ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском английском французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилии автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

ԳԻՆԸ 85 Կ.
ЦЕНА 85 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, i in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 6, 1985 Математика

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН

СВОЙСТВО БЛИЗОСТИ a-ТОЧЕК МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, И СТРУКТУРА ОДНОЛИСТНЫХ ОБЛАСТЕЙ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(продолжение)*

§ 3. п. 1 Построение областей $B_l(n, \cup D_m(i))$ и $B'_l(n, \cup D_m(i))$ и их свойства

Обозначим через d_m^+ ту из двух дуг больших окружностей, являющихся граничной дугой области $\tilde{B}_m(n)$, которая ближе к области $\tilde{B}_{m+1}(n)$; d_m^- — ту из двух дуг больших окружностей, являющихся граничной дугой области $\tilde{B}_{m+1}(n)$, которая ближе к области $\tilde{B}_m(n)$. Концы кривых d_m^+ и d_m^- лежат на кривых Γ'' и Γ' и делят каждую из кривых Γ'' и Γ' на три части. Обозначим $\dot{d}_m$ среднюю из трех дуг, на которые делится кривая Γ''; $\dot{d}_m$ — среднюю из трех дуг, на которые делится кривая Γ'.

Пусть D_m, $(m = -\tau^{**}, -\tau^{**}+1, \cdots, \tau^*-1)$ — та из двух односвязных областей, ограничиваемых кривыми d_m^+, d_m^-, $\dot{d}_m$, $\dot{d}_m$, которая не имеет общих точек с $B_0(n)$; $D(\infty)$, $(D(0))$ — та из двух „улиткообразных“ областей, составляющих множество

$$S \setminus \{B_0(n) \sqcup \tilde{B}_{-\tau^{**}}(n) \sqcup \cdots \sqcup \tilde{B}_{\tau^*}(n) \sqcup D_{-\tau^{**}} \sqcup \cdots \sqcup D_{\tau^*-1}\},$$

которая содержит точку ∞, (точку 0); $d^+(\infty) = \partial D(\infty) \cap \Gamma''$;

$$d^-(\infty) = \partial D(\infty) \setminus d^+(\infty); \; d^+(0) = \partial D(0) \cap \Gamma';$$

$$d^-(0) = \partial D(0) \setminus d^+(0).$$

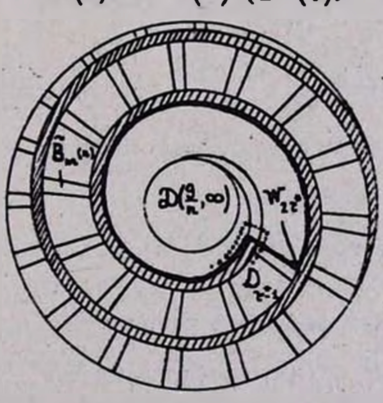

Рис. 3. (Вид на сферу сверху).
(Жирной линией ограничена область $D(\infty)$; точками намечена часть границы области $B_0(n$; заштрихованная область—область $B_0(n)$).

---

* Начало см. в № 5 с. г.

Примыкающий к $B(n, i)$ по кривой d'_m $(d^+(\infty),\ d^+(0))$, простой остров над D_m, $(D(\infty),\ D(0))$, если таковой существует), обозначим через $D_m(i)$, $(D(\infty, i),\ D(0, i))$. Соединив с областью $B(n, i)$ все примыкающие к нему по кривым d'_m $(d^+(\infty),\ d^+(0))$ острова $D_m(i)$ $(D(\infty, i),\ D(0, i))$, получим некоторую область, удалив из которой множество $\{\bigcup_{\{m\}} d'_m \cup d^-(\infty) \cup d^-(0)\}$, получим область $B'_i(n, \cup \cup D_m(i))$.

Рассмотрим подробнее конструкцию этих областей. Для заданного значения i_0 разобьем множество значений m $(=-\tau^{**}, \ldots \ldots, \tau^*-1)$, на группы. Первая группа $\mathfrak{M}_1$ состоит из наименьшего значения m (положим $m_1(i_0)$ и всех тех последующих номеров $m_1(i_0)+1,\ m_1(i_0)+2, \cdots, m'_1(i_0)$, с каждым из которых к $B(n, i_0)$ примыкает область $D_{m_1(i_0)}(i_0),\ D_{m_1(i_0)+1}(i_0), \cdots, D_{m'_1(i_0)}(i_0)$ (заметим, что для заданного i_0 вообще может не быть ни одной группы и что группа $\mathfrak{M}_1$ может состоять из единственного значения $m_1(i_0)$). Это означает, что для номера $m'_1(i_0)+1$ не существует простого острова $D_{m'_1(i_0)+1}(i_0)$.
Если $m'_1(i_0) \neq \tau^*-1$, то группа $\mathfrak{M}_2$ начинается с номера $m_2(i_0) > > m'_1(i_0)+1$, с которым в первый раз после номера $m'_1(i_0)$ область $D_{m_2(i_0)}(i_0)$ примыкает к $B(n, i_0)$. Все те последующие номера $m_2(i_0)+ + 1, \cdots, m'_2(i_0)$, с каждым из которых к $B(n, i_0)$ примыкает простой остров над $D_{m_2(i_0)+1}(i_0), \cdots, D_{m'_2(i_0)}(i_0)$, совместно с номером $m_2(i_0)$ составляют группу $\mathfrak{M}_2$ (заметим, что группа $\mathfrak{M}_2$ может состоять также из единственного номера $m_2(i_0)$). Если $m'_2(i_0) \neq \tau^*-1$, то аналогичным образом определим группу $\mathfrak{M}_3$ и т. д. Получим некоторое число $\sigma(i_0)$ групп $\mathfrak{M}_q$, каждая из которых состоит из некоторого набора значений $m_q(i_0),\ m_q(i_0)+1, \cdots, m'_q(i_0)$, (где $m'_q(i_0)$, в частности, может равняться $m_q(i_0)$).

Если область $B(n, i_0)$ соединить с примыкающим к нему по кривой d'_{m_0}, простым островом $Dm_0(i_0)$, то очевидно: 1) к области $D_{m_0}(i_0)$ примыкает по кривой $d^+_{m_0}$, $(d^-_{m_0})$ область

$$\widetilde{B}_{m_0}(n, i_0) \in B(n, i_0) \quad (\widetilde{B}_{m_0+1}(n, i_0) \subset B(n, i_0)),$$

проекция которой на сферу совпадает с областью $\widetilde{B}_{m_0}(n)$ $(\widetilde{B}_{m_0+1}(n))$; 2), примыкающие (в силу определения $B(n, i)$) к областям $\widetilde{B}_{m_0}(n, i_0)$ и $\widetilde{B}_{m_0+1}(n, i_0)$ простые острова над $B_0(n)$, являющиеся, в свою очередь, частью простых островов над $B'_0(n)$, совпадают.

Таким образом, для заданной группы $\mathfrak{M}_q$, примыкающие к островам $\widetilde{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0), \cdots, \widetilde{B}_{m'_q(i_0)}(n, i_0)$ (по линиям $d'_{m_q(i_0)}, \cdots, d'_{m'_q(i_0)}$), простые острова над $B_0(n)$, являющиеся, в свою очередь, частями простых островов над $B'_0(n)$, совпадают.

Обозначим этот простой остров над $B_0(n)$ через $B_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$.

Будем различать два случая: область $B_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ совпадает (соответственно, не совпадает) с простым островом, являющимся частью области $B^*_{i_0}(n, \cup D_m(i_0)\}$, проектирующейся в область $B_0(n)$. В записи эти два случая будем отличать, подставляя вместо индекса q индекс q^* (соответственно, q^{**}).

Обозначим $M(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ область (см. рис. 4)

$$(\bar{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0), \sqcup D_{m_q(i_0)}(i_0)) \sqcup, \cdots, \sqcup (\tilde{B}_{m'_q(i_0)}(n, i_0) \sqcup D_{m'_q(i_0)}(i_0)) \sqcup$$

$$\sqcup \tilde{B}_{m'_q(i_0)+1}(n, i_0);$$

$M'(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ — область, которая получится, если в предыдущей записи заменить $\bar{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0)$ на $\bar{B}'_{m_q(i_0)}(n, i_0)$ (где $\tilde{B}'_{m_q(i_0)}(n, i_0)$—остров над $B_{m'_q(i_0)}(n)$, содержащий остров $\bar{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0)$, который существует по построению), а $\tilde{B}_{m'_q(i_0)+1}(n, i_0)$ заменить на $\tilde{B}'_{m_q(i_0)+1}(n, i_0)$. Области $M'(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ и $B_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ граничат в частности по общей дуге $l'(n, i_0, \mathfrak{M}_q) = \partial M'(n, i_0, \mathfrak{M}_q) \cap \Gamma'$. Выделим на каждой из двух больших окружностей, проходящих через точку ∞ и концевые точки линии $l'(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$, участки, которые целиком лежат в $B_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$, кроме концевых точек, одна из которых является концевой для дуги $l'(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$, а другая лежит над кривой Γ''. Обозначим через $B'_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ среднюю из трех областей, на которые разрезы по этим участкам делят область $B_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$. Очевидно

$$\partial B'_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q) \cap \partial M_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q) = l'(n, i_0, \mathfrak{M}_q).$$

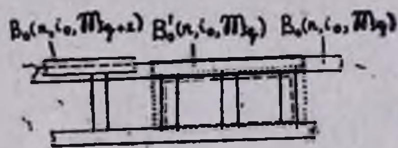

Рис. 4

(Штриховкой обведена область $M(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$; точками обведена область $M'(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$).

Обозначим теперь

$$B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0)) = B^*_{i_0}(n, \cup D_m(i_0)) \cup \{\bigcup_{\{q^*\}} l'(n, i_0, \mathfrak{M}_{q^*})\},$$

где объединение внутри фигурной скобки ведется по всем q^*, определенным выше.

Очевидно, выполняется следующее

Свойство 1. Область $B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$ „однолистна", т. е. в каждую точку сферы проектируется не более одной точки этой области и, вообще говоря, многосвязна.

По построению, каждый остров над $B_0(n)$, $\tilde{B}_p(n)$, $p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$, являющийся частью области $B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$, является, в то же время, частью простого острова над $B'_0(n)$, $\bar{B}'_p(n)$, $p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$.

Присоединив все те части этих островов над $B_0'(n)$, $\widetilde{B}_p'(n)$, $p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$, которые проектируются в множества $B_0'(n) \setminus B_0(n)$, $\widetilde{B}_p'(n) \setminus \bar{B}_p(n)$, $p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$ к области $B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$, получим некоторую область на F. Присоединив к последней области все области $B_0'(n, i_0, \mathfrak{M}_{q^{**}})$, (где q^{**} определено выше), получим нужную нам область $B_{i_0}'(n, \cup D_m(i_0))$. Из построений легко вытекают следующие предложения.

Свойство 2. Область $B_{i_0}'(n, \cup D_m(i_0))$, вообще говоря, не однолистна, в частности, если она содержит область типа $B_0'(n, i_0, \mathfrak{M}_{q^{**}})$, то над каждой точкой сферы, в которую проектируется некоторая точка области $B_0'(n, i_0, \mathfrak{M}_{q^{**}})$, лежит две точки, принадлежащие области $B_0'(n, \cup D_m(i_0))$.

Свойство 3. Область $B_{i_0}(n, \cap D_m(i_0))$ принадлежит области $B_{i_0}'(n, \cup D_m(i_0))$.

Для любого i_0 расстояние $\rho(n)$ между границами этих областей, понимаемое как длина кратчайшей кривой, лежащей на $B_{i_0}'(n, \cup D_m(i_0))$ и соединяющей границу этой области и области $B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$, удовлетворяет, с некоторой постоянной K_{37}, неравенству

$$\rho(n) \geqslant \frac{K_{37}}{n^6}. \tag{3.1}$$

Пусть $\tilde{k}_i$ — количество тех областей $\widetilde{\Delta}_j^i$, $j = 0, 1, 2, \cdots, \tilde{k}_i$, принадлежащих $\{D_m, m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*-1, D(\infty), D(0)\}$, соединение которых с проекцией на сферу замыкания области $B_i(n, \cup D_m(i))$ дает всю сферу.

Нам потребуется следующая оценка:

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} \tilde{k}_i \leqslant 4S(s) + \frac{K_{38}}{n} S(s) + K_{39} n^{17} L, \tag{3.2}$$

где K_{38}, K_{39} — некоторые постоянные.

Покажем это. Если $n_0^*(D_m)$, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1$ ($n_0^*(D(\infty))$, $n_0^*(D(0))$) — количество тех простых островов над D_m, ($D(\infty)$, $D(0)$), которые не примкнули к островам $B(n, i)$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(n)$, то очевидно

$$n_0^*(D_m) \leqslant n_0(d_m^*) - \Phi(n), \quad m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*-1, \tag{3,3}$$

$$n_0^*(D(\infty)) < n_0(d^+(\infty)) - \Phi(n),$$

$$n_0^*(D(0)) \leqslant n_0(d^+(0)) - \Phi(n).$$

Из теоремы А' легко вытекает, с некоторой постоянной K_{40}, оценка

$$n_0(d^+(\infty)),\ n_0(d^+(0)),\ n_0(d_m^*) \leqslant S(s) K_{40} nL,$$

$$m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1.$$

Подставляя последнее неравенство и неравенство (2.9) в (3.3) и суммируя, придем к утверждению

$$P_0 \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} n_0^*(D_m) + n_0^*(D(\infty)) + n_0^*(D(0)) \leqslant$$

$$\leqslant (\tau^{**}+\tau^*+2)\left\{ K_{40}\, nL + \frac{16(\tau^{**}+\tau^*+1)}{n^5} S(s) + \right.$$

$$\left. + (\tau^{**}+\tau^*+1) K_{36}\, n^{13} L \right\} \leqslant \frac{K_{38}}{n} S(s) + K_{41}\, n^{17} L, \tag{3.4}$$

где K_{41} — некоторая постоянная (здесь мы учли, что $\tau^{**}+\tau^* < 2\pi n^2$).

Запишем неравенство (2.1) для совокупности областей $D(\infty)$, $D(0)$, D_m, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$. При этом в качестве кривых β_p, $p = -\tau^{**}+1, \cdots, \tau^*-1$, соединяющих области D_p и D_{p+1}, возьмем кривые d_p^*; в качестве кривых $\beta_{-\tau^{**}}$, (β_{τ^*}), соединяющих области $D(0)$, $D_{-\tau^{**}}$, $(D_{\tau^*-1}, D(\infty))$, возьмем кривые $d^*_{-\tau^{**}}$, $(d^*_{\tau^*})$; в качестве кривых β_p', $p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$, возьмем границы областей $\widetilde{B}_p'(n)$.

Разделим линии $\partial B_0(n) \cap \partial D(\infty)$ и $\partial B_0(n) \cap \partial D(0)$ на три равные части. Проведем "параллельные" линиям Γ' и Γ'' разрезы, соединяющие соответствующие точки делений. Эти разрезы делят область $B_0(n)$ на три "подобные" области, границу средней из которых обозначим $\beta^*_{\tau^*+1}$. В качестве кривой β_{τ^*+1} возьмем произвольный из описанных разрезов.

Таким образом, все построения, нужные для подсчета h_0, уже сделаны.

Грубый подсчет, аналогичный проведенному выше, приводит с некоторой постоянной K_{42} к неравенству

$$h_0(D(0), D_{-\tau^{**}}, \cdots, D_{\tau^*-1}, D(\infty)) \leqslant K_{42}\, n^{13}.$$

Учитывая еще, что с некоторой постоянной K_{43} справедливы оценки

$$J_0(D(0)),\ J_0(D_m),\ m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*-1,\ J_0(D(\infty)) \geqslant \frac{K_{43}}{n^2},$$

применив последние к неравенству (2.1), получим (K_{44}—некоторая постоянная)

$$\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} [S(s) - n_0(D_m)] + 2S(s) - n_0(D(\infty)) -$$

$$- n_0(D(0)) \leqslant 4S(s) + K_{44}\, n^{15} L. \tag{3.5}$$

Из неравенств (3.4) и (3.5) вытекает следующее утверждение: для количества

$$P_1 \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} [n_0(D_m) - n_0^*(D_m)] +$$

$$+ [n_0(D(\infty)) - n_0^*(D(\infty))] + [n_0(D(0)) - n_0^*(D(0))]$$

всех примыкающих к $B(n, i)$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(n)$ простых островов над $D(0)$, $D(\infty)$, D_m, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*-1$ выполняется оценка

$$P_1 > [(\tau^{**} + \tau^* + 2) - 4]\, S(s) - \frac{K_{38}}{n} S(s) - (K_{41} + K_{44})\, n^{17} L. \tag{3.6}$$

Если из выражения $\Phi(n)(\tau^{**} + \tau^* + 2)$ (показывающего общее количество простых островов над линиями $d^+(\infty)$, $d^+(0)$, d^+_m, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1$), которые являются одновременно граничными участками областей $B_l(n, \cup D_m(i))$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(n)$ отнять выражение P_1, то разность, очевидно, будет равна сумме $\sum_{l=1}^{\Phi(n)} \bar{k}_l$. Отсюда, учитывая еще, что для любого p по неравенству (2.6) выполняется

$$\Phi(n) \leqslant n_0(b_p^*) \leqslant S(s) + K_{34} n^6 L, \tag{3.7}$$

получим $(n > n_0)$

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} \bar{k}_l \leqslant 4S(s) + \frac{K_{38}}{n} S(s) + (K_{41} + K_{44})\, n^{17} L + (\tau^{**} + \tau^* + 2)\, K_{34} n^6 L \leqslant$$

$$< 4S(s) + \frac{K_{38}}{n} \cdot S(s) + K_{39} n^{17} L,$$

т. е. неравенство (3.2).

Пусть теперь наша поверхность F является образом односвязной области D при отображении некоторой однозначной функцией $w(z)$. Положим, что для функции $w(z)$ существуют все встречающиеся далее интегралы.

Пусть $\tilde{E}_l(D)$ $(\bar{E}_l(D))$ — прообраз области $B_l(n, \cup B_m(i))$ $(B_l'(n, \cup \cup D_m(i)))$; $\Phi(x, D)$, $(\Phi(y, D))$ — количество областей $\bar{E}_l(D)$, имеющих общие точки с отрезком $J_x(D) = \{z : \operatorname{Re} z = x\} \cap D$ (соответственно, с отрезком $J_y(D) = \{z : \operatorname{Im} z = y\} \cap D$); $L_x(D)$ $(L_y(D))$ — сферическая длина образа отрезка $J_x(D)$ (соответственно, отрезка $J_y(D)$) при отображении функцией $w(z)$.

Положим, что при заданном x_0 число $\Phi(x_0, D) > 2$. Тогда для каждой области $\bar{E}_{l_0}(D)$, имеющей общие точки с отрезком $J_{x_0}(D)$, найдется очевидно на этом отрезке интервал, образ δ_{l_0} которого при отображении функцией $w(z)$ соединяет граничные кривые областей $\bar{E}'_{l_0}(D)$ и $\tilde{E}_{l_0}(D)$. Следовательно, в силу свойства 3) имеем

$$\rho(\delta_{l_0}) \geqslant \frac{K_{37}}{n^6},$$

где $\rho(X)$ — сферическая длина X.

Поскольку очевидно

$$\sum_{x=1}^{\Phi(x_0, D)} \rho(\delta_{l_x}) \leqslant L_{x_0}(D),$$

для таких x_0 получим

$$\Phi(x_0, D) = \sum_{x=1}^{\Phi(x_0, D)} 1 \leqslant \frac{n^6}{K_{37}} \sum_{x=1}^{\Phi(x_0, D)} \rho(\delta_{l_x}) \leqslant \frac{n^6}{K_{37}} L_{x_0}(D).$$

Учитывая еще случай $\Phi(x, D) \leqslant 1$, получим неравенство

$$\Phi(x, D) \leqslant \frac{n^6}{K_{37}} L_x(D) + 1, \tag{3.8}$$

справедливое для всех x.

Аналогично получим неравенство

$$\Phi(y, D) \leqslant \frac{n^6}{K_{37}} L_y(D) + 1. \tag{3.9}$$

Если $D_{1,x} = \inf\limits_{z \in D} \operatorname{Re} z$, $D_{2,x} = \sup\limits_{z \in D} \operatorname{Re} z$, $D_{1,y} = \inf\limits_{z \in D} \operatorname{Im} z$, $D_{2,y} = \sup\limits_{z \in D} \operatorname{Im} z$, то очевидно интегралы

$$\int\limits_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} \Phi(x, D)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} \Phi(y, D)\, dy$$

равны, соответственно, величинам

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} \left(\sup_{z \in \widetilde{E}_l(D)} \operatorname{Re} z - \inf_{z \in \widetilde{E}_l(D)} \operatorname{Re} z\right)$$

и

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} \left(\sup_{z \in \widetilde{E}_l(D)} \operatorname{Im} z - \inf_{z \in \widetilde{E}_l(D)} \operatorname{Im} z\right).$$

Очевидно $d(\widetilde{E}_l(D))$ меньше суммы выражений в предыдущих скобках, так что

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} d(\widetilde{E}_l(D)) \leqslant \int\limits_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} \Phi(x, D)\, dx + \int\limits_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} \Phi(y, D)\, dy,$$

откуда, используя неравенства (3.8) и (3.9), имеем

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} d(\widetilde{E}_l(D)) \leqslant \frac{n^6}{K_{37}} \left\{ \int\limits_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} L_x(D)\, dx + \int\limits_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} L_y(D)\, dy \right\}. \tag{3.10}$$

Обозначив (в терминах функции $w(z)$) величину $S(s)$ через $A(D, w)$ и L—через $L(D, w)$ и подытожив полученные утверждения, получим следующее

Первое основное предложение. *При заданном четном $n > n_0 > 100$ в области D можно указать $\Phi(n)$ областей $\widetilde{E}_l(D)$, для которых выполняются следующие свойства*:

I. $$|\Phi(n) - A(D, w)| \leqslant Q_1(D, w), \tag{3.11}$$

где $Q_1(D, w) = \dfrac{K_{45}}{n} A(D, w) + K_{46}\, n^{17} L(D, w)$.

II. *В каждой области* $\tilde{\bar{E}}_i(D)$ *функция* $w(z)$ *однолистна; на границе* $\bar{E}_i(D)$ *функция не имеет кратных точек;* $\tilde{\bar{E}}_i(D) \cap \cap \bar{E}_j(D) = \varnothing$, *при* $i \neq j$; *замыкание множества* $w(\bar{E}_i(D))$, *стереографически отображенное на сферу, совпадает со сферой с некоторым числом* $\bar{k}_i$ *исключенных из сферы односвязных областей* $\bar{\Delta}^i_j$, $j=1, 2, \cdots, \bar{k}_i$, $\tilde{\bar{\Delta}}^i_{j_1} \cap \bar{\Delta}^i_{j_2} = \varnothing$ *при* $j_1 \neq j_2$.

III. *Существует такая постоянная* K_{47}, *что диаметр* $\rho(\tilde{\bar{\Delta}}^i_j)$ (*в сферической метрике*) *каждой из этих областей* $\bar{\Delta}^i_j$, $i=1, 2, \cdots$ $\cdots, \Phi(n)$, $j=1, 2, \cdots, \bar{k}_i$ *удовлетворяет неравенству*

$$\rho(\tilde{\bar{\Delta}}^i_j) \leqslant \frac{K_{47}}{n}. \tag{3.12}$$

IV. *Общее количество этих областей удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} \bar{k}_i \leqslant 4A(D, w) + Q_2(D, w), \tag{3.13}$$

где $Q_2(D, w) = \dfrac{K_{48}}{n} A(D, w) + K_{49} n^{17} L.$

V. *Сумма диаметров областей* $\bar{E}_i(D)$ *удовлетворяет неравенству* (3.10).

Здесь предложение I вытекает из неравенств (2.9) и (3.7), предложения II, IV, V установлены ранее; предложение III вытекает из того, что области $\bar{\Delta}^i_j \in \{D(\infty), D(0), D_m, m=-\tau^{**}, \cdots, \tau^*-1\}$, а диаметр каждой из последних областей есть величина порядка $1/n$.

Из первого основного предложения легко выводится теорема 1.2. Теорема же 1.1 выводится из следующего более общего и точного результата.

Второе основное предложение. *При заданном четном* $n > n_0 > 100$ *в области* D *можно указать* $\Phi(n)$ *областей* $E_i(D)$, *для которых выполняются следующие свойства:*

I. $\Phi(n)$ *удовлетворяет неравенству* (3.11).

II. *В каждой области* $E_i(D)$ *функция* $w(z)$ *однолистна; на границе области* $E_i(D)$ *функция* $w(z)$ *может иметь кратные точки;* $E_i(D) \cap E_j(D) = \varnothing$ *при* $i \neq j$; *замыкание множества* $w(E_i(D))$, *стереографически отображенное на сферу, совпадает со сферой с некоторым числом* k_i *исключенных из сферы односвязных областей* Δ^i_j, $j=1, 2, \cdots, k_i$, $\Delta^i_{j_1} \cap \Delta^i_{j_2} = \varnothing$, *при* $i \neq j$.

III.

$$\rho(\Delta^i_j) \leqslant \frac{K_{47}}{n}.$$

$$i=1, 2, \cdots, \Phi(n), \ j=1, 2, \cdots, k_i. \tag{3.14}$$

IV.

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} k_i < 2A(D, w) + Q_3(D, w), \tag{3.15}$$

где $Q_3(D, w) = K_{50}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) A(D, w) + K_{51} n^{17} L(D, w)$,

V.

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} d(E_l(D)) \leqslant (1+p)\frac{n^6}{K_{37}} \times$$

$$\times\left\{\int_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} L_x(D)\,dx + \int_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} L_y(D)\,dy\right\} + 2(1+p)\,d(D). \tag{3.16}$$

Пусть $n_{1,p}(D)$ $(\bar{n}_{1,p}(D))$ — количество кратных, с учетом кратности (без учета кратности) островов над некоторой областью D, кратность которых не превышает некоторого числа p (p, очевидно, больше единицы); $n^{\bullet}_{1,p}(D_m, \cup B_l)$, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^{*}-1$ $(n^{\circ}_{1,p}(D(\infty), \cup B_l)$, $n^{\bullet}_{1,p}(D(0), \cup B_l))$ — количество кратных, с учетом кратности, островов над D_m, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^{*}-1$ $(D(\infty), D(0))$, удовлетворяющих условиям: 1) кратность каждого из этих островов не больше p $(p>1)$, 2) каждый остров над линией $d^{\bullet}_m$, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^{*}-1$ $(d^{+}(\infty)$, $d^{+}(0))$, являющийся граничной дугой определяемого острова, является, одновременно, граничной дугой некоторого острова $B_l(n, \bigcup D_m(i))$;

$\bar{n}^{\bullet}_{1,p}(D_m, \cup B_l)$, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^{*}-1$ $(\bar{n}^{\bullet}_{1,p}(D(\infty), \cup B_l)$,

$\tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D(0), \cup B_l))$ — количество тех же островов без учета кратности.

По определению, для каждого острова над D_m, не являющегося островом типа $n^{\bullet}_{1,p}(D_m, \cup B_l)$, найдется простой остров над $d^{\bullet}_m$, являющийся граничной дугой этого острова над D_m и не являющийся граничной дугой ни одного острова $B_l(n, \bigcup D_m(i))$. Отсюда, учитывая, что общее количество простых островов над $d^{\bullet}_m$, не являющихся граничными дугами областей B_l $(n, \bigcup D_m(i))$, не больше чем $n(d^{\bullet}_m) - \Phi(n)$, получим

$$\bar{n}_{1,p}(D_m) - \bar{n}^{\bullet}_{1,p}(D_m, \cup B_l) \leqslant n(d^{\bullet}_n) - \Phi(n).$$

Это же неравенство верно, если заменить в нем $d^{\bullet}_m$ на $d^{+}(\infty)$ (или $d^{+}(0)$) и D_m заменить на $D(\infty)$ (или $D(0)$). Суммируя эти неравенства и учитывая оценки (3.7) и (2.9), получим

$$P_2 \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^{*}-1} [\tilde{n}_{1,p}(D_m) - \bar{n}^{\bullet}_{1,p}(D_m, \cup B_l)] +$$

$$+ [\bar{n}_{1,p}(D(\infty)) - \bar{n}^{\bullet}_{1,p}(D(\infty), \cup B_l)] +$$

$$+ [\bar{n}_{1,p}(D(0)) - \bar{n}^{\bullet}_{1,p}(D(0), \cup B_l)] \leqslant$$

$$\leqslant (\tau^{**} + \tau^{*} + 2)\left\{\frac{16(\tau^{**} + \tau^{*} + 1)}{n^5} S(s) - (\tau^{**} + \tau^{*} + 1)\times\right.$$

$$\left.\times K_{38} n^{13} L + K_{34} n^6 L\right\} \leqslant \frac{K_{48}}{n} S(s) + K_{49} n^{17} L. \tag{3.17}$$

Пусть $n_2(D)$ — количество кратных островов над некоторой областью D без учета кратности. Так как $n_2(D) \leqslant n_1(D)$, применив неравенство (2.1′), легко получим с некоторой постоянной K_{52} неравенство

$$P_3 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*+1} [n_2(D_m) - \tilde{n}_{1,p}(D_m)] +$$

$$+[n_2(D(\infty)) - \tilde{n}_{1,p}(D(\infty))] +$$

$$+[n_2(D(0)) - \tilde{n}_{1,p}(D(0))] \leqslant \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} \frac{n_1(D_m)}{p-1} +$$

$$+\frac{n_1(D(\infty))}{p-1} + \frac{n_1(D(0))}{p-1} \leqslant \frac{2}{p-1} S(s) + \frac{K_{52}}{p-1} L, \tag{3.18}$$

(здесь мы учли, что кратность каждого острова, число которых фигурирует в разности под квадратными скобками, превышает число p).

