Im}\zeta^s|]} \cdot t^{-1} \cdot e^{a(1+[|\operatorname{Im}\xi^s|])},$$

где $[c]$ — целая часть числа $c \in R_1$

Это значит, что с некоторой постоянной $c_1 > 0$ и для всех $s = 1, 2, \ldots$

$$|(\zeta^s)^{a/l}| \leqslant c_1\,[|\operatorname{Im}\zeta^s|],$$

или, что то же самое, для всех $s = 1, 2, \ldots$

$$|(\operatorname{Re}\zeta^s)^{a/l}| \leqslant c_1\,[|\operatorname{Im}\zeta^s|]. \tag{3.10}$$

Так как $a/b \cdot l \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$ $(b > 1)$, то по лемме (3.1) существуют последовательность $\{\xi^{0,s}\}_{s=1}^{\infty}$ из C_n и постоянная $c > 0$ такие, что

$$P(\zeta^{0,s}) = 0, \; |\operatorname{Im}\zeta^{0,s}| \leqslant c\,|(\operatorname{Re}\zeta^{0,s})^{a/b\cdot l}|.$$

Так как для последовательности $\{\zeta^{0,s}\}_{s=1}^{\infty}$ также верна оценка (3.10), то отсюда имеем

$$|\operatorname{Im}\zeta^{0,s}| \leqslant c\,|(\operatorname{Re}\zeta^{0,s})^{a/b\cdot l}| = c\,|(\operatorname{Re}\zeta^{0,s})^{a/l}|^{1/b} \leqslant c \cdot c_1 [|\operatorname{Im}\zeta^{0,s}|]^{1/b}.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

Замечание 3.1. Можно доказать аналогичное утверждение в случае наличия нескольких $(n-1)$-мерных нерегулярных граней х. м. $\mathbf{N}(P)$ (см. также замечание 2.1).

§ 4. Описание многогранника $\mathfrak{M}(P)$ для одного класса гипоэллиптических операторов

В этом параграфе для одного класса гипоэллиптических операторов $\{P(D)\beta\}$ мы вычислим число $\delta_0(P)$ и, тем самым, дадим явное описание многогранников $\mathfrak{M}(P)$.

Пусть $\lambda^0=(\lambda_1^0,\cdots,\lambda_n^0)=(1,\cdots,1)$, многочлен $P(\xi)$ представим в виде суммы однородных многочленов по вектору λ^0

$$P(\xi)=\sum_{j=0}^{M(P)}P_j(\xi)=\sum_{j=0}^{M(P)}\sum_{(\lambda^0,\alpha)=|\alpha|=d_j}\gamma_\alpha\xi^\alpha;\ d_0>d_1>\cdots>d_{M(P)}\geqslant 0. \quad (4.1)$$

На множестве $\sum(P)$ (опред. см. в § 2) определим функции $I(\eta)$, принимающую целочисленные значения из множества $\{1,\cdots,M+1\}$ следующим образом:

$$I(\eta)=\min\{\min\{j,\ P_j(\eta)\neq 0,\ \eta\in\sum(P_0)\};\ M+1\}.$$

Приведем некоторые определения.

Определение 4.1 (см. [11]). Пусть $R(\xi)$ — однородный многочлен порядка d. Характеристической линией (х. л.) многочлена $R(\xi)$ в точке $\eta\in R_n$ назовем отрезок прямой $\chi(R,\eta,\delta)=d-(1-\delta)l$ $\delta\in[0,1]$, где l — порядок многочлена $R(\xi)$ в точке η.

Определение 4.2 (см. [11]). Характеристической линией (х. л.) многочлена $P(\xi)$ вида (4.1) в точке $\eta\in\sum(P_0)$ назовем график функции

$$\chi(P,\eta,\delta)=\max_{0\leqslant j\leqslant M}\chi(P_j,\eta,\delta);\ \delta\in[0,1],\ M=M(P).$$

Определение 4.3 (см. [11]). Скажем, что многочлен $P_j(\xi)$ реализует х. л. многочлена $P(\xi)$ вида (4.1) в точке $\eta\in\mathfrak{M}(P_0)$, если существует число $\delta_0\in[0,1]$ такое, что $\chi(P,\eta,\delta_0)=\chi(P_j,\eta,\delta_0)$.

Обозначим через $\omega(P,\eta)$ множество тех индексов j $(0\leqslant j\leqslant M)$, для которых многочлен $P_j(\xi)$ реализует х. л. многочлена $P(\xi)$ в точке η.

Определение 4.4. (см. [11]). Точка $\delta(\eta)\in[0,1]$ называется вершиной х. л. многочлена $P(\xi)$ в точке $\eta\in\sum(P_0)$, если существуют по крайней мере два индекса $j,\ i\in\omega(P,\eta)$; $j\neq i$ такие, что

$$\chi(P_j,\eta,\delta(\eta))=\chi(P_i,\eta,\delta(\eta))=\chi(P,\eta,\delta(\eta)).$$

Обозначим через $A(P,\eta)$ множество тех $\delta\in[0,1]$, которые являются вершинами х. л. многочлена $P(\xi)$ в точке $\eta\in\sum(P_0)$, а через $B(P,\eta,\delta)$ — множество тех индексов $j\in\omega(P,\eta)$, для которых $\chi(P_j,\eta,\delta)=\chi(P,\eta,\delta)$ $(\delta\in[0,1])$.

Обозначим через $\mathbf{P}(\lambda^0)$ $(\lambda^0=(1,\cdots,1))$ множество тех гипоэллиптических операторов $P(D)$ (многочленов $P(\xi)$), с вещественными коэффициентами, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) все главные грани, кроме, быть может, главной грани $\mathbf{N}_{i_*}^{n-1}$, регулярны, $\lambda^0=(1,\cdots,1)\in\Lambda^{n-1}(P)$ является внешней нормалью грани $\mathbf{N}_{i_*}^{n-1}$.

б) если многочлен $P(\xi)$ представлен в виде (4.1), то для каждой точки $\eta\in\sum(P_0)$ и каждого многочлена $P_j(\xi)$, $j=0,1,\cdots,I(\eta)-1$

существуют окрестность $u(\eta)$, гладкие в $U(\eta)\setminus\{0\}$ однородные функции $P_j^{(0)}(\xi,\eta)$, $r(\xi,\eta)$, натуральное число $l_j = l_j(\eta)$ такие, что

$$P_j^{(0)}(\eta,\eta)\neq 0;\ r(\eta,\eta)=0;\ \prod_{j=1}^{n} D_j\, r(\eta,\eta)\neq 0$$

и

$$P_j(\xi)=P_j^{(0)}(\xi,\eta)[r(\xi,\eta)]^{l_j},\ \xi\in U(\eta). \tag{4.2}$$

Отметим, что при $n=2$ любой однородный многочлен $P(\xi)$ представляется в виде (4.1); в) существует постоянная $c>0$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{M}|P_j(\xi)|\leqslant c\,(1+|P(\xi)|). \tag{4.3}$$

Пусть $P(D)\in \mathbf{P}(\lambda^0)$. Обозначим

$$\delta_0(\eta)=\min_{\delta\in A(P,\eta)}\delta,\quad \Delta(P)=\inf_{\eta\in\Sigma(P_0)}\delta_0(\eta),\ \text{если}\ \sum(P_0)\neq\varnothing$$

и

$$\Delta(P)=1,\ \text{если}\ \sum(P_0)=\varnothing.$$

Очевидными геометрическими соображениями убеждаемся, что для операторов класса $\mathbf{P}(\lambda^0)$

$$\Delta(P)=\inf_{\eta\in\Sigma(P_0)}\ \min_{0<j<l(\eta)-1}(d_{l(\eta)}-d_j+l_j(\eta))/l_j(\eta).$$

Легко показать, что $0<\Delta(P)\leqslant 1$, причем $\Delta(P)=1$ тогда и только тогда, когда $P(\xi)$ регулярен.

Теорема 4.1. *Пусть $P(\xi)\in\mathbf{P}(\lambda^0)$. Тогда $\mathfrak{M}(P)=B(\Delta(P))$.*

Доказательство. Сначала покажем, что $\mathfrak{M}(P)\subset B(\Delta(P))$. Пусть существует $\nu^0\in\mathfrak{M}(P)\setminus B(\Delta(P))$, $\nu^0\neq 0$. Как и в доказательстве леммы 2.1, достаточно рассмотреть случай $(\nu^0,\lambda^0)=|\nu^0|>\Delta(P)$. Пусть для точки $\eta^0\in\sum(P_0)$ $\delta_0(\eta^0)\leqslant|\nu^0|$ (здесь $\delta_0(\eta)\in A(P,\eta^0)$). Существование такой точки $\eta^0\in\sum(P_0)$ следует из определения $\Delta(P)$ и из того, что $|\nu^0|>\Delta(P)$.

Рассмотрим многочлены $P(\xi)$ и $Q(\xi)=\sum_{k=1}^{n}|D_k P(\xi)|^2$ на последовательности $\xi^s=s\cdot\eta^0+as^{\delta_0(\eta^0)}$, $s=1,2,\cdots$, где $a\in R_n$ пока произвольно. Для многочлена $P(\xi)$ с некоторой постоянной $c_1>0$ имеем при $s=1,2,\cdots$

$$\begin{gathered}|P(\xi^s)|=\left|\sum_{j=0}^{M}P_j(\xi^s)\right|=\left|\sum_{j=0}^{M}\sum_{\alpha}\frac{D^\alpha P_j(s\cdot\eta^0)\,a^\alpha s^{\delta_0(\eta^0)\cdot|\alpha|}}{\alpha!}\right|\leqslant\\ \leqslant c_1\sum_{j=0}^{M}s^{\chi(P_j,\eta^0,\delta_0(\eta^0))}\leqslant c_1(M+1)\,s^{\chi(P,\eta^0,\delta_0(\eta^0))},\end{gathered}\tag{4.4}$$

а для многочлена $Q(\xi)$ имеем при $s\to\infty$ с некоторой постоянной $c_2>0$

$$Q(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=0}^{M}D_kP_j(\xi^s)\right|^2=\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=0}^{M}\sum_{|\alpha|>l_j(\eta^0)-1}D^\alpha D_kP_j(s\cdot\eta^0)\,a^\alpha s^{\delta_0(\eta^0)\cdot|\alpha|}\right|^2>$$

$$\geqslant c_2\left|\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j\in B(P,\eta^0,\delta_0(\eta^0))}\ \sum_{|\alpha|>l_j(\eta^0)-1}\frac{a^\alpha D^\alpha D_kP_j(\eta^0)}{\alpha!}\right|^2 s^{2[\chi(P,\eta^0,\delta_0(\eta^0))-\delta_0(\eta^0)]}\right. -$$

$$- o\left(s^{2[\chi(P,\, \eta^0,\, \delta_0(\eta^0)) - \delta_0(\eta^0)]} \right) \Big| .$$

Так как $l_j(\eta^0)$ — порядок нуля многочлена $P_j(\xi)$ в точке $\eta^0 \in \sum(P_0)$, вектор $a \in R_n$ можно выбрать так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in B(P,\, \eta^0,\, \delta^0(\eta^0))} \sum_{|\alpha| = l_j(\eta^0) - 1} \left. \frac{a^\alpha D^\alpha D_k P_j(\eta^0)}{\alpha!} \right|^2 \neq 0.$$

Тогда с некоторой постоянной $c_3 > 0$ для всех $s = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |D_k P_j(\xi^s)| \geqslant c_3\, s^{\chi(P,\, \eta^0,\, \delta_0(\eta^0) - \delta_0(\eta^0))}. \tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем для достаточно больших s

$$|(\xi^s)^{\nu^0}| \cdot A(\xi^s) > |(\xi^s)^{\nu^0}| \cdot \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{D_k P(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right| \geqslant$$

$$\geqslant c_4 s^{|\nu^0|} \cdot \frac{s^{\chi(P,\, \eta^0,\, \delta^0(\eta^0)) - \delta_0(\eta^0)}}{s^{\chi(P,\, \eta^0,\, \delta_0(\eta^0))}} = c_4\, s^{|\nu^0| - \delta_0(\eta^0)}.$$

Так как по предположению $|\nu^0| > \delta_0(\eta^0)$, то это противоречит условию $\nu^0 \in \mathfrak{M}(P)$ и доказывает соотношение $\mathfrak{M}(P) \subset B(\Delta(P))$.

Для доказательства обратного включения, докажем несколько вспомогательных предложений.

Предложение 4.1. *Пусть $P(\xi) \in \mathrm{P}(\lambda^0)$, тогда для каждой точки $\eta \in \sum(P_0)$*

$$\min_{0 < \delta < 1} |\chi(P, \eta, \delta(\eta)) - \chi(D_j P, \eta, \delta(\eta))| \geqslant \Delta(P), \quad j = 1, \cdots, n. \tag{4.6}$$

Доказательство. Так как $\chi(D_j P, \eta, \delta) \leqslant \chi(P, \eta, \delta) - \delta$ для каждой точки $\eta \in \sum(P_0)$ и $j = 1, \cdots, n$, то

$$\min_{\Delta(P) < \delta < 1} |\chi(P, \eta, \delta) - \chi(D_j P, \eta, \delta)| \geqslant \min_{\Delta(P) < \delta < 1} \delta \geqslant \Delta(P).$$

Остается показать, что при $j = 1, \cdots, n$ и $\eta \in \sum(P_0)$

$$\min_{0 < \delta < \Delta(P)} |\chi(P, \eta, \delta) - \chi(D_j P, \eta, \delta)| \geqslant \Delta(P).$$

По определению чисел $\Delta(P)$ и $\delta_0(\eta)$ имеем $d_k - l_k(\eta) + \delta l_k(\eta) \leqslant d_{I(\eta)}$, при $\delta \leqslant \delta_0(\eta)$, $k = 0, \cdots, I(\eta) - 1$; $d_k \leqslant d_{I(\eta)} - 1$, $k = I(\eta) + 1, \cdots, M$, где $l_k(\eta)$ — порядок нуля многочлена $P_k(\xi)$ в точке η. Так как $\chi(D_j P, \eta, \delta) \leqslant d_k - 1 - (l_k(\eta) - 1) + \delta(l_k(\eta) - 1) \leqslant d_k - l_k(\eta) + \Delta(P)(l_k(\eta) - 1) \leqslant \leqslant d_{I(\eta)} - \Delta(P)$, при $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta(P)$, $k = 0, \cdots, I(\eta) - 1$; $\chi(D_j P_{I(\eta)}, \eta, \delta) \leqslant \leqslant d_{I(\eta)} - 1$, $\chi(D_j P_k, \eta, \delta) \leqslant d_k - l_k(\eta) + \delta(l_k(\eta) - 1) \leqslant d_k \leqslant d_{I(\eta)} - 1$, при $k = I(\eta) + 1, \cdots, M$, $0 \leqslant \delta < 1$, то при $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta(P)$

$$\chi(D_j P, \eta, \delta) = \max_{0 \leqslant k < m} \chi(D_j P_k, \eta, \delta) \leqslant d_{I(\eta)} - \Delta(P).$$

Но поскольку при $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta(P)$ $\chi(P, \eta, \delta) = d_{I(\eta)}$, то отсюда следует, что

$$\min_{0 < \delta < \Delta(P)} |\chi(P, \eta, \delta) - \chi(D_j P, \eta, \delta)| \geqslant d_{I(\eta)} - [d_{I(\eta)} - \Delta(P)] = \Delta(P),$$

что доказывает предложение.

Предложение 4.2. *Пусть $P(\xi) \in \mathbf{P}(\lambda^0)$ и $\Delta(P) < 1$. Тогда для любого числа ε: $0 < \varepsilon < 1 - \Delta(P)$ существует число ρ: $0 < \rho < 1 - \Delta(P)$ такое, что*

$$\min_{\substack{0<\delta<\Delta(P)-\varepsilon \\ \Delta(P)+\varepsilon<\delta<1}} \{\chi(P, \eta, \delta) - \chi(D_j P, \eta, \delta)\} \geqslant \Delta(P), \quad \eta \in \sum(P_0), \; j, \cdots, n.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 4.1.

Предложение 4.3. *Пусть $P(\xi) \in \mathbf{P}(\lambda^0)$. Если $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ такая последовательность из R_n, что при $s \to \infty$ $\xi^s/|\xi^s| \to \eta \in \sum(P_0)$, то для некоторой постоянной $c > 0$*

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{D_j P(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right| \leqslant c\,|\xi^s|^{-\Delta(P)}, \quad s = 1, 2, \cdots.$$

Доказательство. Пусть наоборот, существует подпоследовательность $\{\xi^{s'}\}_{s'=1}^{\infty}$ последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ (не умаляя общности можно считать, что $\{\xi^{s'}\}_{s'=1}^{\infty} = \{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$), для которой при $s \to \infty$

$$|\xi^s|^{\Delta(P)} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{D_j P(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right| \to \infty. \tag{4.8}$$

В силу леммы 1.1 работы [11] существуют подпоследовательность $\{\xi^{s'}\}$ последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$), число δ_0, $0 \leqslant \delta_0 \leqslant 1$, $t_s > 0$, $s = 1, 2, \cdots$, такие, что для любого $\varepsilon > 0$

$$t_s |\xi^s|^{\varepsilon} \to \infty, \quad t_s |\xi^s|^{-\varepsilon} \to 0$$

и

$$\frac{|r(\xi^s, \eta)|}{|\xi^s|^{k-1}} = t_s |\xi^s|^{\delta_0}, \quad s = 1, 2, \cdots, \tag{4.9}$$

где k — порядок нуля $\eta \in \sum(P_0)$ функции $r(\xi, \eta)$ (см. определение класса $\mathbf{P}(\lambda^0)$).

Из (4.8), предложения 4.2 и условия $P(\xi) \in \mathbf{P}(\lambda^0)$ следует, что $\delta_0 = \Delta(P)$. Рассмотрим два следующих возможных случая:

1) существует подпоследовательность $\{t_{s'}\}_{s'=1}^{\infty}$ последовательности $\{t_s\}_{s=1}^{\infty}$, для которой

$$t_{s'} \leqslant \text{const} < \infty, \quad s' = 1, 2, \cdots,$$

2) существует подпоследовательность $\{t_{s'}\}_{s'=1}^{\infty}$ последовательности $\{t_s\}_{s=1}^{\infty}$, для которой при $s' \to \infty$ $t_{s'} \to \infty$.

В первом случае в силу предложения 4.1 и условия $P \in \mathbf{P}(\lambda^0)$ имеем

$$\left| \frac{D_j P(\xi^{s'})}{P(\xi^{s'})} \right| \cdot |\xi^{s'}|^{\Delta(P)} \leqslant \text{const} \cdot \frac{|\xi^{s'}|^{\chi(D_j P, \eta, \delta_0)}}{|\xi^{s'}|^{\chi(P, \eta, \delta_0)}} \cdot |\xi^{s'}|^{\Delta(P)} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}, \quad s' = 1, 2, \cdots, \; j = 1, 2, \cdots, n.$$

Это противоречит (4.8).

