ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилии автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

1985

ԳԻՆԸ ЦЕНА 85 Կ. К. Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Parpers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 5, 1985 Математика

УДК 517.518.3

Г. Г. ГЕВОРКЯН

ОБ U_p^*-МНОЖЕСТВАХ СИСТЕМ ХААРА, УОЛША И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Дадим одно определение.

Определение (см. [1], опр. 2). Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система функций на отрезке $[a, b]$. Скажем, что $E \subset [a, b]$ является U_p^*-множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}$, если из того, что $\sum_n |a_n|^p < +\infty$ и $\sum_n a_n \varphi_n(x) = 0$ всюду на E следует, что все a_n равны нулю.

Очевидно, что если E является U_p^*-множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}$, то оно является также $U_{p'}^*$-множеством при любом $p' < p$.

Если система $\{\varphi_n(x)\}$ полна и является системой сходимости, то U_2^*-множествами являются только и только множества полной меры.

Из одной теоремы работы [2]—[4] (см. [2], теорема 1, [3], [4]), вытекает следующая

Теорема А. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — полная в $L_2[0,1]$ ортонормированная система функций. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset [0,1]$, $\mu E < \varepsilon$, которое является U_p^*-множеством системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при любом $p < 2$.*

В работе [5] доказано существование множеств меры нуль, которые являются U_p^*-множествами для тригонометрической системы при любом $p < 2$. Аналогичные теоремы для систем Хаара и Уолша получены в работе [6].

Вышеуказанные результаты являются частными случаями теорем работы [1]. Пусть $\{\psi_n(x)\}$ — одна из следующих систем: система Хаара, система Уолша, тригонометрическая система $\{e^{2\pi inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. В работе [1] доказаны следующие теоремы.

Теорема Б. *Для любого p, $1 < p \leqslant 2$, существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, которое не является U_p^*-множеством для $\{\psi_n(x)\}$ и является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p' < p$.*

Теорема В. *Для любого p, $1 \leqslant p < 2$, существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, которое является U_p^*-множеством для системы $\{\psi_n(x)\}$ и не является $U_{p'}^*$-множеством для всех $p' > p$.*

В настоящей работе доказываются теоремы, аналогичные теоремам Б и В для $p > 2$. Однако, очевидно, что в таких теоремах для $p > 2$ множество E должно иметь полную меру. Вообще, если система $\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством локализации, то U_p^*-множества системы $\{\varphi_n(x)\}$ при $p \geqslant 2$ должны иметь полную меру.

Если объединить теоремы, доказанные в настоящей работе, то их можно сформулировать следующим образом. Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — одна из следующих систем:

1. система Хаара — $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$,
2. система Уолша—Пели—$\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$,
3. тригонометрическая система в следующей нумерации:

$$\psi_0(x)=1,\ \psi_{2n-1}(x)=e^{2\pi inx},\ \psi_{2n}(x)=e^{-2\pi inx} \text{ при } n\geqslant 1.$$

Тогда верны следующие теоремы.

Теорема Г. *Для любого p, $2<p\leqslant\infty$, существует множество $E\subset[0,1]$, $\mu E=1$, которое не является U_p^*-множеством для системы $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'<p$.*

Теорема Д. *Для любого p, $2\leqslant p<\infty$ существует множество $E\subset[0,1]$, $\mu E=1$, которое является U_p^*-множеством для системы $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и не является $U_{p'}^*$-множеством при всех $p'>p$.*

Теоремы $Г$ и $Д$ для каждой из вышеуказанных систем доказываются в отдельности.

В дальнейшем через C будут обозначаться константы, вообще говоря. зависящие от p, причем $C_i=C_i(p)$ ограничены. если $p\in[a,b]\subset(2,+\infty)$ Учитывая это обстоятельство константы C_i можно считать абсолютными константами (см. доказательства теорем 1—6).

Теорема 1. *Для любого p, $2<p\leqslant\infty$ существует множество $E\subset[0,1]$, $\mu E=1$, которое не является U_p^*-множеством для системы Хаара, но является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'<p$.*

Теорема 2. *Для любого p, $2\leqslant p<\infty$ существует множество $E\subset[0,1]$, $\mu E=1$, которое является U_{p}^*-множеством системы Хаара, но не является $U_{p'}^*$-множеством при всех $p'>p$.*

Мы докажем только теорему 1. Теорема 2 доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 1. Для заданного $p<\infty$ выберем натуральные числа m_j и k_j, $j=1,2,\ldots$, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$k_{j-1}+m_{j-1}<k_j, \tag{1}$$

$$m_j<-j\frac{2}{p}+k_j\left(-\frac{2}{p}+1\right)-\left(\sum_{\alpha=1}^{j-1}m_\alpha\right)\left(2-\frac{2}{p}\right), \tag{2}$$

$$j\frac{2}{q_j}-\frac{2}{q_j}\sum_{\alpha=1}^{j-1}m_\alpha+k_j\left(\frac{2}{q_j}-1\right)<m_j, \tag{3}$$

где

$$q_j=\frac{p-\dfrac{p-2}{j}}{p-1-\dfrac{p-2}{j}},\ \text{т. е. сопряженное к } p_j=p-\frac{p-2}{j}. \tag{4}$$

Выбор таких m_j и k_j возможен в силу того, что $1-\dfrac{2}{p}>\dfrac{2}{q_j}-1$. Обозначим

$$A_j=\bigcup_{\varkappa=0}^{2^{k_j}-1}\left(\frac{\varkappa}{2^{k_j}},\ \frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j}}\right). \tag{5}$$

Покажем, что множество $E=[0,1]\setminus\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ является требуемым.

Обозначим

$$E_j=\bigcap_{\alpha=1}^{j} A_\alpha. \tag{6}$$

Мера множества A_j равна 2^{-m_j}. Условие (1) обеспечивает независимость множеств A_j. Поэтому $\mu E_j=2^{-\sum\limits_{\alpha=1}^{j} m_\alpha}$. Докажем, что множество E, являющееся дополнением пересечения вложенных множеств E_j, является $U_{p'}^*$-множеством для системы Хаара при любом $p'<p$. Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ сходится к нулю всюду на E и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^{p'}<+\infty$ для некоторого $p'<p$. Допустим, что для некоторого n коэффициент a_n не равен нулю. Пусть Δ— носитель функции $\chi_n(x)$, $\Delta^+=\{x\in[0,1]:\chi_n(x)>0\}$, $\Delta^-=\{x\in[0,1]:\chi_n(x)<0\}$. Возьмем полиномы $\varphi_j(x)$ по системе Хаара со следующими свойствами:

1. если $\left(\frac{\varkappa}{2^{k_j}},\ \frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j}}\right)\subset E_l\cap\Delta$, то

$$\varphi_j(x)=\operatorname{sign}\left(\chi_n\left(\frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j+1}}\right)\right)(\mu\Delta)^{-1/2}\ \text{на}\ \left(\frac{\varkappa}{2^{k_j}},\ \frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j}}\right)$$

и

$$\varphi_j(x)=-\operatorname{sign}\left(\chi_n\left(\frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j+1}}\right)\right)\cdot(\mu\Delta)^{-1/2}\ \text{на}$$

$$\left(\frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j}},\ \frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{2}{2^{k_j+m_j}}\right).$$

2. $\varphi_j(x)=0$ — в остальных случаях.

Учитывая (3) нетрудно видеть, что $\left(\hat{g}_\chi(n)=\int\limits_0^1 g(x)\chi_n(x)\,dx\right)$

$$\sum_n|\hat{\varphi}_{j,\chi}(n)|^{q_j}\leqslant\left(\frac{(\mu\Delta)^{-1/2}}{2^{\frac{k_j+m_j-1}{2}}}\right)^{q_j}\frac{2^{-\sum\limits_{\alpha=1}^{j}m_\alpha}}{2^{-k_j-m_j+1}}\leqslant$$

$$\leqslant(\mu\Delta)^{-\frac{q_j}{2}}\cdot 2^{k_j\left(1-\frac{q_j}{2}\right)-m_j\frac{q_j}{2}-1+\frac{q_j}{2}-\sum\limits_{\alpha=1}^{j-1}m_\alpha}\leqslant(\mu\Delta)^{-1}\cdot 2^{-j}.$$

Для функций $\psi_j(x)=\chi_n(x)-\varphi_j(x)$ имеем

$$\hat{\psi}_{j,\chi}(n)=1,\ \sum_{k\neq n}|\hat{\psi}_{j,\chi}(k)|^{q_j}\leqslant(\mu\Delta)^{-1}\cdot 2^{-j}, \tag{7}$$

$$\psi_j(x)=0\ \text{на}\ E_j. \tag{8}$$

Из того, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ сходится к нулю вне $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ и дополнение каждого E_j является объединением конечного числа отрезков типа Хаара (см. [7], [8]), следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ вне каждого E_j равномерно сходится к нулю. Поэтому из (8) следует

$$0=\lim_{m\to\infty}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \chi_k(x)\right)\psi_j(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \widehat{\psi}_{j,\chi}(k). \tag{9}$$

Из (7) и (9) для достаточно больших j (для которых $q_j > q'$) получим

$$|a_n| \leqslant \sum_{k\neq n} |a_k|\,|\widehat{\psi}_{j,\chi}(k)| \leqslant \left\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^{p'}\right\}^{1/p'} \left\{\sum_{k\neq n}|\widehat{\psi}_{j,\chi}(k)|^{q'}\right\}^{1/q'} \leqslant \tag{10}$$

$$\leqslant \left\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^{p'}\right\}^{1/p'} \{(\mu\Delta)^{-1}\,2^{-j}\}^{1/q_j}.$$

Правая часть неравенства (10) стремится к нулю при $j\to\infty$. Это противоречит тому, что $a_n\neq 0$. Этим доказано, что E является $U^*_{p'}$-множеством для системы Хаара при любом $p'<p$.

Теперь построим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \chi_n(x)$, который сходится к нулю на E и $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^p<+\infty$. Для этого достаточно построить полиномы по системе Хаара $f_j(x)$, которые обладают следующими свойствами:

1. $f_0(x)\equiv 1$,

2. $\widehat{f}_{j,\chi}(n)=0$, когда $n\leqslant 2^{k_j}$ или $n>2^{k_j+m_j}$, $j=1, 2,\cdots$,

3. $\sum_{j=0}^{m} f_j(x)=0$ вне E_m и $\sum_{j=1}^{m} f_j(x)=2^{\sum_{\alpha=1}^{m} m_\alpha}$ на E_m, $m=1, 2,\cdots$,

4. $\sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{f}_{j,\chi}(n)|^p<2^{1-j}$, $j=1, 2,\cdots$.

В качестве функций $f_j(x)$ при $j>1$ возьмем

$$f_j(x)=\begin{cases} -2^{\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha}, & \text{когда } x\in E_{j-1}\setminus E_j\\ 2^{\sum_{\alpha=1}^{j} m_\alpha}-2^{\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha}, & \text{когда } x\in E_j\\ 0, & \text{когда } x\overline{\in} E_{j-1}.\end{cases} \tag{11}$$

Свойства 2 и 3 очевидны. Проверим выполнение свойства 4. Очевидно, что

$$\|f_j\|_2^2 < 2^{2\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha} \cdot \mu E_{j-1} + 2^{2\sum_{\alpha=1}^{j} m_\alpha} \cdot \mu E_j < 2 \cdot 2^{\sum_{\alpha=1}^{j} m_\alpha}. \tag{12}$$

Коэффициенты Фурье-Хаара функции $f_j(x)$ для $n \overline{\in} (2^{k_j}, 2^{k_j+m_j}]$ равны нулю. Пусть $n \in (2^{k_j}, 2^{k_j+m_j}]$, тогда для некоторого натурального $\varkappa$ имеем

$$\widehat{f}_{j,\varkappa}(n) = \int_{\frac{\varkappa}{2^{k_j}}}^{\frac{\varkappa+1}{2^{k_j}}} f_j(x)\, \chi_n(x)\, dx. \tag{13}$$

Из условия (1) следует, что $\left[\frac{\varkappa}{2^{k_j}}, \frac{\varkappa+1}{2^{k_j}}\right] \subset E_j$. Поэтому (см. (5))

$$\widehat{f}_{j,\varkappa}(n) = 2^{\sum_{\alpha=1}^{j} m_\alpha} \int_{\left[\frac{\varkappa}{2^{k_j}}, \frac{\varkappa+1}{2^{k_j}}\right] \cap E_j} \chi_n(x)\, dx = 2^{\sum_{\alpha=1}^{j} m_\alpha} \int_{\frac{\varkappa}{2^{k_j}}}^{\frac{\varkappa}{2^{k_j}} + \frac{1}{2^{k_j+m_j}}} \chi_n(x)\, dx.$$

Следовательно

$$|\widehat{f}_{j,\varkappa}(n)| \leqslant 2^{\sum_{\alpha=1}^{j} m_\alpha} \cdot \|\chi_n\|_\infty \cdot 2^{-k_j-m_j} \leqslant 2^{\sum_{\alpha=1}^{j} m_\alpha - \frac{k_j+m_j}{2}}. \tag{14}$$

Из (12), (14) и (2) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}_{j,\chi}(n)|^p = \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}_{j,\chi}(n)|^2\, |\widehat{f}_{j,\chi}(n)|^{p-2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot 2^{\sum_{\alpha=1}^{j} m_\alpha} \cdot 2^{\left(\sum_{\alpha=1}^{j} m_\alpha - \frac{k_j+m_j}{2}\right)(p-2)} =$$

$$= 2 \cdot 2^{\left(\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha\right)(p-1) - k_j\left(\frac{p}{2}-1\right) + \frac{p}{2} m_j} \leqslant 2^{1-j}.$$

В случае $p < \infty$ теорема доказана.

В случае $p = \infty$ числа k_j и m_j нужно выбрать следующим образом:

$$k_{j-1} + m_{j-1} < k_j$$

$$m_j < k_j - 2\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha,$$

$$2(j-1) - 2\left(1 - \frac{1}{j}\right)\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha + k_j\left(1 - \frac{2}{j}\right) < m_j.$$

В остальном доказывается аналогично. Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 числа k_j и m_j нужно взять такими, чтобы удовлетворялись условия

$$m_{j-1}+k_{j-1}<k_j,$$

$$k_j\left(\frac{p-2}{p}\right)+\left(\sum_{\alpha=1}^{j-1}m_\alpha\right)\frac{2(p-1)}{p}+j\,\frac{2(p-1)}{p}<m_j,$$

$$m_j<-j\,\frac{2}{p+\frac{1}{j}}+k_j\left(1-\frac{2}{p+\frac{1}{j}}\right)-\left(\sum_{\alpha=1}^{j-1}m_\alpha\right)\left(2-\frac{2}{p+\frac{1}{j}}\right).$$

Пусть I — некоторый отрезок типа Хаара, т. е. $I=\left[\frac{x}{2^k},\frac{x+1}{2^k}\right]$.

Разделим I на 2^ν равных частей: $\Delta_j=\left[\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}},\frac{x}{2^k}+\frac{j}{2^{k+\nu}}\right]$, $j=1,2,\cdots,2^\nu$. Обозначим $\delta_j=\left[\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}},\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}+\frac{1}{2^{k+\nu+m}}\right]$, т. е. левый конец δ_j совпадает с левым концом Δ_j и $\mu\Delta_j/\mu\delta_j=2^m$. Положим

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}(\Delta_j\setminus\delta_j)\\ 1-2^m & \text{на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}\delta_j\\ 0 & \text{на } [0,1]\setminus I,\end{cases}\tag{15}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 \text{ на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}\delta_j=\bigcup_j\left[\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}},\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}+\frac{1}{2^{k+m+\nu}}\right]\\ -1 \text{ на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}\left[\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}+\frac{1}{2^{k+m+\nu}},\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}+\frac{2}{2^{k+m+\nu}}\right]\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}\tag{16}$$

Легко заметить, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ полиномы по системе Уолша.

Обозначим $\widehat{\psi}_W(n)=\int_0^1\psi(t)\,W_n(t)\,dt$, $n=0,1,2,\cdots$, где $\{W_n(x)\}_{n=0}^\infty$ — система Уолша в нумерации Пели.

Верна следующая (см. [1], лемма 2)

Лемма 1. *Для любого p, $2<p<\infty$ и любого ν верны следующие неравенства:*

$$1^\circ\ \sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{f}_W(n)|^p<C_1\cdot 2^{m-k(p-1)},$$

$$2^\circ\ \sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{\varphi}_W(n)|^q<C_1\cdot 2^{(k+m)/(1-p)},$$

где q — сопряженное к p, т. е. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Применяя эту лемму можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Для любого p, $2 < p \leqslant \infty$, существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 1$, которое не является U_p^*-множеством для системы Уолша и является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p' < p$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $p < \infty$. Построим ряд $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ из полиномов $f_j(x)$ по системе Уолша, у которого коэффициенты суммируются со степенью p и множество, где этот ряд по системе Уолша сходится к нулю является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p' < p$.

Возьмем $f_1(x) \equiv 1$. Выберем токое натуральное число k_2, чтобы нашлось натуральное число m_2, удовлетворяющее следующим неравенствам:

$$\left(p - \frac{p-2}{2} - 2\right) k_2 + 2\left(p - \frac{p-2}{2} - 1\right) < m_2 < -2 + k_2 (p-2). \qquad (17)$$

Отрезок [0,1] разделим на 2^{k_2} равных отрезка и в каждом из них построим функции $\varphi_2^{(j)}(x)$ и $f_2^{(j)}(x)$ (см. (15), (16)), которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{\varphi}_{2,W}^{(j)}(n)|^p < C_1 \cdot 2^{m_2 - k_2(p-1)}, \qquad (18)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}_{2,W}^{(j)}(n)|^{q_2} < C_1 \cdot 2^{\frac{k_2+m_2}{1-\left(p-\frac{p-2}{2}\right)}}, \qquad (19)$$

где q_2 сопряженное к $p - \dfrac{p-2}{2}$.

При этом соответствующие ν при построении $\varphi_2^{(j)}(x)$ и $f_2^{(j)}(x)$ можно взять такими, что если обозначить $\varphi_2(x) = \sum_j \varphi_2^{(j)}(x)$ и $f_2(x) = -\sum_j f_2^{(j)}(x)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{\varphi}_{2,W}(n)|^p < C_1 \cdot 2^{m_2 - k_2(p-1)} \cdot 2^{k_2} \qquad (20)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}_{2,W}(n)|^{q_2} < C_2 \cdot 2^{\frac{k_2+m_2}{1-\left(p-\frac{p-2}{2}\right)}} \cdot 2^{k_2}. \qquad (21)$$

Этого можно добиться следующим образом. Для любого j существует такое $n(j)$, что $\widehat{f}_{2,W}^{(j)}(n) = 0$ и $\widehat{\varphi}_{2,W}^{(j)}(n) = 0$ для $n > n(j)$. Необходимо при построении функций $f_2^{(j+1)}(x)$ и $\varphi_2^{(j+1)}(x)$ числа ν взять настолько большими, чтобы первые $n(j)$ коэффициентов Фурье по системе Уолша у функций $f_2^{(j)}(x)$ и $\varphi_2^{(j)}(x)$ были нулями.

Функция $f_1(x) + f_2(x)$ равна нулю там, где $\varphi_2(x)$ не равна единице. Обозначим

$$E_2=\{x\in[0,1]: f_1(x)+f_2(x)\neq 0\}.$$

Функция $f_1(x)+f_2(x)$ принимает значение 2^{m_2} на E_2 и $\mu E_2=2^{-m_2}$. Существует n_2 такое, что $\widehat{f_{2,}}\,w(n)=0$ при $n\geqslant 2^{n_2}$.

Множество E_2 является объединением конечного числа отрезков типа Хаара. Выберем число k_3 так, чтобы 2^{-k_3} было меньше чем длина наименьшего составляющего отрезка множества E_2 и нашлось натуральное число m_3 такое, чтобы

$$\left(p-\frac{p-2}{3}\cdot 2\right)k_3+\left(1-p+\frac{p-2}{3}\right)m_2+3\left(p-\frac{p-2}{3}-1\right)<m_3<$$

$$<-3+k_3(p-2)+(p-1)m_2. \tag{22}$$

Каждый составляющий отрезок множества E_2 разделим на отрезки длины 2^{-k_3} (их всего $2^{k_3-m_2}$) и в каждом из них построим функции $f_3^{(j)}(x)$ и $\varphi_3^{(j)}(x)$ так, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{f_{3,}^{(j)}}w(n)|^p<C_1\cdot 2^{m_3-k_3(p-1)},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{f_{3,}^{(j)}}w(n)|^{q_3}<C_1\cdot 2^{\frac{m_3+k_3}{1-\left(p-\frac{p-2}{3}\right)}}, \tag{23}$$

где q_3 — сопряженное к $p-\dfrac{p-2}{3}$.

Обозначим $\varphi_3(x)=\sum_j\varphi_3^{(j)}(x)$ и $f_3(x)=-(\sum_j f_3^{(j)}(x))\cdot 2^{m_2}$. При построении функций $\varphi_3^{(j)}(x)$ и $f_3^{(j)}(x)$ соответствующие ν можно взять такими, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{\varphi_{3,}}w(n)|^{q_3}<C_1\cdot 2^{\frac{m_3+k_3}{1-\left(p-\frac{p-2}{3}\right)}}\cdot 2^{k_3-m_2}, \tag{24}$$

$$\sum_{n=2^{n_2}}^{\infty}|\widehat{f_{3,}}w(n)|^p<C_1\cdot 2^{m_3-k_3(p-1)}\cdot 2^{k_3-m_2}\cdot 2^{pm_2}, \tag{25}$$

$$\widehat{f_{3,}}w(n)=0,\ \text{когда}\ n\leqslant 2^{n_2}. \tag{26}$$

Пусть уже построены функции $f_i(x)$, $\varphi_i(x)$ и множества E_i $(i<j)$ так, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{\varphi_{i,}}w(n)|^{q_i}<C_1\cdot 2^{\frac{m_i+k_i}{1-\left(2-\frac{p-2}{i}\right)}}\cdot 2^{k_i-\sum\limits_{\alpha=2}^{i-1}m_\alpha}, \tag{27}$$

где q_i — сопряженное к $p-\dfrac{p-2}{i}$,

$$\sum_{n=2^{n_{i-1}}}^{\infty}|\widehat{f_{i,}}w(n)|^p<C_1\cdot 2^{m_i-k_i(p-2)+(p-1)\sum\limits_{\alpha=2}^{i-1}m_\alpha}, \tag{28}$$

$$\widehat{f}_{l,\,W}(n)=0, \text{ когда } n\leqslant 2^{n_{l-1}} \text{ или } n>2^{n_l}, \tag{29}$$

$$E_l=\left\{x\in[0,1]:\sum_{\alpha=1}^{l} f_\alpha(x)\neq 0\right\},\quad \mu E_l=2^{-\sum\limits_{\alpha=2}^{l} m_\alpha}, \tag{30}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{l} f_\alpha(x)=2^{\sum\limits_{\alpha=2}^{l} m_\alpha} \text{ на } E_l, \tag{31}$$

$E_l\subset E_{l-1}$ является объединением конечного числа отрезков типа (32) Хаара,

$$\left(p-\frac{p-2}{i}-2\right)k_l+\left(1-p+\frac{p-2}{i}\right)\left(\sum_{\alpha=2}^{l-1}m_\alpha-i\right)<m_l<-i+$$

$$+k_l(p-2)+(p-1)\sum_{\alpha=2}^{l-1}m_\alpha. \tag{33}$$

Теперь можно построить функции $f_l(x)$ и $\varphi_l(x)$ и множество E_l которые удовлетворяют соотношениям (27)—(33) (они строятся так же как и $\varphi_3(x)$ и $f_3(x)$, исходя из $f_1(x)$, $f_2(x)$ и E_2).

Напомним, что функции $f_j(x)$ и $\varphi_j(x)$—полиномы по системе Уолша. Из (28), (29) и (33) для коэффициентов ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)=$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{f}_{j,\,W}(n)|^p\right)\leqslant$$

$$\leqslant 1+C_1\sum_{l=2}^{\infty} 2^{m_l-k_l(p-2)+(p-1)\sum\limits_{\alpha=2}^{l-1}m_\alpha}\leqslant 1+C_1\sum_{j=2}^{\infty}2^{-j}<+\infty. \tag{34}$$

Из (30), (32) и (34) следует, что коэффициенты ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ сходятся к нулю и всюду на $E=[0,1]\setminus\bigcap\limits_{l=1}^{\infty}E_l$

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{n=0}^{2^{n_l}}a_n W_n(x)=0.$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ всюду на E сходится к нулю (см. [9], лемма 1). Из этого и из неравенства (34) следует, что E не является U_p^*-множеством для системы Уолша, так как $a_0=1$.

Теперь докажем, что E является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'<p$. Пусть ряд $\sum\limits^{\infty} b_n W_n(x)$ сходится к нулю всюду на E и

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^{p'}<+\infty \text{ при некотором } p'<p. \tag{35}$$

Рассмотрим функции $\psi_j(x)=1-\varphi_j(x)$. Функции $\psi_j(x)$ обладают следующими свойствами:

$$\psi_j(x)=0 \text{ на } E_j, \tag{36}$$

$$\hat{\psi}_{j,W}(0)=1 \text{ для любого } j, \tag{37}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\hat{\psi}_{j,W}(n)|^{q_j}\leqslant C_1\cdot 2^{\frac{m_j+k_j}{1-\left(p-\frac{p-2}{j}\right)}}\cdot 2^{k_j-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha}. \tag{38}$$

Так как функции $\psi_j(x)$ являются полиномами по системе Уолша, можно рассмотреть формальные произведения ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ на $\psi_j(x)$. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(j)} W_n(x) \tag{39}$$

является формальным произведением ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ на $\psi_j(x)$, т. е. коэффициенты $C_n^{(j)}$ определяются по формулам

$$C_n^{(j)}=\sum_{m\dotplus\nu=n} b_m\hat{\psi}_j(\nu). \tag{40}$$

Из (36) и из того, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)=0$ на E следует, что ряды (39) всюду сходятся к нулю. Следовательно, все $C_n^{(j)}$ равны нулю. Для достаточно больших j q_j меньше чем q', где q' — сопряженное к p'. Поэтому из

$$0=C_n^{(j)}=\sum_{m\dotplus\nu=n} b_m\hat{\psi}_j(\nu)=b_n+\sum_{\substack{m\dotplus\nu=n\\ \nu\neq 0}} b_m\hat{\psi}_j(\nu)$$

имеем (см. (38) и (33))

$$|b_n|\leqslant\sum_{m\dotplus\nu=n}|b_m|\,|\hat{\psi}_j(\nu)|\leqslant\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^{p'}\right\}^{1/p'}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\hat{\psi}_j(\nu)|^{q'}\right\}^{1/q'}\leqslant$$

$$\leqslant A^{1/p'}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\hat{\psi}_j(\nu)|^{q_j}\right\}^{1/q_j}\leqslant C_1^{1/q_j}A^{1/p'}\left\{2^{\frac{m_j+k_j}{1-\left(p-\frac{p-2}{j}\right)}}\cdot 2^{k_j-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha}\right\}^{1/q_j}\leqslant$$

$$< C_1^{1/q_j}A^{1/p'}\left\{2^{\frac{\left(p-\frac{p-2}{j}-2\right)k_j+\left(1-p+\frac{p-2}{j}\right)\left(\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha-j\right)+k_j}{1-\left(p-\frac{p-2}{j}\right)}}\right. \times$$

$$\times 2^{\left|k_j-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha\right|^{1/q_j}} = C_1^{1/q_j} A^{1/p'} \cdot 2^{-j\frac{1}{q_j}}. \qquad (41)$$

Устремляя j к бесконечности из (41) получим, что все b_n равны нулю. В случае $p<\infty$ теорема доказана.

