

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1866 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԼՍՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵՆՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՆՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱՎԱԾՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵՆՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քաղաքապետ՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրատարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով՝ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերը շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրդի տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծադրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված օրիջն շառ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մեթոման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրությունը իրավունք է վերապահում շղթազվել մեթոման պատճառներով պարզարանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է ուլյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
зам. главного редактора
Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редакколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название места издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.
2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.
3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.
4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.
5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.
6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.
7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.
8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.
9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.
10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.
11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.955

Р. Г. АЙРАПЕТЯН

О СВЕДЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ К СИММЕТРИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Рассмотрим уравнение

$$Pv(t, x) = f(t, x), \quad (t > 0, x \in R^n), \quad (0.1)$$

где P — t -гиперболический (по И. Г. Петровскому) оператор порядка m .

Известно, что при $m = 2$ это уравнение может быть сведено к симметрической гиперболической (по К. Фридрихсу) системе дифференциальных уравнений первого порядка. Сведение это часто используется, поскольку симметрические гиперболические системы обладают рядом известных преимуществ. При этом компонентами искомой вектор-функции являются функция v и ее производные.

С. К. Годуновым была поставлена задача о симметризации такого типа для гиперболического уравнения произвольного порядка, а также предложен подход к ее решению, основанный на использовании тождества Хермандера. С помощью этого подхода в работах С. К. Годунова и В. И. Костина [1] и Т. Ю. Михайловой [2] задача эта решена в следующих частных случаях: для уравнения с двумя пространственными переменными доказана принципиальная возможность симметризации ([1]), а для уравнений, инвариантных относительно вращений, построена конкретная симметризация ([2]). Однако в общем случае задача о такой симметризации оказалась неразрешимой. Это стало ясно из недавней работы В. В. Иванова [11], где показано, что не для всякого гиперболического по Петровскому дифференциального уравнения такая симметризация возможна. Более того, уже тогда, когда порядок уравнения и число пространственных переменных равны четырем, возникает целая область операторов, не допускающих подобной симметризации даже при их малых возмущениях.

Ниже изложен другой подход, основанный на рассмотрении некоторой вспомогательной задачи о продолжении оператора с граничного многообразия. Решение последней задачи сводится к изучению серии симметрических, гиперболических по Фридрихсу систем дифференциальных уравнений первого порядка, что дает возможность подойти к проблеме симметризации с новой точки зрения. Такая (косвенная) симметризация оказывается осуществимой уже для любого гиперболического по Петровскому оператора. Сама же задача о построении слабо коммутирующих продолжений операторов представляет самостоятельный интерес и может быть применена, скажем, при изучении смешанных задач.

§1. Постановка задачи о построении слабо коммутирующего продолжения оператора

Обозначим через $\mathfrak{M}_{k_1, k_2}$ класс линейных операторов — дифференциальных по t и псевдодифференциальных по x ($x \in R^n$) — допускающих следующее представление

$$P = \sum_{j=0}^{k_1} P_j D_t^j, \text{ где } D_t = -i \frac{\partial}{\partial t},$$

а P_j — псевдодифференциальный оператор по x порядка $k_2 - j$, символ которого $-p_j(t, x, \xi)$ — гладкая функция на кокасательном расслоении $R_+^1 \times T^*R^n$. Вместо $\mathfrak{M}_{k, k}$ будем писать $\mathfrak{M}_k$.

Пусть заданы операторы $P \in \mathfrak{M}_m$, $Q \in \mathfrak{M}_{m-1}$, $S \in \mathfrak{M}_{m-1}$, причем P_m — эллиптический и символ оператора S не зависит от t .

Задача. Найти операторы $B \in \mathfrak{M}_{m-1}$ и $C \in \mathfrak{M}_{m-1}$, удовлетворяющие соотношениям

$$[P, B] = CP + QB + T, \quad T \in \mathfrak{M}_{m-1, -\infty}, \quad (1.1)$$

$$B|_{t=0} = S. \quad (1.2)$$

Замечание 1. Частный случай этой задачи ($m=2$) рассматривался в работах [3]—[6] при исследовании смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка.

Определение. Оператор B , удовлетворяющий соотношениям (1.1)—(1.2), назовем слабо коммутирующим с P продолжением оператора S .

Приведем схему сведения задачи Коши для уравнения (0.1) к задаче (1.1)—(1.2).

Пусть P — строго гиперболический оператор, задающий левую часть уравнения (0.1), а L_j — однородные псевдодифференциальные операторы первого порядка, символы которых, соответственно, $\lambda_j(t, x, \xi)$ — корни главного символа $p_0(t, x, \tau, \xi)$ оператора P . Тогда

$$P = P_m \prod_{j=1}^m (D_t - L_j) \in \mathfrak{M}_{m-1}.$$

Обозначим этот оператор через Q . В качестве S возьмем какой-нибудь строго гиперболический оператор порядка $m-1$. Пусть B — слабо коммутирующее с P продолжение оператора S . Тогда в некоторой окрестности гиперплоскости $t=0$ оператор B будет строго гиперболическим. Применим к уравнению (0.1) оператор B . Воспользовавшись соотношением (1.1), получаем уравнение

$$P_m \prod_{j=1}^m (D_t - L_j) Bv = (B + C)f + Tv. \quad (1.3)$$

Оператор P_m — эллиптический, следовательно, для него существует левый регуляризатор (параметрикс). Подействовав этим регуляризатором на обе части уравнения (1.3) и решая последовательно задачи Коши для m однородных псевдодифференциальных уравнений первого порядка, получаем гиперболическое уравнение $(m-1)$ -го порядка

$$Bv = f_1 + T_0 v, \quad (1.4)$$

где $T_0 \in \mathfrak{M}_{m-1, -\infty}$.

Таким образом, задача Коши для уравнения порядка m свелась к аналогичной задаче для уравнения порядка $m-1$. Осуществляя индукцию по порядку уравнения, приходим к легко обрабатываемому уравнению нулевого порядка.

§ 2. О главных минорах безутианты

Для дальнейшего нам понадобится формула, выражающая главные миноры безутианты двух полиномов через корни этих полиномов.

Согласно [7], каждым двум полиномам $f(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ и $g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ ($a_m \neq 0$) сопоставим симметрическую матрицу $B(f, g) = \|b_{ij}\|_{i, j=k+1}^m$, определяемую равенством

$$\frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x - y} = \sum_{i, j=1}^m b_{ij} x^{i-1} y^{j-1}$$

и называемую безутиантой полиномов f и g . В случае, если порядок полинома g меньше m , этот полином дотраивается до полинома порядка m нулями при старших степенях.

Как показано в работе [8], безутианта выражается через коэффициенты полиномов посредством следующей формулы

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_m \\ \vdots & & \\ a_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_{m-1} \\ \vdots & & \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_m \\ \vdots & & \\ b_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_{m-1} \\ \vdots & & \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

в правой части которой стоят треугольные матрицы и ганкелевы матрицы.

Пусть $x_1, \dots, x_m$ — корни полинома f , а $y_1, \dots, y_m$ — корни полинома g . Обозначим через $|b_{ij}|_{i, j=k+1}^m$, $k=1, \dots, m$, главные миноры безутианты, отсчитываемые от правого нижнего угла.

Лемма. Пусть все корни полинома f — простые. Тогда

$$|b_{ij}|_{i, j=k+1}^m = a_m^{2(m-k)} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{m-k}) \subset (1, \dots, m) \\ i_1 < i_2 < \dots < i_{m-k}}} \frac{g(x_{i_1}) \cdots g(x_{i_{m-k}})}{f'(x_{i_1}) \cdots f'(x_{i_{m-k}})} \times \\ \times \prod_{\substack{(j_1, j_2) \subset (1, \dots, m-k) \\ j_1 < j_2}} (x_{j_1} - x_{j_2})^2. \quad (2.2)$$

Замечание 2. Формула для главных миноров безутианты приведена в предположении, что хотя бы один из полиномов имеет простые корни. В известной автору литературе она не встречается. Выражение для случая, когда оба полинома имеют кратные корни, получается из (2.2) предельным переходом и имеет несколько громоздкий вид.

Доказательство. Как показано в работе [8]

$$|b_{ij}|_{i,j=k+1}^m = (-1)^{\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_m \cdots a_{k+1} & a_k \cdots a_{2k-m+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_m \\ \hline b_m \cdots b_{k+1} & b_k \cdots b_{2k-m+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_m \\ \hline & b_{m-1} \cdots b_k \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что этот определитель равен следующему

$$(-1)^{\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_m \cdots a_0 & 0 \\ 0 & a_m \cdots a_0 \\ \hline b_m \cdots b_0 & 0 \\ 0 & b_m \cdots b_0 \\ \hline 0 & I_k \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

где I_k — единичная матрица размера $k \times k$.

Умножим определитель (2.3) на следующий определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} x_1^{2m-k-1} \cdots x_m^{2m-k-1} & y_1^{2m-k-1} \cdots y_{m-k}^{2m-k-1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots 1 \end{vmatrix} = \\ = \frac{(-1)^{\frac{m(m-k)}{2}}}{a_m^{m-k}} f(y_1) \cdots f(y_{m-k}) \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < m} (x_{i_1} - x_{i_2}) \prod_{1 \leq j_1 < j_2 < m-k} (y_{j_1} - y_{j_2}). \quad (2.4)$$

В результате получаем определитель

$$(-1)^{\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}} \times \\ \times \begin{vmatrix} 0 & y_1^{m-k-1} f(y_1) \cdots y_{m-k}^{m-k-1} f(y_{m-k}) \\ \vdots & \vdots \\ f(y_1) & \cdots f(y_{m-k}) \\ \hline x_1^{m-k-1} g(x_1) \cdots x_m^{m-k-1} g(x_m) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ g(x_1) & \cdots g(x_m) \\ \hline x_1^{k-1} \cdots x_m^{k-1} & y_1^{k-1} \cdots y_{m-k}^{k-1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{m(m-k) + \frac{(m-k)(m-k-1)}{2}} f(y_1) \cdots f(y_{m-k}) \prod_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{m-k} \\ j_1 < j_2}} (y_{j_1} - y_{j_2}) \times \\
&\times \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{m-k}) \subset (1, \dots, m) \\ i_1 < i_2 < \dots < i_{m-k}}} (-1)^{i_1 + \dots + i_{m-k} + \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}} g(x_{i_1}) \cdots g(x_{i_{m-k}}) \times \\
&\times \prod_{\substack{(p_1, p_2) \subset (1, \dots, i_{m-k}) \\ p_1 < p_2}} (x_{p_1} - x_{p_2}) \prod_{\substack{(q_1, q_2) \subset (1, \dots, m) \setminus (i_1, \dots, i_{m-k}) \\ q_1 < q_2}} (x_{q_1} - x_{q_2}).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.4) получаем равенство

$$\begin{aligned}
|b_{i,j}|_{i,j=k+1}^m &= a_m^{m-k} (-1)^{\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{m-k}) \subset (1, \dots, m) \\ i_1 < i_2 < \dots < i_{m-k}}} g(x_{i_1}) \cdots g(x_{i_{m-k}}) \times \\
&\times \left(\prod_{\substack{j_1 \in (i_1, \dots, i_{m-k}) \\ j_2 \in (1, \dots, m) \setminus (i_1, \dots, i_{m-k})}} (x_{j_1} - x_{j_2}) \right)^{-1},
\end{aligned}$$

из которого следует формула (2.2).

§ 3. Сведение задачи о построении слабо коммутирующего продолжения оператора к симметрическим системам

Будем исходить из асимптотического разложения

$$p_j(t, x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k}(t, x, \xi), \quad (3.1)$$

где $p_{j,k}(t, x, \xi)$ — гладкая функция, однородная степени $m-j-k$ по ξ . Аналогичные разложения имеют место для символов b_j, q_j, s_j, c_j операторов B_j, Q_j, S_j, C_j .

Обозначим через Ω_1 верхнетреугольную теплицеву матрицу

$$\begin{pmatrix} p_{m,0} & \cdots & p_{1,0} \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{m,0} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

через b^k и s^k — векторы $(b_{0,k}, \dots, b_{m-1,k})^{tr}$ и $(s_{0,k}, \dots, s_{m-1,k})^{tr}$, а через u_k и φ_k — векторы $(u_{1,k}, \dots, u_{m,k})^{tr}$ и $(\varphi_{1,k}, \dots, \varphi_{m,k})^{tr}$, получающиеся из b^k и s^k преобразованием

$$u_k = \Omega_1^{-1} b^k, \quad \varphi_k = \Omega_1^{-1} s^k. \quad (3.3)$$

Пусть M — некоторая квадратная матрица. Обозначим через M^* матрицу, получающуюся из M транспонированием относительно второй диагонали, т.е. $M^* = (JMJ)^{tr}$, где $J = \|\delta_{l, n+1-l}\|$.

Теорема 1. Задача (1.1) — (1.2) эквивалентна следующей последовательности задач Коши для систем первого порядка на кокасательном расслоении

$$A_0 \frac{\partial u_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n A_i^* \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} + A u_k + \\ + F_k(t, x, \xi; u_0, \dots, u_{k-1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

$$u_k(0, x, \xi) = \varphi_k(x, \xi). \quad (3.5)$$

Все матрицы, входящие в (3.4), размера $m \times m$ и гладкие по t, x, ξ . Матрицы A_0, A_i, A_i^* — симметрические:

$$A_0 = B(p_0(t, x, \tau, \xi), \frac{\partial}{\partial \tau} p_0(t, x, \tau, \xi))^n, \quad (3.6)$$

$$A_i = -B(p_0(t, x, \tau, \xi), \frac{\partial}{\partial \xi_i} p_0(t, x, \tau, \xi))^n, \quad (3.7)$$

$$A_i^* = B(p_0(t, x, \tau, \xi), \frac{\partial}{\partial x_i} p_0(t, x, \tau, \xi))^n. \quad (3.8)$$

Из теоремы 1 и леммы следует, что главные миноры Δ_k матрицы A_0 оказываются равными величинам:

$$\Delta_1 = m p_{m,0}^2, \quad \Delta_k = p_{m,0}^{2k} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \subset (1, \dots, m) \\ i_1 < \dots < i_k}} \prod_{\substack{(j_1, j_2) \subset (i_1, \dots, i_k) \\ j_1 < j_2}} (\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2})^2, \quad k = 2, \dots, m. \quad (3.9)$$

Отсюда следует

Теорема 2. Если оператор P — строго гиперболический, то тогда матрица A_0 — положительно определенная и, следовательно, система (3.4) — симметрическая гиперболическая (по Фридрихсу).

Для того, чтобы выписать матрицу A введем некоторые вспомогательные матрицы.

Пусть Ω_2 и Ω_3 — ганкелевы матрицы

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} p_{m-1,0} & \dots & p_{0,0} \\ \vdots & & \\ p_{0,0} & & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\Omega_3 = \begin{pmatrix} m p_{m,0} & (m-1) p_{m-1,0} & \dots & p_{1,0} \\ (m-1) p_{m-1,0} & & & \\ \vdots & & & \\ p_{1,0} & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

и Ω_4 — верхнетреугольная теплицева матрица:

$$\begin{pmatrix} 0 & m p_{m,0} & \dots & 2 p_{2,0} \\ & \vdots & & \\ & & m p_{m,0} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Обозначим, далее

$$\Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & D_t p_{m,0} & 2D_t p_{m-1,0} & \cdots & (m-1) D_t p_{2,0} \\ & & 2D_t p_{m,0} & \cdots & (m-1) D_t p_{3,0} \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & (m-1) D_t p_{m,0} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

и

$$\Omega_4 = \begin{pmatrix} 0 & D_t p_{m-1,0} & \cdots & (m-1) D_t p_{1,0} \\ 0 & D_t p_{m-2,0} & \cdots & (m-1) D_t p_{0,0} \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & D_t p_{0,0} & & \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

а также

$$R^I = \begin{pmatrix} R_{m-1} & \cdots & R_0 \\ \vdots & & \\ R_0 & & 0 \end{pmatrix}, \quad R^{II} = \begin{pmatrix} R_m & \cdots & R_1 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_m \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

где $R_j = (j+1) p_{j+1,0} D_t - i \{p_{j,0}, \cdot\} - q_{j,0}$, $j=0, 1, \dots, m-1$, $R_m = -i \{p_{m,0}, \cdot\}$, $\{, \}$ — скобка Пуассона.

Как будет показано ниже (§ 4), матрица A выражается следующей формулой:

$$A = -i(R^I - \Omega_2 \Omega_1^{-1} R^{II} + \Omega_2 \Omega_1^{-1} \Omega_3 - \Omega_4) \Omega_1. \quad (3.16)$$

§ 4. Доказательство теоремы 1

Вычислим сначала коммутатор

$$[P, B] = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{m-1} [P_k D_t^k, B_l D_t^l]. \quad (4.1)$$

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} [P_k D_t^k, B_l D_t^l] &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{j}{k} P_k (D_t^{k-j} B_l) D_t^{l+j} - \\ &- \sum_{j=0}^{l-1} \binom{j}{l} B_l (D_t^{l-j} P_k) D_t^{k+j} + [P_k, B_l]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (4.1) и меняя порядок суммирования, получаем

$$\begin{aligned} [P, B] &= \sum_{k=0}^{2(m-1)} \sum_{j=\max(0, k+1-m)}^{\min(m-1, k)} \sum_{l=1}^{m-j} \binom{l}{l+j} P_{l+j} (D_t^l B_{k-j}) D_t^k - \\ &- \sum_{k=0}^{2(m-1)} \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(k, m-2)} \sum_{l=1}^{m-1-l} \binom{l}{l+j} B_{l+j} (D_t^l P_{k-j}) D_t^k + \\ &+ \sum_{k=0}^{2m-1} \sum_{j=\max(0, k-m+1)}^{\min(k, m)} [P_j, B_{k-j}] D_t^k. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$CP = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^m \sum_{j=0}^k \binom{j}{k} C_k (D_t^{k-l} P_l) D_t^{l+j}$$

или, изменив порядок суммирования

$$CP = \sum_{k=0}^{2m-1} \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(m-1, k)} \sum_{l=0}^{m-1-j} \binom{l}{l+j} C_{l+j} (D_l^i P_{k-j}) D_l^i.$$

Аналогично

$$QB = \sum_{k=0}^{2m-2} \sum_{j=\max(0, k+1-m)}^{\min(m-1, k)} \sum_{l=0}^{m-1-j} \binom{l}{l+j} Q_{l+j} (D_l^i B_{k-j}) D_l^i.$$

Приравняв в равенстве (1.1) коэффициенты при одинаковых степенях D_l , получаем следующую систему из $2m$ операторных равенств

$$\begin{aligned} & \sum_{j=\max(0, k+1-m)}^{\min(k, m-1)} \sum_{l=1}^{m-j} \binom{l}{l+j} P_{l+j} (D_l^i B_{k-j}) - \\ & - \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(k, m-2)} \sum_{l=1}^{m-1-j} \binom{l}{l+j} B_{l+j} (D_l^i P_{k-j}) + \\ & + \sum_{j=\max(0, k-m+1)}^{\min(m, k)} [P_j, B_{k-j}] - \\ & - \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(m-1, k)} \sum_{l=0}^{m-j-1} \binom{j}{l+j} C_{l+j} (D_l^i P_{k-j}) - \\ & - \sum_{j=\max(0, k+1-m)}^{\min(m-1, k)} \sum_{l=0}^{m-j-1} \binom{j}{l+j} Q_{l+j} (D_l^i B_{k-j}) = 0 \pmod{\mathfrak{M}_{0, -\infty}}, \\ & k = 0, 1, \dots, 2m-2, \\ & [P_m, B_{m-1}] = C_{m-1} P_m. \end{aligned}$$

Приведенные выше равенства псевдодифференциальных операторов перепишем в виде равенств для их символов. Используя асимптотические разложения символов, последовательно получаем системы уравнений, сначала на главные символы, а затем на следующие члены разложения. Для того, чтобы получить главную часть равенства, надо положить $l = 1$ в левой части и $l = 0$ в правой. Получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=\max(0, k+1-m)}^{\min(m-1, k)} (j+1) p_{j+1, 0} D_l b_{k-j, \nu} - \\ & - \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(k, m-2)} (j+1) h_{j+1, \nu} D_l p_{k-j, 0} - \\ & - i \sum_{j=\max(0, k-m+1)}^{\min(k, m)} \{p_{j, 0}, b_{k-j, \nu}\} - \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(m-1, k)} c_{j, \nu} p_{k-j, 0} - \\ & - \sum_{j=\max(0, k-m+1)}^{\min(m-1, k)} q_{j, 0} b_{k-j, \nu} = F_k(t, x, \xi; b_0, \dots, b_{\nu-1}; c_0, \dots, c_{\nu-1}) \end{aligned}$$

для $k = 0, 1, 2, \dots, 2m-2$,

$$-i \{p_{m, 0}, b_{m-1, \nu}\} - c_{m-1, \nu} p_{m, 0} = F_{2m-1}(t, x, \xi; b_0, \dots, b_{\nu-1}; c_0, \dots, c_{\nu-1}),$$

где $\nu = 0, 1, 2, \dots$.

Для удобной записи этих уравнений воспользуемся операторами (3.15). Рассмотрим сначала последние m уравнений, т. е. когда $k \geq m$. Они выглядят следующим образом:

$$\sum_{j=k+1-m}^m R_j b_{k-j, \nu} - \sum_{j=k-m}^{m-2} (j+1) b_{j+1, \nu} D_t p_{k-j, 0} - \\ - \sum_{j=k-m}^{m-1} c_{j, \nu} p_{k-j, 0} = F_k(t, x, \xi; b_0, \dots, b_{\nu-1}; c_0, \dots, c_{\nu-1}),$$

$$k = m, m+1, \dots, 2m-2,$$

$$-i \{p_{m,0}, b_{m-1, \nu}\} - c_{m-1, \nu} p_{m,0} = F_{2m-1}(t, x, \xi; b_0, \dots, b_{\nu-1}; c_0, \dots, c_{\nu-1}).$$

Оставшиеся m уравнений ($0 \leq k \leq m-1$) записываются так:

$$\sum_{j=0}^k R_j b_{k-j, \nu} - \sum_{j=0}^{\min(k, m-2)} (j+1) b_{j+1, \nu} D_t p_{k-j, 0} - \\ - \sum_{j=0}^k c_{j, \nu} p_{k-j, 0} = F_k(t, x, \xi; b_0, \dots, b_{\nu-1}; c_0, \dots, c_{\nu-1}).$$

Для дальнейшего исследования полученной системы удобно переписать ее в матричном виде, разбив предварительно на две системы. Используя обозначения (3.2), (3.10)–(3.15), получаем

$$R'' b^* - \Omega_1 c^* - \Omega_5 b^* = \Phi_1(t, x, \xi; b_0, \dots, b_{\nu-1}; c_0, \dots, c_{\nu-1}),$$

$$R' b^* - \Omega_2 c^* - \Omega_6 b^* = \Phi_2(t, x, \xi; b_0, \dots, b_{\nu-1}; c_0, \dots, c_{\nu-1}),$$

где $\Phi_1 = (F_m, \dots, F_{2m-1})^T$, $\Phi_2 = (F_0, \dots, F_{m-1})^T$.

По предположению, оператор P_m — эллиптический, следовательно

$$\det \Omega_1 = p_{m,0}^m \neq 0.$$

Из первой системы определим вектор

$$c^* = \Omega_1^{-1} R'' b^* - \Omega_1^{-1} \Omega_5 b^* - \Omega_1^{-1} \Phi_1,$$

подставим его во вторую и произведем замену неизвестной функции (3.3).

В результате система запишется следующим образом:

$$(R' \Omega_1 - \Omega_2 \Omega_1^{-1} R'' \Omega_1 + \Omega_2 \Omega_1^{-1} \Omega_5 \Omega_1 - \Omega_6 \Omega_1) u^* = \Phi_2 - \Omega_2 \Omega_1^{-1} \Phi_1.$$

Расписав в этой системе операторы R_j и используя тот простой факт, что теплицевы верхнетреугольные матрицы коммутируют, получаем систему (3.4), где

$$A_0 = \Omega_3 \Omega_1 - \Omega_2 \Omega_4, \quad (4.3)$$

$$A_\nu = \Omega_2 \Omega_{1\nu} - \Omega_{2\nu} \Omega_1, \quad (4.4)$$

$$A^* = \Omega_{2x_\nu} \Omega_1 - \Omega_2 \Omega_{1x_\nu}, \quad (4.5)$$

и матрица A определяется выражением (3.16). Из этих соотношений и из (2.1) следуют равенства (3.6)–(3.8).

§ 5. Оператор второго порядка

Рассмотрим пару операторов $P = D_t^2 + P_1 D_t + P_0$ и $Q = Q_1 D_t + Q_0$. Задача (1.1) — (1.2) эквивалентна задаче Коши для системы (3.4), где, в силу (4.3) — (4.5) и (3.16)

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & p_{1,0} \\ p_{1,0} & p_{1,0}^2 - 2p_{0,0} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = - \begin{pmatrix} p_{1,0} \xi_v & p_{0,0} \xi_v \\ p_{0,0} \xi_v & p_{1,0} p_{0,0} \xi_v - p_{0,0} p_{1,0} \xi_v \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} p_{1,0} x_v & p_{0,0} x_v \\ p_{0,0} x_v & p_{1,0} p_{0,0} x_v - p_{0,0} p_{1,0} x_v \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} i q_{1,0} & i q_{0,0} - p_{1,0} \\ i q_{0,0} & i q_{0,0} p_{1,0} - i q_{1,0} p_{0,0} + p_{0,0} - p_{1,0} p_{1,0} - [p_{0,0}, p_{1,0}] \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + a_0 u_t + \sum_{j=1}^n a_j u_{x_j} + a u = f, \quad (5.1)$$

где $\|a_{ij}\|$ — симметрическая матрица.

Оператор, задающий это уравнение, имеет следующий вид:

$$P = D_t^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{x_i} D_{x_j} - i a_0 D_t - i \sum_{j=1}^n a_j D_{x_j} - a$$

и, следовательно, $p_{1,0} = 0$, $p_{0,0} = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$.

Оператор Q находим из условия

$$P = (D_t - L_1)(D_t - L_2) + Q, \quad (5.2)$$

где L_1, L_2 — однородные псевдодифференциальные операторы первого порядка, символы которых

$$l_1 = \lambda, \quad l_2 = -\lambda, \quad \text{где } \lambda = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j}.$$

Из (5.2) следуют равенства

$$P_1 + L_1 + L_2 = Q_1,$$

$$P_0 - L_1 L_2 + [D_t, L_2] = Q_0.$$

Переписав эти операторные равенства в виде равенств для символов, получаем первые члены асимптотических разложений операторов Q_1 и Q_0 :

$$q_{1,0} = -i a_0,$$

$$q_{0,0} = -i \sum_{j=1}^n a_j \xi_j + i \frac{\partial \lambda}{\partial t} - i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}.$$

Таким образом, из вышеизложенного следует, что задача Коши для уравнения (5.1) сводится к последовательности задач Коши для симметрических гиперболических систем:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \end{pmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial t} = \sum_{v=1}^n \begin{pmatrix} 0 & 2 \sum_{j=1}^n a_{vj} \xi_j \\ 2 \sum_{j=1}^n a_{vj} \xi_j & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial x_v} + \\ & + \sum_{v=1}^n \begin{pmatrix} 0 & - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_v} \xi_i \xi_j \\ - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_v} \xi_i \xi_j & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_v} + \\ & + \begin{pmatrix} a_0 & - \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \left(a_j \xi_j + \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right) \\ - \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \left(a_j \xi_j + \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right) & \sum_{j=1}^n \left(a_0 a_{jj} - \frac{\partial a_{jj}}{\partial t} \right) \xi_j \xi_j \end{pmatrix} u_k + F_k. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Интересно сравнить предложенный способ сведения уравнения (5.1) к симметрическим системам с методом К. Фридрихса, приводящим к следующей симметрической гиперболической системе:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{v=1}^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{1v} & \dots & a_{nv} \\ 0 & a_{1v} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{nv} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_v} - \\ & - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} u + F. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Бросаются в глаза следующие два признака, отличающие системы (5.4) и (5.3). Во-первых, матрицы, входящие в систему (5.4), имеют размеры $(n+2) \times (n+2)$, в то время как матрицы, входящие в систему (5.3), — размера 2×2 . И вообще, при симметризации (3.4) число уравнений всегда равно порядку исходного уравнения.

Во-вторых, в систему (5.4) входит столько же независимых переменных, сколько их было в исходном уравнении, а в системе (5.3) число независимых переменных удваивается. Существенным является то обстоятельство, что пространственные и двойственные к ним переменные в системе (3.4), по существу, равнозначны.

По всей вероятности, предложенный подход может быть использован при построении коротковолновых асимптотик. В связи с этим было бы небезынтересно выяснить его связь с методом канонического оператора В. П. Маслова (см., например, [9], [10]).

В заключение автор выражает благодарность А. Б. Нерсисяну за плодотворные обсуждения.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26.X.1984

Ռ. Գ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Հիպերբոլական նավաստման նամար Կոշու խնդրի բերումը սիմետրիկ նամակադրերին (ամփոփում)

Առաջարկվում է նոր մոտեցում հիպերբոլական հավասարումների համար սիմետրիզացման խնդրում, որը թույլ է տալիս կամայական կարգի հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդիրը բերել սիմետրիկ հիպերբոլական (ըստ ֆրիդրիխսի) համակարգերի շարքին:

R. G. AIRAPETYAN. *Reduction of the Cauchy problem for a hyperbolic equation to symmetric systems (summary)*

The paper describes a new approach to the problem of symmetrization of hyperbolic equations, permitting to reduce the study of the Cauchy problem for a hyperbolic equation of arbitrary order to the study of series of symmetric hyperbolic systems of the differential equations of first order.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. К. Годунов, В. И. Костин. Приведение гиперболического дифференциального уравнения к симметрической гиперболической системе в случае двух пространственных переменных, Сиб. мат. ж., 21, № 6, 1980, 3—20.
2. Т. Ю. Михайлова. Симметризация инвариантных гиперболических уравнений, ДАН СССР, 270, № 3, 1983, 546—550.
3. С. К. Годунов, В. М. Гордиенко. Смешанная задача для волнового уравнения, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, Препринт № 46, 1977, с. 30.
4. С. К. Годунов, В. М. Гордиенко. Смешанная задача для волнового уравнения, Дифференциальные уравнения с частными производными, Труды семинара С. А. Соболева, № 2, 1977, 5—31.
5. Р. Г. Айрапетян. Смешанная задача для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка при нарушении равномерного условия Лопатинского, ДАН Арм.ССР, 65, № 1, 1977, 3—9.
6. Р. Г. Айрапетян. Об эквивалентных формах условия Лопатинского для гиперболических уравнений второго порядка, ДАН Арм.ССР, 67, № 1, 1978, 18—24.
7. М. Г. Крейн, М. А. Неймарк. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений, Харьков, 1936, с. 44.
8. Ф. И. Ландер. Безутианта и обращение ганкелевых и теплицевых матриц, Математические исследования, Кишинев, 9, № 2 (32), 1974, 69—87.
9. В. П. Маслов, М. В. Федорюк. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., Наука, 1976.
10. А. С. Мищенко, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М., Наука, 1978.
11. В. В. Иванов. Строго гиперболические полиномы, не допускающие гиперболической симметризации, Новосибирск, Институт математики СО АН СССР, Препринт № 77, 1984, с. 15.

УДК 517.984

И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ОПЕРАТОРАХ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПАРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть A и B —самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, для которых существуют сильные пределы

$$U_{\pm}(A, B) = s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} e^{i\xi A} e^{-i\xi B} P_B,$$

где P_B —ортопроектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора B . Операторы $U_{\pm}(A, B)$ называются волновыми операторами для упорядоченной пары (A, B) , а

$$S(A, B) = U_+^*(A, B) U_-(A, B)$$

—оператором рассеяния (см. [1], стр. 335, и [2], стр. 28). Аналогично определяются волновые операторы $U_{\pm}(B, A)$ и оператор рассеяния $S(B, A)$.

В настоящей заметке рассматривается в $L^2(0, \infty)$ некоторый класс самосопряженных дифференциальных операторов порядка $2n > 2$ с убывающими на бесконечности коэффициентами. Доказывается, что для любой пары операторов L и L_0 из рассматриваемого класса существуют операторы рассеяния $S(L, L_0)$ и $S(L_0, L)$. Выводятся формулы для волновых операторов и операторов рассеяния* и, тем самым, выявляется связь с операторами рассеяния введенных автором в [3] данных рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков. На примерах показано, что при фиксированном L_0 оператор L не определяется однозначно по операторам рассеяния в рассматриваемом классе (в общем случае эта неоднозначность указана в [4], стр. 96, и [5]).

Рассмотрим на полуоси $0 < x < \infty$ заданную по формуле

$$l[y(x)] \equiv \frac{1}{i^{2n}} y^{(2n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{i^{2k}} [p_{2k}(x) y^{(k)}(x)]^{(k)} + \\ + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2i^{2k+1}} [[p_{2k+1}(x) y^{(k)}(x)]^{(k+1)} + [p_{2k+1}(x) y^{(k+1)}(x)]^{(k)}] \quad (1)$$

дифференциальную операцию l порядка $2n > 2$, где $p_k(x)$ —вещественные функции, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1 x^{2n-1-k} |p_k(x)| dx + \int_1^{\infty} |p_k(x)| dx < \infty, \quad k=0, 1, \dots, 2n-2. \quad (2)$$

* Аналогичное исследование выполнено В. С. Буслаевым [16] для эллиптических дифференциальных операторов порядка $2n$ в $L^2(\Omega)$, где Ω —внешность ограниченной области в R^m .

Пусть L — некоторый самосопряженный оператор, порожденный дифференциальной операцией l в пространстве $L^2(0, \infty)$ (см. [3], [6], [7]). Область определения оператора L описывается при помощи n краевых условий в точке $x=0$ (их вид не является существенным). Непрерывный спектр оператора L совпадает с полуосью $[0, \infty)$, а точечный спектр ограничен снизу и не имеет отличной от нуля конечной точки сгущения. Обозначим через T множество всех чисел λ ($\lambda \geq 0$ или $\arg \lambda = -\pi/2n$) таких, что λ^{2n} являются собственными значениями оператора L .

При каждом $\lambda > 0$ ($\lambda \notin T$) дифференциальное уравнение

$$l[y(x)] = \lambda^{2n} y(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (3)$$

имеет одно решение $u(x, \lambda)$, обладающее асимптотикой

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [S_0(\lambda) e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x} + o(1)], \quad x \rightarrow \infty$$

и удовлетворяющее краевым условиям, соответствующим оператору L . Функции $u(x, \lambda)$ и $S_0(\lambda)$ непрерывны на множестве $\lambda > 0$, $\lambda \notin T$ и по непрерывности могут быть определены также для значений $\lambda \in T$ ($\lambda > 0$). При этом $|S_0(\lambda)| \equiv 1$. Более того, для любой функции $f \in L^2(0, \infty)$ интеграл

$$(Uf)(\lambda) = \int_0^\infty \bar{u}(x, \lambda) f(x) dx, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (4)$$

сходится по метрике $L^2(0, \infty)$ и определяет частично изометрический оператор U в $L^2(0, \infty)$, переводящий оператор L в оператор умножения на λ^{2n} . При этом

$$UU^* = I, \quad U^*U = I - P,$$

где I — единичный оператор, а P — ортопроектор на замыкании линейной оболочки всех собственных функций оператора L . Решение $u(x, \lambda)$ будем называть нормированной обобщенной собственной функцией оператора L .