Во втором случае, в силу условия $P \in \mathbf{P}(\lambda^0)$ и соотношения (4.9), имеем при $s \to \infty$

$$|\xi^{s'}|^{\Delta(P)}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{D_jP(\xi^{s'})}{P(\xi^{s'})}\right|\leqslant \text{const}\cdot\frac{|\xi^{s'}|\sum\limits_{k\in B(P,\eta,\delta_0)} t_s^{l_k(\eta)-1}}{|\xi^{s'}|^{dl(\eta)}\sum\limits_{k\in B(P,\eta,\delta)} t_s^{l_k(\eta)}}\to 0,$$

что также противоречит (4.8).

Лемма 4.1. *Пусть* $P\in \mathbf{P}(\lambda^0)$, *тогда для некоторой постоянной* $c>0$

$$\min\left(\inf_{\lambda\in\Lambda(N)}|\zeta_\lambda|,|\zeta|^{\Delta(P)}\right)\cdot A(\xi)\leqslant c,\ \xi\in R_n. \tag{4.10}$$

Доказательство. Пусть наоборот, при выполнении условий леммы существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ такая, что при $s\to\infty$ $\xi^s\to\infty$.

$$\inf_{\lambda\in\Lambda(N)}|\xi^s|_\lambda\cdot A(\xi)\to\infty, \tag{4.11}$$

$$|\xi^s|^{\Delta(P)}\cdot A(\xi)\to\infty. \tag{4.12}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\xi_j^s>0$, $j=1,\cdots,n$, $s=1,2,\cdots$. Положим

$$\rho_s=\exp\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\ln\xi_j^s)^2};\ \lambda_j^s=\ln\xi_j^s/\ln\rho_s,\ j=1,\cdots,n;\ s=1,2,\cdots,$$

тогда

$$\xi^s=\rho_s^{\lambda^s}\ (\xi_j^s=\rho_s^{\lambda_j^s},\ j=1,\cdots,n),\ s=1,2,\cdots.$$

Для многочлена $P(\xi^s)$ получим представление (2.6), поступая так же, как при доказательстве леммы 2.1. При этом, возможны два случая:

а) $P^{j_r,q_r}(\eta)\neq 0$, б) $P_{j_r,q_r}(\eta)=0$.

Рассуждая так, как это делается в [3] или [7], легко доказать, что в случае а)

$$\inf_{\lambda\in\Lambda^{n-1}(N)}|\xi^s|_\lambda\cdot A(\xi^s)=\text{const}<\infty,\ s=1,2,\cdots.$$

Это противоречит (4.11).

В силу б) имеем, что $r=m=1$, $q_r=n-1$, $e^1=t\lambda^0$ $(t\in R_1)$, при этом при $s\to\infty$

$$\xi^s=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\rho_s^{\sum_{i=1}^{n}\chi_i^s t_i^j}\right)^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\rho_s^{2\chi_1^s t}\,(1+\tilde{o}(1))}=$$

$$=\sqrt{n}\,\rho_s^{\chi_1^s\cdot t}\,(1+\tilde{o}(1));\ \xi^s/|\xi^s|\to\eta/\sqrt{n}=\tau\in\Sigma(P_0).$$

Применяя предложение 4.3, отсюда получим, что для некоторой постоянной $c>0$

$$A(\xi)\cdot|\xi|^{\Delta(P)}\leqslant c,\ s=1,2,\cdots.$$

Это противоречит (4.12) и доказывает справедливость неравенства (4.10), а вместе с тем и лемму 4.1.

Поскольку для любого $\lambda \in \Lambda(\mathrm{N})$ и $\nu \in R_n^+$

$$|\xi^\nu| \leqslant c\, |\xi|_\lambda^{(\nu,\lambda)},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от λ, то теорема 4.1 следует из леммы 4.1.

Пример. Пусть $n=2$, $P(\xi)=\xi_2^8+\xi_1^6(\xi_1-\xi_2)^6+\xi_1^8\cdot\xi_2^2+1$. Х. м. $\mathrm{N}(P)$ полинома $P(\xi)$ в. п. четырехугольник в Z_2^+ с вершинами (0, 0); (12, 0); (6, 6); (0, 8). Главными гранями (сторонами) здесь будут стороны: N_1^1, соединяющая точки (0, 8) и (6, 6), N_2^1, соединяющая точки (6, 6) и (12, 0). Остальные две стороны не являются главными. Поэтому главными вершинами будут $e^1=(0, 8)$; $e^2=(6, 6)$ и $e^3=(12, 0)$. Регулярность всех главных граней х. м. $\mathrm{N}(P)$, кроме грани N_2^1, очевидна. Внешние нормали граней N_1^1 и N_2^1 из множества $\Lambda^1(\mathrm{N})$ будут $\lambda^1=(1, 3)$ и $\lambda^2=(1, 1)$.

Как следует из теоремы 2 работы [7] многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен, при этом если многочлен представить в виде (4.1) по вектору

$$\lambda^2=(1, 1), \text{ то } P_0(\xi)=\xi_1^6(\xi_1-\xi_2)^6,\ d_0=12,\ d_1=10,$$

$$\eta=(t, t)\in\Sigma(P_0),\ t\in R_1 \text{ и } l_0(\eta)=6.$$

Так как, очевидно, $P\in\mathbf{P}(\lambda^0)$, то по теореме 4.1

$$\mathfrak{M}(P)=B(\Delta(P))=\{\nu;\ \nu\in R_2^+;\ \nu_1+3\nu_2\leqslant 1;\ \nu_1+\nu_2\leqslant\Delta(P)\},$$

где

$$\Delta(P)=\inf_{\eta\in\Sigma(P)}\delta_0(\eta)=\inf_{\eta\in\Sigma(P_0)}\frac{d_1-(d_0-l_0(\eta))}{l_0(\eta)}=\frac{2}{3}.$$

Весом гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)$ является функция

$$h(\xi)=|\xi_1|^{2/3}+|\xi_2|^{1/3}+|\xi_1|^{1/2}\cdot|\xi_2|^{1/6}.$$

По теореме 3.1 для $\nu=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)\in\mathfrak{M}(P)$ и для произвольного компакта $K\subset R_n$ существует постоянная $c=c(K)>0$ такая, что для любого натурального j

$$\sup_{x\in K}|D_1^{3j}D_2^j u(x)|\leqslant c^j(K)\,j^{6\cdot j}. \tag{4.13}$$

С другой стороны, если применить теорему 4.4.6 работы [1], то существует постоянная $c_1(K)$ такая, что

$$\sup_{x\in K}|D_1^{3j}D_2^j u(x)|\leqslant c_1^j(3j)^{3\cdot\frac{3}{2}j}j^{3j}=c_2^j(K)\,j^{7,5\cdot j}. \tag{4.14}$$

Сравнение полученных неравенств (4.13), (4.14) показывает, что на самом деле решения уравнения $P(D)u=0$ имеют лучшие свойства гладкости (в смысле принадлежности пространствам Жевре), чем это следовало из теоремы 4.4.6 работы [1].

Ереванский государственный
университет

Поступила 11. IV. 1985

Գ. Հ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ. Որոշ դասի հիպոէլիպտիկ հավասարումների լուծումների ածանցյալների գնահատականների մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում տրված են բավականաչափ լայն դասի հիպոէլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների ածանցյալների ճշգրիտ գնահատականներ։

Ապացուցված է, որ լուծումների ողորկությունը որոշվում է ուսումնասիրվող օպերատորի հիպոէլիպտիկության կշռի միջոցով, որը բացահայտ տեսքով գտնված է։

G. H. HAKOPIAN. *Some estimates for derivatives of the solutions of a class of hypoelliptic equation* (summary)

Exact estimates of the derivatives of the solutions of a broad class of hypoelliptic equations are given.

It is proved that the smoothness of the solution depends on the weight of the operator.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хермандер*. Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.
2. *С. М. Никольский*. Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения, ДАН СССР, 146, № 4, 1962, 767—769.
3. *В. П. Михайлов*. О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Труды МИАН им. Стеклова АН СССР, № 91, 1967, 59—81.
4. *Г. Г. Казарян*. О функциональном показателе гипоэллиптичности, Матем. сб., 128 (170), 3 (11), 1985, 339—353.
5. *B. Pini*. Osservazoni sulla ipoelliptica. Boll. Un. Mat. Ital., (3), 18, 1963, 420—432.
6. *Г. Г. Казарян*. О гипоэллиптических полиномах, ДАН СССР, 214, № 5, 1974, 1016—1019.
7. *Г. Г. Казарян*. Об одном семействе гипоэллиптических полиномов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 3, 1974, 189—211.
8. *В. Н. Маргарян*. Добавление младших членов, сохраняющих гипоэллиптичность оператора, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XV, № 6, 1980, 443—460.
9. *В. Н. Маргарян, Г. О. Акопян*. О весе гипоэллиптичности многочленов, Межвузовский сб., Минвуза Арм.ССР, «Математика», № 4, 1986.
10. *L. Cattabriga*. Sur una classi di polinomi ipoelliptici, Rend. Sem. Mat. Univ. di Radova, 36, 1966.
11. *С. Ж. Айрапетян, В. Н. Маргарян*. Гипоэллиптичность многочленов с комплексными коэффициентами, Межвузовский сб., Минвуз Арм.ССР. «Математика», № 4, 1986.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 4, 1986 Математика

УДК 517.946

С. Г. ХАЧАТРЯН

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Для формулировки рассматриваемых ниже задач введем следующие обозначения.

Пусть T — односвязная область плоскости $z = x + iy$ с гладкой границей Γ, t_0 — точка границы Γ, t_1 — точка области T, l_0, l_1 — положительные числа.

Обозначим через $M_T(t_0, t_1, l_0, l_1)$ класс действительных функций $f(z) \equiv f(x, y)$, удовлетворяющих условию Гёльдера в окрестности любой точки области $T + \Gamma$, кроме точек t_0, t_1, в окрестности которых имеют место неравенства

$$|f(z)| \leqslant \mathrm{const}\, |z - t_k|^{-l_k - \varepsilon_k}, \quad k = 0, 1. \tag{1}$$

Через $\bar{M}_T(t_0, t_1, l_0, l_1)$ обозначим класс действительных функций $u(z) = u(x, y)$, удовлетворяющих условию Гёльдера в окрестности любой точки области $T + \Gamma$, кроме точек t_0, t_1, в окрестности которых имеют место неравенства

$$|u(z)| \leqslant \mathrm{const}\, |z - t_k|^{-l_k - \varepsilon_k}, \quad k = 0, 1, \tag{2}$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \mathrm{const}\, |z - t_k|^{-l_k - 1 - \varepsilon_k}, \quad k = 0, 1, \tag{3}$$

где $\varepsilon_k = 0$, если l_k — нецелое число и ε_k — произвольное положительное число, если l_k — целое число.

Обозначим через $N_\Gamma(t_0, l_0)$ класс действительных функций $g(z) = g(x, y)$, определенных на кривой Γ, удовлетворяющих условию Гёльдера вместе со своей производной $g'(t)$ (по кривой) первого порядка в окрестности любой точки $t \in \Gamma$, кроме точки t_0, в окрестности которой имеют место неравенства

$$|g(t)| \leqslant \mathrm{const}\, |t - t_0|^{-l_0 - \varepsilon_0}, \tag{4}$$

$$|g'(t)| \leqslant \mathrm{const}\, |t - t_0|^{-l_0 - 1 - \varepsilon_0}, \tag{5}$$

где ε_0 — то же, что и в предыдущем обозначении.

В настоящей работе рассматриваются задача Дирихле и общая граничная задача для уравнения

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u = f(x, y) \tag{6}$$

в классе разрывных функций, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — заданные действительные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера в области $T+\Gamma$, $f(x, y)$ — заданная функция из класса $M_T(t_0, t_1, l_0, l_1)$. Предполагается также, что $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ аналитична в некоторой окрестности точек t_0, t_1, а кривая Γ аналитична в окрестности точки t_0.

В случае, когда $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — аналитические функции, задача Дирихле и общая граничная задача для уравнения (6) в классах Гёльдера полностью исследованы в монографии И. Н. Векуа [1]. В этой монографии получено общее решение уравнения (6), которым мы существенно будем пользоваться при исследовании упомянутых выше задач в классе разрывных функций.

В монографии А. В. Бицадзе [2] исследованы эти задачи в классах Гёльдера в случае, когда функции $a(x, y)$, $b(x, y)$ удовлетворяют условию Гёльдера, а $c(x, y)$ непрерывна.

Краевые задачи с разрывными граничными данными для уравнения Лапласа исследованы в работе [3], а для однородных эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами — в работах [4], [5]. В них используется явное решение исследуемых задач в классах Гёльдера.

Сформулируем теперь задачи, исследованием которых будем заниматься.

Задача $D_g(f)$ (Дирихле). Требуется найти регулярное в области $T \setminus \{t_1\}$ решение $u(x, y)$ уравнения (6), принадлежащее классу $\tilde{M}_T(t_0, t_1, l_0, l_1)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$u(t) = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad t \neq t_0, \tag{7}$$

где $f(x, y)$ — функция классе $M_T(t_0, t_1, l_0+2, l_1+2)$, а $g(t)$ принадлежит клессу $N_\Gamma(t_0, l_0)$.

Задача $\Pi_h(f)$ (Пуанкаре). Требуется найти регулярное в области $T \setminus \{t_1\}$ решение уравнения (6), принадлежащее классу $\tilde{M}_T(t_0\ t_1\ l_0, l_1)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$L(u) \equiv a_0(t)\frac{\partial u}{\partial x} + b_0(t)\frac{\partial u}{\partial y} + c_0(t)\, u = h(t), \quad t \neq t_0, \tag{8}$$

где $f(x, y)$ — то же, что и в задаче $D_g(f)$, $h(t)$ — функция класса $N_\Gamma(t_0, l_0+1)$; $a_0(t)$, $b_0(t)$, $c_0(t)$ — заданные на Γ действительные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера иа Γ и аналитические в некоторой окрестности точки t_0, причем $[a_0(t)]^2 + [b_0(t)]^2 \neq 0$ всюду на Γ.

В работе доказано, что однородные задачи $D_g(f)$ и $\Pi_h(f)$ имеют конечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородных задач необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий типа ортогональности. Получен индекс рассматриваемых задач и указан метод приведения этих задач к аналогичным задачам в классах Гёльдера.

В случае, когда рассматриваемые задачи в классах Гёльдера имеют единственное решение, доказано существование решения этих задач в указанной постановке и получена явная формула числа линейно независимых решений соответствующих однородных задач через l_0, l_1.

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

Без ограничения общности можно предполагать, что область T лежит в верхней полуплоскости и что часть границы Γ области T, содержащая точку t_0, совпадает с интервалом $(-\delta, \delta)$ действительной оси. Этого можно добиться при помощи конформного отображения.

Для простоты изложения будем рассматривать случай, когда $t_0=0$. Общий случай исследуется аналогично.

Рассмотрим сначала уравнение (6) в окрестности особых точек.

Обозначим через $O_{t_j}(r_0)$ $(j=0, 1)$ круг радиуса r_0 с центром в точке t_j, где r_0 — достаточно малое положительное число, и пусть $T_1=O_{t_1}(r_0)$, $T_0=O_{t_0}(r_0)\cap T$.

Пусть $G_k(t, \tau, z, \zeta)$ $(t, z\in O_{t_k}(r_1), \tau, \zeta\in \overline{O}_{t_k}(r_1))$ — функция Римана, $\omega_k(x, y, \xi, \eta)$ — нормированное элементарное решение уравнения

$$E(u)=0 \tag{9}$$

в окрестности точки t_k $(k=0, 1)$ [1], где $o_{t_k}(r_1)$ — круг радиуса $r_1>r_0$ с центром в точка t_k, лежащий целиком в той окрестности точки t_k, в которой аналитичны функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$; $\overline{O}_{t_k}(r_1)$ — зеркальное отображение области $O_{t_k}(r_1)$ относительно оси Ox.

Известно [1], что $G_k(t, \tau, z, \zeta)$ аналитичны по переменным t, τ, z, ζ в окрестности $(t_k, \overline{t}_k, t_k, \overline{t}_k)$ и $G_k(t_k, \overline{t}_k, t_k, \overline{t}_k)=1$ $(k=0, 1)$. Имеет место следующая

Лемма 1. *В области $T_k\setminus\{t_k\}$ $(k=0, 1)$ уравнение(6) имеет решение, принадлежащее классу $\overline{M}_{T_k}(t_k, l_k)$.*

Доказательство. Известно, что внутри круга $O_{t_k}(r_0)$ $(k=0, 1)$ $\omega_k(x, y, \xi, \eta)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида

$$\omega_k(x, y, \xi, \eta)=\sum_{j=0}^{\infty} h^{*}_{k,j}(\xi, \eta)\,\omega_{k,j}(x, y), \tag{10}$$

при $|t-t_k|<|z-t_k|$, где $t=\xi+i\eta$, $z=x+iy$, $t_0=x_0+iy_0$, $t_1=x_1+iy_1$,

$$h^{*}_{k,j}(\xi, \eta)=H^{*}_{k,j}(t, \overline{t}, t_k, \overline{t}_k),\ k=0, 1,\ j=0, 1, \cdots,$$

$$H^{*}_{k,2j}(t, \tau, t_k, \overline{t}_k)=G_k(t, \tau, t, \overline{t}_k)(t-t_k)^j-$$

$$-\int_{t_k}^{t}(\sigma-t_k)^j\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}G_k(t, \tau, t_k, \sigma)+A(t_k, \sigma)\,G_k(t, \tau, t_k, \sigma)\right]d\sigma,$$

$$H^{\bullet}_{k,2j+1}(t,\tau,t_k,\bar t_k)=G_k(t,\tau,t_k,\tau)(\tau-t_k)^j-$$

$$-\int_{\bar t_k}^{\tau}(\sigma-\bar t_k)^j\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}G_k(t,\tau,t_k,\sigma)+A(t_k,\sigma)G_k(t,\tau,\bar t_k,\tau)\right]d\sigma,$$

$$\omega_{k,2j}(x,y)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\Big|\,\omega_k(x,y,\xi,\eta)-\frac{1}{2}\omega_k(x,y,x_k,y_k)\times$$

$$\times G_k(t,\bar t_k,t_k,\bar t_k)\Big]_{\substack{\xi=x_k,\\ \eta=y_k}}$$

$$\omega_{k,2j+1}(x,y)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \bar t^j}\Big|\,\omega_k(x,y,\xi,\eta)-\frac{1}{2}\omega_k(x,y,x_k,y_k)\times$$

$$\times G_k(t_k,\bar t_k,t_k,\bar t_k)\Big|_{\substack{\xi=x_k,\\ \eta=y_k}}.$$

$A(z,\zeta)$, $B(z,\zeta)$ — вполне определенные аналитические функции двух комплексных переменных z, ξ в цилиндрической области

$$(O_{t_k}(r_1),\ \overline{O}_{t_k}(r_1)),\ \text{т. е. при } z\in O_{t_k}(r_1),\ \zeta\in\overline{O}_{t_k}(r_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-i\frac{\partial}{\partial\eta}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\bar t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+i\frac{\partial}{\partial\eta}\right).$$

Обозначим

$$u^{\bullet}_k(x,y)=\iint_{T_k}\left[\omega_k(x,y,\xi,\eta)-\sum_{k=0}^{2[l_k]+1}h^{\bullet}_{x,j}(\xi,\eta)\,\omega_{k,j}(x,y)\right]f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \tag{11}$$

где $[l_k]$ — целая часть числа l_k.