Рассмотрим случай $p=\infty$. Функции $f_j(x)$ и $\varphi_j(x)$ строятся теми же методами, только вместо чисел p и $p-\dfrac{p-2}{j}$ берутся, соответственно, ∞ и j. Тогда вместо неравенств (27), (28) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{\varphi}_{j,w}(n)|^{q_j} \leqslant C_1 \cdot 2^{\frac{m_j+k_j}{1-j}}\, 2^{k_j-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}, \qquad (42)$$

где q_j — сопряженное к j.

$$\|\widehat{f}_{j,w}(n)\|_\infty \leqslant C_1 2^{-k_j}, \qquad (43)$$

$$\widehat{f}_{j,w}(n)=0, \text{ когда } n\leqslant 2^{n_{j-1}} \text{ или } n>2^{n_j}. \qquad (44)$$

Неравенство (43) следует из того, что для функции $f(x)$, определяемой формулой (15), $\|f\|_1 < 2\cdot 2^{-k}$.

Кроме того числа k_j и m_j выбираются так, чтобы

$$k_j > j \qquad (45)$$

и

$$m_j > j(j-1)+(j-2)k_j+(1-j)\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha. \qquad (46)$$

Как и в случае $p<\infty$ доказывается, что ряд $\sum f_j(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ сходится к нулю на $E=[0,1]\setminus \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in[0,1]: \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\neq 0\right\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ и $a_0=1$. Поэтому E не является U_∞^*-множеством.

Теперь докажем, что E является $U_{p'}^*$-множеством для любого $p'<\infty$. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ сходится к нулю на E и

$$A=\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^{p'} < +\infty \text{ для некоторого } p'<\infty. \qquad (47)$$

Рассмотрим формальные произведения ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ на полиномы $\psi_j(x)=1-\varphi_j(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(j)} W_n(x), \text{ где } C_n^{(j)}=\sum_{m+\nu=n} b_m \widehat{\psi}_{j,w}(\nu). \qquad (48)$$

Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(j)} W_n(x)$ всюду сходятся к нулю. Следовательно, все $C_n^{(j)}$ равны нулю.

Поэтому из

$$0=C_n^{(j)}=b_n+\sum_{\substack{m+\nu=n\\ \nu\neq 0}} b_m\hat{\psi}_{j,\,w}(\nu)$$

для достаточно больших j из (42) и (46) получим (для которых $j>p'$)

$$|b_n|\leqslant\sum_{\substack{m+\nu=n\\ \nu\neq 0}}|b_m|\,|\hat{\psi}_{j,\,w}(\nu)|<\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|b_m|^{p'}\right\}^{1/p'}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\hat{\varphi}_{j,\,w}(\nu)|^{q'}\right\}^{1/q'}\leqslant$$

$$\leqslant A^{1/p'}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\hat{\varphi}_{j,\,w}(\nu)|^{q_j}\right\}^{1/q_j}\leqslant C_1^{1/q_j}A^{1/p'}\{2^{\frac{m_j+k_j}{1-j}}\,2^{k_j-\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha}\}^{1/q_j}\leqslant$$

$$\leqslant C_1^{\frac{1}{q_j}}A^{\frac{1}{p'}}\,2^{-\frac{j}{q_j}}. \tag{49}$$

Устремляя j к бесконечности из (49) получим, что все b_n равны нулю. Теорема 3 полностью доказана.

Используя оценки леммы 1, такими же методами как доказывалась теорема 3, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Для любого p, $2\leqslant p<\infty$, существует U_p^*-множество, которое не является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'>p$ для системы Уолша.*

Для доказательства теоремы 4 в случае $2<p<\infty$ числа m_j и k_j нужно взять такими, чтобы

$$(p-2)\,k_j+j\,(p-1)+(1-p)\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha<m_j<k_j\left(p-2+\frac{p-2}{j}\right)+$$

$$+\left(\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha\right)\left(1-p-\frac{p-2}{j}\right),$$

а в случае $p=2$

$$2\leqslant m_j<\frac{k_j}{j}+\left(\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha\right)\left(1+\frac{1}{j}\right)-j.$$

Технически несколько сложнее доказываются аналогичные теоремы для тригонометрической системы. А именно, верны следующие теоремы.

Теорема 5. *Для любого p, $2<p\leqslant\infty$, существует множество $E\subset[-\pi,\pi]$, $\mu E=2\pi$, которое не является U_p^*-множеством для тригонометрической системы и является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'<p$.*

Теорема 6. *Для любого p, $2\leqslant p<\infty$, существует множество $E\subset[-\pi,\pi]$, $\mu E=2\pi$, которое является U_p^*-множеством для тригонометрической системы и не является $U_{p'}^*$-множеством при всех $p'>p$.*

В случае $p=2$ теорема 6 доказана Ивашев-Мусатовым [10].

Обозначим через

$$\lambda_h(x)=\begin{cases}\dfrac{(9h+x)^2}{6h^2}, & -9h\leqslant x\leqslant -7h\\ 1-\dfrac{(x+6h)^2}{3h^2}, & -7h\leqslant x\leqslant -6h\\ 1, & -6h\leqslant x\leqslant -3h\\ 1-\dfrac{(x+3h)^2}{3h^2}, & -3h\leqslant x\leqslant -2h,\ \lambda_h(-x)=-\lambda_h(x)\\ \dfrac{x^2}{6h^2}, & -2h\leqslant x\leqslant 0\\ 0\ , & -\pi\leqslant x\leqslant -9h\end{cases} \tag{50}$$

при условии $9h<\pi$ и продолжим ее с перидом 2π

Ясно, что $\hat{\lambda}_h(0)=0\left(\hat{g}(n)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\,e^{-inx}\,dx\right)$. Подсчитаем остальные коэффициенты Фурье функции $\lambda_h(x)$

$$\hat{\lambda}_h(n)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-9h}^{9h}\lambda_h(t)\,e^{-int}\,dt=\frac{i}{\pi}\int\limits_{0}^{9h}\lambda_h(t)\sin nt dt=\frac{-i}{n^2\pi}\int\limits_{0}^{9h}\lambda_h''(t)\sin nt dt=$$

$$=\frac{-2i}{n^2h^2\pi}\left\{-\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{2h}\sin nt dt+\frac{2}{3}\int\limits_{2h}^{3h}\sin nt dt+\frac{2}{3}\int\limits_{6h}^{7h}\sin nt dt-\frac{1}{3}\int\limits_{7h}^{9h}\sin nt dt\right\}=$$

$$=\frac{i}{3n^3h^2\pi}(1-3\cos 2nh+2\cos 3nh-2\cos 6nh+3\cos 7nh-\cos 9nh)=$$

$$=\cdots=\frac{8i}{3n^3h^2\pi}\sin\frac{9}{2}nh\sin\frac{nh}{2}\left(\cos 7nh\cos\frac{nh}{2}-\cos 2nh\right). \tag{51}$$

Возьмем какой-нибудь отрезок $\left[\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa}{2^k}\pi\right]$, где $k\in\mathbf{N}$, $\varkappa\in[-2^k+1, 2^k]\cap\mathbf{N}$. Разделим этот отрезок на 2^ν равных частей: $\left[\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}\pi,\ \frac{\varkappa-1}{2^k}\pi+\frac{j}{2^{k+\nu}}\pi\right]$, $j=1, 2,\cdots, 2^\nu$ и положим

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{2^\nu}\lambda_h(x-\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}), \tag{52}$$

где $\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}=\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi+\frac{j-\frac{1}{2}}{2^{k+\nu}}\pi$ и $h=\frac{\pi}{2^{k+\nu+m}}$. Функция $\varphi(x)$ на множестве $\bigcup\limits_{j=1}^{2^\nu}[\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-6h, \gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-3h]$ принимает значение 1. Положим

$$f(x)=\begin{cases} 2^m-1 & \text{на } \bigcup\limits_{j=1}^{2^\nu}[\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-5h,\ \gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-4h] \\ -1 & \text{на } \left[\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa}{2^k}\pi\right]\setminus\left(\bigcup\limits_{j=1}^{2^\nu}[\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-5h,\ \gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-4h]\right) \\ 0 & \text{вне } \left[\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa}{2^k}\pi\right]. \end{cases} \tag{53}$$

Лемма 2. *Пусть $2<p<\infty$, N и ε — любые положительные числа. Тогда существует некоторая константа C_2, такая, что при достаточно больших ν имеют место следующие неравенства:*

1°. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|^p\leqslant C_2\cdot 2^{(1-p)k+m}$,

2°. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}(n)|^q\leqslant C_2\cdot 2^{k+m/1-p}$, *где q—сопряженное к p;*

3°. $|\hat{f}(n)|<\varepsilon$, $|\hat{\varphi}(n)|<\varepsilon$ *при* $|n|\leqslant N$.

Доказательство. Нетрудно подсчитать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx\leqslant 2^{-k+1}\cdot\pi \tag{54}$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx<\pi\cdot 2^{m+1-k}. \tag{55}$$

Из (54) и (55) получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|^p=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|^2|\hat{f}(n)|^{p-2}<\sup_n|\hat{f}(n)|^{p-2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|^2\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx\right\}^{p-2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\leqslant C_3\cdot 2^{(1-p)k+m}. \tag{56}$$

Теперь докажем неравенство 2°. Ясно, что

$$\hat{\varphi}(n)=\hat{\lambda}(n)\sum_{j=1}^{2^\nu}e^{-in\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}}=\lambda_h(n)\sum_{j=1}^{2^\nu}e^{-in\left[\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi+\frac{j-\frac{1}{2}}{2^{k-\nu}}\pi\right]}=$$

$$=\hat{\lambda}(n)\frac{\sin\frac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}}e^{-in\pi\frac{\varkappa-\frac{1}{2}}{2^k}}=\frac{8i}{3n^3\pi}\sin\frac{9}{2}nh\sin\frac{nh}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}}\times$$

$$\times\left(\cos 7hn\cos\frac{hn}{2}-\cos 2hn\right)e^{-in\pi\frac{\varkappa-\frac{1}{2}}{2^k}}=\frac{8in\cdot 2^{\nu(k+\nu+m)}}{3n^3\pi^3}\times$$

$$\times \sin \frac{9\pi n}{2^{k+\nu+m+1}} \cdot \sin \frac{\pi n}{2^{k+\nu+m+1}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin \frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}} \times \tag{57}$$

$$\times \left(\cos \frac{7\pi n}{2^{k+m+\nu}} \cdot \cos \frac{\pi n}{2^{k+m+\nu+1}} - \sin \frac{2\pi n}{2^{k+m+\nu}} \right) e^{-ln\pi \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{2^k} \right)}.$$

Используя тождество

$$\cos 14x \cos x - \cos 4x = \sin \frac{9}{2}x \sin \frac{17}{2}x - \sin \frac{9}{2}x \sin \frac{19}{2}x$$

и неравенство $|\sin \alpha x| \leqslant C(\alpha) |\sin x|$, где $C(\alpha)$ — постоянная, зависящая только от целого числа α, получим

$$|\hat{\varphi}(n)| \leqslant C_4 \frac{2^{2(k+\nu+m)}}{|n|^3} \left| \sin \frac{\pi n}{2^{k+\nu+m+2}} \right|^3 \left| \frac{\sin \frac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin \frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}} \right| \text{ для } n \neq 0. \tag{58}$$

Если $\sin \frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}} = 0$, то значением дроби $\left|\sin \frac{\pi n}{2^{k+1}}\right| \cdot \left|\sin \frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}\right|^{-1}$ в формулах (57) и (58) считается 2^ν.

Достаточно оценить $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\hat{\varphi}(n)|^p$. При этом неоднократно пользуемся следующими соотношениями: $\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x$, когда $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}(\pi - x) \leqslant \sin x \leqslant \pi - x$, когда $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\sum\limits_{q=1}^{\mu} \alpha^q \asymp \mu^{q+1}$.

$$\sum_{n=2^{k+m+\nu+2}}^{\infty} |\hat{\varphi}(n)|^p \leqslant C_4^p \cdot 2^{(k+\nu+m)2p} \sum_{n=2^{k+\nu+m+2}}^{\infty} \frac{1}{n^{3p}} \left| \sin \frac{\pi n}{2^{k+\nu+m+2}} \right|^{3p} \times$$

$$\times \left| \frac{\sin \frac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin \frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}} \right|^p = C_4^p \cdot 2^{(k+m+\nu)2p} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{2^{m+1}-1} \sum_{\gamma=0}^{2^\nu-1} \sum_{\delta=0}^{2^{k+1}-1}$$

$$\left(\frac{1}{(\alpha \cdot 2^{k+\nu+m+2} + \beta \cdot 2^{k+\nu+1} + \gamma \cdot 2^{k+1} + \delta)^{3p}} \right.$$

$$\left. \left| \sin \frac{(\beta \cdot 2^{k+\nu+1} + \gamma \cdot 2^{k+1} + \delta)\pi}{2^{k+\nu+m+1}} \right|^{3p} \left| \frac{\sin \frac{\delta\pi}{2^{k+1}}}{\sin \frac{(\gamma \cdot 2^{k+1} + \delta)\pi}{2^{k+\nu+1}}} \right|^p \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \cdot 2^{(k+\nu+m)2p} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{3p} \cdot 2^{(k+m+\nu+1)3p}} \sum_{\beta=0}^{\infty} \left(\frac{\beta+1}{2^m} \right)^{3p} \sum_{\gamma=1}^{2^\nu-1} \sum_{\delta=0}^{2^{k+1}-1} \left| \frac{\sin \frac{\delta\pi}{2^{k+1}}}{\sin \frac{\gamma\pi}{2^\nu}} \right|^p \leqslant$$

$$C_6\cdot 2^{-(k+m+\nu)p}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{3p}}\times\sum_{\beta=1}^{2^{m+1}}\frac{\beta^{3p}}{2^{3mp}}\times\sum_{\gamma=1}^{2^{\nu}}\frac{2^{\nu p}}{\gamma^{p}}\sum_{\delta=0}^{2^{k+l}}\frac{\delta^{p}}{2^{kp}}\leqslant$$

$$\leqslant C_7\cdot 2^{-(k+m+\nu)p}\cdot\frac{2^{m(3p+1)}}{2^{3mp}}\cdot 2^{\nu p}\cdot\frac{2^{k(p+1)}}{2^{kp}}=C_7\cdot 2^{(1-p)(k+m)}. \tag{59}$$

Из (58) для $0<n<2^{k+\nu+m+2}$ имеем

$$|\widehat{\varphi}(n)|\leqslant C_8\,\frac{1}{2^{k+\nu+m+2}}\left|\frac{\sin\dfrac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin\dfrac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}}\right|,$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{2^{k+\nu+m+2}-1}|\widehat{\varphi}(n)|^{p}\leqslant C_9\sum_{\beta=0}^{2^{m+1}-1}\sum_{\gamma=0}^{2^{\nu}-1}\sum_{\delta=0}^{2^{k+1}-1}|\widehat{\varphi}(\beta\cdot 2^{k+\nu+1}+\gamma\cdot 2^{k+1}+\delta+1)|^{p}\leqslant$$

$$\leqslant C_9\cdot 2^{-(k+\nu+m)p}\sum_{\beta=0}^{2^{m+1}-1}\sum_{\gamma=0}^{2^{\nu}-1}\sum_{\delta=0}^{2^{k+1}-1}\left|\frac{\sin\dfrac{(\delta+1)\pi}{2^{k+1}}}{\sin\dfrac{(\gamma\cdot 2^{k+1}+\delta+1)\pi}{2^{k+\nu+1}}}\right|^{p}\leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\cdot 2^{-(k+\nu+m)p}\sum_{\beta=0}^{2^{m+1}-1}\sum_{\gamma=1}^{2^{\nu}-1}\sum_{\delta=0}^{2^{k+1}-1}\frac{2^{\nu p}}{\gamma^{p}}\cdot\frac{\delta^{p}}{2^{kp}}\leqslant \tag{60}$$

$$\leqslant C_{11}\cdot 2^{-(k+m+\nu)p}\cdot 2^{m}\cdot 2^{\nu p}\cdot\frac{2^{k(p+1)}}{2^{kp}}=C_{11}\cdot 2^{(k+m)(1-p)}.$$

Из (59) и (60) следует неравенство 2°. Неравенства 3° легко доказываются прямым подсчетом, однако они следуют и из известных теорем (см., напр., [11], стр. 86, [12], стр. 167, [13], стр. 77).

Доказательство теоремы 5. Сначала рассмотрим случай $p<\infty$. Для доказательства теоремы по индукции построим функции $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$, множества E_j и G_j, натуральные числа n_j, k_j и m_j, которые обладают следующими свойствами:

1) $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_j\supset\cdots$ и каждое E_j является объединением конечного числа интервалов вида $\left(\frac{\varkappa}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa+3}{2^k}\pi,\right)$. Если $\left(\frac{\varkappa}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa+3}{2^k}\pi\right)$ — составляющий интервал множества E_j, $j\geqslant 2$, то $\left(\frac{\varkappa+1}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa+2}{2^k}\pi\right)$ — составляющий интервал множества G_j и наоборот;

2) $\varphi_j(x)=1$ на E_j и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{\varphi}_j(n)|\,|n|<+\infty$, $j\geqslant 2$;

3) $\sum\limits_{\alpha=1}^{j}f_\alpha(x)=2^{\sum\limits_{\alpha=2}^{j}m_\alpha}$ на G_j и $\sum\limits_{\alpha=1}^{j}f_\alpha(x)=0$ на $[-\pi,\pi]\setminus G_j$, причем $\mu G_j=2\pi\cdot 2^{-\sum\limits_{\alpha=2}^{j}m_\alpha}$;

4) $\hat{\varphi}_j(0)=0,\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_j(n)|^{q_j} < C_{12}\cdot 2^{\frac{m_j+k_j}{1-p_j}+k_j-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}$, где q_j — сопряженное к $p_j = p - \frac{p-2}{j}$,

5) $f_1(x)\equiv 1$, $\hat{f}_j(0)=0$ для $j\geqslant 2$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_j(n)|^p < C_{12}\cdot 2^{m_j-k_j(p-2)+(p-1)\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha},$$

6) $\sum_{|n|<n_{j-1}} |\hat{f}_j(n)|^p < 2^{-j}$,

7) $\sum_{|n|>n_j} \left|\sum_{\alpha=1}^{j} \hat{f}_\alpha(n)\right|^p < 2^{-j}$,

8) Если обозначим через $S_n(f_j, x)$ частичные суммы ряда Фурье функции $f_j(x)$, то

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{j} S_n(f_\alpha, x)\cdot\right| < 2^{-j} \text{ для } n > n_j \text{ и всех } x \overline{\in} E_j,$$

9) $|S_n(f_j, x)| < 2^{-j}$ для всех n и $x \overline{\in} E_{j-1}$,

10) $\left(p-\frac{p-2}{j}-2\right)k_j+\left(1-p+\frac{p-2}{j}\right)\left(\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha - 1\right) < m_j$,

11) $m_j < -j + k_j(p-2) - (p-1)\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha$.

Допустим, что такие функции $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$, множества E_j и G_j, натуральные числа n_j, k_j и m_j уже построены. Докажем, что в этом случае множество $E = [-\pi, \pi] \setminus \bigcap_{l=1}^{\infty} E_l$ является требуемым.

Из свойства 6) следует, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{f}_j(n)|$ сходится при любом n. Поэтому можно рассмотреть ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_j e^{inx}, \quad \text{где} \quad a_n = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{f}_j(n).$$

Оценим ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^p$.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^p = 1 + \sum_{|n|>} |a_n|^p = 1 + \sum_{n|>0} \left|\sum_{\alpha=1}^{\infty} \hat{f}_\alpha(n)\right|^p = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}$$

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{\infty} \hat{f}_\alpha(n)\right|^p = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{n_{j-1}<|n|<n_j} \left|\sum_{\alpha=1}^{j-1} \hat{f}(n) + \hat{f}_j(n) + \sum_{\alpha=j+1}^{\infty} \hat{f}_\alpha(n)\right|^p \leqslant$$

$$\leqslant 1 + C_{13} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{n_{j-1}<|n|<n_j} \left[\left|\sum_{\alpha=1}^{j-1} \hat{f}_\alpha(n)\right|^p + |\hat{f}_j(n)|^p + \left|\sum_{\alpha=j+1}^{\infty} \hat{f}_\alpha(n)\right|^p\right] \leqslant$$

$$\leqslant 1 + C_{13}\Bigg(\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}\Big|\sum_{\alpha=1}^{j-1}\widehat{f}_\alpha(n)\Big|^p + \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}|\widehat{f}_j(n)|^p +$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}\Big|\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}\widehat{f}_\alpha(n)\Big|^p\Bigg) = 1 + C_{13}(I_1+I_2+I_3). \tag{61}$$

Отдельно оценим суммы I_1, I_2, I_3. Из свойства 7) имеем

$$I_1 \leqslant \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_{j-1}<|n|}\Big|\sum_{\alpha=1}^{j-1}\widehat{f}_\alpha(n)\Big|^p \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} 2^{-j} < 1. \tag{62}$$

Применив свойства 5), 11), для I_2 получим

$$I_2 \leqslant \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}_j(n)|^p \leqslant C_{12}\sum_{j=2}^{\infty} 2^{m_j - k_j(p-2)+(p-1)\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha} <$$

$$< C_{12}\sum_{j=2}^{\infty} 2^{-j} < C_{12}. \tag{63}$$

Для оценки суммы I_3 применим неравенство Гельдера к сумме $\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}\Big|\sum_{\alpha=i+1}^{\infty} f_\alpha(n)\Big|^p$. Получим (см. свойство 6))

$$\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}\Big|\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}\widehat{f}_\alpha(n)\Big|^p \leqslant \Bigg\{\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}\Big\{\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}|\widehat{f}_\alpha(n)|^p\Big\}^{1/p}\Bigg\}^p \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg\{\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}\Big\{\sum_{|n|<n_{\alpha-1}}|\widehat{f}_\alpha(n)|^p\Big\}^{1/p}\Bigg\}^p \leqslant \Bigg\{\sum_{\alpha=j+1}^{\infty} 2^{-\frac{\alpha}{p}}\Bigg\}^p \leqslant C_{14}\, 2^{-j}. \tag{64}$$

Из (61) — (64) следует, что $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^p < +\infty$, причем $a_0 = 1 \neq 0$. Теперь докажем, что ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ всюду на E сходится к нулю. Пусть x принадлежит множеству E. Тогда начиная с некоторого j_0 (см. 1)) $x \in E_j$, $j > j_0$. Обозначим через $S_n(x)$ частичные суммы ряда $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$. Тогда из 8) и 9) для $n \geqslant n_j$, $j > j_0$ получим

$$|S_n(x)| = \Big|\sum_{\alpha=1}^{\infty} S_n(f_\alpha, x)\Big| \leqslant \Big|\sum_{\alpha=1}^{j} S_n(f_\alpha, x)\Big| + \sum_{\alpha=j+1}^{\infty}|S_n(f_\alpha, x)| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-j} + \sum_{n=j+1}^{\infty} 2^{-\alpha} = 2^{1-j}. \tag{65}$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ всюду на E сходится к нулю. Этим доказано, что E не является U_p^*-множеством для тригонометрической системы.

Докажем, что E является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p' < p$. Пусть ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{inx}$ всюду на E сходится к нулю и

$$\beta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n|^{p'} < +\infty. \tag{66}$$

Рассмотрим функции $\psi_j(x) = 1 - \varphi_j(x)$. Функции $\psi_j(x)$ удовлетворяют следующим соотношениям (см. 2), 4)):

$$\psi_j(x) = 0 \text{ на } E_j, \tag{67}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}_j(n)|\,|n| < +\infty, \tag{68}$$

$$\sum_{|n|>1} |\widehat{\psi}_j(n)|^{q_j} < C_{12} \cdot 2^{\frac{m_j+k_j}{1-p_j}+k_j-\sum\limits_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha}. \tag{69}$$

Обозначим через

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(j)} e^{inx}, \quad j = 1, 2, 3, \cdots \tag{70}$$

формальное произведение ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{inx}$ на ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}_j(n)\, e^{inx}$, т. е.

$$C_n^{(j)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}_j(k)\, b_{n-k}.$$

Из (67), (68) и из того что $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{inx} = 0$ на E (см. [14], стр. 520) следует, что все ряды (70) всюду сходятся к нулю. Следовательно, все $C_n^{(j)}$ равны нулю. Поэтому

$$0 = C_n^{(j)} = b_n + \sum_{|k|>1} \widehat{\psi}_j(k)\, b_{n-k}. \tag{71}$$

Пусть q' — сопряженное к p' и $q_j < q'$. Тогда для $j < j_0$ получим (см. (71). (66), 4), 11))

$$|b_n| \leqslant \sum_{|k|>1} |\widehat{\psi}_j(k)\, b_{n-k}| \leqslant \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_j(k)|^{q'} \right\}^{1/q'} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |b_n|^{p'} \right\}^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_j(k)|^{q_j} \right\}^{1/q_j} \beta^{1/p'} \leqslant C_{13}\, \beta^{1/p'} \left[2^{\frac{m_j+k_j}{1-p_j}+k_j-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}\right]^{1/q_j} \leqslant$$

$$< C_{13} \cdot \beta^{1/p'} \cdot 2^{-\frac{j}{q_j}}. \tag{72}$$

Устремляя j к ∞ из (72) получим, что все b_n равны нулю.

Теперь перейдем к построению функций $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$, множеств E_j и G_j, натуральных чисел n_j, k_j и m_j, которые удовлетворяют условиям 1)—11).

Возьмем такие натуральные числа m_2 и k_2, которые удовлетворяют неравенствам 10) и 11). Разделим отрезок $[-\pi, \pi]$ на 2^{k_2+1} равных по длине отрезков: $\Delta_1, \Delta_2 \cdots, \Delta_{2^{k_2+1}}$. В каждом из отрезков Δ_j построим функции $f_2^{(j)}(x)$ и $\varphi_2^{(j)}(x)$, определяемые формулами (53) и (52), которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_2^{(j)}(n)|^p \leqslant C_2 \cdot 2^{(1-p)k_2+m_2}, \tag{73}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_2^{(j)}(n)|^{q_2} \leqslant C_2 \cdot 2^{\frac{k_2+m_2}{1-p_2}}. \tag{74}$$

Учитывая пункт 3° леммы 2 соответствующие ν при определении функций $\varphi_2^{(j)}(x)$, $f_2^{(j)}(x)$ можно взять такими, чтобы

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_2(n)|^p \leqslant 4C_2 \cdot 2^{(1-p)k_2+m_2} \cdot 2^{k_2} \tag{75}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_2(n)|^{q_2} \leqslant 4 \cdot C_2 \cdot 2^{\frac{k_2+m_2}{1-p_2}} \cdot 2^{k_2}, \tag{76}$$

где $f_2(x) = \sum_j f_2^{(j)}(x)$, $\varphi_2(x) = \sum_j \varphi_2^{(j)}(x)$.