Из определений имеем равенство

$$n(D) - n_1(D) = n_0(D) + n_2(D),$$

используя которое получим

$$P_4 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} [n(D_m) - n_1(D_m)] +$$

$$+[n(D(\infty)) - n_1(D(\infty))] + [n(D(0)) - n_1(D(0))] =$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_5,$$

где

$$P_5 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} \tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D_m, \cup B_l) +$$

$$+\tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D(\infty), \cup B_l) + \tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D(0), \cup B_l).$$

Отсюда и из неравенств (3.4), (3.17), (3.18) вытекает оценка

$$P_1 + P_5 \geqslant P_4 - \left(\frac{K_{38}+K_{48}}{n} + \frac{2}{p-1}\right) S(s) - \left(K_{41} + K_{49} + \frac{K_{52}}{p-1}\right) n^{17} L.$$

Откуда, применив вторую основную теорему Л. Альфорса, с некоторыми постоянными K_{53} и K_{54} получим

$$P_1 + P_5 + P_6 \geqslant P_6 + (\tau^{**} + \tau^*) S(s) -$$

$$-K_{53}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) S(s) - K_{54} n^{17} L. \tag{3.19}$$

где

$$P_6 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} [n^{\bullet}_{1,p}(D_m, \cup B_l) - \tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D_m, \cup B_l)] +$$

$$+[n^{\bullet}_{1,p}(D(\infty), \cup B_l) - \tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D(\infty), \cup B_l)] +$$

$$+[n^{\bullet}_{1,p}(D(0), \cup B_l) - \tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D(0), \cup B_l)].$$

Острова, входящие в определение $\tilde{n}_{1,p}(D_m, \cup B_l)$, обозначим через $D'_m(\varkappa)$, $\varkappa$ — номер острова. Проведем из каждой алгебраической точки ветвления острова $D_m(\varkappa)$ разрезы по дугам больших окружностей, соединяющих эти точки с одним из концов дуги $\partial D_m \cap d^{*}_m$, этот конец один и тот же для всех алгебраических точек ветвления из $D'_m(\varkappa)$. Если кратность острова $D'_m(\varkappa)$ равна некоторому $p_1(\leqslant p)$, то проведением этих разрезов остров $D'_m(\varkappa)$ распадается на p_1 односвязных и однолистных областей $D'_m(\varkappa, j)$, $j=1, 2, \cdots, p_1$. Проведя аналогичные разбиения для кратных островов над $D(\infty)$ и $D(0)$, получим некоторые подобные области $D_\infty(\varkappa)$, $D_0(\varkappa)$, $D_\infty(\varkappa, j)$ и $D_0(\varkappa, j)$. Заметим, что замыкание проекции на сферу каждой из областей $D'_m(\varkappa, j)$ ($D_\infty(\varkappa, j)$, $D_0(\varkappa, j)$) совпадает с замыканием области D_m ($D(\infty)$, $D(0)$). Присоединим к каждой из областей $B_l(n, \cup D_m(i))$, $i=1,2,\cdots$ $\cdots, \Phi(n)$ все примыкающие к ней по дугам кривой d^{*}_m ($d^+(\infty), d^+(0)$), области $D'_m(\varkappa, j)$, $m=-\tau^{**},\cdots, \tau^*-1$ ($D_\infty(\varkappa, j)$, $D_0(\varkappa, j)$). Получим $\Phi(n)$ областей $B_l(n, \cup D_m(i), \cup D_m(\varkappa, j))$, $i=1, 2,\cdots, \Phi(n)$. В силу сделанного выше замечания замыкание каждой из этих областей совпадает со всей римановой сферой с некоторым числом k_l исключенных из сферы односвязных областей Δ^l_j, $j=1, 2,\cdots, k_l$, причем каждая из областей Δ^l_j проектируется в одну из областей $D(0)$, $D(\infty)$, D_m, $m=-\tau^{**},\cdots, \tau^*-1$. Следовательно, для областей Δ^l_j выполняется неравенство (3.14). Обозначив $E_l(D)=w^{-1}(B_l(n, \cup D_m(i), \cup D_m(\varkappa, j)))$, заметим, что в силу построений, для областей $E_l(D)$ выполняются предложения I, II, III второго основного предложения.

Точно так же, как и при выводе неравенства (3.13) заключаем, что

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} k_l \leqslant \Phi(n)(\tau^{**}+\tau^*+2) - \{P_1+P_5+P_6\},$$

отсюда, используя неравенства (3.7) и (3.19), получим

$$\sum_{l=k}^{\Phi(n)} k_l \leqslant 2\,S(s) - P_6 + K_{34}(\tau^{**}+\tau^*+2)\,n^6 L +$$
$$+K_{53}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) S(s) + K_{54}\,n^{17} L, \tag{3.15'}$$

т. е., с учетом того, что $P_6 \geqslant 0$, неравенство (3.15).

Остается доказать неравенство (3.16). Очевидно выполняется оценка

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} d(E_l(D)) \leqslant \sum_{l=1}^{\Phi(n)} d(\widetilde{E}_l(D)) +$$
$$+\sum_{\{\varkappa\}}\sum_{\{j\}} d(w^{-1}(D_0(\varkappa, j))) + \sum_{\{\varkappa\}}\sum_{\{j\}} d(w^{-1}(D_\infty(\varkappa, j))) +$$
$$+\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1}\sum_{\{\varkappa\}}\sum_{\{j\}} d(w^{-1}(D'_m(\varkappa, j))). \tag{3.20}$$

Из геометрических свойств проведенных построеный вытекает (аналогично свойству 3), что длина $\rho'(n)$ кратчайшей кривой на поверхности наложения F, соединяющей граничные участки двух произвольных островов типа $\tilde{n}^{\bullet}_{1,p}\,(D_m)$, $\tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D(\infty))$, $\tilde{n}^{\bullet}_{1,p}\,(D(0))$, удовлетворяет неравенству

$$\rho'(n) > \frac{K_{37}}{n^6}.$$

Теперь, точно так же, как из подобного неравенства (3.1) было выведено соотношение (3.10), получим

$$\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} \sum_{\{\varkappa\}} d\,(w^{-1}\,(D'_m\,(\varkappa))) +$$

$$+ \sum_{\{\varkappa\}} d\,(w^{-1}\,(D_\infty\,(\varkappa))) + \sum_{\{\varkappa\}} d\,(w^{-1}\,(D_0\,(\varkappa))) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^6}{K_{37}} \left\{ \int\limits_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} L_x\,(D)\,dx + \int\limits_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} L_y\,(D)\,dy \right\} + 2d\,(D).$$

С учетом того, что кратности каждого из островов $D'_m\,(\varkappa)$, $D_\infty\,(\varkappa)$, $D_0\,(\varkappa)$ не превосходят числа p, заключаем, что тройная сумма в (3.20) не превосходит правой части последнего неравенства, умноженного на p. Так что, учитывая еще неравенство (3.10), получаем оценку (3.16), чем и завершается доказательство второго основного предложения.

Доказательство теорем 1.1 и 1.2. В частном случае, когда во втором основном предложении функция $w(z)$ является мероморфной в $|z| < R \leqslant \infty$, а область $D = D(r) = \{z:|z| \leqslant r\}$, величина $A(D, w) = A(r)$, а $L(D, w) = L(r)$. Тогда, фигурирующая в фигурной скобке неравенства (3.16) величина представляется в виде

$$\int\limits_{-r}^{r} \left(\int\limits_{J_x \cap D(r)} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\,dy \right) dx + \int\limits_{-r}^{r} \left(\int\limits_{J_y \cap D(r)} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\,dx \right) dy.$$

Последняя величина оценивается в силу неравенства Коши—Буняковского через

$$2 \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\, r\,dr\,d\varphi \leqslant 2\sqrt{\pi}\, r A^{1/2}(r).$$

Учитывая еще, что $d(D(r)) = 2\pi r$, вместо неравенства (3.16) получим ($E_l(r) = E_l\,(D(r))$)

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} d\,(E_l(r)) \leqslant (1+p)\, n^6 \frac{16}{K_{37}}\, r A^{1/2}(r). \tag{3.16'}$$

Для оценок $Q_2(D(r), w)$ и $Q_3(D(r), w)$ используется следующая

Лемма 1 (см. [1], с. 331). *Пусть $w(z)$ — псевдомероморфная в $|z| < R \leqslant \infty$ функция, причем при $R < \infty$ полагаем, что*

$$\overline{\lim_{r \to R}}\,(R-r)\,A(r) = +\infty. \tag{3.21}$$

Тогда при $R=\infty$ для любого фиксированного $\varepsilon>0$ неравенство

$$L(r)<[A(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

справедливо при $r\in(0,\infty)\setminus E$ где $E=E(\varepsilon)$ — некоторое множество конечной логарифмической меры. При $R<\infty$ существует такая монотонно возрастающая функция $\varphi_1(r)$, стремящаяся к $+\infty$ при $r\to R$, что неравенство

$$L(r)\,\varphi_1(r)<A(r)$$

справедливо на некоторой последовательности $r_k\to R$. Положим теперь во втором основном предложении $n=p=n(r)=[\varphi(r)]^*$, где $[X]^*$ — целая часть числа X. Взяв при $R=\infty$, $\varphi(r)<A^{1/35}(r)$ и подставив эти значения n и p во второе основное предложение и неравенство (3.16′), получим теорему 1. Взяв при $R<\infty$, $\varphi^{17}(r)<\varphi_1(r)$, придем к следующему результату: пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z|<R<\infty$ функция, для которой выполнено неравенство (3.21). Тогда при $\varphi^{17}(r)<\varphi_1(r)$ для функции $w(z)$ справедливы все утверждения теоремы 1 с заменой $r\in(0,\infty)\setminus E$ на $r_k\to\infty$.

Аналогично получаем теорему 2 и, соответственно, ее аналог для случая $R<\infty$. В случае, если $w(z)$ псевдомероморфна в $|z|<R\leqslant\infty$, используя рассуждения, приведенные в конце доказательства теоремы 2″ работы [2], вместо неравенства (3.16′) получим

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} d(E_i(r))\leqslant \mathbf{K}\cdot\frac{16}{K_{37}}(1+p)\,n^6\,rA^{1/2}(r), \tag{3.16″}$$

откуда дословно повторяя все остальные выкладки, получим следующий результат: для такой функции справедливы теорема 1 (2), если в последней в неравенстве (1.4), ((1.7)) постоянную K заменить постоянной $\mathbf{K}\,K$.

Все приведенные результаты настоящей работы оказываются также верными, если каждый раз в оценках диаметров множеств $d(E_i(r))$ постоянные K заменить на $\mathbf{K}\;K$.

Отметим еще, что от результатов настоящей работы можно также перейти к их проинтегрированным формам в духе неванлинновской теории, если использовать следующие оценки.

Лемма 2 (Майлз [74], Гыжа [75]). *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z|<R\leqslant\infty$ функция (причем при $R<\infty$ выполнено неравенство* (3.21)). *Тогда при $R=\infty$ оценка (r_0 фиксировано)*

$$\int_{r_0}^{r}\frac{L(t)}{t}\,dt=O\left[\sqrt{T(r)\ln T(r)}\right]$$

выполняется при $r\to\infty$, $r\notin E'$, где E' — некоторое множество значений r конечной логарифмической меры.

При $R<\infty$ оценка

$$\int_{r_0}^{r}\frac{L(t)}{t}\,dt=O\left\{\left|T(r)\ln\frac{R\,T(r)}{R-r}\right|^{1/2}\right\}$$

выполняется при $r \to R$, $r \overline{\in} E''$, где E'' — некоторое множество значений r, для которого справедливо неравенство

$$\int\limits_{E''} d\left(\frac{1}{R-r}\right) < \infty.$$

Доказательство теоремы 1.5. Пусть r'_k — последовательность значений r, стремящаяся к $+\infty$, на которой выполняются следующие соотношения:

а) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln A(r'_k)}{\ln r'_k}$ существует и равен ρ, б) $r'_k \overline{\in} E$, где

E — множество исключительных значений r, фигурирующее в теоремах 1 и 2.

Чтобы убедиться в возможности выбора таких значений r'_k, заметим, что если r^*_k — последовательность, на которой справедливо соотношение а), то последнее справедливо также на любой последовательности $r'_k \in P_k = \{r : r^*_k \leqslant r \leqslant 2r^*_k\}$.

Но объединение множеств P_k имеет, очевидно, бесконечную логарифмическую меру, так что из неограниченного множества $\bigcup\limits_k P_k \setminus E$ можем выбрать требуемую последовательность r'_k.

При $\rho > 0$ для последовательности r'_k выполняется еще следующее свойство в): при $\varepsilon > 0$, $r^*_k = r'_k / (A^{1/2-\varepsilon}(r))$

$$A(r^*_k) = o[A(r'_k)],\ r'_k \to \infty. \tag{3.22}$$

В самом деле, по определению на r'_k выполняется при $\rho < \infty$ $A(r'_k) \geqslant (r'_k)^{\rho-\varepsilon}$ при $r'_k > r_1$, так что при $r'_k > r_2 \geqslant r_1$, $\varepsilon < \rho$,

$$A(r^*_k) \leqslant (r^*_k)^{\rho+\varepsilon} \leqslant (r'_k)^{(\rho+\varepsilon)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)} = o\,[A(r'_k)],\ r'_k \to \infty.$$

При $\rho = \infty$ соотношение очевидно.

В силу рассуждения, с помощью которого выводится соотношение б), справедливо также г): r'_k, удовлетворяющее соотношениям а), б), в), можно выбрать таким, чтобы $r^*_k \overline{\in} E$.

Пусть $\Phi^*(r_1, r_2)$ $(\Phi^*_1(r_1, r_2))$—количество областей $E_i(r)$ $(E_{1,i}(r))$, фигурирующих в теореме I′ (I″), целиком лежащих в кольце $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$. В дальнейшем мы положим, что в теоремах I′ и I″ величина $\varphi^0(r) = A^\varepsilon(r)$.

Заметим, что количество областей $E_i(r'_k)$, целиком лежащих в $|z| \leqslant r^*_k$, есть величина $o[A(r'_k)]$, $r'_k \to \infty$, так как это количество есть величина порядка $A(r^*_k)$*, а для последней выполняется соотношение (3.22). С другой стороны, используя рассуждения, приведенные при

* В силу рассуждений пункта 4 в противном случае сферическая площадь множества $\bigcup_{i=1}^{\Phi(\cdot)} \varpi(E_i(r))$ превосходила бы $\pi A(r^*_k)$, что невозможно, в силу определения $A(r)$.

выводе оценки (3.16), получим, что количество областей $E_l\ (r'_k)$, имеющих общие точки с $|z|=r^*_k$, оценивается через

$$(1+p)\,\frac{n^6}{K_{37}}\,L\,(r^*_k)=O\,[\varphi^7\,(r'_k)\;L\,(r^*_k)],\;\; r'_k\to\infty.$$

Учитывая, что $r^*_k\overline{\in}E$ получим, что это количество есть величина порядка $o\,[A\,(r'_k)]$, $r'_k\to\infty$.

Из предыдущих двух предложений вытекает

$$\Phi^*\,(r^*_k,\,r'_k)=A\,(r'_k)+o\,[A\,(r'_k)],\;\; r'_k\to\infty, \tag{3.23}$$

и точно также выведем

$$\Phi^*_1\,(r^*_k,\,r'_k)\geqslant\frac{1}{3}\,A\,(r'_k)+o\,[A\,(r'_k)],\;\; r'_k\to\infty. \tag{3.24}$$

Обозначим

$$\Delta_\alpha\,(r'_k,\;J_\alpha\,(r'_k))=\{z:r^*_k\leqslant|z|\leqslant r'_k,\;|\arg z-\varphi_\alpha\,(r'_k)|<2\pi\alpha\},$$

$$J_\alpha\,(r'_k)=\{z\colon \arg z=\varphi_\alpha\,(r'_k),\;|z|>0\}.$$

Для заданного r'_k очевидно найдется такая область $\Delta_{1/2}\,(r'_k,\;J_{1/2}\,(r'_k))$, что количество $\breve{\Phi}_{1/2}\;(r'_k,\;J_{\pi/2})$ областей $E_l\,(r)$, имеющих общие точки с $\Delta_{1/2}\,(r'_k,\;J_{\pi/2}\,(r'_k))$ не меньше, чем $\Phi^*(r^*_k,\;r'_k)$, так что в силу (3.23)

$$\breve{\Phi}_{1/2}\,(r'_k,\;J_{1/2})\geqslant\frac{1}{2}\;A\;(r'_k)+o\;[A\;(r'_k)],\;\; r'_k\to\infty.$$

Поскольку диаметр каждой из областей $E_l\,(r)$, фигурирующих в теореме I', не больше $K\varphi^8\,(r'_k)\,r'_k\,/\,A^{1/2}\,(r'_k)$, то ни одна из этих областей не имеет общих точек с $\Delta_{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\;(r'_k,\;J_{1/2}\;(r'_k))$ при $r'_k>r\;(\varepsilon_1)$ (так как минимальное расстояние между

$$\{z\colon \arg z=\varphi_{1/2}\,(r'_k),\;\; r^*_k\leqslant|z|\leqslant r'_k\}\quad \text{и}$$

$$\left\{z\colon \arg z=\varphi_{1/2}\,(r'_k)\pm\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right),\; r^*_k\leqslant|z|\leqslant r'_k\right\}$$

не меньше чем $\varphi\,(r'_k)\;K\varphi^8\;(r'_k)\;\;r'_k/A^{1/2}\;(r'_k)$.

Таким образом, для каждого $r'_k>r\;(\varepsilon_1)$ мы выделили такую область $\Delta_{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\;(r'_k,\;J_{1/2}\;(r'_k))$, что количество $\Phi_{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\,(r'_k,\;\;J_{1/2})$ областей $E_l\;(r)$, замыкания которых целиком лежит в $\Delta_{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\;(r'_k,\;J_{1/2}\,(r'_k))$, удовлетворяет неравенству

$$\Phi_{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\,(r'_k,\;J_{1/2}\;(r'_k))\geqslant\frac{1}{2}\;A\;(r'_k)-o\;[A\;(r'_k)],\;\; r\;(\varepsilon_1)<r'_k\to\infty.$$

Пусть $J_{1/2}=\{z:\arg z=\varphi\;(1),\;|z|>0\}$ — луч, являющийся предельным для $J_{1/2}\,(r'_k\;(1))$, где $r'_k\;(1)$, $k=1,\,2,\cdots$, — некоторая последовательность последовательности r'_k; $\Delta_{1/2}\,(\varphi\;(1))=\left\{z\colon |\arg z-\varphi\;(1)|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$.

Тогда очевидно, при $r'_k(1)\to\infty$ в $\Delta_{1/2}(\varphi(1))\cap\{z: |z|\leqslant r'_k(1)\}$ лежат вместе с замыканиями $\Phi_{\frac{1}{2}+2\varepsilon_1}(r'_k(1))$ областей $E_l(r)$, для которых выполняется

$$\Phi_{\frac{1}{2}+2\varepsilon_1}(r'_k(1))\geqslant\frac{1}{2}A(r'_k(1))+o[A(r'_k(1))],\ r'_k\to\infty.$$

Разделим теперь каждую из областей $\Delta_{1/2}(r'_k(1), J_{1/2}(r'_k(1)))$ на две равные области проведением сечения по $J_{1/2}(r'_k(1))$. Повторяя приведенные выше рассуждения получим, что хотя бы одна из этих областей имеет общие точки с не менее чем $1/4\ A(r'_k(1))+o[A(r'_k(1))]$, $r'_k(1)\to\infty$, областями $E_l(r)$. Далее, по аналогии получим, что существует такой луч $J_{1/2^2}=\{z: \arg z=\varphi(2),\ |z|>0\}$, что в области $\Delta_{\frac{1}{2^2}+2\varepsilon_2}(\varphi_2\cap\{z: |z|\leqslant r'_k(2)\}$ лежат вместе с замыканиями $\Phi_{\frac{1}{2^2}+2\varepsilon_2}(r'_k(2))$ областей $E_l(r)$, для ксторых справедливо неравенство

$$\Phi_{\frac{1}{2^2}+2\varepsilon_2}(r'_k(2))\geqslant\frac{1}{2^2}A(r'_k(2))+o[A(r'_k(2))],$$

где $r'_k(2)\in\{r'_k(1)\}$, $r'_k(2)\to\infty$.

Поскольку $\varepsilon_2<\varepsilon_1$, то $\overline{\Delta_{\frac{1}{2^2}+2\varepsilon_2}(\varphi_2)}\subset\Delta_{\frac{1}{2}+2\varepsilon_1}(\varphi_1)$. Продолжая эту процедуру для произвольного n получим неравенства (1.18), а поскольку $r'_k(n+1)\subset\{r'_k(n)\}$ начиная с некоторого $r'_k(n+1)$, то в силу свойства а) выполняются также неравенства (1.19). Теорема доказана для случая, когда $\varepsilon_n=1/2^n$.

Доказательство общего случая аналогично, с той лишь разницей, что из областей $\Delta_{\varepsilon'_n+2\varepsilon_n}$ выделяется область, не являющаяся половинкой области $\Delta_{\varepsilon'_n+2\varepsilon_n}$, а область с угловым раствором $2\pi\ \varepsilon'_{n+1}$.

Доказательство теоремы 1.7 проводится аналогичным образом, если в рассуждениях, приводимых после соотношения (3.23), вместо (3.23) использовать неравенство (3.24).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.VIII.1984

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների կետերի մոտիկության հատկությունը և ռիմանյան մակերևույթների կառուցվածքը *(ամփոփում)*

Աշխատանքում օգտագործելով «լցման շրջանների» գաղափարը ապացուցվում են Նևանլիննայի և Ալֆորսի տեսքերով երկրորդ հիմնական թեորեմի և համապատասխանաբար այդ տեսքերով դեֆեկտների առնչությունների, Բորելի ճառագայթների մասին Վալիրոնի արդյունքների «լցման շրջաններին» վերաբերվող Միյոսի թեորեմների ուժեղացումներ: Ստացված բոլոր արդյունքները ճշգրիտ են նրանց մեջ մտնող հաստատունների ճշտությամբ:

Սակայն աշխատանքում հիմնականը երկու նոր օրինաչափությունների հայտնաբերումն է: 1) $W(z)$ մերոմորֆ ֆունկցիայի a-կետերի մոտիկության հատկությունը, որը լրացնելով բաշխման տեսության հիմնական պնդումը a և b-կետերի քանակի մոտիկության մասին, ցույց է տալիս նաև այդ կետերի մոդուլների և արգումենտների մոտիկությունը: 2) $\{v(z): (z)\leqslant r\}$ ռիմանյան մակերևույթի միաթերթ մասերի տրոհվելու հատկությունը, երբ նրանից հեռացվում են «փոքր» քանակությամբ «փոքր» մակերեսներ ունեցող տիրույթները:

G. A. BARSEGIAN. *A proximity property of the a-points of meromorphic functions and Rieman surface structure* (summary)

In the parer sharper versions of the following results are established: the second main theorem in Ahlfors' and Nevanlinna's forms and the corresponding deficiency relations; first main theorem in Ahlfors' form; Valiron's results on Borel rays; Milloux's results of "circles de remplissage". All the results are best possible up to constats there.

Besides two new correlation conditions are found: the „proximity property of a-points" of ameromorphic function $w(z)$ which complements the classical results by establisheng closeness of modules and arguments of a and b-points; the possibility of deviding the Rieman surface $\{w(z) : |z| \leqslant r\}$ into univalent sheets after removing small number of regions of small diameter. This last property opens perspectives for using the theory of univalent functions in the theory of meromorphic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, 1941.
2. *Г. А. Барсегян*. Единый подход к основным результатам о дефектах, лучах Бореля, кругах наполнения, ДАН СССР, 271, № 1, 1983, 11—14.
3. *Г. А. Барсегян*. Свойство близости a-точек — новая концепция в теории мероморфных функций, Short communications, J. C. M. Warszawa, 1982, p. 10.
4. *Г. А. Барсегян*. Свойство близости a-точек мероморфных функций, Матем. сборник, 120 (162), № 1, 1983, 42—67.
5. *Г. А. Барсегян*. Новые результаты в теории мероморфных функций, ДАН СССР, 238, № 4, 1978, 777—780.
6. *Г. А. Барсегян*. О геометрии мероморфных функций, Матем. сборник, 114 (156), № 2, 1981, 179—226.
7. *H. Milloux*. Lie theoreme de Picard. Suites de fonctions holomorphes. Fonctions meromorphes—et fonctions entieres, J. Math. pures et appl, 1924, 9—e sèrie, 3, 345—401.
8. *H. Milloux*. Les cercles de remplissage des fonctions meromorphes ou entieres et le theoreme Picard—Borel, Acta mathematica, 1928, 52, 189—225.
9. *J. Dufresnoy*. Sur quelques propriétès des cercles de remplissage des fonctions, meromorphes, Ann. Ecole Norm. sup., 1942, LIX, 187—209.
10. *G. Valiron*. Sur la distribution des values des fonctions meromorphes, Acta Math. 1926, № 47.
11. *M. Tsuji*. Potential theory in modern function theory, Tokyo, 1959.
12. G. *Valiron*. Recherches sur le theoreme M. Borel dans la théorie des fonctions mèromorphes, Acta mathematica, 1928, 52, 1—2, 67—92.
13. *K. L. Hiong*. Sur les fonctions entieres et les fonctions mèromorphes d'ordre infini, Journ. de Math., 9e série, 1935, t. 14.
14. *K. L. Hiong*. Sur les fonctions mèromorphes d'ordre infini, G. R. Acad. Sci. 1933, t. 196.
15. *K. L. Hiong*. Some properties of the merophic functions of infinite order, Science reports of the National Tsing Hua Univ., serie A, 1935, t. 3.
16. *H. Milloux*. Une propriété générale des functions entieres d'ordre infini, C. R. Acad. Sci., 1930, t. 191.
17. *H. Milloux*. Remarques sur les fonctions entieres, Bull. Sc. Math., 2e série, 1930, t. 54.
18. *H. Milloux*. Sur une inégalité de la théorie des fonctions et ses applications, C. R. Acad. Sci., 1932, t. 194.
19. *H. Milloux*. Sur les bondes de determination infinie des fonctions entieres, Comptes rendues du Congres de Zürich, 1932, t. 2.
20. *H. Milloux*. Quelques propriétés des fonctions entieres d'ordre infini, distribution de leurs valeurs, Ann. Ecole Norm., 3e série, 1932, t. 49.