Ясно, что функция $u^{\bullet}_k(x,y)$ $(k=0,1)$ будет решением уравнения (6) в области $T_k\setminus\{t_k\}$.

Подставим $u^{\bullet}_k(x,y)$ в виде $u^{\bullet}_k(x,y)=u^{\bullet}_{k,1}(x,y)+u^{\bullet}_{k,2}(x,y)+$ $+u^{\bullet}_{k,3}(x,y)$, где

$$u^{\bullet}_{k,1}(x,y)=\iint_{T^{\bullet}_k}\left[\omega_k(x,y,\xi,\eta)-\sum_{j=0}^{2[l_k]+1}h^{\bullet}_{k,j}(\xi,\eta)\,\omega_{k,j}(x,y)f(\xi,\eta)\right]d\xi d\eta,$$

$$u^{\bullet}_{k,2}(x,y)=\iint_{T_k\setminus T^{\bullet}_k}\omega_k(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

$$u^{\bullet}_{k,3}(x,y)=\iint_{T_k\setminus T_k}f(\xi,\eta)\sum_{j=0}^{2[l_k]+1}h^{\bullet}_{k,j}(\xi,\eta)\,\omega_{k,j}(x,y)\,d\xi d\eta,$$

$$T^{\bullet}_k=\{t\in t_k,\ |t-t_k|<\frac{1}{2}|z-t_k|\}.$$

Нетрудно теперь доказать, что $u^{\bullet}_{k,j}\in\widetilde{M}_{T_k}(t_k,l_k)$, $k=0,1$, $j=1,2,3$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Общее решение однородного уравнения* (9) *в классе* $\widetilde{M}_{T_1}(t_1, l_1)$ *определяется формулой*

$$u^*(x, y) = \tilde{u}(x, y) + \sum_{k=1}^{2[l_1]+1} c_k \omega_k^*(x, y), \tag{12}$$

где $\tilde{u}$ — *регулярное в* T_1 *решение уравнения* (9).

$$\omega_{2k}^*(x, y) = \operatorname{Re} \omega_{1, 2k}(x, y), \quad \omega_{2k+1}^*(x, y) = \operatorname{Im} \omega_{1, 2k+1}(x, y), \tag{13}$$

c_k $(k = 1, 2, \cdots, 2[l_1] + 1)$ — *произвольные действительные постоянные.*

Доказательство. Известно [1], что произвольное решение уравнения (9), регулярное в области $T_1 \setminus \{t_1\}$, представляется в виде

$$u^*(x, y) = \tilde{u}(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \omega_{1, k}(x, y), \tag{14}$$

где $\tilde{u}(x, y)$ — регулярное в T_1 решение уравнения (9); ряд, входящий в представление (14), сходится абсолютно и равномерно в любой замкнутой области, лежащей в $T_1 \setminus \{t_1\}$,

$$\beta_k = -\int_{L_1} \left[u \frac{d}{d\nu} h_{1, k}^*(\xi, \eta) - h_{1, k}^*(\xi, \eta) N u \right] ds, \tag{15}$$

L_1 — произвольная окружность с центром в точке t_1, лежащая в T_1, ν — внутренняя нормаль к L_1 в точке (ξ, η),

$$Nu = \frac{du}{d\nu} + [a \cos(\nu, x) + b \cos(\nu, y)] u.$$

Из равенства (15) непосредственно следует, что $\beta_k = 0$, при $k > 2[l_1] + 1$ для любой функции из класса $\widetilde{M}_{T_1}(t_1, l_1)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *В классе* $\widetilde{M}_{T_1}(0, l_0)$ *существует решение однородного уравнения* (9), *удовлетворяющее граничному условию*

$$u(x, 0) = g(x, 0), \quad -r_0 \leqslant x \leqslant r_0. \tag{16}$$

Доказательство. В работе [1] доказано, что всякое решение уравнения (9), регулярное в односвязной области T_0, представляется в виде

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left[G_0(z, \bar{z}_0, z, \bar{z}) \varphi(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} G_0(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt \right], \tag{17}$$

где $z = x + iy$, $z_0 \in T_0$, $\varphi(z)$ — аналитическая функция переменной z в области T_0. Переходя к пределу в представлении (17), получим

$$\operatorname{Re} \left[G_0(x, \bar{z}_0, x, x) \varphi(x) - \int_{z_0}^{x} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} G_0(t, \bar{z}_0, x, x)\, dt \right] =$$

$$= g(x, 0); \quad x \in (-r_0, r_0), \quad x \neq 0. \tag{18}$$

5—695

Рассмотрим уравнение

$$G_0(z, \bar{z}_0, z, z)\,\varphi(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,G_0(t, \bar{z}_0, z, z)\,dt = \psi_0(z), \tag{19}$$

где $\varphi(z)$ — искомая аналитическая функция в области T_0,

$$\psi_0(z) = \frac{1}{z^{[l_0]+1}\pi i}\int_{-r_0}^{r_0} \frac{t^{[l_0]+1}g(t, 0)}{t-z}\,dt. \tag{20}$$

Функция $\psi_0(z)$ аналитична в области T_0 и ее действительная часть принимает на интервале $(-r_0, r_0)$ значения $g(x, 0)$.

Уравнение (19) есть уравнение типа Вольтерра в области T_0. Следовательно, оно имеет единственное решение $\varphi_0(z)$, аналитическое в этой области. Подставляя $\varphi_0(z)$ в формулу (17), получим решение уравнения (9), принимающее значения $g_0(x, 0)$ на интервале $(-r_0, r_0)$. Обозначим это решение через $u^*_{T_0}(x, y)$. Заметим, что функция (20) принадлежит классу $\tilde{M}_{T_0}(0, l_0)$. Поэтому найденное нами решение $u^*_{T_0}(x, y)$ также принадлежит классу $\tilde{M}_{T_0}(0, l_0)$. Лемма 3 доказана.

С л е д с т в и е 1. В классе $\tilde{M}_{T_0}(0, l_0)$ существует решение $u^*_{T_0}(x, y)$ неоднородного уравнения (6), удовлетворяющее граничному условию (16) при $-r_2 \leqslant x \leqslant r_2$, где r_2 — достаточно малое положительное число $(r_2 < r_0)$.

Найдем теперь класс аналитических в области T_0 функций, подставляя которые в формулу (17), получим все решения уравнения (9), принадлежащие классу $\tilde{M}_{T_0}(0, l_0)$.

Пусть $u(x, y)$ — решение уравнения (9) из класса $\tilde{M}_{T_0}(0, l_0)$. Тогда его можно представить в виде (см. [1])

$$u(x, y) = \alpha_0 G_0(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + \int_{z_0}^{z} G_0(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\,\varphi'(t)\,dt +$$

$$+ \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} G_0(z_0, \tau, z, \bar{z})\,\varphi^{*\prime}(\tau)\,d\tau, \tag{17'}$$

где $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 = \mathrm{const}$, $\varphi^*(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}$, $z_0 = ir_0$, $\varphi(z)$ — аналитическая функция в области T_0.

Вычислим

$$\frac{\partial u}{\partial z} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \text{ где } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha_0\frac{\partial G_0(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z})}{\partial z} + G_0(z, \bar{z}_0, z, \bar{z})\,\varphi'(z) +$$

$$+\int_{z_0}^{z}\varphi'(t)\frac{\partial}{\partial z}G_0(t,\bar z_0,z,\bar z)\,dt+\int_{\bar z_0}^{\bar z}\varphi^{*\prime}(\tau)\frac{\partial G_0(z_0,\tau,z,\bar z)}{\partial z}\,d\tau, \tag{21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z}=a_0\frac{\partial G_0(z_0,\bar z_0,z,\bar z)}{\partial \bar z}+G_0(z,\bar z_0,z,\bar z)\,\varphi^{*\prime}(\bar z)+$$

$$+\int_{z_0}^{z}\varphi'(t)\frac{\partial}{\partial \bar z}G_0(t,\bar z_0,z,\bar z)\,dt+\int_{\bar z_0}^{\bar z}\frac{\partial G_0(z_0,\tau,z,\bar z)}{\partial \bar z}\varphi^{*\prime}(\tau)\,d\tau. \tag{22}$$

Из (21) и (22) имеем

$$|\varphi'(z)|\leqslant c_1+c_2\left|\left|\int_{z_0}^{z}|\varphi'(t)|\,|dt|\right|+c_2\left|\int_{\bar z_0}^{\bar z}|\varphi^{*\prime}(\tau)|\,|d\tau|\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\right|, \tag{23}$$

$$|\varphi^{*\prime}(\bar z)|\leqslant c_1+c_2\left|\left|\int_{z_0}^{z}|\varphi'(t)|\,|dt|\right|+c_2\left|\int_{\bar z_0}^{\bar z}|\varphi^{*\prime}(\tau)|\,|d\tau|\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right|\right|, \tag{24}$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные.

Обозначим

$$\chi_1(r)=\max_{\substack{|z|>r\\ z\in T_0}}|\varphi'(z)|,\quad \chi_2(r)=\max_{\substack{|z|>r\\ z\in T_0}}|\varphi^{*\prime}(\bar z)|,\quad \chi_3(r)=\max_{\substack{|z|>r\\ z\in T_0}}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|,\ \left|\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right|\right\}.$$

Используя эти обозначения из (23) и (24) получим

$$\chi_j(r)\leqslant c_1+3c_2r_0\chi_1(r)+3c_2r_0\chi_2(r)+\chi_3(r),\ j=1,2. \tag{25}$$

Решая систему неравенств (25) относительно $\chi_1(r)$ и $\chi_2(r)$, имеем

$$\chi_j(r)\leqslant c_4(1+\chi_3(r)),\ j=1,\ 2,\ c_4=\mathrm{const}. \tag{26}$$

Из неравенств (26) следует, что всякое решение уравнения (9), регулярное в области T_0 и принадлежащее классу $\widetilde{M}_{T_0}(0,\ l_0)$, представляется формулой (17), где $\varphi(z)$ — аналитическая функция переменной z, принадлежащая классу $\widetilde{M}_{T_0}(0,\ l_0)$. С другой стороны очевидно, что подставляя в формулу (17) аналитическую функцию $\varphi(z)$, принадлежащую классу $\widetilde{M}_{T_0}(0,\ l_0)$, получим решение уравнения (9), принадлежащее классу $\widetilde{M}_{T_0}(0,\ l_0)$.

Найдем теперь общее решение уравнения (9), регулярное в области T_0, принимающее значения $g(x,\ 0)$ на интервале $(-r_0,\ r_0)$ и принадлежащее классу $\widetilde{M}_{T_0}(0,\ l_0)$. Будем искать его в виде

$$\tilde u_{T_0}(x,\ y)=u^{*}_{T_0}(x,\ y)+v_0(x,\ y), \tag{27}$$

где $u^{*}_{T_0}(x,\ y)$ — найденное нами частное решение задачи (9), (16), принадлежащее классу $\widetilde{M}_{T_0}(0,\ l_0)$.

Подставляя (27) в уравнение (9) и в граничное условие (16), относительно $v_0(x, y)$ получим следующую задачу.

Задача D_{T_0}. Требуется найти регулярное в T_0 решение уравнения (9), принадлежащее классу $\widetilde{M}_{T_0}(0, l_0)$, принимающее нулевые граничные значения всюду на интервале $(-r_0, r_0)$ за исключением точки t_0.

Как было указано выше, если решение $v_0(x, y)$ уравнения (9) принадлежит классу $\widetilde{M}_{T_0}(0, l_0)$, то оно определяется формулой (17), где $\varphi(z)$ — аналитическая функция из того же класса. Так как это решение принимает на интервале $(-r_0, r_0)$ нулевые значения, за исключением точки $t_0 = 0$, то

$$\operatorname{Re}\psi(z) = 0, \text{ при } z \in (-r_0, r_0), \tag{28}$$

где $\psi(z)$ — правая часть уравнения (19). Ясно, что $\psi(z) \in \widetilde{M}_{T_0}(0, l_0)$.

Обозначим

$$\Psi(z) = \begin{cases} \psi(z), & z \in T_0, \\ -\overline{\psi(\bar z)}, & z \in \overline{T}_0, \end{cases}$$

где $\overline{T}_0$ — зеркальное отображение области T_0 относительно оси Ох.

Ясно, что $\Psi(z)$ — однозначная аналитическая функция в области $\{T_0 \cup \overline{T}_0\} \setminus \{0\}$. Так как $\psi(z) \in \widetilde{M}_{T_0}(0, l_0)$, то $\Psi(z)$ имеет в точке $z = 0$ полюс порядка $[l_0]$. Следовательно, $\Psi(z)$ можно представить в виде

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^{[l_0]} d_k \frac{i}{z^k} + \Psi^*(z), \tag{29}$$

где $\Psi^*(z)$ — аналитическая в области $\overline{T_0 \cup \overline{T}_0}$ функция переменной z. Из (28) следует, что d_k — действительные постоянные.

Обозначим через $\varphi_k(z)$ решение уравнения (19) относительно $\varphi(z)$, при $\psi_0(z) = \frac{i}{z^k}$ $(k = 1, 2, \cdots, [l_0])$, а через $\varphi_{[l_0]+1}(z)$ — решение уравнения (19) при $\psi_0(z) = \Psi^*(z)$, $z \in T_0$.

Пусть

$$v_{0,k}(x, y) = \operatorname{Re}\left[G_0(z, \bar z_0, z, \bar z)\,\varphi_k(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} G_0(t, z_0, z, \bar z)\, dt\right],$$
$$k = 1, 2, \cdots, [l_0] + 1. \tag{30}$$

Из вышеприведенных рассуждений следует

Лемма 4. *Общее решение задачи D_{T_0} представляется в виде*

$$v_0(x, y) = \sum_{k=1}^{[l_0]} d_k v_{0,k}(x, y) + v_{0,[l_0]+1}(x, y), \tag{31}$$

где d_k $(k = 1, 2, \cdots, [l_0])$ — произвольные действительные постоянные $v_{0,[l_0]+1}(x, y)$ — регулярное в области T_0 решение уравнения (9), принимающее на интервале $(-r_0, r_0)$ нулевые значения.

Рассмотрим теперь общую задачу в окрестности точки $t_0 = 0$.

Лемма 5. *В классе $\widetilde{M}_{T_0}(0, l_0)$ существует решение $\tilde{w}_0(x, y)$ неоднородного уравнения* (6), *удовлетворяющее граничному условию*

$$L(w_0(t)) = h(t), \quad t \in (-r_0, r_0), \quad t \neq 0. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $A_0(z)$, $B_0(z)$, $C_0(z)$ — аналитические в круге $O_{l_0}(r_0)$ функции переменной $z = x + iy$, принимающие на интервале $(-r_0, r_0)$ значения $a_0(x, 0)$, $b_0(x, 0)$, $c_0(x, 0)$, соответственно. Тогда граничное условие (32) можно записать в виде

$$L(w_0(t)) = \lim_{\substack{z \to x \\ x \neq 0}} \left[A_0(z) \frac{\partial w_0}{\partial x} + B_0(z) \frac{\partial w_0}{\partial y} + c_0(z) w_0 \right] =$$

$$= h(x, 0), \quad x \in (-r_0, r_0). \tag{32'}$$

Сделаем замену

$$\tilde{w}_0(x, y) = u^*(x, y) + w_0^*(x, y), \tag{33}$$

где $u_0^*(x, y)$ — решение уравнения (6), построенное в (11). Подставляя (33) в уравнение (6) и граничное условие (32), для определения $w_0^*(x, y)$ получим уравнение (9) с граничным условием

$$L(w_0^*(t)) = h_1(x, 0), \quad x \in (-r_0, r_0), \tag{34}$$

где $h_1(x, 0) = h(x, 0) - L(u_0^*(x, y))|_{y=0}$.

Известно ([1]), что всякое решение уравнения (9), регулярное в области T_0, представляется в виде

$$w_0^*(x, y) = \alpha_0 G_0(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G_0(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt, \tag{35}$$

где $\Phi(z)$—аналитическая в области T_0 функция переменной z.

Имеем

$$\frac{\partial w_0^*}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) w_0^*(x, y) = \alpha_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) G_0(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) +$$

$$+ \mathrm{Re} \left[\Phi(z) G_0(z, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) G_0(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt \right], \tag{36}$$

$$\frac{\partial w_0^*}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) w_0^*(x, y) = i\alpha_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) G_0(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) +$$

$$+ \mathrm{Re} \left[i\Phi(z) G_0(z, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + i \int_{z_0}^{z} \Phi(t) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) G_0(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt. \right. \tag{37}$$

Рассмотрим уравнение

$$A_1(z)\Phi(z)+\int_{z^0}^{z}\Phi(t)\,G_0^*(t,\ z)\,dt+G_1^*(z)=F(z), \tag{38}$$

где

$$A_1(z)=[A_0(z)+iB_0(z)]\,G_0(z,\ \bar z_0,\ z,\ z),$$

$$G_0^*(t,\ z)=G_2^*(t,\ z,\ z),\ \ G_1^*(z)=G_3^*(z,\ z),$$

$$G_2^*(t,z,\bar z)=\left[A_0(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)+iB_0(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)+C_0(z)\right]G_0(t,\bar z_0,z,\bar z),$$

$$G_3^*(z,\bar z)=\alpha_0\left[A_0(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)+iB_0(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)+C_0(z)\right]G_0(z_0,\bar z_0,z,\bar z).$$

Обозначим через $\Phi_0(z)$ решение уравнения (38), если

$$F(z)=\frac{1}{z^{[l_0]+1}\pi i}\int_{-r_0}^{r_0}\frac{x^{[l_0]+1}h_1(x,\ 0)}{x-z}\,dx.$$

Ясно, что функция $w_0^*(x,\ y)$, определенная формулой (35), при $\Phi(t)=\Phi_0(t)$ будет решением задачи (9), (34) в классе $\bar M_{T_0}(0,\ l_0)$, а $\tilde w_0(x,\ y)$, определенная формулой (33), будет решением задачи (6), (32) в том же классе. Лемма доказана.

Обозначим через $\Phi_k(z)$ решение уравнения (38), при $F(z)=F_k(z)$, где $F_k(z)=\dfrac{i}{z^k}\ (k=1,\ 2,\cdots,\ [l_0]+1)$.

