ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
# МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.



## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

*Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝*

*1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։*

*Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։*

*2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։*

*Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։*

*3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։*

*Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։*

*4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։*

*5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։*

*Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։*

*6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։*

*7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։*

*8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։*

*9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։*

*10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։*

*11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։*

*Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։*

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском английском французском и немецком языках



## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилии автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

ԳԻՆԸ 85 Կ.
ЦЕНА 85 К.

Индекс 77735



## TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian snould be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 4, 1985 Математика

УДК 517.984.54

Т. Н. АРУТЮНЯН

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

## § 1. Введение и формулировка результатов

Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений Дирака на полуоси $0 < r < \infty$

$$ly = \left\{ \alpha_1 \frac{1}{i} \frac{d}{dr} + \alpha_2 p(r) + \alpha_3 q(r) \right\} y = \lambda y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а $p$ и $q$ — действительные, локально интегрируемые функции на полуоси. Известно [1], что при этих условиях операторы, порожденные в пространстве вектор-функций $L_2(0, \infty; \mathbf{C}^2)$ краевыми задачами

$$ly = \lambda y, \ y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \tag{1.2}$$

существенно самосопряжены при любом действительном $\alpha$. Предположим также, что $p$ и $q$ удовлетворяют условиям, обеспечивающим дискретность спектров задач* (1.2). Пусть $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ есть спектры соответственно задачи (1.2) и задачи

$$ly = \lambda y, \ y_2(0) = 0, \tag{1.3}$$

т. е. мы выделили, как отдельный, случай $\alpha = \frac{\pi}{2}$. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Через $\varphi(r, \lambda)$ и $\theta(r, \lambda)$ обозначим решения системы (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = \sin\alpha, \ \varphi_2(0, \lambda) = -\cos\alpha; \tag{1.4}$$

$$\theta_1(0, \lambda) = 1, \ \theta_2(0, \lambda) = 0. \tag{1.4'}$$

Очевидно, что $\varphi(r, \lambda_n(\alpha))$ и $\theta(r, \mu_n)$ есть собственные функции задач (1.2) и (1.3) соответственно. Заметим, что компоненты $\varphi$ и $\theta$ можно считать действительными. Квадраты норм этих собственных функций

$$a_n(\alpha) = \|\varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha))\|^2 = \int_0^\infty \{\varphi_1^2(r, \lambda_n(\alpha)) + \varphi_2^2(r, \lambda_n(\alpha))\}\, dr,$$

---

* Достаточные условия дискретности спектров задач (1.2) приведены в [1], гл. 4. Заметим, что эти условия не зависят от числа $\alpha$, входящего в краевое условие.

$$b_n = \|\theta(\cdot, \mu_n)\|^2,$$

обычно называют нормировочными постоянными. Монотонно возрастающие функции

$$\rho_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{0<\lambda_n(\alpha)<\lambda} a_n^{-1}(\alpha), & \lambda > 0 \\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n(\alpha)<0} a_n^{-1}(\alpha), & \lambda<0, \end{cases} \quad \sigma(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{0<\mu_n<\lambda} b_n^{-1}, & \lambda>0 \\ -\sum\limits_{\lambda<\mu_n<0} b_n^{-1}, & \lambda<0 \end{cases} \tag{1.5}$$

называются спектральными функциями задач (1.2) и (1.3) соответственно. В работе [2] доказано, что по спектральной функции $\rho_0(\lambda)$ (т. е. при $\alpha = 0$) можно однозначно и конструктивно восстановить «потенциал»

$$Q(r) = \begin{pmatrix} p(r) & q(r) \\ q(r) & -p(r) \end{pmatrix} = \sigma_2 p(r) + \sigma_3 q(r)$$

канонической системы Дирака. Из [2] следует также, что $Q(r)$ можно восстановить и по спектральной функции $\rho_\alpha(\lambda)$, если $\alpha$ заранее известно.

В дальнейшем всегда будем предполагать, что $p$ и $q$ монотонно возрастающие функции, точнее

$$0 < p(0) \leqslant p(r) \leqslant p(r_1), \quad 0 \leqslant q(0) \leqslant q(r) \leqslant q(r_1) \quad \text{при} \quad r < r_1. \tag{1.6}$$

Собственные значения пронумерованы в порядке возрастания, т. е. $\lambda_n(\alpha) \geqslant \lambda_k(\alpha)$ при $n > k$, причем $\lambda_n(\alpha) > 0$ при $n > 0$ и $\lambda_n(\alpha) < 0$ при $n < 0$.

При этих условиях основными результатами нашей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Нормировочные постоянные $a_n(\alpha)$ определяются при помощи двух спектров $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{\lambda_n(\beta)\}_{-\infty}^{\infty}$ $(0 < \beta - \alpha < \pi)$ по формулам:*

$$a_n(\alpha) = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)} \cdot \frac{\lambda_0(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_0(\beta) - \lambda_n(\alpha)} \cdot c \cdot \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot p_k, \quad n \neq 0, \tag{1.7}$$

*где*

$$p_k = \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)} \quad \text{при } k \neq n \text{ и } p_n = 1;$$

$$a_0(\alpha) = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\lambda_0(\alpha) - \lambda_0(\beta)} \cdot c \cdot \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_0(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_0(\alpha)}, \tag{1.8}$$

*где положительная постоянная $c$ определяется из соотношения*

$$c \cdot \lim_{\mu\to\infty} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right| = 1, \tag{1.9}$$

*т. е. $\rho_\alpha(\lambda)$, а следовательно и потенциал $Q(r)$, определяются однозначно по двум спектрам.*

Замечание. Как будет видно из доказательств, условия (1.6) на $p$ и $q$, ограничивающие класс восстанавливаемых потенциалов, используются в технике определения постоянной $c$ по формуле (1.9), но не при выводе формул (1.7) и (1.8). Нижеприведенные условия (1.10) и (1.11) позволяют в формуле (1.9) перейти к пределу под знаком бесконечного произведения и в результате упростить выражения для $a_n(\alpha)$.

Теорема 1′. *При условиях: $Q(r)$ непрерывна в нуле и удовлетворяет в нуле условию Дини*

$$\int_0^{\delta} \frac{|Q(s)-Q(0)|}{s}\, ds < \infty, \quad \delta > 0, \tag{1.10}$$

$$\lambda_{-n}(\alpha) = -\lambda_n(\alpha)\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{1.11}$$

*нормировочные постоянные определяются по формуле* $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$a_n(\alpha) = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)} \cdot \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\alpha)-\lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta)-\lambda_n(\alpha)}. \tag{1.12}$$

Аналогичный результат для задачи Штурма—Лиувилля на полуоси получен в [3], где подробно освещена история вопроса о восстановлении по двум спектрам и приведена библиография. Для канонической системы Дирака на $[0, \pi]$ обратная задача по двум спектрам решена в [4].

Теорема 2. *При $q(r) \equiv 0$ и при выполнении условия* (1.10) *нормировочные постоянные определяются по формуле* $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{4}\right)$

$$a_n(\alpha) = \frac{|\cos 2\alpha|}{\lambda_n(\alpha)+\lambda_{-n}(\alpha)} \cdot \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_n(\alpha)-\lambda_k(\alpha)}{\lambda_n(\alpha)+\lambda_{-k}(\alpha)}, \tag{1.13}$$

*т. е. $\rho_\alpha(\lambda)$, а следовательно и $Q(r)$, восстанавливаются однозначно по одному спектру.*

Введем обозначение $J_\alpha(\lambda)$ для интеграла Стильтьеса

$$J_\alpha(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_\alpha(\mu)}{\mu-\lambda}.$$

Теорема 3. *При условиях* (1.10) *и* (1.11), *а также $\lambda_0(\alpha) \neq 0$, имеет место равенство* $\left(\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

$$J_\beta(\lambda) = \frac{J_\alpha(\lambda)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{J_\alpha(\lambda)\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)}. \tag{1.14}$$

Из теоремы 3, в частности, следует, что зная спектральную функцию $\rho_\alpha(\lambda)$ при каком-либо $\alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, мы можем, обратив интеграл Стильтьеса, однозначно определить спектральную функцию $\rho_\beta(\lambda)$ при любом $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, так как асимптотика $\rho_\beta(\lambda)$ при $\lambda \to \pm\infty$ известна для любого действительного $\beta$ (см. [5]). В частности, можно однозначно восстановить $\rho_0(\lambda)$, по которой, согласно методу Б. М. Левитана и М. Г. Гасымова [2], однозначно восстанавливается $Q(r)$.

Отметим также

Следствие 1. *Спектральная функция $\rho_\alpha(\lambda)$, а следовательно и потенциал $Q(r)$, однозначно восстанавливаются по спектру $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$ и значениям $\{|u_n(0)|^2\}_{-\infty}^{\infty}$ нормированных собственных функций $u_n(r)$ задачи (1.2) в нуле при любом действительном $\alpha$.*

Это следствие, которое является простой перефразировкой теоремы о восстановлении $Q(r)$ по $\rho_\alpha(\lambda)$ и доказательство которого заключается в установлении очевидного равенства $|u_n(0)|^2 = \dfrac{1}{a_n(\alpha)}$, представляет интерес, возможно потому, что значения «волновых функций» (т. е. нормированных собственных функций) в нуле, как и спектр, есть «наблюдаемые» физические величины (см., например, [6], [7], [8]).

## § 2. Представления для функции $R_\alpha(\lambda)$

Обозначим через

$$u(r, \lambda) = c_1(\alpha)\,\varphi(r, \lambda) + c_2(\lambda)\,\theta(r, \lambda) \tag{2.1}$$

решение системы (1.1), принадлежащее $L_2(0, \infty; C^2)$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Известно ([1], стр. 232), что такое решение существует, причем оно единственно с точностью до умножения на постоянную $c(\lambda)$.

Рассмотрим функцию

$$R_\alpha(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda)\cos\alpha + u_2(0, \lambda)\sin\alpha}{u_2(0, \lambda)} = \frac{u_1(0, \lambda)}{u_2(0, \lambda)}\cos\alpha + \sin\alpha. \tag{2.2}$$

Так как $u_1(0, \lambda) = c_1(\lambda)\sin\alpha + c_2(\lambda)$, $u_2(0, \lambda) = -c_1(\lambda)\cos\alpha$, то определение $R_\alpha(\lambda)$ можно записать также в виде

$$R_\alpha(\lambda) = -\frac{c_2(\lambda)}{c_1(\lambda)}. \tag{1.2'}$$

Поскольку $u(r, \lambda)$ единственно с точностью до умножения на постоянную $c(\lambda)$, то функция $R_\alpha(\lambda)$ решением $u(\cdot, \lambda)$ определяется единственным образом. Так как задачи (1.2) и (1.3) самосопряженные и имеют чисто дискретные спектры, то легко видеть, что $R_\alpha(\lambda)$ — мероморфная функция, причем нули ее образуют спектр $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$ задачи (1.2), а полюсы — спектр $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ задачи (1.3). В этом параграфе мы докажем равенство

$$\operatorname{Im} R_\alpha(\lambda) = \operatorname{Im}\lambda \cdot \frac{\int_0^\infty |u(r, \lambda)|^2\,dr}{|u_2(0, \lambda)|^2} \cdot \cos\alpha, \tag{2.3}$$

откуда будет следовать, что $R_\alpha(\lambda)$ есть «вещественная» мероморфная функция (т. е. $\operatorname{Im} R_\alpha(\lambda) = 0$ при $\operatorname{Im}\lambda = 0$), переводящая верхнюю полуплоскость в верхнюю и, следовательно, для нее имеет место известное представление в виде бесконечного произведения*

$$R_\alpha(\lambda)=c\cdot\frac{\lambda-\lambda_0(\alpha)}{\lambda-\mu_0}\cdot\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k(\alpha)}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right)^{-1}, \tag{2.4}$$

где $c>0$, а штрих при бесконечном произведении означает, что пропускается множитель с номером $k=0$. Кроме того, нули и полюса $R_\alpha(\lambda)$ все простые и перемежаются, причем

$$\mu_k<\lambda_k(\alpha)<\mu_{k+1},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,\ \lambda_{-1}(\alpha)<0<\mu_1,\ .$$

т. е., в частности, нули лежат правее полюсов ([9], стр. 398, теорема М. Г. Крейна).

Из простоты нулей и полюсов и (2.2′), в частности, следует: $c_1(\mu_k)=0,\ c_1'(\mu_k)\neq0,\ c_2(\lambda_k(\alpha))=0,\ c_2'(\lambda_k(\alpha))\neq0;$

$$u(r,\lambda_k(\alpha))=c_1(\lambda_k(\alpha))\cdot\varphi(r,\lambda_k(\alpha)), \tag{2.5}$$

$$u(r,\mu_k)=c_2(\mu_k)\cdot\theta(r,\mu_k). \tag{2.6}$$

Итак, докажем равенство (2.3). Для этого запишем тождество $lu=\lambda u$ в виде

$$u_2'+p(r)u_1+q(r)u_2=\lambda u_1,$$

$$-u_1'+q(r)u_1-p(r)u_2=\lambda u_2.$$

Умножим первое равенство на $\bar u_1$, а второе — на $\bar u_2$

$$u_2'\cdot\bar u_1+p(r)|u_1|^2+q(r)u_2\cdot\bar u_1=\lambda\cdot|u_1|^2. \tag{2.7}$$

$$-u_1'\cdot\bar u_2+q(r)u_1\cdot\bar u_2-p(r)\cdot|u_2|^2=\lambda\cdot|u_2|^2, \tag{2.8}$$

и добавим к ним комплексно-сопряженные равенства

$$\bar u_2'\cdot u_1+p(r)|u_1|^2+q(r)\bar u_2\cdot u_1=\bar\lambda\cdot|u_1|^2, \tag{2.9}$$

$$-\bar u_1'\cdot u_2+q(r)\bar u_1\cdot u_2-p(r)|u_2|^2=\bar\lambda|u_2|^2. \tag{2.10}$$

Сложив первые два и отняв последние два равенства, получим

$$\frac{d}{dr}(u_2\bar u_1-u_1\bar u_2)=2i\operatorname{Im}\lambda\cdot(|u_1|^2+|u_2|^2)=2i\operatorname{Im}\lambda\cdot|u|^2. \tag{2.11}$$

Так как $u_1$ и $u_2\in L_2(0,\infty)$, то существуют последовательности $\{r_n\}_1^\infty$ и $\{r_n'\}_1^\infty$, стремящиеся к $\infty$, такие, что $u_1(r_n,\lambda)\to0$ и $u_2(r_n',\lambda)\to0$ при

---

* Отметим, что здесь, и всюду в дальнейшем, бесконечные произведения вида $\prod\limits_{-\infty}^{\infty}a_k$ и ряды $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}a_k$ надо понимать в смысле главного значения, т. е.

$$\prod_{-\infty}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\prod_{-n}^{n}a_k,\quad \sum_{-\infty}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n}a_k.$$

$n \to \infty$. Поэтому, интегрируя равенство (2.11) от 0 до $r_n$ (или до $r_n'$) и устремляя $n \to \infty$, получаем

$$u_1(0, \lambda)\,\bar{u}_2(0, \lambda) - u_2(0, \lambda)\cdot \bar{u}_1(0, \lambda) = 2i \operatorname{Im} \lambda \int\limits_0^\infty |u(r, \lambda)|^2\, dr. \tag{2.12}$$

С другой стороны, из определения (2.2)

$$2i \operatorname{Im} R_\alpha(\lambda) = R_\alpha(\lambda) - \overline{R_\alpha(\lambda)} = \frac{u_1(0, \lambda)\,\bar{u}_2(0, \lambda) - u_2(0, \lambda)\,\bar{u}_1(0, \lambda)}{|u_2(0, \lambda)|^2} \cos \alpha. \tag{2.13}$$

Из равенств (2.12) и (2.13) следует (2.3).

Для действительной части функции $R_\alpha(\lambda)$ из (2.2) имеем

$$2 \operatorname{Re} R_\alpha(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda)\,\bar{u}_2(0, \lambda) + u_2(0, \lambda)\cdot \overline{u_1(0, \lambda)}}{|u_2(0, \lambda)|^2} \cos \alpha + 2 \sin \alpha. \tag{2.14}$$

С другой стороны, сложив (2.7) и (2.9) и отняв (2.8) и (2.10), получим

$$\frac{d}{dr}[u_1 \bar{u}_2 + u_2 \bar{u}_1] = 2 \operatorname{Re} \lambda \cdot (|u_1|^2 - |u_2|^2) - 2p(r)\,|u|^2.$$

Проинтегрировав последнее равенство от 0 до $\infty$, из (2.14) получим представление для $\operatorname{Re} R_\alpha(\lambda)$

$$\operatorname{Re} R_\alpha(\lambda) = \frac{1}{|u_2(0, \lambda)|^2}\left(\int\limits_0^\infty p(r)|u|^2\, dr - \operatorname{Re} \lambda \cdot \int\limits_0^\infty (|u_1|^2 - |u_2|^2)\,dr\right)\cos \alpha + \sin \alpha.$$

В частности, при $\lambda = i\mu$, имеем представления

$$\operatorname{Re} R_\alpha(i\mu) = \frac{\cos \alpha}{|u_2(0, i\mu)|^2} \int\limits_0^\infty p(r)\cdot|u(r, i\mu)|^2\, dr + \sin \alpha,$$

$$R_\alpha(i\mu) = \frac{\cos \alpha}{|u_2(0, \lambda)|^2} \int\limits_0^\infty [p(r) + i\mu]\cdot|u(r, i\mu)|^2\, dr + \sin \alpha. \tag{2.15}$$

Для вещественной мероморфной функции, переводящей верхнюю полуплоскость в верхнюю, имеет место также следующее представление ([9], стр. 400, теорема Н. Г. Чеботарёва):

$$R_\alpha(\lambda) = a\lambda + b + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{\mu_k - \lambda} - \frac{1}{\mu_k}\right), \tag{2.16}$$

где $a \geqslant 0$, $\operatorname{Im} b = 0$, $A_k \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k^2} < \infty$.

Поскольку $-(R_\alpha(\lambda))^{-1}$ также переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю, то

$$-\frac{1}{R_\alpha(\lambda)}=a'\lambda+b'+\sum_{-\infty}^{\infty}A_k'\left(\frac{1}{\lambda_k(\alpha)-\lambda}-\frac{1}{\lambda_k(\alpha)}\right), \tag{2.17}$$

где

$$a'\geqslant 0,\ \operatorname{Im} b'=0,\ A_k'\geqslant 0,\ \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{A_k'}{\lambda_k^2(\alpha)}<\infty.$$

Чтобы вычислить постоянные $A_k$ и $A_k'$, заметим, что это взятые с обратным знаком вычеты функций $R_\alpha(\lambda)$ и $-(R_\alpha(\lambda))^{-1}$, т. е., в частности,

$$A_k'=-\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{R_\alpha(\lambda)}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_k(\alpha)}=\left(\frac{d}{d\lambda}R_\alpha(\lambda)\right)^{-1}\Big|_{\lambda=\lambda_k(\alpha)}.$$

Исходя из определения (2.2) и действуя как и при выводе равенства (2.12), получим

$$\frac{d}{d\lambda}R_\alpha(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_k(\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{u_2^2(0,\lambda_k(\alpha))}\cdot\int_0^{\infty}[u_1^2(r,\lambda_k(\alpha))+u_2^2(r,\lambda_k(\alpha))]\,dr.$$

Учитывая (2.5) и начальные условия (1.4), имеем

$$\frac{d}{d\lambda}R_\alpha(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_k(\alpha)}=\frac{a_k(\alpha)}{\cos\alpha}. \tag{2.18}$$

Действуя аналогичным образом в случае с $A_k$, получаем формулы

$$A_k'=\frac{\cos\alpha}{a_k(\alpha)},\ A_k=\frac{\cos\alpha}{b_k}. \tag{2.19}$$

## § 3. Две леммы

Этот параграф посвящен доказательству двух лемм, вторая из которых играет весьма существенную роль в нашей работе.

Лемма 3.1. *Решение* $u(r,\lambda)$ *системы* (1.1), *принадлежащее* $L_2(0,\infty;\mathbf{C}^2)$ *при* $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, *удовлетворяет двусторонней оценке* (*при* $\lambda=i\mu$)

$$\exp\{-2[p(r)+q(r)+\mu]\,r\}\leqslant\frac{|u(r,i\mu)|^2}{|u(0,i\mu)|^2}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-\frac{\int_0^r[p^2(s)+q^2(s)+\mu^2]\,ds}{p(b)+q(b)+\mu}\right\},$$

*где* $b>r+\dfrac{1}{2p(0)}$.

Лемма 3.2. *Имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{\mu\to\infty}\operatorname{Re}R_\alpha(i\mu)=\sin\alpha, \tag{3.1}$$

$$\lim_{\mu\to\infty} \operatorname{Im} R_\alpha(i\mu) = \cos\alpha, \tag{3.2}$$

в частности

$$\lim_{\mu\to\infty} |R_\alpha(i\mu)| = 1. \tag{3.3}$$

Для доказательства леммы 3.1 запишем систему (1.1) при $\lambda = i\mu$

$$u_2' + p(r)\,u_1 + q(r)\,u_2 = i\mu\, u_1, \tag{3.4}$$

$$-u_1' + q(r)\,u_1 - p(r)\,u_2 = i\mu\, u_2, \tag{3.5}$$

а также сопряженные равенства

$$\bar{u}_2' + p(r)\,\bar{u}_1 + q(r)\,\bar{u}_2 = -i\mu\,\bar{u}_1, \tag{3.6}$$

$$-\bar{u}_1' + q(r)\,\bar{u}_1 - p(r)\,\bar{u}_2 = -i\mu\bar{u}_2. \tag{3.7}$$

Умножая (3.4) на $\bar{u}_2$, (3.5) — на $-\bar{u}_1$, (3.6) — на $u_2$, (3.7) — на $-u_1$ и складывая все четыре равенства, получим

$$-\frac{d}{dr}|u|^2 = 4p(r)\operatorname{Re}(u_1\bar{u}_2) + 2q(r)(|u_2|^2 - |u_1|^2) + 4\mu\operatorname{Im}(u_1\cdot\bar{u}_2), \tag{3.8}$$

откуда, учитывая неравенства

$$2\operatorname{Re}(u_1\bar{u}_2) \leqslant |u|^2,\ 2\operatorname{Im}(u_1\bar{u}_2) \leqslant |u_1|^2,\ |u_2|^2 - |u_1|^2 \leqslant |u|^2,$$

имеем

$$-\frac{\frac{d}{dr}|u|^2}{|u|^2} = -\frac{d}{dr}\ln|u|^2 \leqslant 2\,[p(r) + q(r) + \mu]. \tag{3.9}$$

Умножим (3.5) на $-\bar{u}_2$, (3.6) — на $u_1$ и сложим, получим

$$u_1'\cdot\bar{u}_2 + u_1\cdot\bar{u}_2' = \frac{d}{dr}(u_1\cdot\bar{u}_2) = -p(r)\,|u|^2 - i\mu\,|u|^2.$$

Интегрируя последнее равенство от $r$ до $\infty$, имеем

$$-u_1(r, i\mu)\cdot\bar{u}_2(r, i\mu) = -\int_r^\infty p(s)\,|u(s, i\mu)|^2\,ds - i\mu\int_r^\infty |u(s, i\mu)|^2\,ds,$$

т. е.

$$\operatorname{Re}(u_1(r, i\mu)\cdot\bar{u}_2(r, i\mu)) = \int_r^\infty p(s)\,|u(s, i\mu)|^2\,ds, \tag{3.10}$$

$$\operatorname{Im}(u_1(r, i\mu)\cdot\bar{u}_2(r, i\mu)) = \mu\int_r^\infty |u(s, i\mu)|^2\,ds. \tag{3.11}$$

Аналогичным образом, умножая (3.4) на $\bar{u}_2$, (3.5) — на $\bar{u}_1$, (3.6) — на $u_2$, (3.7) — на $u_1$ и складывая, получим

$$\frac{d}{dr}(|u_2|^2-|u_1|^2)=-2q(r)\cdot|u|^2.$$

Интегрируя от $r$ до $\infty$, имеем

$$|u_2(r, i\mu)|^2-|u_1(r, i\mu)|^2=2\int\limits_r^\infty q(s)\,|u(s, i\mu)|^2\,ds. \tag{3.12}$$

Из (3.8) и (3.10)—(3.12) следует равенство

$$-\frac{d}{dr}|u(r, i\mu)|^2=4p(r)\int\limits_r^\infty p(s)\,|u(s, i\mu)|^2\,ds+4q(r)\int\limits_r^\infty q(s)\,|u(s, i\mu)|^2\,ds+$$

$$+4\mu^2\int\limits_r^\infty |u(s, i\mu)|^2\,ds. \tag{3.13}$$

Так как $p$ и $q$ — неотрицательные монотонно растущие функции, из (3.13) получаем неравенство

$$-\frac{d}{dr}|u(r, i\mu)|^2>4\,[p^2(r)+q^2(r)+\mu^2]\int\limits_r^\infty |u(s, i\mu)|^2\,ds. \tag{3.14}$$

Из (3.9) и (3.14) получаем двустороннюю оценку логарифмической производной от $|u|^2$

$$-2\,[p(r)+q(r)+\mu]\leqslant\frac{d}{dr}\ln|u(r, i\mu)|^2\leqslant-4\,[p^2(r)+q^2(r)+\mu^2]\times$$

$$\times\frac{\int\limits_r^\infty |u(s, i\mu)|^2 ds}{|u(r, i\mu)|^2}.$$

Обозначив

$$m(r, i\mu)=\frac{\int\limits_r^\infty |u(s, i\mu)|^2\,ds}{|u(r, i\mu)|^2},$$

перепишем последнее неравенство в виде

$$-2\,[p(r)+q(r)+\mu]\leqslant\frac{d}{dr}\ln|u|^2<-4\,[p^2(r)+q^2(r)+\mu^2]\cdot m(r, i\mu). \tag{3.15}$$

Интегрируя (3.15) от $r_1$ до $r_2$ и потенцируя, имеем

$$\exp\left\{-2\int\limits_{r_1}^{r_2}[p(s)+q(s)+\mu]\,ds\right\}\leqslant\frac{|u(r_2, i\mu)|^2}{|u(r_1, i\mu)|^2}\leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-4\int_{r_1}^{r_2}[p^2(s)+q^2(s)+\mu^2]\cdot m(s, i\mu)\,ds\right\}. \tag{3.16}$$

Чтобы уточнить (т. е. выразить через $p$ и $q$) оценку в правой части последнего неравенства, получим двустороннюю оценку для функции $m(r, i\mu)$. Во-первых, из (3.15) имеем оценку сверху

$$m(r, i\mu) \leqslant \frac{p(r)+q(r)+\mu}{2[p^2(r)+q^2(r)+\mu^2]}. \tag{3.17}$$

Чтобы получить оценку $m(r, i\mu)$ снизу, проинтегрируем левую часть неравенства (3.16) по $r_2$ от $r_1$ до $\infty$

$$\frac{\int_{r_1}^{\infty}|u(r_2, i\mu)|^2\,dr_2}{|u(r_1, i\mu)|^2} = m(r_1, i\mu) \geqslant \int_{r_1}^{\infty} e^{-2\int_{r_1}^{r_2}[p(s)+q(s)+\mu]\,ds}\,dr_2 \geqslant$$

$$\geqslant \int_{r_1}^{\infty} e^{-2[p(r_2)+q(r_2)+\mu](r_2-r_1)}\,dr_2 > \int_{r_1}^{b} e^{-2[p(r_2)+q(r_2)+\mu](r_2-r_1)}\,dr_2 >$$

$$> \int_{r_1}^{b} e^{-2[p(b)+q(b)+\mu](r_2-r_1)}\,dr_2 = \frac{1-e^{-2[p(b)+q(b)+\mu](b-r_1)}}{2[p(b)+q(b)+\mu]}, \tag{3.18}$$

где $b$ — произвольное конечное число, большее $r_1$. Таким образом, для $m(r, i\mu)$ имеем двустороннюю оценку

$$\frac{1-e^{-2[p(b)+q(b)+\mu](b-r)}}{2[p(b)+q(b)+\mu]} \leqslant m(r, i\mu) \leqslant \frac{p(r)+q(r)+\mu}{2[p^2(r)+q^2(r)+\mu^2]}, \tag{3.19}$$

где $b > r$. Если в (3.18) взять $b > r_1 + \dfrac{1}{2p(0)}$, то поскольку $2[p(b)+q(b)+\mu](b-r_1) > 1$ и $e^{-2[p(b)+q(b)+\mu](b-r_1)} \leqslant e^{-1} < \dfrac{1}{2}$, получим

$$m(s, i\mu) > \frac{1}{4[p(b)+q(b)+\mu]} \quad \text{при} \quad b \geqslant s + \frac{1}{2p(0)}.$$

Теперь уже правую часть (3.16) можно оценить так:

$$\exp\left\{-4\int_{r_1}^{r_2}[p^2(s)+q^2(s)+\mu^2]\cdot m(s, i\mu)\,ds\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\int_{r_1}^{r_2}\frac{p^2(s)+q^2(s)+\mu^2}{p(b)+q(b)+\mu}\,ds\right\},$$

где $b \geqslant r_2 + \dfrac{1}{2p(0)}$. Отсюда следуют неравенства

$$\exp\left\{-2\left[p(r_2)+q(r_2)+\mu\right](r_2-r_1)\right\}\leqslant\frac{|u(r_2,i\mu)|^2}{|u(r_1,i\mu)|^2}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{p(b)+q(b)+\mu}\cdot\int_{r_1}^{r_2}\left[p^2(s)+q^2(s)+\mu^2\right]ds\right\}$$

и, в частности, неравенство, фигурирующее в формулировке леммы 3.1. Лемма 3.1 доказана.