21. *G. Valiron.* Sur les directions de Borel de certaines fonctions entieres d'ordre infini, C. R. Acad. Sci., 1932, t. 194.
22. *G. Valiron.* Méthodes de sommation et directions de Borel, Annali R. Scuola normale di Pisa, 2e série, 1933, t. 2.
23. *A. Rauch.* Sur les bandes de diuegence de certaines fonctions d'ordre infini, C. R. Acad. Sci., 1934, t. 198.
24. *G. Valiron.* Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre nul, C. R. Acad. Sci., 1935, t. 200.
25. Cartwreight. Sur les directions de Borel des fonctions entieres d'ordre fini, C. R. Acad. Sci., 1932, 194.
26. Cartwreight. Sur quelques propriétés des directions de Borel des fonctions entieres d'ordre fini, C. R. Acad. Sci., 1932, 194.
27. Cartwreight. Sur la relation entre les directions de Borel des fonctjons entieres et les singularités des fonctions analitiques, C. R. Acad. Sci., 1932, 194.
28. Sunyer Balaguer F. Number of Borel directions and exceptional values of a meromorphic functions of finite order, Mem. Real Acad. Ci Art., Bercelona, 1952, 30, 451—459.
29. *G. Valiron.* Sur les directions de Borel des functions méromorphes d'ordre fini, Journ. de Math. Seele, 1931, № 10.
30. *W. K. Hayman, Lo. Yang.* Growth and values of fonctions regular in an angle, Proc. London Math. Soc., 1982, 44, № 2, 193—214.
31. *A. Dinghas.* Eine Verallgemeinerung des Picard—Borelschen Satzes, Math. Zeitschrite, 1939, 44.
32. *M. Tsugi.* Borel directions of meromorphic function of finite order, I. Tohoku Math. Journ. 1950, № 2, II. Kodai Math. Sem. Rep., 1950, III. Kodai Math. Sem. Rep., 1959.
33. Lee, Ke—chun. Über die Verallgemeinerung einiger. Ergebnisse der Wertverteilungstheorie der meromorphen Functions, Acta Math. Sinica, 1953, 3, 87—100.
34. *L. Biernacki.* Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes, Acta Math., 1930, № 56.
35. *A. Rauch.* Eztensions de théoremes relatifs aux directions de Borel des fonctions méromorphes, Journ. de Math., 1933, № 12.
36. *G. Valiron.* Points de Picard et points de Borel des fonctions méromorphes dans un cercle, Bull. Sci. Math., 1932.
37. *M. Tsuji.* Borel's direction of a meromorphic function in a unit circle, J. Math. Soc., Japan, 1955, 7, 290—311.
38. *H. Milloux.* Sur les directions de Borel des fonctions entieres et de leurs dérivées, C. R. Acad. Sci. Paris, 1950, 231, 402—403.
39. *H. Milloux.* Sur les fonction entieres d'ordre fini ou nul, C. R. Acad. Sci. Paris, 1951, 232, 236—237.
40. *H. Milloux.* Sur une propriété des fonctions méromorphes et de leurs dérivées, J. Math. Pures Appl., 1952, (9), 31, 1—18.
41. Sunyer Balager F. Directions of Borel—Valiron of maximum kind. comon to an entire fonction and to its successive derivetives and integrals, Mem. Acad. Cienc.. Madrid, 1956, 5, № 1, 51.
42. *Lo. Yang.* Siaou Shou—zhi. Sur les points de Borel des fonctions méromorphes et de leurs dérivées, Scientia sinica, 1965, 14, No11. 1556—1573.
43. C. *Linden.* On a conjecture of Valiron concerning sets of indirect Borel points, J. London Math. Soc., 1966, 41, № 2, 304—312.
44. *J. Anderson. J. Clunie.* Entire functions of finite order and lines of Julia, Math. Z., 1969, 112. No1, 59—73.
45. *P. Colwell.* Meromorphic functions with large sets of Julia points, Nagoja Math. J., 1973, 50, 1—6.
46. *P. Colwell.* Julia points of functions meromorphic on a disk, Bull. London Math. Soc., 1972, 4, № 3, 327—329.
47. *B. Cain.* Every direction of Julia direction, Proc. Amer. Math. Soc., 1974, 46, № 2, 250—252.

48. *Lo. Yang*, Chang Kuan—heo. Recherches sur le nombre des valeurs déficientes et le nombre des directions de Borel des fonctions méromorphes, Sci. sinica, 1975, 18, № 1, 21—37.
49. *D. Drasin. A. Weitzman.* On the Julia directions and Borel directions of entire functions, Proc. London Math. Soc., 1976, 32, № 2, 199—212.
50. *Lo. Yang*, Chang Kuan—heo. Sur la construction des fonctions méromorphes ayant des directions singulieres données, Sci. sinica, 1976, 19, № 4, 445—459
51. *L. H. Lange.* A non-Euclidean analogue to a theorem of H. Milloux aud its relationship to a theorem of W. Seidel, Amer. Math. Soc. Not., 1958, 5, 847—848.
52. *L. H. Lange.* Sur les cercles de remplissage non Euclidiens. Ann. Sciont. Ecole norm. super., 1960, 77, № 3, 257—280.
53. *L. H. Lange.* The existence of non-Euclidean circles de remplissage in certain subsets of the unit disc, Nagoya Math. J., 1961, 19, Oct., 41—47.
54. *В. И. Гаврилов.* О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными, Матем. сборник, 67 (109), № 3, 1965, 408—427.
55. *В. И. Гаврилов.* О поведении голоморфной функции в окрестности своей существенно особой точки, ДАН СССР, 162, № 3, 491—494.
56. *В. И. Гаврилов.* О поведении мероморфной функции в окрестности своей существенно особой точки, Изв. АН СССР, 30, № 4, 767—789.
57. *H. Joshida.* On value distribution of functions meromorphs in the whole plane, Pacif. J. Math., 1976, 64, № 1, 283—295.
58. *В. И. Гаврилов, А. Н. Канатников.* Характеристика множества $P(f)$ для мероморфных функций, ДАН СССР, 232, № 6, 1977, 1237—1240.
59. *В. И. Гаврилов, А. Н. Канатников.* Характеристика множества $M(f)$ для мероморфных функций, ДАН СССР, 233, № 1, 1977, 15—17.
60. *N. Toda.* Sur les directions de Julia et de Borel des fonctions algebroides, Nagoya Math. J., 1969, 34, 1—23.
61. *N. Toda.* Sur les directions de Julia fonctions algebroides dans $|z| < \infty$, Nagoya Math. J., 1970, 37, 53—60.
62. *P. Gauthier.* Cercles de remplissage and asymptotic behavior, Canad. J. Math., 1969, 21, № 2, 447—477.
63. *P. Gauthier.* Cercles de remplissage and asymptotic behavior along circuinous parts, Canad. J. Math., 1970, 22, № 2, 389—393.
64. *P. Gauthier. J. Hwang.* Asymptotic values along Julia rays, Canad, J. Math., 1976, 28, № 6, 1210—1215.
65. *S. Toppila.* Some remarks on exceptional values at Julia lines, Suomalais, tiedeakat. toimituks, 1970, Sar A Nol, № 456, 20, pp.
66. *S. Toppila.* Linear Picard sets for entires functions. Ann. Acad. Sci. Fenn., 1976, Ser. AI, 1, № 1, 111—123.
67. *J. Hwang.* Note on a problem of Catherine Renyi about Julia lines, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1977, 29, № 1—2, 67—68.
68. *В. И. Гаврилов, К. О. Курбанов.* О направлениях Жулиа у исключительных в смысле Жулиа функций, Вестн. Моск. ун-та, мат.-мех., № 1, 1977, 86—89.
69. *Lo. Yang.* Angular distribution and multiple values between entire functions and their derivatives, Sci. sinica, 1980, 23, № 1, 16—39.
70. *Lo. Yang.* Meromorphic functions and their derivatives, J. London Math. Soc., 1982, № 2, 288—296.
71. *П. Монтель.* Нормальные семейства аналитических функций, ОНТИ, М.—Л., 1936.
72. *G. Voliron.* Directions de Borel des fonctions meromorphes, Gauthier—Villars Paris, 1938.
73. *J. Dufresnoy.* Sur les domeines courectes par les valeurs d'une fonction meromorphe on algebroide, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 58, (3), 1941, 179—259.
74. *J. Miles.* A note on Ahlfors' theory of covering surfaces, Proc. Amer. Math. Soc., 21, № 1, 1969, 30—32.
75. *Б. О. Гыжа.* Замечание к теории Альфорса накрывающих поверхностей, Теория функций, функц. анализ и их прил., 20, 1974, 70—72.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XX, № 6, 1985 Математика

УДК 517.51

А. А. ТАЛАЛЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Введение

Вопросами единственности кратных тригонометрических рядов занимались много математиков.

В отличие от теории единственности одномерных тригонометрических рядов, которую можно считать в основном завершенной, теория единственности двойных и, в особенности, кратных тригонометрических рядов разработана далеко не полно. Приведенные ниже две теоремы, установленные в работах [2], [6], можно считать наиболее важными в указанной теореии.

Теорема 1°. (В. Шапиро [6]). Пусть задан кратный тригонометрический ряд

$$\sum a_m e^{i(m\cdot x)},\ m=(m_1,\cdots,m_k),\ x=(x_1,\cdots,x_k), \tag{1}$$

где a_m—произвольные комплексные числа, и пусть q — некоторая точка, принадлежащая $T^k=[0,2\pi)^k$.

Если выполнены условия

1) $\sum\limits_{R-1<|m|<R}|a_m|=o(R)$ при $R\to\infty$

и

2) функции

$$f^*(x)=\limsup_{t\to 0}\sum a_m e^{i(m\cdot x)-|m|t},\ f_*(x)=\liminf_{t\to 0}\sum_m a_m e^{i(m\cdot x)-|m|\cdot t}$$

конечны для всех $x\in T^k-\{q\}$ и $f_*(x)\in L_1(T^k)$, то ряд (1) является рядом Фурье функции $f_*(x)$.

Теорема 2° (Эш и Уелланд [2]). Если двойной тригонометрический ряд

$$\sum a_{nm} e^{i(nx+my)} \tag{2}$$

сходится по Прингсхейму (по всем прямоугольным частичным суммам) всюду на T^2, кроме одной точки, к конечной интегрируемой на T^2 функции $f(x, y)$, то он является рядом Фурье-Лебега функции $f(x, y)$.

В доказательстве теоремы 2° основную роль играет установленная в той же работе теорема (см. [2], теорема 2.2) о том, что, если кратный тригонометрический ряд (1) сходится по Прингсхейму на множестве положительной меры, то его коэффициенты a_m удовлетворяют условиям

$$|a_m| \leqslant M, \ \forall m=(m_1, m_2, \cdots, m_k); \ \lim_{\|m\|\to\infty} |a_m|=0, \tag{3}$$

где $\|m\|=\min(|m_1|, |m_2|, \cdots, |m_k|)$.

В двумерном случае, т. е. при $k=2$, из условия (3) вытекает, что коэффициенты a_m удовлетворяют условию 1) теоремы Шапиро и доказательство теоремы 2° при помощи сравнительно простых лемм сводится к теореме 1° (см. [2], стр. 423).

В настоящей работе исследуются некоторые вопросы единственности для двойных рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} e^{2\pi i (nx+my)}, \tag{4}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$|a_{nm}| \leqslant M, \ \forall |m| \geqslant 0, \ |n| \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\lim_{|n|\to\infty} |a_{nm}| = 0 \ \forall |m| \geqslant 0; \ \lim_{|m|\to\infty} |a_{nm}| = 0 \ \forall |n| \geqslant 0. \tag{6}$$

Ясно, что коэффициенты указанных рядов могут не удовлетворять как условию 1) теоремы Шапиро, так и условию (3), в которых взяты $k=2$.

Установленные теоремы единственности отличаются от теорем 1° и 2° тем, что в них вместо обычной сходимости всех средних Абеля или всех прямоугольных частичных сумм требуются равномерная сходимость в точке (см. определение 4.1, § 4), зависящей от точки последовательности средних Абеля

$$A_{t_n}(x) = \sum_m a_m e^{2\pi i (m\cdot x)} \cdot e^{-t_n |m|} \tag{7}$$

или же равномерную сходимость в точке (x, y), зависящей от точки последовательности прямоугольных частичных сумм

$$\sigma_{N_j M_j}(x, y) = \sum_{n=-N_j}^{N_j} \sum_{m=-M_j}^{M_j} a_{nm} e^{2\pi i (nx+my)}. \tag{8}$$

При этом исключительное множество, вне которого требуется сходимость этих подпоследовательностей, может быть любым множеством $E \subset [0,1) \times [0,1)$, состоящим из счетного числа параллельных координатным осям прямых (см. теоремы 4.2 и 4.3 в § 4). Из этих теорем, в частности, вытекает следующее

Утверждение 1. *Пусть $E \subset [0,1) \times [0,1)$ — любое замкнутое множество, состоящее из счетного числа отрезков, каждый из которых параллелен либо оси абсцисс, либо оси ординат. Пусть, далее, существует последовательность прямоугольных частичных сумм $\sigma_{N_k M_k}(x, y)$, $N_k \uparrow +\infty$, $M_k \uparrow +\infty$ при $k \to \infty$, ряда (4) с условиями (5) и (6), которая при $k \to \infty$ сходится к интегрируемой функции $f(x, y)$ равномерно внутри множества $(0,1) \times (0,1) \setminus E$ (т. е. равномерно сходится к $f(x, y)$ на любом замкнутом множестве $F \subset (0,1) \times (0,1) - E$). Тогда ряд (4) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$.*

Аналогичный факт верен и для средних Абеля, т. е. в утверждении 1 вместо подпоследовательности прямоугольных частичных сумм можно взять любую подпоследовательность $A_{t_n}(x, y)$ средних Абеля, где $t_n \to 0$.

Отметим также следующее утверждение (оно является следствием доказанной в последнем параграфе теоремы 5.1).

Утверждение 2. *Пусть тригонометрический ряд* (4) *с условиями* (5) *и* (6) *обладает тем свойством, что для некоторых возрастающих последовательностей $N_j \uparrow +\infty$, $M_j \uparrow +\infty$, $M_j > (N_j)^{20}$, имеем $a_{nm} = 0$ при $N_j < \max(|n|, |m|) < M_j$, $j \geqslant 1$.*

Тогда, если $f(x, y)$ — конечная интегрируемая на $[0,1)^2$ функция и

$$\lim_{j \to \infty} \sigma_{N_j N_j}(x, y) = f(x, y) \tag{9}$$

всюду вне некоторого множества $E \subset [0, 1)^2$, состоящего из счетного числа параллельных координатным осям прямых, то

$$a_{nm} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, e^{2\pi i n x} \cdot e^{2\pi i m y}\, dx dy. \tag{10}$$

В этом утверждении степень 20 можно уменьшить, но здесь важно то обстоятельство, что существует возрастающая функция $\psi(z) \uparrow \uparrow +\infty$ при $z \to +\infty$ (в частности $\psi(z) = z^{20}$), для которой из существования чисел $N_j \uparrow +\infty$, $M_j \uparrow +\infty$ таких, что $M_j > \psi(N_j)$ и из того, что $a_{nm}=0$, при $N_j < \max(|n|, |m|) < M_j$, мы можем из выполнения (9) получить формулы (10). Аналогичные утверждения верны и для последовательностей круговых частичных сумм, а также для последовательностей $A_{t_j}(x, y)$, $t_j \downarrow 0$, средних Абеля.

Как утверждения 1 и 2, так и более общие теоремы 4.1—4.4 и 5.1 являются следствиями доказанной в § 3 основной теоремы 3.1 настоящей статьи.

Эта теорема фактически утверждает, что если тригонометрический ряд (4) с условиями (5), (6) суммируется к интегрируемой функции методом, аналогичным обычному методу Лебега, в котором, однако, производные отношения взяты в узлах случайных двоичных решеток, то ряд (4) является рядом Фурье—Лебега своей суммы. Аналогичная теорема несколько другим методом, представляющем некоторый интерес, доказана отдельно в § 2 для одномерного случая (см. теорему 2.1). При доказательстве этих результатов используются некоторые теоремы единственности рядов по системе Хаара.

§ 1. О некоторых теоремах единственности рядов по системе Хаара

Сначала напомним определение системы Хаара $\{\chi_k(x)\}$. Полагается

$$\chi_1(x) \equiv 1,\ x \in [0,1],\quad \chi_2(x) = 1,\ x \in [0,1/2),\quad \chi_2(x) = -1,\ x \in (1/2,1]$$

и если $$2^n + 1 \leqslant k \leqslant 2^n,\ n \geqslant 1,\ \text{то}$$

$$X_k(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & (2k-2)\,2^{-n-1} < x < (2k-1)\,2^{-n-1} \\ -\sqrt{2^n}, & (2k-1)\,2^{-n-1} < x < 2k\,2^{-n-1} \\ 0, & x \,\overline{\in}\, [2^{-n}\cdot(k-1),\ 2^{-n}\cdot k]. \end{cases} \qquad (1.1)$$

В точках разрыва функция $X_k(x)$ полагается равной среднему арифметическому ее правого и левого пределов.

В работе [1] была установлена

Теорема 1. *Пусть ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \qquad (1.2)$$

удовлетворяет условиям:

А) *Для любой точки* $x_0 \in [0,1]$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{\max|X_{n_k}|} = 0, \qquad (1.3)$$

где $n_k = n_k(x_0)$ — все те номера, для которых $X_{n_k}(x_0) \neq 0$.

В) Некоторая подпоследовательность частичных сумм $S_{m_k}(x)$ ряда (1.2) сходится к конечной суммируемой функции $f(x)$ всюду на [0,1], кроме, быть может, счетного множества точек.

Тогда ряд (1.2) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$, т. е.

$$a_n = \int_0^1 f(x)\, X_n(x)\, dx. \qquad (1.4)$$

В дальнейшем в ряде работ (см., напр., [4], [8]) были установлены теоремы, представляющие обобщения этой теоремы и были получены также ее аналоги в многомерном случае (см. [3], [6]). В работе [3] установлен точный аналог теоремы 1 в двумерном (фактически и в многомерном) случае при идентичном с условием А) требовании на поведение коэффициентов, а именно, требуется, чтобы коэффициенты двойного ряда Хаара

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, X_i(x)\, X_k(y) \qquad (1.5)$$

удовлетворяли условиям:

для каждого фиксированного k и $x_0 \in [0,1]$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{i_\nu k}}{\max|X_{i_\nu}|} = 0, \qquad (1.6)$$

где i_ν — все те номера, для которых $X_{i_\nu}(x_0) \neq 0$;

для каждого фиксированного i и $y_0 \in [0,1]$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{ik_\nu}}{\max|X_{k_\nu}|} = 0, \qquad (1.7)$$

где k_ν — все те номера, для которых $X_{k_\nu}(y_0) \neq 0$.

Для применения системы Хаара в рассмотренных в настоящей статье вопросах единственности тригонометрических рядов нам нужны следующие несколько усиленные варианты теоремы 1 и ее двумерного аналога, доказанного в [3].

Теорема 1.1. *Пусть некоторая подпоследовательность $S_{n_k}(x)$ частичных сумм ряда* (1.2) *по мере на* [0,1] *сходится к суммируемой функции $f(x)$ и всюду на* [0,1], *кроме, быть может, счетного числа точек, выполняется условие*

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{n_k}(x)| < +\infty. \tag{1.8}$$

Пусть, далее, коэффициенты ряда (1.2) *удовлетворяют условию:*

A_1) *Для любой возрастающей последовательности натуральных чисел i_k, $k>1$, $i_1 \geqslant 3$, удовлетворяющей условию*

$$\Delta_{i_k} \supset \Delta_{i_{k+1}},\ \mu(\Delta_{i_{k+1}}) = 1/2\cdot\mu(\Delta_{i_k}),\ k \geqslant 1, \tag{1.9}$$

где Δ_{i_k} — носитель функции $X_{i_k}(x)$, выполняется равенство

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{|a_{i_k}|}{\max|X_{i_k}|} = 0. \tag{1.10}$$

Тогда ряд (1.2) *является рядом Фурье функции $f(x)$, т. е. коэффициенты a_n определяются равенствами* (1.4).

Теорема 1.2. *Пусть некоторая подпоследовательность $S_{n_k m_k}(x, y)$ $n_k \uparrow +\infty, m_k \uparrow +\infty$ прямоугольных частичных сумм двойного ряда* (1.5) *по системе Хаара сходится по мере на единичном квадрате* $[0, 1]\times[0, 1]$ *к суммируемой функции $f(x, y)$ и всюду на этом квадрате, кроме точек некоторого множества, состоящего из не более, чем счетного числа единичных отрезков, параллельных координатным осям, выполняется условие*

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{n_k m_k}(x, y)| < +\infty. \tag{1.11}$$

Пусть, далее, коэффициенты этого ряда удовлетворяют условию:

A_2) *Если $X_{i_\nu}(x)$, $i_1 \geqslant 3$ — такие функции Хаара, что их носители Δ_{i_ν} удовлетворяют условию*

$$\Delta_{i_\nu} \supset \Delta_{i_{\nu+1}},\ \mu(\Delta_{i_{\nu+1}}) = 1/2\cdot\mu(\Delta_{i_\nu}), \tag{1.12}$$

то из последовательности $\{i_\nu\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{l_s\}$, для которой

$$\lim_{s\to\infty} \frac{a_{l_s k}}{\max|X_{l_s}|} = 0 \tag{1.13}$$

для любого $k \geqslant 1$, и то же самое свойство имеет место относительно функций $X_k(y)$.

Тогда ряд (1.5) *является рядом Фурье функции $f(x)$ т. е.*

$$a_{ik} = \int_0^1\int_0^1 f(x, y)\, X_i(x)\, X_k(y)\, dx\, dy\ \ i, k > 1. \tag{1.14}$$

Доказательство этих теорем по существу не отличается от доказательства теоремы 1° работы [1], но мы считаем необходимым привести здесь доказательство теоремы 1.2. Оно основано на следующей лемме.

Лемма 1.1. *Пусть коэффициенты ряда* (1.5) *удовлетворяют условию* A_2) *и его частичная сумма* $S_{n_0 m_0}(x, y)$ *на некотором из своих прямоугольников постоянства* $\Delta' \times \Delta''$ *отлична от нуля. Тогда для любой точки* $x_0 \in [0,1]$ *существует* $n > n_0$ *такое, что частичная сумма* $S_{n m_0}$ *на некотором прямоугольнике постоянства* $\Delta''' \times \Delta''$, $\Delta''' \subset \Delta'$ *тоже отлична от нуля и при этом замыкание* $\bar{\Delta}''' \times \bar{\Delta}''$ *этого прямоугольника не имеет общих точек с отрезком* $\{(x_0, y), 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Доказательство. Заметим, что Δ' — один из тех n_0 штук максимальных интервалов, представляющих разбиение отрезка [0, 1], на каждом из которых постоянны все функции $X_i(x)$, $1 < i \leqslant n_0$, а интервал Δ'' таковым является для функций $X_k(y)$, $1 \leqslant k \leqslant m_0$. Все прямоугольники постоянства суммы $S_{n_0 m_0}(x, y)$ получаются декартовыми произведениями интервалов первой группы с интервалами второй группы. Этим фактом в дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться.

Для определенности допустим, что

$$S_{n_0 m_0}(x, y) = d > 0, \ (x, y) \in \Delta' \times \Delta''. \tag{1.15}$$

Обозначим

$$\sum_{k=1}^{m_0} a_{ik} X_k(y) = d_i(y), \ i \geqslant n_0 \tag{1.16}$$

и заметим, что $d_i(y)$ постоянны на прямоугольнике $\Delta' \times \Delta''$.

Пусть $X_{i_{\nu_0}}(x)$ — та функция, носителем которой является интервал Δ', а $\Delta'_{i_{\nu_0}}$ — та половина Δ', для которой

$$d_{i_{\nu_0}}(y) X_{i_{\nu_0}}(x) \geqslant 0, \ (x, y) \in \Delta'_{i_{\nu_0}} \times \Delta''. \tag{1.17}$$

Обозначив через $X_{i_{\nu_0+1}}(x)$ функцию с носителем $\Delta'_{i_{\nu_0}}$, возьмем ту половину $\Delta'_{i_{\nu_0+1}}$ интервала $\Delta'_{i_{\nu_0}}$, для которой

$$d_{i_{\nu_0+1}}(y) X_{i_{\nu_0+1}}(x) \geqslant 0, \ (x, y) \in \Delta'_{i_{\nu_0+1}} \times \Delta''. \tag{1.18}$$

Продолжая эти рассуждения, мы определим последовательности интервалов Δ'_{i_ν}, $\nu > \nu_0$

$$\Delta' \supset \Delta_{i_{\nu_0}}, \ \Delta'_{i_\nu} \supset \Delta'_{i_{\nu+1}}, \ \mu(\Delta'_{i_{\nu+1}}) = 1/2 \cdot \mu(\Delta'_{i_\nu}), \tag{1.19}$$

и функций $X_{i_\nu}(x)$ с носителями $\Delta'_{i_{\nu-1}}$, $\nu \geqslant \nu_0$

$\Delta'_{i_{\nu_0}-1} = \Delta'$ такие, что

$$d_{i_\nu}(y) X_{i_\nu}(x) \geqslant 0, \ (x, y) \in \Delta'_{i_\nu} \times \Delta'', \ \nu \geqslant \nu_0. \tag{1.20}$$

Обозначим

$$\overset{*}{\Delta}_{i_\nu} = \Delta'_{i_{\nu-1}} \setminus \Delta'_{i_\nu}, \ \nu \geqslant \nu_0, \ \overset{*}{\Delta}_{i_{\nu_0}} = \Delta' \setminus \Delta'_{i_{\nu_0}}. \tag{1.21}$$

Имеем

$$d_{i_\nu}(y) X_{i_\nu}(x) \leqslant 0, \ (x, y) \in \overset{*}{\Delta}_{i_\nu} \times \Delta'', \ \nu \geqslant \nu_0. \tag{1.22}$$

Предположение, что для всех $l \geqslant \nu_0$ выполнено равенство

$$d+\sum_{\nu=\nu_0}^{l} d_{l_\nu}(y)\,X_{l_\nu}(x)=0,\ (x,\,y)\in \Delta^{*}_{l_l}\times\Delta'', \tag{1.23}$$

приводит к противоречию. В самом деле, так как $d_{l_\nu}(y)\,X_{l_\nu}(x)$ постоянны на прямоугольниках $\Delta_{l_\nu}^{*}\times\Delta''$, $\Delta_{l_\nu}^{*}\times\Delta''$, $\nu>\nu_0$, то из (1.21), (1.23) и из определения функций $X_{l_\nu}(x)$ вытекает, что

$$|d_{l_\nu}(y)|\cdot\max|X_{l_\nu}(x)|=d\,2^{\nu-\nu_0+1},\ y\in\Delta'',\quad \nu\geqslant\nu_0. \tag{1.24}$$

Согласно условия A_2) существует подпоследовательность $\{i_{\nu_j}\}\subset\{i_\nu\}_{\nu=\nu_0}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty}\frac{a_{l_{\nu_j}k}}{\max|X_{l_{\nu_j}}|}=0,\ \forall\,k>1. \tag{1.25}$$

С другой стороны, из (1.24) и (1.16) следует, что для каждого $\nu\geqslant\nu_0$ существует число k_ν, $1\leqslant k_\nu\leqslant m_0$, для которого

$$|a_{l_\nu k_\nu}X_{k_\nu}(y)|\cdot\max|X_{l_\nu}|\geqslant\frac{1}{m_0}\,2^{\nu-\nu_0+1},\ y\in\Delta'' \tag{1.26}$$

и, следовательно,

$$\frac{|a_{l_\nu k_\nu}|}{\max|X_{l_\nu}|}\geqslant C\cdot 2^{\nu-\nu_0+1}/2^{\nu}=C/2^{\nu_0-1}, \tag{1.27}$$

где C — положительная константа, зависящая только от m_0 и n_0. Применяя (1.27) к индексам i_{ν_j} и учитывая, что при этом $1\leqslant k_{\nu_j}\leqslant m_0$, мы определим число k, $1<k\leqslant m_0$, для которого неравенство

$$\frac{|a_{l_{\nu_j}k}|}{\max|X_{l_{\nu_j}}|}\geqslant\frac{C}{2^{\nu_0-1}} \tag{1.28}$$

выполняется для бесконечного числа индексов i_{ν_j}. Это противоречит равенству (1.25).

Пусть $l\geqslant\nu_0$ — наименьшее число, для которого равенство (1.23) не выполняется. Тогда сумма

$$\sum_{i=1}^{l_l}\sum_{k=1}^{m_0}a_{ik}\,X_i(x)\,X_k(y), \tag{1.29}$$

совпадающая с левой частью (1.23) на прямоугольниках $\Delta^{*}_{l_l}\times\Delta''$ и $\Delta^{*}_{l_l}\times\Delta''$ на этих прямоугольниках, которые вместе с тем являются ее прямоугольниками постоянства, принимает отличные от нуля значения. Если замыкание одного из этих прямоугольников не пересекается с отрезком $\{(x_0,\,y),\ 0<y\leqslant1\}$, т. е. $x_0\notin\overline{\Delta^{*}_{l_l}}$ или $x_0\notin\overline{\Delta^{*}_{l_l}}$, то сумма (1.26) удовлетворяет требованиям леммы. Если же x_0 принадлежит замыканиям обоих интервалов, то тогда x_0 является их общим концом. В этом случае, проведя все вышеприведенные рассуждения, взяв в качестве Δ' один из этих двух интервалов, мы найдем внутри него другой интервал Δ''' такой, что замыкание прямоугольника $\Delta'''\times\Delta''$, являющегося прямоугольником постоянства некоторой частичной суммы

$S_{nm_0}(x, y)$, $n > i_l$, уже не пересекается с отрезком $\{x_0, y); 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, и $S_{nm_0}(x, y)$ отлична от нуля на $\Delta''' \times \Delta''$.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть ряд (1.5) удовлетворяет условиям теоремы 1.2, а ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} \mathrm{X}_i(x) \mathrm{X}_k(y) \tag{1.30}$$

является рядом Фурье функции $f(x, y)$. Легко видеть, что коэффициенты этого ряда удовлетворяют условиям

$$\lim_{i\to\infty} \frac{c_{ik}}{\max|\mathrm{X}_i|} = 0, \ \forall k \geqslant 1, \ \lim_{k\to\infty} \frac{c_{ik}}{\max|\mathrm{X}_k|} = 0, \ \forall i > 1, \tag{1.31}$$

и поэтому коэффициенты ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \mathrm{X}_i(x) \mathrm{X}_k(y), \ b_{ik} = a_{ik} - c_{ik} \tag{1.32}$$

удовлетворяют условию A_2). Мы должны доказать, что $b_{ik} = 0$. Обозначим через $S_{nm}(x, y)$, $\sigma_{nm}(x, y)$ и $A_{nm}(x, y)$, соответственно, частичные суммы рядов (1.5), (1.30) и (1.32). Обозначим также, для краткости, $[x] = \{(x, y); 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $[y] = \{(x; y); 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Рассмотрим последовательности $[x_k]$, $[y_k]$, содержащие все отрезки, указанные в формулировке теоремы 1.2, а также все отрезки, проходящие через двоично рациональные точки.