Аналогично лемме 4 доказывается следующая

Лемма 6. *Общее решение задачи* (6), (28), *принадлежащее классу* $\bar M_{T_0}(0,\ l_0)$, *представляется в виде*

$$w_0(x,\ y)=\tilde w_0(x,\ y)+\sum_{k=1}^{[l_0]+1}d_k\,w_k^*(x,\ y)+\tilde w(x,\ y), \tag{39}$$

где $\tilde w_0(x,\ y)$ — *решение задачи* (6), (32), *построенное при доказательстве леммы* 5, $w_k^*(x,\ y)$ *определяются формулой* (29), *при замене* $\Phi(z)$ *на* $\Phi_k(z)$; $\tilde w(x,\ y)$ — *регулярное решение уравнения* (9) *в области* T_0, *удовлетворяющее граничному условию* $L(\tilde w(x,\ y))=0$ *всюду на интервале* $(-r_0,\ r_0)$; $d_1,\ d_2,\cdots,\ d_{[l_0]+1}$ — *произвольные действительные постоянные.*

§ 2. Исследование задач $D_g(f)$ и $\Pi_h(f)$

Пусть r_2 — достаточно малое положительное число ($r_2<r_0$), $\alpha_i(t)=\alpha_i(x,\ y)$ $(i=0,\ 1)$ — бесконечно дифференцируемая действительная функция, равная единице при $|t-t_i|<r_2$ и равная нулю при $|t-t_i|>r_0$.

Из лемм 1—4 следует, что любое решение задачи $D_g(f)$, принадлежащее классу $\widetilde{M}^T(0, t_1, l_0, l_1)$, можно представить в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + \alpha_0(x, y)\, u_{T_0}(x, y) + \tilde{v}_0(x, y) + \alpha_1(x, y)\, u_1^*(x, y) + \\ + \tilde{v}_1(x, y), \tag{40}$$

где

$$\tilde{v}_0(x, y) = \alpha_0(x, y) \sum_{k=1}^{[l_0]} d_k v_{0,k}(x, y), \quad \tilde{v}_1(x, y) = \alpha_1(x, y) \sum_{k=1}^{2[l_1]+1} c_k \omega_k^*(x, y), \tag{41}$$

$u_{T_0}(x, y)$ — решение уравнения (6), принадлежащее классу $\widetilde{M}_{T_0}(0, l_0)$ и упомянутое в следствии 1, $v_{0,k}(x, y)$ $(k = 1, 2, \cdots, [l_0])$ определяются формулой (30), $u_1^*(x, y)$ определяется формулой (11), $\omega_k^*(x, y)$ $(k = 1, 2, \cdots, 2[l_1] + 1)$ — функции, определенные формулой (13), $c_1, c_2, \cdots, c_{2[l_1]+1}, d_1, d_2, \cdots, d_{[l_0]}$ — действительные постоянные, $v(x, y)$ — неопределенная пока функция, непрерывная в замкнутой области $T+\Gamma$ и дважды непрерывно дифференцируемая в области T.

Подставляя (40) в уравнение (6) и граничное условие (7), относительно $v(x, y)$ получим следующую задачу:

Найти регулярное в области T и непрерывное в замкнутой области $T+\Gamma$ решение уравнения

$$E(v(x, y)) = f_1(x, y), \tag{42}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$v(t) = g_1(t), \quad t \in \Gamma, \tag{43}$$

где

$$f_1(x, y) = f(x, y) - E(\alpha_0(x, y)\, u_{T_0}(x, y) + \tilde{v}_0(x, y) + \\ + \alpha_1(x, y)\, u_1^*(x, y) + \tilde{v}_1(x, y)), \tag{44}$$

$$g_1(t) = g(t) - \alpha_0(t)\, u_{T_0}(t) - \tilde{v}_0(t), \quad t \in \Gamma. \tag{45}$$

Заметим что функции $f_1(x, y)$ и $g_1(x, y)$ нерерывны на $T+\Gamma$ и Γ соответственно, причем $f_1(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера внутри любой замкнутой области $T_0 \subset T$.

Задача (42), (43) в классах Гёльдера полностью исследована в работе [2]. В этой работе доказана фредгольмовость этой задачи в принятых нами условиях.

Предположим, что однородная задача $D_g(f)$ $(g = 0, f = 0)$ имеет ровно m линейно независимых, регулярных в области T, решений, непрерывных в замкнутой области $T+\Gamma$. Известно ([2]), что в этом случае для разрешимости задачи (42), (43) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_T f_1(x, y)\, \mu_j(x, y)\, dxdy + \int_\Gamma g_1(x, y)\, \nu_j(x, y)\, ds = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m, \tag{46}$$

где $\mu_j(x, y)$ и $\nu_j(x, y)$ -- вполне определенные непрерывные функции, заданные на T и Γ, соответственно, причем система $\{\mu_j(t), \nu_j(t)\}_{j=1}^m$ линейно независима.

Подставляя $f_1(x, y)$ и $g_1(x, y)$ из (44) и (45) в условия (46), получим

$$q_j \equiv \int_T f_2(x, y)\mu_j(x, y)\,dxdy + \int_\Gamma g_2(x, y)\nu_j(x, y)\,ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{[l_0]} \alpha_{j,k}d_k + \sum_{k=1}^{2[l_1]+1} \beta_{j,k}c_k = 0,\ j=1, 2, \cdots, m, \tag{47}$$

где

$$f_2(x, y) = f(x, y) - E(a_0(x, y)u_{T_0}(x, y) + u_1^*(x, y)),$$

$$g_2(t) = g(t) - a_0(t)u_{T_0}(t),\ t\in\Gamma,$$

$$\alpha_{j,k} = -\int_T \mu_j(x, y)E(a_0(x, y)v_{0,k}(x, y))\,dxdy, \tag{48}$$

$$\beta_{j,k} = -\int_T \mu_j(x, y)E(a_1(x, y)\omega_k^*(x, y))\,dxdy. \tag{49}$$

Ясно, что интегралы (48), (49) сходятся.

Обозначим

$$\alpha = \{\alpha_{j,k}\}_{j=1,\ k=1}^{m,\ [l_0]},\ \beta = \{\beta_{j,k}\}_{j=1,\ k=1}^{m,\ 2[l_1]+1},\ \gamma = (\alpha, \beta),$$

и пусть ранг матрицы γ равен r. Ясно, что $0 \leqslant r \leqslant m$.

Не ограничивая общности можно предполагать, что r последних строк матрицы γ линейно независимы.

В случае, когда $r = m$, условия (47) можно обеспечить при помощи соответствующего выбора постоянных c_k и d_k, т. е. в этом случае неоднородная задача $D_2(f)$ всегда разрешима в классе $\bar{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$.

В случае, когда $r < m$ условия (47) эквивалентны условиям

$$q_j - \sum_{k=m-r+1}^{m} \delta_{j,k}q_k = 0,\ j = 1, 2, \cdots, m-r, \tag{50}$$

$$q_j = 0,\ j = m-r+1,\ m-r+2, \cdots, m, \tag{51}$$

где $\delta_{j,k}$ — произвольные действительные постоянные.

Так как первые $m-r$ строк матрицы γ линейно зависят от остальных r строк, то $\delta_{j,k}$ можно выбрать так, чтобы условия (50) не содержали постоянных c_k и d_j $(k=1, 2, \cdots, 2[l_1]+1,\ j=1, 2, \cdots, [l_0])$. При таком выборе $\delta_{j,k}$ условия (50) примут вид

$$\int_T f_2(x, y)\mu_j^*(x, y)\,dxdy + \int_\Gamma g_2(x, y)\nu_j^*(x, y)\,ds = 0,\ j = 1, 2, \cdots, m-r, \tag{52}$$

где $\mu_j^*(x, y)$ и $\nu_j^*(x, y)$ $(j=1, 2, \cdots, m-r)$ — непрерывные функции, заданные на $T+\Gamma$ и Γ, соответственно, причем система $\{\mu_j^*(x, y), \nu_j^*(x, y)\}_{j=1}^{m-r}$ линейно независима.

Условиям (51) всегда можно удовлетворить при помощи выбора c_k и d_j. Следовательно, для разрешимости неоднородной задачи $D_g(f)$ в классе $\bar{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ необходимо и достаточно выполнение условий (52).

Правые части в равенствах (52) являются линейными функционалами относительно функций $f(x, y) \in \bar{M}_T(0, t_1, l_0+2, l_1+2)$, $g(x, y) \in N_\Gamma(0, l_0)$. Докажем, что они линейно независимы. Для этого достаточно показать линейную независимость этих функционалов в случае, когда $f(x, y)$ и $g(x, y)$ удовлетворяют условию Гёльдера в T и Γ, соответственно, причем $f(x, y)$ непрерывна в $T+\Gamma$. В этом случае

$$f_2(x, y) = f(x, y), \quad g_2(x, y) = g(x, y)$$

и условия имеют вид

$$\int_T f(x, y)\, \mu_j^*(x, y)\, dx dy + \int_\Gamma g(x, y)\, \nu_j^*(x, y)\, ds = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m-r. \tag{52'}$$

Отсюда непосредственно следует наше утверждение. Следовательно, число линейно независимых условий разрешимости задачи $D_g(f)$ в классе $\bar{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ равно $k' = m - r$.

Теперь найдем число линейно независимых решений однородной задачи $D_g(f)$ в классе $\tilde{M}_T(0, t_0, l_0, l_1)$. В случае однородной задачи условия (52) превращаются в тождества, а условия (51) представляют собой систему r алгебраических уравнений относительно c_k и d_j ранг основной матрицы которой равен r. Поэтому система линейных алгебраических уравнений (51), (52) имеет $k_0 = [l_0] + 2[l_1] + 1 - r$ линейно независимых решений. Каждому решению системы (51), 52) соответствует вполне определенное решение однородного уравнения $D_g(f)$, имеющее особенность и принадлежащее классу $\tilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$, причем линейно независимым решениям системы (51), (52) соответствуют линейно независимые решения однородной задачи $D_g(f)$. Обозначим их через $u_1(x, y), u_2(x, y), \cdots, u_{k_0}(x, y)$ $(k_0 = [l_0] + 2[l_1] - r + 1$.

С другой стороны, по предположению, однородная задача $D_g(f)$ имеет ровно m линейно независимых, регулярных в T решений, непрерывных в области $T+\Gamma$. Пусть $u_{k_0+1}(x, y) u_{k_0+2}(x, y), \cdots, u_{k_0+m}(x, y)$ — эти решения. Легко убедиться, что любая нетривиальная линейная комбинация решений $u_1(x, y), u_2(x, y), \cdots, u_{k_0}(x, y)$ также имеет особенность в одной из точек t_0 или t_1. Поэтому система функций $\{u_k(x, y)\}_{k=1}^{k_0+m}$ линейно независима и представляет собой полную систему линейно независимых решений однородной задачи $D_g(f)$ в классе $\bar{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$.

Определение. Индексом задачи $D_g(f)$ называется разность между числом линейно независимых решений однородной задачи $D_g(f)$ и числом условий разрешимости неоднородной задачи.

Итак, при сделанных выше предположениях, мы доказали следующие теоремы.

Теорема 1. *В классе* $\widetilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ *однородная задача* $D_g(f)$ *имеет конечное число* $(k=m+[l_0]+2[l_1]-r+1)$ *линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи в том же классе необходимо и достаточно выполнения конечного числа* $(k'=m-r)$ *условий ортогональности* (52').

Теорема 2. *Индекс задачи* $D_g(f)$ *в классе* $\widetilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ *определяется формулой*

$$\varkappa=k-k'=[l_0]+2[l_1]+1.$$

Известно, что при $c(x, y)\leqslant 0$ однородная задача $D_g(f)$ в классах Гёльдера имеет только тривиальное решение. В этом случае из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Если* $c(x, y)\leqslant 0$, *то в классе* $\widetilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ *однородная задача* $D_g(f)$ *имеет* $[l_0]+2[l_1]+1$ *линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.*

Рассмотрим теперь задачу $\Pi_h(f)$. Из лемм 1, 5, 6 следует, что любое решение задачи $\Pi_h(f)$, принадлежащее классу $\widetilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$, можно представить в виде

$$u(x, y)=w(x, y)+\alpha_0(x, y)\widetilde{w}_0(x, y)+\widetilde{w}^*(x, y)+\alpha_1(x, y)\overset{*}{u_1}(x, y)+ \\ +\widetilde{v}_1(x, y), \tag{53}$$

где $\alpha_j(x, y)\,(j=0, 1)\,\overset{*}{u_1}(x, y)$, $\widetilde{v}_1(x, y)$ те же, что и при исследовании задачи $D_g(f)$,

$$\widetilde{w}^*(x, y)=\alpha_0(x, y)\sum_{k=1}^{[l_0]+1} d_k w_k^*(x, y), \tag{54}$$

$\widetilde{w}_0(x, y)$ — функция, определенная формулой (33), $w_k^*(x, y)\,(k=1, 2, \cdots, [l_0]+1)$ — функции, входящие в представление (39), $d_1, d_2, \cdots, d_{[l_0]+1}$ — действительные постоянные числа, $w(x, y)$ — пока неопределенная функция, дважды непрерывно дифференцируемая в области T, граничные значения первых производных которой непрерывны на кривой Γ.

Подставляя (53) в уравнение (6) и граничное условие (8), относительно $w(x, y)$ получим следующую задачу.

Требуется найти регулярное в области T решение уравнения

$$E(w(x, y))=f_0(x, y), \tag{55}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$L(w(t))=h_0(t),\ t\in\Gamma, \tag{56}$$

где

$$f_0(x, y)=f(x, y)-E\{\alpha_0(x, y)\widetilde{w}_0(x, y)+\widetilde{w}^*(x, y)+ \\ +\alpha_1(x, y)\overset{*}{u_1}(x, y)+v_1(x, y)\},$$

$$h_0(t)=h(t)-L\{\alpha_0(t)\widetilde{v}_0(t)+\widetilde{w}^*(t)\}.$$

Заметим, что функции $f_0(x, y)$ и $h_0(x, y)$ непрерывны в $T+\Gamma$ и Γ соответственно, причем $f_0(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера внутри любой замкнутой области $T' \subset T$.

Задача (55), (56) полностью исследована в работе [2]. Доказано, что в принятых нами условиях, эта задача является нетеровой, причем ее индекс равен $\varkappa_0 = 2+2p$, где $p = \frac{1}{2\pi}[\arg a_0^*(t)]_\Gamma$, $a_0^*(t) = a_0(t) + ib_0(t)$, $[\arg a_0^*(t)]_\Gamma$ — приращение функции $\arg a_0^*(t)$, когда t один раз обходит контур Γ в положительном направлении.

Совершенно аналогично, как и в случае задачи $D_g(f)$, доказываются следующие теоремы.

Теорема 4. *Однородная задача $\Pi_h(f)$ имеет конечное число линейно независимых решений в классе $\bar{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$, а для разрешимости неоднородной задачи (в том же классе) необходимо и достаточно выполнения конечного числа условий (аналогичных условиям (52)).*

Теорема 5. *Индекс задачи $\Pi_h(f)$ в классе $\tilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$ определяется формулой*

$$\varkappa_1 = \varkappa_0 + [l_0] + 2[l_1] + 2.$$

Рассмотрим теперь задачу с наклонной производной для уравнения (6) в классе $\bar{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$. Граничное условие в этом случае запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l} + \alpha(x, y)u = h(x, y), \ (x, y) \in \Gamma, \tag{57}$$

где l — направление, которое меняется непрерывно и в каждой точке образует острый угол с внутренней нормалью $\mathbf{N}$ к кривой Γ, $\alpha(x, y) \leqslant 0$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера на Γ, $h(x, y)$ — та же, что и в задаче $\Pi_h(f)$. Предполагается также, что функции $\alpha(x, 0)$ и $\cos(\mathbf{N}, y)$ аналитичны в окрестности точки $t_0 = 0$.

В работе [2] доказана фредгольмовость этой задачи в классах Гёльдера, т. е. $\varkappa_0 = 0$. Там же доказана однозначная разрешимость задачи в классах Гёльдера в случае, когда $c(x, y) \leqslant 0$, $\alpha(x, y) \leqslant 0$ и одна из функций $c(x, y)$ или $\alpha(x, y)$ тождественно не равна нулю.

Применяя метод доказательства теоремы 3, в этом случае получим следующий результат.

Теорема 6. *Если $c(x, y) \leqslant 0$, $\alpha(x, y) \leqslant 0$ и одна из функций $c(x, y)$ или $\alpha(x, y)$ тождественно не равна нулю, то однородная задача (9), (57) имеет ровно $[l_0] + 2[l_1] + 2$ линейно независимых решений в классе $\tilde{M}_T(0, t_1, l_0, l_1)$, а неоднородная задача всегда разрешима в этом классе.*

В заключение выражаю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну, под руководством которого выполнена работа.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила 29. IV. 1985

Ս. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Խզվող եզրային տվյալներով եզրային խնդիրներ երկրորդ կարգի էլիպտիկ հավասարումների համար հարթության վրա *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում են Դիրիխլեի և ընդհանուր եզրային խնդիրները

$$E(u) \equiv \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\,u = f(x, y)$$

հավասարման համար խզվող ֆունկցիաների դասերում, երբ $f(x, y)$*-ը և եզրային ֆունկցիաները վերջավոր թվով կետերում ունեն եզակիություններ, որտեղ*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad a(x, y)\text{-ը}, \; b(x, y)\text{-ը}, \; c(x, y)\text{-ը} \quad z = x + iy$$

հարթության ինչ որ փակ տիրույթում Գյոլդերի պայմանին բավարարող տրված իրական ֆունկցիաներ են։

Աշխատանքում ապացուցված է, որ համասեռ խնդիրներն ունեն վերջավոր թվով գծորեն անկախ լուծումներ, իսկ անհամասեռ խնդիրների լուծելիության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի տեղի ունենան վերջավոր թվով օրթոգոնալության տիպի պայմաններ։ Հաշվված է դիտարկվող խնդիրների ինդեքսը և նշված է այդ խնդիրները Գյոլդերի դասերում նույնանման խնդիրների բերման մեթոդ։

Այն դեպքում, երբ $c(x, y) \leq 0$ *ապացուցված է անհամասեռ խնդիրների լուծման գոյությունը և ստացված է բանաձև համասեռ խնդիրների գծորեն անկախ լուծումների թիվը հաշվելու համար։*

S. H. KHATCHATRIAN. *Boundary value problems with discontinuous boundary conditions for the second order elliptic equations on the plane* (summary)

Dirichlet's problem and the general boundary value problem for the equation

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\,u = f(x, y)$$

in some classes of breaking functions are investigated. Here

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ and } a(x, y),\; b(x, y),\; c(x, y)$$

satisfy Holder's condition in any closed domain of complex plane $f(x, y)$ and the boundary conditions may have singularities in a finite number of points.

It is proved that the homogeneous problems have a finite number of linear independent solutions. The non-homogeneous problems have a solution if and only if there a finite number of orthogonality conditions are satisfied. The index of the problem is calculated. A method of reduction to the analogous problem in Holder's classes is mentioned.

In the case where $c(x, y) < 0$ the existence of the solutions of non-homogeneous problems is proved and a formulae for the number of linearly independent solutions is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948.
2. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., «Наука», 1966.
3. *Н. Е. Товмасян.* О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классах функций, имеющих особенности на границе области. Сибирский матем. журн., том II, № 2, 1961, 290—312.

4. *В. А. Оганян.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными граничными условиями, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVI, № 6, 1981, 465—477.