Для этого нужно при построении функций $f_2^{(j)}(x)$ и $\varphi_2^{(j)}(x)$ взять $n_2^{(j)}$ такое, чтобы $\sum_{|n|>n_2^{(j)}} |\widehat{f}_2^{(1)}(n) + \cdots + \widehat{f}_2^{(j-1)}(n)|^p < \varepsilon_1^{(j)}$ и $\sum_{|n|>n_2^{(j)}} |\widehat{\varphi}_2^{(1)}(n) + \cdots + \widehat{\varphi}_2^{(j-1)}(n)|^{q_2} < \varepsilon_2^{(j)}$ и взять ν в функциях $f_2^{(j)}(x)$ и $\varphi_2^{(j)}(x)$ такое, чтобы $|\widehat{\varphi}_2^{(j)}(n)| < \delta_2^{(j)}$ и $|\widehat{f}_2^{(j)}(n)| < \delta_2^{(j)}$, когда $|n| < n_2^{(j)}$. Если выбрать $\varepsilon_1^{(j)}$ и $\delta_2^{(j)}$ достаточно малыми, тогда выполняется (75) и (76).

Обозначим $E_1 = [-\pi, \pi]$.

$G_2 = \{x \in [-\pi, \pi]: 1 + f_2(x) \neq 0\}$, $E_2 = \{x \in [-\pi, \pi]: \varphi_2(x) = 1\}$.

Возьмем $n_1 = 1$ и выберем n_2 такое, чтобы

$$\sum_{|n|>n_2} |\sum_{\alpha=1}^{2} \widehat{f}_\alpha(n)|^p < 2^{-2}$$

и

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{2} S_n(f_\alpha, x)\right| = |S_n(1+f_2, x)| < 2^{-2} \text{ для } n > n_2 \text{ и } x \overline{\in} E_2.$$

Построенные функции $f_2(x)$, $\varphi_2(x)$, множества E_2 и G_2, числа n_2, m_2 и k_2 удовлетворяют всем условиям 1)—11).

Допустим, что функции $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha=1}^{j-1}$ и $\{\varphi_\alpha(x)\}_{\alpha=2}^{j-1}$, множества $\{E_\alpha\}_{\alpha=1}^{j-1}$ и $\{G_\alpha\}_{\alpha=2}^{j-1}$, числа $\{n_\alpha\}_{\alpha=1}^{j-1}$, $\{m_\alpha\}_{\alpha=2}^{j-1}$ и $\{k_\alpha\}_{\alpha=2}^{j-1}$ уже построены и удовлетворяют условиям 1) —11). Построим функции $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$, множества E_j и G_j, числа n_j, k_j и m_j.

Из 1) следует, что

$$\gamma_j = \rho(G_{j-1}, E_{j-1}^c) = \inf_{\substack{x \in G_{j-1} \\ y \overline{\in} E_{j-1}}} |x - y| > 0.$$

Возьмем $k_j > k_{j-1}$ такое, чтобы существовало m_j, удовлетворяющее условиям 10), 11), $2^{-k_j}\pi$ было меньше чем длина наименьшего составляющего интервала множества G_{j-1} и

$$\frac{2^{-k_j}2\cdot 2^{\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}}{\gamma_j} < 2^{-j-4}. \tag{77}$$

Составляющие интервалы множества G_{j-1} разделим на отрезки длины $\pi 2^{-k_j}$: $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_\beta$, где $\beta = 2^{k_j+1-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}$, так как $\mu G_{j-1} = 2\pi \times \times 2^{-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}$. Возьмем произвольные положительные числа $\{\varepsilon_j^{(\gamma)}, \delta_j^{(\gamma)}\}_{\gamma=1}^{\beta}$. На отрезке Δ_1 построим функции $f_j^{(1)}(x)$ и $\varphi_j^{(1)}(x)$ такие, что

$$\sum_{|n|<n_{j-1}} |\hat{f}_j^{(1)}(n)|^p < 2^{-j-2}\cdot 2^{-p\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}, \tag{78}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_j^{(1)}(n)|^p < C_2\cdot 2^{(1-p)k_j+m_j}, \tag{79}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_j^{(1)}(n)|^{q_j} < C_3\cdot 2^{\frac{k_j+m_j}{1-p_j}}. \tag{80}$$

Выберем $n_j^{(1)}$ так, чтобы

$$\sum_{|n|>n_j^{(1)}} |\hat{f}_j^{(1)}(n)|^p < \varepsilon_j^{(1)}, \tag{81}$$

$$\sum_{|n|>n_j^{(1)}} |\hat{\varphi}_j^{(1)}(n)|^{q_j} < \varepsilon_j^{(1)} \tag{82}$$

и

$$|S_n(f_j^{(1)}, x)| < 2^{-j-2}\cdot 2^{-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha} \quad \text{для } n \geqslant n_j^{(1)} \text{ и } x \,\overline{\in}\, E_{j-1}. \tag{83}$$

Соотношение (83) имеет место для больших $n_j^{(1)}$, так как $f_j^{(1)}(x) = 0$ вне E_{j-1}. Так последовательно можно выбрать функции $f_j^{(\gamma)}(x)$, $\varphi_j^{(\gamma)}(x)$ и числа $n_j^{(\gamma)}$, которые будут удовлетворять следующим неравенствам:

$$|\hat{\varphi}_j^{(\gamma)}(n)| < \delta_j^{(\gamma)}, \text{ когда } |n| < n_j^{(\gamma)}, \tag{84}$$

$$|\hat{f}_j^{(\gamma)}(n)| < \delta_j^{(\gamma)}, \text{ когда } |n| < n_j^{(\gamma)}, \tag{85}$$

$$\sum_{|n|>n_j^{(\gamma)}} |\hat{\varphi}_j^{(1)}(n) + \cdots + \hat{\varphi}_j^{(\gamma-1)}(n)|^p < \varepsilon_j^{(\gamma)}, \tag{86}$$

$$\sum_{|n|>n_j^{(\gamma)}} |\hat{f}_j^{(1)}(n) + \cdots + \hat{f}_j^{(\gamma-1)}(n)|^p < \varepsilon_j^{(\gamma)}, \tag{87}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_j^{(\gamma)}(n)|^{q_j} \leqslant C_3\cdot 2^{\frac{k_j+m_j}{1-p_j}}, \tag{88}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_j^{(\gamma)}(n)|^p \leqslant C_2 \cdot 2^{(1-p)k_j+m_j}, \tag{89}$$

$$|S_n(f_j^{(\gamma)}, x)| < 2^{-j-\gamma} \cdot 2^{-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha} \quad \text{для } n > n_j^{(\gamma)} \text{ и } x \overline{\in} E_{j-1}, \tag{90}$$

$$S_n(f_j^{(\gamma+1)}, x)| < 2^{-j-\gamma} \cdot 2^{-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha} \quad \text{для } n < n_j^{(\gamma)} \text{ и } x \overline{\in} E_{j-1}. \tag{91}$$

Учитывая (77) и то, что $\int\limits_{\Delta_j} |f_j^{(\gamma)}(x)|\, dx < \pi \cdot 2^{-k_j+1}$ (см. (54) и определение функций $f(x)$), получим

$$|S_n(f_j^{(\gamma)}, x)| < \frac{\pi \cdot 2^{-k_j+1}}{\gamma_j} < 2^{-j-1} \cdot 2^{-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}. \tag{92}$$

Из (90), (91), (92) легко вытекает, что

$$\left|S_n\left(\sum_{\gamma=1}^{\beta} f_j^{(\gamma)}, x\right)\right| < 2^{-j} \cdot 2^{-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha} \quad \text{для всех } n \text{ и } x \overline{\in} E_{j-1}, \tag{93}$$

Выбирая $\varepsilon_j^{(\gamma)}$ и $\delta_j^{(\gamma)}$ достаточно малыми из (84), (86) и (88) получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\sum_{\gamma=1}^{\beta} \widehat{\varphi}_j^{(\gamma)}(n)\right|^{q_j} \leqslant 2\, C_2 \cdot \beta \cdot 2^{\frac{k_j+m_j}{1-p_j}} = 4 \cdot C_2 \cdot 2^{\frac{k_j+m_j}{1-p_j}+k_j-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}. \tag{94}$$

Обозначим $\varphi_j(x) = \sum_{\gamma=1}^{\beta} \varphi_j^{(\gamma)}(x)$, $f_j(x) = 2^{\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{\beta} f_j^{(\gamma)}(x)$ и

$$E_j = \{x \in [-\pi, \pi] : \varphi_j(x) = 1\}.$$

Очевидно

$$\sum_{\alpha=1}^{j} f_\alpha(x) = \begin{cases} 2^{\sum_{\alpha=2}^{j}} & \text{на } G_j \\ 0 & \text{вне } G_j, \end{cases}$$

где G — некоторое множество, удовлетворяющее условию 1). При достаточно малых $\varepsilon_j^{(\gamma)}$ и $\delta_j^{(\gamma)}$ из (85), (87), (89), получим также, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_j(n)|^p < 2\, C_2 \cdot \beta \cdot 2^{p\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}\, 2^{(1-p)k_j+m_j} = 4C_2 \cdot 2^{(2-p)k_j+m_j+(p-1)\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}$$

и

$$\sum_{|n|<n_{j-1}} |f_j(n)|^p < 2^{-j}.$$

Условие 9) следует из (93). Теперь можно выбрать число $n_j < n_j^{(\beta)}$ так чтобы выполнились условия 7) и 8). Таким образом, последовательности $\{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ построены и, тем самым, теорема в случае $p < \infty$ доказана.

В случае $p = \infty$ теорема доказывается аналогично, только числа k_j, m_j и n_j нужно выбрать такими, чтобы

$$m_j < k_j - \sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha,$$

$$2(j-1) + 2\left(1 - \frac{1}{j}\right)\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha + k_j\left(1 - \frac{2}{j}\right) < m_j$$

и вместо свойств 4)—7) выполнились следующие условия:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_j(n)|^{1+\frac{1}{j}} < C_{12} \cdot 2^{\frac{m_j+k_j}{1-j} + k_j - \sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha},$$

$$\sup_n |\hat{f}_j(n)| < C_{12},$$

$$\sup_{|n| < n_{j-1}} |\hat{f}_j(n)| < 2^{-j},$$

$$\sup_{|n| > n_j} \left| \sum_{\alpha=1}^{j} \hat{f}_\alpha(n) \right| < 2^{-j}.$$

Теорема доказана.

В случае $p = \infty$ теорему 5 сформулируем в другом виде.

Теорема 7. *Среди М-множеств тригонометрического ряда есть такие, что коэффициенты нуль-ряда, сходящегося к нулю на E, не суммируются ни с какой степенью $p < \infty$.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 12. III. 1984

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ. Հաարի, Ուոլշի և եռանկյունաչափական համակարգերի U^*_p-բազմությունների մասին. *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկված են Հաարի, Ուոլշի և եռանկյունաչափական համակարգերի U_p^*-բազմությունները։ Թվարկված համակարգերից ամեն մեկի համար ապացուցված է.

1. Կամայական p-ի համար, $2 < p < \infty$, գոյություն ունի $E \subset [0,1]$ բազմություն, $\mu E = 1$, որը չի հանդիսանում U_p^*-բազմություն, բայց հանդիսանում է $U_{p'}^*$-բազմություն կամայական $p' < p$ դեպքում,

2. Կամայական p-ի համար $2 < p < \infty$ գոյություն ունի U_p^*-բազմություն, որը չի հանդիսանում $U_{p'}^*$-բազմություն $p' > p$ դեպքում։

U_p^* բազմության սահմանումը տրված է [1]-ում։

G. G. GEVORKIAN. *On U_p^*-sets of Haar, Walsh and trigonometric systems* (summary)

In this paper we consider the U_p^*-sets of Haar, Walsh and trigonometric systems.

For every such system we prove

1. For every $p, 2 < p < \infty$ there exist a set $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 1$, which is not U_p^*-set, but is $U_{p'}^*$-set for every $p' < p$.

2. For every $p, 2 < p < \infty$ there exist U_p^*-set, which is not $U_{p'}^*$-set for every $p' > p$.

The definition of U_p^*-set was given in [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для некоторых ортогональных рядов. Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVIII, № 6, 1983, 448—475.
2. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для полных ортонормированных систем и интегралов Фурье, ДАН Арм.ССР, LXXII, № 4, 1981, 218—223.
3. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для полных ортонормированных систем, Мат. заметки, 32, № 5, 1982, 651—656.
4. *L. Golzani.* Existense of sets of uniqueness of l^p for General orthonormal Systems' Proc. A.M.S., Vol. 83, № 3, 1981, 569—571.
5. *L. Michele, P. M. Soordi.* A Remark of Sets of Uniqueness of l_p, Boll, U.M.I. (4), 11, 1975, 64—65.
6. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для рядов по некоторым полным ортонормированным системам, Ученые записки ЕГУ, № 2, 1981, 10—22.
7. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системе Хаара и Уолша, ИАН СССР, сер. математ., 28, № 6, 1964, 1391—1408.
8. *Г. М. Мушегян.* О множествах единственности для системы *Хаара,* Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 6, 1967, 350—361.
9. *В. А. Скворцов.* Пример ряда Уолша со всюду сходящейся к нулю подпоследовательностью частичных сумм, Матем. сб., 97, вып. 4, 1975, 517—539.
10. *О. С. Ивашев-Мусатов.* О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 1957, 559—578.
11. *А. А. Талалян.* Представление измеримых функций рядами, УМН, XV, 5 (95), 1960, 77—141.
12. *Г. Алексич.* Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., 1963.
13. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961.
14. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. 1, М., 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XX, № 5, 1985 Математика

УДК 517.946

Ф. О. МАМИКОНЯН

О НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

В основе многих известных аналитических методов классической теории уравнений лежат различные способы оценки решений. При этом существенную роль играют так называемые теоремы об операторных неравенствах, под которыми понимают утверждения, в которых указывается оценка решений неравенства $z \leqslant Vz$, где V — некоторый оператор в полуупорядоченном пространстве (в частности, дифференциальный или интегральный).

Такие теоремы являются удобным техническим аппаратом при изучении свойств решений дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных и разностных уравнений, при исследовании различных задач прикладного характера и поэтому им всегда посвящается большое число работ.

Если изучение одномерных интегральных и дифференциальных неравенств восходит, по существу, еще к Peano [1], то многомерные неравенства оказались в центре внимания только в последнее время, начиная, по-видимому, с Wendroff [2], который анонсировал несколько результатов в этом направлении. Из работ, близких по духу к предлагаемой, хотелось бы отметить работы G. Butler и T. Rogers [7], B. G. Pachpatte [6, 8. 9, 10], Lu—San Chen и Cheh—Chih Jeh [11], B. G. Pachpatte и S. M. Singare [12] и многие другие, в которых не только рассматриваются вопросы обращения таких неравенств, но и приводятся некоторые приложения.

Целью настоящей работы является дальнейшее изучение некоторых классов многомерных нелинейных операторных неравенств. В п. 1° сформулированы основные результаты, в п. 2° приводятся их доказательства.

1°. Пусть R_n — n-мерное вещественное эвклидово пространство, в котором введено обычное покоординатное полуупорядочение. Для некоторого неотрицательного r обозначим $I_r^n \equiv \{x=(x_1 \cdot x_n),\ 0 \leqslant x \leqslant r\}$ и $I^n \equiv \bigcup\limits_{r>0} I_r^n$.

Обозначим также $D_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $D_1 \cdots D_i \equiv D_i (D_1 \cdots D_{i-1}) (i=2, 3, \cdots, n)$.

Пусть, далее, P — множество всех целых неотрицательных чисел и $P_k \equiv \{0, 1, \cdots, k\}$. Обозначим через P_k^n n-кратное прямое произведение P_k с самим собой и $P^n \equiv \bigcup\limits_{k \in P} P_k^n$. Для определенной на множестве P^n функции $u(x)$ обозначим $\Delta_i u \equiv u (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i+1, x_{i+1}, \cdots, x_n) - u (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ и $\Delta_1 \cdots \Delta_i \equiv \Delta_i (\Delta_1 \cdots \Delta_{i-1})$ $(i=2, 3, \cdots, n)$.

Положим

$$\max_{0<t<y} a(t) \equiv \max_{t\in I_y^n} a(t) \quad (y \in I^n); \quad \max_{0<t<y} p(t) \equiv \max_{t\in P_y^n} p(t) \quad (y\in P^n)$$

для любых определенных соответственно на I^n и P^n функций $a(x)$ и $p(x)$. Будем также полагать некоторую сумму равной нулю, если суммирование ведется по пустому множеству индексов.

Рассматривается дифференциальное неравенство

$$D_1\cdots D_n u(x) \leqslant a(x) H[u(x)], \quad x\in I^n, \tag{1.1}$$

которое играет важную роль при изучении многих классов многомерных нелинейных интегральных и интегродифференциальных неравенств.

Теорема 1. *Пусть функция $a(x)$ непрерывна и неотрицательна на I^n, а $H(u)$ непрерывна, неотрицательна и не убывает на I.*

Пусть, далее, неотрицательная на I^n функция $u(x)$ такова, что

$$(D_1\cdots D_k u)\cdot D_{k+1} u \geqslant 0 \quad (k=1, 2,\cdots, n-1), \tag{1.2}$$

$$D_1\cdots D_k u|_{x_{k+1}=0} = 0 \quad (k=1, 2,\cdots, n-1). \tag{1.3}$$

Тогда, если для функции $u(x)$ имеет место неравенство (1.1), *то имеет место и неравенство*

$$G[u(x)] \leqslant G[u(x)]|_{x_1=0} + \int_0^x a(t)\,dt, \quad x\in I^n, \tag{1.4}$$

где

$$G(u) \equiv \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{H(s)} \quad (u\geqslant 0, \ u_0>0). \tag{1.5}$$

В частности

$$u(x) \leqslant G^{-1}\left\{ G[u(x)]|_{x_1=0} + \int_0^x a(t)\,dt \right\} \tag{1.6}$$

по крайней мере для тех $x\in I^n$, для которых

$$G(u)|_{x_1=0} + \int_0^x a(t)\,dt \in \mathrm{Dom}\,(G^{-1}). \tag{1.7}$$

Рассмотрим теперь разностное неравенство

$$\Delta_1\cdots\Delta_n u(x) \leqslant p(x) H[u(x)], \quad x\in P^n, \tag{1.8}$$

которое является дискретным аналогом неравенства (1.1). Имеет место

Теорема 2. *Пусть функция $p(x)$ определена и неотрицательна на P^n, а $H(u)$ непрерывна, неотрицательна и не убывает на I.*

Пусть, далее, неотрицательная на P^n функция $u(x)$ такова, что

$$\Delta_i u(x) \geqslant 0 \quad (i=1, 2,\cdots, n), \tag{1.9}$$

$$\Delta_1\cdots\Delta_i u(x)|_{x_{i+1}=0}=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n-1). \tag{1.10}$$

Тогда, если для функции $u(x)$ имеет место оценка (1.8), то имеет место и оценка

$$G[u(x)]\leqslant G[u(x)]_{x_1=0}+\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1}p(s_1\cdots s_n),\ x\in P^n, \tag{1.11}$$

где $G(u)$ определяется выражением (1.5). В частности

$$u(x)\leqslant G^{-1}\left\{G(u)|_{x_1=0}+\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1}p(s)\right\} \tag{1.12}$$

по крайней мере для тех $x\in P^n$, для которых

$$G(u)|_{x_1=0}+\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1}p(s)\in \mathrm{Dom}\,(G^{-1}). \tag{1.13}$$

Заметим, что оценки (1.4) и (1.11) (соответственно, (1.6) и (1.12)) не зависят от выбора u_0 в выражении (1.5). Действительно, полагая в (1.5) u_1 вместо u_0, получим

$$\overline{G}(u)\equiv\int_{u_1}^{u}\frac{ds}{H(s)}=G(u)-\delta,\ \text{где}\ \delta=\int_{u_0}^{u_1}\frac{ds}{H(s)},$$

откуда следует независимость (1.4) и (1.11) от выбора u_0. В свою очередь. $\overline{G}^{-1}(x)=G^{-1}(x+\delta)$, поэтому

$$\overline{G}^{-1}\{G(u)|_{x_1=0}+A\}=\overline{G}^{-1}\{G(u)|_{x_1=0}-\delta+A\}=G^{-1}\{G(u)|_{x_1=0}+A\},$$

что обеспечивает независимость (1.6) и (1.12) от выбора u_0.

Наиболее естественно положить $u_0=0$. Однако, как легко видеть, это можно сделать только в том случае, когда $G(u)$ имеет конечный предел при $u\to 0$. В противном случае выбор $u_0=0$ невозможен. В этом случае, кстати, условие $u(0, x_2, \ldots, x_n)\equiv 0$ влечет за собой тождество $u(x)\equiv 0$ на всем I_n.

Что касается множеств истинности оценок (1.6) и (1.12), определяемых соответственно условиями (1.7) и (1.13), они существенно зависят от конкретной функции $H(x)$.

Так, например, для дифференциального неравенства

$$D_1\cdots D_n u(x)\leqslant a(x)[u(x)]^{\alpha},\ (0<\alpha<1),\ x\in I^n \tag{1.14}$$

имеем

$$G(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{s^{\alpha}}=\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{u_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

если положить $u_0=0$. Тогда оценка (1.6) имеет вид

$$u(x)\leqslant\left\{[u(0, x_2\cdots x_n)]^{1-\alpha}+(1-\alpha)\int_0^x a(t)\,dt\right\}^{1/1-\alpha}, \tag{1.15}$$

причем имеет место для всех $x \in I^n$, так как $G(x)\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ и, следовательно, $G^{-1}(x)$ определена для всех неотрицательных x.

Если же рассматривать дифференциальное неравенство

$$D_1 \cdots D_n u(x) \leqslant a(x) \cdot e^{u(x)}, \quad x \in I^n, \tag{1.16}$$

то имеем

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} e^{-s}\, ds = \frac{e^u - e^{u_0}}{e^u \cdot e^{u_0}} = 1 - e^{-u},$$

если взять $u_0 = 0$. В этом случае $G(x)\colon [0, +\infty) \to [0,1)$ и область определения $G^{-1}(x)$ ограничена. Оценка (1.6) в данном случае принимает вид

$$u(x) \leqslant -\ln\left[e^{-u(0, x_2, \dots, x_n)} - \int_0^x a(t)\, dt\right] \tag{1.17}$$

и имеет место только для тех $x \in I^n$, для которых

$$0 < e^{-u(0, x_2 \dots x_n)} - \int_0^x a(t)\, dt < 1.$$

Частные случаи предложенных здесь формул обращения (1.6) и (1.12) известны по многим работам (см., например, [10], [11], [12]), где они играют вспомогательную роль.

Учитывая тесную связь между различными операторными неравенствами, полученные результаты можно применить для эффективного обращения широкого класса многомерных нелинейных интегральных, интегродифференциальных и разностных неравенств.

Рассмотрим, например, интегральное неравенство

$$F[u(x)] \leqslant f(x) + a(x) \int_0^x b(t)\, H[u(t)]\, dt, \quad x \in I^n. \tag{1.18}$$

Теорема 3. *Пусть функции $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ непрерывны и неотрицательны на I^n. Пусть, далее, функции $F(x)$ и $H(x)$ непрерывны и неотрицательны на I, причем $F(x)$ возрастает, а $H(x)$ не убывает на I.*

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.18) непрерывной и неотрицательной на I^n функции $u(x)$ имеет место оценка

$$\Omega \circ F[u(x)] \leqslant \Omega\left[\sup_{0<s<x} f(s)\right] + \sup_{0<s<x} a(s) \cdot \int_0^x b(t)\, dt, \quad x \in I^n, \tag{1.19}$$

где $\Omega \circ F$ означает композицию функций Ω и F, а

$$\Omega(u) \equiv \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{H \circ F^{-1}(s)} \quad (u > 0,\ u_0 > 0). \tag{1.20}$$

В частности

$$u(x)\leqslant F^{-1}\circ\Omega^{-1}\left\{\Omega\left[\sup_{0<s<x} f(s)\right]+\sup_{0<s<x} a(s)\cdot\int_0^x b(t)\,dt\right\} \tag{1.21}$$

по крайней мере для тех $x\in I^n$, для которых

$$\Omega\left[\sup_{0<s<x} f(s)\right]+\sup_{0<s<x} a(s)\cdot\int_0^x b(t)\,dt\in \mathrm{Dom}\,(F^{-1}\circ\Omega^{-1}).$$

Заметим, что если $H(0)=0$, $F(0)=0$, причем функция $\Omega(u)$ не имеет конечного предела при $u\to 0$, то условие $f(x)\equiv 0$ влечет за собой $u(x)\equiv 0$. Действительно, в этом случае получаем $F(u)\equiv 0$, а следовательно и $u(x)\equiv 0$ на всем I^n. Отсюда, в частности, следует, что интегральное уравнение

$$u(x)=\int_0^x a(t)\,H[u(t)]\,dt,\quad x\in I^n \tag{1.22}$$

имеет единственное решение $u(x)\equiv 0$, если только $H(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 и

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a \frac{ds}{H(s)}=+\infty\quad (a>0). \tag{1.23}$$

Полученная выше оценка (1.21) является непосредственным многомерным обобщением основополагающего результата I. Bihari [3], который рассматривал случай $n=1$, $F(u)=u$, $f(x)=\mathrm{const}$, $a(x)\equiv 1$. Отметим что оценка (1.21) содержит в себе результаты работ G. Butler и T. Rogers [7] (случай $n=1$), B. K. Bonge и B. G. Pachpatte [10] (случай $n=2$, $F(u)=u$, $f(x)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$, $a(x)\equiv 1$) и некоторых других.

В качестве примера рассмотрим важное с точки зрения приложений интегральное неравенство

$$u^m(x)\leqslant C+\int_0^x b(t)\,u^k(t)\,dt\quad (C=\mathrm{const},\ k>0,\ m>0),\quad x\in I^n. \tag{1.24}$$

В этом случае $F(u)=u^m$, $H(u)=u^k$ и, согласно (1.20)

$$\Omega(u)=\int_{u_0}^u \frac{ds}{H\circ F^{-1}(s)}=\int_{u_0}^u s^{-\frac{k}{m}}\,ds=\frac{u^{1-\frac{k}{m}}}{1-\frac{k}{m}}-\frac{u_0^{1-\frac{k}{m}}}{1-\frac{k}{m}}.$$

Пусть $m>k$. Тогда можно взять $u_0=0$ и получить $\Omega(u)=\dfrac{u^p}{p}$, где $p=\dfrac{m-k}{m}$. Тогда из (1.21) получаем

$$u(x) \leqslant \left\{ C^p + p \int_0^x b(t)\,dt \right\}^{\frac{1}{m-k}}, \quad x \in I^n. \tag{1.25}$$

В частности, если $m = 2$ и $k = 1$ имеет место оценка

$$u(x) \leqslant \sqrt{C} + \frac{1}{2}\int_0^x b(t)\,dt, \quad x \in I^n, \tag{1.26}$$

полученная для случая $n = 1$ в работе [4].