Пусть не все b_{ik} равны нулю. Тогда, очевидно, существует прямоугольная частичная сумма $A_{n_0m_0}(x, y)$ ряда (1.32), которая на некотором прямоугольнике постоянства $\Delta^{(1)} \times \Delta^{(2)}$ отлична от нуля. Применяя лемму, мы можем определить частичную сумму $A_{nm_0}(x, y)$, $n > m_0$ и ее прямоугольник постоянства $\Delta' \times \Delta^{(2)} \subset \Delta^{(1)} \times \Delta^{(2)}$, такие, что

$$[x_1] \cap \overline{\Delta}' \times \overline{\Delta}^{(2)} = \theta, \ A_{nm_0}(x, y) \neq 0, \ (x, y) \in \Delta' \times \Delta^{(2)}. \tag{1.33}$$

Второй раз применяя лемму к сумме $A_{nm_0}(x, y)$, мы можем определить сумму $A_{nm}(x, y)$, $m > m_0$, и прямоугольник постоянства этой суммы $\Delta' \times \Delta''$, такие, что

$$\Delta' \times \Delta'' \subset \Delta' \times \Delta^{(2)}, \ [y_1] \cap \overline{\Delta}' \times \overline{\Delta}'' = \theta, \tag{1.34}$$

$$A_{nm}(x, y) = d \neq 0, \ (x, y) \in \Delta' \times \Delta''. \tag{1.35}$$

Рассмотрим теперь частичные суммы $S_{n_km_k}$, $\sigma_{n_km_k}$, $A_{n_km_k}$, $n_k > n$, $m_k > m$ на прямоугольнике $\Delta' \times \Delta''$. Заметим, что прямоугольник $\Delta' \times \Delta''$ разбивается на конечное число прямоугольников, на каждом из которых эти частичные суммы принимают постоянные значения, при этом

$$\iint\limits_{\Delta' \times \Delta''} \mathrm{X}_i(x) \mathrm{X}_j(y) = 0, \ i > n \text{ или } j > m, \tag{1.36}$$

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\Delta' \times \Delta''} |\sigma_{n_km_k}(x, y) - f(x, y)| \, dxdy = 0. \tag{1.37}$$

Из (1.37) следует, что частичные суммы $\sigma_{n_k m_k}$, $n_k > n$, $m_k > m$ на прямоугольнике $\Delta' \times \Delta''$ имеют равностепенно абсалютно непрерывные интегралы. Теперь покажем, что для любого $M_1 > 0$ и целого $N > 0$ существует $k_1 > N$ и прямоугольник постоянства $\dot{\Delta}'_{k_1} \times \dot{\Delta}''_{k_1} \subset \Delta' \times \Delta''$ суммы $S_{n_{k_1} m_{k_1}}$ такие, что

$$|S_{n_{k_1} m_{k_1}}(x, y)| > M_1 + |\sigma_{n_{k_1} m_{k_1}}(x, y)|, \ (x, y) \in \Delta'_{k_1} \times \Delta''_{k_1}. \tag{1.38}$$

В самом деле, в обратном случае частичные суммы $S_{n_k m_k}$ тоже имели бы равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на $\Delta' \times \Delta''$ и в силу того, что они сходятся к $f(x, y)$ по мере на этом прямоугольнике, имело бы место равенство

$$\lim_{k \to \infty} \iint_{\Delta' \times \Delta''} |A_{n_k m_k}(x, y)| \, dxdy = 0. \tag{1.39}$$

Это противоречит равенствам (1.25) и (1.36), ибо из них следует, что

$$\iint_{\Delta' \times \Delta''} A_{n_k m_k}(x, y) \, dxdy = c \neq 0, \text{ если } n_k > n \text{ или } m_k > m. \tag{1.40}$$

Таким образом, для любых $x_1 \subset [0,1]$, $y_1 \in [0,1]$, $M_1 > 0$ и натурального N можно определить k_1 и прямоугольник постоянства суммы $S_{n_{k_1} m_{k_1}}$, такие, что

$$[x_1] \cap \overline{\Delta}'_{k_1} \times \overline{\Delta}''_{k_1} = \theta, \ [y_1] \cap \overline{\Delta}'_{k_1} \times \overline{\Delta}''_{k_1} = \theta, \tag{1.41}$$

$$|S_{n_{k_1} m_{k_1}}(x, y)| > M_1, \ (x, y) \in \Delta'_{k_1} \times \Delta''_{k_1}, \tag{1.42}$$

$$A_{n_{k_1} m_{k_1}}(x, y) = d_1 \neq 0, \ (x, y) \in \Delta'_{k_1} \times \Delta''_{k_1}. \tag{1.43}$$

Последнее условие позволяет путем последовательного повторения вышеприведенных рассуждений определить последовательность $k_i \uparrow +\infty$ и прямоугольники $\Delta'_{k_i} \times \Delta''_{k_i}$, $i > 1$, такие, что

$$[x_i] \cap \overline{\Delta}'_{k_i} \times \overline{\Delta}''_{k_i} = \theta, \ [y_i] \cap \overline{\Delta}'_{k_i} \times \overline{\Delta}''_{k_i} = \theta, \ i > 1, \tag{1.44}$$

$$\Delta'_{k_i} \times \Delta''_{k_i} \supset \Delta'_{k_{i+1}} \times \Delta''_{k_{i+1}}, \ i \geqslant 1, \tag{1.45}$$

$$|S_{n_{k_i} m_{k_i}}(x, y)| > i, \ (x, y) \in \Delta'_{k_i} \times \Delta''_{k_i}, \ i \geqslant 1. \tag{1.46}$$

Из этих условий следует, что общая точка (x_0, y_0) замкнутых прямоугольников $\overline{\Delta}'_{k_i} \times \overline{\Delta}''_{k_i}$, которая является также пересечением открытых прямоугольников $\Delta'_{k_i} \times \Delta''_{k_i}$, не принадлежит ни одному из отрезков $[x_k]$, $[y_k]$, $k > 1$, и в этой точке выполняется равенство

$$\limsup_{k \to \infty} |S_{n_k m_k}(x_0, y_0)| = +\infty. \tag{1.47}$$

Равенство (1.47) противоречит условию (1.10) теоремы 1.1, следовательно, все $b_{ik} = 0$. Теорема 1.2 доказана.

§ 2. О восстановлении суммы тригонометрического ряда с помощью ее производной по случайным сетям

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx, \tag{2.1}$$

где

$$a_n = o\,(1/n),\ b_n = o\,(1/n) \tag{2.2}$$

и обозначим через $F(x)$ его сумму, определенную почти всюду на $R_1 = (-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим также случайную двоичную сеть

$$t + i/2^k,\ 0 \leqslant i < 2^k,\ k > 1,\ t \in R_1. \tag{2.3}$$

Ясно, что найдется множество

$$e_0 \subset R_1,\ \mu(e_0) = 0 \tag{2.4}$$

такое, что при $t \overline{\in} e_0$ определены все значения $F(t + i2^{-k})$, $0 < i \leqslant 2^k$, $k \geqslant 0$, и имеют место равенства

$$F(t + i2^{-k}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n\,(t + i/2^k) + b_n \sin 2\pi n\,(t + i/2^k). \tag{2.5}$$

Обозначим

$$E_0 = [0,1] \setminus e_0, \tag{2.6}$$

$$\Phi_k(t, x) = 2^k\,[F(t + i2^{-k}) - F(t + (i-1)\,2^{-k}),\ x \in (t + i - 1/2^k,\ t + i/2^k), \tag{2.7}$$

где $t \overline{\in} e_0$

В настоящем параграфе доказывается.

Теорема 2.1. *Пусть $F(x)$ — сумма ряда (2.1), удовлетворяющего условиям (2.2), и для почти всех $t \in [0,1]$ существует последовательность $k_\nu = k_\nu(t)$ такая, что последовательность $\Phi_{k_\nu}(t, x)$ сходится по мере на отрезке $[t, t+1]$ к $f(x)$, где $f(x)$ — периодическая, с периодом 1, суммируемая на $[0,1]$ функция.*

Пусть, далее, для почти всех $t \in [0,1]$, всюду на отрезке $[t, t+1]$, кроме, быть может счетного числа точек $x \in [t, t+1]$ выполняется условие

$$\lim_{\nu \to \infty} \sup |\Phi_{k_\nu}(t, x)| < +\infty. \tag{2.8}$$

Тогда

$$F(x) = C + \int_0^x f(t)\,dt \tag{2.9}$$

почти всюду на $[0,1]$.

Доказательство. Пусть $\chi_0^{(0)}(t, x)$, $\chi_1^{(0)}(t, x)$. $\chi_k^{(n)}(t, x)$, $n > 1$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$ — функции Хаара, определенные на отрезке $[t, t+1]$, т. е.

$$\chi_0^{(0)}(t, x) \equiv 1,\ x \in [t, t+1],\ \chi_1^{(0)}(t, x) = 1,\ x \in [t, t+1/2),$$

$$\chi_1^{(0)}(t, x) = -1,\ x \in (t + 1/2,\ t+1]. \tag{2.10}$$

$$X_k^{(n)}(t, x) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & x \in (t + (2k-2)\,2^{-n-1},\ t + (2k-1)\,2^{-n-1}) \\ -\sqrt{2^n}, & x \in (t + (2k-1)\,2^{-n-1},\ t + 2k\,2^{-n-1}) \\ 0, & x \,\overline{\in}\, [t + (k-1)\,2^{-n-1},\ t + k\,2^{-n-1}]. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Обозначим

$$c_0^{(0)}(t) = F(t+1) - F(t),\ c_1^{(0)}(t) = F(t+1/2) - F(t) - \\ -[F(t+1) - F(t+1/2)], \qquad (2.12)$$

$$c_k^{(n)}(t) = \sqrt{2^n}\,[2F(t + {}^{2k-1}/2^{n+1}) - F(t + {}^{2k}/2^{n+1}) - F(t + {}^{2k-2}/2^{n+1})], \qquad (2.13)$$

при $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, и рассмотрим ряд

$$c_0^{(0)}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_k^{(n)}(t)\, X_k^{(n)}(t, x),\ x \in [t, t+1]. \qquad (2.14)$$

Легко видеть, что

$$S_{2^n}(t, x) = c_0^{(0)}(t) + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^l} c_k^{(l)}(t)\, X_k^{(l)}(t, x) = \\ = 2^n\,[F(t + k2^{-n}) - F(t + (k-1)\,2^{-n})] \qquad (2.15)$$

при $x \in (t + (k-1)\,2^{-n},\ t + k2^{-n})$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, $n \geqslant 0$.

Покажем, что для почти всех $t \in [0,1]$ коэффициенты $c_k^{(n)}(t)$ ряда (2.14) удовлетворяют условию A_1). Из (2.5) и (2.13) легко следует, что при $t \in E_0$

$$\frac{c_k^{(m)}(t)}{\sqrt{2^m}} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\,\alpha_{nm}^{(k)} + b_n\,\beta_{nm}^{(k)}) \cos 2\pi nt + (b_n\,\alpha_{nm}^{(k)} - a_n\,\beta_{nm}^{(k)}) \sin 2\pi nt, \qquad (2.16)$$

где

$$\alpha_{nm}^{(k)} = 2\cos 2\pi n\, 2k - 1/2^{m+1} - \cos 2\pi n\, 2k - 2/2^{m+1} - \\ - \cos 2\pi n\, 2k/2^{m+1}, \qquad (2.17)$$

$$\beta_{nm}^{(k)} = 2\sin 2\pi n\, 2k - 1/2^{m+1} - \sin 2\pi n\, 2k - 2/2^{m+1} - \\ - \sin 2\pi n\, 2k/2^{m+1}. \qquad (2.18)$$

Ясно, что

$$|\alpha_{nm}^{(k)}| < 4,\ |\beta_{nm}^{(k)}| < 4,\ 1 \leqslant k \leqslant 2^m,\ n > 0,\ m \geqslant 0 \qquad (2.19)$$

и

$$|\alpha_{nm}^{(k)}| \leqslant 4n^2/2^{2m},\ |\beta_{nm}^{(k)}| \leqslant 4n^2/2^{2m},\ 1 \leqslant k \leqslant 2^m,\ 1 \leqslant n \leqslant 2^m,\ m \geqslant 1. \qquad (2.20)$$

Из (2.16), (2.19) и (2.20) следует

$$\int_0^1 \left(\frac{c_k^{(m)}(t)}{\sqrt{2^m}}\right)^2 dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} (a_n\,\alpha_{nm}^{(k)} + b_n\,\beta_{nm}^{(k)})^2 + (b_n\,\alpha_{nm}^{(k)}\, a_n\,\beta_{nm}^{(k)})^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\,(|\alpha_{nm}^{(n)}|^2 + |\beta_{nm}^{(k)}|^2) \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{n=1}^{2^m}(a_n^2+b_n^2)\frac{32\,n^4}{2^{4m}}+4\sum_{n=2^m+1}^{\infty}32\cdot(a_n^2+b_n^2). \qquad (2.2\ )$$

Так как согласно (2.2)

$$a_n=\frac{\alpha_n}{n},\ b_n=\frac{\beta_n}{n},\ \alpha_n\to 0,\ \beta_n\to 0 \quad \text{при } n\to\infty, \qquad (2.22)$$

из (2.21) получаем

$$\int_0^1\left(\frac{c_k^{(m)}(t)}{\sqrt{2^m}}\right)^2 dt\leqslant c_1\sum_{n=1}^{2^m}(\alpha_n^2+\beta_n^2)\,n^2/2^{4m}+c_2\sum_{n=2^m+1}^{\infty}\frac{\alpha_n^2+\beta_n^2}{n^2}\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_m/2^m,\ 1\leqslant k<2^m,\ m\geqslant 1, \qquad (2.23)$$

где $\varepsilon_m\to 0$ при $m\to\infty$.

Следовательно

$$\int_0^1\sum_{k=1}^{2^m}\left(\frac{c_k^{(m)}(t)}{\sqrt{2^m}}\right)^2 dt\leqslant\varepsilon_m,\ \varepsilon_m\to 0 \text{ при } m\to\infty. \qquad (2.24)$$

Возьмем подпоследовательность $\varepsilon_{m_l}\ l\geqslant 1$ такую, что

$$\varepsilon_{m_l}>0,\ \sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon_{m_l}<+\infty, \qquad (2.25)$$

тогда ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{m_l}}\left(\frac{c_k^{(m_l)}(t)}{\sqrt{2^{m_l}}}\right)^2$$

почти всюду сходится и, следовательно, найдется множество $E_1\subset E_0$ такое, что

$$\mu(E_1)=\mu(E_0)=1,\ E_1\subset[0,1] \qquad (2.26)$$

и

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{2^{m_l}}\left(\frac{c_k^{(m_l)}(t)}{\sqrt{2^{m_l}}}\right)^2=0,\ t\in E_1. \qquad (2.27)$$

Из (2.27) немедленно следует, что для любого $t\in E_1$ коэффициенты ряда (2.14) по системе Хаара, определенной на отрезке $[t,\ t+1]$, на этом отрезке удовлетворяют условию A_1). С другой стороны, согласно условиям теоремы 2.1, существует множество $E_2\subset E_1$, $\mu(E_2)=\mu(E_1)$, такое, что для любого $t\in E_2$ некоторая последовательность частичных сумм $S_{2k_\nu}(t,x)$ ряда (2.15) сходится по мере на отрезке $[t,\ t+1]$ к $f(x)$, и, кроме того, для любого $t\in E_2$ имеет место условие (см. условие (2.8) и равенства (2.7), (2.15))

$$\limsup_{\nu\to\infty}|S_{2k_\nu}(t,x)|<+\infty, \qquad (2.28)$$

выполненное всюду, кроме, быть может, счетного множества точек $x\in[t,\ t+1]$. Согласно теореме 1.1, из вышеуказанного следует, что для любого $t\in E_2$ ряд (2.14) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе Хаара $\chi_0^{(0)}(t, x)$, $\chi_k^n(t, x)$, $n > 0$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, на отрезке $[t, t+1]$. Отсюда и из равенств (2.15) следует, что для почти всех $t \in [0,1]$ имеют место равенства

$$F(t+1) - F(t) = \int_t^{t+1} f(x)\,dx;\quad F(t+k/2^n) - F(t+k-1/2^n) = \int_{t+k-1/2^n}^{t+k/2^n} f(x)\,dx \tag{2.29}$$

для всех $n \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$.

Обозначим

$$\Phi(t) = F(t) - \int_0^t f(x)\,dx. \tag{2.30}$$

Так как

$$\Phi(t+1) - \Phi(t) = 0,\ \Phi(t + i/2^k) - \Phi(t + i - 1/2^k) = 0,\ k > 1,\ 1 \leqslant i \leqslant 2^k \tag{2.31}$$

почти всюду на $[0, 1]$, то почти всюду на $[0, 1]$

$$\Phi(t) = \Phi(t + i/2^k),\ k \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant 2^k. \tag{2.32}$$

Из (2.32) легко следует, что $\Phi(t) = \text{cons}\,t$ почти всюду на $[0, 1]$. В самом деле, в противном случае существуют лежащие на $[0, 1]$ множества положительной меры E_1, E_2 такие, что

$$\inf_{t \in E_1} \Phi(t) > \sup_{t \in E_2} \Phi(t). \tag{2.33}$$

Возьмем интервалы $\Delta_1 = ((i-1)\,2^{-k}, i2^{-k})$, $\Delta_2 = ((j-1)\,2^{-k}, j2^{-k})$ такие, что

$$\mu(\Delta_1 \cap E_2) > 3/4 \cdot 2^{-k},\ \mu(\Delta_2 \cap E_2) > 3/4 \cdot 2^{-k}. \tag{2.34}$$

Допуская, что $j > i$, почти для всех $t \in E_1$ имеем

$$\Phi(t) = \Phi\left(t + \frac{j-i}{2^k}\right). \tag{2.35}$$

С другой стороны, из (2.34) следует, что для некоторого множества $A \subset E_1$, $\mu(A) > 0$ имеем $t + (j-i)\,2^{-k} \in E_2$ при $t \in A$ и, следовательно, согласно (2.33)

$$\Phi(t) > \Phi\left(t + \frac{j-i}{2^k}\right),\ t \in A, \tag{2.36}$$

что противоречит равенству (2.35). Теорема 2.1 доказана. Эту теорему можно интерпретировать как теорему единственности тригонометрических рядов. Рассмотрим тригонометрический ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx,\ a_n \to 0,\ b \to 0 \tag{2.37}$$

и обозначим

$$\psi(x) = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi n} \sin 2\pi nx - \frac{b_n}{2\pi n} \cos 2\pi nx. \tag{2.38}$$

Функция $\psi(x)$ определена почти всюду и поэтому существует множество e_0, $\mu(e_0) = 0$, такое, что при $t \overline{\in} e_0$ определены величины $\psi(t + i2^{-k})$, $k \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant 2^k$. Рассмотрим функции

$$\psi_k(t, x) = 2^k[\psi(t + i2^{-k}) - \psi(t + (i-1)2^{-k})],$$
$$x \in (t + (i-1)2^{-k}, \ t + i2^{-k}). \qquad (2.39)$$

Обозначив, для краткости

$$A_n(x) = a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx, \qquad (2.40)$$

$$B_n(x) = a_n \sin 2\pi nx - b_n \cos 2\pi nx, \qquad (2.41)$$

имеем для любого $t \overline{\in} e_0$

$$\frac{\psi(t+i2^{-k}) - \psi(t+(i-1)2^{-k})}{2^{-k}} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(t+i2^{-k}) - B_n(t+(i-1)2^{-k})}{2\pi n \cdot 2^{-k}}. \qquad (2.42)$$

Введем

Определение 2.1. Будем говорить, что тригонометрический ряд (2.37) суммируется по мере к функции $\varphi(x)$ методом Лебега относительно случайной подсети $\{t + i2^{-k_\nu}\}$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_\nu < \cdots$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{k_\nu}$, если для почти всех $t \in [0,1]$ последовательность $f_{k_\nu}(t, x)$ сходится по мере к $\psi(x)$ на отрезке $[t, t+1]$.

Из теоремы 2.1 следует

Теорема 2.2. *Пусть тригонометрический ряд* (2.37) *суммируется по мере к периодической, с периодом 1, суммируемой функции* $\varphi(x)$ *методом Лебега относительно случайной подсети* $\{t + i2^{-k_\nu}\}$, *и пусть для почти всех* $t \in [0,1]$ *всюду на отрезке* $t \leqslant x \leqslant t+1$, *кроме, быть может, счетного числа точек* $x \in [t, t+1]$, *выполняется условие*

$$\limsup_{\nu\to\infty} |\psi_{k_\nu}(t, x)| < +\infty. \qquad (2.43)$$

Тогда ряд (2.37) *является рядом Фурье—Лебега функции* $\varphi(x)$.

Доказательство. Так как $a_n, b_n \to 0$ при $n \to \infty$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin 2\pi nx - b_n \cos 2\pi nx}{2\pi n} \qquad (2.44)$$

почти всюду сходится к периодической интегрируемой функции $F(x)$.

Обозначив

$$\Phi_k(t, x) = \frac{F(t+i2^{-k}) - F(t+(i-1)2^{-k})}{2^{-k}}; \ x \in (t+i-1/2^k, t+i/2^k), \qquad (2.45)$$

$$f(x) = \varphi(x) - a_0 \qquad (2.46)$$

и учитывая равенства

$$\Phi_k(t, x) = \psi_k(t, x) - a_0, \qquad (2.47)$$

мы видим, что ряд (2.44) и функции (2.46), (2.47) удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Следовательно, почти всюду на $[0, 1]$

$$F(x) = c + \int_0^x f(t)\, dt. \qquad (2.48)$$

Из (2.48) следует, что $F(x)$ периодическая, с периодом 1, непрерывная функция, ибо в противном случае она имела бы разрывы первого рода в точках $x = n$ и это противоречило бы условиям

$$\frac{a_n}{2\pi n} = o(1/n), \frac{l_n}{2\pi n} = o(1/n). \tag{2.49}$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 0. \tag{2.50}$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{a_n}{2\cdot 2\pi n} = \int_0^1 F(x)\sin 2\pi nx dx, \quad \frac{b_n}{2\cdot 2\pi n.} = -\int_0^1 F(x)\cos 2\pi nx dx. \tag{2.51}$$

Учитывая (2.48), (2.50) и интегрируя по частям выражения (2.51), получим

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx dx,\ b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx dx,\ n > 1. \tag{2.52}$$

Отсюда, согласно (2.46) и (2.50), следует, что коэффициенты a_n, $n \geqslant 0$, b_n, $n \geqslant 1$, являются коэффициентами Фурье—Лебега функции $\varphi(x)$ по системе 1, $\cos 2\pi nx$, $\sin 2\pi nx$, $n \geqslant 1$. Теорема 2.2 доказана.

§ 3. О восстановлении коэффициентов двойных тригонометрических рядов, суммируемых методом Лебега относительно двоичных случайных сетей

Рассмотрим двойной тригонометрический ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{mn} e^{2\pi inx} e^{2\pi imy},\ a_{nm} = \overline{a}_{-n-m}, \tag{3.1}$$

где

$$\lim_{|n|\to\infty} a_{mn} = 0\ \forall\, |m| \geqslant 0, \tag{3.2}$$

$$\lim_{|m|\to\infty} a_{nm} = 0,\ \forall\, |n| \geqslant 0 \tag{3.3}$$

и

$$|a_{nm}| \leqslant M,\ |n| \geqslant 0,\ |m| \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Обозначим

$$\sigma_{NN}(x, y) = \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=-N}^{N} a_{nm} e^{2\pi inx} e^{2\pi imy} \tag{3.5}$$

и положим

$$F(x, y) = a_{00}\, xy + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{a_{n0}\cdot y\, e^{2\pi inx}}{2\pi in} +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{a_{0m}\, x\, e^{2\pi imy}}{2\pi im} - \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{a_{nm}\, e^{2\pi inx}\cdot e^{2\pi imy}}{4\pi^2 nm}, \tag{3.6}$$

где правая часть (3.6) получена почленным интегрированием по x и y ряда (3.1) и Σ' означает, что в сумме не участвует член с индексом 0. Заметим, что из (3.4) следует сходимость в метрике $L_2(T^2)$ рядов правой части (3.6) и в дальнейшем фиксируя одну из сумм $F(x, y)$ и рассматривая случайную двоичную сеть $(t+p2^{-k}, \tau+q2^{-l})$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $1 \leqslant p \leqslant 2^k$, $1 \leqslant q \leqslant 2^l$, значения $F(t+p2^{-k}, \tau+q2^{-l})$ можно считать определенными для почти всех (t, τ) одновременно для всех k, l и p, q.

Пусть

$$\mu=2^k+p,\ \nu=2^l+q,\ k\geqslant 0,\ l\geqslant 0,\ 1\leqslant p\leqslant 2^k,\ 1\leqslant q\leqslant 2^l. \tag{3.7}$$

Обозначим

$$\Delta_\mu=(t+(p-1)2^{-k},\ t+p2^{-k}),\ \delta_\nu=(\tau+(q-1)2^{-l},\ \tau+q2^{-l}), \tag{3.8}$$

$$\Delta_\mu\delta_\nu F=F(t+p2^{-k}, \tau+q2^{-l})+F(t+(p-1)2^{-k}, \tau+(q-1)2^{-l})-$$
$$-F(t+p2^{-k}, \tau+(q-1)2^{-l})-F(t+(p-1)2^{-k}, \tau+q2^{-l}). \tag{3.9}$$

Почти для всех точек (t, τ) на квадратах $[t, t+1]\times[\tau, \tau+1]$ можно определить функции

$$\Phi_{kl}(t, \tau, x, y)=\frac{\Delta_\mu\delta_\nu F}{2^{-k}2^{-l}},\ \text{при}\ (x, y)\in\Delta_\mu\times\delta_\nu. \tag{3.10}$$

Определение 3.1. Будем говорить, что тригонометрический ряд (3.1) суммируется по мере к функции $f(x, y)$ методом Лебега относительно случайной подсети $(t+p2^{-k_j}, \tau+q2^{-l_j})$, $1\leqslant p\leqslant 2^{k_j}$, $1\leqslant q\leqslant 2^{l_j}$, $k_j\uparrow+\infty$, $l_j\uparrow+\infty$ при $j\uparrow+\infty$, если для почти всех (t, τ) последовательность $\Phi_{k_j l_j}(t, \tau, x, y)$ сходится к $f(x, y)$ по мере на квадрате $[t, t+1]\times[\tau, \tau+1]$.

Теорема 3.1. *Пусть тригонометрический ряд* (3.1), *удовлетворяющий условиям* (3.2) — (3.4), *суммируется по мере к периодической, с периодом 1 по обеим переменным, функции* $f(x, y)$ *методом Лебега относительно случайной подсети* $(t+p2^{-k_j}, \tau+p2^{-l_j})$. *Пусть, далее, для почти всех* (t, τ), $(t, \tau)\in[0,1]\times[0,1]$ *условие*

$$\limsup_{j\to\infty}|\Phi_{k_j l_j}(t, \tau, x, y)|<+\infty \tag{3.11}$$

выполнено во всех точках $(x, y)\in[t, t+1]\times[\tau, \tau+1]$, *не принадлежащих некоторому множеству* $E_{t\tau}$, $E_{t\tau}\subset[t, t+1]\times[\tau, \tau+1]$, *состоящему из не более чем счетного числа отрезков, параллельных координатным осям.*

Тогда ряд (3.1) *является рядом Фурье функции* $f(x, y)$.

Доказательство. Обозначим через $X_n(\xi, \eta)$, $n>1$ систему Хаара, определенную на отрезке $[\xi, \xi+1]$ (см. (2.13)), т. е. $X_n(\xi, \eta)=X_n(\xi-\eta)$, $\xi\leqslant\eta\leqslant\xi+1$, и рассмотрим двойную систему Хаара $X_\mu(t, x)\,X_\nu(\tau, y)$, $\mu\geqslant 1$, $\nu>1$, определенную на квадрате $[t, t+1]\times\times[\tau, \tau+1]$.