Перейдем к доказательству леммы 3.2. Согласно определению (2.2) и представлению (2.15) функции $R_\alpha(i\mu)$ имеем

$$k(i\mu)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{R_\alpha(i\mu)-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{u_1(0,i\mu)}{u_2(0,i\mu)}=$$

$$=\left(1+\frac{|u_1(0,i\mu)|^2}{|u_2(0,i\mu)|^2}\right)\cdot\int_0^\infty(p(r)+i\mu)\cdot\frac{|u(r,i\mu)|^2}{|u(0,i\mu)|^2}\,dr=$$

$$=(1+|k(i\mu)|^2)\cdot\left(\int_0^\infty p(r)\cdot\frac{|u(r,i\mu)|^2}{|u(0,i\mu)|^2}\,dr+i\mu\int_0^\infty\frac{|u(r,i\mu)|^2}{|u(0,i\mu)|^2}dr\right)=$$

$$=(1+|k(i\mu)|^2(c(i\mu)+i\mu m(0,i\mu)),\tag{3.20}$$

откуда

$$\frac{|k(i\mu)|}{1+|k(i\mu)|^2}=[|c(i\mu)|^2+\mu^2\cdot m^2(0,i\mu)]^{1/2}.\tag{3.21}$$

Так как

$$c(i\mu)=\int_0^\infty p(r)\frac{|u(r,i\mu)|^2}{|u(0,i\mu)|^2}\,dr\geqslant p(0)\int_0^\infty\frac{|u(r,i\mu)|^2}{|u(0,i\mu)|^2}\,dr=p(0)\cdot m(0,i\mu),$$

и $|c(i\mu)|^2\geqslant p^2(0)\cdot m^2(0,i\mu)$, то (3.21) перепишем в виде (учитывая неравенство (3.18))

$$\frac{1}{2}\geqslant\frac{|k(i\mu)|}{1+|k(i\mu)|^2}\geqslant[p^2(0)+\mu^2]^{1/2}\cdot m(0,i\mu)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{[p^2(0)+\mu^2]^{1/2}\cdot(1-e^{-2[p(b)+q(b)+\mu]\cdot b})}{2[p(b)+q(b)+\mu]}\stackrel{\text{def}}{=}f(\mu),$$

где $b$ — произвольное конечное число $\geqslant\dfrac{1}{2p(0)}$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{2}\geqslant\lim_{\mu\to\infty}\frac{|k(i\mu)|}{1+k(i\mu)|^2}\geqslant\lim_{\mu\to\infty}f(\mu)=\frac{1}{2},$$

что возможно только при

$$\lim_{\mu\to\infty}|k(i\mu)|=1.\tag{3.22}$$

С другой стороны, из (3.20) имеем

$$\operatorname{Im} k(i\mu)=\frac{\operatorname{Im} R_\alpha(i\mu)}{\cos\alpha}=(1+|k(i\mu)|^2)\cdot\mu\cdot m(0, i\mu). \tag{3.23}$$

Из двусторонней оценки (3.19), для $m(0, i\mu)$ следует, что $\lim\limits_{\mu\to\infty} \mu \times$ $\times\, m(0, i\mu)=\frac{1}{2}$. Учитывая это, из (3.23) получаем

$$\lim_{\mu\to\infty} \operatorname{Im} k(i\mu)=\lim_{\mu\to\infty}\frac{\operatorname{Im} R_\alpha(i\mu)}{\cos\alpha}=1,$$

т. е. $\lim\limits_{\mu\to\infty} \operatorname{Im} R_\alpha(i\mu)=\cos\alpha$ и, учитывая (3.22),

$$0=\lim_{\mu\to\infty} \operatorname{Re} k(i\mu)=\lim_{\mu\to\infty}\frac{\operatorname{Re} R_\alpha(i\mu)-\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

т. е. $\lim\limits_{\mu\to\infty} \operatorname{Re} R_\alpha(i\mu)=\sin\alpha$ и лемма 3.2 доказана. Из определения (2.2) и доказанной леммы следует

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{u_1(0, i\mu)}{u_2(0, i\mu)}=i. \tag{3.24}$$

## § 4. Выражение нормировочных постоянных через два спектра (доказательство теоремы 1)

Рассмотрим функцию

$$R(\lambda)\overset{\text{def}}{=}\frac{R_\alpha(\lambda)}{R_\beta(\lambda)}=\frac{u_1(0,\lambda)\cos\alpha+u_2(0,\lambda)\sin\alpha}{u_1(0,\lambda)\cos\beta+u_2(0,\lambda)\sin\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{u_1(0,\lambda)}{u_2(0,\lambda)}\cos\alpha+\sin\alpha}{\dfrac{u_1(0,\lambda)}{u_2(0,\lambda)}\cos\beta+\sin\beta}, \tag{4.1}$$

где $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Аналогично тому, как это делалось в § 2 для функции $R_\alpha(\lambda)$, получаем, что

$$\operatorname{Im} R(\lambda)=\operatorname{Im}\lambda\cdot\frac{\int\limits_0^\infty |u(r,\lambda)|^2\,dr}{|u_1(0,\lambda)\cos\beta+u_2(0,\lambda)\sin\beta|^2}\sin(\beta-\alpha),$$

т. е. $R(\lambda)$ есть вещественная мероморфная функция, переводящая верхнюю полуплоскость в верхнюю и, следовательно, согласно упомянутой выше теореме М. Г. Крейна, ее нули $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$ и полюса $\{\lambda_n(\beta)\}_{-\infty}^{\infty}$ все простые и перемежаются; для нее имеет место представление

$$R(\lambda)=c\,\frac{\lambda-\lambda_0(\alpha)}{\lambda-\lambda_0(\beta)}\cdot\prod_{-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{1}{\lambda_k(\alpha)}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k(\beta)}\right)^{-1}, \tag{4.2}$$

где $c > 0$ и (учитывая нумерацию собственных значений, указанную в § 1) нули лежат правее полюсов, т. е.

$$\lambda_n(\beta) < \lambda_n(\alpha) < \lambda_{n+1}(\beta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Из леммы 3.2 следует

$$\lim_{\mu\to\infty} R(i\mu) = \frac{\sin\alpha + i\cos\alpha}{\sin\beta + i\cos\beta} = e^{i(\beta-\alpha)},$$

в частности

$$\lim_{\mu\to\infty} |R(i\mu)| = 1, \quad \lim_{\mu\to\infty} \arg R(i\mu) = \beta - \alpha. \tag{4.3}$$

Используя эти предельные соотношения, докажем две леммы.

Лемма 4.1. *Постоянная $c > 0$, входящая в представление* (4.2), *определяется через два спектра (без $\lambda_0(\alpha)$ и $\lambda_0(\beta)$) равенством*

$$c\cdot\lim_{\mu\to\infty} \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\left|\frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu}\right| = 1. \tag{4.4}$$

Лемма 4.2.

$$\lim_{\mu\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \arg\frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} = \beta - \alpha. \tag{4.5}$$

Для доказательства этих лемм запишем (4.2) при $\lambda = i\mu$

$$R(i\mu) = c\,\frac{\lambda_0(\alpha) - i\mu}{\lambda_0(\beta) - i\mu}\prod_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu},$$

и возьмем логарифм (главное значение логарифма) от обеих сторон

$$\ln R(i\mu) \overset{\text{def}}{=} \ln|R(i\mu)| + i\arg R(i\mu) = \ln\left|c\,\frac{\lambda_0(\alpha) - i\mu}{\lambda_0(\beta) - i\mu}\right| +$$

$$+ i\arg\left(c\,\frac{\lambda_0(\alpha) - i\mu}{\lambda_0(\beta) - i\mu}\right) + \sum_{-\infty}^{\infty}{}'\left\{\ln\left|\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu}\right| +\right.$$

$$\left. + i\arg\left(\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu}\right)\right\}. \tag{4.6}$$

Поскольку $c > 0$ и $\dfrac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} > 0$ при $k \neq 0$, то эти сомножители под знаками аргумента можно отбросить. Заметим также, что

$$\arg\left(\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu}\right) = \arg\frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu}$$

равен углу, под которым виден отрезок действительной оси $[\lambda_k(\beta), \lambda_k(\alpha)]$ из точки $i\mu$. Поэтому последовательность $\varphi_n(\mu) = \sum_{-n}^{n}\arg\times$ $\times\dfrac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu}$ представляет собой положительную, монотонно возрастающую и ограниченную (равномерно по $\mu>0$, $\varphi_n(\mu)<\pi$) последовательность, т. е. она сходится. Учитывая все это и отделяя действительные и мнимые части в (4.6), получаем два равенства

$$\ln|R(i\mu)|=\ln\left\{c\left|\frac{\lambda_0(\alpha)-i\mu}{\lambda_0(\beta)-i\mu}\right|\right\}+\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\ln\left\{\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\left|\frac{\lambda_k(\alpha)-i\mu}{\lambda_k(\beta)-i\mu}\right|\right\},$$

$$\arg R(i\mu)=\sum_{-\infty}^{\infty}\arg\frac{\lambda_k(\alpha)-i\mu}{\lambda_k(\beta)-i\mu}.$$

Исходя из равенств (4.3) и переходя к пределу при $\mu\to\infty$, получаем

$$0=\ln c+\lim_{\mu\to\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\ln\left\{\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\left|\frac{\lambda_k(\alpha)-i\mu}{\lambda_k(\beta)-i\mu}\right|\right\}\tag{4.7}$$

и равенство (4.5). Очевидно, что (4.7) можно переписать в виде (4.4). Таким образом, леммы 4.1 и 4.2 доказаны.

Перейдем теперь к определению нормировочных постоянных $a_n(\alpha)$ через два спектра. Для этого, во-первых, докажем, что

$$\left.\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n(\alpha)}=\frac{a_n(\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}.\tag{4.8}$$

В самом деле, так как $R_\alpha(\lambda_n(\alpha))=0$ и $R_\alpha'(\lambda_n(\alpha))=\dfrac{a_n(\alpha)}{\cos\alpha}$ (см. (2.18)), то из (4.1) имеем

$$\left.\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n(\alpha)}=\frac{R_\alpha'(\lambda_n(\alpha))}{R_\beta(\lambda_n(\alpha))}=\frac{a_n(\alpha)}{R_\beta(\lambda_n(\alpha))\cdot\cos\alpha}.\tag{4.9}$$

Исходя из определения (2.2), используя (2.5) и начальные условия (1.4), получаем $R_\beta(\lambda_n(\alpha))=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}$, что в сочетании с (4.9) дает (4.8).

С другой стороны, вычислим ту же производную $R'(\lambda_n(\alpha))$, исходя из представления (4.2). Записав $R(\lambda)$ в виде

$$R(\lambda)=c\frac{\lambda-\lambda_0(\alpha)}{\lambda-\lambda_0(\beta)}\prod_{0<|k|<n}\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\frac{\lambda_k(\alpha)-\lambda}{\lambda_k(\beta)-\lambda}\cdot\prod_{|k|>n}\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\frac{\lambda_k(\alpha)-\lambda}{\lambda_k(\beta)-\lambda},$$

заметим, что в конечном произведении $\prod\limits_{0<|k|<n}$ множители можно переставлять, поэтому, выделив множитель $\dfrac{\lambda_n(\alpha)-\lambda}{\lambda_n(\beta)-\lambda}$ и переписав $R(\lambda)$ в виде $\dfrac{\lambda_n(\alpha)-\lambda}{\lambda_n(\beta)-\lambda}\Pi(\lambda)$, продифференцируем по $\lambda$:

$$\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}=\left(\frac{d}{d\lambda}\frac{\lambda_n(\alpha)-\lambda}{\lambda_n(\beta)-\lambda}\right)\cdot\Pi(\lambda)+\frac{\lambda_n(\alpha)-\lambda}{\lambda_n(\beta)-\lambda}\cdot\frac{d}{d\lambda}\Pi(\lambda).$$

При $\lambda=\lambda_n(\alpha)$ второе слагаемое обращается в нуль. и мы имеем ($n\neq0$)

$$\left.\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n(\alpha)}=\frac{1}{\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)}\Pi(\lambda_n(\alpha))=\frac{1}{\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)}\times$$

$$\times \frac{\lambda_0(\alpha)-\lambda_n(\alpha)}{\lambda_0(\beta)-\lambda_n(\alpha)} \cdot c \cdot \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} p_k, \tag{4.10}$$

где $p_k = \frac{\lambda_k(\alpha)-\lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta)-\lambda_n(\alpha)}$ при $k \neq n$, а $p_n = 1$. Из (4.8) и (4.10) следует формула (1.7). При $n=0$ соответствующий множитель уже выделен в представлении (4.2), поэтому, аналогично выводу (4.10), получается формула (1.8). Теорема 1 доказана.

## § 5. Доказательство теорем 1' и 2

Лемма 5.1. *При условиях* (1.10) *и* (1.11) *бесконечное произведение*

$$\prod_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \tag{5.1}$$

*сходится, и бесконечное произведение*

$$\prod_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k(\alpha)-i\mu}{\lambda_k(\beta)-i\mu} \right| \tag{5.2}$$

*сходится равномерно по* $\mu \geqslant 1$.

Для сходимости бесконечного произведения (5.1) достаточно одновременной сходимости рядов (см., например, [10])

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k(\beta)-\lambda_k(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)} \tag{5.3}$$

и

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left[ \frac{\lambda_k(\beta)-\lambda_k(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)} \right]^2. \tag{5.4}$$

Изучим сначала вопрос сходимости ряда (5.3). Как уже отмечалось, ряды эти надо понимать в смысле главного значения. т. е. $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{-n}^{n}$. Для сходимости ряда (5.3) необходимо и достаточно, чтобы «остаток»

$$R_{n,p} = \sum_{-(n+p)}^{-n} \frac{\lambda_k(\beta)-\lambda_k(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)} + \sum_{n}^{n+p} \frac{\lambda_k(\beta)-\lambda_k(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)}$$

стремился к нулю при $n \to \infty$ для любого натурального $p$.

Введем монотонно возрастающие функции

$$A_\alpha^+(\lambda) = \sum_{0<\lambda_k(\alpha)<\lambda} [\lambda_k(\alpha)-\lambda_k(\beta)],\ \lambda > 0,$$

$$A_\alpha^-(\lambda) = -\sum_{\lambda<\lambda_k(\alpha)<0} [\lambda_k(\alpha)-\lambda_k(\beta)],\ \lambda < 0,$$

и запишем $R_{n,p}$ в виде

$$R_{n,p} = -\int_{\lambda_{-(n+p)}(\alpha)}^{\lambda_{-n}(\alpha)} \frac{dA_\alpha^-(\lambda)}{\lambda} - \int_{\lambda_n(\alpha)}^{\lambda_{n+p}(\alpha)} \frac{dA_\alpha^+(\lambda)}{\lambda} = \frac{A_\alpha^-(\lambda_{-(n+p)}(\alpha))}{\lambda_{-(n+p)}(\alpha)} -$$

$$-\frac{A_\alpha^-(\lambda_{-n}(\alpha))}{\lambda_{-n}(\alpha)}+\frac{A_\alpha^+(\lambda_n(\alpha))}{\lambda_n(\alpha)}-\frac{A_\alpha^+(\lambda_{n+p}(\alpha))}{\lambda_{n+p}(\alpha)}-$$

$$-\int\limits_{\lambda_{-(n+p)}(\alpha)}^{\lambda_{-n}(\alpha)}\frac{A_\alpha^-(\lambda)\,d\lambda}{\lambda^2}-\int\limits_{\lambda_n(\alpha)}^{\lambda_{n+p}(\alpha)}\frac{A_\alpha^+(\lambda)}{\lambda^2}\,d\lambda. \tag{5.5}$$

Здесь нам будет полезна следующая

Лемма 5.2. *При условии* (1.10) *имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$A_\alpha^+(\lambda)=\frac{\beta-\alpha}{\pi}\lambda+C(\alpha,\beta)\ln\lambda+o(1),\ \lambda\to\infty, \tag{5.6}$$

$$A_\alpha^-(\lambda)=\frac{\beta-\alpha}{\pi}\lambda+C(\alpha,\beta)\ln|\lambda|+D(\alpha,\beta)+o(1),\ \lambda\to-\infty, \tag{5.7}$$

*где постоянные* $C(\alpha,\beta)$ *и* $D(\alpha,\beta)$ *определяются равенствами*

$$C(\alpha,\beta)=\frac{1}{2\pi}[p(0)(\sin 2\beta-\sin 2\alpha)+q(0)(\cos 2\alpha-\cos 2\beta)],$$

$$D(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[p(0)(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)+q(0)(\sin 2\beta-\sin 2\alpha)].$$

Для доказательства леммы 5.2 нам понадобятся, в свою очередь, следующие леммы.

Лемма 5.3. *При всех* $n=0,\pm1,\pm2,\dots$

$$\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)=\int\limits_\alpha^\beta\frac{1}{a_n(\gamma)}\,d\gamma. \tag{5.8}$$

Лемма 5.4.

$$\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)\to0 \text{ при } n\to\pm\infty. \tag{5.9}$$

Для доказательства леммы 5.3 введем обозначения

$$B=\frac{1}{i}\,\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad \varphi(r,\lambda_n(\alpha))=\varphi_n(\alpha),$$

и умножив скалярно (в $L_2(0,\infty;\mathbf{C}^2)$) тождества

$$l\varphi_n(\alpha)=B\varphi_n'(\alpha)+Q(r)\varphi_n(\alpha)=\lambda_n(\alpha)\varphi_n(\alpha),$$

$$l\varphi_n(\beta)=B\varphi_n'(\beta)+Q(r)\varphi_n(\beta)=\lambda_n(\beta)\varphi_n(\beta),$$

соответственно, на $\varphi_n(\beta)$ и $\varphi_n(\alpha)$. Учитывая самосопряженность матрицы $Q(r)$ и вычитая из первого полученного тождества второе, получим

$$(B\varphi_n'(\alpha),\varphi_n(\beta))-(B\varphi_n'(\beta),\varphi_n(\beta))=[\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)](\varphi_n(\alpha),\varphi_n(\beta)).$$

Вычисляя левую часть последнего равенства, с учетом начальных условий (1.4), имеем

$$\int\limits_0^\infty\frac{d}{dr}[\varphi_{2,n}(\alpha)\cdot\varphi_{1,n}(\beta)-\varphi_{1,n}(\alpha)\cdot\varphi_{2,n}(\beta)]\,dr=\sin(\beta-\alpha),$$

т. е. имеет место тождество

$$[\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)]\cdot(\varphi_n(\alpha),\ \varphi_n(\beta))=\sin(\beta-\alpha).$$

Учитывая, что $(\varphi_n(\alpha),\ \varphi_n(\beta))\underset{\beta\to\alpha}{\to}\|\varphi_n(\alpha)\|^2=a_n(\alpha)$, деля обе стороны на $\alpha-\beta$ и устремляя $\beta\to\alpha$, получаем тождество $\dfrac{d}{d\alpha}\lambda_n(\alpha)=-\dfrac{1}{a_n(\alpha)}$. Интегрируя последнее от $\alpha$ до $\beta$, имеем

$$\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{a_n(\gamma)}\,d\gamma,$$

т. е. лемма 5.3 доказана. Отсюда, в частности, следует, что при $\beta>\alpha$ $\lambda_n(\alpha)>\lambda_n(\beta)$, т. е. при возрастании $\alpha$ в краевом условии, собственные значения движутся влево.

Перейдем к доказательству леммы 5.4. Известно, [5], что если матрица $Q(r)$ удовлетворяет условию (1.10), то для спектральной функции $\sigma(\lambda)=\rho_{\pi/2}(\lambda)$ задачи (1.3) имеет место асимптотика

$$\sigma(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\lambda+\dfrac{1}{\pi}p(0)\ln\lambda+o(1), & \lambda\to\infty,\\ \dfrac{1}{\pi}\lambda+\dfrac{1}{\pi}p(0)\ln|\lambda|+q(0)+o(1), & \lambda\to-\infty.\end{cases}\tag{5.10}$$

Унитарным преобразованием

$$z=\begin{pmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix}y$$

задача (1.2) сводится к задаче

$$l_1 z=B\frac{dz}{dr}+Q_1(r)z=\lambda z,\tag{5.11}$$

$$z_2(0)=0,$$

где

$$Q_1(r)=\begin{pmatrix}-[p(r)\cos 2\alpha+q(r)\sin 2\alpha] & p(r)\sin 2\alpha-q(r)\cos 2\alpha\\ p(r)\sin 2\alpha-q(r)\cos 2\alpha & p(r)\cos 2\alpha+q(r)\sin 2\alpha\end{pmatrix}.$$

Так как спектральные функции задач (1.2) и (5.11) совпадают, а спектральная функция задачи (5.11) имеет асимптотику вида (5.10), то $\rho_\alpha(\lambda)$ имеет асимптотику

$$\rho_\alpha(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\lambda-\dfrac{1}{\pi}[p(0)\cos 2\alpha+q(0)\sin 2\alpha]\ln\lambda+o(1), \quad \lambda\to\infty, & (5.12)\\ \dfrac{1}{\pi}\lambda-\dfrac{1}{\pi}[p(0)\cos 2\alpha+q(0)\sin 2\alpha]\ln|\lambda|+p(0)\sin 2\alpha- \\ \qquad -q(0)\cos 2\alpha+o(1), \quad \lambda\to-\infty. & (5.13)\end{cases}$$

Отсюда легко видеть, что при $n\to\pm\infty$

$$\frac{1}{a_n(\alpha)}\leqslant\rho_\alpha(\lambda_n(\alpha)+\varepsilon)-\rho_\alpha(\lambda_n(\alpha)-\varepsilon)=\frac{2\varepsilon}{\pi}-$$

$$-\frac{1}{\pi}[p(0)\cos 2\alpha+q(0)\sin 2\alpha]\ln\frac{\lambda_n(\alpha)+\varepsilon}{\lambda_n(\alpha)-\varepsilon}+o(1)=o(1)$$

и, тем самым, лемма 5.4 доказана.