5. *В. А. Оганян.* Задача Пуанкаре для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными граничными условиями, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIX, № 5, 1984, 477—489.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 4, 1986 Математика

УДК 517.548

В. М. МАРТИРОСЯН, К. Р. ОВЕСЯН

К ТЕОРИИ α-КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССОВ М. М. ДЖРБАШЯНА В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ

§ 0. Введение

0.1. В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с классическими квазианалитическими классами и α-квазианалитическими классами М. М. Джрбашяна. Для более полного освещения цели данной работы приведем краткий обзор известных результатов в этих направлениях.

Пусть $\{M_n\}_1^\infty$ — произвольная последовательность положительных чисел и $C\{[0, +\infty); M_n\}$ — это класс ограниченных и бесконечно-дифференцируемых на $(0, +\infty)$ функций φ, для которых

$$\sup_{x>0} |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n \, (n = 1, 2, \cdots), \tag{0.1}$$

где A, B (>0) — константы, зависящие, вообще говоря, от φ, но не зависящие от n.

Ж. Адамаром [1] в 1912 г. была поставлена проблема квазианалитичности:

Какими должны быть последовательности $\{M_n\}_1^\infty$, чтобы соответствующие классы $C\{[0, +\infty); M_n\}$ были квазианалитическими, т. е. чтобы из условий

$$L_n \varphi \equiv \varphi^n(0) = 0 \;\; (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{0.2}$$

следовало тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in (0, +\infty)$?

После того, как А. Данжуа [2] открыл некоторые достаточные и, несколько отличные от них, необходимые условия квазианалитичности, Т. Карлеман [3] дал исчерпывающее решение проблемы. Впоследствии А. Островский [4] дал эквивалентное условию Т. Карлемана более простое условие квазианалитичности; в его формулировке теорема Данжуа-Карлемана гласит.

Теорема I. *Для квазианалитичности класса $C\{[0, +\infty); M_n\}$ необходимо и достаточно условие*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2} dr = +\infty, \text{ где } T(r) = \sup\{r^n/M_n : n \geqslant 1\}. \tag{0.3}$$

Отметим, что до 1968 г., т. е. в течение четырех десятков лет, ни в одной работе о квазианалитических классах или их обобщениях, в том числе и в целой серии работ С. Мандельбройта, подытоженных в его известной монографии [5], не было и попытки выйти за рамки классической квазианалитичности: в них всегда условие (0,3) предполагалось выполненным.

0.2. (а) Согласно теореме I Данжуа-Карлемана, при условии сходимости интеграла (0.3), класс $C\ \{[0, +\infty);\ M_n\}$ будет неквазианалитическим и, следовательно, будет содержать нетривиальные функции φ, для которых $\varphi^{(n)}(0) = 0$ $(n \geqslant 0)$. Естественно возник вопрос [6]:

Если класс $C\ \{0, +\infty);\ M_n\}$ неквазианалитический, то какие данные вместо последовательности значений $\varphi^{(n)}(0)$ $(n \geqslant 0)$ определяют функции этого класса единственным образом?

Именно в связи с этим вопросом М. М. Джрбашяном, по существу, была поставлена следующая общая проблема [6], сводящаяся при $\gamma = 1$ к отмеченной выше классической проблеме.

Пусть $\{M_n\}_1^\infty$ — произвольная последовательность положительных чисел и $T(r) = \sup\{r^n/M_n : n \geqslant 1\}$. Для заданного значения $\gamma\ (0 < \gamma < +\infty)$ какими должны быть подклассы $C_\gamma\{M_n\} \subset C\{[0, +\infty);\ M_n\}$ и простейшие функционалы $\mathrm{L}_n^\gamma\varphi\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$, чтобы лишь при условии

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = +\infty \tag{0.4}$$

для любой функции $\varphi \in C_\gamma\{M_n\}$ из равенств

$$\mathrm{L}_n^\gamma \varphi = 0\ (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{0.5}$$

следовало тождество $\varphi(x) \equiv 0,\ x \in (0, +\infty)$?

При решении этой проблемы оказалось целесообразным ввести новый параметр α, где

$$\gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\ (-1 < \alpha < 1).$$

Заметим, что тогда: 1) если $0 \leqslant \alpha < 1$, то $0 < \gamma \leqslant 1$; 2) если $-1 < \alpha < 0$, то $1 < \gamma < +\infty$. Были введены классы $C_\alpha^{(\infty)}\ (-1 < \alpha < 1)$ бесконечно-дифференцируемых на $(0, +\infty)$ функций φ, таких, что

$$\sup_{x>0} \{(1 + x^{|\alpha| m})|\varphi^{(n)}(x)|\} < +\infty\ (n, m = 0, 1, 2, \cdots), \tag{0.6}$$

и их подклассы $C_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\}$ тех φ, для которых

$$\sup_{x>0} \{(1 + |\alpha| x^2)|\varphi^{(n)}(x)|\} \leqslant AB^n M_n\ (n = 1, 2, \cdots). \tag{0.7}$$

Метод, предложенный в исследовании [6] для решения общей проблемы (0.4)—(0.5), естественным образом привел к раскрытию явного вида простейших функционалов единственности сначала в случае $0 < \alpha < 1$. Затем этим же методом в работе [7] был получен вид соответствующих функционалов и в случае $-1 < \alpha < 0$.

Для значений параметра $0 \leqslant \alpha < 1$ (т. е. при $0 < \gamma \leqslant 1$) эти функционалы имеют вид

$$L_n^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(n)}(t)\, t^{\alpha n - 1}\, dt\ (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{0.8}$$

Для значений же $-1<\alpha<0$ (*т. е. при* $1<\gamma<+\infty$) *вид надлежащих функционалов таков:*

$$L_n^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(2n)}(t)\, t^{(1+\alpha)n-1}\, dt \quad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{0.9}$$

(Естественно полагать $L_0^\alpha \varphi = \varphi(0)$ и $L_n^0 \varphi = L_n \varphi = \varphi^{(n)}(0)$ [6]).

Полное решение общей проблемы (0.4)—(0.5) для принципиально важнейшего случая, когда $0<\alpha<1$ (тогда $0<\gamma<1$), т. е. именно для случая неквазианалитических классов функций, было дано в 1968 г. М. М. Джрбашяном в его исследовании [6]. Соответствующие классы единственности были названы α-квазианалитическими.

Для случая же $-1<\alpha<0$ (тогда $1<\gamma<+\infty$) (а в этом случае функции рассматриваемых классов единственности оказались целыми) решение проблемы (0.4)—(0.5) содержится в работе А. А. Китбаляна [7], в которой развитый в исследовании [6] метод естественным образом был распространен и на этот случай.

Общая теорема для всех α $(-1<\alpha<1)$ гласит:

Теорема II. *Для того, чтобы класс* $C_\alpha\{[0, +\infty]; M_n\}$ *был* α*-квазианалитическим, т. е. чтобы для любого* $\varphi \in C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ *из равенств*

$$L_n^\alpha \varphi = 0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{0.10}$$

следовало тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in (0, +\infty)$, *необходимо и достаточно условие*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+(1-\alpha)/(1+\alpha)}}\, dr = +\infty. \tag{0.11}$$

(б) Как и первоначальное решение проблемы Ж. Адамара, решение проблемы (0.4)—(0.5) проводилось путем сведения ее к проблеме Ватсона о максимальной скорости убывания ограниченной аналитической функции, но уже для угловой области определенного раствора. Такое сведение осуществлялось посредством применения развитой М. М. Джрбашяном теории интегральных преобразований и представлений с ядрами, порожденными целой функцией типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\mu + n/\rho) \quad (\rho>0, \ \mu>0)$$

(см. [8]), с одновременным привлечением операторов последовательного дифференцирования в смысле Г. Вейля.

В предположении $\varphi \in C_\alpha^{(\infty)}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ в исследовании [6] рассматривались операторы последовательного дифференцирования

$$\begin{gathered} D_\infty^{0/\rho} \varphi(x) \equiv \varphi(x), \quad D_\infty^{1/\rho} \varphi(x) \equiv -\frac{d}{dx} D_\infty^{-\alpha} \varphi(x), \\ D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) \equiv D_\infty^{1/\rho} D_\infty^{(n-1)/\rho} \varphi(x) \quad (n=2, 3, \cdots), \end{gathered} \tag{0.12}$$

где $1/\rho = 1 - \alpha$ $(1 \leqslant \rho < +\infty)$ и

$$D_{\infty}^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt -$$

—оператор дробного интегрирования в смысле Г. Вейля.

Аналогично, при значениях параметра $-1 < \alpha < 0$ для функций $\varphi \in C_{(\alpha)}^{(\infty)}$ оказалось естественным определить операторы последовательного дифференцирования уже по формулам

$$D_{\infty}^{0/\rho} \varphi(x) \equiv \varphi(x), \quad D_{\infty}^{1/\rho} \varphi(x) \equiv -\frac{d}{dx} D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \varphi(x),$$
$$D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \equiv D_{x}^{1/\rho} D_{\infty}^{(n-1)/\rho} \varphi(x) \ (n = 2, 3, \cdots), \tag{0.13}$$

где опять $1/\rho = 1 - \alpha$ $(1/2 < \rho < 1)$ [7].

Именно использование этих операторов и привело к раскрытию явного вида функционалов единственности (0.8) и (0.9), поскольку

$$D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(0) = L_n^{\alpha} \varphi \ (-1 < \alpha < 1; \ n = 0, 1, 2, \cdots).$$

(в) При установлении теоремы II в исследовании [6] (аналогично, в работе [7]) проблема решалась сначала для других классов $C_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$, а затем уже совершался переход к $C_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$. При любом α $(-1 < \alpha < 1)$ $C_{\alpha}^{*}\{[0, \infty); M_n\}$ определяется как класс функций $\varphi \in C_{\alpha}^{(\infty)}$ таких, что

$$\sup_{x>0} |D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant AB^n M_n \ (n = 1, 2, \cdots). \tag{0.14}$$

Общий критерий их α-квазианалитичности таков [6, 7].

Теорема III. *Для того чтобы класс $C_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1)$ был α-квазианалитическим, необходимо и достаточно условие*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+1/(1+\alpha)}}\, dr = +\infty. \tag{0.15}$$

0.3. Задача, аналогичная классической проблеме квазианалитичности, для классов функций, аналитических в угловых областях, была впервые поставлена и решена Р. Б. Салинасом [9] (см. приведенную в § 2 данной работы теорему VIII).

М. М. Джрбашяном и Г. С. Кочаряном [10] была рассмотрена задача, аналогичная проблеме (0.4)—(0.5), для классов функций, аналитических в угловых областях вида $\Delta_{\gamma} = \{z: |\mathrm{Arg}\, z| < \pi/2\gamma\}$, лежащих на римановой поверхности G_{∞} функции $\mathrm{Ln}\, z$.

Для значений параметров $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \gamma < +\infty$ в работе [10] был введен класс $C_{\alpha}^{(\infty)}\{\Delta_{\gamma}\}$ функций f, аналитических в Δ_{γ} и таких, что

$$\sup_{\Delta_{\gamma_1}} \{(1 + |z|^{\alpha m}) |f^{(n)}(z)|\} < +\infty \ (n, m = 0, 1, 2, \cdots), \ \forall \gamma_1 > \gamma, \tag{0.16}$$

а также его следующие подклассы:

1) класс $C_\alpha\{\Delta_\gamma;\ M_n\}$ функций $f\in C_\alpha^{(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$, для которых

$$\sup_{\Delta_\gamma}\{(1+\varkappa|z|^\varkappa)|f^{(n)}(z)|\}\leqslant AB^n M_n\ (n=1, 2,\cdots), \tag{0.17}$$

2) класс $C_\alpha^*\{\Delta_\gamma;\ M_n\}$ функций $f\in C_\alpha^{(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$ таких, что

$$\sup_{\Delta_\gamma}|D_\infty^{n/\rho} f(z)|\leqslant AB^n M_n\ (n=1, 2,\cdots). \tag{0.18}$$

При этом операторы последовательного дифференцирования $D_\infty^{n/\rho} f(z)$ определялись по аналогии с (0.12), т. е.

$$\begin{gathered} D_\infty^{0/\rho} f(z)\equiv f(z),\ D_\infty^{1/\rho} f(z)\equiv\frac{d}{dz}D_\infty^{-\alpha} f(z), \\ D_\infty^{n/\rho} f(z)\equiv D_\infty^{1/\rho} D_\infty^{(n-1)/\rho} f(z)\ (n=2,\ 3,\cdots), \end{gathered} \tag{0.19}$$

где $1/\rho=1-\alpha\ (1<\rho<+\infty)$ и

$$D_\infty^{-\alpha} f(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_z^{e^{i\operatorname{Arg} z}}(\zeta-z)^{\alpha-1} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{0.20}$$

В работе [10] единственность связывалась с функционалами

$$D_\infty^{n/\rho} f(0\cdot e^{i\vartheta})=\frac{e^{i\alpha n\vartheta}}{\Gamma(\alpha n)}\int_0^{+\infty} f^{(n)}\ (r^{i\vartheta})\ r^{\alpha n-1}\,dr\left(|\vartheta|<\frac{\pi}{2\gamma},\ n>0\right) \tag{0.21}$$

и были установлены следующие теоремы.

Теорема IV. 1°. *Для того, чтобы класс* $C_\alpha\{\Delta_\gamma;\ M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1,\ 0<\gamma<+\infty)$ *обладал свойством* $(\alpha;\gamma)$*-единственности, т. е. чтобы для любой функции* $f\in C_\alpha\{\Delta_\gamma;\ M_n\}$ *из равенств*

$$D_\infty^{n/\rho} f\ (0\cdot e^{i\vartheta})=0\ \ (|\vartheta|<\pi/2\gamma;\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{0.22}$$

следовало тождество $f(z)\equiv 0,\ z\in\Delta_\gamma$, *достаточно условие*

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+(1-\alpha)\varkappa}}\,dr=+\infty,\ \text{где}\ \varkappa=\left\{1+\alpha+\frac{1-\alpha}{\gamma}\right\}^{-1}. \tag{0.23}$$

2°. *Если интеграл* (0.23) *сходится, то существует нетривиальная функция* $f\in C_\alpha^{(\infty)}\{\Delta_n\}$, *удовлетворяющая условиям* (0.22) *и такая, что*

$$\sup_{\Delta_\gamma}|f^{(n)}(z)|\leqslant AB^n M_n\ (n=1, 2,\cdots). \tag{0.24}$$

Теорема V. *Для того, чтобы класс* $C_\alpha^*\{\Delta_\gamma;\ M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1,\ 0<\gamma<+\infty)$ *обладал свойством* $(\alpha;\gamma)$*-единственности, необходимо и достаточно условие*

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\varkappa}}\,dr=+\infty. \tag{0.25}$$

0.4. Как явствует из вышесказанного, в теоремах II и III проблема α-квазианалитичности в принципиальном аспекте была полностью решена. Точно так же, в теоремах IV и V в принципиальном аспекте полностью решена аналогичная проблема $(\alpha; \gamma)$-единственности при $0 \leqslant \alpha < 1$. Но из самого определения функционалов единственности (0.8), (0.9) и (0.21) очевидно, что для их существования вовсе не обязательно накладывать на функции из соответствующих классов ограничения (0.6) или (0.16). В связи с этим, в работе М. М. Джрбашяна и В. М. Мартиросяна [11] было показано, что без какого-либо изменения всего метода решения проблемы в целом, предложенного в исследовании [6], и лишь путем эквивалентных переопределений операторов интегродифференцирования дробного порядка, можно предельно расширить введенные ранее классы $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ с тем, чтобы они были непосредственно ассоциированы с определениями простейших функционалов единственности (0.8) и (0.9).

В [11] были рассмотрены классы $\widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}$ $(-1 < \alpha < 1)$ ограниченных и бесконечно-дифференцируемых на $(0, +\infty)$ функций φ, для которых

$$\int_0^{+\infty} |\varphi^{(n)}(t)|\, t^{\alpha n-1}\, dt < +\infty \ (n=1, 2, \cdots) \text{ при } 0 < \alpha < 1; \tag{0.26}$$

$$\int_0^{+\infty} |\varphi^{(2n)}(t)|\, t^{(1+\alpha)n-1}\, dt < +\infty \ (n=1, 2, \cdots) \text{ при } -1 < \alpha < 0 \tag{0.27}$$

Далее, исходя из того, что при $\varphi \in C_\alpha^{(\infty)}$ верны формулы

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = D_\infty^{-\alpha n}\varphi^{(n)}(x) \ (n=0, 1, 2, \cdots;\ 0 \leqslant \alpha < 1), \tag{0.28}$$

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = D_\infty^{-(1+\alpha)n}\varphi^{(2n)}(x) \ (n=0, 1, 2, \cdots;\ -1 < \alpha < 0 \tag{0.29}$$

(см. [6], лемму 6, и [7], лемму 1.3), для $\varphi \in \widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}$ в [11] операторы последовательного дифференцирования были определены следующим образом.

Для значений $0 \leqslant \alpha < 1$

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_\infty^{0/\rho}\varphi(x) &= \varphi(x),\quad \widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \equiv D_\infty^{-\alpha n}\varphi^{(n)}(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n)}(t)\,dt \ (n=1, 2, \cdots),\end{aligned} \tag{0.30}$$

а для значений $-1 < \alpha < 0$

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_\infty^{0/\rho}\varphi(x) &\equiv \varphi(x),\quad \widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \equiv D_\infty^{-(1+\alpha)n}\varphi^{(2n)}(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-1}\varphi^{(2n)}(t)\,dt \ (n=1, 2, \cdots)\end{aligned} \tag{0.31}$$

(как и раньше, $1/\rho = 1-\alpha$).

В [11] были рассмотрены при $-1 < \alpha < 1$ следующие классы функций:

1) класс $\widetilde{C}_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ функций $\varphi \in \widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}$, таких, что

$$\sup_{x>0} |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n \ (n = 1, 2, \cdots); \tag{0.32}$$

2) класс $\widetilde{C}_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ функций $\varphi \in \widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}$, для которых

$$\sup_{x>0} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x) \leqslant AB^n M_n \ (n = 1, 2, \cdots); \tag{0.33}$$

и установлены следующие теоремы, в которых содержится исчерпывающее решение проблемы α-квазианалитичности для этих классов.

Теорема VI. *Для того, чтобы класс* $\widetilde{C}_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1)$ *был α-квазианалитическим, необходимо и достаточно условие* (0.11).

Теорема VII. *Для того, чтобы класс* $\widetilde{C}_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1)$ *был α-квазианалитическим, необходимо и достаточно условие* (0.15).

Отметим, что обе эти теоремы, а также теоремы II и III при значении параметра $\alpha = 0$ переходят в теорему I Данжуа-Карлемана.

0.5. Как уже отмечалось выше, задача $(\alpha; \gamma)$-единственности для значений параметра $0 < \alpha < 1$ в принципиальном аспекте была полностью решена в работе М. М. Джрбашяна и Г. С. Кочаряна [10]. Для окончательного завершения работ в этом направлении осталось непосредственно ассоциировать рассматриваемые классы с функционалами единственности (0.21), устранить небольшое расхождение между необходимой и достаточной частями теоремы IV, решить задачу $(\alpha; \gamma)$-единственности для значений параметра $-1 < \alpha < 0$.