Пусть E_μ ($-\infty < \mu < \infty$) — непрерывная слева спектральная функция (разложение единицы) оператора L . При каждом μ ортопроектор E_μ является интегральным оператором. Ядро $E(x, t; \mu)$ ($0 < x, t < \infty$) оператора E_μ абсолютно непрерывно по μ на каждом конечном отрезке, не содержащем собственных значений оператора L . При этом имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} E(x, t; \lambda^{2n}) = u(x, \lambda) \bar{u}(t, \lambda), \quad \lambda > 0, \lambda \notin T. \quad (5)$$

Из приведенных утверждений следует, что абсолютно непрерывный спектр оператора L совпадает с полуосью $[0, \infty)$, а абсолютно непрерывное подпространство — с ортогональным дополнением линейной оболочки всех собственных функций оператора L .

Для оператора L данные рассеяния вводятся при предположении, что $0 \notin T$ и уравнение (3) имеет для всех λ ($\operatorname{Im} \lambda \geq 0$) решение $u(x, \lambda)$, которое обладает асимптотикой

$$y(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty,$$

и при каждом $x > 0$ как функция от λ голоморфно в верхней полуплоскости и непрерывно вплоть до вещественной оси. При указанном предположении функция $u(x, \lambda)$ представляется в виде

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n S_k(\lambda) y(x, \lambda \omega_k), \quad 0 < x, \lambda < \infty, \quad (6)$$

где $\omega_k = \exp(i\pi k/n)$ и $S_n(\lambda) \equiv 1$, а при каждом $\mu = \lambda^{2n}$ ($\lambda \in T$) ядро ортогопроектора $E_{\mu+0} - E_{\mu}$ представляется в виде

$$E(x, t; \lambda^{2n+0}) - E(x, t; \lambda^{2n}) = \sum_{k,j=1}^{n_\lambda} N_{kj}(\lambda) y(x, \lambda \omega_k) \overline{y(t, \lambda \omega_j)},$$

где $n_\lambda = n-1$ при $\lambda > 0$ и $n_\lambda = n$ при $\arg \lambda = -\pi/2n$. Возникающие при этом набор непрерывных на полуоси $\lambda > 0$ функций $S_k(\lambda)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) и набор эрмитовых неотрицательно определенных матриц

$$N(\lambda) = (N_{kj}(\lambda))_{k,j=1}^{n_\lambda}, \quad \lambda \in T,$$

вместе с множеством T образуют данные рассеяния оператора L . Функции $S_k(\lambda)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) условимся называть функциями рассеяния оператора L .

Будем говорить, что дифференциальная операция l обладает оператором преобразования, если существует функция $K(x, t)$ ($0 < x \leq t < \infty$) (ядро оператора преобразования), удовлетворяющая следующим условиям:

1) функция $K_1(x) = K(x, x)$ имеет абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$ производные до порядка $2n-2$ включительно, а разность $K(x, t) - K_1\left(\frac{x+t}{2}\right)$ имеет непрерывные в области $0 < x \leq t < \infty$ частные производные до порядка $2n-1$ включительно и, кроме того, выполняются оценки

$$\left| \frac{\partial^k K(x, t)}{\partial x^v \partial t^{k-v}} \right| \leq \frac{1}{x^k} \psi_k(x+t), \quad 0 \leq v \leq k \leq 2n-1,$$

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \left\| \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) \right\| + \left\| \frac{\partial}{\partial t} K(x, t) \right\| dt dx < \infty,$$

где $\psi_k(x)$ ($0 \leq k \leq 2n-2$) — невозрастающие и вместе с $\psi_{2n-1}(x)$ суммируемые на полуоси $(0, \infty)$ функции;

2) при всех λ ($\operatorname{Im} \lambda \geq 0$) определенная по формуле

$$y(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty e^{i\lambda t} K(x, t) dt, \quad 0 < x < \infty, \quad (7)$$

функция $y(x, \lambda)$ является решением уравнения (3).

При этом оператором преобразования называется действующий в каком-либо пространстве $L^p(0, \infty)$ ($1 \leq p \leq \infty$) оператор $I + K$, где K — интегральный оператор с указанным выше ядром $K(x, t)$:

$$(Kf)(x) = \int_x^{\infty} K(x, t) f(t) dt, \quad 0 < x < \infty.$$

Отметим, что при существовании оператора преобразования коэффициенты $p_k(x)$ в (1) имеют при $k \geq 1$ абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[a, \beta] \subset (0, \infty)$ производные до порядка $k-1$ включительно и удовлетворяют условиям

$$\int_0^{\infty} x^{2n-1-k+\nu} |p_k^{(\nu)}(x)| dx < \infty, \quad 0 \leq \nu \leq k \leq 2n-2.$$

Кроме того, число отрицательных собственных значений оператора L конечно, а множество положительных собственных значений ограничено, причем нуль не является собственным значением.

Заметим, что оператор преобразования существует, например (см. [8]), если коэффициенты $p_k(x)$ дифференциальной операции l аналитически продолжаются с полуоси $(0, \infty)$ в сектор

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}$$

и удовлетворяют оценкам

$$\int_0^{\infty} x^{2n-2-k} |p_k(x+z)| dx \leq h(\operatorname{Re} z), \quad k=0, 1, \dots, 2n-2, \quad (8)$$

где $h(x)$ — невозрастающая суммируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция (в связи с точностью области голоморфности, см. пример в [9], а в связи с вопросом о необходимости условия голоморфности см. [10]). Заметим еще, что при условиях (8) функции рассеяния $S_k(\lambda)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) стремятся к конечным пределам при $\lambda \rightarrow \infty$.

Лемма. Пусть дифференциальная операция l обладает оператором преобразования. Тогда при любых положительных числах $\alpha < \beta$ функции рассеяния оператора L удовлетворяют неравенству

$$\int_{\Delta} \left\{ \max_{\alpha < \mu < \beta} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda \omega_k \pm \mu} \right|^2 \right\} d\lambda < \infty, \quad (9)$$

где

$$\Delta = \left(0, \frac{\alpha}{2}\right) \cup (2\beta, \infty).$$

Доказательство. Обозначим

$$v(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n S_k(\lambda) e^{ix\lambda\omega_k}, \quad (10)$$

$$w(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{n-1} S_k(\lambda) e^{ix\lambda\omega_k}. \quad (11)$$

Используя представления (6) и (7), получим

$$u(x, \lambda) = v(x, \lambda) + \int_x^{\infty} K(x, t) v(t, \lambda) dt. \quad (12)$$

Заметим, что в силу оценки ядра $K(x, t)$ оператор преобразования $I + K$ имеет ограниченный обратный $I + H = (I + K)^{-1}$ в любом из пространств $L^p(0, \infty)$ ($1 \leq p \leq \infty$), причем H есть интегральный оператор вида

$$(Hf)(x) = \int_x^{\infty} H(x, t) f(t) dt, \quad 0 < x < \infty,$$

где ядро $H(x, t)$ имеет все те свойства ядра $K(x, t)$, которые указаны выше в условии 1). Учитывая это, из равенства (12) получим

$$v(x, \lambda) = u(x, \lambda) + \int_x^{\infty} H(x, t) u(t, \lambda) dt.$$

В силу этого равенства при любой функции $f \in L^2(0, \infty)$ интеграл

$$(Vf)(\lambda) = \int_0^{\infty} \bar{v}(x, \lambda) f(x) dx, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (13)$$

сходится по метрике $L^2(0, \infty)$ и определяет ограниченный оператор V в $L^2(0, \infty)$. Но тогда с учетом равенств $|S_0(\lambda)| = S_n(\lambda) = 1$ и

$$w(x, \lambda) = v(x, \lambda) - S_0(\lambda) e^{ix\lambda} - e^{-ix\lambda}$$

по формуле

$$(Wf)(\lambda) = \int_0^{\infty} \bar{w}(x, \lambda) f(x) dx, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (14)$$

определяется ограниченный оператор W в $L^2(0, \infty)$. Следовательно, при любом $f \in L^2(0, \infty)$ имеет место неравенство

$$\int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \bar{w}(x, \lambda) f(x) dx \right|^2 d\lambda < \infty. \quad (15)$$

Обозначим

$$\Phi_v(\lambda) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{(1 - i\lambda\omega_k)^v}, \quad v=1, 2, \dots, n-1.$$

Положив в (15) $f(x) = x^{v-1} e^{-x}$, убеждаемся, что

$$\int_0^{\infty} |\Phi_v(\lambda)|^2 d\lambda < \infty, \quad v=1, 2, \dots, n-1. \quad (16)$$

Функции $\Phi_v(\lambda)$ ($v=1, 2, \dots, n-1$) определим из системы уравнений

$$\sum_{v=1}^{n-1} \frac{\varphi_v(\mu, \lambda)}{(1 - i\lambda\omega_k)^v} = \frac{1}{\lambda\omega_k + \mu}, \quad k=1, 2, \dots, n-1.$$

Нетрудно убедиться, что функции $\varphi_v(\pm \mu, \lambda)$ ограничены на множестве $\alpha \leq \mu \leq \beta$, $\lambda \in \Delta$. Поэтому с учетом (16) из очевидного равенства

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda\omega_k \pm \mu} = \sum_{v=1}^{n-1} \varphi_v(\pm \mu, \lambda) \Phi_v(\lambda)$$

получаем требуемое неравенство (9).

Теорема 1. Рассмотрим вместе с l аналогичную дифференциальную операцию l_0 порядка $2m > 2$ и предположим, что обе они обладают операторами преобразования. Пусть L и L_0 — некоторые самосопряженные операторы в $L^2(0, \infty)$, порожденные дифференциальными операциями l и l_0 соответственно и не имеющие отрицательных собственных значений, $u(x, \lambda)$ и $u_0(x, \lambda)$ — нормированные обобщенные собственные функции, а $S_k(\lambda)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) и $S_k^0(\lambda)$ ($k=0, 1, \dots, m-1$) — функции рассеяния этих операторов. Тогда для пары операторов

$$A = \sqrt[2n]{L}, \quad A_0 = \sqrt[2m]{L_0}$$

существуют все волновые операторы и справедливы формулы

$$U_+(A, A_0)f(x) = \int_0^\infty u(x, \lambda) \frac{S_0^0(\lambda)}{S_0(\lambda)} \int_0^\infty \bar{u}_0(t, \lambda) f(t) dt d\lambda, \quad (17)$$

$$U_-(A, A_0)f(x) = \int_0^\infty u(x, \lambda) \int_0^\infty \bar{u}_0(t, \lambda) f(t) dt d\lambda, \quad (18)$$

$$S(A, A_0)f(x) = \int_0^\infty u_0(x, \lambda) \frac{S_0(\lambda)}{S_0^0(\lambda)} \int_0^\infty \bar{u}_0(t, \lambda) f(t) dt d\lambda, \quad (19)$$

а также аналогичные формулы для операторов $U_\pm(A_0, A)$ и $S(A_0, A)$, где $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0, \infty)$.

Доказательство. Имеем

$$L = \int_0^\infty \mu dE_\mu, \quad e^{i\lambda A} = \int_0^\infty e^{i\lambda \mu} dE_{\lambda^{2n}} \quad (20)$$

и аналогичные формулы для операторов L_0 и A_0 .

Для простоты мы ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда операторы L и L_0 не имеют собственных значений. В этом случае

$$U_\pm(A, A_0) = s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow \pm \infty} e^{i\lambda A} e^{-i\lambda A_0}. \quad (21)$$

Пусть $f \in L^2(0, \infty)$ и

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \bar{u}_0(x, \lambda) f(x) dx, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (22)$$

В силу (5) и (20) соотношение (21) может быть записано в виде

$$U_{\pm}(A, A_0)f(x) = \\ = s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \int_0^{\bar{\infty}} u(x, \lambda) \int_0^{\bar{\infty}} \bar{u}(t, \lambda) \int_0^{\bar{\infty}} e^{i\xi(\lambda-\mu)} u_0(t, \mu) F(\mu) d\mu dt d\lambda. \quad (23)$$

Поскольку по формуле (4) определяется унитарный оператор, то существование пределов (23) эквивалентно существованию следующих пределов:

$$G_{\pm}(\lambda) = s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \int_0^{\bar{\infty}} \bar{u}(t, \lambda) \int_0^{\bar{\infty}} e^{i\xi(\lambda-\mu)} u_0(t, \mu) F(\mu) d\mu dt. \quad (24)$$

По аналогии с (10) и (11) введем функции $v_0(x, \lambda)$ и $w_0(x, \lambda)$, соответствующие оператору L_0 , а по аналогии с (4), (13) и (14) введем операторы U_0 , V_0 и W_0 . Обозначим через $K_0(x, t)$ ядро оператора преобразования, соответствующего дифференциальной операции I_0 .

Соотношение (24) напомним в виде

$$G_{\pm}(\lambda) = s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \sum_{n=1}^5 G_n(\xi, \lambda), \quad (25)$$

где

$$G_1(\xi, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\bar{\infty}} \int_0^{\bar{\infty}} F(\mu) e^{i\xi(\lambda-\mu)} [\bar{S}_0(\lambda) e^{-i\lambda\eta} + e^{i\lambda\eta}] [S_0^0(\mu) e^{i\eta\mu} + e^{-i\eta\mu}] d\mu dt,$$

$$G_2(\xi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\bar{\infty}} \left\{ \int_0^{\bar{\infty}} F(\mu) e^{i\xi(\lambda-\mu)} [S_0^0(\mu) e^{i\eta\mu} + e^{-i\eta\mu}] d\mu \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\bar{\infty}} \bar{v}(\eta, \lambda) \bar{K}(t, \eta) d\eta \right\} dt,$$

$$G_3(\xi, \lambda) = \int_0^{\bar{\infty}} \bar{u}(t, \lambda) \int_0^{\bar{\infty}} e^{i\xi(\lambda-\mu)} F(\mu) \int_0^{\bar{\infty}} v_0(\eta, \mu) K_0(t, \eta) d\eta d\mu dt,$$

$$G_4(\xi, \lambda) = \int_0^{\bar{\infty}} \bar{u}(t, \lambda) \int_0^{\bar{\infty}} e^{i\xi(\lambda-\mu)} F(\mu) w_0(t, \mu) d\mu dt,$$

$$G_5(\xi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\bar{\infty}} \bar{w}(t, \lambda) \int_0^{\bar{\infty}} e^{i\xi(\lambda-\mu)} [S_0^0(\mu) e^{i\eta\mu} + e^{-i\eta\mu}] F(\mu) d\mu dt.$$

Имеем

$$s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\bar{\infty}} \int_0^{\bar{\infty}} F(\mu) \bar{S}_0(\lambda) S_0^0(\mu) e^{i\xi(\lambda-\mu)} e^{-i\eta(\lambda-\mu)} d\mu dt =$$

$$\begin{aligned}
&= s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2\pi} \overline{S}_0(\lambda) \int_{-\xi}^{\infty} e^{-t\eta\lambda} \int_0^{\infty} e^{t\eta\mu} F(\mu) S_0^0(\mu) d\mu d\eta = \\
&= \begin{cases} \overline{S}_0(\lambda) S_0^0(\lambda) F(\lambda) & \text{при } \xi \rightarrow +\infty, \\ 0 & \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \end{cases} \\
& s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(\mu) e^{t\xi(\lambda-\mu)} e^{t\eta(\lambda+\mu)} d\mu dt = \\
&= s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\xi}^{\infty} e^{t\eta\lambda} \int_0^{\infty} e^{-t\eta\mu} F(\mu) d\mu d\eta = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi \rightarrow +\infty, \\ F(\lambda) & \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \end{cases} \\
& s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(\mu) \overline{S}_0(\lambda) e^{t\xi(\lambda-\mu)} e^{-t\eta(\lambda+\mu)} d\mu dt = \\
&= s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \overline{S}_0(\lambda) e^{t2\xi\lambda} \int_{\xi}^{\infty} e^{-t\eta\lambda} \int_0^{\infty} e^{-t\eta\mu} F(\mu) d\mu d\eta = 0, \\
& s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(\mu) S_0^0(\mu) e^{t\xi(\lambda-\mu)} e^{t\eta(\lambda+\mu)} d\mu dt = \\
&= s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} e^{t2\xi\lambda} \int_{-\xi}^{\infty} e^{t\eta\lambda} \int_0^{\infty} e^{t\eta\mu} F(\mu) S_0^0(\mu) d\mu d\eta = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} G_1(\xi, \lambda) = \begin{cases} \overline{S}_0(\lambda) S_0^0(\lambda) F(\lambda) & \text{при } \xi \rightarrow +\infty, \\ F(\lambda) & \text{при } \xi \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (26)$$

Докажем соотношения

$$s\text{-}\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} G_v(\xi, \lambda) = 0, \quad v = 2, 3, 4, 5. \quad (27)$$

Обозначим

$$\varphi_1(t) = \int_0^{\infty} e^{t\mu} F(\mu) S_0^0(\mu) d\mu, \quad \varphi_2(t) = \int_0^{\infty} e^{-t\mu} F(\mu) d\mu.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi} G_2(\xi, \lambda) &= e^{t\xi\lambda} \int_0^{\infty} [\varphi_1(t-\xi) + \varphi_2(t+\xi)] \int_t^{\infty} \overline{v}(\eta, \lambda) \overline{K}(t, \eta) d\eta dt = \\
&= e^{t\xi\lambda} \int_0^{\infty} \overline{v}(\eta, \lambda) \int_0^{\eta} \overline{K}(t, \eta) [\varphi_1(t-\xi) + \varphi_2(t+\xi)] dt d\eta, \quad (28)
\end{aligned}$$

причем законность перестановки порядка интегрирования в (28) доказывается использованием оценок ядра $K(x, t)$. В силу ограниченности оператора V имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \bar{v}(\eta, \lambda) \int_0^{\eta} \bar{K}(t, \eta) [\varphi_1(t - \xi) + \varphi_2(t + \xi)] dt d\eta \right|^2 d\lambda \leq \\
& \leq \|V\|^2 \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\eta} \bar{K}(t, \eta) [\varphi_1(t - \xi) + \varphi_2(t + \xi)] dt \right|^2 d\eta \leq \\
& \leq 2\|V\|^2 \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\eta} |K(t, \eta)|^2 dt \right) \left(\int_{-\xi}^{\eta-\xi} |\varphi_1(\tau)|^2 d\tau + \int_{\xi}^{\eta+\xi} |\varphi_2(\tau)|^2 d\tau \right) d\eta, \quad (29)
\end{aligned}$$

где $\|V\|$ — норма оператора V . Из равенства (28) и неравенства (29) легко следует справедливость соотношения (27) с $\nu = 2$.

Очевидно, что

$$\int_0^{\infty} |G_3(\xi, \lambda)|^2 d\lambda = \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-t\xi\mu} F(\mu) \int_t^{\infty} v_0(\eta, \mu) K_0(t, \eta) d\eta d\mu \right|^2 dt. \quad (30)$$

Однако

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \left| F(\mu) \int_t^{\infty} v_0(\eta, \mu) K_0(t, \eta) d\eta \right| d\mu \right)^2 dt \leq \\
& \leq \|F\|^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left| \int_t^{\infty} v_0(\eta, \mu) K_0(t, \eta) d\eta \right|^2 d\mu dt \leq \\
& \leq \|F\|^2 \|V_0\|^2 \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} |K_0(t, \eta)|^2 d\eta dt < \infty, \quad (31)
\end{aligned}$$

где $\|F\|$ и $\|V_0\|$ — нормы функции $F(\mu)$ и оператора V_0 соответственно. Из равенства (30) с учетом (31) следует соотношение (27) с $\nu = 3$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Конечный отрезок $\delta_1 = [\alpha, \beta]$ ($0 < \alpha < \beta$) выберем так, чтобы на множестве $\delta_2 = (0, \alpha) \cup (\beta, \infty)$ выполнялось неравенство

$$\int_{\delta_2} |F(\mu)|^2 d\mu < \frac{\varepsilon}{4} (\|W\|^2 + \|W_0\|^2)^{-1}, \quad (32)$$

где $\|W\|$ и $\|W_0\|$ — нормы операторов W и W_0 . Положим

$$\Delta_1 = \left[\frac{\alpha}{2}, 2\beta \right], \quad \Delta_2 = \left(0, \frac{\alpha}{2} \right) \cup (2\beta, \infty)$$

и введем обозначения

$$a = \sin \frac{\pi}{m}, \quad b = \sin \frac{\pi}{2n}, \quad (33)$$

$$M = \max_{0 < k < n, \lambda \in \delta_1} |S_k(\lambda)|, \quad M_0 = \max_{0 < k < m, \lambda \in \Delta_1} |S_k^0(\lambda)|. \quad (34)$$

Очевидно, что

$$\int_0^{\infty} |G_4(\xi, \lambda)|^2 d\lambda = \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-l\xi\mu} F(\mu) w_0(t, \mu) d\mu \right|^2 dt. \quad (35)$$

Докажем соотношение

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-l\xi\mu} F(\mu) w_0(t, \mu) d\mu \right|^2 dt = 0. \quad (36)$$

Действительно, в силу (32)

$$\int_0^{\infty} \left| \int_{\xi_1}^{\infty} e^{-l\xi\mu} F(\mu) w_0(t, \mu) d\mu \right|^2 dt \leq \|W_0\|^2 \int_{\xi_1}^{\infty} |F(\mu)|^2 d\mu < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (37)$$

Кроме того, с учетом (33) и (34) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(\int_{\xi_1}^{\infty} |F(\mu) w_0(t, \mu)| d\mu \right)^2 dt \leq \\ & \leq M_0^2 (m-1)^2 \int_0^{\infty} \left(\int_{\xi_1}^{\infty} |F(\mu)| e^{-\alpha\mu t} d\mu \right)^2 dt < \infty. \end{aligned}$$

В силу последнего неравенства

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} \left| \int_{\xi_1}^{\infty} e^{-l\xi\mu} F(\mu) w_0(t, \mu) d\mu \right|^2 dt = 0.$$

Но тогда существует число $\xi_0 > 0$ такое, что при $\xi > \xi_0$ имеет место неравенство

$$\int_0^{\infty} \left| \int_{\xi_1}^{\infty} e^{-l\xi\mu} F(\mu) w_0(t, \mu) d\mu \right|^2 dt < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (38)$$

Используя неравенства (37) и (38), получим, что при $\xi > \xi_0$

$$\int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-l\xi\mu} F(\mu) w_0(t, \mu) d\mu \right|^2 dt \leq 2 \sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} \left| \int_{\xi_i}^{\infty} e^{-l\xi\mu} F(\mu) w_0(t, \mu) d\mu \right|^2 dt < \varepsilon.$$

Тем самым, соотношение (36) доказано. Учитывая равенство (35), из (36) получаем соотношение (27) с $\nu_1 = 4$.

Нетрудно убедиться, что функцию $G_3(\xi, \lambda)$ можно представить в виде

$$G_3(\xi, \lambda) = \Psi_1(\xi, \lambda) + \Psi_2(\xi, \lambda), \quad (39)$$

где

$$\Psi_1(\xi, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\infty} e^{i\xi(\lambda-\mu)} F(\mu) \int_0^{\infty} w(t, \lambda) [S_0^0(\mu) e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}] dt d\mu, \quad (40)$$

$$\Psi_2(\xi, \lambda) = \frac{1}{V 2\pi} \int_0^\infty \bar{w}(t, \lambda) \int_{\xi_1}^\infty F(\mu) [S_0^0(\mu) e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}] d\mu dt. \quad (41)$$

В силу (32) и (40)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |\Psi_2(\xi, \lambda)|^2 d\lambda \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \|W\|^2 \int_0^\infty \left| \int_{\xi_1}^\infty e^{-i\mu t} F(\mu) [S_0^0(\mu) e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}] d\mu \right|^2 dt \leq \\ & \leq 2 \|W\|^2 \int_{\xi_1}^\infty |F(\mu)|^2 d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \bar{w}(t, \lambda) [S_0^0(\mu) e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}] dt = \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\bar{S}_k(\lambda)}{i\lambda\omega_k + i\mu} + S_0^0(\mu) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\bar{S}_k(\lambda)}{i\lambda\omega_k - i\mu}. \end{aligned} \quad (43)$$

С учетом (33) и (34) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda_1}^\infty \left\{ \int_{\xi_1}^\infty |F(\mu)| \left(\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda\omega_k + \mu} \right| + \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda\omega_k - \mu} \right| \right) d\mu \right\}^2 d\lambda \leq \\ & \leq \frac{4}{b^2} M^2 (n-1)^2 \int_{\lambda_1}^\infty \left(\int_{\xi_1}^\infty \frac{|F(\mu)|}{\lambda + \mu} d\mu \right)^2 d\lambda < \infty. \end{aligned} \quad (44)$$

Кроме того, в силу доказанной выше леммы

$$\int_{\lambda_1}^\infty \left\{ \int_{\xi_1}^\infty |F(\mu)| \left(\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda\omega_k + \mu} \right| + \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda\omega_k - \mu} \right| \right) d\mu \right\}^2 d\lambda < \infty. \quad (45)$$

Однако в силу равенств (41), (43) и неравенств (44), (45)

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \int_0^\infty |\Psi_1(\xi, \lambda)|^2 d\lambda = 0.$$

Поэтому существует число $\xi_1 > 0$ такое, что при $\xi > \xi_1$

$$\int_0^\infty |\Psi_1(\xi, \lambda)|^2 d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (46)$$

Из равенства (39) и неравенств (42), (46) следует, что при $\xi > \xi_1$

$$\int_0^\infty |G_5(\xi, \lambda)|^2 d\lambda < 2\varepsilon.$$

Тем самым, соотношение (27) с $v=5$ также доказано.

В силу соотношений (26) и (27) из (25) получаем равенства

$$G_+(\lambda) = \overline{S}_0(\lambda) S_0^0(\lambda) F(\mu), \quad G_-(\lambda) = F(\lambda). \quad (47)$$

Однако, согласно (23) и (24),

$$U_{\pm}(A, A_0)f(x) = \int_0^{\infty} u(x, \lambda) G_{\pm}(\lambda) d\lambda.$$

Отсюда с учетом (22) и (47) получаем справедливость формул (17) и (18), из которых легко получается также формула (19).

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2. Пусть дифференциальные операции l и l_0 имеют одинаковый порядок и обладают операторами преобразования, а L и L_0 — некоторые самосопряженные операторы в $L^2(0, \infty)$, порожденные этими операциями соответственно. Тогда для пары L и L_0 существуют все волновые операторы и справедливы формулы

$$U_+(L, L_0)f(x) = \int_0^{\infty} u(x, \lambda) \frac{S_0^0(\lambda)}{S_0(\lambda)} \int_0^{\infty} \overline{u}_0(t, \lambda) f(t) dt d\lambda,$$

$$U_-(L, L_0)f(x) = \int_0^{\infty} u(x, \lambda) \int_0^{\infty} \overline{u}_0(t, \lambda) f(t) dt d\lambda,$$

$$S(L, L_0)f(x) = \int_0^{\infty} \overline{u}(x, \lambda) \frac{S_0(\lambda)}{S_0^0(x)} \int_0^{\infty} \overline{u}_0(t, \lambda) f(t) dt d\lambda,$$

а также аналогичные формулы для операторов $U_{\pm}(L_0, L)$ и $S(L_0, L)$, где $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0, \infty)$.

Заметим, что в случае, когда операторы L и L_0 не имеют отрицательных собственных значений, теорема 2 может быть получена из теоремы 1 применением принципа инвариантности (см. [2], стр. 59).

Из полученных формул для операторов рассеяния следует, что $U_0 S(L, L_0) U_0^*$ и $U S(L_0, L) U^*$ суть операторы умножения на $S_0(\lambda) \times \times \overline{S}_0^0(\lambda)$ и $S_0^0(\lambda) \overline{S}_0(\lambda)$ соответственно. Тем самым, в данных рассеяния операторов L и L_0 только лишь функции $S_0(\lambda)$ и $S_0^0(\lambda)$ связаны с операторами рассеяния $S(L, L_0)$ и $S(L_0, L)$. Поэтому на основании результатов работы [3] естественно ожидать, что при фиксированном L_0 в рассматриваемом классе оператор L не определяется однозначно по операторам рассеяния даже при отсутствии собственных значений. Действительно, пусть оба оператора L и L_0 порождены дифференциальной операцией d^4/dx^4 , причем L соответствует краевым условиям $y''(0) = y'''(0) = 0$, а L_0 — условиям $y(0) = y'(0) = 0$. Легко убедиться, что в данном случае $S_0(\lambda) = S_0^0(\lambda) = i$. Поэтому $S(L, L_0) = S(L_c, L) = S(L_0, L_0) = I$.

Покажем, что если вместе с оператором L_0 фиксировать и краевые условия, то опять оператор L не определится однозначно по

операторам рассеяния. Действительно, пусть оператор L_0 тот же, что и в указанном выше примере. Рассмотрим на полуоси $\lambda > 0$ функции

$$S_0(\lambda) = \varepsilon e^{-\lambda} + i\sqrt{1 - \varepsilon^2 \lambda^2} e^{-2\lambda}, \quad S_1(\lambda) = -1 - i + \delta \lambda e^{-\lambda} \varphi(\lambda), \quad (48)$$

где $\varphi(\lambda)$ — полином или финитная функция, имеющая абсолютно непрерывные производные до четвертого порядка включительно, а ε и δ — произвольные числа (ε вещественно). Используя результаты работ [3], [11], [12], можно доказать, что при достаточно малых ε и δ функции (48) являются функциями рассеяния некоторого самосопряженного дифференциального оператора L четвертого порядка, которому соответствуют краевые условия $y(0) = y'(0) = 0$. При этом коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (8) с $n=2$, и, кроме того, оператор L не имеет собственных значений. Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ $S_0(\lambda) = i$ и, следовательно, $S(L, L_0) = S(L_0, L) = I$. Полагая в (48) $\varepsilon = 0$ и меняя число δ , мы получим различные операторы L , имеющие с L_0 одинаковые операторы рассеяния.

В связи с приведенным примером укажем некоторый общий случай, когда дифференциальный оператор не имеет собственных значений. С этой целью предположим, что коэффициенты $p_k(x)$ в (1) удовлетворяют условиям (2), и введем на полуоси $(0, \infty)$ функцию

$$Q(\xi) = \sum_{k=0}^{2n-2} C \left\{ \int_0^{\xi b_k} \left(\frac{x}{b_k} \right)^{2n-1-k} |p_k(x)| dx + \xi^{2n-1-k} \int_{\xi b_k}^{\infty} |p_k(x)| dx \right\},$$

где

$$b_k^{2n-1-k} = \frac{\left(n - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right)! \left(n - \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right)!}{n - \frac{k}{2}}, \quad k=0, 1, \dots, 2n-2,$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{s=0}^{n-1} \prod_{\substack{j=0 \\ s \neq j}}^{n-1} \left| \frac{\omega_s + \omega_k}{\omega_s - \omega_j} \right|.$$

Мы не исключаем случай $n=1$ и в этом случае полагаем $C=1$. Очевидно, что $Q(+0)=0$. Кроме того, $Q'(\xi) \geq 0$ и, следовательно, функция $Q(\xi)$ неубывающая.

Следующая теорема несколько усиливает результат, анонсированный автором в [13].

Теорема 3. Пусть оператор L соответствует краевым условиям $y^{(k)}(0)=0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$). Тогда, если $Q(\infty) > 1$, то собственные значения оператора L заключаются в интервале $(-\xi_0^{-2n}, \xi_0^{-2n})$, где ξ_0 — наибольший корень уравнения $Q(\xi)=1$, а если $Q(\infty) \leq 1$, т. е.

$$\sum_{k=0}^{2n-2} C \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{b_k} \right)^{2n-1-k} |p_k(x)| dx \leq 1, \quad (49)$$

то оператор L не имеет собственных значений.

Отметим, что в случае $n=1$ указанное условие (49), при котором оператор L не имеет собственных значений, известно (см., например, [14], стр. 699), а указанная снизу оценка собственных значений (при $n=1$ оператор L не имеет положительных собственных значений) уточняет оценку, полученную в [15], стр. 181.

В заключение автор благодарит В. Б. Лидского и Л. А. Сахновича за полезные обсуждения результатов.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 18.II.1985

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների զույգին համապատասխանող ցրման օպերատորների մասին (ամփոփում)

$L^2(0, \infty)$ տարածությունում դիտարկվում է անվերջությունում նվազող գործակիցներով $2n > 2$ կարգի ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ օպերատորների որոշ դասի նպաստը և, որ դիտարկվող դասի կամայական L և L_0 օպերատորների զույգի համար գոյություն ունեն ցրման $S(L, L_0)$ և $S(L_0, L)$ օպերատորները, Արտածվում են բանաձևեր ալիքային օպերատորների և ցրման օպերատորների համարի մույց է տրվում, որ դիտարկվող դասում ֆիքսած L_0 օպերատորի դեպքում 1. օպերատորը միարժեքորեն չի որոշվում ցրման օպերատորներով:

I. G. KHACHATRIAN. On scattering operators for a pair of differential operators of higher order (summary)

A class of self-adjoint differential operators of order $2n > 2$ in the space $L^2(0, \infty)$ is considered. It is proved that for any pair of operators L and L_0 from this class there exists a scattering operator $S(L, L_0)$ and $S(L_0, L)$. Formulas for wave operators and scattering operators are derived. Example are given which show that in this class for fixed L_0 it is impossible to define the operator L uniquely by means of scattering operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1966.
2. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики, т. 3, М., «Мир», 1982.
3. И. Г. Хачатрян. О некоторых обратных задачах для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси, Функц. анализ и его прилож., 17, № 1, 1983, 40—52.
4. Л. Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния, Итоги науки и техники, серия Современные проблемы математики, М., ВИНТИ, 3, 1974, 93—180.
5. М. Волленберг, В. Д. Кошманенко. О структуре волновых операторов, ДАН СССР, 244, № 2, 1979, 265—269.
6. М. А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
7. И. Г. Хачатрян. О некоторых формулах следов, ДАН Арм.ССР, 78, № 1, 1984, 23—27.
8. И. Г. Хачатрян. О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 14, № 6, 1979, 424—445.
9. И. Г. Хачатрян. Об одной обратной задаче для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 18, № 5, 1983, 394—402.

10. М. М. Маламуд. К вопросу об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений, Препринт 84. 12, Киев, Ин-т матем. АН УССР, 1984.
11. И. Г. Хачатрян. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси, ДАН Арм.ССР, 77, № 2, 1983, 55—58.
12. И. Г. Хачатрян. О одной формуле следов, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 20, № 1, 1985, 41—52.
13. И. Г. Хачатрян. Изучение точечного спектра обыкновенного дифференциального оператора, ДАН Арм.ССР, 76, № 3, 1983, 103—105.
14. Т. Като. Теория возмущений линейных операторов, М., «Мир», 1972.
15. В. А. Марченко. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения, Киев, «Наукова думка», 1977.
16. В. С. Буслаев. Рассеянные плоские волны, спектральные асимптотики и формулы следа во внешних задачах, ДАН СССР, 197, № 5, 1971, 999—1002.



УДК 517.98

А. А. ВАГАРШАКЯН

О ДИСКРЕТНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВИНЕРА-ХОПФА С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ СИМВОЛАМИ

Настоящая статья посвящена исследованию уравнения

$$x_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k-j} x_j, \quad k=0, 1, \dots \quad (1)$$

Функцию

$$a(z) = 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j, \quad |z|=1,$$

принято называть символом уравнения (1). Если символ $a(z)$ — непрерывная функция и нигде не обращается в нуль, то уравнение (1) достаточно хорошо исследовано, см. [1], [9], [12]. Определенный интерес представляет случай, когда $a(z)$ обращается в нуль. Обзор результатов работ, относящихся к случаю, когда символ уравнения (1) обращается в нуль в конечном числе точек, можно найти в книге Э. Прёсдорфа [2] и [10], [11]. К исследованию случая, когда $a(z)$ имеет бесконечно много нулей, посвящено сравнительно мало работ, см. [3], [4] и др. В этих работах разрабатывается вид общего решения уравнения (1).