Перейдем к доказательству леммы 5.2. Используя формулу (5.8), получаем

$$A_\alpha^+(\lambda)=\sum_{0<\lambda_k(\alpha)<\lambda}[\lambda_k(\alpha)-\lambda_k(\beta)]=\int_\alpha^\beta\sum_{0<\lambda_k(\alpha)<\lambda}\frac{1}{a_k(\gamma)}d\gamma=$$

$$=\int_\alpha^\beta\sum_{0<\lambda_k(\gamma)<\lambda}\frac{1}{a_k(\gamma)}d\gamma+o(1)=\int_\alpha^\beta\rho_\gamma(\lambda)\,d\gamma+o(1), \tag{5.14}$$

при $\lambda\to\infty$. Здесь мы использовали тот факт, что

$$\sum_{0<\lambda_k(\alpha)<\lambda}\frac{1}{a_k(\gamma)}-\sum_{0<\lambda_k(\gamma)<\lambda}\frac{1}{a_k(\gamma)}=\begin{cases}0\\ \text{или}\\ \dfrac{1}{a_{n_0}(\gamma)}, & n_0\to\infty \text{ при } \lambda\to\infty,\end{cases}$$

ибо число собственных значений $\lambda_n(\alpha)$ и $\lambda_n(\gamma)$ в промежутке $(0, \lambda]$ может отличаться не более чем на одно, вследствие их перемежаемости. Воспользовавшись теперь асимптотикой (5.12) спектральной функции, из (5.14) получаем асимптотическую формулу (5.6) для $A_\alpha^+(\lambda)$. Совершенно аналогично, из (5.13) и аналога (5.14) для $A_\alpha^-(\lambda)$, получаем асимптотику (5.7) функции $A_\alpha^-(\lambda)$.

Исходя из полученных асимптотик для $A_\alpha^+(\lambda)$ и $A_\alpha^-(\lambda)$, вернемся к оценке величины $R_{n,p}$. Легко видеть, что формула (5.5) при больших $n$ принимает вид

$$R_{n,p}=o(1)-\frac{\beta-\alpha}{\pi}\int_{\lambda_{-(n+p)}(\alpha)}^{\lambda_{-n}(\alpha)}\frac{1}{\lambda}d\lambda-\frac{\beta-\alpha}{\pi}\int_{\lambda_n(\alpha)}^{\lambda_{n+p}(\alpha)}\frac{1}{\lambda}d\lambda=$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{\pi}\cdot\ln\frac{\lambda_{-n}(\alpha)\cdot\lambda_{n+p}(\alpha)}{\lambda_n(\alpha)\cdot\lambda_{-(n+p)}(\alpha)}+o(1),\quad n\to\infty. \tag{5.15}$$

Отсюда видно, что условие (1.11) обеспечивает сходимость ряда (5.3).

Перейдем к вопросу о сходимости ряда (5.4). Поскольку $0<\lambda_k(\alpha)-\lambda_k(\beta)\to 0$, то $[\lambda_k(\alpha)-\lambda_k(\beta)]^2<\lambda_k(\alpha)-\lambda_k(\beta)$ при достаточно больших $k$. Поэтому

$$0<R_{n,p}=\sum_{-(n+p)}^{-n}\frac{[\lambda_k(\beta)-\lambda_k(\alpha)]^2}{\lambda_k^2(\alpha)}+\sum_n^{n+p}\frac{[\lambda_k(\beta)-\lambda_k(\alpha)]^2}{\lambda_k^2(\alpha)}<$$

$$<\sum_{-(n+p)}^{-n}\frac{\lambda_k(\alpha)-\lambda_k(\beta)}{\lambda_k^2(\alpha)}+\sum_n^{n+p}\frac{\lambda_k(\alpha)-\lambda_k(\beta)}{\lambda_k^2(\alpha)}=$$

$$=\int_{\lambda_{-(n+p)}(\alpha)}^{\lambda_{-n}(\alpha)}\frac{dA_\alpha^-(\lambda)}{\lambda^2}+\int_{\lambda_n(\alpha)}^{\lambda_{n+p}(\alpha)}\frac{dA_\alpha^+(\lambda)}{\lambda^2}.$$

Из асимптотических формул (5.6) и (5.7) легко видеть, что в этом случае каждый из последних интегралов есть $o(1)$ при $n \to \infty$. Таким образом, при условиях (1.10) и (1.11) бесконечное произведение (5.1) сходится.

Равномерная сходимость бесконечного произведения (5.2)

$$\prod_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right| = e^{\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \ln \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right|} = e^{\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \ln \frac{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2}}$$

эквивалентна равномерной сходимости ряда $\sum_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2}$, для которой, в свою очередь, достаточна равномерная сходимость рядов

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left( \frac{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2} - 1 \right) \text{ и } \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left( \frac{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2} - 1 \right)^2. \tag{5.16}$$

Для первого из этих рядов составим «остаток»

$$R_{n,p}(\mu) = \sum_{-(n+p)}^{-n} \frac{\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta)}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2} + \sum_{n}^{n+p} \frac{\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta)}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2}.$$

Согласно лемме 5.4, $\lambda_k(\alpha) = \lambda_k(\beta) + o(1)$. Поэтому, записав $\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta) = [\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)] \cdot [2\lambda_k(\beta) + o(1)]$, перепишем выражение для $R_{n,p}(\mu)$ в виде

$$R_{n,p}(\mu) = \int_{\lambda_{-(n+p)}(\beta)}^{\lambda_{-n}(\beta)} \frac{[2\lambda + o(1)]\, dA_\beta^-(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2} \int_{\lambda_n(\beta)}^{\lambda_{n+p}(\beta)} \frac{[2\lambda + o(1)]\, dA_\beta^+(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2},$$

где $A_\beta^\pm(\lambda)$ отличается от $A_\alpha^\pm(\lambda)$ только тем, что суммирование производится по собственным значениям $\lambda_k(\beta)$. Из доказательства леммы 5.2 видно, что для $A_\beta^\pm(\lambda)$ имеют место те же асимптотические формулы (5.6) и (5.7), что и для $A_\alpha^\pm(\lambda)$. Аналогично тому, как получалось равенство (5.15), в этом случае имеем

$$R_{n,p}(\mu) = \frac{\beta - \alpha}{\pi} \ln \frac{(\lambda_{-n}^2(\beta) + \mu^2) \cdot (\lambda_{n+p}^2(\beta) + \mu^2)}{(\lambda_{-(n+p)}^2(\beta) + \mu^2) \cdot (\lambda_n^2(\beta) + \mu^2)} + o(1),$$

откуда при условии (1.11), следует, что $R_{n,p}(\mu) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $\mu$, т. е. равномерная сходимость первого из рядов (5.16). Для второго ряда, составленного из квадратов, используя соотношения $[\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)]^2 < \lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)$ и $\lambda_k(\alpha) + \lambda_k(\beta) = 2\lambda_k(\beta) + o(1)$, верные при больших $k$, и следующее из этих соотношений неравенство

$$\frac{[\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta)]^2}{[\lambda_k^2(\beta) + \mu^2]^2} = \frac{[\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)]^2 \cdot [2\lambda_k(\beta) + o(1)]^2}{[\lambda_k^2(\beta) + \mu^2]^2} \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2}, \quad C > 0,$$

получаем

$$0 < R_{n,p}(\mu) = \sum_{-(n+p)}^{-n} \frac{[\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta)]^2}{[\lambda_k^2(\beta) + \mu^2]^2} + \sum_{n}^{n+p} \frac{[\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta)]^2}{[\lambda_k^2(\beta) + \mu^2]^2} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{-(n+p)}^{-n} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2} + C \sum_{n}^{n+p} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2} =$$

$$= C \int\limits_{\lambda_{-(n+p)}(\beta)}^{\lambda_{-n}(\beta)} \frac{dA_\beta^-(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2} + C \int\limits_{\lambda_n(\beta)}^{\lambda_{n+p}(\beta)} \frac{dA_\beta^+(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Аналогично предыдущим оценкам получаем, что этот остаток $R_{n,p}(\mu) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $\mu \geqslant 1$.

Таким образом, доказана равномерная сходимость бесконечного произведения (5.2), т. е. завершено доказательство леммы 5.1.

Из леммы 5.1 следует, что соотношение (4.4) можно записать в виде

$$c \lim_{\mu \to \infty} \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right| = c \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \lim_{\mu \to \infty} \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right| =$$

$$= c \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} = 1. \tag{5.17}$$

Перейдем к доказательству теоремы 1'. Обращаясь к равенству (1.7) и заметив, что бесконечное произведение

$$\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)}$$

сходится при любом фиксированном $n$ (это доказывается так же, как сходимость бесконечного произведения (5.1)), перепишем равенство (1.7) в виде

$$a_n(\alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)} \; c \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \prod_{\substack{-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)},$$

откуда, учитывая (5.17), получаем утверждение теоремы 1'.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть $q(r) \equiv 0$. Тогда легко видеть, что $\lambda_n(\alpha) = -\lambda_{-n}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. В самом деле, пусть $u_k(r)$ есть собственная функция задачи (1.2), соответствующая собственному значению $\lambda_k(\alpha)$, т. е. $u_k(r)$ удовлетворяет краевому условию (1.2) и

$$lu_k = \left\{ \alpha_2 \frac{1}{i} \frac{d}{dr} + \alpha_2 p(r) \right\} u_k = \lambda_k(\alpha) u_k,$$

где $u_k = (u_{k1}, u_{k2})$. Взяв $v_{-k} = \alpha_3 u_k = (u_{k2}, u_{k1})$ и заметив, что матрицы $\alpha_k$ антикоммутативны, т. е. $\alpha_k \cdot \alpha_j = -\alpha_j \alpha_k$ при $k \neq j$, получим

$$lv_{-k} = \left\{ \sigma_1 \frac{1}{i} \frac{d}{dr} + \sigma_2 p(r) \right\} \sigma_3 u_k = -\sigma_3 l u_k = -\sigma_3 \lambda_k(\alpha) u_k =$$

$$= -\lambda_k(\alpha) v_{-k},$$

причем, поскольку $u_k$ удовлетворяет условию (1.2), то $v_{-k}$ удовлетворяет краевому условию $v_{-k1}(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + v_{-k2}(0)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Таким образом, $v_{-k}(r)$ есть собственная функция задачи

$$ly = \lambda y, \quad y_1(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + y_2(0)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 0, \tag{5.18}$$

соответствующая собственному значению $-\lambda_k(\alpha)$, т. е. $\lambda_{-k}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\lambda_k(\alpha)$. Иными словами, спектр задачи (5.18) есть зеркальное отображение спектра задачи (1.2) относительно мнимой оси и, таким образом, знание одного спектра равнозначно знанию двух спектров.

Согласно лемме 5.4 $\lambda_{-k}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \lambda_{-k}(\alpha) + o(1)$, т. е. $\lambda_{-k}(\alpha) = -\lambda_k(\alpha) + o(1)$. Таким образом, при $q(r) \equiv 0$, заведомо выполняется условие (1.11) и поэтому нормировочные постоянные определяются формулой (1.12) (условие (1.10) предполагаем выполненным). Взяв теперь в качестве $\alpha$ и $\beta$ в (1.12) величины $\frac{\pi}{2}-\alpha$ и $\alpha$, для $\alpha_n(\alpha)$ получаем формулу

$$\alpha_n(\alpha) = \frac{|\cos 2\alpha|}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-n}(\alpha)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-k}(\alpha)}.$$

Здесь мы учли то обстоятельство, что при $\frac{\pi}{2}-\alpha > \alpha$ надо брать $\beta = \frac{\pi}{2}-\alpha$ и тогда $\sin(\beta-\alpha) = \cos 2\alpha > 0$, а при $\alpha > \frac{\pi}{2}-\alpha$ надо брать наоборот (так как в качестве $\beta$ в формуле (1.12) всегда берется больший из двух), и тогда $\sin(\beta-\alpha) = -\cos 2\alpha > 0$. Заметим также, что при восстановлении по одному спектру $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\alpha$ должно быть отличным от $\frac{\pi}{4}$, так как в этом случае $\beta = \frac{\pi}{2}-\alpha = \alpha$ и нарушается условие $\beta \neq \alpha$, которым мы существенно пользовались. Теорема 2 доказана.

## § 6. Доказательство теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 (т. е. равенства (1.14)) достаточно установить равенство

$$\sin\alpha - J_\alpha(\lambda)\cos\alpha = (\sin\alpha + J_{\pi/2}(\lambda)\cos\alpha)^{-1}, \tag{6.1}$$

ибо, записав (6.1) с $\beta$ вместо $\alpha$ и исключив из полученной системы $J_{\pi/2}(\lambda)$, мы придем к равенству (1.14).

Для доказательства (6.1) запишем представления (2.16) и (2.17) при $\lambda = i\mu$, отделив действительные и мнимые части

$$\operatorname{Re} R_\alpha(i\mu) = b + \sum_{-\infty}^{\infty} A_k \left( \frac{\mu_k}{\mu_k^2 + \mu^2} - \frac{1}{\mu_k} \right), \tag{6.2}$$

$$\operatorname{Im} R_\alpha(i\mu) = a\mu + \mu \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k^2 + \mu^2}, \tag{6.3}$$

$$\operatorname{Re}\left\{ -\frac{1}{R_\alpha(i\mu)} \right\} = b' + \sum_{-\infty}^{\infty} A_k' \left\{ \frac{\lambda_k(\alpha)}{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2} - \frac{1}{\lambda_k(\alpha)} \right\}, \tag{6.4}$$

$$\operatorname{Im}\left\{ -\frac{1}{R_\alpha(i\mu)} \right\} = a'\mu + \mu \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A_k'}{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}. \tag{6.5}$$

Докажем, что при условиях теоремы 3 ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k}$ сходится. Учитывая значения $A_k = \frac{\cos\alpha}{b_k}$ (см. (2.19)) и определение (1.5), имеем

$$\frac{1}{\cos\alpha} \cdot R_{n,p} = \sum_{-(n+p)}^{-n} \frac{1}{b_k \mu_k} + \sum_{n}^{n+p} \frac{1}{b_k \mu_k} = \int\limits_{\mu_{-(n+p)}}^{\mu_{-n}} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda} + \int\limits_{\mu_n}^{\mu_{n+p}} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda}.$$

Учитывая асимптотику (5.10), аналогично тому, как это делалось в § 5, получаем

$$\frac{1}{\cos\alpha} R_{n,p} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\mu_{-n} \cdot \mu_{n+p}}{\mu_{-(n+p)} \mu_n} + o(1), \quad n \to \infty.$$

Условие (1.11) теперь обеспечивает равенство $R_{n,p} = o(1)$ при $n \to \infty$ и тем самым сходимость ряда $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k}$.

Для доказательства равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A_k \mu_k}{\mu_k^2 + \mu^2}$, аналогичным образом, получаем равенство

$$\frac{1}{\cos\alpha} R_{n,p}(\mu) = \sum_{-(n+p)}^{-n} \frac{\mu_k}{b_k(\mu_k^2 + \mu^2)} + \sum_{n}^{n+p} \frac{\mu_k}{b_k(\mu_k^2 + \mu^2)} = \int\limits_{\mu_{-(n+p)}}^{\mu_{-n}} \frac{\lambda\, d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2} +$$

$$+ \int\limits_{\mu_n}^{\mu_{n+p}} \frac{\lambda\, d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(\mu_{-n}^2 + \mu^2) \cdot (\mu_{n+p}^2 + \mu^2)}{(\mu_{-(n+p)}^2 + \mu^2) \cdot (\mu_n^2 + \mu^2)} + o(1) = o(1),$$

равномерное по $\mu$ при условии (1.11).

Совершенно аналогично доказываются сходимость ряда $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A_k'}{\lambda_k(\alpha)}$ и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} A_k' \frac{\lambda_k(\alpha)}{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}$. При этом используется асимптотика (5.12), (5.13) спектральной функции $\rho_\alpha(\lambda)$.

Согласно лемме 3.2 в равенствах (6.2)—(6.5) можно перейти к пределу при $\mu \to \infty$, причем, согласно вышеизложенному, в правых частях—

под знаком суммы. Совершая эти предельные переходы, из (6.2) и (6.4) получаем

$$b=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{A_k}{\mu_k}+\sin\alpha,\quad b'=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{A'_k}{\lambda_k(\alpha)}-\sin\alpha,$$

а из (6.3) и (6.5), так как $a\geqslant 0$, $A_k>0$, $a'>0$, $A'_k>0$,

$$a=0,\ a'=0,\ \lim_{\mu\to\infty}\mu\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{A_k}{\mu_k^2+\mu^2}=\lim_{\mu\to\infty}\mu\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{A'_k}{\lambda_k^2(\alpha)+\mu^2}=\cos\alpha.$$

Подставляя выражения для постоянных $a$, $b$, $A_k$; $a'$, $b'$, $A'_k$ в представления (2.16) и (2.17), получаем

$$R_\alpha(\lambda)=\cos\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\lambda}+\sin\alpha,\quad -\frac{1}{R_\alpha(\lambda)}=\cos\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho_\alpha(\mu)}{\mu-\lambda}-\sin\alpha.$$

Отсюда следует равенство (6.1). Теорема 3 доказана.

Замечание. Всюду на протяжении этой статьи мы предполагали, что $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Очевидно, что в случае $\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta\leqslant\frac{3}{2}\pi$, а тем самым и при любых действительных $\alpha$, все теоремы доказываются совершенно аналогично. В частности, в определении (2.2) функцию $R_\alpha(\lambda)$ надо взять со знаком минус, чтобы она переводила верхнюю полуплоскость в верхнюю.

Ереванский государственный
университет

Поступила 10. III. 1982
и 14. III. 1985

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ Հակադարձ խնդիր դիսկրետ սպեկտր ունեցող Դիրակի կանոնիկ համակարգի համար (*ամփոփում*)

*Դիրակի կանոնիկ, ինքնահամալուծ օպերատորի համար, որը ծնված է* $L^2(0,\infty;C^2)$ *տարածությունում*

$$ly=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\frac{d}{dr}+\begin{pmatrix}p(r)&q(r)\\q(r)&-p(r)\end{pmatrix}\right\}y=\left\{B\frac{d}{dr}+Q(r)\right\}y=\lambda y,$$

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\tag{1}$$

*Հավասարումների համակարգով ու*

$$y_1(0,\lambda)\cos\alpha+y_2(0,\lambda)\sin\alpha=0\tag{2}$$

*եզրային պայմանով և որն ունի* $\{\lambda_n(\alpha)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *մաքուր դիսկրետ սպեկտր, ապացուցված է, որ p և q ֆունկցիաների վրա դրված որոշ պայմանների դեպքում Q(r) պոտենցիալը կարելի է վերականգնել՝*
*ցիալը կարելի է վերականգնել՝*

1) $\rho_\alpha(\lambda)$ *սպեկտրալ ֆունկցիայի միջոցով կամայական իրական* $\alpha$*-ի դեպքում,*

2) $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$ *և* $\{\lambda_n(\beta)\}_{-\infty}^{\infty}$ $(\alpha\neq\beta)$ *երկու սպեկտրների միջոցով,*

3) *միայն* $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$ *սպեկտրով* $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{4}\right)$, *եթե* $q(r)\equiv 0$,

*4)* $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$ *սպեկտրով և* $u_n(r)$ *նորմավորված սեփական վեկտոր-ֆունկցիաների* $\{|u_n(0)|^2\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *արժեքների միջոցով։*


T. N. HARUTIUNIAN. *The inverse problem for canonic Dirac system with a discrete spectrum* (summary)

We consider canonic, selfadjoint Dirac operator in $L^2(0, \infty; C^2)$ given by the system

$$ly = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dr} + \begin{pmatrix} p(r) & q(r) \\ q(r) & -p(r) \end{pmatrix} \right\} y = \left\{ B \frac{d}{dr} + Q(r) \right\} y = \lambda y,$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

and the boundary condition

$$y_1(0, \lambda) \cos \alpha + y_2(0, \lambda) \sin \alpha = 0, \tag{2}$$

which has a purely discrete spectrum $\{\lambda_n(\alpha)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Under certain conditions on function $p$ and $q$ it is proved, that the potential $Q(r)$ can be reconstructed from either of the following:

1. the spectral function $\rho_\alpha(\lambda)$ for any real $\alpha$;
2. two spectral $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$ and $\{\lambda_n(\beta)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\alpha \neq \beta$;
3. only one spectrum $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$ under the condition $q(r) \equiv 0$;
4. one spectrum $\{\lambda_n(\alpha)\}_{-\infty}^{\infty}$ and the values $\{|u_n(0)|^2\}_{-\infty}^{\infty}$ of the normalized eigenfunctions $u_n$.


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян*. Введение в спектральную теорию, «Наука», М., 1970.
2. *Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов*. Обратная задача для системы Дирака, ДАН СССР, 167, № 5, 1966, 967—970.
3. *Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов*. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам, УМН, XIX, вып. 2, 1964, 3—63.
4. *М. Г. Гасымов, Т. Т. Джабиев*. Решение обратной задачи по двум спектрам для уравнения Дирака на конечном отрезке, ДАН Азерб.ССР, 22, № 7, 1966, 3—6.
5. *В. А. Яврян*. Об асимптотике спектральной матрицы-функции канонической системы дифференциальных уравнений, ДАН Арм.ССР, 56, 3, 1973, 129—134.
6. *C. Quigg, J. L. Rosner*. Semiclassical sum rules, Fermilab PUB—77 105—THY, November, 1977.
7. *C. Quigg, J. L. Rosner, H. B. Thacker*. Inverse scattering problem for quarkonium sistems, I and II, Phys. Rev., D 18, № 1, 1978, 274—295.
8. *H. Grosse, A. Martin*. Theory of the inverse problem for confining potentials, Nuclear Phys., B 148, 1979, 413—432.
9. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, «Гостехиздат», 1956.
10. *Г. М. Фихтенгольц*. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2, М., 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XX, № 4, 198- Математика

УДК 517.512

И. А. ДЖВАРШЕЙШВИЛИ

# ОБ ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

## § 1. Некоторые предварительные сведения

Обозначим через $I$ множество непрерывных, действительных функций $\omega$, определенных на $]0, +\infty[$ таких, что

(а) $\omega$ — монотонно убывающая функция,
(б) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \omega(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to 0} \omega(\lambda) = +\infty$,
(в) существует хотя бы одно число $\alpha \in ]0,1[$ такое, что

$$\sup_{\lambda>0} \frac{\omega(\alpha\lambda)}{\omega(\lambda)} \leqslant C_\alpha < +\infty, \tag{1.1}$$

где $C_\alpha$ — константа, зависящая только от $\alpha$ и функции $\omega$. Нетрудно показать, что если условие (в) имеет место, то неравенство (1.1) выполняется для любого $\alpha \in ]0, +\infty[$. Справедлива следующая [1]

Теорема 1. *Для любой действительной, непрерывной и удовлетворяющей условиям* (а) *и* (б) *функции* $v(\lambda)$, $\lambda \in ]0, +\infty[$, *существует функция* $\omega \in I$ *такая, что*

$$v(\lambda) \leqslant \omega(\lambda), \ \lambda \in ]0, +\infty[.$$

## § 2. Пространство $D_\omega(\Omega, F, \mu)$ и его основные свойства

Пусть $(\Omega, F, \mu)$ — вероятностное пространство с мерой $\mu$, а $S(\Omega, F)$ — пространство $F$-измеримых $\mu$ почти всюду ($\mu$-п.в.) конечных на $\Omega$ действительных функций. Для каждой функции $f \in S(\Omega, F)$ определим множество

$$E(f, \lambda) = \{x \in \Omega;\ |f(x)| > \lambda\},$$

где $\lambda > 0$. Для фиксированной функции $\omega \in I$ и $F$-измеримой функции $f$ введем функцию

$$J_\omega(f, \nu) = \sup_{\lambda>0} \frac{\mu(E(f, \lambda\nu))}{\omega(\lambda)} = \sup_{\lambda>0} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)}, \tag{2.1}$$

где $\lambda, \nu > 0$. Приведем некоторые свойства функции $J_\omega(f, \nu)$ (см. [2]).

Свойство 1. $J_\omega(f, \nu)$ — неотрицательная, монотонно убывающая на $]0, +\infty[$ и непрерывная справа функция.

Свойство 2. Если $J_\infty(f, \nu) \leqslant M < +\infty$, $\nu > 0$, то $f(x) = 0$, $\mu$-п.в. на $\Omega$.

Доказательство свойства 2. Действительно, в силу определения функции $J_\infty(f, \nu)$ имеем

$$\mu(E(f, \lambda\nu)) \leqslant M\omega(\lambda) \tag{2.2}$$

для любых $\lambda$, $\nu > 0$. Из (2.2) и в силу свойств функции $\omega(\lambda)$ имеем

$$\mu(E(f, 0)) = \lim_{\lambda, \nu \to 0} \mu(E(f, \lambda\nu)) \leqslant M \lim_{\lambda \to 0} \omega(\lambda) = 0.$$

Таким образом, $f(x) = 0$, $\mu$-п.в. на $\Omega$ и свойство 2 доказано.

Заметим теперь, что в силу монотонности функция $J_\infty(f, \nu)$ может иметь не более чем счетное число точек разрыва, и то значение $\nu_f$ аргумента $\nu$, для которого выполняется условие

$$J_\infty(f, \nu_f^-) \geqslant \nu_f \geqslant J_\infty(f, \nu_f^+)$$

будет единственным, здесь $J_\infty(f, \nu_f^-)$ и $J_\infty(f, \nu_f^+)$ левосторонний и правосторонний пределы функции $J_\infty(f, \cdot)$ в точке $\nu = \nu_f$. Введем обозначение $\|f\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \nu_f$. Справедливы следующие предложения.

Предложение 1. *Имеет место равенство*

$$\|f\|_\infty = \inf\{\nu > 0;\ J_\infty(f, \nu) \leqslant \nu\}.$$

Предложение 2. *Пусть $f$ и $g$ — $\mathbf{F}$-измеримые функции, $a$ и $b$ — действительные числа такие, что $|a| \geqslant 1$, $|b| \leqslant 1$, тогда*

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

$$|b|\, \|f\|_\infty \leqslant \|bf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \leqslant \|af\|_\infty \leqslant |a|\, \|f\|_\infty.$$

Предложение 3. *Для $\mathbf{F}$-измеримой функции $f$, $\|f\|_\infty = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ $\mu$-п.в. на $\Omega$.*

Определение 1. Скажем, что $\mathbf{F}$-измеримая функция $f$ принадлежит пространству $D_\infty(\Omega, \mathbf{F}, \mu) = D_\infty$, если

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} = 0.$$

Следствие 1. Если $f \in D_\infty$, то $\|f\|_\infty < +\infty$.