В данной статье мы показываем, что, как и в работе [11], без всякого изменения всего метода решения проблемы в целом, предложенного в исследовании [6] и примененного в дальнейшем в работах [7, 10, 11], можно эквивалентным образом переопределить операторы $D_\infty^{n/\rho} f(z)$ и предельно расширить ранее введенные классы $C_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ и $C_\alpha^*\{\Delta_\gamma; M_n\}$ $(0 < \alpha < 1, 0 < \gamma < +\infty)$ с тем, чтобы они непосредственно ассоциировались с функционалами единственности (0.21). Мы показываем, что условия (0.23) и (0.25) являются критериями $(\alpha; \gamma)$-единственности соответствующих классов, и полученные результаты распространяем также на значения параметра $-1 < \alpha < 0$. При этом, мы намечаем только схемы доказательств критериев $(\alpha; \gamma)$-единственности для вводимых классов функций, поскольку полное изложение этих доказательств явилось бы буквальным повторением предложенного в исследовании [6] и использованного в работах [7, 10, 11] метода и его изложения.

Авторы приносят глубокую благодарность профессору М. М. Джрбашяну за постановку задач и полезные обсуждения работы.

§ 1. Вспомогательные утверждения

1.1. Для любой аналитической в $\Delta_\gamma\ (0<\gamma<+\infty)$ функции $f(z)$ определим операторы последовательного дифференцирования $\tilde{D}_\infty^{n/\rho} f(z)\ (n\geqslant 0)$ по аналогии с (0.30) и (0.31) следующим образом: при $0<\alpha<1$

$$\tilde{D}_\infty^{0/\rho} f(z)=f(z),\ \tilde{D}_\infty^{n/\rho} f(z)=D_\infty^{-\alpha n} f^{(n)}(z)\equiv \tag{1.1}$$

$$\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int\limits_z^{\infty(e^{i\operatorname{Arg} z})}(\zeta-z)^{\alpha n-1}f^{(n)}(\zeta)\,d\zeta\ (n=1,2,\cdots);$$

при $-1<\alpha<0$

$$\tilde{D}_\infty^{0/\rho} f(z)=f(z),\ \tilde{D}_\infty^{n/\rho} f(z)=D_\infty^{-(1+\alpha)n} f^{(2n)}(z)\equiv \tag{1.2}$$

$$\equiv\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int\limits_z^{\infty(e^{i\operatorname{Arg} z})}(\zeta-z)^{(1+\alpha)n-1}f^{(2n)}(\zeta)\,d\zeta\ (n=1,2,\cdots)$$

и, наконец, при $\alpha=0$

$$\tilde{D}_\infty^{n} f(z)=f^{(n)}(z)\ (n=0,1,2,\cdots) \tag{1.3}$$

(как и раньше, здесь $1/\rho=1-\alpha$). При этом, в предположении существования интегралов, интегрирование в (1.1) и (1.2) совершается вдоль луча $\operatorname{Arg}\zeta=\operatorname{Arg} z$ ($|\zeta|\geqslant|z|$) и выбраны те ветви подынтегральных степенных функций, для которых соответственно

$$\operatorname{Arg}(\zeta-z)^{\alpha n-1}=(\alpha n-1)\operatorname{Arg} z,\ \operatorname{Arg}(\zeta-z)^{(1+\alpha)n-1}=((1+\alpha)n-1)\operatorname{Arg} z.$$

Пусть $\tilde{C}_0^{(\infty)}\{\Delta_\gamma\}\ (0<\gamma<+\infty)$ — класс аналитических и ограниченных в Δ_γ функций.

При $-1<\alpha<1$, $\alpha\neq 0$ через $\tilde{C}_\alpha^{(\infty)}\{\Delta_\gamma\}\ (0<\gamma<+\infty)$ обозначим класс аналитических и ограниченных в Δ_γ функций $f(z)$, таких, что при $0<\alpha<1$

$$\int\limits_0^{+\infty}|f^{(n)}(re^{i\vartheta})|\,r^{\alpha n-1}\,dr<+\infty\ (|\vartheta|<\pi/2\gamma;\ n=1,2,\cdots), \tag{1.4}$$

а при $-1<\alpha<0$

$$\int\limits_0^{+\infty}|f^{(2n)}(re^{i\vartheta})|\,r^{(1+\alpha)n-1}\,dr<+\infty\ (|\vartheta|<\pi/2\gamma;\ n=1,2,\cdots). \tag{1.5}$$

Очевидно, что тогда интегралы (1.1) и (1.2) абсолютно сходятся при $z\in\Delta_\gamma$.

Далее, при $-1<\alpha<1$, $\alpha\neq 0$ обозначим через $\tilde{C}_\alpha^{*(\infty)}\{\Delta_\gamma\}\ (0<\gamma<+\infty)$ класс функций $f(z)$, принадлежащих $\tilde{C}_\alpha^{(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$ и удовлетворяющих следующим условиям: если $0<\alpha<1$, то

$$\lim_{R\to+\infty} R^{\alpha n} \int\limits_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} |f^{(n)}(Re^{i\theta})| \, d\theta = 0, \ \forall \vartheta_0 \in (0, \pi/2\gamma), \tag{1.6}$$

если же $-1 < \alpha < 0$, то

$$\lim_{R\to+\infty} R^{(1+\alpha)n} \int\limits_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} |f^{(2n)}(Re^{i\theta})| \, d\vartheta = 0, \ \forall \vartheta_0 \in (0, \pi/2\gamma). \tag{1.7}$$

При $\alpha = 0$ полагаем $\widetilde{C}_0^{*(\infty)}\{\Delta_\gamma\} = \widetilde{C}_0^{(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$.

1.2. Наряду с Δ_γ, для любого $\vartheta \in (-\infty, +\infty)$ пусть

$$\Delta(\gamma; \vartheta) = \{z \neq 0: |\operatorname{Arg}(ze^{i\vartheta})| < \pi/2\gamma\} -$$

лежащая на поверхности G_∞ угловая область раствора π/γ с биссектрисой $\operatorname{Arg} z = -\vartheta$. Очевидно, что $\Delta(\gamma; 0) = \Delta_\gamma$ и $\Delta_{\gamma_1} \subset \Delta_\gamma$ при $\gamma_1 > \gamma > 0$.

Определим также величину $N(\alpha)$, как

$$N(\alpha) = \left[\frac{4}{|\alpha|(1-|\alpha|)}\right] + 1 \ (-1 < \alpha < 0, \ 0 < \alpha < 1), \ N(0) = 1 \tag{1.8}$$

(здесь квадратные скобки означают целую часть числа).

Лемма 1. *Пусть* $-1 < \alpha < 1, 0 < \gamma < +\infty$. *Если* $f(z) \in \widetilde{C}_\alpha^{*(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$, *то при всех целых* $n \geqslant N(\alpha)$ *функция* $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} f(z)$ *аналитична в* Δ_γ.

Доказательство. Заметим сначала, что при $\alpha = 0$ имеем $\rho = 1$ и

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} f(z) = \widetilde{D}_\infty^{n} f(z) = f^{(n)}(z), \ z \in \Delta_\gamma,$$

так что в этом случае утверждение леммы тривиально.

Предположим теперь, что $\alpha \neq 0$, и введем обозначения.

Пусть $z_0 \in \Delta_\gamma$ — фиксированная точка и

$$U(z_0) = \{z: |z - z_0| \leqslant \delta(z_0), \ |\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z_0| < \pi\}$$

— окрестность точки z_0, целиком лежащая в Δ_γ. Для $z \in U(z_0)$ пусть $L(z, z_0, R)$ — замкнутый контур, состоящий из следующих частей:

а) отрезков

$$\Gamma(z; z_0) = \{\zeta = az + (1-a) z_0 : 0 < a < 1\} \subset U(z_0),$$

$$\gamma(z_0; R) = \{\zeta : \operatorname{Arg} \zeta = \operatorname{Arg} z_0, |z_0| \leqslant |\zeta| \leqslant R\}, \ \gamma(z; R),$$

б) дуги

$$C(R) = \{\zeta : |\zeta| = R, \ \operatorname{Arg} z_0 \leqslant \operatorname{Arg} \zeta \leqslant \operatorname{Arg} z\}.$$

Выберем на $L(z, z_0, R)$ направление положительного обхода конечной области $G(z, z_0, R) \subset \Delta_\gamma$, ограниченной этим контуром.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Существует последовательность $R_k \uparrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{k\to+\infty} R_k^{\alpha n} \int\limits_{\operatorname{Arg} z}^{\operatorname{Arg} z_0} |f^{(n)}(R_k e^{i\theta})| \, d\theta = 0,$$

и поэтому

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{C(R_k)}(\zeta-z)^{\alpha n-1}f^{(n)}(\zeta)\,d\zeta=0.$$

С другой стороны, по теореме Коши имеем

$$\left\{\int_{\gamma(z;R_k)}+\int_{\gamma(z_0;R_k)}+\int_{\Gamma(z;z_0)}+\int_{C(R_k)}\right\}(\zeta-z)^{\alpha n-1}f^{(n)}(\zeta)\,d\zeta=0,$$

и устремив здесь $k\to+\infty$, получим

$$\widetilde{D}_\infty^{n/p}f(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\left\{\int_{z_0}^{\infty(e^{i\operatorname{Arg}z_0})}(\zeta-z)^{\alpha n-1}f^{(n)}(\zeta)\,d\zeta+\right.$$

$$\left.+\int_{\Gamma(z,z_0)}(\zeta-z)^{\alpha n-1}f^{(n)}(\zeta)\,d\zeta\right\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\{I_1(z)+I_2(z)\},\ z\in U(z_0).$$

Формальное дифференцирование дает

$$\frac{d}{dz}I_1(z)=(1-\alpha n)\int_{z_0}^{\infty(e^{i\operatorname{Arg}z_0})}(\zeta-z)^{\alpha n-2}f^{(n)}(\zeta)\,d\zeta,\ z\in U(z_0). \tag{1.9}$$

Но так как $\alpha n-2>0$ при $n>N(\alpha)$ и $|\zeta|\geqslant|z_0|$, то

$$|\zeta-z|^{\alpha n-2}/|\zeta|^{\alpha n-1}\leqslant\frac{1}{|\zeta|}\left(1+\frac{|z_0|+\delta(z_0)}{|\zeta|}\right)^{\alpha n-2}\leqslant\frac{1}{|z_0|}\left(2+\frac{\delta(z_0)}{|z_0|}\right)^{\alpha n-2}=A,$$

и поэтому для всех $z\in U(z_0)$ будем иметь

$$\int_{z}^{\infty(e^{i\operatorname{Arg}z_0})}|\zeta-z|^{\alpha n-2}|f^{(n)}(\zeta)|\,|d\zeta|\leqslant A\int_{z_0}^{\infty(e^{i\operatorname{Arg}z_0})}|\zeta|^{\alpha n-1}|f^{(n)}(\zeta)|\,|d\zeta|<+\infty.$$

Значит интеграл из (1.9) равномерно сходится в $U(z_0)$, так что $I_1(z)$— аналитическая функция. Очевидно, что $I_2(z)$—также аналитичеcкая функция и, значит, в $U(z_0)$ будет аналитической также функция $\widetilde{D}_\infty^{n/p}f(z)$.

Аналогично рассматривается случай $-1<\alpha<0$.

Лемма 2. *Пусть* $-1<\alpha<1$, $0<\gamma<+\infty$. *Если* $f(z)\in\widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$ *и*

$$\sup_{\Delta_\gamma}|f^{(n)}(z)|=a_n<+\infty\quad(n=1,2,\cdots), \tag{1.10}$$

то $f(z)\in\widetilde{C}_\alpha^{*(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$.

Доказательство. При $\alpha=0$ утверждение леммы следует из определений.

Пусть $0<\alpha<1$. Нам нужно доказать, что при каждом $n\geqslant1$ производная $f^{(n)}(z)$ удовлетворяет условию (1.6). Очевидно, при этом можем считать, что $f^{(n)}(z)\not\equiv0$.

Зафиксируем $\vartheta_0\in(0,\pi/2\gamma)$ и выберем $\gamma_1>\gamma$ так, чтобы $\vartheta_0\in(0,\pi/2\gamma_1)$ и $f^{(n)}(z)$ не обращалась в нуль на лучах $\operatorname{Arg}z=\pm\pi/2\gamma_1$.

В силу (1.10) функция

$$F_n(w) = f^{(n)}(\{(1+w)/(1-w)\}^{1/\gamma_1}),\ |w|<1,$$

аналитична и ограничена в единичном круге и отлична от тождественного нуля. Поэтому произведение Бляшке $B_n(w)$ ее нулей сходится и $F_n(w)/B_n(w)$ — аналитическая и ограниченная в единичном круге функция. Возвращаясь к $f^{(n)}(z)$, получаем, что функция

$$g_n(z) = f^{(n)}(z)/B_n((z^{\gamma_1}-1)/(z^{\gamma_1}+1)),\ z\in\Delta_{\gamma_1}, \tag{1.11}$$

аналитична, ограничена и не обращается в нуль в Δ_{γ_1}. Более того, из известных свойств произведения Бляшке (см., напр., [12], гл. IV) следует, что $g_n(z)$ аналитична и отлична от нуля в $\bar{\Delta}_{\gamma_1}\setminus\{0,\ \infty\}$,

$$|g_n(re^{\pm i\pi/2\gamma_1})| = |f^{(n)}(re^{\pm i\pi/2\gamma_1})|\ (0<r<+\infty). \tag{1.12}$$

Следовательно, функция

$$G_n(z) = \{g_n(z)\, z^{\alpha n-1}\}^{1/2},\ z\in\Delta_{\gamma_1} \tag{1.13}$$

аналитична в $\bar{\Delta}_{\gamma_1}\setminus\{0,\ \infty\}$, а в силу (1.12) и (1.4)

$$\int_0^{+\infty} |G_n(re^{\pm i\pi/2\gamma_1})|^2\, dr < +\infty. \tag{1.14}$$

Кроме того, на любом промежутке (δ, R) $(0<\delta<R<+\infty)$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2\gamma_1}\int_\delta^R |G_n(re^{\pm i\pi/2\gamma_1}) - G_n(re^{\pm i\varphi})|^2\, dr = 0. \tag{1.15}$$

С другой стороны, в силу (1.10), (1.11) и (1.13)

$$|G_n(z)|^2 \le a_n|z|^{\alpha n-1},\ z\in\Delta_{\gamma_1},$$

так что для любого $\varepsilon>0$ будем иметь:

$$\sup_{|\varphi|<\pi/2\gamma_1}\left\{\int_0^{+\infty}|G_n(re^{i\varphi})|^2 e^{-\varepsilon r^{\gamma_1}}\, dr\right\} \le a_n\int_0^{+\infty} r^{\alpha n-1}e^{-\varepsilon r^{\gamma_1}}\, dr < +\infty.$$

Отсюда, из (1.14) и (1.15) на основании одной теоремы типа Фрагмена-Линделефа из монографии М. М. Джрбашяна [8] (стр. 545) заключаем, что $G_n(z)\in H_2[\gamma_1]$, т. е.

$$\sup_{|\varphi|<\pi/2\gamma_1}\left\{\int_0^{+\infty}|G_n(re^{i\varphi})|^2\, dr\right\} < +\infty.$$

Поэтому, в силу леммы 8.6 из монографии [8] имеем

$$\max_{|\theta|<\theta_0}|G_n(re^{i\theta})|^2 = r^{-1}A_n(r),$$

где $A_n(r)\to 0$ при $r\to+\infty$. Возвращаясь к $f^{(n)}(z)$, получим

$$\max_{|\theta|<\theta_0}|f^{(n)}(re^{i\theta})| \le \max_{|\theta|<\theta_0}\{|G_n(re^{i\theta})|^2 r^{1-\alpha n}\} = r^{-\alpha n}A_n(r).$$

Следовательно

$$r^{\alpha n}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}|f^{(n)}(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta\leqslant 2\,\vartheta_0 A_n(r)\to 0 \text{ при } r\to+\infty,$$

откуда и следует принадлежность $f(z)\in \widetilde{C}_\alpha^{*(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$.

1.3. Пусть $L(\vartheta)\,(-\infty<\vartheta<+\infty)$ — лежащий на поверхности G_∞ луч $\operatorname{Arg}\zeta=\vartheta$. Для любой аналитической в Δ_γ функции $f(z)$ обозначим через $f(t;\vartheta)$ ее сужение на луч $L(\vartheta)$, т. е. $f(t;\vartheta)=f(te^{i\vartheta})$, $0<t<+\infty$, и заметим, что если $f(z)\in\widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$ $(-1<\alpha<1,\ 0<\gamma<+\infty)$, то при $|\vartheta|<\pi/2\gamma$

$$f(t;\vartheta)\in\widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}, \tag{1.16}$$

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}f(t;\vartheta)=e^{in\vartheta/\rho}\,\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}f(z)_{z=te^{i\vartheta}}\ (0\leqslant t<+\infty,\ n\geqslant 0). \tag{1.17}$$

Лемма 3. *Пусть* $-1<\alpha<1,\ 0<\gamma<+\infty$. *Если* $f(z)\in\widetilde{C}_\alpha^{*(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$ *и*

$$\sup_{\Delta_\gamma}|\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}f(z)|=d_n<+\infty\ \ (n\geqslant N(\alpha)), \tag{1.18}$$

то справедливы следующие утверждения.

1°. *При любом* $\vartheta\ (|\vartheta|<\pi/2\gamma)$ *функция*

$$F_\vartheta(z)=\int_{L(\vartheta)}E_\rho(-z\zeta^{1/\rho};\ 1/\rho)\,\zeta^{1/\rho-1}\,\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}f(\zeta)\,d\zeta \tag{1.19}$$

аналитична внутри и непрерывна в $\overline{\Delta}\{\beta;\ \vartheta/\rho\}\diagdown\{0,\ \infty\}$, *где*

$$1/\rho=1-\alpha,\ 1/\beta=1+\alpha. \tag{1.20}$$

2°. *Существует функция* $F(z)$, *аналитическая внутри и непрерывная в* $\overline{\Delta}_\varkappa\diagdown\{0,\ \infty\}$, *где*

$$1/\varkappa=1+\alpha+(1-\alpha)/\gamma, \tag{1.21}$$

и такая, что при любом $\vartheta\ (|\vartheta|<\pi/2\gamma)$

$$F_\vartheta(z)\equiv F(z),\ z\in\overline{\Delta}\{\beta;\ \vartheta/\rho\}\diagdown\{0,\ \infty\}. \tag{1.22}$$

Доказательство. Если $\zeta=te^{i\vartheta}$, то ввиду (1.17)

$$F_\vartheta(z)=e^{i(1-n)\vartheta/\rho}\int_0^{+\infty}E_\rho(-ze^{i\vartheta/\rho}t^{1/\rho};\ 1/\rho)\,t^{1/\rho-1}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}f(t,\vartheta)\,dt. \tag{1.19'}$$

Кроме того, в силу (1.16) и по леммам 1′ и 1″ из работы [11] при любом $\vartheta\,(|\vartheta|<\pi/2\gamma)$ функция $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}f(t;\vartheta)$ непрерывна и ограничена на полуоси $0\leqslant t<+\infty$ и принадлежит классам $L_1(0,+\infty)$ и $L_2(0,+\infty)$. Поэтому в силу лемм 4 и 5 из [6] (они доказаны при $0\leqslant\alpha<1$, но их утверждения и доказательство остаются в силе и при $-1<\alpha<0$) получаем утверждение 1° леммы.