Если μ и ν представлены в виде

$$\mu=2^{k-1}+p,\ \nu=2^{l-1}+q,\ k\geqslant 1,\ l>1,\ 1\leqslant p\leqslant 2^{k-1},\ 1\leqslant q\leqslant 2^{l-1}, \tag{3.12}$$

то носителями функций $X_\mu(t, x)$ и $X_\nu(\tau, y)$ будут интервалы

$$\Delta_\mu=[t+(p-1)\,2^{1-k},\ t+p2^{1-k}],\ \delta_\nu=[\tau+(q-1)\,2^{1-l},\ \tau+q2^{1-l}]. \quad (3.13)$$

При $\mu>1$ обозначаем через Δ_μ^+ и Δ_μ^- интервалы, на которых $X_\mu(t, x)$ принимает, соответственно, положительное и отрицательное значения. Тогда

$$\Delta_\mu^+=(t+(2p-2)\,2^{-k},\ t+(2p-1)\,2^{-k}),\ \Delta_\mu^-=(t+(2p-1)\,2^{-k},\ t+2p2^{-k}), \quad (3.14)$$

$$\delta_\nu^+=(\tau+(2q-2)\,2^{-l},\ \tau+(2q-1)\,2^{-l}),\ \delta_\nu^-=(\tau+(2q-1)\,2^{-l},\ \tau+2q\,2^{-l}). \quad (3.15)$$

Когда $\mu=1$, имеем $\Delta_1=(t, t+1)$ и считаем $\Delta_1^+=\Delta_1$, $\Delta_1^-=\varnothing$. В дальнейшем полагается

$$\Delta_\mu\varphi=\varphi(t+p2^{1-k})-\varphi(t+(p-1)\,2^{1-k}),\ \Delta_\mu^{(2)}\varphi=\Delta_\mu^+\varphi-\Delta_\mu^-\varphi, \quad (3.16)$$

при $\mu=1$, $\nu=1$ полагается $\Delta_1^-\varphi=0$, $\delta_1^-\varphi=0$, и следовательно, $\Delta_1^{(2)}\varphi=\varphi(t+1)-\varphi(t)$, $\delta_1^{(2)}\varphi=\varphi(\tau+1)-\varphi(\tau)$.

Рассмотрим частичную сумму

$$S_{2^k 2^l}^{(N,N)}(t, \tau, x, y)=\sum_{\mu=1}^{2^k}\sum_{\nu=1}^{2^l} c_{\mu\nu}^{(N,N)}(t, \tau)\,X_\mu(t, x)\,X_\nu(\tau, y) \quad (3.17)$$

разложения суммы $\sigma_{NN}(x, y)$ по двойной системе Хаара $X_\mu(t, x)\,X_\nu\times\times(\tau, y)$, $\mu, \nu\geqslant 1$ на квадрате $[t, t+1]\times[\tau, \tau+1]$.

Имеем

$$c_{\mu\nu}^{(N,N)}(t, \tau)=\int_t^{t+1}\int_\tau^{\tau+1}\sigma_{NN}(x, y)\,X_\mu(t, x)\,X_\nu(\tau, y)\,dxdy=$$

$$=\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}a_{nm}\int_t^{t+1}\int_\tau^{\tau+1}e^{2\pi i(nx+my)}\,X_\mu(t, x)\,X_\nu(\tau, y)\,dxdy. \quad (3.18)$$

Обозначим

$$a_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau)=\int_t^{t+1}\int_\tau^{\tau+1}e^{2\pi i(nx+my)}\cdot X_\mu(t, x)\,X_\nu(\tau, y)\,dxdy. \quad (3.19)$$

Как легко подсчитать $a_{11}^{(00)}=1$, $a_{\mu\nu}^{(00)}=0$ при $\mu\neq 1$ или $\nu\neq 1$, $a_{1\nu}^{(nm)}=0$ при $|n|\geqslant 1$, $a_{\mu 1}^{(nm)}=0$ при $|m|>1$ и

$$a_{\mu 1}^{(n0)}(t, \tau)=\frac{\max|X_\mu|}{2\pi in}\,\Delta_\mu^{(2)}(e^{2\pi inx}),\ |n|>1,\ \mu\geqslant 1;\ a_{\mu\nu}^{(n,0)}(t, \tau)=0,\ \nu\geqslant 2,\ \mu\geqslant 1, \quad (3.20)$$

$$a_{1\nu}^{(0m)}(t, \tau)=\frac{\max|X_\nu|}{2\pi im}\,\delta_\nu^{(2)}(e^{2\pi imy}),\ |m|\geqslant 1,\ \nu\geqslant 1;\ a_{\mu\nu}^{(0m)}(t, \tau)=0,\ \mu\geqslant 2,\ \nu\geqslant 1, \quad (3.21)$$

$$a_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau)=-\frac{1}{4\pi^2 nm}\cdot\Delta_\mu^{(2)}(e^{2\pi inx})\cdot\delta_\nu^{(2)}(e^{2\pi imy})\max|X_\mu|\cdot\max|X_\nu|=$$

$$= -\frac{\sqrt{2^{k-1}\cdot 2^{l-1}}}{4\pi^2 nm}\Delta_\mu^{(2)}(e^{2\pi inx})\cdot\delta_\nu^{(2)}(e^{2\pi imy}),\ |m|,|n|\geqslant 1,\ \mu,\nu\geqslant 1, \tag{3.22}$$

где

$$\Delta_\mu^{(2)}e^{2\pi inx} = 2e^{2\pi in(t+2p-1/2^k)} - e^{2\pi in(t+2p-2/2^k)} - e^{2\pi in(t+2p/2^k)},\ \mu>2 \tag{3.23}$$

$$\delta_\mu^{(2)}e^{2\pi imy} = 2e^{2\pi im(\tau+2q-1/2^l)} - e^{2\pi im(\tau+2q-2/2^l)} - e^{2\pi im(\tau+2q/2^l)},\ \nu>2. \tag{3.24}$$

Эти формулы сохраняются также в случаях $\mu=1$ или $\nu=1$, так как $\Delta_1^{(2)}e^{2\pi inx}=0, |n|\geqslant 0, \delta_1^{(2)}e^{2\pi imy}=0, |m|\geqslant 0$ и, с другой стороны, $\alpha_{1\nu}^{(nm)}\times\times(t,\tau)=0, |n|\geqslant 1, \alpha_{\mu 1}^{(nm)}(t,\tau)=0, |m|>1$.

Заметим также, что

$$\Delta_\mu^{(2)}e^{2\pi inx} = \left(2e^{2\pi in\cdot\frac{2p-1}{2^k}} - e^{2\pi in\frac{2p-2}{2^k}} - e^{2\pi in\frac{2p}{2^k}}\right)e^{2\pi int}, \tag{3.25}$$

$$\delta_\nu^{(2)}e^{2\pi imy} = \left(2e^{2\pi im\frac{2q-1}{2^l}} - e^{2\pi im\frac{2q-2}{2^l}} - e^{2\pi im\frac{2q}{2^l}}\right)e^{2\pi im\tau}. \tag{3.26}$$

Обозначим через $c_{\mu\nu}(t,\tau)$ предел в метрике $L_2([0,1]^2)$ выражения (3.14), т. е.

$$c_{\mu\nu}(t,\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nm}\,\alpha_{\mu\nu}^{(nm)}(t,\tau), \tag{3.27}$$

где правая часть сходится в метрике L_2, согласно (3.20)—(3.26).

Заметим, что согласно формуле частных сумм ряда по двойной системе Хаара, имеем

$$S_{2^k\,2^l}^{(N,N)}(t,\tau,x,y) = 2^k\cdot 2^l\int\!\!\int_{\delta_\mu\times\delta_\nu}\sigma_{NN}(x,y)\,dxdy =$$

$$= 2^k\,2^l\,\Delta_\mu\,\delta_\nu\,A_{NN},\ (x,y)\in\Delta_\mu\times\delta_\nu, \tag{3.28}$$

где A_{NN} — частичная сумма ряда (3.6),

$$\mu = 2^k+p,\ \nu = 2^l+q,\ 1\leqslant p\leqslant 2^k,\ 1\leqslant q\leqslant 2^l,\ k\geqslant 0,\ l>0, \tag{3.29}$$

$$\Delta_\mu = (t+(p-1)\,2^{-k},\ t+p\,2^{-k}),\ \delta_\nu = (\tau+(q-1)\,2^{-l},\ \tau+q\,2^{-l}). \tag{3.30}$$

Как легко видеть

$$2^k\,2^l\,\Delta_\mu\,\delta_\nu\,A_{NN} = a_{00} + 2^k\sum_{n=-N}^{N}{}'\frac{a_{n0}\,\Delta_\mu(e^{2\pi inx})}{2\pi in} +$$

$$+ 2^l\sum_{m=-N}^{N}{}'\frac{a_{0m}\,\delta_\nu(e^{2\pi imy})}{2\pi im} -$$

$$-\frac{2^k\,2^l}{4\pi^2}\sum_{n=-N}^{N}{}'\sum_{m=-N}^{N}{}'\frac{a_{nm}}{nm}\cdot\Delta_\mu(e^{2\pi inx})\cdot\delta_\nu(e^{2\pi imy}), \tag{3.31}$$

где

$$\Delta_\mu(e^{2\pi inx}) = (e^{2\pi inp2^{-k}} - e^{2\pi in(p-1)2^{-k}})\,e^{2\pi int}, \tag{3.32}$$

$$\delta_\nu(e^{2\pi imy}) = (e^{2\pi imq2^{-l}} - e^{2\pi im(q-1)2^{-l}})\,e^{2\pi im\tau}. \tag{3.33}$$

Из (3.31)—(3.33) следует, что для произвольных μ, ν правая часть (3.28) сходится в метрике L_2 по переменной $(t, \tau) \in [0, 1] \times [0, 1]$ к значению $2^{k+l} \Delta_\mu \delta_\nu F$.

Переходя к пределу при $N \to \infty$ также в левой части (3.28) и учитывая (3.17), (3.18), (3.19) и (3.27), получаем

$$S_{2^k 2^l}(t, \tau, x, y) = \sum_{\mu=1}^{2^k} \sum_{\nu=1}^{2^l} c_{\mu\nu}(t, \tau)\, \mathrm{X}_\mu(t, x)\, \mathrm{X}_\nu(\tau, y) =$$

$$= 2^{k+l} \Delta_\mu \delta_\nu F = 2^k \cdot 2^l \cdot [F(t + p2^{-k}, \tau + q2^{-l}) + F(t + (p-1)2^{-k},$$
$$\tau + (q-1)2^{-l}) + F(t + p2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l}) -$$
$$- F(t + p2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l})] \tag{3.34}$$

при $(x, y) \in (t + (p-1)2^{-k}, t + p2^{-k}) \times (\tau + (q-1)2^{-l}, \tau + q2^{-l})$.

Все величины, участвующие в равенстве (3.34), можно считать определенными для всех $(t, \tau) \in E_0$, где $E_0 \subset [0,1] \times [0,1]$ имеет плоскую меру $mE_0 = 1$, и для всех $k > 0$, $l \geqslant 0$, $1 \leqslant p < 2^k$, $1 \leqslant q \leqslant 2^l$ одновременно. При этом, как легко видеть, путем предельного перехода при $N \to \infty$ в (3.31) в метрике $L_2([0,1]^2)$ относительно переменной (t, τ) имеет место равенство

$$2^{k+l}[F(t + p2^{-k}, \tau + q2^{-l}) + F(t + (p-1)2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l}) -$$
$$- F(t + p2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l} - F(t + (p-1)2^{-k}, \tau + q2^{-l})] =$$
$$= a_{00} + 2^k \sum_n{}' \frac{a_{n0}\,(e^{2\pi i p 2^{-k}} - e^{2\pi i (p-1) 2^{-k}})\, e^{2\pi i n t}}{2\pi i n} +$$
$$+ 2^l \sum_m{}' \frac{a_{0m}}{2\pi i m}\,(e^{2\pi i m q 2^{-l}} - e^{2\pi i m (q-1) 2^{-l}})\, e^{2\pi i m \tau} - \frac{2^{k+l}}{4\pi^2} \times$$
$$\times \sum_{n, m}{}' \frac{a_{nm}}{nm}\,(e^{2\pi i n p 2^{-k}} - e^{2\pi i n (p-1) 2^{-k}}) \cdot (e^{2\pi i m q 2^{-l}} - e^{2\pi i m (q-1) 2^{-l}}) \times$$
$$\times e^{2\pi i (nt + m\tau)}, \tag{3.35}$$

которое тоже можно считать выполненным почти для всех (t, τ), $(t, \tau) \in [0,1]^2$ одновременно для всех k, l, p, q.

Для большей ясности заметим, что для некоторой подпоследовательности $\{N_j\}$ соответствующие пределы в выражениях (3.18), (3.28) и (3.31), где вместо N взято N_j существуют для почти всех $(t, \tau) \in [0,1] \times [0,1]$ одновременно для всех $k > 0$, $l \geqslant 0$, $1 \leqslant p \leqslant 2^k$, $1 \leqslant q \leqslant 2^l$.

Лемма 3.1. *Пусть тригонометрический ряд* (3.1) *удовлетворяет условиям* (3.2), (3.3), *и коэффициенты* $c_{\mu\nu}(t, \tau)$ *ряда по двойной системе Хаара* $\mathrm{X}_\mu(t, x)$, $\mathrm{X}_\nu(\tau, y)$, $\mu \geqslant 1$, $\nu > 1$,

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\mu\nu}(t, \tau)\, \mathrm{X}_\mu(t, x)\, \mathrm{X}_\nu(\tau, y) \tag{3.36}$$

определены равенствами (3.27) *и* (3.20)—(3.26).

Тогда существует множество $E \subset [0,1] \times [0,1]$, $mE = 1$ *такое что для любой точки* $(t, \tau) \in E$ *частичные суммы* $S_{2^k 2^l}(t, \tau, x, y)$

ряда (3.36) *удовлетворяют равенству* (3.34) *и, вместе с тем, для некоторых последовательностей* $n_l \uparrow +\infty$, $m_l \uparrow +\infty$ *имеют место равенства*

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{\mu=2^{n_l-1}+1}^{2^{n_l}} \left(\frac{c_{\mu\nu}(t,\tau)}{\max|X_\mu|}\right)^2 = 0, \ (t,\tau)\in E, \ \nu\geqslant 1, \tag{3.37}$$

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{\nu=2^{m_l-1}+1}^{2^{m_l}} \left(\frac{c_{\mu\nu}(t,\tau)}{\max|X_\nu|}\right)^2 = 0, \ (t,\tau)\in E, \ \mu\geqslant 1. \tag{3.38}$$

Доказательство. Выполнение равенства (3.34) на некотором множестве $E_0\subset[0,1]\times[0,1]$, $mE_0=1$ доказано. Чтобы доказать лемму нужно определить множество $E\subset E_0$, $mE=1$ такое, что для всех $(t,\tau)\in E$ выполняются условия (3.37) и (3.38). Из (3.27), (3.20)—(3.26) имеем

$$\frac{c_{\mu 1}(t,\tau)}{\max|X_\mu|\cdot\max|X_1|} = \frac{1}{\max|X_\mu|}\cdot \sum_n{}' a_{n0}\,\alpha_{\mu_1}^{(n0)}(t,\tau) =$$

$$= \sum_n{}' \frac{a_{n0}\cdot\beta_{n\mu}}{2\pi i n}\, e^{2\pi i n t}, \tag{3.39}$$

$$\frac{c_{\mu\nu}(t,\tau)}{\max|X_\mu|\cdot\max|X_\nu|} = -\sum_n{}' \sum_m{}' \frac{a_{nm}\,\beta_{n\mu}\,\beta_{m\nu}}{4\pi^2 nm}\cdot e^{2\pi i(nt+m\tau)}, \tag{3.40}$$

где $\mu\geqslant 2$, $\nu\geqslant 2$ и

$$\beta_{n\mu} = 2\,e^{2\pi i n(2p-1)2^{-k}} - e^{2\pi i n(2p-2)2^{-k}} - e^{2\pi i n 2p\cdot 2^{-k}}, \tag{3.41}$$

а число μ представлено в виде (3.12).

Как легко видеть, для чисел μ и ν, представленных равенствами (3.12), имеют место неравенства

$$|\beta_{n\mu}|\leqslant A\cdot n^2\cdot 2^{-2k}, \ |n|\leqslant 2^k, \ |\beta_{n\mu}|\leqslant 4, \ |n|\geqslant 0, \tag{3.42}$$

$$|\beta_{m\nu}|\leqslant Am^2\cdot 2^{-2l}, \ |m|\leqslant 2^l; \ |\beta_{m\nu}|< 4, \ |m|\geqslant 0. \tag{3.43}$$

Из (3.39) и (3.43) следует, что если $2^{k-1}<\mu\leqslant 2^k$, то

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{c_{\mu 1}(t,\tau)}{\max|X_\mu|\cdot\max|X_1|}\right)^2 dt\,d\tau = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_{n0}|^2\cdot|\beta_{n\mu}|^2}{n^2}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{A^2 m_0}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{[2^{k/2}]}\frac{n^2}{2^{4k}} + \frac{A^2\cdot M_k}{2\pi^2}\sum_{n=[2^{k/2}]+1}^{2^k}\frac{n^2}{2^{4k}} + \frac{36M_k}{2\pi^2}\sum_{n=2^k+1}^{\infty} 1/n^2, \tag{3.44}$$

где $M_k=\max|a_{n0}|^2$ при $n\geqslant 2^{k/2}$; $M_0=\max|a_{n0}|^2$, $|n_0|\geqslant 0$.

Так как $M_k\to 0$, при $k\to\infty$ получаем

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{c_{\mu 1}(t,\tau)}{\max|X_\mu|}\right)^2 dt\,d\tau \leqslant \varepsilon_k\cdot 2^{-k}, \ 2^{k-1}<\mu\leqslant 2^k, \tag{3.45}$$

где ε_k зависит только от k и $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$.

Следовательно

$$\int_0^1\int_0^1 \sum_{\mu=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(\frac{c_{\mu 1}(t,\tau)}{\max|X_\mu|}\right)^2 dt d\tau \leqslant \varepsilon_k^{(1)}, \ k \geqslant 1, \tag{3.47}$$

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{(1)} = 0. \tag{3.48}$$

Покажем теперь, что аналогичная оценка верна также для всех $\nu \geqslant 2$, т. е.

$$\int_0^1\int_0^1 {\sum_{\mu=2^{k-1}+1}^{2^k}}' \left(\frac{c_{\mu\nu}(t,\tau)}{\max|X_\mu|}\right)^2 dt d\tau \leqslant \varepsilon_k^{(\nu)}, \ \nu \geqslant 1, \tag{3.49}$$

где $\varepsilon_k^{(\nu)} \to 0$ при $k \to \infty$.

Из (3.40), полагая числа μ и ν представленными равенствами (3.12) и применяя (3.42), (3.43), получаем

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{c_{\mu\nu}(t,\tau)}{\max|X_\mu|\cdot\max|X_\nu|}\right)^2 dt d\tau = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{c_{\mu\nu}(t,\tau)}{\sqrt{2^{k-1}}\ \sqrt{2^{l-1}}}\right)^2 dt d\tau =$$

$$= \frac{1}{16\pi^4} \sum_n{}' \sum_m{}' \frac{|a_{nm}|^2 |\beta_{n\mu}|^2 \cdot |\beta_{m\nu}|^2}{n^2 m^2} \leqslant \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 =$$

$$= C \cdot {\sum_{n=-2^k}^{2^k}}' {\sum_{m=-2^k}^{2^k}}' \frac{|a_{nm}|^2 \cdot n^4}{n^2 m^2 2^{4k}} + C \cdot \sum_{|n|<2^k} \sum_{|m|>2^k} \frac{|a_{nm}|^2}{n^2 m^2} +$$

$$+ C {\sum_{|n|<2^k}}' \sum_{|m|>2^k} \frac{|a_{nm}|^2}{n^2 m^2} + C \sum_{|m|<2^k} \sum_{|n|>2^k} \frac{|a_{nm}|^2}{n^2 m^2}, \tag{3.50}$$

где C — абсолютная постоянная.

Сначала оценим первую сумму Σ_1. Имеем

$$\Sigma_1 < B_1 + B_2 + B_3 + B_4 =$$

$$= C 2^{-4k} {\sum_{|n|<2^{k/2}}}' {\sum_{|m|<2^{k/2}}}' \frac{|a_{nm}|^2 \cdot n^2}{m^2} + C 2^{-4k} \sum_{|n|=[2^{k/2}]}^{2^k} \sum_{|m|=[2^{k/2}]}^{2k} \frac{|a_{nm}|^2 n^2}{m^2} +$$

$$+ C 2^{-4k} \cdot {\sum_{|n|<2^{k/2}}}' \sum_{|m|=[2^{k/2}]}^{2^k} \frac{|a_{nm}|^2 \cdot n^2}{m^2} + C 2^{-4k} \sum_{|m|<2^{k/2}} \sum_{|n|=[2^{k/2}]}^{2^k} \frac{|a_{nm}|^2 \cdot n^2}{m^2}. \tag{3.51}$$

Обозначим $M_1 = \sup|a_{nm}|^2$. Пусть $\varepsilon > 0$ и p_0 выбрано так, что

$$\sum_{|m|>p_0} \frac{M_1}{m^2} < \varepsilon. \tag{3.52}$$

Имеем

$$B_1 \leqslant C M_1 2^{-4k} {\sum_{|n|<2^{k/2}}}' n^2 {\sum_{|m|<2^{k/2}}}' \frac{1}{m^2} \leqslant C_1 \cdot 2^{-5k/2}, \tag{3.53}$$

$$B_2 \leqslant C M_1 2^{-4k} \sum_{|n|=[2^{k/2}]}^{2^k} n^2 \sum_{|m|=[2^{k/2}]}^{2^k} \frac{1}{m^2} \leqslant c_2 2^{-3k/2}, \tag{3.54}$$

$$B_3 \leqslant C M_1 2^{-4k} {\sum_{|n|<2^{k/2}}}' n^2 \sum_{|m|=[2^{k/2}]}^{2^k} \frac{1}{m^2} \leqslant C_3 2^{-3k}. \tag{3.55}$$

Обозначим

$$\varepsilon_k = \max\left\{\max_{|m|\leqslant p_0,\ |n|\geqslant 2^{k/2}} |a_{nm}|^2,\ \max_{|n|\leqslant p_0,\ |m|\geqslant 2^{k/2}} |a_{nm}|^2\right\} \tag{3.56}$$

и заметим, что согласно (3.2), (3.3), $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Если $2^{k/2} > p_0$, то имеем

$$B_4 \leqslant C\cdot\varepsilon_k 2^{-4k}\cdot \sum_{|m|\leqslant p_0}{}' \sum_{|n|=[2^{k/2}]}^{2^k} \frac{n^2}{m^2} + CM_1 2^{-4k} \sum_{|m|=p_0}^{[2^{k/2}]} \sum_{|n|=[2^{k/2}]}^{2^k} \frac{n^2}{m^2} \leqslant$$

$$\leqslant C_4\varepsilon_k\cdot 2^{-k} + C_4\varepsilon\cdot 2^{-k} = c_4(\varepsilon+\varepsilon_k)\,2^{-k}. \tag{3.57}$$

С другой стороны

$$\Sigma_2 \leqslant C\cdot M_1 \sum_{|n|>2^k} \sum_{|m|>2^k} \frac{1}{n^2 m^2} \leqslant C_\varepsilon\cdot 2^{-2k}, \tag{3.58}$$

$$\Sigma_3 \leqslant C\cdot\varepsilon_k \sum_{|n|<p_0}{}' \sum_{|m|>2^k} \frac{1}{n^2 m^2} + CM_1 \sum_{|n|=p_0}^{2^k} \sum_{|m|>2^k} \frac{1}{n^2 m^2} <$$

$$< C_7\varepsilon_k 2^{-k} + c_7\cdot\varepsilon\cdot 2^{-k} = C_7(\varepsilon+\varepsilon_k)\,2^{-k}, \tag{3.59}$$

$$\Sigma_4 \leqslant C\varepsilon_k \sum_{|m|<p_0} \sum_{|n|>2^k} \frac{1}{n^2 m^2} + CM_1 \sum_{|m|=p_0}^{2^k} \sum_{|n|>2^k} \frac{1}{n^2 m^2} \leqslant$$

$$\leqslant C_8\varepsilon_k 2^{-k} + C_8\varepsilon\cdot 2^{-k} = C_8(\varepsilon+\varepsilon_k)\,2^{-k}. \tag{3.60}$$

Заметив, что C_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$ — абсолютные константы, ε — произвольное наперед заданное положительное число и $\varepsilon_k \to 0$ при фиксированном ε, из неравенств (3.50)—(3.60) заключаем, что для любого $\eta > 0$ существует k_0 такое, что при $k > k_0$ имеет место неравенство

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \left(\frac{c_{\mu\nu}(t,\tau)}{\max|X_\mu|}\right)^2 dt\,d\tau < \eta\cdot\max|X_\nu|^2\cdot 2^{-k} \tag{3.61}$$

для всех μ, $2^{k-1} < \mu \leqslant 2^k$ и для любого фиксированного ν, $2^{l-1} < \nu \leqslant 2^l$.

Из (3.61) немедленно следует выполнение неравенств (3.49). Исходя из (3.47) можно определить последовательность $k_l^{(1)} \uparrow +\infty$ и множество $E_1 \subset [0,1]\times[0,1]$, $mE_1 = 1$ такие, что

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{\mu=2^{k_{l-1}^{(1)}}+1}^{2^{k_l^{(1)}}} \left(\frac{c_{\mu 1}(t,\tau)}{\max|X_\mu|}\right)^2 = 0,\quad (t,\tau)\in E_1. \tag{3.62}$$

В самом деле, для этого достаточно, используя (3.47) и (3.48), $\{k_l^{(1)}\}_{l=1}^\infty$ выбрать таким образом, чтобы сходился ряд

$$\sum_{l=1}^\infty \int_0^1\!\!\int_0^1 \sum_{\mu=2^{k_{l-1}^{(1)}}+1}^{2^{k_l^{(1)}}} \left(\frac{c_{\mu 1}(t,\tau)}{\max|X_\mu|}\right)^2 dt\,d\tau < +\infty. \tag{3.63}$$

Допустим определены последовательности $\{k_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$ и множества E_n, $1\leqslant n\leqslant j-1$ такие, что $k_i^{(n)}<k_{i+1}^{(n)}$, $i\geqslant 1$, $1\leqslant n\leqslant j-1$

$$\{k_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}\subset\{k_i^{(n-1)}\}_{i=1}^{\infty},\ 1<n\leqslant j-1, \tag{3.64}$$

$$E_n\subset[0,1]\times[0,1],\ mE_n=1 \tag{3.65}$$

и выполняются условия

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{\mu=2^{k_{i-1}^{(n)}}+1}^{2^{k_i^{(n)}}}\left(\frac{c_{\mu n}(t,\tau)}{\max|X_\mu|}\right)^2=0,\ (t,\tau)\in E_n \tag{3.66}$$

для всех n, $1\leqslant n\leqslant j-1$.

Используя (3.49) можно выбрать подпоследовательность $\{k_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{k_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}\subset\{k_i^{(j-1)}\}_{i=1}^{\infty}$, таким образом, что $k_i^{(j)}<k_{i+1}^{(j)}$, $i>1$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1\sum_{\mu=2^{k_{i-1}^{(j)}}+1}^{2^{k_i^{(j)}}}\left(\frac{c_{\mu j}(t,\tau)}{\max|X_\mu|}\right)^2 dtd\tau<+\infty. \tag{3.67}$$

Тогда найдется множество $E_j\subset[0,1]\times[0,1]$, $mE_j=1$ такое, что

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{\mu=2^{k_{i-1}^{(j)}}+1}^{2^{k_i^{(j)}}}\left(\frac{c_{\mu j}(t,\tau)}{\max|X_\mu|}\right)^2=0,\ (t,\tau)\in E_j. \tag{3.68}$$

Итак, по индукции можно определить счетное число возрастающих последовательностей $\{k_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$, $j=1,2,\cdots$ и множества $E_j\subset[0,1]\times[0,1]$, $mE_j=1$ такие, что

$$\{k_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}\subset\{k_i^{(j-1)}\}_{i=1}^{\infty},\ k_i^{(j)}<k_{i+1}^{(j)},\ i\geqslant 1,\ j\geqslant 2, \tag{3.69}$$

и условие (3.68) выполнено для всех j.

Полагая

$$E'=\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j, \tag{3.70}$$

$$n_i=k_i^{(i)},\ i=1,2,\cdots, \tag{3.71}$$

из (3.68)—(3.71) получим

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{\mu=2^{n_{i-1}}+1}^{2^{n_i}}\left(\frac{c_{\mu\nu}(t,\tau)}{\max|X_\mu|}\right)^2=0,\ (t,\tau)\in E' \tag{3.72}$$

для всех $\nu\geqslant 1$, где, согласно (3.70), $mE'=1$.

Повторяя вышеприведенные рассуждения относительно ν, когда индекс μ считается фиксированным, можно определить последовательность m_i и множество $E''\subset[0,1]\times[0,1]$, $mE''=1$, такие, что

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{\nu=2^{m_{i-1}}+1}^{2^{m_i}}\left(\frac{c_{\mu\nu}(t,\tau)}{\max|X_\nu|}\right)^2=0,\ (t,\tau)\in E'' \tag{3.73}$$

для всех $\mu\geqslant 1$.

Тогда на множестве $E=E_0\cap E'\cap E''$ будут выполнены равенства (3.37) и (3.38). Тем самым лемма 3.1 доказана.

Переходя к доказательству теоремы 3.1 заметим, что выполнение условий этой теоремы, согласно лемме 3.1 (см. также равенство (3.34) и (3.10)), означает, что подпоследовательность

$$S_{2^{k_j}2^{l_j}}(t, \tau, x, y)=\Phi_{k_j l_j}(t, \tau, x, y),\ (x, y)\in[t, t+1]\times[\tau, \tau+1] \tag{3.74}$$

частичных сумм ряда (3.36) сходится по мере на квадрате $[t, t+1]\times\times[\tau, \tau+1]$ к интегрируемой по Лебегу функции $f(x, y)$ для любого $(t, \tau)\in E$, $mE=1$, и что для любого $(t, \tau)\in E$ выполнено

$$\limsup_{j\to\infty}|S_{2^{k_j}2^{l_j}}(t, \tau, x, y)|<+\infty \tag{3.75}$$

всюду на $[t, t+1]\times[\tau, \tau+1]$, кроме, быть может, точек (x, y), принадлежащих некоторому множеству, состоящему из не более чем счетного множества отрезков, каждый из которых параллелен одной из координатных осей. Можно считать, что на том же множестве E выполнены условия (3.37) и (3.38) леммы 3.1, из которых, очевидно, следует, что ряд (3.36) для каждого фиксированного $(t, \tau)\subset E$ удовлетворяет условию A_2) теоремы 1.2. Таким образом, оказывается, что ряд (3.36) для каждого фиксированного $(t, \tau)\in E$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2, рассмотренным для двойной системы

$$X_\mu(t, x)\, X_\nu(\tau, y),\ \mu\geqslant 1,\ \nu\geqslant 1.$$

Из теоремы 1.2 следует, что

$$c_{\mu\nu}(t, \tau)=\int_t^{t+1}\int_\tau^{\tau+1} f(x, y)\, X_\mu(t, x)\, X_\nu(\tau, y)\, dxdy \tag{3.76}$$

для всех $\mu, \nu\geqslant 1$, $(t, \tau)\in E$.

Пусть

$$b_{nm}=\int_0^1\int_0^1 f(x, y)\, e^{-2\pi i(nx+my)}\, dxdy \tag{3.77}$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$, фигурирующей в формулировке теоремы 3.1. Так как $b_{nm}\to 0$ при $|n|+|m|\to\infty$, то обозначив

$$Q_{\zeta s}(x, y)=\sum_{n=-\zeta}^{\zeta}\sum_{m=-s}^{s} b_{nm}\, e^{2\pi inx}\cdot e^{2\pi imy}, \tag{3.78}$$

$$d_{\mu\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau)=\int_t^{t+1}\int_\tau^{\tau+1} Q_{\zeta s}(x, y)\, X_\mu(t, x)\, X_\nu(\tau, y)\, dxdy=$$

$$=\sum_{n=-\zeta}^{\zeta}\sum_{m=-s}^{s} b_{nm}\, \alpha_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau), \tag{3.79}$$

где $\alpha_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau)$ определяются из равенств (3.19). Точно так же, как и для ряда (3.27), можем определить функцию

$$d_{\mu\nu}(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{nm}\, a_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau), \tag{3.80}$$

где $d_{\mu\nu}(t, \tau)$ — предел в метрике L_2 при $N \to \infty$ функций $d_{\mu\nu}^{(NN)}(t, \tau)$ или, что то же самое, сумма ряда правой части (3.80) в метрике L_2. Сходимость этого ряда, как это было в случае ряда (3.27), следует из (3.20) — (3.26). Нетрудно убедиться, что

$$d_{\mu\nu}(t, \tau) = \int_t^{t+1} \int_\tau^{\tau+1} f(x, y)\, X_\mu(t, x)\, X_\nu(\tau, y)\, dx dy \tag{3.81}$$

всюду на некотором множестве $E_1 \subset [0,1] \times [0,1]$, $mE_1 = 1$, одновременно для всех $\mu \geqslant 1$, $\nu \geqslant 1$. В случае, когда $f(x, y) \in L_2([0,1]^2)$ это немедленно следует из (3.79) и из того, что $Q_{NN}(x, y)$ при $N \to \infty$ сходится в метрике L_2 на квадрате $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$ к $f(x, y)$.

В общем случае, когда $f(x, y)$ — произвольная интегрируемая функция, будем рассматривать чезаровские средние ее ряда Фурье. Обозначив

$$P_{NN}(x, y) = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{\zeta=0}^{N} \sum_{s=0}^{N} Q_{\zeta s}(x, y), \tag{3.82}$$

$$D_{\mu\nu}^{(NN)}(t, \tau) = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{\zeta=0}^{N} \sum_{s=0}^{N} d_{\mu\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau),$$

имеем

$$D_{\mu\nu}^{(NN)}(t, \tau) = \int_t^{t+1} \int_\tau^{\tau+1} P_{NN}(x, y)\, X_\mu(t, x)\, X_\nu(\tau, y)\, dx dy. \tag{3.83}$$

Так как $P_{NN}(x, y)$ при $N \to \infty$ сходится на $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$ в метрике L_2 к $f(x, y)$, то правая часть (3.83) для любых (t, τ) сходится к правой части (3.81). Равенство (3.81) будет доказано, если мы покажем, что левая часть (3.83) при $N \to \infty$ сходится в метрике L_2 к $d_{\mu\nu}(t, \tau)$ на $[0,1] \times [0,1]$. Из (3.79) и (3.19) — (3.26) следует

$$d_{11}^{(\zeta, s)}(t, \tau) \equiv b_{00}, \quad \zeta \geqslant 1, \ s \geqslant 1, \tag{3.84}$$

$$d_{\mu 1}^{(\zeta s)}(t, \tau) = \max |X_\mu| \cdot \sum_{n=-\zeta}^{\zeta}{}' \frac{b_{n0}\, \beta_{n\mu}\, e^{2\pi i n t}}{2\pi i n}, \quad \mu \geqslant 2, \tag{3.85}$$

$$d_{1\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau) = \max |X_\nu| \cdot \sum_{m=-s}^{s}{}' \frac{b_{0m}\beta_{m\nu}\, e^{2\pi i m \tau}}{2\pi i m}, \quad \nu \geqslant 2, \tag{3.86}$$

$$d_{\mu\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau) = \max |X_\mu| \cdot |X_\nu| \sum_{n=-\zeta}^{\zeta}{}' \sum_{m=-s}^{s}{}' \frac{b_{nm}\, \beta_{n\mu}\, \beta_{m\nu}}{4\pi^2 nm}\, e^{2\pi i (nt + m\tau)} \tag{3.87}$$

для всех $\mu \geqslant 2$, $\nu \geqslant 2$, где числа $\beta_{n\mu}$, $\beta_{m\nu}$ определяются равенствами (3.41). Из (3.84) — (3.87) вытекает, что обозначив через $\|\varphi\|$ норму функции $\varphi(x, y)$ в $L_2([0,1]^2)$ имеем

$$\|d_{\mu\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau)\| \leqslant C, \quad \mu \geqslant 1, \ \nu \geqslant 1, \ \zeta \geqslant 0, \ s \geqslant 0,$$

$$\lim_{\zeta \to \infty,\, s \to \infty} \|d_{\mu\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau)\| = 0. \tag{3.88}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и N' выбрано так, что

$$\| d_{\mu\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau) \| < \varepsilon, \ \zeta > N', \ s > N'. \tag{3.89}$$

Тогда при $N > N'$ имеем

$$\| D_{\mu\nu}^{(N,N)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau) \| \leqslant \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n=0}^{N'-1} \sum_{m=0}^{N} \| d_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau) \| +$$

$$+ \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n=N'}^{N} \sum_{m=0}^{N'-1} \| d_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau) \| +$$

$$+ \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n=N'}^{N} \sum_{m=N'}^{N} \| d_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau) \| \tag{3.90}$$

и учитывая (3.88)—(3.89), получим

$$\| D_{\mu\nu}^{(N,N)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau) \| < \frac{4C \cdot N' \cdot N}{(N+1)^2} + \varepsilon, \ N > N'. \tag{3.91}$$

Отсюда следует, что для некоторого N_0 имеем

$$\| D_{\mu\nu}^{(N,N)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau) \| < 2\varepsilon, \ n > N_0 \tag{3.92}$$

и, тем самым, равенство (3.81) доказано.

Сравнивая (3.81) с (3.76), получаем

$$c_{\mu\nu}(t, \tau) = d_{\mu\nu}(t, \tau), \ \mu \geqslant 1, \ \nu \geqslant 1 \tag{3.93}$$

почти всюду на $[0, 1] \times [0, 1]$.

Переходя к пределу в метрике L_2 в равенствах (3.84)—(3.87) при $\zeta \to \infty$, $s \to \infty$, получаем равенства

$$d_{11}(t, \tau) = b_{00}, \tag{3.94}$$

$$d_{\mu 1}(t, \tau) = \max |X_\mu| \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{b_{n0}\, \beta_{n\mu}\, e^{2\pi i n t}}{2\pi i n}, \ \mu \geqslant 2, \tag{3.95}$$

$$d_{1\nu}(t, \tau) = \max |X_\nu| \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{b_{0m}\, \hat{\beta}_{m\nu}\, e^{2\pi i m \tau}}{2\pi i m}, \ \nu \geqslant 2, \tag{3.96}$$

$$d_{\mu\nu}(t, \tau) = \max |X_\mu \cdot X_\nu| \cdot \sum_n{}' \sum_m{}' - \frac{b_{nm}\, \beta_{n\mu}\, \hat{\beta}_{m\nu} \cdot e^{2\pi i (nt + m\tau)}}{4\pi^2 nm} \mu, \ \nu \geqslant 2, \tag{3.97}$$

имеющие место почти для всех точек $(t, \tau) \in [0,1] \times [0,1]$.

Вспомним, что аналогичные равенства, с заменой чисел b_{nm} на a_{nm}, были установлены и для величин $c_{\mu\nu}(t, \tau)$ (очевидно, $c_{11}(t, \tau) = a_{00}$ и остается учесть равенства (3.39) и (3.40)). Так как коэффициенты a_{nm} и b_{nm} ограничены и, кроме того, согласно (3.41), ограничены также величины $\beta_{n\nu}$, $\hat{\beta}_{m\nu}$, то все эти ряды сходятся в метрике $L_2([0,1]^2)$ и тогда из равенств (3.93) получаем

$$a_{00} = b_{00}, \tag{3.98}$$

$$(a_{n0} - b_{n0}) \cdot \max |X_\mu| \cdot \beta_{n\mu} = 0, \ |n| \geqslant 1, \ \mu \geqslant 2, \tag{3.99}$$

$$(a_{0m} - b_{0m}) \cdot \max |X_\nu| \cdot \hat{\beta}_{m\nu} = 0, \ |m| \geqslant 1, \ \nu \geqslant 2, \tag{3.100}$$

$$(a_{nm} - b_{nm}) \max |X_\mu| \cdot \max |X_\nu|\, \beta_{n\mu} \cdot \hat{\beta}_{m\nu} = 0, \ |n|, \ |m| \geqslant 1; \ \mu, \ \nu \geqslant 2. \tag{3.101}$$

Теперь заметим (см. (3.41), (3.12) и определение системы Хаара X_n), что

$$\max |X_\mu| \cdot \beta_{n\mu} = \sqrt{2^{k-1}} \left(\int\limits_{2p-2/2^k}^{2p-1/2^k} e^{2\pi i n x}\, dx - \int\limits_{2p-1/2^k}^{2p/2^k} e^{2\pi i n x}\, dx \right) =$$

$$= 2\pi i n \int\limits_0^1 e^{2\pi i n x} X_\mu(x)\, dx; \ |n| \geqslant 1, \ \mu \geqslant 2. \qquad (3.102)$$

Из (3.99)—(3.102) получаем

$$\int\limits_0^1 (a_{n0} - b_{n0})\, e^{2\pi i n x} X_\mu(x)\, dx = 0, \ |n| \geqslant 1, \ \mu > 2, \qquad (3.103)$$

$$\int\limits_0^1 a_{0m} - b_{0m})\, e^{2\pi i m y} X_\nu(y)\, dy = 0, \ |m| > 1, \ \nu \geqslant 2, \qquad (3.104)$$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (a_{nm} - b_{nm})\, e^{2\pi i n x} \cdot e^{2\pi i m y} X_\mu(x) X_\nu(y)\, dx, dy = 0, \qquad (3.105)$$

где $|n| \geqslant 1$, $|m| > 1$ и $\mu \geqslant 2$, $\nu \geqslant 2$.

Заметив, что равенства (3.103)—(3.105) выполняются также при значениях $\mu = 1$ или $\nu = 1$, из полноты системы Хаара $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ и двойной системы Хаара $X_\mu(x) X_\nu(y)$, $\mu > 1$, $\nu > 1$, заключаем, что почти всюду на $[0,1] \times [0,1]$ имеем

$$(a_{n0} - b_{n0})\, e^{2\pi i n x} = 0, \ |n| \geqslant 1, \qquad (3.106)$$

$$(a_{0m} - b_{0m})\, e^{2\pi i m y} = 0, \ |m| \geqslant 1, \qquad (3.107)$$

$$(a_{nm} - b_{nm})\, e^{2\pi i (nx+my)} = 0, \ |n| \geqslant 1, \ |m| \geqslant 1. \qquad (3.108)$$

Из (3.106)—(3.108) немедленно следует, что $a_{nm} = b_{nm}$ при $|n| \geqslant 1$ или $|m| \geqslant 1$. Учитывая также (3.98) и (3.77), получаем

$$a_{nm} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x, y)\, e^{2\pi i (nx+my)}\, dx dy. \qquad (3.109)$$

Теорема 3.1 доказана.

Из теоремы 3.1 немедленно следует

Т е о р е м а 3.2. *Пусть тригонометрический ряд* (3.1) *удовлетворяет условиям* (3.2)—(3.4), $F(x, y)$ *определена равенством* (3.6) *и* $f(x, y)$ *периодическая, с периодом 1 по обеим переменным, конечная суммируемая функция. Пусть, далее, существуют последовательности натуральных чисел* $k_j \uparrow +\infty$, $l_j \uparrow +\infty$ *такие, что функции*

$$\Phi_{k_j l_j}(t, \tau, x, y) = 2^{k_j} 2^{l_j} [F(t + p2^{-k_j}, \tau + q2^{-l_j}) + F(t + (p-1)2^{-k_j},$$

$$\tau + (q-1)2^{-l_j}) - F(t + p2^{-k_j}, \tau + (q-1)2^{-l_j}) -$$

$$- F(t + (p-1)2^{-k_j}, \tau + q2^{-l_j})], \qquad (3.110)$$

$$(x, y) \in (t + p - 1/2^{k_j}, t + p/2^{k_j}) \times (\tau + q - 1/2^{l_j}, \tau + q/2^{l_j}),$$
$$1 \leqslant p \leqslant 2^{k_j}, \ 1 \leqslant q \leqslant 2^{l_j} \qquad (3.111)$$

для почти всех $(t, \tau) \in [0,1] \times [0,1]$ при $j \to \infty$ сходятся к $f(x, y)$ всюду на $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$, кроме, быть может, точек (x, y), принадлежащих некоторому множеству $E_{t\tau} \subset [t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$, состоящему из счетного числа отрезков, параллельных координатным осям.

Тогда ряд (3.3) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$.

Приведенные в конце доказательства теоремы 3.1 рассуждения, в частности, полученное равенство (3.81), фактически означают, что введенный метод суммирования Лебега по случайным сетям в классе рядов Фурье в некотором смысле регулярен. Точнее верна следующая

Теорема 3.3. *Пусть $f(x, y)$ — суммируемая на $[0, 1] \times [0, 1]$ периодическая, с периодом 1 по каждой переменной, функция и*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{nm} e^{2\pi inx} e^{2\pi imy} \qquad (3.112)$$

—ее ряд Фурье. Обозначим

$$F(x, y) = b_{00}xy + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{yb_{n0} e^{2\pi inx}}{2\pi in} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{xb_{0m} e^{2\pi imy}}{2\pi im} +$$
$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' - \frac{b_{nm} e^{2\pi inx} \cdot e^{2\pi imy}}{4\pi^2 nm}, \qquad (3.113)$$

$$\Phi_{kk}(t, \tau, x, y) = 2^{2k} [F(t + p2^{-k}, \tau + q2^{-k}) + F(t + (p-1)2^{-k},$$
$$\tau + (q-1)2^{-k}) - F(t + p2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-k}) -$$
$$- F(t + (p-1)2^{-k}, \tau + q2^{-k})], \qquad (3.114)$$

$$(x, y) \in (t + (p-1)2^{-k}, t + p2^{-k}) \times (\tau + (q-1)2^{-k}, \tau + q2^{-k}),$$
$$1 \leqslant p, q \leqslant 2^k. \qquad (3.115)$$

Тогда для почти всех точек (t, τ) последовательность $\Phi_{kk}(t, \tau, x, y)$ при $k \to \infty$ сходится к $f(x, y)$ во всех точках $(x, y) \in (t, t+1) \times (\tau, \tau+1)$, не принадлежащих некоторому множеству $E_{t\tau} \subset [t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$, состоящему из счетного числа параллельных осям прямых, в которых неопределенный интеграл функции f ограниченно дифференцируем к значению $f(x, y)$.

Доказательство. Заметим, что для почти всех (t, τ)

$$\sum_{\mu=1}^{2^k} \sum_{\nu=1}^{2^k} d_{\mu\nu}(t, \tau) \mathrm{X}_\mu(t, x) \mathrm{X}_\nu(\tau, y) = \Phi_{kk}(t, \tau, x, y), \qquad (3.116)$$

если (x, y) удовлетворяет (3.115), где $d_{\mu\nu}$ (t, τ) определены равенствами (3.80) (см. (3.27) и (3.34)).

Из (3.116) и (3.81) следует, что

$$\Phi_{kk}(t, \tau, x, y) = 1/2^{-k} \cdot 2^{-k} \int\limits_{t+(p-1)2^{-k}}^{t+p2^{-k}} \int\limits_{\tau+(q-1)2^{-k}}^{\tau+q2^{-k}} f(x, y)\, dxdy \qquad (3.117)$$

для почти всех (t, τ) и (x, y) из (3.115).

Если

$$x_0 \neq t + p2^{-k},\ y_0 \neq \tau + q2^{-l},\ k,\ l > 0,\ 1 \leqslant p \leqslant 2^k,\ 1 < q \leqslant 2^l \tag{3.118}$$

и неопределенный интеграл функции $f(x, y)$ ограниченно дифференцируем в точке (x_0, y_0) к $f(x_0, y_0)$ (определение ограниченной дифференцируемости см. [9], стр. 459) из (3.117) получим

$$\Phi_{kk}(t, \tau, x_0, y_0) \to f(x_0, y_0) \text{ при } k \to \infty.$$

В следующем параграфе приводятся некоторые новые теоремы единственности двойных тригонометрических рядов, в формулировке которых фигурируют понятие равномерной сходимости в точке или более общие понятия такого рода.

§ 4. Некоторые теоремы единственности двойных тригонометрических рядов, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм

Теорема 4.1. *Пусть $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — множество, состоящее из не более, чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков, и $f(x, y)$ — интегрируемая по Лебегу на $[0, 1] \times [0, 1]$ конечная на $[0, 1] \times [0, 1] \setminus E$ периодическая, с периодом 1 по каждой переменной, функция.*

Пусть тригонометрический ряд (3.1) с условиями (3.2)—(3.4) обладает тем свойством, что для любой точки $(x_0, y_0) \in (0,1) \times (0,1) \setminus E$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют открытый прямоугольник $\Delta = \delta_1 \times \delta_2$, $\Delta \subset (0,1) \times (0,1)$, $\Delta \ni (x_0, y_0)$ и возрастающие последовательности $N_j \uparrow +\infty$, $M_j \uparrow +\infty$ при $j \to \infty$ натуральных чисел (зависящих, вообще говоря, от (x_0, y_0), ε и Δ), удовлетворяющих условию

$$|\Sigma_{N_j M_j}(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,\ (x, y) \in \Delta,\ j \geqslant 1, \tag{4.1}$$

где Σ_{MN} — прямоугольные частичные суммы ряда (3.1).

Тогда ряд (3.1) *является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$.*

Доказательство. Как было замечено в предыдущем параграфе (см. (3.28)—(3.33)), величины

$$B_{NM}^{(k, l, p, q)}(t, \tau) = 2^k \cdot 2^l \int\limits_{t+(p-1)2^{-k}}^{t+p2^{-k}} \int\limits_{\tau+(q-1)2^{-l}}^{\tau+q2^{-l}} \Sigma_{NM}(x, y)\, dx dy \tag{4.2}$$

как функции от (t, τ) при фиксированных k, l, p, q, $1 \leqslant p \leqslant 2^k$ $1 \leqslant q \leqslant 2^l$, при стремлении к бесконечности индексов N и M, сходятся в метрике L_2 на $[0,1] \times [0,1]$ к величине

$$2^k 2^l [F(t + p2^{-k}, \tau + q2^{-l}) + F(t + (p-1)2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l} -$$
$$- F(t + p2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l}) - F(t + (p-1)2^{-q}, \tau + q2^{-l}). \tag{4.3}$$

С другой стороны, как легко видеть (см. (3.28), (3.31)—(3.33))

$$B_{NM}^{(k, l, p, q)}(t, \tau) = a_{00} + 2^k \sum_{n=-N}^{N}{}' \frac{a_{n0}\, \alpha_{kp}^{(n)}\, e^{2\pi i n t}}{2\pi i n} +$$

$$+2^l \sum_{m=-M}^{M}{}' \frac{a_{0m}\,\alpha_{lq}^{(m)}\,e^{2\pi i m\tau}}{2\pi i m} - \sum_{n=-N}^{N}{}' \sum_{m=-M}^{M}{}' \frac{a_{nm}\,\alpha_{kp}^{(n)}\alpha_{lq}^{(m)}\,e^{2\pi i(nt+m\tau)}}{4\pi^2 nm}, \tag{4.4}$$

где

$$\alpha_{kp}^{(n)} = e^{2\pi i n p 2^{-k}} - e^{2\pi i n (p-1)2^{-k}}. \tag{4.5}$$

Из ограниченности a_{nm} и $\alpha_{kp}^{(n)}$ и из того, что $\log(n+2)\log(m+2)$, $n, m \geqslant 1$ является множителем Вейля для сходимости почти всюду прямоугольных частичных сумм двойного тригонометрического ряда, следует, что правая часть (4.4) при $N, M \to \infty$ почти всюду на $[0,1]\times[0,1]$ сходится к величине (4.3). Отсюда вытекает существование множества $A\subset[0,1]\times[0,1]$, имеющего полную плоскую меру $mA=1$, такого, что для любой точки $(t,\tau)\in A$ величины (4.2) при $N, M\to\infty$ сходятся к величине (4.3) одновременно для всех k, l, p, q.

Теперь заметим, что каждой точке $(t,\tau)\in A$, в силу периодичности, соответствует множество $E_{t\tau}\subset[t,t+1]\times[\tau,\tau+1]$, состоящееиз не более чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков, такое, что если

$$(x_0, y_0)\in(t, t+1)\times(\tau,\tau+1)\setminus E_{t\tau},$$

$$x_0\neq t+p2^{-k},\ y_0\neq\tau+q2^{-l},\ k>0,\ l>0,\ 1\leqslant p\leqslant 2^k,\ 1\leqslant q\leqslant 2^l, \tag{4.6}$$

то для $\varepsilon>0$ существуют окрестность $\Delta\ni(x_0,y_0)$, $\Delta\subset(t,t+1)\times(\tau,\tau+1)$ и частичные суммы $\Sigma_{N_jM_j}(x,y)$, $N_j\uparrow+\infty$, $M_j\uparrow+\infty$ такие, что

$$|\Sigma_{N_jM_j}(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,\ (x,y)\in\Delta,\ j\geqslant 1. \tag{4.7}$$

Для заданных k и l обозначим через p' и q' те значения p и q, для которых

$$(x_0,y_0)\in(t+(p'-1)2^{-k},\ t+p'2^{-k})\times(\tau+q'-1)2^{-l},\ \tau+q'2^{-l}). \tag{4.8}$$

Тогда для достаточно большого k_0, при $k>k_0$ и $l>k_0$ интервал правой части (4.8) будет вложен в интервал Δ. Из (4.7) и теоремы о среднем значении интеграла получим

$$\left|2^k 2^l \int\limits_{t+(p'-1)2^{-k}}^{t+p'2^{-k}} \int\limits_{\tau+(q'-1)2^{-l}}^{\tau+q'2^{-l}} \Sigma_{N_jM_j}(x,y)\,dxdy - f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon,\ j\geqslant 1, \tag{4.9}$$

которое имеет место для всех $k>k_0$, $l>k_0$ и p', q', удовлетворяющих (4.8). Переходя к пределу в (4.9) при $j\to\infty$ и учитывая обозначение (3.110), имеем

$$|\Phi_{kl}(t,\tau,x_0,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,\ k>k_0,\ l>l_0. \tag{4.10}$$

Обозначив через $E'_{t\tau}$, $(t,\tau)\in A$, объединение множества $E_{t\tau}$ и счетного числа отрезков, проходящих через точки $t+p2^{-k}$, $\tau+q2^{-l}$, $k\geqslant 0$, $l\geqslant 0$, $1\leqslant p\leqslant 2^k$, $1\leqslant q\leqslant 2^l$, которые параллельны координатным осям, заметим, что для любой точки $(x_0,y_0)\in(t,t+1)\times(\tau,\tau+1)\setminus E'_{t\tau}$ выполняется (4.10).

Таким образом, для любой точки $(t,\tau)\in A$ существует множество $E'_{t\tau}\subset(t,t+1)\times(\tau,\tau+1)$ такое, что для любой точки $(x,y)\in(t,t+1)\times\times(\tau,\tau+1)\setminus E'_{t\tau}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty,\, l\to\infty} \Phi_{kl}(t, \tau, x, y) = f(x, y). \tag{4.11}$$

Отсюда следует, что условия теоремы 3.2 выполнены и, следовательно, ряд (3.1) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$. Теорема 4.1 доказана.

Аналогичную теорему можно доказать, рассматривая вместо прямоугольных частичных сумм ряда (3.1) его абелевы средние

$$A_u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{nm}\, e^{2\pi i(nx+my)} - e^{-u\sqrt{n^2+m^2}}. \tag{4.12}$$

Теорема 4.2. *Пусть* $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — *множество, состоящее из не более чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков, и* $f(x, y)$ — *интегрируемая на* $[0, 1] \times [0, 1]$, *периодическая с периодом 1 по обеим переменным, конечная функция. Пусть для каждой точки* $(x_0, y_0) \in (0,1)\times(0,1)\setminus E$ *и* $\varepsilon > 0$ *существуют интервал* $\Delta \subset (0,1) \times \times (0,1)$, $\Delta \ni (x_0, y_0)$ *и последовательность* $u_j \downarrow 0$ *при* $j \to \infty$ *такие, что*

$$|A_{u_j}(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad (x, y) \in \Delta,\ j > 1, \tag{4.13}$$

где $A_u(x, y)$ — *абелевы средние ряда* (3.1), *удовлетворяющего условиям* (3.2)—(3.4).

Тогда ряд (3.1) *является рядом Фурье—Лебега функции* $f(x, y)$.