Если же $k > m$, u_0 нельзя выбрать равным нулю. Положим $u_0 = 1$. Тогда оценка (1.21) примет вид

$$\frac{u^{qm}-1}{q \cdot u^{qm}} \leqslant \frac{C^q - 1}{q \cdot C^q} + \int_0^x b(t)\,dt, \quad x \in I^n, \tag{1.27}$$

где $q = \dfrac{k-m}{m}$. Отсюда непосредственно следует оценка

$$u(x) \leqslant \left| \frac{C^q}{1 - q \cdot C^q \cdot \int_0^x b(t)\,dt} \right|^{1/(k-m)} \tag{1.28}$$

по крайней мере для тех $x \in I^n$, для которых

$$\int_0^x b(t)\,dt < \frac{1}{q \cdot C^q}.$$

Отметим, что если $C = 0$, из (1.28) следует $u(x) \equiv 0$ на всем I^n.

Отметим также, что более общий чем (1.18) класс интегральных неравенств

$$F[u(x)] \leqslant f(x) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x) \int_0^x \beta_i(t)\, H_i[u(t)]\,dt, \quad x \in I^n \tag{1.29}$$

может быть сведен к интегральному неравенству типа (1.18), если, например, положить

$$\alpha(x) \equiv \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |\alpha_i(x)|, \quad \beta(x) \equiv \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{\beta_i(x)\}$$

и

$$H(u) \equiv \sum_{i=1}^{k} H_i(u) \quad \text{или} \quad H(u) \equiv \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{H_i(u)\}.$$

Наряду с интегральными неравенствами (1.18) интерес с точки зрения приложений представляет интегральное неравенство

$$u(x) \leqslant f(x) + \alpha(x) \int_0^x a(t)\,u(t)\,dt + \beta(x) \int_0^x b(t) \times$$

$$\times\left(\int\limits_0^t c(s)\,H[u(s)]\,ds\right)dt,\ x\in I^n, \tag{1.30}$$

частные случаи которого рассмотрены во многих работах (см., например, [6], [9] или [10] и приведенную там литературу).

Теорема 4. *Пусть функции* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *и* $f(x)$ *непрерывны и неотрицательны на* I^n. *Пусть, далее, функция* $H(x)$ *непрерывна, неотрицательна и возрастает на* I. *Обозначим*

$$\gamma(x)\equiv\max_{0<s<x}\{\alpha(s),\ \beta(s),\ 1\},\quad l(x)\equiv\max_{0<s<x}\{a(s),\ b(s),\ c(s)\}. \tag{1.31}$$

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.30) *непрерывной и неотрицательной на* I^n *функции* $u(x)$ *имеет место оценка*

$$u(x)\leqslant\sup_{0<s<x}f(s)+\int\limits_0^x\gamma(t)\,l(t)\,Q^{-1}\left\{Q[\sup_{0<s<t}f(s)]+\gamma(t)\int\limits_0^t l(\tau)\,d\tau\right\}dt \tag{1.32}$$

на множестве $0\leqslant x\geqslant r$, где

$$Q(u)\equiv\int\limits_{u_0}^u\frac{ds}{s+H(s)}\quad(u\geqslant 0,\ u_0>0), \tag{1.33}$$

а r *таково, что*

$$Q[\sup_{0<s<x}f(s)]+\gamma(x)\int\limits_0^x l(\tau)\,d\tau\in\mathrm{Dom}\,(Q^{-1}). \tag{1.34}$$

Отметим, что приведенная здесь формула обращения (1.32) обобщает ряд известных ранее результатов. Например, для случая $a(x)\equiv b(x)\equiv\equiv c(x)$ и $\alpha(x)\equiv\beta(x)\equiv 1$ аналогичные оценки получены в работе [6] при $n=1$ для некоторого частного класса функций $H(x)$ и в работе [9] при $n=2$, $f(x)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$.

В последнее время, в связи с многочисленными приложениями, повышенный интерес вызывают вопросы обращения различных классов интегродифференциальных неравенств. Заметим, однако, что некоторые из рассматриваемых в литературе таких неравенств непосредственно сводятся к интегральным неравенствам и поэтому вопросы их обращения не представляют самостоятельного интереса. Так, рассматриваемые в некоторых работах (см., например, [10] или [11]) частные случаи неравенства

$$D_1\cdots D_n\,u(x)\leqslant f(x)+a(x)\,u(x)+b(x)\int\limits_0^x c(t)\,H[D_1\cdots D_n u(t)]\,dt,$$

$$x\in I^n \tag{1.35}$$

при приведенных там предположениях заменой $v(x)=D_1\ldots D_n u(x)$ сводятся непосредственно к интегральному неравенству вида (1.29). Получающаяся при этом формула обращения содержит в себе результаты, приведенные в работе [10] для случая $n=2$, $f(x)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$, $a(x)\equiv \equiv b(x)=\mathrm{const}$ и в работе [11] для случая $f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$, $a(x)\equiv \equiv b(x)=\mathrm{const}$, $H(x)=x$. Поэтому интерес представляют такие неравенства, для которых такое сведение нетривиально.

Рассмотрим, например, интегродифференциальное неравенство

$$D_1\cdots D_n u(x)\leqslant f(x)+a(x)\int_0^x b(t)H[u(t)+D_1\cdots D_n u(t)]\,dt,\ x\in I^n. \tag{1.36}$$

Имеет место

Теорема 5. *Пусть функции $a(x)$, $b(x)$ и $f(x)$ непрерывны и неотрицательны на I^n, а $H(x)$ непрерывна, неотрицательна и не убывает на I. Положим*

$$\mu(x)\equiv\sup_{0<s<x}\{a(s),1\},\quad \nu(x)\equiv\sup_{0<s<x}\{b(s),1\}. \tag{1.37}$$

Пусть, далее, неотрицательная на I^n функция $u(x)$ такова, что

$$u(x)|_{x_k\to 0}=0\quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.38}$$

и имеет непрерывную и неотрицательную на I^n производную $D_1\ldots D_n u$.

Тогда, если для функции $u(x)$ имеет место оценка (1.36), *то имеет место и оценка*

$$Q(D_1\cdots D_n u)\leqslant Q[\sup_{0<s<x} f(s)]+\mu(x)\int_0^x \nu(t)\,dt,\ x\in I^n, \tag{1.39}$$

где $Q(x)$ определяется выражением (1.33). *В частности*

$$u(x)\leqslant\int_0^x Q^{-1}\left\{Q[\sup_{0<s<t} f(s)]+\mu(t)\int_0^t \nu(s)\,ds\right\}dt. \tag{1.40}$$

на множестве $0\leqslant x\leqslant r$, где r выбрано так, что

$$Q[\sup_{0<s<x} f(s)]+\mu(x)\int_0^x \nu(s)\,ds\in \mathrm{Dom}\,(Q^{-1}). \tag{1.41}$$

Например, для интегродифференциального неравенства

$$D_1\cdots D_n u(x)\leqslant C+\int_0^x b(t)\,\{u(t)+D_1\cdots D_n u(t)\}^2\,dt,\ x\in I^n \tag{1.42}$$

имеем, что

$$Q(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{s+s^2}=\ln\frac{u}{1+u}+\ln\frac{1+u_0}{u_0}=\ln\frac{u}{1+u}+\ln 2,$$

если положить $u_0=1$. Пусть $u(x)=0$ при $x_i=0\,(i=1, 2, \cdots, n)$ $b(x)\geqslant 1$. Тогда оценка (1.40) примет вид

$$u(x)\leqslant C\cdot\int_0^x \exp\left(\int_0^t b(s)\,ds\right)\cdot\frac{dt}{1+C\left[1-\exp\left(\int_0^t b(s)\,ds\right)\right]} \tag{1.43}$$

и имеет место для таких $x\in I^n$, что

$$\int_0^x b(t)\,dt\leqslant \ln\left|1+\frac{1}{C}\right|\cdot$$

Приведенная здесь оценка (1.39) при $n=2$, $f(x)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$, $a(x)\equiv 1$ совпадает с оценками, предложенными в работе [9] для случая $H(x)=x$ и [10] для случая произвольного $H(x)$, а при $f(x)=$ $=\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$, $a(x)\equiv 1$, $H(x)=x$ — с полученной в [10] оценкой.

Хорошо известна роль, которую играют дискретные аналоги дифференциальных и интегральных неравенств в теории разностных уравнений и численном анализе. Поэтому неслучаен интерес к вопросам обращения таких неравенств. Хорошую сводку результатов по этому вопросу можно найти, например, в обзоре [5] или работе [12].

Здесь рассматривается дискретное неравенство

$$u(x)\leqslant f(x)+a(x)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} b(s)\cdot H[u(s)],\ x\in P^n, \tag{1.44}$$

которое является многомерным дискретным обобщением нелинейного неравенства I. Bihari [3].

Теорема 6. *Пусть функции $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ неотрицательны на P^n, а $H(x)$ непрерывна, неотрицательна и не убывает на I.*

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.44) неотрицательной на P^n функции $u(x)$ имеет место оценка

$$G[u(x)]\leqslant G[\max_{0<t<x} f(t)]+\max_{0<t<x} a(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(s),\ x\in P^n, \tag{1.45}$$

где $G(u)$ *определяется выражением* (15). *В частности,*

$$u(x)\leqslant G^{-1}\left\{G[\max_{0<t<x} f(t)]+\max_{0<t<x} a(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(s)\right\} \tag{1.46}$$

по крайней мере для тех $x\in P^n$, для которых

$$G[\max_{0<t<x} f(t)]+\max_{0<t<x} a(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(s)\in \mathrm{Dom}\,(G^{-1}).$$

Приведенная здесь оценка (1.46) может быть полезна во многих приложениях и для случая $f(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$, $a(x)\equiv 1$ анонсирована в работе [12].

2°. Здесь приведены доказательства сформулированных в п. 1 утверждений.

Докажем утверждение теоремы 1. Предположим сначала, что удовлетворяющая неравенству (1.1) функции $u(x) > 0$ на I^n. Перепишем тождество (1.1) в виде

$$\frac{D_1\cdots D_n\,u\,(x)}{H(u)} \leqslant a\,(x),\ x \in I^n. \tag{2.1}$$

В силу условия (1.2) $D_1\cdots D_{n-1}\,u\cdot D_n\,u \geqslant 0$ и, следовательно

$$\frac{D_1\cdots D_n u\cdot H\,(u)}{H^2\,(u)} \leqslant a\,(x) + \frac{D_1\cdots D_{n-1}\,u\cdot H'_{x_n}}{H^2\,(u)},$$

так как $H'_{x_n} = H'_u\cdot D_n\,u$ и $H\,(u)$ не убывает на I. Тогда

$$D_n\left(\frac{D_1\cdots D_{n-1}\,u}{H\,(u)}\right) \leqslant a\,(x),$$

откуда непосредственно получаем, учитывая условие (1.3), что

$$\frac{D_1\cdots D_{n-1}\,u\,(x)}{H\,(u)} \leqslant \int\limits_0^{x_n} a\,(x_1,\cdots,\,x_{n-1},\,s_n)\,ds_n,$$

то есть неравенство вида (2.1). Используя приведенную схему по переменным $x_{n-1}\ldots x_2$ получаем, с учетом условий (1.2) и (1.3), что

$$\frac{D_1 u}{H(u)} \leqslant \int\limits_0^{x_2}\cdots\int\limits_0^{x_n} a\,(x_1,\,s_2,\cdots,\,s_n)\,ds_2\cdots ds_n. \tag{2.2}$$

В силу определения функции $G(u)$ (1.5) имеем

$$D_1\,G\,(u) = \frac{1}{H\,(u)}\cdot D_1\,u$$

и неравенство (2.2) перепишется в виде

$$D_1\,G(u) \leqslant \int\limits_0^{x_2}\cdots\int\limits_0^{x_n} a\,(x_1,\,s_2\cdots s_n)\,ds_2\cdots ds_n,$$

откуда

$$G\,[u\,(x)] \leqslant G[u\,(x)]|_{x_1=0} + \int\limits_0^{x} a\,(t)\,dt,$$

то есть получаем искомую оценку (1.4).

Пусть теперь функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству (1.1) и $u\,(x) \geqslant 0$. Пусть $v\,(x) \equiv u\,(x) + \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число. Тогда

$$D_1\cdots D_n\,v\,(x) = D_1\cdots D_n\,u\,(x) \leqslant a\,(x) H\,[u\,(x)] \leqslant a\,(x)\,H\,[v\,(x)],$$

так как $u \leqslant v$. Функция $v(x)$ удовлетворяет, таким образом, неравенству (1.1) и $v(x) > 0$. Согласно предыдущему

$$G[u(x_1 \cdots x_n) + \varepsilon] \leqslant G[u(0, x_2 \cdots x_n) + \varepsilon] + \int_0^{x} a(t)\, dt$$

и имеет место для любого положительного ε. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем искомую оценку (1.4) для неотрицательной на I^n функции $u(x)$. Оценка (1.6) есть непосредственное следствие оценки (1.4). Теорема 1 доказана.

Для доказательства утверждения теоремы 2 предположим, что удовлетворяющая неравенству (1.8) функция $u(x) > 0$ на P^n и заметим, что

$$\Delta_1 \cdots \Delta_n u(x) \leqslant p(x_1, \cdots, x_n) H[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n + 1)],$$

если учесть (1.9) и монотонность $H(x)$. Так как

$$\Delta_1 \cdots \Delta_n u(x) \equiv \Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n + 1) -$$
$$- \Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$$

имеем, что

$$\frac{\Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n + 1)}{H[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n + 1)]} - \frac{\Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)]}{H[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n + 1]} \leqslant$$
$$\leqslant p(x_1 \cdots x_n)$$

или, с учетом (1.9),

$$\frac{\Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1 \cdots x_{n-1}, x_n + 1)}{H[u(x_1, \cdots, x_{n-1} x_n + 1)]} - \frac{\Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)}{H[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)]} \leqslant$$
$$\leqslant p(x_1 \cdots x_n).$$

Зафиксируем $x_1, \cdots, x_{n-1}$, положим $x_n = s_n$ и просуммируем по $s_n = 0, 1, \cdots, x_n - 1$. Получим

$$\frac{\Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)}{H[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)]} \leqslant \sum_{s_n = 0}^{x_n - 1} p(x_1, \cdots, x_{n-1}, s_n),$$

если учесть (1.10).

Повторяя приведенную процедуру по переменным $x_{n-1}, \ldots, x_2$, получим, с учетом (1.9) и (1.10), что

$$\frac{\Delta_1 u(x_1 \cdots, x_n)}{H[u(x_1 \cdots, x_n)]} \leqslant \sum_{s_2 = 0}^{x_2 - 1} \cdots \sum_{s_n = 0}^{x_n - 1} p(x_1, s_2, \cdots, s_n).$$

Согласно определению функции $G(u)$ (1.5) имеем

$$G[u(x_1 + 1, x_2, \cdots, x_n)] - G[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)] = \int_{u(x_1, x_2 \cdots x_n)}^{u(x_1 + 1, x_2 \cdots x_n)} \frac{ds}{H(s)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{u(x_1+1, x_2, \cdots, x_n)-u(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{H[u(x_1, x_2 \cdots x_n)]} \leqslant \sum_{s_2=0}^{x_2-1} \cdots \sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(x_1, s_2, \cdots, s_n).$$

Зафиксируем $x_2, \cdots, x_n$, обозначим $x_1=s_1$ и просуммируем обе части по $s_1=0, 1, \cdots, x_1-1$. Получим

$$G[u(x_1, x_2, \cdots, x_n)] \leqslant G[u(0, x_2, \cdots, x_n)] + \sum_{s_1=0}^{x_1-1} \cdots \sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(s_1, \cdots, s_n),$$

то есть искомую оценку (1.11).

Если удовлетворяющая неравенству (1.8) функция $u(x)$ обращается в нуль в некоторых точках множества P^n, положим $v(x) \equiv u(x)+\varepsilon$ и так же, как и при доказательстве теоремы 1 покажем, что оценка (1.11) имеет место и в этом случае.

Оценка (1.12) непосредственно следует из (1.11). Теорема доказана.

Для доказательства утверждения теоремы 3 обозначим $v(x) \equiv F[u(x)]$, откуда $u=F^{-1}(v)$. Перепишем неравенство (1.18) в виде

$$v(x) \leqslant f(x)+a(x)\int_0^x b(t) H[F^{-1}(v)]\, dt, \quad x \in I^n.$$

Пусть $\tau \in I^n$ — произвольная точка. Тогда

$$v(x) \leqslant \sup_{0<s<\tau} f(s) + \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot \int_0^x b(t) H[F^{-1}(v)]\, dt, \quad x \in I^n_\tau. \tag{2.3}$$

Обозначим через $z(x)$ правую часть этого неравенства. Имеем

$$D_1 \cdots D_n z(x) = \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot b(x) \cdot H \circ F^{-1}(v), \quad x \in I^n_\tau.$$

Но $F^{-1}(v) \leqslant F^{-1}(z)$ и $H \circ F^{-1}(v) \leqslant H \circ F^{-1}(z)$, так как $v \leqslant z$ в силу (2.3). Отсюда

$$D_1 \cdots D_n z(x) \leqslant \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot b(x) \cdot H \circ F^{-1}[z(x)], \quad x \in I^n_\tau.$$

На основании утверждения теоремы 1, условия которого проверяются непосредственно, имеем

$$\Omega[z(x)] \leqslant \Omega[z(x)]|_{x_1=0} + \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot \int_0^x b(t)\, dt, \quad x \in I^n_\tau,$$

где $\Omega(u)$ определяется выражением (1.20). Тогда

$$\Omega[z(x)] \leqslant \Omega[\sup_{0<s<\tau} f(s)] + \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot \int_0^x b(t)\, dt, \quad x \in I^n_\tau.$$

Но $\Omega(v) \leqslant \Omega(z)$, то есть $\Omega \circ F(u) \leqslant \Omega(z)$, откуда

$$\Omega \circ F[u(x)] \leqslant \Omega[\sup_{0<s<\tau} f(s)] + \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot \int_0^x b(t)\, dt, \quad x \in I^n_\tau.$$

Тогда, в силу непрерывности функций $a(x)$, $f(x)$, $\Omega(x)$ и $F(x)$ имеем, что

$$\Omega\circ F[u(\tau)]\leqslant\Omega[\sup_{0<s<\tau}f(s)]+\sup_{0<s<\tau}a(s)\cdot\int_0^{\tau}b(t)\,dt,$$

откуда, в силу произвольности выбора $\tau\in I^n$ и следует искомая оценка (1.19). Оценка (1.21), в свою очередь, является непосредственным следствием оценки (1.19). Теорема доказана.

Для доказательства утверждения теоремы 4 зафиксируем некоторую точку $\tau\in I_r^n$, где r таково, что на I_r^n выполнено условие (1.34). Обозначим

$$z(x,\tau)\equiv\sup_{0<s<\tau}f(s)+\sup_{0<s<\tau}\alpha(s)\cdot\int_0^x a(t)\,u(t)\,dt+$$

$$+\sup_{0<s<\tau}\beta(s)\cdot\int_0^x b(s)\left(\int_0^s c(t)\,H[u(t)]\,dt\right)ds,\quad x\in I_\tau^n,\ \tau\in I_r^n. \tag{2.4}$$

Ясно, что $u(x)\leqslant z(x,\tau)$ для $x\in I_\tau^n$. Тогда

$$D_1\cdots D_n\,z(x,\tau)=\sup_{0<s<\tau}\alpha(s)\cdot a(x)\,u(x)+\sup_{0<s<\tau}\beta(s)\cdot b(x)\int_0^x c(t)\,H[u(t)]\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\gamma(\tau)\cdot l(x)\left\{u(x)+\int_0^x c(t)\,H[u(t)]\,dt\right\}\leqslant \tag{2.5}$$

$$\leqslant\gamma(\tau)\cdot l(x)\left\{z(x,\tau)+\int_0^x c(t)\,H[z(t,\tau)]\,dt\right\},\quad x\in I_\tau^n,\ \tau\in I_r^n,$$

в силу определения функций $\gamma(x)$ и $l(x)$ (1.31) и монотонности $H(x)$. Обозначим

$$v(x,\tau)\equiv z(x,\tau)+\int_0^x c(t)\,H[z(t,\tau)]\,dt,\quad x\in I_\tau^n,\ \tau\in I_r^n. \tag{2.6}$$

Ясно, что $z(x,\tau)\leqslant v(x,\tau)$. Тогда

$$D_1\cdots D_n\,v(x,\tau)=D_1\cdots D_n\,z(x,\tau)+c(x)\,H[z(x,\tau)]\leqslant$$

$$\leqslant\gamma(\tau)\cdot l(x)\cdot v(x,\tau)+c(x)\,H[v(x,\tau)]\leqslant\gamma(\tau)\cdot l(x)\{v(x,\tau)+$$

$$+H[v(x,\tau)]\},$$

если учесть (2.5) и (1.31). Таким образом

$$D_1\cdots D_n\,v(x,\tau)\leqslant\gamma(\tau)\cdot l(x)\cdot H_1[v(x,\tau)],\quad x\in I_\tau^n,\ \tau\in I_r^n,$$

где $H_1(v)\equiv v+H(v)$.

Отсюда, в силу утверждения теоремы 1 имеем, что

$$Q[v(x,\tau)] \leqslant Q[v(x,\tau)]|_{x_1=0} + \gamma(\tau)\int_0^x l(t)\,dt,\ x \in I_\tau^n,$$

где $Q(x)$ определяется выражением (1.33). Выполнение условий (1.2) и (1.3) теоремы 1 проверяется непосредственно, если учесть (2.4) и (2.6). Тогда

$$v(x,\tau) \leqslant Q^{-1}\left\{Q[v(x,\tau)]|_{x_1=0} + \gamma(\tau)\cdot\int_0^x l(t)\,dt\right\},\ x \in I_\tau^n,\ \tau \in I_r^n.$$

Но в силу (2.5)

$$D_1\cdots D_n z(x,\tau) \leqslant \gamma(\tau)\cdot l(x)\cdot v(x,\tau) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma(\tau)\cdot l(x)\cdot Q^{-1}\left\{Q[v(x,\tau)]_{x_1=0} + \gamma(\tau)\cdot\int_0^x l(t)\,dt\right\},\ x \in I_\tau^n,\ \tau \in I_r^n,$$

откуда, с учетом (2.6) и (2.4) получаем, что

$$D_1\cdots D_n z(x,\tau) \leqslant \gamma(\tau)\cdot l(x)\cdot Q^{-1}\left\{Q[\sup_{0<s<\tau} f(s)] + \gamma(\tau)\cdot\int_0^x l(t)dt\right\},$$

$$x \in I_\tau^n,\ \tau \in I_r^n.$$

В силу произвольности выбора $\tau \in I^n$ и непрерывности составляющих это неравенство функций отсюда следует, что

$$D_1\cdots D_n z(x,x) \leqslant \gamma(x)\cdot l(x)\cdot Q^{-1}\left\{Q[\sup_{0<s<x} f(s)] + \gamma(x)\int_0^x l(t)\,dt\right\},\ x \in I_r^n,$$

если перейти к пределу при $x \to \tau$ и подставить $\tau = x$. Отсюда n-кратным интегрированием с учетом (2.4) получаем, что

$$z(x,x) \leqslant \sup_{0<s<x} f(s) + \int_0^x \gamma(t)\,l(t)\,Q^{-1}\Big\{Q[\sup_{0<s<t} f(s)] +$$

$$+\gamma(t)\int_0^t l(s)\,ds\Big\}\,dt,\ x \in I_r^n,$$

откуда следует искомая оценка (1.32), так как $u(x) \leqslant z(x,x)$ для любого $x \in I_r^n$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5 в конечном счете основано на обращении некоторого дифференциального неравенства типа (1.1). Зафиксируем некоторую точку $\tau \in I^n$ и положим

$$z(x) = \sup_{0<s<t} f(s) + \sup_{0<s<\tau} a(s)\cdot\int_0^x b(t)\cdot H[u(t) + D_1\cdots D_n u(t)]\,dt,\ x \in I_\tau^n. \quad (2.7)$$

Имеем

$$D_1\cdots D_n z(x)=\sup_{0<s<\tau} a(s)\cdot b(x)\cdot H[u(x)+D_1\cdots D_n u(x)],\ x\in I^n_\tau,$$

$$z(x)|_{x_k=0}=\sup_{0<s<\tau} f(s)\ (k=1,2,\cdots,n). \tag{2.8}$$

Так как $D_1\cdots D_n u(x)\leqslant z(x)$ при $x\in I^n_\tau$, получаем, с учетом условия (1.38), что

$$u(x)\leqslant\int\limits_0^x z(s)\,ds,\ x\in I^n_\tau, \tag{2.9}$$

так как из равенства нулю функции на некоторой гиперплоскости следует равенство нулю всех ее внутренних производных.

Отсюда в силу монотонности функции $H(x)$ из первого соотношения (2.8) и (2.9) следует, что

$$D_1\cdots D_n z(x)\leqslant\sup_{0<s<\tau} a(s)\cdot b(x)\cdot H\left[z(x)+\int\limits_0^x z(s)\,ds\right],\ x\in I^n_\tau.$$

Обозначим

$$v(x)\equiv z(x)+\int\limits_0^x z(s)\,ds. \tag{2.10}$$

Тогда

$$D_1\cdots D_n v(x)=D_1\cdots D_n z(x)+z(x)\leqslant\sup_{0<s<\tau} a(s)\cdot b(x)\cdot H(v)+v(x)\leqslant$$

$$\leqslant\mu(\tau)\cdot\nu(x)\cdot[v+H(v)],\ x\in I^n_\tau,$$

где $\mu(x)$ и $\nu(x)$ определяются (1.37). Из (2.7) и (2.10) непосредственно следует, что

$$D_1\cdots D_k v\cdot D_{k+1} v\geqslant 0\ (k=1,2,\cdots,n-1),$$
$$D_1\cdots D_k v|_{x_{k+1}=0}=0\ (k=1,2,\cdots,n-1).$$

Тогда из утверждения теоремы 1 следует, что

$$Q(v)\leqslant Q(v)|_{x_1=0}+\mu(\tau)\cdot\int\limits_0^x\nu(s)\,ds,\ x\in I^n_\tau,$$

где $Q(x)$ определяется выражением (1.33). Но так как

$$v(x)\geqslant z(x)\geqslant D_1\cdot\cdots\cdot D_n u(x),\ Q(v)\geqslant Q(D_1\cdots D_n u),\ x\in I^n_\tau$$

с учетом (2.10) и второго соотношения (2.8) имеем, что

$$Q[D_1\cdots D_n u(x)]\leqslant Q[\sup_{0<s<\tau} f(s)]+\gamma(\tau)\cdot\int\limits_0^x\nu(t)\,dt,\ x\in I^n_\tau,$$

откуда, в силу непрерывности составляющих неравенство функций

$$Q\,[D_1\cdots D_n\,u\,(\tau)]\leqslant Q\,[\sup_{u<s<\tau} f\,(s)]+\gamma\,(\tau)\cdot\int_0^\tau \nu\,(t)\,dt.$$

Отсюда, в силу произвольности выбора $\tau\in I^n$, после замены $\tau=x$ получаем искомую оценку (1.39). Оценка (1.40) является непосредственным следствием оценки (1.39) и условия (1.38). Теорема доказана.