Настоящая статья посвящена исследованию уравнения (1), символ которого может иметь бесконечно много нулей. В первом параграфе, опираясь на обобщение теоремы Сегё, доказывается, что если $a(z)$ имеет очень «сильные» нули, то уравнение (1) не может иметь нетривиального решения. Во втором параграфе найдены условия, обеспечивающие существование нетривиального решения уравнения (1), причем даны оценки решения, имеющего наименьший рост. В нем приводится также обобщение принципа Фрагмена-Линделефа, которое позволяет доказать теорему о точности оценки роста нетривиального решения.

1°. Как показывают исследования, относящиеся к случаю, когда $a(z)$ обращается в нуль в конечном числе точек, общая картина такова: если $a(z)$ обращается в нуль, то однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение, причем это решение, как правило, неограниченно возрастает при $j \rightarrow +\infty$. В связи с этим, естественно на $a(z)$ наложить такие условия, при которых уравнение (1) имеет смысл для $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$, растущих при $j \rightarrow +\infty$. Сначала мы займемся этим вопросом.

Введем некоторые обозначения. Пусть задана последовательность положительных чисел $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям:

$$1. \quad M_0 = 1, \quad M_n \leq M_{n+1};$$

$$2. \text{ для всякого } x \geq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{M_n} = 0;$$

$$3. M_n^2 \leq M_{n+1} M_{n-1}, n \geq 1.$$

Пусть E —замкнутое множество, лежащее на единичной окружности. Обозначим через $C(E, \{M_n\})$ пространство бесконечно дифференцируемых функций, для которых

$$\max_{z \in E} |f^{(n)}(z)| \leq M^n n! M_n, n = 0, 1, \dots,$$

где M —число, зависящее от функции f . Наименьшее из чисел M обозначим $\|f\|_{C(E, \{M_n\})}$. В случае, когда E совпадает со всей единичной окружностью ∂D , будем пользоваться также обозначением $C\{M_n\} = C(\partial D, \{M_n\})$. Пространство распределений, порождающих непрерывные линейные функционалы на $C\{M_n\}$, обозначим через $C^*\{M_n\}$.

В силу известной теоремы Т. Карлемана класс $C\{M_n\}$ не квазианалитичен в том и только в том случае, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{n M_{n+1}} < \infty. \quad (2)$$

Следовательно, при выполнении условия (2) имеет смысл говорить о носителе распределений из $C^*\{M_n\}$.

Последовательности $M_n, n = 0, 1, \dots$, которые удовлетворяют всем перечисленным выше условиям, называются допустимыми.

Если $a(z) \in C\{M_n\}$, то уравнение (1) можно записать и в следующей форме:

$$f(z^{-n-1}) = 0, f(a(z)z^n) = 0, n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Здесь неизвестным является распределение $f \in C^*\{M_n\}$, причем x_n —коэффициенты Фурье распределения f .

Естественно возникает следующая задача: какие следует наложить условия на $a(z)$, чтобы уравнение (3) имело только тривиальное решение? Из общей теории, см. [1], следует, что если $a(z)$ —непрерывная функция, не обращающаяся в нуль и $\text{ind } a = 0$, то уравнение (1) в пространствах $l_p, 1 \leq p \leq \infty$ имеет только тривиальное решение. Оказывается, что если $a(z)$ имеет «очень сильные» нули, то уравнение (3) может иметь только тривиальное решение. Действительно, пусть $a(z)$ обращается в нуль на дуге $\Delta \subseteq \partial D$. Предположим, что $f \in C^*\{M_n\}$ является решением уравнения (3). Рассмотрим функцию

$$F(z) = f\left(\frac{a(\zeta)}{\zeta - z}\right), z \in \partial D.$$

Из соотношения $f(a(z)z^n) = 0, n = 0, 1, \dots$ следует, что $F(z) \equiv 0$ при $z \in D$. С другой стороны, $F(z)$ аналитически продолжается через дугу Δ . Следовательно, $F(z) \equiv 0$ при $z \in \partial D \setminus \Delta$. Отсюда следует, что распределение $f(a \cdot)$ тождественно обращается в нуль. Если $a(z) \neq 0$, что f сосредоточена там, где $a(z)$ обращается в нуль. Если $a(z) \equiv 0$, то существует дуга Δ^* , где f обращается в нуль. Повторяя приве-

денные выше рассуждения и учитывая соотношения $f(z^{-n-1}) = 0$, $n=0, 1, \dots$, получаем $f \equiv 0$.

Приведем еще один пример уравнения (3), где наличие сильных нулей у символа $a(z)$ является причиной отсутствия нетривиального решения. Пусть $a(z)$ — непрерывная функция, а f — распределение, порожденное конечной мерой. Так как $f(z^{-n-1}) = 0$, $n=0, 1, \dots$, то в силу теоремы Рисса, f порождается абсолютно непрерывной мерой. Допустим, что

$$f(g) = \int_{\partial D} f(z) g(z) dm(z), \quad g \in C(\partial D).$$

Тогда второе семейство условий в (3) можно записать в виде:

$$\int_{\partial D} f(z) a(z) z^n dm(z) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

В силу теоремы Сегё для того, чтобы $f(z) a(z) \equiv 0$, необходимо и достаточно условие $\log |f(z) a(z)| \in L_1(\partial D)$. Так как $\log |f(z)| \in L_1(\partial D)$, то мы переходим к условию $\log |a(z)| \in L_1(\partial D)$.

Приведенная ниже теорема является обобщением известной теоремы Сегё. Она позволяет привести новые классы уравнений вида (3), которые имеют только тривиальное решение.

Теорема 1. Пусть $a(z) \in C\{n^{\sigma n}\}$, $f \in C^*\{n^{\sigma n}\}$, $0 < \sigma < \infty$, удовлетворяют условию

$$f(a(z) z^n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда из существования замкнутого множества $E \subseteq \partial D$ такого, что $M_{\sigma}(E) > 0$, $0 < \sigma \leq 1$ и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{1-\sigma+\frac{2-\sigma}{\alpha}} \log \|a\|_{C(E, \{n^{\sigma n}\})} = -\infty,$$

где $E_{\delta} = \bigcup_{z \in E} \{w, |z - w| \leq \delta\}$, следует включение

$$\text{supp } f \subseteq \{z, z \in \partial D \text{ и } a(z) = 0\}.$$

Доказательство. В силу теоремы О. Фростмана, см. [5], существует вероятностная мера $d\mu$, сосредоточенная в E и такая, что для любой дуги $\Delta \subseteq \partial D$ имеет место оценка:

$$\mu(\Delta) \leq c |\Delta|^{\sigma},$$

где $c > 0$ — постоянное число, а $|\Delta|$ — длина дуги Δ . Пусть $\delta > 0$ — некоторое число. Введем функцию

$$F_{\delta}(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} \frac{\mu(x + \delta) - \mu(x - \delta)}{2\delta} dx \right\}.$$

Заметим, что эта функция допускает оценку

$$\frac{1}{|F_{\delta}(z)|} \leq \exp \left\{ \frac{c}{(2\delta)^{1-\sigma}} \right\}, \quad |z| < 1.$$

Далее, оценим значения функций

$$F(z) = \exp \left\{ \int_E \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right\}$$

на множестве

$$\Omega = \{z; z \in D, 1 - |z| \leq A \rho^{2-\sigma}(z, E)\},$$

где $\rho(z, E)$ — расстояние точки z от множества E .

Имеет место неравенство

$$\int_E \frac{1 - |z|^2}{|\zeta_0 - z|^2} d\mu(\zeta) \leq 2 A \rho^{2-\sigma}(z, E) \int_E \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - \zeta_0|^2 + \rho^2(z, E)},$$

где ζ_0 — ближайшая к z точка множества E . Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \rho^{2-\sigma}(z, E) \int_{x_0}^{x_1 + \pi} \frac{\mu(x) - \mu(x_0)}{[(x - x_0)^2 + \rho^2(z, E)]^{3/2}} dx &\leq \rho^{2-\sigma}(z, E) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{t^2}{(t^2 + \rho^2(z, E))^{3/2}} dt, \end{aligned}$$

где $\zeta_0 = e^{ix_0}$. Следовательно, функция $F(z)$ ограничена в области Ω , причем число A можно выбрать настолько малым, чтобы имело место неравенство:

$$|F(z)| \leq 1 + \varepsilon, \quad z \in \Omega,$$

где $\varepsilon > 0$ — наперед заданное число.

Введем функцию

$$\Phi(z) = F_\delta^n((1 - \delta^{2-\sigma})z) f\left(\frac{a(\zeta)}{(\zeta - z) F_\delta^n((1 - \delta^{2-\sigma})\zeta)}\right), \quad |z| < 1.$$

Заметим, что эта функция не зависит от n и δ . Далее, имеем

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &\leq |F_\delta^n((1 - \delta^{2-\sigma})z)| \|f\|_{C^0, \{n^{2n}\}} \|a(\zeta) F_\delta^{-n}((1 - \delta^{2-\sigma})\zeta)\|_{C^0, \{n^{2n}\}} \times \\ &\times \|(\zeta - z)^{-1}\|_{C^0, \{n^{2n}\}}. \end{aligned}$$

Из интегрального представления Коши и неравенства Гарнака следует оценка

$$\left| \frac{d^m}{dz^m} F_\delta^{-n}(z) \right| \leq \frac{4^m m!}{\delta^{(2-\sigma)m}} \max_{|z-w|=\frac{1}{2}\delta^{2-\sigma}} |F_\delta^{-n}(w)| \leq \frac{4^m m!}{\delta^{(2-\sigma)m}} |F_\delta^{-12n}(z)|,$$

где $|z| = 1 - \delta^{2-\sigma}$. Учитывая ранее полученную оценку для функции $F(z)$ в области Ω , имеем

$$\left| \frac{d^m}{dz^m} F_\delta^{-n}((1 - \delta^{2-\sigma})z) \right| \leq A_0^m \frac{m!}{\delta^{(2-\sigma)m}} e^{c_n},$$

где $0 < c < 1$, $|z| = 1$, $\rho(z, E) \geq \left(1 + \frac{1}{A}\right)\delta$. Далее, заметим, что при

$|z| = 1$ и $\rho(z, E) \leq \left(1 + \frac{1}{A}\right)\delta$ имеет место оценка

$$\left| \frac{d^m}{dz^m} F_{\delta}^{-n}((1 - \delta^{2-\sigma})z) \right| \leq \frac{2^m m!}{\delta^{(2-\sigma)m}} \max_{|z-\xi| < \frac{1}{2} \delta^{2-\sigma}} \left| F_{\delta}^{-n}((1 - \delta^{2-\sigma})\xi) \right| \leq \\ \leq A_1^m \frac{m!}{\delta^{(2-\sigma)m}} e^{\frac{n}{(2\delta)^{1-\sigma}}}.$$

Введем еще одну функцию

$$f_{\delta, n}(z) = e^{-n} a(z) F_{\delta}^{-n}((1 - \delta^{2-\sigma})z), \quad |z|=1.$$

Для этой функции имеет место следующая оценка:

$$\|f_{\delta, n}\|_{C\{n^{an}\}} \leq \|a\|_{C(E_{\delta}, \{n^{an}\})} \|e^{-n} F_{\delta}^{-n}((1 - \delta^{2-\sigma})z)\|_{C(E_{\delta}, \{n^{an}\})} + \\ + \|a\|_{C\{n^{an}\}} \|e^{-n} F_{\delta}^{-n}((1 - \delta^{2-\sigma})z)\|_{C(\partial D \setminus E_{\delta}, \{n^{an}\})} \leq \\ \leq \|a\|_{C(E_{\delta}, \{n^{an}\})} \sup_{m \geq 1} \left[\frac{A_1^m}{(2\delta)^{(2-\sigma)m} m^{am}} e^{\frac{n}{(2\delta)^{1-\sigma}}} \right]^{1/m} + \\ + \|a\|_{C\{n^{an}\}} \sup_{m \geq 1} \left[\frac{A_0^m}{(2\delta)^{(2-\sigma)m} m^{am}} e^{-(1-c)n} \right]^{1/m} \leq \\ \leq B \frac{e^{\frac{n}{(2\delta)^{1-\sigma}}}}{\delta^{2-\sigma}} \|a\|_{C(E_{\delta}, \{n^{an}\})} + \frac{B}{\delta^{2-\sigma}} \|a\|_{C\{n^{an}\}} \sup_{m \geq 1} \left[\frac{e^{-(1-c)n}}{m^{am}} \right]^{1/m}. \quad (4)$$

Из условия теоремы следует, что можно выбрать такую последователь-

ность δ_n , чтобы $n\delta_n^{\frac{2-\sigma}{n}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, кроме этого

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{n}{(2\delta_n)^{1-\sigma}}}}{\delta_n^{2-\sigma}} \|a\|_{C(E_{\delta_n}, \{n^{an}\})} = 0.$$

Подставляя выбранную последовательность в (4), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{\delta_n, n}\|_{C\{n^{an}\}} = 0.$$

Следовательно

$$\Phi(0) = F_{\delta_n}^n(0) f\left(\frac{a(\zeta)}{\zeta F_{\delta_n}^n((1 - \delta_n^{2-\sigma})\zeta)}\right) = f(\zeta^{-1} f_{\delta_n, n}(\zeta)) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $F_{\delta}(0) = e^{-1}$. Аналогичными рассуждениями можно доказать, что $\Phi(z) = 0$ при $|z| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Поэтому $\Phi(z) \equiv 0$ при $|z| < 1$. Окончательно получаем, что распределение $f(a \cdot)$ удовлетворяет условию:

$$f(a(z)z^n) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Следовательно, $f(a \cdot) \equiv 0$. Откуда следует, что

$$\text{supp } f \subseteq \{z; z \in \partial D, a(z) = 0\}.$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение для уравнения (1).

Теорема 2. Пусть $a(z) \in C\{n^{\alpha}\}$, $0 < \alpha < \infty$, существует замкнутое множество $E \subseteq \partial D$ такое, что $M_{\alpha}(E) > 0$, $0 < \sigma < 1$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-\sigma+\frac{2-\sigma}{\alpha}} \lim_{\delta \rightarrow 0} |a|_{C(E_{\delta}, \{n^{\alpha}\})} = -\infty.$$

Тогда уравнение (1) не может иметь нетривиального решения, допускающего оценку

$$|x_n| \leq A e^{Bn^{\frac{1}{1+\alpha}}}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где A и B — постоянные числа.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — некоторое решение уравнения (1), допускающее оценку (5). Введем распределение f , которое на функциях z^n , $n = 0, \pm 1, \dots$ принимает значения

$$f(z^n) = 0, \quad n = -1, -2, \dots, \quad f(z^n) = x_n, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Из оценки (5) следует, что $f \in C^* \{n^{\alpha}\}$, см. С. Мандельбройт [6]. Так как $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ является решением уравнения (1), то $f(a(z)z^n) = 0$, $n = 0, 1, \dots$. В силу теоремы 1

$$\text{supp } f \subseteq \{z; z \in \partial D, a(z) = 0\}. \quad (6)$$

Пусть $\Delta \subseteq \partial D$ — некоторая дуга, где $a(z)$ не обращается в нуль. Построим функцию $\varphi(z) \in C\{n^{\alpha}\}$ такую, что на Δ она тождественно обращается в нуль, а в некоторой окрестности $\text{supp } f$ равна единице. В силу (6), $f(\varphi \cdot) \equiv f(\cdot)$. Далее, имеем

$$f(\varphi(z)z^n) = f(z^n) = 0, \quad n = -1, -2, \dots.$$

В силу теоремы 1, имеем $\text{supp } f \subseteq \{z; \varphi(z) = 0\}$. Следовательно, $f \equiv 0$.

2°. Таким образом, наличие «сильных» нулей у символа $a(z)$ может стать причиной отсутствия нетривиальных решений уравнения (1). В настоящем параграфе предполагается, что $a(z)$ не имеет «сильных» нулей. В частности, в течение всего параграфа предполагается, что $\log |a(z)| \in L_1(\partial D)$. При некоторых дополнительных ограничениях удается построить нетривиальное решение.

Теорема 3. Пусть символ уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям:

1. $\log |a(z)| \in L_1(\partial D)$, функция $\frac{a(z)}{|a(z)|}$ допускает непрерывное продолжение на всю ∂D и ее преобразование Гильберта ограничено,

$$\text{ind } \frac{a(z)}{|a(z)|} = 0;$$

2. для некоторой допустимой последовательности M_n , $n = 0, 1, \dots$, $a(z) \in C\{M_n\}$;

3. существует замкнутое множество

$$E \subseteq \{z; z \in \partial D, a(z) = 0\}$$

такое, что $M_{\alpha}(E) > 0$, $0 < \alpha < 1$, и сходится интеграл

$$\int_{\partial D} \frac{V|a(z)|}{\rho^{1-\alpha}(z, E)} dm(z) < \infty;$$

4. существует функция $\lambda(x) \geq 1$, $x > 0$, такая, что

$$\lambda(x) (x\lambda''(x) + \lambda'(x)) \leq x (\lambda'(x))^2, \quad x^3 \lambda(x) \leq C \sup_k \frac{x^k}{M_k}, \quad x > 1,$$

и для любой дуги $\Delta \subseteq \partial D$ имеет место оценка

$$\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \log \frac{1}{V|a(z)|} dm(z) \leq \log \lambda \left(\frac{1}{|\Delta|} \right) + C.$$

Тогда уравнение (1) имеет нетривиальное решение, допускающее оценку

$$|x_n| \leq A n^{\frac{1-\alpha}{2}} \lambda(n).$$

Доказательство. Факторизуем функцию $a(z)$. Определим факторы следующими формулами:

$$a_+(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} \log a(e^{ix}) dx \right\}, \quad |z| < 1$$

и

$$a_-(z) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} \log a(e^{ix}) dx \right\}, \quad |z| > 1.$$

Заметим, что почти всюду на ∂D имеет место равенство

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} a_+(r\zeta) a_-\left(\frac{\zeta}{r}\right) = \frac{1}{a(\zeta)}.$$

Теперь выясним к какому пространству принадлежит функция $a_+(z)$? Имеем

$$\begin{aligned} \log |a_+(z)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{ix}-z|^2} \log \frac{1}{|a(e^{ix})|} dx + C \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{ix}-z|^2} \left(\frac{1}{2x} \int_{y-x}^{y+x} \log \frac{1}{|a(e^{it})|} dt \right) dx + C_1 \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{ix}-z|^2} \log \lambda \left(\frac{1}{2x} \right) dx + C_1 \leq \log \lambda \left(\frac{1}{1-|z|} \right) + C_1 z = |z| e^{iy}, \end{aligned}$$

где C и C_1 — некоторые постоянные числа. Здесь мы воспользовались тем, что $\log \lambda \left(\frac{1}{|z|} \right)$ — супергармоническая функция. Следовательно,

$$|a_+(z)| \leq C \lambda \left(\frac{1}{1-|z|} \right), \quad |z| < 1.$$

Так как $M_a(E) > 0$, то в силу теоремы О. Фростмана, существует вероятностная мера $d\mu$, сосредоточенная в E и допускающая оценку

$$\mu(\Delta) \leq C|\Delta|^2$$

для любой дуги $\Delta \subseteq \partial D$.

Решение $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ уравнения (1) мы ищем в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k = a_+(z) \left(1 + a \int_E \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z} \right), |z| < 1.$$

Заметим, что интеграл, порожденный мерой $d\mu$, допускает оценку

$$\left| \int_E \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z} \right| \leq \frac{M}{(1 - |z|)^{1-\alpha}}.$$

Следовательно, для $f(z)$ имеем неравенство

$$|f(z)| \leq \frac{M}{(1 - |z|)^{1-\alpha}} \lambda \left(\frac{1}{1 - |z|} \right), |z| < 1.$$

Из условия 3, наложенного на последовательность $\{M_n\}_{n=0}^\infty$, следует, что граничные значения $f(z)$ порождают непрерывный функционал на $C[M_n]$.

Заметим, что если $a(z)$ достаточно быстро стремится к нулю при приближении z к множеству E , то для любого $\varphi \in C[M_n]$ имеем

$$f(a(z)\varphi(z)) = \int_{\partial D} f(z)a(z)\varphi(z) dm(z),$$

где $f(\cdot)$ — распределение, порожденное граничными значениями $f(z)$. Для этого достаточно, например, выполнения условия $f(z)a(z) \in L_1(\partial D)$. Заметим, что при $z \in \partial D \setminus E$ имеет место равенство

$$f(z)a(z) = \frac{1}{a_-(z)} \left(1 + a \int_E \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z} \right).$$

Так как $\frac{1}{a_-(z)} \in L_\infty(\partial D)$, то мы приходим к условию

$$\frac{1}{a_-(z)} \int_E \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z} \in L_1(\partial D).$$

Учитывая, что $|a_-(z)| \geq C|a(z)|^{-\frac{1}{2}}$, имеем

$$|a(z)|^{1/2} \int_E \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - z|} \in L_1(\partial D). \quad (7)$$

Из условия 3 теоремы следует (7).

При подходящем выборе постоянной a последовательность x_n , $n = 0, 1, \dots$, где $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$, станет решением уравнения (1). Действительно, для любого $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$f(a(z)z^n) = \int_{\partial D} f(z)a(z)z^n dm(z) = \int_{\partial D} z^n \left(1 + a \int_E \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z}\right) \frac{dm(z)}{a(z)} = 0.$$

Это следует из того, что под последним интегралом стоит аналитическая вне единичного круга функция из пространства H^1 . Равенство

$$\int_{\partial D} f(z)a(z)dm(z) = 0$$

достигается с помощью выбора числа a .

Теперь оценим коэффициенты Тейлора функции $f(z)$. Из неравенства

$$|a_+(z)| \leq C\lambda \left(\frac{1}{1-|z|} \right), \quad |z| < 1$$

следует оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leq C^2 \lambda^2 \left(\frac{1}{1-|z|} \right), \quad r = |z|.$$

Полагая в этом неравенстве $r = 1 - \frac{1}{n}$, получаем

$$\left(\sum_{k=n}^{2n} |a_k|^2 \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{4n} \leq C^2 \lambda^2(n).$$

Следовательно

$$\sum_{k=n}^{2n} |a_k|^2 \leq e^4 C^2 \lambda^2(n). \quad (8)$$

Теперь оценим коэффициенты Фурье меры $d\mu$. Пусть $\mu(t)$ — неубывающая функция, порождающая меру $d\mu$. Мы знаем, что $\mu(t) \in \text{Lip}_\alpha$. Далее имеем

$$4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}_n|^2 \sin^2 nt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mu(x+t) - \mu(x-t)|^2 dx,$$

где $\hat{\mu}_n$ — коэффициенты Фурье функции $\mu(t)$. Так как $\sin^2 nt \geq \frac{3}{4}$ при

$$\frac{\pi}{3} \leq |nt| \leq \frac{2\pi}{3}, \quad \text{то}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n} |\hat{\mu}_k|^2 &\leq \frac{1}{6\pi} \int_0^{2\pi} \left| \mu\left(x + \frac{2\pi}{3n}\right) - \mu\left(x - \frac{2\pi}{3n}\right) \right|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{M}{n} \sup_x \left| \mu\left(x + \frac{2\pi}{3n}\right) - \mu\left(x - \frac{2\pi}{3n}\right) \right| \leq \frac{M}{n^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Для коэффициентов Фурье μ_n меры $d\mu$ имеем $\mu_n \sim n^{\hat{\mu}_n}$. Поэтому

$$\sum_{k=n}^{2n} |\mu_k|^2 \leq M n^{1-\alpha}. \quad (9)$$

Введем обозначение

$$1 + \alpha \int_E \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad |z| < 1.$$

В силу (9), имеем

$$\sum_{k=n}^{2n} |b_k|^2 \leq M n^{1-\alpha}. \quad (10)$$

Заметим, что $x_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Следовательно

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n/2} a_k b_{n-k} \right| + \left| \sum_{k=n/2}^n a_k b_{n-k} \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n/2} |a_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n/2} |b_{n-k}|^2 \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\sum_{k=n/2}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n/2}^n |b_{n-k}|^2 \right)^{1/2} \leq M n^{(1-\alpha)/2} \left(\sum_{k=0}^{n/2} |a_k|^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{2k} \right)^{1/2} + \\ &+ \lambda(n) \left(\left(\frac{n}{2} \right)^{1-\alpha} + \left(\frac{n}{4} \right)^{1-\alpha} + \dots \right)^{1/2} \leq A n^{(1-\alpha)/2} \lambda(n). \end{aligned}$$

Теперь мы переходим к обсуждению вопроса о точности полученных результатов. С этой целью ниже доказывается одна лемма, которая является обобщением принципа Фрагмена-Линделефа. Заметим, что утверждение леммы 1 верно и в случае, когда $\alpha = 1$ (см. Э. Коллингвуд, А. Ловатер [7], стр. 130).

Лемма 1. Пусть $f(z)$ — аналитическая в единичном круге функция, а E — замкнутое множество, лежащее на границе. Предположим, что $f(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $|f(z)| \leq \exp \left\{ \frac{M}{(1-|z|)^{1-\alpha}} \right\}, \quad |z| < 1, \quad 0 < \alpha < 1;$
2. для любой точки $\zeta \in \partial D \setminus E$ имеет место неравенство
$$\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in D}} |f(z)| \leq 1;$$
3. $M_{\alpha}(E) = 0.$

Тогда всюду в единичном круге имеет место оценка $|f(z)| \leq 1.$

Если $M_{\alpha}(E) > 0$, то существует неограниченная аналитическая функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям 1, 2.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ множество E можно покрыть непересекающимися интервалами I_k , $k=1, 2, \dots$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|^{\alpha} < \varepsilon.$$

Над каждым I_k строим треугольник

$$\widehat{I}_k = \left\{ z; z \in D, 1 - |z| \leq c \rho \left(\frac{z}{|z|}, \partial D \setminus I_k \right) \right\},$$

где c — постоянное число. Область, которая получается из D выбрасыванием треугольников $\widehat{I}_k$, обозначим Ω . Гармоническую меру на границе области Ω в точке $z \in \Omega$ обозначим $\omega_\Omega(z, d\zeta)$. Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &\leq \int_{\partial\Omega} \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ \zeta \in D}} (\log |f(\zeta)|) \omega_\Omega(z, d\zeta) \leq \\ &\leq \int_{\partial\Omega \cap D} \log |f(\zeta)| \omega_\Omega(z, d\zeta) \leq M \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\partial\widehat{I}_k \cap D} (1-|\zeta|)^{\alpha-1} \omega_\Omega(z, d\zeta) \leq \\ &\leq M \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \omega_\Omega\left(z; \left\{ \zeta; \zeta \in \partial\widehat{I}_k \cap D, 1-|\zeta| < \frac{1}{\lambda^{1/1-\alpha}} \right\}\right) d\lambda \leq \\ &\leq M \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|^{\alpha-1} \omega_\Omega(z; \partial\widehat{I}_k \cap D) + \\ &+ M \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|I_k|^{\alpha-1}}^{\pi} \omega_\Omega\left(z; \left\{ \zeta; \zeta \in \partial\widehat{I}_k \cap D, 1-|\zeta| < \frac{1}{\lambda^{1/1-\alpha}} \right\}\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Рассмотрим гармоническую функцию

$$\omega_\Omega(z; \{\zeta; \zeta \in \partial\widehat{I}_k \cap D, 1-|\zeta| < \delta\}).$$

Эта функция принимает значение 1 при $z \in \{\zeta; \zeta \in \partial\widehat{I}_k \cap D, 1-|\zeta| < \delta\}$, а на остальной части границы $\partial\Omega$ тождественно равна нулю. Следовательно, существует число A , не зависящее от k такое, что при $\delta \leq |I_k|$ имеет место неравенство

$$\omega_\Omega(z; \{\zeta; \zeta \in \partial\widehat{I}_k \cap D, 1-|\zeta| < \delta\}) \leq A\delta \left(\frac{1-|z|^2}{|\zeta_k - z|^2} + \frac{1-|z|^2}{|\eta_k - z|^2} \right), \quad (11)$$

при $z \in \partial\Omega$, где ζ_k и η_k — концы дуги I_k . В силу принципа максимума неравенство (11) имеет место всюду в Ω . Далее имеем

$$\log |f(z)| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|^\alpha + M \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|I_k|^{\alpha-1}}^{\pi} \frac{d\lambda}{\lambda^{1/1-\alpha}} \leq B\varepsilon,$$

где число B не зависит от ε . В силу произвольности $\varepsilon > 0$ $|f(z)| \leq 1$.

В случае, когда $M_\alpha(E) > 0$, функция

$$f(z) = \exp \left\{ \int_E \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right\}.$$

где $d\mu$ — вероятностная мера с носителем в E , фигурирующая в ранее упомянутой теореме О. Фростмана, дает пример неограниченной функции, которая удовлетворяет условиям 1 и 2 леммы.

Приведенная ниже теорема позволяет судить о точности результатов теоремы 3.

Теорема 4. Пусть символ уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям:

1. $a(z) > 0$, $\log a(z) \in L_1(\partial D)$;
2. для некоторой допустимой последовательности M_n , $n = 0, 1, \dots$ $a(z) \in \{M_n\}$;
3. существует функция $\lambda(x) \geq 1$, $x \geq 1$, такая, что $x\lambda(x) \leq A \sup_k \frac{x^k}{M_k}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $M = M(\varepsilon)$ такое, что

$$\lambda(x) \leq Mx^\varepsilon \lambda\left(\frac{1}{\log^{1+\varepsilon} x}\right);$$

4. замкнутое множество $E = \{z; z \in \partial D, a(z) = 0\}$ имеет нулевую α -хаусдорфову меру, т. е. $M_\alpha(E) = 0$ и для любой точки $\eta \in E$ имеет место оценка

$$\int_{\partial D} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \log \frac{1}{\sqrt{a(\zeta)}} dm(\zeta) \geq \log \lambda\left(\frac{1}{|\eta - z|}\right) - C,$$

где $\eta \in E$, $z \in D$;

5. для любой дуги $\Delta \subseteq \partial D$ имеет место оценка

$$\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \log \frac{1}{\sqrt{a(\zeta)}} dm(\zeta) \leq \frac{C}{|\Delta|^{1-\alpha}}.$$

Тогда уравнение (1) не может иметь нетривиального решения, допускающего оценку

$$|x_n| \leq M n^{-\varepsilon - \alpha} \lambda(n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где $\varepsilon > 0$ — любое число.

Доказательство. Предположим, что существует нетривиальное решение уравнения (1), допускающее оценку (12). Обозначим через $f(\cdot)$ распределение, порожденное граничными значениями аналитической функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$. Введем функцию

$$F(z) = f\left(\frac{a(\xi)}{\xi - z}\right), \quad |z| > 1.$$

Из условий 2 и 3 следует, что коэффициенты Фурье распределения $f(a \cdot)$ также допускают оценку (12). Следовательно, имеет место неравенство

$$|F(z)| \leq A (|z| - 1)^{\alpha + \varepsilon - 1} \lambda\left(\frac{1}{|z| - 1}\right), \quad |z| > 1.$$

Рассмотрим функцию $G(z)$, которая внутри единичного круга равна

$$G(z) = \frac{f(z)}{a_+(z)}, \quad |z| < 1,$$

а вне единичного круга определяется по формуле

$$G(z) = a_-(z) F(z), |z| > 1,$$

где a_+ и a_- — функции, фигурирующие в факторизации символов $a(z)$. Заметим, что граничные значения функции $G(z)$ при приближении к границе изнутри единичного круга порождают то же распределение на $\partial D \setminus E$, что и граничные значения $G(z)$ при приближении к границе извне. Действительно, пусть $\varphi \in C\{M_n\}$, $\text{supp } \varphi \cap E = \emptyset$. Так как $\frac{\varphi(z)}{a_+(z)} \in C\{M_n\}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\partial D} \frac{f(rz)}{a_+(rz)} \varphi(z) dm(z) &= f\left(\frac{\varphi(z)}{a_+(z)}\right) = f(a_-(z) a_-(z) \varphi(z)) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 1+0} \int_{\partial D} F(rz) a_-(rz) \varphi(z) dm(z). \end{aligned}$$

Следовательно, $G(z)$ является аналитической функцией в области $C \setminus E$. Из условия 5 следует оценка

$$|a_-(z)| \leq M \exp \left\{ \frac{A}{(|z|-1)^{1-\alpha}} \right\}, |z| > 1.$$

Поэтому

$$|G(z)| \leq M (|z|-1)^{\alpha+\varepsilon-1} \lambda \left(\frac{1}{|z|-1} \right) e^{\frac{A}{(|z|-1)^{1-\alpha}}} \leq c e^{\frac{B}{(|z|-1)^{1-\alpha}}}.$$

Из условия 4 следует

$$|G(z)| \leq M (1-|z|)^{\alpha+\varepsilon-1} \frac{\lambda \left(\frac{1}{1-|z|} \right)}{\lambda \left(\frac{1}{|\zeta-z|} \right)} \leq \frac{D}{(1-|z|)^{1-\alpha}},$$

где $\varepsilon > 0$, $r_0 < |z| < 1$, $|\zeta-z| < (1-|z|) \log^{1+\varepsilon} \frac{1}{1-|z|}$, $\zeta \in E$.

Обозначим через Ω область, которая содержит внешность единичного круга и

$$\partial \Omega \subseteq E \cup \left\{ z; z \in D, \rho(z, E) \log^{-1-\varepsilon} \frac{1}{\rho(z, E)} \leq 1-|z| \leq \rho(z, E) \right\}.$$

Пусть $\varphi(z)$ конформно отображает единичный круг на Ω . Заметим, что границу $\partial \Omega$ можно выбрать так, чтобы $|\varphi'(z)|$ была ограничена сверху и снизу (см. [8]).

Функция $G(z)$ аналитична в области Ω и на границе допускает оценку

$$|G(z)| \leq \frac{M}{\rho^{1-\alpha}(z, E)}, z \in \partial \Omega.$$

Внутри области Ω функция $G(z)$ допускает оценку

$$|G(z)| \leq C \exp \left\{ \frac{B}{\rho^{1-\alpha}(z, E)} \right\}, z \in \Omega.$$

Из условий 1 и 2 следует, что $\log \rho(z, E) \in L_1(\partial\Omega)$. Построим ξ в области Ω внешнюю функцию $\psi(z)$ с модулем граничных значений, равных $\rho^{-1}(z, E)$. Тогда функция

$$\Phi(z) = \frac{G(\varphi(z))}{\psi(\varphi(z))}$$

допускает оценку $|\Phi(z)| \leq M$, при $z \in \partial D \setminus \varphi^{-1}(E)$ и $|\Phi(z)| \leq \exp \left\{ \frac{B}{(1-|z|)^{1-\alpha}} \right\}$, при $|z| < 1$.