Доказательство. Действительно, в силу определения пространства $D_\infty$, для $\varepsilon > 0$ существут $\lambda_\varepsilon > 0$ такое, что при $\lambda > \lambda_\varepsilon$ имеем

$$\frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} < \varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$J_\infty(f, 1) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} \leqslant \sup_{0 < \lambda < \lambda_\varepsilon} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} + \varepsilon \leqslant \frac{1}{\omega(\lambda_\varepsilon)} + \varepsilon.$$

Далее, так как $J_\infty(f, \nu)$ — монотонно убывающая функция и в точке $\nu_0 = 1$ функция $J_\infty(f, \nu_0)$ ограничена, то ее график, начиная с некоторого $\nu$, будет лежать ниже биссектрисы первого квадранта, то есть существует значение $\nu_f = \|f\|_\infty$ такое, что

$$J_\infty(f, \nu_f^+) \leqslant \nu_f \leqslant J_\infty(f, \nu_f^-),$$

и следствие доказано.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$S(\Omega, \mathrm{F}) = \bigcup_{\omega \in I} D_\omega(\Omega, \mathrm{F}, \mu). \tag{2.3}$$

Доказательство. Покажем сначала, что для любой функции $\omega \in I$ $D_\omega(\Omega, \mathrm{F}, \mu) \subset S(\Omega, \mathrm{F})$. Действительно, пусть $f \in D_\omega$ и допустим, что существует множество $E \in \mathrm{F}$, $\mu(E) > 0$ и $f(x) = \infty$ при $x \in E$, тогда

$$J_\infty(f, \nu) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\mu(E(f, \lambda\nu))}{\omega(\lambda)} \geqslant \sup_{\lambda > 0} \frac{\mu(E)}{\omega(\lambda)} = +\infty$$

для любого $\nu > 0$. Отсюда следует, что $\|f\|_\omega = +\infty$, а это, в силу следствия 1, невозможно, то есть наше допущение не верно, а потому для любого $\omega \in I$

$$D_\omega(\Omega, \mathrm{F}, \mu) \subseteq S(\Omega, \mathrm{F})$$

и

$$\bigcup_{\omega \in I} D_\omega \subseteq S(\Omega, \mathrm{F}). \tag{2.4}$$

Докажем теперь обратное включение. Пусть $f \in S(\Omega, \mathrm{F})$. В силу теоремы 1 существует $\omega(\lambda) \in I$ такое, что $\omega(\lambda) \geqslant \mu(E(f, \lambda))$. Тогда

$$\frac{\mu(E(f, \lambda))}{\sqrt{\omega(\lambda)}} = \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} \sqrt{\omega(\lambda)} \leqslant \sqrt{\omega(\lambda)}$$

и в силу свойств функции $\omega(\lambda)$ имеем $\sqrt{\omega(\lambda)} \in I$ и

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\sqrt{\omega(\lambda)}} = 0.$$

Таким образом, $f \in D_{\sqrt{\omega}}(\Omega, \mathrm{F}, \mu)$, то есть

$$S(\Omega, \mathrm{F}) \subseteq \bigcup_{\omega \in I} D_\omega(\Omega, \mathrm{F}, \mu). \tag{2.5}$$

Суммируя (2.4) и (2.5), получаем утверждение теоремы.

Предложение 4. *Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ принадлежит пространству $D_\omega$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n\|_\omega = 0$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ сходится по мере к нулю, то есть для любого $a > 0$ имеем*

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(E(f_n, a)) = 0.$$

Доказательство непосредственно следует из определения класса функций $I$, $\omega \in I$, и неравенства

$$\mu(E(f_n, a)) \leqslant \|f_n\|_\omega\, \omega\left(\frac{a}{\|f_n\|_\omega}\right).$$

Заметим, что для постоянной $C$ имеет место следующее равенство:

$$\|C\|_\infty = \frac{1}{\omega\left(\frac{C}{\|C\|_\infty}\right)},$$

а также предельные равенства

$$\lim_{C\to 0}\|C\|_\infty = 0,\ \lim_{C\to\infty}\|C\|_\infty = +\infty,\ \lim_{\|C\|_\infty\to 0} C=0,\ \lim_{\|C\|_\infty\to+\infty} C=\infty.$$

Теорема 3. *Пусть последовательность измеримых функций* $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *принадлежит пространству* $D_\infty$ *и* $\lim\limits_{m,n\to+\infty}\|f_n-f_m\|_\infty=0$. *Тогда существует измеримая функция* $f$ *такая, что* $f\in D_\infty$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$.

Доказательство. Как видно из предложения 4 последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ будет сходиться по мере к некоторой измеримой функции $f$, тогда в силу определения функции $f_\infty$ и предложения 1 имеем

$$\mu\left(E\left(f-f_m,\lambda\right)\right)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\mu\left(E\left(f_n-f_m,\lambda\right)\right)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f_m\|_\infty\,\omega\left(\frac{\lambda}{\|f_n-f_m\|_\infty}\right). \tag{2.6}$$

Далее в силу условия теоремы для $\varepsilon>0$ существует номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что при $n,\ m>N(\varepsilon)$ имеем $\|f_n-f_m\|_\infty<\varepsilon$. Отсюда и в силу (2.6) при $n,\ m>N(\varepsilon)$ получим

$$\frac{\mu\left(E\left(f-f_m,\lambda\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}\leqslant\varepsilon.$$

Из предложения 1 имеем $\|f-f_m\|_\infty<\varepsilon$, при $m>N(\varepsilon)$, то есть

$$\lim_{m\to+\infty}\|f-f_m\|_\infty=0. \tag{2.7}$$

Покажем теперь, что $f\in D_\infty$. Действительно

$$\frac{\mu\left(E\left(f,\lambda\right)\right)}{\omega(\lambda)}\leqslant\frac{\mu\left(E\left(f-f_m,\frac{\lambda}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\omega(\lambda)}+$$
$$+\frac{\mu\left(E\left(f_m,\frac{\lambda}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\omega(\lambda)}\leqslant C_{\frac{1}{2}}\left[\frac{\mu\left(E\left(f-f_m,\frac{\lambda}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu\left(E\left(f_m,\frac{\lambda}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\right]. \tag{2.8}$$

В силу (2.7) для $0<\varepsilon<1$ существует число $M>0$ такое, что при $m\geqslant M$ получим $\|f-f_m\|_\infty<\varepsilon$, тогда из предложения 1 имеем

$$\frac{\mu\left(E\left(f-f_m, \frac{\lambda}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \leqslant \frac{\mu\left(E\left(f-f_m, \frac{\lambda}{2}\|f-f_m\|_\omega\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \leqslant \|f-f_m\|_\omega < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) получаем

$$\frac{\mu\left(E\left(f, \lambda\right)\right)}{\omega(\lambda)} < C_{\frac{1}{2}}\left[\varepsilon + \frac{\mu\left(E\left(f_m, \frac{\lambda}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\right].$$

Переходя в обеих частях неравенства к пределу при $\lambda \to +\infty$, получим

$$\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} \leqslant C_{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, имеем

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} = 0,$$

то есть $f \in D_\omega$ и теорема доказана.

Функция $\rho_\omega(f, g)$, сопоставляющая измеримым функциям $f, g \in D_\omega$ число $\|f-g\|_\omega$, то есть $\rho_\omega(f, g) = \|f-g\|_\omega$, является метрикой в пространстве $D_\omega$. Таким образом, из предыдущих результатов видно, что $D_\omega$ — метрическое и полное пространство относительно введенной метрики.

Приведем теперь пример последовательности измеримых функций $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ из пространства $D_\omega$ таких, что $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится $\mu$-п.в. к нулю, однако $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\omega \neq 0$. Для этого выберем последовательность измеримых множеств $E_n \in \mathrm{F}$ так, чтобы $E_{n+1} \subset E_n$, $n = 1, 2, \cdots$, и $0 < \mu(E_n) = \omega(n)$, $n = 1, 2 \cdots$, это сделать возможно, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega(n) = 0$. Определим теперь последовательность измеримых функций следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, \text{ когда } x \in E_n, n = 1, 2, \cdots \\ 0 \text{— в остальных точках.} \end{cases}$$

Тогда последовательность $\{f_n\}$ $\mu$-п. в. сходится к нулю на $\Omega$. Далее

$$J_\omega(f_n, \nu) = \frac{\mu(E_n)}{\omega\left(\frac{n}{\nu}\right)} = \frac{\omega(n)}{\omega\left(\frac{n}{\nu}\right)},$$

$$J_\omega(f_n, 1) = 1, \ n = 1, 2, \cdots.$$

Таким образом, мы видим, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ график функции $J_\omega(f_n, \nu)$ пересекает биссектрису первого квадранта в точке $\nu = 1$, а так как $J_\omega(f_n, \nu)$ — монотонно убывающая функция, то в силу предложения 1 имеем

$$\|f_n\|_\omega = 1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Следовательно, из сходимости $\mu$-почти всюду к нулю последовательности $\{f_n\} \subset D_\omega$ не вытекает сходимость в метрике пространства $D_\omega$ к 0.

## § 3. Сепарабельность пространства $D_\omega$

Пусть $\Omega = [0,1]$, $F$ — $\sigma$-алгебра и $\mu$ — мера Лебега. Следуя [3], приведем

· Определение. Пусть $P = \{\tau(t)\}$ — некоторый класс конечных и измеримых функций на $[0,1]$. Скажем, что класс $P$ обладает свойством $W$ (свойством Вейерштрасса) относительно множества $A$, где $A \in D_\omega$, если для любого $f \in A$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\tau \in P$ такая, что $\|f - \tau\|_\omega < \varepsilon$.

Лемма 1. *Пусть $v(\lambda)$ — непрерывная, монотонная функция на $]0, +\infty[$ такая, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} v(\lambda) = +\infty$ и $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} v(\lambda) = 0$. Пусть также даны два действительных числа $A$ и $B$. Тогда на отрезке $[0,1]$ существует непрерывная функция $f(x)$ такая, что $f(0) = A$, $f(1) = B$ и*

$$\mu(\{x;\ |f(x)| > \lambda\}) \leqslant v(\lambda). \tag{3.1}$$

Доказательство. Для простоты рассуждений будем считать, что $A \geqslant B > 0$. Если $v(A) \geqslant 1$, то определим функцию $f(x)$ следующим образом: $f(x) = (B - A)x + A$, $x \in [0,1]$. Очевидно, что $|f(x)| \leqslant A$, $x \in [0,1]$, и если $0 < \lambda < A$, то имеем

$$\mu(E(f, \lambda)) < v(A) < v(\lambda). \tag{3.2}$$

Пусть теперь $v(A) < 1$. Определим функцию $f$ следующим образом: если $x \in \left[0, \frac{v(A)}{2}\right]$, то $f(x) = -\frac{2A}{v(A)} x + A$, если же $x \in \left[\frac{v(A)}{2}, 1 - \frac{v(A)}{2}\right]$, то $f(x) = 0$, наконец, если $x \in \left[1 - \frac{v(A)}{2}, 1\right]$, то положим $f(x) = \frac{2B}{v(A)} x + \frac{2B}{v(A)}\left[\frac{v(A)}{2} - 1\right]$. Очевидно, что $|f(x)| < A$ когда $x \in [0,1]$ и $\mu(E(f, 0)) = v(A)$. Далее, если $\lambda \geqslant A$, то неравенство (3.1) очевидно. Пусть $0 < \lambda < A$, в силу свойств функции $v$ имеем

$$\mu(E(f, \lambda)) \leqslant v(A) \leqslant v(\lambda).$$

Отсюда и из (3.2) вытекает справедливость леммы.

Пользуясь этой леммой докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть класс $P = \{\tau(x)\}$, состоящий из некоторых измеримых функций на $[0,1]$ таков, что для всякой функции $g \in C[0,1]$ ($C[0,1]$ — множество непрерывных на $[0,1]$ функций) и любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\tau_0 \in P$ со свойством $\sup\limits_{x \in [0,1]} |g(x) - \tau_0(x)| < \varepsilon$. Тогда класс $P$ обладает $W$ свойством относительно $D_\omega$.*

Доказательство. Пусть функция $f$ принадлежит пространству $D_\omega$, $0 < \varepsilon_n < 1$ и $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to +\infty$. По теореме Лузина (см., например, [4]) для $\varepsilon_n$ существует совершенное множество $P_n \subset ]0,1[$ с $\mu(P_n) > 1-\varepsilon_n$ такое, что $f \in C(P_n)$ (т. е. $f$ непрерывна на $P_n$). Пусть

$$\sup_{x\in P_n} |f(x)| = M_n < +\infty. \tag{3.3}$$

Обозначим $\{]a_{ni}, b_{ni}[\}_{i=1}^{+\infty}$ — смежные интервалы к $P_n$ на $[0.1]$ и $\varepsilon(\lambda)$ — непрерывная, монотонно убывающая на $[0, +\infty[$ функция такая, что $\varepsilon(0)=1$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\varepsilon(\lambda)=0$. Тогда функция $\omega(\lambda)\cdot\varepsilon(\lambda)$ будет непрерывной монотонно убывающей и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\omega(\lambda)\cdot\varepsilon(\lambda)=+\infty$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\omega(\lambda)\cdot\varepsilon(\lambda)=0.$* В силу леммы 1 на каждом сегменте $[a_{nk}, b_{nk}]$, $k=\overline{1, +\infty}$, можно построить непрерывную функцию $\psi_n$ такую, что $\psi_n(a_{nk})=f(a_{nk})$, $\psi_n(b_{nk})=f(b_{nk})$ и

$$\mu(\{x\in[a_{nk}, b_{nk}];\ |\psi_n(x)|>\lambda\})\leqslant\frac{\omega(\lambda)\cdot\varepsilon(\lambda)}{2^k}, \tag{3.4}$$

где $k=1, 2,\cdots$. Пусть

$$\Psi_n(x)=\begin{cases} f(x), & x\in P_n\\ \psi_n(x), & x\in\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}]a_{nk}, b_{nk}[,\end{cases}$$

$n=1, 2,\cdots$, тогда $\Psi_n(x)$ будет непрерывной на $[0,1]$ и

$$|\Psi_n(x)|\leqslant M_n,\quad x\in[0,1], \tag{3.5}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Psi_n(x)=f(x)\quad\text{почти всюду на } [0,1]. \tag{3.6}$$

Из (3.5) имеем, что $\Psi_n\in D_\omega$, $n=\overline{1, +\infty}$. Заметим также, что $\{\|\Psi_n\|_\omega\}$ равномерно ограничена. Действительно, из предложения 1 и неравенства (3.4) имеем

$$\mu(E(\Psi_n, \lambda\|f\|_\omega))\leqslant\mu(\{x\in P_n;\ |\Psi_n(x)|>\lambda\|f\|_\omega\})+$$
$$+\mu\left(\left\{x\in\bigcup_{k=1}^{+\infty}]a_{nk}, b_{nk}[;\ |\Psi_n(x)|>\lambda\|f\|_\omega\right\}\right)\leqslant\mu(\{x;\ |f(x)|>\lambda\|f\|_\omega\})+$$
$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(\{x\in]a_{nk}, b_{nk}[;\ |\Psi_n(x)|>\lambda\|f\|_\omega\})\leqslant\|f\|_\omega\,\omega(\lambda)+$$
$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\omega(\lambda\|f\|_\omega)\,\varepsilon(\lambda\|f\|_\omega)=[\varepsilon(\lambda\|f\|_\omega)+\|f\|_\omega]\,\omega(\lambda\|f\|_\omega)\leqslant C\cdot\omega(\lambda)$$

(здесь мы воспользовались условием (в) определения функции $\omega$). Отсюда и из определения функции $J_\omega(f, \nu)$ следует, что

$$J_\omega(\Psi_n, \|f\|_\omega)\leqslant C<+\infty, \tag{3.7}$$

$n=\overline{1, +\infty}$. Из (3.7) и монотонности функции $J_\omega$ выводим, что

$$\|\Psi_n\|_\omega\leqslant\max\{C, \|f\|_\omega\}. \tag{3.8}$$

Предположим теперь, что выполняется неравенство $\|f-\Psi_n\|_\omega>\alpha>0$, $n=\overline{1, +\infty}$. Тогда в силу предложения 1 для каждого $n$ существует $\lambda_n>0$ такая, что

$$\alpha<\frac{\mu(E(f-\Psi_n, \lambda_n\alpha))}{\omega(\lambda)}.$$

Рассмотрим случаи:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. Тогда в силу свойств функции $\omega(\lambda)$ имеем

$$0 < \alpha \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\mu(E(f-\Psi_n, \lambda_n\alpha))}{\omega(\lambda_n)} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\omega(\lambda_n)} = 0,$$

что невозможно.

2. $0 < a < \lambda_n < b < +\infty$. Тогда, в силу свойств функции $\omega$ и (3.б), имеем

$$0 < \alpha \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\mu(E(f-\Psi_n, \lambda_n\alpha))}{\omega(\lambda_n)} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\mu(E(f-\Psi_n, a\alpha))}{\omega(b)} = 0,$$

а это невозможно.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$. Тогда применяя лемму 1 и условие (в) определения функции $\omega$, получим

$$0 < \alpha < \frac{\mu(E(f-\Psi_n, \lambda_n\alpha))}{\omega(\lambda_n)} \leqslant \frac{\mu\left(E\left(f, \frac{\lambda_n\alpha}{2}\right)\right)}{\omega(\lambda_n)} + \frac{\mu\left(E\left(\Psi_n, \frac{\lambda_n\alpha}{2}\right)\right)}{\omega(\lambda_n)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu\left(E\left(f, \frac{\lambda_n\alpha}{2}\right)\right)}{\omega(\lambda_n)} + \frac{\mu\left(\left\{x\in P_n;\ |f(x)| > \frac{\lambda_n\alpha}{2}\right\}\right)}{\omega(\lambda_n)} +$$

$$+ \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in ]a_{nk}, b_{nk}[;\ |\Psi_n(x)| > \frac{\lambda_n\alpha}{2}\right\}\right)}{\omega(\lambda_n)} \leqslant 2\,\frac{\mu\left(E\left(f, \frac{\lambda_n\alpha}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda_n\alpha}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{\omega\left(\frac{\lambda_n\alpha}{2}\right)}{\omega(\lambda_n)} + \frac{\omega\left(\frac{\lambda_n\alpha}{2}\right)\cdot\varepsilon\left(\frac{\lambda_n\alpha}{2}\right)}{\omega(\lambda_n)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} \leqslant C_{\frac{\alpha}{2}}\left[2\,\frac{\mu\left(E\left(f, \frac{\lambda_n\alpha}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda_n\alpha}{2}\right)} + \right.$$

$$\left. +\varepsilon\left(\frac{\lambda_n\alpha}{2}\right)\right] \to 0$$

при $n\to+\infty$ и получим противоречие.

Следовательно, существует подпоследовательность $\Psi_{n_k}$ такая, что

$$\lim_{k\to+\infty} \|f-\Psi_{n_k}\|_\omega = 0.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $\Psi$ такая, что $\Psi \in D_\omega$ и

$$\|f-\Psi\|_\omega < \varepsilon. \tag{3.9}$$

С другой стороны, в силу условия теоремы, для $1/n$ существует $\tau_n \in P$ так, что

$$|\Psi(x)-\tau_n(x)|<\frac{1}{n},\ x\in[0,1].$$

Предположим теперь, что $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\|\Psi-\tau_n\|_\omega>\alpha>0$, тогда существует подпоследовательность $\tau_{n_k}$, которую мы перенумеруем $\tau_n$, такая, что

$$0<\alpha<\sup_{\lambda>0}\frac{\mu(E(\Psi-\tau_n;\lambda\|\Psi-\tau_n\|_\omega))}{\omega(\lambda)}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega\left(\dfrac{1}{n\|\Psi-\tau_n\|_\omega}\right)}, & \text{если } \lambda\|\Psi-\tau_n\|_\omega<\dfrac{1}{n}\\ 0 & \text{— в остальных случаях}\end{cases}$$

или

$$\alpha\leqslant\frac{1}{\omega\left(\dfrac{1}{n\alpha}\right)}\to 0\quad\text{при } n\to+\infty,$$

что невозможно. Поэтому

$$\lim_{n\to+\infty}\|\Psi-\tau_n\|_\omega=0. \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) получим

$$\lim_{n\to+\infty}\|f-\tau_n\|_\omega\leqslant\lim_{n\to+\infty}[\|f-\Psi\|_\omega+\|\Psi-\tau_n\|_\omega]\leqslant\varepsilon+\lim_{n\to+\infty}\|\Psi-\tau_n\|_\omega=\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\|f-\tau_n\|_\omega=0$$

и теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает

Следствие 2. Пусть $P$ является одним из классов:

(а) множество всех алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами,

(б) множество всех тригонометрических полиномов с рациональными коэффициентами,

(в) множество всех полиномов с рациональными коэффициентами по системе Хаара,

(г) множество всех полиномов с рациональными коэффициентами по системе Фабера—Шаудера.

Тогда класс $P$ обладает свойством $W$ относительно $L_\omega$.

## § 4. Об изображении измеримой конечной почти всюду функции тригонометрическим рядом

Настоящий параграф в основном посвящен вопросам сходимости тригонометрических рядов в смысле метрики пространства $D_\alpha$.

В 1915 г. Н. Н. Лузиным (см. [4], стр. 190) была сформулирована следующая проблема. Пусть $f$ — произвольная измеримая функция, определенная на $[0, 2\pi]$. Существует ли тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{4.1}$$

который сходится или суммируется тем или иным методом к функции $f$ почти всюду на $[0, 2\pi]$?

Н. Н. Лузин доказал [4], что если $f(x)$ почти всюду конечная измеримая функция, то существует тригонометрический ряд (3.1), который почти всюду суммируется к $f(x)$ как методом Абеля—Пуассона, так и методом Римана. В 1947 г. Д. Е. Меньшов [5] получил следующий основополагающий результат: для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[0, 2\pi]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, можно определить тригонометрический ряд (4.1), который сходится по мере на $[0, 2\pi]$ к функции $f(x)$. Следующий принципиальный шаг был сделан А. А. Талаляном [6], который доказал, что эта теорема Д. Е. Меньшова сохраняет силу для любых ортонормированных полных систем и даже для любых базисов в пространстве $L_p$ $[0, 1]$ с $p>1$. К указанному кругу вопросов относится ряд других работ А. А. Талаляна и его учеников (см. обзорную статью А. А. Талаляна [7]). Ряд важных результатов о суммируемости ряда (4.1) тем или иным методом получены в работах [4]—[10], [11]—[16] и др.

Перейдем теперь к изложению вопроса сходимости в метрике пространства $D_0$ тригонометрических рядов. Пусть $\Omega=[-\pi, \pi]$ и $\mathbf{F}$ — борелевская система множеств, $\mu$ — нормированная мера Лебега. Как известно, для измеримой почти всюду конечной функции $f(x)$, то есть $f\in S(\Omega, \mathbf{F})$, существует (см. [5], [12] непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $F(x)$ такая, что $F'(x)=f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и результат почленного дифференцирования ряда Фурье функции $F(x)$ есть тригонометрический ряд, сходящийся почти всюду к $f(x)$. То есть, если $S_n(F, x)$ — частные суммы ряда Фурье от $F(x)$, то

$$\lim_{n\to+\infty} S_n'(F, x)=f(x) \tag{4.2}$$

для почти всех $x\in[-\pi, \pi]$. Рассмотрим теперь выражение

$$M_n(\lambda)=\mu\left(E\left(S_n'(F, \cdot), \lambda\right)\right) \tag{4.3}$$

и

$$M(\lambda)=\sup_{n\geq 1} M_n(\lambda). \tag{4.4}$$

Очевидно, что $0\leqslant M(\lambda)\leqslant 1$ для $\lambda\geqslant 0$. Предположим, что

$$\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}} M(\lambda)=\alpha>0. \tag{4.5}$$

Таким образом, существует последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\lambda_k\uparrow+\infty$ при $k\to+\infty$ такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} M(\lambda_k)=\alpha>0$. Тогда для каждого $\varepsilon\in\left]0, \frac{\alpha}{8}\right[$ существует номер $N$ такой, что при $k>N$ будем иметь $M(\lambda_k)>\alpha-\varepsilon$. В силу (4.4) для каждого натурального $k$, $k>N$, существует натуральное число $n_k$ такое, что

$$M_{n_k}(\lambda_k)>\alpha-\varepsilon. \tag{4.6}$$

Возможны два случая:

1. Последовательность $\{n_k\}$, $k=\overline{1, +\infty}$, ограничена, то есть $n_k < C$, $k=\overline{1, \infty}$. Положим $S = \max\limits_{\substack{k=\overline{1, \infty} \\ x\in[-\pi, \pi]}} S'_{n_k}(F, x)$. Отсюда и из (4.6) имеем

$$\alpha - \varepsilon < M_{n_k}(\lambda_k) \leqslant \mu(\{x;\ S > \lambda_k\}) \to 0 \text{ при } k \to +\infty,$$

что в силу произвольности $\varepsilon$ дает противоречие с (4.5).