Для доказательства утверждения теоремы 6 зафиксируем некоторую точку $y=(y_1,\cdots,y_n)\in P^n$ и положим

$$z\,(x)\equiv\max_{0<t<y} f\,(t)+\max_{0<t<y} a\,(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} b\,(s)\cdot H\,[u\,(s)],\quad x\in P_y^n\cdot$$

Легко видеть, что

$$\Delta_1\,z\,(x)\equiv z\,(x_1+1,\,x_2,\cdots,x_n)-z\,(x_1,\,x_2,\cdots,x_n)=$$

$$=\max_{0<t<y} a\,(t)\cdot\sum_{s_2=0}^{x_2-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} b\,(x_1,\,s_2,\cdots,s_n)\,H\,[u\,(x_1,\,s_2,\cdots,s_n)].$$

Аналогично

$$\Delta_1\cdots\Delta_n\,z\,(x)\equiv\Delta_1\cdots\Delta_{n-1}\,z\,(x_1,\cdots,x_{n-1},\,x_n+1)-\Delta_1\cdots\Delta_{n-1}\,z\,(x_1,\cdots$$

$$\cdots,x_{n-1},\,x_n)=\max_{0<t<y} a\,(t)\cdot b\,(x)\cdot H\,[u\,(x)]\leqslant$$

$$\leqslant\max_{0<t<y} a\,(t),\ b\,(x)\cdot H\,[z\,(x)],\quad x\in P_y^n,$$

в силу условия $u\,(x)\leqslant z\,(x)$ и монотонности $H\,(x)$.

Из определения функции $z\,(x)$ следует, что $\Delta_i\,z\,(x)\geqslant 0$,

$$\Delta_1\cdots\Delta_{i-1}\,z\,(x)|_{x_i=0}=0$$

для любого $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$.

Тогда, в силу утверждения теоремы 2, получаем, что

$$G\,[z\,(x)]\leqslant G\,[z\,(x)]|_{x_1=0}+\max_{0<t<y} a\,(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-0}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p\,(s)=$$

$$=G\,[\max_{0<t<y} f\,(t)]+\max_{0<t<y} a\,(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p\,(s),\quad x\in P_y^n,$$

где $G\,(x)$ определяется выражением (1.6). Тогда

$$G\,[u\,(x)]\leqslant G\,[\max_{0<t<y} f\,(t)]+\max_{0<t<y} a\,(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p\,(s),\quad x\in P_y^n,$$

если учесть, что $z\,(x)\geqslant u\,(x)$ и $G\,[z\,(x)]\geqslant G\,[u\,(x)]$.

Последняя оценка верна для любого $x\in P_y^n$ и, в частности, для $x=y$. Полагая $x=y$ и учитывая произвольность выбора $y\in P^n$, получаем искомую оценку (1.45) на всем множестве P^n. Оценка (1.46) является непосредственным следствием оценки (1.45). Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. Б. Нерсесяну за внимание к работе и ценные замечания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 7. VI. 1984

Ֆ. Հ. ՄԱՄԻԿՈՆՅԱՆ. Որոշ բազմաչափ ոչ գծային օպերատորային անհավասարությունների մասին *(ամփոփում)*

Ներկայացված աշխատանքում ուսումնասիրվում են բազմաչափ ոչ գծային որոշ դասերի դիֆերենցիալ, ինտեգրալ, ինտեգրոդիֆերենցիալ և տարբերական անհավասարությունների շրջանի հարցերը։ Նրանց լուծումների համար բերված են որոշակի գնահատականներ։

F. O. MAMIKONIAN. *On some multidimensional nonlinear operator inequalities*
(summary)

In this paper some classes of differential, integral, integrodifferential and discrete inequalities are considered. For solutions of these inequalities effective estimates are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Peano.* Sull' integrabilita delle equazione differentiali di primo ordino, Atti R. Acad. Torino, vol. 21, 1885/1886, 667—685.
2. *Э. Ф. Беккенбах, Р. Беллман.* Неравенства, М., «Мир», 1965.
3. *I. Bihari.* A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations, Acta Math. Acad. Sci. Huhg., 7, 1956, 81—93.
4. Ou—Iang—Liang. The boundness of solutions of linear differential equations $y'' + a(t)\,y = 0$, Шуснов Цзиньчжань, vol. 3, №3 1957, 409.
5. *P. R. Beesack.* Cranwall inequalities, Carleton Math. Lecture Notes, № 11, 1975.
6. *B. G. Pachpatte.* On some integral inequalities similar to Bellman—Bihari inequalities, J. of Math. Analysis and Applications, vol. 49, 1975, 794—802.
7. *G. Butler., T. Rogers.* A generalization of a lemma of Bihari and applications to pointwise estimates for integral equations, J. of Math. Anal. and Applications, vol. 33, 1971, 71—81.
8. *B. G. Pachpatte* On some fundamental integral inequalities, J. of Math. Analysis and Applications, vol. 73, 1980, № 1, 238—251.
9. *B. G. Pachpatte.* On some new integrodifferential inequalities of the Wendroff type, J. of Math. Analysis and Applications, vol. 73, № 2, 1980, 491—500.
10. *B. K. Bonge, B. G. Pachpatte.* On nonlinear intergal inequalities of the Wendroff type, J. of Math. Analysis and Applications, vol. 70, 1979, 161—169.
11. Lu—San Chen, Cheh—Chih Yeh. Some integrodifferential inequalities in n-independent variables, Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, vol. 29A, 1981, 347—353.
12. *B. G. Pachpatte, S. M. Singare.* Discrete generalized Granwall inequalities in three independent variables, Pacific Journal of mathematics, vol. 82 № 1, 1979, 197—210.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 5, 1985 Математика

УДК 517.547

А. Э. ДЖРБАШЯН

О ПОРЯДКЕ РОСТА ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МНОГОМЕРНОМ ШАРЕ

1°. Пусть функция $f(z)$ аналитична в единичном круге и имеет разложение Тейлора

$$f(z)=\sum_{k\geqslant 0} c_k z^k=\sum_{k\geqslant 0} c_k r^k e^{ik\theta}.$$

Предположим, что известен порядок роста интегральных средних функции f $(1\leqslant p\leqslant\infty,\ \alpha>0)$:

$$M_p(f, r)\equiv\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p}=O\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha}\right).$$

Следуя Харди и Литтльвуду рассмотрим еще два ряда $(\beta>0)$

$$\Lambda_\beta f(z)=\sum_{k\geqslant 0}\frac{\Gamma(k+1+\beta)}{\Gamma(k+1)}c_k z^k \tag{1}$$

и

$$\Lambda^\beta f(z)=\sum_{k\geqslant 0}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\beta)}c_k z^k. \tag{2}$$

Тогда по известной теореме (см. [1])

$$M_p(\Lambda_\beta f, r)=O((1-r)^{-\alpha-\beta})$$

и

$$M_p(\Lambda^\beta f, r)=O((1-r)^{-\alpha+\beta})\ (\alpha>\beta).$$

Эта теорема в дальнейшем многократно обобщалась. В работах [2] и [3] обобщается этот результат для аналитических и гармонических функций соответственно: вместо конкретных последовательностей $\left\{\left[\frac{\Gamma(k+1+\beta)}{\Gamma(k+1)}\right]^{\pm 1}\right\}_{k\geqslant 0}$ рассматриваются довольно общие последовательности (мультипликаторы) $\Lambda=\{\lambda_k\}_0^\infty$. В статьях [4], [5] обобщается теорема Харди и Литтльвуда для аналитических функций в единичном шаре пространства $\mathbf{C}^n$.

Заметим, что ряды (1) и (2) представляют собой, соответственно, дробную производную и дробный интеграл функции f порядка $\beta>0$ в смысле Римана—Лиувилля.

В настоящей работе мы интересуемся тем же кругом вопросов для гармонических функций в единичном шаре евклидова пространства $\mathbf{R}^n$.

Однако кроме уже указанной задачи мы рассматриваем и такую постановку, где предполагается принадлежность функции f некоторому из пространств A^p_α, $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha \geqslant 0$ (определения см. ниже).

Основное различие между нашим подходом и методом, примененным в указанных выше работах, заключается в том, что стандартный способ представления дробной производной функции интегралом с ядром, являющемся производной ядра Пуассона, не приводит к наилучшей оценке из-за отсутствия «хорошей» оценки для этого ядра. Поэтому приходится применить другое интегральное представление, связанное с представлением функций класса A^p_α.

2°. Введем теперь необходимые нам понятия. Более подробно они приведены также в нашей предыдущей работе [6].

Обозначим через $\mathbf{B}$ единичный шар пространства $\mathbf{R}^n$ и через S единичную сферу. В сферических координатах точку $x \in \mathbf{B}$ записываем в виде $x = rx'$, где $r = |x|$ и $x' = \dfrac{x}{|x|} \in S$. Соответственно нормированная мера Лебега dx в $\mathbf{B}$ запишется в виде $dx = r^{n-1}\,dr\,dx'$, где dx'-индуцированная мера Лебега на S.

Сферической гармоникой порядка k называется сужение на S однородного полинома степени k.

Существуют $d_k = (2k + n - 2)\dfrac{(n+k-3)!}{(n-2)!\,k!}$ линейно независимых сферических гармоник порядка k и их можно ортонормировать. Кроме того любые две сферические гармоники различных порядков k и l ортогональны. Ортонормируя совокупность всех линейно независимых сферических гармоник всех порядков $k \geqslant 0$, получаем систему, являющуюся базисом в L^2 на S.

Зональной гармоникой порядка $k \geqslant 0$ называется функция

$$Z^{(k)}_{x'}(y') = \sum_{j=1}^{d_k} Y^{(k)}_j(x')\,\overline{Y^{(k)}_j(y')},$$

где $\{Y^{(k)}_j\}_{j=1}^{d_k}$ — полная ортонормальная система сферических гармоник порядка k.

Как сферические, так и, следовательно, зональные гармоники можно выбрать вещественными, что мы и будем в дальнейшем предполагать.

Любая гармоническая внутри единичного шара $\mathbf{B}$ функция $f(x)$ имеет разложение по сферическим гармоникам $(x = rx')$

$$f(x) = \sum_{k \geqslant 0} r^k c_k Y^{(k)}(x') = \sum_{k \geqslant 0} r^k \sum_{j=1}^{d_k} c^j_k\, Y^{(k)}_j(x').$$

Наряду с функцией f будем рассматривать еще две функции

$$\Lambda_\beta f(x) := \sum_{k \geqslant 0} \frac{\Gamma\left(k + \frac{n}{2} + \beta\right)}{\Gamma\left(k + \frac{n}{2}\right)} r^k c_k Y^{(k)}(x') \tag{3}$$

и

$$\Lambda^{\beta} f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\beta\right)} r^k c_k Y^{(k)}(x'), \tag{4}$$

которые являются обобщениями понятий дробной производной и дробного интеграла порядка $\beta > 0$ в n-мерном случае.

3°. Обозначим через A^p_α, $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha \geqslant 0$, пространство всех гармонических в **B** функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_0^1 \int_S |f(rx')|^p (1-r^2)^\alpha r^{n-1} dr dx'\right)^{1/p}.$$

Известно, что тогда (см. [6], теорема 1)

$$f(x) = \int_0^1 \int_S Q_\alpha(x, y)(1-\rho^2)^\alpha f(\rho y') \rho^{n-1} d\rho dy' \quad (y = \rho y'),$$

где

$$Q_\alpha(x, y) = 2 \sum_{k>0} \frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\alpha+1\right)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)} r^k \rho^k Z_{x'}^{(k)}(y').$$

По аналогии с этим ядром определим еще одну функцию

$$Q_{\alpha,\beta}(x, y) = 2 \sum_{k>0} \frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\alpha+1\right)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\beta\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)} r^k \rho^k Z_{x'}^{(k)}(y'). \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть функция f гармонична в* **B**. *Тогда для любого t, $0 < t < 1$ справедливо представление*

$$\Lambda_\beta f(tx) = \int_0^1 \int_S Q_{\alpha,\beta}(x, y)(1-\rho^2)^\alpha f(t\rho y') \rho^{n-1} d\rho dy'. \tag{6}$$

Доказательство. Пользуясь свойством ортогональности гармоник $Y^{(k)}$ и $Z^{(k)}$, получим

$$\int_0^1 \int_S Q_{\alpha,\beta}(x, y)(1-\rho^2)^\alpha f(ty) \rho^{n-1} d\rho dy' =$$

$$= 2\int_0^1 \int_S \sum_{k>0} \frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\alpha+1\right)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\beta\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)} r^k \rho^k Z_{x'}^{(k)}(y') \times$$

$$\times \sum_{m>0} t^m \rho^m \sum_{j=1}^{d_m} c_m^{(j)} Y_j^{(m)}(y')\cdot(1-\rho^2)^\alpha \rho^{n-1} d\rho dy' =$$

$$= 2\sum_{k>0} \frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\alpha+1\right)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\beta\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)} t^k r^k \times$$

$$\times \int_0^1 \rho^{2k}(1-\rho^2)^\alpha \rho^{n-1} d\rho \int_S Z_x^{(k)}(y') \sum_{j=1}^{d_k} c_k^{(j)} Y_j^{(k)}(y')\,dy' =$$

$$= \sum_{k>0} \frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\beta\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)} (tr)^k c_k Y^{(k)}(x') = \Lambda_\beta f(tx),$$

так как

$$\int_0^1 \rho^{2k+n-1}(1-\rho^2)^\alpha d\rho = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\alpha+1\right)}.$$

Интегральное представление для дробного интеграла устанавливается в следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть f гармонична в* **B**. *Тогда для любых $t, 0<t<1$ и $x \in \overline{\mathbf{B}}$ (замыкание* **B**), *справедливо соотношение*

$$\Lambda^\beta f(tx) = \frac{t^{-\frac{n}{2}-\beta+1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} f(\rho x)\, \rho^{\frac{n}{2}-1} d\rho. \qquad (7)$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} f(\rho x)\, \rho^{\frac{n}{2}-2} d\rho =$$

$$= \int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} \sum_{k>0} (\rho r)^k c_k Y^{(k)}(x')\cdot \rho^{\frac{n}{2}-1} d\rho =$$

$$= \sum_{k>0} r^k c_k Y^{(k)}(x') \int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} \rho^{k+\frac{n}{2}-1} d\rho.$$

Но

$$\int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} \rho^{k+\frac{n}{2}-1} d\rho = t^{k+\frac{n}{2}+\beta-1} \int_0^1 (1-\rho)^{\beta-1} \rho^{k+\frac{n}{2}-1} d\rho =$$

$$=t^{k+\frac{n}{2}+\beta-1}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\beta\right)}.$$

поэтому

$$\frac{t^{-\frac{n}{2}-\beta+1}}{\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} f(\rho x)\,\rho^{\frac{n}{2}-1}\,d\rho=$$

$$=\sum_{k>0}\frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\beta\right)}(rt)^k c_k\, Y^{(k)}(x')=\Lambda^\beta f(tx).$$

В следующей лемме устанавливается оценка ядра $Q_{\alpha,\beta}$. Мы не будем приводить ее доказательство, поскольку оно буквально совпадает с доказательством леммы 2 из [6]. Отметим только, что в отличие от указанной леммы здесь в оценке присутствуют два слагаемых вместо трех. Дело в том, что как легко видеть, первое слагаемое в оценке из [6] оценивается через второе и приведено там только для полноты картины.

Лемма 3. *Пусть функция $Q_{\alpha,\beta}$ определена формулой* (5), $x=rx'$, $y=\rho y'$. *Тогда справедлива оценка*

$$|Q_{\alpha,\beta}(x,y)|\leqslant C\frac{(1-r\rho)^{-\{\alpha+\beta\}}}{|r\rho x'-y'|^{n+[\alpha+\beta]}}+\frac{C}{(1-r\rho)^{1+\alpha+\beta}},\tag{8}$$

где $[\alpha+\beta]$ — *целая и* $\{\alpha+\beta\}$ — *дробная части числа* $\alpha+\beta$.

4°. Определим интегральное среднее заданной в **B** функции f порядка p по формуле

$$M_p(f,r)=\left(\int_S|f(rx')|^p\,dx'\right)^{1/p},\tag{9}$$

$1\leqslant p<\infty$ с соответствующей модификацией при $p=\infty$.

Теорема 1. *Пусть f гармонична в* **B**, $0<r<1$ *и* $1\leqslant p\leqslant\infty$. *Тогда для всех* $\beta>0$

$$M_p(\Lambda_\beta f, r^2)\leqslant CM_p(f,r)(1-r)^{-\beta},\tag{10}$$

$$M_p(\Lambda^\beta f,r)\leqslant\frac{r^{-\frac{n}{2}-\beta+1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^r(r-\rho)^{\beta-1}M_p(f,\rho)\,\rho^{\frac{n}{2}-1}\,d\rho.\tag{11}$$

Доказательство. Пусть сначала $1<p<\infty$. Имеем по лемме 1 $(0<t<1)$

$$\Lambda_\beta f(tx)=\int_0^1\int_S Q_{\alpha,\beta}(x,y)(1-\rho^2)^\alpha f(t\rho y')\,\rho^{n-1}\,d\rho dy'.$$

По неравенству Гельдера

$$|\Lambda_\beta f(tx)| \leqslant \left(\int_0^1\int_S |f(t\rho y')|^p\, |Q_{\alpha,\beta}(x,y)|\,(1-\rho^2)^\alpha \rho^{n-1}\, d\rho dy'\right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int_0^1\int_S |Q_{\alpha,\beta}(x,y)|\,(1-\rho^2)^\alpha \rho^{n-1}\, d\rho dy'\right)^{1/q},$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Для второго интеграла имеем, ввиду оценок из леммы 3

$$\int_0^1\int_S |Q_{\alpha,\beta}(x,y)|\,(1-\rho^2)^\alpha \rho^{n-1}\, d\rho dy' \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^1 \left[\left(\int_S \frac{(1-r\rho)^{-\{\alpha+\beta\}}}{|r\rho x' - y'|^{n+[\alpha+\beta]}}\, dy'\right) + \frac{1}{(1-r\rho)^{1+\alpha+\beta}}\right](1-\rho^2)^\alpha \rho^{n-1}\, d\rho \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^\alpha \rho^{n-1}}{(1-r\rho)^{1+\alpha+\beta}}\, d\rho \leqslant \frac{C}{(1-r)^\beta},$$

так как $\beta > 0$. Таким образом, еще раз применив лемму 3, а также теорему Фубини, получаем (оценка ядра $Q_{\alpha,\beta}$ проводится как и выше)

$$M_p^p(\Lambda_\beta f, tr) = \int_S |\Lambda_\beta f(trx')|^p\, dx' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(1-r)^{\beta p/q}} \int_S \left(\int_0^1\int_S |f(t\rho y')|^p\, |Q_{\alpha,\beta}(x,y)|\,(1-\rho^2)^\alpha \rho^{n-1}\, d\rho\, dy'\right) dx' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(1-r)^{\beta(p-1)}} \int_0^1\int_S |f(t\rho y')|^p\,(1-\rho^2)^\alpha \rho^{n-1}\, d\rho dy' \int_S |Q_{\alpha,\beta}(x,y)|\, dx' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(1-r)^{\beta(p-1)}} \int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^\alpha \rho^{n-1}}{(1-r\rho)^{1+\alpha+\beta}}\, d\rho \int_S |f(t\rho y')|^p\, dg'.$$

Теперь, ввиду субгармоничности $|f|^p$,

$$\int_S |f(t\rho y')|^p\, dy' \leqslant \int_S |f(ty')|^p\, dy' = M_p^p(f, t),$$

поэтому

$$M_p^p(\Lambda_\beta f, tr) \leqslant \frac{C}{(1-r)^{\beta(p-1)}} \int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^\alpha \rho^{n-1}}{(1-r\rho)^{1+\alpha+\beta}}\, M_p^p(f,t)\, d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(1-r)^{\beta(p-1)}} M_p^p(f,t)\cdot \frac{C}{(1-r)^{\beta}} = CM_p^p(f,t)\cdot \frac{1}{(1-r)^{\beta p}}.$$

Подставляя $t=r$, получаем неравенство (10). Случаи $p=1$ и $p=\infty$ получаются гораздо проще и мы не будем на этом останавливаться.

Перейдем теперь к доказательству неравенства (11).

Применив неравенство Минковского, из формулы (7) получим

$$M_p(\Lambda^\beta f, t) = \Big(\int_S |\Lambda^\beta f(tx')|^p\, dx'\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int_S \Big(\frac{t^{-\frac{n}{2}-\beta+1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\rho)^{\beta-1}|f(\rho x')|\,\rho^{\frac{n}{2}-1}\,d\rho\Big)^p dx'\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t^{-\frac{n}{2}-\beta+1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\rho)^{\beta-1}\Big(\int_S |f(\rho x')|^p\,dx'\Big)^{1/p}\rho^{\frac{n}{2}-1}\,d\rho =$$

$$= \frac{t^{-\frac{n}{2}-\beta+1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} M_p(f,\rho)\,\rho^{\frac{n}{2}-1}\,d\rho.$$

Теорема доказана.

Как почти немедленное следствие теоремы 1 получаем обобщение теоремы Харди и Литтльвуда.

Теорема 2. *Пусть f гармонична в* B, $1\leqslant p\leqslant\infty$, *а α и β положительные числа.*

1) *Если* $M_p(f,r)=O((1-r)^{-\alpha})$, *то* $M_p(\Lambda_\beta f, r) = O((1-r)^{-\alpha-\beta})$.

2) *Если* $M_p(f,r)=O((1-r)^{-\alpha-\beta})$, *то* $M_p(\Lambda^\beta f, r) = O((1-r)^{-\alpha})$.

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из неравенства (10). Докажем второе утверждение. Пусть $M_p(f,r)\leqslant$ $\leqslant C(1-r)^{-\alpha-\beta}$. Тогда по теореме 1

$$M_p(\Lambda^\beta f, r)\leqslant C\,r^{-\beta}\int_0^r (r-t)^{\beta-1}(1-t)^{-\alpha-\beta}\,dt.$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_0^r (r-t)^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-\beta}\,dt =$$

$$= \frac{r^\beta}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\beta}\int_0^r (r-t)^\beta(1-t)^{-\alpha-\beta-1}\,dt.$$

Но $(r-t)^\beta\leqslant(1-t)^\beta$, следовательно

$$M_p(\Lambda^\beta f, r) \leqslant C_1 + C_2 r^{-\beta} \int_0^r (1-t)^{-\alpha-1}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 + C_2 r^{-\beta} (1-r)^{-\alpha} \leqslant C (1-r)^{-\alpha}.$$

5°. Кроме оценок роста из теоремы 2, неравенства (10) и (11) теоремы 1 позволяют получить еще и более тонкие интегральные соотношения между средними гармонической функции и ее дробного интеграла и производной. Эти соотношения устанавливаются в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть f гармонична в* B, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$.

1) *Для любого* $q > 0$

$$\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha+q\beta} (M_p(\Lambda_\beta f, r))^q r^{n-1}\, dr \leqslant C \int_0^1 (1-r^2)^\alpha (M_p(f, r))^q r^{n-1}\, dr.$$

2) *Для любого* $q \geqslant 1$

$$\int_0^1 (1-r^2)^\alpha (M_p(\Lambda^\beta f, r))^q r^{n-1} dr \leqslant C \int_0^1 (1-r^2)^{\alpha+q\beta} (M_p(f, r))^q r^{n-1}\, dr.$$

Доказательство обоих утверждений следуют классической схеме (см., например, [5], теорема 3) и мы не будем их приводить.

Наше последнее утверждение относится к функциям класса A_α^p. В этой теореме дается ответ на вопрос: что происходит с функцией из некоторого класса A_α^p после применения к ней операторов (мультипликаторных преобразований) Λ_β и Λ^β.

Теорема 4. *Пусть f гармонична в* B, $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$.

1) *Если* $f \in A_\alpha^p$, *то* $\Lambda_\beta f \in A_{\alpha+p\beta}^p$.

2) *Если* $f \in A_{\alpha+p\beta}^p$, *то* $\Lambda^\beta f \in A_\alpha^p$.

Доказательство следует из предыдущей теоремы, если заметить, что

$$\|f\|_{p,\alpha}^p = \int_0^1 \int_S |f(rx')|^p (1-r^2)^\alpha r^{n-1}\, dr dx' =$$

$$= \int_0^1 (1-r^2)^\alpha M_p^p(f, r)\, r^{n-1}\, dr.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22. X. 1984

Ա. Է. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Հարմոնիկ ֆունկցիաների կոտորակային ածանցյալների և ինտեգրալների աճի մասին (ամփոփում)

Դիտարկվում են հարմոնիկ ֆունկցիաներ R^n-ի միավոր գնդում։ Ենթադրելով, որ f ֆունկցիայի $M_p(f, r)$ $(1 < p < \infty)$ ինտեգրալ միջինը ունի $O((1-r)^{-\alpha})$ $(\alpha > 0)$ աճի կարգ եզրի մոտ, ապացուցվում է, որ f-ի $\beta > 0$ կարգի կոտորակային ածանցյալի ու ինտեգրալի ինտեգրալ միջինները ունեն $O((1-r)^{-\alpha-\beta})$ և $O((1-r)^{-\alpha+\beta})$ $(\beta < \alpha)$ կարգ համապատասխանաբար։ Տրված է կիրառություն հարմոնիկ ֆունկցիաների A_α^p դասերի համար։

A. E. DJRBASHIAN. *On the rate of growth of fractional derivatives and integrals of harmonic functions* (summary)

We consider harmonic functions in the unit ball of R^n. Assuming that the integral mean $M_p(f, r)$, $1 < p < \infty$ of the function f has the growth rate $O((1-r)^{-\alpha})$ $(\alpha > 0)$ we prove that the integral means of fractional derivative and integral of f of order $\beta > 0$ have rates of growth $O((1-r)^{-\alpha-\beta})$ and $O((1-r)^{-\alpha+\beta})$ $(\beta < \alpha)$ respectively. Applications to the spaces of harmonic functions A^p_* are also given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. H. Hardy, J. E. Littlewood.* Some properties of fractional integrals II, Math. Zeit., 34, 1932, 403—439.
2. A. *L. Shields, D. L. Williams.* Bounded projections duality, and multipliers in spaces of analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 162, 1971, 287—302.
3. *A. L. Shields, D. L. Williams.* Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions, J. Reine Angew. Math., 299/300, 1978, 256—279.
4. *K. T. Hahn, J. Mitchel.* H^p spaces on bouded symmetric domains, II, Ann. Polon. Math., 28, 1973, 89—93.
5. *M. Stoll.* On the rate of growth of the means M_p of holomorphic and pluriharmonic functions on the ball, J. Math. Analysis Appl., 93, №1, 1983, 109—127.
6. *А. Э. Джрбашян.* Интегральные представления и непрерывные проекторы в некоторых пространствах гармонических функций, Мат. сборник, 121 (163), № 2 (6), 1983, 259—271.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 5, 1985 Математика

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН

СВОЙСТВО БЛИЗОСТИ a-ТОЧЕК МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И СТРУКТУРА ОДНОЛИСТНЫХ ОБЛАСТЕЙ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Основные результаты, следствия, обсуждения

Теорема Пикара дала толчок к построению ставших уже классическими теорий, предметы исследования которых можно разделить по двум основным направлениям.