Доказательство. Как легко видеть

$$2^{k+l} \int\limits_{t+(p-1)2^{-k}}^{t+p2^{-k}} \int\limits_{\tau+(q-1)2^{-l}}^{\tau+q2^{-l}} A_u(x, y)\, dxdy = a_{00} +$$

$$+ 2^k \sum_n{}' \frac{a_{n0}\left(\Delta_{kp}\, e^{2\pi inx}\right) e^{2\pi int - u|n|}}{2\pi in} +$$

$$+ 2^l \sum_m{}' \frac{a_{0m}\left(\Delta_{lq}\, e^{2\pi imy}\right) \cdot e^{2\pi im\tau - u|m|}}{2\pi im} + \frac{2^k 2^l}{4\pi^2} \times$$

$$\times \sum_n{}' \sum_m{}' \frac{a_{nm}\left(\Delta_{kp}\, e^{2\pi imx}\right)\left(\Delta_{lq}\, e^{2\pi imy}\right) e^{2\pi i(nx+my) - u\sqrt{n^2+m^2}}}{nm}, \tag{4.14}$$

где

$$\Delta_{kp}\, e^{2\pi inx} = e^{2\pi ip2^{-k}} - e^{2\pi i(p-1)2^{-k}}, \tag{4.15}$$

$$\Delta_{lq}\, e^{2\pi imy} = e^{2\pi imq2^{-l}} - e^{2\pi im(q-1)2^{-l}}. \tag{4.16}$$

Из (4.14)—(4.16) (см. также (3.35)) следует, что

$$\lim_{u\to 0} 2^{k+l} \int\limits_{t+(p-1)2^{-k}}^{t+p2^{-k}} \int\limits_{\tau+(q-1)2^{-l}}^{\tau+q2^{-l}} A_u(x, y)\, dxdy = 2^{k+l}\,[F(t+p2^{-k}, \tau+q2^{-l}) +$$

$$+ F(t+(p-1)2^{-k}, \tau+(q-1)2^{-l}) - F(t+p2^{-k}, \tau+(q-1)2^{-l}) -$$

$$- F(t+(p-1)2^{-k}, \tau+q2^{-l})] \tag{4.17}$$

почти для всех $(t, \tau) \in [0,1]\times[0,1]$.

Таким образом, существует множество $E \subset [0,1] \times [0,1]$, $mE = 1$, такое, что для каждой точки $(t, \tau) \in E$ равенство (4.17) имеет место одновременно для всех k, l, $1 \leqslant p \leqslant 2^k$, $1 \leqslant q \leqslant 2^l$.

Пусть теперь $(t, \tau) \in E$. В силу периодичности существует множество $E_{t\tau} \subset (t, t+1) \times (\tau, \tau+1)$, состоящее из не более чем счетного числа параллельных координатным осям прямых, такое, что для любой точки $(x_0, y_0) \in (t, t+1) \times (\tau, \tau+1) \setminus E_{t\tau}$ выполняется условие (4.13). Если $x_0 \neq t + p2^{-k}$, $y_0 \neq \tau + q2^{-l}$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $1 \leqslant p \leqslant 2^k$, $1 \leqslant q \leqslant 2^l$ и для каждого k, l выбираются p' и q' такие, что

$$(x_0, y_0) \in (t + (p'-1)2^{-k}, t + p'2^{-k}) \times (\tau + (q'-1)2^{-l}, \tau + q'2^{-l}), \quad (4.18)$$

то для некоторых k_0 и l_0 при $k > k_0$ и $l > l_0$ интервал правой части (4.18) будет содержаться внутри интервала Δ, для которого выполнены (4.13). Заметив, что правая часть (4.17) при $p = p'$ и $q = q'$ совпадает со значением $\Phi_{kl}(t, \tau, x, y)$ и, что

$$\left| 2^k 2^l \int\limits_{t+(p'-1)2^{-k}}^{t+p'2^{-k}} \int\limits_{\tau+(q'-1)2^{-l}}^{\tau+q'2^{-l}} A_{u_j}(x, y)\, dxdy - f(x_0, y_0) \right| < \varepsilon, \ j > 1, \quad (4.19)$$

при $k > k_0$, $l > l_0$, согласно теореме о среднем значении, переходя к пределу при $j \to \infty$, из (4.19) получим

$$|\Phi_{kl}(t, \tau, x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \text{ при } k > k_0, \ l > l_0. \quad (4.20)$$

Отсюда, согласно теореме 3.2, следует справедливость теоремы 4.2.

Замечание 4.1. Условия (3.2) и (3.3) на коэффициенты ряда (3.1) окончательны, так как при нарушении этих условий, хотя бы при одном из значений n, m утверждение теоремы 4.3 не верно. Это видно на примере ряда

$$\sum_n \sum_m a_{nm} e^{2\pi i n x} e^{2\pi i m y}, \quad (4.21)$$

где $a_{n0} = 1/2$, $|n| \geqslant 0$ и $a_{nm} = 0$ для остальных n, m, который суммируется методом Абеля к нулю равномерно на любом прямоугольнике $[\delta, 1-\delta] \times [0,1]$, $\delta > 0$ (тем самым, ряд равномерно суммируется методом Абеля к нулю в окрестностях точек, не принадлежащих отрезкам $\{(0, y), 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $\{(1, y), 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, и, вместе с тем, не все коэффициенты a_{nm} равны нулю.

Замечание 4.2. Применение теоремы 4.3 и сформулированной ниже очень интересной леммы В. Шапиро ([7], лемма 3) позволяет доказать некоторые известные факты из теории единственности двойных тригонометрических рядов более простым способом.

Лемма (Шапиро). Пусть двойной тригонометрический ряд

$$\sum_N a_N e^{i(N \cdot z)}, \ N = (n, m), \ z = (x, y), \ (N \cdot z) = nx + my,$$

обладает свойствами

$$a_N = \bar{a}_{-N}, \ |a_N| = o(1) \text{ при } |N| = \sqrt{n^2 + m^2} \to \infty, \quad (4.22)$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup |\sum_N a_N e^{2\pi i(N\cdot z)-t|N|}| < +\infty, \ z \in B(z_0, h), \tag{4.23}$$

где $B(z_0, h)$ — круг радиуса h с центром в z_0,

$$\lim_{t\to 0} \sum_N a^n e^{2\pi i(N\cdot z)-t|N|} = 0 \tag{4.24}$$

почти всюду на $B(z_0, h)$.

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \sum_N a_N e^{2\pi i(N\cdot z)-t|N|} = 0 \tag{4.25}$$

равномерно в круге $B(x_0, n/2)$.

Из этой леммы и из теоремы 4.2 немедленно следует, что если $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — замкнутое множество, состоящее из счетного числа параллельных координатным осям отрезков и двойной тригонометрический ряд $\sum a_N e^{2\pi i(N\cdot z)}$ с условием (4.32) суммируется методом Абеля к нулю для всех $z \in (0,1) \times (0,1) \setminus E$, то все его коэффициенты равны нулю.

Заметим, что это утверждение немедленно следует также из теорем 2 и 3 работы [7], в доказательстве которых помимо указанной леммы применяется ряд других лемм о свойствах формальных произведений двойных тригонометрических рядов.

Приводимые ниже теоремы 4.3 и 4.4, сформулированные в терминах понятия равномерной сходимости в точке (см. [9], стр. 100), являются следствиями теорем 4.2 и 4.3.

Определение 4.1. Последовательность функций $s^n(x)$, определенных в окрестности точки x_0 и сходящаяся при $x = x_0$ (но не обязательно при $x \neq x_0$) называется сходящейся равномерно в точке x_0 к пределу s, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $p = p(\varepsilon)$ такие, что

$$|s_n(x) - s| < \varepsilon \text{ при } |x - x_0| < \delta \text{ и } n > p. \tag{4.26}$$

Теорема 4.3. *Пусть $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — множество, состоящее из не более чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков, и $f(x, y)$ — конечная интегрируемая на $[0, 1] \times [0, 1]$ периодическая, с периодом 1 по обеим переменным, функция. Пусть, далее, тригонометрический ряд (3.1) удовлетворяет условиям (3.2)—(3.4) и, кроме того, для каждой точки $(x_0, y_0) \subset (0, 1) \times (0, 1) \setminus E$ существует зависящая от точки последовательность его прямоугольных частичных сумм $\Sigma_{N_j M_j}(x, y)$ $N_j \uparrow +\infty$, $M_j \uparrow +\infty$ при $j \to \infty$, которая сходится к $f(x_0, y_0)$ равномерно в точке (x_0, y_0).*

Тогда ряд (3.1) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$.

Теорема 4.4. *Пусть множество $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ состоит из не более чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков, и $f(x, y)$ — конечная периодическая, с периодом 1 по обеим переменным, интегрируемая на $[0, 1] \times [0, 1]$ функция.*

Пусть, далее, для каждой точки $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1] \setminus E$ существует зависящая от точки (x_0, y_0) последовательность средних Абеля $A_{u_j}(x, y)$, $u_j \downarrow 0$, при $j \to \infty$, ряда (3.1) с условиями (3.2) — (3.4), которая сходится к значению $f(x_0, y_0)$ равномерно в точке (x_0, y_0).

Тогда ряд (3.1) *является рядом Фурье—Лебега функции* $f(x, y)$.

§ 5. О единственности двойных тригонометрических рядов с лакунами

Рассматриваются тригонометрические ряды (3.1) с условиями (3.2)—(3.4). Для натурального N обозначим через Q_N множество коэффициентов a_{nm} ряда (3.1), участвующих в его квадратичной частичной сумме $\Sigma_{NN}(x, y)$.

Определение 5.1. Будем говорить, что двойной тригонометрический ряд содержит лакуны порядка x^l, l — целое, если существуют последовательности натуральных чисел $N_j \uparrow +\infty$, $M_j \uparrow +\infty$, $M_j > N_j$ таких, что

$$M_j > C(N_j)^l, \; j > 1, \tag{5.1}$$

$$a_{nm} = 0 \text{ при } a_{nm} \in Q_{M_j} \setminus Q_{N_j}, \; j \geqslant 1. \tag{5.2}$$

Доказывается следующая

Теорема 5.1. *Пусть тригонометрический ряд* (3.1) *с условиями* (3.2)—(3.4) *содержит лакуны порядка* x^{20} *и последовательности* $N_j \uparrow +\infty$, $M_j \uparrow +\infty$ *выбраны таким образом, что выполнено условие* (5.2) *и*

$$M_j > C(N_j)^{20}. \tag{5.3}$$

Пусть, далее, $f(x, y)$ — *интегрируемая на* $[0, 1] \times [0, 1]$ *периодическая, с периодом 1 по каждой переменной, функция и последовательность частичных сумм* $\Sigma_{N_jN_j}(x, y)$ *указанного ряда сходится по мере на* $[0,1] \times [0,1]$ *к* $f(x, y)$.

Тогда, если условие

$$\lim_{j\to\infty} \sup |\Sigma_{N_jm_j}(x, y)| < +\infty \tag{5.4}$$

выполнено для всех $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, *не принадлежащих некоторому множеству, состоящему из счетного числа параллельных координатным осям отрезков, то указанный ряд является рядом Фурье—Лебега функции* $f(x, y)$.

Доказательство. Обозначив через

$$B_{NN}^{(k, p, q)}(t, \tau) = a_0 + 2^k \sum_{n=-N}^{N}{}' \frac{a_{n0}}{2\pi in} (e^{2\pi inp\, 2^{-k}} - e^{2\pi in(p-1)\, 2^{-k}})\, e^{2\pi int} +$$

$$+ 2^k \sum_{m=-N}^{N} \frac{a_{0m}}{2\pi im} (e^{2\pi imq\, 2^{-k}} - e^{2\pi im(q-1)\, 2^{-k}})\, e^{2\pi im\tau} + 2^{2k}/4\pi^2 \times$$

$$\times \sum_{n=-N}^{N}{}' \sum_{m=-N}^{N}{}' \frac{a_{nm}}{nm} (e^{2\pi inp\, 2^{-k}} - e^{2\pi in(p-1)\, 2^{-k}}) (e^{2\pi imq\, 2^{-k}} -$$

$$- e^{2\pi im(q-1)\, 2^{-k}})\, e^{2\pi i(nt+m\tau)}$$

N-ую квадратичную сумму ряда (3.35) и учитывая равенства (3.28) и (3.31), простой оценкой с применением теоремы о среднем значении интеграла и теоремы Лагранжа, получим

$$|B_{NN}^{(k,p,q)}(t,\tau)-\Sigma_{NN}(x,y)|<C_1N^3 2^{-k} \tag{5.5}$$

для всех (t,τ), $k\geqslant 1$, $1\leqslant p\leqslant 2^k$, $1\leqslant q\leqslant 2^k$ и

$$(x,y)\in(t+(p-1)2^{-k},\ t+p2^{-k})\times(\tau+(q-1)2^{-k},\ \tau+q2^{-k}). \tag{5.6}$$

Обозначив через $R_{NN}^{(k,p,q)}(t,\tau)$ сумму в метрике $L_2([0,1]^2)$ остальных членов ряда (3.35), имеем

$$\int_0^1\int_0^1 R_{NN}^{(k,p,q)}(t,\tau))^2\,dtd\tau\leqslant$$

$$\leqslant C2^{2k}\sum_{|n|>N}\frac{|a_{n0}|^2}{n^2}+C2^{2k}\sum_{|m|>N}\frac{|a_{0m}|^2}{m^2}+$$

$$+C2^{4k}\left(\sum_{|n|<N}{}'\sum_{|m|>N}\frac{|a_{nm}|^2}{n^2m^2}+\sum_{|n|>N}\sum_{|m|<N}\frac{|a_{nm}|^2}{n^2m^2}\right)+$$

$$+C2^{4k}\sum_{|n|>N}\sum_{|m|>N}\frac{|a_{nm}|^2}{n^2m^2}. \tag{5.7}$$

Из (5.6), учитывая ограниченность коэффициентов a_{nm}, после простых оценок получаем

$$\int_0^1\int_0^1 (R_{NN}^{(k,p,q)}(t,\tau)^2\,dtd\tau<C_2 2^{4k}\cdot 1/N. \tag{5.8}$$

Постоянные C_1 и C_2 в оценках (5.5) и (5.8) зависят только от максимума модулей коэффициентов a_{nm}. Из (5.8) получаем

$$\int_0^1\int_0^1\sum_{p=1}^{2^k}\sum_{q=1}^{2^k}(R_{NN}^{(k,p,q)}(t,\tau)^2\,dtd\tau\leqslant C_2\,2^{6k}\cdot 1/N. \tag{5.9}$$

Пусть $\{N_j\}$, $\{M_j\}$ — последовательности, удовлетворяющие условиям теоремы 1.5. Пусть k_j, $j\geqslant 1$ выбраны так, что

$$2^{k_j-1}\leqslant j(N_j)^3\leqslant 2^{k_j}. \tag{5.10}$$

Тогда из неравенств (5.3), (5.9) и (5.10) следует

$$\int_0^1\int_0^1\sum_{p=1}^{2^{k_j}}\sum_{q=1}^{2^{k_j}}(R_{M_jM_j}^{(k_j,p,q)}(t,\tau))^2\,dtd\tau<\frac{C_2(2jN_j^3)^{6k_j}}{C\,(N_j)^{20}}<C_3/N_j^2. \tag{5.11}$$

Из (5.11) вытекает существование множества $A\subset[0,1]\times[0,1]$ полной плоской меры $mA=1$, на которой

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{p=1}^{2^{k_j}}\sum_{q=1}^{2^{k_j}}(R_{M_jM_j}^{(k_j,p,q)}(t,\tau))^2=0,\quad (t,\tau)\in A. \tag{5.12}$$

С другой стороны, из неравенств (5.5) и (5.10) следует

$$|B_{N_jN_j}^{(k_j,p,q)}(t,\tau)-\Sigma_{N_jN_j}(x,y)|<C_1/j \tag{5.13}$$

для всех (t,τ) и всех $j>1$, $1\leqslant p\leqslant 2^{k_j}$, $1\leqslant q\leqslant 2^{k_j}$, если

$$(x, y)\in(t+(p-1)\,2^{-k_j},\ t+p\,2^{-k_j})\times(\tau+(q-1)\,2^{-k_j},\ \tau+q2^{-k_j}). \tag{5.14}$$

Из (5.2) и (3.35) следует, что почти для всех (t, τ)

$$2^{k_j+l_j}[F(t+p2^{-k_j},\ \tau+q2^{-k_j})+F(t+(p-1)2^{-k_j},\ \tau+(q-1)2^{-k_j}-$$
$$-F(t+p2^{-k_j},\ \tau+(q-1)2^{-k_j})-F(t+(p-1)2^{-k_j},\ \tau+q2^{-k_j})]=$$
$$=B_{N_jN_j}^{(k_j,p,q)}(t,\tau)+R_{M_jM_j}^{(k_j,p,q)}(t,\tau);\ j\geqslant 1,\ 1\leqslant p,\ q\leqslant 2^{k_j}. \tag{5.15}$$

Мы можем считать, что равенство (5.15) выполнено для всех

$$(t, \tau)\in A_1,\ \text{где}\ A_1\subset A,\ mA_1=mA=1.$$

Из (5.13), (5.15) и определения функций $\Phi_{k_jk_j}(t, \tau, x, y)$ (см. (3.110)) следует, что если $(t, \tau)\in A_1$, то

$$|\Phi_{k_jk_j}(t, \tau, x, y)-\Sigma_{N_jN_j}(x, y)|<C_1/j+|R_{M_jM_j}^{(k_j,p,q)}(t,\tau)| \tag{5.16}$$

для всех $(x, y)\in(t,\ t+1)\times(\tau,\ \tau+1)$, $x\neq t+p2^{-k}$, $y\neq\tau+q2^{-l}$, $k,\ l\geqslant 0$, $1\leqslant p<2^k$, $1\leqslant q\leqslant 2^l$. Фиксируя точку (x, y) и обозначив через p_j и q_j те значения p и q, для которых выполнены (5.14), получаем

$$|\Phi_{k_jk_j}(t, \tau, x, y)-\Sigma_{N_jN_j}(x, y)|<C_1/j+R_{M_jM_j}^{(k_j,p_j,q_j)}(t,\tau)|. \tag{5.17}$$

Теперь заметим, что из (5.12) следует

$$\lim_{j\to\infty} R_{M_jM_j}^{(k_j,p_j,q_j)}(t,\tau)=0,\ (t, \tau)\in A_1. \tag{5.18}$$

Так как, согласно условиям теоремы, последовательность $\Sigma_{N_jN_j}(x, y)$ сходится к $f(x, y)$ на любом квадрате $[t, t+1]\times[\tau, \tau+1]$, $(t, \tau)\in A_1$ по мере, то из (5.17) и (5.8) следует, что для любой точки $(t, \tau)\in A_1$

$$\lim_{j\to\infty}\Phi_{k_jk_j}(t, \tau, x, y)=f(x, y) \tag{5.19}$$

по мере на $[t,\ t+1)\times[\tau,\ \tau+1)$.

С другой стороны, из (5.17) и условия (5.4) следует, что для всех $(t, \tau)\in A_1$ неравенство

$$\lim_{j\to\infty}\sup|\Phi_{k_jk_j}(t, \tau, x, y)|<+\infty \tag{5.20}$$

выполнено для всех $(x, y)\in(t,\ t+1)\times(\tau,\ \tau+1)-E$, где $E\subset[t,\ t+1]\times\times[\tau,\ \tau+1]$ — множество, состоящее из не более чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков. Из теоремы 3.1 следует, что фигурирующий в формулировке теоремы 1.5 ряд является рядом Фурье — Лебега функции $f(x, y)$. Теорема 1.5 доказана.

В заключение отметим, что все доказанные в настоящей работе теоремы с соответствующими аналогичными формулировками можно распространить на m-кратные тригонометрические ряды.

Институт математики
АН Армянской ССР,
Ереванский государственный
университет

Поступила 12. VI. 1985

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Կրկնակի եռանկյունաչափական շարքերի միակության մասին (ամփոփում)

Դիտարկվում են

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} e^{2\pi inx} e^{2\pi imy}, \quad a_{nm} = \bar{a}_{-n,-m} \tag{1}$$

եռանկյունաչափական շարքերը, որտեղ

$$|a_{nm}| \leqslant M, \ \forall_{n,m}; \ \lim_{|n|\to\infty} a_{nm} = 0, \ \forall_m, \ \lim_{|m|\to\infty} a_{nm} = 0, \ \forall_n: \tag{2}$$

Ապացուցվում է, որ եթե (2) պայմանին բավարարող (1) շարքը գումարվում է Լեբեգի մեթոդով, որում ածանցյալ հարաբերությունները վերցված են պատահական երկուական հանգույցների վրա, վերջավոր և ինտեգրելի $f(x, y)$ ֆունկցիային, ապա այն $f(x, y)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքն է։

Այդ արդյունքից ստացվում է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ. Դիցուք E-ն փակ բազմություն է, որը կազմված է կոորդինատների առանցքներին զուգահեռ հաշվելի թվով ուղիղներից և $f(x, y)$-ը $T_2 = (0,1) \times (0,1)$ քառակուսու վրա որոշված վերջավոր ինտեգրելի ֆունկցիա է։

Այդ դեպքում, եթե (2) պայմանին բավարարող (1) շարքը Աբելի մեթոդով հավասարաչափ գումարվում է $f(x, y)$-ին յուրաքանչյուր F, $F \subset T_2$, կոմպակտի վրա, ապա այն $f(x, y)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքն է։

A. A. TALALJAN. *On the uniqueness of double trigonometric series* (summary)

Consider the trigonometric series

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{rm} e^{2\pi inx} e^{2\pi imy}, \quad a_{nm} = \bar{a}_{-n,-m}, \tag{1}$$

with

$$|a_{nm}| \leqslant M, \ \forall_{n,m}; \ \lim_{|n|\to\infty} a_{nm} = 0, \ \forall_m; \ \lim_{|m|\to\infty} a_{nm} = 0, \ \forall_n, \tag{2}$$

We prove that if the series (1) with conditions (2) and the knots of derivative ratio taken from the random dyadic lattice, is Lebesque summable to a finite integrable function $f(x, y)$, then it is the Fourier series of that function.

From this result we derive

Theorem. Let E be a closed set in the plane consisting of countable number of lines, which are parallel to one of the coordinate axes. Let a function $f(x, y)$ be finite and integrable on the $T_2 = (0,1) \times (0,1)$.

If the series (1) with conditions (2) is Abel summable to the function $f(x, y)$, uniformly on every compact F, $F \subset T_2 \setminus E$, then it is the Fourier series of $f(x, y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28:61, 1964, 1391—1408.
2. *J. Ash.* Mand Welland C. V, Convergence, summability and uniqueness of multiple trigonometric series, Trans. Amer. Math. Soc., 163, 1972, 401—445.
3. *Х. О. Мовсисян.* О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 9:1, 1974, 40—63.
4. *В. А. Скворцов.* О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм, Матем, заметки, 4, вып. 6, 1968, 707—714.
5. *В. А. Скворцов.* О множествах единственности для многомерных рядов Хаара, Матем, заметки, 14, вып. 6, 1973, 789—798.
6. *V. L. Shapiro.* Uniqueness of multiple trigonometric series, Ann. Math., 66, № 3, 1957, 467—480.
7. *V. L. Shapiro.* Sets of uniqueness on the 2—Torus, Trans. of the Amer. Math. Soc., 165, 1972, 127—147.
8. *W. Willmar, R. Wade.* A uniqueness theorem for Haar and Walsch series, Trans Amer. Math. Soc., 141, 1969, 187—194.
9. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, Изд. «Мир», М., 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 6, 1985 Математика

УДК 517.954

С. Г. ХАЧАТРЯН

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ НЕСУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть

$$LU = f(M), \quad M \in R^n \tag{1}$$

—линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в R^n. В случаях, когда правая часть этого уравнения принадлежит классам $D'(R^n)$, $S'(R^n)$, $C^\infty(R^n)$, то в работах [1]—[3] доказано существование решения уравнения (1), принадлежащее соответствующим классам.

Для исследования краевых задач в классе функций, имеющих разрывы в конечном числе точек и полиномиальный рост в бесконечности, возникает необходимость строить частные решения уравнений

$$\Delta U(M) = f(M), \quad M \in R^3, \tag{2}$$

$$\Delta U(M) + \mu U(M) = f(M), \quad M \in R^3, \quad \mu = \text{const} < 0, \tag{3}$$

где $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, когда $f(M)$ также имеет особенности и полиномиальный рост в бесконечности.

Пусть r—расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $O(0, 0, 0)$, c, c', α—постоянные числа. В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция $f(M)$ удовлетворяет условию Гёльдера в окрестности любой точки и*

$$|f(M)| < c(1+r)^\alpha, \quad M \in R^3, \quad \alpha \geqslant 0, \tag{4}$$

тогда существует решение $U^0(M)$ уравнения (2) такое, что

$$|U^0(M)| \leqslant c'(1+r)^{\alpha+2}(1+\delta(\alpha)\ln(e+r)), \tag{5}$$

где $\delta(\alpha)=0$, если α—нецелое число и $\delta(\alpha)=1$, если α целое число.

Теорема 2. *Пусть функция $f(M)$ финита ($f(M) \equiv 0$, $r \geqslant r_0$), удовлетворяет условию Гёльдера в окрестности любой точки $M \in R^3 \setminus \setminus \{O\}$ и*

$$|f(M)| < c r^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \tag{6}$$

тогда существует решение $U^0(M)$ уравнения (2) (уравнения (3)) в $R^3 \setminus \{O\}$, стремящееся к нулю при $r \to \infty$ и удовлетворяющее неравенству

$$|U^0(M)| < c_1 r^{-\alpha+2}(1+\delta(\alpha)|\ln r|), \text{ при } r \leqslant r_0, \tag{7}$$

где c_1, c_2—*постоянные, а* $\delta(\alpha)$ *то же, что и в теореме 1.*

Теорема 3. *В предположениях теоремы 1 существует решение* $U^0(M)$ *уравнения (3), удовлетворяющее неравенству (4).*

Теорема 4. *Пусть* $f(M)$ *удовлетворяет условию Гёльдера в окрестности любой точки* $M\in R^3$ *и*

$$|f(M)|\leqslant ce^{kr}, \tag{8}$$

тогда существует решение уравнения (2) *в* R^3 *такое, что*

$$|U(M)|\leqslant c' e^{\lambda_k r\ln(e+r)}, \tag{9}$$

где c, c', k, λ_k—*некоторые положительные постоянные.*

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности можно предположить, что $f(M)\equiv 0$, при $r\leqslant r_0=\text{const}$.

Пусть (r, Θ', φ') и (ρ, Θ, φ)—сферические координаты точек $M(x, y, z)$ и $M'(\xi, \eta, \xi)$ соответственно, и пусть $t=\frac{1}{r\rho}(\xi x+\eta y+\xi z)$.

Известно ([4], с. 490), что

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-2r\rho t+\rho^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)\frac{r^k}{\rho^k},\ \text{при}\quad \frac{r}{\rho}<q<1,$$

где $P_k(t)$—полином Лежандра степени k, q—некоторая положительная постоянная, причем каждая функция $P_k(t)\frac{r^k}{\rho^k}$ является гармонической относительно (x, y, z) при фиксированном $(\xi, \eta, \zeta)\neq(0, 0, 0)$.

Обозначим

$$I_n=\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2-2r\rho t+r^2}}-\sum_{k=0}^{n}P_k(t)\frac{r^k}{\rho^{k-1}}. \tag{10}$$

Так как

$$P_k(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=q}\frac{dz}{z^{k+1}\sqrt{1-2zt+z^2}},$$

то

$$P_k(t)\leqslant\frac{c(q)}{q^k},$$

где

$$c(q)=\max_{|z|<q}\left|\frac{1}{\sqrt{1-2zt+z^2}}\right|,\quad |t|\leqslant 1.$$

Следовательно

$$|I_n|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|p_k(t)|\frac{r^k}{\rho^{k-1}}\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{c(q)}{q^k}\frac{r^k}{\rho^{k-1}}\leqslant c_0\frac{r^{n+1}}{\rho^n}, \tag{11}$$

при $\frac{r}{\rho}\leqslant q_0<q$, c_0—постоянная, зависящая от q и q_0.

Из (10) следует, что функция

$$U^0(M)=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{\infty}f(\rho, \Theta, \varphi)\,I_{[\alpha]+2}\sin\Theta\,d\rho\,d\varphi\,d\Theta, \tag{12}$$

где $[\alpha]$ — целая часть α, является решением уравнения (2) в R^3.

Выясним поведение функции $U^0(M)$ в окрестности бесконечности. Представим $U^0(M)$ в виде

$$U^0(M) = U_1^0(M) + U_2^0(M) + U_3^0(M),$$

где

$$U_1^0(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_N^{\infty} f(\rho, \theta, \varphi)\, I_{[\alpha]+2} \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta,$$

$$U_2^0(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{N} f(\rho, \theta, \varphi)\frac{\rho^2\sin\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho t + r^2}}\, d\rho\, d\varphi\, d\theta,$$

$$U_3^0(M) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{N} f(\rho, \theta, \varphi)\sin\theta \sum_{k=0}^{[\alpha]+2} p_k(t)\frac{r^k}{\rho^{k-1}}\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

(Здесь N — некоторая постоянная, заключенная между $\frac{r}{q_0}$ и $2\frac{r}{q_0}$).

Используя оценки (4) и (11), нетрудно убедиться, что функции $U_i^0(M)$, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют неравенству (4). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если в теореме 1 условие (4) заменить условием

$$|f(M)| \leqslant c\,(1 + r)^{\alpha} \ln^{-\beta}(e + r),$$

где $\beta > 1$ — постоянное число, то в неравенстве (4) можно заменить $\delta(\alpha)$ нулем.

Замечание. 2. В предположениях теоремы 1 общее решение уравнения (2), удовлетворяющее неравенству (5), определяется формулой

$$U(M) = U^0(M) + \sum_{n=0}^{[\alpha]+2}\sum_{k=-n}^{n} c_n^k\, \gamma_n^k(\theta, \varphi)\, r^n, \tag{13}$$

где $U^0(M)$ дается формулой (11), $\{\gamma_n^k(\theta, \varphi)\}_{k=-n}^{n}$ — полная система линейно независимых сферических функций порядка n, c_n^k — произвольные постоянные.

Рассмотрим примеры уравнений

$$\Delta U = x^{\alpha}, \tag{14}$$

$$\Delta U = r^n \sin^{n+2}\theta \sin(n + 2)\varphi, \tag{15}$$

где n — целое неотрицательное число, α — нецелое положительное число.

Непосредственно проверяется, что функции

$$V_1 = \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)},\quad V_2 = \frac{1}{2n+5}\, r^{n+2}\sin^{n+2}\theta \sin(n+2)\varphi \ln r$$

являются решениями уравнений (14) и (15) соответственно. Из этих примеров и из замечания 2, в частности, следует, что теорему 1 нельзя улучшить.

Теорема 2 для уравнения (2) сводится к теореме 1 с помощью преобразования обратных радиусов-векторов ([4]).Нетрудно заметить, что функция

$$U^0(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} f(\rho, \theta, \varphi)\, J_{[\alpha]-3} \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta, \tag{16}$$

где

$$J_n = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho t + r^2}} - \sum_{k=0}^{n} P_k(t)\frac{\rho^{k+2}}{r^{k+1}}$$

является решением уравнения (2), удовлетворяющем требованиям теоремы 2.

Замечание 3. В предположениях теоремы 2 общее решение уравнения (2) в $R^3 \setminus \{0\}$, ограниченное в окрестности бесконечности и удовлетворяющее неравенству (7), определяется формулой

$$U(M) = U^0(M) + \sum_{n=0}^{[\alpha]-3}\sum_{k=-n}^{n} c_n^k \gamma_n^k(\theta, \varphi)\frac{1}{r^{n+1}} + c,$$

где $U^0(M)$ определяется формулой (16), $\{\gamma_n^k(\theta, \varphi)\}_{k=-n}^{n}$ — полная система линейно независимых сферических функций порядка n, c и c_n^k — произвольные постоянные.

Докажем теорему 2 для уравнения (3) при $\mu = -\lambda^2$.

Очевидно, что функция

$$G(r, t, z) = \frac{e^{-\lambda r\sqrt{1-2tz+z^2}}}{\sqrt{1-2tz+z^2}}$$

аналитична относительно комплексной переменной z в круге $|z| < 1$, при $|t| \leqslant 1$. Следовательно, она разлагается в ряд Тейлора

$$G(r, t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(r, t) z^k \text{ при } |z| < 1, \ |t| \leqslant 1,$$

где

$$g_k(r, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=q<1}\frac{G(r, t, z)}{z^{k+1}}dz.$$

Ясно, что

$$|g_k(r, t)| \leqslant \frac{c(q, r)}{q^{k+1}},$$

где

$$c(q, r) = \max_{|z|<q}|G(r, t, z)|, \ |t| \leqslant 1.$$

Пусть

$$G_n(r, \rho, t) = \frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2-2r\rho t+\rho^2}}}{\sqrt{r^2 - 2r\rho t + \rho^2}} - \sum_{k=0}^{n} g_k(r, t)\frac{\rho^k}{r^{k+1}}.$$

Ясно, что

$$|G_n(r, \rho, t)| < \sum_{k=n+1}^{\infty} |g_k(r, t)| \frac{\rho^k}{r^{k+1}} \leqslant c(q, r) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\rho^k}{(qr)^{k+1}} \leqslant c_1 \frac{\rho^{n+1}}{r^{n+2}},$$

при $\frac{\rho}{r} < q_0 < q$.

Нетрудно доказать, что каждая функция $\frac{1}{r^{k+1}} g_k(r, t)$ является решением однородного уравнения (3) ($f(M) = 0$), при $\mu = -\lambda^2$, $(x, y, z) \neq 0$. Следовательно, функция

$$U^0(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} f(\rho, \Theta, \varphi)\, G_{[\alpha]-3}(r, \rho, t)\, \rho^2 \sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta \qquad (17)$$

является решением уравнения (3) при $\mu = -\lambda^2$.

Представим $U^0(M)$ в виде

$$U^0(M) = U_1^0(M) + U_2^0(M) + U_3^0(M),$$

где

$$U_1^0(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{q_0 r} f(\rho, \Theta, \varphi)\, G_{[\alpha]-3}(r, \rho, t)\, \rho^2 \sin\Theta d\rho d\rho d\Theta,$$

$$U_2^0(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{q_0 r}^{r_0} f(\rho, \Theta, \varphi) \frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2 - 2r\rho t + \rho^2}}}{\sqrt{r^2 - 2r\rho t + \rho^2}} \rho^2 \sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta,$$

$$U_3^0(M) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{q_0 r}^{r_0} f(\rho, \Theta, \varphi) \sin\Theta \sum_{k=0}^{[\alpha]-3} g_k(r, t) \frac{\rho^{k+2}}{r^{k+1}} d\rho d\varphi d\Theta.$$

Аналогично, как и в первой теореме, доказывается. что $U_i^0(M)$, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют неравенству (7).

Замечание 4. Если в теореме 2 заменить условие (6) условием

$$|f(M)| \leqslant c\, r^{-\alpha} |\ln r|^{-\beta}, \ \beta > 1,$$

то в неравенстве (7) можно взять $\delta(\alpha) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 3 очевидно.

Докажем теперь теорему 4. Будем предполагать, что $f(M) \equiv 0$, при $r \leqslant \frac{e^2}{q}$, $q = \text{const} < 1$.

Пусть $\{\psi_n(M)\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность бесконечно дифференцируемых функций, заключенных между нулем и единицей, таких, что

$$\psi_0(M) = \begin{cases} 1, & r < 2, \\ 0, & r > 3, \end{cases}$$

$$\psi_n'(M) = \begin{cases} 1 - \psi_{n-1}(M), & 2n < r < 2n+1, \\ 1, & 2n+1 < r < 2n+2, \\ 0, & r \overline{\in} (2n, 2n+3), \ n = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

Ясно, что $\{\psi_n(M)\}_{n=0}^{\infty}$ — образуют разложение единицы в R^3.

Пусть

$$U_n(M) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{2n}^{2n+3} f(\rho, \Theta, \varphi)\, \psi_n(M)\, I_{(2n+3)k} \sin\Theta \, d\rho d\varphi d\Theta,$$

где I_n определяется равенством (10).

Из (11) следует, что

$$|U_n(M)| \leqslant c_1 r e^{-(2n+3)k}, \text{ при } n > \frac{e^2 r}{2q}, \; c_1 = \mathrm{const}. \tag{18}$$

Из неравенства (18) следует, что ряд

$$U(M) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(M) \tag{19}$$

равномерно сходится. Ясно, что функция $U(M)$ является решением уравнения (2) в R^3.

Далее нетрудно видеть, что

$$|U_n(M)| \leqslant c_2 r, \text{ при } n > \frac{er}{2q}, \; c_2 = \mathrm{const}. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь сумму первых $m = \left[\frac{er}{2q}\right]$ членов ряда (19)

$$\left|\sum_{n=0}^{m} U_n(M)\right| \leqslant c_1' \sum_{n=0}^{m} \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{2n}^{2n+3} \frac{|f(\rho, \Theta, \varphi)\, \rho^2 \sin\Theta|}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho t + r^2}}\, d\rho d\varphi d\Theta +$$

$$+ c_2' \sum_{n=0}^{m} \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{2n}^{2n+3} |f(\rho, \Theta, \varphi)| \sum_{j=0}^{(2n+3)k} |P_j(t)| \frac{r^j}{\rho^{j-1}}\, d\rho\, d\varphi\, d\Theta \leqslant$$

$$\leqslant c_3' \, r e^{\left(\frac{e}{q}r+3\right)k} + c_4' \, r^{\frac{e}{q}kr}, \tag{21}$$

где c_1', c_2', c_3', c_4' — некоторые постоянные.

Из неравенств (18), (20), (21) следует оценка (8), где $\lambda_k = \frac{e}{q}k$.

Теорема 4 доказана.

Исследуем теперь поведение производных решения $U^0(M)$ уравнения (2) в предположении, что $f(M)$ — бесконечно дифференцируемая функция всюду в R^3, кроме конечного числа точек разрыва.

Пусть

$$m = (m_1, m_2, m_3), \; |m| = m_1 + m_2 + m_3, \quad D^m = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^{m_1}\, \partial y^{m_2}\, \partial z^{m_3}}.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5. *Если функции $D^m f(M)$, $|m| = 0, 1, \cdots$, непрерывны всюду в R^3 и*

$$|D^m f(M)| \leqslant c_m (1 + r)^{\alpha}, \; \alpha > 0, \; c_m = \mathrm{const}, \; |m| = 0, 1, \cdots,$$

то решение $U^0(M)$ уравнения (2), определенное формулой (12), удовлетворяет неравенствам

$$|D^m U^0(M)| \leqslant c'_m (1+r)^{\alpha+2},\quad c'_m = \text{const},\ |m| = 1, 2, \cdots. \tag{22}$$

Теорема 6. *Пусть $f(M) \equiv 0$, при $r \geqslant r_0$. Если производные $D^m f(M)$, $|m| = 0, 1, \cdots$, непрерывны в R^3 кроме точки O и*

$$|D^m f(M)| \leqslant \frac{c_m}{r^{\alpha+|m|}},\quad c_m = \text{const},\ |m| = 0, 1, \cdots,\ \alpha > 0, \tag{23}$$

то производные *решения $U^0(M)$ уравнения (2) (уравнения (3)), определенного формулой (16) ((17)), стремятся к нулю при $r \to \infty$ и удовлетворяют неравенству*

$$|D^m U^0(M)| \leqslant \frac{c_m}{r^{\alpha+|m|-2}}(1 + \delta(\alpha)|\ln r|),\ \text{при}\ r \leqslant r_0. \tag{24}$$

где $\delta(\alpha) = 0$, если α — нецелое число, $\delta(\alpha) = 1$, если α — целое число.

Докажем теорему 5. Теорема 6 доказывается аналогично.

Из (10) следует, что

$$|D^m I_n| \leqslant b_m \frac{r^{n-|m|+1}}{\rho^n},\ \text{при}\ \frac{r}{\rho} < q_0 < q,\ |m| = 1, 2, \cdots,$$

где b_m — некоторые постоянные. Следовательно

$$|D^m U_1^0(M)| \leqslant b'_m r^{\alpha-|m|+2} + b''_m,\ |m| = 1, 2, \cdots,$$

где b'_m, b''_m — некоторые постоянные.

Пусть $D_N = \{M \in R^3,\ r_0 \leqslant r < N\}$, S_N — поверхность, ограничивающая D_N

$$\frac{\partial}{\partial x} U_2^0(M) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{D_N} f(\xi, \eta, \zeta) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}\right) d\xi d\eta d\zeta =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iiint_{D_N} f(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}\right) d\xi d\eta d\zeta =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_N} f(\xi, \eta, \zeta) \frac{\cos(n, \xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} dS -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint_{D_N} \frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}},$$

где (n, ξ) — угол между осью $o\xi$ и нормалью к поверхности S_N.

Из полученного равенства следует, что функция $\frac{\partial}{\partial x} U_2^0(M)$ удовлетворяет неравенству (22), при $|m| = 1$. Аналогично доказывается, что функции $D^m U_2^0(M)$ удовлетворяют неравенотву (22), при $|m| = 2, 3, \cdots$.

Неравенетва (22) для функций $D^m U_3^0(M)$, $|m| = 1, 2, \cdots$, доказываются без труда. Теорема 5 доказана.

Замечание 5. Если заменить в теореме 6 условие (23) условием

$$|D^m f(M)| \leqslant \frac{c_m}{r^{\alpha-|m|}} |\ln r|^{-\beta_m}, \ |m|=0,1,\cdots,$$

где $\beta_m > 1$ — постоянные числа, то в неравенстве (24) можно взять $\delta(\alpha) \equiv 0$.

Отметим, что случай, когда $f(M)$ имеет разрывы в конечном числе точек, легко приводится к рассмотренным выше случаям.

В работе [5] исследованы задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа с разрывными граничными данными. Используя полученные здесь решения уравнения (2), можно эти результаты распространить и на уравнения Пуассона.

Применим полученные результаты к решению краевых задач для уравнения (3) при $\mu = -\lambda^2$.

1. Пусть D — трехмерная область, ограниченная гладкой поверхностью Ω и содержащая начало координат.

З а д а ч а 1. В предположениях теоремы 2 требуется найти решение уравнения (3) в облаети $D \setminus \{0\}$, удовлетворяющее неравенству (7) и краевому условию

$$U(M)|_{M \in \Omega} = \Phi(M), \tag{25}$$

где $\Phi(M)$ — заданная на Ω непрерывная функция.

Пусть $W^0(M)$ — решение уравнения

$$\Delta U(M) - \lambda^2 U(M) = 0 \tag{26}$$

в области D с краевым условием

$$W^0(M) = \Phi(M) - U^0(M)|_{M \in \Omega},$$

где $U^0(M)$ — определяется равенством (17).

Ясно, что функция

$$V^0(M) = W^0(M) + U^0(M)$$

удовлетворяет неравенству (7) и является решением уравнения (3) с граничным значением (25). Следовательно, задача 1 сводится к следующей однородной задаче.

Найти решение уравнения (26) в области $D \setminus \{0\}$, удовлетворяющее неравенству (7) и краевому условию

$$U(M)|_{M \in \Omega} = 0. \tag{27}$$

Пусть Ω_ε — сфера радиуса ε с центром в точке O, целиком лежащая в области D. С помощью формулы Грина доказывается, что произвольное решение $V(M)$ уравнения (26), удовлетворяющее неравенству (7) в области, ограниченной поверхностями Ω_ε и Ω, представляется в виде

$$V(M) = V_\varepsilon(M) + V_D(M), \tag{28}$$

где $V_\varepsilon(M)$ и $V_D(M)$ — решения уравнения (26) в областях $r > \varepsilon$ и D соответственно, причем $V_\varepsilon(M)$ стремится к нулю при $r \to \infty$. Из представления (28) следует, что функция

$$\omega(M)=V(M)-V_D(M) \tag{29}$$

продолжается как решение уравнения (26) вне области D и стремится к нулю при $r\to\infty$. Так как $V(M)$ удовлетворяет неравенству (7), то $\omega(M)$ также удовлетворяет этому неравенству. Известно [4], что такое решение уравнения (26) представляется в виде

$$\omega(M)=\sum_{n=0}^{[\alpha]-3}\sum_{k=-n}^{n} c_n^k V_n^k(M), \tag{30}$$

где

$$V_n^k(M)=r^n\frac{d^n}{(rdr)^n}\left(\frac{e^{-\lambda r}}{r}\right)\gamma_n^k(\theta,\varphi), \tag{31}$$

$\{\gamma_n^k\}_{k=-n}^{n}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, c_n^k — постоянные числа.

Из (28) следует, что в области $D\setminus\{O\}$ решение уравнения (26), удовлетворяющее неравенству (7), представляется в виде

$$V(M)=W(M)+\omega(M), \tag{32}$$

где $W(M)$—решение уравнения (26) в области D. Подставляя (32) в граничное условие (27), получим

$$W(M)|_{M\in\Omega}=-\omega(M)|_{M\in\Omega}. \tag{33}$$

Следовательно, решение поставленной задачи приводится к решению задачи (26) — (33) в области D, которая имеет единственное решение для произвольной правой части в (33).

Пусть $W_n^k(M)$ — решения уравнения (26) в области D с краевыми условиями

$$W_n^k(M)|_{M\in\Omega}=V_n^k(M),\ k=-n,\cdots,\ 0,1,\cdots,n;\ n=0,1,\cdots,[\alpha]-3,$$

соответственно. Ясно, что общее решение задачи (26)—(27) будет

$$V(M)=\sum_{n=0}^{[\alpha]-3}\sum_{k=-n}^{n} c_n^k\,(V_n^k(M)-W_n^k(M)).$$

Итак, получили следующую теорему.

Т е о р е м а 7. *Однородная задача 1 (задача (26)—(27)) имеет* $([\alpha]-2)^2$ *линейно независимых решений, а неоднородная задача 1 всегда разрешима.*

2. Рассмотрим теперь уравнение (3) в R^3. Предполагается, что $f(M)$ удовлетворяет условию Гельдера в окрестности любой точки $M\in R^3\setminus\{O\}$ и

$$|f(M)|\leqslant c_1 r^{-\alpha},\ \text{при}\ r<r_0,\ \alpha>0,$$
$$|f(M)|\leqslant c_2 r^{\beta},\ \text{при}\ r>r_0,\ \beta>0. \tag{34}$$

З а д а ч а 2. Требуется найти решение уравнения (3) в $R^3\setminus\{O\}$, удовлетворяющее неравенствам

$$|U(M)|\leqslant c\,r^{-\alpha+2}(1+\delta(\alpha)\,|\ln r|),\ \text{при}\ r\leqslant r_0,$$
$$|U(M)|\leqslant c\,r^{\beta},\ \text{при}\ r>r_0. \tag{35}$$

Пусть $T(M)$—непрерывно дифференцируемая функция, заключенная между нулем и единицей и равная единице при $r \leqslant r_1 < r_0$ и нулю, при $r \geqslant r_0$.

Пусть далее

$$V^1(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{\infty}[1-T(\rho,\theta,\varphi)]f(\rho,\theta,\varphi)\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2-2r\rho t+\rho^2}}}{\sqrt{r^2-2r\rho t+\rho^2}}\times$$

$$\times\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Обозначим через $\bar{V}^0(M)$ функцию, которая получается из (17) заменой $f(\rho,\theta,\varphi)$ на $T(\rho,\theta,\varphi)\, f(\rho,\theta,\varphi)$. Ясно, что функция

$$\tilde{W}^0(M) = V^1(M) + \bar{V}^0(M)$$

будет решением уравнения (3) в $R^3\setminus\{O\}$, удовлетворяющее неравенствам (35).

Из представления (28) следует, что решение однородного уравнения (26), удовлетворяющее неравенствам (35) представляется в виде (29). Следовательно, общее решение задачи 2 будет:

$$U(M) = \tilde{W}^0(M) + V_0(M),$$

где $V_0(M)$ определяется равенством (30).

Итак, справедлива следующая

Теорема 8. *Однородная задача 2* $(f(M)\equiv 0)$ *имеет* $([\alpha]-2)$ *линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.*

3. Пусть D — трехмерная конечная область, ограниченная гладкой поверхностью Ω. Предполагается, что точка O лежит на поверхности Ω и в достаточно малой r_0,-окрестности этой точки Ω представляет плоскость $z=0$.

Задача 3. Пусть $\varphi(M)$—непрерывная всюду на Ω функция, кроме точки O, удовлетворяющая неравенству

$$|\varphi(M)| \leqslant cr^{-\alpha},\quad M\in\Omega,\ \alpha>0. \tag{36}$$

Требуется найти решение $U(M)$ однородного уравнения (26) в D, удовлетворяющее неравенству

$$|U(M)| \leqslant cr^{-\alpha}(1+\delta(\alpha)\,|\ln r|) \tag{37}$$

и краевому условию

$$U(M)|_{M\in\Omega} = \varphi(M). \tag{38}$$

Пусть $t' = \cos(\varphi-\varphi')\sin\theta'$.

Рассмотрим функцию

$$H = \frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2-2r\rho t'+\rho^2}}}{(r^2-2r\rho t'+\rho^2)^{3/2}} + \lambda\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2-2r\rho t'+\rho^2}}}{r^2-2r\rho t'+\rho^2}.$$

Аналогично, как и выше, разлагая H в ряд по степеням ρ, получим

$$H=\sum_{k=0}^{\infty} h_k(r,\ t')\,\rho^k,\ \text{при}\ \frac{\rho}{r}<q<1,$$

где

$$h_k(r,\ t')=\frac{1}{2\pi i r^{k+3}}\int\limits_{|z|=q}\frac{e^{-\lambda r\sqrt{1-2zt'+z^2}}}{(1-2zt'+z^2)^{3/2}\,z^{k+1}}\,dz+\frac{\lambda}{2\pi i r^{k+2}}\times$$

$$\times\int\limits_{|z|=q}\frac{e^{-\lambda r\sqrt{1-2zt'+z^2}}}{(1-2zt'+z^2)\,z^{k+1}}\,dz.$$

Обозначим

$$H_n=H-\sum_{k=0}^{n} h_k(r,\ t')\,\rho^k.$$

Ясно, что функция

$$U^0(M)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_0} f(\rho,\ \varphi)\,H_{[\alpha]-2}\,r\rho\cos\Theta'\,d\rho\,d\varphi \tag{39}$$

является решением уравнения (26) в D, удовлетворяет неравенству (37) и граничному условию (38) в окрестности начала координат. Далее нетрудно найти все функции, определенные равенством (30) и обращающиеся в нуль на плоскости $z=0$. Число таких функций для любого n равно n. Пусть $\{V_n^k\}_{k=1}^{n}$ — эти функции. Аналогично, как и в первой задаче, можно показать, что любое решение задачи 3 представляется в виде

$$U(M)=U^0(M)+\sum_{n=0}^{[\alpha]-1}\sum_{k=1}^{n} c_n^k\,V_n^k+W(M), \tag{40}$$

где $U^0(M)$ определяется равенством (39), $W(M)$ — решение уравнения (26) в области D, непрерывное в замкнутой области $\overline{D}$. Подставляя (40) в граничное условие (38) для определения $W(M)$, получим уравнение (26) с граничным условием

$$W(M)|_{M\in\Omega}=\varphi(M)-U^0(M)|_{M\in\Omega}-\sum_{n=0}^{[\alpha]-1}\sum_{k=1}^{n} c_n^k\,V_n^k(M)|_{M\in\Omega}\,. \tag{41}$$

Ясно, что правая часть в равенстве (41) — непрерывная функция на Ω. Решая задачу (26)—(41), получим все решения задачи 3. Отсюда, в частности, следует

Теорема 9. *Однородная задача* 3 ($\varphi(M)=0,\ M\neq 0$) *имеет* $\frac{[\alpha]\,([\alpha]-1)}{2}$ *линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.*

4. Пусть $\varphi(x,\ y)$ —непрерывная на плоскости $z=0$ функция, удовлетворяющая неравенству (4).

Задача 4. Требуется найти в полупространстве $z>0$ решение уравнения

$$L(U)=\Delta U+2a_1\frac{\partial U}{\partial x}+2a_2\frac{\partial U}{\partial y}+2a_3\frac{\partial U}{\partial z}-kU=0,\ k>0, \tag{42}$$

удовлетворяющее неравенству (4) в полупространстве $z>0$ и граничному условию

$$U(x, y, 0) = \varphi(x, y). \tag{43}$$

Пусть

$$E(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, e^{-a_1x - a_2y - a_3z - \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+k}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Обозначим

$$F(x, y, z, \xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial\xi}[E(\xi - x, \eta - y, \zeta - z) - E(\xi - x, \eta - y, \zeta + z)]_{\zeta=0}.$$

Ясно, что функция

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z, \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\,d\xi d\eta$$

является решением задачи 4 в случаях, когда $k>0$ и $k=0$, $a_3\neq 0$. Единственность этой задачи в рассматриваемом классе, когда $k>0$, или когда $k=0$, $a_3<0$ доказана в работах [6], [7].

В случае, когда $k=0$, $a_3>0$ в работе (7) доказано, что решение однородной задачи 4 ($\varphi(x, y)\equiv 0$) в рассматриваемом классе имеет вид

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0}^{[\alpha]}\sum_{l=0}^{[\alpha]-k} x^k y^l\ T_{k, l}(z). \tag{44}$$

Подставляя (44) в уравнение (42) и в однородные граничные условия (43) ($\varphi(x, y)\equiv 0$) и приравнивая соответствующие коэффициенты при $x^k y^l$, $k+l\leqslant[\alpha]$, получим

$$T''_{k,l}(z) + 2a_3 T'_{k,l}(z) = 0,\ \ k+l=[\alpha],$$

$$T''_{k,l}(z) + 2a_3 T'_{k,l}(z) + 2a_1(k+1)\,T_{k+1,l}(z) + 2a_2(l+1)\,T_{k,l+1}(z) = 0,$$
$$k+l=[\alpha]-1,$$

$$T''_{k,l}(z) + 2a_3 T'_{k,l}(z) + (k+1)(k+2)\,T_{k+2,l}(z) + (l+1)(l+2)\,T_{k,l+2}(z) +$$
$$+ 2a_1(k+1)\,T_{k+1,l}(z) + 2a_2(l+1)\,T_{k,l+1}(z) = 0,\ \ k+l<[\alpha]-2,$$
$$T_{k,l}(0) = 0,\ \ k+l\leqslant[\alpha].$$

Эта система имеет $\frac{([\alpha]+1)([\alpha]+2)}{2}$ линейно независимых решений полиномиального роста по z, при $z\to+\infty$, причем они удовлетворяют оценкам

$$|T_{k,l}(z)| \leqslant c_1(1+|z|)^{[\alpha]-k-l},\ \ k+l\leqslant[\alpha].$$

При $k>0$ однородная задача имеет бесконечное число линейно независимых ограниченных решений.

Из предыдущих рассуждений следует

Теорема 10. *Неоднородная задача 4 (при $k>0$, или $k=0$ $a_3\neq 0$) всегда разрешима. Однородная задача 4 ($\varphi(x, y)\equiv 0$) не имеет* *нетривиальных решений при* $k > 0$, *или* $k = 0$, $a_3 < 0$ *и имеет* $\frac{([\alpha]+1)([\alpha]+2)}{2}$ *линейно независимых решений, при* $k = 0$, $a_3 > 0$.

В заключение выражаю благодарность профессору Товмасяну Н. Е., под руководством которого выполнена работа.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 26. V. 1984

Ս. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ Եզրային խնդիրներ երկրորդ կարգի էլիպտիկ հավասարումների համար ոչ հանրագումարելի ֆունկցիաների դասում *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկված են եզրային խնդիրներ

$$\Delta U = f,$$

$$\Delta U + \mu U = f,\ \mu = \mathrm{const} < 0,$$

հավասարումների համար, որտեղ Δ*-ն Լապլասի օպերատորն է* R^3*-ում, f-ը և եզրային ֆունկցիան ունեն եզակիություններ վերջավոր թվով կետերում և աստիճանային կարգ անվերջությունում։ Կառուցված են անհամասեռ խնդիրների մասնավոր լուծումներ և գտնված են համասեռ խնդիրների գծորեն անկախ լուծումները համապատասխան դասերում։ Ստացված են ճշգրիտ գնահատականներ այդ լուծումների համար։*

S. G. KHACHATRIAN. *Boundary problems for the second order elliptical equations in the classes of nonintegrable functions* (summary)

Boundary problems for the equations

$$\Delta U = f(M),$$

$$\Delta U(M) + \mu U(M) = f(M),\ \mu = \mathrm{const} < 0,$$

where Δ denotes Laplacian in R^3, are considered, when $f(M)$ and the boundary function have peculiarities in finitely many points and power-type order at infinity. Partial solutions for heterogeneous problems are constructed. Linearly independent solutions for homogeneous problems are found in the corresponding classes. Precise estimates for these solutions are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ж. Трев.* Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, М., Мир, 1969.
2. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., Мир, 1965.
3. *В. П. Паломодов.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., Наука, 1967.
4. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Уравнения математической физики, М., Наука, 1972.
5. *Н. Е. Товмасян.* О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классах функций, имеющих особенности на границе области, Сибирский мат. журнал, т. 11, № 2, 1961.
6. *Г. В. Дикополов.* О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве. Мат. сборник, 1962, т. 59 (101). № 2, 215—228.
7. *Н. Е. Товмасян.* Общая граничная задача для системы дифференциальных уравнений в полуплоскости с нарушением условия Я. Б. Лопатинского, Диф. уравнения, 1984, т. 20, № 1.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

АЙАСТАНИ ГИТУТЮННЕРИ АКАДЕМИАИ ТЕХЕКАГИР, МАТЕМАТИКА

В журнале публикуются оригинальные исследования в следующих основных направлениях: комплексный и вещественный анализ, теория операторов, теория дифференциальных уравнений в частных производных, теория вероятностей.

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

Сдано в набор 22.10. 1985, Подписано к печати 23.12. 1985. ВФ 06921.
Учет.-изд. 6.0. Тираж 575. Заказ 1118. Издат. 6641.
Бумага № 1, 70×108[1]/16. Высокая печать. Печ. лист. 4,75. Усл. печ. лист. 6,65.
Адрес редакции: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б, т. 27-97-318.

Издательство АН АрмССР, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1985 թ. XX, №№ 1—6

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия «Математика» за 1985 г., XX, №№ 1—6

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, seria "Matematika", 1985, vol. XX, № 1—6