2. $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, тогда для $k > N$ имеем

$$\alpha - \varepsilon < M_{n_k}(\lambda_k) \leqslant \mu\left(\left\{x;\ |S'_{n_k}(F, x) - f(x)| > \frac{\lambda_k}{2}\right\}\right) + \\ + \mu\left(\left\{x;\ |f(x)| > \frac{\lambda_k}{2}\right\}\right). \tag{4.7}$$

Так как $f(x)$ почти всюду конечная функция, то существует число $K$ такое, что при $k > K$

$$\mu\left(\left\{x;\ |f(x)| > \frac{\lambda_k}{2}\right\}\right) < \varepsilon.$$

Отсюда и из (4.7) получаем

$$\mu\left(\left\{x:\ |S'_{n_k}(F, x) - f(x)| > \frac{\lambda_k}{2}\right\}\right) > \alpha - 2\varepsilon. \tag{4.8}$$

Пользуясь теперь (4.2) и произвольностью $\varepsilon \in \left]0, \frac{\alpha}{8}\right[$ в (4.8) получаем противоречие с (4.5), то есть

$$0 < \alpha - 2\varepsilon < \lim_{k\to+\infty} \mu\left(\left\{x;\ |S'_{n_k}(F, x) - f(x)| > \frac{\lambda_k}{2}\right\}\right) = 0.$$

Таким образом, наше допущение (4.5) не верно, то есть

$$\lim_{\lambda\to+\infty} M(\lambda) = 0.$$

Аналогично можно показать, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} M_1(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \sup_{n\geq 1} \mu(\{x;\ |S'_n(F, x) - f(x)| > \lambda\}) = 0.$$

В силу теоремы 1 существует функция $\omega \in I$ такая, что

$$\omega(\lambda) \geqslant \max\{M(\lambda), M_1(\lambda)\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$J_\omega(S'_n(F, \cdot), 1) \leqslant 1,\quad J_\omega(S'_n(-F, \cdot) - f, 1) \leqslant 1, \tag{4.9}$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Из (4.9) и предложения 1 имеем

$$\|S'_n(F, \cdot)\|_\omega \leqslant 1,\quad \|S'_n(F, \cdot) - f\|_\omega \leqslant 1,\quad \|f\|_\omega \leqslant 2. \tag{4.10}$$

Далее рассмотрим предельное равенство

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mu(E(f,\lambda))}{\sqrt{\omega(\lambda)}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mu(E(f,\lambda))}{\omega(\lambda)}\sqrt{\omega(\lambda)}\leqslant\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mu\left(E\left(f,\frac{\lambda}{2}\|f\|_{\omega}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\omega(\lambda)}\,\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

В силу предложения 1, (4.10) и свойств функции $\omega$ имеем

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mu(E(f,\lambda))}{\sqrt{\omega(\lambda)}}=0,$$

то есть $f\in D_{\sqrt{\omega}}$. Аналогично получаем, что $S_n'(F,x)\in D_{\sqrt{\omega}}$. Предположим теперь, что

$$\lim_{n\to+\infty}\|S_n'(F,\cdot)-f\|_{\sqrt{\omega}}>\beta,\ k=\overline{1,+\infty},\tag{4.11}$$

то есть существует подпоследовательность $n_k$, $k=\overline{1,\infty}$ такая, что

$$\|S_{n_k}'(F,\cdot)-f\|_{\sqrt{\omega}}>\beta,\ k=\overline{1,\infty}.$$

Тогда в силу определения $\|\cdot\|_{\sqrt{\omega}}$ имеем для каждого $k$, что существует $\lambda_k>0$ так, что

$$0<\beta<\frac{\mu(E(S_{n_k}'(F,\cdot)-f,\lambda_k))}{\sqrt{\omega\left(\frac{\lambda_k}{\beta}\right)}}.$$

Возможны три случая:

1. $\lim\limits_{k\to+\infty}\lambda_k=0$. Тогда в силу определения $\omega$ имеем

$$0<\beta<\frac{\mu(E(S_{n_k}'(F,\cdot)-f,\lambda_k))}{\sqrt{\omega\left(\frac{\lambda_k}{\beta}\right)}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\omega\left(\frac{\lambda_k}{\beta}\right)}}\to0$$

при $k\to+\infty$, что невозможно.

2. $0<a\leqslant\lambda_k\leqslant b<+\infty$, $k=\overline{1,\infty}$. Тогда

$$0<\beta<\frac{\mu(E(S_{n_k}'(F,\cdot)-f,a)}{\sqrt{\omega\left(\frac{b}{\beta}\right)}}.$$

Переходя к пределу при $k\to+\infty$ и пользуясь предельным равенством (3.2), получаем противоречие.

3. $\lim\limits_{k\to+\infty}\lambda_k=+\infty$. Тогда имеем

$$0<\beta<\frac{\mu\left(E\left(S'_{n_k}(F,\cdot)-f,\lambda_k\right)\right)}{\sqrt{\omega(\lambda_k)}}\sqrt{\frac{\omega(\lambda_k)}{\omega\left(\frac{\lambda_k}{\beta}\right)}}\leqslant$$

$$\leqslant C_{\frac{1}{\beta}}\frac{\mu\left(E\left(S'_{n_k}(F,\cdot)-f,\lambda_k\right)\right)}{\omega(\lambda_k)}\sqrt{\omega(\lambda_k)},\ k=\overline{1,\infty}. \tag{4.12}$$

Далее из предложения 1, (4.10), (4.12) и свойств функции $\omega$ имеем

$$0<\beta\leqslant C_{\frac{1}{\beta}}\lim_{k\to+\infty}\omega(\lambda_k)=0,$$

что невозможно. Следовательно, наше предположение (4.11) не верно, то есть

$$\lim_{n\to+\infty}\|S'_n(F,\cdot)-f\|_{\sqrt{\omega}}=0.$$

Таким образом, установлена следующая

Теорема 5. *Для любой измеримой и конечной почти всюду на* $[-\pi,\pi]$ *функции* $f$ *существуют тригонометрический ряд* (4.1) *и функция* $\omega\in I$ *такие, что* $f\in D_\omega$ *и указанный ряд будет сходиться к функции* $f$ *в метрике пространства* $D_\omega$.

Предложение 5. *Пусть* $\{f_n(x)\}$ — *последовательность измеримых функций сходится* $\mu$-*почти всюду к функции* $f(x)$. *Если существует измеримая неотрицательная функция* $g$ *такая, что* $g\in D_\omega(\Omega,\mathrm{F},\mu)$ *и* $|f_n(x)|<g(x)$ $\mu$-*п.в. на* $\Omega$, $n=\overline{1,\infty}$, *то* $f_n$, $f\in D_\omega$ *и*

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_\omega=0 \quad и \quad \lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_\omega=\|f\|_\omega.$$

Доказательство. Так как последовательность $\{f_n\}$ $\mu$-п.в. сходится к функции $f$, то из следующего неравенства (см. [17], стр. 44)

$$\mu(E(f,\lambda))\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}\mu(E(f_n,\lambda))\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\mu(E(f_n,\lambda))<\mu(E(g,\lambda))$$

следует, что $f_n$ и $f$ принадлежат $D_\omega$.

Допустим теперь, что $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_\omega>\delta>0$, тогда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ такая, что

$$\|f_{n_k}-f\|_\omega>\delta,\ k=\overline{1,+\infty}. \tag{4.13}$$

Далее в силу определения $\|\cdot\|_\omega$ и предложения 1 для каждого $k$ существует $\lambda_k>0$ такое, что

$$\delta<\frac{\mu\left(E\left(f_{n_k}-f,\lambda_k\delta\right)\right)}{\omega(\lambda_k)}.$$

Возможны три случая:

1. $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=0$, тогда

$$0<\delta<\frac{\mu\left(E\left(f_{n_k}-f,\lambda_k\delta\right)\right)}{\omega(\lambda_k)}\leqslant\frac{1}{\omega(\lambda_k)}\to 0$$

при $k\to+\infty$, что невозможно.

2. $0 < a < \lambda_k < b < +\infty$, тогда

$$0 < \delta < \frac{\mu\left(E\left(f_{n_k} - f,\ a\delta\right)\right)}{\omega(b)},$$

а так как $f_{n_k}$ $\mu$-п.в. на $\Omega$ сходится к $f$, то имеем

$$0 < \delta\omega(b) < \lim_{k \to +\infty} \mu\left(E\left(f_{n_k} - f,\ a\delta\right)\right) = 0,$$

что невозможно.

3. $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty$, тогда имеем

$$0 < \delta < \frac{\mu\left(E\left(f_{n_k} - f,\ \lambda_k \delta\right)\right)}{\omega(\lambda_k)} \leqslant \frac{2\mu\left(E\left(g,\ \frac{\lambda_k \delta}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda_k \delta}{2}\right)} \frac{\omega\left(\frac{\lambda_k \delta}{2}\right)}{\omega(\lambda_k)}.$$

Так как $g \in D_\omega$, то в силу свойств функции $\omega$ получаем

$$0 < \delta < 2\, C_{\frac{\delta}{2}} \lim_{k \to +\infty} \frac{\mu\left(E\left(g,\ \frac{\lambda_k \delta}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda_k \delta}{2}\right)} = 0,$$

что опять невозможно. Следовательно, наше допущение не верно, а потому $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\omega = 0$, и отсюда непосредственно следует $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n\|_\omega = \|f\|_\omega$ и предложение доказано.

Институт вычислительной математики
АН Грузинской ССР

Поступила 25. I. 1984

Ի. Ա. ՋՎԱՐՇԵԻՇՎԻԼԻ. Չափելի իրական ֆունկցիաների մի տարածության մասին *(ամփոփում)*

*Ըստ Լեբեգի չափելի համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիաների բազմությունը բաժանվում է չափելի լրիվ, սեպարաբել $D_\omega$ տարածությունների։ Այդ տարածությունների չափարանության մեջ ապացուցված է Վեյերշտրասի եռանկյունաչափական շարքով ֆունկցիայի ներկայացման վերաբերյալ թեորեմը։*

I. A. JVARSHEISHVILI. *On a space of real measured function* (summary)

The set of almost everywhere finite Lebesgue measurable functions is devided into metrical, complete, separable spaces. The theorem of Weirstrass and representation of function by trigonometric series are proved in the metrics of those spaces.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *И. А. Джваршейшвили.* Об одном свойстве монотонных функций. Труды ГПИ, № 3 (285), 1985, 19—26.
2. *И. А. Джваршейшвили.* Об аналитических функциях в единичном круге. Сообщения АН ГССР, 111, № 1, 1983, 25—27.
3. *П. Л. Ульянов.* Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$, УМН, 27:2, 1972, 1—52.

4. *Н. Н. Лузин.* Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1951.
5. *Д. Е. Меньшов.* О сходимости по мере тригонометрических рядов. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 32, 1950, 1—98.
6. *А. А. Талалян.* Представление измеримых функций рядами, УМН, 15:5, 1960, 77—141.
7. *А. А. Талалян.* Вопросы представления и сходимости в теории ортогональных рядов, Сборник «Математический анализ», 1971, 5—64.
8. *П. Л. Ульянов.* Безусловная суммируемость к ∞, Научн. докл. высш. шк., 1, 1959, 71—80.
9. *П. Л. Ульянов.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19:1, 1964, 3—69.
10. *И. А. Виноградова, В. А. Скворцов.* Обобщенные интегралы и ряды Фурье, Сборник «Математический анализ», 1971, 65—100.
11. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, М., т. 1, 2, 1965.
12. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961.
13. *Л. В. Жижиашвили.* Сопряженные функции и тригонометрические ряды, Тбилиси, 1969.
14. *L. Carleson.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math., 116, 1—2, 1966, 135—157.
15. *R. Hunt.* On the convergence of Fourier series, Proc. Conf. Orthog. Exp. and their Cont. Arol, Carbondale Press.
16. *C. Goffman, D. Waterman.* Some aspects of Fourier series, Math. Mon., 77, № 2, 1970, 63—72.
17. *П. Халмош.* Теория меры, М., 1953.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 4, 1985 Математика

УДК 519.218.5

Р. В. АМБАРЦУМЯН

# О ЗАДАЧАХ ТИПА СИЛЬВЕСТРА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПУАССОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Содержание настоящей заметки было темой доклада, сделанного автором на годичном собрании отделения физико-математических наук АН Армянской ССР, 28 марта 1984 г.

Напомним классическую задачу Сильвестра о четырех точках. На плоскости имеется ограниченная выпуклая область $D$. В нее случайно, независимо друг от друга, бросаются четыре точки, каждая с равномерным распределением внутри $D$. Найти вероятность того, что точки образуют выпуклый четырехугольник.

Мы предлагаем следующую модификацию этой задачи. Рассматриваем однородный пуассоновский точечный процесс $\{P_i\}$ на плоскости. Выбирается «типичная четверка точек» из $\{P_i\}$. Найти вероятность того, что точки «типичной четверки» образуют выпуклый четырехугольник. Отметим, что понятие «типичной четверки» нуждается в специальном определении.

Ниже приводятся необходимые определения и предложения, ведущие к решению модифицированной задачи, а также аналогичных задач для однородных пуассоновских процессов в пространствах $R^n$.

I. В основе предлагаемого подхода лежит следующее предложение, относящееся к интегральной геометрии.

Рассмотрим последовательности $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ точек из $R^n$, которые образуют в $R^n$ невырожденный симплекс. Пространство таких последовательностей можно отождествить с произведением

$$\mathbf{A}_s(n) \times (0, \infty), \tag{1}$$

где $\mathbf{A}_s(n)$ — т. н. *специальная группа аффиных преобразований пространства* $R^n$ (определитель каждого преобразования равен $+1$ или $-1$). Именно, с помощью гомотетии с центром в $P_1$, каждой последовательности $(P_1, \cdots, P_{n+1})$ ставится в соответствие подобный симплекс $s$ единичного объема (с нумерованными вершинами).

Всегда существует единственное $A \in \mathbf{A}_s(n)$, переводящее точки

$$P_1^{(0)} = (0, \cdots, 0),\ P_2^{(0)} = (1, 0, \cdots, 0), \cdots,\ P_{n+1}^{(0)} = (0, \cdots, 0,\ 1)$$

в вершины симплекса $s$ с соответствующими номерами. Представление (1) получается с помощью отображения

$$(P_1, \cdots, P_{n+1}) \to (A,\ V), \tag{2}$$

где $V$ — объем симплекса $(P_1, \cdots, P_{n+1})$.

Используя общее предложение о факторизации (см. [1]), легко находим

$$\prod_{i=1}^{n+1} dP_i = \frac{1}{2}\, dA\, V^{n-1}\, dV, \tag{3}$$

здесь и ниже $dP_i$ — меры Лебега в $R^n$, $dA$ — (бинвариантная) мера Хаара на группе $\mathbf{A}_s(n)$. Автором получено следующее обобщение равенства (3), касающееся последовательностей $(P_1, \ldots, P_r)$ любой длины $r \geqslant 3$.

Именно

$$\prod_{i=1}^{r} dP_i = c_{n,r}\, dA\, V^{r-2}\, dV\, \mathbf{P}_{n,r}(d\tau), \tag{4}$$

где $V$ теперь обозначает объем минимальной выпуклой оболочки множества $\{P_1, \cdots, P_r\}$, $\mathbf{P}_{n,r}$ — некоторая вероятностная мера в фактор-пространстве $(R^n)^r/\mathbf{A}_s(n) \times (0, \infty)$, $c_{n,r}$ — некоторая константа. Элементы $\tau$ из указанного фактор-пространства мы называем ***неаффинными шейпами***.

Пример. Пусть $n = 2$, $r = 4$. В этом случае параметр $\tau$ двумерен, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$. Выбором

$$\tau_1 = V_1/V,\ \tau_2 = V_2/V,$$

где $V_1$, $V_2$ — площади треугольников, указанных на рис. 1, мы отождествляем пространство неаффинных шейпов с объединением семи областей: трех единичных квадратов и четырех треугольников площади 1/2 каждый. Здесь для ясности мы выбросили из рассмотрения все четверки, содержащие тройки коллинеарных точек. На упомянутых компонентах мера $c_{2,4}\mathbf{P}_2$ совпадает со стандартной мерой Лебега. Таким образом, имеем

$$c_{2,4} = 5.$$

Укажем, что квадраты соответствуют трем конфигурациям типа б) (см. рис. 1), а треугольники—конфигурации а) и трем конфигурациям типа в). Отсюда следует решение задачи Сильвестра для вероятности $\mathbf{P}_{2,4}$:

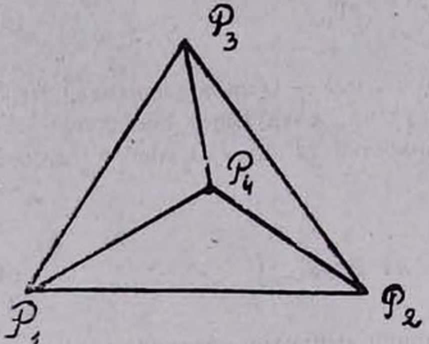
$$\mathbf{P}_{2,4}\ (\text{выпуклый четырехугольник}) = \frac{3}{5}\cdot$$

Естественно поставить задачу вычисления вероятностей компонент, на которые распадается (при исключении вырождений) пространство неаффинных шейпов для общих $n$ и $r$. Эту задачу мы называем задачей *типа Сильвестра* для общей вероятности $\mathbf{P}_{n,r}$. Приведем решение задачи типа Сильвестра для $n = 3$, $r = 5$.

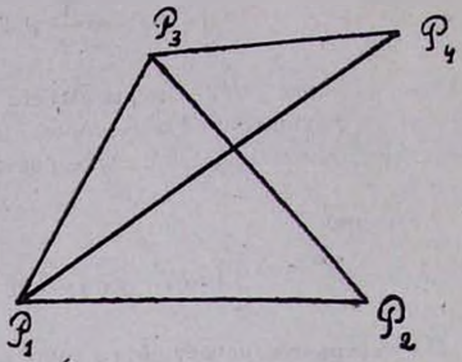
$\mathbf{P}_{3,5}$ (минимальная выпуклая оболочка пяти точек в $R^3$ есть тетраэдр) $=$ $= 1/7$. Задача быстро усложняется с ростом $r$. Ее решение для $n = 2$, $r = 5$ приведено в статье Р. Г. Арамяна, помещенной в настоящем номере журнала.

II. Частоты, соответствующие значениям вероятностей $\mathbf{P}_{n,r}$ должны наблюдаться в реализациях однородных точечных процессов Пуассона в $R^n$. Здесь мы имеем в виду следующее утверждение.

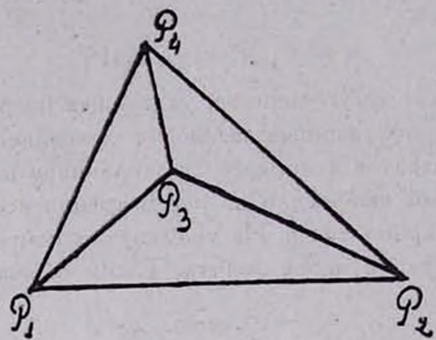
Пусть $\{P_i\}$ — однородный точечный процесс Пуассона в $R^n$. Через $\{P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}\}$, где $r > n+1$, обозначим случайную совокупность $r$-под множеств, выбираемых из реализации процесса $\{P_i\}$, подчиненных условию: минимальная выпуклая оболочка точек $P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}$ содержит $l$




а
$V_1 =$ пл. $P_1P_3P_4$
$V_2 =$ пл. $P_1P_2P_4$




б
$V_1 =$ пл. $P_1P_3P_4$
$V_2 =$ пл. $P_1P_2P_3$




в

$V_2 =$ пл. $P_2P_3P_4$
$V_1 =$ пл. $P_1P_3P_4$
Рис. 1.

точек из $\{P_i\}$, не принадлежащих $\{P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}\}$. С помощью отображения (обозначения см. в пункте 1)

$$(P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}) \to (A_k, V_k, \tau_k)$$

получаем представление $\{P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}\}_l$ в виде *маркированного точечного процесса на группе* $\mathbf{A}_s(n)$:

$$\{P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}\}_l = \{A_k, V_k, \tau_k\}^{(l)}.$$

Поскольку процесс $\{P_i\}$ инвариантен относительно группы $\mathbf{A}_s(n)$, то то же самое верно и по отношению к $\{A_k, V_k, \tau_k\}^{(l)}$. Из (4) следует, что интенсивность процесса $\{A_k\}^{(l)}$ (т. е. проекции рассматриваемого маркированного процесса на $\mathbf{A}_s(n)$) равна

$$\sigma = c_{n,r} \int \frac{(\lambda V)^l}{l!} e^{-\lambda V} V^{r-2}\, dV < \infty$$

(в частности, среднее число точек процесса $\{A_k\}^{(l)}$ в области $D \subset \mathbf{A}_s(n)$ равно $\sigma H(D)$), где $H$ — мера Хаара на $\mathbf{A}_s(n)$.

Следовательно, определено распределение „типичной марки" $(V, \tau)$ (см. [1]). Из (4) и пуассоновой природы процесса $\{P_l\}$ следует, что

*в типичной марке величины* $V$ *и* $\tau$ *независимы; типичная* $V$ *имеет* $\Gamma$*-распределение с параметром* $l + r - 2$*; типичная* $\tau$ *имеет распределение* $\mathbf{P}_{n,r}$*, получаемое из* (4). *Это распределение не зависит от* $l$.

В частности, для однородного пуассоновского процесса $\{P_l\}$ на плоскости получаем решение модифицированной задачи Сильвестра: вероятность того, что «типичная» четверка в процессе $\{P_{l_1}, P_{l_2}, P_{l_3}, P_{l_4}\}_l$ образует выпуклый четырехугольник для всякого $l$, равна 3/5.

III. В заключение отметим также следующее обстоятельство.

Каждое $A \in \mathbf{A}_s(n)$ можно единственным образом представить в виде

$$A = M \cdot \delta, \tag{5}$$

где $M$ — евклидово движение пространства $R^n$, $\delta$ — преобразование из группы так называемых *аффинных деформаций* пространства $R^n$ (равенство (5) можно принять за определение аффинной деформации). Можно показать, что

$$dA = dM \cdot d\delta, \tag{6}$$

где $dM$—мера Хаара на евклидовой группе, $d\delta$—правоинвариантная мера Хаара на группе аффинных деформаций. Можно показать также, что

$$\int d\delta = \infty \tag{7}$$

(мера Хаара всей группы аффинных деформаций бесконечна).

Из (7) с помощью (3) приходим к следующему выводу: *с помощью ограничений, налагаемых только на объемы симплексов, нельзя получить какого-либо вероятностного распределения для формы типичного симплекса, натянутого на точки однородного пуассоновского процесса в* $R^n$. Подробнее об этом для случая $n = 2$ см. в [1].

Аналогичный отрицательный результат имеет место и для аффинных шейпов типичных $r$-точечных подмножеств однородных пуассоновских процессов в $R^n$ при $r > n + 1$. В этом смысле ситуация с аффинными шейпами противоположна описанной выше ситуации с неаффинными шейпами.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20. XI. 1984

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ. Սիլվեստրի տիպի խնդիրներ՝ ճամասև Պուասոնի պրոցեսների համար (*ամփոփում*)

*Ներմուծվում է* $R^n$*-ում* $r$ *r-կետանոց բազմությունների ոչաֆին շեյփերի գաղափարը։ Բերվում է Սիլվեստրի տիպի խնդրի լուծում՝ պուասոնյան կետային պրոցեսներում ոչաֆին պատահական շեյփերի համար։*

**R. V. AMBARTZUMIAN. *On the Sylvester-type problems for homogeneous Poisson processes* (summary)**

The notion of nonaffine shape of a $r$-subset in $R^n$ is introduced. Solutions of the Sylvester type problems for nonaffine shapes in Poisson point processes are described ($n=2$; $r=4$ and $n=3$, $r=5$).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *R. V. Ambartzumian.* Factorization in Integral and Stochastic Geometry. Stochastic Geometry, Geometrical Statistics, Stereology (edited by Ruben Ambartzumian and Wolfgang Weil): Teubner Texte zur Mathematic, Band 65 (Leipzig, 1984).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 4, 1985 Математика

УДК 519.218.5

Р. Г. АРАМЯН

# К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕАФФИННЫХ ШЕЙПОВ

В предыдущей статье Р. В. Амбарцумяна были определены вероятностные меры $\mathbf{P}_{n,r}$ в пространстве $\mathrm{T}_{n,r}$ «неаффинных шейпов» $r$-точечных множеств в $R^n$. Там же была поставлена общая задача о вычислении вероятностей компонентов на которые распадаются (при исключении вырождений) пространства $\mathrm{T}_{n,r}$.

В настоящей работе определяются рекуррентные соотношения между вероятностями событий $B_r^k \subset \mathrm{T}_{n,r}$,

$$B_r^k = \left\{ \begin{array}{l} \text{минимальная выпуклая оболочка } r\text{—множества} \\ \text{имеет } k \text{ вершин} \end{array} \right\}$$

и вычисляются вероятности этих событий для $\mathrm{T}_{2,5}$.

1. Рассмотрим упорядоченные последовательности $(P_1, \cdots, P_r), v > n+1$ точек из $R^n$. Предполагаем, что никакие $n+1$ точки из $(P_1, \cdots, P_r)$ не лежат на одной гиперплоскости.

Фактор-пространство

$$\mathrm{T}_{n,r} = [(R^n)^r / Z] \setminus \mathrm{A}_s(n) \times (0, \infty),$$

где $Z$ — множество исключенных последовательностей, $\mathrm{A}_s(n)$ — специальная группа аффинных преобразований пространства $R^n$, называется пространством неаффинных шейпов (см. [1]).

Неаффинные шейпы естественно описывать с помощью отношений объемов симплексов с вершинами из $\{P_1, \dots, P_r\}$ к объему минимальной выпуклой оболочки (м.в.о.) множества $\{P_1, \cdots, P_r\}$. Каждую точку из $\{P_1, \cdots, P_r\}$ можно описать однозначно с помощью $n$ таких отношений. Пространство $\mathrm{T}_{n,r}$ распадается на объединение попарно несвязанных компонентов, каждая из которых представляет собой область в $R^{n(r-(n+1))}$.

Рассмотрим меру $L^r = \prod_{i=1}^{r} L_i$ на $(R^n)^r$, где $L_i$ $i = \overline{1, r}$ мера Лебега на $R^n$ с элементом $dP_i$.

Согласно (4) (см. [1])

$$\prod_{i=1}^{r} dP_i = c_{n,r}\, dA\, V^{r-2} \mathbf{P}_{n,r}(d\tau), \tag{1.1}$$

где $V$ — объем (м.в.о.) множества $\{P_1, \cdots, P_r\}$, $\mathbf{P}_{n,r}$ — вероятностная мера в $\mathrm{T}_{n,r}$, $dA$ — элемент меры Хаара на $\mathrm{A}_s(n)$, $c_{n,r}$ — константы.