В одном из них, развитом в основном французскими математиками (Г. Жулиа, Ж. Валирон, А. Мийю, И. Дюфренуа), выявляется, что для мероморфной в C функции $w(z)$ можно указать в z-плоскости угловые области произвольно малого раствора или последовательности кружков с «малыми» диаметрами, в которых $w(z)$ принимает все значения из $\bar{C}$, кроме, быть может, двух.

Другое направление — теория распределения значений мероморфных функций (теория Р. Неванлинны, см. [1]).

Результаты второго направления отличаются точностью количественного описания a-точек в кругах $|z| \leqslant r$. Однако они не содержат информации о взаимном геометрическом расположении a-точек для различных значений a.

Преимуществом же результатов первого направления является наличие в них некоторой информации такого рода.

Теоремы 1.1 и 1.2 настоящей работы позволяют с единой позиции рассмотреть и усилить основные результаты обоих направлений, а также, что важнее, выявить новые стороны поведения мероморфных функций.

Основные результаты работы являются, по существу, результатами о кругах наполнения, изучение которых ранее находилось в стороне от центральных направлений исследования. Тем не менее они позволяют в существенном усилить первую и вторую основные теоремы теории поверхностей наложения Л. Альфорса, вторую основную теорему теории Р. Неванлинны, соотношения дефектов Р. Неванлинны и Л. Альфорса, выявляя при этом, что основные выводы теории распределения значений являются частью более общей закономерности — «свойства близости a-точек» мероморфных функций.

В плане результатов первого направления теоремы 1.1 и 1.2 дают точную оценку кругов наполнения как в кругах $|z| \leqslant r$, так и в угловых областях, что достигается благодаря выделению однолистных областей римановой поверхности $\{w(z) : |z| \leqslant r\}$ и учету их структуры — закономерности, открывающей перспективу применения однолистных функций для изучения мероморфных.

1°. Основные результаты (анонсированы в [2], см. также [3], стр. 10).

Теорема 1.1. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция; $\varphi(r)$ — монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \to \infty$ ($\varphi^{35}(r) < A(r)$), где $A(r)$ — сферическая характеристика Л. Альфорса. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ можно указать $\Phi(r)$ попарно непересекающихся областей $E_i(r)$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(r)$, для которых справедливы следующие утверждения.*

$$\text{I.}\qquad |\Phi(r) - A(r)| = o[A(r)],\ r \to \infty,\ r \overline{\in} E, \tag{1.1}$$

где E — некоторое множество конечной логарифмической меры.

II. *В каждой области $E_i(r)$ функция $w(z)$ однолистна; на $\partial E_i(r)$ могут лежать критические точки функции $w(z)$; замыкание множества $w(E_i(r))$, стереографически отображенное на риманову сферу, совпадает со сферой с некоторым числом k_i исключенных из сферы односвязных областей.*

$$\text{III.}\quad \rho(\Delta_j^i) \leqslant \frac{1}{\varphi(r)},\ i = 1, 2, \cdots, \Phi(r),\ j = 1, 2, \cdots, k_i, \tag{1.2}$$

где $\rho(\Delta_j^i)$ — диаметр области Δ_j^i в сферической метрике, $r \overline{\in} E$.

$$\text{IV.}\qquad \sum_{i=1}^{\Phi(r)} k_i \leqslant 2A(r) + o[A(r)],\ r \to \infty,\ r \overline{\in} E. \tag{1.3}$$

$$\text{V.}\qquad \sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(E_i(r)) \leqslant K\varphi^7(r)\, r A^{1/2}(r), \tag{1.4}$$

где $d(E_i(r))$ — диаметр области $E_i(r)$, K — некоторая постоянная.

Теорема 1.2. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция; $\varphi(r)$ — монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$, при $r \to \infty$, $\varphi^{35}(r) < A(r)$. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ можно указать $\Phi(r)$ попарно непересекающихся областей $(\widetilde{E}_i(r))$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(r)$, для которых справедливы следующие утверждения.*

I. *Предложение I теоремы* 1.1.

II. *В каждой области $\widetilde{E}_i(r)$ функция $w(z)$ однолистна; для каждой точки, принадлежащей $\partial\widetilde{E}_i(r)$, существует некоторая ее окрестность, в которой $w(z)$ однолистна; замыкание множества $w(\widetilde{E}_i(r))$, стереографически отображенное на риманову сферу, совпадает со сферой с некоторым числом $\widetilde{k}_i$, исключенных из сферы односвязных областей $\widetilde{\Delta}_j^i$, $j = 1, 2, \cdots, \widetilde{k}_i$.*

$$\text{III.}\quad \rho(\widetilde{\Delta}_j^i) \leqslant \frac{1}{\varphi(r)},\ i = 1, 2, \cdots, \Phi(z),\ j = 1, 2, \cdots, \widetilde{k}_i,\ r \overline{\in} E. \tag{1.5}$$

$$\text{IV.}\qquad \sum_{i=1}^{\Phi(r)} \widetilde{k}_i \leqslant 4A(r) + o[A(r)],\ r \to \infty,\ r \overline{\in} E. \tag{1.6}$$

$$\text{V.} \qquad \sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(\overline{E}_i(r)) \leqslant K\varphi^7(r)\, rA^{1/2}(r), \tag{1.7}$$

где k — постоянная, не зависящая от $w(z)$.

Мы используем также следующее

Примечание к теореме 1.2. Пусть $F_r = \{w(z) : |z| \leqslant r\}$ — поверхность, являющаяся образом круга при отображении $w(z)$, $\widetilde{F}_r$ — поверхность, полученная стереографическим отображением F_r на риманову сферу.

Множество $\bigcup_i w(E_i(r))$ является объединением двух множеств

$$\bigcup_i w\,\overline{E}_i(r)) \text{ и } \left\{\left| \bigcup_{m=-\tau^{**}}^{\tau^{*}-1} \bigcup_x D_m(x, r)\right| \cup [\bigcup_x D_\infty(x, r] \cup [\bigcap_x D_0(x, r)]\right\},$$

где $D_m(x, r)$, $D_\infty(x, r)$, $D_0(x, r)$ —кратные острова*, проектирующиеся в области на сфере, диаметры которых не больше чем $K/\varphi(r)$, где $K = \text{const} < \infty$. Из неравенства (3.15) вытекает оценка

$$\sum_{l=1}^{\Phi(r)} k_l \leqslant 2A(r) - B_{1,p}(r),$$

где $B_{1,p}(r)$ — сумма порядков всех этих кратных островов.

Если нам не нужно использовать структуру множеств $E_i(r)$, выявляемую в примечании к теореме 1.2, то можем выбросить из рассмотрения те области $E_i(r)$, для которых $d(E_i(r)) > \dfrac{K\varphi^8(r)\, r}{A^{1/2}(r)}$. Так как согласно неравенству (1.1) и (1.4) количество таких областей $o[A(r)]$, $r \to \infty$, $r \overline{\in} E$, то сохраняя для оставшихся областей все обозначения теоремы 1.1, получим следующий результат.

Теорема 1.1′. *В теореме* 1.1 *неравенство* (1.4) *можно заменить неравенствами*

$$d(E_i(r)) \leqslant \frac{K\varphi^8(r)\, r}{A^{1/2}(r)}\,) \; i = 1, 2, \cdots, \Phi(r). \tag{1.4′}$$

2°. Связь со второй основной теоремой теории распределения значений. Вывод соотношения дефектов. В теоремах 1.1 и 1.2 не фигурируют значения $a_1, a_2 \ldots, a_q$ или величины типа функций $n(r, a_\nu)$ и $m(r, a_\nu)$, в терминах которых формулируется вторая основная теорема теории распределения. Однако связь между этими теоремами устанавливают следующие

Рассуждения А. Если $a_\nu \in \overline{\mathrm{C}}$, $\nu = 1, 2, \cdots, q$, таковы, что $a_i \neq a_j$ при $i = j$, то при $r > r_0(a_1, a_2, \cdots, a_q)$ каждая из $\overline{E_i(r)}$ содержит не

---

* Островом поверхности $\widetilde{F}_r$ над областью D на римановой сфере называется связная часть поверхности $\widetilde{F}_r$, лежащая над D и не имеющая над D относительной границы (последнее означает, что проекция на сферу границы острова не имеет пересечения с D). Кратностью острова называется число его листов; порядком — кратность минус единица. Конкретная конструкция этих островов D_m, D_0, D_∞ указывается при доказательствах.

менее чем $q - k_l(r)$ точек, образы которых при отображении функцией $w(z)$ принадлежат множеству $\{a_1, a_2, \cdots, a_q\}$. В самом деле, при r больше некоторого r_0, диаметры областей Δ_j^l меньше чем половина минимального расстояния в сферической метрике между точками a_1, $a_2, \cdots, a_q$. Следовательно количество $a_1, a_2, \cdots, a_q$-точек, принадлежащих $\overline{E_l(r)}$, не меньше чем $q - k_l(r)$. Отсюда вытекает неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{q} n^*(r, a_\nu) \geq \sum_{l=1}^{\Phi(r)} (q - k_l(r)), \tag{1.8}$$

где $n^*(r, a_\nu)$— количество a_ν-точек, с учетом кратности, принадлежащих множеству $\bigcup_{l=1}^{\Phi(r)} \overline{E_l(r)}$.

Далее, в силу однолистности функции $w(z)$ на $\overline{E_l}(r)$ все кратные a_ν-точки, фигурирующие в (1.8), принадлежат островам $D_m(x, r)$, $D_0(x, r)$, $D_\infty(x, r)$, при том в силу того, что диаметры проекций на сферу этих островов стремятся к нулю при $r \to \infty$, получаем, что при $r > r_1$ каждому такому острову не могут принадлежать образы a_ν-точек с различными ν. Очевидно, сумма порядков кратных a_ν-точек, образы которых принадлежат заданному острову, не больше порядка этого острова. Из двух последних предложений вытекает неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{q} n_1^*(r, a_\nu) \leqslant B_{1,\rho}(r),$$

где $n_1^*(r, a_\nu)$— сумма порядков всех a_ν-точек, принадлежащих множеству $\bigcup_{l=1}^{\Phi(r)} \overline{E_l(r)}$.

Теперь, с учетом неравенства (1.8) и примечания к теореме 1.2 имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q} n^*(r, a_\nu) - \sum_{\nu=1}^{q} n_1^*(r, a_\nu) \geqslant (q-2)\,\Phi(r), \tag{1.9}$$

откуда, учитывая предложение 1 теоремы 1.1 и очевидное неравенство $n(r, a_\nu) - n_1(r, a_\nu) \geq n^*(r, a_\nu) - n_1^*(r, a_\nu)$, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) - \sum_{\nu=1}^{q} n_1(r, a_\nu) \geqslant (q-2)\,A(r) - Q(r),$$

где $Q(r) = o\,[A(r)]$, $r \to \infty$, $r \overline{\in} E$.

Последнее неравенство отличается от второй основной теоремы Л. Альфорса только худшим остаточным членом (впрочем, несущественным для основных выводов). Таким образом, неравенство (1.9), по существу уточняет вторую основную теорему теории поверхностей наложения, показывая, что в последней вместо a_ν-точек, лежащих в $|z| \leqslant r$, достаточно рассматривать лишь те a_ν-точки из $|z| \leqslant r$, которые принадлежат $\bigcup_{l=1}^{\Phi(r)} E_l(r)$.

В процессе доказательства устанавливается, что $Q(r)$ есть, на самом деле, величина $o[A(r)]+O[L(r)]$, $r\to\infty$, где величина $L(r)$ — сферическая длина образа окружности $|z|=r$ при отображении функцией $m(z)$. Согласно лемме 2, приведенной после доказательства теоремы 1.1, $Q_1(r)=\int\limits_{r_0}^{r}\frac{Q(t)}{t}\,dt=o[T(r)]$, $r\to\infty$, $r\overline{\in}E'$, где $\int\limits_{E'}\frac{1}{\ln\ln t}\,dt<\infty$, так что из неравенства (1.9) получаем следующее усиление второй основной теоремы Р. Неванлинны (с худшим остаточным членом).

$$\sum_{\nu=1}^{q}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{n^*(t,a_\nu)}{t}\,dt-\sum_{\nu=1}^{q}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{n_1^*(r,a_\nu)}{t}\,dt\geqslant(q-2)\,T(r)-Q_1(r),$$

откуда вытекает соотношение

$$\sum_{(a_\nu)}\left\{1-\varlimsup_{r\to\infty}\left[\int\limits_{r_0}^{r}\frac{n^*(t,a_\nu)-n_1^*(t,a_\nu)}{t}\,dt/T(r)\right]\right\}\leqslant 2,$$

которое непосредственно усиливает соотношение дефектов

$$\sum_{(a)}\delta(a)+\sum_{(a)}\theta(a)\leqslant 2.$$

3°. Свойство близости a-точек мероморфных функций. Фактически, в силу произвольности набора значений $a_1, a_2, \ldots, a_q$ выше мы доказали следующий результат.

Теорема 1.3. *Для мероморфной в* $|z|<\infty$ *функции* $w(z)$ *в круге* $|z|\leqslant r$, $r\overline{\in}E$, *можно указать* $\Phi(r)$ *таких областей* $E_l(r)$, *удовлетворяющих условиям* I, II, V *теоремы* 1.1, *что для произвольного набора значений* $a_\nu\in\overline{\mathbf{C}}$, $\nu=1,2,\cdots,q$ $(a_i\neq a_j$ *при* $i\neq j)$ *выполняется оценка*

$$\sum_{\nu=1}^{q}n^*(r,a_\nu)-\sum_{\nu=1}^{q}n_1^*(r,a_\nu)>(q-2)A(r)-Q(r).\tag{1.10}$$

Ранее был доказан несколько более слабый результат, отличающийся от предыдущего лишь тем, что множество $E_l(r)$ зависело от заданного набора значений $a_\nu\in\overline{\mathbf{C}}$, $\nu=1,2,\cdots,q$ (см. [4], теорема 1).

Как уже отмечалось, из неравенства (1.10) следует усиление соотношения дефектов и, по существу, усиление второй основной теоремы теории распределения значений, так что теоремы 1.1, 1.2, 1.3 позволяют получить один из основных выводов теории распределения значений, вытекающий из соотношения дефектов: количества a-точек и b-точек функции $w(z)$, лежащие в круге $|z|\leqslant r$, примерно равны, «близки», для «большинства» комплексных значений a и b. В целом же теоремы 1.1, 1.2, 1.3 отражают более общую и точную закономерность распределения a-точек функции $w(z)$ — «свойство близости a-точек», которое заключается в том, что помимо близости количества этих a-точек и b-точек «близки», одновременно, их модули и аргументы. В менее общей форме эта закономерность была обнаружена ранее в [5] (см. также [6], § 3) и уточнена в [4].

Поясним качественно это свойство, несколько огрубленно представляя явления, о которых говорим.

Вторые основные теоремы теорий Р. Неванлинны и Л. Альфорса утверждают, что общее количество $a_1, a_2, \dots, a_q$-точек, лежащих в круге $|z| \leqslant r$, превышает $(q-2)\ A(r)$. Теоремы 1.1, 1.2, 1.3 выявляют, что можно указать в $|z| \leqslant r$ области $E_i(r)\ (i=1, 2, \cdots, \Phi(r)) \simeq A(r)$, общее количество $a_1, a_2, \cdots, a_q$-точек в которых уже превышает $(q-2)\ A(r)$. Более того, в среднем, в каждой области $E_i\ (r)$ функция $w(z)$ принимает каждое значение $a_1, a_2, \cdots, a_q$ за исключением возможно двух из них. Последнее, в силу того, что, в среднем, диаметры областей $E_i(r)$ „малы"— меньше чем $\frac{\varphi(r}{A^{1/2}(r)}\, r$*, означает, что эти $a_1, a_2, \cdots, a_q$-точки располагаются близко друг от друга и лежат как бы кучками. Если, например, $z_i(a_{\nu_1})$ и $z_i(a_{\nu_2})$ a_{ν_1} и a_{ν_2}-точки, которые принадлежат $E_i(r)$, то в силу предыдущего

$$|z_i(a_{\nu_1}) - z_i(a_{\nu_2})| \leqslant \frac{K\varphi(r)}{A^{1/2}(r)}\, r,$$

т. е. расстояния между ними стремятся к нулю при возрастании i, если порядок функции больше двух (заметим, что $\varphi\ (r)$ может иметь произвольно медленный рост); если же порядок функции меньше двух, то, во всяком случае, при возрастании i стремится к нулю угол, под которым видны эти точки $z_i(a_{\nu_1}),\ z_i(a_{\nu_2})$. Так что в любом случае $a_1, a_2, \cdots, a_q$-точки, лежащие в $\bigcup\limits_{i=1}^{\Phi(r)} E_i(r)$, оказываются „близки" друг к другу, откуда и название — „свойство близости a-точек".

Укажем еще, что несколько более подробный анализ этого свойства и методические замечания о его применимости приводятся в [4].

4°. **Выделение однолистных областей на римановой поверхности функции w^{-1}.** Известные нами применения теории однолистных функций к изучению распределения корней мероморфных носят эпизодический характер и действуют в случаях, когда риманову поверхность функции $w^{(-1)}$ удается эффективно разбить на листы; образно говоря, выделить из римановой поверхности однолистные области, в которых $w^{(-1)}$ однозначна, и, следовательно, осуществляет взаимно однозначное отображение. Как на это неоднократно указывалось в литературе, вряд ли в общем случае возможно эффективное разбиение на листы.

Представляется, что в общем случае такое разбиение на листы могла бы успешно заменить информация следующего типа: выделение из римановой поверхности F_r по возможности большего числа однолистных областей, в которых $w^{(-1)}$ однозначна и которые образованы удалением из плоскости по возможности минимального количества областей с малыми диаметрами. Если, при этом, области, в которых $w^{(-1)}$ однозначна, «почти» исчерпывают поверхность F_r, то «почти» на всей поверхности могут действовать теоремы теории однолистных функций.

---

* Это вытекает из предложений I и V теоремы 1.1.

Ввиду того, что удаляемые области могут являться окрестностями точки бесконечность, рассмотрение задачи естественно проводить на поверхности $\bar{F}_r$ над сферой, с тем, чтобы уметь оценивать «малость» удаляемых окрестностей бесконечности.

Решение поставленного вопроса вытекает из утверждений II—IV теоремы 1.2 и формулируется у нас как

Теорема 1.4. *Из поверхности* $\bar{F}_r$ *можно выделить* $\Phi(r)$ *однолистных областей* WE_i, (WE_i — *область, полученная стереографическим отображением на сферу области* $w(E_i(r))$), *замыкание каждой из которых является сферой с некоторым числом* k_i *удаленных из сферы односвязных областей* Δ_j^i, $j = 1, 2, \ldots, k_i$, *причем для суммы* k_i *выполняется предложение IV теоремы 1.2, а диаметры областей* Δ_{ij} *стремятся к нулю при* $r \to \infty$, $r \bar{\in} E$.

Рассмотрим подробнее этот результат. В силу предложения I теоремы 1. 2 и $\rho(\Delta_j^i) \to 0$, $r \to \infty$, $r \bar{\in} E$, и определения $A(r)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} J_0(WE_i) = \pi A(r) + o[A(r)],\ r \to \infty,\ r \bar{\in} E,$$

где $J_0(x)$ — сферическая площадь x. Таким образом, совокупность наших однолистных областей получена выбрасыванием из $\bar{F}_r$ множеств пренебрежительно малой площади, так что фактически мы выделили максимальное число (с точностью до $o[A(r)]$ точное) таких однолистных областей. Из предложения IV вытекает, что каждая из этих областей является сферой с, в среднем не более чем четырьмя, выброшенными из сферы областями Δ_j^i. Число четыре здесь также точное, как показывает пример функции Вейерштрасса, для которой все точки $\bar{F}_r$, проектирующиеся в определенные точки a_1—a_4, являются алгебраическими точками ветвления и, следовательно, при выделении из $\tilde{F}_r$ любой однолистной области, совпадающей со сферой с некоторым числом удаленных «малых» областей, необходимо удалить из сферы не менее четырех «малых» окрестностей точек a_1—a_4, в которых $w^{(-1)}$ не однозначна.

Таким образом, из $\bar{F}_r$ выделено максимальное число однолистных областей, замыкания которых совпадают со сферой, в среднем, не более чем четырьмя выброшенными областями малых диаметров.

Здесь отметим лишь, что полученные результаты позволяют получить различные оценки производных функции w^{-1} на множествах $w(E_i(r))$, т. е. на всем $\tilde{F}_r$, исключая множества малой сферической площади.

5° О структуре первой основной теоремы теории поверхностей наложения Л. Альфорса. Пусть D—область на сфере Римана, $J(r, D)$—сумма площадей всех частей поверхности $\bar{F}_r$, лежащих над D; $S(r, D) = \dfrac{J(r, D)}{J_0(D)}$ — „среднее число листов поверхности $\bar{F}_r$ над D".

Первая основная теорема теории поверхностей наложения Л. Альфорса утверждает:

$$|A(r) - S(r, D)| = O[L(r)] = o[A(r)], \; r \to \infty, \; r \overline{\in} E.$$

Теорема показывает, что каждая область D на сфере накрывается поверхностью $\widetilde{F}_r$ с одинаковой «плотностью». Однако в ней не отражена структура множеств, накрывающих область D.

Из предложений II, III, IV теоремы 1.2 вытекает

$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} J_0(WE_i \cap D) = J_0(D)\Phi(r) - \sum_{i=1}^{\Phi(r)} J_0(\bigcup_j (\Delta_j^i \cap D)) =$$

$$= J_0(D)\Phi(r) + o[A(r)], \; r \to \infty, \; r \overline{\in} E,$$

откуда с учетом предложения I имеем

$$\left| \sum_{i=1}^{\Phi(r)} \frac{J_0(WE_i \cap D)}{J_0(D)} - A(r) \right| = o[A(r)], \; r \to \infty, \; r \overline{\in} E.$$

Это соотношение выявляет, что из частей поверхности $\widetilde{F}_r$, проектирующихся в D, можно выбросить некоторое множество, суммарная площадь которой есть $o[A(r)]$, $r \to \infty$, $r \overline{\in} E$, так что оставшееся множество распадается на примерно $A(r)$ однолистных областей, среднее число листов которых уже примерно равно $S(r, D)$, чем усиливается первая основная теорема Л. Альфорса.

6°. Теоремы 1.1 и 1.1′ как теоремы о кругах наполнения. В 1924 году Мийю доказал [7] следующий результат: для мероморфной в $|z| < \infty$ функции $w(z)$ и произвольных последовательнотей $\varepsilon_n \to 0$ и $\beta_n \to 0$ ($\varepsilon_n > 0$, $\beta_n > 0$), можно указать в z-плоскости такую последовательность $z_n \to \infty$, что образ каждого кружка $|z - z_n| < \varepsilon_n |z_n|$ при отображении $w(z)$ и последующем стереографическом отображении получнного множества на риманову сферу, сферические диаметры которых не превосходят β_n.

Отсюда легко вывести, что в указанных кружках z-плоскости, называемых кругами наполнения, функция $w(z)$ принимает бесконечно часто все значения $a \in \overline{\mathbb{C}}$ за исключением двух, что усиливает теорему Пикара, выявляя структуру множеств, в которых эта теорема верна.

В последнем плане, очевидно, наибольший интерес представляет вопрос о том, сколь малыми могут быть круги наполнения, т. е. круги в z-плоскости, радиусы которых есть $o(|z_n|)$, $|z_n| \to \infty$, где z_n—центры этих кругов, и образ каждого из которых заполняет всю сферу за исключением двух кружков, диаметры которых стремятся к нулю при $n \to \infty$. порядка. Тогда

Уточняя более ранний результат Мийю [8], Дюфренуа доказал [9]: пусть $w(z)$—мероморфная в $|z| < \infty$ функция конечного не нулевого
А. для любой функции $\varphi(r)$, монотонно стремящейся к $+\infty$ при $r \to \infty$, существует последовательность кругов наполнения

$$|z-z_n|<\frac{\varphi(|z_n|)\,|z_n|}{\sqrt{U^*(|z_n|)}}, \tag{1.11}$$

где $U^*(r)=r^{\rho(r)}$, а $\rho(r)$ - уточненный порядок функции $A(r)$.
чений a, выполняется неравенство

В. можно указать в z-плоскости последовательность кругов наполнения с центрами z_n, что для любого $a\in\overline{\mathbf{C}}$, исключая не более двух зна-

$$n^*(z_n,\ a)>\frac{1}{\varphi(|z_n|)}U^*(|z_n|),\ n\to\infty, \tag{1.12}$$

где $n^*(z_n,\ a)$ — количество a-точек в n-ом круге.

Если в определении кругов наполнения допустить, что образы их заполняют всю сферу за исключением некоторого числа k кружков на сфере, где k — не обязательно меньше или равно двум, как в классическом случае, то области $E_l(r)$ с диаметрами $\leqslant\frac{\varphi(r)}{A^{1/2}(r)}r$ как раз выполняют роль таких кругов наполнения, причем в дополнение к процитированному результату А оказывется, что в $|z|\leqslant r$ можно указать $\Phi(r)$ таких кругов. Более того, в этих $\Phi(r)$ кругах, согласно пункту 2, выполняется второе основное предложение теории распределения значений (сравните с неравенством (1.12)).

Поскольку число $\Phi(r)$ асимптотически предельно точное (см. п. 4), то может быть последнее понимание кругов наполнения не менее естественно.

Если же следовать классическому варианту $k\leqslant 2$, то учитывая предложения I и IV теоремы 1.1 получим, что количество $\Phi_1(r)$ тех областей $E_{1,l}(r)$ из множества $\{E_l(r)\}_{l=1}^{\Phi(r)}$, для которых $k_l\leqslant 2$, удовлетворяет неравенству

$$\Phi_1(r)\geqslant\frac{1}{3}A(r)-o[A(r)],\ r\to\infty,\ r\overline{\in}E. \tag{1.13}$$

Следовательно, из теоремы 1.1′ вытекает

Теорема 1.1″ (о кругах наполнения). *В круге $|z|\leqslant r$, $r\overline{\in}E$, можно указать $\Phi_1(r)$ областей $E_{1,l}(r)$ (кругов наполнения), диаметр каждой из которых удовлетворяет неравенству*

$$d(E_{1,l}(r))\leqslant\frac{K\varphi(r)}{A^{1/2}(r)}r, \tag{1.14}$$

и образ каждой из которых является сферой с не более чем двумя исключенными из сферы кружками, диаметры которых не больше, чем $1/\varphi^8(r)$. Количество областей $\Phi_1(r)$ удовлетворяет неравенству (1.13).