Заметим, что $M_\alpha(\varphi^{-1}(E)) = 0$. В силу леммы 1, $\Phi(z)$ — ограниченная функция. Следовательно

$$|G(z)| \leq \frac{M}{\rho^{1-\alpha}(z, E)}, \quad z \in E.$$

Так как $M_\alpha(E) = 0$, то $G(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 28.XI.1984

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Վերադարձող սիմվոլով Վիներ-Հոփֆի դիֆերեն, համասեռ հավաքումների մասին (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է

$$x_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k-j} x_j, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

հավասարումը, որի սիմվոլը կարող է ունենալ անվերջ թվով զրոներ:

Հիմնվելով Անգլոի թեորեմի ընդհանրացման վրա ապացուցվում է, որ եթե սիմվոլը օւնի շատ «ուժեղ» զրոներ, ապա (1) հավասարումը չի կարող ունենալ ոչ տրիվիալ լուծում: Գտնված են պայմաններ, որոնք ապահովում են ոչ տրիվիալ լուծման գոյությունը, ընդ որում բերվում են դեաֆատականների ամենադանդաղ աճող լուծման համար: Ընդհանրացվում է նաև Յրագմեն-Լինդելյոֆի սկզբունքը, որը թույլ է տալիս ապացուցել թեորեմ ոչ տրիվիալ լուծման զնահատականի ճշտության մասին:

A. A. VAGARSHAKIAN. On discrete homogeneous Wiener-Hopf equations with degenerate symbols (summary)

The paper considers the equations

$$x_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k-j} x_j, \quad k = 0, 1, \dots,$$

where the symbol may have infinitely many zeros. Using a generalization of Szego's theorem, it is shown that if the symbol has very "strong" zeros, then (1) can not have a non trivial solution. Some conditions the existence of non trivial solutions are given together with estimates of the solution which has minimal growth.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, Изд. «Наука», М., 1971.
2. Э. Прёсдорф. Некоторые классы сингулярных уравнений, Изд. «Мир», М., 1979.

3. М. И. Хайкин. Однородное уравнение Винера-Хопфа в классе функций умеренного роста, Изв. вузов, матем., 8, 1978, 91—103.
4. E. Asplund. The Wiener—Hopf equation in an algebra of Beurling, Acta mathematica, 108, 1962, 89—111.
5. Л. Карлесон. Избранные проблемы теории исключительных множеств, Изд. «Мир», М., 1971.
6. Мандельброт. Примакающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применение, И. ИЛ, М., 1955.
7. Э. Коллинзуд, А. Ловатер. Теория предельных множеств, Изд. «Мир», М., 1971.
8. А. А. Вагаршакян. О единственности аналитических функций, растущих вблизи границы, Изв. АН Арм.ССР, Матем., XVI, № 1, 1981, 3—24.
9. М. Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. УМН, 1958, 13:5, 3—120.
10. В. Б. Дыбин, Н. К. Карапетянц. Применение метода нормализации к одному классу бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Изв. вузов, Матем., 1967, № 10, 39—49.
11. Г. Н. Чеботарев. Об одном уравнении типа свертки первого рода. Изв. вузов, Матем., 1967, № 2, 80—92.
12. Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. Уравнения типа свертки. М., «Наука», 1978.

УДК 517.95

А. О. ОГАНЕСЯН

ПОСТРОЕНИЕ ПАРАМЕТРИКСА ЗАДАЧИ КОШИ
С ВЕСОМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Известно [1], что задача Коши для гиперболических уравнений (даже в случае, когда корни характеристического уравнения не только действительны, но и различны) с неограниченными коэффициентами не всегда корректно поставлена. Для таких уравнений оказывается естественной постановка задачи Коши с некоторыми весовыми функциями. Такие задачи изучались, например, в работах [2]—[5]. В этих работах доказывалась корректность задачи Коши в соответствующей весовой постановке. Задача Коши с весом для симметрических систем рассмотрена в [6].

В настоящей работе строится параметрикс задачи Коши с весом для уравнения второго порядка, главная часть которого является строго гиперболическим оператором, а младшие коэффициенты не ограничены в окрестности начальной гиперплоскости.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка основного
результата

Рассмотрим следующую задачу Коши с весом:

$$Pu \equiv D_t^2 u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) D_i D_j u + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n a_i(t, x) D_i u + \\ + \frac{1}{t} b(t, x) D_t u + \frac{1}{t^2} c(t, x) u = 0 \quad (0 < t < T, x \in R^n), \quad (1.1)$$

$$\left(\Phi(t, x) u - \sum_{k_1=1}^{N_1} F_{k_1}(f_1)(t, x) - \sum_{k_2=1}^{N_2} G_{k_2}(f_2)(t, x) \right) \Big|_{t=0} = f_1, \quad (1.2)$$

$$R(t, x) D_t \left(\Phi(t, x) u - \sum_{k_1=1}^{N_1} F_{k_1}(f_1)(t, x) - \sum_{k_2=1}^{N_2} G_{k_2}(f_2)(t, x) \right) \Big|_{t=0} = f_2,$$

где функции a_{ij} , a_i ($i, j=1, \dots, n$), b , c бесконечно дифференцируемы в $\bar{R}_+ \times R^n$, $f_l \in E'(R^n)$, $l=1, 2$, а весовые функции $\Phi(t, x)$, $R(t, x)$ и символы интегральных операторов Фурье F_{k_1} ($k_1=1, \dots, N_1$), G_{k_2} ($k_2=1, \dots, N_2$) определяются коэффициентами уравнения (1.1).

Предполагается, что существуют положительные числа γ_1, γ_2 , такие, что

$$\gamma_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leq \gamma_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (x, \xi \in R^n). \quad (1.3)$$

Кроме того пусть

$$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^n a_j(0, x) \xi_j / a(x, \xi) \text{ и } \operatorname{Im} b(0, x) \quad (1.4)$$

ограничены при $x \in R^n$, $\xi \in R^n \setminus 0$, где

$$a(t, x, \xi) = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \right)^{1/2}, \quad a(x, \xi) = a(0, x, \xi).$$

В дальнейшем, для избежания громоздкости изложения, подробно будет рассмотрен случай, когда $F_{k_1} = 0$ ($k_1 = 1, \dots, N_1$), $G_{k_2} = 0$ ($k_2 = 1, \dots, N_2$). Изучение задачи (1.1)–(1.2) в случае, когда $F_{k_1} \neq 0$, $G_{k_2} \neq 0$, проводится по аналогичной схеме с небольшой разницей в определении весовых функций $R(t, x)$, $\Phi(t, x)$ и пространства символов интегральных операторов Фурье, о чем будут сделаны замечания по ходу изложения.

Для формулировки основного результата введем некоторые обозначения. Обозначим через $s(x)$ один из корней уравнения

$$s^2 - (1 - ib(0, x))s - c(0, x) = 0, \quad (1.5)$$

и пусть

$$\beta(x) = ib(0, x) + 2s(x),$$

$$\mu_\sigma(x) = \frac{i\sigma}{2} \sum_{j=1}^n a_j(0, x) \xi_j / a(x, \xi) + \frac{1}{2} \beta(x) (\sigma^2 = 1), \quad (1.6)$$

$$m(\sigma) = \sup_{x \in R^n, \xi \in R^n \setminus 0} (-\operatorname{Re} \mu_\sigma).$$

Определение 1.1. Для действительных чисел m и k обозначим через $S^{m,k}$ пространство бесконечно дифференцируемых на $R_+ \times R^n \times R^n$ функций $p(t, x, \xi)$ таких, что для любого целого числа $l \geq 0$, мультииндексов α, δ , действительного числа $T > 0$ и компакта $K \subset R^n$ имеет место неравенство

$$|D_t^l D_x^\alpha D_\xi^\delta t^{-s(x)} p(t, x, \xi)| \leq c (1 + |\xi|)^{m-|\delta|} (|\xi|^{-1} + t)^{k-l} \quad (1.7)$$

для $x \in K$, $t \in (0, T)$, $|\xi| > 1$. Постоянная c зависит от l, α, δ, T, K .

Определение 1.1'. Для действительного числа k обозначим через S^k пространство бесконечно дифференцируемых на $R_+ \times R^n \times R^n$ функций $p(t, x, \xi)$ таких, что для любого целого числа $l \geq 0$, мультииндексов α, δ , действительного числа $T > 0$ и компакта $K \subset R^n$ имеет место неравенство

$$|D_t^l D_x^\alpha D_\xi^\delta p(t, x, \xi)| \leq c (1 + |\xi|)^{k-|\delta|}$$

для $x \in K$, $t \in (0, T)$, $|\xi| > 1$. Постоянная c зависит от l, α, δ, T, K .

Пусть функции $\varphi_\sigma(t, x, \xi) (\sigma^2 = 1)$ являются решениями следующих задач:

$$\varphi_{\sigma t} = \sigma \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \varphi_{\sigma x_i} \varphi_{\sigma x_j} \right)^{1/2}, \quad (1.8)$$

$$\varphi_0|_{t=0} = \langle x, \xi \rangle. \quad (1.9)$$

Основным результатом работы является

Теорема 1.1. Пусть $0 < \operatorname{Re} \beta(x) < 1$, $\gamma = \sup_{x \in R^n} \operatorname{Re} \beta(x)$ и $T > 0$ достаточно мало. Тогда существуют символы

$$\begin{aligned} p_{1\sigma}(t, x, \xi) &\in S^{m(\sigma)+s, m(\sigma)+s}, \\ p_{2\sigma}(t, x, \xi) &\in S^{m(\sigma)+s+\gamma-1, m(\sigma)+s}, \\ \tilde{p}_{1\sigma}(t, x, \xi) &\in S^{m(\sigma)+s}, \\ \tilde{p}_{2\sigma}(t, x, \xi) &\in S^{m(\sigma)+s+\gamma-1} \end{aligned} \quad (1.10)$$

(s — произвольное положительное число, $(t, x, \xi) \in (0, T) \times R^n \times R^n$, $\sigma^2 = 1$) такие, что

$$\begin{aligned} E(f_1, f_2)(t, x) = & \sum_{\sigma=-1}^2 \sum_{l=1}^2 (2\pi)^{-n} \int_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma - \langle y, \xi \rangle]} p_{2\sigma}(t, x, \xi) f_l(y) dy d\xi + \\ & + \sum_{\sigma=\pm 1}^2 \sum_{l=1}^2 \int_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma - \langle y, \xi \rangle]} \tilde{p}_{1\sigma}(t, x, \xi) f_l(y) dy d\xi \end{aligned} \quad (1.11)$$

является параметриksom задачи (1.1)–(1.2) при $\Phi(t, x) = t^{-s(x)}$, $R(t, x) = t^{\beta(x)}$, $F_{k_1} = 0$ ($k_1 = 1, \dots, N_1$), $G_{k_2} = 0$ ($k_2 = 1, \dots, N_2$), то есть функция $E(f_1, f_2)(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в $(0, T) \times R^n$ с точностью до функций из класса $C^\infty((0, T) \times R^n)$ и условиям (1.2) с точностью до функций из класса $C^\infty(R^n)$.

Замечание 1.1. Если $k < \operatorname{Re} \beta(x) < k+1$, где $k \neq 0$ целое число, то F_{k_1} , G_{k_2} , вообще говоря, отличны от нуля (см. пример 2°).

Рассмотрим функцию

$$E_0(f_1, f_2)(t, x) = E_1(f_1)(t, x) + E_2(f_2)(t, x), \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} E_l(f_l)(t, x) = & \sum_{\sigma=\pm 1} (2\pi)^{-n} \int_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma - \langle y, \xi \rangle]} p_{l\sigma}(t, x, \xi) f_l(y) dy d\xi, \quad (1.13) \\ & (l = 1, 2). \end{aligned}$$

Подействуем оператором P на функцию $E_0(f_1, f_2)(t, x)$

$$PE_0(f_1, f_2)(t, x) = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{l=1}^2 (2\pi)^{-n} \int_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma - \langle y, \xi \rangle]} \tilde{P}_\sigma p_{l\sigma}(t, x, \xi) f_l(y) dy d\xi, \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\sigma = & D_t^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) D_i D_j + \frac{1}{t} b(t, x) D_t + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n a_i(t, x) D_i + \\ & + \frac{1}{t^2} c(t, x) - 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \varphi_{\sigma x_i} D_j + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \varphi_{\sigma x_i x_j} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n a_i(t, x) \varphi_{\sigma x_i} + \frac{1}{t} b(t, x) \varphi_{\sigma t} - i \varphi_{\sigma t} + 2 \varphi_{\sigma t} D_t. \quad (1.15)$$

Обозначим через $\rho = (-1, 1, \dots, 1)$ $(n+1)$ -мерный вектор.

Определение 1.2. Функция $r(t, x, \xi)$ называется ρ -квазиоднородной порядка l , если

$$r(\lambda^{-1} t, x, \lambda \xi) = \lambda^l r(t, x, \xi) \quad (\lambda > 0).$$

Функции $p_{l\sigma}$ ($l=1, 2$; $\sigma^2=1$) будем искать в виде формальных сумм ρ -квазиоднородных функций, порядок которых определяется в дальнейшем

$$p_{l\sigma}(t, x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{l\sigma}^k(t, x, \xi). \quad (1.16)$$

Разлагая коэффициенты операторов $\hat{P}_{\sigma}$ ($\sigma^2=1$) в формальные ряды по степеням t , представим их в виде

$$\hat{P}_{\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}_{\sigma}^k, \quad (1.17)$$

где порядок ρ -квазиоднородности операторов $\hat{P}_{\sigma}^k$ равен $2-k$. В частности

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\sigma}^0 = & D_t^2 + 2\sigma a(x, \xi) D_t + \frac{1}{t} b(0, x) D_t + \frac{1}{t} b(0, x) \sigma a(x, \xi) + \\ & + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n a_i(0, x) \xi_i + \frac{1}{t^2} c(0, x). \end{aligned} \quad (1.18)$$

В новых обозначениях функцию $PE_0(f_1, f_2)(t, x)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} PE_0(f_1, f_2)(t, x) = & \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{l=1}^2 (2\pi)^{-n} \int_{R^n \times R^n} e^{i[\sigma x - \langle y, \xi \rangle]} \times \\ & \times \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k+j=s} \hat{P}_{\sigma}^k p_{l\sigma}^j(t, x, \xi) f_1(y) dy d\xi. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Выберем функции $p_{l\sigma}^j$ так, чтобы они являлись решениями уравнений

$$\sum_{k+j=s} \hat{P}_{\sigma}^k p_{l\sigma}^j(t, x, \xi) = 0, \quad s=0, 1, \dots; \sigma^2=1; l=1, 2. \quad (1.20)$$

В частности, для функций $p_{l\sigma}^0$ получаем

$$\hat{P}_{\sigma}^0 p_{l\sigma}^0(t, x, \xi) = 0. \quad (1.21)$$

Для того, чтобы функция $E_0(f_1, f_2)$ с точностью до гладких функций удовлетворяла бы условиям (1.2), достаточно, чтобы функции $p_{l\sigma}^j$ удовлетворяли следующим начальным условиям:

$$\left(\Phi(t, x) \sum_{\sigma=\pm 1} p_{l\sigma}^0(t, x, \xi) - \sum_{k=1}^{N_l} \varphi_{k1}^0(t, x, \xi) \right) \Big|_{t=0} = 1,$$

$$R(t, x) \sum_{\sigma=1}^{N_1} \left[\varphi_{\sigma l} \left(\Phi(t, x) p_{1\sigma}^0(t, x, \xi) - \sum_{k_1=1}^{N_1} \varphi_{k_1}^0(t, x, \xi) \right) + \right. \\ \left. + D_t \left(\Phi(t, x) p_{1\sigma}^0(t, x, \xi) - \sum_{k_1=1}^{N_1} \varphi_{k_1}^0(t, x, \xi) \right) \right] \Big|_{t=0} = 0, \\ \left(\Phi(t, x) \sum_{\sigma=1}^{N_2} p_{2\sigma}^0(t, x, \xi) - \sum_{k_2=1}^{N_2} g_{k_2}^0(t, x, \xi) \right) \Big|_{t=0} = 0, \quad (1.22)$$

$$R(t, x) \sum_{\sigma=1}^{N_2} \left[\varphi_{\sigma l} \left(\Phi(t, x) p_{2\sigma}^0(t, x, \xi) - \sum_{k_2=1}^{N_2} g_{k_2}^0(t, x, \xi) \right) + \right. \\ \left. + D_t \left(\Phi(t, x) p_{2\sigma}^0(t, x, \xi) - \sum_{k_2=1}^{N_2} g_{k_2}^0(t, x, \xi) \right) \right] \Big|_{t=0} = 1, \\ \left(\Phi(t, x) \sum_{\sigma=1}^{N_l} p_{l\sigma}^j(t, x, \xi) - \sum_{k_l=1}^{N_l} \varphi_{k_l}^j(t, x, \xi) \right) \Big|_{t=0} = 0, \quad (1.23)$$

$$R(t, x) \sum_{\sigma=1}^{N_l} \left[\varphi_{\sigma l} \left(\Phi(t, x) p_{l\sigma}^j(t, x, \xi) - \sum_{k_l=1}^{N_l} \varphi_{k_l}^j(t, x, \xi) \right) + \right. \\ \left. + D_t \left(\Phi(t, x) p_{l\sigma}^j(t, x, \xi) - \sum_{k_l=1}^{N_l} \varphi_{k_l}^j(t, x, \xi) \right) \right] \Big|_{t=0} = 0,$$

$$l=1, 2, j=1, 2, \dots$$

Таким образом, поведение функций $p_{l\sigma}^j$ при $t \rightarrow 0$ определяет весовые функции $\Phi(t, x)$, $R(t, x)$ и символы интегральных операторов Фурье F_{k_l} и G_{k_l} , которые имеют те же фазовые функции, что и операторы E_l ($l=1, 2$).

Построение параметрикса проводится в два этапа:

1. Задача (1.1)–(1.2) сводится к задаче с неоднородным уравнением, правая часть которого вместе со всеми производными по t обращается в нуль по модулю $S^{-\infty}$ при $t=0$ и однородными начальными условиями.

2. Строится параметрикс редуцированной на первом этапе задачи.

§ 2. Построение решений одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений

Для изучения решений уравнений (1.21) рассмотрим уравнения

$$Q_{\sigma} u_{\sigma}(t) \equiv \left[D_t^2 + \left(\frac{1}{t} b(0, x) + 2\sigma \right) D_t + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n a_i(0, x) \xi_i / a(x, \xi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{t} \sigma b(0, x) + \frac{1}{t^2} c(0, x) \right] u_{\sigma}(t) = 0, \quad \sigma^2 = 1. \quad (2.1)$$

Замечание 2.1. Легко видеть, что уравнения (2.1) после замены переменных $t = a(x, \eta)$, $\xi = \frac{\eta}{a(x, \eta)}$ переходят в уравнения (1.21).

Функции $u_\sigma(t)$ будем искать в виде $u_\sigma(t) = t^{s(x)} v_\sigma(t)$. Учитывая (1.5), (1.6), для функций $v_\sigma(t)$ получим

$$L_\sigma v_\sigma(t) \equiv \left[D_t^2 + \frac{1}{t} (2\alpha t - i\beta(x) D_t - \frac{1}{t} 2i\alpha\mu_\sigma) \right] v_\sigma(t) = 0. \quad (2.2)$$

Замена переменной $t = \frac{i}{2\alpha} \tau$ сводит уравнения (2.2) к вырожденному гипергеометрическому уравнению [7]

$$\tau v_{\sigma\tau\tau} + (\beta - \tau) v_{\sigma\tau} - \mu_\sigma v_\sigma = 0. \quad (2.3)$$

Пусть $\beta(x)$ не является целым числом. Тогда оба корня уравнения (1.5) будут гладкими функциями переменной x . При $\sigma=1$ общее решение уравнения (2.2) можно записать в виде

$$v_1(t) = c_1 \Phi(\mu_1, \beta; -2it) + c_2 (-2it)^{1-\beta} \Phi(\mu_1 - \beta + 1, 2 - \beta; -2it), \quad (2.4)$$

где $\Phi(a, x; z)$ — функция Гумберта [7]. Следовательно

$$u_1(t) = t^{s(x)} [c_1 \Phi(\mu_1, \beta; -2it) + c_2 (-2it)^{1-\beta} \Phi(\mu_1 - \beta + 1, 2 - \beta; -2it)]. \quad (2.5)$$

Из формулы (2.5) видно каким начальным условиям удовлетворяют решения уравнения (2.1). Так как выбор этих условий определяет начальные условия (1.2), то рассмотрим несколько примеров.

1°. Пусть $0 < \operatorname{Re} \beta < 1$. Тогда два линейно независимых решения уравнения (2.1)

$$u_{11}(t) = t^{s(x)} \Phi(\mu_1, \beta; -2it), \quad (2.6)$$

$$u_{12}(t) = \frac{i}{1-\beta} t^{s(x)} \Phi(\mu_1 - \beta + 1, 2 - \beta; -2it) t^{1-\beta}$$

удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} t^{-s(x)} u_{11}(t)|_{t=0} &= 1; \quad t^{\beta(x)} D_t(t^{-s(x)} u_{11}(t))|_{t=0} = 0; \\ t^{-s(x)} u_{12}(t)|_{t=0} &= 0; \quad t^{\beta(x)} D_t(t^{-s(x)} u_{12}(t))|_{t=0} = 1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2°. Пусть $N_2 - N_1 < \operatorname{Re} \beta < N_2 - N_1 + 1$, где N_1, N_2 — произвольные неотрицательные целые числа. Тогда начальные условия на функции Au_{11} и Bu_{12} можно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(A t^{-s(x)-N_1} u_{11} - A \sum_{q=0}^{N_1-1} \frac{1}{q!} \frac{d^q}{dt^q} \Phi(\mu_1, \beta; -2it) \Big|_{t=0} t^{q-N_1} \right) \Big|_{t=0} &= 1, \\ t^{-N_1+\beta(x)+N_1} D_t \left(A t^{-s(x)-N_1} u_{11} - \right. \\ \left. - A \sum_{q=0}^{N_1-1} \frac{1}{q!} \frac{d^q}{dt^q} \Phi(\mu_1, \beta; -2it) \Big|_{t=0} t^{q-N_1} \right) \Big|_{t=0} &= 0, \\ \left(B t^{-s(x)-N_1} u_{12} - B \sum_{q=0}^{N_1-1} \frac{1}{q!} \frac{d^q}{dt^q} \Phi(\mu_1, \beta; -2it) \Big|_{t=0} t^{q+1-\beta-N_1} \right) \Big|_{t=0} &= 0, \\ t^{-N_1+\beta(x)+N_1} D_t \left(B t^{-s(x)-N_1} u_{12} - \right. \end{aligned}$$

$$-B \sum_{q=0}^{N_1-1} \frac{1}{q!} \frac{d^q}{dt^q} \Phi(\mu_1, \beta; -2it) \Big|_{t=0}^{t^{q+1-\beta-N_1}} \Big|_{t=0} = 1,$$

$$A = \frac{N_1!}{\frac{d^{N_1}}{dt^{N_1}} \Phi(\mu_1, \beta; -2it) \Big|_{t=0}}, \quad B = \frac{(1-\beta) N_2!}{(N_2+1-\beta-N_1) \frac{d^{N_2}}{dt^{N_2}} \Phi(\mu_1, \beta; -2it) \Big|_{t=0}}.$$

Меняя местами функции u_{11} и u_{12} , можно получить другие начальные условия.

Так как в дальнейшем, для краткости изложения, подробно изучается случай 1°, будем считать, где надо, что выполнено условие $0 < \operatorname{Re} \beta < 1$. Преобразуем функции u_{11} и u_{12} , воспользовавшись известными соотношениями между вырожденными гипергеометрическими функциями $\Phi(a, \kappa; z)$ и $\Psi(a, \kappa; z)$. Учитывая, что $\mu_1 + \mu_{-1} = \beta$ и $\Psi(a, \kappa, z) = z^{1-\kappa} \Psi(a - \kappa + 1, 2 - \kappa; z)$ получим

$$u_{11}(t) = t^s(x) \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\mu_{-1})} e^{-i\mu_1 \pi} \Psi(\mu_1, \beta; -2it) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\mu_1)} e^{i\mu_{-1} \pi} e^{-2it} \Psi(\mu_{-1}, \beta; 2it) \right],$$

$$u_{12}(t) = \frac{i}{1-\beta} t^s(x) \left[\frac{\Gamma(2-\beta)}{(-2it)^{1-\beta} \Gamma(1-\mu_1)} e^{-i\pi(1-\mu_{-1})} \Psi(\mu_1, \beta; -2it) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(2-\beta)}{(2it)^{1-\beta} \Gamma(1-\mu_{-1})} e^{i\pi(1-\mu_1)} e^{-2it} \Psi(\mu_{-1}, \beta; 2it) \right].$$

Рассмотрим функции

$$w_1(t) = t^s(x) \sum_{\sigma=\pm 1} c_{1\sigma} \psi_\sigma(t), \\ w_2(t) = t^s(x) \sum_{\sigma=\pm 1} c_{2\sigma} \psi_\sigma(t), \quad (2.8)$$

где

$$c_{1\sigma} = \frac{\Gamma(\beta)}{2^{\mu_\sigma} \Gamma(\mu_{-\sigma})} e^{-i\mu_\sigma \pi/2}, \quad c_{2\sigma} = \frac{i}{(1-\beta) \Gamma(1-\mu_\sigma)} \frac{\Gamma(2-\beta)}{2^{(1-\mu_\sigma)}} e^{-i\sigma(1-\mu_\sigma) \pi/2}, \\ \psi_\sigma(t) = \Psi(\mu_\sigma, \beta; -2i\sigma t) 2^{\mu_\sigma} e^{-i\pi\sigma\mu_\sigma/2}. \quad (2.9)$$

Непосредственные вычисления показывают, что функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$ удовлетворяют тем же начальным условиям, что и функции $u_{11}(t)$, $u_{12}(t)$ соответственно. С другой стороны, функции $t^s(x) \psi_1(t)$ и $t^s(x) \psi_{-1}(t)$ являются решениями уравнений (2.1) при $\sigma=1$ и $\sigma=-1$ соответственно.

Учитывая замечание 2.1, получим, что функции

$$p_{1\sigma}^0(t, x, \xi) = t^s(x) c_{1\sigma} \Psi(\mu_\sigma, \beta; -2i\sigma a(x, \xi) t), \quad (2.10)$$

$$p_{2\sigma}^0(t, x, \xi) = t^s(x) c_{2\sigma} \Psi(\mu_\sigma, \beta; -2i\sigma a(x, \xi) t) \cdot a(x, \xi)^{\beta-1} \quad (2.11)$$

являются решениями уравнений (1.21), которые удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\sum_{\sigma=\pm 1} t^{-s(x)} p_{1\sigma}^0 \Big|_{t=0} = 1, \quad (2.12)$$

$$t^{\beta(x)} \sum_{\sigma=\pm 1} [\varphi_{\sigma} t^{-s(x)} p_{1\sigma}^0 + D_t (t^{-s(x)} p_{1\sigma}^0)] \Big|_{t=0} = 0, \\ \sum_{\sigma=\pm 1} t^{-s(x)} p_{2\sigma}^0 \Big|_{t=0} = 0,$$

$$t^{\beta(x)} \sum_{\sigma=\pm 1} [\varphi_{\sigma} t^{-s(x)} p_{2\sigma}^0 + D_t (t^{-s(x)} p_{2\sigma}^0)] \Big|_{t=0} = 1, \quad (2.13)$$

то есть условиям (1.22) с $\Phi(t, x) = t^{-s(x)}$, $R(t, x) = t^{\beta(x)}$,

$$\varphi_{k_1}^0(t, x, \xi) \equiv 0, \quad k_1 = 1, \dots, N_1; \quad g_{k_2}^0(t, x, \xi) \equiv 0, \quad k_2 = 1, \dots, N_2.$$

Из уравнений (1.21) и начальных условий (2.12), (2.13) следует, что для $\lambda > 0$

$$p_{1s}^0(\lambda^{-1} t, x, \lambda \xi) = \lambda^{-s(x)} p_{1s}^0(t, x, \xi), \quad (2.14)$$

$$p_{2s}^0(\lambda^{-1} t, x, \lambda \xi) = \lambda^{\beta(x)-s(x)-1} p_{2s}^0(t, x, \xi), \quad (2.15)$$

то есть функции p_{1s}^0 , p_{2s}^0 являются β -квазиоднородными функциями порядка $-s(x)$ и $\beta(x) - s(x) - 1$ соответственно.

В уравнении (2.1) переменные x и $\xi/a(x, \xi)$ играют роль параметров. Обозначим через Ω многообразие, где меняются эти параметры. Пусть Σ — открытый сектор в $\mathbb{C} \setminus 0$ или на некоторой римановой поверхности над $\mathbb{C} \setminus 0$. Следуя [8], дадим

Определение 2.1. Для действительного числа ν обозначим через $O^{\nu}(\Sigma, \Omega)$ пространство функций $f(z, \omega)$, голоморфных по $z \in \Sigma$, бесконечно дифференцируемых по $\omega \in \Omega$, таких, что для любого дифференциального оператора Λ на Ω имеет место неравенство

$$|\Lambda f(z, \omega)| \leq c(1 + |z|)^{\nu} \quad (2.16)$$

для $z \in \Sigma'$, $|z| \geq 1$, $\omega \in K$. Здесь Σ' — любой замкнутый сектор в Σ , K — любой компакт в Ω , а постоянная c зависит от Σ' , K , Λ .

Пусть функция $f(z, \omega)$ голоморфна в Σ и бесконечно дифференцируема в Ω , а $f^*(z, \omega)$ — формальный ряд вида

$$f^*(z, \omega) = \sum_{j=0}^J (\log z)^j z^{\nu_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_{jk}(\omega) z^{-k}. \quad (2.17)$$

Определение 2.2. Формальный ряд (2.17) называется асимптотическим представлением функции $f(z, \omega)$ в Σ , $f(z, \omega) \sim f^*(z, \omega)$, если для любого положительного целого числа N

$$f(z, \omega) - \sum_{j=0}^J (\log z)^j z^{\nu_j} \sum_{k=0}^N f_{jk}(\omega) z^{-k} \in O^{\nu_N}(\Sigma, \Omega),$$

где $\lim_{N \rightarrow \infty} \nu_N = -\infty$.

Известно [7], что

$$\Psi(\alpha, \kappa; z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n (z - \kappa + 1)_n}{n!} z^{-\alpha-n}, \quad (2.18)$$

где $-\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi$, $(A)_n = \frac{\Gamma(A+n)}{\Gamma(A)}$.

Отсюда

$$\psi_{\sigma}(t) \sim \psi_{\sigma}^{\circ}(t) = t^{-\mu_{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n}, \quad \Sigma = \left\{ t \in \mathbb{C} \setminus 0; |\arg t| < \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (2.19)$$

где

$$a_n = \frac{(-1)^n (\mu_{\sigma})_n (\mu_{\sigma} - \beta + 1)_n}{n!} 2^{\mu_{\sigma}} e^{-i\pi\sigma\mu_{\sigma}/2} (-2i\sigma)^{-\mu_{\sigma}-n}.$$

Из (1.20) следует, что функции $p_{l\sigma}^k$, $k > 1$, $l = 1, 2$ являются решениями неоднородных уравнений. Для изучения их решений докажем

Предложение 2.1. Пусть для достаточно большого целого числа $N > 0$

$$g(t, \omega) \in O^{-N}(\Sigma, \mathbb{C}).$$

Тогда уравнение

$$Q_{\sigma} v_{\sigma} \equiv \left[D_t^2 + \left(\frac{1}{t} b(0, x) + 2\sigma \right) D_t + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n a_i(0, x) \xi_i / a(x, \xi) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma}{t} b(0, x) + \frac{1}{t^2} c(0, x) \right] v_{\sigma}(t, \omega) = t^{s(x)} g(t, \omega) \quad (2.20)$$

имеет решение

$$t^{-s(x)} v_{\sigma}(t, \omega) \in O^{-N+1+s},$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число.

Доказательство. Подставим в уравнение (2.20) $v_{\sigma}(t, \omega) = t^{s(x)} w_{\sigma}(t, \omega)$. Получим

$$L_{\sigma} w_{\sigma} \equiv \left[D_t^2 + \frac{1}{t} (2\sigma t - i\beta(x)) D_t - \frac{1}{t} 2i\sigma\mu_{\sigma} \right] w_{\sigma} = g. \quad (2.21)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет линейно независимые решения

$$z_{1\sigma}(t) = \Phi(\mu_{\sigma}, \beta; -2i\sigma t),$$

$$z_{2\sigma}(t) = \frac{1}{1-\beta} \Phi(1-\mu_{\sigma}, 2-\beta; -2i\sigma t) t^{1-\beta},$$

детерминант Вронского $W(t)$ которых удовлетворяет начальному условию

$$t^{\beta(x)} W(t)|_{t=0} = 1.$$

С другой стороны

$$W'(t) = -\frac{i}{t} (2\sigma t - i\beta(x)) W.$$

Поэтому

$$W(t) = t^{-\beta(x)} e^{-2i\sigma t}.$$

Уравнение (2.21) имеет решение

$$w_{\sigma}(t, \omega) = - \int_{\infty}^t W(\tau)^{-1} [z_{1\sigma}(t) z_{2\sigma}(\tau) - z_{1\sigma}(\tau) z_{2\sigma}(t)] g(\tau, \omega) d\tau.$$

Выразим функции $z_{1\sigma}$ и $z_{2\sigma}$ через функции $\psi_{\sigma}(t)$

$$\begin{aligned} z_{1\sigma}(t) &= c_{1\sigma} \psi_{\sigma}(t) + c_{1-\sigma} \psi_{-\sigma}(t) e^{-2it}, \\ z_{2\sigma}(t) &= -ic_{2\sigma} \psi_{\sigma}(t) - ic_{2-\sigma} \psi_{-\sigma}(t) e^{-2it}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} w_{\sigma}(t, \omega) &= - \int_{-\infty}^t \tau^s(x) [(c_{1\sigma} c_{2-\sigma} - c_{1-\sigma} c_{2\sigma}) \psi_{\sigma}(t) \psi_{-\sigma}(\tau) + \\ &+ (c_{1-\sigma} c_{2\sigma} - c_{1\sigma} c_{2-\sigma}) \psi_{\sigma}(\tau) \psi_{-\sigma}(t) e^{-2it(t-\tau)}] g(\tau, \omega) d\tau = \\ &= w_{1\sigma}(t, \omega) + w_{2\sigma}(t, \omega). \end{aligned}$$

Из (2.19) следует, что $w_{1\sigma} \in O^{-N+1+1}(\Sigma, \Omega)$. Выбрав пути интегрирования так, чтобы

$$\operatorname{Im} \sigma t \leq \operatorname{Im} \sigma \tau,$$

получим, что $w_{2\sigma} \in O^{-N+1+1}(\Sigma, \Omega)$. Следовательно, $w_{\sigma} \in O^{-N+1+1}$.

Предложение 2.2. Пусть функция $h(t, \omega)$ имеет в секторе Σ следующее асимптотическое представление:

$$h(t, \omega) \sim t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^{-k}, \quad h_0 \neq 0.$$

Тогда если $(\nu + \mu_{\sigma} + 1)$ не является неотрицательным целым числом, то уравнение

$$Q_{\sigma} v_{\sigma}(t, \omega) = t^s(x) h(t, \omega) \quad (2.22)$$

имеет решение $v_{\sigma}(t, \omega)$, такое, что

$$t^{-s(x)} v_{\sigma}(t, \omega) \sim t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} v_k t^{-k},$$

где

$$\begin{aligned} v_k &= - \frac{1}{2is(\mu_{\sigma} + \nu + 1 - k)} (h_k + (\nu - k + 2)(\nu - k + 1 + \beta) v_{k-1}), \quad (2.23) \\ k &= 0, 1, \dots, \\ v_{-1} &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Если v_{σ} удовлетворяет уравнению (2.22), то функция $w_{\sigma} = t^{-s} v_{\sigma}$ будет решением уравнения

$$L_{\sigma} w_{\sigma} = h.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} h^*(t, \omega) &= t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^{-k}, \\ w_{\sigma}^*(t, \omega) &= t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} v_k t^{-k+1} \end{aligned}$$

и докажем, что $w_{\sigma}^*(t, \omega)$ является формальным решением уравнения

$$L_{\sigma} w_{\sigma}^*(t, \omega) = h^*(t, \omega). \quad (2.24)$$

Подстановка $h^*(t, \omega)$ и $w_{\sigma}^*(t, \omega)$ в уравнение (2.24) приводит к рекуррентным соотношениям

$$-(\nu - k + 2)(\nu - k + 1)v_{k-1} - \beta(\nu - k + 2)v_{k-1} - \\ - 2i\sigma(\nu - k + 1 + \mu_0)v_k = h_k, \quad k=0, 1, \dots,$$

откуда следует (2.23).

Пусть теперь

$$h(t, \omega) = t^\nu \sum_{k=0}^N h_k t^{-k} + H_N(t, \omega),$$

где $H_N(t, \omega) \in O^{\nu N}(\Sigma, \Omega)$, $\varepsilon_N \rightarrow -\infty$ при $N \rightarrow \infty$ и

$$w_\sigma(t, \omega) = t^\nu \sum_{k=0}^N v_k t^{-k+1} + w_N(t, \omega).$$

Тогда

$$L_\sigma w_N(t, \omega) = H_N(t, \omega) + (\nu - N + 1)(\nu - N)v_N t^{\nu-N+1} + \\ + \beta(\nu - N + 1)v_N t^{\nu-N+1}.$$

Из предложения 2.1 легко получить, что

$$w_N(t, \omega) \in O^{\nu N}(\Sigma, \Omega),$$

где

$$\varepsilon'_N = \max(\varepsilon_N + 1 + \varepsilon, \operatorname{Re} \nu - N + 1).$$

Аналогичным образом доказываются и два следующих утверждения, которые приведем без доказательства.

Предложение 2.3. Пусть $h(t, \omega)$ такая же функция, что и в предложении 2.2, а $m = \nu + \mu_0 + 1$ является неотрицательным целым числом. Тогда уравнение (2.22) имеет решение $v_\sigma(t, \omega)$, такое, что

$$t^{-s(\tau)} v_\sigma(t, \omega) \sim t^\nu \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{\infty} v_k t^{-k} + v_m \psi_\sigma(t) \ln t,$$

где

$$v_k = \frac{1}{2i\sigma(k-m)} [h_k + (\nu - k + 2)(\nu - k + 1 + \beta)v_{k-1}], \quad k=0, \dots, m-1, v_{-1}=0,$$

$$v_m = -\frac{1}{2i\sigma} [h_m + (\nu - m + 2)(\nu - m + 1 + \beta)v_{m-1}],$$

$$v_{m+j} = \frac{1}{2ij\sigma} [h_{m+j} + (\nu - m - j + 2)(\nu - m - j - 1 + \beta)v_{m+j-1} -$$

$$- v_m [a_{j-1}(2m - 2\nu - 2j - \beta - 3) - 2i\sigma a_j]], \quad j \geq 1,$$

а a_j — коэффициенты асимптотического разложения функции $\psi_\sigma(t)$.

Предложение 2.4. Пусть $h_l(t, \omega)$, $l=0, 1, \dots, L$ — формальные ряды вида

$$h_l(t, \omega) = t^{\nu_l} \sum_{k=0}^{\infty} h_{lk} t^{-k},$$

а функция $h(t, \omega)$ в секторе Σ имеет следующее асимптотическое представление:

$$h(t, \omega) \sim \sum_{l=0}^L (\log t)^l h_l(t, \omega).$$

Тогда уравнение (2.22) имеет решение $v_\sigma(t, \omega)$ такое, что

$$t^{-s(x)} v_\sigma(t, \omega) \sim \sum_{l=0}^L \sum_{j=0}^{l+1} c_{l+1-j}^l (\log t)^j \psi_\sigma^*(t) + \\ + \sum_{l=0}^L \sum_{j=0}^l (\log t)^j t'^l \sum_{k=0}^{\infty} w_{l-j,k}^l t^{-k+1},$$

где $c_{l+1-j}^l = 0$, когда $v_l + \mu_j + 1$ не является неотрицательным целым числом.

З а м е ч а н и е 2.2. Из предложения 2.4, (2.8) и (2.19) следует, что, грубо говоря, решение v_σ уравнения

$$Q_\sigma v_\sigma = O(t^{s+s+s})$$

имеет порядок

$$v_\sigma = O(t^{s+s+s+1}) + \sum_{\sigma=\pm 1} O(t^{-\operatorname{Re} \mu_\sigma + s+s})$$

при $t \rightarrow \infty$ в секторе Σ .

§ 3. Построение функций $p_{l\sigma}^k(t, x, \xi)$ ($l=1, 2; k=1, 2, \dots; \sigma^2=1$)

Функции $p_{l\sigma}^k(t, x, \xi)$ ($l=1, 2; k=1, 2, \dots; \sigma^2=1$) определим как решения уравнений (1.20), удовлетворяющих начальным условиям (1.23) с $\Phi(t, x) = t^{-s(x)}$, $R_j^l(t, x) = t^{j(x)}$, $\varphi_{j,l}^l(t, x, \xi) \equiv 0$, $j=1, 2, \dots$, $k_l=1, \dots, N_l$.

Обозначим

$$r_{l\sigma}^{k,l-k}(t, x, \xi) = \hat{P}_\sigma^k p_{l\sigma}^{l-k}(t, x, \xi), \quad (3.1)$$

$$r_{l\sigma}^l(t, x, \xi) = - \sum_{k=1}^l \hat{P}_\sigma^k p_{l\sigma}^{l-k}(t, x, \xi). \quad (3.2)$$

Тогда уравнения (1.20) запишутся в виде

$$\hat{P}_\sigma^0 p_{l\sigma}^k(t, x, \xi) = r_{l\sigma}^k(t, x, \xi). \quad (3.3)$$

Предложение 3.1. Для $j=0, 1, \dots$

$$p_{1\sigma}^j \in S^{m(\sigma)+s, m(\sigma)+j+s}, \quad r_{1\sigma}^{k,j-k} \in S^{m(\sigma)-3+s, m(\sigma)+j-1+s}, \quad (3.4)$$

$$p_{2\sigma}^j \in S^{m(\sigma)+s+1-1, m(\sigma)+j+s}, \quad r_{2\sigma}^{k,j-k} \in S^{m(\sigma)-4+s+1, m(\sigma)+j+s}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Пусть $j=0$. Из (2.10) и асимптотического поведения функции $\Psi(\alpha, \kappa; z)$ (2.19) следует, что на любом компакте $K \subset R^n$

$$|t^{-s(x)} p_{1\sigma}^0(t, x, \xi)| \leq c(\alpha(x, \xi) t)^{m(\sigma)}.$$

Отсюда с учётом условия

$$\alpha(x, \xi) \leq c|\xi|$$

получаем

$$|t^{-s(x)} p_{1\sigma}^0(t, x, \xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{m(\sigma)} (|\xi|^{-1} + t)^{m(\sigma)}. \quad (3.6)$$

Дифференцируя (2.10) и (2.19) по соответствующим переменным, получаем

$$|D_t^l D_x^s D_\xi^s t^{-s(x)} p_{1\sigma}^0(t, x, \xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{m(\sigma) - |\xi| + s} (|\xi|^{-1} + t)^{m(\sigma) + s - l}.$$

Аналогично из (2.11) и (2.19) следует оценка

$$|D_t^l D_x^s D_\xi^s t^{-s(x)} p_{2\sigma}^0(t, x, \xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{m(\sigma) + \gamma - 1 + s - |\xi|} (|\xi|^{-1} + t)^{m(\sigma) + s - l}.$$

Согласно определению 1.1 $p_{1\sigma}^0 \in S^{m(\sigma) + s, m(\sigma) + s}$, $p_{2\sigma}^0 \in S^{m(\sigma) + \gamma - 1 + s, m(\sigma) + s}$.

Теперь докажем, что

$$t^{-s(x)} p_{1\sigma}^j(t, x, \omega) = c_j t^{-\mu_\sigma + j} (1 + o(1)), \quad (3.7)$$

$$t^{-s(x)} r_{1\sigma}^{k, j-k}(t, x, \omega) = c_{jk} t^{-\mu_\sigma + j - 1} (1 + o(1)), k = 1, \dots, j, \quad (3.8)$$

где $\omega = \xi/a(x, \xi)$, $t \in \Sigma$, $o(1) = O^{s-1}(\Sigma, \Omega)$, $s > 0$ — произвольное число.

Для $j = 0$ (3.7) следует из (2.10) и (2.19). Для $j = k = 1$ (3.8) следует из (3.1) и из вида оператора $\widehat{P}_\sigma^1$ в (1.17). Пусть (3.7) выполнено для $j < J$. Тогда из вида операторов $\widehat{P}_\sigma^k$ в (1.17) и (3.1) для $k = 1, \dots, J$ имеем

$$t^{-s(x)} r_{1\sigma}^{k, j-k}(t, x, \omega) = c_{jk}' t^{k-1} (1 + o(1)) c_{J-k} t^{-\mu_\sigma + J - k} (1 + o(1)) = \\ = c_{Jk} t^{-\mu_\sigma + J - 1} (1 + o(1)),$$

то есть (3.8) для $j = J$ и $k = 1, \dots, J$. Из (3.2), (3.3), предложения 2.4 и замечания 2.2 следует (3.7) для $j = J$.

Так как порядок ρ -квазиоднородности операторов $\widehat{P}_\sigma^k$ равен $2 - k$ а функций $p_{1\sigma}^0 = (-s(x))$, то из уравнений (1.20) следует, что порядок ρ -квазиоднородности функций $p_{1\sigma}^j(t, x, \xi)$ равен $-s(x) - j$, функций $r_{1\sigma}^{k, j-k} = (-2 - s(x) - j)$. Поэтому

$$p_{1\sigma}^j(t, x, \xi) = [a(x, \xi)]^{-s(x) - j} p_{1\sigma}^j(a(x, \xi) t, x, \xi/a(x, \xi)),$$

$$r_{1\sigma}^{k, j-k}(t, x, \xi) = [a(x, \xi)]^{-2-s(x) - j} r_{1\sigma}^{k, j-k}(a(x, \xi) t, x, \xi/a(x, \xi)).$$

Отсюда с учетом (3.7) получаем

$$|t^{-s(x)} p_{1\sigma}^j(t, x, \xi)| = a(x, \xi)^{-j} [t a(x, \xi)]^{-s(x)} |p_{1\sigma}^j(a(x, \xi) t, x, \xi/a(x, \xi))| \leq \\ \leq c(1 + |\xi|)^{m(\sigma)} (|\xi|^{-1} + t)^{m(\sigma) + j}.$$

Аналогично

$$|t^{-s(x)} r_{1\sigma}^{k, j-k}(t, x, \xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{m(\sigma) - 3} (|\xi|^{-1} + t)^{m(\sigma) + j - 1}.$$

Дифференцируя функции $t^{-s(x)} p_{1\sigma}^j(t, x, \xi)$, $t^{-s(x)} r_{1\sigma}^{k, j-k}(t, x, \xi)$ по соответствующим переменным, получим

$$|D_t^l D_x^s D_\xi^s t^{-s(x)} p_{1\sigma}^j(t, x, \xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{m(\sigma) - |\xi| + s} (|\xi|^{-1} + t)^{m(\sigma) + j - l + s},$$

$$|D_t^l D_x^s D_\xi^s t^{-s(x)} r_{1\sigma}^{k, j-k}(t, x, \xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{m(\sigma) - 3 - |\xi| + s} (|\xi|^{-1} + t)^{m(\sigma) + j - 1 - l + s}$$

Отсюда, согласно определению 1.1, следует (3.4). Аналогичным образом доказывается (3.5).

Следующий результат доказывается по стандартной схеме [8], [9].

Предложение 3.2. Пусть $p_j \in S^{m, k+j}$, $j=0, 1, \dots$. Тогда существует символ $p \in S^{m, k}$ такой, что для любого целого положительного числа N

$$p - \sum_{j=0}^{N-1} p_j \in S^{m, k+N}. \quad (3.9)$$

Два таких символа отличаются на символ порядка m , который вместе со своими производными любого порядка по t при $t=0$ принадлежит пространству $S^{-\infty}$.

Следствие 3.1. Существуют символы

$$p_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+s, m(\sigma)+s},$$

$$p_{2\sigma} \in S^{m(\sigma)+s+\gamma-1, m(\sigma)+s},$$

такие, что для любого целого $N > 0$

$$p_{1\sigma} - \sum_{j=N}^{\infty} p_{1\sigma}^j \in S^{m(\sigma)+s, m(\sigma)+s+N},$$

$$p_{2\sigma} - \sum_{j=N}^{\infty} p_{2\sigma}^j \in S^{m(\sigma)+s+\gamma-1, m(\sigma)+s+N}.$$

Доказательство непосредственно следует из предложений 3.1 и 3.2.

Следствие 3.2.

$$t^{-s(x)} E_1(f_1)(t, x)|_{t=0} = f_1(x) + (R_1 f_1)(x),$$

$$t^{\beta(x)} D_t(t^{-s(x)} E_1(f_1)(t, x))|_{t=0} = (\hat{R}_1 f_1)(x),$$

$$t^{-s(x)} E_2(f_2)(t, x)|_{t=0} = (R_2 f_2)(x),$$

$$t^{\beta(x)} D_t(t^{-s(x)} E_2(f_2)(t, x))|_{t=0} = f_2(x) + (\hat{R}_2 f_2)(x),$$

где интегральные операторы $R_1, \hat{R}_1, R_2, \hat{R}_2$ имеют гладкие ядра.

Доказательство следует из следствия 3.1 и способа определения функций $p_{l\sigma}^j(t, x, \xi)$, $j=0, 1, \dots$; $l=1, 2$; $\sigma^2=1$.

Предложение 3.3. Пусть

$$r_{l\sigma}(t, x, \xi) = \hat{P}_{\sigma} p_{l\sigma}(t, x, \xi). \quad (3.10)$$

Тогда

$$r_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+1+s, m(\sigma)+N+s}, \quad (3.11)$$

$$r_{2\sigma} \in S^{m(\sigma)+\gamma+s, m(\sigma)+N+s}. \quad (3.12)$$

Доказательство. Пусть $N > 0$ — произвольное целое число. Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{1\sigma}^{N+2} &= p_{1\sigma} - \sum_{j=0}^{N+1} p_{1\sigma}^j \in S^{m(\sigma)+s, m(\sigma)+s+N+2}, \\ \tilde{r}_{1\sigma}^{N+2} &= \hat{P}_{\sigma} \tilde{p}_{1\sigma}^{N+2} \in S^{m(\sigma)+s+1, m(\sigma)+s+N}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Разлагая коэффициенты оператора $\hat{P}_\sigma$ по формуле Тейлора по переменной t , представим его в виде

$$\hat{P}_\sigma = \sum_{j=0}^{N+1} \hat{P}_\sigma^j + \hat{P}_{\sigma, N+2},$$

где $\hat{P}_\sigma^j$, $j=0, 1, \dots, N+1$ — те же операторы, что и в (1.17), а $\hat{P}_{\sigma, N+2}$ — остаточный оператор. Тогда

$$\sum_{k=0}^{N+1} \hat{P}_\sigma^k \sum_{j=0}^{N+1} p_{1\sigma}^j = \sum_{k+j \leq N+1} \hat{P}_\sigma^k p_{1\sigma}^j + \sum_{k+j \geq N+2} \hat{P}_\sigma^k p_{1\sigma}^j.$$

Первая сумма равна нулю в силу выбора функций $p_{1\sigma}^j$. Вторую сумму можно представить в виде

$$\sum_{k+j \geq N+2} \hat{P}_\sigma^k p_{1\sigma}^j = \sum_{j \geq N+2} \sum_{k=0}^j \hat{P}_\sigma^k p_{1\sigma}^{j-k} = \sum_{j \geq N+2} \sum_{k=0}^j r_{1\sigma}^{k, j-k} \equiv \tilde{r}_{1\sigma}^{N+2}.$$

В силу предложения 3.1

$$\tilde{r}_{1\sigma}^{N+2} \in S^{m(\sigma) - 3 + \varepsilon, m(\sigma) + N + 1 + \varepsilon}. \quad (3.14)$$

Наконец, обозначим

$$\tilde{r}_{1\sigma}^{N+2} = \hat{P}_{\sigma, N+2} \left(\sum_{j=0}^{N+2} p_{1\sigma}^j \right).$$

Из определения оператора $\hat{P}_{\sigma, N+2}$ и (3.4) следует, что

$$\tilde{r}_{1\sigma}^{N+2} \in S^{m(\sigma) + 1 + 1, m(\sigma) + \varepsilon + N}. \quad (3.15)$$

Учитывая, что

$$r_{1\sigma} = \tilde{r}_{1\sigma}^{-N+2} + \tilde{r}_{1\sigma}^{N+2} + r_{1\sigma}^{N+2},$$

из (3.13), (3.14), (3.15) получим (3.11).

Аналогичным образом доказывается (3.12).

Обозначим

$$T_l(f_l)(t, x) = \sum_{\sigma=-1} (2\pi)^{-n} \int_{R^n \times R^n} e^{i[\tau_\sigma - \langle y, \xi \rangle]} r_{l\sigma}(t, x, \xi) f_l(y) dy d\xi. \quad (3.16)$$

Из определения 1.1 следует, что пространство

$$S^{m, -} = \bigcap_{q=0}^{\infty} S^{m, q}$$

состоит из символов пространства S^n , обращающихся в нуль по модулю $S^{-\infty}$ при $t=0$ вместе со всеми производными по t . В этом смысле будем в дальнейшем говорить, что символы пространства $S^{m, -}$ принадлежат пространству S^m и имеют нуль бесконечного порядка при $t=0$.

Из предложения 3.3, (1.14) и (3.16) следует

Предложение 3.4.

$$PE_l(f_l)(t, x) = T_l(f_l)(t, x) + K_l(f_l)(t, x), \quad l=1, 2, \quad (3.17)$$

где K — интегральные операторы с гладкими символами.

§ 4. Построение символов $\bar{p}_{l\sigma}(t, x, \xi)$ ($l=1, 2$; $\sigma^2=1$)

Для построения символов $\bar{p}_{l\sigma}(t, x, \xi)$ нам понадобится следующий легко доказываемый результат [8].

Предложение 4.1. Пусть $a(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция при $t \geq 0$, а функция $f(t)$ вместе со всеми производными обращается в нуль при $t=0$. Тогда уравнение

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{t} a(t)\right) y(t) = f(t)$$

имеет решение $y(t)$, которое обращается в нуль вместе со всеми производными при $t=0$.

Обозначим

$$\bar{E}_l(f_l)(t, x) = \sum_{\sigma=\pm 1} (2\pi)^{-n} \int_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma - \langle y, \xi \rangle]} \bar{p}_{l\sigma}(t, x, \xi) f_l(y) dy d\xi.$$

Формальное применение оператора P к $\bar{E}_l(f_l)(t, x)$ дает

$$P\bar{E}_l(f_l)(t, x) = \sum_{\sigma=\pm 1} (2\pi)^{-n} \int_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma - \langle y, \xi \rangle]} \hat{P}_\sigma \bar{p}_{l\sigma}(t, x, \xi) f_l(y) dy d\xi, \quad (4.1)$$

где $\hat{P}_\sigma$ определяется по (1.15). Представим оператор $\hat{P}_\sigma$ в виде

$$\hat{P}_\sigma = P + \hat{P}_{l\sigma}, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{P}_{l\sigma} = & 2\varphi_{\sigma l} D_l - 2 \sum_{l,j=1}^n a_{lj}(t, x) \varphi_{\sigma x_l} D_j + \sum_{l,j=1}^n a_{lj}(t, x) \varphi_{\sigma x_l x_j} + \\ & + \frac{1}{t} \sum_{l=1}^n a_l(t, x) \varphi_{\sigma x_l} + \frac{1}{t} b(t, x) \varphi_{\sigma l} - i\varphi_{\sigma ll}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из предложения 3.4 и (4.1) следует, что

$$E(f_1, f_2) = E_1(f_1) + \bar{E}_1(f_1) + E_2(f_2) + \bar{E}_2(f_2) \quad (4.4)$$

является параметриксом уравнения (1.1), если

$$\hat{P}_\sigma \bar{p}_{l\sigma} + r_{l\sigma} \in S^{-\infty} \quad (l=1, 2; \sigma^2=1). \quad (4.5)$$

Функции $\bar{p}_{l\sigma}$ будем искать в виде формальных сумм

$$\bar{p}_{l\sigma}(t, x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{p}_{l\sigma}^j(t, x, \xi). \quad (4.6)$$

Тогда условие (4.5) можно заменить системой уравнений

$$\bar{P}_{l\sigma} \bar{p}_{l\sigma}^0 + r_{l\sigma} = 0, \quad (4.7)$$

$$\bar{P}_{l\sigma} \bar{p}_{l\sigma}^j + P \cdot \bar{p}_{l\sigma}^{j-1} = 0, \quad j \geq 1. \quad (4.8)$$

Предложение 4.2. Для $j=0, 1, \dots$

$$\bar{p}_{1\sigma}^j \in S^{m(\sigma)+s-j},$$

$$\bar{p}_{2\sigma}^j \in S^{m(\sigma)+s+\gamma-1-j}$$

и $\bar{p}_{1\sigma}^j(t, x, \xi)$ имеют нуль бесконечного порядка при $t=0$.

Доказательство. Представим оператор $\bar{P}_{1\sigma}$ в виде

$$\bar{P}_{1\sigma} = |\xi| (\hat{Q}_\sigma + \frac{1}{t} \bar{a}_\sigma(t, x, \xi)),$$

где

$$\hat{Q}_\sigma = |\xi|^{-1} (2\varphi_{\sigma 1} D_t - 2 \sum_{j=1}^n a_{1j}(t, x) \varphi_{\sigma x_j} D_j),$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_\sigma(t, x, \xi) = & |\xi|^{-1} (t \sum_{j=1}^n a_{1j}(t, x) \varphi_{\sigma x_j} x_j + \sum_{j=1}^n a_{2j}(t, x) \varphi_{\sigma x_j} + \\ & + b(t, x) \varphi_{\sigma t} - t \varphi_{\sigma t t}). \end{aligned}$$

Заметим, что из определения функций φ_σ ($\sigma^2=1$) и гладкости коэффициентов уравнения (1.1) следует гладкость функций $\bar{a}_\sigma(t, x, \xi)$, которые являются однородными по ξ порядка нуль.

Из (3.11), (4.7) и предложения 4.1 следует, что $\bar{p}_{1\sigma}^0 \in S^{m(\sigma)+s}$ и имеет нуль бесконечного порядка при $t=0$. Поэтому из (4.8) и предложения 4.1 получаем, что $\bar{p}_{1\sigma}^j \in S^{m(\sigma)+s-j}$ и имеет нуль бесконечного порядка при $t=0$. Для функции $\bar{p}_{2\sigma}^j$ доказательство аналогичное.

Для пространств S^m хорошо известен следующий результат [8].

Предложение 4.3. Существуют символы $\bar{p}_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+s}$, $\bar{p}_{2\sigma} \in S^{m(\sigma)+s+\gamma-1}$ такие, что для любого целого $N > 0$

$$\bar{p}_{1\sigma} - \sum_{j < N} \bar{p}_{1\sigma}^j \in S^{m(\sigma)+s-N},$$

$$\bar{p}_{2\sigma} - \sum_{j < N} \bar{p}_{2\sigma}^j \in S^{m(\sigma)+s+\gamma-1-N}.$$

Следствие 4.1.

$$t^{-s(x)} \bar{E}_l(f_l)(t, x)|_{t=0} = \bar{R}_l(f_l)(x),$$

$$t^{\beta(x)} D_t(t^{-s(x)} \bar{E}_l(f_l)(t, x))|_{t=0} = \bar{Q}_l(f_l)(x),$$

$$P \bar{E}_l(f_l)(t, x) + T_l(f_l)(t, x) = \bar{K}_l(f_l)(t, x), \quad l=1, 2,$$

где $\bar{R}_l$, $\bar{Q}_l$, $\bar{K}_l$ — интегральные операторы с гладкими ядрами.

Доказательство непосредственно следует из вышеизложенных построений.

Основной результат работы, теорема 1.1, является прямым следствием предложения 3.4, следствия 3.2, следствия 4.1 и формулы (4.4).

З а м е ч а н и е 4.1. Изложенным методом можно построить параметрикс задачи Коши с весом для уравнения (1.1) и в случае, когда $\beta(x)$ является целым числом. В частности, к случаю $\beta(x) \equiv 1$ сводятся некоторые классы вырождающихся уравнений с ограниченными коэффициентами.

З а м е ч а н и е 4.2. Аналогичные результаты можно получить для уравнения вида (1.1) с коэффициентами, зависящими от $(\varphi(t), x)$, где $\varphi(t)$ — функция с некоторыми заданными свойствами (в частности $\varphi(t) = t^r, r > 0$). При этом необходимо требовать, чтобы коэффициенты уравнения разлагались по степеням функции $\varphi(t)$. К таким уравнениям сводятся некоторые классы вырождающихся гиперболических уравнений с неограниченными при $t \rightarrow 0$ коэффициентами, для которых задача Коши также ставится с помощью весовых функций.

Ереванский государственный
университет

Поступила 10.VII.1984

Ա. Օ. ՂՈՎԶԱՆՆԻՍՅԱՆ. Երկրորդ կարգի անսահմանափակ դորմակիցներով հիպերբոլական տիպի հավասարումների համար կշռով Կոշի խնդրի պարամետրիքի կառուցումը (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում է կշռով Կոշու խնդիրը երկրորդ կարգի հավասարման համար, որի գլխավոր մասը իրենից ներկայացնում է խիստ հիպերբոլական տիպի օպերատոր, իսկ ցածր կարգի անդամները անսահմանափակ են, երբ $t \rightarrow 0$ ։ Նշվում են կշռային ֆունկցիաներ, որոնց միջոցով դրվում է Կոշու խնդիրը։ Այդպիսի կշռով Կոշու խնդրի դրվածքի դեպքում հնարավորություն է լինում կառուցել նրա պարամետրիքը։ Պարամետրիքը կառուցվում է ֆուրիե ինտեգրալ օպերատորների գումարի տեսքով։

A. H. HOVHANESIAN. Construction of a parametrix for the Cauchy problem with weight for second order hyperbolic equations with unbounded coefficients (summary)

The paper deals with the Cauchy problem with weight for an equation, the main part of which represents a strong hyperbolic operator and the low members are unbounded when $t \rightarrow 0$. The parametrix is constructed as a sum of Fourier integral operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бицадзе. Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981.
2. С. А. Терсенов. К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа, Сиб. мат. журн., 2, № 6, 1961, 913—935.
3. Ф. Т. Барановский. О задаче Коши для гиперболического вырождающегося на начальной плоскости уравнения с видоизмененными начальными данными, Сиб. мат. журн., 18, № 4, 1977, 926—933.
4. Г. Р. Оганесян. Задача Коши с весом для слабо гиперболических псевдодифференциальных уравнений с данными на гиперплоскости вырождения, Уч. записки ЕГУ, № 1, 1975, 10—16.
5. К. А. Ягдзян. Задача Коши для некоторых классов слабо гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами, Уч. записки ЕГУ, № 3, 1975, 3—9.
6. А. Б. Нерсисян. Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 289—292.
7. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 1, М., 1973.
8. A. Yoshikawa. Construction of a parametrix for the Cauchy problem of some weakly hyperbolic equation 1, Hokk. Math., J., 6, 2, 1977, 313—344.
9. L. Boutet de Monvel. Hyperbolic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 27, 1974, 585—639.

УДК 517.986

В. А. АРЗУМАНЯН, С. А. ГРИГОРЯН

СПЕКТР РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБР ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛЕЙ

§ 0. Введение

В настоящей работе изучаются алгебры операторно-значных функций на компакте, рассматриваемые как некоммутативные аналоги равномерных алгебр. Эти алгебры являются подалгебрами т. н. C^* -алгебр операторных полей, впервые введенных Феллом в [1] (подробное изложение теории см. в монографии [2]). Некоммутативным равномерным алгебрам, интерес к которым вполне закономерен, посвящен ряд работ (см., напр., [3]—[5]), в которых обобщаются отдельные результаты, относящиеся к классическим равномерным алгебрам.

Естественным было бы ожидать, чтобы теория некоммутативных равномерных алгебр включала в себя описание такого фундаментального понятия, как пространство максимальных идеалов (спектр) и связанных с ним объектов. Неизвестно, насколько правомерна такая постановка вопроса в общем случае алгебр с переменным слоем. В данной работе делается попытка сделать это для равномерных алгебр непрерывных C^* -значных функций на компакте.

Пусть $C(T, A)$ — C^* -алгебра непрерывных отображений компакта T в фиксированную C^* -алгебру A с единицей. Равномерная алгебра $\mathfrak{M}$ —это замкнутая подалгебра $C(T, A)$, разделяющая точки и содержащая константы. Для такой алгебры вводится понятие относительного спектра (опред. 3.1), заменяющего пространство максимальных идеалов и сводящегося к нему при $A = \mathbb{C}$. Надо заметить, что это понятие учитывает структуру непрерывного поля и отличается от обычного спектра даже при коммутативном слое (отличном от C^* -алгебры комплексных чисел). Определение относительного спектра кажется далеким от совершенства, однако, в важном случае A -алгебры (равномерной алгебры, являющейся A -подмодулем $C(T, A)$, опред. 1.6) оно становится безупречным (теорема 3.6). Такие алгебры возникают совершенно естественно, по своим свойствам они наиболее близки к классическим равномерным алгебрам, а результаты, относящиеся к A -алгебрам более содержательны. Отметим, что выделение этого подкласса равномерных алгебр является характерным для некоммутативной теории: это непосредственно следует из эквивалентного определения A -алгебры, как равномерной алгебры, содержащей постоянные функции. Модельным примером служит A -алгебра аналитических в единичном круге матриц-функций (аналог диск-алгебры).

Содержание работы распределено по параграфам следующим образом. В § 1 приведены необходимые определения, примеры и результаты,

постоянно используемые в дальнейшем. В следующем параграфе подробно изучены условные ожидания (основной объект, фигурирующий в определении относительного спектра). Результаты носят сравнительно общий характер и представляют самостоятельный интерес. Основные факты сосредоточены в § 3, где вводится и изучается подходящее понятие спектра некоммутативной равномерной алгебры. В последнем параграфе рассматривается гельфандово представление и связанные с ним объекты. Результаты статьи разного типа — одни обобщают известные факты, другие являются новыми по существу (сводятся к тривиальным в коммутативном случае), некоторые уточняют условия, при которых существуют аналоги известных результатов.

Часть результатов работы была анонсирована в заметке [6], п. п. 1—5.

Необходимо отметить, что работа носит вводный характер и приведенные результаты — малая часть ответов на многочисленные вопросы, естественно возникающие при последовательном развитии теории. Интересной является проблема описания классов некоммутативных банаховых алгебр, «представляющихся» определенным типом разномерных алгебр.

Все сведения, касающиеся понятий и фактов, употребляемых без указания на источник, можно найти в монографиях [2], [7], [8].

§ 1. Предварительные сведения

Основными объектами в настоящей работе являются алгебры операторных полей с постоянным слоем, однако мы считаем целесообразным начать с общих понятий.

Определение 1.1. (см. [1], [2]). Пусть T — компакт, $\{A_t, t \in T\}$ — семейство C^* -алгебр с единицей ($e_t \in A_t$). C^* -алгеброй A непрерывных сечений называется любая инволютивная подалгебра $\prod_{t \in T} A_t$ (с координатными операциями), удовлетворяющая условиям:

- (i) для любого $x \in A$ функция $t \rightarrow \|x(t)\|$ непрерывна;
- (ii) для любого $t \in T$, $\{x(t), x \in A\} = A_t$;
- (iii) пусть y — сечение ($y \in \prod_{t \in T} A_t$); если для любых $t_0 \in T$, $\varepsilon > 0$,

существует $x \in A$ такое, что $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$ в некоторой окрестности t_0 , то $y \in A$.

Тот факт, что алгебра A , удовлетворяющая условиям (i) — (iii) определения 1.1 является C^* -алгеброй (в норме $\|x\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|$) вполне очевиден (только доказательство полноты требует небольшого технического усилия). Условие (iii) определения утверждает, по существу, что любое „непрерывное“ относительно A сечение само принадлежит A . Оказывается (см. [2]), что это равносильно максимальной этой алгебры.

При каждом $t \in T$ естественно определены морфизмы $p_t: A \rightarrow A_t$, $p_t(x) = x(t)$.

Определение 1.2 (ср. [2]). Пусть A, A' — две C^* -алгебры непрерывных сечений на T , порождаемые, соответственно, семействами $\{A_t\}, \{A'_t\}$. Отображение $\Phi: A \rightarrow A', \Phi(A) = A'$ называется изоморфизмом C^* -алгебр непрерывных сечений, если существует семейство изоморфизмов $\{\Phi_t, t \in T\}, \Phi_t: A_t \rightarrow A'_t$, такое, что при любом $t \in T$ коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & A' \\ p_t \downarrow & \Phi_t \downarrow p_t & \\ A_t & \rightarrow & A'_t \end{array}$$

Очевидно, что Φ есть $*$ -изоморфизм C^* -алгебр A и A' (специального вида). Вообще говоря, могут существовать неизоморфные алгебры непрерывных сечений с одинаковыми слоями. В дальнейшем изоморфные C^* -алгебры непрерывных сечений мы не будем различать.

Определение 1.3. (ср. [3], [5]). Пусть A — C^* -алгебра непрерывных сечений на компакте T . Равномерной алгеброй называется замкнутая подалгебра $\mathfrak{X} \subset A$, удовлетворяющая условиям:

- (i) $\mathfrak{X}$ содержит единицу A ;
- (ii) для любого $t \in T, \{x(t), t \in T\} = A_t$;
- (iii) для любых $t_1, t_2 \in T, t_1 \neq t_2$ существует $x \in \mathfrak{X}$, такое, что $x(t_1) = 0, x(t_2) = e_{t_2}$.

Легко проверить, что замкнутая подалгебра $\mathfrak{X} \subset A$ равномерна тогда и только тогда, когда она содержит константы и разделяет точки T в следующем смысле:

- (iv) для любых $t_1, t_2 \in T, a_1 \in A_{t_1}, a_2 \in A_{t_2}$, существует $x \in \mathfrak{X}$ $x(t_1) = a_1, x(t_2) = a_2$.

Заметим, что в силу максимальности A , для любой функции $f \in C(T)$ сечение $\underline{f}$, определяемое формулой

$$f(t) = f(t) e_t,$$

принадлежит A . Более того, равномерная алгебра, содержащая алгебру всех таких сечений (изоморфную $C(T)$ и обозначаемую $\underline{C(T)}$), совпадает с A (см. [4]).

Равномерные алгебры непрерывных сечений являются некоммутативным обобщением обычных равномерных алгебр. Как уже было отмечено во введении, для них, при различных предположениях, справедливы некоторые факты классической теории равномерных алгебр. Мы ограничимся случаем алгебр непрерывных сечений с постоянным слоем, что позволяет сделать более обстоятельным и последовательным построение некоммутативного аналога.

Пусть T — компакт, A — C^* -алгебра с единицей $e, C(T, A)$ — алгебра непрерывных отображений из T в A . Тогда C^* -алгебра непрерывных сечений $C(T, A)$ содержит постоянные сечения $\underline{a}$, определяемые для каждого $a \in A$ следующим образом:

$$\underline{a}(t) = a.$$

Обозначим через $\underline{A}$ подалгебру (изоморфную A) всех таких сечений.

Заметим, что существует множество C^* -алгебр непрерывных сечений на T со слоями $A_t = A$, $t \in T$, отличных от $C(T, A)$, но изоморфных ей (в смысле определения 1.2).

Следующие утверждения легко доказываются.

Предложение 1.4. (i) Алгебра $C(T, A)$ порождается своими подалгебрами $\underline{C(T)}$ и $\underline{A}$ и является $C(T)$ -и A -бимодулем.

(ii) C^* -алгебра A непрерывных сечений на компакте T со слоями $A_t = A$ совпадает с $C(T, A)$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq \underline{A}$.

(iii) Имеет место соотношение $Z(C(T, A)) = C(T, Z(A))$, где $Z(M)$ означает центр алгебры M .

Таким образом, алгебра $C(T, A)$ является замыканием $*$ -алгебры конечных линейных комбинаций вида $\sum a_i f_i$, где $a_i \in A$, $f_i \in C(T)$, которую мы обозначаем $C_0(T, A)$.

Заметим, что каждое состояние Φ на $C(T, A)$ определяет вероятностную меру на T и измеримое поле φ_t состояний алгебры A , причем

$$\Phi(x) = \int_T \varphi_t(x(t)) d\mu(t).$$

Однако для целей настоящей работы мы ограничимся доказательством следующего утверждения:

Теорема 1.5. Каждое состояние Φ на $C(T, A)$, сужение которого на $\underline{A}$ является чистым состоянием, представляется в виде

$$\Phi(x) = \int_T \varphi(x(t)) d\mu(t),$$

для некоторой вероятностной меры μ на T .

Доказательство. Пусть μ — мера на T , которую определяет состояние $\Phi|_{C(T)}$.

Для любого открытого множества $U \subset T$ рассмотрим монотонно возрастающую последовательность функций $f_n \in C(T)$, $n = 1, 2, \dots$ таких, что

$$(i) 0 \leq f_n(t) \leq 1, t \in T,$$

(ii) для любого $t \in T$, $f_n(t) \rightarrow \chi_U(t)$, при $n \rightarrow \infty$, где χ_U — характеристическая функция множества U .

Пусть $x \in C(T, A)$, тогда, в силу монотонности последовательности f_n , существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f_n x)$, не зависящий от конкретного выбора последовательности f_n . Если $0 < \mu(U) < 1$, то, очевидно, функционал Φ_U

$$\Phi_U(x) = \frac{1}{\mu(U)} \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f_n x)$$

является состоянием на алгебре $C(T, A)$ так же, как и состояние

$$\Phi_{T \setminus U}(x) = \frac{1}{\mu(T \setminus U)} \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x - f_n x).$$

Следующее соотношение очевидно:

$$\Phi = \mu(U) \Phi_U + \mu(T \setminus U) \Phi_{T \setminus U}.$$

Кроме того, т. к. φ — чистое состояние,

$$\Phi|_A = \Phi_U|_A = \Phi_{T \setminus U}|_A = \varphi. \quad (1.1)$$

Пусть $a \in A$, $f \in C(T)$, $\varepsilon > 0$ и пусть $\{U_i\}_{i=1}^m$ — конечное покрытие T открытыми множествами такое, что для некоторых $a_i \in C$, $i=1, 2, \dots, m$

$$\left\| f - \sum_i a_i \chi_{U_i} \right\| < \frac{\varepsilon}{3\|a\|}.$$

Подберем для любого $i=1, 2, \dots, m$, функцию g_i из последовательности, аппроксимирующей χ_{U_i} , такую, что

$$\left\| f - \sum_i a_i g_i \right\| < \frac{\varepsilon}{3\|a\|},$$

причем

$$|\Phi(a g_i) - \mu(U_i) \Phi_{U_i}(a)| < \frac{\varepsilon}{3 \sum |a_i|}.$$

Теперь, в силу (1.1)

$$\begin{aligned} |\Phi(a f) - \varphi(a) \Phi(f)| &\leq |\Phi(a f) - \Phi(a \sum a_i g_i)| + \\ &+ |\sum a_i \Phi(a g_i) - \sum a_i \mu(U_i) \Phi_{U_i}(a)| + |\sum a_i \mu(U_i) \varphi(a) - \varphi(a) \Phi(f)| < \\ &< \|a\| \frac{\varepsilon}{3\|a\|} + \sum |a_i| \frac{\varepsilon}{3 \sum |a_i|} + |\varphi(a)| \frac{\varepsilon}{3\|a\|} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Phi(a f) = \varphi(a) \int f d\mu = \int \varphi(a) f d\mu = \int \varphi(a f(t)) d\mu(t).$$

В силу предложения 1.4, для любого $x \in C(T, A)$,

$$\Phi(x) = \int \varphi(x(t)) d\mu(t).$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваемые равномерные алгебры являются подалгебрами $C(T, A)$.

Из класса всех равномерных подалгебр $C(T, A)$ естественно выделить те, которые являются подмодулями A -бимодуля $C(T, A)$.

Определение 1.6. Равномерная алгебра $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$ называется A -алгеброй, если $\underline{A} \subset \mathfrak{X}$.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 1.7. Замкнутая подалгебра $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$ является A -алгеброй тогда и только тогда, когда $\underline{A} \subset \mathfrak{X}$ и для любых $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, существует $x \in \mathfrak{X}$, $x(t_1) = 0$, $x(t_2) = e$.

Простейшим примером A -алгебры служит минимальная замкнутая подалгебра $C(T, A)$, порожденная A и M , где M — некоторая равномер-

ная подалгебра $C(T)$. В частности, если M — диск-алгебра (аналитических в открытом и непрерывных в замкнутом единичном круге функций), то получается некоммутативное обобщение диск-алгебры. Эта алгебра является примером равномерной алгебры, инвариантной относительно сдвигов компактной группы — носителя. Такие алгебры будут подробно изучены в последующих публикациях (см. [6], п. п. 7, 8).

Очевидно, не каждая A -алгебра получается таким путем.

С другой стороны, если $A = M_n C$, (C^* -алгебра комплексных матриц порядка n), то, как показывает следующее утверждение, все A -алгебры таковы.

Предложение 1.8. Пусть $A = M_n C$. Тогда любая A -алгебра $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$, порождается алгеброй $\underline{A}$ и некоторой равномерной алгеброй M , $M \subset C(T)$.

Доказательство. Каждый элемент $x \in \mathfrak{X}$ реализуется в виде матриц-функций $(f_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, где $f_{ij} \in C(T)$; при этом $x \in \underline{A}$, если f_{ij} — константы, $x \in \underline{C(T)}$, если $f_{ij} = 0$, $i \neq j$, $f_{ii} = f_{jj}$, $i, j = 1, \dots, n$. Пусть $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — система матричных единиц алгебры $M_n C$, тогда, очевидно, $e_{ij} \in \mathfrak{X}$ при всех i, j . Обозначим через M минимальную подалгебру $C(T)$, которой принадлежат все f_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, когда x пробегает алгебру $\mathfrak{X}$. Покажем, что M — искомая равномерная алгебра. Действительно, пусть $x \in \mathfrak{X}$, тогда для любой пары (i, j) , очевидно

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^n e_{ki} x e_{jk} \in \underline{M} \subset \underline{C(T)} \cap \mathfrak{X}.$$

Поскольку $\underline{M}$ замкнуто в $\underline{C(T)}$ то соответствующая алгебра M образует замкнутую подалгебру $\underline{C(T)}$. Если $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, то существует $x \in \mathfrak{X}$, $x(t_1) \neq x(t_2)$ (предл. 1.7), откуда для некоторой пары (i, j) , $f_{ij}(t_1) \neq f_{ij}(t_2)$.

Следовательно M — равномерная алгебра, $M \subset C(T)$, причем, очевидно, A вместе с $\underline{M}$ порождают алгебру $\mathfrak{X}$.

§ 2. Условные ожидания

В этом параграфе изучаются общие факты, относящиеся к понятию условного ожидания, постоянно применяющиеся в дальнейшем. Некоторые из них общеизвестны и приводятся для полноты, в большинстве случаев даны новые доказательства.

Для простоты изложения всюду предполагается, что C^* -алгебры обладают единицей.

Определение 2.1. (ср. [8], [9]). Пусть A — C^* -алгебра и A — ее C^* -подалгебра, содержащая единицу A . Условным ожиданием p называется A -билинейное положительное отображение A на A , сохраняющее единицу.

Множество $P(A, A)$ всех условных ожиданий (снабженное топологией поточечной сходимости) образует выпуклое подмножество конуса всех положительных операторов из A в A . Здесь A -билинейность озна-

чает, что $p(axb) = ap(x)b$ для любых $a, b \in A$ и $x \in A$. Отсюда сразу следует, что p есть проектор.

Предложение 2.2. Пусть $p \in P(A, A)$, $J = \ker p$. Тогда J является самосопряженным A -бимодулем, $J \cap A = \{0\}$, причем $J \oplus A = A$ (т. е. для любого $x \in A$ существуют однозначно определенные $j \in J$, $a \in A$, такие, что $x = j + a$). Кроме того справедливы соотношения:

- (i) $p(x^*) = p(x)^*$,
- (ii) $p(x)^* p(x) \leq p(x^*x)$,
- (iii) $p(x^*y) p(y^*x) \leq \|y\|^2 p(x^*x)$,
- (iv) $\|p\| = 1$.

Доказательство. Свойства J проверяются непосредственно. Утверждение (i) есть простое следствие положительности p . Для доказательства (ii) предположим $x = j + a$, $j \in J$, $a \in A$, тогда $p(x^*x) = a^*a + p(j^*j) \geq a^*a = p(x)^* p(x)$, так как $p(j^*j) \geq 0$. Чтобы показать (iii) заметим вначале, что для любого $y \in A$, $x^*y^*yx \leq \|y\|^2 x^*x$, откуда, в силу (ii), $(p(x^*y) p(y^*x) \leq p(x^*y y^*x) \leq \|y\|^2 p(x^*x)$. Далее, из (iii) следует, что $\|p(xy)\|^2 \leq \|y\|^2 \|p(x^*x)\|$, откуда, положив $x = e$, имеем $\|p\| \leq 1$. Поскольку p — проектор, $\|p\| \geq 1$, получаем (iv).

Таким образом, условное ожидание есть проектор с нормой 1. Заметим, что верно и обратное (теорема Томина): любой проектор нормы 1 с C^* -алгебры на некоторую ее подалгебру есть условное ожидание ([8], [9]).

Предложение 2.3. Пусть $p \in P(A, A)$, $J = \ker p$. Тогда

- (i) если $h \in J_+$ ($h \in J$, $h \geq 0$), то для любого рационального $r > 0$, $h^r \in J$;
- (ii) минимальная C^* -подалгебра A , содержащая J_+ , сама содержится в J ;

- (iii) если $h \in J$, $\operatorname{Re} h > 0$, $\operatorname{Im} h > 0$, то $h^*h \in J$ и $hh^* \in J$.

Доказательство. (i) Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $h \in J_+$, тогда при $n \geq m$, в силу (iii) предложения 2.2, имеем

$$\|p(h^{\frac{n}{m}})\|^2 = \|p(h^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{2n-m}{2m}})\|^2 \leq \|h^{\frac{2n-m}{2m}}\|^2 \cdot p(h) = 0. \quad (2.1)$$

Если же $n < m$, то для k такого, что $2^k \cdot n > m$ получаем в силу (iii) предложения 2.2 и (2.1)

$$\|p(h^{\frac{n}{m}})\|^{2^k} \leq \|p(h^{\frac{2n}{m}})\|^{2^{k-1}} \leq \dots \leq \|p(h^{\frac{2^k n}{m}})\| = 0.$$

Отметим, что (i) верно и для любого действительного $r > 0$. (ii) следует из (i) и того, что при любых $h_1, h_2 \in J$,

$$\|p(h_1 h_2)\|^2 \leq \|h_1\|^2 \|p(h_1^2)\|.$$

- (iii) очевидно, в силу самосопряженности J и свойства (ii).

Определение 2.4. Пусть A — C^* -алгебра, A — C^* -подалгебра A . Самосопряженный замкнутый A -подмодуль $J \subset A$ будем называть A -максимальным, если выполнены следующие условия:

- (i) $J \cap A = \{0\}$, $J \oplus A = A$;
- (ii) для любых $h \in J$, $h \geq 0$, $x, y \in A$, имеет место $xhy \in J$.

Следующий результат характеризует в некоторых случаях (важных для нас) ядра условных ожиданий:

Теорема 2.5. Пусть J — A -максимальный подмодуль C^* -алгебры A . Тогда он является ядром единственного условного ожидания $p \in P(A, A)$. Обратно, пусть C^* -алгебра A порождается C^* -подалгебрами A и $Z(A)$, $p \in P(A, A)$, тогда $\ker p$ есть A -максимальный подмодуль алгебры A .

Доказательство. Пусть J — A -максимальный подмодуль алгебры A . Для любого $x \in A$, $x = a + j$ корректно определен оператор проектирования на первую компоненту: $p(x) = a$. Очевидно, что p является A -билинейным отображением $p: A \rightarrow A$, причем $p(e) = e$. В силу самосопряженности подмодуля J , p отображает эрмитовы элементы A в эрмитовы элементы A . Достаточно показать, что p является положительным оператором.

Предположим вначале, что $J_+ = \{0\}$ и пусть $x \geq 0$, $x = a + h$. Тогда $a = a^*$ и, следовательно, $a = a_+ - a_-$, где $a_+ \geq 0$, $a_- \geq 0$, $a_+ a_- = a_- a_+ = 0$. Допустим $a_- \neq 0$, тогда $a_- x a_- = a_-^3 + a_- h a_-$, и так как $a_- x a_- \geq 0$, то $a_- h a_- = a_- x a_- + a_-^3 \geq 0$. Повтому $a_- h a_- = 0$ в силу нашего предположения и A -максимальности J . Отсюда получаем $a_- x a_- = -a_-^3$ и, следовательно $a_- = 0$. Таким образом, $p(A_+) = A_+$.

Пусть теперь $J_+ \neq \{0\}$. Тогда замыкание I подалгебры A/J_+ является двусторонним идеалом алгебры A , содержащимся в J (в силу A -максимальности). Рассмотрим фактор-алгебру A/I и естественное $*$ -отображение $\pi: A \rightarrow A/I$, которое порождает разложение C^* -алгебры A/I :

$$A/I = \pi(A) \oplus \pi(J),$$

где C^* -алгебра $\pi(A)$ $*$ -изоморфна алгебре A (так как $A \cap \ker p = \{0\}$), $i: \pi(A) \rightarrow A$. В силу того, что $\ker \pi \subset J$, $\pi(J)$ является замкнутым $\pi(A)$ -подмодулем $\pi(A)$ -бимодуля A/I . Покажем, что $\pi(J)_+ = \{0\}$. Действительно, если $h \in \pi(J)_+$, то найдется положительный элемент $j \in A$, и следовательно из J , такой, что $\pi(j) = h$, откуда $\pi(j) = 0$. Таким образом, $\pi(J)$ является $\pi(A)$ -максимальным $\pi(A)$ -подмодулем A/I (условие (ii) определения 2.4 тривиально выполнено). Тогда, по предыдущему, оператор q проектирования на первую координату, $q: A/I \rightarrow \pi(A)$ является условным ожиданием. Как легко проверить, $p = i^0 q \circ \pi$, повтому p также положительный оператор и, следовательно, есть условное ожидание.

Обратно, пусть $p \in P(A, A)$, причем $A = C^*\{A, Z(A)\}$ и пусть $J = \ker p$. Тогда, из предложения 2.2, J — самосопряженный замкнутый A -подмодуль A , причем $J \cap A = \{0\}$ и если $x \in A$, то разложение $x = p(x) + (x - p(x))$ однозначно. Условие (ii) определения 2.4 достаточно проверить для $h \in J_+$, $x, y \in Z(A)$. В силу (iii) предложения 2.2 и (i) предложения 2.3, имеем

$$\|p(xhy)\|^2 = \|p(xyh)\|^2 \leq \|xy\|^2 \|p(h^2)\| = 0.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Заметим, что условия теоремы выполнены для $A = C(T, A)$, см. §1.

На алгебре $C(T, A)$ выделяются два типа условных суждений, соответственно на подалгебры A и $C(T)$. Обозначим множество всех условных ожиданий $p: C(T, A) \rightarrow A$ (соответственно $q: C(T, A) \rightarrow C(T)$) через $P(T, A)$, вместо $P(A, A)$ (соответственно $Q(T, A)$). Например, оператор p_t , определенный ранее (§ 1), $p_t(x) = x(t)$ есть пример условного ожидания $p_t \in P(T, A)$. Множество $P(T, A)$ играет важную роль в наших рассуждениях, мы изучим его подробно в следующем параграфе. Сейчас обратим основное внимание на множество $Q(T, A)$, наделенное слабой топологией.

Предложение 2.6. Пусть $S(A)$ — множество всех состояний алгебры A . Тогда $Q(T, A)$ гомеоморфно множеству $C(T, S(A))$ всех непрерывных отображений $h: T \rightarrow S(A)$, снабженное топологией поточечной сходимости.

Доказательство. Пусть $q \in Q(T, A)$, тогда, если

$$h_q(t)(a) = q(a)(t),$$

то, как легко проверить, $h_q \in C(T, S(A))$. Обратно, пусть $h \in C(T, S(A))$, положив для любого $x \in C(T, A)$

$$q_h(x)(t) = h(t)(x(t)),$$

q_h определяет некоторое условное ожидание из $Q(T, A)$. Подробное доказательство не представляет трудностей.

Следствие 2.7. Пусть $\mathfrak{X}$ — равномерная алгебра $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$, $q \in Q(T, A)$. Тогда полный образ $q(\mathfrak{X})$ не тривиален (т. е. содержит в себе непрерывные функции, отличные от констант).

Доказательство. В самом деле, пусть $x \in \mathfrak{X}$, $x(t_0) = 0$, $x(t_1) = e$ и пусть $h \in C(T, S(A))$ — функция, отвечающая q в силу предложения 2.6. Тогда

$$q(x)(t_0) = h(t_0)(x(t_0)) = 0,$$

$$q(x)(t_1) = h(t_1)(e) = 1.$$

Пространство $Q(T, A)$ играет важную роль во взаимоотношениях между равномерными подалгебрами $C(T, A)$ и $C(T)$. Подробное освещение подобных вопросов мы оставляем на будущее.

§ 3. Относительный спектр равномерных алгебр

Здесь вводится понятие спектра для некоммутативных равномерных алгебр, которое связано со структурой непрерывного поля. При $A = C$ получается обычный компакт максимальных идеалов.

Определение 3.1. Относительным спектром (или A -спектром) равномерной алгебры $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$ называется множество $\text{Sp}_A \mathfrak{X}$ всех гомоморфизмов $p: \mathfrak{X} \rightarrow A$, которые продолжаются до условного ожидания $p \in P(T, A)$, снабженное топологией поточечной сходимости.

В силу того, что любая точка $t \in T$ определяет отображение $p_t: \mathfrak{M} \rightarrow A$ (см. § 1) $p_t(x) = x(t)$, которое, как легко убедиться, является условным ожиданием, множество T вложено в $\text{Sp}_A \mathfrak{M}$ как компактное подмножество; при этом $\text{Sp}_A C(T, A)$ состоит из A -билинейных гомоморфизмов $C(T, A) \rightarrow A$.

Следующее утверждение описывает относительный спектр равномерной алгебры в терминах соответствующих идеалов.

Предложение 3.2. *Относительный спектр $\text{Sp}_A \mathfrak{M}$ равномерной алгебры $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$ биективен множеству двусторонних замкнутых идеалов $\mathfrak{M}$, продолжаемых до некоторого A -максимального подмодуля $C(T, A)$.*

Доказательство состоит в комбинации теоремы 2.5 и утверждения (i) предложения 1.4.

Заметим, что вообще говоря $\text{Sp}_A \mathfrak{M}$ не является компактом, однако, в некоторых важных случаях это можно гарантировать. Как показывает следующий результат, это верно в случае, если A имеет тривиальный центр, в частности является простой алгеброй.

Теорема 3.3. *Пусть C^* -алгебра A имеет тривиальный центр ($Z(A) = \mathbb{C}e$). Тогда относительный спектр любой равномерной алгебры является компактом.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — равномерная алгебра $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$. Покажем вначале, что $P(T, A)$ — компакт. В силу предложения 1.4, каждое условное ожидание p определяется своими значениями на $C(T)$. Кроме того из A -линейности p следует, что $p(C(T)) \subset Z(A)$ и, следовательно, по условию теоремы, ему отвечает некоторое состояние на $C(T)$. Поэтому достаточно проверить, что множество всех таких состояний замкнуто в компакте состояний на $C(T)$. Пусть $\varphi_n = p_n|_{C(T)}$ — последовательность, сходящаяся к некоторому состоянию φ . Оно определяет оператор p_0 на $C_0(T, A)$ по формуле

$$p_0(\sum a_i f_i) = \sum a_i \varphi(f_i),$$

где $a_i \in A$, $f_i \in C(T)$.

Поскольку для любого $n = 1, 2, \dots$

$$\|\sum a_i \varphi_n(f_i)\| = \|p_n(\sum a_i f_i)\| \leq \|\sum a_i f_i\|,$$

то

$$\|\sum a_i \varphi(f_i)\| \leq \|\sum a_i f_i\|,$$

откуда следует непрерывность p_0 на всюду плотном подмножестве $C_0(T, A) \subset C(T, A)$ (см. предложение 1.4). Поэтому оператор p_0 продолжается на $C(T, A)$ до проектора на подалгебру A с нормой 1 и, по теореме Томиама, является условным ожиданием. При этом, очевидно $p|_{C(T)} = \varphi$. Итак, $P(T, A)$ — компакт. Обозначая через R подмножество $P(T, A)$ такое, что $R|_{\mathfrak{M}} = \text{Sp}_A \mathfrak{M}$, заметим, что для окончания доказательства остается отметить простой факт: R является замкнутым подмножеством $P(T, A)$.

Замечание. На самом деле любое состояние на $C(T)$ продолжается до условного ожидания на $C(T, A)$. Действительно если μ — вероятностная мера на T (отвечающая некоторому состоянию на $C(T)$), то канонически определено условное ожидание $p_\mu \in P(T, A)$ по формуле

$$p_\mu(x) = \int_T x(t) d\mu(t),$$

где интегрирование понимается в естественном смысле.

Следующий результат дает описание A -спектра алгебры $C(T, A)$.

Предложение. 3.4. *Пространство $\text{Sp}_A C(T, A)$ гомеоморфно множеству непрерывных отображений пространства максимальных идеалов $Z(A)$ в T , снабженного топологией поточечной сходимости.*

Доказательство. Обозначим пространство максимальных идеалов алгебры $Z(A)$ через X .

Пусть $p \in \text{Sp}_A C(T, A)$, тогда, как уже было отмечено в начале доказательства теоремы 3.3, $p: C(T) \rightarrow Z(A)$, поэтому существует однозначно определенное непрерывное отображение p^* (двойственное к $p|_{C(T)}$) $p^*: X \rightarrow T$. Ввиду того, что рассматриваются слабые топологии, отображение $p \rightarrow p^*$ непрерывно.

Обратно, пусть α — непрерывное отображение $\alpha: X \rightarrow T$. Тогда, отождествляя $C(T, Z(A))$ с $C(T \times X)$ и $Z(A)$ с $C(X)$, определим отображение $p_0: C(T, Z(A)) \rightarrow Z(A)$ по формуле

$$(p_0 f)(x) = f(\alpha(x), x).$$

Нетрудно проверить, что p_0 является $Z(A)$ -линейным *-гомоморфизмом. Наша цель — продолжить его до A -линейного гомоморфизма на $C(T, A)$.

Пусть вначале $a \in A$ и M_a — коммутативная C^* -подалгебра A порождена $Z(A)$ и элементом a^*a , тогда $M_a = C(Y)$, где Y — компакт максимальных идеалов алгебры M_a . Так как $Z(A) \subset M_a$, то существует сюръекция $\beta: Y \rightarrow X$, поэтому композиция $\alpha \circ \beta$ отображает Y на T и, как и выше, определяет M_a -линейный *-гомоморфизм $p_a: C(T, M_a) \rightarrow M_a$, являющийся продолжением p_0 , т. е. $p_a|_{C(T, Z(A))} = p_0$.

Обозначим через I двусторонний замкнутый идеал $\ker p_0$ в алгебре $C(T, Z(A))$, а через Λ — множество всех состояний на $C(T, A)$, аннулирующих I . Покажем, что для любого $a \in A$ существует $\varphi_a \in \Lambda$, $\varphi_a(a^*a) = \|a\|^2$.

В самом деле, пусть ψ — состояние на M_a такое, что $\psi(a^*a) = \|a\|^2$. Тогда $\varphi = \psi \circ p_a$ является состоянием на $C(T, M_a)$, причем, очевидно, $I \subset \ker \varphi$ и $\varphi(a^*a) = \|a\|^2$. В качестве φ_a теперь можно взять любое состояние на $C(T, A)$, продолжающее φ .

Пусть теперь J — минимальная замкнутая подалгебра $C(T, A)$, содержащая AI . В силу (i) предложения 1.4, J является двусторонним идеалом алгебры $C(T, A)$, и следовательно A -подмодулем $C(T, A)$, удо-

влетворяющим условию (ii) определения 2.4. Наша ближайшая цель — доказать, что J удовлетворяет условию (i) этого определения.

Пусть $\underline{a} \in \underline{A} \cap J$ и пусть $\varphi_a \in \Lambda$, так что $\varphi_a(\underline{a}^* \underline{a}) = \|\underline{a}\|^2$. Для любых $\underline{b} \in A$ и $\underline{h} \in I$ имеем

$$\|\varphi_a(\underline{b} \underline{h})\|^2 \leq \|\underline{b}\|^2 \varphi_a(\underline{h}^* \underline{h}) = 0.$$

Поэтому $\varphi_a|_J = 0$, откуда $\varphi_a(\underline{a}^* \underline{a}) = 0$ и, следовательно, $\underline{a} = 0$. Таким образом, $\underline{A} \cap J = \{0\}$.

Заметим, что $\underline{A} \oplus J$ есть замкнутая подалгебра $C(T, A)$ (см. 1.2.4, [8]) и $C(T, Z(A)) = Z(A) \oplus I$ (теорема 2.5). Поэтому, в силу предложения 1.4, $\underline{C}(T) \subset \underline{A} \oplus J$ и, следовательно, $\underline{C}(T, A) = \underline{A} \oplus J$. Снова по теореме 2.5, J является ядром некоторого условного ожидания $p \in P(T, A)$, более того, A -линейным гомоморфизмом (так как J идеал), продолжающим p .

Чтобы завершить доказательство, напомним (см. доказательство теоремы 3.3), что два условных ожидания, совпадающих на $\underline{C}(T)$, совпадают всюду.

Следствие 3.5. Пусть C^* -алгебра A имеет тривиальный центр. Тогда

$$\text{Sp}_A C(T, A) = T.$$

Доказательство очевидно.

Для определенного класса алгебр понятие относительного спектра можно сделать более удобным:

Теорема 3.6. Пусть A — простая C^* -алгебра с единицей, $\mathfrak{X}$ — равномерная A -алгебра, $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$. Тогда $\text{Sp}_A \mathfrak{X}$ совпадает с множеством всех нетривиальных A -линейных гомоморфизмов $p: \mathfrak{X} \rightarrow A$.

Доказательство. Достаточно показать, что любой такой гомоморфизм продолжается до условного ожидания на $C(T, A)$.

Пусть $I = \ker p$, тогда I является идеалом, причем, в силу A -линейности p имеем: $I \cap \underline{A} = \{0\}$, $I \oplus \underline{A} = \mathfrak{X}$. Докажем, что $\bar{I} = I$. Отметим, что $\underline{e} \notin \bar{I}$, так как в противном случае в I нашелся бы элемент, достаточно близкий к $\underline{e}$ и, следовательно, обратимый. Более того, $\bar{I} \cap \underline{A} = \{0\}$, так как для $\underline{a} \in A \setminus \{0\}$ идеал $A \underline{a} A$ совпадает с A (в силу простоты A) и если бы $\underline{a} \in I$, то и $A \subset \bar{I}$, в частности $\underline{e} \in \bar{I}$, что неверно. Поэтому $\bar{I} = I$ и, следовательно, p — непрерывен. Покажем, наконец, что $\|p\| = 1$. Пусть $\|p\| > 1$, тогда, очевидно, существует $x \in A$, $\|x\| < 1$, а $\|p(x)\| = 1$. Для $y = p(x)^* x$ имеем: $\|y\| \leq \|p(x)\| \cdot \|x\| < 1$, $\|p(y)\| = \|p(x)^* p(x)\| = \|p(x)\|^2 = 1$ и $p(y) = p(x)^* p(x) > 0$. Поэтому $\underline{e} - p(y)$ не обратим в A , что противоречит тому, что $\underline{e} - y$ обратим в $\mathfrak{X}$ и, следовательно, $\|p\| = 1$.

Обозначим через $U(A)$ множество унитарных элементов A , через $PS(A)$ — множество чистых состояний алгебры A и зафиксируем некото-

рое $\varphi \in PS(A)$. Тогда $\varphi_p = \varphi \circ p$ является, очевидно, линейным функционалом на $\mathfrak{M}$ с нормой 1. Пусть Φ — некоторое продолжение φ_p на алгебру $C(T, A)$, сохраняющее норму и являющееся, следовательно, состоянием. Для любого $u \in U(A)$ обозначим через Φ_u состояние, определяемое формулой $\Phi_u(x) = \Phi(u^*xu)$ и пусть

$$J = \bigcap_{u \in U(A)} \ker \Phi_u.$$

Очевидно, что $I \subset J$, причем J является самосопряженным замкнутым линейным подпространством $C(T, A)$. Докажем, что $J \cap A = \{0\}$. Пусть, противное, $0 \neq a_0 \in A$, причем $\varphi_u(a_0) = \varphi(u^*a_0u) = 0$ для любого $u \in U(A)$.

Обозначим через ψ чистое состояние, для которого $\psi(a_0) \neq 0$. В силу того, что алгебра A проста, состояние ψ аппроксимируется (в слабой топологии) состояниями вида $\varphi_b(a) = \varphi(b^*ab)$ (см. 3.4.3, [2]), откуда следует, что для некоторого b , $\varphi_b(a_0) \neq 0$. Поэтому, по теореме о транзитивности (2.8.3, [2]), для некоторого $u \in U(A)$, $\varphi_u(a_0) \neq 0$, что приводит к противоречию.

Пусть $J_0 = \overline{C(T)} \cap J$. Покажем, что $\underline{A}J_0 \subset J$. Действительно, для любого $u \in U(A)$, $a \in A$, $j_0 \in J_0$, в силу теоремы 1.5

$$\Phi_u(\underline{a}j_0) = \int \varphi_u(\underline{a}j_0(t)) d\mu(t) = \varphi_u(a) \int j_0(t) d\mu(t) = \varphi_u(a) \Phi_u(j_0) = 0. \quad (3.1)$$

Покажем теперь, что для любого $a \in A$ и $j_0 \in \underline{A}J_0$

$$\|a\| < \|\underline{a} + j_0\|.$$

В самом деле, пусть ψ — чистое состояние на A , для которого $\psi(a^*a) = \|a\|^2$. Тогда, как уже было отмечено выше, для любого $\varepsilon > 0$ существует $u \in U(A)$ такое, что

$$|\psi(a^*a) - \varphi_u(a^*a)| < \varepsilon.$$

Следовательно, в силу (3.1),

$$\begin{aligned} \|a\|^2 - \varepsilon &= \|a^*a\| - \varepsilon = \psi(a^*a) - \varepsilon \leq \varphi_u(a^*a) = \\ &= \Phi_u(\underline{a}^*(\underline{a} + j)) \leq \|\underline{a}^*(\underline{a} + j)\| \leq \|a\| \|\underline{a} + j\|, \end{aligned}$$

откуда получаем (3.2).

Далее покажем, что $\underline{A} + \underline{A}J_0$ всюду плотно в $C(T, A)$. В силу предложения 1.4, достаточно проверить, что $\underline{A} + \underline{A}J_0 = C_0(T, A)$. Действительно, так как J_0 имеет коразмерность 1 в $\overline{C(T)}$, то для $a \in A$, $f_i \in C(T)$, $i = 1, 2, \dots, n$ имеем однозначное представление (с некоторыми $a_i \in C$, $g_i \in J_0$):

$$\sum \underline{a}_i f_i = \sum \underline{a}_i (a_i e_i + g_i) = \sum a_i \underline{a}_i + \sum \underline{a}_i g_i \in \underline{A} + \underline{A}J_0.$$

Итак, на $C_0(T, A)$ определен ограниченный оператор $p_0: C_0(T, A) \rightarrow A$, который продолжается на $C(T, A)$ до проектора p с нормой 1, являющегося, по теореме Томина, условным ожиданием.

Для окончания доказательства достаточно проверить, что $J = \ker p$. В самом деле, $\overline{A/J_0} = \ker p$, откуда $\ker p \subset J$, а поскольку $J \cap A = \{0\}$ и, по теореме 2.5, $\ker p + A = C(T, A)$, получаем $J \subset \ker p$, и т. д.

Равномерные A -алгебры простой структуры (см. замечание после предложения 1.7) допускают полное описание относительного спектра.

Предложение 3.7. Пусть A — простая C^* -алгебра и $\mathfrak{M}$ — равномерная подалгебра $C(T, A)$, порожденная алгебрами $\underline{A}$ и $\underline{M}$, где M — равномерная подалгебра $C(T)$. Тогда $\text{Sp}_A \mathfrak{M}$ совпадает с пространством максимальных идеалов алгебры M .

Доказательство. Ясно, что любое $p \in \text{Sp}_A \mathfrak{M}$ определяет элемент $\varphi \in \text{Sp } M$ (пространство максимальных идеалов алгебры M), как сужение на соответствующую подалгебру: $\varphi(f)_e = p(f)$. Обратно, пусть $\varphi \in \text{Sp } M$; для $x \in C_0(T, A) \cap \mathfrak{M}$, $x = \sum \underline{a}_i \underline{f}_i$ (см. предл. 1.4 и далее), положим

$$p(x) = \sum \underline{a}_i \varphi(f_i).$$

Проверим ограниченность этого оператора на $C_0(T, A) \cap \mathfrak{M}$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, по теореме Крейна—Мильмана, найдутся $t_1, t_2, \dots, t_m \in T$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m > 0$, $\sum_1^m \alpha_j = 1$, такие, что для любого $i = 1, 2, \dots, n$,

$$|\varphi(f_i) - \sum_1^m \alpha_j f_i(t_j)| < \frac{\varepsilon}{n \sum_1^m |\alpha_j|}.$$

Отсюда, как нетрудно проверить

$$\|p(x) - \sum \alpha_j x(t_j)\| < \varepsilon.$$

Поскольку $\|\sum \alpha_j x(t_j)\| \leq \|x\|$, то, в силу произвольности ε , p продолжается на все $\mathfrak{M}$ до оператора с нормой 1. Очевидно, p является A -линейным гомоморфизмом и, следовательно, по теореме 3.6, $p \in \text{Sp}_A \mathfrak{M}$. Из самой конструкции p видно, что соответствие между $\text{Sp } M$ и $\text{Sp}_A \mathfrak{M}$ есть гомеоморфизм.

В частности, спектр «некоммутативной» диск-алгебры (см. конец §1) совпадает с пространством максимальных идеалов коммутативной (обычной) диск-алгебры — единичным кругом.

§ 4. Представление Гельфанда

Для каждой равномерной алгебры $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$ можно определить представление, аналогичное гельфандовскому, с помощью непрерывных сечений на $\text{Sp}_A \mathfrak{M}$: если $x \in \mathfrak{M}$, то положим $\widehat{x}(p) = p(x)$, $p \in \text{Sp}_A \mathfrak{M}$. Полученная таким образом алгебра $\widehat{\mathfrak{M}} \subset C(\text{Sp}_A \mathfrak{M}, A)$ вообще говоря, не является равномерной по многим причинам. Следующий результат показывает, что для A -алгебр с простым слоем представление Гельфанда обладает свойствами, близкими к классическим.

Теорема 4.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — равномерная A -алгебра, $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$, где A — простая C^* -алгебра. Тогда:

(i) представление Гельфанда $\widehat{\mathfrak{M}}$ алгебры $\mathfrak{M}$ есть равномерная A -алгебра на $\text{Sp}_A \mathfrak{M}$;

(ii) $\text{Sp}_A \widehat{\mathfrak{M}} = \text{Sp}_A \mathfrak{M}$.

Доказательство. В силу теоремы 3.3, $\text{Sp}_A \mathfrak{M}$ — компакт. Очевидно (принимая во внимание топологию $\text{Sp}_A \mathfrak{M}$), что $\widehat{\mathfrak{M}}$ является подалгеброй $C(\text{Sp}_A \mathfrak{M}, A)$, содержащей A ($\widehat{a}(p) = p(\widehat{a}) = a$, для любого $a \in A, p \in \text{Sp}_A \mathfrak{M}$). Алгебра $\widehat{\mathfrak{M}}$ замкнута в $C(\text{Sp}_A \mathfrak{M}, A)$, так как если $x_i \in \widehat{\mathfrak{M}}$ фундаментальна, то $x_i \rightarrow x \in \widehat{\mathfrak{M}}$, откуда для любого $p \in \text{Sp}_A \mathfrak{M}$,

$$\|\widehat{x}_i(p) - \widehat{x}(p)\| \leq \|p(x_i - x)\| \leq \|x_i - x\| \rightarrow 0.$$

В заключение достаточно показать (см. определение 1.3), что для любых $p_1, p_2 \in \text{Sp}_A \mathfrak{M}$, $p_1 \neq p_2$, существует $x \in \mathfrak{M}$, $p_1(x) \neq p_2(x)$. Действительно, пусть $x_0 \in \mathfrak{M}$, $a_1 = p_1(x_0) \neq p_2(x_0) = a_2$, тогда $A(a_2 - a_1)A$ есть двусторонний замкнутый идеал A и, следовательно, совпадает с A . Поэтому для некоторых $b_i, c_j \in A, i, j = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{i,j=1}^n b_i(a_2 - a_1)c_j = e$. Пусть $x = \sum_{i,j=1}^n b_i(x_0 - a_1)c_j$. Тогда $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = e$, откуда следует (i).

Для доказательства (ii) заметим, что в силу теоремы 3.6, гельфандово представление индуцирует непрерывное отображение

$$\tau: \text{Sp}_A \widehat{\mathfrak{M}} \rightarrow \text{Sp}_A \mathfrak{M}$$

по формуле

$$(\tau p)(x) = p(\widehat{x}), \quad p \in \text{Sp}_A \widehat{\mathfrak{M}}, \quad x \in \mathfrak{M},$$

которое, как легко проверить, является биекцией. Таким образом теорема доказана.

При рассмотрении гельфандова представления естественным является изучение связи между обратимостью элемента x исходной алгебры и ее представляющей функции $\widehat{x}$, в частности, совпадение спектра x с множеством значений функции $\widehat{x}$. В отличие от классической теории, положение в некоммутативном случае более сложное. Конечно, в силу изоморфизма алгебры $\mathfrak{M}$ и ее гельфандова представления, $\text{Sp } x = \text{Sp } \widehat{x}$, однако вместо множества значений $\widehat{x}$ приходится рассматривать иной объект, который мы назовем относительным спектром элемента x .

Определение 4.2. Пусть $\mathfrak{M}$ -равномерная алгебра $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$. Относительным (или A -) спектром элемента $x \in \mathfrak{M}$ называется множество

$$\text{Sp}_A x = \bigcup p(x),$$

где объединение берется по всем $p \in \text{Sp}_A \mathfrak{M}$.

Предложение 4.3. Пусть $\mathfrak{X}$ -равномерная алгебра, $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$, где A — проста. Тогда для любого $x \in \mathfrak{X}$, $\text{Sp}_A x$ является подкомпактом $\text{Sp } x$.

Доказательство. Очевидно, что $\text{Sp}_A x \subset \text{Sp } x$. Докажем, что $\overline{\text{Sp}_A x} = \text{Sp}_A x$. Пусть $\lambda_0 \in \overline{\text{Sp}_A x}$, тогда для некоторой последовательности $\lambda_n \in \text{Sp}_A x$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$.

Пусть $\lambda_n \in \text{Sp } p_n(x)$. В силу компактности $\text{Sp}_A \mathfrak{X}$ (теорема 3.3) существует подпоследовательность $p_{n_k} \rightarrow p_0$, $p_0 \in \text{Sp}_A \mathfrak{X}$. Покажем, что $\lambda_0 \in \text{Sp } p_0(x)$. Если предположить противное, т. е. обратимость элемента $p_0(x) - \lambda_0 e \in A$, то в некоторой его окрестности все элементы также обратимы. Однако это противоречит тому, что $p_{n_k}(x) - \lambda_{n_k} e \rightarrow p_0(x) - \lambda_0 e$.

Следующий результат выделяет класс алгебр, для которых обратимость элемента эквивалентна поточечной обратимости его представляющей функции.

Предложение 4.4. Пусть $\mathfrak{X}$ — равномерная алгебра $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$. Для того, чтобы A -спектр любого элемента алгебры $\mathfrak{X}$ совпадал с его спектром необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in \mathfrak{X}$ из обратимости в A всех $p(x)$, $p \in \text{Sp}_A \mathfrak{X}$ следовала обратимость x .

Доказательство. Пусть для любого $x \in \mathfrak{X}$, $\text{Sp}_A x = \text{Sp } x$. Тогда если для любого $p \in \text{Sp}_A \mathfrak{X}$ существует $p(x)^{-1}$, то $0 \notin \text{Sp } p(x)$, следовательно $0 \notin \text{Sp } x$.

Обратно, пусть обратимость $p(x)$ для любого p влечет обратимость x и пусть $\lambda \in \text{Sp}_A x$. Тогда для любого $p \in \text{Sp}_A \mathfrak{X}$, $\lambda \in \text{Sp } p(x)$, т. е. $p(\lambda e - x)$ обратим в A . По условию $\lambda e - x$ обратим в $\mathfrak{X}$ и, следовательно, $\lambda \in \text{Sp } x$.

Примером алгебры, удовлетворяющей условиям предыдущего предложения, служит равномерная алгебра с матричным слоем (см. предл. 1.8).

Предложение 4.5. Пусть $A = M_n \mathbb{C}$, $\mathfrak{X}$ — равномерная A -алгебра, $\mathfrak{X} \subset C(T, A)$. Тогда для любого $x \in \mathfrak{X}$, $\text{Sp}_A x = \text{Sp } x$.

Доказательство. В силу предложения 4.4 достаточно проверить, что если $x \in \mathfrak{X}$ и для любого $p \in \text{Sp}_A \mathfrak{X}$, $p(x)$ обратим в A , то x обратим в $\mathfrak{X}$. Пусть M — равномерная подалгебра $C(T)$ такая, что M вместе с A порождает алгебру $\mathfrak{X}$ (см. предложение 1.8). В обозначениях доказательства предложения 1.8 элемент x представляется в виде

$$x = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} f_{ij}.$$

Из предложения 3.7 имеем $\text{Sp}_A \mathfrak{X} = \text{Sp } M$, причем для любого $p \in \text{Sp}_A \mathfrak{X}$

$$p(x) = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \varphi(f_{ij}), \text{ где } \varphi \in \text{Sp } M.$$

Очевидно, что $\det x \in M$ и, как легко видеть,

$$\det p(x) = \varphi(\det x).$$

Это означает, что обратимость $p(x)$ для любого $p \in \text{Sp}_A \mathfrak{M}$ эквивалентна обратимости $\det x$ как элемента M , что, в свою очередь, влечет обратимость x .

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26.X.1984

Վ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆԻԱՆ, Ս. Ա. ԴՐԻԳՈՐԻԱՆ. Օպերատորային դաշտերի նավաստաշաղիի նան-
բախալիվների սպեկտրը (ամփոփում)

Աշխատանքը նվիրված է ոչ կոմուտատիվ հավասարաշաղի հանրահաշիվներին, որոնք իրեն-
ցից ներկայացնում են T կոմպակտից A ֆիքսած C^* -հանրահաշիվին անընդհատ արտապատկե-
րումների $C(T, A)$ C^* -հանրահաշիվի փակ ենթահանրահաշիվներ (հաստատուններ պարունակող
և կետեր տարբերող)։ Այդպիսի հանրահաշիվի համար մտցվում և ուսումնասիրվում է հարաբերա-
կան սպեկտր (մաքսիմալ իդեալների տարածության ընդհանրացում), սահմանվող որպես A -ի
մեջ այդպիսի հոմոմորֆիզմների բաղմուխում, որոնք շարունակվում են մինչև $C(T, A)$ -ից պայ-
մանակա՝ սպասում իր A -ին իդոմորֆ ենթահանրահաշիվի վրա։ Մանրակրկիտ ուսումնասիրված
է այն հավասարաշաղի հանրահաշիվների կառուցվածքը և հատկությունները, որոնք հանդիսանում
են Λ — բիմոդուլ $C(T, A)$ -ի A -ենթամոդուլ։

V. A. ARZUMANIAN, S. A. GRIGORIAN. *The spectrum of uniform algebras
of operator fields (summary)*

The paper is devoted to the non-commutative uniform algebras, i. e. closed subalgebras (which separates the points and contains the constants) of the C^* -algebra $C(T, A)$ of all continuous maps of a compact T to some fixed unital C^* -algebra A . For such an algebra we introduce and study the relative spectrum (a generalization of the notion of maximal ideal space) defined as a set of all homomorphisms into A , which may be extended up to a conditional expectation of $C(T, A)$ onto the subalgebra, isomorphic to A . The structure and properties of the uniform algebras which are A -submodules of the A -bimodule $C(T, A)$ are investigated in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Fell. The structure of algebras of operator fields, Acta Math., 106, 3—4, 1961, 233—280.
2. Հի. Диксмыс. C^* -алгебры и их представления, М., 1974.
3. D. C. Taylor. Interpolation in algebras of operator fields, J. of Funct. Anal., 10, 2, 1972, 159—190.
4. D. C. Taylor. A general Hoffman—Wermer theorem for algebras of operator fields, Proc. of A. M. S., 52, 1975, 212—216.
5. A. Sallaz. Une extension d'un theorem de K. Hoffman et J. Wermer aux algebres de champs continus d'operateurs, C. R. Acad. Sc. de Paris, ser. A, 284, 17, 1977, 1049—1051.
6. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян. Равномерные алгебры операторных полей, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 123, 1983, 185—189.
7. Т. Гамелин. Равномерные алгебры, М., 1973.
8. S. Sakai. C^* -algebras and W^* -algebras, Springer—Verlag, 1971.
9. S. Stratila. Modular theory in Operator Algebras, Editura Academiei and Abacus Press, 1981.

УДК 517.51

Г. А. КАРАГУЛЯН

О СХОДИМОСТИ ПО ПРИНГСХЕЙМУ ДВОЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Введём следующие определения:

Определение 1. Ортонормированная на $[0,1]$ система $\{\varphi_n(x)\}$ (ОНС) называется системой сходимости, если из условия $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ следует сходимость почти всюду на $[0,1]$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$.

Определение 2. Двойная ОНС $\{\varphi_n(x) \cdot \varphi_m(y)\}$ называется системой сходимости по Прингсхейму, если из условия $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty$ следует сходимость почти всюду на $[0,1] \times [0,1]$, прямоугольных частичных сумм

$$S_{nm}(\tau, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y),$$

когда n и m независимо друг от друга стремятся к бесконечности.

Определение 3. Двойная ОНС $\{\varphi_n \cdot \varphi_m\}$ называется системой сходимости по Прингсхейму относительно последовательности λ_n , если из условия $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij}^2 a_{ij}^2 < \infty$ следует сходимость прямоугольных частичных сумм

$$S_{n_p n_q}(x, y) = \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_q} \lambda_{ij} a_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y),$$

когда p и q независимо друг от друга стремятся к бесконечности.

Определение 4. ОНС $\{\varphi_n\}$, определенная на $[0,1]$, называется системой типа $(2,2)^1$, если для любой последовательности $\{a_n\}$ имеем

$$\int_0^1 \sup_n \left| \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \right|^2 dx \leq c \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2,$$

где $c > 0$ не зависит от $\{a_n\}$.

Определение 5. Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_m\}$ ОНС на $[0,1]$. ОНС $\{\varphi_n(x) \psi_m(y)\}$ называется системой типа $(2,2)^2$, если для любой двойной последовательности $\{a_{ij}\}$ имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 \sup_{n, m} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y) \right|^2 dx dy \leq c \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2,$$

где $c > 0$ не зависит от $\{a_{ij}\}$.

Известно, что тригонометрическая система является системой сходимости ([1]), а двойная тригонометрическая система не является системой сходимости по Прингсхейму ([2]). Аналогичные утверждения для системы Уолша $\{W_n(x)\}$ и для двойной системы Уолша $\{W_n(x)W_m(y)\}$, были установлены, соответственно, в [3] и [4]. До работы [1] Карлсона А. М. Олевским впервые было установлено существование полной в $L_2[0,1]$ ограниченной ОНС $\{\Omega_n(x)\}$, являющейся системой сходимости.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Двойная ОНС $\{\Omega_n(x)\Omega_m(y)\}$, где $\{\Omega_n\}$ есть полная ограниченная ОНС, построенная А. М. Олевским в работе [5], является системой сходимости по Прингсхейму, и более того, удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \int_0^1 \sup_{n, m} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \Omega_i(x) \Omega_j(y) \right|^2 dx dy \leq c_1 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2.$$

Теорема 2. Пусть ОНС $\{\varphi_n\}$ имеет тип $(2,2)^1$. Тогда двойная система $\{\varphi_n \chi_m\}$, где $\{\chi_m\}$ есть система Хаара, является системой типа $(2,2)^2$.

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_n\}$ ОНС на $[0,1]$. Тогда существует последовательность p_k такая, что двойная ОНС $\{\varphi_n \varphi_m\}$ является системой сходимости по Прингсхейму относительно последовательности p_k , и более того, удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \int_0^1 \sup_{p, q} \left| \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_q} a_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y) \right|^2 dx dy \leq c_2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2.$$

Вопрос о существовании ограниченной полной ОНС $\{\varphi_n\}$, для которой система $\{\varphi_n \varphi_m\}$ являлась бы системой сходимости по Прингсхейму, был поставлен П. Л. Ульяновым в 1983 г. на Всесоюзной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Н. Н. Лузина. Ясно, что теорема 1 дает утвердительный ответ на этот вопрос. Отметим, что утверждение, аналогичное теореме 1, без доказательства сформулировано в работе Р. А. Гецадзе ([6]).

Теорема 3 представляет распространение известной теоремы Меньшова-Марцинкевича ([7], [8]) на двойные ОНС.

1°. Доказательства теорем 1 и 2.

При доказательстве теоремы 1 пользуемся конструкцией А. М. Олевского ([5]). В дальнейшем, через $\|f\|_2$ обозначается норма в пространстве $L_2([0,1] \times [0,1])$.

Прежде чем доказать теорему 1, напомним построение системы $\{\Omega_n\}$ (см. [5]).

Сначала строится вспомогательная система $\{\psi_n\}$. Для этого определяются ортогональные матрицы $A_k = \|a_{ij}^{(k)}\|$, $k=1, 2, \dots$.

* Всюду далее, через c_i , $i=1, 2, \dots$ обозначаются абсолютные константы.

Полагаем

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \quad (1 \leq j \leq 2^k). \quad (1.1)$$

Если $1 < i \leq 2^k$, $i = 2^s + v$ ($1 \leq v \leq 2^s$, $0 \leq s \leq k-1$), то

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1/\sqrt{2^{k-s}}, & (v-1)2^{k-s} + 1 \leq j \leq (2v-1)2^{k-s-1}, \\ -1/\sqrt{2^{k-s}}, & (2v-1)2^{k-s-1} + 1 \leq j \leq v2^{k-s}, \\ 0, & \text{при остальных } j. \end{cases} \quad (1.2)$$

Пусть $\{\lambda_n\}$ — система Хаара, упорядоченная обычным образом. Положим

$$\psi_n(x) = \gamma_n(x) \quad (n=1, 2), \quad \psi_n(x) = \sum_{j=1}^{2^k} a_{ij}^{(k)} \gamma_{j+2^k}(x), \quad (1.3)$$

при $n = 2^k + i$ ($1 \leq i \leq 2^k$; $k=1, 2, \dots$).

В работе [5] установлены следующие свойства системы $\{\psi_n\}$.

1. $\{\psi_n\}$ — полная ОНС,
2. справедливо равенство

$$\sum_{q=1}^n \psi_q(x) \psi_q(t) = \sum_{q=1}^{2^k} \gamma_q(x) \gamma_q(t) + r_{k+1}(x) r_{k+1}(t) \sum_{q=1}^1 \gamma_q(x) \gamma_q(t), \quad (1.4)$$

где $n = 2^k + i$ ($1 \leq i \leq 2^k$).

3. система $\{\psi_n\}$ содержит в себе систему Радемахера,
4. $\{\psi_n\}$ является системой типа $(2, 2)^1$, т. е.

$$\int_0^1 \sup_n \left| \sum_{l=1}^n b_l \psi_l(x) \right|^2 dx \leq c_3 \sum_{l=1}^{\infty} b_l^2. \quad (1.5)$$

Система $\{\omega_n\}$ строится следующим образом (см. [5]). Из $\{\psi_n\}$ выделяется система Радемахера и остальные функции, не меняя их порядка, обозначаются через $\{\omega_k\}$. Тогда имеем

$$\{\psi_n\} = \{\omega_k\} \cup \{r_k\}. \quad (1.6)$$

Затем система Радемахера разбивается на две подсистемы S_1 и S_2 , где $S_1 = \{r^{2^k}(x); k=1, 2, \dots\}$. Пусть $\{\tilde{\omega}_n\}$ — объединение систем $\{\omega_k\}$ и S_2 . Точнее, $\tilde{\omega}^{2^k}(x) = \omega_k(x)$, $\tilde{\omega}_n(x) = r_n(x)$ ($1 \leq n \neq 2^k$; $k=1, 2, \dots$). Очевидно, что система $\{\tilde{\omega}_n\}$ ортогональна и становится полной при добавлении к ней системы S_1 . Положим

$$g_1(x) = \tilde{\omega}_1(x) = r_1(x), \quad (1.7)$$

$$g_n(x) = a_{1, n-2^{k+1}}^{(k)} \omega_k(x) + \sum_{l=2^{k+1}}^{2^{k+1}-1} a_{j-2^{k+1}, n-2^{k+1}} r_l(x), \quad (1.8)$$

$$(2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1; k=1, 2, \dots),$$

где $a_{ij}^{(k)}$ — элементы матрицы A_k (см. (1.2)). Пусть

$$\omega_{2^k}(x) = g_k(x), \quad \omega_{2^{k+1}}(x) = r_{2^k}(x) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1.9)$$

В [5] доказано, что $\{\omega_n\}$ — равномерно ограниченная полная ОНС сходимости и, более того, удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \sup_n \left| \sum_{i=1}^n b_i Q_i(x) \right|^2 dx \leq c_4 \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2. \quad (1.10)$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $\{P_n\}$ и $\{Q_m\}$ — определенные на $[0,1]$ ОНС типа (2.2)¹, и существует последовательность определенных на $[0,1] \times [0,1]$ измеримых функций $D_n(x, t)$, $n=1, 2, \dots$ такая, что
а) для почти всех $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 [D_n(x, t)]^2 dt < \infty \quad (n=1, 2, \dots), \quad (1.11)$$

б) для любого $n=1, 2, \dots$

$$\text{п.в.} \int_0^1 D_n(x, t) P_k(t) dt = \begin{cases} P_k(x), & \text{при } k \leq n, \\ 0, & \text{при } k > n, \end{cases} \quad (1.12)$$

в) для каждого $f(x) \in L_2[0,1]$

$$\int_0^1 \sup_n \left| \int_0^1 |D_n(x, t)| |f(t)| dt \right|^2 dx \leq A \int_0^1 |f(t)|^2 dt, \quad (1.13)$$

где $A > 0$ не зависит от $f(x)$.

Тогда система $\{P_i, Q_j\}$ имеет тип $(2,2)^2$.

Доказательство. Обозначим

$$K_m(y, s) = \sum_{i=1}^m Q_i(y) Q_i(s). \quad (1.14)$$

Пусть $f(t, s)$ есть функция из замкнутой линейной оболочки системы $\{P_i, Q_j\}$ в $L_2([0,1] \times [0,1])$. Тогда имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i,j=1}^k b_{ij} P_i(t) Q_j(s) - f(t, s) \right\|_2 = 0 \quad \left(b_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 f(t, s) P_i(t) Q_j(s) dt ds \right). \quad (1.15)$$

Из (1.15), учитывая (1.11), (1.12) и (1.14), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 D_n(x, t) K_m(y, s) f(t, s) dt ds &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 D_n(x, t) K_m(y, s) \times \\ &\times \sum_{i,j=1}^k b_{ij} P_i(t) Q_j(s) dt ds \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^k b_{ij} \times \\ &\times \int_0^1 D_n(x, t) P_i(t) dt \int_0^1 K_m(y, s) Q_j(s) ds = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} P_i(x) Q_j(y) = S_{nm}(x, y, f). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{n, m} |S_{nm}(x, y, f)| &\leq \sup_{n, m} \int_0^1 |D_n(x, t)| \left| \int_0^1 K_m(y, s) f(t, s) ds \right| dt \leq \\ &\leq \sup_n \int_0^1 |D_n(x, t)| \sup_m \left| \int_0^1 K_m(y, s) f(t, s) ds \right| dt. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Обозначим

$$F(t, y) = \sup_m \left| \int_0^1 K_m(y, s) f(t, s) ds \right|. \quad (1.17)$$

Так как $\{Q_i\}$ имеет тип $(2,2)^1$, то

$$\int_0^1 |F(t, y)|^2 dy \leq B \int_0^1 |f(t, s)|^2 ds \text{ для п. в. } t \in [0, 1], \quad (1.18)$$

где $B > 0$ не зависит от $f(t, s)$.

Интегрируя обе части (1.18) по t , получим

$$\int_0^1 \int_0^1 |F(t, y)|^2 dy dt \leq B \int_0^1 \int_0^1 |f(t, s)|^2 dt ds. \quad (1.19)$$

Подставив (1.17) в (1.16), имеем

$$\sup_{n, m} |S_{nm}(x, y, f)| \leq \sup_n \int_0^1 |D_n(x, t)| F(t, y) dt.$$

Следовательно, учитывая свойство (1.13), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sup_{n, m} |S_{nm}(x, y, f)|^2 dx &\leq \int_0^1 \left[\sup_n \int_0^1 |D_n(x, t)| F(t, y) dt \right]^2 dx \leq \\ &\leq A \int_0^1 |F(t, y)|^2 dt. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Интегрируя обе части (1.20) по y и учитывая (1.19), имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 \sup_{n, m} |S_{nm}(x, y, f)|^2 dx dy \leq A \cdot B \int_0^1 \int_0^1 |f(t, s)|^2 dt ds.$$

Лемма 1 доказана.

Из неё непосредственно следует

Лемма 2. Если $\{Q_n\}$ есть ОНС типа $(2,2)^1$, то двойная система $\{\psi_i Q_j\}$ (опр. $\{\psi_i\}$ см. (1.3)) имеет тип $(2,2)^2$.

Доказательство. Так как $\{\psi_i\}$ имеет тип $(2,2)^1$ (см. (1.5)), то для доказательства леммы 2 достаточно показать, что ядро $\sum_{i=1}^n \psi_i(x) \psi_i(t) = D_n(x, t)$ удовлетворяет условиям а), б) и в) леммы 1, если положить $p_k(x) = \psi_k(x)$; $k=1, 2, \dots$. Выполнимость условий а) и б) очевидна. Покажем справедливость условия в). Если $f(x) \in L_2[0,1]$, то имеем (см. (1.4))

$$\begin{aligned} \sup_n \left| \int_0^1 |D_n(x, t)| f(t) dt \right| &\leq \sup_k \int_0^1 \left| \sum_{q=1}^{2^k} \gamma_q(x) \gamma_q(t) \right| |f(t)| dt + \\ &+ \sup_i \int_0^1 \left| \sum_{q=1}^i \gamma_q(x) \gamma_q(t) \right| |f(t)| dt, \text{ где } n=2^k + i \ (1 \leq i \leq 2^k). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Известно (см. [9]), что для любого $x \in [0,1]$ и $m=1, 2, \dots$

$$\sum_{q=1}^m \gamma_q(x) \gamma_q(t) = \begin{cases} 1/|\Delta_x^{(m)}|, & \text{при } t \in \Delta_x^{(m)}, \\ 0, & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

где $\Delta_x^{(m)}$ есть интервал постоянства функций γ_i , $i=1, 2, \dots, m$, содержащий точку x . Следовательно, используя (1.21), имеем

$$\sup_n \left| \int_0^1 |D_n(x, t)| f(t) dt \right| \leq \sup_k \frac{1}{|\Delta_x^{(2^k)}|} \int_{\Delta_x^{(2^k)}} |f| dt + \sup_i \frac{1}{|\Delta_x^{(i)}|} \int_{\Delta_x^{(i)}} |f| dt. \quad (1.22)$$

Так как максимальный оператор Харди и Литтлвуда имеет сильный тип $(2,2)$ (см. [10]), то из (1.22) получаем (1.13).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $P_{ij}(x, y)$; $i, j=1, 2, \dots, N$ — ОНС полиномов по двойной системе Радемахера. Тогда для любых чисел $|b_{ij}|_{i,j=1}^N$ справедливо неравенство

$$\int_0^1 \int_0^1 \max_{1 \leq n, m \leq N} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} P_{ij}(x, y) \right|^2 dx dy \leq c_3 \sum_{i,j=1}^N b_{ij}^2. \quad (1.23)$$

Доказательство. Пусть $T(x, y) = \sum_{i,j=1}^N d_{ij} r_i(x) r_j(y)$ есть полином по двойной системе Радемахера. Простым вычислением можно убедиться, что имеет место неравенство

$$\int_0^1 \int_0^1 T^2(x, y) dx dy \leq c_6 \left(\int_0^1 \int_0^1 T^2(x, y) dx dy \right)^2.$$

Отсюда следует

$$|\{(x, y); |T(x, y)| > \alpha\}| \leq \frac{c_6}{\alpha^4} \left(\int_0^1 \int_0^1 T^2(x, y) dx dy \right)^2. \quad (1.24)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\sum_{i,j=1}^N b_{ij}^2 = 1$. Обозначим

$$P_i(x, y) = \sum_{j=1}^N b_{ij} P_{ij}(x, y), \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (1.25)$$

Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} P_{ij}(x, y) = \sum_{i=1}^N P_i(x, y). \quad (1.26)$$

Очевидно, что функции P_i , $i = 1, \dots, N$ ортогональны. Следовательно, используя лемму из [11] (стр. 705), сумма (1.26) может быть разбита на два слагаемых

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N P_i(x, y) &= P_1 + \dots + P_{k-1} + \alpha P_k + \beta P_k + P_{k+1} + \dots \\ &\dots + P_N = P_1^{(1)} + P_2^{(1)} \quad (\alpha + \beta = 1) \end{aligned}$$

так, чтобы выполнялись неравенства $\|P_i^{(1)}\|_2^2 \leq \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$. Вновь повторяя эту операцию, для полиномов $P_1^{(1)}$ и $P_2^{(1)}$ получаем

$$\sum_{i=1}^N P_i = P_1^{(1)} + P_2^{(1)} = [P_1^{(2)} + P_2^{(2)}] + [P_3^{(2)} + P_4^{(2)}], \quad \|P_i^{(2)}\|_2^2 \leq \frac{1}{4} \quad (1 \leq i \leq 4).$$

Повторяя эту операцию v раз, где v — наперёд заданное натуральное число такое, что

$$\frac{2N^2}{2^v} \leq 1, \quad (1.27)$$

для каждого $s \leq v$ получаем

$$\sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^{2^s} P_i^{(s)} \quad (1 \leq s \leq v), \quad (1.28)$$

$$\|P_i^{(s)}\|_2^2 \leq \frac{1}{2^s} \quad (i = 1, 2, \dots, 2^s), \quad (1.29)$$

$$P_i^{(s)} = \sum_{j=n_{i-1}^{(s)}}^{n_i^{(s)}} \xi_{ij}^{(s)} P_j \quad (i = 1, 2, \dots, 2^s), \quad (1.30)$$

где числа $1 = n_0^{(s)} \leq n_1^{(s)} \leq \dots \leq n_{2^s}^{(s)} = N$ получаются из построения $P_i^{(s)}$. Из (1.30) и определения P_i , $i = 1, 2, \dots, N$ (см. (1.25)) следует

$$P_i^{(s)} = \sum_{j=1}^N P_{ij}^{(s)}; \quad i = 1, \dots, 2^s \quad (1 \leq s \leq v), \quad (1.31)$$

где $P_{ij}^{(s)}$ ($1 \leq j \leq N$, $1 \leq i \leq 2^s$) есть полином по функциям $P_{kj}(x, y)$, $k = n_i^{(s)}, n_i^{(s)} + 1, \dots, n_{i+1}^{(s)}$ (см. (1.30)).

Из построения $P_i^{(v)}$ очевидно (см. (1.28), (1.29)), что для каждого $n = 1, 2, \dots, N$ существует $k(n) = 1, 2, \dots, 2^v$ такое, что

$$\left\| \sum_{l=1}^n P_l - \sum_{l=1}^{k(n)} P_l^{(v)} \right\|_2^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (1.32)$$

Используя (1.25) и (1.31), из (1.32) следует

$$\left\| \sum_{l=1}^N \left(\sum_{i=1}^n b_{lj} P_{lj} - \sum_{i=1}^{k(n)} P_{lj}^{(v)} \right) \right\|_2^2 = \left\| \sum_{l=1}^n P_l - \sum_{l=1}^{k(n)} P_l^{(v)} \right\|_2^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (1.33)$$

Очевидно, что полиномы $\sum_{l=1}^N b_{lj} P_{lj} - \sum_{l=1}^{k(n)} P_{lj}^{(v)}$, $j=1, \dots, N$ ортогональны (см. (1.31)). Следовательно, имеем (см. (1.33))

$$\left\| \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^n b_{lj} P_{lj} - \sum_{l=1}^{k(n)} P_{lj}^{(v)} \right) \right\|_2^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^N \left(\sum_{l=1}^n b_{lj} P_{lj} - \sum_{l=1}^{k(n)} P_{lj}^{(v)} \right) \right\|_2^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (1.34)$$

Из (1.34) имеем

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{lj} P_{lj}(x, y) = \sum_{l=1}^{k(n)} \sum_{j=1}^m P_{lj}^{(v)}(x, y) + \delta_{nm}(x, y), \quad \|\delta_{nm}\|_2^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (1.35)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \max_{1 \leq n, m \leq N} \left| \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{lj} P_{lj} \right|^2 dx dy &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \max_{1 \leq n, m \leq N} \left| \sum_{l=1}^{k(n)} \sum_{j=1}^m P_{lj}^{(v)} \right|^2 dx dy + \\ &+ 2 \int_0^1 \int_0^1 \max_{1 \leq n, m \leq N} |\delta_{nm}|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (1.36)$$

С другой стороны, имеем (см. (1.27), (1.35))

$$\int_0^1 \int_0^1 \max_{1 \leq n, m \leq N} |\delta_{nm}|^2 dx dy \leq \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \int_0^1 \int_0^1 |\delta_{nm}|^2 dx dy \leq \frac{N^2}{2} \leq 1. \quad (1.37)$$

Фиксируем натуральное число s так, что

$$\frac{v^2 \cdot N^2}{2^s} \leq 1. \quad (1.38)$$

При фиксированных $1 \leq s \leq v$ и $1 \leq i \leq 2^s$ полиномы $P_{lj}^{(s)}$, $j=1, 2, \dots, N$ (см. (1.31)) ортогональны. Следовательно, используя вышеупомянутую лемму ([11]) имеем (см. (1.29), (1.31))

$$\begin{aligned} P_i^{(s)} &= \sum_{j=1}^N P_{ij}^{(s)} = (P_{i1}^{(s)} + \dots + P_{i, k-1}^{(s)} + \alpha P_{ik}^{(s)}) + (\beta P_{i, k+1}^{(s)} + \dots + P_{iN}^{(s)}) = \\ &= P_{i1}^{(s)(1)} + P_{i2}^{(s)(1)}, \quad \|P_{ij}^{(s)(1)}\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^s} \quad (j=1, 2). \end{aligned}$$

Внеся используя эту лемму, получаем

$$\begin{aligned} P_i^{(s)} &= P_{i1}^{(s)(1)} + P_{i2}^{(s)(1)} = [P_{i1}^{(s)(2)} + P_{i2}^{(s)(2)}] + [P_{i3}^{(s)(2)} + P_{i4}^{(s)(2)}], \\ \|P_{ij}^{(s)(4)}\|_2^2 &\leq \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^s}, \quad j=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Повторяя эту операцию σ раз, где σ есть число, определенное в (1.38), для каждого $t \leq \sigma$ получаем

$$\sum_{j=1}^N P_{ij}^{(s)} = \sum_{j=1}^{2^t} P_{ij}^{(s)(t)} \quad (1 \leq s \leq v, 1 \leq i \leq 2^s, 1 \leq t \leq \sigma), \quad (1.39)$$

$$\|P_{ij}^{(s)(t)}\|_2^2 \leq \frac{1}{2^t} \cdot \frac{1}{2^s} \quad (1 \leq s \leq v, 1 \leq i \leq 2^s, 1 \leq t \leq \sigma, 1 \leq j \leq 2^t). \quad (1.40)$$

Из построения полиномов $P_{ij}^{(s)}$ легко убедиться, что если $k(n) = 2^{s_1} + 2^{s_2} + \dots + 2^{s_u(n)}$ ($s_1 > s_2 > \dots > s_u(n)$), то для каждого $1 \leq j \leq N$

$$\sum_{i=1}^{k(n)} P_{ij}^{(v)} = \sum_{k=1}^{u(n)} P_{i_k j}^{(s_k)}, \quad n=1, \dots, N \quad (u(n) \leq v), \quad (1.41)$$

где $i_k, k=1, \dots, u(n)$ зависящие от n натуральные числа.