Тройку $(A, V, \tau)$, соответствующую $(P_1, \cdots, P_r)$ обозначим через $g(P_1, \cdots, P_r) = (A(P_1, \cdots, P_r), V(P_1, \cdots, P_r), \tau(P_1, \cdots, P_r))$. Обозначим через $B_r^k \subset T_{n,r}$ события

$$B_r^k = \{\tau(P_1, \cdots, P_r): \text{м.в.о. множества } \{P_1, \cdots, P_r\} \text{ имеет } k \text{ вершин}\},$$

где $r = n+1, n+2, \cdots, k = n+1, \cdots, r$.

Заметим, что каждое $B_r^k$ представляет собой объединение конечного числа областей из $R^{n(r-(n+1))}$.

Лемма. *При любом $(r, k)$, где $r > n+1$ и $k = n+1, \cdots, r$, имеют место рекуррентные соотношения*

$$c_{n,r} \mathbf{P}_{n,r}(B_r^k) = C_r^k c_{n,k} \mathbf{P}_{n,k}(B_k^k). \tag{1.2}$$

Доказательство. Обозначим

$$E_r^k = \{(P_1, \cdots, P_r): g(P_1, \cdots, P_r) \in G \times (0, 1) \times B_r^k\},$$

здесь и далее $G \subset \mathbf{A}_s(n)$ и $\mu(G) < \infty$, $\mu$ — мера Хаара на $\mathbf{A}_s(n)$. Тогда согласно (1.1) и по теореме Фубини имеем

$$L^r(E_r^k) = \int\limits_{G\times(0,1)\times B_r^k} c_{n,r}\, dA\, V^{r-2}\, dV \mathbf{P}_{n,r}(d\tau) = c_{n,r} \mathbf{P}_{n,r}(B_r^k)\, \mu(G) \int\limits_0^1 V^{r-2}\, dV. \tag{1.3}$$

Теперь подсчитаем $L^r(E_r^k)$ другим способом. Произведение $\prod\limits_{i=1}^r dP_i$ можно представить следующим образом:

$$\prod_{i=1}^r dP_i = c_{n,k}\, dA\, V^{k-2}\, dV \mathbf{P}_{n,k}(d\tau)\, dP_{k+1} \cdots dP_r,$$

здесь тройка $(A, V, \tau)$ соответствует $(P_1, \cdots, P_k)$.

Обозначим

$$E_{r,k}^k = \{(P_1, \cdots, P_r): (A, V, \tau) \in G \times (0, 1) \times B_k^k,$$
$$\text{а } P_i \in \text{м.в.о. } \{P_1, \cdots, P_k\} \text{ для } i = k+1, \cdots, r\}.$$

Из соображений симметрии, используя теорему Фубини получаем

$$L^r(E_r^k) = C_r^k L^r(E_{r,k}^k) = C_r^k \int\limits_{E_{r,k}^k} c_{n,k}\, dA\, V^{k-2}\, dV \mathbf{P}_{n,k}(d\tau)\, dP_{k+1} \cdots dP_r =$$

$$= C_r^k \int\limits_{G\times(0,1)\times B_k^k} c_{n,k}\, dA\, V^{k-2}\, dV \mathbf{P}_{n,k}(d\tau) \int\limits_{\substack{\{P_j \in \text{м.в.о. } \{P_1,\cdots,P_k\} \\ j=k+1,\cdots,r}} dP_{k+1} \cdots dP_r =$$

$$= C_r^k \int\limits_{G\times(0,1)\times B_k^k} c_{n,k}\, dA\, V^{k-2} V^{r-k}\, dV \mathbf{P}_{n,k}(d\tau) =$$

$$= C_r^k c_{n,k} P_{n,k}(B_k^k)\, \mu(G) \int\limits_0^1 V^{r-2}\, dV, \tag{1.4}$$

Здесь

$$C_r^k = \frac{r!}{k!\,(r-k)!}.$$

Сравнивая оба выражения (1.3) и (1.4) получаем (1.2).

2. Покажем как можно вычислить меры $c_{2,5}\mathbf{P}_{2,5}(B_5^k)$ для $k=3$, 4, 5 в случае $r=5$, $n=2$. Известно (см. [1]), что $c_{2,3}\mathbf{P}_{2,3}(B_3^3)=$ $=\frac{1}{2}$ и $c_{2,4}\mathbf{P}_{2,4}(B_4^4)=3$.

Откуда сразу заключаем, что

$$c_{2,5}\mathbf{P}_{2,5}(B_5^3)=C_5^3\,c_{2,2}\,\mathbf{P}_{2,3}(B_3^3)=5.$$

$$c_{2,5}\mathbf{P}_{2,5}(B_5^4)=C_5^4\,c_{2,4}\mathbf{P}_{2,4}(B_4^4)=15.$$

Для вычисления $c_{2,5}\mathbf{P}_{2,5}(B_5^5)$ применим подобный подход. Запишем $\prod\limits_{i=1}^{5} dP_i$ двумя способами

$$\prod_{i=1}^{5} dP_i=c_{2,5}\,dAS^3\,dS\,\mathbf{P}_{2,5}(d\tau), \tag{2.1}$$

$$\prod_{i=1}^{5} dP_i=c_{2,4}\,dAS_1^2\,dS_1\,\mathbf{P}_{2,4}(d\tau)\,dP_5. \tag{2.2}$$

Выражение (2.2) $(A,\ S_1,\ \tau)$ соответствует $(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)$. Отсюда получаем

$$c_{2,5}\,dAe^{-S}\cdot S^3\,dS\,\mathbf{P}_{2,5}(d\tau)=c_{2,4}\,dAS_1^2\,dS_1\,\mathbf{P}_{2,4}(d\tau)\,e^{-S}\cdot dP_5.$$

Проинтегрируем обе части этого тождества по множеству $D=\{(P_1,\cdots,$ $\cdots,\ P_5)$: м.в.о. множества $\{P_1,\cdots,\ P_5\}$ есть пятиугольник и $A(P_1,\cdots$ $\cdots,\ P_5)\in G\}$.

Проинтегрировав левую часть, получаем

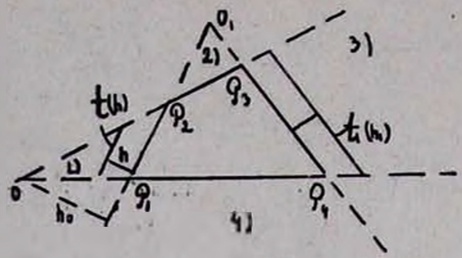
$$\int_D c_{2,5}\,dAe^{-S}\,S^3\,dS\,\mathbf{P}_{2,5}(d\tau)=c_{2,5}\,\mu(G)\,\mathbf{P}_{2,5}(B_5^5)\int_0^\infty e^{-S}\,S^3\,dS=$$

$$=6\,\mu\,(G)\,c_{2,5}\,\mathbf{P}_{2,5}(B_5^5). \tag{2.3}$$

Интегрирование правой части тождества с использованием теоремы Фубини дает

$$\int_D c_{2,4}\,dAS_1^2dS_1\,\mathbf{P}_{2,4}(d\tau)\,e^{-S}dP_5=c_{2,4}\int\limits_{G\times(0,\,\infty)\times B_4^4} dAS_1^2\,dS_1\,\mathbf{P}_{2,4}(d\tau)\int\limits_{\substack{\{P_5:\text{м.в.о. }\{P_1,\cdots,\,P_5\}\\ \text{есть пятиугольник}\}}} e^{-S}\,dP_5. \tag{2.4}$$

Рассмотрим отдельно внутренний интеграл в последнем выражении. К фиксированному четырехугольнику добавим одну точку так, чтобы в результате получился выпуклый пятиугольник и вычислим $\int e^{-S}\,dP_5$, где $S$ — площадь полученного пятиугольника.




3) $|P_1, P_2| = a \quad |P_4, F_3| = b$

$S_1$ — площадь $P_1P_2P_3P_4$

$S_{12}$ — площадь $\Delta O\ P_2P_1$

$S_{23}$ — площадь $\Delta O_1\ P_3F_2$.

Рис. 1.

Для того, чтобы у нас получился выпуклый пятиугольник необходимо, чтобы точка $P$ находилась в областях 1). 2). 3). 4). (см. рис. 1).

Для области 1) имеем

$dP = dtdh$, где $t \perp h$, $h \perp P_1P_2$ и из подобия треугольников получаем $t(h) = a\left(\frac{h_0-h}{h_0}\right)$.

Используя теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{1)} e^{-S}\, dP = \int\limits_{1)} e^{-S}\, dtdh = \int\limits_0^{h_0} e^{-S_1-\frac{ah}{2}}\, a\left(1-\frac{h}{h_0}\right) dh = 2e^{-S_1}\left[\frac{e^{-S_{12}}-1}{S_{12}}+1\right].$$

Для области 3) имеем

$dP = dt_1dh_1$, где $t_1 \perp h_1$ и $h_1 \perp P_3P_4$, $H$ высота $\Delta OP_3P_4$, опущенная из 0. Из подобия треугольников следует $t_1(h) = b\left(\frac{H+h_1}{H}\right)$.

Снова используя теорему Фубини получаем

$$\int\limits_{3)} e^{-S} dP = \int\limits_0^{\infty} e^{-S_1-\frac{bh_1}{2}}\, b\left(1+\frac{h_1}{H}\right) dh_1 = 2e^{-S_1}\left[1+\frac{1}{S_1+S_{12}}\right].$$

Подобным же образом в оставшихся случаях будет:

$$\int\limits_{2)} e^{-S}\, dP = 2e^{-S_1}\left[\frac{e^{-S_{23}}-1}{S_{23}}+1\right], \quad \int\limits_{4)} e^{-S}\, dP = 2e^{-S_1}\left[1+\frac{1}{S_1+S_{23}}\right].$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\int\limits_{1)\, U\, 2)\, U\, 3)\, U\, 4)} e^{-S}\, dP = 2e^{-S_1}\left[4+\frac{e^{-S_{12}}-1}{S_{12}}+\frac{e^{-S_{23}}-1}{S_{23}}+\frac{1}{S_1+S_{12}}+\frac{1}{S_1+S_{23}}\right]. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$S_{12} = xS_1, \quad S_{23} = yS_1.$$

Подставляя выражение (2.5) в (2.4) и интегрируя по $S_1$, получаем

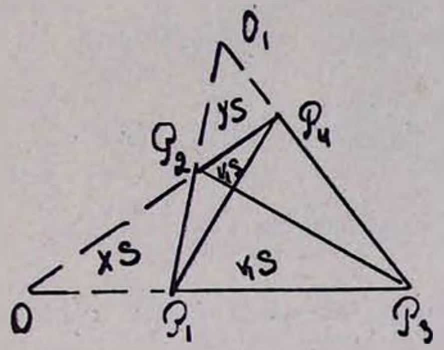
$$C_{2.4} \int\limits_{G\times(0,\infty)\times B_4^4} dA\, P_{2,4}(d\tau)\, 2e^{-S_1}\left[4+\frac{e^{-S_{12}}-1}{S_{12}}+\frac{e^{-S_{23}}-1}{S_{23}}+\frac{1}{S_1+S_{12}}+\right.$$

$$+\frac{1}{S_1+S_{23}}\Big]S_1^2\,dS_1=c_{2,4}\int\limits_{O\times B_4^4}\left(16-\frac{2}{(1+x)^2}-\frac{2}{(1+y)^2}\right)\mathrm{P}_{2,4}(d\tau)\,dA.$$

$B_4^4$ есть объединение трех единичных открытых квадратов, а $c_{2,4}\,\mathrm{P}_{24}(d\tau)$ — мера Лебега на них (см. [1]). Следоватезьно, в силу симметрии последний интеграл равен

$$3\int\limits_{O\times[0,1]^2}\left[16-\frac{2}{(1+x)^2}-\frac{2}{(1+y)^2}\right]dv_1dv_2dA. \qquad (2.6)$$

Остается выразить $x$ и $y$ через $(v_1, v_2)$,




$S$ — площадь $P_1P_2P_4P_3$
$v_1S$ — площадь $\Delta P_1P_2P_3$
$v_2S$ — площадь $\Delta P_1P_2P_4$
$xS$ — площадь $\Delta OP_2P_1$
$yS$ — площадь $\Delta O_1P_4P_2$

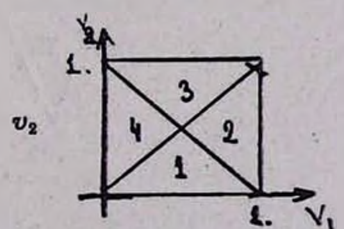
Рис. 2.

Здесь $(v_1, v_2)$ — это $\tau(P_1, P_2, P_3, P_4)$. Возможны четыре случая, в зависимости от того, какие стороны четырехугольника $P_1P_2P_4P_3$ являются основаниями получающихся треугольников $xS$ и $yS$. Эти случаи легко рассмотреть, сравнивая расстояния точек $P_2$ и $P_4$ от ребра $P_1P_3$, и расстояния точек $P_4$ и $P_3$ от ребра $P_1P_2$.

Соответствующие области имеют вид

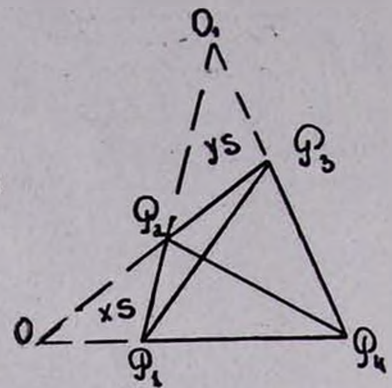
$$1\begin{cases}v_1<1-v_2,\\ v_2<v_1\end{cases}\quad 2\begin{cases}v_1>1-v_2,\\ v_2<v_1\end{cases}\quad 3\begin{cases}v_1>1-v_2,\\ v_2>v_1\end{cases}\quad 4\begin{cases}v_1<1-v_2\\ v_2>v_1\end{cases}$$

и на единичном квадрате выглядят следующим образом:




В каждом из этих четырех случаев определим $x$ и $y$ через $v_1$ и $v_2$,

1) $\begin{cases} v_1 < 1 - v_2 \\ v_2 < v_1 \end{cases}$




$v_1S$ — площадь $\Delta P_1P_2P_4$

$v_2S$ — площадь $\Delta P_1P_3P_4$

$S$ — площадь $P_1P_2P_3P_4$

$xS$ — площадь $\Delta OP_2P_1$

$yS$ — площадь $\Delta O_1P_3P_2$

Рис. 3.

Легко видеть, что

$$\frac{xS + v_1S}{(1 - v_1)\,S} = \frac{|O_1P_2|}{|P_2P_3|} = \frac{xS}{v_2S}, \text{ следовательно, } x = \frac{v_1v_2}{1 - v_1 - v_2}$$

и
$$\frac{yS + (1 - v_1)\,S}{v_1S} = \frac{|O_1P_2|}{|P_2P_1|} = \frac{yS}{v_2S}, \text{ следовательно, } y = \frac{(1 - v_1)\,v_2}{v_1 - v_2}.$$

Аналогичными соображениями в остальных случаях получаем

2)

$$x = \frac{(1 - v_2)(1 - v_1)}{v_1 + v_2 - 1}$$

$$y = \frac{(1 - v_1)\,v_2}{v_1 - v_2}$$

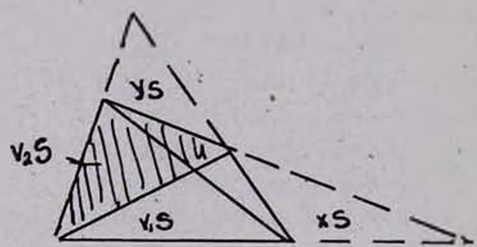



Рис. 4.

3)

$$x = \frac{(1 - v_2)(1 - v_1)}{(v_2 + v_1 - 1)}$$

$$y = \frac{(1 - v_2)\,v_1}{v_2 - v_1}$$

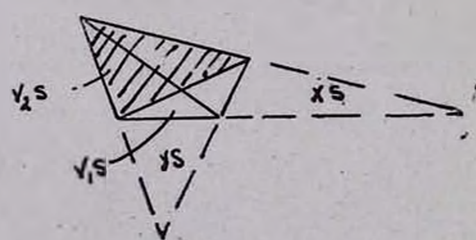



Рис. 5.

4)

$$x = \frac{v_1v_2}{1 - v_1 - v_2} \qquad y = \frac{(1 - v_2)\,v_1}{v_2 - v_1}$$

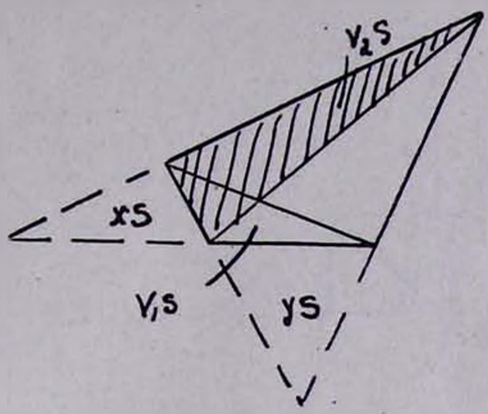



Рис. 6.

Подставляя вместо $x$ и $y$ полученные значения в выражение

$$8-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+y)^2}, \text{ получаем:}$$

в 1-ом случае

$$8-\frac{(1-v_1-v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)^2}-\frac{(v_1-v_2)^2}{v_1^2(1-v_2)^2}=f_1(v_1, v_2),$$

во 2-ом случае

$$8-\frac{(1-v_1-v_2)^2}{v_1^2 v_2^2}-\frac{(v_1-v_2)^2}{v_1^2(1-v_2)^2}=f_2(v_1, v_2),$$

в 3-ем случае

$$8-\frac{(1-v_1-v_2)^2}{v_1^2 v_2^2}-\frac{(v_2-v_1)^2}{v_2^2(1-v_1)^2}=f_3(v_1, v_2),$$

в 4-ом случае

$$8-\frac{(1-v_1-v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)^2}-\frac{(v_2-v_1)^2}{(1-v_1)^2 v_2^2}=f_4(v_1, v_2).$$

Заменой переменной легко убедиться, что

$$\iint\limits_{(1)} f_1(v_1, v_2)\,dv_1dv_2=\iint\limits_{(2)} f_2(v_1, v_2)\,dv_1dv_2=\iint\limits_{(3)} f_3(v_1, v_2)\,dv_1dv_2=$$
$$=\iint\limits_{(4)} f_4(v_1, v_2)\,dv_1dv_2. \tag{2.7}$$

Легко видеть, что и область (1) можно разделить на две части (см. рис. 7), на которых интегралы от $f_1(v_1, v_2)$ равны.

Подставляя выражение для $8-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+y)^2}$ в (2.6), учитывая (2.7) и интегрируя по $dA$, получаем

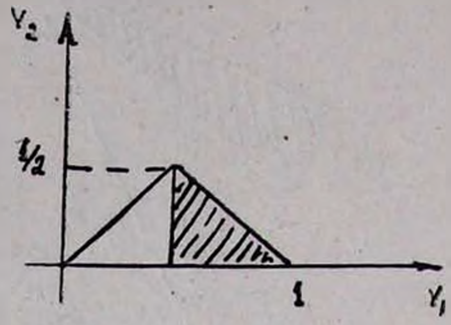



Рис. 7.

$$48\,\mu(G)\int\limits_0^{1/2}dv_1\int\limits_0^{v_1}f_1(v_1,v_2)\,dv_2=48\,\mu(G)\times$$

$$\times\left(1-\int\limits_0^{1/2}dv_1\int\limits_0^{v_1}\left[\frac{(1-v_1-v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)^2}+\frac{(v_1-v_2)^2}{v_1^2(1-v_2)^3}\right]dv_2\right). \tag{2.9}$$

Отдельно рассмотрим несколько интегралов.

1.) Заменой переменной $1-v_2=a$ получаем

$$\int\limits_0^{v_1}\left|\frac{(1-v_1-v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)^2}+\frac{(v_1-v_2)^2}{v_1^2(1-v_2)^2}\right|dv_2=$$

$$=\int\limits_{1-v_1}^{1}\left[\frac{a^2-2v_1a+v_1^2}{a^2(1-v_1)^2}+\frac{a^2-2a(1-v_1)+(1-v_1)^2}{v_1^2a^2}\right]da=$$

$$=\underbrace{\frac{v_1}{(1-v_1)^2}+\frac{2v_1}{(1-v_1)^2}\ln(1-v_1)+\frac{v_1^3}{(1-v_1)^3}-1+}_{a(v_1)}$$

$$+\underbrace{\frac{2}{v_1}+\frac{2(1-v_1)}{v_1^2}\ln(1-v_1)}_{b(v_1)}. \tag{2.10}$$

2.) Заменой переменной $1-v_1=a$ получаем

$$\int\limits_0^{1/2}a(v_1)\,dv_1=\int\limits_{1/2}^{1}\left[\frac{1-a}{a^2}+\frac{2(1-a)\ln a}{a^2}+\frac{(1-a)^2}{a^3}-1\right]da=$$

$$=(1-\ln 2)^2-\frac{1}{2}. \tag{2.11}$$

3.) Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^{1/2} b(v_1)\,dv_1 = -2\int_0^{1/2}[v_1+(1-v_1)\ln(1-v_1)]\,d\frac{1}{v_1} = -2\,[1-\ln 2]-$$

$$-2\int_0^{1/2}\frac{\ln(1-v_1)}{v_1}\,dv_1. \qquad (2.12)$$

4) Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^{1/2}\frac{\ln(1-v_1)}{v_1}\,dv_1=\int_0^{1/2}\ln(1-v_1)\,d\ln v_1=\ln^2 2+\int_0^{1/2}\frac{\ln v_1}{1-v_1}\,dv_1=\ln^2 2+$$

$$+\int_0^{1}\frac{\ln v_1}{1-v_1}\,dv_1-\int_0^{1/2}\frac{\ln(1-v_1)}{v_1}\,dv_1.$$

Следовательно

$$2\int_0^{1/2}\frac{\ln(1-v_1)}{v_1}\,dv_1=\ln^2 2+\int_0^{1}\frac{\ln v_1}{1-v_1}\,dv_1=\ln^2 2-\frac{\pi^2}{6}, \qquad (2.13)$$

так как интеграл

$$\int_0^{1}\frac{\ln v_1}{1-v_1}\,dv_1=-\frac{\pi^2}{6} \quad \text{(см. [2])}.$$

Теперь продолжая (2.12) с учетом (2.13), имеем

$$\int_0^{1/2} b(v_1)\,dv_1=-2\,[1-\ln 2]-\ln^2 2+\frac{\pi^2}{6}. \qquad (2.14)$$

Окончательно, продолжая (2.9) с использованием (2.10), (2.11), (2.14), получаем

$$48\,\mu(G)\left[1-\int_0^{1/2}[a(v_1)+b(v_1)]\,dv_1\right]=8\,\mu(G)[15-\pi^2]. \qquad (2.15)$$

Сравнивая выражения (2.15) и (2.3), имеем

$$c_{2,5}\,\mathrm{P}_{2,5}(B_5^5)=\frac{4}{3}[15-\pi^2].$$

Для $c_{2,5}$ имеем

$$c_{2,5}=\sum_{k=3}^{5} c_{2,5}\,\mathrm{P}_{2,5}(B_5^k)=40-\frac{4}{3}\pi^2,$$

а соответствующие вероятности будут

$$\mathrm{P}_{2,5}(B_5^3)=\frac{15}{120-4\pi^2},\ \mathrm{P}_{2,5}(B_5^4)=\frac{45}{120-4\pi^2},\ \mathrm{P}_{2,5}(B_5^5)=\frac{15-\pi^2}{30-\pi^2}.$$

Работа выполнена под руководством Р. В. Амбарцумяна, которому автор приносит глубокую благодарность.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 8. VII. 1984

Ռ. Հ. ԱՐԱՄՅԱՆ. Ոչաֆին շեյփերի հավանականությունների հաշվման մասին. *(ամփոփում)*

*Ռ. Վ. Համբարձումյանի նախորդ հոդվածում սահմանվել է* $\mathrm{P}_{n,r}$ *հավանականային չափը* $R^n$*-ի r-կետանոց ոչաֆին շեյփերի* $T_{n,r}$ *տարածությունում։ Այնտեղ նաև դրված է կոմպոնենտների հավանականությունների հաշվման վերաբերյալ ընդհանուր խնդիրը, որոնց տրոհվում է* $T_{n,r}$*։ Այս հոդվածում որոշված են ռեկուրենտ հարաբերություններ* $B_r^k \subset T_{n,r}$ *պատահարների հավանականությունների միջև, որտեղ*

$$B_r^k = \left\{ \begin{array}{l} r\text{-բազմության մինիմալ ուռուցիկ թաղանթը} \\ \text{ունի } k\text{-գագաթ} \end{array} \right\}$$

*և հաշված են այդ պատահարների հավանականությունները* $T_{2,5}$ *տարածությունում։*

R. H. ARAMIAN. *On probabilities of nonaffine shapes* (summary)

In [1] R. V. Ambartzumian has defined certain natural probability measure $\mathrm{P}_{n,r}$ in the spaces $T_{n,r}$ of $r$-point nonaffine shapes in $R^n$. The problem of calculation of probabilities of the components of these spaces (which remain after removing degenacies) has been mentioned in [1] as basic.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. В. Амбарцумян.* О задачах типа Сильвестра для однородных пуассоновских процессов, Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, 20, № 4, 1985, 284—288.
2. *И. С. Градштейн* и *Н. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений, М., Физматгиз, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XX, № 4, 1985 Математика

УДК 519.218.5

Г. С. СУКИАСЯН

# О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ РЕШЕТОК

В настоящей работе получены некоторые результаты по характеризации однородных или однородных и изотропных случайных решеток. Показано, что в пространстве $R^n$ дискретность распределения Пальма однородного точечного процесса эквивалентна тому, что распределение процесса сосредоточено на так называемых $k$-решетках—объединениях $k$ конгруентных решеток. Аналогичное утверждение получено для однородных и изотропных точечных процессов, у которых распределение Пальма сосредоточено на «пучках» реализаций.