Теорема 1″ уточняет предложение А, указывая количество кругов наполнения (точное с точностью до постоянной 1/3).

В силу рассуждений А отсюда следует предложение: для любого $a\in\overline{\mathbf{C}}$, исключая не более чем два значения a, выполняется неравенство

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n'(r,\ a)}{A(r)}\geqslant\frac{2}{9},$$

где $n'(r,\ a)$ — количество a-точек в $\{E_{1,l}(r)\}_{l=1}^{\Phi_1(r)}$ (сравните с неравенством (1.12)).

7°. **Теоремы о лучах Бореля.** Известная теорема Жулиа утверждает: для целой функции $w(z)$ существует такой луч $J=\{z:\arg z=\varphi_0, |z|>0\}$, что для любого $\beta>0$ в угловой области $\Delta_\beta(J)=\{z: |\arg z-\varphi_0|<2\pi\beta, |z|>0\}$ функция $w(z)$ принимает бесконечное число раз каждое значение $a\in\overline{C}$, исключая не более двух значений a. Этот результат уточняет теорему Пикара.

Уточняя известную теорему Бореля в духе теоремы Жулиа Валирон доказал [10] (см. также [11], гл. XIII): Пусть ρ — порядок мероморфной в $|z|<\infty$ функции $w(z)$, $0<\rho<\infty$. Тогда существует такой луч J (луч Бореля), что для любого $\beta>0$ в угловой области $\Delta_\beta(J)$ для всех $a\in\overline{C}$, исключая не более двух значений a, выполняется

$$\sum_{z_\nu(a)\in\Delta_\beta(J)}\frac{1}{|z_\nu(a)|^{\rho-\varepsilon}}=\infty, \tag{1.15}$$

где $z_\nu(a)$ — a-точки функции $w(z)$, $\varepsilon>0$.

При $\beta=\pi$ — это теорема Бореля; для целой функции с $0<\rho<\infty$ — это уточняет теорему Жулиа.

Обозначим

$$n_\beta(J,r,a)=\sum_{z_\nu(a)\in\Delta_\beta(J)\cap\{z:|z|<r\}}1;\quad \rho(\psi(r))=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\psi(r)}{\ln r}$$

порядок функции $\psi(r)$. Учитывая, что $n(r,a)\geqslant n_\beta(J,r,a)$ и в силу известного соотношения: если количество a-точек бесконечно, то выражение

$$\sum_{z_\nu(a)\in\Delta_\beta(J)}\frac{1}{|z_\nu(a)|^{\rho(n_\beta(J,r,a))+\alpha}}$$

сходится при $\alpha=\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ и расходится при $\alpha=-\varepsilon$, можем следующим образом переформулировать теорему Валирона: при предположениях этой теоремы для любого $a\in\overline{C}$, исключая не более двух значений a, выполняется неравенство

$$\rho(n_\beta(J,r,a))\geqslant\rho. \tag{1.16}$$

По-видимому наиболее точный результат, в котором сравниваются не порядки функций $n_\beta(J,r,a)$ и $T(r)$, а сами эти функции, следующий [12] в теореме Валирона неравенство (1.16) можно заменить оценкой

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n_\beta(J,r,a)}{U(r)}>0, \tag{1.17}$$

где $U(r)=r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ — уточненный порядок функции $T(r)$.

Заметим, что из последней оценки еще не следует неравенство (1.16).

Однако и этот результат не может являться предельным. Это почти очевидно, так как согласно теории Л. Альфорса точные оценки числа корней $n(r,a)$ даются посредством характеристики $A(r)$, точно так же как оценки $N(r,a)$ через $T(r)$ и поэтому, в общем случае, оценки $n_\beta(J,r,a)$ через уточненный порядок функции $T(r)$ не могут быть точными.

Следующий наш результат позволяет сразу усилить предыдущие, причем с точностью до постоянных (а не порядка) оценки уже не улучшаемы.

Теорема 1.5. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z|<\infty$ функция порядка $\rho>0$; ε_n', ε_n, $n=1, 2, \cdots$ — монотонно убывающие последовательности, стремящиеся к нулю $\varepsilon_n<\varepsilon_n'$. Тогда существует такая последовательность вложенных друг в друга угловых областей*

$$\Delta_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(\varphi(n)),\ n=1, 2\cdots\ (\Delta_\alpha(\varphi)=\{z: |\arg z-\varphi|<2\pi\alpha,\ |z|>0\}),$$

что для любого n на некоторой последовательности $r_k'(n)\to\infty$ выполняются соотношения

$$\Phi_{\varepsilon_k'+2\varepsilon_n}(r_k'(n)\varphi(n))\geqslant\varepsilon_n' A(r_k'(n))+o[A(r_k'(n))],\ n=1, 2, \cdots \tag{1.18}$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln A(r_k(n))}{\ln r_k(n)}=\rho,\ n=1, 2, \cdots, \tag{1.19}$$

где $\Phi_\alpha(r,\varphi)$ — количество тех областей $E_l(r)$ из теоремы, l' замыкания которых целиком лежат в $\Delta_\alpha(\varphi)\cap\{z: |z|\leqslant r\}$.

Заметим, что в силу предложений I теоремы 1.1 и 1.2' величину $A(r)$ можно заменить на $\Phi(r)$ и рассматривать последнюю как характеристику. Аналогично, рассматривая $\Phi_\alpha(r,\varphi)$ как характеристику в угловой области $\Delta_\alpha(\psi)$ и применив к областям $E_l(r)$ рассуждения A, получим следующий аналог соотношения дефектов для последовательнсти вложенных друг в друга областей $\Delta_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}$, т. е. следующее

Следствие 1.1. В условиях теоремы 1.5, при заданном n и для любого $a\in\overline{\mathbf{C}}$, исключая, быть может, не более чем счетное множество значений a, выполняется неравенство

$$\delta_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(a)\overset{\text{def}}{=}1-\overline{\lim_{r_k'(n)\to\infty}}\frac{n_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(a,\ r_k'(n),\ \varphi(n))}{\Phi_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(r_k'(n),\ \varphi(n))}\leqslant 0, \tag{1.20}$$

где $n_\alpha(a, r, \varphi)$ — количество a-точек, принадлежащих множеству $\{E_l(r)\}\cap\Delta_\alpha(\varphi)\cap\{z: |z|\leqslant r\}$, и выполняются неравенства

$$\sum_{(a)}\delta_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(a)\leqslant 2,\ n=1, 2, \cdots. \tag{1.21}$$

Заметим, что из неравенств (1.18) и (1.20) вытекает оценка

$$\overline{\lim_{r_k'(n)\to\infty}}\frac{n_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(a,\ r_k'(n),\ \varphi(n))}{A(r_k'(n))}\leqslant\varepsilon_n', \tag{1.22}$$

справедливая для любого $a\in\overline{\mathbf{C}}$, исключая, быть может, не более чем счетное множество значений a, и из (1.18), (1.21) вытекает оценка

$$\overline{\lim_{r_k'(n)\to\infty}}\frac{v_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(a,\ r_k'(n),\ \varphi(n))}{\Phi_{\varepsilon_n+2\varepsilon_n}(r_k(n),\varphi(n))}\geqslant\frac{2}{3}\varepsilon_n. \tag{1.22'}$$

справедливая для всех $a \in \overline{C}$ за исключением, быть может, двух значений a.

Геометрические соображения подсказывают, что последний предел должен быть наименьшим для функций, a-точки которых «распределяются очень равномерно по аргументам». Для таких функций вместо ε'_n могло бы стоять $\varepsilon'_n + \frac{\varepsilon_n}{\pi}$ что в силу произвольности ε_n указывает на предельную точность оценки (1.22).

Пусть $\varphi = \lim \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ определяется в теореме 1.5. Предел существует, так как области $\Delta_{\varepsilon'_n + 2\varepsilon_n}$ вложены друг в друга. Тогда, в силу рассуждений А, для любого $\varepsilon > 0$ в $\Delta_\varepsilon(\varphi)$ выполняется неравенство (1.20) с заменой $\frac{2\pi}{2^n} + 2\varepsilon_n$ на ε и $r'_k(n)$ на $r_k(\varepsilon)$. Выберем $\varepsilon'_n, \varepsilon_n = \frac{\pi}{2^n}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
Из геометрических соображений следует, что область $\Delta_\varepsilon(\varphi)$ содержит в себе область $\Delta_{\frac{1}{2^{n+1}} + 2\varepsilon_{n+1}}(\varphi(n))$, так что

$$\Phi_\varepsilon(r'_k(n+1), \varphi) > \Phi_{\frac{1}{2^{n+1}} + 2\varepsilon_{n+1}}(r'_k(n+1), \varphi(n+1)).$$

Отсюда, из неравенства (1.18) и в силу выбора ε_n вытекает

Теорема 1.6. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция порядка $\rho > 0$. Тогда существует такой луч $\{z : \arg z = \varphi, |z| > 0\}$, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется*

$$\sum_{(a)} \delta_\varepsilon(a) = \sum_{(a)} \left(1 - \lim_{r_k(\varepsilon) \to \infty} \frac{n_\varepsilon(a, r_k(\varepsilon), \varphi)}{\Phi_\varepsilon(r_k(\varepsilon), \varphi)}\right) \leqslant 2, \tag{1.23}$$

причем

$$\Phi_\varepsilon(r_k(\varepsilon), \varphi) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} A(r_k(\varepsilon)) + 0[A(r_k(\varepsilon))], \quad r_k(\varepsilon) \to \infty \tag{1.24}$$

и

$$\lim_{r_k(\varepsilon) \to \infty} \frac{\ln A(r_k(\varepsilon))}{\ln r_k(\varepsilon)} = \rho. \tag{1.25}$$

Предыдущие рассуждения показывают, что если бы вместо $\varepsilon/2$ в неравенстве (1.24) стояло бы ε, то теорема была бы точная.

Из теоремы 1.5 вытекает

Следствие 1.2. Существует такой луч $\{r : \arg z = \varphi, |z| > 0\}$ что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\overline{\lim_{r_k(\varepsilon) \to \infty}} \frac{n_\varepsilon(a, r_k(\varepsilon), \varphi)}{A(r_k(\varepsilon))} \geqslant \frac{1}{6}\varepsilon \tag{1.26}$$

выполняется для всех a, исключая, быть может, не более двух a.

Из неравенств (1.25) и (1.26) немедленно вытекает теорема Валирона (сравните неравенства (1.26) и (1.17)).

Еще раз отметим, что $\Phi_\varepsilon(r_k(\varepsilon), \varphi)$ — это количество областей $E_l(r)$ в $\Delta_\varepsilon(\varphi) \cap \{z : |z| \leqslant r_k(\varepsilon)\}$, т. е. количество областей, которые можно рассматривать как круги наполнения, если в определении последних допустить $k_l > 2$.

В классическом случае ($k \leqslant 2$) вместо теоремы 1.6 имеет место следующая

Теорема 1.7. *В условиях теоремы* 1.6 *одновременно выполняются соотношения*

$$\sum_{(a)} \delta_{1,\varepsilon}(a) = \sum_{(a)} \left(1 - \varlimsup_{r_k(\varepsilon) \to \infty} \frac{n_{1,\varepsilon}(a, r_k(\varepsilon), \varphi)}{\Phi_{1,\varepsilon}(r_k(\varepsilon), \varphi)}\right) \leqslant 2,$$

$$\Phi_{1,\varepsilon}(r_k(\varepsilon), \varphi) > \frac{\varepsilon}{6} A(r_k(\varepsilon)) + o[A(r_k(\varepsilon))], \quad r_k(\varepsilon) \to \infty$$

и неравенство (1.25), *где* $\Phi_{1,\varepsilon}(r_k(\varepsilon), \varphi)$ — *количество областей* $E_{1,l}(r)$, *целиком лежащих в* $\Delta_\varepsilon(\varphi) \cap \{z : |z| \leqslant r_k(\varepsilon)\}$, *а* $n_{1,\varepsilon}(a, r_k(\varepsilon), \varphi)$ — *количество a-точек, лежащих в*

$$\{E_{1,l}(r)\} \cap \Delta_\varepsilon(\varphi) \cap \{z : |z| \leqslant r_k(\varepsilon)\}.$$

8°. Некоторые обобщения и аналоги. Для краткости изложения результатов работы проводились только в случае мероморфных в $|z| < \infty$ функций. Однако все без исключения теоремы настоящей работы верны также в случае, когда $w(z)$—псевдомероморфная в $|z| < \infty$ (т. е. является суперпозицией мероморфной функции и K—квазиконформного отображения), если в каждой из этих теорем, в оценках диаметров множеств $E_l(r)$ (или $\tilde{E}_l(r)$, $E_{1,l}(r)$), вместо постоянной K поставить $\mathrm{K}K$.

Если функция $w(z)$ мероморфна в $|z| < R < \infty$ и для нее справедливо $\varlimsup_{r \to R} (R - r) A(r) = +\infty$, то все теоремы из пунктов 1°—6° справедливы для этих функций, если в них множества $(0, \infty) \setminus E$ заменить некоторой последовательностью $r_k \to R$. С некоторыми изменениями можно изложить для таких функций результаты пункта 7°.

Относительно таких обобщений на псевдомероморфные функции и их аналогов в случае конечного круга см. рассуждения, приводимые после доказательства теорем 1.1 и 1.2.

9°. Литературные примечания. Как уже отмечалось выше, тематика о кругах наполнения и лучах Жулиа, Бореля развивалась менее систематически, чем теории Р. Неванлинны и Л. Альфорса. Между тем 1) рассмотрение областей $E_l(r)$, выполняющих роль кругов наполнения, причем таких, что функция $w(z)$ в них однолистна, 2) установление своеобразных аналогов соотношения дефектов для угловых областей, 3) выявление новых закономерностей — свойства близости a-точек, свойства римановой поверхности распадаться на однолистные области, 4) точность описаний областей $E_l(r)$ и точность следствий, позволяют надеяться, что возврат к указанной тематике может оказаться плодотворным. Поскольку за последние времена даже в обстоятельных обзорах этой тематике уделялось очень мало места, мы приведем ниже список работ по кругам наполнения, лучам Жулиа, Бореля, ограничиваясь (учитывая характер настоящей работы) лишь очень краткими пояснениями предметов их исследования.

Рассмотрение различных характеристик при описании количеств a-точек в кругах наполнения и угловых областях, привело к дополнительному исследованию этих количеств (см. [8], [13]—[24]) в случаях, когда рассматриваются функции бесконечного или нулевого порядка. (В нашем случае характеристика $A(r)$ одинаково хорошо описывает ситуацию как при функциях конечного, так и при функциях бесконечного порядка).

В ряде работ [21], [25]—[28] изучаются распределения a-точек в угловых областях в зависимости от роста функции по лучу.

Функции, заданные в угловой области, рассмотрены в работах [12], [29], [30].

В работе [31] была предпринята попытка рассмотреть вместо a-точек области D. Луч, в произвольно малой окрестности которого накапливаются прообразы областей D, был назван лучом Альфорса. Детальное изучение таких лучей см. в [32]—[33].

Замена a-точек на функции малого роста была изучена в работах [34], [35].

Случай функций, мероморфных в конечном круге, приведен в [36], [37].

В 50-х годах появились работы Мийю [38]—[40] о лучах, являющихся лучами Бореля и для функции и для ее последовательных производных. Эти результаты были в дальнейшем развиты в направлении лучей Бореля максимального рода [41] и точек Бореля порядка λ [42].

Количества лучей Жулиа, Бореля, точек Бореля для различных классов функций изучались в работах [12], [43]—[47]; связь количества лучей Бореля и дефектных значений — в [48], [49]; построение заданных особых направлений — в [50].

Неевклидовые круги наполнения рассматривались в работах [51]—[54]; «евклидовые» аналоги $M^{(1)}$ и $\mu^{(1)}$-точек — $M^{(p)}$ и $\mu^{(p)}$-точки и их последующие обобщения и характеристики — в [55]—[59]; случаи алгебраических функций — в [60], [61]; связь кругов наполнения и асимптотического поведения функций — в [62]—[64]; ряд разнообразных задач — в [65]—[70].

В заключение отметим, что три основных метода изучения «кругов» и «лучей», основанных на 1) теории нормальных семейств, 2) теории поверхностей наложения, 3) оценках мероморфных функций, изложены, соответственно, в книгах [71], [11], [72].

§ 2. п. 1. Сведения из теории поверхностей наложения Л. Альфорса

Одним из основных моментов в доказательстве результатов работы является построение областей с определенными свойствами, зависящими от функции $w(z)$ и заданного значения r $(z = re^{i\varphi})$. При этом мы используем теорию Л. Альфорса и нам нужно иметь значения постоянных, фигурирующих в его теоремах.

Отметим, что в случае, когда рассматриваемые в теоремах Л. Альфорса области являются кругами, подсчет постоянных приводится в работе [73], однако этот подсчет недостаточен в нашем случае, поскольку области у нас в основном многоугольники. Ниже мы будем пользоваться подсчетом, проведенным в работе [4].

Предварительно сделаем некоторые допущения, которые будем иметь в виду на протяжении всего доказательства.

А) Конечносвязная область на сфере у нас — область, полученная выбрасыванием из сферы конечного числа односвязных, с непересекающимися замыканиями областей с кусочно аналитическими границами.

В) Рассматриваемые далее поверхности наложения над сферой (или областью на сфере) являются w-образами лежащих в $|z| < R \leqslant \infty$ односвязных областей с гладкими границами. Полагаем, что эти поверхности наложения не имеют алгебраических точек ветвления над линиями конструкций, приводимых при доказательстве. Этого всегда можно добиться небольшой деформацией поверхности (что то же—деформции области в z-плоскости) произвольно мало меняющей фигурирующие в теоремах величины.

Теорема А (первая освновная теорема Л. Альфорса). *Пусть F_0 — конечносвязная область на сфере Римана s (в частности, сама сфера s); F — конечная поверхность наложения над F_0; $S(F_0) = \frac{J}{J_0}$, где J — площадь поверхности наложения над F_0: J_0—площадь области F_0; D— область, лежащая внутри F_0; $S(D) = \frac{J(D)}{J_0(D)}$, где $J(D)$ — сумма площадей всех частей поверхности наложения, лежащих над D, $J_0(D)$ — площадь D. Тогда существует конечное число $h_1(F_0)$, зависящее лишь от F_0 такое, что*

$$|S(F_0) - S(D)| < \frac{h_1(F_0)}{J_0(D)} L,$$

где L — длина относительной границы F, а

$$h_1(F_0) = 2 \max \left\{ \sup_{\gamma} \frac{C(\gamma)}{|\gamma|}, \frac{\pi}{\varkappa} \right\},$$

где γ — кривая длины $|\gamma| < \varkappa$, целиком лежащая в области F_0 кроме двух концов, расположенных на одной из связных компонент границы F_0, $C(\gamma)$—меньшая из площадей двух областей, на которые γ делит область F_0, $\varkappa$ — минимальное расстояние между граничными компонентами области F_0 ($\varkappa$ положим равным π, если область F_0 односвязна).

Скажем, что простая (замкнутая или открытая) кривая $\beta \in \overline{F_0}$ сильно регулярна, если существуют такие числа $k > 1$ и $d < \varkappa/2$, что если для любой точки $P \in s$ обозначить $U_p(d')$ множество точек сферы s, отстоящих от P на расстоянии d', то при $d' < d$ суммарная длина частей кривой β, лежащих в $U_p(d')$, мажорируется величиной kd',

Теорема A′ (первая основная теорема Л. Альфорса). *Пусть F_0 — конечносвязаная область на сфере Римана s (в частности, сама сфера s), притом полагаем, что если $F_0 \neq s$, то граничные кривые области F_0 сильно регулярны; $\beta \subset F_0$ — кусочно аналитическая и сильно регулярная дуга; $S(\beta)=\frac{L(\beta)}{L_0(\beta)}$, где $L(\beta)$ — с мма длин всех лежащих над β дуг поверхности F; $L_0(\beta)$ — длина кривой β;*

$$h'(F_0, \beta) = 2\max\left\{\sup_{\gamma}\frac{c(\gamma)}{|\gamma|}, \frac{L_0(\beta)}{d}, k\right\},$$

где γ — кривая длины $|\gamma| < d$, целиком лежащая в области F_0, кроме двух концов, расположенных на одной из связных компонент границы F_0, $c(\gamma) = \min \lambda'(\gamma), \lambda''(\gamma))$, где $\lambda'(\gamma)$, $\lambda''(\gamma)$ — длины частей кривой β, лежащих в двух областях, на которые γ разделяет область F_0. Тогда существует такая постоянная $h_2(F_0, \beta)$, зависящая только от F_0 и β, что выполняется неравенство

$$|S(F_0) - S(\beta)| \leqslant h_2(F_0, \beta)\, L,$$

а h_2 следующим образом зависит от F_0 и β.

1) *Если β — кривая, разбивающая область F_0 на две части и D — та из ограничиваемых кривой β частей F_0, которая имеет меньшую площадь, то*

$$h_2(F_0, \beta) = h_{2,1}(F_0, \beta) = \frac{2h_1(F_0)\, h'(F_0, \beta)}{J_0(D)};$$

2) *Если β не разбивает область F_0, то дополнив ее до кривой β', удовлетворяющей условию 1), имеем*

$$h_2(F_0, \beta) = h_{2,2}(F_0, \beta) = \frac{2h_1(F_0)\, h'(F_0, \beta')}{J_0(D)} + \frac{h'(F_0, \beta')}{L_0(\beta)}.$$

Теорема B (вторая основная теорема Л. Альфорса). *Пусть D_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$, $(q > 3)$ — односвязные области на s, ограниченные кусочно-аналитическими сильно регулярными кривыми, $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = \varnothing$, при $i \neq j$. Тогда для любой конечной односвязной поверхности наложения F над римановой сферой s имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{q} [S(s) - n(D_i)] + \sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \leqslant$$
$$\leqslant 2S(s) + h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q)\, L,$$

где $n(D_i)$ — количество островов поверхности F над D_i с учетом кратности, $n_1(D_i)$ — сумма порядков всех островов над D_i, а $h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q)$ определяется следующим образом.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ — кусочно аналитические, сильно регулярные кривые на s, соединяющие области $D_1, D_2, \cdots, D_q$ так, что после проведения сечений по $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ область $F_0 = s \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \overline{D}_i$ распадается на две односвязные области F_0' и F_0''. Тогда

$$h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q) = 4q \max \{(J_0(s \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \bar{D}_i))^{-1};$$

$$\max_i h_2(F_0', \beta_i);\ \max_i h_2(F_0'', \beta_i);\ \max_i h_2(F_0, \beta_i)\}.$$

п. 2. Построение областей $B(n, i)$ — „скелетов дракона"

Пусть $n_0(X)$ — количество простых (с кратностью единица) островов поверхности F над областью X.

Наряду со второй основной теоремой Л. Альфорса мы используем следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{q} [S(s) - n_0(D_i)] \leqslant 4S(s) +$$

$$+ \left\{ q \frac{h_1(s)}{\min\limits_i J_0(D_i)} + 2h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q) \right\} L. \qquad (2.1)$$

Докажем его. Из теоремы В, учитывая очевидное неравенство $n(X) - n_0(X) \leqslant 2n_1(X)$, имеем

$$\sum_{i=1}^{q} [S(s) - n_0(D_i)] - \sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \leqslant 2S(s) + h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q) L.$$

Учитывая, что

$$S(s) - n(D_i) \geqslant \frac{h_1(s)}{J_0(D_i)} L, \ i = 1, 2, \cdots, q,$$

из теоремы В имеем

$$\sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \leqslant 2S(s) + \left\{ q \frac{h_1(s)}{\min\limits_i J_0(D_i)} + h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q) \right\} L, \qquad (2.1')$$

так что из последних соотношений получаем неравенство (2.1).

Точке на римановой сфере сопоставим то же значение (положим a), в которое она проектируется при стереографическом отображении сферы на плоскость, ρ-окрестность точки a на сфере, т. е. множество точек, отстоящих от точки a на сферическом расстоянии, меньшем числа ρ, обозначим через $D(\rho, a)$.

Для описания областей на сфере будем пользоваться полярными координатами в трехмерном пространстве — (φ, θ, ρ), где φ показывает угол в горизонтальной плоскости, θ — угол в вертикальной плоскости, ρ — модуль точки.

В дальнейшем у нас n — четное число ($n > 100$).

Определим $\Gamma(k, \varphi_1)$ как кривые со следующими параметрическими представлениями:

$$\Gamma(k, \varphi_1) = \{\varphi(t), \theta(t), \rho(t)\},$$

где φ_1 — целое число, большее единицы

$$\varphi(t) = \varphi(k, \varphi_1, t) = 2\pi t + \frac{\pi k}{n^{\varphi_1 - 1} - 1};\ \theta(t) = \theta(k, \varphi_1, t) = \frac{\pi}{2n} t;$$

$$\rho(t)=\frac{1}{2};\ t\in[-(n-5);\ n+5],\quad k=0,1,\cdots,n^{\varphi_1-1}-1.$$

Пусть

$$\Gamma^*(k,\varphi_1)=\Gamma(k,\varphi_1)\setminus\left\{D\left(\frac{9}{n},\infty\right)\cup D\left(\frac{9}{n},0\right)\right\},\ k=0,1,\cdots,n^{\varphi_1-1}-1;$$

G — та из двух односвязных областей на сфере, ограниченных кривыми $\Gamma^*(0,\varphi_1)$, $\Gamma^*(n^{\varphi_1-1}-1,\varphi_1)$ и частями границы $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$ и $D\left(\frac{9}{n},0\right)$, соединяющими концы кривых $\Gamma^*(0,\varphi_1)$, $\Gamma^*(n^{\varphi_1-1}-1,\varphi_1)$, которая содержит кривые $\Gamma^*(k,\varphi_1)$, $k=1,2,\cdots,n^{\varphi_1-1}-2$. Обозначим через G_m, $m=1,2,\cdots,n^{\varphi_1-1}/2$ области, принадлежащие G и ограниченные кривыми $\Gamma^*(2m-2,\varphi_1)$, $\Gamma^*(2m-1,\varphi_1)$ и частями границы $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$ и $D\left(\frac{9}{n},0\right)$, соединяющими концы кривых

$$\Gamma^*(2m-2,\varphi_1),\ \Gamma^*(2m-1,\varphi_1).$$

Подсчитаем теперь для заданной конечной односвязной поверхности наложения F над римановой сферой s и областей G_m, $m=1,2,\cdots,n^{\varphi_1-1}/2$ постоянные, фигурирующие во второй основной теореме Л. Альфорса. При этом мы вместо кривых β_m $\left(m=1,2,\cdots,\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}-1\right.$ (см. п. 1) выберем участки границы $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$, соединяющие концы кривых $\Gamma^*(2m-1,\varphi_1)$, $\Gamma^*(2m,\varphi_1)$ и являющиеся граничными для области G. В качестве кривой $\beta_{\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}}$ выберем участок границы $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$, соединяющий концы кривых $\Gamma^*(0,\varphi_1)$, $\Gamma^*(n^{\varphi_1-1}-1,\varphi_1)$ и не являющийся граничной дугой области G.

