

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՐԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶՐԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱՏՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԱՐԱՇՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու Գործադիր՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով՝ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծադիր լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերը շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կռափիլ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագրերը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը Նշվում է թառակուտի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Մրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) լին թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում շարադրել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ռեդագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 փոփոխություններ։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно в русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН

зам. главного редактора

Р. В. АМБАРУМЯН

Н. У. АРАКЕЛЯН

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН

А. А. ТАЛАЛЯН

Р. Л. ШАХБАГЯН

зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редакколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом. а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Drafts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.98

М. Г. КРЕЙН, Ф. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

МАТРИЧНО-КОНТИНУАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ЗАДАЧ ШУРА И КАРАТЕОДОРИ-ТЕПЛИЦА

§ 0. Введение

В настоящей статье приводятся решения матрично-континуальных аналогов задач Шура (задача (S)) и Каратеодори-Теплица (задача (C—T)) и связанных с ними задач описания множества всех решений.

Эти задачи рассматривались уже в работе [1], где были намечены пути их решений на основании полученных там результатов.

Здесь мы будем придерживаться в основном обозначений работы [1]. В частности, через $L_{n \times m}^p(a, b)$ ($1 \leq p \leq \infty$; $-\infty \leq a < b \leq \infty$), $H_{n \times m}^+$, $W_{n \times m}$, $W_{n \times m}^+$, где m и n — натуральные числа*, обозначаются классы $(n \times m)$ -матриц-функций, элементы которых принадлежат $L_{(a, b)}^2$, H^+ , W , W^+ соответственно. H^+ — банахова алгебра функций, голоморфных и ограниченных в верхней полуплоскости C_+ , W (W^+) — винеровская алгебра функций вида

$$c + \hat{f}(\lambda) = c + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \quad (c \in C; \lambda \in R),$$

где $f \in L^1(R)$ ($f \in L^1(R)$ и $\text{supp } f \subset R_{\pm}$).

Задача (S). *Задана матрица-функция (сокращенно м-функция) $C_N \in L_{n \times m}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$). Требуется:*

1) *Найти условие существования нерастягивающей $(n \times m)$ -матрицы-функции $E(z)$ ($z \in C_+$), голоморфной в C_+ и представимой в виде*

$$E(z) = \int_0^N C_N(t) e^{i\lambda t} dt + e^{i\lambda N} \Phi(z) \quad (z \in C_+; \Phi \in H_{n \times m}^+). \quad (0.1)$$

2) *Если множество $E(C_N)$ всех м-функций E , указанного вида, непусто, то дать полное описание этого множества.*

Задача (C—T). *Задана м-функция $H_N \in L_{n \times n}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$). Требуется:*

1) *Найти условие существования $(n \times n)$ -матрицы-функции $F(z)$ ($z \in C_+$), голоморфной в C_+ и удовлетворяющей условиям*

* Для определенности предполагается всегда $m \leq n$.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \operatorname{Re} F(z) > 0 \quad \forall z \in C_+, \\ \text{в)} \quad & F(z) = I_n + 2 \int_0^N C_N(t) e^{izt} dt + e^{izN} \psi(z) \quad (z \in C_+), \end{aligned} \quad (0.2)$$

где $\psi(z)$ — голоморфная в C_+ m -функция, допускающая оценку

$$|\psi(z)| = O(|z|) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \left| \frac{\pi}{2} - \arg z \right| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0). \quad (0.3)$$

2) Если множество $\Omega(H_N)$ всех m -функций F , указанного типа, непусто, то дать полное описание этого множества.

Решение задачи (С—Т) в скалярном случае, но в более общей (индефинитной) постановке, было получено еще в [2]. Здесь решение этой задачи будет получено другим способом, а именно, сведением ее к задаче (S). В свою очередь, решение задачи (S) основано на решении следующей задачи.

Задача (A). Задана m -функция $\Gamma \in L_{n \times m}^1(R_+)$. Требуется:

1) Найти условие существования нерастягивающей $(n \times m)$ -матрицы-функции $S(\lambda)$ ($\lambda \in R$), представимой в виде

$$S(\lambda) = \int_0^\infty \Gamma(t) e^{-i\lambda t} dt + \Phi(\lambda) \quad (\lambda \in R; \Phi \in H_{n \times m}^\infty). \quad (0.4)$$

2) Если множество $S(\Gamma)$ всех m -функций S , указанного типа, непусто, то дать полное описание этого множества.

Перейдем к краткому изложению понятий и положений работы [1], где была полностью решена задача (A).

1. Пусть задана m -функция $\Gamma \in L_{n \times m}^1(R_+)$. Она порождает вполне непрерывный оператор $\Gamma: L_{m \times 1}^p(R_+) \rightarrow L_{n \times 1}^p(R_+)$ ($1 \leq p \leq \infty$) по формуле

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^\infty \Gamma(t+s) f(s) ds \quad (f \in L_{m \times 1}^1(R_+); t \in R_+). \quad (0.5)$$

0.1°. Спектр $\sigma(\Gamma)$ оператора Γ не зависит от того, в каком из пространств $L_{m \times 1}^p(R_+)$ ($1 \leq p \leq \infty$) рассматривается этот оператор.

От p не зависит также множества $\mathfrak{M}_p$ пар Шмидта $[\xi, \eta]$ оператора Γ , соответствующее ненулевому s -числу p :

$$\mathfrak{M}_p \subset \bigcap_p L_{(m+n) \times 1}^p(R_+),$$

$$\mathfrak{M}_p := \{[\xi, \eta]; \xi \in L_{m \times 1}^p(R_+), \eta \in L_{n \times 1}^p(R_+) | \Gamma \xi = p\eta; \Gamma^* \eta = p\xi; p \in \sigma(\Gamma)\}. \quad (0.6)$$

Более того, $\mathfrak{M}_p \subset AC_{(m+n) \times 1}(R_+)$ (пространству абсолютно непрерывных на R_+ $(m+n)$ -мерных вектор-функций).

0.2°. Для того, чтобы класс $S(\Gamma)$ был бы непуст, необходимо и достаточно, чтобы $\|\Gamma\| \leq 1^*$.

* Через $\|\Gamma\|_2$ обозначается норма оператора $\Gamma: L_{m \times 1}^2(R_+) \rightarrow L_{n \times 1}^2(R_+)$.

Необходимость условия $\|\Gamma\|_2 \leq 1$ доказывается просто. Рассмотрим для этого $S(\lambda) \hat{f}(i)$, где $S \in S(\Gamma)$, а

$$\hat{f}(i) = \int_0^\infty f(t) e^{it} dt \quad (f \in L_{m \times 1}^1(R_+) \cap L_{m \times 1}^2(R_+)).$$

Легко проверить, что

$$S(\lambda) \hat{f}(i) = \int_0^\infty (\Gamma f)(t) e^{-i\lambda t} dt + \hat{\Psi}(\lambda),$$

где $\hat{\Psi} \in H_{n \times 1}^2$. Отсюда

$$\|I\|^2 = \|J\|^2 \geq \|S\|^2 = \|\Gamma J\|^2 + \|\hat{\Psi}\|^2 \geq \|\Gamma\|^2 = \|\Gamma J\|^2.$$

Это неравенство и доказывает условие $\|\Gamma\|_2 \leq 1$, поскольку множество $L_{m \times 1}^1(R_+) \cap L_{m \times 1}^2(R_+)$ плотно в $L_{m \times 1}^2(R_+)$.

Достаточность получается в процессе описания множества $S(\Gamma)$ при условии $\|\Gamma\|_2 \leq 1$.

Предположим $\|\Gamma\|_2 \leq 1$. Тогда будет существовать в классе $L_{(m+n) \times (m+n)}^1(R_+)$ решение $g(t) = \|g_{jk}(t)\|_{j,k=1}^2$ ($t \in R_+$) уравнения

$$\begin{vmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{vmatrix} - \int_0^\infty \begin{vmatrix} 0 & \Gamma^*(t+s) \\ \Gamma(t+s) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{vmatrix} ds = \begin{vmatrix} 0 & \Gamma^*(t) \\ \Gamma(t) & 0 \end{vmatrix}. \quad (0.7)$$

Положим

$$J = \begin{bmatrix} iI_m & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix} \quad (I_n - \text{единичная } (n \times n)\text{-матрица})$$

и введем м-функцию $G(\lambda) = \|G_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^2$ ($\lambda \in R$):

$$G(\lambda) := I_{m+n} + \int_0^\infty \exp(itJ) g(t) dt \left(\exp(\lambda tJ) = \begin{bmatrix} e^{i\lambda t} I_m & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda t} I_n \end{bmatrix} \right).$$

Оказывается, м-функция G J -унитарна: $G^*(\lambda) J G(\lambda) = G(\lambda) J G^*(\lambda) = J$.

Теорема 0.1. Пусть задана $\Gamma \in L_{n \times m}^1(R_+)$ и $\|\Gamma\|_2 \leq 1$. Тогда полное описание класса $S(\Gamma)$ дается формулой*

$$S_B(\lambda) = (G_{21}(\lambda) + G_{22}(\lambda) B(\lambda))(G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} \quad (\lambda \in R), \quad (0.8)$$

когда B пробегает множество $B_{n \times m}$ нестягивающих $(n \times m)$ -матриц-функций из класса $H_{n \times m}^-$.

При этом, в том и только в том случае, когда $B \in B_{n \times m} \cap W_{n \times m}^+$, м-функция $S \in S(\Gamma) \cap W_{n \times m}$, т. е.

* Дробно-линейное преобразование (0.8) при $B \in B_{n \times m}$ существует в силу J -унитарности матрицы $G(\lambda)$ (см. [3]).

$$S_B(\lambda) = S(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Gamma}(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (\bar{\Gamma} \in L_{n \times m}^1(\mathbb{R})), \quad (0.9)$$

где $\bar{\Gamma}|_{R_+} = \Gamma$, а $S(\infty) = B(\infty)$.

2. Пусть теперь $\|\Gamma\|=1$. Рассмотрим множество $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X} := \mathfrak{X}_\rho$, при $\rho=1$) пар Шмидта оператора Γ , отвечающее s -числу $\rho=1$. Множество $\mathfrak{X}$ можно определить еще как собственное подпространство оператора Γ_Δ , отвечающее собственному значению 1: $\mathfrak{X} = \{\chi \in L_{(m+n) \times 1}^1(\mathbb{R}_+)\} \times \{\Gamma_\Delta \chi = \chi\}$, если полагать

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} := [\xi(t), \eta(t)]^T \text{ и } (\Gamma_\Delta \chi)(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*(t+s) \\ \Gamma(t+s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{bmatrix} ds.$$

Введем также линейал $\mathfrak{X}(0) := \{\chi(0) | \chi \in \mathfrak{X}\} \subset C^{m+n}$.

0.3°. *Линейал $\mathfrak{X}(0)$ является J -нейтральным подпространством в C^{m+n} .*

Это означает, что существует частично изометрический оператор $K: C^m \rightarrow C^n$, называемый угловым оператором подпространства $\mathfrak{X}(0)$ такой, что $\eta(0) = K\xi(0) \forall [\xi, \eta] \in \mathfrak{X}$.

Отсюда, в частности, следует, что $\dim \mathfrak{X}(0) \leq n$.

Определение 0.1. Упорядоченная система $\{\chi^{[1]}, \chi^{[2]}, \dots, \chi^{[l]}\}$ элементов из $\mathfrak{X}$ называется D -цепочкой и обозначается $D(\chi^{[1]}, l)$, если

$$\chi^{[1]}(0) \neq 0; \chi^{[k]}(t) = - \int_0^t \chi^{[k-1]}(s) ds \quad (k = \overline{2, l}).$$

Элемент $\chi^{[1]}$ называется базовым элементом D -цепочки $D(\chi^{[1]}, l)$, а l — ее длиной.

D -цепочка $(D(\chi; l))$ называется максимальной, если в $\mathfrak{X}$ нет D -цепочки большей длины, у которой значение в нуле базового элемента равно $\chi(0)$.

Приведенное определение несколько отличается от общепринятого определения D -цепочки $\{\chi^{[1]}, \chi^{[2]}, \dots, \chi^{[l]}\}$:

$$\chi^{[1]}(0) \neq 0; \chi^{[k]}(t) = \int_0^t \chi^{[k-1]}(s) ds \quad (k = \overline{2, l})$$

и обусловлено тем, что если $\chi \in \mathfrak{X}$, то $\int \chi' \in \mathfrak{X}$ в том и только в том случае, когда $\chi(0) = 0$.

0.4°. *Существует система максимальных D -цепочек $D(\chi_k^{[1]}, l_k)$ ($k = \overline{1, r})$ такая, что система $\{\chi_k^{[1]}(0)\}_{k=1}^r$ образует базис в $\mathfrak{X}(0)$, а $\{\chi_k^{[1]}, \chi_k^{[2]}, \dots, \chi_k^{[l_k]}\}_{k=1}^r$ образует базис в $\mathfrak{X}$ ($r = \dim \mathfrak{X}(0)$; $\sum_{k=1}^r l_k = \dim \mathfrak{X}$).*

0.5°. Пусть $\|\Gamma\|_2 = 1$. Тогда для любого $\chi = [\xi, \eta]^T \in \mathfrak{X}$ выполняются тождества

$$\begin{aligned} 1) F_+(\xi; \lambda) F_+(\xi; \lambda) &= F_-(\eta; \lambda); F_-(\eta; \lambda); \\ 2) S(\lambda) F_+(\xi; \lambda) &= F_-(\eta; \lambda) \quad (\lambda \in R), \end{aligned} \quad (0.10)$$

где S произвольный элемент класса $S(\Gamma)$.

Имея систему $D(\chi_k^{[1]}; l_k)$ ($k=1, r$) базисных D -цепочек, образуем $(m \times r)$ - и $(n \times r)$ -матрицы-функции

$\Xi := [\xi_1(t), \xi_2(t) \cdots \xi_r(t)]$; $H := [\eta_1(t), \eta_2(t) \cdots \eta_r(t)]$ ($[\xi_k, \eta_k] = \chi_k^{[1]}$) и $(r \times r)$ -диагональные м-функции

$$D_{\pm}(\lambda) = \left\| \left(\frac{\lambda \pm i}{\lambda} \right)^{l_k} \delta_{jk} \right\|_{j,k=1}^r,$$

где l_k ($k=\overline{1, r}$) равны длинам D -цепочек $D(\chi_k^{[1]}; l_k)$,

Для м-функций Ξ и H из тождеств (0.10) получаем

$$\begin{aligned} 1) F_+(\Xi; \lambda) F_+(\Xi; \lambda) &= F_-(H; \lambda) F_-(H; \lambda); \\ 2) S(\lambda) F_+(\Xi; \lambda) &\neq F_-(H; \lambda) \quad (\lambda \in R). \end{aligned} \quad (0.11)$$

Вместе с $F_+(\Xi; \lambda)$ и $F_-(H; \lambda)$ ($\lambda \in R$) рассмотрим „нормализованные“ преобразования:

$$F_{\cdot n+}(\Xi; \lambda) := \lambda F_1(\Xi; \lambda) D_+(\lambda) = \lambda \left\| \left(\frac{\lambda + i}{\lambda} \right)^{l_k} F_+(\xi_k; \lambda) \right\|_{k=1}^r,$$

$$F_{\cdot n-}(\Xi; \lambda) := \lambda F_-(H; \lambda) D_-(\lambda) = \lambda \left\| \left(\frac{\lambda - i}{\lambda} \right)^{l_k} F_-(\eta_k; \lambda) \right\|_{k=1}^r.$$

0.6°. М-функции $F_{\cdot n+}(\Xi; \lambda)$ и $F_{\cdot n-}(H; \lambda)$ имеют полный ранг r ($= \dim \mathfrak{M}(0)$) для любого $\lambda \in \overline{C}_+ \cup \{\infty\}$ и $\lambda \in \overline{C}_- \cup \{\infty\}$, соответственно.

Отметим, что

$$\text{rang } F_{\cdot n+}(\Xi; \lambda) = \text{rang } F_+(\Xi; \lambda) \quad \forall \lambda \in \overline{C}_+ \setminus \{0\},$$

$$\text{rang } F_{\cdot n-}(H; \lambda) = \text{rang } F_-(H; \lambda) \quad \forall \lambda \in \overline{C}_- \setminus \{0\}.$$

Теорема 0.2. Пусть задана $\Gamma \in L_{r \times m}^1(R_+)$ такая, что $\|\Gamma\|_2 = 1$ и $\dim \mathfrak{M}(0) = m$ (определенный случай). Тогда класс $S(\Gamma)$ состоит из единственного элемента $S(\lambda)$ ($\lambda \in R$), который определяется по формуле

$$S(\lambda) = F_{\cdot n-}(H; \lambda) \left\| \left(\frac{\lambda + i}{\lambda i} \right)^{l_k} g_k \right\|_{j,k=1}^m (F_{\cdot n+}(\Xi; \lambda))^{-1} \quad (\lambda \in R) \quad (0.12)$$

и является изометрической м-функцией.

Более того, S допускает представление (0.9), где $\tilde{\Gamma}|_{R_+} = \Gamma$, а $S(\infty) = -K$ (K — угловой оператор линейала $\mathfrak{M}(0)$).

В пояснение теоремы 0.2 отметим, что единственность и изометричность м-функции S суть непосредственные следствия тождеств (0.11), а возможность представления ее в виде (0.9) следует из того, что, в силу 0.6°, множители в (0.12) принадлежат, соответственно, $W_{r \times r}^-$, $W_{r \times r}^+$.

В частности, при $\|\Gamma\|_2 = 1$ и $m=1$ всегда имеет место определенный случай. В этом случае система базисных D -цепочек состоит из одной,

произвольно выбранной, максимальной D -цепочки $D(\chi^{(1)}; l)$. Поэтому полагая $\chi^{(1)}(t) = [\xi(t); \gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)]^T$, для m -функции S получаем выражение

$$S(\lambda) = \left[\frac{F_-(\gamma_1; \lambda)}{F_+(\xi; \lambda)}, \frac{F_-(\gamma_2; \lambda)}{F_+(\xi; \lambda)}, \dots, \frac{F_-(\gamma_n; \lambda)}{F_+(\xi; \lambda)} \right]^T (\lambda \in R).$$

3. Перейдем к рассмотрению случая $\|\Gamma\|_2 = 1$ и $\dim \mathfrak{X}(0) < m$.

0.7°. Пусть $\|\Gamma\|_2 = 1$. Уравнение

$$\chi^{(0)}(t) - \int_0^t \Gamma_\Delta(t+s) \chi^{(0)}(s) ds = \Gamma_\Delta(t) a \quad (a \in C^{m+n}) \quad (0.13)$$

имеет решение тогда и только тогда, когда $a \perp \mathfrak{X}(0)$.

При этом, если $a \in J\mathfrak{X}(0)$, то вектор-функция

$$\chi^{(1)}(t) = Ja - \int_0^t \chi^{(0)}(s) ds$$

принадлежит $\mathfrak{X}$ и, следовательно, является базовым элементом некоторой D -цепочки. Обратно, если $\chi^{(1)}(t)$ — базовый элемент некоторой D -цепочки,

то вектор-функция $\chi^{(0)}(t) = J \frac{d}{dt} \chi^{(1)}(t)$ удовлетворяет уравнению (0.13) при $a = J\chi^{(1)}(0)$.

В силу 0.7° можно утверждать, что если Q есть ортопроектор на подпространство $C^{m+n} \ominus \mathfrak{X}(0)$, то уравнение

$$\begin{bmatrix} \widehat{g}_{11}(t) & \widehat{g}_{12}(t) \\ \widehat{g}_{21}(t) & \widehat{g}_{22}(t) \end{bmatrix} - \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*(t+s) \\ \Gamma(t+s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{g}_{11}(s) & \widehat{g}_{12}(s) \\ \widehat{g}_{21}(s) & \widehat{g}_{22}(s) \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*(t) \\ \Gamma(t) & 0 \end{bmatrix} Q \quad (0.14)$$

имеет решение $\widehat{g}(t) = \|\widehat{g}_j(t)\|_{j=1, \dots, l-1}^2$, принадлежащее множеству

$$L_{(m+n) \times (m+n)}^1(R_+).$$

Описание класса $S(\Gamma)$ в рассматриваемом случае дается с помощью специального решения уравнения (0.14).

Для выделения этого решения представим проектор Q в виде суммы $Q = Q_1 + Q_2$ двух взаимно ортогональных проекторов, из которых Q_1 проектирует C^{m+n} на $J\mathfrak{X}(0)$.

С помощью частично изометрического углового оператора K подпространства $\mathfrak{X}(0)$, рассматриваемые проекторы можно представить в виде

$$Q_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_m - K^* \\ -K & P_n \end{bmatrix}; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} I_m - P_m & 0 \\ 0 & I_n - P_n \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_m & K^* \\ K & P_n \end{bmatrix}, \quad (0.15)$$

где $P_m = K^*K$, $P_n = KK^*$ суть ортопроекторы, проектирующие C^m на $R(K^*)$ и C^n на $R(K)$, соответственно.

Выберем теперь решение $\widehat{g}$ уравнения (0.14) в виде $\widehat{g} = \widehat{g}_1 + \widehat{g}_2$ где $\widehat{g}_2$ есть произвольно фиксированное решение уравнения

$$\widehat{g}_2(t) - \int_0^t \Gamma_\Delta(t+s) \widehat{g}_2(s) ds = \Gamma_\Delta(t) \cdot Q_2,$$

удовлетворяющее условию $\widehat{g}_2(t) \cdot Q_2 \equiv \widehat{g}_2(t)(t \in R_+)$, а $\widehat{g}^{[1]}(t) := JX'(t)$, где $X(t)$ — m -функция, вектор-столбцы которой суть базовые элементы максимальных D -цепочек таких, что $X(0) = JQ_1$. Ясно, что $\widehat{g}_1$ является решением уравнения

$$\widehat{g}_1(t) - \int_0^t \Gamma_\Delta(t+s) \widehat{g}_1(s) ds = \Gamma_\Delta(t) Q_1$$

и удовлетворяет условию $\widehat{g}_1(t) \equiv \widehat{g}_1(t) Q_1 (t \in R_+)$.

С помощью указанного решения $\widehat{g}(t)$ уравнения (0.14) введем m -функцию $\widehat{G}(\lambda) = \|G_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^2 (\lambda \in R)$ по формуле

$$\widehat{G}(\lambda) = Q + \int_0^\infty \exp(\lambda t J) \widehat{g}(t) dt.$$

Через $B_{n \times m}(K) (\subset B_{n \times m})$ обозначим множество нерастягивающих m -функций $B \in B_{n \times m}$, представимых в виде

$$B(\lambda) = -K \oplus \widehat{B}(\lambda), \text{ где } \widehat{B}(\lambda): C^m \oplus R(K^*) \rightarrow C^n \oplus R(K).$$

0.8°. Пусть $D_\pm(\lambda) = \left\| \left(\frac{\lambda \pm i}{\lambda} \right)^{l_k} \right\|_{j,k=1}^{l_k, m}$ — диагональная m -функция, где l_k — длины максимальных D -цепочек, образованных первыми m столбцами m -функции $X(t)$ (при $l_k(t) \equiv 0$ полагаем $l_k = 0$). Тогда для произвольного $\frac{1}{2} B \in B_{n \times m}(K)$ отображение $(\widehat{G}_{11}(\lambda) + \widehat{G}_{12}(\lambda) B(\lambda)) \cdot D_+(\lambda): C^m \rightarrow C^n$ обратимо $\forall \lambda \in C_+ \cup \{\infty\}$.

Теорема 0.3. Пусть задана $\Gamma \in L_{n \times m}^1(R_+)$ такая, что $\|\Gamma\| = 1$ и $\dim \mathfrak{M}(0) < m$. Тогда полное описание класса $S(\Gamma)$ дается формулой

$$S_B(\lambda) = [(\widehat{G}_{11}(\lambda) + \widehat{G}_{12}(\lambda) B(\lambda)) D_-(\lambda)] \left\| \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i} \right)^{l_k} \right\|_{j,k=1}^{l_k, m} \times \\ \times [(\widehat{G}_{11}(\lambda) + \widehat{G}_{12}(\lambda) B(\lambda)) D_+(\lambda)]^{-1}, \quad (0.16)$$

когда B пробегает все множество $B_{n \times m}(K)$.

При этом, в том и только в том случае, когда $B \in B_{n \times m}(K) \cap W_{n \times m}^+$, m -функция $S_B \in S(\Gamma) \cap W_{n \times m}$, т. е. представима в виде (0.9), где $\widehat{\Gamma}|_{R_+} = \Gamma$, а $S(\infty) = -K \oplus \widehat{B}(\infty)$.

В заключение отметим, что рассмотрение этого пункта остается в силе и в определенном случае ($\dim \mathfrak{M}(0) = m$). В этом случае класс $B_{n \times m}(K)$ состоит из одного элемента, равного $-K$ ($B_{n \times m}(K) = \{-K\}$) и формула (0.15) сводится к (0.12).

§ 1. Решение задачи (S)

1. Пусть задана м-функция $C_N \in L_{n \times n}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$). Она определяет м-функцию $\Gamma_N \in L_{n \times n}^1(R_+)$ по формуле

$$\Gamma_N(t) = \begin{cases} C_N(N-t), & \text{при } 0 < t < N \\ 0, & \text{при } N < t < \infty. \end{cases} \quad (1.1)$$

Решение задачи (S), состоящее в описании класса $E(C_N)$ будет получено здесь с помощью соответствия, устанавливаемого между классами $S(\Gamma_N)$ и $E(C_N)$.

М-функция C_N порождает вольтерров оператор $C_N: L_{m \times 1}^2(0, N) \rightarrow L_{n \times 1}^2(0, N)$ по формуле

$$(C_N f)(t) = \int_0^t C_N(t-s) f(s) ds \quad (f \in L_{m \times 1}^2(0, N); f \in (0N)). \quad (1.2)$$

Норма $\|C_N\|_2$ этого оператора удовлетворяет неравенству

$$\|C_N\|_2 \leq \int_0^N |C_N(t)| dt. \quad (1.3)$$

Для доказательства (1.3) введем вектор-функцию $f_s(\cdot)$ ($s \in (0, N)$) со значениями из $L_{m \times 1}^2(0, N)$, порождаемую с помощью функции $f \in L_{m \times 1}^2(0, N)$ равенством

$$f_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < s \\ f(t-s) & \text{при } s < t < N. \end{cases}$$

Очевидно $\|f_s(\cdot)\| \leq \|f\| \quad \forall s \in (0N)$. Теперь оператор C_N можно представить в виде

$$(C_N f)(t) = \int_0^N C_N(s) f_s(t) ds.$$

Отсюда следует неравенство

$$\|C_N f\| \leq \int_0^N |C_N(s)| \|f_s(\cdot)\| ds \leq \int_0^N |C_N(s)| ds \|f\| \quad \forall f \in L_{m \times 1}^2(0, N),$$

которое и доказывает оценку (1.3).

С другой стороны, м-функция $\Gamma_N(t)$ порождает ганкелев оператор $\Gamma: L_{m \times 1}^2(R_+) \rightarrow L_{n \times 1}^2(R_+)$ по формуле (0.4). Легко видеть, что оператор Γ в разложении $L_{m \times 1}^2(R_+) = L_{m \times 1}^2(0, N) \oplus L_{m \times 1}^2(N, \infty)$ имеет вид $\Gamma = \Gamma_N \oplus 0$, где $\Gamma_N: L_{m \times 1}^2(0, N) \rightarrow L_{n \times 1}^2(0, N)$ определяется формулой

$$(\Gamma_N f)(t) = \int_0^{N-t} \Gamma_N(t+s) f(s) ds \quad (f \in L_{m \times 1}^2(0, N); t \in (0, N)). \quad (1.4)$$

Операторы Γ_N и C_N связаны соотношением

$$\Gamma_N = U_N C_N, \quad (1.5)$$

где U_N — оператор «зеркального отражения» в $L^2_{n \times 1}(0, N)$:

$$(U_N g)(t) = g(N-t) \quad (g \in L^2_{n \times 1}(0, N)); \quad U_N^* = U_N, \quad U_N^2 = I.$$

Отсюда, в частности, следует равенство

$$\|C_N\|_2 = \|\Gamma_N\|_2. \quad (1.6)$$

1.1° Пусть m -функции Γ_N и C_N , принадлежащие $L^1_{n \times m}(0, N)$ ($0 < N < \infty$), связаны соотношением (1.1). Тогда формулой

$$E(\lambda) = e^{i\lambda N} S(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (1.7)$$

устанавливается одно-однозначное соответствие между классами $S(\Gamma_N)$ и $E(C_N)$.

При этом образ подмножества $S(\Gamma_N) \cap W_{n \times m}$ есть множество элементов вида

$$E(\lambda) = e^{i\lambda N} S(\infty) + \int_0^\infty C_-(t) e^{i\lambda t} dt \quad (C_- \in L^1_{n \times m}(\mathbb{R}_+)), \quad (1.8)$$

где $C_-(0, N) = C_N$.

Это утверждение получается непосредственно из определений классов $S(\Gamma_N)$ и $E(C_N)$ и соотношения (1.1).

Отсюда, на основании утверждения 0.1° и равенства (1.6), получаем

1.2°. Для того, чтобы класс $E(C_N)$ был бы непуст, необходимо и достаточно, чтобы $\|C_N\|_2 \leq 1$.

2. Пусть $\|C_N\|_2 < 1$. Дадим описание класса $E(C_N)$ в этом случае.

Уравнение (0.7), в силу соотношений $U_N \Gamma_N = C_N$ и $U_N \Gamma_N(t) = -C_N(t)$, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I - C_N^* \\ -C_N I \end{bmatrix} p(t) &= \begin{bmatrix} 0 & C_N^*(N-t) \\ C_N(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } p(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} := \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отсюда для m -функции $p(t)$ получаем выражение

$$p(t) = \begin{bmatrix} (I - C_N^* C_N)^{-1} (I - C_N^* C_N)^{-1} C_N^* & \begin{bmatrix} 0 & C_N^*(N-t) \end{bmatrix} \\ (I - C_N C_N^*)^{-1} C_N (I - C_N C_N^*)^{-1} & \begin{bmatrix} C_N(t) & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(операторы $(I - C_N^* C_N)^{-1}$ и $(I - C_N C_N^*)^{-1}$ существуют в силу условия $\|C_N\|_2 < 1$).

Введем m -функцию $P(z) (z \in \bar{\mathbb{C}}_+)$ по формуле

$$P(z) = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & e^{i z N} I_N \end{bmatrix} + \int_0^N p(t) e^{i z t} dt \quad (z \in \bar{\mathbb{C}}_+). \quad (1.10)$$

Легко проверить, что на оси R m -функция $P(\lambda)$ ($\lambda \in R$) удовлетворяет соотношению

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & e^{i\lambda N} I_N \end{bmatrix} G(\lambda), \quad (1.11)$$

где $G(\lambda)$ — матрица дробно-линейного преобразования (0.8), дающего описание класса $S(\Gamma_\lambda)$. Отсюда, в частности, следует J -унитарность $P(\lambda)$ при $\lambda \in R$: $P^*(\lambda) J P(\lambda) = P(\lambda) J P^*(\lambda) = J$.

Теорема 1.1. Пусть задана $C_N \in L_{n \times n}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$) и $|C_N| < 1$. Тогда полное описание класса $E(C_N)$ дается формулой

$$E(z) = (P_{11}(z) + P_{12}(z) B(z))(P_{11}(z) + P_{12}(z) B(z))^{-1} \quad (z \in C_+), \quad (1.12)$$

когда B пробегает множество $B_{n \times m}$.

При этом в том и только в том случае, когда $B \in B_{n \times m} \cap W_{n \times m}^+$, m -функция $E(z)$ представляется в виде (1.8), где $C_+ \cap (0, N) = C_N$, а $S(\infty) = B(\infty)$.

Доказательство. В силу соотношения (1.11) дробно-линейное преобразование (1.12) отличается от (0.8) множителем $e^{i\lambda N}$. Это на основании 1.1° и доказывает теорему. $\square$

Замечание 1.1. Установленное в теореме 1.1 соответствие сохраняет определенные аналитические свойства соответствующих элементов. Так, например, имеем

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{B}_{n \times m} &= \{B \in B_{n \times m} \mid \sup_{z \in C_+} |B(z)| < 1\} \iff \dot{E}(C_N) := \\ &= \{E \in E(C_N) \mid \sup_{z \in C_+} |E(z)| < 1\}. \end{aligned}$$

$$2) \quad B_{n \times m} \cap W_{n \times m}^+ \iff E(C_N) \cap W_{n \times m}^+ \quad (W_{n \times m}^+ := \{f \in W_{n \times m} \mid f(\infty) = 0\}).$$

$$3) \quad B_{n \times m} \cap V_{n \times m}^{ad} \iff E(C_N) \cap V_{n \times m}^{ad} \quad (V_{n \times m}^{ad} \text{ есть множество всех } (n \times m)\text{-матриц-функций } M(z) \text{ вида}$$

$$M(z) = \int_0^\infty e^{izt} d\Sigma(t),$$

где Σ -комплексная $(n \times m)$ -матричная мера ограниченной вариации, у которой отсутствует сингулярная часть).

Соответствие 1) выполняется в силу того, что всякое дробно-линейное преобразование, ассоциированное с J -унитарной матрицей, отображает открытый (замкнутый) шар на себя.

Соответствие 2) (3)) выполняется, поскольку при $B \in W_{n \times m}^+$ ($B \in V_{n \times m}^{ad}$ первый и второй множители в (1.12), в силу теоремы Винера, принадлежат соответствующим винеровским классам.

3. Рассмотрим теперь случай $\|C_N\| = 1$. Из соотношения (1.5) вытекает, что в этом случае для оператора C_N справедлив аналог утверждения 0.1°.

Через $\mathfrak{X}_C$ обозначим множество пар Шмидта оператора C_N , соответствующих наибольшему S -числу $\rho=1$:

$$\mathfrak{X}_C = \left\{ \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in L^2_{(m+n) \times 1}(0, N) \mid \begin{bmatrix} 0 & C_N^* \\ C_N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \right\}.$$

Легко видеть, в силу (1.5), что между множествами $\mathfrak{X}_C$ и $\mathfrak{X}_\Gamma$ ($\mathfrak{X}_\Gamma := \mathfrak{X}$ — множество пар Шмидта оператора Γ_N) существует однозначное соответствие, задаваемое равенством

$$[\xi, \eta]^* = [\varphi, U_N \psi]^* \quad ([\xi, \eta]^* \in \mathfrak{X}_\Gamma; [\varphi, \psi]^* \in \mathfrak{X}_C).$$

Это дает возможность перенести все понятия и положения о парах Шмидта оператора Γ_N на случай оператора C_N .

Легко проверить, что $[\varphi, \psi]^* \in \mathfrak{X}_C$ влечет $[\varphi', \psi']^* \in \mathfrak{X}_C$ тогда и только тогда, когда $\varphi(0)=0$ и $\psi(N)=0$ (если $[\varphi, \psi]^* \in \mathfrak{X}$, то всегда $\varphi(N)=0$ и $\psi(0)=0$).

Введем $\mathfrak{X}_C(0) (= \mathfrak{X}_\Gamma(0)) := \{[\varphi(0), \psi(N)]^* \mid [\varphi, \psi]^* \in \mathfrak{X}_C\} \subset C^{m+n}$. Ясно, что $\mathfrak{X}_C(0)$ является J -нейтральным подпространством в C^{m+n} и, следовательно, $\psi(N) = K\varphi(0) \quad \forall [\varphi, \psi]^* \in \mathfrak{X}_C$, где K — частично изометрический угловой оператор подпространства $\mathfrak{X}_C$.

Далее, образ D -цепочки из $\mathfrak{X}_\Gamma$ назовем D -цепочкой в $\mathfrak{X}_C$ или, что то же самое, примем

Определение 1.1. Упорядоченная система $\{[\varphi^{[k]}, \psi^{[k]}]^*\}_{k=1}^l$ элементов из $\mathfrak{X}_C$ называется D -цепочкой и обозначается $D([\varphi^{[1]}, \psi^{[1]}]^*; l)$, если

$$1) \quad \varphi^{[1]}(0) \neq 0 \text{ и, следовательно, } \psi^{[1]}(N) \neq 0.$$

$$2) \quad \varphi^{[k]}(t) = \int_0^t \varphi^{[k-1]}(s) ds \text{ и } \psi^{[k]}(t) = - \int_0^t \psi^{[k-1]}(s) ds \times$$

$$\times \left(= \int_t^N \psi^{[k-1]}(s) ds \right) \quad (k = \overline{2, l}).$$

Элемент $[\varphi^{[1]}, \psi^{[1]}]^*$ называется базовым элементом D -цепочки, а l — ее длиной.

Из утверждений 0.4° и 0.5° непосредственно получаем

1.3°. Существует система максимальных D -цепочек $D([\varphi_k^{[1]}, \psi_k^{[1]}]^*; l_k)$ ($k = \overline{1, r}$) такая, что система $\{[\varphi_k^{[1]}(0), \psi_k^{[1]}(N)]^*\}_{k=1}^r$ образует базис в $\mathfrak{X}_C(0)$ ($\dim \mathfrak{X}_C(0) = r$), а система $\{[\varphi_k^{[1]}, \psi_k^{[1]}]^*\}_{j=1, k=1}^{l_k, r}$ образует базис в $\mathfrak{X}_C$ ($\dim \mathfrak{X}_C = \sum_{k=1}^r l_k$).

1.4°. Пусть $|C_N| = 1$ и $E \in E(C_N)$. Тогда $\forall [\varphi, \psi]^* \in \mathfrak{X}_C$ выполняются тождества

$$1) \quad F_+^*(\varphi; \lambda) F_+^*(\varphi; \lambda) = F_+^*(\psi; \lambda) F_+^*(\psi; \lambda); \quad 2) \quad E(\lambda) F_+(\varphi; \lambda) = F_+(\psi; \lambda) \quad (\lambda \in R),$$

а, следовательно, и тождества

$$1) F_+^*(\varphi; \bar{z}) F_+(\varphi; z) = F_+^*(\psi; \bar{z}) F_+(\psi; z); \quad 2) E(z) F_+(\varphi; z) = F_+(\psi; z) (z \in C). \quad (1.13)$$

С помощью системы базисных D -цепочек $D([\varphi_k^{[1]}, \psi_k^{[1]}]^T, l_k)$ ($k = \overline{1, r}$) (см. 0.4°) образуем $(m \times r)$ - и $(n \times r)$ -матрицы-функции

$$\Phi(t) = [\varphi_1^{[1]}(t), \varphi_2^{[1]}(t), \dots, \varphi_r^{[1]}(t)]; \quad \Psi(t) = [\psi_1^{[1]}(t), \psi_2^{[1]}(t), \dots, \psi_r^{[1]}(t)] \quad (1.14)$$

и диагональные $(r \times r)$ -матрицы-функции $D_{\pm}(z) = \left\| \left(\frac{z \pm i}{z} \right)^{l_k} \delta_{jk} \right\|_{j,k=1}^r$.

Рассмотрим «нормализованные» преобразования

$$F \cdot n_+(\Phi; z) = z F_+(\Phi; z) D_+(z); \quad F \cdot n_-(\psi; z) = z F_+(\psi; z) D_-(z) \quad (z \in C).$$

1.5°. m -функции $F \cdot n_+(\Phi; z)$ и $F \cdot n_-(\psi; z)$ имеют полный ранг $r (= \dim \mathfrak{X}_C(0)) \quad \forall z \in \bar{C}_{\pm} \cup \{\infty\}$ соответственно.

Теорема 1.2. Пусть задана $C_N \in L_{n \times m}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$) такая, что $\|C_N\| = 1$ и $\dim \mathfrak{X}_C(0) = m$ (определенный случай). Тогда класс $E(C_N)$ состоит из единственного элемента $E(z) (z \in \bar{C}_+)$, который определяется по формуле

$$E(z) = F \cdot n_-(\Psi; z) \left\| \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^{l_k} \delta_{jk} \right\|_{j,k=1}^r (F \cdot n_+(\Phi; z))^{-1} \quad (z \in \bar{C}_+). \quad (1.15)$$

Более того, $E(z)$ допускает представление (1.8), где $C_-(0, N) = C_N$ и $S(\infty) = -K$ ($-K$ — угловой оператор подпространства $\mathfrak{X}_C(0)$).

В частности, при $\|C_N\| = 1$ и $m = 1$ всегда имеет место определенный случай. Повтому, если $D([\varphi^{[1]}, \psi^{[1]}]^T, l)$ — произвольно выбранная максимальная D -цепочка, то имеем $[\varphi^{[1]}, \psi^{[1]}]^T = [\varphi^{[1]}, \psi_1^{[1]}, \psi_2^{[1]}, \dots, \psi_n^{[1]}]^T$ и $E(z)$ представляется в виде

$$E(z) = \left[\frac{F_+(\psi^{[1]}; z)}{F_+(\varphi^{[1]}; z)}, \frac{F_+(\psi_2^{[1]}; z)}{F_+(\varphi^{[1]}; z)}, \dots, \frac{F_+(\psi_n^{[1]}; z)}{F_+(\varphi^{[1]}; z)} \right]^T \quad (z \in \bar{C}_+).$$

Имея в виду представления (1.8) для $E(z)$, для компонент $E_j(z) = F_+(\psi_j^{[1]}; z) F_+^{-1}(\varphi^{[1]}; z)$ ($j = \overline{1, n}$) получаем представление

$$E_j(z) = -e^{izN} K_j + \int_0^{\bar{z}} \tilde{C}_j(t) e^{izt} dt \quad (\tilde{C}_j \in L^1(R_+); \quad \tilde{C}_j(0, N) = C_j). \quad (1.16)$$

Здесь $[c_1, c_2, \dots, c_n]$ — заданная $(n \times 1)$ -матрица-функция C_N , а $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \left(\sum_{j=1}^n |k_j|^2 = 1 \right)$ есть частично изометрический угловой оператор подпространства $\mathfrak{X}_C(0)$.

Это утверждение является непрерывным аналогом известной ска-

лярной ($n = 1$) теоремы Шура [4] (а также ее векторного ($n > 1$) обобщения И. П. Федчиной [5]) о степенных рядах со скалярными (векторными) коэффициентами. Появление внеинтегральных членов в (1.16) обусловлено спецификой непрерывности рассматриваемой задачи (S).

4. Пусть теперь $\|C_N\| = 1$ и $\dim \mathfrak{M}_C(0) < m$. Дадим описанию множества $E(C_N)$ на основании теоремы 0.3.

Положим

$$\hat{p}(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U_N \end{bmatrix} \hat{g}(t),$$

где $\hat{g}$ — специально выбранное решение уравнения (0.14), о котором шла речь во введении. Тогда $\hat{p}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{bmatrix} I & C_N^* \\ -C_N & I \end{bmatrix} \hat{p}(t) = \begin{bmatrix} 0 & C_N^*(N-t) \\ C_N(t) & 0 \end{bmatrix} Q, \quad (1.17)$$

где Q — ортопроектор на $C^{m+n} \ominus \mathfrak{M}_C(0) = C^{m+n} \ominus \mathfrak{M}_\Gamma(0)$.

Далее, определим m -функцию $\hat{P}(z)$ ($z \in \bar{C}$) по формуле

$$\hat{P}(z) = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & e^{izN} I_n \end{bmatrix} Q + \int_0^N \hat{p}(t) e^{itz} dt \quad (z \in \bar{C}).$$

Легко проверить, что при $\lambda \in R$ имеет место соотношение

$$\hat{P}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & e^{i\lambda N} I_n \end{bmatrix} \hat{G}(\lambda) \quad (\lambda \in R),$$

где $\hat{G}(\lambda)$ — матрица дробно-линейного преобразования (0.15), дающего описание класса $S(\Gamma_N)$. Отсюда, аналогично теореме 1.1, получается

Теорема 1.3. Пусть задана $C_N \in L_{n \times m}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$) такая, что $\|C_N\| = 1$ и $\dim \mathfrak{M}_C(0) < m$. Тогда полное описание класса $E(C_N)$ дается формулой

$$E(z) = [(\hat{P}_{11}(z) + \hat{P}_{12}(z) B(z)) D_-(z)] \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^{l_k} \delta_{jk} \Big|_{j,k=1}^m \times \\ \times [(\hat{P}_{11}(z) + \hat{P}_{12}(z) B(z)) D_+(z)]^{-1} \quad (z \in \bar{C}_+),$$

когда B пробегает все $B_{n \times m}(K)$.

При этом в том и только в том случае, когда $B \in B_{n \times m}(K) \cap W_{n \times m}^+$, m -функция $E(z)$ представляется в виде (1.8), где $C_-(0, N) = C_N$, а $S(\infty) = -K \oplus \hat{B}(\infty)$.

Отметим, что замечание 1.1 остается в силе и в этом случае.

5. Немногое нужно добавять к проведенным рассмотрениям, чтобы можно было их истолковать по-новому. Оказывается, теперь совсем просто может быть решена

Задача ($S_{\min}$) (континуально-матричный аналог задачи Шура). Пусть задана $C_N \in L^1_{n \times m}(0, N)$ ($0 < N < \infty$). Требуется:

1) Найти в метрике $H_{n \times m}^-$ расстояние

$$d(C_N) = \text{dist} \left(\int_0^N C_N(t) e^{i\lambda t} dt, e^{i\lambda N} H_{n \times m}^- \right).$$

2) Дать описание множества всех m -функций $\Phi \in e^{i\lambda N} H_{n \times m}^-$, на которых достигается расстояние $d(C_N)$.

Ответ на первый вопрос дается равенством

$$d(C_N) = \|C_N\|_1. \quad (1.18)$$

При доказательстве этого равенства без ограничения общности можно принять $\|C_N\|_2 = 1$. Тогда в силу теорем 1.2 и 1.3 найдется такое $\Phi \in H_{n \times m}^-$ что

$$\sup_{z \in C_+} \left| \int_0^N C_N(t) e^{izt} dt - e^{izN} \Phi(z) \right| \leq 1.$$

Последнее означает, что $d(C_N) \leq 1$. Покажем, что знак $<$ здесь исключается. Допустим противное, т. е. что существует m -функция $\Phi_0 \in H_{n \times m}^-$ такая, что

$$\sup_{z \in C_+} |E_0(z)| = \sup_{z \in C_+} \left| \int_0^N C_N(t) e^{izt} dt - e^{izN} \Phi_0(z) \right| = q < 1.$$

Рассмотрим вектор-функцию $E_0(z) F_+(f; z)$, где $f \in L^2_{m \times 1}(0; N)$. Легко проверить, что

$$E_0(z) F_+(f; z) = \int_0^N (C_N f)(t) e^{izt} dt + e^{izN} F_+(\varphi; z), \text{ где } \varphi \in L^2_{n \times 1}(R_+).$$

Отсюда, в силу ортогональности слагаемых в правой части последнего равенства как элементов пространства $H^2_{n \times 1}$ получаем неравенство

$$\|f\|^2 = \|F_+(f; z)\|^2 \geq \|E_0(z) F_+(f; z)\|^2 = \|F_+(C_N f; z)\|^2 + \|F_+(\varphi; z)\|^2 \geq \|C_N f\|^2.$$

Таким образом, получаем $\|C_N\| < 1$, что противоречит допущению.

Одновременно мы выяснили, что расстояние $d(C_N)$ будет достигаться на единственном элементе из $H_{n \times m}^-$ в том и только в том случае, когда линейал $\mathfrak{M}_C(0)$, отвечающий наибольшему S -числу ρ ($= \|C_N\|^2$ оператора C_N , имеет размерность, равную m ($\dim \mathfrak{M}_C(0) = m$). В этом случае элемент $\Phi_0 \in e^{i\lambda N} H_{n \times m}^-$, на котором достигается расстояние $d(C_N)$, согласно теореме 1.2 имеет вид

$$\Phi_0(z) = e^{i\lambda N} \left(-K - \int_0^\infty C_d(t) e^{i\lambda t} dt \right) (C_d \in L^1_{n \times m}(R_+)).$$

Если же $\dim \mathfrak{M}_c(0) < m$, то расстояние $d(C_N)$ будет достигаться на бесконечном множестве элементов из $e^{izN} H_{n \times m}^-$, описание которого дается теоремой 1.3.

Согласно замечанию 1.1 среди «ближайших» Φ будут как элементы вида (1.8) (при $B \in B_{n \times m}(K) \cap W_{n \times m}^+$), так и элементы, не принадлежащие множеству $e^{izN} W_{n \times m}^+$.

Приведенный анализ показывает, что

$$\text{dist} \left(\int_0^N C_N(t) e^{izt} dt, e^{izN} H_{n \times m}^- \right) = \text{dist} \left(\int_0^N C_N(t) e^{izt} dt, e^{izN} W_{n \times m}^+ \right).$$

Причем, любопытно, что если «ближайший» элемент не является единственным, то среди них найдутся элементы, не принадлежащие множеству $e^{izN} W_{n \times m}^+$.

Отметим также, что теорема 1.1 содержит полное решение следующей задачи.

Пусть заданы $C_N \in L_{n \times m}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$) и $\varepsilon > 0$. Требуется: дать описание всех m -функций $\Phi \in e^{izN} H_{n \times m}^-$ из шара

$$\sup_{z \in C_+} \left| \int_0^N e^{izt} C_N(t) dt - \Phi(z) \right| \leq \|C_N\| + \varepsilon.$$

Следствие 1.1. Для всякой m -функции $C_- \in L_{n \times m}^1(R_+)$ имеет место равенство

$$d(C_-) = \max_{z \in C_+} \left| \int_0^{\bar{z}} C_-(t) e^{izt} dt \right| = \|C_-\|_2. \quad (1.19)$$

Доказательство. Легко проверить, что оператор C_- является сильным пределом операторов $C_N P_N$ ($0 < N < \infty$), где P_N — оператор ортогонального проектирования $L_{m \times 1}^2(R_+)$ на $L_{m \times 1}^2(0, N)$. Отсюда $\|C_N\|_2 \rightarrow \|C_-\|_2$ при $N \rightarrow \infty$. Поэтому, в силу (1.18), имеем $\|C_N\|_2 = d(C_N) \leq d(C_-) \forall N \in R_+$. Следовательно, $\|C_-\| \leq d(C_-)$. Покажем, что знак $<$ здесь исключается. В самом деле, $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое $\Phi_N \in H_{n \times m}^-$, что

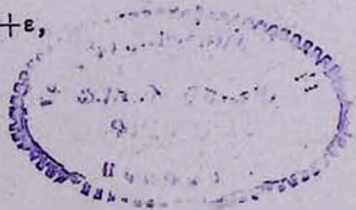
$$\max_{z \in \bar{C}_+} \left| \int_0^{\bar{z}} C_-(t) e^{izt} dt + e^{izN} \Phi_N(z) \right| \leq \|C_N\|_2 + \varepsilon \leq \|C_-\|_2 + \varepsilon.$$

Рассматривая это соотношение только на оси R найдем, что

$$|\Phi_N(z)| \leq d(C_-) + \|C_-\| + \varepsilon \quad \forall z \in R,$$

а значит и при всех $z \in C_+$. Отсюда $\lim_{N \rightarrow \infty} e^{izN} \Phi_N(z) = 0 \quad \forall z \in C_+$. Поэтому, для любого $z \in C_+$ имеем

$$\left| \int_0^{\bar{z}} C_-(t) e^{izt} dt \right| \leq \|C_-\| + \varepsilon,$$



что в силу произвольности $z \in C_+$ и доказывает (1.18).

Следствие 1.1 можно рассматривать как частный случай результата Сарасона [6] (Сарасон рассматривал скалярный случай, но его рассмотрение допускает естественное обобщение на матричный случай). Дело в том, что при переходе к Фурье-образам, оператор C_- переходит в оператор умножения на m -функцию

$$\widehat{C}_-(z) = \int_0^\infty C_-(t) e^{izt} dt$$

в пространстве вектор-функций $H^2_{n \times 1}$. У Сарасона рассмотрен оператор умножения в H^2 на произвольную функцию из H^∞ и доказано, что норма оператора равна норме этой функции, в H^∞ .

§ 2 Вспомогательные предложения

В дальнейшем мы будем рассматривать только квадратные $(n \times n)$ -матрицы-функции, как того требует сама постановка задачи (С—Т).

Обозначим через Ω_n множество всех $(n \times n)$ -матриц-функций $F(z)$ ($z \in C_+$), голоморфных в C_+ и имеющих там неотрицательную вещественную часть: $\operatorname{Re} F(z) = \frac{1}{2} (F(z) + F^*(z)) > 0$.

2.1° Условие $F \in \Omega_n$ эквивалентно тому, что F допускает представление

$$iF(z) = \alpha + \beta z - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda + z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) d\Sigma(\lambda) \quad (z \in C_+), \quad (2.1)$$

где α, β — эрмитовы $(n \times n)$ -матрицы, причем $\beta \geq 0$, а $\Sigma(\lambda)$ — неотрицательная матричная мера на оси R , удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Sigma(\lambda)}{1 + \lambda^2} < \infty. \quad (2.2)$$

В скалярном случае ($n=1$) это условие составляет известную теорему Рисса-Херглота-Неванлинны, а на матричный случай она переносится известным способом.

Отметим, что β в представлении (2.1) может быть найдена по формуле

$$\beta = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{F(iy)}{y}. \quad (2.3)$$

Отправляясь от представления (2.1), которое определяет $F \in \Omega_n$ единственным образом, будем ассоциировать с ней ее «переходную» m -функцию P_F :

$$P_F(t) = -\beta + i\alpha t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{it\lambda} - 1 - \frac{i\lambda t}{1 + \lambda^2} \right) \frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda^2} \quad (t \in R). \quad (2.4)$$

Легко видеть, что m -функция Π_F непрерывна и, очевидно, эрмитова:
 $\Pi_F(-t) = \Pi_F^*(t) \quad (t \in R)$.

2.2° M -функция Π_F допускает оценку

$$|\Pi_F(t)| \leq \gamma_0 + \gamma_1 |t|^2 \quad (t \in R), \quad (2.5)$$

где γ_0 и γ_1 — некоторые константы, зависящие от Π_F .

Для доказательства этого утверждения рассмотрим конечную разность второго порядка:

$$(\Delta_h^2 \Pi_F)(t) := \Pi_F(t+2h) - 2\Pi_F(t+h) + \Pi_F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} (e^{i\lambda h} - 1) \frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda^2}.$$

В силу условия (2.2), при некотором $c > 0$ имеем

$$|(\Delta_h^2 \Pi_F)(t)| \leq C \quad (t \in R).$$

Отсюда уже легко следует требуемая оценка (2.5).

По m -функции Π_F непосредственно восстанавливается m -функция F , а именно, имеет место легко проверяемое соотношение (см. [7]):

$$F(z) = z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_F(t) e^{izt} dt \quad (z \in C_+). \quad (2.6)$$

Из представления (2.4) m -функции Π_F ясно, что для ядра

$$K_{\Pi}(t, s) := \Pi(t-s) - \Pi(t) - \Pi(-s) + \Pi(0) \quad (2.7)$$

справедливо представление

$$K_{\Pi}(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{izt} - 1)(e^{-isz} - 1)}{\lambda^2} d\Sigma(\lambda) \quad (t, s \in R). \quad (2.8)$$

Оно показывает, что m -функция Π_F принадлежит классу $G_{n;N}$, если иметь в виду следующее определение класса $G_{n;N}$ ($0 < N \leq \infty$).

Определение 2.1. Для любого натурального n и положительного N ($0 < N \leq \infty$) через $G_{n;N}$ обозначается совокупность определенных и непрерывных в интервале $(-N, N)$ $(n \times n)$ -матриц-функций Π таких, что $\Pi^*(t) = \Pi(-t)$ ($-N < t < N$) и ядро $K_{\Pi}(t, s)$ ($t, s \in R$) является неотрицательно определенным.

Последнее условие означает, что $\forall t_j \in [0, N]$ и $\forall \xi_j \in C^n$ ($j = \overline{1, m}$; $m = 1, 2, \dots$) выполняется неравенство:

$$\sum_{j,k=1}^m (K(t_j, t_k) \xi_k, \xi_j) \geq 0.$$

Ввиду непрерывности ядра $K_{\Pi}(t, s)$ это условие эквивалентно неравенству

$$\int_0^N \int_0^N (K(t, s) f(s), f(t)) \geq 0 \quad \forall f \in C_{n \times 1}(0, N).$$

(Если $N = \infty$, то от f дополнительно требуется финитность на ∞).

Утверждение о том, что «переходная м-функция Π_f для любого $f \in \Omega_n$ принадлежит $G_{\pi; N}$ » допускает обращение. Точнее, справедливо утверждение

2.3°. Пусть $\Pi(t)$ ($-N < t < N$; $0 < N \leq \infty$) — некоторая непрерывная $(n \times n)$ -матрица-функция. Для того, чтобы она допускала представление (2.4) с заменой R на $(-N, N)$, где α, β — эрмитовы $(n \times n)$ -матрицы, причем $\beta > 0$, а $\Sigma(\lambda)$ — неубывающая матричная мера на оси R , удовлетворяющая условию (2.2), необходимо и достаточно, чтобы $\Pi \in G_{n; N}$.

В скалярном случае это предложение было установлено еще в [8]. Как в скалярном, так и в матричном случаях, оно легко доказывается методом направляющих функционалов (см. [9]).

Утверждение 2.3° непосредственно влечет

2.4°. Для всякой м-функции $\Pi \in G_{n; N}$ ($0 < N < \infty$) существует, по крайней мере, одно продолжение $\bar{\Pi} \in G_{n; -}$; $\bar{\Pi}|(-N, N) = \Pi$.

Действительно, если $\Pi \in G_{n; N}$, то, согласно 2.3°, она допускает представление (2.4) при $t \in (-N, N)$. Но тогда, рассматривая правую часть (2.4) для всех $t \in R$, мы и получаем требуемое продолжение.

В связи с 2.4° естественно возникает

Задача (С). Задана м-функция $\Pi \in G_{n; N}$ ($0 < N < \infty$). Требуется дать полное описание множества всевозможных продолжений $\bar{\Pi} \in G_{n; -}$ данной м-функции Π .

Ряд результатов по этой задаче можно сразу получить методом направляющих функционалов и теорией резольвентных матриц эрмитовых операторов (см. [10]).

Однако здесь мы рассмотрим задачу (С) при определенном ограничении, налагаемом на м-функцию Π , которое позволит получить решение этой задачи на основании результатов § 1.

Определение 2.2. Будем говорить, что м-функция $\Pi \in G_{n; -}$ имеет в интервале $(-N, N)$ суммируемую акселеранту H , если при $t \in (-N, N)$

$$\Pi(t) = \Pi(0) - c_{\Pi} |t| I_n - \int_0^t (t-s) H(s) ds \quad (H \in L^1_{n \times n}(-N, N); c_{\Pi} > 0). \quad (2.9)$$

Очевидно, представление (2.9) возможно в том и только в том случае, когда м-функция Π имеет абсолютно непрерывную производную в интервалах $(-N, 0)$ и $(0, N)$ и при этом $\Pi'(\pm 0) = \mp c_{\Pi} I_n$, а $\Pi''(t) = -H(t)$ почти всюду в интервале $(-N, N)$. Последнее непосредственно влечет эрмитность акселеранты H : $H^*(t) = H(-t)$ почти всюду в $(-N, N)$.

В дальнейшем, без ограничения общности, можем принять, что м-функция $\Pi \in G_{n; N}$, имеющая акселеранту, удовлетворяет условиям: $\Pi(0) = 0$ и $c_{\Pi} = 1/2$.

С каждой m -функцией $H_N \in L^1_{n \times n}(-N, N)$ можно связать оператор H_N , действующий в пространстве $L^2_{n \times 1}(0, N)$ по формуле

$$(H_N f)(t) = \int_0^N H_N(t-s) f(s) ds \quad (f \in L^2_{n \times 1}(0, N); t \in (0, N)). \quad (2.10)$$

Это вполне непрерывный оператор, норма которого удовлетворяет неравенству

$$\|H_N\|_2 \leq \int_{-N}^N |H_N(s)| ds.$$

Последнее доказывается аналогично неравенству (1.3), если ввести вектор-функцию $f_s(\cdot)$ ($s \in (-N, N)$) со значениями в $L^2_{n \times 1}(-N, 2N)$ по формуле

$$f_s(t) = \begin{cases} f(t-s) & \text{при } t \in (s, s+N) \\ 0 & \text{при } t \in (-N, s) \cup (s+N, 2N) \end{cases}$$

и записать действие оператора H_N в виде

$$(H_N f)(t) = \int_{-N}^N H_N(s) f_s(t) ds.$$

Оператор H_N будет эрмитов: $H_N^* = H_N$ в том и только в том случае, когда m -функция H_N будет эрмитовой: $H_N^*(t) = H_N(-t)$.

2.5°. Для того, чтобы m -функция $H_N \in L^1_{n \times n}(-N, N)$ была акселерантой некоторой m -функции $\Pi \in G_{n; N}(\Pi(0)=0; c_\Pi=1/2)$, необходимо и достаточно, чтобы $I + H_N \geq 0$.

В самом деле, если m -функции Π и H_N связаны соотношением (2.9) при $\Pi(0)=0$ и $c_\Pi=1/2$:

$$\Pi(t) = -\frac{1}{2} |t| I_n - \int_0^t (t-s) H_N(s) ds \quad (-N < t < N), \quad (2.12)$$

то для любого $f \in C_{n \times 1}[0, N]$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \int_0^N \int_0^N (K_\Pi(t, s) f(s), f(t)) ds dt &= \int_0^N (g(t), g(t)) dt + \\ &+ \int_0^N \int_0^N (H_N(t-s) g(s), g(t)) ds dt, \end{aligned}$$

где $K_\Pi(t, s)$ определяется соотношением (2.7), а

$$g(t) = \int_t^N f(s) ds \quad (f \in C_{n \times 1}[0, N]; 0 \leq t \leq N). \quad (2.13)$$

Отсюда, учитывая, что многообразие вектор-функций g , определяемых равенством (2.13), плотно в $L^2_{n \times 1}(0, N)$, получаем эквивалентность

условия $I + H_N \geq 0$ условию неотрицательной определенности ядра K_Π , т. е. условию $\Pi \in G_n; N$.

В дальнейшем, говоря о m -функции $H_N \in L_{n \times n}^1(-N, N)$, для которой $I + H_N \geq 0$, мы будем называть ее акселерантой, имея в виду, что она является акселерантой m -функции $\Pi \in G_n; N$, определенной равенством (2.12).

В случае, когда m -функция H определена на всей оси R : $H \in L_{n \times n}^1(R)$, имеет место простое и законченное предложение.

2.6°. Пусть задана эрмитова m -функция $H \in L_{n \times n}^1(R)$ ($H^*(t) = H(-t)$). Тогда она будет акселерантой в том и только в том случае, когда

$$I_n + \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{i\lambda t} dt \geq 0 \quad \forall \lambda \in R. \quad (2.14)$$

Действительно, если m -функции H и Π связаны соотношением (2.12) при $N = \infty$, то, интегрируя дважды по частям, легко найдем, что для любого $z \in C_+$

$$z^2 \int_0^{\infty} \Pi(t) e^{izt} dt = \frac{1}{2} [I_n + 2 \int_0^{\infty} H(t) e^{izt} dt] = F(z). \quad (2.15)$$

Очевидно, m -функция $F(z)$ голоморфна в C_+ и может быть доопределена по непрерывности в $\overline{C}_+ \cup \{\infty\}$. В силу принципа максимума, $F \in \mathcal{Q}_n$, т. е. $\operatorname{Re} F(z) > 0 \quad \forall z \in \overline{C}_+$, в том и только в том случае, когда $\operatorname{Re} F(z) > 0 \quad \forall z \in R$. Это и доказывает требуемое утверждение, поскольку левая часть в (2.14) совпадает с $\operatorname{Re} F(z)$.

Отметим также, что в рассматриваемом случае матричная мера Σ в представлении (2.4) m -функции Π абсолютно непрерывна и

$$d\Sigma(\lambda) = \frac{1}{\pi} (I_n + \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-i\lambda t} dt) d\lambda. \quad (2.16)$$

Это следует из формулы обращения в применении к представлению (2.1) m -функции $F \in \mathcal{Q}_n$ (см. [11]). Однако, поскольку в (2.1) вместо $(\lambda - z)^{-1}$ участвует $(\lambda + z)^{-1}$, формула обращения принимает вид $-d\Sigma(-\lambda) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} F(\lambda) d\lambda$. Отсюда получается формула (2.16).

В общем случае имеет место

2.7°. Пусть задана m -функция $\Pi \in G_n; N$ ($0 < N < \infty$), имеющая акселеранту $H_N \in L_{n \times n}^1(-N, N)$. Тогда m -функция $F_{\tilde{\Pi}}$, порождаемая

по формуле (2.6) (с заменой Π на $\tilde{\Pi}$) произвольным продолжением $\tilde{\Pi} \in G_n; \infty$ ($\tilde{\Pi}|(0N) = \Pi$), допускает представление

$$F_{\Pi}^{\sim}(z) = z^3 \int_0^{\infty} \tilde{\Pi}(t) e^{izt} dt = \frac{1}{2} (I_n + 2 \int_0^N H_N(t) e^{izt} dt) + e^{izN} \Psi(z) \quad (z \in C_+), \quad (2.17)$$

где m -функция Ψ голоморфна в C_+ и удовлетворяет оценке (0.3).

Для доказательства представим $F_{\Pi}^{\sim}$ в виде суммы:

$$\begin{aligned} F_{\Pi}^{\sim}(z) &= z^3 \int_0^N \Pi(t) e^{izt} dt + z^3 \int_N^{\infty} \tilde{\Pi}(t) e^{izt} dt = \\ &= z^3 \int_0^N \Pi(t) e^{izt} dt + e^{izN} z^3 \int_0^{\infty} \tilde{\Pi}(N+t) e^{izt} dt. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого, путем двойного интегрирования по частям, найдем

$$z^3 \int_0^N \Pi(t) e^{izt} dt = \frac{1}{2} (I_n + \int_0^N H_N(t) e^{izt} dt) - iz \Pi(N) e^{izN} + \Pi'(N) e^{izN}.$$

Для второго слагаемого, учитывая (2.5), получим

$$\left| z^3 \int_0^{\infty} \tilde{\Pi}(N+t) e^{izt} dt \right| \leq z^3 \int_0^{\infty} (\gamma_0 + \gamma_1 t^2) e^{-Imz \cdot t} dt = \frac{z^3}{Imz} \gamma_0 + \left(\frac{z}{Imz} \right)^2 \gamma_1.$$

Это и доказывает представление (2.17) с оценкой (0.3).

2.8°. Пусть задана m -функция $\Pi \in G_n$; N ($0 < N < \infty$), и пусть некоторое ее продолжение $\tilde{\Pi} \in G_{n;\infty}$ порождает по формуле (2.6) m -функцию $F_{\Pi}^{\sim}$, допускающую представление (2.17), где $H_N \in L_{n \times n}^1(0, N)$, а m -функция Ψ голоморфна в C_+ и удовлетворяет оценке

$$|\Psi(z)| = O(|z|^k) \text{ при } |z| \rightarrow \infty \text{ и } \left| \frac{\pi}{2} - \arg z \right| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \quad (2.18)$$

при некотором натуральном k .

Тогда m -функция Π имеет акселеранту H_N .

Действительно, с помощью m -функции H_N построим m -функцию $\Pi_0(t)$ ($0 < t < N$) по формуле (2.12). Тогда представление (2.17) m -функции $F_{\Pi}^{\sim}$ можно преобразовать к виду

$$F_{\Pi}^{\sim}(z) = z^3 \int_0^N \Pi_0(t) e^{izt} dt + e^{izN} \Psi_1(z),$$

где Ψ_1 удовлетворяет оценке (2.18).

Отсюда получим

$$z^3 \int_0^N (\Pi_0(t) - \tilde{\Pi}(t)) e^{izt} dt = e^{izN} \left(\int_N^{\infty} \tilde{\Pi}(N+t) e^{izt} dt - \Psi_1(z) \right).$$

Из сравнения порядков роста правой и левой частей этого равенства приходим к выводу (см. [12]):

$$P_0(t) = \bar{P}(t) (= \Pi(t)) \quad (0 < t < N) \quad \text{и} \quad \int_N^{\infty} \bar{P}(N+t) e^{izt} dt = \Psi_1(z).$$

Таким образом, $P_0 \in G_{n,N}$, что в силу определения 2.1 акселераты и доказывает утверждение.

З а м е ч а н и е 2.1. В процессе доказательства 2.8° доказано также, что если m -функция $\bar{P} \in G_{n,N}$ допускает представление (2.17) с оценкой (2.18) при некотором натуральном k , то необходимо $k=1$.

§ 3. Решение задачи (С—Т) (вполне неопределенный случай)

1. Пусть задана $(n \times n)$ -матрица-функция $H_N \in L_{n \times n}^1(0, N)$. Рассмотрим задачу (С—Т), состоящую в описании класса $\Omega(H_N)$ (см. введение).

Из утверждений 2.7° и 2.8° следует, что класс $\Omega(H_N)$ непуст в том и только в том случае, когда m -функция $H_N(t)$ ($-N < t < N$), продолженная в интервал $(-N, 0)$ условием эрмитовости ($H_N(-t) = H_N^*(t)$; $0 < t < N$), является акселерантой, т. е. когда оператор H_N , определенный равенством (2.11), удовлетворяет условию $I + H_N \geq 0$. Впрочем, это условие получится и непосредственно при описании класса $\Omega(H_N)$.

Рассмотрим m -функции H_N и C_N , принадлежащие $L_{n \times n}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$) и связанные соотношением

$$\begin{aligned} C_N(t) + \int_0^t C_N(t-s) H_N(s) ds + H_N(t) (= C_N(t) + \\ + \int_0^t C_N(s) H_N(t-s) ds + H_N(t)) = 0 \quad (0 < t < N). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Заметим, что для выполнения соотношения (3.1) достаточно задать одну из m -функций H_N или C_N , поскольку другая может быть найдена из уравнения Вольтерра (3.1).

Введем вольтерровы операторы C_N и $\bar{H}_N$, действующие в пространстве $L_{n \times 1}^2(0, N)$ по формулам

$$\begin{aligned} (C_N f)(t) &= \int_0^t C_N(t-s) f(s) ds, \quad (\bar{H}_N f)(t) = \\ &= \int_0^t H_N(t-s) f(s) ds \quad (f \in L_{n \times 1}^2(0, N)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отметим, что $2\operatorname{Re} \tilde{H}_N = \tilde{H}_N + \tilde{H}_N^* = H_N$, где H_N — оператор, введенный в § 2 формулой (2.10).

Соотношение (3.1) в терминах операторов C_N и $\tilde{H}_N$ имеет вид

$$C_N + C_N \tilde{H}_N + \tilde{H}_N = 0 \quad (C_N + \tilde{H}_N C_N + \tilde{H}_N = 0), \quad (3.3)$$

что эквивалентно равенству

$$I + 2\tilde{H}_N = (I + C_N)^{-1} (I - C_N) \quad (= (I - C_N) (I + C_N)^{-1}). \quad (3.4)$$

Отсюда легко находим

$$\operatorname{Re} (I + 2\tilde{H}_N) = I + H_N = (I + C_N^*)^{-1} (I - C_N^* C_N) (I + C_N)^{-1}. \quad (3.5)$$

Это непосредственно приводит к утверждению

3.1°. Пусть H_N и C_N — м-функции из $L^1_{n \times 1}(0, N)$ ($0 < N < \infty$), связанные соотношением (3.1), а C_N и $\tilde{H}_N$ — вольтерровы операторы, порожденные формулой (3.2). Тогда имеет место эквивалентность следующих утверждений:

$$1) \|C_N\|_2 < 1 \quad (\|C_N\| < 1) \Leftrightarrow 2) \operatorname{Re} (I + 2\tilde{H}_N) \geq 0 \quad (\operatorname{Re} (I + 2\tilde{H}_N) > 0).$$

Это утверждение дает возможность каждой акселеранте $H_N \in L^1_{n \times n}(-N, N)$ однозначно сопоставить непустой класс $E(C_N; H_N) := E(C_N)$, где м-функция $C_N \in L^1_{n \times n}(0, N)$ находится по H_N из уравнения (3.1).

Теорема 3.1. Пусть задана акселеранта $H_N \in L^1_{n \times n}(-N, N)$ ($0 < N < \infty$). Тогда формулой

$$F(z) = (I_n - E(z))(I_n + E(z))^{-1} \quad (z \in C_+) \quad (3.6)$$

устанавливается одно-однозначное соответствие между классами $\mathcal{Q}(H_N)$ и $E(C_N; H_N)$.

Доказательство. Заметим, во-первых, что формула (3.6) определяет м-функцию $F \in \mathcal{Q}_n$ и при этом $\lim_{y \uparrow 0} F(iy) = I_n$. Поэтому в представлении (2.1) м-функции F имеем, в частности, $\beta = 0$, что для „переходной“ м-функции Π_F дает $\Pi_F(0) = 0$.

Из соотношения (3.6), воспользовавшись представлениями (0.1) для $E \in E(C_N)$ и (2.6) — для $F \in \mathcal{Q}_n$, получаем

$$\begin{aligned} \left(I_n + \int_0^N C_N(t) e^{izt} dt + e^{izN} \Phi(z) \right) z^2 \int_0^\infty \Pi_F(t) e^{izt} dt &= I_n - \\ &- \int_0^N C_N(t) e^{izt} dt - e^{izN} \Phi(z). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Положим

$$B(t) = -tI_n + \int_0^t (t-s) C_N(s) ds \quad (0 < t < N).$$

Теперь, учитывая равенства

$$\begin{aligned} \int_0^N C_N(t) e^{izt} dt &= I_n + B'(N) e^{izN} - iz \int_0^N B'(t) e^{izt} dt = \\ &= I_n + (B'(N) - iz B(N)) e^{izN} - z^2 \int_0^N B(t) e^{izt} dt \end{aligned}$$

и

$$F(z) = iz \int_N^{\infty} e^{izt} d\Pi(t) + z^2 \int_0^N \Pi(t) e^{izt} dt,$$

из (3.7), после несложного преобразования, получим

$$\begin{aligned} z^2 \left[2 \int_0^N \Pi(t) e^{izt} dt + \int_0^N \left(\int_0^t B'(t-s) d\Pi(s) \right) e^{izt} dt - \right. \\ \left. - \int_0^N B(t) e^{izt} dt \right] = e^{izN} \Psi(z), \end{aligned}$$

где Ψ -функция Ψ голоморфна в C_+ и удовлетворяет условию (0.3).

Сравнение порядков роста членов этого равенства дает (см. [12]):

$$2\Pi(t) + \int_0^t B'(t-s) d\Pi(s) - B(t) = 0, \quad (0 < t < N),$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\Pi(t) + \int_0^t B''(t-s) \Pi(s) ds = B(t) \quad (0 < t < N). \quad (3.7')$$

Рассматривая полученное равенство как уравнение Вольтерра относительно Π с правой частью B , имеющей абсолютно непрерывную первую производную, можем утверждать, что и Π -функция Π имеет в интервале $(0, N)$ абсолютно непрерывную производную.

Дифференцируя дважды уравнение (3.7) и учитывая, что $B''(t) = C_N(t)$ и $\Pi(0) = 0$, имеем

$$\Pi'(0) = -I_n; \quad \Pi''(t) + \int_0^t C_N(t-s) \Pi''(s) ds - C_N(t) = 0,$$

откуда, сравнивая с уравнением (3.1), получаем $\Pi^*(t) = -H(t)(0 < t < N)$. Это на основании утверждения 2.7° доказывает, что м-функция F , определенная формулой (3.6) при $E \in E(C_N; H_N)$, принадлежит $\Omega(H_N)$.

Обратно, пусть $F \in \Omega(H_N)$. Докажем, что она по формуле обратной к (3.6):

$$E(z) = (I - F(z))(I_n + F(z))^{-1} \quad (z \in C_+) \quad (3.8)$$

порождает м-функцию $E \in E(C_N; H_N)$.

Зафиксируем произвольно $E_0 \in E(C_N)$. По доказанному, она по формуле (3.6) порождает м-функцию $F_0 \in \Omega(H_N)$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} E(z) - E_0(z) &= (I_n + F(z))^{-1} (F(z) - F_0(z)) (I_n + F_0(z))^{-1} = \\ &= e^{izN} (I_n + F(z))^{-1} \Psi(z) (I_n + F_0(z))^{-1}, \end{aligned}$$

где Ψ — м-функция, голоморфная в C_+ и удовлетворяющая условию (0.3).

С другой стороны, $(I_n + F(z))^{-1} = \frac{1}{2} (I_n + E(z)) \in B_{n \times n}$ и аналогично $(I_n + F_0(z))^{-1} \in B_{n \times n}$. Отсюда $E(z) - E_0(z) = e^{izN} \Psi_1(z) (z \in C_+)$, где Ψ_1 — м-функция того же класса, что и Ψ . Полученное соотношение показывает, что Ψ_1 ограничена вблизи вещественной оси, а тогда, в силу принципа Фрагмена-Линделефа, она ограничена во всей верхней полуплоскости C_+ . Это доказывает, что вместе с E_0 классу $E(C_N)$ принадлежит и м-функция E . $\square$

Замечание 3.1. Всякая м-функция $F \in \Omega(H_N)$ обладает тем свойством, что $\lim_{y \uparrow \infty} F(iy) = I_n$. Отсюда, как уже отмечалось, следует, в частности, что в представлении (2.1) м-функции F имеем $\beta = 0$. Нам не известна точная характеристика меры Σ в представлении (2.1), обуславливающая предельное соотношение. Отметим только, что это соотношение влечет равенство $\lim_{y \uparrow \infty} \operatorname{Im} F(iy) = 0$, а последнее, как известно (см. [13], стр. 297), эквивалентно условию $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} 1/\lambda (\Sigma(\lambda) - \Sigma(-\lambda)) = 0$.

2. В этом пункте дадим непосредственное описание класса $\Omega(H_N)$ в случае, когда оператор H_N , порожденный акселерантой H_N , удовлетворяет условию $I + H_N > 0$ (вполне неопределенный случай).

Рассмотрим для этого пару «дуальных» уравнений

$$C_N(t) + \int_0^t C_N(t-s) H_{\pm}(s) ds \pm H_{\pm}(t) = 0 \quad (0 < t < N). \quad (3.1)_{\pm}$$

Решение уравнений (3.1) $_{\pm}$ при заданном C_N будем обозначать через $H_{N;\pm}$ (очевидно $H_{N;+}(t) \equiv H_N(t)$).

Легко понять, что для получения «дуальных» соотношений (3.3) $_{\pm}$, (3.4) $_{\pm}$, (3.5) $_{\pm}$ достаточно рассмотреть операторы $\pm C_N$ и $\tilde{H}_{N;\pm}$. Из соотношений (3.4) $_{\pm}$ находим $(I + 2\tilde{H}_{N;+})^{-1} = I + 2\tilde{H}_{N;-}$, что дает возможность непосредственно определить м-функцию $H_{N;-}$ через $H_{N;+}$ из уравнения

$$H_{N;+}(t) + 2 \int_0^t H_{N;+}(t-s) H_{N;-}(s) ds + H_{N;-}(t) = 0 \quad (0 < t < N).$$

Из соотношений (3.4)_± следует также эквивалентность условий

$$1) \operatorname{Re}(I_n + 2\tilde{H}_{N;+}) \geq 0 \quad (\operatorname{Re}(I + 2\tilde{H}_{N;+}) > 0);$$

$$2) \operatorname{Re}(I + 2\tilde{H}_{N;-}) \geq 0 \quad (\operatorname{Re}(I + 2\tilde{H}_{N;-}) > 0),$$

т. е. м-функции $H_{N;\pm}$ являются акселерантами одновременно. Их мы будем называть «дуальными» акселерантами.

Для описания класса $\Omega(H_N)$ подставим в (3.6) выражение (1.10) м-функции E . Получим дробно-линейное преобразование

$$F(z) = (Q_{21}(z) + Q_{22}(z)B(z))(Q_{11}(z) + Q_{12}(z)B(z))^{-1} \quad (B \in B_{n \times n}; z \in C_+) \quad (3.9)$$

с матрицей $Q(z) = \|Q_{jk}(z)\|_{j,k=1}^2$, которое связано с матрицей $P(z)$ преобразования (1.11) соотношением

$$Q(z) = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n - I_n & I_n \end{bmatrix} P(z) \quad (z \in C_+).$$

Тогда из представления (1.10) матрицы $P(z)$ следует представление

$$Q(z) = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n - e^{izN} I_n & I_n \end{bmatrix} + \int_0^N q(t) e^{izt} dt, \quad \text{где } q(t) = - \begin{bmatrix} I_n - I_n \\ I_n - I_n \end{bmatrix} p(t). \quad (3.10)$$

Отсюда, для определения м-функции $q(t)$ ($0 < t < N$), в силу (1.9), получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} I - C_N^* & I + C_N^* \\ I - C_N - (I + C_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_N^*(N-t) \\ C_N(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Применим к обеим частям этого уравнения матрицу

$$\begin{bmatrix} (I + C_N^*)^{-1} & (I + C_N^*)^{-1} \\ (I - C_N^*)^{-1} & -(I - C_N^*)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{условие } I + H_{N;+} > 0 \text{ влечет существование операторов } (I \pm C_N)^{-1}, (I \pm C_N^*)^{-1}).$$

Получим, учитывая соотношения (3.4)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I + H_{N;+} & 0 \\ 0 & I + H_{N;-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} (I + C_N)^{-1} C_N(t) & (I + C_N)^{-1} C_N^*(N-t) \\ -(I - C_N)^{-1} C_N(t) & (I - C_N)^{-1} C_N^*(N-t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Далее, из соотношений (3.1)_± легко следует, что $(I \pm C_N)^{-1} C_N(t) = \mp H_{N;\pm}(t)$ и $(I \pm C_N)^{-1} C_N^*(N-t) = \mp H_{N;\pm}^*(N-t)$. Поэтому последнее равенство можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (I + H_{N;+})^{-1} H_{N;+}(t) & (I + H_{N;+})^{-1} H_{N;+}^*(N-t) \\ (I + H_{N;-})^{-1} H_{N;-}(t) & (I + H_{N;-})^{-1} H_{N;-}^*(N-t) \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $\Gamma_{N;\pm}(t,s)$ резольвентные ядра операторов $I - (I + H_{N;\pm})^{-1}$:

$$\Gamma_{N;\pm}(t,s) + \int_0^N H_{N;\pm}(t-u) \Gamma_{N;\pm}(u,s) du = H_{N;\pm}(t-s).$$

Вместе с этими соотношениями рассмотрим также соотношения

$$\Gamma_{N;\pm}^*(t,s) + \int_0^N H_{N;\pm}^*(t-u) \Gamma_{N;\pm}^*(u,s) du = H_{N;\pm}^*(t-s).$$

М-функции $\Gamma_{N;\pm}^*(t,s)$ являются резольвентными ядрами операторов $I - (I + H_{N;\pm}^*)^{-1}$, где $H_{N;\pm}^*$ — оператор, порожденный м-функцией $H_{N;\pm}^*(t)$ по формуле (2.10).

Легко проверить, используя эрмитовость м-функции $H_N(t)$ ($H_N(t) = H_N(-t)$; $(-N < t < N)$), что имеет место равенство $\Gamma_{N;\pm}^{(*)}(t,s) = \Gamma_{N;\pm}(N-t, N-s)$.

Таким образом, для м-функции $q(t)$ ($0 < t < N$) получаем окончательное выражение

$$\begin{bmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{N;+}(t,0) & \Gamma_{N;+}^*(N-t,0) \\ \Gamma_{N;-}(t,0) & \Gamma_{N;-}^{(*)}(N-t,0) \end{bmatrix}.$$

Теперь представление (3.10) для м-функции $Q(z)$ принимает вид

$$Q(z) = \begin{bmatrix} I_n - \int_0^N \Gamma_{N;+}(t,0) e^{izt} dt & e^{izN} \left(I_n - \int_0^N \Gamma_{N;+}^*(t,0) e^{-izt} dt \right) \\ I_n - \int_0^N \Gamma_{N;-}(t,0) e^{izt} dt - e^{-izN} \left(I_n - \int_0^N \Gamma_{N;-}^{(*)}(t,0) e^{-izt} dt \right) \end{bmatrix}.$$

Для иных целей удобно представить матрицу дробно-линейного преобразования (3.9) в виде

$$U(z, N) = e^{-iz \frac{N}{2}} Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} D(z, N) & D_*(z, N) \\ E(z, N) & -E_*(z, N) \end{bmatrix},$$

где положено

$$D(z, N) = e^{-iz \frac{N}{2}} \left(I_n - \int_0^N \Gamma_{N;+}(t,0) e^{izt} dt \right);$$

$$D_*(z, N) = e^{iz \frac{N}{2}} \left(I_n - \int_0^N \Gamma_{N;+}^{(*)}(t,0) e^{-izt} dt \right),$$

$$E(z, N) = e^{-iz \frac{N}{2}} \left(I_n - \int_0^N \Gamma_{N; -}(t, 0) e^{izt} dt \right);$$

$$E_*(z, N) = e^{iz \frac{N}{2}} \left(I_n - \int_0^N \Gamma_{N; -}^*(t, 0) e^{-izt} dt \right).$$

Из J -унитарности m -функции $P(i)$ при $\lambda \in \mathbb{R}$ следует, что при $\lambda \in \mathbb{R}$ m -функция $U(\lambda, N)$ удовлетворяет тождествам

$$U(\lambda, N) J U^*(\lambda, N) = J_0; \quad U^*(\lambda; N) J_0 U(\lambda; N) = J \left(J_0 := \begin{bmatrix} 0 & iI_n \\ iI_n & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Это приводит к следующим соотношениям для m -функций E, E_*, D, D_*

$$\begin{aligned} & D(\lambda, N) D^*(\lambda; N) - D_*(\lambda; N) D_*(\lambda; N) = 0 \\ 1) \quad & E(\lambda; N) E^*(\lambda; N) - E_*(\lambda; N) E_*(\lambda; N) = 0 \\ & D(\lambda; N) E^*(\lambda; N) + D_*(\lambda; N) E_*(\lambda; N) = 2I_n \\ & E^*(\lambda; N) D^*(\lambda; N) + D^*(\lambda; N) E(\lambda; N) = 2I_n \\ 2) \quad & E_*(\lambda; N) E_*(\lambda; N) + D_*(\lambda; N) E_*(\lambda; N) = 2I_n \\ & E^*(\lambda; N) D_*(\lambda; N) D^*(\lambda; N) E_*(\lambda; N) = 0. \end{aligned}$$

Вышеприведенные рассмотрения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2. Пусть задана эрмитова акселеранта $H_N \in L_{n \times n}^1(-N, N)$ ($0 < N < \infty$) такая, что $I + H_N > 0$ (вполне неопределенный случай). Тогда полное описание класса $\Omega(H_N)$ дается формулой

$$F(z) = (D(z; N) - D_*(z; N) B(z) (E(z; N) + E_*(z; N) B(z))^{-1} (z \in C_+), \quad (3.11)$$

когда B пробегает множество $B_{n \times n}$.

Замечание 3.2. В скалярном случае ($n=1$) формула (3.11) несколько упрощается. Дело в том, что в этом случае $E_*(z, N) = \overline{E(z; N)}$ и $D_*(z; N) = \overline{D(z; N)}$. Если теперь представить $B \in B_{n \times n}$ в виде $B = (T - iI_n)(T + iI_n)^{-1}$, где $T \in \Omega_n \cup \{\infty\}$, то формула (3.11) перейдет в формулу, получаемую, среди прочих, в сообщении [2].

Замечание 3.3. Из теоремы 3.1 и замечания 1.1 легко следует, что одно-однозначное соответствие между множествами $B_{n \times n}$ и $\Omega(H_N)$, задаваемое формулой (3.11), осуществляет также соответствие между следующими множествами:

$$1) \quad B_{n \times n}^0 := \{B \in B_{n \times n} \mid \sup_{z \in C_+} |B(z)| < 1\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \Omega(H_N) = \{t \in \Omega(H_N) \mid \inf_{z \in C_+} |\operatorname{Re} F(z)| > 0\}.$$

$$2) \quad \tilde{B}_n \times_n \cap \tilde{W}_n \times_n \leftrightarrow \tilde{\Omega}(H_N) \cap \tilde{W}_n \times_n.$$

$$3) \quad \tilde{B}_n \times_n \cap V_{n \times n}^{ad} \leftrightarrow \tilde{\Omega}(H_N) \cap V_{n \times n}^{ad}.$$

Теорема 3.2 играет важную роль в теории канонических дифференциальных уравнений. Дело в том, что всякий канонический дифференциальный оператор A_0 , порожденный дифференциальным выражением

$$J \frac{d}{dr} - V(r) \left(V \in L_{n \times n}^1(0, N) \right) \quad V^*(r) = V(r) \quad (0 < r < N);$$

$$J = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix}$$

и произвольно фиксированным самосопряженным условием в нуле, порождает некоторую акселеранту H_N ($H_N \in L_{n \times n}^1(-N, N)$; $I + H_N > 0$) такую, что множество ее спектральных мер совпадает с множеством спектральных мер эрмитового оператора A_0 с индексом дефекта (n, n) . Поясним, что спектральной мерой акселеранты H_N называется мера Σ в представлении (2.1) m -функции $F \in \Omega(H_N)$ или, что одно и то же, мера Σ , фигурирующая в представлении (2.4) «переходной» функции Π имеющей H_N в качестве своей акселеранты.

Отметим также, что матрица $U(z; N)$ дробно-линейного преобразования (3.11) непосредственно связана с матрицантом $U_1(z; r)$ канонического дифференциального уравнения

$$J \frac{dU_1(z, r)}{dr} - V(r) U_1(z; r) = z U_1(z; r); \quad U_1(z; 0) = I_n, \quad (3.12)$$

а именно, $U(z; N) U^{-1}(z; 0) = U_1(z; N)$.

В связи с этим укажем, что в процессе работы над статьей авторы имели возможность ознакомиться с препринтом работы [14], где вопрос описания суммируемых продолжений $\tilde{H}$ заданной акселеранты H_N , удовлетворяющих условию $I_n + F(\tilde{H}; \lambda) > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, рассмотрен в связи с каноническими дифференциальными операторами.

В этой работе теорема об указанном описании может быть переформулирована без использования понятий и положений канонических дифференциальных уравнений, после чего она совпадает с утверждением 2) замечания 3.3. Само доказательство этой теоремы построено в работе [14] на основе ряда ошибочных положений. Отметим только, что утверждение о том, что каждая каноническая система (3.12) порождает, в определенном смысле, некоторую акселеранту $H_N \in L_{n \times n}^1(-N, N)$ в общем случае суммируемых акселерант не допускает обращения.

К сожалению, авторы [14] не заметили ошибочность рассуждений, приводящих к противоположному выводу, допущенную нами в ранних работах [15] и [16].

Подробно эти вопросы будут обсуждены в нашей следующей статье, посвященной приложениям теории акселерант к вопросам спектральной теории и теории рассеяния канонических дифференциальных уравнений (с гамильтонианом и, в частности, с потенциалом).

§ 4. Решение задачи (C—T) (вырожденный случай)

1. В этом параграфе рассмотрим эрмитову акселеранту $H_N \in L_{n \times n}^1(-N, N)$ ($0 < N < \infty$) ($H_N(t) = H_N^*(t)$; $-N < t < N$) такую, что -1 является собственным значением оператора H_N ($-1 \in \sigma(H_N)$).

Вместе с $H_N (= H_N; +)$ рассмотрим дуальную акселеранту $H_N; -$ и введем собственные подпространства $\mathcal{X}_N$, отвечающие собственному значению -1 операторов $H_N; \pm$:

$$\mathcal{X}_N^\pm = \{h_\pm \in L_{n \times n}^1(0, N) \mid (I + H_N; \pm) h_\pm = 0\} \quad (-1 \in \sigma(H_N; \pm)).$$

Из соотношений (3.5) легко следует равенство

$$\mathcal{X}_N^\pm = \{\varphi \pm \psi \mid [\varphi, \psi]^* \in \mathcal{X}_C\}. \quad (4.1)$$

Элементы $h_\pm \in \mathcal{X}_N^\pm$, связанные соотношением $h_\pm = \varphi \pm \psi$ ($[\varphi, \psi]^* \in \mathcal{X}_C$), будем называть „дуальными“ собственными элементами.

Соотношение (4.1) даёт возможность непосредственно перенести понятие и положение подпространства $\mathcal{X}_C$ на подпространства $\mathcal{X}_N^\pm$.

4.1°. Для подпространств $\mathcal{X}_N^\pm$ справедливы включения

$$\mathcal{X}_N^\pm \subset \bigcap_{p=1}^{\infty} L_{n \times n}^p(0, N) \cap AC_{n \times n}(0, N).$$

4.2°. Если $h_\pm \in \mathcal{X}_N^\pm$, то $h_\pm \in \mathcal{X}_N^\pm$ в том и только в том случае, когда $h_\pm(0) = h_\pm(N) = 0$.

Отметим, что вообще $h_+(0) = h_-(0)$, а $h_+(N) = -h_-(N)$.

Введем подпространства $\mathcal{X}_N^\pm(0)$:

$$\mathcal{X}_N^\pm(0) = \{[h_\pm(0), h_\pm(N)]^* \mid h_\pm \in \mathcal{X}_N^\pm\} \subset C^{2n}.$$

Ясно, что $\mathcal{X}_N^\pm = \{[\varphi(0), \psi(N)]^* \mid [\varphi, \psi]^* \in \mathcal{X}_C\} = \mathcal{X}_C(0)$ и $\mathcal{X}_N^- = \{[\varphi(0), -\psi(N)]^* \mid [\varphi, \psi]^* \in \mathcal{X}_C\}$. Отсюда получаем

4.3°. Подпространства $\mathcal{X}_N^\pm(0)$ являются J -нейтральными и, следовательно, им соответствует частично изометрический угловой оператор $K: C^n \rightarrow C^n$ такой что, $h_\pm(N) = \pm K h_\pm(0)$.

Таким образом, $\dim \mathcal{X}_N^\pm(0) \leq n$.

Определение 4.1. Упорядоченная система $\{h_\pm^{(k)}\}_{k=1}^l$ элементов из $\mathcal{X}_N^\pm$ называется D -цепочкой и обозначается $D(h_\pm^{(1)}; l)$ если

1) $h_\pm^{(1)}(0) \neq 0$, а следовательно, и $h_\pm^{(1)}(N) \neq 0$,

2) $h_\pm^{(k)}(t) = \int_0^t h_\pm^{(k-1)}(s) ds$ ($k = \overline{2, l}$).

Элемент $h_\pm^{(1)}$ называется базовым элементом, а l — длиной D -цепочки.

D -цепочка $D(h_\pm^{(1)}; l)$ называется максимальной, если в $\mathcal{X}_N^\pm$ нет D -цепочки большей длины, у которой значение в нуле базового элемента совпадают с $h_\pm^{(1)}(0)$.

Легко видеть, что одно-однозначное соответствие между множествами $\mathcal{X}_N^\pm$ и $\mathcal{X}_C$, устанавливаемое равенством (4.1), сохраняет свойство

системы элементов быть D -цепочкой. С помощью этого соответствия из 1.3° непосредственно получаем

4.4°. *Существует система максимальных D -цепочек $D((h_{\pm}^{[l]})_k; l_k)$ ($k = \overline{1, r}$) такая, что система $\{(h_{\pm}^{[l]}(0))_{k=1}^r\}$ образует базис в $\mathfrak{M}_{\pm}^{\pm}(0)$, а система $\{(h_{\pm}^{[l]})_{k=1}^r\}$ образует базис в $\mathfrak{M}_{\pm}^{\pm}(\dim \mathfrak{M}_{\pm}^{\pm}(0) = r, \dim \mathfrak{M}_{\pm}^{\pm} = \sum_{k=1}^r l_k)$.*

Далее, из утверждения 1.4°, в силу теоремы 3.1, получаем

4.5°. *Пусть задана акселеранта $H_N (= H_N; +) \in L_{n \times n}^1(-N, N)$ ($0 < N < \infty$) такая, что $-1 \in \sigma(H_N; \pm)$, и пусть ${}^{\pm}F \in \Omega(H_N)$. Тогда для любого $h_{\pm} = \varphi \pm \psi \in \mathfrak{M}_{\pm}^{\pm}((\varphi, \psi)^{\pm} \in \mathfrak{M}_C)$ выполняются тождества*

$$\begin{aligned} 1) \quad & F_+^*(h_+; \bar{z}) F_+(h_-; z) + F_+^*(h_-; \bar{z}) F_+(h_+; z) = 0; \\ 2) \quad & F(z) F_+(h_+; z) = F_+(h_-; z) \quad (z \in C_+). \end{aligned} \quad (4.2)$$

С помощью системы базисных D -цепочек $D((h_{\pm}^{[l]})_k; l_k)$ ($k = \overline{1, r}$) липсгалов $\mathfrak{M}_N$ образуем $(n \times r)$ -матрицы-функции

$$H_{\pm}(t) = \{(h_{\pm}^{[1]})_1(t), (h_{\pm}^{[1]})_2(t), \dots, (h_{\pm}^{[1]})_r(t)\}. \quad (4.3)$$

В силу (4.2), для этих m -функций имеем

$$\begin{aligned} 1) \quad & F_+^*(H_+; \bar{z}) F_+(H_-; z) + F_+^*(H_-; \bar{z}) F_+(H_+; z) = 0; \\ 2) \quad & F(z) F_+(H_+; z) = F_+(H_-; z) \quad (z \in C_+). \end{aligned} \quad (4.4)$$

2. Рассмотрим случай $\dim \mathfrak{M}_{\pm}^{\pm}(0) = n$ (определенный случай). В этом случае имеем $H_{\pm} = \Phi \pm \Psi$, где $(n \times n)$ -матрицы-функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ ($z \in C_+$) определяются равенством (1.13) и, в силу 1.4°, обратимы при $z \in \bar{C}_+ \cup \{\infty\}$.

С другой стороны, при $z \in C_+$ существуют $(I_n \pm E(z))^{-1}$, где $E(z) = F_+(\Psi; z) F_+^{-1}(\Phi; z)$ есть единственный элемент множества $E(C_N; H_N)$. Отсюда следует обратимость m -функций $F_+(H_{\pm}; z)$ при $z \in C_+$.

Однако в данном случае можно утверждать большее.

4.6°. *m -функции $F_+(H_{\pm}; z)$ обратимы при любом не вещественном z .*

В самом деле, введем в пространстве $L_{n \times 1}^2(0, N)$ квазискалярное произведение $(f, g)_1 = (f, g) + (H_N; +, f, g)$, и в новом пространстве рассмотрим оператор A_0 , порождаемый дифференциальным выражением $i \frac{d}{dt}$ на многообразии $D(A_0)$ непрерывно дифференцируемых функций $f \in L_{n \times 1}^2(0, N)$, удовлетворяющих условиям $f(0) = f(N) = 0$. Легко проверить, что оператор A_0 является симметрическим. Допустим, что $\det F_+(H_+; z_0) = 0$ при $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. Рассмотрим уравнение $(A_0 + z_0 I) \chi = \xi_+$, где $\xi_+ = H_+ a$ и $F_+(H_+ a; z_0) = 0$. Для решения

$$\chi_0(t) = \int_0^t e^{z_0(s-t)} \xi_+(s) ds$$

этого уравнения имеем: $\chi_0(0) = \chi_0(N) = 0$. Это означает, что $\chi_0 \in D(A_0)$. Теперь в фактор-пространстве по подпространству элементов $f \in L_{\pi \times 1}^2(0, N)$, удовлетворяющих условию $(f, f)_1 = 0$, рассмотрим симметрический оператор $\hat{A}_0$, порождаемый оператором A_0 , и класс $\hat{\chi}_0$, содержащий функцию χ_0 . Ясно, что $\hat{\chi}_0$ является собственным элементом оператора $\hat{A}_0$, отвечающим собственному значению z_0 ($\text{Im } z_0 \neq 0$).

Получили противоречие. Аналогично доказывается обратимость $F_+(H_-; z)$ при $\text{Im } z \neq 0$.

Резюмируя сказанное выше, сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.1. Пусть задана эрмитова акселеранта $H_N \in L_{\pi \times \pi}^1(-N, N)$ ($0 < N < \infty$) такая, что $-1 \in \sigma(H_N)$ и $\dim \mathfrak{M}_N(0) = n$. Тогда множество $\Omega(H_N)$ состоит из одной m -функции $F_0(z)$, которая находится по формуле

$$F_0(z) = F_+(H_-; z) F_+^{-1}(H_+; z),$$

где m -функции $H_{\pm}$ определяются по формуле (4.3).

$\text{Det } F_+(H_+; z)$ имеет только вещественные нули $\{\lambda_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ ($\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$) и, следовательно, функция $F_0(z)$ допускает разложение*

$$F_0(z) = a + \frac{p_0}{z} + \sum_{\lambda_j \neq 0} \left(\frac{1}{\lambda_j - z} - \frac{1}{\lambda_j} \right) p_j$$

где a — вещественная $(n \times n)$ -матрица, а $(n \times n)$ -матрицы $p_j > 0$, причем

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{p_j}{1 + \lambda_j} < \infty.$$

Можно показать, что ранг вычета p_j совпадает с кратностью λ_j как нуля $\det F_+(H_+; z)$ (см. [17]).

Для m -функции $\Pi_0(t) = \Pi_{F_0}(t)$ из соотношения (2.6) найдем: $\Pi_0(t) = a + \sum (e^{i\lambda_j t} - 1) p_j / \lambda_j^2$. Дважды дифференцируя последнее равенство в смысле обобщенных функций, получим $\tilde{H}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \Pi_0(t) = \sum p_j e^{i\lambda_j t}$, причем $\tilde{H}(t) = H_N(t)$ при $0 < t < N$. Таким образом, в этом случае продолжение $\tilde{H}$ m -функций H_N есть обобщенная почти периодическая m -функция.

* Представление (4.4) следует из (2.1), поскольку в данном случае $\Sigma(\lambda)$ является ступенчатой m -функцией со скачками $p_j = \Sigma(\lambda_j + 0) - \Sigma(\lambda_j - 0)$. Последнее справедливо в силу того, что $F_0(z)$ является мероморфной функцией с полюсами в точках $z = \lambda_j$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Замечание 4.1. Так как $\det F_+(H_+; z)$ есть функция, ограниченная на вещественной оси R и имеет экспоненциальный тип, то нули $\lambda_j (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ $\det F_+(H_+; z)$ имеют асимптотику $\lambda_j \sim c_j$ при $|j| \rightarrow \infty$, где коэффициенты c_j вычисляются по известным правилам (см. [18]).

3. Пусть теперь $-1 \in \sigma(H_{N;+})$ и $\dim \mathfrak{M}_N^+(0) < n$. С помощью специального решения $\hat{p}$ уравнения (1.17) введем m -функцию $\hat{q}$ по формуле

$$\hat{q}(t) = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \hat{p}(t).$$

Легко проверить, что m -функция $\hat{q}$ является определенным решением уравнения

$$\begin{bmatrix} I + H_{N;+} & 0 \\ 0 & I + H_{N;-} \end{bmatrix} \hat{q}(t) = \begin{bmatrix} -H_{N;+}(t) & -H_{N;+}^*(N-t) \\ -H_{N;-}(t) & H_{N;-}^*(N-t) \end{bmatrix} Q, \quad (4.5)$$

где Q есть ортопроектор на подпространство $C^{2n} \ominus \mathfrak{M}_N^+$.

Более того, $\hat{q}$ есть специальное решение уравнения (4.5) вида $\hat{q} = \hat{q}_1 + \hat{q}_2$, где $\hat{q}_1, \hat{q}_2$ выбираются следующим образом.

Имеем $Q = Q_1 + Q_2$, где Q_1, Q_2 суть ортопроекторы, определяемые равенством (0.15). Зафиксируем некоторое решение $\hat{q}_2$ уравнения

$$\begin{bmatrix} I + H_{N;+} & 0 \\ 0 & I + H_{N;-} \end{bmatrix} \hat{q}_2(t) = \begin{bmatrix} -H_{N;+}(t) & -H_{N;+}^*(N-t) \\ -H_{N;-}(t) & H_{N;-}^*(N-t) \end{bmatrix} Q_2,$$

удовлетворяющее условию $\hat{q}_2(t) Q_2 \equiv \hat{q}_2(t)$. Далее положим $\hat{q}_1(t) = \frac{d}{dt} \hat{h}(t)$, где $\hat{h}(t)$ есть m -функция, вектор-столбцы которой суть

базовые элементы максимальных D -цепочек из $\mathfrak{M}_N^+$ таких, что $\hat{h}(0) = Q_1$. Тогда, m -функция $\hat{q}_1$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{bmatrix} I + H_{N;+} & 0 \\ 0 & I + H_{N;-} \end{bmatrix} \hat{q}_1(t) = \begin{bmatrix} -H_{N;+}(t) & -H_{N;+}^*(t) \\ -H_{N;-}(t) & H_{N;-}^*(t) \end{bmatrix} Q_1$$

и условию $\hat{q}_1(t) Q_1 \equiv \hat{q}_1(t)$.

Положим теперь

$$\hat{Q}(z) = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -e^{izN} I_n \end{bmatrix} Q + \int_0^N e^{izN} \hat{q}(t) dt.$$

Поскольку

$$\hat{Q}(z) = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \hat{P}(z),$$

в силу теорем 3.1 и 1.3 получаем:

Теорема 4.2. Пусть задана эрмитова акселеранта $H_N \in L_{n \times n}^1(-N, N)$ ($0 < N < \infty$) такая, что $-1 \in \sigma(H_N \pm)$ и $\dim \mathfrak{M}_N^\pm < n$. Тогда полное описание класса $\Omega(H_N)$ дается формулой

$$F(z) = (\hat{Q}_{21}(z) + Q_{22}(z)B(z))(Q_{11}(z) + Q_{12}(z)B(z))^{-1} (z \in C_+),$$

когда B пробегает все $B_{n \times n}(K)$.

Физико-химический институт АН УССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 3.X.1984

Մ. Գ. Կրեյն, Ֆ. Է. Մելիք-Ադամյան. Եռոթի և Կարատեոդորի-Տեպլիցի խնդիրների մատ-
րիցային կաճեցնելու անալոգները (ամփոփում)

Հաղվածում լուծված են հետևյալ խնդիրները.

Խնդիր (S) (Եռոթի խնդրի անալոգ): Տրված է $C_N \in L_{n \times n}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$) մատրից-
ֆունկցիան (մ-ֆունկցիան): Պահանջվում է՝

1) Գտնել C_+ -ում հոլոմորֆ և $(0, 1)$ տեսքով ներկայացվող $E(z)$ մ-ֆունկցիայի գոյու-
թյան պայմանները:

2) Եթե նշված $E(z)$ մ-ֆունկցիաների $E(C_N)$ բաղմությունը դատարկ չէ, ապա տալ $E(C_N)$
բաղմության լրիվ նկարագրությունը:

Խնդիր (C-T) (Կարատեոդորի-Տեպլիցի խնդրի անալոգ): Տրված է $H_N \in L_{n \times n}^1(0, N)$
($0 < N < \infty$) մ-ֆունկցիան: Պահանջվում է՝

1) Գտնել գոյության պայմանները այնպիսի $F(z) (z \in G_+)$ մ-ֆունկցիայի, որը բավարարում
է $\operatorname{Re} F(z) > 0$ առնչությունը և ներկայացվում է $(0, 2)$ տեսքով, որտեղ $\Psi'(z) (z \in C_+)$
մ-ֆունկցիան բավարարում է $(0, 3)$ առնչությանը:

2) Եթե նշված $F(z)$ մ-ֆունկցիաների $\Omega(H_N)$ բաղմությունը դատարկ չէ, ապա տալ
 $\Omega(H_N)$ բաղմության լրիվ նկարագրությունը:

M. G. KREIN, F. E. MELIK-ADAMIAN, *Matrix continuous analogues of Schur's
and Caratheodory-Toeplitz problems* (summary)

In this paper the following two problems are considered.

Problem (S). (A version of a problem of Schur). Let $(n \times m)$ — matrix function
 $C_N \in L_{n \times m}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$) be given.

1) Give the existence condition of nonstretching holomorphic in C_+ matrix-
function $E(z)$, which is representable in the form

$$E(z) = \int_0^N C_N(t) e^{itz} dt + e^{izN} \Phi(z) \quad (\Phi \in H_{n \times n}^-).$$

2) Describe the set $E(C_N)$ of all such matrix-functions $E(z)$.

Problem (C-T). (A version of the problem of Caratheodory-Toeplitz). Let n
($n \times m$) — matrix function $H_N \in L_{n \times n}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$) be given.

1) Give the existence condition of holomorphic in C_+ matrix-function $F(z)$,
for which

$$a) \operatorname{Re} F(z) \geq 0; \quad b) F(z) = I_n + 2 \int_0^N H_N(t) e^{itz} dt + e^{izN} \Psi(z),$$

where $\Psi(z)$ is a holomorphic in C_+ matrix-function, admitting the estimate

$$\Psi(z) = O(|z|), \text{ when } z \rightarrow \infty \text{ and } \left| \frac{\pi}{2} - \arg z \right| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

2) Describe the set $\mathcal{Q}(H_N)$ of all such matrix-functions $F(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян. Интегральные ганкелевы операторы и связанные с ними проблемы продолжения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1984, № 4, 311—332, № 5, 339—360.
2. М. Г. Крейн, Г. К. Лангер. Континуальные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по indefinite весу и связанные с ним проблемы продолжения, ДАН СССР, 1981, 258, № 3, 537—542.
3. М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмүльян. О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, Мат. исследования, т. II, 1967, вып. 3, 64—96.
4. И. Шур. (J. Shur). Über potenzreihen die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journ. für reine and angew. Math., 147, 1917, 205—232.
5. И. П. Федчина. Задача Шура для вектор-функций, Укр. матем. журн., 30:6, 1978, 797—805.
6. Д. Сарасон (D. Sarason). Generalized interpolation in H^∞ , Trans. Am. Math. Soc., 127, 1967, № 2, 179—203.
7. Н. И. Ахисвер, Н. М. Глазман. О некоторых классах непрерывных функций, порождающих эрмитово-положительные ядра, Хрк. Зап. Матем. о-ва, 25, 1957, 205—217.
8. М. Г. Крейн. О проблемах продолжения эрмитово-положительных функций, ДАН СССР, 26, № 1, 1940, 17—22.
9. М. Г. Крейн. Про ермітові оператори з напрямними функціоналами, Збірник праць математики АН УССР, № 10, 1948, 83—105.
10. М. Г. Крейн. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) , Укр. матем. журн., № 2, 1949, 3—66.
11. И. С. Кац, М. Г. Крейн. R-функции—аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя, Дополнение 1 к Ф. Адкинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи, «Мир», 1968, 1—750, с. 630.
12. Ю. А. Брычков, А. П. Прудников. Интегральные преобразования обобщенных функций, «Наука», 1977, 1—287, с. 32.
13. И. С. Кац. Теорема об интегральных оценках роста спектральных функций струны, Укр. матем. журн., 34, № 3, 1982, с. 297.
14. Н. Дым, А. Якоб. Positive definite extensions, canonical equations and inverse problems, Topic in Operator Theory System and Network, The Rehovot Workshop June, 1982. Birkhauser Verlag, Basel, 1984, 141—240.
15. М. Г. Крейн. К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 1956, III, № 6, 1167—1170.
16. М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян. К теории S-матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом, ДАН Арм.ССР, 1968, XVI, № 4, 150—155.
17. М. Г. Крейн. Основные положения λ -зон устойчивости канонических систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Сб. памяти А. А. Андропова, М., 1955, 413—498.

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН, Г. В. МИКАЕЛЯН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТИПА БЛЯШКЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Как хорошо известно, Б. Я. Левиным [1] (см. также [2], гл. II) и А. Пфлюгером [3] независимо были установлены теоремы об асимптотическом поведении произведения Вейерштрасса вблизи бесконечно удаленной точки, при наличии особого рода плотности его нулей. Позже Н. В. Говоровым [4, 5] были получены аналогичные результаты для введенного им канонического произведения в полуплоскости.

В совместной статье авторов [6] были введены в рассмотрение произведения типа Бляшке для нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$

$$A_{\alpha}(w) = \prod_k a_{\alpha}(w, w_k) \equiv \\ \equiv \prod_k \exp \left\{ - \int_0^{2|\operatorname{Im} w_k|} \frac{\tau^{\alpha} d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\alpha}} \right\}, \{w_k\}_1^{\infty} \subset G^{(-)}, -1 < \alpha < +\infty, (1)$$

сходящиеся при выполнении условия

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty. (2)$$

Там же был исследован ряд свойств этих произведений. Отметим, что в специальном случае $\alpha=0$ произведение $A_{\alpha}(w)$ совпадает с произведением Бляшке вида

$$A_0(w) = \prod_k \frac{w - w_k}{w - \bar{w}_k}.$$

В данной статье установлены теоремы об асимптотическом поведении произведений типа Бляшке $A_{\alpha}(w)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) вблизи начала координат, при наличии некоторого рода плотностей их нулей $\{w_k\}_1^{\infty} \subset G^{(-)} (\operatorname{Im} w_k = 0)$. Эти теоремы являются также теоремами об асимптотическом поведении произведений $A_{\alpha}(w)$ вблизи любых, лежащих на вещественной оси, конечных, изолированных, предельных точек их нулей, ввиду инвариантности функций $A_{\alpha}(w)$ при параллельном вещественной оси перемещении точки w и последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$ (см. [6]). Одновременно, в случае уточненного порядка $\rho = \operatorname{const}$, теоремы статьи инверсией $w = z^{-1}$ переходят в естественные аналоги упомянутых выше результатов Б. Я. Левина и А. Пфлюгера об асимптотическом поведении произведений Вейерштрасса. Следует отметить, что авторы используют общую схему, данную Б. Я. Левиным. Вместе с тем, исследуемые в данной работе произведения имеют намного более сложную структуру, чем

произведения Вейерштрасса, и авторам пришлось преодолеть ряд существенно новых, специфических трудностей.

Аналогичные по духу теоремы были установлены также для первоначальных произведений М. М. Джрбашяна [7], [8] для круга $\pi_\alpha(z)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) в работе [9] способом, применимым лишь при целочисленных значениях параметра α ($\alpha = p = 0, 1, 2, \dots$).

Развитый в статье метод приводит к распространению результатов работы [9] об асимптотике произведений $\pi_\alpha(z)$ ($\alpha = p = 0, 1, 2, \dots$) на случай любого значения параметра α из $(-1, +\infty)$. Однако на этом, а также на распространении результатов статьи на случай любого уточненного порядка, здесь мы не будем останавливаться.

Следует отметить, что произведения $A_\alpha(w)$ во многом аналогичны другим произведениям типа Бляшке для полуплоскости $B_\alpha(w)$, введенным ранее одним из авторов [10] (см. также [11]). Однако асимптотическое поведение последних требует дополнительного исследования.

В § 1 исследована асимптотика произведения $A_\alpha(w)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) в специальном случае, когда последовательность его нулей $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ расположена на некотором луче, исходящем из точки $w=0$ (теорема I).

В § 2 исследована асимптотика произведения $A_\alpha(w)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) в более общем случае, когда последовательность его нулей $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ имеет угловую плотность (теорема II).

§ 1. Специальный случай распределения нулей

Всюду ниже в этом параграфе будем полагать, что последовательность нулей $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$) функции типа Бляшке $A_\alpha(w)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) расположена на некотором луче $\{xe^{-i\psi}; 0 \leq x < +\infty\}$, где $\gamma \leq \psi \leq \pi - \gamma$, а $\gamma \in (0, \pi/2)$ — фиксированное число. При этом, плотность этой последовательности будем предполагать такой, чтобы для некоторого числа $\rho > 0$ ($\max(0, \alpha) \leq \rho < 1 + \alpha$) имели

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^\rho n(t) = \Delta < +\infty, \quad (1.1)$$

где $n(t)$ ($0 < t < +\infty$) — число точек из $\{w_k\}_1^\infty = \{\rho_k e^{-i\psi}\}_1^\infty$ (с учетом их кратностей), лежащих на луче $\{xe^{-i\psi}; t \leq x < +\infty\}$.

Далее, всюду ниже мы будем полагать, что точка $w \in G^{(-)}$ лежит на луче $\{xe^{-i\psi}; 0 \leq x < +\infty\}$, $\gamma \leq \varphi \leq \pi - \gamma$, где $\varphi \neq \psi$.

Заметим, что $n(t)$ — ступенчатая, монотонно убывающая, непрерывная справа функция, причем $n(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$ и $n(t) = 0$ при $t > M = \max_k \rho_k$ ($M < +\infty$).

Следует отметить, что при любом α ($-1 < \alpha < +\infty$) и соответственно выбранном ρ условие (1.1) обеспечивает сходимость ряда (2), и, тем самым, сходимость произведения $A_\alpha(w)$.

Действительно, ввиду этого условия и природы функции $n(t)$ имеем

$$\begin{aligned}
 +\infty &> \int_0^{+\infty} t^\alpha n(t) dt = \frac{1}{1+\alpha} \int_{+\infty}^0 t^{1+\alpha} dn(t) = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{1+\alpha} = \\
 &= \frac{\sin^{-(1+\alpha)} \frac{\gamma}{2}}{1+\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}.
 \end{aligned}$$

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 1. При поставленных выше условиях равномерно по φ внутри $[\gamma, \pi - \gamma] \setminus \psi$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow +0} r^\alpha \log A_\alpha(re^{-i\varphi}) &= \\
 &= -\Delta e^{-i\varphi} (2 \sin \psi)^{1+\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-\rho} dx}{[i(e^{-i\varphi} - xe^{i\psi})]^{1+\alpha} (e^{-i\varphi} - xe^{i\psi})} \equiv \\
 &\equiv \Delta P_{\alpha, \rho}(\varphi, \psi) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы приведено в конце параграфа. Пока же отметим, что рассмотренные в статье ветви логарифмической функции выбраны так, как в работе [6]. Их определениями являются следующие ниже формулы (1.5) и (1.3). При этом, в случае $\alpha=0$ выбранная таким образом ветвь логарифма—главная. Далее отметим, что как нетрудно убедиться, в случае целых $\alpha=\rho=0, 1, 2, \dots$, после замен φ на $\varphi - \pi/2$ и ψ на $\psi - \pi/2$ последний предел совпадает с пределами (15), (17) работы [9]. Тем самым, при целом $\alpha=\rho=0, 1, 2, \dots$ и нецелом $\rho>0$ ($[\rho]=\rho$)

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha, \rho}(\varphi, \psi) &= \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \left\{ \exp [i\rho(\varphi - \psi) - i\pi \rho \operatorname{sign}(\varphi - \psi)] - \right. \\
 &\left. - e^{i\rho(\varphi + \psi - \pi) - 2\rho i(\psi - \pi/2)} \sum_{n=1}^{\rho+1} (-1)^{\rho-n+1} \binom{\rho-\rho}{n-1} (1 - e^{2i\psi})^n \right\},
 \end{aligned}$$

а при целых $\alpha=\rho=1, 2, \dots$ и $\rho=\alpha=\rho$ имеем

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha, \rho}(\varphi, \psi) &= -e^{i\rho(\varphi - \psi)} \{ i[2\psi + \pi \operatorname{sign}(\varphi - \psi)] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\rho} \frac{1}{n} (1 - e^{2i\psi})^n \}.
 \end{aligned}$$

1.1. Предположив, что $0 < \sigma \leq \frac{1}{2} \sin \gamma$, $2/\sin \gamma \leq \tau < +\infty$ и $w = re^{-i\varphi}$, произведем следующее разбиение:

$$\begin{aligned}
 \log A_\alpha(w) &= \sum_{0 < \rho_k < +\infty} \log a_\alpha(w, w_k) = \\
 &= \left(\sum_{0 < \rho_k < \sigma r} + \sum_{\sigma r < \rho_k < +\infty} + \sum_{\sigma r < \rho_k < \tau r} \right) \log a_\alpha(w, w_k) \equiv \\
 &\equiv S_1^{(\alpha)}(\sigma, r) + S_2^{(\alpha)}(\tau, r) + S_3^{(\alpha)}(\tau, \tau, r) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Для исследования поведения сумм $S_1^{(\alpha)}(\sigma, r)$ и $S_2^{(\alpha)}(\tau, r)$ целесообразно доказать две предварительные леммы.

Лемма 1.1. Пусть $w = re^{-i\varphi} = u + iv$, $\zeta = \rho e^{-i\psi} = \xi + i\eta$, причем $\varphi, \psi \in [\gamma, \pi - \gamma]$ и $0 < \rho \leq \sigma r$, где $\sigma \in \left(0, \frac{1}{2} \sin \gamma\right]$. Тогда справедлива оценка

$$|\log a_\alpha(w, \zeta)| < c_\alpha(\gamma) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1+\alpha} \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (1.4)$$

где $c_\alpha(\gamma) \in (0, +\infty)$ — постоянная, зависящая лишь от α и γ .

Доказательство. Ввиду формул (1.3)—(1.3') статьи [6] имеем

$$\log a_\alpha(w, \zeta) = - \int_0^{2|\eta|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau + i(w - \zeta)]^{1+\alpha}} \quad (-1 < \alpha < +\infty). \quad (1.5)$$

Отсюда заменой переменной $\tau = |\eta| - t$ придем к еще одному представлению для факторов произведения типа Бляшке $A_\alpha(w)$

$$\log a_\alpha(w, \zeta) = - \int_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^\alpha dt}{[i(w - \xi) - t]^{1+\alpha}} \quad (-1 < \alpha < +\infty). \quad (1.5')$$

Заметим, что так как $0 < \sigma < \frac{1}{2} \sin \gamma < \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$, то $\rho \sin \psi < \frac{r}{2} \sin \varphi$, или, что то же самое, $|\eta| < |\nu|/2$. Поэтому при $|t| < |\eta|$ имеем $|i(w - \xi) - t| = |i(u - \xi) + (|\nu| - t)| > |\nu| - t > |\nu|/2$. Воспользовавшись этим легко приходим к оценке (1.4) леммы:

$$\begin{aligned} |\log a_\alpha(w, \zeta)| &\leq \int_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^\alpha dt}{|i(w - \xi) - t|^{1+\alpha}} < \frac{2^{1+\alpha}}{|\nu|^{1+\alpha}} \int_{-|\eta|}^{|\eta|} (|\eta| - t)^\alpha dt = \\ &= \frac{2^{2(1+\alpha)}}{1+\alpha} \left(\frac{\sin \psi}{\sin \varphi}\right)^{1+\alpha} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1+\alpha} \leq \frac{2^{2(1+\alpha)}}{1+\alpha} (\sin \gamma)^{-(1+\alpha)} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Лемма 1.2. Пусть $w = re^{-i\varphi} = u + iv$, $\zeta = \rho e^{-i\psi} = \xi + i\eta$, причем $\varphi, \psi \in [\gamma, \pi - \gamma]$ и $0 < \tau \leq \rho$, где $\tau \geq 2/\sin \gamma$. Тогда справедлива оценка

$$|\log a_\alpha(w, \zeta)| < c'_\alpha(\gamma) \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (1.6)$$

где $c'_\alpha(\gamma) \in (0, +\infty)$ — постоянная, зависящая лишь от α и γ .

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\alpha = 0$. Очевидно

$$\log a_0(w, \zeta) = \log \left| \frac{w - \zeta}{w - \bar{\zeta}} \right| + i \arg \frac{w - \zeta}{w - \bar{\zeta}},$$

Далее, очевидны неравенства

$$\left| \arg \frac{w - \zeta}{w - \bar{\zeta}} \right| \leq \pi,$$

$$1 > \left| \frac{w - \zeta}{w - \bar{\zeta}} \right| > \frac{\rho - r}{\rho + r} \geq \frac{1 - \frac{1}{\tau}}{1 + \frac{1}{\tau}} = 1 - \frac{2}{\tau + 1} \geq \frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$|\log a_0(w, \zeta)| < \log 3 + \pi. \quad (1.7)$$

Пусть теперь $\alpha \in (-1, 0)$. Тогда из формулы (1.5') получим

$$|\log a_\alpha(w, \zeta)| \leq \int_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^\alpha dt}{|t - |v||^{1+\alpha}} = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{-(|\eta|+|v|)}^{\frac{|\eta|-|v|}{2}} \frac{(|\eta| - |v| - x)^\alpha}{|x|^{1+\alpha}} dx, \quad I_2 = \int_{\frac{|\eta|-|v|}{2}}^{|\eta|-|v|} \frac{(|\eta| - |v| - x)^\alpha}{x^{1+\alpha}} dx.$$

Оценим теперь по отдельности интегралы I_1 и I_2 . Очевидно

$$\begin{aligned} I_1 &< \left(\frac{|\eta| - |v|}{2} \right)^\alpha \int_{-(|\eta|+|v|)}^{\frac{|\eta|-|v|}{2}} \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} = \left(\frac{|\eta| - |v|}{2} \right)^\alpha \left\{ \int_0^{\frac{|\eta|-|v|}{2}} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} + \right. \\ &+ \left. \int_0^{|\eta|+|v|} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \right\} < 2^{1-\alpha} (|\eta| - |v|)^\alpha \int_0^{|\eta|+|v|} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \frac{2^{1+|\alpha|}}{|\alpha|} \left(\frac{|\eta| - |v|}{|\eta| + |v|} \right)^{|\alpha|} = \\ &= \frac{2^{1+|\alpha|}}{|\alpha|} \left(\frac{\rho \sin \psi + r \sin \varphi}{\rho \sin \psi - r \sin \varphi} \right)^{|\alpha|} < \frac{4}{|\alpha|} \left(\frac{\rho + r}{\rho \sin \gamma - r} \right)^{|\alpha|} < \\ &\leq \frac{4}{|\alpha|} \left(\frac{1 + \tau^{-1}}{\sin \gamma - \tau^{-1}} \right)^{|\alpha|} < \frac{4}{|\alpha|} \left(\frac{1 + \frac{\sin \gamma}{2}}{\frac{\sin \gamma}{2}} \right)^{|\alpha|} < \frac{12}{|\alpha|} \sin^\alpha \gamma. \end{aligned}$$

Далее

$$I_2 < \left(\frac{2}{|\eta| - |v|} \right)^{1+\alpha} \int_{\frac{|\eta|-|v|}{2}}^{|\eta|-|v|} (|\eta| - |v| - x)^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Таким образом, окончательно

$$|\log a_\alpha(w, \zeta)| < \frac{12}{|\alpha|} \sin^\alpha \gamma + \frac{1}{1+\alpha} \equiv c'_\alpha(\gamma) \quad (-1 < \alpha < 0).$$

Отсюда и из (1.7) мы приходим к оценке (1.6) леммы в случае, когда $\alpha \in (-1, 0]$. Для доказательства справедливости этой оценки в случае, когда $\alpha \in (0, +\infty)$, воспользуемся следующей рекуррентной формулой, которую легко вывести из представления (1.5) интегрированием по частям:

$$\log a_\alpha(w, \zeta) = \log a_{\alpha-p}(w, \zeta) + \sum_{j=1}^p \frac{1}{\alpha + 1 - j} \left(\frac{2i\eta}{w - \bar{\zeta}} \right)^{\alpha+1-j}, \quad (1.8)$$

где $p \geq 1$ — целое число, определенное неравенствами $p-1 < \alpha \leq p$. Рас-

пространение оценки (1.6) на случай, когда $\alpha \in (0, +\infty)$ выполнимо благодаря тому, что, как нетрудно заметить

$$\left| \frac{2i\eta}{w - \bar{z}} \right| = \frac{2\rho \sin \psi}{|re^{-i\varphi} - \rho e^{i\psi}|} < \frac{2\rho}{\rho - r} \leq 4.$$

1. 2. Установим теперь оценки для сумм $S_1(\sigma, r)$ и $S_2(\tau, r)$ разбиения (1.3).

Лемма 1.3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое σ_ε ($0 < \sigma_\varepsilon \leq \frac{1}{2} \sin \gamma$), что

$$|r^\alpha S_1^{(\alpha)}(\sigma, r)| < \varepsilon \quad (0 < \sigma \leq \sigma_\varepsilon, -1 < \alpha < +\infty) \quad (1.9)$$

каково бы ни было $r \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Ввиду (1.3) и природы функции $n(t)$, определенной в начале параграфа, очевидно, что

$$\begin{aligned} S_1^{(\alpha)}(\sigma, r) &\equiv \sum_{0 < \rho_k < \sigma r} \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, \rho_k e^{-i\psi}) = \\ &= \int_{\sigma r}^{+\infty} \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) dn(t) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь оценкой (1.4) леммы 1.1, мы придем к следующим неравенствам, справедливым, когда $0 < \sigma \leq \frac{1}{2} \sin \gamma$

$$\begin{aligned} |S_1^{(\alpha)}(\sigma, r)| &< \int_{\sigma r}^{+\infty} |\log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi})| dn(t) < \\ &< c_\alpha(\gamma) \int_{\sigma r}^{+\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^{1+\alpha} dn(t) = \\ &= \frac{c_\alpha(\gamma)}{r^{1+\alpha}} \left\{ \lim_{t \rightarrow +0} t^{1+\alpha} n(t) + (1+\alpha) \int_{+0}^{\sigma r} t^\alpha n(t) dt \right\} - \\ &\quad - c_\alpha(\gamma) \sigma^{1+\alpha} n(\sigma r) < \\ &< \frac{c_\alpha(\gamma)}{r^{1+\alpha}} \left\{ \lim_{t \rightarrow +0} t^{1+\alpha} n(t) + (1+\alpha) \int_{+0}^{\sigma r} t^\alpha n(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что ввиду соотношения (1.1),

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{1+\alpha} n(t) = 0.$$

С другой стороны, в силу того же соотношения (1.1) и природы функции $n(t)$

$$n(t) < Nt^{-\rho} \quad (0 < t < +\infty) \quad (1.10)$$

при достаточно большом $N \in (0, +\infty)$. Поэтому

$$|S_1^{(\alpha)}(\sigma, r)| < \frac{c_\alpha(\gamma)}{r^{1+\alpha}} (1+\alpha) N \int_0^{\tau r} t^{\alpha-1} dt = c_\alpha(\gamma) \frac{1+\alpha}{1+\alpha-\rho} N r^{-\rho} \sigma^{1+\alpha-\rho},$$

откуда легко приходим к утверждению леммы.

Лемма 1.4. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\tau_\varepsilon (2/\sin \gamma \leq \tau_\varepsilon < +\infty)$, что

$$|r^\rho S_2^{(\alpha)}(\tau, r)| < \varepsilon \quad (\tau_\varepsilon \leq \tau < +\infty, -1 < \alpha < +\infty), \quad (1.11)$$

каково бы ни было $r \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Ввиду (1.3) и природы функции $n(t)$ очевидно представление

$$\begin{aligned} S_2^{(\alpha)}(\tau, r) &\equiv \sum_{\tau r < \rho_k < +\infty} \log a_k(re^{-i\varphi}, \rho_k e^{-i\psi}) = \\ &= \int_{+\infty}^{\tau r} \log a_n(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) dn(t) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \end{aligned}$$

Воспользовавшись оценкой (1.6) леммы 1.2 и неравенством (1.10) при $\tau \geq 2/\sin \gamma$ будем иметь:

$$\begin{aligned} |S_2^{(\alpha)}(\tau, r)| &\leq \int_{+\infty}^{\tau r} |\log a_n(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi})| dn(t) < \\ &< c'_\alpha(\gamma) \int_{+\infty}^{\tau r} dn(t) = c'_\alpha(\gamma) n(\tau r) < c'_\alpha(\gamma) N r^{-\rho} \tau^{-\rho}. \end{aligned}$$

Отсюда легко следует утверждение леммы.

1.3. Доказательство теоремы I.

Исследуем поведение суммы $S_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r)$ разложения (1.3) при $r \rightarrow +0$. Для этого целесообразно представить ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) &= \int_{\tau r}^{\sigma r} \log a_n(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) dn(t) = \\ &= n(\sigma r) \log a_n(re^{-i\varphi}, \sigma r e^{-i\psi}) - n(\tau r) \log a_n(re^{-i\varphi}, \tau r e^{-i\psi}) + \\ &\quad + \int_{\sigma r}^{\tau r} n(t) \frac{\partial}{\partial t} \log a_n(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) dt \equiv \\ &\equiv L_1^{(\alpha)}(\sigma, r) + L_2^{(\alpha)}(\tau, r) + L_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \end{aligned} \quad (1.12)$$

По лемме 1.1 и неравенству (1.10) при $\sigma \in (0, \frac{1}{2} \sin \gamma)$ имеем

$$|L_1^{(\alpha)}(\sigma, r)| < c_\alpha(\gamma) N \sigma^{1+\alpha-\rho} r^{-\rho} \quad (0 < r < M, -1 < \alpha < +\infty).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\sigma' (0 < \sigma' \leq \frac{1}{2} \sin \gamma)$,

что

$$|r^{\alpha} I_1^{(\alpha)}(z, r)| < z (0 < z < z', -1 < \alpha < +\infty), \quad (1.13)$$

каково бы ни было $r \in (0, M)$.

Далее заметим, что по лемме 1.2 и неравенству (1.10) при $\tau \geq 2/\sin \gamma$ имеем

$$|I_2^{(\alpha)}(\tau, r)| < c'_\alpha(\gamma) N \tau^{-\alpha} r^{-\alpha} (0 < r < M, -1 < \alpha < +\infty).$$

Поэтому существует такое $\tau'_\alpha (2/\sin \gamma \leq \tau'_\alpha < +\infty)$, что

$$|r^{\alpha} I_2^{(\alpha)}(\tau, r)| < \varepsilon (\tau'_\alpha \leq \tau < +\infty, -1 < \alpha < +\infty), \quad (1.13')$$

каково бы ни было $r \in (0, M)$.

Исследуем теперь поведение интеграла $I_3(\sigma, \tau, r)$. Для этого заметим, что ввиду формулы (1.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2t \sin \psi} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau + i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha}} = \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= - \frac{(2 \sin \psi)^{1+\alpha} t^\alpha}{[i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha}}, \\ I_2 &= -(1+\alpha) i e^{-i\psi} \int_0^{2t \sin \psi} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau + i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{2+\alpha}}. \end{aligned}$$

Пусть $t \neq r \cos \varphi / \cos \psi$. Тогда очевидно

$$\operatorname{Im}[\tau + i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})] = r \cos \varphi - t \cos \psi \neq 0$$

и

$$\begin{aligned} I_2 &= -(1+\alpha) \frac{e^{-i\psi}}{re^{-i\varphi} - te^{-i\psi}} \int_0^{2t \sin \psi} \left(\frac{\tau}{\tau + i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})} \right)^\alpha \times \\ &\times d \left(\frac{\tau}{\tau + i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})} \right) = \frac{e^{-i\psi} (2 \sin \psi)^{1+\alpha} t^{1+\alpha}}{(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi}) [i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t} \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) = - t^\alpha \frac{(2 \sin \psi)^{1+\alpha}}{[i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha}} \frac{re^{-i\varphi}}{re^{-i\varphi} - te^{-i\psi}},$$

и по (1.12)

$$I_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) = - re^{-i\varphi} (2 \sin \psi)^{1+\alpha} \int_{\sigma r}^{\tau r} \frac{t^\alpha n(t) dt}{[i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha} (re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})}. \quad (1.14)$$

Введем теперь функцию

$$g_\alpha(t, r) = - \frac{(2 \sin \psi)^{1+\alpha}}{[i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha}} \frac{re^{-i\varphi}}{re^{-i\varphi} - te^{-i\psi}}, \quad (1.15)$$

и докажем, что для любых $\sigma \in \left(0, \frac{1}{2} \sin \gamma\right]$, $\tau \in [2/\sin \gamma, +\infty)$ и $\alpha (-1 < \alpha < +\infty)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +0} r^p J_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) &= \Delta \lim_{r \rightarrow +0} r^p \int_{\sigma r}^{\tau r} g_{\alpha}(t, r) t^{\alpha-p} dt = \\ &= -\Delta (2 \sin \psi)^{1+\alpha} e^{-i\varphi} \int_0^{\tau} \frac{x^{\alpha-p} dx}{[i(e^{-i\varphi} - x e^{i\psi})]^{1+\alpha} (e^{-i\varphi} - x e^{-i\psi})} = \\ &= \Delta P_{\alpha, p}(\varphi, \psi, \sigma, \tau). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для доказательства второго из этих равенств обозначим:

$$\begin{aligned} r^{1+\alpha} g_{\alpha}(xr, r) &= -\frac{(2 \sin \psi)^{1+\alpha}}{[i(e^{-i\varphi} - x e^{i\psi})]^{1+\alpha}} \frac{e^{-i\varphi}}{e^{-i\varphi} - x e^{-i\psi}} = \\ &= F_{\alpha}(x, \varphi, \psi), \end{aligned} \quad (1.17)$$

и заметим, что эта величина не зависит от r . Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta r^p \int_{\sigma r}^{\tau r} g_{\alpha}(t, r) t^{\alpha-p} dt &= \Delta r^{1+\alpha} \int_{\sigma}^{\tau} g_{\alpha}(xr, r) x^{\alpha-p} dx = \\ &= \Delta \int_{\sigma}^{\tau} F_{\alpha}(x, \varphi, \psi) x^{\alpha-p} dx = \\ &= -\Delta (2 \sin \psi)^{1+\alpha} e^{-i\varphi} \int_{\sigma}^{\tau} \frac{x^{\alpha-p} dx}{[i(e^{-i\varphi} - x e^{i\psi})]^{1+\alpha} (e^{-i\varphi} - x e^{-i\psi})}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Для доказательства первого из равенств (1.16) заметим, что так как $t^p n(t) \rightarrow \Delta$ при $t \rightarrow +0$, то каково бы ни было $\delta > 0$ существует такое $t_p > 0$, что $|t^p n(t) - \Delta| < \delta$ при $0 < t \leq t_p$.

Поэтому, по (1.14), (1.15) и (1.17) при достаточно малых $r > 0$,

$$\begin{aligned} |r^p J_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) - \Delta P_{\alpha, p}(\varphi, \psi, \sigma, \tau)| &= \\ &= |r^p J_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) - \Delta r^p \int_{\sigma r}^{\tau r} g_{\alpha}(t, r) t^{\alpha-p} dt| = \\ &= r^p \left| \int_{\sigma r}^{\tau r} [t^p n(t) - \Delta] g_{\alpha}(t, r) t^{\alpha-p} dt \right| < \\ &< \delta r^p \int_{\sigma r}^{\tau r} |g_{\alpha}(t, r)| t^{\alpha-p} dt = \delta \int_{\sigma}^{\tau} |F_{\alpha}(x, \varphi, \psi)| x^{\alpha-p} dx < \\ &< \delta \int_0^{+\infty} |F_{\alpha}(x, \varphi, \psi)| x^{\alpha-p} dx < +\infty. \end{aligned}$$

По (1.17) очевидно, что последний интеграл равномерно по φ ограничен внутри $[\gamma, \pi - \gamma] \setminus \psi$. Поэтому, ввиду (1.18), равномерно по φ внутри $[\gamma, \pi - \gamma] \setminus \psi$ выполняются оба предельных соотношения в (1.16).

Принимая во внимание разбиения (1.3), (1.12) и неравенства (1.9), (1.11), (1.13)—(1.13'), при $0 < \sigma < \min(\tau_1, \sigma_1)$ и $\tau \geq \max(\tau_1, \tau_2)$ будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow +0} |r^{\sigma} \log A_{\alpha}(re^{-i\varphi}) - r^{\sigma} I_{\alpha}^{(\sigma)}(\sigma, \tau, r)| \leq 4\varepsilon$$

каковы бы ни были $\varphi, \psi \in [\gamma, \pi - \gamma]$. Поэтому, в силу (1.16), для любого частичного предела

$$|\lim_{r \rightarrow +0} r^{\sigma} \log A_{\alpha}(re^{-i\varphi}) - \Delta P_{\alpha, \rho}(\varphi, \psi, \sigma, \tau)| \leq 4\varepsilon,$$

равномерно относительно φ внутри множества $[\gamma, \pi - \gamma] \setminus \psi$. Следовательно, ввиду такой же равномерной сходимости

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow +0 \\ \tau \rightarrow +\infty}} P_{\alpha, \rho}(\varphi, \psi, \sigma, \tau) \equiv P_{\alpha, \rho}(\varphi, \psi) \equiv$$

$$\equiv - (2 \sin \psi)^{1+\alpha} e^{-i\psi} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-\rho} dx}{[i(e^{-i\varphi} - xe^{i\psi})]^{1+\alpha} (e^{-i\varphi} - xe^{-i\psi})},$$

устремлением $\sigma \rightarrow +0$ и $\tau \rightarrow +\infty$ для любого частичного предела будем иметь

$$|\lim_{r \rightarrow +0} r^{\sigma} \log A_{\alpha}(re^{-i\varphi}) - \Delta P_{\alpha, \rho}(\varphi, \psi)| \leq 4\varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ —любое. Ввиду равномерности последнего соотношения по φ внутри $[\gamma, \pi - \gamma] \setminus \psi$ теорема доказана.

§ 2. Общий случай распределения нулей

Всюду ниже в этом параграфе будем полагать, что последовательность нулей $\{w_k\}_1^{\infty} \equiv \{p_k e^{-i\psi_k}\}_1^{\infty} \subset G^{(-)}$ функции типа Бляшке $A_{\alpha}(w)$ ($-1 < \alpha < +\infty$), удовлетворяющей условию (1), такова, что $\sup_k p_k = p < +\infty$ (здесь p_k —кратность появления точки w_k в последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$), и расположена в некотором угле $\{xe^{-i\psi}: 0 < x < +\infty, \gamma \leq \psi \leq \pi - \gamma\}$, где $\gamma \in (0, \pi/2)$ —фиксированное число. При этом плотность расположения точек последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$ будем предполагать такой, что для всех значений $\psi \in [\gamma, \pi - \gamma]$, за исключением, быть может, счетного множества из $[\gamma, \pi - \gamma]$, существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{\rho} n(t, \psi) = \Delta(\psi) < +\infty \quad (\rho > 0, \max\{0, \alpha\} \leq \rho < 1 + \alpha). \quad (2.1)$$

Здесь $n(t, \psi)$ —число точек последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$ (с учетом кратностей), лежащих в секторе $\{xe^{-i\psi}: t < x < +\infty, 0 < \psi < \psi\}$.

Дополнительно предположим, что плотность расположения точек последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$ такова, что при некотором $\kappa > 0$ открытые кружки радиусов

$$R_k = x r^{1+p/2}$$

с центрами в различных друг от друга точках этой последовательности не пересекаются. Объединение указанных кружков мы будем называть всюду ниже C_R множеством.

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема II. При поставленных выше ограничениях равномерно по φ внутри $(0, \pi)$ выполняются соотношения

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ re^{-i\varphi} \in C_R}} r^p \log |A_+(re^{-i\varphi})| = \operatorname{Re} \int_{-\gamma-0}^{-\gamma+0} P_{\alpha, p}(\varphi, \psi) d\psi \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (2.2)$$

где $P_{\alpha, p}(\varphi, \psi)$ — интеграл из (1.2)

Доказательство теоремы отодвинуто в конец параграфа. Пока же целесообразно доказать ряд лемм.

2.1 Предположив, что точка $w = re^{-i\varphi}$ лежит на некотором луче $\{xe^{-i\varphi}; 0 < x < +\infty\}$, где $\varphi \in (0, \pi)$ фиксировано, и взяв любое δ ($0 < \delta < 1/2$), произведем разбиение

$$\begin{aligned} \log A_+(w) &= \sum_{k=1}^{\infty} \log a_+(w, w_k) = \\ &= \sum_{|w-w_k| < \delta r} \log a_+(w, w_k) + \sum_{|w-w_k| > \delta r} \log a_+(w, w_k) = \\ &= J_{\alpha}^{(1)}(\delta, r) + J_{\alpha}^{(2)}(\delta, r) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Сначала оценим величину $J_{\alpha}^{(1)}(\delta, r)$.

Лемма 2.1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_{\varepsilon} = \delta_{\varepsilon}(\varepsilon, \alpha) \in (0, 1/2)$, что при любом $\delta \in (0, \delta_{\varepsilon})$

$$r^p |J_{\alpha}^{(1)}(\delta, r)| < \varepsilon \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (2.4)$$

каково бы ни было $w = re^{-i\varphi} \in C_R$ такое, что $0 < r < 1$.

Доказательство. Обозначим через $\{z_n\}_1^{\infty}$ подпоследовательность всех различных друг от друга точек последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$. Далее через $n_w(x)$ обозначим количество точек из $\{w_k\}_1^{\infty}$, лежащих в круге $|w - w_k| \leq x \leq \delta r$.

Пусть $w = re^{-i\varphi} \in C_R$ ($0 < r < 1$), δ ($0 < \delta < 1/2$) и x ($0 \leq x \leq \delta r$) любые. Заметим, что если $|z_n - w| \leq x$, то и $R_n \leq x$. С другой стороны, очевидно

$$\min_{|w-z_n| \leq x} R_n \geq x(r-x)^{1+p/2} > \frac{x}{2^{1+p/2}} r^{1+p/2}.$$

Поэтому, как нетрудно убедиться, при $0 \leq x \leq \delta r$ справедливы неравенства

$$n_w(x) \leq p \frac{\pi(2x)^2}{\pi \left(\min_{|w-z_n| \leq x} R_n \right)^2} \leq \frac{2^{4+p} p}{x^2} x^2 r^{-2-p} \quad (0 \leq x \leq \delta r). \quad (2.5)$$

Докажем теперь оценку (2.4) для целых $\alpha = 0, 1, 2, \dots$. С этой целью.

рассмотрим сначала случай, когда $\alpha=0$. Так как $w \in C_R$, то

$$\sum_{|w-w_k| < \delta r} \log |w-w_k| = \int_0^{\delta r} \log x \, d n_w(x) = n_w(\delta r) \log \delta r - \int_0^{\delta r} \frac{n_w(x)}{x} dx.$$

Однако, ввиду (2.5)

$$\int_0^{\delta r} \frac{n_w(x)}{x} dx \leq \frac{2^{4+p} p}{x^2} r^{-2-p} \int_0^{\delta r} x dx = \frac{2^{3+p} p}{x^2} \delta^2 r^{-p} = c \delta^2 r^{-p}.$$

Следовательно

$$\sum_{|w-w_k| < \delta r} \log |w-w_k| > n_w(\delta r) \log \delta r - c \delta^2 r^{-p} \quad (2.6),$$

Далее, поскольку при $|w-w_k| \leq \delta r$ имеем $|w-w_k| \leq r + |w_k| \leq (2 + \delta) r < 3r$, то очевидно

$$\sum_{|w-w_k| < \delta r} \log |w-w_k| \leq n_w(\delta r) \log 3r. \quad (2.6')$$

Заметим теперь, что

$$a_0(w, w_k) = \frac{w-w_k}{w-w_k} \text{ и } |\arg a_0(w, w_k)| \leq \pi.$$

Поэтому, воспользовавшись оценками (2.5), (2.6) и (2.6'), получим

$$\begin{aligned} |J_0^{(1)}(\delta, r)| &= \left| \sum_{|w-w_k| < \delta r} \log a_0(w, w_k) \right| \leq \\ &\leq - \sum_{|w-w_k| < \delta r} \log \left| \frac{w-w_k}{w-w_k} \right| + \pi n_w(\delta r) \leq c \left(\log \frac{9e^{1+\pi}}{\delta^2} \right) \delta^2 r^{-p}. \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом следует оценка (2.4) в случае $\alpha=0$.

Как нетрудно проверить, полученные неравенства приводят к оценке (2.4) и в случае любого натурального $\alpha=1, 2, \dots$. Надо только воспользоваться рекуррентной формулой (1.8), где в нашем случае

$$\left| \frac{2iv_k}{w-w_k} \right| < 2.$$

Пусть теперь $-1 < \alpha < 0$.

Если $v \leq v_k$ ($-\infty < v \leq v_k < 0$) и $|w-w_k| \leq \delta r$, то ввиду представления (1.5) будем иметь

$$\begin{aligned} \log a_\alpha(v, w_k) &\leq \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{(\tau^2 + |w-w_k|^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}} < \\ &< \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{|v_k|^{1+\alpha}}{|w-w_k|^{1+\alpha}} < \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{r^{1+\alpha}}{|w-w_k|^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $v > v_k$ ($-\infty < v_k < v < 0$) и $|w-w_k| \leq \delta r$. Тогда $0 < (|v_k| - |v|)/2 < 2(|v_k| - |v|) < 2|v_k|$, и ввиду представления (1.5) имеем:

$$\begin{aligned}
 & |\log a_\alpha(w, w_k)| \leq \\
 & < \left\{ \int_0^{\frac{|v_k| - |v|}{2}} + \int_{\frac{|v_k| - |v|}{2}}^{2(|v_k| - |v|)} \int_{2(|v_k| - |v|)}^{2|v_k|} \right\} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[(\tau + |v| - |v_k|)^2 + (u - u_k)^2]^{\frac{1+\alpha}{2}}} = \\
 & \equiv I_\alpha^{(1)}(w, w_k) + I_\alpha^{(2)}(w, w_k) + I_\alpha^{(3)}(w, w_k).
 \end{aligned}$$

Далее очевидны оценки

$$\begin{aligned}
 I_\alpha^{(1)}(w, w_k) & \leq \int_0^{\frac{|v_k| - |v|}{2}} \frac{\tau^\alpha d\tau}{(|v_k| - |v| - \tau)^{1+\alpha}} < \left(\frac{2}{|v_k| - |v|} \right)^{1+\alpha} \times \\
 & \times \int_0^{\frac{|v_k| - |v|}{2}} \tau^\alpha d\tau = \frac{1}{1+\alpha}, \quad I_\alpha^{(2)}(w, w_k) \leq \int_{\frac{|v_k| - |v|}{2}}^{2(|v_k| - |v|)} \frac{\tau^\alpha d\tau}{||v_k| - |v| - \tau|^{1+\alpha}} = \\
 & = \int_{1/2}^2 \frac{t^\alpha dt}{|1 - t|^{1+\alpha}} < +\infty, \quad I_\alpha^{(3)}(w, w_k) \leq \frac{1}{|w - w_k|^{1+\alpha}} \times \\
 & \times \int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha d\tau \leq \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{r^{1+\alpha}}{|w - w_k|^{1+\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Из этих оценок следует, что при любом α ($-1 < \alpha < 0$) и достаточно малом δ ($0 < \delta < 1/2$).

$$|\log a_\alpha(w, w_k)| < c_\alpha \frac{r^{1+\alpha}}{|w - w_k|^{1+\alpha}} (|w - w_k| \leq \delta r),$$

где $c_\alpha \in (0, +\infty)$ — постоянная, зависящая лишь от α .

Опираясь на рекуррентную формулу (1.8), последнюю оценку легко распространить и на все нецелые $\alpha > 0$. Мы получим, что при любом целом α ($-1 < \alpha < +\infty$) и при достаточно малом $\delta \in (0, 1/2)$ справедливо неравенство

$$|\log a_\alpha(w, w_k)| < c_\alpha \frac{r^{1+\alpha-p}}{|w - w_k|^{1+\alpha-p}} (|w - w_k| \leq \delta r),$$

где $c_\alpha \in (0, +\infty)$ — постоянная, зависящая лишь от α , а $p = [\alpha] + 1$.

Воспользовавшись оценкой (2.5) и последним неравенством, получим, что

$$\begin{aligned}
 |I_\alpha^{(1)}(\delta, r)| & \equiv \left| \sum_{|w - w_k| < \delta r} \log a_\alpha(w, w_k) \right| \leq c_\alpha r^{1+\alpha-p} \int_0^{\delta r} \frac{dn_w(x)}{x^{1+\alpha-p}} = \\
 & = c_\alpha \delta^{-(1+\alpha-p)} n_w(\delta r) + C_\alpha (1 + \alpha - p) r^{1+\alpha-p} \int_0^{\delta r} \frac{n_w(x)}{x^{2+\alpha-p}} dx <
 \end{aligned}$$

$$< 2c, c \left\{ 1 + \frac{1 + \alpha - p}{1 - \alpha + p} \right\} \delta^{1+p-\alpha} r^{-p}.$$

Отсюда следует оценка (2.4) в случае нецелых значений α ($-1 < \alpha < +\infty$). Тем самым, лемма полностью доказана.

2.2. Для дальнейшего изложения целесообразно наряду с последовательностью $\{w_n\}_1^\infty \equiv \{\rho_k e^{-i\psi_k}\}_1^\infty$ ввести в рассмотрение для любого $t \in [0, \gamma/2)$ некоторую последовательность $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{\rho_k e^{-i\psi_k}\}_1^\infty \in G^{(-)}$ такую, что

$$\sup_k |\psi_k - \psi'_k| \leq t.$$

Необходимо ввести также следующие обозначения:

$$A_\alpha^t(w) = \sum_{k=1}^{\infty} a_\alpha(w, w'_k) \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (2.7)$$

$$J_\alpha^{(1)}(\delta, r, t) = \sum_{|w - w_k| < \delta r} \log a_\alpha(w, w'_k),$$

$$J_\alpha^{(2)}(\delta, r, t) = \sum_{|w - w_k| < \delta r} \log a_\alpha(w, w'_k).$$

$$(-1 < \alpha < +\infty, 0 < \delta < 1/2). \quad (2.7')$$

Имеет место

Лемма 2.2. Пусть $\beta \in (0, \pi/2)$ и $c \in (0, +\infty)$ — фиксированные числа. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon \equiv \delta(\varepsilon, \alpha, c, \beta, \rho) \in (0, 1/4)$, что при любом $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$

$$r^\rho |J_\alpha^{(1)}(\delta, r, t)| < \varepsilon \quad (-1 < \alpha < +\infty) \quad (2.8)$$

каковы бы ни были $t \in [0, \delta/2)$ и $w = re^{-i\varphi} \in C_R$ такое, что $r \in (0, 1)$, $\alpha \in [\beta, \pi - \beta]$ и $\inf_k |\varphi - \psi'_k| \geq ct$.

Доказательство. Если $0 < \delta < 1/4$, $0 \leq t < \delta/2$, и при некотором фиксированном $n \geq 1$ имеем $|w - w_k| \leq x$ ($0 \leq x \leq \delta r$), то очевидно

$$\begin{aligned} |w - w'_n| &= |we^{-i(\psi_n - \psi'_n)} - w_n| \leq |w - w_n| + \\ &+ |w - we^{-i(\psi_n - \psi'_n)}| \leq x + r|1 - e^{it}| \leq x + rt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |J_\alpha^{(1)}(\delta, r, t)| &\leq \sum_{|w - w_k| < \delta r} |\log a_\alpha(w, w'_k)| \leq \\ &\leq \sum_{|w - w_k| < (\delta + t)r} |\log a_\alpha(w, w'_k)|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Далее очевидно, что если $|w - w'_n| \leq x$ ($0 \leq x \leq (\delta + t)r$) при фиксированном $n \geq 1$, то

$$\begin{aligned} |w - w_n| &= |we^{i(\psi_n - \psi'_n)} - w'_n| \leq |w - w'_n| + \\ &+ |w - we^{i(\psi_n - \psi'_n)}| \leq x + rt. \end{aligned}$$

Следовательно, если через $n_w^t(x)$ обозначить количество точек w_k (учитывая кратности), для которых $|w - w_k| \leq x$, то

$$n_w^t(x) \leq n_w(x + rt) \quad (0 \leq x \leq (\delta + t)r).$$

Однако, при $x \leq (\delta + t)r$ имеем $x + rt < r/2$. Поэтому к функции $n_w(x + rt)$ применима оценка (2.5), и, тем самым

$$n_w^t(x) \leq \frac{2^{1+p} p}{x^2} (x + rt)^2 r^{-2-p}.$$

Заметим теперь, что если $\inf_k |\varphi - \psi_k| \geq ct$, то $n_w^t(x) = 0$ при $0 \leq x <$

$\frac{c}{2} tr$. В случае же $\frac{c}{2} tr \leq x \leq (\delta + t)r$ имеем $x + rt \leq \left(1 + \frac{2}{c}\right)x$.

Поэтому при любом x ($0 \leq x \leq (\delta + t)r$) справедлива оценка

$$n_w^t(x) \leq \frac{2^{1+p} p \left(1 + \frac{2}{c}\right)^2}{x^2} x^2 r^{-2-p}.$$

Полученная оценка по существу совпадает с оценкой (2.5), на которую опиралось доказательство леммы 2.1. Повторяя рассуждения этой леммы для правой части неравенства (2.9), мы приходим к утверждению нашей леммы.

2.3. Докажем еще две леммы, необходимые для дальнейшего изложения.

Лемма 2.3. Пусть $w = re^{-i\varphi} \in G^{(-)}$ — любое, $m \geq 1$ — фиксированное натуральное число и $K_w = \{k \geq 1, |w - w_k| > \delta r, \rho_k \geq r/m\}$ ($0 < \delta < 1/2$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $t_\varepsilon \equiv t(\varepsilon, \delta, m)$, что при $0 \leq t < t_\varepsilon$

$$|\log |a_\alpha(w, w_k)| - \log |a_\alpha(w, w'_k)|| < \varepsilon \quad (k \in K_w, -1 < \alpha < +\infty). \quad (2.10)$$

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости леммы в случае $\alpha = 0$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Phi(w, w_k) &= \log |a_0(w, w_k)| - \log |a_0(w, w'_k)| \leq \\ &\leq \log \left\{ \left| \frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w'_k)} - 1 \right| + 1 \right\} \leq \left| \frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w'_k)} - 1 \right| \end{aligned} \quad (2.11)$$

и

$$\Phi(w, w_k) > \log \left| 1 - \left| \frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w'_k)} - 1 \right| \right|. \quad (2.12)$$

(Далее, как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} &\frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w'_k)} - 1 = \\ &= 4ie^{i\psi_k} \sin \left(\frac{\psi'_k - \psi_k}{2} \right) \frac{r/\rho_k e^{-i\varphi} \cos \frac{\psi_k + \psi'_k}{2} - \cos \frac{\psi_k - \psi'_k}{2}}{(r/\rho_k e^{-i\varphi} - e^{i\psi_k}) \left(\frac{w}{w_k} - e^{i(\psi_k - \psi'_k)} \right)}. \end{aligned}$$

При этом очевидно

$$|r/\rho_k e^{-i\gamma} - e^{i\psi_k}| \geq \sin \psi_k \geq \sin \gamma.$$

Одновременно можно убедиться в том, что если $k \in K_\omega$, то

$$\left| \frac{w}{w_k} - \frac{1}{1-\delta^2} \right| > \frac{\delta}{1-\delta^2}.$$

Отсюда следует, что при $0 \leq t < \delta/3$ имеем

$$\left| \frac{w}{w_k} - e^{i(\psi_k - \gamma)} \right| > \frac{\delta}{3}.$$

Поэтому при достаточно малом $t_\delta > 0$ и любом $t \in [0, t_\delta)$ будут справедливы неравенства

$$\left| \frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w_k)} - 1 \right| < \frac{6(m+1)}{\delta \sin \gamma} t < \delta < 1/2. \quad (2.13)$$

Так как при $0 \leq x < \delta < 1/2$ имеем $\log(1-x) > -2x$, то отсюда и из (2.12) следует, что при $0 < t < t_\delta$

$$\Phi(w, w_k) > -2 \left| \frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w_k)} - 1 \right|.$$

Сопоставив последнее неравенство с (2.11) и (2.13), придем к оценке

$$|\Phi(w, w_k)| < \frac{12(m+1)}{\delta \sin \gamma} t \quad (0 \leq t < t_\delta).$$

Из этой оценки очевидным образом следует утверждение леммы в случае $\alpha=0$.

Предположим теперь, что α ($-1 < \alpha < +\infty$) любое. Тогда, как нетрудно убедиться, представление (1.5) можно преобразовать к виду

$$a_\alpha(w, w_k) = a_0(w, w_k) \exp \{-F_\alpha(w, w_k)\},$$

где

$$\begin{aligned} F_\alpha(w, w_k) &= \int_0^1 \left\{ \frac{x^\alpha}{\left[x + \frac{w-w_k}{2iv_k} \right]^{1+\alpha}} - \frac{1}{x + \frac{w-w_k}{2iv_k}} \right\} dx \equiv \\ &\equiv \varphi_\alpha \left(\frac{w-w_k}{2iv_k} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что функция $\varphi_\alpha(z)$ аналитична во всей конечной плоскости z , кроме, быть может, отрицательной полуоси. С другой стороны, эту функцию можно представить в виде

$$\varphi_\alpha(z) = \left(\int_0^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \right) \left\{ \frac{x^\alpha}{(x+z)^{1+\alpha}} - \frac{1}{x+z} \right\} dx \equiv \varphi_\alpha^{(1)}(z) - \varphi_\alpha^{(2)}(z).$$

При этом, очевидно, $\varphi_\alpha^{(1)}(z)$ аналитична в области $\mathbb{C} \setminus \{z = -h: 0 \leq h < +\infty\}$, а $\varphi_\alpha^{(2)}(z)$ — в области $\mathbb{C} \setminus \{z = -h: 1 \leq h < +\infty\}$. Убедемся однако в том, что в действительности функция $\varphi_\alpha^{(1)}(z)$ постоянна

ная. Действительно, взяв $z = h$ ($h > 0$), заменой переменной интегрирования $x = h\sigma$ получим, что

$$\varphi_a^{(1)}(h) \equiv \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\sigma^\alpha}{(1+\sigma)^{1+\alpha}} - \frac{1}{1+\sigma} \right\} d\sigma \equiv c_a.$$

Таким образом

$$\log |a_\alpha(w, w_k)| = \log |a_0(w, w_k)| + \operatorname{Re} \varphi_a^{(2)}(z) - c_a, \quad (2.14)$$

где $\operatorname{Re} \varphi_a^{(2)}(z)$ гармонична в области $\mathbb{C} \setminus \{z = -h: 1 \leq h < +\infty\}$.

Теперь заметим, что так как $w, w_k \in G^{(-)}$, то

$$\operatorname{Re} z \equiv \operatorname{Re} \left(\frac{w - w_k}{2iv_k} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{v_k} - 1 \right) > -\frac{1}{2}.$$

Тем самым, при рассматриваемых нами значениях w и w_k (из $G^{(-)}$) переменная z остается в области гармоничности функции $\operatorname{Re} \varphi_a^{(2)}(z)$. С другой стороны, как нетрудно убедиться

$$\begin{aligned} & \frac{w - w_k}{2iv_k} - \frac{w - w'_k}{2iv'_k} = \\ &= \frac{\sin \frac{\psi'_k - \psi_k}{2}}{\sin \psi'_k \sin \psi_k} \left\{ \frac{r}{\rho} \cos \frac{\psi'_k + \psi_k}{2} - \cos \frac{\psi'_k - \psi_k}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Повтому при $0 \leq t \leq \gamma/2$ имеем

$$\left| \frac{w - w_k}{2iv_k} - \frac{w - w'_k}{2iv'_k} \right| \leq \frac{m+1}{2 \sin \gamma \sin \gamma/2} t.$$

Отсюда, ввиду уже доказанного утверждения леммы в случае $\alpha=0$ и представления (2.14), следует утверждение леммы в случае любого α ($-1 < \alpha < +\infty$).

Лемма 2.4. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $t_\varepsilon \equiv t(\varepsilon, \delta, \alpha, \rho, \beta)$, что при любом $t \in [0, t_\varepsilon)$

$$r^\alpha |\operatorname{Re} I_a^{(2)}(\delta, r) - \operatorname{Re} I_a^{(2)}(\delta, r, t)| < \varepsilon \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (2.15)$$

каковы бы ни были $w = re^{-i\varphi} \in G^{(-)} \left(\varphi \in [\beta, \pi - \beta], \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right)$ и $\delta \in (0, 1/2)$.

Доказательство. Для любого натурального $m \geq 1/\sin \beta$ введем в рассмотрение произведение

$$\psi_{m,\alpha}(w) \equiv \prod_{\substack{|w-w_k| > \delta r \\ \rho_k < r/m}} a_\alpha(w, w_k) \quad (-1 < \alpha < +\infty).$$

В этом произведении $|v_k| < |v|$. Действительно, если $w_k = \rho_k e^{-i\psi_k}$ такое, что $\rho_k < r/m$, то $r \sin \varphi / \sin \psi_k \geq r \sin \varphi > r/m > \rho_k$, и повтому $|v_k| = \rho_k \sin \psi_k < r \sin \varphi = |v|$. Ввиду этого, воспользовавшись представлением (1.5), приходим к следующим неравенствам для факторов введен-

ного произведения:

$$\begin{aligned} |\log a_\alpha(w, w_k)| &< \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau^2 + |w - w_k|^2]^{\frac{1+\alpha}{2}}} < \\ &< \frac{1}{|w - w_k|^{1+\alpha}} \int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha d\tau = \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{|v_k|^{1+\alpha}}{|w - w_k|^{1+\alpha}} \leq \\ &\leq \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{\rho_k^{1+\alpha}}{(r - \rho_k)^{1+\alpha}} < \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \left(\frac{m}{m-1} \right)^{1+\alpha} \left(\frac{\rho_k}{r} \right)^{1+\alpha} \leq \\ &\leq \frac{2^{2(1+\alpha)}}{1+\alpha} \left(\frac{\rho_k}{r} \right)^{1+\alpha} \equiv c_\alpha \left(\frac{\rho_k}{r} \right)^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Используем теперь соотношение (2.1). Для достаточно большого $m \geq 2$ и некоторого достаточно большого $N \geq 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} |\log \psi_{m,\alpha}(w)| &< c_\alpha r^{-1-\alpha} \sum_{\rho_k < r/m} \rho_k^{1+\alpha} = c_\alpha r^{-1-\alpha} \int_{r/m}^{+\infty} x^{1+\alpha} dn(x, \pi - \gamma) = \\ &= c_\alpha r^{-1-\alpha} \left[\lim_{x \rightarrow +0} x^{1+\alpha} n(x, \pi - \gamma) - \left(\frac{r}{m} \right)^{1+\alpha} n\left(\frac{r}{m}, \pi - \gamma \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1+\alpha) \int_0^{r/m} x^\alpha n(x, \pi - \gamma) dx \right] \leq \\ &\leq c_\alpha r^{-1-\alpha} [\Delta(\pi - \gamma) + N](1+\alpha) \int_0^{r/m} x^{\alpha-\rho} dx = \\ &= c_\alpha [\Delta(\pi - \gamma) + N] \frac{1+\alpha}{1+\alpha-\rho} m^{-(1+\alpha-\rho)} r^{-\rho}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при достаточно большом $m \geq 2$ имеем

$$r^\rho |\log \psi_{m,\alpha}(w)| < \varepsilon.$$

Легко видеть, что соотношение (2.1) справедливо также для функции $n^t(x, \pi - \gamma + t)$, считающей точки последовательности $\{w'_k\}_1^\infty$ ($0 < t < \gamma/2$) (в данном случае просто $n^t(x, \pi - \gamma + t) = n(x, \pi - \gamma)$). С другой стороны, последняя оценка для $\log \psi_{m,\alpha}$ была получена без применения условия $|w - w_k| > \delta r$. Поэтому, обозначив

$$\psi_{m,\alpha}^t(w) = \prod_{\substack{|w - w_k| > \delta r \\ \rho_k < r/m}} a_\alpha(w, w'_k) \quad (-1 < \alpha < +\infty),$$

теми же выкладками установим, что при достаточно большом $m \geq 2$

$$r^\rho |\log \psi_{m,\alpha}^t(w)| < \varepsilon.$$

Ввиду обозначений (2.3), (2.7') и полученных оценок, при достаточно большом $m \geq 2$ имеем

$$r^p |\operatorname{Re} I_{\varepsilon}^{(2)}(\delta, r) - \operatorname{Re} I_{\varepsilon}^{(2)}(\delta, r, t)| \leq 2\varepsilon + \\ + r^p \sum_{\substack{|\omega - \omega_k| > \delta r \\ r_k > r/\varepsilon}} |\log |a_{\varepsilon}(\omega, \omega_k)| - \log |a_{\varepsilon}(\omega, \omega_k)||.$$

Отсюда в силу оценки (2.10) и соотношения (2.1) следует утверждение леммы.

2.4. Доказательство теоремы II. Заметим сначала, что поскольку

$$\lim_{r \rightarrow +0} r^p \log \left| \prod_{|\omega_k| > 1} a_{\varepsilon}(re^{-i\varphi}, \omega_k) \right| = 0 \quad (0 < \varphi < \pi),$$

то, не нарушая общности, можно считать, что $\max_k |\omega_k| < 1$. Далее условимся считать, что $\omega = re^{-i\varphi} \in C_R$, причем $0 < r < 1$ и $\varphi \in [\beta, \pi - \beta]$, для некоторого $\beta \in (0, \pi/2)$.

Пусть $\alpha (-1 < \alpha < +\infty)$ и $\varepsilon > 0$ любые. Согласно оценкам (2.4), (2.8) и (2.15), при достаточно малых фиксированных $\delta \in (0, 1/4)$, $t(\varepsilon, \delta) \in [0, \min\{\delta/2, \beta\})$ и любого $r \in (0, 1)$ будем иметь

$$r^p |\log |A_{\varepsilon}(re^{-i\varphi})| - \log |A_{\varepsilon}^t(re^{-i\varphi})|| < \varepsilon/3 \quad (0 < t < t(\varepsilon, \delta)), \quad (2.16)$$

если только $\inf |\varphi - \psi_k| \geq t/12$.

Предполагая теперь, что $t \in (0, t(\varepsilon, \delta))$, произведем разбиение отрезка $[0, \pi]$ точками $\{\vartheta_j\}_0^n$ ($0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_n = \pi$), так, чтобы $t/2 \leq \vartheta_j - \vartheta_{j-1} \leq t$ ($j = 1, 2, \dots, n$), и для любого ϑ_j ($1 \leq j \leq n$) соотношение (2.1) выполнялось. При этом, если $\{\omega_k\}_1^{\infty} \equiv \{\rho_k e^{-i\psi_k}\}_1^{\infty}$, то каждое ψ_k должно удовлетворять неравенствам $\vartheta_{j-1} < \psi_k \leq \vartheta_j$ для некоторого j ($1 \leq j \leq n$). В соответствии с этим обозначим $\omega_k = \rho_k e^{-i\vartheta_j}$ ($k \geq 1$). Легко видеть, что при выбранной таким образом последовательности $\{\omega_k\}_1^{\infty}$ оценка (2.16) будет оставаться в силе для тех $\varphi \in [\beta, \pi - \beta]$, для которых $\min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j| \geq t/12$. Причем, очевидно, что множество $\{\varphi: \min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j| \geq t/12\}$ перекрывает не менее чем двух третей отрезка $[0, \pi]$.

Введем теперь обозначения

$$G_j(re^{-i\varphi}) = \prod_{\substack{k=1 \\ \vartheta_{j-1} < \psi_k < \vartheta_j}} a_{\varepsilon}(re^{-i\varphi}, \rho_k e^{-i\vartheta_j}) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$S_n(\varphi) = \sum_{j=1}^n P_{\varepsilon, \rho}(\varphi, \vartheta_j) [\Delta(\vartheta_j) - \Delta(\vartheta_{j-1})].$$

Заметим, что при этом

$$A_{\varepsilon}^t(re^{-i\varphi}) = \prod_{j=1}^n G_j(re^{-i\varphi}).$$

Применяя теорему I к каждой из функций $G_j(re^{-i\varphi})$ получим, что для любого φ такого, что $\min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j| \geq t/12$ и достаточно малого

$$r(\varepsilon, t) \in (0, 1)$$

$$|r^p \log A_a'(re^{-i\varphi}) - S_n(\varphi)| < \varepsilon/3 \quad (0 < r < r(\varepsilon, t)).$$

Отсюда и из (2.16) следует, что если φ принадлежит множеству $\{\varphi: \beta \leq \varphi \leq \pi - \beta, \min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j| \geq t/12\}$, то при любом $r \in (0, r(\varepsilon, t))$

$$|r^p \log |A_a(re^{-i\varphi})| - \operatorname{Re} S_n(\varphi)| < 2/3\varepsilon. \quad (2.17)$$

Произведем теперь аналогичное разбиение отрезка $[0, \pi]$ точками $\{\vartheta_j'\}_0^n$ ($0 = \vartheta_0' < \vartheta_1' < \dots < \vartheta_n' = \pi$) так, чтобы множества $\{\varphi: \min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j'| \geq t/12\}$ и $\{\varphi: \min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j| \geq t/12\}$ перекрывали отрезок $[\beta, \pi - \beta]$.

Такими же как выше рассуждениями мы придем к аналогичной (2.17) оценке. Однако можно убедиться в том, что интеграл в (2.2) сходится равномерно по $\varphi \in [0, \pi]$. Поэтому при достаточно малом $t'_* > 0$ и любом $t \in (0, t'_*)$ равномерно по $\varphi \in [0, \pi]$ выполняется неравенство

$$|S_n(\varphi) - \int_{\gamma-0}^{\pi-\gamma+0} P_a(\varphi, \psi) d\Delta(\psi)| < \varepsilon/3.$$

Следовательно, окончательно имеем

$$|r^p \log |A_a(re^{-i\varphi})| - \operatorname{Re} \int_{\gamma}^{\pi-\gamma+0} P_a(\varphi, \psi) d\Delta(\psi)| < \varepsilon \quad (0 < r < r)$$

каково бы ни было $\varphi \in [\beta, \pi - \beta]$. Отсюда, ввиду произвольности числа $\beta \in (0, \pi/2)$, следует утверждение теоремы.

Институт математики АН Армянской ССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 16.XI.1984

Ա. Մ. ԶԻՐԱՇԻԱՆ, Գ. Վ. ՄԻԿԱԵԼԻԱՆ. Կիսանդրոսյան համար Բլաշկեյի տիպի առտադ-
ոյանների մի ընտանիքի արժեքային վարքը (ամփոփում)

Հոդվածում ուսումնասիրված է հեղինակների հոդված [2] ներմուծված Բլաշկեյի տիպի $A_a(w)$ ($-1 < a < +\infty$) արտադրյալների արժեքային վարքը նրանց զրոների կամայական առանձնացված կուտակման կետերի մոտ, երբ այդ զրոները բաժարարում են խառնված հատուկ պայմանի:

$A_a w = z^{-1}$ ինվերսիայով հոդվածի արդյունքները փոխանցվում են Բ. Յա. Լեինի և Փիլոսոֆի-
վալերշտրասի արտադրյալներին վերաբերող հայտնի արդյունքի յուրօրինակ համանմանների:

A. M. JERBASHIAN (DZRBASHJAN), G. V. MIKAELIAN. *The asymptotic behaviour of a family of Blaschke-type products for the halfplane (summary)*

The paper investigates the asymptotic behaviour of Blaschke type product $A_a(w)$ ($-1 < a < +\infty$) near isolated condensation points of their zeros, satisfying a special density condition. The products in question were constructed previously by the authors [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. О росте целой функции по лучу и о распределении ее нулей по аргументам, Мат. сб., 2 (44), № 6, 1937, 1097—1142.
2. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
3. A. Pfluger. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen, I, II. Comm. math. Helv. v. 11, 1938, 180—213; v. 12, 1939, 25—69.
4. Н. В. Говоров. Об индикаторе функций нецелого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости, ДАН СССР, 162, № 3, 1965, 495—498.
5. Н. В. Говоров. Об индикаторе функций целого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости, ДАН СССР, 172, № 4, 1967, 763—766.
6. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян. Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XV, № 6, 1980, 461—474.
7. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм.ССР, 3, № 3, 1945, 3—9.
8. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Института математики и механики АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
9. Р. С. Галоян. Об асимптотических свойствах функции $\pi_p(z, z_k)$, ДАН Арм.ССР, IX, № 2, 1974, 65—71.
10. А. М. Джрбашян. Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.
11. А. М. Джрбашян. Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 6, 1983, 409—440.

УДК 517.53

В. Х. МУСОЯН

СУММИРОВАНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО НЕПОЛНЫМ СИСТЕМАМ ЭКСПОНЕНТ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Изучая последовательности полиномов из экспонент, сходящихся в области, где образующая эти полиномы система экспонент не является полной, А. Ф. Леонтьев установил следующий результат (см. [1], стр. 111).

Пусть последовательность обобщённых полиномов

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{r_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} z^s e^{\lambda_k z}$$

сходится к функции $P(z)$ равномерно в некоторой области, где образующая эти полиномы система функций

$$\{e^{\lambda_k z}, ze^{\lambda_k z}, \dots, z^{m_k-1} e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$$

не является полной.

Тогда

$$P(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks} \frac{d^s}{d\lambda^s} [e^{\lambda z} L_n^{(\lambda)}]_{\lambda=\lambda_k},$$

где

$$a_{ks} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{ks}^{(n)}, L_n^{(\lambda)} = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)^{m_k}.$$

В настоящей работе предложен аналогичный метод суммирования для биортогональных разложений М. М. Джрбашяна ([3]—[6]) по неполным системам экспонент в пространстве $L^2(0, \infty)$ и по неполным системам рациональных функций в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$. Сначала приведена одна теорема общего характера.

§ 1. Порожденные биортогональные системы

Пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — линейно независимая система в гильбертовом пространстве H и $E \subset H$ — замкнутая линейная оболочка системы $\{e_k\}$. Мы будем предполагать, что система $\{e_k\}$ неполна в пространстве H , т. е. E не совпадает с H .

Известно, что для существования биортогональной системы

$$(e_k, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m \end{cases}$$

необходимо и достаточно, чтобы система $\{e_k\}$ была минимальной, т. е. отбрасывание хотя бы одного элемента e_k вызывает уменьшение множества E .

В случае неполноты минимальной системы $\{e_k\}$ биортогональная система $\{\varphi_k\}$ неединственна. Если требовать дополнительно, чтобы $\varphi_k \in E$, $k=1, 2, \dots$, то будет иметь место единственность. При выполнении этого условия биортогональную систему $\{\varphi_k\}$ будем называть порожденной минимальной системой $\{e_k\}$.

Конечные порожденные биортогональные системы были введены в работе [2], где указана связь конечных порожденных биортогональных систем с аппроксимационными задачами.

Пусть $\{e_k\}$ — произвольная неполная в H минимальная система, а $\{\varphi_k\}$ — биортогональная система. Каждому элементу $x \in H$ ставим в соответствие биортогональное разложение

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) e_k. \quad (1)$$

Ряд может сходиться или расходиться. Следующая теорема устанавливает связь между порожденными биортогональными системами и аппроксимационными задачами.

Теорема 1. Пусть существует бесконечная матрица комплексных чисел $\{a_{nk}\}$; $n, k=1, 2, \dots$; $a_{nk} \rightarrow 1$ такая, что для любого $x \in H$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) e_k$$
 суммируем линейным процессом суммирования $\{a_{nk}\}$,

т. е. при любом n ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (x, \varphi_k) e_k$ сходится и существует пре-

$$\text{дел } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (x, \varphi_k) e_k.$$

Для того чтобы при любом $x \in H$ имело место равенство

$$P_E x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (x, \varphi_k) e_k, \quad (2)$$

где $P_E x$ — проекция элемента x на подпространство E , необходимо и достаточно, чтобы биортогональные системы $\{e_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ порождали друг друга.

Необходимость. Обозначим через M ортогональное дополнение подпространства E в пространстве H . Тогда элементы φ_k можно представить в виде $\varphi_k = h_k + g_k$, $k=1, 2, \dots$, где $h_k \in E$, $g_k \in M$.

В равенстве (2) в качестве элемента x подставив элемент g_p , получим

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (g_p, \varphi_k) e_k.$$

В силу непрерывности скалярного произведения получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (g_p, \varphi_k) e_k, \varphi_m \right) \rightarrow 0, \quad m=1, 2, \dots$$

Так как системы $\{e_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ биортогональны, то опять, в силу непрерывности скалярного произведения, получим

$$a_{nm}(g_p, \varphi_m) \rightarrow 0, \quad m=1, 2, \dots$$

Учитывая условие $a_{nn} \rightarrow 1$, имеем $(g_p, \varphi_m) = 0$. Принимая $m=p$, получим $(g_p, \varphi_p) = 0$. Отсюда следует, что $(g_p, g_p) = 0$, т. е. $g_p = 0$, $p=1, 2, \dots$, или, что то же самое, $\varphi_k = h_k$; $k=1, 2, \dots$, т. е. $\varphi_k \in E$. Тем самым мы доказали, что система $\{\varphi_k\}$ порождается системой $\{e_k\}$. Чтобы доказать, что система $\{e_k\}$ порождается системой $\{\varphi_k\}$, достаточно доказать, что система $\{\varphi_k\}$ полна в подпространстве E , т. е. из того, что $x \in E$ и $(x, \varphi_k) = 0$; $k=1, 2, \dots$ следует, что $x=0$, а это вытекает из равенства (2).

Достаточность. По условию теоремы системы $\{e_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ порождают друг друга, т. е. $\varphi_k \in E$; $k=1, 2, \dots$ и система $\{\varphi_k\}$ полна в подпространстве E . Поэтому для доказательства равенства (2) достаточно показать, что

$$(P_E x - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk}(x, \varphi_k) e_k, \varphi_m) = 0; \quad m=1, 2, \dots \quad (3)$$

В силу непрерывности скалярного произведения равенство (3) равносильно равенству

$$(P_E x, \varphi_m) - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}(x, \varphi_m) = 0.$$

Поскольку $(P_E x, \varphi_m) = (x, \varphi_m)$, $m=1, 2, \dots$; $a_{nm} \rightarrow 1$, то теорема доказана.

§ 2. Неполная система экспонент

Рассмотрим неполную в пространстве $L^2(0, \infty)$ систему экспонент

$$\{e^{-\lambda_k x}\}_1^\infty, \quad (2.1)$$

где $\{\lambda_k\}$ — последовательность различных между собой комплексных чисел, лежащих в правой полуплоскости. Или, более обще, пусть $\{\lambda_k\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих в правой полуплоскости. s_k — кратность появления числа λ_k на отрезке $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Рассмотрим обобщенную систему Мюнца-Саса

$$\{x^{s_k-1} e^{-\lambda_k x}\}_1^\infty \quad (2.2)$$

в пространстве $L^2(0, \infty)$. Относительно этой системы известно из работы М. М. Джрбашяна [3], что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty \quad (2.3)$$

необходимо и достаточно для ее неполноты в пространстве $L^2(0, \infty)$.

В указанной и последующих работах М. М. Джрбашяна (см. [4], где имеется подробный литературный обзор) была построена и систематически изучена порожденная системой (2.2) биортогональная система

В настоящей заметке мы будем использовать порожденную системой (2.2) биортогональную систему, записанную в удобной для нашей цели форме.

Из условия (2.3) следует, что каждое число λ_k в последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ имеет конечную кратность, обозначим ее через m_k и систему (2.2) запишем в виде

$$\{e^{-\lambda_k x}, x e^{-\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{-\lambda_k x}\}, \quad (2.4)$$

где $\{\lambda_k\}$ — последовательность различных между собой комплексных чисел, лежащих в правой полуплоскости. Тогда условие (2.3) примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty. \quad (2.3')$$

Кроме того, условие (2.3') необходимо и достаточно для сходимости произведения Бляшке

$$W(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \bar{\lambda}_k} \cdot \frac{|1 - \lambda_k^2|}{1 - \lambda_k^2} \right\}^{m_k}$$

к аналитической в правой полуплоскости функции, обращающейся в нуль в точках последовательности $\{\lambda_k\}$.

Как известно, почти для всех $\lambda \in (-i\infty, i\infty)$ существуют ее угловые граничные значения $w(i\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow i\tau} W(\lambda)$, причем почти везде $|w(i\tau)| = 1$, $\tau \in (-\infty, \infty)$.

Более того (см. [8], стр. 152)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |W_n(i\tau) - W(i\tau)|^2 \frac{d\tau}{1 + \tau^2} \rightarrow 0,$$

где W_n — частичное произведение Бляшке. Следовательно, если $f(\tau) \in L(-\infty, \infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |W_n(i\tau) - W(i\tau)|^2 |f(\tau)| d\tau \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Для построения порожденной системой (2.4) биортогональной системы мы воспользуемся соответствующей конструкцией для конечных систем, построенной в работе [2]. В указанной работе установлено, что порожденная системой

$$\{e^{-\lambda_k x}, x e^{-\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{-\lambda_k x}\}_{k=1}^n \quad (2.4')$$

биортогональная система $\varphi_{ksn}(t)$ имеет представление

$$\varphi_{ksn}(t) = \frac{(-1)^s}{s!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\zeta t} d\zeta}{W_n(\zeta)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W_n(\lambda)(\lambda + \bar{\zeta})} \right\}, \quad (2.6)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$; $s = 0, 1, \dots, m_k - 1$; Γ — произвольный замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий внутри

себя точки $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; c_k — окружность с центром в точке λ_k , целиком лежащая в открытой правой полуплоскости и не охватывающая других точек последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, кроме λ_k , а $w_n(\lambda)$ — конечное произведение Бляшке

$$W_n(\lambda) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \bar{\lambda}_k} \right)^{m_k} \left(\frac{|1 - \lambda_k^2|}{1 - \lambda_k^2} \right)^{m_k}.$$

Функцию $\varphi_{k,n}(\lambda)$ можно представить и как преобразование Фурье рациональной функции. Действительно, функция

$$\frac{1}{W_n(\zeta)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W_n(\lambda)(\lambda + \bar{\zeta})} \right\}$$

представляет собой рациональную функцию, которая на мнимой оси не имеет полюсов и стремится к нулю при $\zeta \rightarrow \infty$. Поэтому в (2.6) в качестве контура Γ мы можем взять контур, состоящий из отрезка мнимой оси $[-i\sigma, i\sigma]$ и полуокружности $|\zeta| = \sigma$, $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$, обходящийся в положительном направлении, и затем применить лемму Жордана при $\sigma \rightarrow \infty$.

В результате получим

$$\varphi_{k,n}(t) = \frac{(-1)^s}{s!} V.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\tau t} d\tau}{W_n(i\tau)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau - \lambda)} \right\}, t > 0. \quad (2.7)$$

Так как функция

$$f_n(\tau) = \frac{1}{W_n(i\tau)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau - \lambda)} \right\}$$

принадлежит классу $L^2(-\infty, \infty)$, то в формуле (2.7) главное значение интеграла совпадает с преобразованием Фурье, поэтому

$$\varphi_{k,n}(t) = \frac{(-1)^s}{s!} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{e^{-i\tau t} d\tau}{W_n(i\tau)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau - \lambda)} \right\}, \quad (2.8)$$

где l.i.m. означает предел в пространстве $L^2(0, \infty)$.

Убедимся, что при фиксированных k и s последовательность $\varphi_{k,n}(t)$ в пространстве $L^2(0, \infty)$ сходится к функции

$$\varphi_{k,s}(t) = \frac{(-1)^s}{s!} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{e^{-i\tau t} d\tau}{W(i\tau)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W(\lambda)(i\tau - \lambda)} \right\}. \quad (2.9)$$

Так как преобразование Фурье непрерывно в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$, то достаточно доказать, что последовательность $f_n(\tau)$ в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ сходится к функции

$$f(\tau) = \frac{1}{W(i\tau)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W(\lambda)(i\tau - \lambda)} \right\}.$$

Для этого оценим разность этих функций

$$\begin{aligned}
 f_n(\tau) - f(\tau) &= \frac{1}{W_n(i\tau)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_2)^s d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau - \lambda)} - \right. \\
 &- \frac{1}{W(i\tau)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau - \lambda)} \right\} + \frac{1}{W(i\tau)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau - \lambda)} \right\} - \\
 &- \frac{1}{W(i\tau)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W(\lambda)(i\tau - \lambda)} \right\} = \frac{W(i\tau) - W_n(i\tau)}{W_n(i\tau) W(i\tau)} \times \\
 &\times \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau - \lambda)} \right\} + \\
 &+ \frac{1}{W(i\tau)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \left[\frac{1}{W_n(\lambda)} - \frac{1}{W(\lambda)} \right] \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{i\tau - \lambda} \right\}.
 \end{aligned}$$

Отсюда получим оценку, справедливую почти везде

$$\begin{aligned}
 |f_n(\tau) - f(\tau)| &\leq |W(i\tau) - W_n(i\tau)| \cdot \max_{\lambda \in c_k} \frac{1}{|i\tau - \lambda|} \cdot \int_{c_k} \left| \frac{(\lambda - \lambda_k)^s}{W_n(\lambda)} \right| |d\lambda| + \\
 &+ \max_{\lambda \in c_k} \left| \frac{1}{W_n(\lambda)} - \frac{1}{W(\lambda)} \right| \cdot \max_{\lambda \in c_k} \frac{1}{|i\tau - \lambda|} \cdot \int_{c_k} |\lambda - \lambda_k|^s |d\lambda|.
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как при фиксированной окружности c_k имеет место оценка

$$\max_{\lambda \in c_k} \frac{1}{|i\tau - \lambda|} < \frac{M}{1 + |\tau|}, \quad \tau \in (-\infty, \infty), \quad (2.10')$$

где M — некоторая постоянная, не зависящая от λ , то благодаря (2.5) первое слагаемое справа в (2.10) стремится к нулю по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$, а второе слагаемое в (2.10) по той же норме стремится к нулю благодаря тому, что на окружности c_k функция $\frac{1}{W_n(\lambda)}$ равномерно

сходится к функции $\frac{1}{W(\lambda)}$. Таким образом, доказано, что при фиксированных k, s в пространстве $L^2(0, \infty)$ имеет место предельное соотношение

$$\varphi_{ks}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{k,sn}(t), \quad (2.11)$$

где $\lim$ означает предел в пространстве $L^2(0, \infty)$. С другой стороны, системы (2.4) и (2.6) биортогональны, поэтому имеем

$$\int_0^\infty t^p e^{-\lambda q t} \overline{\varphi_{k,sn}(t)} dt = \begin{cases} 0, & q \neq k \\ 0, & q = k, p \neq s \\ 1, & q = k, p = s, \end{cases} \quad (2.12)$$

где $q, k = 1, 2, \dots, n$; $p = 0, 1, \dots, m_q - 1$; $s = 0, 1, \dots, m_k - 1$. Переходя к пределу в (2.12) при фиксированных p, q, k и s получим биортогональность систем (2.4) и (2.9). Кроме того, из (2.11) следует, что система (2.9) порождается системой (2.4).

В частности, когда вместо системы (2.4) берем систему (2.1), порожденной биортогональной системой будет

$$\varphi_k(t) = -\frac{1}{W'(\lambda_k)} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{e^{-t\tau} d\tau}{W(\tau)(\tau + \bar{\lambda}_k)}.$$

Каждой функции $f \in L^2(0, \infty)$ ставим в соответствие биортогональное разложение

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) x^s e^{-\lambda_k x}, \quad (2.13)$$

где

$$a_{ks}(f) = \int_0^{\infty} f(t) \overline{\varphi_{ks}(t)} dt. \quad (2.14)$$

Теорема 2. Проекция $P_E f$ функции f на замкнутую линейную оболочку E системы (2.4) имеет представление

$$(P_E f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) (-1)^s \frac{d^s}{d\lambda^s} [e^{-\lambda x} r_n(\lambda)]_{\lambda=\lambda_k}, \quad (2.15)$$

где $\lim$ означает предел в пространстве $L^2(0, \infty)$,

$$r_n(\lambda) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \bar{\lambda}_k} \frac{|1 - \lambda_k^2|}{1 - \bar{\lambda}_k^2} \right\}^{m_k}.$$

Доказательству теоремы предположим две леммы.

Согласно теореме Винера-Пэли функция

$$\hat{f}(\zeta) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\zeta t} d\zeta, \quad \operatorname{Re} \zeta > 0$$

входит в класс H^2 в правой полуплоскости, поэтому почти везде на мнимой оси она имеет угловые граничные значения $\hat{f}(it)$, причем $\hat{f}(it) \in L^2(-\infty, \infty)$.

Лемма 1. Коэффициент $a_{ks}(f)$ можно представить в виде

$$a_{ks}(f) = \frac{(-1)^s}{s!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon_k} (\lambda - \lambda_k)^s d\lambda \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\hat{f}(it)} d\tau}{W(it)(it - \lambda)} \right\}. \quad (2.16)$$

Доказательство. В силу непрерывности скалярного произведения в пространстве $L^2(0, \infty)$ из (2.14) и (2.11) получим

$$a_{ks}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(t) \overline{\varphi_{k,n}(t)} dt. \quad (2.17)$$

Подставляя в (2.6) параметрические представления кривых Γ и c_k и изменив порядок интегрирования мы убедимся, что

$$\overline{\varphi_{k,n}(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W_n(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-t\zeta} d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})} \right\}.$$

Подставляя полученное выражение в (2.17) и применяя теорему Фубини, получим

$$a_{ks}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s d\lambda}{W_n(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\widehat{f}(\zeta) d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})} \right\}. \quad (2.18)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\widehat{f}(\zeta) d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})} \quad (2.19)$$

и представим ее в виде

$$F_n(\lambda) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\widehat{f}(\zeta) d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})}. \quad (2.20)$$

Для этого мы воспользуемся следующими свойствами функций класса H^2 в правой полуплоскости (см. [8], стр. 176—183):

а) при всех $x > 0$ функция $\widehat{f}_x(y) = \widehat{f}(x + iy)$ лежит в $L^2(-\infty, \infty)$;

б) функция $\widehat{f}_x(y)$ сходится к функции $\widehat{f}(iy)$ в $L^2(-\infty, \infty)$ при $x \rightarrow 0$;

с) функция $\widehat{f}(\zeta)$ стремится равномерно к нулю, когда ζ стремится к бесконечности внутри любой фиксированной полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta \geq \delta > 0$.

В интегральном представлении (2.19) функции $F_n(\lambda)$ в качестве контура Γ выберем контур, состоящий из отрезка $[x + ir, x - ir]$ и полуокружности $\zeta = x + re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. При этом x берем настолько малым, а r — настолько большим, чтобы контур Γ охватывал внутри себя все корни функции $W_n(\zeta)$. Устремив r к бесконечности, согласно свойству с) функции $\widehat{f}(\zeta)$, в представлении (2.20) интеграл по полуокружности $\zeta = x + re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ будет стремиться к нулю. В результате получим

$$F_n(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\widehat{f}(\zeta) d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta + \lambda)}.$$

Устремив теперь x к нулю, учитывая свойство b) функции $\widehat{f}$, получим (2.20).

Из (2.18), (2.19) и (2.20) следует, что для доказательства леммы 1 достаточно показать, что функция $F_n(\lambda)$ на окружности s_k равномерно сходится к функции

$$F(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\widehat{f}(\zeta) d\zeta}{W(\zeta)(\zeta + \lambda)}, \quad (2.21)$$

а это следует из (2.5) и (2.10').

Так как $|W(\zeta)| = 1$ почти всюду на мнимой оси, то функция $F(\lambda)$ входит в класс H^2 в правой полуплоскости (см. [8], стр. 192). Обозначим через $F(i\tau)$ граничную функцию функции $F(\lambda)$.

Лемма 2. Имеет место равенство

$$(P_E f)(x) = -l \cdot i \cdot m \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)} e^{-l\tau} d\tau. \quad (2.22)$$

Доказательство. В [2] установлен следующий результат. Ортопроектор P_{E_n} , проектирующий все пространство $L^2(0, \infty)$ на линейную оболочку конечной системы (2.4'), имеет представление

$$(P_{E_n} f)(x) = \int_0^{\infty} K(x, t) f(t) dt, \quad (2.23)$$

где

$$K(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda x} d\lambda}{W_n(\lambda)} \int \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda t} d\lambda}{W_n(\lambda)(\lambda + \bar{\lambda})} \right\}, \quad (2.24)$$

Γ — замкнутый контур, лежащий в открытой правой полуплоскости и охватывающий все корни функции $W_n(\lambda)$.

Подставляя (2.24) в (2.23) и применяя теорему Фубини, получим

$$(P_{E_n} f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda x} d\lambda}{W_n(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\widehat{f}(\zeta) d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F_n(\lambda)}{W_n(\lambda)} e^{-\lambda x} d\lambda. \quad (2.25)$$

Проекцию функции $\widehat{f}$ на подпространство E_n можно представить и в виде

$$(P_{E_n} f)(x) = -l \cdot i \cdot m \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)} e^{-l\tau} d\tau. \quad (2.26)$$

Для этого в (2.25) в качестве контура Γ выберем контур, состоящий из отрезка $[\delta + i\epsilon, \delta - i\epsilon]$ и полуокружности $\lambda = \delta + \sigma e^{i\varphi}$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Устремив σ к бесконечности, согласно лемме Жордана и вышеприведенному свойству с) функций класса H^2 в правой полуплоскости, интеграл по полуокружности будет стремиться к нулю, и мы получим

$$(P_{E_n} f)(x) = -\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F_n(\bar{\tau} + i\tau)}{W_n(\bar{\tau} + i\tau)} e^{-ix} e^{-i\tau x} d\tau. \quad (2.27)$$

Так как функция

$$\frac{F_n(\bar{\tau} + i\tau)}{W_n(\bar{\tau} + i\tau)} e^{-i\tau x}, \quad (2.28)$$

как функция от τ , входит в класс $L^2(-\infty, \infty)$, то (2.27) можно переписать в виде

$$(P_{E_n} f)(x) = -l \cdot i \cdot m \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_n(\bar{\tau} + i\tau)}{W_n(\bar{\tau} + i\tau)} e^{-ix} e^{-i\tau x} d\tau.$$

Для доказательства (2.26), в силу непрерывности преобразования Фурье в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$, нам остается доказать, что при $\delta \rightarrow 0$ функция (2.28) по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$ стремится к функции $\frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)}$. А это следует из вышеприведенного свойства б) функций класса H^2 .

Обозначим через $\psi_{ks}(x)$; $k = 1, 2, \dots$; $s = 0, 1, \dots, m_k - 1$ ортогонализацию системы (2.4) методом Шмидта. Тогда E_n будет совпадать с линейной оболочкой конечной системы $\psi_{ks}(\tau)$, $k = 1, 2, \dots, n$; $s = 0, 1, \dots, m_k - 1$, а E — замкнутой линейной оболочкой бесконечной системы $\psi_{ks}(x)$; $k = 1, 2, \dots$; $s = 0, 1, \dots, m_k - 1$. Имеем

$$\begin{aligned} (P_E f)(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_k-1} (f, \psi_{ks}) \psi_{ks}(x) = \\ &= l \cdot i \cdot m \sum_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_k-1} (f, \psi_{ks}) \psi_{ks}(x) = l \cdot i \cdot m \cdot (P_{E_n} f)(x). \end{aligned}$$

Поэтому, из (2.26) следует, что для доказательства леммы нам остается установить, что при $n \rightarrow \infty$ функция $\frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)}$ по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$ стремится к функции $\frac{F(i\tau)}{W(i\tau)}$. Для этого составим разность

$$\frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)} - \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)} = \frac{1}{W_n(i\tau)} [F_n(i\tau) - F(i\tau)] + F(i\tau) \frac{W(i\tau) - W_n(i\tau)}{W(i\tau) W_n(i\tau)}. \quad (2.29)$$

Согласно (2.5) второе слагаемое справа в (2.29) стремится к нулю. Докажем, что первое слагаемое также стремится к нулю. Из (2.20) и (2.21) имеем

$$F_n(\lambda) - F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [W_n(i\tau) - W(i\tau)] \overline{\widehat{f(i\tau)}} \frac{d\tau}{i\tau - \lambda}.$$

Отсюда получим оценку (см. [8], стр. 192)

$$\|F_n(i\tau) - F(i\tau)\| < \| [W_n(i\tau) - W(i\tau)] \hat{f}(i\tau) \|.$$

Еще раз применяя (2.5), получим требуемый результат.

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\lambda)}{W_n(\lambda)} e^{-\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} r_n(\lambda) \frac{F(\lambda)}{W(\lambda)} e^{-\lambda x} d\lambda = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{F(\lambda)}{W(\lambda)} r_n(\lambda) e^{-\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Так как функция $g_n(\lambda) = r_n(\lambda) e^{-\lambda x}$ регулярна на и внутри окружности c_k , то ее разложение Тейлора сходится равномерно на и внутри окружности c_k

$$g_n(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g_n^{(s)}(\lambda_k)}{s!} (\lambda - \lambda_k)^s.$$

Подставляя это разложение в (2.30) и интегрируя почленно получим

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s}{s!} \frac{F(\lambda)}{W(\lambda)} d\lambda \frac{d^s}{d\lambda^s} [e^{-\lambda x} r_n(\lambda)]_{\lambda=\lambda_k}.$$

Учитывая (2.16) и (2.21) отсюда имеем

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) (-1)^s \frac{d^s}{d\lambda^s} [e^{-\lambda x} r_n(\lambda)]_{\lambda=\lambda_k}. \quad (2.31)$$

С другой стороны, повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 2, мы убедимся, что функция $S_n(x)$ представляет собой преобразование Фурье функции $-\frac{F(i\tau)}{W_n(i\tau)}$, которая в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ сходится к функции $-\frac{F(i\tau)}{W(i\tau)}$. В силу непрерывности преобразования Фурье получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)} e^{-i\tau x} d\tau. \quad (2.32)$$

Учитывая лемму 2, из (2.31) и (2.32) получим утверждение теоремы.

Следствие. Пусть система (2.1) неполна в пространстве $L^2(0, \infty)$ и последовательность $P_n(x) = \sum_{k=1}^{p_n} a_k^{(n)} e^{-\lambda_k x}$ в пространстве $L^2(0, \infty)$ сходится к функции $f(x)$. Тогда

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k r_n(\lambda_k) e^{-\lambda_k x},$$

где

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)}.$$

§ 3. Неполная система рациональных функций

Рассмотрим систему рациональных функций

$$e_{ks}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{s!}{(z - \lambda_k)^{s+1}}, \quad k = 1, 2, \dots; s = 0, 1, \dots, m_k - 1, \quad (3.1)$$

где $\{\lambda_k\}$ — произвольная последовательность различных комплексных чисел из верхней полуплоскости $G^{(+)} = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$.

Функции этой системы входят в известный класс Харди-Тамаркина H_+^2 аналитических в $G^{(+)}$ функций $f(z)$, для которых

$$\|f\| = \sup_{0 < y < \infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Кроме того, функция $f \in H_+^2$ почти всюду на вещественной оси $-\infty < x < \infty$ имеет угловые граничные значения $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, причем

$$\|f\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Известно [7], что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{\operatorname{Im} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty \quad (3.2)$$

необходимо и достаточно для неполноты системы (1) в пространстве H_+^2 .

Порождённая неполной системой (3.1) биортогональная система была построена и систематически использована М. М. Джрбашяном (см. [4]—[6]).

В настоящей работе получено интегральное представление указанной биортогональной системы. Исходя из полученного интегрального представления порождённой биортогональной системы строится метод суммирования, который суммирует биортогональное разложение произвольной функции $f \in H_+^2$ к проекции этой функции на пространство E , порожденное неполной системой (3.1). В частности, когда $f \in E$, биортогональное разложение функции f приведенным методом суммирования суммируется к функции f . В предположении сходимости ряда (3.2), следуя М. М. Джрбашяну [4], обозначим через $H_{\pm}^2[\lambda_j]$ множество функций $f(z)$, определенных вне точек вещественной оси $\operatorname{Im} z = 0$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$1) f(z) \equiv f_+(z) \in H_+^2, \quad z \in G^{(+)},$$

$$2) f(z) \equiv f_-(z) = B(z)f_*(z), \quad z \in G^{(-)},$$

где $f_*(z) \in H_-^2$ (H_-^2 — класс Харди-Тамаркина в нижней полуплоскости, $B(z)$ — произведение Бляшке, образованное для последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ с кратностями $\{m_k\}$, $G^{(-)}$ — открытая нижняя полуплоскость),

3) почти для всех $x \in (-\infty, \infty)$ существуют и равны пределы

$$\lim_{y \rightarrow 0+} f_+(x + iy) = f_+(x) = f_-(x) = \lim_{y \rightarrow 0-} f_-(x + iy).$$

М. М. Джрбашян в работе [4], характеризуя замкнутую линейную оболочку неполной в пространстве H^2_+ системы рациональных функций (3.1), доказал следующую основную теорему:

Класс $H^2_+ \{\lambda_j\}$ совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_k(z), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty,$$

где $\{\Phi_k(z)\}$ —система Мальмквиста—Такенака, которая получается из системы (3.1) ортогонализацией методом Шмидта в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$. При этом ряд сходится равномерно на каждом компакте, принадлежащем множеству точек $G^{(+)} \cup G^{(-)} \setminus \{\bar{\lambda}_k\}$.

Таким образом, функции, принадлежащие замкнутой линейной оболочке E неполной системы (3.1), аналитически продолжаются в область $G^{(-)} \setminus \{\bar{\lambda}_k\}$.

В связи с этим возник вопрос: восстанавливаются ли приведенным методом суммирования аппроксимируемые функции в области аналитического продолжения $G^{(-)} \setminus \{\bar{\lambda}_k\}$.

Положительный ответ на этот вопрос даёт теорема 3.

Доказательство теоремы 3 опирается на одну экстремальную оценку относительно конечных линейных комбинаций функций из системы (3.1), которая представляет и самостоятельный интерес.

Для удобства читателей и автора в начале параграфа приводятся доказательства некоторых фактов, содержащихся в работах М. М. Джрбашяна [4]—[6].

Введем необходимые обозначения. Известно, что условие (3.2) необходимо и достаточно для сходимости произведения Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z - \lambda_k}{z - \bar{\lambda}_k} \right)^{m_k}, \quad v_k = \frac{|1 + \lambda_k|^2}{1 + i_k^2},$$

которое сходится равномерно на каждом компактном множестве комплексной плоскости, не пересекающемся с замыканием множества точек последовательности $\{\bar{\lambda}_k\}_1^{\infty}$.

Обозначим

$$\varphi_{k,s}(z) = \frac{B(z)}{s! 2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^s d\zeta}{B(\zeta)(\zeta - z)}, \quad k=1, 2, \dots; s=0, 1, \dots, m_k - 1, \quad (3.3)$$

где c_k —окружность с центром в точке λ_k , лежащая в открытой верхней полуплоскости и не охватывающая корней функции $B(z)$, отличных от λ_k (точка z лежит вне окружности c_k).

* Условимся считать $v_k = 1$ при $\lambda_k = i$.

Лемма 3. Системы функций $e_{ks}(z)$ и $\varphi_{ks}(z)$ биортогональны на вещественной оси

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_{pq}(z) \overline{\varphi_{ks}(z)} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e_{pq}(z)} \varphi_{ks}(z) dz = \begin{cases} 1, & p=k, q=s \\ 0, & p \neq k \\ 0, & p=k, q \neq s. \end{cases}$$

Для доказательства леммы введем обозначения

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{z - \lambda_j}{z - \bar{\lambda}_j} \right)^{m_j}$$

и

$$\varphi_{ksn}(z) = \frac{B_n(z)}{s! 2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^s d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta - z)}, \quad n \geq p. \quad (3.4)$$

Применяя теорему Фубини, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{e_{pq}(z)} \varphi_{ksn}(z) dz = \frac{q!}{s! 2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^s d\zeta}{B_n(\zeta)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_n(z) dz}{(z - \lambda_p)^{q+1}(z - \zeta)}. \quad (3.5)$$

Так как функция

$$\frac{B_n(z)}{(z - \lambda_p)^{q+1}}, \quad n \geq p$$

входит в класс H^2_+ , то для неё справедлива формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_n(z) dz}{(z - \lambda_p)^{q+1}(z - \zeta)} = \frac{B_n(\zeta)}{(\zeta - \lambda_p)^{q+1}}, \quad \zeta \in G^{(+)}$$

Подставляя полученное значение интеграла в (3.5), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{e_{pq}(z)} \varphi_{ksn}(z) dz = \frac{q!}{s! 2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^s d\zeta}{(\zeta - \lambda_p)^{q+1}} = \begin{cases} 1, & p=k, q=s \\ 0, & p \neq k \\ 0, & p=k, q \neq s. \end{cases} \quad (3.6)$$

Нам остаётся доказать, что при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (3.6) можно перейти к пределу. Для этого мы должны доказать, что при фиксированных k и s последовательность $\{\varphi_{ksn}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $\varphi_{ks}(z)$ по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$. С этой целью введем обозначения

$$f_n(z) = \frac{\varphi_{ksn}(z)}{B_n(z)}, \quad f(z) = \frac{\varphi_{ks}(z)}{B(z)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &= \left| \frac{1}{s! 2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^s}{\zeta - z} \cdot \left[\frac{1}{B_n(\zeta)} - \frac{1}{B(\zeta)} \right] d\zeta \right| \leq \\ &\leq \max_{\zeta \in c_k} \left| \frac{1}{\zeta - z} \right| \cdot \int_{c_k} |\zeta - \lambda_k|^s \left| \frac{1}{B_n(\zeta)} - \frac{1}{B(\zeta)} \right| |d\zeta|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как функция

$$F(z, \zeta) = \frac{1 + |z|}{|\zeta - z|}, \quad \zeta \in c_k, \quad z \in (-\infty, \infty),$$

как функция двух переменных, непрерывна и равномерно относительно $\zeta \in c$ стремится к единице при $|z| \rightarrow \infty$, то она ограничена, следовательно, имеем

$$\frac{1}{|\zeta - z|} \leq \frac{M}{1 + |z|}, \quad \zeta \in c_k, \quad z \in (-\infty, \infty), \quad (3.8)$$

где M постоянная.

Кроме того, функция $B_n(\zeta)$ на окружности c_k равномерно сходится к функции $B(\zeta)$, поэтому

$$\int_{c_k} |\zeta - \lambda_k|^s \left| \frac{1}{B_n(\zeta)} - \frac{1}{B(\zeta)} \right| |d\zeta| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.9)$$

Из (3.7), (3.8) и (3.9) следует, что последовательность $f_n(z)$ сходится к функции $f(z)$ по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$:

$$\|f_n - f\|_{L^2(-\infty, \infty)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.10)$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_{k,n}(z) - \varphi_{k,s}(z)| &= |B_n(z)f_n(z) - B(z)f(z)| \leq \\ &\leq |f_n(z)| |B_n(z) - B(z)| + |B(z)| |f_n(z) - f(z)|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Так как почти везде на действительной оси $|B(z)| = 1$, то в силу (3.10) второе слагаемое справа в (3.11) стремится к нулю по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$. Первое слагаемое справа в (3.11) стремится к нулю в силу соотношения (см. [8], стр. 152, см. также [6])

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B_n(z) - B(z)|^2 \frac{dz}{1 + z^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3.12)$$

ибо в силу (8) имеем оценку

$$|f_n(z)| \leq \frac{M_1}{1 + |z|}, \quad z \in (-\infty, \infty).$$

Лемма доказана.

Нетрудно убедиться, что система $\{\varphi_{k,s}\}$ порождается системой $\{\varphi_{k,1}\}$. Действительно, при $n \geq k$ точка λ_k является полюсом порядка $m_k - s$ для подынтегральной функции в (4), поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^s d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta - z)} &= \text{Res} \left[\frac{(\zeta - \lambda_k)^s}{B_n(\zeta)(\zeta - z)}, \zeta = \lambda_k \right] = \\ &= \frac{1}{(m_k - s - 1)!} \lim_{\zeta \rightarrow \lambda_k} \frac{d^{m_k - s - 1}}{d\zeta^{m_k - s - 1}} \left[\frac{(\zeta - \lambda_k)^{m_k}}{B_n(\zeta)} \cdot \frac{1}{\zeta - z} \right]. \end{aligned}$$

Применяя формулу Лейбница, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^j d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta - z)} = \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{a_j}{(z - \lambda_k)^{j+1}}.$$

Следовательно, функция $\varphi_{k;n}(z)$ представляет собой рациональную функцию с полюсами порядков m_k в точках λ_k , $k=1, 2, \dots, n$, причем $\varphi_{k;n}(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Поэтому, разлагая функцию $\varphi_{k;n}(z)$ на простейшие дроби, получим

$$\varphi_{k;n}(z) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=0}^{m_k-1} \frac{a_{pq}}{(z - \lambda_k)^{q+1}}.$$

Тем самым доказано, что функция $\varphi_{k;n}(z)$ принадлежит линейной оболочке системы (3.1). А функция $\varphi_{k;s}(z)$ есть предельная функция последовательности $\{\varphi_{k;n}(z)\}_{n=1}^{\infty}$, поэтому $\varphi_{k;s}$ принадлежит замкнутой и линейной оболочке системы (3.1).

Лемма 4.* В пространстве H_+^2 ортопроектор P_E на подпространство E , порожденное неполной системой (3.1), имеет представление

$$(P_E f)(z) = f(z) - \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{B(t)(t-z)}, \quad \text{Im } z > 0. \quad (3.13)$$

Доказательство. Воспользуемся следующим замечанием.

Если конечные системы $\{e_k\}_1^n$ и $\{\varphi_k\}_1^n$ биортогональны в гильбертовом пространстве H и порождают друг друга, то элемент $P_E x = \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) e_k$ представляет собой проекцию элемента $x \in H$ на линейную оболочку E системы $\{e_k\}_1^n$. Для доказательства замечания мы должны показать, что $x - P_E x \perp E$, или, что то же самое, $x - P_E x \perp \varphi_m$, $m=1, 2, \dots, n$. Имеем

$$(x - P_E x, \varphi_m) = (x, \varphi_m) - (x, \varphi_m) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим через E_n линейную оболочку конечной системы

$$\{e_{k;s}(z)\}, \quad k=1, 2, \dots, n; \quad s=0, 1, \dots, m_k-1.$$

Согласно замечанию имеем

$$(P_{E_n} f)(z) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{k;n}(f) e_{k;s}(z),$$

* Формула (3.13) впервые установлена М. М. Джрбашьяном [4]. Мы приведем новое доказательство, чтобы указать на прямую связь ортопроектора с биортогональной системой. (Ниже используются также промежуточные результаты, которые получаются при доказательстве леммы 4).

где

$$a_{ksn}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi_{ksn}(t)} dt.$$

Подставляя значения коэффициентов, получим

$$(P_{E_n} f)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} e_{ks}(z) \overline{\varphi_{ksn}(t)} dt. \quad (3.13')$$

Введём обозначение

$$K_n(z, t) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} e_{ks}(z) \overline{\varphi_{ksn}(t)}, \quad (3.14)$$

и при условии, что t и $\bar{z}$ лежат вне окружностей c_k , $k=1, 2, \dots, n$, вычислим эту сумму. Имеем

$$\begin{aligned} K_n(z, t) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} \frac{s!}{(z - \lambda_k)^{s+1}} \left\{ \frac{B_n(t)}{s!} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^s d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta - t)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{B_n(t)}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta - t)(z - \lambda_k)} \cdot \sum_{s=0}^{m_k-1} \left(\frac{\zeta - \lambda_k}{z - \lambda_k} \right)^s \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{B_n(t)}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta - t)(z - \lambda_k)} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - \lambda_k}{z - \lambda_k} \right)^s \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{B_n(t)}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta - t)(z - \lambda_k)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - \lambda_k}{z - \lambda_k}} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$K_n(z, t) = \frac{B_n(t)}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta - t)(z - \zeta)} \right\}, \quad (3.15)$$

где t и $\bar{z}$ лежат вне окружностей c_k , $k=1, 2, \dots, n$.

С другой стороны, при фиксированных z и t рациональная функция

$$R(\zeta) = \frac{1}{B_n(\zeta)(\zeta - t)(z - \zeta)}$$

удовлетворяет условию

$$R(\zeta) = O(\zeta^{-2}), \quad \zeta \rightarrow \infty,$$

следовательно, сумма её вычетов относительно всех её полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, t, z$ равна нулю.

Поэтому из (3.15) получим

$$K_n(z, t) = \frac{B_n(t)}{2\pi i} \left\{ -\frac{1}{B_n(t)(z - t)} + \frac{1}{B_n(\bar{z})(z - \bar{t})} \right\}.$$

Учитывая равенство

$$\overline{B_n(z)} = \frac{1}{B_n(z)},$$

имеем

$$K_n(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - \overline{B_n(t)} B_n(z)}{\bar{t} - z}. \quad (3.16)$$

Равенство (3.16) нами установлено при условии, что t и $\bar{z}$ лежат вне окружностей s_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Аналитическим продолжением по переменным z и t мы убедимся в справедливости равенства (3.16) для всех значений переменных z и t .

При $t \in (-\infty, \infty)$ из (3.16) получим

$$K_n(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{B_n(z) - B_n(t)}{B_n(t)(z - t)}, \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (3.17)$$

Подставляя полученное выражение ядра $K_n(z, t)$ в (3.13'), получим

$$(P_{E_n} f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{B_n(z) - B_n(t)}{B_n(t)(z - t)} dt. \quad (3.18)$$

Так как для функции $f \in H_+^2$ справедлива формула Коши, то из (3.18) получим равенство

$$(P_{E_n} f)(z) = f(z) - \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{B_n(t)(t - z)}. \quad (3.19)$$

Для доказательства леммы 4 нам остаётся установить, что при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (3.19) можно перейти к пределу.

Воспользуемся следующим замечанием.

Пусть $\{e_k\}_1^\infty$ линейно независимая система в гильбертовом пространстве H . E_k — линейная оболочка первых k векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$, а E — замкнутая линейная оболочка всей системы $\{e_k\}_1^\infty$. Тогда для любого $x \in H$ имеет место равенство

$$P_E x = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{E_k} x,$$

где $P_E x$ — проекция элемента x на пространство E , а $P_{E_k} x$ — проекция элемента x на конечномерное подпространство E_k .

Действительно, обозначим через $\{\varphi_k\}_1^\infty$ ортогонализацию системы $\{e_k\}_1^\infty$ методом Шмидта. Тогда E_k есть линейная оболочка первых k векторов $\{\varphi_j\}_1^k$, а E — замкнутая линейная оболочка всей системы $\{\varphi_j\}_1^\infty$. Имеем

$$P_E x = \sum_{m=1}^{\infty} (x, \varphi_m) \varphi_m = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k (x, \varphi_m) \varphi_m = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{E_k} x.$$

Таким образом, чтобы обосновать предельный переход в равенстве (3.19), нам остаётся доказать, что последовательность

$$F_n(z) = \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{B_n(t)(t-z)}$$

по норме пространства H_+^2 сходится к функции

$$F(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{B(t)(t-z)}.$$

Для этого мы воспользуемся следующим фактом (см. [8], стр. 192, а также [6]).

Если $h \in L^2(-\infty, \infty)$, то функция

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t) dt}{t-z}$$

входит в класс H_+^2 и имеет место неравенство

$$\|H\|_{H_+^2}^2 < \|h\|_{L^2(-\infty, \infty)}^2. \quad (3.20)$$

Из этого следует, что последовательность

$$\frac{F_n(x)}{B_n(x)} - \frac{F(x)}{B(x)}$$

по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$ сходится к нулю (в качестве $F(x)$ и $B(x)$ мы берем граничные значения соответствующих функций $F(z)$ и $B(z)$, $\text{Im } z > 0$).

С другой стороны, имеем

$$F_n(x) - F(x) = B_n(x) \left[\frac{F_n(x)}{B_n(x)} - \frac{F(x)}{B(x)} \right] + \frac{F(x)}{B(x)} [B_n(x) - B(x)].$$

Согласно вышесказанному, в этом равенстве первое слагаемое справа стремится к нулю по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$, а стремление к нулю по той же норме второго слагаемого следует из (3.12). Лемма доказана.

Для произвольной функции $f \in H_+^2$ введём обозначение

$$a_{ks}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi_{ks}(t)} dt.$$

Далее, обозначим через $r_n(z)$ остаток произведения Бляшке:

$$r_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{z - \lambda_k}{z - \bar{\lambda}_k} \right)^{m_k}.$$

Теорема 3. Проекция $P_E f$ функции $f \in H_+^2$ на замкнутую линейную оболочку E неполной системы (3.1) имеет представление

$$(P_E f)(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{z - \lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k},$$

где предел понимается в пространстве H_+^2 .

Следствие.. Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (3.1)

$$Q_n(z) = \sum_{k=1}^{q_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} e_{ks}(z)$$

сходится к функции f по норме пространства H_+^2 , то имеет место равенство

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{z - \lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k},$$

где $a_{ks}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{ks}^{(n)}$ (первый предел опять понимается в пространстве H_+^2).

Доказательство теоремы 3. Имеем

$$a_{ks}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{B(x)} \left\{ \frac{1}{s! 2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^s d\zeta}{B(\zeta)(\zeta - x)} \right\} dx,$$

откуда

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{z - \lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{B(x)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{1}{B(\zeta)(\zeta - x)} \sum_{s=0}^{m_k-1} \frac{g^{(s)}(\lambda_k)}{s!} (\zeta - \lambda_k)^s d\zeta \right\} dx, \quad (3.21) \end{aligned}$$

где

$$g(\lambda) = \frac{r_n(\lambda)}{z - \lambda}. \quad (3.22)$$

Так как $\text{Im } z > 0$, то $\bar{z}$ лежит в нижней полуплоскости, следовательно $g(\lambda)$ регулярна в верхней полуплоскости. Поэтому ряд Тейлора

$$g(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g^{(s)}(\lambda_k)}{s!} (\zeta - \lambda_k)^s$$

сходится равномерно на и внутри окружности c_k .

Кроме того, функция

$$\frac{1}{B(\zeta)} \sum_{s=0}^{m_k-1} \frac{g^{(s)}(\lambda_k)}{s!} (\zeta - \lambda_k)^s$$

регулярна на и внутри окружности c_k . Поэтому заменив в (3.21) конечную сумму на бесконечную, получим

$$\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{z - \lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{B(x)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{g(\zeta) d\zeta}{B(\zeta)(\zeta - x)} \right\} dx.$$

Учитывая (3.22), получим

$$\sum_{j=0}^{m_k-1} a_{kj}(f) \left\{ \frac{d^j \overline{r_n(\lambda)}}{d\lambda^j} \frac{1}{z-\lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{r_n(\zeta) d\zeta}{B(\zeta)(\zeta-x)(z-\zeta)} \right\} dx,$$

следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} a_{kj}(f) \left\{ \frac{d^j \overline{r_n(\lambda)}}{d\lambda^j} \frac{1}{z-\lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k} = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta-x)(z-\zeta)} \right\} dx. \end{aligned}$$

Учитывая (3.15) и (3.17), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} a_{kj}(f) \left\{ \frac{d^j \overline{r_n(\lambda)}}{d\lambda^j} \frac{1}{z-\lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{B_n(x) - B_n(z)}{B(x)(x-z)} dx.$$

Или, что то же самое

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} a_{kj}(f) \left\{ \frac{d^j \overline{r_n(\lambda)}}{d\lambda^j} \frac{1}{z-\lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \frac{B_n(x)}{B(x)} \frac{dx}{x-z} - \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{B(x)(x-z)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В силу леммы 4 для доказательства теоремы нам остаётся показать, что при $n \rightarrow \infty$ правая часть равенства (3.23) стремится к правой части равенства (3.13) по норме пространства H_+^2 .

Согласно (3.12) функция

$$\frac{f(x) B_n(x)}{B(x)}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

стремится к функции $f(x)$ по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$. Поэтому, согласно (3.20), первое слагаемое справа в (23) стремится к функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x-z} = f^+(z), \quad \operatorname{Im} z > 0$$

по норме пространства H_+^2 . Далее, функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{B(x)} \frac{dx}{x-z}$$

входит в класс H_+^2 . Обозначим через $F(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ ее граничную функцию. Согласно (3.12) имеем

$$\|FB_n - FB\|_{L^2(-\infty, \infty)} \rightarrow 0.$$

Учитывая неравенство (3.20), получим

$$\|FB_n - FB\|_{H^2} \rightarrow 0,$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем экстремальную оценку для функций, принадлежащих линейной оболочке E_n конечной системы рациональных функций

$$e_{ks}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{z^s}{(z - \lambda_k)^{s+1}}; \quad k=1, 2, \dots, n; \quad s=0, 1, \dots, m_k-1.$$

Теорема 4. Для любой точки z комплексной плоскости, отличной от полюсов конечного произведения Бляшке $B_n(z)$, имеет место равенство

$$\max_{Q \in E_n} \frac{|Q(z)|}{\|Q\|} = \sqrt{K_n(z, z)}, \quad (3.24)$$

где

$$K_n(z, z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |B_n(z)|^2}{2 \operatorname{Im} z}, & \operatorname{Im} z \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \frac{B'_n(z)}{B_n(z)}, & \operatorname{Im} z = 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

причем максимум в (3.24) (в фиксированной точке z) достигается для функции

$$Q_z(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - \overline{B_n(t)} B_n(z)}{z - t}.$$

Доказательство. Согласно (3.16) для комплексных значений переменных z и t имеем

$$K_n(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - \overline{B_n(t)} B_n(z)}{t - z}. \quad (3.26)$$

Подставляя это выражение ядра $K_n(z, t)$ в (3.13'), получим

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) \frac{1 - \overline{B_n(t)} B_n(z)}{t - z} dt. \quad (3.27)$$

В этом равенстве слева и справа стоят рациональные функции, совпадающие в верхней полуплоскости. Согласно теореме единственности они будут совпадать во всех точках комплексной плоскости, отличных от полюсов конечного произведения Бляшке $B_n(z)$. Применяя неравенство Буняковского, из (3.27) получим

$$|Q(z)| \leq \|K_n(z, t)\| \cdot \|Q\|. \quad (3.28)$$

С другой стороны, согласно (3.14) функция $\overline{K_n(z, t)}$, как функция от t , принадлежит подпространству E_n . Поэтому в равенстве (3.27) вместо функции Q подставляя функцию $\overline{K_n(z, t)}$ и учитывая (3.26), получим

$$\overline{K_n(z, z)} = \|K_n(z, t)\|^2 \quad (3.28')$$

или, что то же самое

$$\|K_n(z, t)\| = \sqrt{K_n(z, z)}.$$

Вводя полученное значение нормы ядра $K_n(z, t)$ в неравенство (3.28) получим

$$|Q(z)| \leq \sqrt{K_n(z, z)} \|Q\|, \quad (3.29)$$

причем, согласно (3.28'), равенство в (3.29) достигается для функции $K_n(z, t)$. Тем самым равенство (3.24) доказано.

Равенство (3.25) следует из представлений (3.17) и (3.26) ядра $K_n(z, t)$.

Теорема 5. Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (3.1)

$$Q_n(z) = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{s=0}^{m_{k-1}} a_{ks}^{(n)} e_{ks}(z)$$

сходится по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$, то она сходится равномерно на каждом компактном подмножестве множества $C \setminus F$, где C — комплексная плоскость, а F — замыкание множества точек последовательности $\{z_k\}$.

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что последовательность $K_n(z, z)$ монотонно возрастает. Поэтому согласно теореме 4, в точках множества $C \setminus F$ справедлива оценка

$$|Q(z)| \leq \sqrt{K(z, z)}, \quad K(z, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(z, z), \quad (3.30)$$

где $Q \in E_n$; $n = 1, 2, \dots$

Докажем, что функция $K(z, z)$ непрерывна на множестве $C \setminus F$. Достаточно доказать, что для любой точки z_0 на действительной оси, не принадлежащей множеству F (если такие точки существуют), выполняется равенство

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \operatorname{Im} z \neq 0}} \frac{1 - |B(z)|^2}{2 \operatorname{Im} z} = \frac{B'(z_0)}{i B(z_0)}. \quad (3.31)$$

Учитывая равенство

$$\overline{B(z)} = \frac{1}{B(\bar{z})},$$

получим

$$\frac{1 - |B(z)|^2}{2 \operatorname{Im} z} = i \frac{1 - B(z) \cdot \overline{B(z)}}{z - \bar{z}} = \frac{B(z) - B(\bar{z})}{i B(\bar{z})(z - \bar{z})}. \quad (3.32)$$

Так как $z_0 \notin F$, то в окрестности этой точки функция $B(z)$ регулярна, поэтому в равенстве (3.32) вместо $B(z)$ и $B(\bar{z})$ подставляя их разложения Тейлора в окрестности точки z_0 и переходя к пределу, устремив z к z_0 , получим (3.31).

Пусть теперь K — произвольное компактное подмножество множества $C \setminus F$. Обозначим

$$M = \max_{z \in K} \sqrt{K(z, z)}.$$

Применяя неравенство (3.30) к разности $Q_n - Q_m$, получим

$$|Q_n(z) - Q_m(z)| \leq M \|Q_n - Q_m\|, \quad z \in K.$$

Утверждение теоремы 5 следует из этого неравенства.

Ереванский государственный
университет

Поступила 12.VI.1983

Վ. Խ. ՄՈՍՅԱՆ. Ըստ էականեաների և ըստ ուղիղնալ ֆունկցիաների ոչ լրիվ նամակարգերի երկօրոգոնալ վերլուծութունների գումարումը (ամփոփում)

Ուսումնասիրելով էքսպոնենտների ոչ լրիվ համակարգը կոմպլեքս տիրույթում, Ա. Ֆ. Լեոնտևը կառուցել է երկօրթոգոնալ վերլուծությունների գումարման մեթոդ (տես [1], էջ 111):

Ներկա աշխատանքում նախ մտցվում է ծնված երկօրթոգոնալ համակարգի գաղափարը հիլբերտյան տարածության մեջ և ապացուցվում է մի ընդհանուր բնույթի լեոնտևի Այնուհետև դիտարկվում է էքսպոնենտների ոչ լրիվ համակարգը տարածության մեջ և ուղիղնալ ֆունկցիաների համակարգը, որը լրիվ չէ Հարդիի տարածությունում կիսահարթության վրա, և ըստ այդ համակարգերի Մ. Մ. Զրբաշյանի [3—6] երկօրթոգոնալ վերլուծությունների համար կառուցվում են գումարման մեթոդներ, որոնք նման են Լեոնտևի գումարման մեթոդին:

V. Kch. MUSOIAN. The summation of decompositions with respect to non-complete biorthogonal systems of exponents and rational functions (summary)

Investigating the non-complete system of exponents in the complex domain A. F. Leontiev has constructed a method of biorthogonal decomposition (see [1], 111 p.)

In the present paper in the first place the notion of a generated biorthogonal system in a Hilbert space is introduced. Then non-complete systems of exponents are considered in $L^2(0, \infty)$ and a summation method is constructed for decompositions of M. M. Djrbashian ([3], [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Леонтьев. Последовательности полиномов из экспонент, М., «Наука», 1980. сер. матем., XVIII, № 4, 1983, 253—270.
2. В. Х. Мусоян. Экстремальные свойства полиномов Дирихле, Изв. АН Арм.ССР,
3. М. М. Джрбашян. О пополнения и замыкания неполной системы функций $\{e^{-x^2} x^{2k-1}\}_1^\infty$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
4. М. М. Джрбашян. Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств исполных систем аналитических функций, мат. сборник, 114 (156), № 1, 1981, 3—84.
5. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшие приближения ядра Коши на вещественной оси, Мат. Сборник, 95 (137), 1974, 418—444.
6. М. М. Джрбашян. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости, Изв. АН СССР, серия матем., 42, 1978, 1323—1384.
7. М. М. Джрбашян. Представление и замкнутость некоторых ортогональных систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем. 14, № 6, 1979, 446—493.
8. К. Говман. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.

УДК 517.53

С. А. БЕРБЕРЯН

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ U_α

Хорошо известны введенные академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном классы мероморфных в единичном круге функций обобщенно-ограниченного вида N_α ($-1 < \alpha < +\infty$). Эти классы монотонно расширяются с возрастанием параметра α , причем N_0 совпадает с классом N функций ограниченного вида Р. Неванлинны. В совместных работах ([3], [4]) М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна было установлено, что классы N_α ($-1 < \alpha < 0$) — подклассы класса Неванлинны N — обладают более тонкими по сравнению с функциями класса N граничными свойствами. Оказалось, что угловые граничные значения функций этих классов существуют всюду на границе круга, кроме, быть может, множества нулевой $1 + \alpha$ -емкости. М. М. Джрбашяном [2] в свое время были введены также классы субгармонических в единичном круге функций U_α ($-1 < \alpha < +\infty$), по своей природе и по существу аналогичные классам N_α . Были найдены параметрические представления этих классов.

В свете вышеизложенного представляется естественной и актуальной задача, решению которой посвящена статья — исследовать граничные свойства субгармонических функций классов U_α при $-1 < \alpha < 0$.

При решении указанной задачи автор существенно опирается на результаты В. С. Захаряна ([5], [6]) о граничных свойствах потенциалов типа Грина, участвующих в представлениях функций классов U_α .

В основной теореме статьи (теорема 2) доказано, что угловые граничные значения нормальных субгармонических функций из классов U_α ($-1 < \alpha < 0$) существуют всюду на границе круга, кроме, быть может, множества нулевой $1 + \alpha$ -емкости.

Предварительно приведем некоторые определения и результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

1°. Как известно, оператор Римана—Лиувилля $D^{-\alpha} \varphi(x)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) определяется следующим образом:
в случае $0 < \alpha < +\infty$

$$D^{-\alpha} \varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad x \in (0, 1),$$

причем для $\varphi(x) \in L(0, 1)$ правая часть существует почти всюду и вновь принадлежит $L(0, 1)$; в случае $-1 < \alpha < 0$

$$D^{-\alpha} \varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D^{-(1+\alpha)} \varphi(x), \quad x \in (0, 1),$$

в предположении, что правая часть существует почти всюду, в случае $\alpha=0$ полагают, что

$$D^0 \varphi(x) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1).$$

Обозначим $D_+^{-\alpha} \varphi(x) = \max |D^{-\alpha} \varphi(x)|$.

Следуя М. М. Джрбашяну ([2], стр. 126), обозначим через U_α ($-1 < \alpha < +\infty$) класс субгармонических в круге $|z| < 1$ функций $U(z)$, для которых конечна величина

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} U_\alpha^{(+)}(re^{i\theta}) d\theta \right\} < +\infty,$$

где $U_\alpha^{+}(re^{i\theta}) = r_+^{-\alpha} D^{-\alpha} u(re^{i\theta})$. При любом α ($-1 < \alpha < +\infty$) рассмотрим функции

$$V_\alpha(\rho e^{i\theta}; \zeta) = \rho^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \right|,$$

$$W_\alpha(z; \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) \cdot V_\alpha(e^{i\theta}; \zeta) d\theta.$$

Для классов U_α М. М. Джрбашяном установлено параметрическое представление.

Теорема А. Класс U_α совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$u(z) = \iint_{|\zeta| < 1} \log |A_\alpha(z; \zeta)| d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \operatorname{Re} S_\alpha(re^{i(\tau-\theta)}) \} d\tau(\theta), \quad (1)$$

где $S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}$, $A_\alpha(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) e^{-w_\alpha(z; \zeta)}$, $\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция с конечным изменением на $[-\pi, \pi]$, а $\mu(\zeta)$ — произвольное положительное распределение масс в круге $|\zeta| < 1$, подчиненных лишь условию

$$\int_0^1 (1-t)^\alpha n(t; \mu) dt < +\infty,$$

где $n(t; \mu)$ — масса функции $u(z)$, заключенная в круге $0 < |z| \leq t < 1$, т. е.

$$n(t; \mu) = \iint_{0 < |\zeta| < t} d\mu(\zeta).$$

2°. Нам необходимо будет понятие емкости. Говорят, что измеримое по Борелю множество E имеет положительную α -емкость, $0 < \alpha < 1$, если существует такая мера μ на E , $\mu(E) = 1$, для которой интеграл

$$V(z) = \int_E \frac{1}{|z - \zeta|^\alpha} d\mu(\zeta)$$

удовлетворяет условию

$$\sup_{|z| < 1} V(z) \leq V_0 < \infty.$$

В случае отсутствия такой меры считают α -емкость множества E равной нулю. Аналогично определяется положительность и равенство нулю логарифмической емкости, если вместо ядра $\frac{1}{|z - \zeta|^\alpha}$ рассматривать ядро

$\ln \left| \frac{1}{z - \zeta} \right|$. Обозначим α -емкость и логарифмическую емкость множества E , соответственно, через $\text{cap}_\alpha E$ и $\text{cap}_0 E$.

Введем следующее обозначение:

$$h(\theta, \varphi) = \{\tau = e^{i\theta} (1 - re^{i\varphi}) : -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, r > 0\}.$$

Подобласть круга D , заключенную между хордами $h(\theta, \varphi_1)$, $h(\theta, \varphi_2)$ и внутри окружности C_1 : $\left| z - \frac{1}{2} e^{i\theta} \right| = \frac{1}{2}$ обозначим через $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

Эту подобласть круга называют углом Штольца с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$. Если существует $\lim u(z)$ при $z \rightarrow \zeta = e^{i\theta}$, $z \in \Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ и предел не зависит от выбора угла $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$, то обозначим угловой предел через $u(\theta)$.

Для дальнейшего нам необходимо будет следующее утверждение, вытекающее при $\omega(x) = (1 - x)^a$, $-1 < a < 0$ из общего утверждения, принадлежащего М. М. Джрбашяну и В. С. Захаряну (см. [4]).

Теорема Б. Функция

$$F_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\text{Re } S_\alpha(ze^{-i\theta})] d\psi(\theta),$$

где $-1 < \alpha < 0$, а $\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция с конечным изменением на $[-\pi, \pi]$, всюду на $[-\pi, \pi]$ обладает конечными угловыми граничными значениями

$$F_\alpha(e^{i\theta}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} F_\alpha(z)$$

кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [-\pi, \pi]$, для которого $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$.

3°. Интерпретируя единичный круг D , как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1, z_2)$ неевклидово расстояние между точками z_1 и z_2 из круга D :

$$\sigma(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \text{ где } u = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

Через T обозначим группу конформных автоморфизмов единичного круга, т. е. $T: \{S(z) = e^{i\alpha} (z + a) \cdot (1 + \bar{a}z)^{-1}, \alpha \in D \text{ и } a \in (-\infty, +\infty)\}$. Говорят (см., например, [13]), что субгармоническая в D функция $u(z)$ нормальна, если порожаемое ею семейство $\Phi: \{u(S(z)); S(z) \in T\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т. е. из любой последовательности семейства Φ можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся или равномерно расходящуюся к $+\infty$ или $-\infty$ на любом компакте в D .

§ 1. О поведении вдоль хорд субгармонических функций классов $U_\alpha (-1 < \alpha < 0)$

В первом параграфе основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть субгармоническая в D функция $u(z)$ принадлежит классу $U_\alpha (-1 < \alpha < 0)$. Тогда на $\Gamma: |z|=1$ можно указать такое множество E , $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$, что в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$, существуют конечные и равные между собой пределы $u(\theta, \varphi)$, где

$$u(\theta, \varphi) = \lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta} \\ z \in h(\theta, \varphi)}} u(z) = \lim_{r \rightarrow +0} u(e^{i\theta} (1 - re^{i\varphi})).$$

Вычислительную часть доказательства этой теоремы мы выделим в виде леммы.

Лемма 1. Пусть $\mu(\zeta)$ — положительное распределение масс в круге $|z| < 1$, подчиненное условию

$$\int_0^1 n(t; \mu) \cdot \frac{(1-t)^\alpha}{t} dt < +\infty, \quad (1.1)$$

где $-1 < \alpha < 0$. Тогда на Γ можно указать такое множество E , $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$, что в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$, у потенциала типа Грина

$$Q_\alpha(z) = \iint_D G_\alpha(z; \zeta) d\mu(\zeta), \quad (1.2)$$

где $G_\alpha(z, \zeta) = -\log |A_\alpha(z; \zeta)|$ при $|z| < 1$ и $|\zeta| < 1$, существуют конечные и равные между собой пределы $Q_\alpha(\theta, \varphi)$.

Доказательство. Покажем, что из условия (1.1) следует конечность следующего интеграла:

$$\iint_{|\zeta| < 1} (1 - |\zeta|)^{1+\alpha} d\mu(\zeta) < +\infty. \quad (1.3)$$

При любом r , $0 < r < 1$ имеем

$$\iint_{|\zeta| < r} (1 - |\zeta|)^{1+\alpha} d\mu(\zeta) = \int_0^r (1-t)^{1+\alpha} dn(t; \mu) = n(t; \mu) \cdot (1-t)^{1+\alpha} \Big|_0^r + (1+\alpha) \int_0^r (1-t)^{\alpha} \cdot n(t; \mu) dt. \quad (1.4)$$

Из условия (1.1) непосредственно вытекает, что

$$\int_0^1 (1-t)^{\alpha} n(t; \mu) dt = o(1),$$

(т. е. бесконечно малая величина при $r \rightarrow 1$) и значит $n(r; \mu) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1+\alpha}}\right)$. Поэтому и правая часть равенства (1.4) ограничена при $r \rightarrow 1$ и, тем самым, доказана конечность интеграла (1.3). Мы утверждаем, что из соотношения (1.3) для всех $\zeta = e^{i\theta}$, кроме, быть может, некоторого множества E_1 , $\text{cap}_{1+\alpha} E_1 = 0$, следует конечность интеграла

$$\Lambda(\theta) = \iint_{|\zeta| < 1} \left[\frac{1 - |\zeta|}{|e^{i\theta} - \zeta|} \right]^{1+\alpha} d\mu(\zeta) < +\infty.$$

Предполагая противное, будем иметь, что $\Lambda(\theta)$ бесконечна на множестве E , положительной $1+\alpha$ -емкости. Тогда на E существует распределение $\mu_1(\theta)$ единичной массы такое, что интеграл $V(r, x) = \int \frac{d\mu_1(\theta)}{|e^{i\theta} - re^{ix}|^{1+\alpha}}$ равномерно ограничен по x , $-\pi \leq x \leq \pi$, при $r \rightarrow 1$. Из сделанного предположения $\text{cap}_{1+\alpha} E_1 > 0$ следует, что

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\theta) d\mu_1(\theta) = \int_{E_1} \Lambda(\theta) d\mu_1(\theta) = +\infty.$$

С другой стороны, в силу того же предположения, применяя теорему Фубини, получим

$$S = \int_{E_1} \left\{ \iint_{|a| < 1} \left| \frac{1 - |a|}{|e^{i\theta} - a|} \right|^{1+\alpha} d\mu(a) \right\} d\mu_1(\theta) = \iint_{|a| < 1} (1 - |a|)^{1+\alpha} \left\{ \int_{E_1} \frac{d\mu_1(\theta)}{|e^{i\theta} - a|^{1+\alpha}} \right\} \times \\ \times d\mu(a) \leq C \iint_{|a| < 1} (1 - |a|)^{1+\alpha} d\mu(a) < \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что $\text{cap}_{1+\alpha} E_1 = 0$. Рассмотрим произвольную точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E_1$ и последовательность дуг $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ окружностей в D с центром в точке $\zeta = e^{i\theta}$, стягивающихся к ζ . Не нарушая общности можно предположить, что $\zeta = 1$. В силу теоремы 3 работы [5] при любом фиксированном n для всех точек a на L_n , кроме, быть может, некоторого множества l_n на L_n , для которого

$\text{cap}_0 I_\alpha = 0$, потенциал типа Грина [см. (1.2)] имеет конечное изменение на сегментах, соединяющих точки $a \in L_n$ с точкой ζ . Поэтому для всех $a \in L_n \setminus I_\alpha$ на сегментах, соединяющих точки a с $\zeta = 1$, существуют конечные хордальные пределы потенциала типа Грина. Так как при любом фиксированном n множество I_n имеет линейную меру нуль, то и соответствующее ей множество E'_n значений φ имеет меру нуль,

т. е. $\text{mes } E'_n = 0$. Отсюда следует, что и множество $E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n$ имеет меру нуль. Таким образом, в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E_1$, $\text{cap}_{1+\alpha} E_1 = 0$, для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ существуют конечные хор-

дальные пределы у потенциала типа Грина. Применяя теорему 2 работы [6] о радиальных пределах потенциала типа Грина $Q_\alpha(z)$ ($-1 < \alpha < 0$), получим, что в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E_1$, $\text{cap}_{1+\alpha} E_1 = 0$, для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$, существу-

ют конечные хордальные пределы у потенциала типа Грина. Теперь рассмотрим функцию $F_\alpha(z) = Q_\alpha(z) + iL(z)$, где $L(z)$ — некоторая действительнозначная функция, имеющая всюду на Γ , за исключением множества E_2 , $\text{cap}_{1+\alpha} E_2 = 0$, конечные угловые пределы. Такие функции заведомо существуют. В качестве примера можно рассмотреть $|B(z)|$, где $B(z)$ — произведение Бляшке, нули которой $\{z_k\}$ удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < \infty$, где $-1 < \alpha < 0$. Очевидно, что

$F_\alpha(z)$ имеет конечные хордальные пределы $F_\alpha(\theta, \varphi)$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$, всюду на Γ , за исключением множества $E_3 = E_1 \cup E_2$, $\text{cap}_{1+\alpha} E_3 = 0$. Рассмотрим точку $\zeta = e^{i\theta} \in (\Gamma \setminus E_3)$, в которой $F_\alpha(\theta, \varphi_1) \neq F_\alpha(\theta, \varphi_2)$ хотя бы для двух значений $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Такая точка $\zeta = e^{i\theta}$ является точкой не-

определенности для $F_\alpha(z)$ (см. [10]). В силу теоремы Багемила множество точек неопределенности M для произвольной комплекснозначной функции F_α не более чем счетно, и поэтому $\text{cap}_{1+\alpha} M = 0$.

Рассматривая $E = E_3 \cup M$, получим, что в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$, у функции $F_\alpha(z)$, а следовательно и $Q_\alpha(z) = \text{Re } F_\alpha(z)$, существуют конечные и равные между собой пределы. Утверждение леммы 1 доказано. Теперь утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из параметрического представления (1) субгармонических функций классов U_α , теоремы Б и утверждения леммы 1.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что при $\alpha = 0$ граничное поведение субгармонических функций класса U_0 вдоль хорд исследовано американским математиком Толстедом (см. [14]), который охарактеризовал исключительное множество E в терминах меры и показал, что $\text{mes } E = 0$.

§ 2. Об угловых граничных значениях нормальных субгармонических функций классов U_α ($-1 < \alpha < 0$)

Основным результатом второго параграфа является следующая

Теорема 2. Пусть нормальная субгармоническая в D функция $u(z)$ принадлежит классу U_α ($-1 < \alpha < 0$). Тогда на Γ можно указать такое множество E , $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$, что в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ существует конечный угловой предел $u(\theta)$.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 2. Пусть $u(z)$ — нормальная субгармоническая в D функция, и для некоторой последовательности $\{z_n\}_1^\infty \subset D$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) = C \quad (-\infty \leq C \leq +\infty).$$

Тогда для любой последовательности $\{z'_n\} \subset D$ такой, что $\sigma(z_n, z'_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(z'_n) = C.$$

Доказательство. Пусть

$$g_n(t) = u\left(\frac{t + z_n}{1 + \bar{z}_n t}\right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что $g_n(t)$ — субгармонические функции в $|t| < 1$ и

$$g_n(0) = u(z_n). \quad (2.1)$$

Рассмотрим при любом фиксированном n дробно-линейное преобразование

$$z = \frac{t + z_n}{1 + \bar{z}_n t},$$

переводящее точки $t = 0$ и $t = t_n$, соответственно, в точки $z = z_n$ и $z = z'_n$. По условию леммы $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z'_n) = 0$, и так как $\sigma(0, t_n) = \sigma(z_n, z'_n)$,

то и $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$. В силу компактности семейства $\{g_n(t)\}$ существует

подпоследовательность $\{g_{n_k}(t)\}$, равномерно сходящаяся к субгармонической функции $G(t)$, или равномерно расходящаяся к $+\infty$ или $-\infty$ на любом компакте $K \subset D$, содержащем точку $t = 0$. Если $C = +\infty$ (или $-\infty$), то очевидно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(t_{n_k}) = +\infty$ (или $-\infty$).

Пусть C — конечное число. Тогда на любом компакте K , содержащем точку $t = 0$, в силу соотношения (2.1) имеет место равномерная сходимость последовательности $\{g_{n_k}(t)\}$ к субгармонической функции $G(t) \neq \infty$. При любом $\varepsilon > 0$ из соотношений

$$|g_{n_k}(t_{n_k}) - G(t_{n_k})| < \varepsilon \quad \text{и} \quad G(t_{n_k}) - G(0) < \varepsilon,$$

справедливых при $k > N(\varepsilon)$, получим, что последовательности $\{g_{n_k}(t_{n_k})\}_1^\infty$ и $\{G(t_{n_k})\}_1^\infty$, либо их некоторые подпоследовательности, ко-

торым для простоты дадим то же самое обозначение, будут иметь пределы, причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(z'_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(t_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} G(t_{n_k}) = \alpha \leq C, \quad (2.2)$$

где $C = G(0)$. Покажем, что $\alpha = C$.