Другой результат касается рандомизируемых множеств. Точечное множество $\omega \subset R^n$ назовем рандомизируемым относительно группы $N$ преобразований пространства $R^n$ в себя, если существует точечный процесс, распределение которого инвариантно относительно $N$ и сосредоточено на множестве образов $N_\omega = \{\nu\omega\}_{\nu\in N}$.

Для групп параллельных переносов и всех движений показано, что рандомизируемы только $k$-решетки.

Отметим, что ряд связей между свойствами распределений однородных точечных процессов и свойствами их распределений Пальма указаны в монографии [1]. Наши результаты, касающиеся распределений Пальма, дополняют результаты [1].

В §§ 1, 2 даются все необходимые геометрические определения и используемые в дальнейшем результаты из дискретной геометрии. Отметим, что символ □ обозначает конец доказательства.

## § 1. Решетки и $k$-решетки

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — линейно независимые точки (векторы) $n$-мерного евклидового пространства $R^n$. Множество всех точек $\sum_{k=1}^{m} a_k e_k$, где $a_k$ — целочисленные коэффициенты, называется решеткой. Если $m=n$, то соответствующая решетка называется невырожденной, а параллелепипед с вершинами $\sum_{k=1}^{n} \delta_k e_k$, $\delta_k = 0$ или 1, называется фундаментальным параллелепипедом решетки.

Множества $A_1, A_2 \subset R^n$ называем конгруентными, если их можно совместить параллельным переносом, то есть существует такая точка $x \in R^n$, что $A_1—x=A_2$. Запись $A—x$ означает сдвиг множества $A$ на вектор $x$. Все множества, конгруентные какой-либо решетке, также будем называть решетками.

Определение 1. Объединение $k$ конгруентных решеток, которое нельзя представить как объединение меньшего количества решеток, называется $k$-решеткой.

Подмножества $\omega \subset R^n$, которые не имеют точек сгущения, будем называть точечными системами. Рассмотрим множество $T_\omega$ точечных систем конгруентных фиксированной системе $\omega$:

$$T_\omega = \{\omega - x\}_{x \in R^n}.$$

Множество $T^0_\omega = \{\omega - x\}_{x \in \omega}$ есть подмножество тех элементов из $T_\omega$, которые содержат начало координат 0.

Лемма 1.1. (см. [2]). *Точечная система $\omega$ является решеткой тогда и только тогда, когда $T^0_\omega$ состоит из одного элемента.*

Справедливо и более общее утверждение.

Лемма 1.2. *Для того, чтобы точечная система $\omega$ была $k$-решеткой необходимо и достаточно, чтобы множество $T^0_\omega$ состояло из $k$ элементов.*

Доказательство. Легко показать, что для всякой $k$-решетки $\omega$ множество $T^0_\omega$ состоит из $k$ элементов. Покажем справедливость обратного утверждения. Пусть имеем $T^0_\omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k\}$. Обозначим

$$L_i = \{x \in R^n: \omega - x = \omega_i\}, \ i = 1, 2, \cdots, k.$$

Так как $0 \in \omega_i$, то имеем $L_i \subset \omega$, то есть

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{k} L_i, \ L_i \cap L_j = \varnothing, \ i \neq j. \tag{1.1}$$

Покажем, что $L_1, \cdots, L_k$ суть конгруентные решетки. Для любой тройки точек $x, y, z \in L_i$ имеет место

$$x - y + z \in L_i, \tag{1.2}$$

так как

$$\omega - (x - y + z) = \omega_i + y - z = \omega - z = \omega_i.$$

Ввиду того, что для любого движения $m$ и всякого $A \subset R^n$ из $mA \subset A$ следует

$$mA = A, \tag{1.3}$$

то из (1.2) получаем

$$L_i - y + z = L_i \tag{1.4}$$

или

$$L_i - y = L_i - z.$$

Таким образом, множества $T^0_{L_i}$, $i = 1, 2, \cdots, k$ одноэлементны и в силу леммы 1.1, $L_1, \cdots, L_k$ суть решетки. Для любых $y \in L_i$, $z \in L_j$ аналогично (1.4) можно показать, что имеет место

$$L_i - y + z = L_j, \ i, j = 1, \cdots, k.$$

Следовательно, решетки $L_1, \ldots, L_k$ конгруентны друг другу и в силу (1.1) $\omega$ есть $k$-решетка. $\square$

## § 2. Правильные точечные системы

Пусть Г—группа вращений пространства $R_n$ вокруг начала координат 0. Обозначим

$$\Delta_\omega=\{\gamma\omega\}_{\gamma\in\Gamma},\quad (\text{т. н. „пучок"}),$$

$$S_\omega=\{x\in\omega:\omega-x\in\Delta_\omega\}.$$

Определение 2. (ср. [2, 3]). Точечная система $\omega$ называется правильной, если имеет место $S_\omega=\omega$.

Лемма 2.1. *Для любой точечной системы* $\omega$, $0\in\omega$ *множество* $S_\omega$ *является правильной точечной системой, то есть* $S_{S_\omega}=S_\omega$.

Доказательство. Для любой точки $x\in S_\omega$ существует такое вращение $\gamma_x\in\Gamma$, что $\omega-x=\gamma_x\omega$. Для произвольной точки $y\in S_\omega$ имеем $x+\gamma_x y\in S_\omega$, так как

$$\omega-(x+\gamma_x y)=\gamma_x\omega-\gamma_x y=\gamma_x(\omega-y)\in\Delta_\omega:$$

В силу (1.3) получаем

$$\gamma_x S_\omega=S_\omega-x,\quad x\in S_\omega. \tag{2.1}$$

Следовательно, $S_{S_\omega}=S_\omega$. □

Здесь и далее полагаем $0\in\omega$, так что $S_\omega$ не пусто. Рассмотрим множество

$$F_\omega=\{\gamma\in\Gamma:\gamma\omega\in T^0_\omega\};$$

оно не пусто, так как всегда содержит единичный элемент $\gamma_0$ группы Г, оставляющий пространство $R^n$ неподвижным. Заметим, что в общем случае, когда $\omega$ не обладает определенными свойствами симметрии типа решетчатости, $S_\omega=\{0\}$. Примем $F_{\{0\}}=\{\gamma_0\}$.

Лемма 2.2 (см. [2]). *Для всякой правильной точечной системы* $\omega$ *множество* $F_\omega$ *является конечной подгруппой группы вращений* Г *(в кристаллографии* $F_\omega$ *называют федоровской группой).*

Это утверждение справедливо и для неправильных точечных систем. Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.3. *Для любой точечной системы* $\omega$ *имеет место*

$$F_{S_\omega}=F_\omega.$$

Доказательство. Для любого $\gamma\in F_\omega$ существует такая точка $x_\gamma\in\omega$, что

$$\omega-x_\gamma=\gamma\omega.$$

Заметим, что $x_\gamma\in S_\omega$. Согласно (2.1) имеем $\gamma S_\omega=S_\omega-x_\gamma$. Следовательно, $\gamma\in F_{S_\omega}$. □

Из лемм 2.1, 2.2 и 2.3 следует

Утверждение 1. *Для любой точечной системы* $\omega$ *множество* $F_\omega$ *является конечной подгруппой группы вращений* Г.

Следствие. Для всякой точечной системы $\omega$ имеет место

$$\operatorname{card}(T^0_\omega\cap\Delta_\omega)\leqslant\operatorname{card}F_\omega<\infty. \tag{2.2}$$

## § 3. Дискретные распределения Пальма

В пространстве $R^n$ рассмотрим однородный случайный точечный процесс $\xi$ конечной интенсивности $\lambda$. Ниже всегда $P$ обозначает распределение процесса $\xi$, а $\pi$ — его распределение Пальма. Последнее определяется соотношением (см. [1]):

$$\pi(A)=\frac{1}{C}E\sum_{t\in\omega\cap b(x,r)} I_A(\omega-t), \tag{3.1}$$

где $\omega$ есть реализация точечного процесса $\xi$, $E$ — математическое ожидание относительно распределения $P$, $I$ — индикаторная функция, $b(x, r)$ — шар с центром $x$ радиуса $r$. Нормирующая константа $C$ равна $\lambda\mu(b(x, r))$, где $\mu$—мера Лебега в $R^n$. В силу однородности процесса $\xi$ (3.1) не зависит от положения центра шара $b(x, r)$.

Утверждения этого параграфа по существу касаются свойств распределений Пальма $\pi$, в случаях, когда имеются отдельные реализации $\omega$, для которых $\pi(\{\omega\})>0$. (В «непрерывных» случаях эти утверждения тривиальны).

Лемма 3.1. *Для любой реализации $\omega$, содержащей точки 0 и $x$ имеет место*

$$\pi(\{\omega\})=\pi(\{\omega-x\}).$$

Доказательство. Имеем

$$\pi(\{\omega\})=\frac{1}{C}E\sum_{t\in v\cap b(-x,1)} I_{\{\omega\}}(v-t)=$$

$$=\frac{1}{C}E\sum_{t+x\in v\cap b(0,r)} I_{\{\omega-x\}}(v-t-x)=\pi(\{\omega-x\}) \qquad \square$$

Лемма 3.2. *Для всякой вырожденной $k$-решетки $\omega$ всегда имеет место $\pi(\{\omega\})=0$.*

Доказательство. Если $\omega$ — вырожденная $k$-решетка, то существует такое полупространство $H$, что $\omega\cap H=\varnothing$. В силу леммы 3.1, без ограничения общности можно принять, что $0\in\partial H$, где $\partial H$ есть гиперплоскость, ограничивающая $H$. Рассмотрим в $H$ прямоугольный параллелепипед $D$ высотой $h$, в основании которого лежит гиперкуб $(0, a)^{n-1}$, где $a$—расстояние от 0 до ближайшей точки $\omega\setminus\{0\}$. По формуле Пальма [4] имеем

$$P(D_0)\leqslant 1-\lambda\pi(\{\omega\})\,h\,a^{n-1},$$

где $D_0$—событие, состоящее в том, что в $D$ нет точек процесса. Так как высоту $h$ можно взять сколь угодно большой, то $\pi(\{\omega\})=0$.

$\square$

Лемма 3.3. *Если $\pi(\{\omega\})>0$, то реализация $\omega$ есть невырожденная $k$-решетка, причем $k\leqslant\dfrac{1}{\pi(\{\omega\})}$.*

Доказательство. Пусть $\pi(\{\omega\})>0$. Из (3.1) следует, что $0\in\omega$. В силу леммы 3.1, для любой реализации $\omega_1\in T^0_\omega$ имеет место

$$\pi(\{\omega_1\}) = \pi(\{\omega\}) > 0 \tag{3.2}$$

Следовательно, $T_\omega^0$ состоит из конечного числа элементов, и согласно лемме 1.2 $\omega$ есть $k$-решетка, причем $k \leqslant \frac{1}{\pi(\{\omega\})}$. Невырожденность следует из леммы 3.2. $\square$

## § 4. Однородные рандомизации

Определение 3. Если для точечной системы $\omega \subset R^n$ существует однородный случайный точечный процесс $\xi$, распределение которого сосредоточено на $T_\omega$, то $\omega$ называется однородно рандомизируемой точечной системой, а $\xi$—однородной рандомизацией точечной системы $\omega$.

Покажем, что всякая невырожденная $k$-решетка $\omega$ однородно рандомизируема. Пусть $D$ — какой-нибудь фундаментальный параллелепипед одной из решеток, из которых составлена $\omega$. Заметим, что у фиксированной решетки имеется много фундаментальных параллелепипедов, но все они имеют одинаковый объем $\mu(D)$. Имеем

$$T_\omega = \{\omega - x\}_{x \in D}\,.$$

Рассмотрим отображение $f: T_\omega \to D$, которое каждой $k$-решетке $\omega_1 \in T_\omega$ ставит в соответствии точку $x = f(\omega_1)$ такую, что $\omega_1 = \omega - x$. Заметим, что это отображение однозначно (с точностью до множества $\mu$-меры нуль).

Распределение $P$ конструируемого точечного процесса определяется соотношением

$$P(A) = \frac{\mu(f(A))}{\mu(D)}, \quad A \subset T_\omega.$$

Так построенное распределение $P$ однородно и сосредоточено на $T_\omega$. Итак, всякая $k$-решетка является однородно рандомизируемой. Для доказательства обратного утверждения нам потребуется следующая лемма, непосредственно вытекающая из (3.1).

Лемма 4.1. *Если множество точечных систем $\Omega$ замкнуто относительно параллельных переносов, и распределение $P$ однородного случайного точечного процесса сосредоточено на $\Omega$, то его распределение Пальма $\pi$ сосредоточено на $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : 0 \in \omega\}$.*

Теорема 1. *Для того, чтобы точечная система $\omega$ была однородно рандомизируемой необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной $k$-решеткой.*

Доказательство. Покажем, что только $k$-решетки однородно рандомизируемы. Пусть существует однородный точечный процесс, распределение которого сосредоточено на $T_\omega$. Тогда, в силу леммы 4.1, его распределение Пальма $\pi$ сосредоточено на $T_\omega^0$. Но множество $T_\omega^0$ не более чем счетно, следовательно распределение $\pi$ дискретно. Значит, существует такое $\omega_1 \in T_\omega^0$, что $\pi(\{\omega_1\}) > 0$. Из леммы 3.3 следует, что $\omega_1$ и конгруентная ей $\omega$ являются $k$-решетками. Отметим, что в силу лемм 1.2 и 3.1 имеет место

$$\pi(\{\omega\}) = \frac{1}{k}. \qquad \square$$

Из доказательства теоремы 1 видно, что конечные и счетные смеси однородных рандомизаций $k$-решеток имеют дискретные распределения Пальма. Известно [1, 4], что распределением Пальма $\pi$ однозначно определяется распределение $P$ однородного точечного процесса. В силу леммы 3.3 получается следующее утверждение.

Теорема 2. *Распределение Пальма однородного случайного точечного процесса $\xi$ в $R^n$ дискретно тогда и только тогда, когда $\xi$ есть смесь конечного либо счетного числа однородных рандомизаций $k$-решеток.*

## § 5. Однородные и изотропные рандомизации

В пространстве $R^n$ рассмотрим однородный и изотропный случайный точечный процесс $\xi$ с распределением $P$ и интенсивностью $\lambda < \infty$. Его распределение Пальма $\pi$ будет изотропным [4], то есть инвариантным относительно группы вращений вокруг 0.

Лемма 5.1. *Для всякой реализации $\omega$, содержащей точки 0 и $x \in R^n$, имеет место*

$$\pi(\Delta_\omega) = \pi(\Delta_{(\omega - x)}).$$

Доказательство ради наглядности приведем для плоского случая. Пусть $\gamma A$ означает поворот множества $A \subset R^2$ вокруг 0 на угол $\gamma$. Обозначим

$$B(\omega, \alpha) = \{\gamma\omega: |\gamma| < \alpha\}, \quad \alpha \in (0, \varphi],$$

где $\varphi$ — минимальный угол, для которого $\varphi\omega = \omega$.

В силу изотропности распределения $\pi$ имеем

$$\pi(B(\omega, \alpha)) = \frac{\alpha}{2\varphi}\, \pi(\Delta_\omega), \tag{5.1}$$

Если точка $t$ из точечной системы $v$ со свойством $v - t = \gamma(\omega - x)$ лежит в круге $b(0, r)$, то точка $y = t - \gamma x$ лежит в $Q(\alpha, r) = \bigcup_{|\gamma| < \alpha} \gamma b(-x, r)$, и $v - y = \gamma\omega$. Из (3.1) для всех $x \in \omega$ получается

$$\pi(B(\omega - x, \alpha)) = \frac{1}{C} E \sum_{t \in v \cap b(0, r)} I_{B(\omega - x, \alpha)}(v - t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{C} E \sum_{y \in v \cap Q(\alpha, r)} I_{B(\omega, \alpha)}(v - y) = \frac{\mu(Q(\alpha, r))}{\mu(b(0, r))}\, \pi(B(\omega, \alpha)).$$

Аналогичным образом можно получить следующее неравенство:

$$\pi(B(\omega, \alpha)) \leqslant \frac{\mu(Q(\alpha, r))}{\mu(b(0, r))}\, \pi(B(\omega - x, \alpha)).$$

В силу (5.1) имеем

$$\frac{\mu(b(0, r))}{\mu(Q(\alpha, r))}\, \pi(\Delta_{\omega - x}) \leqslant \pi(\Delta_\omega) \leqslant \frac{\mu(Q(\alpha, r))}{\mu(b(0, r))}\, \pi(\Delta_{\omega - x}).$$

Для доказательства леммы остается заметить, что при $\alpha \to 0$ имеем

$$\mu(Q(\alpha, r)) \downarrow \mu(b(0, r)). \qquad \square$$

Лемма 5.1 является аналогом леммы 3.1 в изотропном случае. Аналогом леммы 3.3 является следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Пусть $\pi$ — распределение Пальма однородного и изотропного случайного точечного процесса. Если $\pi(\Delta_\omega) > 0$, то точечная система $\omega$ есть $k$-решетка.*

Доказательство. Пусть $\pi(\Delta_\omega) > 0$. Из леммы 5.1 имеем

$$\{\Delta_{\omega-x}\}_{x\in\omega} = \{\Delta_{\omega_1}, \Delta_{\omega_2}, \cdots, \Delta_{\omega_l}\}, \ l < \infty,$$

где $\omega_i = \omega - x_i$, $i = 1, 2, \cdots, l$.

Заметим, что согласно определению, множества $\Delta_{\omega_i}$, $i = 1, 2 \cdots, l$ непересекающиеся. Из конгруентности точечных систем $\omega_1, \cdots, \omega_l$ следует

$$T^0_{\omega_j} = T^0_\omega \subset \bigcup_{i=1}^{l} \Delta_{\omega_i}, \ j = 1, 2, \cdots, l. \tag{5.2}$$

Из неравенства (2.2) получаем

$$\operatorname{card}(T^0_\omega \cap \Delta_{\omega_i}) < \infty, \ i = 1, 2, \cdots, l. \tag{5.3}$$

Из (5.2) и (5.3) следует

$$\operatorname{card} T^0_\omega = \sum_{i=1}^{l} \operatorname{card}(T^0_\omega \cap \Delta_{\omega_i}) < \infty.$$

Согласно лемме 1.2 $\omega$ есть $k$-решетка. Отметим, что в отличие от однородного случая не всегда имеет место $k = l$. $\square$

Пусть $M$—группа всех евклидовых движений в $R_n$. Обозначим

$$M_\omega = \{m\omega\}_{m\in M}, \ \omega \subset R^n.$$

Определение 4. Если для точечной системы $\omega$ существует однородный и изотропный случайный точечный процесс $\xi$, распределение которого сосредоточено на $M_\omega$, то $\omega$ называется однородно и изотропно рандомизируемой точечной системой, а $\xi$ — однородной и изотропной рандомизацией точечной системы $\omega$.

Теорема 3. *Для того, чтобы точечная система $\omega$ была однородно и изотропно рандомизируемой необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной $k$-решеткой.*

Доказательство. Нужная рандомизация невырожденной $k$-решетки получается случайным движением этой $k$-решетки, равномерно распределенным на $D\times\Gamma$, где $D$—фундаментальный параллелепипед $k$-решетки, $\Gamma$ — группа вращений $R^n$ вокруг 0. Докажем обратное утверждение, а именно, что однородно и изотропно рандомизируемы только $k$-решетки.

Пусть $\xi$ — однородная и изотропная рандомизация точечной системы $\omega$. Ее распределение Пальма $\pi$, в силу леммы 4.1, сосредоточено на множестве

$$M^0_\omega = \{v \in M_\omega : 0 \in v\} = \bigcup_{x\in\omega} \Delta_{\omega-x}. \tag{5.4}$$

Согласно лемме 5.1 „пучки" реализаций $\Delta_{\omega-x}$ имеют для всех $x \in \omega$ одинаковую $\pi$-вероятность. Следовательно, сумма в (5.4) состоит из конечного числа $l$ слагаемых. Таким образом, $\pi(\Delta_{\omega-x}) = \frac{1}{l} > 0$ и в силу леммы 5.2, $\omega$ есть невырожденная $k$-решетка. □

Аналогично теореме 2 можно получить следующее утверждение.

Теорема 4. *Однородный и изотропный точечный процесс является конечной (счетной) смесью однородных и изотропных рандомизаций $k$-решеток тогда и только тогда, когда его распределение Пальма сосредоточено на конечном (счетном) объединении пучков реализаций.*

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 12. XII. 1983

Հ. Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ. Պատահական կավարների բնութագրման մասին *(ամփոփում)*

*Հոդվածում առաջարկվում է ձևափոխությունների խմբերի նկատմամբ կետային բազմությունների ռանդոմիզացման հասկացությունը։ Ապացուցվում է, որ $R^n$ տարածության մեջ զուգահեռ տեղափոխությունների և բոլոր շարժումների խմբերի նկատմամբ ռանդոմիզացման ենթակա են միայն k-կավարները՝ k կոնգրուենտ կավարների միավորումները։*

*Ցույց է տրվում, որ համասեռ պատահական կետային պրոցեսի Պալմի բաշխման դիսկրետ լինելը համարժեք է այդ պրոցեսի բաշխման կենտրոնացմանը k-կավարների վրա։*

G. S. SUKIASIAN. *On characterization of random lattices* (summary)

The concept of point set randomization with respect to a group is introduced. It is shown that only socalled $k$—lattices are randomizable both for the parallel translations and all motions of the $R^n$ space. It is shown that the Palm distribution of a homogeneous random point process in $R^n$ is discrete iff the process is concentrated on $k$-lattices.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Керстан, К. Маттес, И. Мекке.* Безгранично делимые точечные процессы, М. «Наука», 1982.
2. *Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен.* Наглядная геометрия, М., «Наука», 1981.
3. *Л. Фейеш Тот.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., Физматгиз, 1958.
4. *Р. В. Амбарцумян.* Однородные и изотропные случайные точечные поля на плоскости, Math. Nachrichten, 70, 1976, 365—385.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XX, № 4, 1985 Математика

УДК 517.988

А. А. ПАПОЯН

# ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С РАЗНОСТНО-СУММАРНО-ГАРМОНИЧЕСКИМ ЯДРОМ

## Введение

Рассмотрим интегральные операторы

$$(J-\mathbf{K}^{\pm})(Y)=Y(x)-\int_0^{\tau}K^{\pm}(x, s)\,Y(s)\,ds \tag{1}$$

с ядрами

$$K^{\pm}(x, t)=f(x-t)+g(x+t)\pm H(x, t), \tag{2}$$

где функция $H(x, t)$ гармоническая в квадрате $D=\{0<x, t<\tau\}$, т. е.

$$\frac{\partial^2 H(x, t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H(x, t)}{\partial t^2}=0. \tag{3}$$

Считается, что $f(x)\in C^2-(\tau, \tau)$, $g(x)\in C^2((0, 2\tau)$, $H\in C(\overline{D})$. Предполагая существование операторов $J+\mathbf{R}^{\pm}=(J-\mathbf{K}^{\pm})^{-1}$, поставим задачу их эффективного построения.

В работе [1] выясняется, что для построения операторов $J+\mathbf{R}^{\pm}$, вообще говоря, достаточно решить 8 уравнений с ядром $K^{+}$ и столько же с «сопутствующим» ядром $K^{-}$.

В данной работе разработан конкретный путь (алгоритм), соответствующий этому подходу, основанный на предварительном решении четырёх уравнений с ядром $K^{+}$ и восьми уравнений — с ядром $K^{-}$.

## § 1. Вывод основных соотношений

Резольвентные ядра $R^{\pm}$ удовлетворяют известным соотношениям

$$R^{\pm}(x, t)=K^{\pm}(x, t)+\int_0^{\tau}K^{\pm}(x, s)\,R^{\pm}(s, t)\,ds, \tag{1.1}$$

$$R^{\pm}(x, t)=K(x, t)+\int_0^{\tau}R^{\pm}(x, s)\,K^{\pm}(s, t)\,ds. \tag{1.2}$$

Применим схему работы [1]. Дифференцируя (1.1) дважды по $x$ и имея в виду следующее из (2) соотношение

$$\frac{\partial^2 K^{\pm}(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 K^{\mp}(x,t)}{\partial t^2}, \tag{1.3}$$

получим

$$\frac{\partial^2 R^{\pm}(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 K^{\mp}(x,t)}{\partial t^2}+\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial^2 K^{\mp}(x,s)}{\partial s^2}R^{\pm}(s,t)\,ds. \tag{1.4}$$

Интегрируя по частям в последнем интеграле и применяя оператор $J+R^{\mp}$ к (1.4), с помощью (1.2) получим

$$\frac{\partial^2 R^{\pm}(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 R^{\mp}(x,t)}{\partial t^2}=\Big[\frac{\partial R^{\mp}(x,s)}{\partial s}R^{\pm}(s,t)-$$

$$-R^{\mp}(x,s)\frac{\partial R^{\pm}(s,t)}{\partial s}\Big|_{s=0}^{s=\tau}.$$

Таким образом

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mp\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(R^-\pm R^+)=F^+(x,t)\pm F^-(x,t), \tag{1.5}$$

где использованы следующие обозначения ($i=0,1$):

$$\left.\frac{\partial^i R^{\pm}(x,s)}{\partial s^i}\right|_{s=0}=\alpha_1^{\pm i}(x),\quad \left.\frac{\partial^i R^{\pm}(x,s)}{\partial s^i}\right|_{s=\tau}=\alpha_2^{\pm i}(x), \tag{1.6}$$

$$\left.\frac{\partial^i R^{\pm}(s,t)}{\partial s^i}\right|_{s=0}=\beta_1^{\pm i}(t),\quad \left.\frac{\partial^i R^{\pm}(s,t)}{\partial s^i}\right|_{s=\tau}=\beta_2^{\pm i}(t),$$

$$F^{\pm}(x,t)=\alpha_2^{\pm 1}(x)\,\beta_2^{\mp 0}(t)-\alpha_2^{\pm 0}(x)\,\beta_2^{\mp 1}(t)-\alpha_1^{\pm 1}(x)\,\beta_1^{\mp 0}(t)+\alpha_1^{\pm 0}(x)\,\beta_1^{\mp 1}(t). \tag{1.7}$$

Здесь функции (1.6) удовлетворяют уравнениям ($i=0,1$)

$$\alpha_1^{\pm i}(x)=\left.\frac{\partial^i K^{\pm}(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}+\int\limits_0^{\tau}K^{\pm}(x,s)\,\alpha_1^{\pm i}(s)\,ds,$$

$$\alpha_2^{\pm i}(x)=\left.\frac{\partial^i K^{\pm}(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=\tau}+\int\limits_0^{\tau}K^{\pm}(x,s)\,\alpha_2^{\pm i}(s)\,ds, \tag{1.8}$$

$$\beta_1^{\pm i}(t)=\left.\frac{\partial^i K^{\pm}(x,t)}{\partial x^i}\right|_{x=0}+\int\limits_0^{\tau}\beta_1^{\pm i}(s)\,K^{\pm}(s,t)\,ds,$$

$$\beta_2^{\pm i}(t)=\left.\frac{\partial^i K^{\pm}(x,t)}{\partial x^i}\right|_{x=\tau}+\int\limits_0^{\tau}\beta_2^{\pm i}(s)\,K^{\pm}(s,t)\,ds.$$

Таким образом, резольвентные ядра интегральных операторов с ядрами (2) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.5), где функции (1.6) определяются из интегральных уравнений (1.8).

## § 2. Структура резольвентных ядер

Решим дифференциальные уравнения (1.5) в квадрате $D = [0, \tau] \times [0, \tau]$. Решения второго и знит по формуле Грина можно представить в виде

$$(R^- - R^+)(x, t) = \frac{1}{2\pi}\Bigg\{\int_0^\tau\int_0^\tau (F^- - F^+)(s, \eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+(t-\eta)^2}}\,ds\,d\eta +$$

$$+ \int_0^\tau [\alpha_1^{+1}(s) - \alpha_1^{-1}(s)]\ln\frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+t^2}}\,ds + \int_0^\tau [\alpha_1^{-0}(s) - \alpha_1^{+0}(s)] \times$$

$$\times \frac{t}{(x-s)^2+t^2}\,ds + \int_0^\tau [\beta_2^{-1}(s) - \beta_2^{+1}(s)]\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\tau)^2+(t-s)^2}}\,ds +$$

$$+ \int_0^\tau [\beta_2^{+0}(s) - \beta_2^{-0}(s)]\frac{x-\tau}{(x-\tau)^2+(t-s)^2}\,ds + \int_0^\tau [\alpha_2^{+1}(s) - \alpha_2^{-1}(s)]\ln \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+(t-\tau)^2}}\,ds + \int_0^\tau [\alpha_2^{-0}(s) - \alpha_2^{+0}(s)]\frac{t-\tau}{(x-s)^2+(t-\tau)^2}\,ds + \tag{2.1}$$

$$+ \int_0^\tau [\beta_1^{-1}(s) - \beta_1^{+1}(s)]\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(t-s)^2}}\,ds +$$

$$+ \int_0^\tau [\beta_1^{+0}(s) - \beta_1^{-0}(s)]\frac{x}{x^2+(t-s)^2}\,ds \overset{\text{def}}{=} G(x, t).$$

Первое из уравнений (1.5) в треугольнике $0 < t \leqslant \min(x, \tau - x)$ можно решить по формуле Даламбера

$$R^-(x, t) + R^+(x, t) = \frac{\alpha_1^{+0}(x-t) + \alpha_1^{-0}(x-t) + \alpha_1^{+0}(x+t) + \alpha_1^{-0}(x+t)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} [\alpha_1^{+1}(s) + \alpha_1^{-1}(s)]\,ds - \tag{2.2}$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t d\eta \int_{x-t+\tau}^{x+t-\eta} [F^+(s, \eta) + F^-(s, \eta)]\,ds \overset{\text{def}}{=} G_1(x, t).$$

Соответственно в остальных треугольниках ($\max(t, \tau - t) \leqslant x < \tau$, $\max(x, \tau - x) \leqslant t < \tau$, $0 < x < \min(t, \tau - t)$) решения будут иметь следующий вид:

$$R^+(x, t) + R^-(x, t) =$$

$$= \frac{\beta_2^{+0}(x+t-\tau) + \beta_2^{-0}(x+t-\tau) + \beta_2^{+0}(\tau-x+t) + \beta_2^{-0}(\tau-x+t)}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+t-\tau}^{\tau-x+t}\left[\beta_2^{+1}(s)+\beta_2^{-1}(s)\right]ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\tau}ds\int\limits_{x+t-s}^{s-x+t}[F^+(s,\eta)+F^-(s,\eta)]\,d\eta\overset{\text{def}}{=}G_2(x,t), \tag{2.3}$$

$$R^+(x,t)+R^-(x,t)=$$

$$=\frac{\alpha_2^{+0}(\tau+x-t)+\alpha_2^{-0}(\tau+x-t)+\alpha_2^{+0}(x+t-\tau)+\alpha_2^{-0}(x+t-\tau)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\tau+x-t}^{x+t-\tau}[\alpha_2^{+1}(s)+\alpha_2^{-1}(s)]\,ds- \tag{2.4}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{\tau}d\eta\int\limits_{x+t-\eta}^{\eta+x-t}[F^+(s,\eta)+F^-(s,\eta)]\,ds\overset{\text{def}}{=}G_3(x,t),$$

$$R^+(x,t)+R^-(x,t)=\frac{\beta_1^{+0}(x+t)+\beta_1^{-0}(x+t)+\beta_1^{+0}(t-x)+\beta_1^{-0}(t-x)}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x-t}[\beta_1^{+1}(s)+\beta_1^{-1}(s)]\,ds+ \tag{2.5}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}ds\int\limits_{s-x+t}^{x+t-s}[F^+(s,\eta)+F^-(s,\eta)]\,d\eta\overset{\text{def}}{=}G_4(x,t),$$

Из формул (2.1)—(2.5) получим

$$R^{\pm}(x,t)=\frac{1}{2}[G_1(x,t)\mp G(x,t)],\quad 0<t\leqslant\min(x,\tau-x), \tag{2.6}$$

$$R^{\pm}(x,t)=\frac{1}{2}[G_2(x,t)\mp G(x,t)],\quad \max(t,\tau-t)\leqslant x<\tau, \tag{2.7}$$

$$R^{\pm}(x,t)=\frac{1}{2}[G_3(x,t)\mp G(x,t)],\quad \max(x,\tau-x)\leqslant t<\tau, \tag{2.8}$$

$$R^{\pm}(x,t)=\frac{1}{2}[G_4(x,t)\mp G(x,t)],\quad 0<x\leqslant\min(t,\tau-t). \tag{2.9}$$

Таким образом, с помощью решений интегральных уравнений (1.8) строятся резольвентные ядра интегральных операторов с ядрами $K^{\pm}$.

## § 3. Алгоритм обращения

Покажем, что 4-е уравнение из (1.8) можно заменить более простой системой интегральных уравнений с разностно-суммарным ядром.

Приравняем значения резольвент (2.6)—(2.9) на сторонах соответствующих треугольников, составляющих квадрат $D$, имея в виду непрерывность в вершинах квадрата

$$\alpha_1^{\pm l}(\tau)=\beta_2^{\pm l}(0),\quad \beta_2^{\pm l}(\tau)=\alpha_2^{\pm l}(\tau),$$
$$\alpha_2^{\pm l}(0)=\beta_1^{\pm l}(\tau),\quad \beta_1^{\pm l}(0)=\alpha_1^{\pm l}(0). \tag{3.1}$$

В результате придем к системе ($y\in[0,\tau)$)

$$\alpha_1^{+0}(\tau-y)-\beta_2^{+0}(y)=\beta_2^{-0}(y)-\alpha_1^{-0}(\tau-y)-\int_0^y[\beta_2^{+1}(s)+\beta_2^{-1}(s)+$$
$$+\alpha_1^{+1}(\tau-s)+\alpha_1^{-1}(\tau-s)]\,ds+\int_0^y d\eta\int_{\eta+\tau-y}^{\tau}[F^+(s,\eta)+F^-(s,\eta)]\,ds,$$

$$\alpha_2^{+0}(y)-\beta_2^{+0}(y)=\beta_2^{-0}(y)-\alpha_2^{-0}(y)+\int_y^{\tau}[\beta_2^{+1}(s)+\beta_2^{-1}(s)-\alpha_2^{+1}(s)-$$
$$-\alpha_2^{-1}(s)]\,ds+\int_y^{\tau}d\eta\int_{y+\tau-\eta}^{\tau}[F^+(s,\eta)+F^-(s,\eta)]\,ds, \tag{3.2}$$

$$\alpha_2^{+0}(y)-\beta_1^{+0}(\tau-y)=\beta_1^{-0}(\tau-y)-\alpha_2^{-0}(y)+\int_0^y[\beta_1^{+1}(\tau-s)+\beta_1^{-1}(\tau-s]+$$
$$+\alpha_2^{+1}(s)+\alpha_2^{-1}(s)]\,ds+\int_{\tau-y}^{\tau}d\eta\int_0^{\eta-\tau+y}[F^+(s,\eta)+F^-(s,\eta)]\,ds,$$

$$\alpha_1^{+0}(\tau+y)+\beta_1^{+0}(\tau-y)=\beta_1^{-0}(\tau-y)-\alpha_1^{-0}(\tau-y)+\int_0^{\tau-y}[\beta_1^{+1}(s)+\beta_1^{-1}(s)-$$
$$-\alpha_1^{+1}(s)-\alpha_1^{-1}(s)]\,ds+\int_0^{\tau-y}d\eta\int_0^{\tau-y-\eta}[F^+(s,\eta)+F^-(s,\eta)]\,ds.$$

В этой системе левые части линейно зависимы. Продифференцировав уравнения, следующие из линейной зависимости правых частей, получим

$$-2\beta_2^{+1}(y)=2[\beta_2^{-1}(y)-\alpha_1^{+1}(\tau-y)-\alpha_1^{-1}(\tau-y)-\alpha_2^{+1}(y)-\alpha_2^{-1}(y)+$$
$$+\beta_1^{+1}(\tau-y)+\beta_1^{-1}(\tau-y)]+\int_0^y[F^++F^-](\eta+\tau-y,\eta)\,d\eta+$$
$$+\int_y^{\tau}(F^++F^-)(y+\tau-\eta,\eta)\,d\eta+\int_{\tau-y}^{\tau}(F^++F^-)(\eta-\tau+y,\eta)\,d\eta+ \tag{3.3}$$

$$+\int\limits_0^{\tau-y}(F^{+}+F^{-})(\tau-y-\eta,\ \eta)\,d\eta.$$

Имея в виду (1.7), интеграл в первом уравнении системы (3.2) можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{\eta+\tau-y}^{\tau}[F^{+}(s,\eta)+F^{-}(s,\eta)]\,ds=\int\limits_0^y\int\limits_{\eta-\tau-y}^{\tau}Q(s,\eta)\,dsd\eta+$$

$$+\int\limits_0^y\Big\{\alpha_1^{+0}(\tau-s)\int\limits_0^{y-s}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta+\beta_2^{+0}(s)\int\limits_{s+\tau-y}^{\tau}\alpha_2^{-1}(\eta)\,d\eta-$$

$$-\beta_2^{+1}(s)\int\limits_{s+\tau-y}^{\tau}\alpha_2^{-0}(\eta)\,d\eta\Big\}\,ds-\int\limits_{\tau-y}^{\tau}\beta_1^{+0}(\tau-s)\int\limits_{2\tau-s-y}^{\tau}\alpha_1^{-1}(\eta)\,d\eta,\tag{3.4}$$

где

$$Q(s,\eta)=\alpha_2^{+1}(s)\,\beta_2^{-0}(\eta)-\alpha_2^{+0}(s)\,\beta_2^{-1}(\eta)-\alpha_1^{+1}(s)\,\beta_1^{-0}(\eta)+\alpha_1^{-0}(s)\,\beta_1^{+1}(\eta).\tag{3.5}$$

Аналогичными преобразованиями интегралов остальных 2-х уравнений системы (3.2) и в уравнении (3.3) придем к системе

$$V(y)=\Phi(y)+\int\limits_{\eta}^{y}A_1(y-s)\,V(s)\,ds+\int\limits_{\tau-y}^{\tau}A_2(y+s)\,V(s)\,ds+\tag{3.6}$$

$$+\int\limits_y^{\tau}A_3(y-s)\,V(s)\,ds+\int\limits_0^{\tau-y}A_4(y+s)\,V(s)\,ds.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$V(y)=(\alpha_1^{+0}(\tau-y),\ \beta_2^{+0}(y),\ \beta_1^{+0}(\tau-y),\ \beta_2^{+1}(y))^{tr},$$

$$\Phi(y)=(\Phi_1(y),\ \Phi_2(y),\ \Phi_3(y),\ \Phi_4(y))^{tr},\tag{3.7}$$

$$\Phi_1(y)=\alpha_2^{+0}(y)+\alpha_2^{-0}(y)-\alpha_1^{-0}(\tau-y)+\int\limits_0^y[\beta_2^{-1}(s)-\alpha_1^{+1}(\tau-s)-$$

$$-\alpha_1^{-1}(\tau-s)]\,ds-\int\limits_y^{\tau}[\beta_2^{-1}(s)-\alpha_2^{+1}(s)-\alpha_2^{-1}(s)]\,ds+\int\limits_0^y\int\limits_{\eta+\tau-y}^{\tau}Q(s,\eta)\,dsd\eta-$$

$$-\int\limits_y^{\tau}\int\limits_{y+\tau-\eta}^{\tau}Q(s,\eta)\,dsd\eta,\tag{3.8}$$

$$\Phi_2(y)=\alpha_2^{+0}(y)+\alpha_2^{-0}(y)-\beta_2^{-0}(y)-\int\limits_y^{\tau}[\beta_2^{-1}(s)-\alpha_2^{+1}(s)-$$

$$-\alpha_2^{-1}(s)]\,ds-\int\limits_y^{\tau}\int\limits_{y+\tau-\eta}^{\tau} Q(s,\eta)\,ds\,d\eta, \tag{3.9}$$

$$\Phi_3(y)=\alpha_2^{+0}(y)+\alpha_2^{-0}(y)-\beta_1^{-0}(\tau-y)-\int\limits_0^y[\beta_1^{+1}(\tau-s)+\beta_1^{-1}(\tau-s)-$$

$$-\alpha_2^{+1}(s)-\alpha_2^{-1}(s)]\,ds-\int\limits_{\tau-y}^{\tau}\int\limits_0^{\eta-\tau+y} Q(s,\eta)\,ds\,d\eta, \tag{3.10}$$

$$\Phi_4(y)=\alpha_1^{+1}(\tau-y)+\alpha_1^{-1}(\tau-y)+\alpha_2^{+1}(y)+\alpha_2^{-1}(y)-$$

$$-\beta_2^{-1}(y)-\beta_1^{+1}(\tau-y)-\beta_1^{-1}(\tau-y)-\frac{1}{2}\Big[\int\limits_0^y Q(s+\tau-y,s)\,ds+$$

$$+\int\limits_y^{\tau} Q(y+\tau-s,s)\,ds+\int\limits_{\tau-y}^{\tau} Q(s-\tau+y,s)\,ds+$$

$$+\int\limits_0^{\tau-y} Q(\tau-y-s,s)\,ds\Big], \tag{3.11}$$

где $Q(s,\eta)$ определяется с помощью формулы 3.5 и

$$A_1(y-s)=$$

$$=\begin{vmatrix} \int\limits_0^{y-s}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta & \int\limits_{s+\tau-y}^{\tau}\alpha_2^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & 1-\int\limits_{s+\tau-y}^{\tau}\alpha_2^{-0}(\eta)\,d\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int\limits_0^{y-s}\alpha_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_1^{-1}(y-s) & -\frac{1}{2}\alpha_2^{-1}(s+\tau-y) & \frac{1}{2}\alpha_1^{-1}(y-s) & \frac{1}{2}\alpha_2^{-0}(s+\tau-y) \end{vmatrix}, \tag{3.12}$$

$$2A_2(y+s)=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2\int\limits_{2\tau-s-y}^{\tau}\alpha_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\int\limits_{2\tau-s-y}^{\tau}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta & -2\int\limits_0^{s-\tau+y}\alpha_2^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & 2\int\limits_0^{s-\tau+y}\alpha_2^{-0}(\eta)\,d\eta \\ -\beta_1^{-1}(2\tau-y-s) & -\alpha_2^{-1}(s-\tau+y) & \alpha_1^{-1}(2\tau-s-y) & \alpha_2^{-0}(s-\tau+y) \end{vmatrix}, \tag{3.13}$$

$$A_3(y-s)=$$

$$=\left|\begin{matrix} 0 & -\int\limits_{y+\tau-s}^{\tau}\alpha_2^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & -\left(1+\int\limits_{y+\tau-s}^{\tau}\alpha_2^{-0}(\eta)\,d\eta\right) \\ 0 & -\int\limits_{y+\tau-s}^{\tau}\alpha_2^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & -\left(1+\int\limits_{y+\tau-s}^{\tau}\alpha_2^{-0}(\eta)\,d\eta\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_1^{-1}(s-y) & -\frac{1}{2}\alpha_2^{-1}(y+\tau-s) & \frac{1}{2}\alpha_1^{-1}(s-y) & \frac{1}{2}\alpha_2^{-0}(y+\tau-s) \end{matrix}\right|, \tag{3.14}$$

$$A_4(y+s)=$$

$$=\left|\begin{matrix} -\int\limits_{y+s}^{\tau}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & \int\limits_{y+s}^{\tau}\alpha_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 \\ -\int\limits_{y+s}^{\tau}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & \int\limits_{y+s}^{\tau}\alpha_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_1^{-1}(y+s) & -\frac{1}{2}\alpha_2^{-1}(\tau-y-s) & \frac{1}{2}\alpha_1^{-1}(y+s) & \frac{1}{2}\alpha_2^{-0}(\tau-y-s) \end{matrix}\right|. \tag{3.15}$$

Матричные уравнения (3.6) с помощью обозначений

$$A(y-s)=\begin{cases} A_1(y-s) & \text{при} \quad 0<s\leqslant y \\ A_3(y-s) & \text{при} \quad y<s<\tau, \end{cases} \tag{3.16}$$

$$B(y+s)=\begin{cases} A_2(y+s) & \text{при} \quad \tau-y\leqslant s<\tau \\ A_4(y+s) & \text{при} \quad 0<s<\tau-y \end{cases} \tag{3.17}$$

можно записать в виде системы интегральных уравнений с разностно-суммарным ядром

$$V(y)=\Phi(y)+\int\limits_0^{\tau}[A(y-s)+B(y+s)]\,V(s)\,ds. \tag{3.18}$$

Известен эффективный метод решения уравнений типа (3.18) (см. [1], [2]).

Заметим, что система (3.18) относительно компонент $\beta_2^{+0}$ и $\beta_1^{+0}$ вольтеррова и это можно эффективно использовать.

Таким образом, мы пришли к следующему алгоритму построения обратных к $J-\mathbf{K}^{\pm}$ операторов.

1. Обратим оператор $J-\mathbf{K}^{+}$ на элементах $(i=0,1)$ $\left.\frac{\partial K^{+}(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}$

$$\left.\frac{\partial^i K^+(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=\tau}, \quad \left.\frac{\partial K^+(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}, \text{ а } J-K^- \text{ на элементах } (i=0,1)$$

$$\left.\frac{\partial^i K^-(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}, \quad \left.\frac{\partial^i K^-(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=\tau}, \quad \left.\frac{\partial^i K^-(x,t)}{\partial x^i}\right|_{x=0}, \quad \left.\frac{\partial^i K^-(x,t)}{\partial x^i}\right|_{x=\tau}$$

(см. (1.8)).

2. Решим систему (3.18) с помощью известного рекуррентного алгоритма (см. [1], [2]).

3. С помощью формул (2.6)—(2.9) восстановим резольвентные ядра $R^\pm$.

## § 4. Некоторые замечания

1. Требования гладкости функций $f$, $g$ и $H$ не являются существенными. Функции $f$ и $g$ достаточно считать суммируемыми, а $H$ — имеющей слабые сингулярности на $\partial D$. В этом случае формулы § 2, восстанавливающие резольвенту, сохраняют свою силу (см. также [1], § 2).

В случае чисто гармонического ($f \equiv g \equiv 0$) ядра можно воспользоваться более простой схемой (см. [1], пример 5).

2. В принципе, для обращения оператора $J - \mathbf{K}^+$ достаточно предварительно решить 8 уравнений, т. е. в алгоритме § 3 использованы избыточные условия. Это является следствием того, что применена формула Грина (2.1), в то время, как значения $H$ и $\frac{\partial H}{\partial n}$ на $\partial D$ не независимы. Однако использование функции Грина для решения задачи Дирихле или Неймана в квадрате $D$ приводит к дополнительным сложностям и вряд ли целесообразно с прикладной точки зрения.

3. Изложенный метод легко обобщается на случай оператора на полуинтервале ($\tau=\infty$). В этом случае $f \in L_1(-\infty, +\infty)$, $g \in L_1(0,\infty)$, а $H$ можно считать достаточно быстро убывающей в квадрате $x, t>0$, обеспечив ограниченность операторов $J-\mathbf{K}^\pm$, скажем в $L_1(0,\infty)$.

В этом случае основные формулы примут вид:

$$R^\pm(x,t) = \frac{1}{2}[G_1(x,t) \mp G(x,t)], \quad 0<t\leqslant x<\infty, \tag{4.1}$$

$$R^\pm(x,t) = \frac{1}{2}[G_4(x,t) \mp G(x,t)], \quad 0<x\leqslant t<\infty, \tag{4.2}$$

где приняты следующие обозначения:

$$F^\pm(x,t) = \alpha_1^{\pm 0}(x)\,\beta_1^{\mp 1}(t) - \alpha_1^{\pm 1}(x)\,\beta_1^{\mp 0}(t), \tag{4.3}$$

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty (F^- - F^+)(s,\tau)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+(t-\tau)^2}}\,ds\,d\tau + \right.$$

$$+\int_0^\infty [\alpha_1^{+1}(s) - \alpha_1^{-1}(s)]\ln\frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+t^2}}\,ds +$$

$$+\int_0^\infty [\alpha_1^{-0}(s)-\alpha_1^{+0}(s)]\frac{t}{(x-s)^2+t^2}\,ds+\int_0^\infty [\beta_1^{-1}(s)-\beta_1^{+1}(s)]\times \tag{4.4}$$

$$\times\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(t-s)^2}}\,ds+\int_0^\infty [\beta_1^{+0}(s)-\beta_1^{-0}(s)]\,\frac{x}{x^2+(t-s)^2}\,ds,$$

$\alpha_1^{\pm i}$, $\beta_1^{\pm i}$ $(i=0,1)$ определяются из соответствующих интегральных уравнений (1.8), где вместо $\tau$ подставлено $\infty$, а $G_1$ и $G_4$ определяются, соответственно, из (2.2) и (2.5).

Приравнивая значения резольвент (4.1) и (4.2) на прямой $x=t$, вместо системы (3.3) получим уравнения

$$\alpha_1^{+0}(y)=\varphi(y)+\int_0^y a(y-s)\,\alpha_1^{+0}(s)\,ds, \tag{4.5}$$

где

$$\varphi(y)=\beta_1^{+0}(y)+\beta_1^{-0}(y)-\alpha_1^{-0}(y)+\int_0^y [\beta_1^{+1}(s)+\beta_1^{-1}(s)-$$

$$-\alpha_1^{+1}(s)-\alpha_1^{-1}(s)]\,ds+\int_0^y ds\int_0^{y-s}[\alpha_1^{-0}(s)\,\beta_1^{+1}(\eta)-$$

$$-\alpha_1^{-1}(s)\,\beta_1^{+0}(\eta)-\alpha_1^{+1}(s)\,\beta_1^{-0}(\eta)]\,d\eta,$$

$$a(y-s)=\int_0^{y-s}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta.$$

Таким образом, в случае $\tau=\infty$ получим следующий алгоритм построения обратного оператора к $J+\mathbf{K}^{\pm}$:

1. Из семи соответствующих интегральных уравнений (1.8) найдем

$$\alpha_1^{-i},\ \alpha_1^{+1},\ \beta_1^{\pm i}\ (i=0,\ 1).$$

2. Решим вольтерровое интегральное уравнение с разностным ядром (4.5).

3. С помощью формул (4.1), (4.2) восстановим резольвентные ядра $R^{\pm}$.

Институт математики АН Армянской ССР.
Кироваканский филиал ЕрПИ

Поступила 14. III. 1985

Ա. Ա. ՊԱՊՈՅԱՆ. Տարբերակա-գումարային և հարմոնիկ ֆունկցիաների գումար կորիզով ինտեգրալային օպերատորի մասին *(ամփոփում)*

*Դիտարկվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի օպերատոր, որի կորիզը տարբերակա-գումարային և հարմոնիկ ֆունկցիաների գումար է։ Մշակված է հակադարձ օպերատորի կառուցման ալգորիթմ։*

A. A. PAFOIAN. *On the integral operators with sum-difference-harmonic kernel* (summary)

The Fredholm integral operator of the second kind is considered, whose kernel is a sum of a function depending on the sum of arguments, a function depending on their difference and a harmonic function. An algorithm for constructing the inverse operator is given.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян*. Структура резольвент некоторых интегральных операторов, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVII, № 6, 1982, 442—463.
2. *И. И. Кальмушевский*. О решении некоторых интегральных уравнений с ядрами, зависящими от суммы и разности аргументов, Диф. уравн. 16, № 5, 1980, 941—943.

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ



## СОДЕРЖАНИЕ



## CONTENTS