Пусть теперь $|\vartheta_k|<\pi/2\gamma$ $(k=1,\ 2)$ и $0<\vartheta_2-\vartheta_1\leqslant\pi/2\beta)$. Тогда угловые области $\Delta\{\beta;\ \vartheta_1/\rho\}$ и $\Delta\{\beta;\ \vartheta_2/\rho\}$ имеют непустое пересечение $D\{\vartheta_1;\ \vartheta_2\}$. Докажем, что функции $F_{\vartheta_1}(z)$ и $F_{\vartheta_2}(z)$ совпадают на $D\{\vartheta_1;\ \vartheta_2\}$.

Из асимптотических свойств функции типа Миттаг-Леффлера следует (см. [6], лемму 2.4, или [8], гл. III), что

$$|E_\rho(-z\zeta^{1/\rho},\ 1/\rho)|\leqslant C(z)\,(1+|\zeta|)^{-2/\rho}\ (z\in D\{\vartheta_1;\ \vartheta_2\},\ \vartheta_1\leqslant \operatorname{Arg}\zeta\leqslant\vartheta_2), \tag{1.23}$$

где $C(z)>0$ не зависит от ζ.

Далее, если $r_k\downarrow 0$ и $R_k\uparrow+\infty$ $(r_1<1<R_1)$, то положим

$$C(r_k)=\{\zeta:\vartheta_1\leqslant\operatorname{Arg}\zeta\leqslant\vartheta_2,\ |\zeta|=r_k\},\quad C(R_k)=\{\zeta:\vartheta_1\leqslant\operatorname{Arg}\zeta\leqslant\vartheta_2,\ |\zeta|=R_k\}.$$

Через $\gamma_k(\vartheta_1)$ обозначим отрезок луча $L(\vartheta_1)$, соединяющий точки пересечения дуг $C(r_k)$ и $C(R_k)$ с этим лучом. Аналогично определим отрезок $\gamma_k(\vartheta_2)$ луча $L(\vartheta_2)$.

Так как по лемме 1 $\tilde{D}_-^{n/\rho}f(\zeta)$ аналитична в Δ_γ, то

$$\left\{\int\limits_{\gamma_k(\vartheta_1)}-\int\limits_{\gamma_k(\vartheta_2)}\right\}E_\rho(-z\zeta^{1/\rho};\ 1/\rho)\,\zeta^{1/\rho-1}\,\tilde{D}_-^{n/\rho}f(\zeta)\,d\zeta=$$

$$=\left\{\int\limits_{C(R_k)}-\int\limits_{C(r_k)}\right\}E_\rho(-z\zeta^{1/\rho};\ 1/\rho)\,\zeta^{1/\rho-1}\,\tilde{D}_-^{n/\rho}f(\zeta)\,d\zeta\equiv M_k(z)-m_k(z). \tag{1.24}$$

Однако, в силу (1.23) и (1.18) будем иметь:

$$|M_k(z)|\leqslant C(z)\ R_k^{1/\rho}(\vartheta_2-\vartheta_1)\,d_n\,(1+R_k)^{-2/\rho}\to 0 \text{ при } k\to+\infty;$$

$$m_k(z)\ \leqslant C(z)\ r_k^{1/\rho}(\vartheta_2-\vartheta_1)\,d_n\,(1+r_k)^{-2/\rho}\to 0 \text{ при } k\to+\infty.$$

Следовательно, устремив в (1.24) $k\to+\infty$ и замечая, что при этом отрезки $\gamma_k(\vartheta_1)$ и $\gamma_k(\vartheta_2)$ переходят в лучи $L(\vartheta_1)$ и $L(\vartheta_2)$ соответственно, получим, что $F_{\vartheta_1}(z)$ и $F_{\vartheta_2}(z)$ совпадают в $D\{\vartheta_1;\ \vartheta_2\}$. Отсюда следует утверждение 2° леммы.

Лемма 4. *Пусть* $-1<\alpha<1$, $0<\gamma<+\infty$ *и функция* $f(z)\in\tilde{C}_\alpha^{*(-)}\{\Delta_\gamma\}$ *удовлетворяет следующим условиям: при* $n\geqslant N(\alpha)$

$$\sup_{\Delta_\gamma}|\tilde{D}_-^{n/\rho}f(z)|=d_n<+\infty;\quad \tilde{D}_-^{n/\rho}f(0\cdot e^{i\vartheta})=0\ (|\vartheta|<\pi/2\gamma). \tag{1.25}$$

Тогда аналитическая в Δ_γ *и непрерывная в* $\bar{\Delta}_\gamma\setminus\{0,\ \infty\}$ *(по лемме 3) функция*

$$\Phi_\rho(z)=z^{-N(\alpha)}\int\limits_0^{+\infty}E_\rho(-zt^{1/\rho};\ 1/\rho)\,t^{1/\rho-1}\tilde{D}_-^{N(\alpha)/\rho}f(t)\,dt \tag{1.26}$$

допускает также представление вида: при $z\in\bar{\Delta}\{\beta;\ \vartheta/\rho\}\setminus\{0,\ \infty\}$, $|\vartheta|<\pi/2\gamma$.

$$\Phi_\rho(z)=z^{-n}\int\limits_{L(\vartheta)}E_\rho(z-\zeta^{1/\rho};\ 1/\rho)\zeta^{1/\rho-1}\tilde{D}_{-}^{n/\rho}f(\zeta)\,d\zeta\ (n\geqslant N(\alpha)).\qquad(1.27)$$

Доказательство. В силу (1.16) $f(t;0)\equiv f(t)\in \tilde{C}_{\varkappa}^{(-)}$, а из (1.25) на основании (1.17) заключаем, что при $n\geqslant N(\alpha)$

$$\sup_{t>0}|\tilde{D}_{-}^{n/\rho}f(t;\ 0)|\leqslant d_n<+\infty,\ \tilde{D}_{-}^{n/\rho}f(t;\ 0)|_{t=0}=0.$$

Следовательно, при $n\geqslant N(\alpha)$ в $\overline{\Delta}_\beta\diagdown\{0,\ \infty\}$ верно представление

$$\Phi_\rho(z)=z^{-n}\int\limits_0^{+\infty}E_\rho(-zt^{1/\rho};\ 1/\rho)\,t^{1/\rho-1}\tilde{D}_{-}^{n/\rho}f(t)dt\qquad(1.27')$$

(см. [11], стр. 296). Но в силу леммы 3, интегралы в (1.27) определяют аналитическую в $\Delta_\varkappa$ и непрерывную в $\overline{\Delta}_\varkappa\diagdown\{0,\ \infty\}$ функцию, которая согласно (1.27′) совпадает с $\Phi_\rho(z)$ в Δ_β. Следовательно, эти функции совпадают в $\overline{\Delta}_\varkappa\diagdown\{0,\ \infty\}$.

1.4. Пусть $\{M_n\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел, $0<\varkappa<+\infty$ и

$$\int\limits_1^{+\infty}r^{-1-\varkappa}\log T(r)\,dr<+\infty\ (T(r)=\sup\{r^n/M_n:n\geqslant 1\}).\qquad(1.28)$$

Тогда, как было доказано в лемме 1 работы [10], существует функция $F(w)$, аналитическая в $\Delta_\varkappa$, непрерывная в $\overline{\Delta}_\varkappa$ и такая, что при $|\varphi|\leqslant$ $\leqslant\pi/2\varkappa$

$$\begin{aligned}&|F(re^{i\varphi})|\leqslant\{(1+r/r_0)^2e^{p(r)}\}^{-1}\leqslant 1\ \ (0\leqslant r<+\infty),\\&|F(re^{i\varphi})|\leqslant M_n\{r^n(1+r/r_0)^2\}^{-1}\ \ (r_0\leqslant r<+\infty,n\geqslant 1),\end{aligned}\qquad(1.29)$$

где $r_0\geqslant 1$ — некоторое число и

$$p(r)=\begin{cases}\log T(r_0),\ 0\leqslant r\leqslant r_0\\ \log T(r),\ r_0\leqslant r<+\infty.\end{cases}\qquad(1.30)$$

Функция

$$\tilde{F}(w)=F(w)\cdot F(1/w)\qquad(1.31)$$

также аналитична в $\Delta_\varkappa$, непрерывна в $\overline{\Delta}_\varkappa$, а в силу (1.29)

$$|\tilde{F}(w)|\leqslant\begin{cases}1,\ \text{при}\ w\in\overline{\Delta}_\varkappa,\\ M_n|w^n|,\ \text{при}\ w\in\overline{\Delta}_\varkappa,\ 0<|w|<r_0^{-1};\end{cases}\qquad(1.32)$$

и для любого $n\geqslant 1$

$$|\tilde{F}(w)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{M_n}{r_0^n(1+|w|/r_0)^2},\ \text{при}\ w\in\overline{\Delta}_\varkappa,\ 0\leqslant|w|\leqslant r_0;\\[2ex] \dfrac{M_n}{|w|^n(1+|w|/r_0)^2},\ \text{при}\ w\in\overline{\Delta}_\varkappa,\ |w|>r_0.\end{cases}\qquad(1.33)$$

Лемма 5. *Пусть* $-1<\alpha<1$, $0<\varkappa<+\infty$ *и*

$$1/\rho=1-\alpha,\quad \tau=\varkappa/(\rho+\varkappa). \tag{1.34}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. *При любом* $v\geqslant 0$ *функция*

$$\Psi(z;\,v)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-zw^\rho} w^v \widetilde{F}(w)\,dw \tag{1.35}$$

аналитична в Δ_τ *и непрерывна в* $\overline{\Delta}_\tau$.

2°. *Функция* $\Psi(z)\equiv\Psi(z;\,0)$ — *из класса* $C_\alpha^{(\infty)}\{\Delta_\tau\}$, *т. е.* $\forall \tau_1>\tau$

$$\sup_{\Delta_{\tau_1}}\{(1+|z|^{|\alpha|\,m})\,|\Psi^{(n)}(z)|\}<+\infty\quad(n,\ m=0,1,2,\cdots). \tag{1.36}$$

При $0\leqslant\alpha<1$ эти утверждения доказаны в леммах 2 и 3 работы [10]; доказательства остаются в силе и при $-1<\alpha<0$.

Лемма 6. 1°. *Определенная в лемме 5 функция* $\Psi(z)$ *обладает всеми последовательными производными* $\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\Psi(z)$ $(n\geqslant 1)$, *которые аналитичны в* Δ_τ *и непрерывны в* $\overline{\Delta}_\tau$. *При этом, для всех* φ $(-\pi/2\varkappa\leqslant\varphi\leqslant\pi/2\varkappa)$ *и* $n\geqslant 0$, *если* $|\mathrm{Arg}(ze^{i\varphi\rho})|\leqslant\pi/2$, *то*

$$\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\Psi(z)=(-1)^{n\,[1+\alpha]}\int\limits_{L(\varphi)} e^{-zw^\rho} w^n \widetilde{F}(w)\,dw, \tag{1.37}$$

где $[1+\alpha]$ — *целая часть числа* $1+\alpha$.

2°. *Справедливы оценки*

$$\sup_{\Delta_\tau}|\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\Psi(z)|\leqslant A_0M_n\quad(n=1,\ 2\cdots), \tag{1.38}$$

где $A_0=A_0(\Psi)>0$ — *некоторая константа, не зависящая от* n.

Эти утверждения были установлены в лемме 4 работы [10] для значений параметра $0\leqslant\alpha<1$ и последовательных производных $D_{-}^{n/\rho}\Psi(z)$. Приведенное в [10] доказательство остается в силе для всех значений $-1<\alpha<1$, с заменой $D_{-}^{n/\rho}\Psi(z)$ на $\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\Psi(z)$.

§ 2. Теоремы 1 и 2

2.1. Пусть, как и раньше, $\{M_n\}_1^\infty$ — произвольная последовательность положительных чисел и $T(r)=\sup\{r^n/M_n : n\geqslant 1\}$.

Для значений параметров $-1<\alpha<1$, $0<\gamma<+\infty$ обозначим через $\widetilde{C}_\gamma\{\Delta_\gamma;\ M_n\}$ класс функций $f(z)\in\overline{C}_\alpha^{(\infty)}\{\Delta_\gamma\}$, таких, что

$$\sup_{\Delta_\gamma}|f^{(n)}(z)|\leqslant AB^nM_n\quad(n=1,2,\cdots), \tag{2.1}$$

где A, B (>0) — константы, зависящие, вообще говоря, от функции $f(z)$, но не зависящие от n.

Единственность функций из этих классво мы будем связывать со значениями следующих функционалов, существование которых вытекает из условий (1.4) и (1.5):

если $0 \leqslant \alpha < 1$, то

$$\tilde{D}_{\alpha}^{n/\rho} f(0 \cdot e^{i\theta}) = \frac{e^{i\alpha n\theta}}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} f^{(n)}(re^{i\theta}) r^{\alpha n - 1} dr \left(|\theta| < \frac{\pi}{2\gamma},\ n \geqslant 0\right), \quad (2.2)$$

если $-1 < \alpha < 0$, то

$$\tilde{D}_{\alpha}^{n/\rho} f(0 \cdot e^{i\theta}) = \frac{e^{i(1+\alpha)n\theta}}{\Gamma((1+\alpha)n)} \int_0^{+\infty} f^{(2n)}(re^{i\theta}) r^{(1+\alpha)n-1} dr \left(|\theta| < \frac{\pi}{2\gamma},\ n \geqslant 0\right), \quad (2.3)$$

где, как и раньше, $1/\rho = 1 - \alpha$.

Отметим, что при $\alpha = 0$ $(\rho = 1)$ из (2.2) имеем:

$$\tilde{D}_{\alpha}^{n} f(0 \cdot e^{i\theta}) = \lim_{r \to +0} f^{(n)}(re^{i\theta}) = f^{(n)}(0) \quad (|\theta| < \pi/2\gamma,\ n > 0).$$

Теорема 1. *Пусть* $-1 < \alpha < 1$, $0 < \gamma < +\infty$. *Для того, чтобы класс* $\bar{C}_{\alpha}\{\Delta_{\gamma}; M_n\}$ *обладал свойством* $(\alpha; \gamma)$*-единственности, т.е. чтобы для любой функции* $f(z) \in \bar{C}_{\alpha}\{\Delta_{\gamma}, M_n\}$ *из равенств*

$$\tilde{D}_{\alpha}^{n/\rho} f(0 \cdot e^{i\theta}) = 0 \quad (|\theta| < \pi/2\gamma;\ n = 0, 1, 2, \cdots) \quad (2.4)$$

следовало тождество $f(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_{\gamma}$, *необходимо и достаточно условие*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+(1-\alpha)\varkappa}} dr = +\infty, \text{ где } \varkappa = \left\{1 + \alpha + \frac{1-\alpha}{\gamma}\right\}^{-1}. \quad (2.5)$$

При доказательстве этой теоремы, критерий $(\alpha; \gamma)$-единственности мы устанавливаем сначала для других классов $\tilde{C}_{\alpha}^{*}\{\Delta_{\gamma}; M_n\}$, а затем уже совершаем переход к классам $\bar{C}_{\alpha}\{\Delta_{\gamma}; M_n\}$.

При значениях параметров $-1 < \alpha < 1$, $0 < \gamma < +\infty$ класс $\tilde{C}_{\alpha}^{*}\{\Delta_{\gamma}; M_n\}$ определяется, как совокупность функций $f(z) \in \tilde{C}_{\alpha}^{*(\infty)}\{\Delta_{\gamma}\}$, таких, что

$$\sup_{\Delta_{\gamma}} |\tilde{D}_{\alpha}^{n/\rho} f(z)| \leqslant AB^n M_n \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad (2.6)$$

где A, $B\ (> 0)$ — константы, зависящие, вообще говоря, от функции $f(z)$, но не зависящие от n.

Теорема 2. *Пусть* $-1 < \alpha < 1$, $0 < \gamma < +\infty$. *Для того, чтобы класс* $\tilde{C}_{\alpha}^{*}\{\Delta_{\gamma}; M_n\}$ *обладал свойством* $(\alpha; \gamma)$*-единственности, т. е. чтобы для любой функции* $f(z) \in \tilde{C}_{\alpha}^{*}\{\Delta_{\gamma}; M_n\}$ *из равенств* (2.4):

$$\tilde{D}_{\alpha}^{n/\rho} f(0 \cdot e^{i\theta}) = 0 \quad (|\theta| < \pi/2\gamma;\ n = 0, 1, 2, \cdots),$$

следовало тождество $f(z)\equiv 0$, $z\in\Delta_\gamma$, *необходимо и достаточно условие*

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\varkappa}}\,dr=+\infty,\ \textit{где}\ \varkappa=\left\{1+\alpha+\frac{1-\alpha}{\gamma}\right\}^{-1}. \tag{2.7}$$

Отметим, что при значении параметра $\alpha=0$ как теоремы IV и V, так и теоремы 1 и 2 переходят в следующую теорему Р. Б. Салинаса [9].

Теорема VIII. 1°. *Пусть* $f(z)$ *аналитична и ограничена в угле* Δ_γ *и удовлетворяет следующим условиям:*

$$\sup_{\Delta_\gamma}|f^{(n)}(z)|\leqslant AB^n M_n\,(n>1);\ f^{(n)}(0)=0\ (n\geqslant 0). \tag{2.8}$$

Если при этом

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\gamma/(1+\gamma)}}\,dr=+\infty, \tag{2.9}$$

то $f(z)\equiv 0$, $z\in\Delta_\gamma$.

2°. *Обратно, если интеграл* (2.9) *конечен, то существует функция* $f(z)\not\equiv 0$, *аналитическая в* Δ_γ *и удовлетворяющая условиям* (2.8).

Отметим, наконец, что в крайнем случае, когда $\gamma=+\infty$ (тогда Δ_γ переходит в полуось $(0,+\infty)$), тоеремы 1 и 2 переходят в теоремы VI и VII соответственно.

2.2. Наметим доказательства теорем 1 и 2. При этом, поскольку ряд основных моментов необходимых при этом рассуждений есть в доказательствах теорем IV и V (см. [10]), то нами будут отмечены только те места этих доказательств, в которых надлежит ввести соответствующие изменения. Случай $\alpha=0$ $(\rho=1)$ мы рассматривать не будем, поскольку, как отмечалось выше, в этом случае получается теорема VIII Р. Б. Салинаса.

Теорема 2. Необходимость. Нужно в соответствующих местах доказательства теоремы V (см. [10], стр. 122—124) вместо лемм 1, 2, оценок (2.8), лемм 3, 4 (2°) и формулы (2.23) из работы [10] использовать соответственно леммы 5, 6 (1°), оценки (1.33), леммы 5 (2°), 6 (2°) и формулы (1.37) данной работы, а $D_\infty^{n/\rho}$ заменить на $\tilde{D}_\infty^{n/\rho}$.

Достаточность. При $n=N(\alpha)$ рассмотрим преобразование

$$F(z)=z^{-n}\int\limits_{L(\vartheta)}E_\rho(-z\zeta^{1/\rho},\,1/\rho)\ \zeta^{1/\rho-1}\,\tilde{D}_\infty^{n/\rho}f(\zeta)\,d\zeta,$$
$$(z\in\bar{\Delta}\{\beta;\ \vartheta/\rho\}\setminus\{0,\ \infty\},\ |\vartheta|<\pi/2\gamma), \tag{2.10}$$

где $\beta=1/(1+\alpha)=2-1/\rho$. По лемме 3 функция $F(z)$ аналитична в $\Delta_\varkappa$ а по лемме 4 представление (2.10) верно при всех $n\geqslant N(\alpha)$.

Далее, пусть $|\vartheta|<\pi/2\gamma$ и

$$\Delta_*\{\beta;\ \vartheta/\rho\}=\{z:|\mathrm{Arg}[e^{i\vartheta/\rho}(z-e^{-i\vartheta/\rho})]|<\pi/2\beta,\ z\neq e^{-i\vartheta/\rho}\}.$$

Тогда при $\rho \geqslant 1$ верна оценка

$$\int\limits_{L(\theta)} |E_\rho(-z\zeta^{1/\rho}; 1/\rho)\zeta^{1/\rho-1}||d\zeta| \leqslant A_0|z|^{\rho-1}, \; z \in \overline{\Delta}_*\{\beta; \theta/\rho\}, \tag{2.11}$$

а при $1/2 < \rho < 1$ справедлива аналогичная оценка

$$\int\limits_{L(\theta)} |E_\rho(-z\zeta^{1/\rho}; 1/\rho)\zeta^{1/\rho-1}||d\zeta| \leqslant A_0, \; z \in \overline{\Delta}_*\{\beta; \theta/\rho\} \tag{2.11'}$$

(см. [10], лемму Г и [7], оценку (2.61)). Кроме того

$$\sup_{\zeta \in L(\theta)} |\widetilde{D}_-^{n/\rho} f(\zeta)| \leqslant \sup_{\Delta_\gamma} |D_-^{n/\rho} f(z)| \leqslant AB^n M_n \; (n \geqslant 1).$$

Поэтому для всех $n \geqslant N(\alpha)$ и $z \in \overline{\Delta}_*\{\beta; \theta/\rho\}$ будем иметь:

$$|F(z)| \leqslant A_1 B^n M_n |z|^{\rho-n-1} \; (0 < \alpha < 1); \; |F(z)| \leqslant A_1 B^n M_n |z|^{-n} \; (-1 < \alpha < 0). \tag{2.12}$$

Следовательно, положив

$$T_{N(\alpha)}(r) = \sup_{n \geqslant N(\alpha)} \{r^n/M_n\}, \; \Delta_*\{\varkappa; 0\} = \bigcup_{|\theta| < \pi/2\gamma} \Delta_*\{\beta; \theta/\rho\} \subset \Delta_\varkappa,$$

получим, что при $z \in \overline{\Delta}_*\{\varkappa; 0\}$, $-1 < \alpha < 0$ и $0 < \alpha < 1$

$$|F(z)| \leqslant A_2 |z|^\rho / T_{N(\alpha)}(|z|/B). \tag{2.13}$$

После этого дословно повторяются рассуждения из работы [10] (стр. 126—127), с заменой $T(r)$ на $T_{N(\alpha)}(r)$, и устанавливается, что $F(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\beta$. При этом нужно только заметить, что в силу общих свойств функции $T(r)$ (см., напр., [5] или [6], стр. 216—217) при достаточно больших значениях r функции $T(r)$ и $T_{N(\alpha)}(r)$ совпадают, так что (2.7) верно с заменой $T(r)$ на $T_{N(\alpha)}(r)$.

Далее, поскольку функция $\widetilde{D}_-^{n/\rho} f(t) = \widetilde{D}_-^{n/\rho} f(t; 0)$ непрерывна и ограничена на полуоси $0 \leqslant t < +\infty$ и принадлежит классам $L_1(0, +\infty)$ и $L_2(0, +\infty)$ (см. доказательство леммы 3), то в силу леммы 5 из работы [6] (эта лемма доказана в [6] при $1 \leqslant \rho < +\infty$, но ее утверждение и доказательство остаются в силе и при $1/2 < \rho < 1$) на основании (2.10) и тождества $F(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\beta$, заключаем, что

$$\widetilde{D}_-^{n/\rho} f(t) = 0, \; t \in (0, +\infty). \tag{2.14}$$

Наконец, отсюда и из условия $f(0) = 0$ на основании следствий из лемм 1′ и 1″ работы [11] вытекает, что $f(t) \equiv 0$, $T(0+\infty)$, и значит по принципу аналитического продолжения, $f(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\gamma$.

Теорема 1. Необходимость устанавливается точно такими же рассуждениями, какие приведены при доказательстве теоремы 2 (2°) из работы [10] (стр. 130—132). Нужно только в соответствующих местах вместо лемм 2—4 из [10] воспользоваться леммами 5 и 6 данной работы, а $D_-^{n/\rho}$ заменить на $\widetilde{D}_-^{n/\rho}$.

Достатачность. При каждом ϑ ($|\vartheta|<\pi/2\gamma$) положим $f_\vartheta(t)=f(t;\vartheta)$, так что в силу (1.16) и (1.17) будем иметь

$$f_\vartheta(t)\in \widetilde{C}_\alpha^{(\infty)};\quad \widetilde{D}_\infty^{n/\rho} f_\vartheta(t)\, e^{in\vartheta/\rho}\, \widetilde{D}_\infty^{n/\rho} f(z)_{,z=te^{i\vartheta}}\ (t\geqslant 0;\ n=0,1,2,\cdots). \tag{2.15}$$

Кроме того, отсюда и из (2.4) следуют равенства

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} f_\vartheta(0)=0\ \ (|\vartheta|<\pi/2\gamma;\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{2.16}$$

Положим также при $n=0, 1, 2, \dots$

$$\sup_{\Delta_\gamma}|f^{(n)}(z)|=m_n,\ \sup_{t>0}|f_\vartheta^{(n)}(t)|=m_n^{(\vartheta)}\ (|\vartheta|<\pi/2\gamma) \tag{2.17}$$

и заметим, что

$$m_n^{(\vartheta)}\leqslant m_\gamma\leqslant AB^nM_n\ (|\vartheta|<\pi/2\gamma;\ n=0,1,2,\cdots). \tag{2.18}$$

Рассмотрим теперь случай $\inf\{nM_n^{1/n}: n\geqslant 1\}=0$. Легко видеть, что в этом случае $T(r)\equiv+\infty$, $r>0$, и поэтому выполнено условие (0.11). Кроме того, в силу (2.17) и (2.18) $f_\vartheta(t)\in \widetilde{C}_\alpha\{[0,+\infty);\ M_n\}$ при всех ϑ ($|\vartheta|<\pi/2\gamma$). Отсюда на основании (2.16) получим в силу теоремы VI тождество $f(z)\equiv 0$, $z\in\Delta_\gamma$.

Таким образом, в дальнейшем можем считать, что

$$\inf\{nM_n^{1/n}: n\geqslant 1\}=c>0. \tag{2.19}$$

Вводя обозначение

$$n(\alpha)=\begin{cases}[\alpha n], & \text{при } 0<\alpha<1,\\ [(1+\alpha)n], & \text{при } -1<\alpha<0,\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\cdots),$$

где $[\alpha n]$ и $[(1+\alpha)n]$ — целые части чисел αn и $(1+\alpha)n$ соответственно, и воспользовавшись рассуждениями из работы [11] (стр. 298—299) при $\alpha n=[\alpha n]$ получим

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} f_\vartheta(t)=(-1)^{n(\alpha)}\, f_\vartheta^{(n-[\alpha n])}(t),\ t>0. \tag{2.20}$$

Если же $\alpha n\neq[\alpha n]$, то вновь воспользуемся рассуждениями из работы [11] (стр. 299—300), придем к неравенствам

$$|\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} f_\vartheta(t)|\leqslant 2\{m^{(\vartheta)}_{n-[\alpha n]}+m^{(\vartheta)}_{n-[\alpha n]-1}\}/\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1),\ t>0. \tag{2.21}$$

Ввиду (2.17), (2.18), из (2.20), (2.21) и (2.15) следует, что

$$\sup_{\Delta_\gamma}|\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} f(z)|<+\infty\ (n=1,\ 2,\cdots). \tag{2.22}$$

Теперь воспользуемся одной известной теоремой (см., напр., [5], стр. 217) в частном случае, когда $k=n-1$ ($n\geqslant 2$), будем иметь

$$m_{n-1}^{(\vartheta)}\leqslant\left(\frac{8en}{n-1}\right)^{n-1}(m_0^{(\vartheta)})^{1/n}(m_n^{(\vartheta)})^{1-1/n}\leqslant e(8e)^{n-1}(m_0^{(\vartheta)})^{1/n}(m_n^{(\vartheta)})^{1-1/n},$$

откуда на основании (2.18) получим

$$m_{n-1}^{(\vartheta)} \leqslant e(8e)^{n-1} m_0^{1/n} n m_n^{(\vartheta)} \{n(m_n^{(\vartheta)})^{1/n}\}^{-1} \leqslant C_1(16e)^n (nM_n^{1/n})^{-1} m_n^{(\vartheta)}.$$

Следовательно, ввиду (2.19)

$$m_{n-1}^{(\vartheta)} \leqslant C_2^n m_n^{(\vartheta)} \ (|\vartheta| < \pi/2\gamma;\ n = 2, 3, \cdots), \tag{2.23}$$

причем константа $C_2 > 1$ не зависит от ϑ и n.

Если $n \geqslant 2/(1-\alpha)$, то $n - [\alpha n] \geqslant 2$, и в силу (2.23)

$$m_{n-[\alpha n]-1}^{(\vartheta)} \leqslant C_2^{n-[\alpha n]} m_{n-[\alpha n]}^{(\vartheta)}.$$

Подставляя эти оценки в (2.21) и учитывая (2.18), придем к неравенствам

$$|\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} f_\vartheta(t)| \leqslant A_1 B_1^n m_{n-[\alpha n]} \ (|\vartheta| < \pi/2\gamma,\ n \geqslant 2/(1-\alpha)), \tag{2.24}$$

где A_1, B_1 (> 0) — константы, не зависящие от ϑ и n. Из этих оценок на основании (2.22), (2.15) и (2.18) получим

$$\sup_{\Delta_\gamma} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} f(z)| \leqslant A_2 B_2^n M_{n-[\alpha n]}, \tag{2.25}$$

когда $\alpha n \neq [\alpha n]$. Когда же $\alpha n = [\alpha n]$, справедливость (3.24) и (3.25) вытекает из (2.20), (2.15) и (2.18).

Далее, как и в [10] (стр. 129), положим $M_n^* = M_{n-[\alpha n]}$ $(n \geqslant 1)$. После этого, при $0 < \alpha < 1$ дословно повторяя выкладки из [10] (стр. 129—130), получим $f(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\gamma$. Нужно только в конце ссылаться не на теорему 1 из [10], а на теорему 2 данной работы, и воспользоваться леммой 2.

Пусть тепер—$1 < \alpha < 0$. В силу (2.15) и (2.24) верны оценки

$$\sup_{\Delta_\gamma} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} f(z)| \leqslant A_1 B_1^n m_{n-[\alpha n]} \ (n = 1, 2, \cdots). \tag{2.26}$$

Кроме того, поскольку в (2.23) C_2 не зависит от n и ϑ, то ввиду (2.17)

$$m_{n-1} \leqslant C_2^n m_n \ (n = 2, 3, \cdots). \tag{2.27}$$

Заметим теперь, что в силу условия $-1 < \alpha < 0$ последовательность $\{n - [\alpha n]\}_1^\infty$ пробегает весь натуральный ряд, за исключением определенной возрастающей последовательности $\{p_k\}_1^\infty$, $p_1 = 1$, такой, что $p_k - 1 \in \{n - [\alpha n]\}_1^\infty$ при $k \geqslant 2$. Следовательно, в силу (2.27) при $r \geqslant 1$, $k \geqslant 2$

$$r^{p_k}/m_{p_k} \leqslant (rC_2)^{p_k}/m_{p_k-1} \leqslant (rC_2) \sup_{n \geqslant 1} \{(rC_2)/m_{n-[\alpha n]}\}.$$

Очевидно также, что при любом $k \geqslant 1$

$$r^{k-[\alpha k]}/m_{k-[\alpha k]} \leqslant (rC_2) \sup_{n \geqslant 1} \{(rC_2)^{n-[\alpha n]}/m_{n-[\alpha n]}\}.$$

Положив

$$T_1(r) = \sup_{n \geqslant 2} \{r^n/m_n\}, \quad T_2(r) = \sup_{n \geqslant 1} \{r^{n-[\alpha n]}/m_{n-[\alpha n]}\},$$

на основании полученных оценок заключаем, что

$$T_1(r) \leqslant (rC_2)\, T_2(rC_2), \ r \geqslant 1. \tag{2.28}$$

С другой стороны, ввиду (2.18) имеет место неравенство $T(r) \leqslant \leqslant A^{-1} T_1(r/B)$ $(r \geqslant r_1)$, так что в силу (2.28)

$$T(r) \leqslant \{rC_2/AB\} \, T_2(rC_2/B) \ (r \geqslant r_1).$$

Следовательно, в силу условия (2.5) будем иметь

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T_2(r)}{r^{1+(1-\alpha)\varkappa}} \, dr = +\infty.$$

Наконец, положив $M_n^* = m_{n-[\alpha n]}$ $(n \geqslant 1)$ и опять повторяя все выкладки из [10] (стр. 129—130), получим, что в этом случае также $f(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\gamma$. При этом нужно только в соответствующих местах вместо $T(r)$ и $M_{n-[\alpha n]}$ писать $T_2(r)$ и $m_{n-[\alpha n]}$, а в конце ссылаться не на теорему 1 из работы [10], а на теорему 2 данной работы, и воспользоваться леммой 2.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 3.VII. 1984

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Կ. Ռ. ՀՈՎԵՍՅԱՆ. Անկյունային տիրույթներում Մ. Մ. Ջրբաշյանի α—քվազիանալիտիկ դասերի տեսության շուրջը (*ամփոփում*)

Տվյալ հոդվածում ցույց է տրվում, որ պրոբլեմի ամբողջական լուծման [6] հետազոտությունում զարգացված և հետագայում [7,10,11] աշխատանքներում կիրառված մեթոդը առանց որևէ փոփոխության կիրառելով կարելի է առավելագույն չափով լայնացնել [10] աշխատանքում ներմուծված դասերը այնպես, որ դրանք անմիջականորեն զուգակցվեն միակության համապատասխան ֆունկցիոնալների հետ

V. M. MARTIROSYAN, K. R. HOVESYAN. *On the theorg of M. M. Djrbashyan α-quasianalgtic classes in angular domains* (summary)

In the present paper it is shown, that without change of the method developed in [6] in whole it is possible to expance introdused in [10] classes such, that the new classes immediatly are associated with the unlqueness functionals.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Hadamard.* Sur la dénéralisation de la notion analytique, C. R. Séances Soc Math. France, 40, 1912, 28—29.
2. *A. Denjoy.* Sur les fonctions quasi analytiques d'une variable réelle, C. R. Acad. Sc., Paris, 173, 1921, 1329—1331.
3. *T. Carleman.* Les fonctions quasi analytiques, Cauthier—Villars, Paris, 1926. Jbuch Fortschritte Math., 52, 1926, 255.
4. *A. Ostrowski.* Uber quasi-analytische Funkxtionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen, Acta Math., 53, 1930, 181—266.
5. *С. Мандельбройт.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, М., ИИЛ, 1955.
6. *М. М. Джрбашян.* Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, № 3, 1968, 171—248;
   M. M. Džrbasjan. An extension of the Denjoy—Carleman quasi-analytic classes, Amer. Math. Soc. Transl., (2) Vol. 110, 1977, 1—59.

7. *А. А. Китбалян.* Задача α-квазианалитичности в классах Данжуа-Карлемана, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», X, № 3, 1975, 207—241.

8. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.

9. *R. B. Salinas.* Functions with null moments, Rev. Acad. Ciencias Madrid, 49, 1955, 331—368.

10. *М. М. Джрбашян, Г. С. Кочарян.* Теоремы единственности для некоторых классов аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 37, № 1, 1973, 98—134.

11. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян.* К теории α-квазианалитических классов, Изв. АН АрмССР, «Математика», XVII, № 4, 1982, 264—306.

12. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., ИИЛ, 1968.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Կ. Հ. Յաղջյան. *Բազմապատիկ բնութագրիչներով օպերատորների համար Կոշու խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը և նրա հետ կապված պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների դասը* 317

Ա. Ա. Դանիելյան. *Կոմպլեքս հարթության կոմպակտ բազմությունների վրա հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների հաջորդականությամբ ֆունկցիաների ներկայացման մասին* 345

Գ. Հ. Հակոբյան. *Որոշ դասի հիպոէլիպտիկ հավասարումների լուծումների ածանցյալների գնահատականների մասին* 358

Ս. Հ. Խաչատրյան. *Խզվող եզրային տվյալներով եզրային խնդիրներ երկրորդ կարգի էլիպտիկ հավասարումների համար հարթության վրա* 375

Վ. Մ. Մարտիրոսյան, Կ. Ռ. Օվեսյան. *Անկյունային տիրույթներում Մ. Մ. Ջրբաշյանի α—քվազիանալիտիկ դասերի տեսության շուրջը* 392

СОДЕРЖАНИЕ

К. А. Ягджян. Псевдодифференциальные операторы с параметром и фундаментальное решение задачи Коши для операторов с кратными характеристиками 317

А. А. Даниелян. О представлении функций последовательности равномерно ограниченных полиномов на компактных множествах комплексной плоскости 345

Г. О. Акопян. Об оценках производных решений одного класса гипоэллиптических уравнений 358

С. Г. Хачатрян. Граничные задачи с разрывными граничными данными для эллиптических уравнений второго порядка на плоскости 375

В. М. Мартиросян, К. Р. Овесян. К теории α-квазианалитических классов М. М. Джрбашяна в угловых областях 392

CONTENTS

K. H. Yagdjian. Fundamental solutions for a degenerate hyperbolic operators and related pseudo-differential operators 317

A. A. Danielian. On representation of functions by uniformly bounded sequences of polynomials on the complex plane compact sets 345

G. H. Hakopian. Some estimates for derivatives of the solutions of a class of hypoelliptic equations 358

S. H. Khatchatrian. Boundary value problems with discontinuous boundary conditions for the second order elliptic equations on the plane 375

V. M. Martirosyan, K. R. Hovesyan. On the theory of M. M. Djrbashyan α-quasianalytic classes in angular domains 392