Рассмотрим при любом $k = 1, 2, \dots$ отображения $S'_k(z)$, где

$$S'_k(z) = \frac{z + z'_{n_k}}{1 + z'_{n_k} z}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для этих отображений при любом k имеют место равенства

$$S'_k(0) = z'_{n_k} \text{ и } S'_k(q_k) = z_{n_k},$$

откуда, в силу инвариантности метрики σ , следует справедливость соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 0 \quad (q_k \in D). \quad (2.3)$$

Отсюда $\lim_{k \rightarrow \infty} u(z'_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(S'_k(0)) = \alpha$, и, следовательно, последовательность $\{u(S'_k(z))\}$, или некоторая ее подпоследовательность, которой дадим то же самое обозначение $\{u(S'_k(z))\}$, равномерно сходится на компакте $K_1 \subset D$, содержащем точку $z=0$, к субгармонической функции $U(z)$, причем $U(0) = \alpha$. С другой стороны, учитывая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(z'_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(S'_k(q_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} U(q_k) = C$$

и соотношение (2.3), будем иметь, что

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} U(q_k) \leq U(0) = \alpha.$$

Сравнивая с (2.2) последнюю оценку, заключаем, что $\alpha = C$. Отсюда из (2.2) следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(t_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(z'_{n_k})$ и значит

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(z'_{n_k}) = C. \quad (2.4)$$

В силу того, что произвольно взятая последовательность содержит подпоследовательность $\{u(z'_{n_k})\}$, для которой справедливо соотношение (2.4), то и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(z'_n) = C.$$

Лемма 2 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что, как следует из доказательства леммы 2, утверждение леммы остается справедливым для нормальных полунепрерывных сверху функций.

Для доказательства теоремы 2 нам необходима также следующая

Лемма 3. Пусть нормальная субгармоническая в $D: \{|z| < 1\}$ функция $u(z)$ имеет в некоторой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ конечные и равные между собой пределы $u(\theta, \varphi)$.

Тогда в точке $\zeta = e^{i\theta}$ функция $u(z)$ имеет конечный угловой предел $u(\theta)$.

Доказательство. Покажем, что в точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ при условии леммы существуют конечные равные между собой пределы по всем хордам. Для этого рассмотрим произвольную хорду $h(\theta, \varphi)$ и произвольную последовательность $\{z_n\}$ на ней. Возьмем такую последовательность углов Штольца $\{V_m\}_{m=1}^\infty$, $V_1 \supset V_2 \supset \dots$,

$\bigcap_{m=1}^\infty V_m = h(\theta, \varphi)$, чтобы сторонами углов V_m были хорды, по ко-

торым предел $u(\theta, \varphi)$ существует. Проведем через точки z_n дуги $E_n \subset D$ ($n = 1, 2, \dots$) окружностей с центром в точке $\zeta = e^{i\theta}$ и сжимающихся к точке ζ . Эти дуги будут пересекать стороны углов V_m в точках $\{p_n^m\}_{n=1}^\infty$. Составим теперь последовательность $p_1^1, p_2^1, \dots, p_n^1, \dots$, $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2, \dots$; $p_1^n, p_2^n, \dots, p_n^n, \dots$; $\dots$. Из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{p_{n_m}^m\}_{m=1}^\infty$ такую, что $u(p_{n_m}^m) \rightarrow u(\theta, \varphi)$ при $\sigma(p_{n_m}^m, z_{n_m}) \rightarrow 0$. Согласно лемме 2, $\lim_{m \rightarrow \infty} u(z_{n_m}) =$

$= u(\theta, \varphi)$. Отсюда, ввиду произвольности хорды $h(\theta, \varphi)$ $\left(-\frac{\pi}{2} <$

$< \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ и последовательности $\{z_n\}_1^\infty \subset h(\theta, \varphi)$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta$) следует,

что существуют и равны $u(\theta, \varphi)$ все хордальные пределы функции $u(z)$ в точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$. Рассмотрим теперь произвольную последовательность точек $\{a_n\} \equiv \{e^{i\theta} (1 - r_n e^{i\varphi_n})\}$ ($r_n \rightarrow +0$ при $n \rightarrow \infty$), лежащую в некотором угле Штольца с вершиной в точке ζ . Докажем существование предела $u(\theta, \varphi)$ по этой последовательности, и, тем самым, существование углового предела $u(\theta) = u(\theta, \varphi)$ у функции $u(z)$ в точке ζ . Для этого выберем хорду $h(\theta, \varphi)$ такую, что неевклидово расстояние от некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ до этой хорды стремится к нулю (т. е. $|\varphi - \varphi_{n_k}| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$), и, следовательно, в силу леммы 2, $u(a_{n_k}) \rightarrow u(\theta, \varphi) = u(\theta)$. Поэтому и $u(a_n) \rightarrow u(\theta)$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Как показывает доказательство леммы 3, утверждение леммы остается справедливым при значительно более общих предположениях. Для справедливости утверждения леммы достаточно, чтобы множество значений φ , для которых существуют конечные и равные между собой пределы $u(\theta, \varphi)$, было бы всюду плотно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Следовательно, множество значений φ , для которых существуют конечные и равные между собой пределы $u(\theta, \varphi)$, может иметь также линейную меру нуль.

Теперь доказательство теоремы 2 очевидно ввиду утверждений теоремы 1 и леммы 3.

Замечание 4. Отметим, что при $\alpha = 0$ угловые граничные значения нормальных субгармонических функций исследованы в работах американского математика Мика (см. [12] и [13]), который охарактеризовал исключительное множество E в терминах меры и показал, что $\text{mes } E = 0$.

Приведем одно применение леммы 2. Для этого обозначим через $C_h(\theta, \varphi)(u, \zeta)$ и $C_V(u, \zeta)$ предельные множества функции $u(z)$, соответственно, по хорде $h(\theta, \varphi)$ и по углу Штольца V с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$. Через $E_{VV}(u)$ обозначим (см. [10], стр. 248) множество всех точек $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, для каждой из которых имеется пара углов Штольца V_1, V_2 таких, что $C_{V_1}(u, \zeta) = C_{V_2}(u, \zeta)$. Дополнение к множеству $E_{VV}(u)$ на Γ обозначим через $\Phi E_{VV}(u)$.

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $u(z)$ — нормальная субгармоническая функция, определенная в D . Если $\zeta = e^{i\theta} \in \Phi E_{VV}(u)$, то для любого значения $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и любого угла Штольца V с вершиной в точке ζ справедливо соотношение

$$C_h(\theta, \varphi)(u, \zeta) = C_V(u, \zeta). \quad (2.5)$$

Аналогичное утверждение для нормальных мероморфных функций доказано Рангом (см. [16]). Доказательство теоремы 3, с учетом леммы 2, полностью проводится по той же схеме и поэтому его не приводим.

Армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 29. IV. 1984

Ս. Լ. ԲԵՐԲԵՐԻԱՆ. U_α դասերի սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների եզրային վարքի մասին (սովորական)

Հաղվածով ուսումնասիրվում են պրոֆեսոր Ս. Ս. Զրբաշյանի կողմից ներմուծված U_α դասերի $u(z)$ սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների եզրային հատկությունները: Ցույց է տրված, ամենուրեք միավոր շրջանագծի վրա, բացի E բազմությունից, $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$, գոյություն ունեն համարյա բոլոր $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ արժեքների համար վերջավոր և իրար հավասար սահմաններ $\alpha(\theta, \varphi)$: Եթե $\alpha(z)$ -ը U_α դասի նորմալ սուբհարմոնիկ ֆունկցիա է, ապա ամենուրեք $\Gamma: |z|=1$ վրա, բացի E բազմությունից, $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$, գոյություն ունեն վերջավոր անկյունային եզրային արժեքներ:

S. L. BERBERIAN. On the boundary behaviour of subharmonic functions of U_α class (summary)

The boundary properties of $u(z)$ subharmonic functions from U_α classes introduced by professor M. M. Džrbashian is studied. It is shown that everywhere on the unit circumference finite and equal limits of $u(\theta, \varphi)$ exist for almost all $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ except a set E , $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$. If $\alpha(z)$ is a normal subharmonic function of U_α class, then everywhere on $\Gamma: |z|=1$ except E set, $\text{cap}_{1+\alpha} E = 0$, finite angular boundary values exist.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
2. М. М. Джрбашян. Классы функций и их параметрическое представление. Современные проблемы теории аналитических функций, Международная конференция по теории аналитических функций, Ереван, 1965, Изд. «Наука», М., 1966, 118—137.

3. М. М. Джрбашян и В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, 1970, 1262—1339.
4. М. М. Джрбашян и В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», VI, №№ 2—3, 1971, 182—194.
5. В. С. Захарян. Сегментные изменения потенциала типа Грина, ДАН Арм.ССР, 66, № 4, 1978, 212—215.
6. В. С. Захарян, А. Г. Унанян. Изменение на отрезке потенциала типа Грина, ДАН Арм.ССР, 73, № 1, 1981, 3—8.
7. Е. Д. Соломенцев. Гармонические и субгармонические функции и их обобщения, В сб. Мат. анализ. Теория вероятностей. Регулирование, 1962, (Итоги науки, ВИНТИ АН СССР), М., 1964, 83—100.
8. С. Л. Берберян. О граничных свойствах субгармонических функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах автоморфизмов единичного круга, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 15, № 4, 1980, 395—402.
9. С. Л. Берберян. Об исключительных множествах субгармонических функций, ДАН Арм.ССР, 68, № 2, 1979, 79—87.
10. Э. Коллингвуд и А. Ловатер. Теория предельных множеств, М., 1971.
11. А. Ловатер. Граничное поведение аналитических функций. В сб. Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, 99—260.
12. J. Meek. Subharmonic versions of Fatous theorem, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 30, № 2, 1971, 313—317.
13. J. Meek. Of Fatous points of normal subharmonic functions, Mathematica Japonica, vol. 22, № 3, 1977, 309—314.
14. E. Tolsted. Non-tangential limits of subharmonic functions, Proc. London Math. Soc., 7, № 27, 1957, 321—333.
15. F. Bagemihl, W. Seldel. Sequential and continuous limits of meromorphic functions, Annal. Acad. Scien; Fennicae, Ser. A, № 260, 1960, 1—17.
16. D. Rung. Boundary behaviour of normal functions defined in the unit disk, Mich. Math. J., 10, № 1, 1963, 43—51.

УДК 51.01:517

С. Н. МАНУКЯН

О СВОЙСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ КОНСТРУКТИВНЫХ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этой статье рассматриваются свойства единственности для некоторых типов аналитических функций в конструктивном анализе (1). В работах (2), (3) установлено свойство единственности для достаточно широкого класса конструктивных аналитических функций, однако вопрос о наличии этого свойства у всевозможных конструктивных аналитических функций в смысле определений из (2), (3) остается открытым. Ниже будет показано, что для несколько иного конструктивного аналога понятия аналитической функции—а именно, для конструктивных почти аналитических функций—свойство единственности, вообще говоря, не имеет места.

Формулировка основной теоремы этой статьи была опубликована в (4).

Определение 1. Будем говорить, что функция f , определенная на $\alpha\Delta\beta$, является аналитической (соответственно, почти аналитической) на $\alpha\Delta\beta$, если для всякого FR -числа $x \in \alpha\Delta\beta$ осуществима конструктивная последовательность A FR -чисел и осуществимо (соответственно, квази-осуществимо) положительное FR -число ρ , такие что

$$\forall x_1 (x_1 \in \alpha\Delta\beta \& |x - x_1| < \rho \supset \sum_{k=0}^{\infty} A(k)(x - x_1)^k = f(x_1)).$$

Теорема. Существует конструктивная почти аналитическая функция H , такая, что H определена на сегменте $0\Delta 1$, в точке 0 принимает значение, отличное от нуля, и в некоторой окрестности точки 1 принимает значение нуля.

Для доказательства теоремы нам потребуются некоторые вспомогательные понятия и утверждения.

Определение 2. Назовем первичной замкнутой (соответственно, открытой) областью с исходной точкой $a\sigma b$ и с шириной полосы $2d$, где $0 < d \leq b$, множество точек $x\sigma y$ таких, что

$$x \geq a \& |y| \leq \max(a + b - x, d)$$

(соответственно, $x > a \& |y| < \max(a + b - x, d)$).

Определение 3. Первичную замкнутую область с исходной точкой $a\sigma b$, с шириной полосы $2d$, где $0 < d \leq b$ назовем вторичной, если $d \leq \frac{b}{2}$.

Определение 4. Контуром вторичной области D с исходной точкой $a\sigma b$, с шириной полосы $2d$, назовем конструктивное множество точек $x\sigma y$ таких, что

$$\neg ((x = a \& |y| \leq b) \vee (x > a \& |y| = \max(a + b - x, d))).$$

Определение 5. Стандартным краевым условием для вторичной области D с исходной точкой $ao\bar{b}$, с шириной полосы $2d$, назовем функцию $W(x, y)$, определенную на контуре D и такую, что

$$W(a, y) = b \text{ при } |y| \leq b, x = a,$$

$$W(x, y) = \max(a + b - x, d) \text{ при } x > a,$$

$$y = \max(a + b - x, d) \text{ или } y = -\max(a + b - x, d).$$

Определение 6. Стандартной гармонической функцией во вторичной области D с исходной точкой $ao\bar{b}$, с шириной полосы $2d$ назовем конструктивную функцию W , являющуюся решением задачи Дирихле для области D при стандартных краевых условиях.

З а м е ч а н и е. В соответствии с основной теоремой статьи (6) мы можем утверждать, что для всякой вторичной области D существует стандартная гармоническая функция в D ; хотя вторичные (как и любые первичные) области не относятся к классу областей, рассматриваемых в (6), однако указанное утверждение легко устанавливается, например, посредством инверсии заданной вторичной области D относительно любой окружности, не пересекающейся с D , с последующим применением основной теоремы из (6).

Определение 7. Подъемом вторичной области D с исходной точкой $ao\bar{b}$ и с шириной полосы $2d$, назовем конструктивную точную верхнюю грань значений стандартной гармонической функции в D на линейном образе отрезка

$$(a + b - d) \circ d \Delta (a + b - d) \circ (-d).$$

Очевидно, что подъем указанной вторичной области D меньше b , но не меньше d .

Л е м м а 1. Пусть имеем вторичную замкнутую область D с исходной точкой $0\sigma 1$, с шириной полосы $2d$, где $d \leq \frac{1}{2}$. Пусть W является стандартной гармонической функцией в области D . Пусть W_1 является стандартной гармонической функцией во вторичной замкнутой области D_1 с исходной точкой $0\sigma 1$ и с шириной полосы $2d_1$, где $d_1 < d$. Тогда $W_1(x, y) < W(x, y)$ при всех $x\sigma y \in D_1$.

Доказательство. Обозначим границу области D через Γ , а границу области D_1 через Γ_1 .

По определению $W(x, y) > d$ при всех $x\sigma y \in \Gamma$, следовательно, согласно конструктивному аналогу принципа максимума, сформулированному в (6), получим: $W(x, y) > d$ при всех $x\sigma y \in D$, значит $W(x, y) \geq d$ при всех $x\sigma y \in \Gamma_1$, но по определению краевых условий для W_1 имеем $W_1(x, y) \leq d$ при всех $x\sigma y$ таких, что $x\sigma y \in \Gamma_1 \& x > 1 - d$. С другой стороны, $W(x, y) = W_1(x, y)$ при всех $x\sigma y$, таких, что $x\sigma y \in \Gamma_1 \& x \leq 1 - d$. Следовательно, $W_1(x, y) \leq W(x, y)$ при всех $x\sigma y \in \Gamma_1$, а тогда $W_1(x, y) \leq W(x, y)$ при всех $x\sigma y \in D_1$.

Л е м м а 2. Пусть имеем вторичную замкнутую область D_0 с исходной точкой $0\sigma 1$ и с шириной полосы $2d$, где $d = 1/2$. Через α_2 обозначим

подъем области D_0 . Пусть D_1 — вторичная замкнутая область с исходной точкой $0 \sigma 1$ и с шириной полосы $2d_1$, где $d_1 < \frac{1}{2}$. Обозначим подъем области D_1 через α_1 . Тогда $\alpha_1 \leq d_0$.

Доказательство. Согласно лемме 1, $W_1(x, y) \leq W_0(x, y)$ при всех $x, y \in \Gamma_1$, где $W_0(x, y)$ — стандартная гармоническая функция в области D_0 , $W_1(x, y)$ — стандартная гармоническая функция в области D_1 , Γ_1 — граница области D_1 . Следовательно имеем: $W_1(x, y) \leq W_0(x, y) \leq \alpha_0$ на линейном образе отрезка $\frac{1}{2} \sigma \frac{1}{2} \Delta \frac{1}{2} \sigma \left(-\frac{1}{2}\right)$.

Обозначим через D' первичную область с исходной точкой $\frac{1}{2} \sigma \frac{1}{2}$ и с шириной полосы $2d_1$. Ясно, что $W_0(x, y) \leq \alpha_0$ на контуре области D' , а тогда $W_0(x, y) \leq \alpha_0$ во всей области D' , следовательно, подъем α_1 области D_1 не превосходит α_0 .

Лемма 3. Подъем всякой вторичной области D_2 с шириной полосы $2d$ и с исходной точкой $a \sigma b$ не превосходит $\alpha_0 \cdot b$, где α_0 — подъем области D_0 , определенной в лемме 2.

Доказательство. Пусть W_2 есть стандартная гармоническая функция в области D_2 . Пусть D — вторичная область с исходной точкой $0 \sigma 1$ и с шириной полосы $\frac{d}{b} < \frac{1}{2}$ и W — стандартная гармоническая функция в D . Имея в виду то обстоятельство, что точка x, y лежит на контуре области D_2 в том и только в том случае, когда точка $\frac{x-a}{b} \sigma \frac{y}{b}$ лежит на контуре области D , согласно определению стандартных краевых условий, для вторичных областей D и D_2 получаем:

$$W_2(x, y) = b \cdot W\left(\frac{x-a}{b}, \frac{y}{b}\right) \quad (A)$$

для любой точки x, y , лежащей на контуре D_2 . Следовательно, это же соотношение выполняется для всякой точки $x, y \in D_2$. В самом деле, построим функцию, определенную в D_2 и для каждой точки $x, y \in D_2$ принимающую значение $b \cdot W\left(\frac{x-a}{b}, \frac{y}{b}\right)$; тогда непосредственным

вычислением устанавливаем, что эта функция — гармоническая и, согласно (A), она удовлетворяет стандартным краевым условиям для D_2 ; в силу единственности решения задачи Дирихле (см. (6)) она совпадает с W_2 .

Так как, согласно лемме 2, подъем области D не превосходит α_0 , следовательно, имея в виду (A), получим, что подъем области D_2 не превосходит $\alpha_0 \cdot b$.

Доказательство теоремы. Согласно теореме 2.3 из (5) построим алгоритм Φ , являющийся $1/2$ -ограниченным точным дизъюнктивным сегментным покрытием промежутка $0 \Delta 1$. Построим алгоритм В типа $(n \rightarrow n)$ такой, что

$$\forall n (\exists_n (\Phi_n) \neq 1 \supset \exists_n (\Phi_n) = \exists_n (\Phi_{B(n)})).$$

Построим такое число n_0 , что $0 \in \Phi_{n_0}$. Построим алгоритм G такой, что

$$G(0) = n_0,$$

$$G(n+1) = B(G(n)),$$

алгоритм A такой, что

$$A(0) = 0,$$

$$A(n) = \exists_n (\Phi_{G(n)}),$$

алгоритм D такой, что

$$D(0) = \frac{A(1)}{2},$$

$$D(k) = \min \left(\frac{D(k-1)}{2}, \frac{A(k+1) - A(k)}{2} \right) \text{ при } k > 0,$$

и, наконец, последовательность функций f_n таким образом, что при $0 \leq x \leq 1$

$$f_0(x) = \max(D(0) - x, D(1)),$$

$$f_n(x) = \min(f_{n-1}(x), \max(A(n) + D(n) - x, D(n+1)))$$

$$\text{при } n > 0.$$

Индукцией по n легко устанавливается, что всегда

$$f_n(A(n)) = D(n), \quad f_n(x) = D(n+1) \text{ при } x \geq A(n+1), \quad f_{n+1}(x) = f_n(x)$$

$$\text{при } x < A(n+1).$$

Далее, построим последовательность замкнутых областей T_n таких, что для любого n

$$(x \geq 0 \& |y| \leq f_n(x)) = (x \& y \in T_n).$$

Через T обозначим конструктивное множество точек такое, что $x \& y \in T$ в том и только в том случае, когда $\forall n (x \& y \in T_n)$. Построим функцию f , заданную на $0\Delta 1$ следующим образом:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

(Легко показать, что для всякого фиксированного $x \in 0\Delta 1$ последовательность FR -чисел $f_n(x)$ конструктивно сходится в себе). Через T^0 обозначим конструктивное множество точек $x \& y$ таких, что

$$x \in 0 \vee 1 \& |y| < f(x).$$

Очевидно, что всякая точка, принадлежащая T^0 , принадлежит множеству T , и что множество T^0 конструктивно открыто.

Согласно основной теореме из (6) (примененной тем же способом, который был указан выше в замечании к определению 6), для каждой области T_n существует гармоническая функция U_n , удовлетворяющая условиям

$$U_n(0, y) = \frac{A(1)}{2} \text{ при } |y| \leq \frac{A(1)}{2},$$

$$U_n(x, f_n(x)) = U_n(x, -f_n(x)) = f_n(x) \text{ при } x \geq 0.$$

Докажем, что последовательность U_n равномерно сходится в себе на T .

Для этого сначала определим некоторые дополнительные понятия.

Высотой функции U_n назовем конструктивную точную верхнюю границу значений $U_n(x, y)$ при $x = A(n) + D(n) - D(n+1)$, $|y| \leq f_n(x)$.

Докажем, что

$$\forall x \forall y (x, y \in T_{n+1} \supset U_{n+1}(x, y) \leq U_n(x, y)). \quad (B)$$

Для этого достаточно показать, что $U_{n+1}(x, y) \leq U_n(x, y)$ имеет место на контуре области T_{n+1} . Если x, y лежит на контуре области T_{n+1} и $x \leq A(n+1)$, то, как легко видеть, $U_{n+1}(x, y) = U_n(x, y)$. Если же x, y лежит на контуре области T_{n+1} и $x > A(n+1)$, то тогда $U_{n+1}(x, y) = f_{n+1}(x) < D(n+1)$. С другой стороны, на контуре области T_n имеет место неравенство

$$U_n(x, y) = f_n(x) > D(n+1),$$

а тогда это же неравенство имеет место для всех $x, y \in T_n$, в частности, для точек x, y , лежащих на контуре T_{n+1} и таких, что $x > A(n+1)$; поэтому для точек указанного типа также имеем $U_{n+1}(x, y) \leq U_n(x, y)$. Тем самым (B) доказано.

Теперь докажем, что высота функции U_n не превосходит $\alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2}$, где α_0 — подъем области D_0 , определенной в лемме 2.

Доказательство проведем при помощи индукции по n . Пусть $n=0$. Ясно, что T_0 есть вторичная область с исходной точкой $0 \pm \frac{A(1)}{2}$ и шириной полосы $D(1)$, а U_0 есть стандартная гармоническая функция в T_0 . Согласно лемме 3, высота U_0 не превосходит $\alpha_0 \cdot \frac{A(1)}{2}$. Теперь проведем индукционный шаг. Пусть, согласно индукционному предположению, высота U_n не превосходит $\alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2}$. Тогда $\alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2} \geq D(n+1)$ (в самом деле, $\alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2}$ не меньше конструктивной точной верхней грани значений функции U_n на отрезке

$$(A(n) + D(n) - D(n+1)) \pm D(n+1) \Delta (A(n) + D(n) - D(n+1)) \sigma (-D(n+1)),$$

а $D(n+1)$ есть значение U_n на концах этого отрезка). Рассмотрим замкнутую область E , такую, что $x, y \in E$ в том и только в том случае, когда $x > A(n) + D(n) - D(n+1)$ & $|y| \leq D(n+1)$. Для всякой точки $x, y \in E$ будет: $U_n(x, y) \leq \alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2}$. В самом деле, на линейном образе отрезка

$$(A(n) + D(n) - D(n+1)) \sigma D(n+1) \Delta (A(n) + D(n) - D(n+1)) \sigma (-D(n+1))$$

это неравенство выполнено в силу индукционного предположения, а на лучах

$$x \geq A(n) + D(n) - D(n+1) \text{ и } y = D(n+1)$$

и

$$x > A(n) + D(n) - D(n+1) \text{ и } y = -D(n+1)$$

это неравенство выполнено, в силу определения краевых условий для

U_n и соотношения $\alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2} \geq D(n+1)$; таким образом, рассматри-

ваемое неравенство справедливо на границах области Ξ , а тогда оно справедливо и всюду в этой области, в силу конструктивного аналога принципа максимума, сформулированного в (6).

Рассмотрим теперь вторичную область D с исходной точкой $A(n+1) \sigma D(n+1)$ и шириной полосы $D(n+2)$. Ясно, что область D содержится в Ξ и T_{n+1} , а потому для всякой точки $x \sigma y \in D$

$$U_{n+1}(x, y) \leq U_n(x, y) \leq \alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2}.$$

Пусть W есть стандартная гармоническая функция в D . Ясно, что краевые значения функций W и U_{n+1} совпадают при $x \geq A(n+1)$ и $|y| = f_{n+1}(x)$. На отрезке $A(n+1) \sigma D(n+1) \Delta A(n+1) \sigma (-D(n+1))$ имеем $W(x, y) = D(n+1)$, а потому на том же отрезке

$$U_{n+1}(x, y) \leq \alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2} \cdot \frac{W(x, y)}{D(n+1)}.$$

Следовательно, на всем контуре области D , а потому и во всей области D , имеем $U_{n+1}(x, y) \leq \alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1) \cdot W(x, y)}{2 \cdot D(n+1)}$. Поэтому высота функции

U_{n+1} не превосходит $\alpha_0 \cdot \frac{A(1) \cdot V}{2 \cdot D(n+1)}$, где V есть подъем области D .

Вместе с тем, в силу леммы 3

$$V \leq D(n+1) \cdot \alpha_0,$$

а потому высота функции U_{n+1} не превосходит $\alpha_0^{n+2} \cdot \frac{A(1)}{2}$. Тем са-

мым доказано, что высота любой функции U_n не превосходит $\frac{\alpha_0^{n+1} \cdot A(1)}{2}$.

Пусть ε — произвольное положительное рациональное число. Построим такое натуральное число N , что $\alpha_0^{N+1} \cdot \frac{A(1)}{2} < \varepsilon$.

Пусть натуральное число n таково, что $n > N$. Тогда высота функции U_n меньше ε . Рассмотрим замкнутую область Ξ такую, что $x \sigma y \in \Xi$ в том и только в том случае, когда

$$x > A(n) + D(n) - D(n+1) \text{ \& } |y| \leq D(n+1).$$

Тогда на контуре области Ξ будет:

$$0 < U_n(x, y) < \varepsilon,$$

и, тем самым, указанное неравенство выполняется также во всей области Ξ . Пусть теперь k — произвольное натуральное число. Рассмотрим область T_{n+k} и ее контур Γ . Если точка $x\sigma y$ лежит на Γ , и $x \leq A(n) + D(n) - D(n+1)$, то очевидно, что

$$U_n(x, y) = U_{n+k}(x, y).$$

Если же точка $x\sigma y$ лежит на Γ и $x \geq A(n) + D(n) - D(n+1)$, то очевидно, $x\sigma y \in \Xi$, а потому $0 < U_{n+k}(x, y) \leq U_n(x, y) < \varepsilon$. Таким образом, для всякой точки $x\sigma y$, лежащей на Γ , оказывается

$$0 < U_{n+k}(x, y) - U_n(x, y) < \varepsilon.$$

Это неравенство, будучи выполненным на контуре T_{n+k} , оказывается справедливым также и во всей области T_{n+k} , и оно заведомо справедливо для всякой точки $x\sigma y \in T$. Таким образом, мы показали, что для всякого положительного рационального ε осуществимо такое натуральное N , что

$$\forall n \forall k \forall x \forall y (n > N \text{ \& } x\sigma y \in T \supset |U_{n+k}(x, y) - U_n(x, y)| < \varepsilon),$$

а это и значит, что последовательность функций U_n равномерно сходится на T . Следовательно, осуществима конструктивная функция U , такая, что для всякой точки $x\sigma y \in T$

$$U_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U(x, y).$$

Так как последовательность U_n равномерно сходится на T , то она равномерно сходится и на T^0 , а тогда функция U является гармонической на T^0 . Так как каждая из функций U_n равномерно непрерывна на T и U_n равномерно сходится к U на T , то функция U равномерно непрерывна на T .

$$\text{Так как } 0 < U_n(x, y) \leq x_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2} \text{ при}$$

$$x > A(n) + D(n) - D(n+1) \text{ \& } |y| \leq D(n+1),$$

и тем более это неравенство выполнено при $x > A(n+1) \text{ \& } y = 0$, то $U(x, 0) = 0$ при всяком x , принадлежащем $0 \leq 1$ и таком, что $\forall n (x > A(n))$. Таким образом, заведомо $U(x, 0) = 0$ при $\exists n (\Phi_n) \leq x \leq 1$, где n_1 таково, что $1 \in \Phi_{n_1}$.

Построим функции V_1 и V_2 такие, что при всяком $x\sigma y \in T^0$

$$V_1(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x\sigma y}, \quad V_2(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{x\sigma y}.$$

Построим функцию V , определенную в T^0 и такую, что для любой точки $x\sigma y \in T^0$

$$V(x, y) = \int_0^x (-V_2(x, 0)) dx + \int_0^y V_1(x, y) dy.$$

(Нетрудно показать, что обе подынтегральные функции конструктивно интегрируемы по Риману). Легко видеть, что функция V является гармонической функцией, сопряженной для U . Легко проверить что $V(x, y) = -V(x, -y)$ для всякой точки $x, y \in T^0$. Следовательно, $V(x, 0) = 0$, если $\exists n (x < A(n))$.

Ясно, что $U + iV$ является конструктивной комплексной функцией, аналитической на T^0 .

Построим функцию H , определенную на $0\Delta 1$ и такую, что для всякого FR -числа $x \in 0\Delta 1$

$$H(x) = U(x, 0).$$

Из только что доказанного вытекает, что H является аналитической во всякой точке $x \in 0\Delta 1$ такой, что $\exists n (x < A(n))$. С другой стороны функция H является аналитической для всякого $x \in 0\Delta 1$, удовлетворяющего условию

$$\forall n (x \geq A(n)).$$

В самом деле, в этом случае $H(x_1) = 0$ для всякого $x_1 \in a\Delta b$, где

$$a = \min (\exists_n (\Phi_K(x)), \exists_n (\Phi_L(x))),$$

$$b = \max (\exists_n (\Phi_K(x)), \exists_n (\Phi_L(x))),$$

$$a < x < b,$$

где K, L — характеристические алгоритмы для покрытия Φ .

Таким образом, функция H является аналитической во всякой точке $x \in 0\Delta 1$ такой, что $\exists n (x < A(n)) \vee \forall n (x > A(n))$. Следовательно, она является почти аналитической. Согласно доказанному выше, H удовлетворяет всем требуемым условиям.

Теорема доказана.

Вычислительный центр

АН Армянской ССР и ЕГУ

Поступила 25.X.1984

Ս. Ն. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ. Կոնստրուկտիվ անալիտիկ ֆունկցիաների համար միակության հատկությունների մասին (ամփոփում)

Սկզբների վրա սահմանված կոնստրուկտիվ իրական իոփոխականի $\exists$ ֆունկցիան կաշվում է համարյա անալիտիկ, եթե այդ սեգմենտի կամայական կետի համար բազմաբարձրված է այդ կետի շրջակայքում $\exists$ ֆունկցիայի թելլերի շարքի գոյության և այդ շարքի զուգամիտության շառավղի կրկնակի բացառումով գոյության պայմանը: Ապացուցվում է, որ գոյություն ունի սեգմենտում համարյա անալիտիկ կոնստրուկտիվ ֆունկցիա, որը նույնաբար զերո է: Այսպիսով, միակության հատկությունը խախտվում է կոնստրուկտիվ համարյա անալիտիկ ֆունկցիաների համար:

S. N. MANUKIAN. On uniqueness properties for constructive analytic functions (summary)

A constructive real function f defined on a segment is said to be almost analytic on it, if for every constructive point of the segment the Taylor expansion

for f in a neighbourhood of this point, exists if the and existence of convergence radius for this expansion follows under double negation. It is proved that there exists a constructive function which is almost analytic on some segment, is not everywhere equal to zero on this segment, and yet is equal to zero everywhere on some of its subsegments. So the uniqueness theorem does not hold for almost analytic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Кушнер. Лекции по конструктивному математическому анализу, М., «Наука», 1973.
2. В. А. Лифшиц. Об исследовании конструктивных функций методом заполнения, Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 20, 1971, 67—79.
3. В. П. Орехов. Новое доказательство теоремы единственности для конструктивных дифференцируемых функций комплексной переменной, Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 40, 1974, 119—126.
4. С. Н. Манукян. О почти аналитических конструктивных функциях, Шестая Всесоюзная конференция по математической логике, Тбилиси, 1982, с. 105.
5. И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин. О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, Труды мат. института им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 458—502.
6. С. Н. Манукян. Задача Дирихле в конструктивном анализе, ДАН Арм.ССР, LXXIX, № 2, 1984, 58—62.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Գ. Կրեյն, Յ. Է. Մելիք-Ադամյան. Շուրի և Կարատեոդորի—Տեպլիցի խնդիրների մատրիցային կոնսիստանտ անալոգները	107
Ա. Մ. Զերբաշյան, Գ. Վ. Միքայելյան. Կիսահարթության համար Բլաշկեյի տիպի արտադրյալների մի ընտանիքի ածխապտտորկ վարքը	142
Վ. Խ. Մուսոյան. Հստ էքսպոնենտների և ըստ ուղղի՝ ֆունկցիաների ոչ լրիվ համակարգերի երկօրթոգոնալ վերլուծությունների գումարումը	163
Ս. Լ. Բերբերյան. U_α դասերի սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների եզրային վարքի մասին	187
Ս. Ն. Մանուկյան. Կոնստրուկտիվ անալիտիկ ֆունկցիաների համար միակության համկոնֆյունների մասին	198

СОДЕРЖАНИЕ

М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян. Матрично-континуальные аналоги задач Шура и Каратеодори-Теплица	107
А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян. Асимптотическое поведение произведений типа Бляшке для полуплоскости	142
В. Х. Мусоян. Суммирование биортогональных разложений по неполным системам экспонат и рациональных функций	163
С. Л. Берберян. О граничном поведении субгармонических функций классов U_α	187
С. Н. Манукян. О свойствах единственности для конструктивных аналитических функций	198

CONTENTS

M. G. Krein, F. E. Melik-Adamian. Matrix continuous analogues of Schur's and Caratheodory-Tosplitz problems	107
A. M. Jrbashian (Dzrbasjan), G. V. Mikaelian. The asymptotic behaviour of a family of Blaschke-type products for the halfplane	142
V. Kh. Musolian. The summation of decompositions with respect to noncomplete biorthogonal systems of exponents and rational functions	163
S. L. Berberian. On the boundary behaviour of subharmonic functions of U_α class	187
S. N. Manukian. On uniqueness properties for constructive analytic functions	198