Следовательно (см. (1.41))

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \sum_{j=1}^m P_{ij}^{(v)} = \sum_{k=1}^{u(n)} \sum_{j=1}^m P_{i_k j}^{(s_k)}, \quad n, m=1, \dots, N. \quad (1.42)$$

Из построения полиномов $P_{ij}^{(s)(\sigma)}$ легко усматривается (см. (1.39), (1.40)), что для любых $1 \leq m \leq N$ и $1 \leq k \leq u(n)$ существуют числа $v_k(m)$ такие, что

$$\left\| \sum_{j=1}^m P_{i_k j}^{(s_k)} - \sum_{j=1}^{v_k(m)} P_{i_k j}^{(s_k)(\sigma)} \right\|_2^2 \leq \frac{1}{2^{s_k}} \cdot \frac{1}{2^{\sigma}},$$

и, следовательно, имеем

$$\sum_{j=1}^m P_{i_k j}^{(s_k)}(x, y) = \sum_{j=1}^{v_k(m)} P_{i_k j}^{(s_k)(\sigma)}(x, y) + \delta_{knm}(x, y), \quad (1.43)$$

$$\|\delta_{knm}\|_2^2 \leq \frac{1}{2^{s_k}} \cdot \frac{1}{2^{\sigma}} < \frac{1}{2^{\sigma}} \quad (1 \leq n, m \leq N, 1 \leq k \leq u(n)). \quad (1.44)$$

Из (1.42) и (1.43) следует

$$\sum_{i=1}^{k(N)} \sum_{j=1}^m P_{ij}^{(v)} = \sum_{k=1}^{u(n)} \sum_{j=1}^{v_k(m)} P_{i_k j}^{(s_k)(\sigma)} + \sum_{k=1}^{u(n)} \delta_{knm} \quad (1 \leq n, m \leq N). \quad (1.45)$$

С другой стороны, учитывая, что $u(n) \leq v$ (см. (1.41)), из (1.38) и (1.44) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \max_{1 \leq n, m \leq N} \left| \sum_{k=1}^{u(n)} \delta_{knm} \right|^2 dx dy &\leq \int_0^1 \int_0^1 \max_{1 \leq n, m \leq N} u(n) \sum_{k=1}^{u(n)} |\delta_{knm}|^2 dx dy \leq \\ &\leq v \int_0^1 \int_0^1 \max_{1 \leq n, m \leq N} \sum_{k=1}^{u(n)} |\delta_{knm}|^2 dx dy \leq \\ &\leq v \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{u(n)} \int_0^1 \int_0^1 |\delta_{knm}|^2 dx dy \leq \frac{v^2 \cdot N^2}{2^{\sigma}} \leq 1. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Следовательно, из (1.45) и (1.46) имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 \max_{1 \leq n, m \leq N} \left| \sum_{i=1}^{k(n)} \sum_{j=1}^m P_{ij}^{(n)} \right|^2 dx dy \leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \max_{1 \leq n, m \leq N} \times \\ \times \left| \sum_{k=1}^{u(n)} \sum_{j=1}^{v_k(m)} P_{ikj}^{(s_k)(\sigma)} \right|^2 dx dy + 2. \quad (1.47)$$

Очевидно, что $P_{ij}^{(s)(t)}$ — полиномы по двойной системе Радемахера. Тогда из (1.24) и (1.40) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \{(x, y); |P_{ij}^{(s)(t)}(x, y)| > \alpha 2^{-(s/8)} 2^{-(t/8)}\} \right| \leq \\ & \leq \frac{c_6}{\alpha^4} \cdot \frac{2^{s/2} \cdot 2^{t/2}}{2^{2s} \cdot 2^{2t}} = \frac{c_6}{\alpha^4} \cdot 2^{-(3/2)s} \cdot 2^{-(3/2)t}, \\ & |E_\alpha \cup \bigcup_{\substack{1 \leq s \leq \nu, 1 \leq t \leq 2^\nu \\ 1 \leq i \leq \sigma, 1 \leq j \leq 2^t}} \{(x, y); |P_{ij}^{(s)(t)}(x, y)| > \alpha \cdot 2^{-(s/8)} \cdot 2^{-(t/8)}\}| \leq \\ & \leq c_6 \cdot \alpha^{-4} \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{t=1}^{\sigma} \left(\sum_{i=1}^{2^s} \sum_{j=1}^{2^t} 2^{-(3/2)t} \cdot 2^{-(3/2)s} \right) \leq c_7 \alpha^{-4}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Легко убедиться, что каждая сумма $\sum_{j=1}^{\sigma} P_{ij}^{(s)(\sigma)}$ ($1 \leq s \leq \nu$, $1 \leq i \leq 2^s$)

представляется в виде суммы некоторых полиномов вида $P_{ij}^{(s)(t)}$ по различным $t \leq \sigma$. Следовательно, имея ввиду, что числа s_k , $k=1, 2, \dots, u(n)$

различны, сумму $\sum_{k=1}^{u(n)} \sum_{j=1}^{v_k(m)} P_{ikj}^{(s_k)(\sigma)}$ можно представить в виде суммы полиномов $P_{ij}^{(s)(t)}$ по различным двойным индексам (s, t) . С другой стороны, очевидно, что вне множества E_α каждый из полиномов $P_{ij}^{(s)(t)}$ меньше $\alpha \cdot 2^{-(s/8)} \cdot 2^{-(t/8)}$. Следовательно, если $(x, y) \notin E_\alpha$, то для любых $1 \leq n \leq N$ и $1 \leq m \leq N$.

$$\left| \sum_{k=1}^{u(n)} \sum_{j=1}^{v_k(m)} P_{ikj}^{(s_k)(\sigma)}(x, y) \right| \leq \alpha \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{t=1}^{\sigma} 2^{-\frac{s}{8}} \cdot 2^{-\frac{t}{8}} = c_8 \alpha.$$

Тогда, учитывая (1.48), очевидно

$$\left| \left\{ (x, y); \max_{1 \leq n, m \leq N} \left| \sum_{k=1}^{u(n)} \sum_{j=1}^{v_k(m)} P_{ikj}^{(s_k)(\sigma)}(x, y) \right|^2 > \beta \right\} \right| \leq c_9 \beta^{-2}.$$

Отсюда следует

$$\int_0^1 \int_0^1 \max_{1 \leq n, m \leq N} \left| \sum_{k=1}^{u(n)} \sum_{j=1}^{v_k(m)} P_{ikj}^{(s_k)(\sigma)} \right|^2 dx dy \leq c_{10}. \quad (1.49)$$

Из (1.36), (1.37), (1.47) и (1.49) вытекает (1.23).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из (1.9) следует, что сумма

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} \Omega_i(x) \Omega_j(y) \text{ разбивается на четыре суммы}$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q b_{2i, 2j} g_i(x) g_j(y), \quad \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q b_{2i-1, 2j} r_{2i}(x) g_j(y),$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q b_{2i, 2j-1} g_i(x) r_{2j}(y), \quad \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q b_{2i-1, 2j-1} r_{2i}(x) r_{2j}(y).$$

Поэтому легко убедиться, что для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что системы $\{g_i g_j\}$, $\{g_i r_{2j}\}$ и $\{r_{2i} r_{2j}\}$ имеют тип $(2, 2)^2$. Так как $\{g_j\}$ — подсистема системы $\{Q_i\}$, то она имеет тип $(2, 2)^1$ (см. (1.9), (1.10)). Таким же свойством обладает система $\{r_{2i}\}$, и поэтому из леммы 2 следует, что $\{g_i \psi_j\}$ и $\{r_{2i} \psi_j\}$ имеют тип $(2, 2)^2$. Следовательно, учитывая, что система $\{\psi_j\}$ содержит в себе $\{r_{2i}\}$ (см. (1.6)), имеем, что $\{g_i r_{2j}\}$ и $\{r_{2i} r_{2j}\}$ имеют тип $(2, 2)^2$.

Итак, остается доказать, что система $\{g_i g_j\}$ имеет тип $(2, 2)^2$. Обозначим

$$P_n(x) = \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_{j-2^k+1, n-2^k+1}^{(k)} r_j(x) \quad (1.50)$$

$$(2^k \leq n < 2^{k+1}; k = 1, 2, \dots),$$

где $a_{ij}^{(k)}$ определяются равенствами (1.2). Из (1.8), учитывая (1.1), имеем

$$g_n(x) = P_n(x) + \frac{1}{\sqrt{2^k}} (\omega_k(x) - r_{2^k}(x)) \quad (2^k \leq n < 2^{k+1}; k = 1, 2, \dots) \quad (1.51)$$

в [5] установлено, что $\{P_i\}$ имеет тип $(2, 2)^1$. Тогда учитывая, что $\{\omega_i\}$ есть подсистема системы $\{\psi_i\}$ (см. (1.16)) и что, согласно лемме 2, система $\{\psi_i P_j\}$ имеет тип $(2, 2)^2$, получаем, что система $\{\omega_i P_j\}$ также имеет тип $(2, 2)^2$. Аналогично, $\{P_i r_{2j}\}$ имеет тип $(2, 2)^2$. Следовательно, обозначая

$$\varphi_k(x) = \omega_k(x) - r_{2^k}(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.52)$$

имеем

$$\left\| \sup_{n, m} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} P_i(x) \varphi_j(y) \right| \right\|_2^2 < c_{11} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij}^2. \quad (1.53)$$

Аналогично, учитывая, что $\{g_i\}$ имеет тип $(2, 2)^1$, получим

$$\left\| \sup_{n, m} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} \varphi_i(x) g_j(y) \right| \right\|_2^2 \leq c_{12} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij}^2. \quad (1.54)$$

Так как $\{\omega_k\} \cup \{r_{2^k}\} = \{\psi_k\}$ (см. (1.6)) — ОНС, то $\{\varphi_k\}$ (см. (1.52)) является ортогональной системой, причем

$$\int_0^1 |\varphi_k(x)|^2 dx = \int_0^1 |\omega_k(x)|^2 dx + \int_0^1 |r_{2^k}(x)|^2 dx = 2, \quad k=1, 2, \dots \quad (1.55)$$

Обозначим

$$G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2^k}} (\omega_k(x) - r_{2^k}(x)), \quad (2^k \leq n < 2^{k+1}; k=1, 2, \dots). \quad (1.56)$$

Тогда имеем (см. (1.7), (1.51))

$$g_1(x) = r_1(x), \quad g_n(x) = P_n(x) + G_n(x) \quad (n \geq 2). \quad (1.57)$$

Следовательно (см. (1.57))

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} g_i(x) g_j(y) &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^m b_{ij} g_i(x) g_j(y) + \sum_{j=1}^m b_{i1} g_1(x) g_j(y) + \\ &+ \sum_{i=2}^n b_{i1} g_i(x) g_1(y) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^m b_{ij} P_i(x) P_j(y) + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^m b_{ij} P_i(x) G_j(y) + \\ &+ \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} G_i(x) g_j(y) + \sum_{j=1}^m b_{i1} g_1(x) g_j(y), \end{aligned}$$

где при $n=1$ или $m=1$ первые три слагаемых последнего соотношения полагаются равными нулю. Как видно отсюда, чтобы доказать, что $\{g_i, g_j\}$ имеет тип $(2,2)^2$ и, тем самым, доказать теорему, достаточно показать, что справедливы следующие неравенства:

$$\left\| \sup_{n, m} \left| \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^m b_{ij} P_i(x) P_j(y) \right| \right\|_2^2 \leq c_{13} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^2, \quad (1.58)$$

$$\left\| \sup_{n, m} \left| \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^m b_{ij} P_i(x) G_j(y) \right| \right\|_2^2 \leq c_{14} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^2, \quad (1.59)$$

$$\left\| \sup_{n, m} \left| \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} G_i(x) g_j(y) \right| \right\|_2^2 \leq c_{15} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^2, \quad (1.60)$$

$$\left\| \sup_m \left| \sum_{j=1}^m b_{i1} g_1(x) g_j(y) \right| \right\|_2^2 \leq c_{16} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^2. \quad (1.61)$$

Неравенство (1.58) следует из леммы 3.

Неравенство (1.61) следует из того, что $\{g_i\}$ имеет тип $(2,2)^1$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sup_m \left| \sum_{j=1}^m b_{i1} g_1(x) g_j(y) \right| \right\|_2^2 &= \int_0^1 \int_0^1 |g_1(x)|^2 \sup_m \left| \sum_{j=1}^m b_{ij} g_j(y) \right|^2 dx dy = \\ &= \int_0^1 |g_1(x)|^2 dx \cdot \int_0^1 \sup_m \left| \sum_{j=1}^m b_{ij} g_j(y) \right|^2 dy \leq c_{16} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^2 \leq c_{16} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^2. \end{aligned}$$

Докажем (1.59). Полагая $2^q \leq m < 2^{q+1}$, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{n, m} \left| \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^m b_{ij} P_i(x) G_j(y) \right|^2 &\leq 2 \sup_{n, q} \left| \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} b_{ij} P_i(x) G_j(y) \right|^2 + \\ &+ 2 \sup_{n, q, m} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=2^q}^m b_{ij} P_i(x) G_j(y) \right|^2. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Учитывая (1.53), (1.56) и используя неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{n, q} \left| \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} b_{ij} P_i(x) G_j(y) \right| \right\|_2^2 = \\ & = \left\| \sup_{n, q} \left| \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^{q-1} \left(\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{b_{ij}}{\sqrt{2^k}} \right) P_i(x) \varphi_k(y) \right| \right\|_2^2 \leq c_{12} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{b_{ij}}{\sqrt{2^k}} \right)^2 \leq \\ & < c_{12} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2^k} \right) \left(\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} b_{ij}^2 \right) = c_{12} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^2. \quad (1.63) \end{aligned}$$

Используя тип (2,2)¹ системы $\{P_n\}$ и неравенство Гёльдера, из (1.55) и (1.56) получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{n, q, m} \left| \sum_{i=2}^n \sum_{j=2^q}^m b_{ij} P_i(x) G_j(y) \right| \right\|_2^2 = \left\| \sup_{n, q, m} \left| \sum_{j=2^q}^m \left(\frac{\varphi_q(j)}{\sqrt{2^q}} \sum_{i=2}^n b_{ij} P_i(x) \right) \right| \right\|_2^2 \leq \\ & \leq \left\| \sup_q \sum_{j=2^q}^{2^{q+1}-1} \left(\frac{|\varphi_q(y)|}{\sqrt{2^q}} \cdot \sup_n \left| \sum_{i=2}^n b_{ij} P_i(x) \right| \right) \right\|_2^2 = \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \sup_q \left[|\varphi_q(y)|^2 \left(\sum_{j=2^q}^{2^{q+1}-1} \frac{1}{2^q} \right) \left(\sum_{j=2^q}^{2^{q+1}-1} \sup_n \left| \sum_{i=2}^n b_{ij} P_i(x) \right|^2 \right) \right] dx dy \leq \\ & \leq \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^1 |\varphi_q(y)|^2 dy \cdot \sum_{j=2^q}^{2^{k+1}-1} \int_0^1 \sup_n \left| \sum_{i=2}^n b_{ij} P_i(x) \right|^2 dx \leq c_{17} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^2. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается (1.60), если использовать (1.54) и тот факт, что $\{g_i\}$ имеет тип (2,2)¹.

Итак, теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Известно (см. [9]), что

$$\sum_{i=1}^n \chi_i(x) \chi_i(t) = \begin{cases} 1/|\Delta_x^{(n)}|, & \text{при } t \in \Delta_x^{(n)} \\ 0, & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

где $\Delta_x^{(n)}$ есть интервал постоянства функций $\chi_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$, содержащий точку x . Следовательно, используя тот факт, что максимальный оператор Харди и Литтльвуда имеет сильный тип (2, 2) имеем

$$\int_0^1 \sup_n \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \chi_i(x) \chi_i(t) |f(t)| dt \right|^2 dx \leq c_{18} \int_0^1 |f(t)|^2 dt.$$

Тогда теорема 2 следует из леммы 1, если взять

$$P_n(x) = \chi_n(x) \text{ и } Q_n(x) = \varphi_n(x) \quad (n=1, 2, \dots).$$

2°. Доказательство теоремы 3. Известна следующая (см., напр., [12])

Лемма 4. Система Хаара $\{\chi_n\}$ имеет тип (2,2)¹. Точнее

$$\int_0^1 \sup_n \left| \sum_{i=1}^n b_i \chi_i(x) \right|^2 dx \leq c_{19} \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \quad (2.1)$$

для любых чисел $\{b_i\}$.

Следующая лемма есть очевидное следствие теоремы 2.

Лемма 5. Двойная система Хаара $\{\chi_n \chi_m\}$ имеет тип $(2, 2)^2$, для любых чисел $\{b_{ij}\}$ справедливо неравенство

$$\int_0^1 \int_0^1 \sup_{n, m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} \chi_i(x) \chi_j(y) \left| dx dy \right|^2 \leq c_{20} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^2. \quad (2.2)$$

Лемма 6. Пусть $\{\varphi_n\}$ ОНС на $[0, 1]$. Тогда существуют полиномы по системе Хаара

$$P_n(x) = \sum_{i=u(n)}^{v(n)} a_i^{(n)} \chi_i(x); \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

такие, что

$$u(1) = 1, \quad u(n) < v(n), \quad u(n) \uparrow \infty, \quad v(n) \uparrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - P_n(x)|^2 dx < 1. \quad (2.5)$$

Доказательство. Обозначим

$$a_i^{(n)} = \int_0^1 \varphi_n(x) \chi_i(x) dx; \quad n, i = 1, 2, \dots$$

Тогда для каждого $n=1, 2, \dots$ имеем

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{L_n} a_i^{(n)} \chi_i; \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Существуют числа $v(n)$, $n=1, 2, \dots$ такие, что

$$\sum_{i=v(n)+1}^{\infty} (a_i^{(n)})^2 \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad v(n) < v(n+1); \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

Существуют также числа m_i , $i=0, 1, 2, \dots$ такие, что

$$m_0 = 1, \quad \sum_{n=m_i}^{\infty} (a_i^{(n)})^2 \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad m_i < m_{i+1}; \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Для каждого $n=1, 2, \dots$ определим $u(n)=k$, при $m_{k-1} \leq n < m_k$, $k=1, 2, \dots$, и обозначим

$$P_n(x) = \sum_{i=u(n)}^{v(n)} a_i^{(n)} \chi_i(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Тогда имеем (см. (2.6), (2.9))

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - P_n(x)|^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{u(n)-1} (a_i^{(n)})^2 + \sum_{i=v(n)+1}^{\infty} (a_i^{(n)})^2 \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{u(n)-1} (a_i^{(n)})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=v(n)+1}^{\infty} (a_i^{(n)})^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Заменяя порядок суммирования, с учётом определения $v(n)$, имеем (см. (2.8))

$$\sum_{n=1}^{\infty} u \sum_{l=1}^{(n)-1} (a_l^{(n)})^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=m_l}^{\infty} (a_l^{(n)})^2 \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{l+1}} = \frac{1}{2}. \quad (2.11)$$

С другой стороны (см. (2.7))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=v(n)+1}^{\infty} (a_l^{(n)})^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}. \quad (2.12)$$

Из (2.10), (2.11) и (2.12) следует (2.5). Справедливость (2.4) очевидна.

Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 3: Пусть полиномы

$$P_n(x) = \sum_{l=u(n)}^{v(n)} a_l^{(n)} \varphi_l(x), \quad n=1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

удовлетворяют условиям (2.4) и (2.5) леммы 6. Тогда обозначая

$$\alpha_n(x) = \varphi_n(x) - P_n(x); \quad n=1, 2, \dots, \quad (2.14)$$

имеем (см. (2.5))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |a_n(x)|^2 dx \leq 1. \quad (2.15)$$

Пусть $\{b_{lj}\}$ —заданные числа. Используя (2.14), имеем

$$\begin{aligned} S_{nm}(x, y) &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{lj} \varphi_l(x) \varphi_j(y) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{lj} P_l(x) P_j(y) + \\ &+ \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{lj} P_l(x) \alpha_j(y) + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{lj} \alpha_l(x) P_j(y) + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{lj} \alpha_l(x) \alpha_j(y). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Выберем последовательность натуральных чисел n_k , $k=0, 1, 2, \dots$ такую, что (см. (2.4))

$$n_0=0, \quad v(n_k) < u(n_{k+1}); \quad k=1, 2, \dots. \quad (2.17)$$

Тогда очевидно, что для доказательства теоремы достаточно установить следующие неравенства:

$$\left\| \sup_{p, q} \left| \sum_{l=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_q} b_{lj} P_l(x) P_j(y) \right| \right\|_2^2 \leq c_{21} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj}^2, \quad (2.18)$$

$$\left\| \sup_{p, m} \left| \sum_{l=1}^{n_p} \sum_{j=1}^m b_{lj} P_l(x) \alpha_j(y) \right| \right\|_2^2 \leq c_{22} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj}^2, \quad (2.19)$$

$$\left\| \sup_{n, q} \left| \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{n_q} b_{lj} \alpha_l(x) P_j(y) \right| \right\|_2^2 \leq c_{23} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj}^2, \quad (2.20)$$

$$\left\| \sup_{n, m} \left| \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{lj} \alpha_l(x) \alpha_j(y) \right| \right\|_2^2 \leq c_{24} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj}^2. \quad (2.21)$$

Докажем (2.21). Используя (2.15) и неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} \left| \sup_{n, m} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} z_i(x) \sigma_j(y) \right| \right|_2^2 &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |b_{ij}| |z_i(x)| |\sigma_j(y)| \right)^2 dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij}^2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |z_i(x)|^2 |\sigma_j(y)|^2 dx dy = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij}^2 \int_0^1 \sum_{i=1}^n |z_i(x)|^2 dx \cdot \int_0^1 \sum_{j=1}^m |\sigma_j(y)|^2 dy \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij}^2. \end{aligned}$$

Докажем (2.19). Легко убедиться, что каждую сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^m b_{ij} P_i(x) \alpha_j(y)$$

можно разбить на две суммы

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k+1}} \sum_{j=1}^m b_{lj} P_l(x) \alpha_j(y), \sum_{k=0}^p \sum_{l=n_{2k+1}+1}^{n_{2k+2}} \sum_{j=1}^m b_{lj} P_l(x) \alpha_j(y).$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \sup_{p, m} \left| \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^m b_{ij} P_i(x) \alpha_j(y) \right| &\leq \sup_{p, m} \left| \sum_{k=0}^p \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k+1}} \sum_{j=1}^m b_{lj} P_l(x) \alpha_j(y) \right| + \\ &+ \sup_{p, m} \left| \sum_{k=0}^p \sum_{l=n_{2k+1}+1}^{n_{2k+2}} \sum_{j=1}^m b_{lj} P_l(x) \alpha_j(y) \right|. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Докажем, что

$$\left\| \sup_{p, m} \left| \sum_{k=0}^p \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k+1}} \sum_{j=1}^m b_{lj} P_l(x) \alpha_j(y) \right| \right\|_2^2 \leq c_{25} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij}^2. \quad (2.23)$$

Из условий (2.4), (2.13) и (2.17) очевидно, что

$$\sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k+1}} b_{lj} P_l(x) = \sum_{l=u(n_{2k}+1)}^{v(n_{2k+1})} \tilde{b}_{lj} \chi_l(x), \quad j=1, 2, \dots, k=0, 1, \dots, \quad (2.24)$$

есть полином по системе Хаара, причём при фиксированном $j=1, 2, \dots$ они составлены из попарно непересекающихся пачек системы Хаара. Следовательно, имеем

$$\sum_{k=0}^p \sum_{l=u(n_{2k}+1)}^{v(n_{2k+1})} \tilde{b}_{lj} \chi_l(x) = \sum_{i=1}^{v(n_{2p+1})} \tilde{b}_{ij} \chi_i(x), \quad (2.25)$$

где в правой части полагаются равным нулю те $\tilde{b}_{ij}$, которые не участвуют в левой части.

Из (2.14), (2.15) и (2.24) следует

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{v(n_{2k}+1)} (\tilde{b}_{lj})^2 &= \int_0^1 \left| \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} b_{lj} P_l(x) \right|^2 dx = \int_0^1 \left| \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} b_{lj} \varphi_l(x) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} b_{lj} a_l(x) \right|^2 dx \leq \\
&\leq 2 \int_0^1 \left| \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} b_{lj} \varphi_l(x) \right|^2 dx + 2 \int_0^1 \left| \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} b_{lj} a_l(x) \right|^2 dx \leq 2 \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} b_{lj}^2 + \\
&\quad + 2 \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} b_{lj}^2 \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} \int_0^1 |a_l(x)|^2 dx \leq 4 \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} b_{lj}^2
\end{aligned}$$

и, следовательно, используя (2.25), имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} (\tilde{b}_{lj})^2 &= \sum_{k=0}^v \sum_{l=0}^{n_{2k}+1} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} (\tilde{b}_{lj})^2 \leq \\
&\leq 4 \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \sum_{k=0}^v \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} b_{lj}^2 \leq 4 \sum_{l=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} b_{lj}^2.
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Из (2.15), (2.24), (2.25), (2.26) и леммы 4 имеем

$$\begin{aligned}
\left\| \sup_{p, m} \left| \sum_{k=0}^p \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} \sum_{j=1}^m b_{lj} P_l(x) a_j(y) \right| \right\|_2^2 &= \\
&= \left\| \sup_{p, m} \left| \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^{v(n_{2k}+1)} \tilde{b}_{lj} \gamma_l(x) a_j(y) \right| \right\|_2^2 \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 \sup_{p, m} \left(\sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^{v(n_{2k}+1)} \tilde{b}_{lj} \gamma_l(x) \right| |a_j(y)| \right)^2 dx dy < \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=1}^{\tilde{m}} |a_j(y)|^2 \cdot \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \sup_p \left| \sum_{l=1}^{v(n_{2p}+1)} \tilde{b}_{lj} \gamma_l(x) \right|^2 dx dy \leq \\
&\leq \sum_{l=1}^{\tilde{m}} \int_0^1 \sup_p \left| \sum_{l=1}^{v(n_{2p}+1)} \tilde{b}_{lj} \gamma_l(x) \right|^2 dx \leq c_{18} \sum_{l=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} (\tilde{b}_{lj})^2 \leq 4c_{18} \sum_{l=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} b_{lj}^2.
\end{aligned} \quad (2.27)$$

Аналогично доказывается, что

$$\left\| \sup_{p, m} \left| \sum_{k=0}^p \sum_{l=n_{2k}+1}^{n_{2k}+1} \sum_{j=1}^m b_{lj} P_j(x) a_l(y) \right| \right\|_2^2 \leq 4c_{18} \sum_{l=1}^{\tilde{m}} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} b_{lj}^2. \quad (2.28)$$

Из (2.22), (2.27) и (2.28) следует (2.19).

Доказательство (2.20) аналогично доказательству (2.19).

Докажем (2.18). Очевидно, что сумма

$$\sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_q} b_{ij} P_i(x) P_j(y)$$

разбивается на четыре суммы

$$R_{pq}^{(1)}(x, y) = \sum_{i=0}^p \sum_{s=0}^q \sum_{l=n_{2t}+1}^{n_{2t+1}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+1}} b_{ij} P_i(x) P_j(y), \quad (2.29)$$

$$R_{pq}^{(2)}(x, y) = \sum_{i=0}^p \sum_{s=0}^q \sum_{l=n_{2t}+1}^{n_{2t+1}} \sum_{j=n_{2s+1}+1}^{n_{2s+2}} b_{ij} P_i(x) P_j(y),$$

$$R_{pq}^{(3)}(x, y) = \sum_{i=0}^p \sum_{s=0}^q \sum_{l=n_{2t+1}+1}^{n_{2t+2}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+2}} b_{ij} P_i(x) P_j(y),$$

$$R_{pq}^{(4)}(x, y) = \sum_{i=0}^p \sum_{s=0}^q \sum_{l=n_{2t+1}+1}^{n_{2t+2}} \sum_{j=n_{2s+1}+1}^{n_{2s+2}} b_{ij} P_i(x) P_j(y).$$

Имеем

$$\sup_{p, q} \left| \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_q} b_{ij} P_i(x) P_j(y) \right| \leq \sum_{k=1}^4 \sup_{p, q} |R_{pq}^{(k)}(x, y)|. \quad (2.30)$$

Докажем, что

$$\left| \sup_{p, q} |R_{pq}^{(1)}(x, y)| \right|^2 \leq c_{26} \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{j=1}^{\bar{n}} b_{ij}^2. \quad (2.31)$$

Из условий (2.4) и (2.17) следует, что каждая из сумм

$$\sum_{l=n_{2t}+1}^{n_{2t+1}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+1}} b_{ij} P_i(x) P_j(y) = \sum_{l=u(n_{2t}+1)}^{v(n_{2t+1})} \sum_{j=u(n_{2s}+1)}^{v(n_{2s+1})} \tilde{b}_{ij} \chi_l(x) \chi_j(y), \quad (2.32)$$

$$t, s=0, 1, 2, \dots,$$

является полиномом по двойной системе Хаара, причём эти полиномы составлены из попарно непересекающихся пачек двойной системы Хаара. Следовательно, используя (2.29), имеем

$$\begin{aligned} R_{pq}^{(1)}(x, y) &= \sum_{i=0}^p \sum_{s=0}^q \sum_{l=u(n_{2t}+1)}^{v(n_{2t+1})} \sum_{j=u(n_{2s}+1)}^{v(n_{2s+1})} \tilde{b}_{ij} \chi_l(x) \chi_j(y) = \\ &= \sum_{i=1}^{v(n_{2p+1})} \sum_{j=1}^{v(n_{2q+1})} b_{ij} \chi_i(x) \chi_j(y), \end{aligned} \quad (2.33)$$

где в правой части полагаются равным нулю те $\tilde{b}_{ij}$, которые не участвуют в левой части.

Из (2.14), (2.15) и (2.32) следует

$$\begin{aligned} \sum_{l=u(n_{2t}+1)}^{v(n_{2t+1})} \sum_{j=u(n_{2s}+1)}^{v(n_{2s+1})} (\tilde{b}_{ij})^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{l=n_{2t}+1}^{n_{2t+1}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+1}} b_{ij} P_i(x) P_j(y) \right|^2 dx dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{l=n_{2t}+1}^{n_{2t+1}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+1}} b_{ij} \varphi_l(x) \varphi_j(y) \right|^2 dx dy + 2 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{l=n_{2l}+1}^{n_{2l+1}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+1}} b_{lj} \alpha_l(x) \alpha_j(y) \right|^2 dx dy \leq 2 \sum_{l=n_{2l}+1}^{n_{2l+1}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+1}} b_{lj}^2 + \\
& + 2 \sum_{l=n_{2l}+1}^{n_{2l+1}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+1}} b_{lj}^2 \sum_{l=n_{2l}+1}^{n_{2l+1}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+1}} \int_0^1 |\alpha_l(x)|^2 dx \cdot \int_0^1 |\alpha_j(y)|^2 dy \leq \\
& \leq 4 \sum_{l=n_{2l}+1}^{n_{2l+1}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+1}} b_{lj}^2
\end{aligned} \quad (2.34)$$

и, следовательно, имеем (см. (2.33))

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\tilde{b}_{lj})^2 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=n_{2l}+1}^{n_{2l+1}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+1}} (\tilde{b}_{lj})^2 \leq \\
&\leq 4 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=n_{2l}+1}^{n_{2l+1}} \sum_{j=n_{2s}+1}^{n_{2s+1}} b_{lj}^2 \leq 4 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj}^2.
\end{aligned} \quad (2.35)$$

Используя (2.33), (2.35) и лемму 5 имеем

$$\begin{aligned}
\| \sup_{p,q} |R_{pq}^{(1)}(x,y)| \|_2^2 &\leq \int_0^1 \int_0^1 \sup_{p,q} \left| \sum_{l=1}^{n_{2p}+1} \sum_{j=1}^{n_{2q}+1} \tilde{b}_{lj} \alpha_l(x) \alpha_j(y) \right|^2 dx dy \leq \\
&\leq c_{10} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\tilde{b}_{lj})^2 \leq 4c_{10} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj}^2.
\end{aligned} \quad (2.36)$$

Итак, оценка (2.31) доказана.

Аналогично доказывается, что

$$\| \sup_{p,q} |R_{pq}^{(k)}(x,y)| \|_2^2 \leq c_{2k} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj}^2, \quad k=2, 3, 4. \quad (2.37)$$

Из (2.30), (2.31) и (2.37) следует (2.18).

Теорема 3 доказана.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талаяну за руководство при выполнении настоящей работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 27.IV.1984

Գ. Ա. ԿԱՐԱԳՈՒԼՅԱՆ. Օրթոգոնալ կրկնակի շարքերի ըստ Պրինգսհեյմի մեթոդի զուգամիտության մասին (ամփոփում)

Ապացուցվում է, որ Ա. Մ. Օլևսկու կողմից կառուցված մի օրթոնորմավորված սխեմների առաջացած կրկնակի սխեմներ ըստ Պրինգսհեյմի զուգամիտության սխեմն է: Ապացուցվում է նաև Մենշով-Մարեինկևիչի թեորեմի անալոգը կրկնակի օրթոնորմավորված սխեմների համար:

G. A. KARAGULIAN. On the convergence of the double orthogonal series by Pringsheim method (summary)

In the article it is proved that the double orthonormal system of A. M. Olevski is a convergence system for the Pringsheim method. It's proved an analogous of Menshov—Mareinkovich's theorem for the double orthonormal systems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Carleson*. On convergnece and growth of partial sums of Furier series, *Acta math.*, 116, № 1—2, 1966, 135—157.
2. *C. Fefferman*. On the divergence of multipl Fourier Serfes, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77, № 2, 1972, 191—195.
3. *P. Billard*. Sur la convergence presque partout des series, Fourier—Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0,1)$, *Studia math.*, 28, № 3, 1967, 363—388.
4. *Р. Д. Гецадзе*. Непрерывная функция с расходящимся почти всюду кратным рядом Фурье по системе Уолша-Пели, *Сообщения АН ГССР*, 108, № 3, 1983, 497—499.
5. *А. М. Олевский*. Об одной ортонормальной системе и её применениях, *Мат. сб.*, 71, 113, № 3, 1966, 297—336.
6. *Р. Д. Гецадзе*. О кратных системах сходимости, *Сообщения АН ГССР*, 113, № 1, 1984, 49—51.
7. *Д. Е. Меньшов*. Суммирование рядов по ортонормальным функциям линейными методами, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1937, 203—230.
8. *J. Marcinkiewicz*. Sur la convergence des series orthogonales, *Studia Math.*, 6, 1936 39—45.
9. *A. Haar*. Zur Theorie der orthogonalen Functionensysteme, *Math. Ann.*, 69, 1910 331—371.
10. *М. Гусман*. Дифференцирование интегралов в R^n , «Мир», 1978.
11. *Н. К. Бари*. Тригонометрические ряды, М., Гостехиздат, 1961.
12. *J. Marcinkiewicz*. Quelques theorems sur les series orthogonales, 16, 1937, 84—96.

Ր Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ի. Գ. Խաչատրյան. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների զուգին համապատասխանող ցրման օպերատորների մասին	3
Ա. Ա. Վաղարշակյան. Վերասերվող սիմվոլով Վիներ-Հոպֆի դիսկրետ, համասեռ հավասարումների մասին	18
Ա. Հ. Հովհաննիսյան. Երկրորդ կարգի անսահմանափակ գործակիցներով հիպերբոլական տիպի հավասարումների համար կշռով Կոշու խնդրի պարամետրիքսի կառուցումը	33
Ի. Գ. Հայրապետյան. Հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդրի բերումը սիմետրիկ համակարգերին	51
Վ. Ա. Արզումանյան, Ս. Ա. Գրիգորյան. Օպերատորային դաշտերի հավասարաչափ հանրահաշիվների սպեկտրը	63
Գ. Ա. Կարաղուլյան. Օրթոգոնալ կրկնակի շարքերի ըստ Պրինգսեյմի մեթոդի զուգամիտությունի մասին	80

СО ДЕРЖАНИЕ

И. Г. Хачатрян. Об операторах рассеяния для пары дифференциальных операторов высших порядков	3
А. А. Вагаршакян. О дискретных однородных уравнениях Винера—Хопфа с вырождающимися символами	18
А. О. Оганесян. Построение параметрикса задачи Коши с весом для гиперболических уравнений второго порядка с неограниченными коэффициентами	33
Р. Г. Айрапетян. О сведении задачи Коши для гиперболического уравнения к симметрическим системам	51
В. А. Арзуманян, С. А. Григорян. Спектр равномерных алгебр операторных полей	63
Г. А. Карагулян. О сходимости по Прингсхейму двойных ортогональных рядов	80

C O N T E N T S

I. G. Khachatryan. On scattering operators for a pair of differential operators of higher order	3
A. A. Vagarshakian. On discrete homogeneous Viener-Hopf equations with degenerate symbols	18
A. H. Hovhanesian. Construction of a parametrix for the Cauchy problem with weight for second order hyperbolic equations with unbounded coefficients	33
R. G. Atrapetian. Reduction of the Cauchy problem for a hyperbolic equation to symmetric systems	51
V. A. Arzumanyan, S. A. Grigorian. The spectrum of uniform of algebras of operator fields	63
G. A. Karagulyan. On the convergence of the double orthogonal series by Pringsheim method	80