В качестве области F_0 (фигурирующей в теореме В) у нас выступает область $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$, а область F_0 — область

$$s\setminus\left\{\overline{D}\left(\frac{9}{n},\infty\right)\cup\left\{\bigcup_{m=1}^{\frac{\varphi_1-1}{2}}\overline{G}_m\right\}\right\}.$$

Далее, в этом пункте через K_1, K_2, ... будем обозначать постоянные, не зависящие от числа n.

Заметим, что минимальное расстояние между граничными компонентами области $F_0=s\setminus\{\bigcup_{m=1}^{\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}}\overline{G}_m\}$ есть величина, большая чем K_1/n^{φ_1} и меньшая, чем K_2/n^{φ_1}, где K_1 и K_2 — некоторые постоянные. С другой стороны, все рассмотренные кривые сильно регулярны, если d взять равным K_3/n^{φ_1} (где K_3 — некоторая постоянная $<K_2$), а число k, фигурирующее в определении сильной регулярности, взять равным не-

которой постоянной K_4. Для подсчета $h_2(F_0^*, \beta_m)$, $m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$ нужно сначала дополнить кривую β_m до некоторой замкнутой кривой β_m'. В качестве β_m' возьмем границу односвязной области D_m, окруженной областями $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, $\left(D\left(\frac{9}{n}, 0\right)\right)$, G_m, G_{m+1}, притом при $m<\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$ полагаем $D_m\subset G$, и при $m=\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$ полагаем $D_m\overline{\subset} G$.

Легко убедиться в существовании таких постоянных K_5, K_6, K_7, что

$$J_0(D_m)\geqslant\frac{K_5}{n^{\varphi_1-1}};\ L_0(\beta_m')\leqslant K_6 n;\ L_0(\beta_m)\geqslant\frac{K_7}{n^{\varphi_1}}.$$

Заметим еще, что для области F_0^* величина $\sup\limits_{\gamma}\frac{c(\gamma)}{|\gamma|}$ не превосходит числа 2, так что имеем

$$h'(F_0^*, \beta_m')=2\max\left\{2, \frac{K_6}{K_3}n^{\varphi_1+1}, K_4\right\}\leqslant K_8 n^{\varphi_1+1},$$

где K_8 не зависит от n (будем помнить, что n предполагается достаточно большим).

Далее, из геометрических рассмотрений видим, что $h_1(F_0^*)<K_9 n$, так что с учетом предыдущего неравенства и оценок величин $J_0(D_m)$ и $L_0(\beta_m)$ для величины h_2 получим

$$h_2(F_0^*, \beta_m)\leqslant 2\frac{2K_9K_8}{K_5}n^{2\varphi_1+1}+\frac{2K_8}{K_7}n^{2\varphi_1+1}\leqslant K_{10}n^{2\varphi_1+1}.$$

Проведем аналогичные построения для области F_0. Поскольку F_0 — многосвязная область, притом $\varkappa>K_1/n^{\varphi_1}$, то легко убедимся в существовании постоянной K_{11}, с которой верно неравенство $h_1(F_0)\leqslant\leqslant K_{11}n^{\varphi_1}$. Возьмем в качестве кривой β_m', $m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$, граничную кривую области $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$. Поскольку $L_0(\beta_m')\leqslant K_{12}/n$, легко придем к оценке

$$h'(F_0, \beta_m')=2\max\left\{2, \frac{K_{12}}{K_3}n^{\varphi_1-1}, K_4\right\}\leqslant K_{13}n^{\varphi_1-1}.$$

Учитывая еще, что $J_0\left(D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)\right)\geqslant K_{14}/n^2$ и подставив оценки для $L_0(\beta_m)$ и $h_1(F_0)$ в выражение для $h_2(F_0, \beta_m)$, будем иметь

$$h_2(F_0, \beta_m)=\frac{2K_{11}K_{13}}{K_{14}}n^{2\varphi_1+1}+\frac{K_{13}}{K_7}n^{2\varphi_1-1}\leqslant K_{15}n^{2\varphi_1+1},$$

$$m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}.$$

Очевидно, для области $F'_0\left(=D\left(\frac{9}{n},\infty\right)\right)$ более просто устроенной, чем области F_0^* и F_0, величина $h_2(F_0, \beta_m)$ значительно меньше, чем в случае областей F_0^* и F_0 и уж во всяком случае

$$h_2(F'_1, \beta_m) \leqslant K_{16}\, n^{2\varphi_1+1},\quad m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}.$$

Из предыдущих оценок и очевидной оценки $J_0(F_0) > 1/4$ теперь получим

$$h_0\left(G_1, G_2, \cdots, G_{\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}}\right) = 2n^{\varphi_1-1}\max(K_{10}, K_{15}, K_{16})\, n^{2\varphi_1+1} = K_{17}\, n^{3\varphi_1}.$$

Так как, к тому же, с некоторой постоянной K_{18} справедливы неравенства

$$J_0(G_m) > \frac{K_{18}}{n^{\varphi_1-1}},\quad m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2},$$

то, записав неравенство (2.1) для областей G_m, $m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$, с учетом последних двух соотношений, получим неравенство

$$\sum_{m=1}^{\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}} [S(s) - n_0(G_m)] \leqslant 4S(s) + K_{19}\, n^{3\varphi_1} L.$$

Обозначим через $B'_0(n, 1)$ ту из областей G_m, для которой достигается минимум выражения $S(s) - n_0(G_m)$, $m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$ (если таких областей несколько, обозначим через $B'_0(n, 1)$ произвольную из них). Из последнего неравенства имеем

$$S(s) - n_0(B'_0(n, 1)) \leqslant \frac{8S(s)}{n^{\varphi_1-1}} + 2K_{19}\, n^{2\varphi_1+1} L. \tag{2.2}$$

Пусть $B'_0(n, 1) = G_{m_1}$; $\Gamma' = \Gamma^*\left(2m_0 - 2 + \frac{1}{3}, \varphi_1\right)$; $\Gamma'' = \Gamma^*\left(2m_0 - 2 + \frac{2}{3}, \varphi_1\right)$.

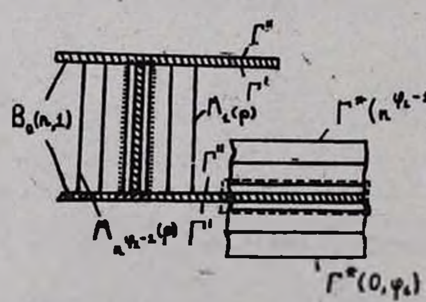

Рис. 1. Область (справа внизу), обведенная штриховкой — часть области $B'_0(n, 1)$. Область (слева), обведенная точками — область $\tilde{B}'_p(n)$, заштрихованная область внутри последней — область $\bar{B}_p(n)$.

Кривые Γ' и Γ'' делят область $B_0^{\bullet}(n, 1)$ на три „подобные" области. Обозначим $B_0(n, 1)$ (см. рис. 2) среднюю из этих трех областей, т. е. ту из них, граничными дугами которой являются кривые Γ' и Γ''.

Далее нам удобно пользоваться следующим символом $\sqcup$. *Соединением* $C = A \sqcup B$ двух открытых множеств A и B назовем множество $C = \operatorname{int} \overline{(A \cup B)}$, где черта сверху обозначает замыкание, а int — внутренность множества*.

Пусть $B_0^{\bullet}(n) = S \setminus \left\{ B_0(n, 1) \sqcup D\left(\frac{9}{n}, \infty\right) \sqcup D\left(\frac{9}{n}, 0\right) \right\}$; M_0 — та из дуг большой окружности сферы, проходящих через точки ∞ и $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, целиком лежащих в области $B_0^{\bullet}(n)$, которая наиболее близка к точке $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ (если таких дуги две, то возьмем в качестве M_0 произвольную из них); w_0 — тот из концов дуги M_0, координата θ которого имеет меньшее значение (очевидно, точка w_0 принадлежит кривой Γ'').

Отложим на кривой Γ'' точки $w_0, w_1, \cdots, w_{\tau'}$ (величина τ' будет ясна из дальнейшего) таким образом, чтобы длина дуги кривой Γ'', лежащая между произвольными последовательными точками w_0 и w_1, w_1 и $w_2, \cdots, w_{\tau'-1}$ и $w_{\tau'}$, равнялась бы $1/n$, притом, чтобы координаты θ_i' точек w_i (в представлении полярными координатами (φ, θ, ρ)) возрастали вместе с i. Таким же образом отложим на Γ'' точки w_0, $w_{-1}, \cdots, w_{-\tau''}$, с той лишь разницей, что координаты $\theta_i^{\bullet}$ точек w_{-i} убывали при возрастании i. Пусть M_i, (M_{-i}) — дуга большой окружности сферы, проходящей через точки ∞ и w_i (w_{-i}) и целиком лежащая в области $B_0^{\bullet}(n)$, кроме двух концов, принадлежащих границе $B_0^{\bullet}(n)$ $(w_i \in \overline{M}_i,\ w_{-i} \in \overline{M}_{-i})$.

Дуги M_{2p} и M_{2p+1}, при $p = 0, 1, \cdots, \tau^*$ (где τ^* — некоторое число) делят область $B_0^{\bullet}(n)$ на три односвязные области. Обозначим $\widetilde{B}_p^{\bullet}(n)$ среднюю из этих трех областей, т. е. область, частями границы которой являются и M_{2p} и M_{2p+1}. Число τ^* определяется следующим образом. Очевидно, найдутся номера p, при которых частью границы области $\widetilde{B}_p^{\bullet}(n)$ является некоторый участок границы области $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$. Пусть p_0 — первый, встретившийся при возрастании p номер, при котором это так. Тогда $\tau^* = p_0 - 2$. Области $\widetilde{B}_p^{\bullet}(n)$, $p = -1, -2, \cdots, -\tau^{**}$ определим аналогичным образом с заменой M_{2p} и M_{2p+1} на, соответственно, M_{2p+1} и M_{2p}. Очевидно, найдутся номера $p\ (<0)$, при которых частью границы области $\widetilde{B}_p^{\bullet}(n)$ является некото-

* Эта операция часто встречается в работах по топологии. Символ $\sqcup$ и термин соединение введены А. А. Гольдбергом и А. Э. Еременко.

рый участок границы $D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$. Пусть p_0 — первый, встретившийся при убывании p номер, при котором это так. Тогда $-\tau^{**}=p_0+2$.

Разделим дугу P_p^* кривой Γ'', лежащую между точками w_{2p} и w_{2p+1} на $n^{\varphi_2-1}-1$ равных частей. Пусть $w_i(p)$, $i=1, 2, \cdots, n^{\varphi_2-1}$ — точки этих делений, притом $w_1(p)=w_{2p}$, а $w_{n^{\varphi_2}-1}(p)=w_{2p+1}$; $M_i(p)$ — дуги большой окружности сферы, проходящие через точки ∞ и $w_i(p)$ и целиком лежащие в области $\tilde{B}_p^*(n)$, кроме двух концов, принадлежащих границе $\tilde{B}_p^*(n)$. Обозначим через $B_{p,t}^*(n)$, $t=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$, односвязные области, являющиеся частью области $\tilde{B}_p^*(n)$, заключенной между дугами $M_{2t-1}(p)$ и $M_{2t}(p)$ (см. рис. 1).

Подсчитаем постоянную $h_0\left(B_{p,1}^*(n), \cdots, B_{p,\frac{n^{\varphi_2-1}}{2}}^*(n)\right)$. Соединим точки $w_1(p)$ и $w_{n^{\varphi_2}-1}$ дугой $\beta_{\frac{n^{\varphi_2}-1}{2}}$ на сфере, являющейся частью окружности радиуса 1/4 и не имеющей общих точек с $\bigcup_{t=1}^{\frac{n^{\varphi_2}-1}{2}} B_{p,t}^*(n)$. Эта дуга совместно с дугой P_p^*, ограничивает некоторую область F_0^*, не имеющую общих точек с $B_{p,t}(n)$, $t=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$. В качестве дуг β_t, $t=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}-1$ возьмем дуги кривой P_p^*, лежащие между точками $w_{2t}(p)$ и $w_{2t+1}(p)$. Области F_0^* и F_0 определяется однозначно. Подсчитаем $h_2(F_0^*, \beta_t)$, $t\neq\frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$. В качестве кривой β_t' возьмем границу односвязной области $D_t\subset\tilde{B}_p^*(n)$, заключенной между кривыми $M_{2t}(p)$ $M_{2t+1}(p)$. Легко убедиться, что существуют такие постоянные K_{20}— K_{23}, с которыми при любых n верны неравенства

$$J_0(D_t)>\frac{K_{20}}{n^{\varphi_2+1}};\quad L_0(\beta_t')<\frac{K_{21}}{n};$$

$$L_0(\beta_t)\geqslant K_{22}\frac{1}{n^{\varphi_2}};\quad h_1(F_0^*)\leqslant K_{23},$$

и что все рассмотренные кривые сильно регулярны, если с некоторой постоянной K_{24} величину d выбрать равной K_{24}/n^{φ_2}, а число k, фигурирующее в определении сильной регулярности, взять равным некоторой постоянной K_{25}. Тогда (см. вывод подсчета h_2 для областей G_m), $h'(F_0^*, \beta_t')\leqslant K_{26}\,n^{\varphi_2-1}$ и с учетом предыдущих неравенств получим $h_2(F_0^*, \beta_t)\leqslant K_{27}\,n^{2\varphi_2}$, $t=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_2}-1}{2}-1$. Так же, как и в случае областей G_m убедимся, что с соответствующими постоянными K_{28} и

(K_{29}, K_{30}) последнее неравенство верно, если в нем заменить ρ_t, $t < \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$ на $\beta_{\frac{n^{\varphi_2}-1}{2}}$ и (область F_0^* заменить на F_0' или F_0).

В итоге, согласно подсчету постоянной во второй основной теореме Л. Альфорса,

$$h_0(B^*_{p,1}(n), \cdots, B^*_{p,\frac{n^{\varphi}-1}{2}}(n)) \leqslant K_{31}\, n^{3\varphi_1-1}.$$

С другой стороны, выполняется, очевидно, неравенство

$$J_0(B^*_{p,t}(n)) > K_{32}/n^{\varphi_2+1}, \quad t=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_2}-1}{2}.$$

Из неравенства (2.1), с учетом последних двух неравенств, вытекает

$$\sum_{t=1}^{\frac{n^{\varphi_2}-1}{2}} [S(s) - n_0(B^*_{p,t}(n))] < 4S(s) + K_{33}\, n^{3\varphi_2-1} L.$$

Обозначим через $\widetilde{B}'_p(n)$ (см. рис. 1) ту из областей $B^*_{p,t}(n)$, для которой достигается минимум выражения $S(s) - n_0(B^*_{p,t}(n))$, $t=1, 2, \cdots$ $\cdots, \frac{n^{\varphi_2}-1}{2}$ (если таких областей несколько, то обозначим через $\widetilde{B}'_p(n)$ произвольную из них). Из последнего неравенства вытекает оценка

$$S(s) - n_0(\widetilde{B}'_p(n)) \leqslant \frac{1}{n^{\varphi_2-1}} S(s) + 2K_{33}\, n^{2\varphi_2} L.$$

Проведем сечения сферы двумя такими большими окружностями сферы, проходящими через точку ∞ так, что точки пересечения этих окружностей с линией $\partial\widetilde{B}'_p(n) \cap \Gamma''$ делят эту линию на три равные части. Такие сечения делят область $\widetilde{B}'_p(n)$ на три „подобные" области, среднюю из которых, т. е. ту, для которой граничными являются дуги обеих окружностей, обозначим через $\overline{B}_p(n)$.

Рис. 2. (Точками обведена область $\widetilde{B}'_m(n)$).

Обозначим через $n'_c(X)$ количество тех простых островов над областью X, каждая из которых является частью простого острова над областью X'. С учетом того, что $n_0'(\overline{B}_p(n)) = n_0(\widetilde{B}'_p(n))$, последнее неравенство перепишем следующим образом:

$$S(s) - n_0'(\overline{B}_p(n)) \leqslant \frac{8}{n^{\varphi_2-1}} S(s) + 2K_{33}\, n^{2\varphi_2} L. \tag{2.3}$$

Пусть $t_{\tau^*}-t$ — индекс той из областей $B^*_{\tau^*,t}(n)$, которую мы приняли за область $\widetilde{B}_{\tau^*}(n)$. Дуга большой окружности, соединяющая точки ∞ и $w_{2t_{\tau^*}}(\tau^*)$ и содержащая кривую $M_{2t_{\tau^*}}(\tau^*)$, рассекает область $B'_0(n, 1)$ на две односвязные области. Обозначим через $B'_0(n, 2)$ ту из этих двух областей, граница которой не имеет общих точек с границей области $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$.

Проделаем ту же процедуру с заменой τ^* на $-\tau^{**}$ и заменой ∞ на 0. В качестве аналога области $B'_0(n, 2)$ получим некоторую область $B'_0(n, 3)$.

Обозначим $B'_0(n)=B'_0(n, 2)\cap B'_0(n, 3)$, (см. рис. 3, помещенный во второй части работы).

Пусть W_{1,τ^*} и W_{2,τ^*} — те концы дуг больших окружностей, являющихся граничными дугами области $\widetilde{B}_{\tau^*}(n)$, которые лежат на линии $\partial\widetilde{B}_{\tau^*}(n)\cap\Gamma''$. Положим при этом, что W_{2,τ^*} лежит на этой линии между точками W_{1,τ^*} и $w_{2t_{\tau^*}}(\tau^*)$. Дуга большой окружности, соединяющая точки ∞ и W_{2,τ^*} и содержащая часть границы $\widetilde{B}_{\tau^*}(n)$, рассекает область $B_0(n, 1)$ на две односвязные области. Обозначим через $B_0(n, 2)$ ту из этих двух областей, граница которой не имеет общих точек с границей области $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$.

Проделаем ту же процедуру с заменой τ^* на $-\tau^{**}$ и заменой ∞ на 0. В качестве аналога области $B_0(n, 2)$ получим некоторую область $B_0(n, 3)$.

Обозначим $B_0(n)=B_0(n, 2)\cap B_0(n, 3)$ (см. рис. 3); $n'_0(B_0(n))$ — количество простых островов над областью $B_0(n)$, каждая из которых является частью простого острова над $B'_0(n)$. Так как $B'_0(n)\subset B_0(n, 1)$, то $n_0(B'_0(n))\geqslant n_0(B'_0(n, 1))$, так что неравенство (2.2) справедливо, если в нем заменить область $B'_0(n, 1)$ на $B'_0(n)$. Отсюда, учитывая, что $n'_0(B_0(n))=n_0(B'_0(n))$, получим утверждение

$$S(s)-n'_0(B_0(n))\leqslant\frac{8}{n^{\varphi_1-1}}S(s)+2K_{19}n^{2\varphi_1+1}L. \tag{2.4}$$

Теперь можем перейти к построению областей $B(n, i)$.

Лежащая над некоторой кривой Γ связная часть поверхности F, на замыкании которой не лежит ни одна точка границы Γ, естественно является аналогом острова (назовем островом над Γ); кратность острова — число листов этой связной части: простой остров над Γ—остров с кратностью единица.

В дальнейшем будем помнить, что, как это обусловлено допущением в п. 1, § 2 все острова над линиями рассматриваемых нами конструкций, являются простыми.

Пусть $n_0(\Gamma)$ — количество простых островов над Γ; $n^*(\Gamma, A, B)$ — количество простых островов над отрезком Γ, которые являются граничными дугами одновременно и для простого острова над областью A и для простого острова над областью B, причем каждый простой остров над A является одновременно частью простого острова над $A' \supset A$, и каждый простой остров над B является одновременно частью простого острова над $B' \supset B$. Обозначим через b_p^{*} общую часть границы области $\widetilde{B}_p(n)$ и кривой Γ''; b_p' — общую часть границы области $\widetilde{B}_p(n)$ и кривой Γ'.

Если простой остров над b_p^{*} является, одновременно, граничной дугой и для простого острова над $\widetilde{B}_p(n)$, являющегося, одновременно, частью простого острова над $\widetilde{B}'_p(n)$, и для простого острова над $B_0(n)$, являющегося, одновременно, частью простого острова над $B_0'(n)$, то, очевидно, вклад от каждой тройки таких островов в величину $n_0(B_0(n)) + n_0(\widetilde{B}_p(n)) - n^*(b_p^{*}, B_0(n), \widetilde{B}_p(n))$ равен единице, так что $n_0(b_p^{*})$ не меньше последнего выражения: иначе справедливо неравенство

$$n^*(b_p^{*}, B_0(n), \widetilde{B}_p(n)) \geqslant n_0'(B_0(n)) + n_0'(\widetilde{B}_p(n)) - n_0(b_p^{*}). \tag{2.5}$$

Из первой основной теоремы Л. Альфорса легко вытекает справедливое для любого $p\ (= -\tau^{**}, \ldots, \tau^{*})$ неравенство

$$n_0(b_p^{*}) \leqslant S(s) + K_{34} n^{\varphi_2} L. \tag{2.6}$$

Пусть $\varphi_1 = \varphi_2 = 6$. Тогда с учетом неравенств (2.3), (2.4) и последнего неравенства, из утверждения (2.5) получим следующую оценку:

$$n^*(b_{-\tau^{**}}^{*}, B_0(n), \widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n)) \geqslant S(s) - \left\{\frac{8}{n^5} + \frac{8}{n^5}\right\} S(s) -$$

$$- \{2K_{19} n^{13} + 2K_{33} n^{12} + K_{34} n^6\} L. \tag{2.7}$$

Это означает, что количество тех простых островов над множеством $\{B_0(n) \sqcup \widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n)\} \setminus b_{-\tau^{**}}^{*}$, принадлежащий к каждому из которых простой остров над $B_0(n)$ $(\widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n))$ является, в свою очередь, частью простого острова над $B_0'(n)$ $(\widetilde{B}'_{-\tau^{**}}(n))$, не меньше, чем величина в правой части последнего неравенства.

Повторив эту процедуру с заменой $b_{-\tau^{**}}^{*}$ на $b_{-\tau^{**}+1}^{*}$, заменой $B_0(n)$ на $\{B_0(n) \sqcup \widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n)\} \setminus b_{-\tau^{**}}^{*}$ и заменой $\widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n)$ на $\widetilde{B}_{-\tau^{**}+1}(n)$ получим, что количество тех простых островов над множеством

$$\{B_0(n) \sqcup \widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n) \sqcup \widetilde{B}_{-\tau^{**}+1}(n)\} \setminus \{b_{-\tau^{**}}^{*} \cup b_{-\tau^{**}+1}^{*}\},$$

принадлежащий к каждому из которых простой остров над $B_0(n)$ $(\widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n), \widetilde{B}_{-\tau^{**}+1}(n))$, является, в свою очередь, частью простого острова над $B_0'(n)$, $(\widetilde{B}'_{-\tau^{**}}(n), \widetilde{B}'_{-\tau^{**}+1}(n))$, не меньше следующей величины:

$$S(s) - \left\{\frac{8}{n^5} + 2\cdot\frac{8}{n^5}\right\} S(s) - \{2K_{19} n^{13} + 2\cdot 2K_{33} n^{12} + 2K_{34} n^6\} L.$$

Повторяя эту процедуру с последующими $p\ (= -\tau^{**}+2, \cdots, \tau^{*})$, в конечном итоге придем к утверждению: количество $\Phi'(n)$ тех простых островов $B'(n, \mu)$, $\mu = 1, 2, \cdots, \Phi'(n)$ над множеством

$$B(n, *) = [B_0(n) \sqcup \widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n) \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{B}_{\tau^*}(n)] \setminus \left\{ \bigcup_{p=-\tau^{**}}^{\tau^*} b_p^* \right\},$$

принадлежащий к каждому из которых простой остров над $B_0(n)$ $(\widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n), \cdots, \widetilde{B}_{\tau^*}(n))$, является, в свою очередь, частью простого острова над $B_0'(n)$ $(\widetilde{B}'_{-\tau^{**}}(n), \cdots, \widetilde{B}'_{\tau^*}(n))$, удовлетворяет неравенству

$$\Phi'(n) = S(s) - C(n), \tag{2.8}$$

где

$$C(n) = \left\{ \frac{8}{n^5} + \frac{8(\tau^{**} + \tau^* + 1)}{n^5} \right\} S(s) - [2K_{10}n^{13} +$$

$$+ 2(\tau^{**} + \tau^* + 1) K_{33}n^{13} + (\tau^{**} + \tau^* + 1) n^6] L.$$

Далее, учитывая неравенства (2.4), (2.8), а также, что неравенство (2.6) справедливо, если в нем заменить b_p^* на b_p', а K_{34} — на некоторое K_{35}, как и при выводе неравенства (2.7) придем к следующему аналогичному утверждению: количество тех островов $B'(n, \mu)$, к каждому из которых вдоль линии $b'_{-\tau^{**}}$ примыкает простой остров над $B_0(n)$, являющийся частью простого острова над $B_0^*(n)$, не меньше, чем

$$S(s) - C(n) - K_{35}n^6 L - \frac{8}{n^5} S(s) - 2K_{10}n^{13} L.$$

Повторяя (так же, как это было сделано выше) эту процедуру с последующими $p\,(= -\tau^{**} + 1, \ldots, \tau^*)$, в конечном итоге придем к заключению: количество $\Phi(n)$ тех простых островов $B(n, i) \in [B'(n, \mu)]_{\mu=1}^{\Phi'(n)}$ $(i = 1, 2, \cdots, \Phi(n))$, к каждому из которых вдоль каждой из линий b_p' $(p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*)$, присоединяется простой остров над $B_0(n)$, являющийся, в свою очередь, частью простого острова над $B_0'(n)$, удовлетворяет неравенству

$$\Phi(n) \geqslant S(s) - C(n) - (\tau^{**} + \tau^* + 1) \Big[K_{35} n^6 L - \frac{8}{n^5} S(s) -$$

$$- 2K_{10} n^{13} L \Big] \geqslant S(s) - \frac{16(\tau^{**} + \tau^* + 1)}{n^5} S(s) - \tag{2.9}$$

$$- (\tau^{**} + \tau^* + 1) K_{36} n^{13} L,$$

где K_{36} — некоторая новая постоянная.

Для правильного понимания идеи доказательства, важно заметить и помнить, что хотя области $B(n, *)$ и $B_0(n)$ примыкают друг к другу вдоль произвольной из линий b_p', но вовсе не обязательно примыкание простого острова над $B(n, *)$ к себе через линию b_p', а также вовсе не обязательно, чтобы простые острова над $B_0(n)$, примыкающие через линии b'_{p_1} и b'_{p_2}, $p_1 \neq p_2$ к простому острову над $B(n, *)$, совпадали бы.

(Продолжение в следующем номере)

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15. VIII. 1984

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS