ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացվող հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском английском французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилии автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

1985

ԳԻՆԸ 85 Կ.
ЦЕНА 85 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 3, 1985 Математика

УДК 517.53.57

В. А. МАРТИРОСЯН

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НА ПЛОСКОСТИ МНОГОЧЛЕНАМИ С ПРОПУСКАМИ

1°. Пусть E — компакт из конечной комплексной плоскости **C**, $A(E)$ — банахово пространство всех непрерывных на компакте E и голоморфных на его внутренности комплексных функций с нормой $\|f\| = \sup|f|(E)$. Проблема возможности равномерного приближения многочленами на компактах из **C**, как известно, была исчерпывающе решена в 1951 г. С. Н. Мергеляном [1]: оказалось, что система степеней $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространстве $A(E)$ тогда и только тогда, когда компакт E имеет связное дополнение $\mathbf{C}\setminus E$. В этой связи сперва в совместной с Н. У. Аракеляном работе [2] и затем в работах [3], [4] изучалась задача о возможности равномерного приближения на общих компактах из **C** многочленами с пропусками. Чтобы сформулировать основной результат о приближении такими многочленами (см. [4]), для заданных из **C** компакта E и точки h введем обозначение

$$d_E(h) = \min_{z\in E} |z - h|.$$

Теорема А. *Пусть* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— подпоследовательность натуральных чисел плотности единица,* $E\subset\mathbf{C}$ *— компакт со связным дополнением* $\mathbf{C}\setminus E$, *внутренность* E^0 *которого не содержит нуля. Тогда система функций*

$$\{z^{p_n}\}_{n=0}^{\infty},\ p_0 = 0, \tag{1}$$

полна в пространстве $A(E)$, *если* E *удовлетворяет одному из следующих условий:*

а) 0 *не является граничной точкой для каждой компоненты* E^0;

в) *существует такая последовательность точек* $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ *из* $\mathbf{C}\setminus\overline{E^0}$, *что* $\lim\limits_{m\to+\infty} h_m = 0$ *и*

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{|h_m|}{d_{\overline{E^0}}(h_m)} < \infty. \tag{2}$$

С целью дальнейшего изучения указанной задачи приближения целесообразно ввести следующие классы компактов. Для заданного числа α, $0<\alpha\leqslant 1$, обозначим через B_α класс всех компактов E, $0\in\partial E$ каждый из которых ограничен спрямляемой жордановой кривой, участок которой из некоторой окрестности нуля (для каждого компакта — своей) разбивается нулем на две дуги, содержащиеся, за исключением нуля, внутри угла $\{z\in\mathbf{C}: |\arg z| < \pi\alpha\}$ и имеющие в качестве односторонних касательных в нуле разные стороны этого угла.

Ясно, что компакты класса B_1 являются одними из простейших компактов, которые не удовлетворяют предположениям теоремы A. Поэтому равномерные приближения многочленами с пропусками на компактах из B_1 (а также из B_α), помимо самостоятельного интереса, важны также с точки зрения выяснения точности условия (2) этой теоремы.

В настоящей работе изучаются необходимые условия равномерного приближения многочленами с пропусками на компактах из класса B_α $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Оказывается, что в качественном отношении возможность приближения на компактах из B_α зависит от порядка касания в нуле граничных дуг этих компактов со сторонами угла $\{z \in \mathbf{C}: |\arg z| < \pi\alpha\}$. С помощью полученных результатов устанавливается точность условия (2) теоремы A.

Достаточные условия равномерного приближения многочленами с пропусками на компактах класса B_1 будут приведены в другой работе.

Пользуясь случаем, благодарю Н. У. Аракеляна за обсуждение результатов работы.

2°. Для заданных подпоследовательности натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и числа α, $0<\alpha\leqslant 1$, введем функцию

$$\rho_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha \ln(1+t) & \text{при } 0 \leqslant t < 1, \\ \alpha \ln(1+t) - \sum\limits_{1<p_n<t} \dfrac{1}{p_n} & \text{при } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Эта функция играет важную роль при изучении необходимых условий равномерного приближения многочленами с пропусками на компактах класса B_α. Оценим сперва с ее помощью следующую вспомогательную функцию*:

$$h_\alpha(z) = \exp\left[-2\alpha z \ln(1+z)\right] \frac{H(z)}{(1+z)^2}, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0, \tag{3}$$

где

$$H(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{p_n+1+z}{p_n+1-z} \exp\left(\frac{2z}{p_n+1}\right).$$

Ясно, что $h_\alpha(z)$ голоморфна при $\operatorname{Re} z > 0$ и $h_\alpha(p_n+1) = 0$ при $n=0, 1, \cdots$. Из известной оценки (см. [5]; [6], стр. 161) функции $H(z)$ имеем

$$|h_\alpha(z)| \leqslant \frac{C_1}{1+|z|^2} \exp\left(\pi\alpha |z| - C_2 \operatorname{Re} z\right) \left[\frac{\psi(|z|)}{(1+|z|)^{2\alpha}}\right]^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0,$$

где $C_1 > 0$, C_2 — постоянные и

$$\psi(t) = \begin{cases} \exp 2 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \exp\left\{2 \sum\limits_{0<p_n+1<t} \dfrac{1}{p_n+1}\right\} & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

Поэтому, так как при $t \to +\infty$ ограничена разность

$$\sum_{0<p_n+1<t} \frac{1}{p_n+1} - \sum_{1<p_n<t} \frac{1}{p_n},$$

---

* Здесь $\ln z$ — ветвь комплексного логарифма $\operatorname{Ln} z$, вещественнозначная при $z > 0$.

то получим оценку

$$|h_\alpha(z)| \leqslant \frac{C_1}{1+|z|^2} \exp\left[\pi\alpha|z| - (C_2 + 2\rho_\alpha(|z|))\operatorname{Re} z\right], \ \operatorname{Re} z > 0. \tag{4}$$

Следующее простое утверждение доставляет *необходимое во всем классе* B_α условие приближения многочленами с пропусками.

Теорема 1. *Пусть компакт* $E \in B_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ *и подпоследовательность натуральных чисел* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\rho_\alpha(t)}{\ln t} > 0. \tag{5}$$

Тогда система функций (1) не полна в пространстве $A(E)$.

Доказательство. Рассматривая $A(E)$ как подпространство банахова пространства $C(\partial E)$ всех непрерывных на ∂E комплексных функций с нормой $\|f\| = \sup|f|(\partial E)$ и учитывая теоремы Хана-Банаха и Рисса, достаточно построить комплексную меру Бореля μ на ∂E, удовлетворяющую соотношениям

$$\int\limits_{\partial E} z^{p_n}\, d\mu(z) = 0, \ n = 0, 1, \cdots, \tag{6}$$

$$\int\limits_{\partial E} z^{q}\, d\mu(z) \neq 0, \ q \in \mathbf{N} \setminus \{p_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{7}$$

Для этого, замечая, что по (5) найдется такое β, $0 < \beta < \alpha$, что

$$\varliminf_{t\to+\infty} \rho_\beta(t) > -\infty, \tag{8}$$

рассмотрим функцию

$$f(z) = e^{Cz} h_\beta(z), \ \operatorname{Re} z > 0,$$

где $h_\beta(z)$ определяется по формуле (3) при $\alpha = \beta$, C — подходящая постоянная. Функция f голоморфна при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $f(p_n+1) = 0$ при $n = 0, 1, \cdots$. Кроме того, из оценки (4) для $h_\beta(z)$ и (8) следует, что экспоненциального типа при $\operatorname{Re} z > 0$ и ее индикатриса $h(\varphi)$ удовлетворяет соотношениям

$$h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \pi\beta, \tag{9}$$

$$h(0) \leqslant C_3, \tag{10}$$

где C_3 — достаточно малое число за счет подходящего выбора постоянной C.

Рассмотрим теперь преобразование Лапласа F функции f. Как известно, $F(w)$ продолжается аналитически в область из $\mathbf{C}$, являющуюся объединением полуплоскостей

$$\operatorname{Re}(we^{-i\varphi}) > h(-\varphi), \ |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot$$

Обозначим через Γ образ кривой ∂E при отображении $z = Lnw$, содержащийся в полосе $\{w \in \mathbf{C} : |\mathrm{Im} w| < \pi\}$. Так как $E \in B_\alpha$, то при движении вдоль полосы $\{w \in \mathbf{C} : |\mathrm{Im}\, w| < \pi\alpha\}$ налево ветви кривой Γ, начиная с некоторого места, будут изнутри этой полосы приближаться к ее разным сторонам, как к своим касательным. Поэтому в силу условий (9), (10), $\beta < \alpha$ и выбором постоянной C можно обеспечить ограниченность $|F(w)|$ при $w \in \Gamma$ и справедливость (см. [6], стр. 78; [7]) формулы обращения

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{zw} F(w)\, dw, \ \mathrm{Re}\ z > 1,$$

где интеграл берется по направлению, положительному относительно множества особенностей F. Совершив замену переменной $e^w = t$, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial E} t^{z-1} F(\mathrm{Ln}\ t)\, dt, \ \mathrm{Re}\ z \geqslant 1$$

и остается отметить, что формула

$$\mu(e) = \int\limits_{e} F(\mathrm{Ln}\ t)\, dt$$

определяет на борелевских подмножествах $e \subseteq \partial E$ комплексную меру, удовлетворяющую (6), (7): ограниченность вариации μ следует из ограниченности $|F(\mathrm{Ln}\ t)|$ при $t \in \partial E$ и спрямляемости ∂E. Теорема доказана.

Установленная теорема приводит к интересному выводу относительно указанной в начале статьи общей задачи приближения многочленами с пропусками.

Отметим, что в работах [2], [4] при обсуждении условий теоремы A было установлено, что в случае, когда $0 \in \partial E$, в этой теореме, вообще говоря, невозможно понижение плотности. Именно, были найдены такие компактные счетные множества E, $0 \in \partial E$, удовлетворяющие условиям теоремы A, что для любого числа δ, $0 \leqslant \delta < 1$, *существует подпоследовательность* натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотности δ, для которой система функций (1) не полна в пространстве $A(E)$.

Из теоремы 1 непосредственно имеем

Следствие. *Если компакт $E \in B_1$, то для любой последовательности натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{n}{p_n} < 1,$$

система функций (1) *не полна в пространстве* $A(E)$.

3°. *Необходимое индивидуальное для компакта из B_α условие* равномерного приближения многочленами с пропусками удается получить при дополнительном ограничении на компакт в окрестности нуля. Формулировке и доказательству этого условия предпошлем одно понятие. Медленно изменяющейся функцией назовем положительную непрерывную на полуоси $t \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемую на $t > 0$ функцию l, для которой

$$\lim_{t \to +\infty} t \frac{l'(t)}{l(t)} = 0.$$

Для такой функции, как известно, функция $1 + \dfrac{\ln l(t)}{\ln t}$ является уточненным порядком в смысле Валирона при порядке один ([8], стр. 47). По заданной медленно изменяющейся функции l определим функцию l^* следующим образом:

$$l^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t \leqslant 1, \\ \int\limits_0^t u^{-1} l(u)\, du & \text{при } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *подпоследовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{t \to +\infty} \rho_\alpha(t) = +\infty \quad (0 < \alpha \leqslant 1), \tag{11}$$

и E — *компакт из* B_α, *граница которого в некоторой окрестности нуля есть объединение дуг* γ_1, γ_2, *имеющих в полярных координатах* r, θ $(-\pi < \theta \leqslant \pi)$, *соответственно, уравнения*

$$\theta = -\pi\alpha + \omega(r),\ \theta = \pi\alpha - \omega(r),\ 0 \leqslant r \leqslant a,$$

где $\omega(0) = 0$. *Пусть существуют числа* $p > 1$ *и* q, $0 < q < \dfrac{\pi}{2}$, *непрерывная при* $0 \leqslant r \leqslant a$ *и положительная при* $0 < r \leqslant a$ *функция* $\varkappa$, $\varkappa(0) = 0$, *и медленно изменяющаяся ограниченная функция* l *такие, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \left[\rho_\alpha(t) - \frac{p}{2} l^*(t)\right] = +\infty \tag{12}$$

и при каком-нибудь b, $0 < b \leqslant a$,

$$\sup_{0 < r < b} \int\limits_0^{+\infty} \exp\left\{t\left[\omega(r) + \varkappa(r)\left(\ln\frac{1}{r} - 2\rho_\alpha(t) + pl^*(t)\right) - ql(t)\right]\right\} \times$$

$$\times \frac{dt}{1+t^2} < +\infty. \tag{13}$$

Тогда система функций (1) не полна в пространстве $A(E)$.

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1, достаточно построить комплексную меру Бореля μ на ∂E, удовлетворяющую (6), (7).

Для этого рассмотрим функцию

$$f(z)=e^{Cz}\frac{h_2(z)}{g(z)},\quad \operatorname{Re} z\geqslant 0,$$

где $h_a(z)$ определяется формулой (3), C — подходящая постоянная и $g(z)$ — каноническое произведение Вейерштрасса с отрицательными нулями, имеющими функцию количества $n(t)=[tl(t)]$ при $t>t_1>0$ (здесь $[x]$ — целая часть x). Ясно, что f голоморфна при $\operatorname{Re} z\geqslant 0$ и $f(p_n+1)=0$ при $n=0,1,\cdots$. Чтобы оценить рост f отметим сперва, что из оценки (4) для $h_a(z)$ имеем

$$|f(z)\,g(z)|\leqslant\frac{C_1}{1+|z|^2}\exp\left[\pi\alpha\,|z|-(C_2-C+2\varphi_a(|z|))\operatorname{Re} z\right],\quad \operatorname{Re} z\geqslant 0, \tag{14}$$

где $C_1>0$, C_2 — постоянные. Далее, из известной асимптотики канонических произведений Вейерштрасса с нулями, лежащими на одном луче (см. [8], глава 1, лемма 9), следует, что соответственно случаям расходимости или сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} t^{-1}\,l(t)\,dt$$

равномерно по φ, $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$, справедливы соотношения

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln|g(re^{i\varphi})|+\int\limits_0^r t^{-1}\,dn(t)\,r\cos\varphi}{rl(r)(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)}=1 \tag{15}$$

или

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln|g(re^{i\varphi})|-\int\limits_r^{+\infty} t^{-1}\,dn(t)\,r\cos\varphi}{rl(r)(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)}=1. \tag{16}$$

Поэтому замечая, что соответственно этим случаям имеем

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{l^*(r)}\int_0^r t^{-1}\,dn(t)=1,\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{l(r)}{l^*(r)}=0$$

или

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{l_1(r)}\int_r^{+\infty} t^{-1}\,dn(t)=1,\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{l(r)}{l_1(r)}=0,$$

где

$$l_1(r)=\int_r^{+\infty} t^{-1}\,l(t)\,dt,$$

и учитывая условия (11), (12), из (14)—(16) получим, что f экспоненциального типа при $\operatorname{Re} z\geqslant 0$ и ее индикатриса $h(\varphi)$ удовлетворяет соотношениям

$$h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\leqslant\pi\alpha, \tag{17}$$

$$h(\varphi)=-\infty,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}\cdot \tag{18}$$

Кроме того, при подходящем выборе постоянной C для фигурирующих в формулировке теоремы чисел $p>1$ и q, $0<q<\frac{\pi}{2}$, найдется такое число δ, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, что при $\delta\leqslant|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$ будем иметь

$$|f(re^{i\varphi})|\leqslant\frac{C_1}{1+|z|^2}\exp\{\pi\alpha r-[1+2\rho_\alpha(r)-pl^*(r)]\,r\cos\varphi-qrl(r)\},\ r>0, \tag{19}$$

где постоянная $C_1>0$ не зависит от φ.

Рассмотрим теперь преобразование Лапласа функции f

$$F(w)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-wt}f(t)\,dt.$$

Как известно, $F(w)$ продолжается аналитически в область из $\mathbf{C}$, являющуюся объединением полуплоскостей

$$\operatorname{Re}(we^{-i\varphi})>h(-\varphi),\ |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2},$$

причем продолжение в каждую полуплоскость задается формулой

$$F(w)=e^{-i\varphi}\int\limits_0^{+\infty}f(te^{-i\varphi})\,e^{-twe^{-i\varphi}}\,dt,\ \operatorname{Re}(we^{-i\varphi})>h(-\varphi). \tag{20}$$

Обозначим через Γ образ кривой ∂E при отображении $z=\operatorname{Ln}w$, содержащийся в полосе $\{w\in\mathbf{C}:|\operatorname{Im}w|<\pi\}$ и через Γ_1, Γ_2 — части Γ, соответствующие при этом отображении дугам γ_1, γ_2. Так как $E\in B_\alpha$, то при движении вдоль полосы $\{w\in\mathbf{C}:|\operatorname{Im}w|<\pi\alpha\}$ налево ветви кривой Γ начиная с некоторого места будут изнутри этой полосы приближаться к ее разным сторонам, как к своим касательным. Поэтому, в силу (17), (18), будет справедлива (см. [6], стр. 78; [7]) формула обращения

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}e^{zw}F(w)\,dw,\ \operatorname{Re}z>0,$$

где интеграл берется по положительно ориентированной границе Γ_ε полуполосы $\{w\in\mathbf{C}:\operatorname{Re}w<x_0,\ |\operatorname{Im}w|<\pi\alpha+\varepsilon\}$, $0<\varepsilon<4-\pi\alpha$.

Докажем, что при $\operatorname{Re}z>1$ эта формула справедлива при замене контура Γ_ε на кривую Γ, положительно ориентированную относительно особенностей $F(w)$. Из (18) следует, что $F(w)$ голоморфна при $w\in\mathbf{C}$. Поэтому, учитывая интегральную теорему Коши, теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и спрямляемость, ∂E, достаточно установить равномерную ограниченность $|F(w)|$ по значениям w, лежащим на Γ и правее Γ при $|\mathrm{Im}\, w| \leqslant \pi\alpha+\varepsilon$ как только $\mathrm{Re}\, w$ достаточно мало. Положим $w = x+iy$, тогда $x=\ln r$, $y=\theta$, а дуги Γ_1, Γ_2 будут иметь в плоскости w, соответственно, уравнения $y=-\pi\alpha+\omega(e^x)$, $y=\pi\alpha-\omega(e^x)$, $x\leqslant \ln a$. Оценим $|F(w)|$ при $\pi\alpha-\omega(e^x)\leqslant y\leqslant \pi\alpha+\varepsilon$ или $-\pi\alpha-\varepsilon\leqslant y\leqslant -\pi\alpha+\omega(e^x)$ и при $x\leqslant \ln b_1$, где b_1, $0<b_1\leqslant b$ — достаточно малое число (b фигурирует в (13)). Для этого замечая, что в силу (18) для $w\in C$ формула (20 ; справедлива при любом φ, $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, выберем φ в (20) следующим образом: при $-\pi\alpha-\varepsilon\leqslant y\leqslant -\pi\alpha+\omega(e^x)$ положим $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$, $\cos\varphi=\varkappa(e^x)$, а при $\pi\alpha-\omega(e^x)\leqslant y\leqslant \pi\alpha+\varepsilon$ положим $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi=\varkappa(e^x)$, где $\varkappa$ — заданная по условию теоремы функция. Тогда, так как для достаточно близких к $\frac{\pi}{2}$ значений φ, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, справедливо неравенство $1-\sin\varphi\leqslant\frac{1}{4}\cos\varphi$, то учитывая свойства функции $\varkappa$ и выбирая достаточно малым число b_1, $0<b_1<b$, при $x\leqslant \ln b_1$ из (19), (20) получим

$$|F(x+iy)|\leqslant C_3\int_0^{+\infty}\exp\{t[\pi\alpha-y\sin\varphi-(1+2\rho_\alpha(t)-pl^*(t)+x)\cos\varphi-$$

$$-ql(t)]\}\frac{dt}{1+t^2}\leqslant C_3\int_0^{+\infty}\exp\Big\{t\Big[\omega(e^x)+\varkappa(e^x)\Big(-1-2\rho_\alpha(t)+pl^*(t)-x+$$

$$+\frac{\pi\alpha+\varepsilon}{4}\Big)-ql(t)\Big]\Big\}\frac{dt}{1+t^2}.$$

Отсюда с помощью условий $\varepsilon<4-\pi\alpha$ и (13) следует, что при $x\leqslant\ln b_1$ $F(x+iy)|$ равномерно ограничен по y, где $\pi\alpha-\omega(e^x)\leqslant y\leqslant \pi\alpha+\varepsilon$ или $-\pi\alpha-\varepsilon\leqslant y<\pi\alpha+\omega(e^x)$, и, таким образом, установлена справедливость требуемой формулы

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{zw}F(w)\,dw,\ \mathrm{Re}\, z>1.$$

Совершая замену переменной $e^w=t$, будем иметь

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E} t^{z-1}F(\mathrm{Ln}\, t)\,dt,\ \mathrm{Re}\, z\geqslant 1,$$

и теперь остается отметить, что формула

$$\mu(e)=\frac{1}{2\pi i}\int_e F(\mathrm{Ln}\, t)\,dt$$

определяет на борелевских подмножествах $e \subseteq \partial E$ комплексную меру удовлетворяющую (6), (7), причем ограниченность вариации μ следует из ограниченности $|F(\operatorname{Ln} t)|$ при $t \in \partial E$ и спрямляемости ∂E. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что если граничные дуги компактов $E_i \in B_\alpha$ $(i=1, 2)$ в некоторой окрестности нуля задаются, соответственно, уравнениями

$$\theta_i = -\pi\alpha + \omega_i(r),\ \theta_i = \pi\alpha - \omega_i(r),\ 0 \leqslant r \leqslant a,$$

причем $\omega_2(r) \leqslant \omega_1(r)$ при $0 \leqslant r \leqslant a$, то E_2 удовлетворяет предположениям теоремы 2, как только удовлетворяет им E_1.

Теорему 2 следует воспринимать как общую схему для получения необходимых индивидуальных условий приближения на компактах класса B_α. Вывод с ее помощью конкретных необходимых условий приближения требует оптимального выбора по функции ω вспомогательных функций $\varkappa$, l и параметров p, q. Легко видеть, что параметры $p>1$ и q, $0<q<\frac{\pi}{2}$, естественно брать достаточно близкими к 1 и $\frac{\pi}{2}$ соответственно. Более тонкий вопрос—выбор функции $\varkappa$. Мы произведем выбор $\varkappa$ в случае возрастающей, по существу выпуклой функции ω.

Теорема 3. *Пусть* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *подпоследовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию* (11), *и* E—*компакт из* B_α, *граница которого в некоторой окрестности нуля есть объединение дуг* γ_1, γ_2, *имеющих в полярных координатах* r, θ $(-\pi<\theta\leqslant\pi)$, *соответственно, уравнения*

$$\theta = -\pi\alpha + \omega(r),\ \theta = \pi\alpha - \omega(r),\ 0 \leqslant r < a,$$

где функция ω, $\omega(0)=0$, *возрастает и дважды дифференцируема при* $0<r\leqslant a$, *причем*

$$\omega'(r) + r\omega''(r) > 0 \quad \text{при} \quad 0<r\leqslant a,$$

$$\lim_{r\to 0} r\omega'(r)\ln\frac{1}{r} = 0.$$

Пусть существуют числа $p>1$, q $\left(0<q<\frac{\pi}{2}\right)$ *и медленно изменяющаяся ограниченная функция* l *такие, что имеет место* (12) *и для достаточно большого* $c>0$

$$\int_c^{+\infty} \exp\{t[\omega(r_t) - ql(t)]\}\frac{dt}{1+t^2} < +\infty, \tag{21}$$

где

$$\ln\frac{1}{r_t} = 2\rho_\alpha(t) - pl^*(t),\ t \geqslant c.$$

Тогда система функций (1) *не полна в пространстве* $A(E)$.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условия (13) теоремы 2 при $b=a$ и допустимой функции $\varkappa$.

Для этого определим $\varkappa$ следующим образом: $\varkappa(r) = r\omega'(r)$ при $0 < r \leqslant a$ и $\varkappa(0) = 0$. Легко видеть, что при предположениях теоремы относительно функции ω, введенная функция $\varkappa$ непрерывна при $0 \leqslant r \leqslant a$, положительна, возрастает и дифференцируема при $0 < r \leqslant a$, причем

$$\lim_{r \to 0} \varkappa(r) \ln \frac{1}{r} = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим при $0 \leqslant r \leqslant a$ функцию

$$y(r) = \exp\left\{t\left[\omega(r) + \varkappa(r)\left(\ln \frac{1}{r} - 2\rho_\alpha(t) + pl^*(t)\right)\right]\right\},$$

где t — постоянная, взятая в силу (11), (12) настолько большой, что $y(a) \leqslant 1$. Функция $y(r)$ непрерывна при $0 \leqslant r \leqslant a$, дифференцируема при $0 < r \leqslant a$, причем $y(0) = 1$, в силу (22) и $\omega(0) = 0$. Точки экстремума этой функции удовлетворяют уравнению

$$\ln \frac{1}{r} = 2\rho_\alpha(t) - pl^*(t).$$

Так как левая часть выписанного уравнения непрерывна при $0 < r \leqslant a$ и убывает, начиная от $+\infty$, то при достаточно больших t, в силу (11), (12), это уравнение имеет единственный корень r_t, причем $\lim\limits_{t \to +\infty} r_t = 0$. Поэтому увеличив при необходимости постоянную t, можно считать, что $0 < r_t < a$ при $t \geqslant c > 0$. Ясно, что при $t > c$

$$y(r_t) = \exp[\omega(r_t)] > 1$$

и значит при $t > c$ r_t будет точкой максимума функциии $y(r)$, $0 \leqslant r \leqslant a$. Для завершения доказательства теперь остается отметить, что условие (13) теоремы 2 при $b = a$ непосредственно следует из (21), (22). Теорема доказана.

Отметим, что теорема 3 (с учетом замечания к теореме 2) прозрачно выявляет зависимость необходимых условий приближения многочленами с пропусками на компактах из B_α от порядка касания в нуле граничных дуг этих компактов со сторонами угла $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi\alpha\}$. Приведем несколько следствий этой теоремы, в которых осуществлен выбор вспомогательной функции l.

Следствие 1. *Если в теореме 2*

$$\omega(r) \sim C_1 \exp(-C_2 r^{-\beta}) \quad \textit{при} \quad r \to 0,$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $\beta > 0$, *то неполнота* (1) *имеет место при условии*

$$\varliminf_{t \to +\infty} \frac{\rho_\alpha(t) - \frac{1}{2\beta} \ln\ln\ln t}{\ln\ln\ln\ln t} > \frac{1}{2\beta}.$$

Следствие 2. *Если в теореме 2*

$$\omega(r) \sim C_1 r^\beta \quad \textit{при} \quad r \to 0,$$

где $C_1 > 0$, $\beta > 0$, *то неполнота (1) имеет место при условии*

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\rho_a(t)-\frac{1}{2\beta}\ln\ln t}{\ln\ln\ln t}>\frac{1}{2\beta}.$$

Следствие 3. *Если в теореме 2*

$$\omega(r)\sim C_1\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{1-\beta}\quad \textit{при } r\to 0,$$

где $C_1>0$, $\beta>1$, *то неполнота (1) имеет место при условии*

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\rho_a(t)}{(\ln t)^{1/\beta}}>\left(\frac{2C_1\beta}{\pi}\right)^{1/\beta}.$$

Следствие 4. *Если в теореме 2*

$$\omega(r)\sim C_1\left(\ln\ln\frac{1}{r}\right)^{-1}\quad \textit{при } r\to 0,$$

где $C_1>0$, *то неполнота (1) имеет место при условии*

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\rho_a(t)}{\ln t}\ln\ln t>\frac{C_1}{\pi}.$$

Следствия 1—4 получаются из теоремы 3, если при $t\geqslant t_0>0$ выбрать в качестве функции $l(t)$, соответственно,

$$\varepsilon(\ln t\ln\ln t\ln\ln\ln t)^{-1},\ \varepsilon(\ln t\ln\ln t)^{-1},\ \frac{1}{\beta}\left(\frac{2C_1\beta}{\pi}\right)^{1/\beta}(\ln t)^{-(1-1/\beta)},$$

$$\frac{2C_1(1+\varepsilon)}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\ln t}{\ln\ln t}\right)\right]^{-1},$$

где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число; при этом выбор параметров p, q не представляет трудности.

4°. Результаты предыдущего пункта позволяют установить *точность условия* (2) *теоремы A*. Приведем сперва обобщение одного результата из [4].

Следствие 5. *Если для подпоследовательности натуральных чисел* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\varliminf_{t\to+\infty}\rho_a(t)=+\infty\quad(0<a\leqslant 1),$$

то существуют компакты $E\in B_a$, *для которых система (1) не полна в пространстве* $A(E)$.

Доказательство. Достаточно указать функцию ω, удовлетворяющую условиям теоремы 2. Для этого положим в теореме 2 $\varkappa(r)=\omega(r)$, $0\leqslant r\leqslant a$, и будем считать, что для функции l

$$\int_1^{+\infty}t^{-1}l(t)\,dt<+\infty,\ \text{т. е. } l^*<C_1.$$

Пусть $s(r)$ — определенная при $0<r\leqslant 1$ положительная невозрастающая функция, $\lim\limits_{r\to 0}s(r)=+\infty$, для которой $\rho_a(t)>\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{r}+C_1+1\right)$

при $t \geqslant s(r)$. Подберем непрерывную при $0 \leqslant r \leqslant a$ и положительную при $0 < r \leqslant a$ функцию $\omega(r)$ так, что $\omega(0)=0$ и

$$0 < \omega(r)\, s(r) \ln\frac{1}{r} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad 0 < r \leqslant b \leqslant \min\{a, e^{-1}\}.$$

Тогда при $0 < r \leqslant b$ интеграл из (13) не превосходит

$$\int_0^{+\infty} \exp\left\{t\omega(r)\left[\ln\frac{1}{r} + 1 + C_1 - 2\rho_\alpha(t)\right]\right\}\frac{dt}{1+t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{s(1)} \exp\left\{t\omega(r)\left[\ln\frac{1}{r} + 1 + C_1 - 2\rho_\alpha(t)\right]\right\}\frac{dt}{1+t^2} +$$

$$+ e\int_{s(1)}^{s(r)} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{s(r)}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{2}(e+1) +$$

$$+ \int_0^{s(1)} \exp\left\{t\omega(r)\left[\ln\frac{1}{r} + 1 + C_1 - 2\rho_\alpha(t)\right]\right\}\frac{dt}{1+t^2},$$

а последний интеграл равномерно ограничен при $0 < r \leqslant b$, в силу условия $\lim\limits_{r\to 0} \omega(r) \ln\frac{1}{r} = 0$. Следствие доказано.

Докажем теперь следующую геометрическую лемму.

Лемма. *Пусть выпуклая жорданова дуга γ в полярных координатах r, θ $(-\pi < \theta \leqslant \pi)$ задается уравнением*

$$\theta = \pi\alpha - \omega(r)\ (\theta = -\pi\alpha + \omega(r)),\ 0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 < \alpha < 1,$$

где функция ω, $\omega(0) = 0$ и $0 < \omega(r) < \pi\alpha$ при $0 < r \leqslant a$, имеет непрерывную производную $\omega'(r) > 0$ при $0 < r < a$, причем

$$\lim_{r\to 0} r\omega'(r) = 0. \tag{23}$$

Тогда для произвольных чисел C и ε, $0 \leqslant C < 1$, $0 < \varepsilon < 1 - \sqrt{C}$, расстояние $d_\gamma(t)$ от точки t до дуги γ при достаточно малых $|t|$ удовлетворяет оценкам:

$$d_\gamma(t) \geqslant (1-\varepsilon)[(1-\varepsilon)^2 - C]\, |t|\, \omega((1-\varepsilon)|t|) \quad \text{при}$$

$$\pi\alpha - C\omega(C|t|) < \arg t \leqslant \pi\alpha, \tag{24}$$

$$d_\gamma(t) < (1+\varepsilon)^2\, |t|\, \omega((1+\varepsilon)|t|) \ \text{при}\ \pi\alpha - \omega(|t|) < \arg t \leqslant \pi\alpha. \tag{25}$$

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем, когда $\alpha = 1$ и дуга γ задается уравнением $\theta = \pi - \omega(r)$, $0 \leqslant r \leqslant a$. В этом случае декартовы координаты γ имеют вид $x = r\cos\theta = -r\cos\omega(r)$, $y = r\sin\theta = r\sin\omega(r)$. Так как с учетом (23) $x'(r) < 0$ при достаточно малых r, то для таких r функция $x = x(r)$ имеет непрерывную обратную функцию. Поэтому для достаточно малых по модулю и отрицательных x определена непрерывная функция $y = y(x)$. Для нее имеем

$$y'(x)=\frac{\sin\omega(r)+r\omega'(r)\cos\omega(r)}{-\cos\omega(r)+r\omega'(r)\sin\omega(r)},$$

откуда, с учетом предположений леммы относительно ω получим, что для достаточно малых по модулю и отрицательных x $y'(x)$ непрерывна и $y'(x)<0$, причем $\lim\limits_{x\to-0} y'(x)=0$. Следовательно, при достаточно малых $|t|$ через каждую точку t, $\pi-\omega(|t|)<\arg t\leqslant\pi$, будет проходить нормаль к дуге γ, пересекающая γ в единственной точке $M(x_t; y_t)\neq 0$. Ограничимся рассмотрением только таких точек t.

Обозначая $r_t=(x_t^2+y_t^2)^{1/2}$, уравнение указанной нормали

$$y-y_t=-\frac{1}{y'(x_t)}(x-x_t)$$

приведем к следующему виду:

$$y-r_t\sin\omega(r_t)=\frac{\cos\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\sin\omega(r_t)}{\sin\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\cos\omega(r_t)}(x+r_t\cos\omega(r_t)).$$

Прохождение нормали через точку t дает соотношение ($\beta=\arg t$)

$$|t|\sin\beta-r_t\sin\omega(r_t)=\frac{\cos\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\sin\omega(r_t)}{\sin\omega(r_t)+r_t\omega'(r_t)\cos\omega(r_t)}\times$$
$$\times(|t|\cos\beta+r_t\cos\omega(r_t)), \tag{26}$$

откуда имеем

$$|t|\left[-\cos\beta+\sin\beta\frac{\sin\omega(r_t)+r_t\omega'(r_t)\cos\omega(r_t)}{\cos\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\sin\omega(r_t)}\right]=$$
$$=r_t\left[\cos\omega(r_t)+\sin\omega(r_t)\frac{\sin\omega(r_t)+r_t\omega'(r_t)\cos\omega(r_t)}{\cos\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\sin\omega(r_t)}\right].$$

Отсюда учитывая, что $\pi-\omega(|t|)<\beta\leqslant\pi$ и $\lim\limits_{t\to0} r_t=0$, а также предположения леммы относительно $\omega(r)$, получим

$$\lim_{t\to0}\frac{r_t}{|t|}=1. \tag{27}$$

Далее, в силу (26) имеем

$$d_\gamma(t)=[(|t|\cos\beta+r_t\cos\omega(r_t))^2+(|t|\sin\beta-r_t\sin\omega(r_t))^2]^{1/2}=$$
$$=||t|\sin\beta-r_t\sin\omega(r_t)|\left\{1+\left[\frac{\sin\omega(r_t)+r_t\omega'(r_t)\cos\omega(r_t)}{\cos\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\sin\omega(r_t)}\right]^2\right\}^{1/2},$$

откуда получим

$$\lim_{t\to0}\frac{||t|\sin\beta-r_t\sin\omega(r_t)|}{d_\gamma(t)}=1. \tag{28}$$

Теперь уже оценки (24), (25) в случае $\alpha=1$ легко следуют из (27), (28) и монотонности ω. В самом деле, пусть числа C и ε удовлетворяют предположениям леммы. Тогда, если $|t|$ достаточно мало и $\pi - C\omega\ (C|t|) \leqslant \arg t \leqslant \pi$, то

$$d_\gamma(t) \geqslant (1-\varepsilon)|r_t \sin\omega(r_t) - |t| \sin\beta| >$$
$$\geqslant (1-\varepsilon)[(1-\varepsilon)|t| \sin\omega(r_t) - |t| \sin\{C\omega(C|t|)\}] \geqslant$$
$$\geqslant (1-\varepsilon)[(1-\varepsilon)^2 |t|\,\omega(r_t) - C|t|\,\omega(C|t|)] \geqslant (1-\varepsilon)[(1-\varepsilon)^2 - C]|t|\,\omega((1-\varepsilon)|t|).$$

С другой стороны, если $|t|$ достаточно мало и $\pi - \omega(|t|) < \arg t \leqslant \pi$, то имеем

$$d_\gamma(t) \leqslant (1+\varepsilon)\max[|t|\sin\omega(|t|),\ r_t \sin\omega(r_t)] \leqslant (1+\varepsilon)^2 |t|\,\omega((1+\varepsilon)|t|).$$

Лемма доказана.

Комбинирование теоремы 3 и приведенной леммы позволяет доказать точность условия (2) теоремы A. В частности, из следствия 4 и леммы (при $\omega(r) = C_1\left(\ln\ln\frac{1}{r}\right)^{-1}$, $C_1 > 0$) получаем следующее

Следствие 6. *Для любой подпоследовательности натуральных чисел* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *плотности единица, удовлетворяющей условию*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{p_1(t)}{\ln t} \ln\ln t > \frac{C_1}{\pi},$$

существует компакт $E \in B_1$, *для которого система (1) не полна в пространстве* $A(E)$ *и выполняются условия:*

1) *для любой последовательности* $\{h_m\}_{m=1}^\infty$ *из* $\mathbf{C}\setminus E$, $\lim\limits_{m\to+\infty} h_m = 0$, *имеем*

$$\varlimsup_{m\to+\infty} d_E(h_m) \frac{\ln\ln|h_m|^{-1}}{|h_m|} < +\infty;$$

2) *существуют такие последовательности* $\{h_m'\}_{m=1}^\infty$ *из* $\mathbf{C}\setminus E$, $\lim\limits_{m\to+\infty} h_m' = 0$, *что*

$$\varliminf_{m\to+\infty} d_E(h_m') \frac{\ln\ln|h_m'|^{-1}}{|h_m'|} > 0.$$

Замечания 1. В работе [4] были найдены дополнительные условия на компакт приближения, обеспечивающие возможность понижения плотности в теореме A в случае, когда $0 \in \partial E$ (см. стр. 170). Отметим, в этой связи, что для указанного уточнения теоремы A справедливы утверждения типа следствия 6, получающиеся переходом от класса B_1 к B_α, $0 < \alpha < 1$.

2. Результаты работы, как показывает простой анализ, остаются в силе при замене подпоследовательности натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ последовательностью возрастающих положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, где $\lambda_{n+1} - \lambda_n > h > 0$ при $n = 1, 2, \cdots$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5. VII. 1984

Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Հարթության վրա բացթողումներով բազմանդամներով հավասարաչափ մոտավորության մասին (ամփոփում)

Դիցուք B_α*-ն*, $0<\alpha<1$, *բոլոր այն* $E\subset C$, $0\in\partial E$ *կոմպակտների դասն է, որոնցից յուրաքանչյուրը սահմանափակված է ուղղելի ժորդանյան կորով, օժտված հետևյալ հատկությամբ. զրոյի որևէ շրջակայքում (յուրաքանչյուր կոմպակտի համար՝ իրենը) ընկած նրա կտորը տրոհվում է զրոյով երկու աղեղների, որոնք, զրոյից բացի, գտնվում են* $\{z\in C: |\arg z|<\pi\alpha\}$ *անկյան մեջ և որոնք ունեն միակողմանի շոշափողներ զրոյում համընկնող այդ անկյան տարբեր կողմերի հետ։*

Ներկա աշխատանքում հետազոտվում են B_α, $0<\alpha<1$, *դասի կոմպակտների վրա բացթողումներով բազմանդամներով հավասարաչափ մոտավորության անհրաժեշտ պայմանները (թեորեմներ 1—3). Ստացված արդյունքների միջոցով ապացուցվում է կամայական զրո խտությամբ բացթողումներով բազմանդամներով հավասարաչափ մոտավորության վերաբերյալ [4]-ի թեորեմ Λ-ի ճշգրտությունը (հետևանք 6)։*

V. A. MARTIROSIAN. *On uniform approximation on the plane by polynomials with gaps* (summary)

Let B_α, $0<\alpha<1$ be the class of compacts $E\subset C$, $0\in\partial E$, bounded by rectifiable Jordan curves. We assume that in each case the boundary of E in some neighbourhood of zero is separated by zero in two arcs, which lie within the angle $\{z\in C: |\arg z|<\pi\alpha\}$ and have the sides of this angle for the one sided tangents at zero.

In the persent work necessary conditions of uniform approximation by polynomials with gaps on compacts of the class B_α, $0<\alpha<1$ are investigated (theorems 1—3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного. УМН, VII, вып. 2 (48), 1952, 31—122.
2. *Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян.* Равномерные приближения на комплексной плоскости многочленами с пропусками, ДАН СССР, 235, № 2, 1977, 249—252.
3. *В. А. Мартиросян.* О равномерном приближении на комплексной плоскости многочленами с пропусками, ДАН Арм.ССР, 68, № 3, 1979, 129—136.
4. *В. А. Мартиросян.* О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками Мат. сборник, 120 (162), № 4, 1983, 451—472.
5. *W. J. Fuchs.* A generalization of Carlson's theorem, J. London Math. Soc., 21, 1945, 106—110.
6. *R. P. Boas.* Entire functions, New York, Academic Press, 1954.
7. *A. J. Macintyre.* Laplace's transformation and integral functions, Proc. London Math. Soc. (2), 45, 1938, 1—20.
8. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 3, 1985 Математика

УДК 517.956

А. А. ДАВТЯН

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЕМИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА—ЛИУВИЛЛЯ С КВАЗИОДНОРОДНОЙ НОРМОЙ

Пусть R^n — евклидово пространство точек $x=(x_1,\cdots, x_n)$, $r=(r_1,\cdots, r_n)$ — произвольный вектор, компоненты которого либо все положительны, либо все отрицательны; $\frac{1}{r^*}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}$, $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, где $\lambda_j=\frac{r^*}{r_j}$, $j=1,\cdots, n$. Если γ — вектор с положительными компонентами, положим $(\gamma,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\lambda_i$, $|\gamma|=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$. Пусть $P_\lambda^k=\left\{p(x)=\sum_{(\alpha,\lambda)<k}c_\alpha x^\alpha\right\}$ $k\geqslant 0$. Через $\rho(x)$ будем обозначать положительную при $x\neq 0$ функцию, заданную неявно равенством (см. [1], [2])

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\,\rho^{-2\lambda_i}=1. \tag{1}$$

Пространством $\overset{\circ}{w}{}_2^r$, $r_j>0$, $j=1,\cdots, n$, Соболева—Лиувилля с квазиоднородной нормой мы называем пополнение пространства $S(R^n)$ основных функций Л. Шварца по норме (см. также [3]—[5])

$$\|f\|_{\overset{\circ}{w}{}_2^r}=\|\rho^{r^*}\tilde{f}\|_{L_2}. \tag{2}$$

При $0<r^*<\frac{n}{2}$ пространство $\overset{\circ}{w}{}_2^r$ совпадает с пространством анизотропных потенциалов (см. [6])

$$\Gamma(L_2)=\left\{f: f=\int_{R^n}\frac{\varphi(y)\,dy}{\rho^{n-r^*}(x-y)},\ \varphi\in L_2\right\}.$$

Однако при $r^*>\frac{n}{2}$ $\overset{\circ}{w}{}_2^r$ уже не является „функциональным" пространством (см., например, [7]), его элементами будут классы, в которых функции, отличающиеся на многочлен $p(x)\in P_\lambda^{r^*-\frac{n}{2}}$, отождествляются; точнее $\overset{\circ}{w}{}_2^r$ является подпространством фактор—пространства $S'/P_\lambda^{r^*-\frac{n}{2}}$ (см. [6]). При $r_1=r_2=\cdots=r_n=0$ положим $\overset{\circ}{w}{}_2^r=L_2$. Пространство $\overset{\circ}{w}{}_2^{-r}$, $r_j>0$, $j=1,\cdots,n$, определим как сопряженное к $\overset{\circ}{w}{}_2^r$, причем значение функционала из $\overset{\circ}{w}{}_2^{-r}$ на $\overset{\circ}{w}{}_2^r$ задается формой, являющейся расширением по непрерывности скалярного произведения в L_2. Отметим (см. [6]), что функции из класса

$$\Phi^r(R^n)=\left\{u\in S(R^n): \int_{R^n} u(x)\,p(x)\,dx=0,\ p\in P_\lambda^{-r^*-\frac{n}{2}}\right\} \tag{3}$$

образуют плотное множество в $\overset{\circ}{w}{}_2^{-r}$, $r_j>0$, $j=1,2,\cdots,n$.

Пространства $\overset{\circ}{w}{}_2^r$ оказались удобными при рассмотрении уравнений (как интегральных, так и дифференциальных) с надлежащей однородностью (см. [6], [9], [8]). В данной работе рассматривается псевдодифференциальный оператор (п. д. о.) A с символом $A(\xi)$ вида

$$A(\xi)=\sum_{k=0}^{m} a_k(\xi')\,\xi_n^k, \tag{4}$$

где $\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$, m — натуральное число. Функции $a_k(\xi')$ считаем непрерывными при $\xi'\neq0$ и предположим, что существует $(n-1)$-мерный вектор $\mu'=(\mu_1,\cdots,\mu_{n-1})$ с положительными компонентами такой, что $a_k(t^{\mu'}\xi')=t^{m-k}a_k(\xi')$, $t>0$, $\xi'\neq0$. Пусть $\mu=(\mu',1)$. Для произвольного действительного числа s положим $r_j=\frac{s}{\mu_j}$ и введем обозначение $\overset{\circ}{w}{}_2^{r}\equiv Z_\mu^s(R^n)$. В этих обозначениях имеем: $Z_\mu^s(R^n)\subset S'(R^n)/P_\mu^{s-(|\mu|/2)}$, нормой в $Z_\mu^s(R^n)$ служит величина $\|f\|_{Z_\mu^s(R^n)}=\|\rho^{(n/|\mu|)s}\tilde{f}\|_{L_2}$.

Оператор A называется семиэллиптическим, если $A(\xi)\neq0$, $\xi\neq0$. Ясно, что символ произвольного семиэллиптического дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, содержащий только главную часть (см. [10]), может быть представлен в виде (4).

Для семиэллиптического оператора A мы рассмотрим граничную задачу в полупространстве $R_+^n=\{x\in R^n;\ x_n>0\}$ с граничными операторами $B=(B_j)$, $j=0,\cdots,M-1$, символы которых имеют вид

$$B_j(\xi)=\sum_{k=0}^{m_j} b_{jk}(\xi')\,\xi_n^k, \tag{5}$$

причем m_j — произвольные целые неотрицательные числа, а функции $b_{jk}(\xi')$ непрерывны при $\xi'\neq0$ и удовлетворяют следующему условию однородности: $b_{jk}(t^{\mu'}\xi')=t^{m_j-k}b_{jk}(\xi')$. При $\mu_1=\cdots=\mu_{n-1}=1$ общая граничная задача в R_+^n в рамках пространств С. Л. Соболева рассматривалась в [11]—[13] (см. также имеющуюся там библиографию) и в работе [9]—в пространствах с однородной нормой. В рассмотрения указанных работ не входят, например, п.д.о. с символом $(\xi_n+i|\xi'|^\beta)^m$, $\beta>0$, $\beta\neq1$.

Начнем со следующего утверждения, обобщающего известную лемму Шварца (см., например, [14], теорема 1.A.8), которое мы формулируем в виде леммы 1.

Лемма 1. *Пусть f аналитична в окрестности $\bar{\Delta}(0,1)=\{z\in \mathbf{C}^n: |z_j|\leqslant 1,\ j=1,\cdots,n\}$ и разложение ее степенной ряд имеет вид*

$$f(z)=\sum_{(\alpha,\lambda)>k} a_\alpha z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}\equiv\sum_{(\alpha,\lambda)>k} a_\alpha z^\alpha,\quad k\in(0,\infty), \tag{6}$$

и предположим, что $|f(z)|<M$, $z\in\bar{\Delta}(0,1)$. Тогда

$$|f(z)|\leqslant M\delta^k(z),\ \text{где}\quad \delta(z)=\max_i |z_i|^{\frac{1}{\lambda_i}}. \tag{7}$$

Доказательство достаточно провести для рациональных λ_i, $i=1,\cdots,n$. Пусть $\lambda_i=\frac{p_i}{q_i}$, p_i, $q_i>0$ — целые. Выберем целое число $m_0>0$, кратное q_i, $i=1,\cdots,n$ и положим $m=(m_1,\cdots,m_n)$, где $m_i=\frac{m_0}{q_i}$. Рассмотрим при фиксированном $z\in\Delta(0,1)$, $z\neq 0$, функцию

$$g(\omega)=\omega^{-km_0}f\left(\omega^{m_0\lambda}\frac{z}{\delta^\lambda(z)}\right)\equiv\omega^{-km_0}f\left(\omega^{m_0\lambda_1}\frac{z^{\lambda_1}}{\delta^{\lambda_1}(z)},\cdots,\omega^{m_0\lambda_n}\frac{z_n}{\delta^{\lambda_n}(z)}\right),$$

$$\omega\in\mathbf{C}^1,\ |\omega|\leqslant 1,\ -\pi<\arg\omega\leqslant\pi.$$

Имеем из (6)

$$g(\omega)=\sum_{(p,m,\alpha)>km_0} a_\alpha\left[\frac{z}{\delta^\lambda(z)}\right]^\alpha \omega^{(p,m,\alpha)-km_0}, \tag{8}$$

где $(p,m,\alpha)=\sum_{i=1}^n p_i m_i \alpha_i$; $p=(p_1,\cdots,p_n)$. Таким образом, $g(\omega)$ аналитична и (8)—ее разложение в степенной ряд. Из ограниченности $f(z)$ следует, что

$$|g(\omega)|\leqslant|\omega^{-km_0}f\left(\omega^{m_0\lambda}\frac{z}{\delta^\lambda(z)}\right)|\leqslant M|\omega^{-km_0}|=M,\ |\omega|=1.$$

На основе принципа максимума модуля заключаем, что

$$|g(\omega)|\leqslant M\quad\text{при}\quad|\omega|\leqslant 1.$$

В частности, если $\omega=\delta^{1/m_0}(z)$ имеем:

$$|g(\delta^{1/m_0}(z))|=|\delta^{-k}(z)f\left(\delta^\lambda(z)\frac{z}{\delta^\lambda(z)}\right)=\delta^{-k}(z)|f(z)|\leqslant M,$$

т. е. $|f(z)|\leqslant M\delta^k(z)$.

Лемма 2. *П.д.о. P с символом $P(\xi)$, непрерывным при $\xi\neq 0$, $P(t^\mu\xi)=t^\alpha P(\xi)$, $-\infty<\alpha<\infty$, удовлетворяет при любом $-\infty<s<\infty$ оценке*

$$\|Pu\|_{Z_\mu^{s-\alpha}(R^n)}\leqslant c\,\|u\|_{Z_\mu^s(R^n)},\quad u\in\Phi^{s/\mu}(R^n)\equiv\Phi_\mu^s(R^n),$$

и следовательно продолжается по непрерывности до ограниченного оператора $P: z^s_\mu(R^n) \to Z^{s-a}_\mu(R^n)$.

Доказательство. Из непрерывности $P(\xi)$ при $|\xi|=1$ и условия квазиоднородности следует, что $|P(\xi)| \leqslant c\,\rho^{\frac{n}{|\mu|}a}(\xi)$. Тогда

$$\|Pu\|^2_{Z^{s-a}_\mu(R^n)} = \int\limits_{R^n} \rho^{2(s-a)\frac{n}{|\mu|}} |P(\xi)\,\tilde{u}(\xi)|^2\, d\xi \leqslant c\,\|u\|^2_{z^s_\mu(R^n)}.$$

Интегрируемость в 0 подынтегральных выражений следует из леммы 1 (проверяется сначала для C_0^∞-функций) с учетом эквивалентности величин $\hat{\rho}(\xi)$ и $\rho(\xi)$ (см. [2]).

Существование и единственность решения уравнения $Pu=f$ в пространствах $Z^s_\mu(R^n)$ следует из нижеследующей теоремы 1 при $N=M=1$. Общая ситуация будет использована при доказательстве (основной) теоремы 2.

Теорема 1. *Пусть* $P=(P_{jk})$*—матрица п.д.о.* P_{jk}, $j=0, 1,\cdots, M-1$, $k=0, 1,\cdots, N-1$, *с символами* $P_{jk}(\xi)$, *непрерывными при* $\xi \neq 0$ *и удовлетворяющими условию квазиоднородности*: $P_{jk}(t^\mu\xi) = t^{a_j-\beta_k} P_{jk}(\xi)$, $-\infty < a_j, \beta_k < \infty$. *Тогда для любого действительного числа s*

$$P: \prod_{k=0}^{N-1} Z^{s-\beta_k}_\mu(R^n) \to \prod_{j=0}^{M-1} Z^{s-a_j}_\mu(R^n),$$

причем P имеет левый (правый) обратный оператор тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} P(\xi) \equiv \operatorname{rank}(P_{jk}(\xi)) = N$ *(соответственно M) для всех* $\xi \neq 0$.

Доказательство. Пусть $Q(\xi)=(Q_{jk}(\xi))$, где $Q_{jk}(\xi) = \rho^{\frac{n}{|\mu|}(\beta_k-a_j)}(\xi)\,P_{jk}(\xi)$; через $J_1(\xi)(J_2(\xi))$ обозначим диагональную матрицу размерности $M\times M(N\times N)$ с элементами $\rho^{\frac{n}{|\mu|}(s-a_j)}(\xi)$, $j=0,\cdots, M-1$ ($\rho^{\frac{n}{|\mu|}(s-\beta_k)}(\xi)$, $k=0,\cdots, N-1$). Как следует из леммы 2

$$Q=J_1PJ_2: \prod_{j=0}^{N-1} L_2(R^n) \to \prod_{j=0}^{M-1} L_2(R^n).$$

Операторы J_1 и J_2 являются изоморфизмами между соответствующими пространствами с квазиоднородными нормами; символами обратных операторов являются диагональные матрицы с элементами $\rho^{-\frac{n}{|\mu|}(s-a_j)}(\xi)$ и $\rho^{-\frac{n}{|\mu|}(s-\beta_k)}(\xi)$ соответственно. Следовательно P обратим слева (справа) тогда и только тогда, когда Q имеет левый (правый) обратный оператор, кроме того $\operatorname{rank} P(\xi) = \operatorname{rank} Q(\xi)$ для всех $\xi \neq 0$ (см., например, [3]). Предположим $\operatorname{rank} Q(\xi) = N$ для всех $\xi \neq 0$. Обозначим через $Q^*(\xi)$ матрицу размерности $N\times M$: $Q^*(\xi)=(\overline{Q_{kj}(\xi)})$, где $\overline{Q_{kj}}$ (ξ)-комплексно-сопряженные к $Q_{kj}(\xi)$. Положим $K(\xi)=[Q^*(\xi)Q(\xi)]^{-1}Q^*(\xi)$, где $[Q^*(\xi)Q(\xi)]^{-1}$ — матрица, обратная к неособенной матрице $Q^*(\xi)\times\times Q(\xi)$ размерности $N\times N$. Элементы матрицы $K(\xi)$ непрерывны при $\xi\neq 0$ и μ-однородны степени 0 (см., например, [2]), следовательно, она является символом левого обратного оператора к Q.

Пусть теперь для некоторого $\eta\neq 0$ $\operatorname{rank} Q(\eta)<N$, т. е. существует единичный вектор $c=(c_0,\cdots,c_{N-1})$ такой, что $Q(\eta)c=0$. Выберем неотрицательную функцию $\psi\in C_0^\infty(R^n)$ такую, что $\psi(\xi)=0$, $|\xi|>1$, и $\|\psi\|_{L_2}=1$. Пусть $\varepsilon>0$, положим $g_{\varepsilon,k}=\varepsilon^{-n/2}\ \psi\left(\dfrac{\xi-\eta}{\varepsilon}\right)c_k$, $k=0,\cdots$ $\cdots, N-1$, $g_\varepsilon=(g_{\varepsilon,0},\cdots,g_{\varepsilon,N-1})$. Тогда

$$\|g_\varepsilon\|^2_{\prod\limits_0^{N-1}L_2}=\sum_{k=0}^{N-1}\|g_{\varepsilon,k}\|^2_{L_2}=\sum_{k=0}^{N-1}c_k^2=1.$$

Если $f_\varepsilon=\hat{g}$, где $\wedge$ — обратное преобразование Фурье, то согласно теореме Планшереля $\|f_\varepsilon\|_{\prod\limits_0^{N-1}L_2}=1$. Однако

$$\|Qf_\varepsilon\|^2_{\prod\limits_0^{M-1}L_2}\leqslant\sum_{j=0}^{M-1}\sup_{|\xi-\eta|<\varepsilon}\left|\sum_{k=0}^{N-1}Q_{jk}(\xi)\,c_k\right|^2\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0,$$

поскольку $Q_{jk}(\xi)$ непрерывны в малой окрестности точки η и $Q(\eta)c=0$. Нарушен критерий существования левого обратного оператора. А так как оператор Q^*, сопряженный к Q, является п.д.о. с символом $Q^*(\xi)$, имеющем левый обратный тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} Q(\xi)=M$, то и утверждение теоремы относительно правого обратного к Q следует считать доказанным.

В связи с теоремой 1 отметим работу [15], в которой изучалось поведение решений семиэллиптических п.д.о. на бесконечности.

Перейдем теперь к изучению граничной задачи для п.д.о. A с символом вида (4). Через $Z^s_\mu(R^n_\pm)$ будем обозначать сужение на $R^n_\pm$ элементов из $Z^s_\mu(R^n)$. Норма в $Z^s_\mu(R^n_\pm)$ определяется формулой

$$\|f\|_{Z^s_\mu(R^n_\pm)}=\inf\{\|v\|_{Z^s_\mu(R^n)}: v\in Z^s_\mu(R_n),\ R_\pm v=f\},$$

где $R_\pm$ — оператор сужения на $\overline{R^n_\pm}$. Пространство $\mathring{Z}^s_\mu(R^n_\pm)$ определим как подпространство в $Z^s_\mu(R^n)$, состоящее из классов, содержащих распределение с носителем в $\overline{R^n_\pm}$. Пусть

$$Z^s_{\mu,\ker A}(R^n_+)=\{f\in Z^s_\mu(R^n_+),\ Af=0,\ -\infty<s<\infty\}.$$

Если A — семиэллиптический оператор с символом вида (4), то существует единственный ограниченный оператор γ_0: $Z^s_{\mu,\ker A}(R^n_+)\to$ $\to Z^{(s-1/2)}_\mu(R^{n-1})$, являющийся непрерывным продолжением оператора $u\to u(x',0)$, $u\in Z^s_{\mu,\ker A}(R^n_+)\cap C_0(\overline{R^n_+})$ (см. [6]).

Рассмотрим граничную задачу

$$Au = 0,$$
$$\gamma_0 (B_j u) = g_j, \tag{9}$$

где B_j — п.д.о. с символами (5). Всюду далее считаем $n > 2$. Поскольку $A(\xi)$, $|\xi| = 1$, непрерывна, то многочлен (по z) $A(\xi', z)$ имеет при каждом фиксированном $\xi' \neq 0$ одинаковое число корней (не обязательно различных) с положительной мнимой частью. Обозначим их $z_0(\xi')$, $z_1(\xi'), \cdots, z_{N-1}(\xi')$. Положим $A_+(\xi' z) = \prod_{k=0}^{N-1} (z - z_k(\xi'))$ и пусть

$$B_j(\xi', z) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{B}_{jk}(\xi') z^k \ (\mathrm{mod}\, A_+(\xi', z)),\ j = 0, \cdots, M-1.$$

Элементы матрицы $\mathrm{B}(\xi') = (\mathrm{B}_{jk}(\xi'))$ размерности $M \times N$ удовлетворяют условию квазиоднородности: $\mathrm{B}_{jk}(t^{\mu'} \xi') = t^{m_j - k} \mathrm{B}_{jk}(\xi')$, $\xi' \neq 0$.

Лемма 3. *Если A — семиэллиптический п.д.о. с символом вида* (4), *B — граничная система вида* (5), $-\infty < s < \infty$, *то $Bu = \mathrm{B}\gamma u$ для всех $u \in Z^s_{\mu, \ker A}(R^n_+)$, где $\gamma = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{N-1})$, $\gamma_j = \gamma_0 \left(\frac{1}{i} \frac{\partial^j}{\partial x_n^j}\right)$.*

Доказательство достаточно провести для $u \in H^l_{\mu, \ker A}(R^n_+)$, поскольку $\overline{Z^s_{\mu, \ker A}(R^n_+) \cap H^l_{\mu, \ker A}(R^n_+)} = Z^s_{\mu, \ker A}$ (рассуждения аналогичны приведенным в теореме 3.1 работы [9]). Здесь $H^l_{\mu, \ker A}(R^n_+)$ — ядро оператора A в пространстве $H^l_\mu(R^n_+) = R_+[H^l_\mu(R^n)]$, где $H^l_\mu(R^n)$ — анизотропное пространство С. Л. Соболева, состоящее из распределений u таких, что

$$\|u\|^2_{H^l_\mu(R^n)} = \int_{R^n} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + \rho^{n/|\mu|})^{2l} d\xi < \infty.$$

Поскольку

$$B_j(\xi', z) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{B}_{jk}(\xi') z^k + Q_j(\xi', z) A_+(\xi', z),$$

где $Q_j(\xi', z)$ (многочлен по z) непрерывен при $\xi' \neq 0$ и удовлетворяет условию квазиоднородности: $Q_j(t^{\mu'} \xi', tz) = t^{m_j - N} Q_j(\xi', z)$, то

$$\gamma_0(B_j u) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{B}_{jk} \gamma_k u + \gamma_0 Q_j A_+ u.$$

Будем считать $l > \max\left\{m, m_j + \frac{1}{2}\right\}$. Достаточно показать, что

$$Q_j A_+ u \in \overset{\circ}{H}{}^{l-m_j}_\mu(R^n_-) (\subset \ker \gamma_0),$$

так как $Au \in L_2(R^n_-)$, по теореме Пэли—Винера для всех $\xi' \neq 0$ $A(\xi', z)\tilde{u}(\xi', z)$ аналитично в $\mathrm{Im}\, z > 0$ и

$$\int_{R^1} |A(\xi', \xi_n + i\tau)\, \tilde{u}(\xi', \xi_n + i\tau)|^2\, d\xi_n < \infty,\ \tau > 0$$

(здесь мы считаем функцию u уже продолженной на все R^n, $u \in H^l_\mu(R^n)$. Но

$$A(\xi) = A_+(\xi)\, A_-(\xi),\ A_-(\xi) = \prod_{k=N}^{m-1} (z - z_k(\xi')),$$

где $z_k(\xi')$ — корни многочлена $A(\xi', z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, причем $A_-(\xi', z)$ допускает аналитическое продолжение в $\operatorname{Im} z > 0$, следовательно и $A_+(\xi)$ обладает этим свойством. Вновь по теореме Пэли—Винера заключаем, что $(\widetilde{A_+ u})(\xi', \cdot) \in L_2(R^1_-] \cap H^{l-N}(R^1) = \mathring{H}^{l-N}(R^1)$, т. е. $Q_l A_+ u \in H^{l-m_l}_\mu(R^n_-)$.

Теорема 2. *Пусть A — семиэллиптический п.д.о. с символом вида* (4), $B = (B_j)$ $j = 0, \cdots, M-1$, *граничная система операторов с символами вида* (5), $-\infty < s < \infty$, $n > 2$. *Тогда*

1. *Задача* (9) *разрешима в* $Z^s_\mu(R^n_+)$ *при любых граничных функциях* $g_j \in Z_{\mu'}^{s-m_j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ *тогда и только тогда, когда для всех* $\xi' \neq 0$

$$\operatorname{rank} B(\xi') = M.$$

2. *Решение задачи* (9) *единственно в* $Z^s_\mu(R^n_+)$ *при любых* $g_j \in Z_{\mu'}^{s-m_j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} B(\xi') = N$ *для всех* $\xi' \neq 0$.

Доказательство проведем в несколько этапов. Утверждение 1(2) теоремы эквивалентно существованию правого (соответственно левого) обратного оператора к оператору $\gamma_0 B$ в пространствах $Z^s_{\mu, \ker A}(R^n_+)$.

а. Односторонние обратные операторы будут построены с помощью вводимого ниже оператора Q, действующего следующим образом:

$$R_+ Q: \prod_{k=0}^{N-1} Z_{\mu'}^{s-k-\frac{1}{2}}(R^{n-1}) \to Z^s_{\mu, \ker A}(R^n_+).$$

Пусть h — достаточно большое целое число (уточнение будет дано ниже), $\eta' \in R^{n-1}$, $|\eta'| = 1$. Положим $u(\eta', z) = (z + i)^{-h} A(\eta', z)^{-1}$. Пусть Γ — положительно-ориентированный замкнутый контур в комплексной полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, содержащий все корни многочлена $A(\eta', z)$ в $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда (см. [9], лемма 6.1), если $N > 0$, то для любого $j = 0, 1, \cdots, N-1$ существует единственный полином $p_j(\eta', z)$ порядка не превосходящего $N-1$, не зависящий от контура Γ (при указанных условиях на Γ) и удовлетворяющий равенству

$$\int_\Gamma u(\eta', z)\, z^j\, p_{j'}(\eta', z)\, dz = \delta_{jj'},\ 0 \leq j, j' \leq N-1. \qquad (10)$$

Пусть

$$g=(g_0, g_1, \cdots, g_{N-1})\in \prod_{j=0}^{N-1} \Phi_{\mu'}^{s-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$$

и положим

$$\widetilde{Qg}(\xi)=(2\pi)^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^{-h}A(\xi)^{-1}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\,p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}\,{}_{\mu'}(\xi')}, \frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right)\widetilde{g_j}(\xi').$$

Тогда $Qg\in Z_\mu^s(R^n)$. Действительно, поскольку величины $\rho^{n/|\mu|}(\xi)$ и $(\xi_n^2+\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^{1/2}$ эквивалентны, то

$$\|Qg\|^2_{Z_\mu^s(R^n)}=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left\|\rho^{\frac{n}{|\mu|}s}(\xi)\,\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi))^{-h}A(\xi)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\,p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}\,{}_{\mu'}(\xi')}-\frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi)}\right)\tilde{g}_j(\xi')\right\|_2\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{j=0}^{N-1}\int_{R^n}\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-j-1)}(\xi)(\xi_n^2+\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi))^{s-h-m}\times$$

$$\times\left|p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}\,{}_{\mu'}(\xi')}, \frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right)\right|^2|g_j(\xi')|^2\,d\xi=$$

$$=c\sum_{j=0}^{N-1}\int_{R^{n-1}}\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(2s-2j-1)}(\xi')|g_j(\xi')|^2\int_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^{s-h-m}\left|p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}\,{}_{\mu'}(\xi')}, t\right)\right|^2\times$$

$$\times dt\,d\xi'\leqslant c\sum_{j=0}^{N-1}\int_{R^{n-1}}\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(2s-2j-1)}(\xi')|g_j(\xi')|^2\,d\xi'=c\,\|g\|_{\prod_{j=0}^{N-1}Z_{\mu'}^{s-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})},\tag{11}$$

если $h>s-m+N-\frac{1}{2}$. Одномерный интеграл в третьей строке (полученной заменой $\frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\to t$) сходится абсолютно при $h>s-m+N-\frac{1}{2}$ и мажорируется постоянной, поскольку $\left|\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}\,{}_{\mu'}(\xi')}\right|=1$. Продолжив Q по непрерывности, получим ограниченный оператор Q из

$\prod_{j=0}^{N-1} Z_\mu^{s-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ в $Z_\mu^s(R^n)$. Осталось показать, что $R_+AQg=0$. Обозначим через Λ_μ^s п.д.о. с символом $(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^s$, где $z^s=|z|^s e^{is\arg z}$ $-\pi<\arg z\leqslant\pi$. Положим $w=\Lambda_\mu^{s-m}AQg$, тогда $w\in L_2$ и

$$\tilde w(\xi)=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^{s-m-h}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')},\ \frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right)\tilde g_j(\xi').$$

Ясно, что при $\xi'\neq 0$ $\tilde w(\xi',z)$ аналитична по z в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Далее, так как $|p_j(\xi',z)|<c(1+|z|^2)^{N-1}$, $|\xi'|=1$, то при $\eta>0$ имеем, считая $h>s-m+N-1$,

$$|\tilde w(\xi',\xi_n+i\eta)|^2\leqslant c\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')\,[\xi_n^2+\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^2]^{s-m-h}\times$$

$$\times\left(1+\frac{\xi_n^2+\eta^2}{\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right)^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{-2\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\,|g_j(\xi')|^2\leqslant$$

$$\leqslant c\,\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-N)}(\xi')\,[\xi_n^2+(\eta+\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^2]^{s-m-h+N-1}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{-2\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\,|g_j(\xi')|^2\leqslant$$

$$\leqslant c\,\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-N)}(\xi')\,\rho^{2\frac{n}{|\mu|}(s-m-h+N-1)}(\xi)\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{-2\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\,|g_j(\xi')|^2.$$

Как и в (11) убеждаемся, что $\|\tilde w(\xi',\xi_n+i\tau)\|_{L_2}<\infty$, $\tau>0$, а тогда по теореме Пэли—Винера $w\in L_2(R_-^n)$, т. е. $\operatorname{supp} w\subset R_-^n$. С помощью стандартных рассуждений (см., например, [5], [13]) легко убедиться, что $\Lambda_\mu^{s-m}: \mathring{Z}_\mu^s(R_-^n)\to L_2(R_-^n)$—изоморфизм, а тогда $AQg\in\mathring{Z}_\mu^{s-m}(R_-^n)$, т. е. $R_+AQg=0$.

6. Предположим, что $\operatorname{rank} B(\xi')=M$ для всех $\xi'\neq 0$. Как и при доказательстве теоремы 2, положим $B(\xi')=J_1(\xi')\,B\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)J_2(\xi')$, где $J_1(\xi')$, $J_2(\xi')$ — диагональные матрицы, соответственно, с элементами $\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}m_j}(\xi')$ и $\rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}k}(\xi')$, $j=0,1,\cdots,M-1$; $k=0,1,\cdots,N-1$. Пусть

$$B'(\xi')=(B'_{kj}(\xi'))=[J_2(\xi')]^{-1}B^*\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)\times$$

$$\times\left[\mathbf{B}\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu}(\xi')}\right)\mathbf{B}^*\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)\right]^{-1}[J_1(\xi)]^{-1},$$

тогда $\mathbf{B}(\xi')\,\mathbf{B}'(\xi')=I$. Элементы матрицы $\mathbf{B}'(\xi')$ удовлетворяют условию квазиоднородности :$\mathbf{B}'_{kj}(t^{\mu'}\xi')=t^{k-m_j}\,\mathbf{B}_{kj}(\xi')$, $t>0$, $\xi'\neq 0$, и, следовательно, мы имеем ограниченный оператор

$$B'=R_+\,Q\mathbf{B}':\prod_{j=0}^{M-1}Z_{\mu'}^{s-m_j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})\to Z^s_{\mu,\ker A}(R^n_+).$$

Покажем, что $BB'=I$. Пусть

$$g=(g_0,\cdots,g_{N-1})\in\prod_{j=0}^{M-1}\Phi_{\mu'}^{s-m_j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}).$$

Положим $g'=BB'g$, так как $B=\mathbf{B}\gamma$, то $g'=\mathbf{B}\gamma R_+QB'g$. Поскольку

$$\widetilde{(\gamma_0 u)}(\xi')=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\xi',\xi_n)\,d\xi_n,\quad u\in\Phi_\mu^s(R^n),\quad\text{то}$$

$$g'_{j'}(\xi')=\sum_{k'=0}^{N-1}\mathbf{B}_{j'k'}(\xi')\int_{-\infty}^{\infty}\xi_n^{k'}\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}})^{-h}A(\xi)^{-1}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{N}\rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}k}(\xi')\,p_k\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')},\frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right)\sum_{j=0}^{M-1}\mathbf{B}'_{kj}(\xi')\,\tilde{g}_j(\xi')\,d\xi_n.$$

Произведем замену $\dfrac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\to t$, имеем с учетом (10)

$$g'_{j'}(\xi')=\sum_{k,k'=0}^{N-1}\mathbf{B}_{j'k'}(\xi')\,\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}k}(\xi')\sum_{j=0}^{M-1}\mathbf{B}'_{kj}(\xi')\,\rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}k}(\xi')\,\tilde{g}_j(\xi')\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}(t+i)^{-h}A\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')},t\right)^{-1}t^{k'}\,p_k\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')},t\right)dt=$$

$$=\sum_{k'=0}^{N-1}\mathbf{B}_{j'k'}(\xi')\sum_{j=0}^{M-1}\mathbf{B}'_{k'j}(\xi')\,\tilde{g}_j(\xi')=\sum_{j=0}^{M-1}\delta_{j'j}\,\tilde{g}_j(\xi')=\tilde{g}_{j'}(\xi').$$

Если же $B=\mathbf{B}\gamma$ обратим справа, то и $\mathbf{B}$ имеет правый обратный оператор. Тогда по теореме 1 $\operatorname{rank}\mathbf{B}(\xi')=N$ для всех $\xi'\neq 0$.

в. Пусть теперь $\operatorname{rank}\mathbf{B}(\xi')=N$ для всех $\xi'\neq 0$, положим

$$\mathbf{B}'(\xi')=[J_2(\xi')]^{-1}\left[\mathbf{B}^*\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)\mathbf{B}\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)\right]^{-1}\times$$

$$\times \mathrm{B}^*\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)[J_1(\xi')]^{-1}$$

и $B' = R_+ Q\mathrm{B}'$. Покажем, что $B'B = I$. Пусть $u \in Z^s_{\mu,\ \ker A}(R^n_+)$, $w = \Lambda^s_\mu (u - Q\mathrm{B}'\mathrm{B}\gamma u) \in L_2(R^n)$. Так как $\operatorname{supp} Au \subset R^n_-$, то $v = Au \in Z^{s-m}_\mu(R^n_-)$. Пусть $v_l \in \overset{\circ}{\Phi}{}^s_\mu(R^n)$, $v_l \to v$ в $\overset{\circ}{Z}{}^{s-m}_\mu(R^n_-)$, тогда

$$w_l = \Lambda^s_\mu (A^{-1} v_l - Q\mathrm{B}'\mathrm{B}\gamma A^{-1} v_l) \xrightarrow{L_2} w.$$

Имеем

$$\tilde{w}_l(\xi) = (\xi_n + i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^s [A(\xi)^{-1} \tilde{v}_l(\xi) - \rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')(\xi_n + i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^{-h} \times$$

$$\times A(\xi)^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\, p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}, \frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \eta^j A(\xi', \eta)^{-1} \tilde{v}_l(\xi', \eta) \times$$

$$\times d\eta] = \lim_{R\to\infty} (\xi_n + i\rho^{n-1/|\mu|-1}(\xi'))^s A(\xi)^{-1} [\tilde{v}_l(\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} (\xi_n + i\rho^{n-1/|\mu|-1}(\xi'))^{-h} \times$$

$$\times \rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-j-1)}(\xi')\, p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}, \frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right) \int_{\Gamma_R} A(\xi', \eta)^{-1} \eta^j \tilde{v}_l(\xi', \eta)\, d\eta,$$

поскольку $\int_{S_R} z^j A(\xi', z)\, \tilde{v}_l(\xi', z)\, dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Здесь S_R — полусфера $|z| = R$ в $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $\Gamma_R = [-R, R] \cup S_R$. Интеграл в правой части не зависит от R для достаточно больших R, следовательно (см. [9], лемма 6.1), $\tilde{w}(\xi', z)$ аналитична в $\operatorname{Im} z > 0$, а из леммы 6.4 работы [9] — $w \in L_2(R^n_-)$, т. е. $\operatorname{supp}(u - Q\mathrm{B}'\mathrm{B}\gamma u) \subset R^n_-$ и $B'Bu = R_+ Q\mathrm{B}'\mathrm{B}\gamma u = u$.

Если теперь для некоторого $\eta' \neq 0$ $\operatorname{rank} \mathrm{B}(\eta') < N$, то по теореме 1 B не имеет левого обратного. Поскольку $\gamma = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{N-1})$ — изоморфизм из $Z^s_{\mu,\ \ker A}(R^n_+)$ в $\prod_{j=1}^{N-1} Z_{\mu'}^{s-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ (следует взять в предыдущих рассуждениях $\gamma_0 B_j = \gamma_j$), то оператор $B = \mathrm{B}\gamma$ также не имеет левого обратного оператора. Теорема доказана.

Отметим в заключение работу [16], в которой разрешимость дифференциальной граничной задачи (9) исследовалась в рамках C^∞-функций.

Автор благодарит П. И. Лизоркина и Г. Г. Казаряна за внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 3. XII. 1984

Ա. Ա. ԴԱՎԹՅԱՆ. Քվազիհամասեռ նորմայով Սոբոլև-Լիուվիլի տարածություններում սեմիէլիպտիկ պսևդոդիֆերենցիալ (պ. դ.) հավասարումների մեկ դասի համար եզրային խնդիրներ *(ամփոփում)*

Քվազիհամասեռ նորմայով Սոբոլև-Լիուվիլի տարածությունը $\overset{*}{w}{}_2^r$ *կոչվում է* $\Phi^r(R^n)$*-ի (տես (3)) լրացումը (2) նորմայով։* $A(\xi)$ *սիմվոլով (4) տեսքի* A *պ. դ. օպերատորի համար դիտարկվում է եզրային խնդիր* R^n_+*-ում, (5) տեսքի սիմվոլներով* $B=(B_j)$, $j=0, 1,\cdots, M-1$ *եզրային օպերատորներով։ Որոշվում է, թե երբ (9) խնդիրն ունի լուծում և երբ այն միակն է։*

A. A. DAVTIAN. *Boundary value problems for one class of semi-elliptic pseudo-differential* (*p. d.*) *equations in Sobolev-Liouville spac es with quasi-homogeneous norms* (summary)

Sobolev—Liouville space $\overset{*}{w}{}_2^r(R^n)$ with quasi-homogeneous norm is the completion of $\Phi^r(R^n)$ (see (3)) with the norm (2). For the p. d. operator A, with symbols $A(\xi)$, of the form (4) a boundary value problem on R^n_+ is considered, with boundary systems $B=(B_j)$, $j=0,\cdots, M-1$, where the symbols $(B_j(\xi))$ are as in (5). We obtain theorems concerning the existence and uniqueness questions for the problem (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. И. Лизоркин.* Описание пространства $L^r_p(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов, Матем. сб., 1970, 81, 123:1, 79—91.
2. *О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский.* Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., «Наука», 1975, 480 с.
3. *С. Л. Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул, М., «Наука», 1974, 808 с.
4. *П. И. Лизоркин.* Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности. О риссовых потенциалах произвольного порядка, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1979, 150, 174—197.
5. *A. J. Pryde.* Spaces with homogeneous norms, Bull. Austral. Math. Soc., 1980, 21, 189—205.
6. *А. А. Давтян.* Анизотропные потенциалы, их обращение и некоторые приложения, ДАН СССР, 1985 (в печати).
7. *N. Aronszajn, K. T. Smith.* Functional spaces and functional completion, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1955—1956, v. 6, 125—185.
8. *С. Г. Самко.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения, Ростов-на-Дону, Изд-во Рост. ун-та, 1984, 208 с.
9. *A. J. Pryde.* Higher order elliptic boundary value problems in spaces with homogeneous norms, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 1981, 31, 92—113.
10. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы, М., «Мир», 1967.
11. *Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес.* Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., «Мир», 1971, 371 с.
12. *М. С. Агранович.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН, 1965, 20, вып. 5 (125), 3—120.
13. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, XX, вып. 3 (123), 1965, 90—153.
14. *Р. Ганнинг, Х. Росси.* Аналитические функции многих комплексных переменных, М., «Мир», 1969, 395 с.
15. *С. В. Успенский, Б. Н. Чистяков.* О выходе на полином при стремлении $|x| \to \infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений, Сибирский мат. журнал, 16, № 5, 1975, 1053—1070.
16. *Г. А. Карапетян.* Решение полуэллиптических уравнений в полупространстве, ДАН АрмССР, 75, № 5, 1982, 200—204.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 3, 1985 Математика

УДК 517.983

В. Г. ДЕПЧ

ВОЗМУЩЕНИЯ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ФОРМ В ЗАДАЧАХ СТАБИЛИЗАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Введение

Одно из центральных мест в теории управления линейными конечномерными системами [1] занимает задача стабилизации и двойственная ей задача детектирования. Пусть H, U, Z — конечномерные линейные пространства, $A \in \mathbf{L}(H, H)$, $B \in \mathbf{L}(U, H)$, $C \in \mathbf{L}(H, Z)$ — линейные операторы. Пара (A, B) (пара (C, A)) называется стабилизируемой (детектируемой) если существует оператор $K \in \mathbf{L}(H, U)$ ($D \in \mathbf{L}(Z, H)$) такой, что оператор $A+BK$ $(A+DC)$ устойчив, т. е. не имеет собственных значений в замкнутой правой полуплоскости $\mathbf{C}^+$.

При перенесении этих понятий на бесконечномерный случай [2] трудности часто возникают уже в постановке задачи. Так, если A — генератор G-полугруппы, а B действует в пространство, более широкое, чем H (C неограничен и, вообще говоря, незамыкаем), то возникает вопрос о корректном определении оператора $A+BK$ $(A+DC)$ как генератора G_0-полугруппы. Описанная ситуация является абстрактной версией задачи граничного управления (наблюдения) для уравнений с частными производными [3].

В настоящей работе предлагается «правильное» обобщение понятий и дается критерий стабилизируемости (детектируемости) при граничных управлениях (наблюдениях) на случай, когда A — эллиптический оператор в ограниченной области. Различные попытки сформулировать постановку и дать решение этой задачи имеются в работах [2, 4—6]. Мы покажем, что аппаратом, адекватным поставленной задаче, является теория возмущений секториальных форм [7]. Помимо удобного определения оператора $A+BK$ $(A+DC)$ как форм-суммы, эта техника позволяет дать простые признаки сходимости различных аппроксимаций в задачах стабилизации (детектирования). В частности, аппроксимация «граничных» управлений «распределенными», т. е. аппроксимация B операторами, область значений которых лежит в H, позволяет свести доказательство основного результата — критерия стабилизируемости — к известному. В приложениях [8, 9] возникает и противоположная задача аппроксимации распределенных управлений (наблюдений) сосредоточенными, которая также легко решается с помощью техники форм.

§ 2. Класс возмущений генераторов голоморфных полугрупп

Пусть $V \subset H \subset V'$ — тройка комплексных гильбертовых пространств, где V' — антидвойственно к V относительно формы $\langle \cdot , \cdot \rangle$, порожденной скалярным произведением $(\cdot , \cdot)$ в H. Нормы в V и H обозначим через $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_0$ соответственно. Вложения будем предполагать плотными и компактными. Пусть $a[\cdot , \cdot]$ — полуторалинейная непрерывная форма на $V \times V$, такая, что при некоторых $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, $c > 0$

$$\operatorname{Re} a[y, y] + \lambda_0 |y|_0^2 \geqslant c |y|_1^2 \tag{1}$$

для всех $y \in V$. Форма $a[\cdot, \cdot]$ определяет ограниченный линейный оператор $\tilde{A}: V \to V'$ ($\tilde{A} \in \mathbf{L}(V, V')$) такой, что*

$$a[\varphi, \psi] = -\langle \tilde{A} \varphi, \psi \rangle \tag{2}$$

для всех $\{\varphi, \psi\} \in V \times V$. Нам понадобится следующий результат [3] относительно эволюционной задачи

$$\dot{y}(t) = \tilde{A} y(t) + f(t), \quad y(0) = y_0 \in H, \tag{3}$$

связанной с оператором $\tilde{A}$. Пусть $W(0, T)$, $T < \infty$ — пространство вектор-функций $y(\cdot) \in L^2(0, T; V)$, имеющих обобщенную производную $\dot{y}(\cdot) \in L^2(0, T; V')$, снабженное нормой

$$\|y\|_W^2 = \|y\|^2_{L^2(0, T; V')} + \|\dot{y}\|_{L^2(0, T; V')}.$$

Пусть $f(\cdot) \in L^2(0, T; V)$. Тогда существует единственная функция $y(\cdot) \in W(0, T)$, удовлетворяющая (3). Отметим, что начальное условие в (3) имеет смысл благодаря тому [3], что функции из $W(0, T)$ непрерывны на интервале $[0, T]$ по норме H.

Определим теперь (неограниченный) оператор A в H как сужение $\tilde{A}$ на $D(A) = \{y \in V, \tilde{A} y \in H\}$. Оператор A является [7] m-секториальным оператором, ассоциированным с замкнутой секториальной формой $a[\cdot, \cdot]$. Оператор A порождает голоморфную полугруппу $\exp(At)$ ограниченных операторов в H. Нетрудно показать, что при $f \equiv 0$ в (3) функция $y(t) = \exp(At) y_0$ является решением (3) в указанном выше смысле.

Используемые в дальнейшем свойства оператора A перечислены в следующей лемме.

Лемма 1. а) *Резольвента оператора A — компактный оператор;*
б) *спектр $\sigma(A)$ содержится в некотором секторе*

$$\left\{ z : \arg(z - \lambda_0) > \theta > \frac{\pi}{2} \right\};$$

---

* «Знак «—» введен с тем, чтобы избежать в дальнейшем расхождений с терминологией теории устойчивости.

в) *спектральный проектор* P, *отвечающий части* $\sigma_+(A) = \sigma(A) \cap \mathbf{C}^+$ *спектра* A *в замкнутой правой полуплоскости, конечномерен. Оператор* P *можно продолжить по непрерывности до отображения* $P \in \mathbf{L}(V', V)$;

г) *утверждения* а)—в) *остаются в силе при замене* A *на* A^*.

Доказательство. Свойство а) является следствием компактности вложения $V \subset H$, утверждение б) — хорошо известное [7] свойство m-секториальных операторов. Из а), б) следует, что $\sigma_+(A)$ — конечное множество. Пусть γ — замкнутый контур, такой, что $\sigma_+(A)$ лежит во внутренней, а $\sigma(A) \setminus \sigma_+(A)$ — во внешней по отношению к γ областях. Из представления Рисса

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (A - z)^{-1}\, dz$$

вытекает, что P — компактный и, следовательно, конечномерный проектор. Покажем, что при $z \overline{\in} \sigma(A)$ оператор $(A - z)^{-1}$ допускает продолжение по непрерывности до отображения $(\tilde{A} - z)^{-1} \in \mathbf{L}(V', V)$, что влечет аналогичное свойство оператора P. По определению оператор $\tilde{A}$ есть расширение A по непрерывности. Из (1) вытекает, что при $\lambda > \lambda_0$ оператор $\tilde{A} - \lambda$ ограниченно обратим. Следовательно, при $\lambda > \lambda_0$ оператор $(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \in \mathbf{L}(V', V)$ является расширением по непрерывности оператора $(A - \lambda)^{-1} \in \mathbf{L}(H, V)$. Тождество Гильберта показывает, что это утверждение сохраняет силу для произвольных $z \overline{\in} \sigma(A)$.

Наконец, утверждение г) является следствием того, что оператор $(-A^*)$ ассоциирован с формой $\overline{a[\cdot\,,\cdot]}$, комплексно сопряженной с $a[\cdot\,,\cdot]$.

Пусть X — некоторое гильбертово пространство, $M \in \mathbf{L}(V, X)$, $N \in \mathbf{L}(X, V')$. Покажем, что несмотря на то, что оператор $A + NM$ не имеет смысла как обычная сумма операторов, при некотором дополнительном предположении он может быть определен как форм-сумма.

Непрерывную полуторалинейную форму q на $V \times V$ будем называть V-малой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $c(\varepsilon) \geqslant 0$ такое, что для всех $\varphi \in V$

$$|q[\varphi, \varphi]| \leqslant \varepsilon |\varphi|_1^2 + c(\varepsilon) |\varphi|_0^2. \tag{4}$$

Следующее утверждение является простым следствием теории возмущений секториальных форм [7].

Теорема 1. *Пусть тройка* A, N, M *такова, что форма* $q[\varphi, \psi] = (M\varphi, N^*\psi)_X$ *является* V-*малой. Тогда форма* $a_1[\varphi, \psi] = a[\varphi, \psi] - q[\varphi, \psi]$ — *замкнутая секториальная в* H *с областью определения* $V \times V$. *Если* $(-A_1)$ — *ассоциированный с ней оператор, то все утверждения леммы 1 сохраняют силу при замене* A *на* A_1.

Мы будем пользоваться обозначением $A_1 = A + NM$, чтобы подчеркнуть отличие A_1 от обычной суммы операторов.

В приложениях удобен следующий признак V-малости формы $q[\varphi, \psi] = (M\varphi, N^*\psi)_X$.

Лемма 2. *Предположим, что по крайней мере один из операторов M, N^* допускает продолжение по непрерывности до оператора из $\mathbf{L}(H, X)$ или может быть представлен как предел таких операторов по норме $\mathbf{L}(V, X)$. Тогда форма $q[\varphi, \psi] = (M\varphi, N^*\psi)_X$ является V-малой.*

Доказательство. Пусть для определенности предположение леммы выполнено для оператора M, т. е. существует последовательность $M_n \in \mathbf{L}(H, X)$, такая, что $M_n \to M$ по норме $\mathbf{L}(V, X)$. Тогда для всех $\varphi \in V$

$$|M\varphi|_X \leqslant |(M - M_n)\varphi|_X + |M_n \varphi|_X \leqslant \varepsilon_n |\varphi|_1 + c_n |\varphi|_0,$$

где ε_n — норма $M - M_n$ в $\mathbf{L}(V, X)$, c_n — норма M_n в $\mathbf{L}(H, X)$. Поэтому, если $|N^*\varphi|_X \leqslant c|\varphi|_1$, то

$$|q[\varphi, \varphi]| \leqslant c(\varepsilon_n |\varphi|_1 + c_n |\varphi|_0)|\varphi|_1. \tag{5}$$

Зафиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, выберем n из условия $c\,\varepsilon_n < \varepsilon/2$. Тогда, пользуясь неравенством $cc_n|\varphi|_0|\varphi|_1 \leqslant \varepsilon/2\,|\varphi|_1^2 + (cc_n)^2|\varphi|_0^2/2\varepsilon$ найдем, что из (5) следует (4).

Замечание 1. В условиях, когда вложение $V \subset H$ компактно, нетрудно показать, что предположение леммы 2 относительно оператора $M(N)$ эквивалентно компактности $M(N)$.

§ 3. Стабилизируемость и детектируемость

Рассматриваемый в настоящей работе класс генераторов голоморфных полугрупп с компактной резольвентой обладает (см., например, [2]) свойством, хорошо известным в конечномерном случае: необходимым и достаточным для экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения $\dot{y} = A_1 y$ является условие $\sigma_+(A_1) = \varnothing$. Это обстоятельство приводит к целесообразности следующих определений. Пусть $U(Z)$ — гильбертово пространство управлений (наблюдений).

Пара (A, B), $B \in \mathbf{L}(U, V')$ называется стабилизируемой, если найдется оператор $K \in \mathbf{L}(V, U)$ такой, что для тройки (A, B, K) выполнены условия теоремы 1 и оператор $A + BK$ устойчив: $\sigma_+(A + BK) = \varnothing$.

Пара (C, A), $C \in \mathbf{L}(V, Z)$ называется детектируемой, если найдется оператор $D \in \mathbf{L}(Z, V')$ такой, что для тройки (A, D, C) выполнены условия теоремы 1 и оператор $A + DC$ устойчив.

Как и в конечномерном случае, справедлива теорема двойственности.

Теорема 2. *Пара (C, A) детектируема тогда и только тогда, когда пара (A^*, C^*) стабилизируема.*

Доказательство. Утверждение немедленно следует из того, что поскольку $q[\varphi, \psi] = (C\varphi, D^*\psi)_Z = (D^*\psi, C\varphi)_Z$, операторы $A + DC$ и $A^* + C^*D^*$ определены одновременно и являются взаимно сопряженными.

Следующая теорема об аппроксимации используется при доказательстве основного результата — критерия стабилизируемости. Кроме того, она представляет самостоятельный интерес для приложений.

Теорема 3. *Пусть $B_n \in \mathbf{L}(U, V')$ и $K_n \in \mathbf{L}(V, U)$, $n = 1, 2, \cdots$, сходятся по норме при $n \to \infty$ к B и K, соответственно. Предпо-*

ложим, что для тройки (A, B_n, K_n), $n=1, 2, \cdots$, *выполнены условия теоремы* 1. *Тогда эти условия выполнены и для тройки* (A, B, K). *Оператор* $A+BK$ *устойчив в том и только в том случае, когда существуют* n_0 *и* $\varkappa>0$ *такие, что* $A+B_n K_n+\varkappa$ *устойчив при* $n \geqslant n_0$.

Доказательство теоремы 3 вытекает из того, что ее условия обеспечивают равномерную сходимость резольвент операторов $A+B_n K_n$ к резольвенте $A+BK$ ([7], теорема VI. 3. 6), что в свою очередь влечет сходимость спектров ([7], по IV. 3. 5).

Чтобы сформулировать критерий стабилизируемости пары A, B положим $H_+=PH$, $A_+=PA=AP$, $B_+=\tilde{P} B$. Согласно лемме 1 (пункт в)) $B_+ \in \mathrm{L}(U, V)$. Пусть $U_+=R(B^*P)$. Тогда $\dim U_+<\infty$. Будем рассматривать A_+ в H_+ и B_+ в U_+ как пару конечномерных операторов.

Теорема 4. *Для стабилизируемости пары* (A, B) *необходима и достаточна стабилизируемость пары* (A_+, B_+). *При этом, если* $K_+ \in \mathrm{L}(H_+, U_+)$ *таков, что* $A_+ + B_+ K_+$ *устойчив, то* $A+BK$, *где* $K=K_+$ *на* H_+, $K(I-P)=0$, *также устойчив.*

Отметим, что при таком определении $K \in \mathrm{L}(H, U)$. Это в соответствии с лемой 2 обеспечивает корректность определения $A+BK$.

Доказательство. Чтобы доказать необходимость мы установим, что при нарушении условий теоремы система управления

$$\dot{y}(t)=\tilde{A} y(t)+B u(t), \ y(0)=y_0 \in H, \tag{6}$$

(ср. (3)) имеет решение $y(t)$, не сходящееся к нулю при $t \to \infty$, каким бы ни было управление $u(\cdot) \in L^2(0, \infty; U)$, и покажем, что это противоречит стабилизируемости пары (A, B).

Итак, допустим, что пара (A_+, B_+) не стабилизируема. Согласно [1] это означает, что наименьшее подпространство, содержащее $R(B_+)$ и инвариантное относительно A_+, которое мы, следуя [1], обозначим $\langle A_+|B_+\rangle$, не совпадает с H_+. Для вектора $y_0 \in H_+$, ортогонального $\langle A_+|B_+\rangle$, $(\exp(A_+ t) B_+ u, y_0)=0$ для всех $u \in U$ и всех $t>0$. Пусть $y(t)$ — решение (6) с указанным начальным значением и произвольным $u(\cdot) \in L^2(0, \infty, U)$. Его проекция $v(t)=Py(t)$ дифференцируема в обычном смысле, причем $\dot{v}(t)=\tilde{P} \dot{y}(t)$. Поэтому применив к обеим частям (6) проектор $\tilde{P}$, получим линейную конечномерную систему

$$\dot{v}(t)=A_+ v(t)+B_+ u(t), \ v(0)=y_0.$$

Записав ее решение в виде

$$v(t)=e^{A_+ t} y_0+\int_0^t e^{A_+(t-\tau)} B_+ u(\tau)\, d\tau$$

и составив скалярное произведение $(v(t), y_0)$, убедимся, что оно совпадает с $(\exp(A_+ t) y_0, y_0)$. Поскольку спектр A_+ лежит в правой полуплоскости, последняя величина не сходится к нулю при $t \to \infty$.

Следовательно, $y(t)$ не сходится к нулю при $t\to\infty$ какой бы ни была функция $u(\cdot)\in L^2(0,\infty,U)$. Предположим теперь, что пара (A,B) стабилизируема. Пусть $K\in \mathrm{L}(V,U)$ таков, что $A+BK$ устойчив. Тогда $y(t)=\exp((A+BK)t)y_0$ при $t\to\infty$ экспоненциально стремится к нулю. Но в соответствии с § 2, нетрудно показать, что $y(t)$ есть решение (6) при $u(t)=Ky(t)$ и по доказанному не сходится к нулю, Полученное противоречие доказывает необходимость условия стабилизируемости пары (A_+, B_+).

Для доказательства достаточности рассмотрим оператор $A+BK$ при специальном выборе K, участвующем в формулировке теоремы. Заметим, что поскольку $R(K)\subseteq U_+$, мы можем считать пространство U и оператор $B\in \mathrm{L}(U,V')$ конечномерными, так как в противном случае можно заменить U на U_+, не изменив при этом оператор $A+BK$. Таким образом, B может быть представлен в виде $Bu=$ $=\sum_1^m(u,\omega_i)_U b_i$, где $\{\omega_i\}_1^m\subset U$ — некоторый ортонормированный базис, $b_i\in V'$. В силу плотности вложения $H\subset V'$ можно построить последовательность $b_i^{(n)}\in H$, сходящуюся к b_i в V' при $n\to\infty$. Тогда последовательность операторов $\widehat{B}_n$, $\widehat{B}_n u=\sum_1^n(u,\omega_i)\, b_i^{(n)}$, $\widehat{B}_n\in \mathrm{L}(U,H)$ сходится к B в $\mathrm{L}(U,V')$. Положим $B_n=B_+ +(I-P)\widehat{B}_n$. Тогда $B_n\to B$ в $\mathrm{L}(U,V')$, $PB_n=B_+$. Поскольку $B_n\in \mathrm{L}(U,H)$, известные (см., например, [2]) результаты позволяют утверждать, что операторы $A+$ $+B_nK$ (сумма обычная!)—устойчивы, причем спектр $A+B_nK$ является объединением $\sigma(A)\setminus\sigma_+(A)$ и $\sigma(A_+ +B_+K_+)$. Поэтому существует $\varkappa>0$ такое, что операторы A_+, $B_nK+\varkappa$ устойчивы. Для завершения доказательства остается применить теорему 3.

Теорема 4 сводит вопрос о стабилизируемости к изучению конечномерной пары (A_+,B_+), которое можно провести выбрав базисы в H_+, U_+ и записав A_+, B_+ в виде матриц. Особенно просто условия стабилизируемости выглядят, если оператор A_+ диагонализуем (например, если $A=A^*$ или подобен самосопряженному).

Пусть $H_\lambda\subset H_+$ — собственное подпространство A, отвечающее собственному значению $\lambda\in\sigma_+(A)$, $r_\lambda=\dim H_\lambda$. Тогда $\bar\lambda\in\sigma(A^*)$, причем $\dim H_{\bar\lambda}^*=r_\lambda$, где $H_{\bar\lambda}^*$ — собственное подпространство A^*, отвечающее $\bar\lambda$. Выберем в $H_{\bar\lambda}^*$ какой-либо базис $\psi_1^*,\dots,\psi_{r_\lambda}^*$.

Теорема 5. *Пусть A_+ диагонализуем,* $\dim U=m<\infty$, *$Bu=\sum_1^m(u,\omega_i)\,b_i$, где $b_i\in V'$, $\{\omega_i\}_1^m$— некоторый базис. Пара (A,B) стабилизируема тогда и только тогда, когда для всех $\lambda\in\sigma_+(A)$ ранг матрицы*

$$W_\lambda=\begin{vmatrix} \langle b_1,\psi_1^*\rangle & \langle b_1,\psi_2^*\rangle & \cdots & \langle b_1,\psi_{r_\lambda}^*\rangle \\ \langle b_2,\psi_1^*\rangle & & \cdots & \langle b_2,\psi_{r_\lambda}^*\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle b_m,\psi_1^*\rangle & & \cdots & \langle b_m,\psi_{r_\lambda}^*\rangle \end{vmatrix} \qquad (7)$$

равен r_λ.

Доказательство. Пусть P_λ — проектор на H_λ. Тогда, очевидно, $P_\lambda B_+ = P_\lambda \tilde{P} B \equiv \tilde{P}_\lambda B$. Для того, чтобы $<A_+|B_+> = H_+$ необходимо и достаточно, чтобы $R(\tilde{P}_\lambda B) = H_\lambda$. Последнее условие эквивалентно тому, что линейная оболочка векторов $\tilde{P}_\lambda b_i$ совпадает с H_λ, что в свою очередь выполнено в том и только том случае, когда ранг матрицы $(\tilde{P}_\lambda b_i, \psi_k)$ $i=1,\cdots, m$; $k=1, \cdots, r_\lambda$ равен r_λ для некоторого (и, как следствие, для любого) базиса $\{\psi_k\}$ в H_λ. Но легко видеть, что $\{\psi_k\}$— базис в H_λ тогда и только тогда, когда $\{P_\lambda^* \psi_k\}$ — базис в $H_{\bar{\lambda}}^*$. Следовательно, ранг матрицы $\{(\tilde{P}_\lambda b_i, \psi_k)\}$ совпадает с рангом $\{<b_i, \psi_k^*>\}$, где $\{\psi_k^*\}$—любой базис в $H_{\bar{\lambda}}^*$.

Объединяя теорему 5 с теоремой 2, придем к следующему результату.

Теорема 6. *Пусть A_+ диагонализуем,* $\dim Z = m < \infty$, $(Cy)_j = <c_j, y>$, $y \in V$, $c_j \in V'$, $j=1, 2, \cdots, m$. *Пара* (C, A) *детектируема в том и только том случае, когда для всех* $\lambda \in \sigma_+(A)$ *ранг матрицы*

$$W_\lambda = \begin{pmatrix} <c_1, \psi_1> \cdots <c_1, \psi_{r_\lambda}> \\ <c_2, \psi_1> \cdots <c_2, \psi_{r_\lambda}> \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ <c_m, \psi_1> \cdots <c_m, \psi_{r_\lambda}> \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{r_\lambda}$ — *какой-либо базис в* H_λ, *равен* r_λ.

§ 4. Примеры приложения абстрактной схемы

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ, $H = L^2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$,

$$a[\varphi, \psi] = \int\limits_\Omega (\nabla\varphi' a(x)\, \overline{\nabla\varphi} + q(x)\, \varphi\, \bar{\psi}) dx + \int\limits_\Gamma \alpha(x)\, \varphi \bar{\psi}\, dS, \tag{9}$$

где $\mu_1 \xi' \bar{\xi} \leqslant \xi' a(x) \bar{\xi} \leqslant \mu_2 \xi' \bar{\xi}$, $\mu_2 \geqslant \mu_1 > 0$ для всех $\xi \in \mathbf{C}^n$, $q(x)$ и $\alpha(x)$— вещественные ограниченные функции. Если Γ удовлетворяет предположениям теорем вложения [10], то для формы (9) выполнено условие (1), а оператор B, $B: U = \mathbf{C}^m \to V'$, определенный как

$$<Bu, \varphi> = \sum_{i=1}^m u_i \int\limits_\Gamma b_i(x)\, \varphi(x)\, dS \equiv \sum_{i=1}^m u_i <b_i, \varphi>, \tag{10}$$

где $\varphi \in V$, $b_i(\cdot) \in L^2(\Gamma)$, ограничен. С парой A, B связана следующая задача граничного управления:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \nabla' (a(x) \nabla y) - q(x)\, y, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} + \alpha(x)\, y \Big|_\Gamma = \sum_{i=1}^m u_i b_i(x). \tag{11}$$

Таким образом, применение теоремы 5 дает критерий стабилизируемости с помощью управлений, входящих в третье краевое условие (при $\alpha(x) =$

$= 0$ — в условие Неймана). Именно, для стабилизируемости необходимо и достаточно, чтобы число управлений m было не меньше $\max r_\lambda$, $\lambda \in \sigma_+(A)$ и чтобы ранг матриц (7) (где ввиду самосопряженности ψ_k^* совпадают с ψ_k) был максимальным. Отметим, что задача стабилизации параболического уравнения (11) рассматривалась в [6], а соответствующая задача детектирования (при $C = B^*$) в [4, 5]. В нашей схеме все результаты этих работ прямо вытекают из абстрактных построений.

Наш второй пример — точная постановка и строгое решение задачи о стабилизации распределенного химического реактора с помощью сосредоточенных систем управления, рассмотренной в [8, 9] на эвристическом уровне.

Пусть $H = L^2(0, 1; \mathbf{C}^n)$ — пространство n-компонентных вектор-функций на промежутке $[0,1]$. Аналогичным образом, $V = W_2^1(0,1; \mathbf{C}^n)$. Пусть $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — непрерывные $n \times n$ — матрицы-функции, $x \in [0,1]$, причем $p(x)$ — непрерывно дифференцируема и положительно определена: $\xi' p(x) \bar{\xi} \geqslant \mu \xi' \bar{\xi}$. Положим

$$a[\varphi, \psi] = \int_0^1 \left(\frac{d\varphi'}{dx} p(x) \frac{d\bar{\psi}}{dx} - \frac{d\varphi'}{dx} r(x) \bar{\psi} - \varphi' q(x) \bar{\psi} \right) dx +$$

$$+ \alpha_0 \varphi'(0) \bar{\psi}(0) + \alpha_1 \varphi'(1) \overline{\psi(1)} + \beta \varphi'(1) \overline{\psi(0)}, \tag{12}$$

где α_0, α_1, β — постоянные $n \times n$-матрицы. Нетрудно проверить справедливость (1). Оператор A, ассоциированный с формой (12), определен на функциях $y \in W_2^2(0, 1; \mathbf{C}^n)$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$-p(0) \frac{dy}{dx}(0) + \alpha_0 y(0) + \beta y(1) = 0, \tag{13}$$

$$p(1) \frac{dy}{dx}(1) + \alpha_1 y(1) = 0 \tag{14}$$

и действует по формуле

$$Ay = \frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + r(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y. \tag{15}$$

Отметим, что слагаемое $\beta y(1)$ в (13) отвечает случаю рециркуляции в реакторе [9]. При этом, однако, в отличие от [9], в настоящей работе не учитываем запаздывание в контуре рециркуляции.

Пусть $U = \mathbf{C}^m$, $Bu = \sum_1^m u_i b_i$, где $b_i(\cdot) \in V' = W_2^{-1}(0, 1; \mathbf{C}^n)$. Последнее пространство содержит как „обычные", так и обобщенные функции и, в частности, дельта-функции $\delta(x - \xi)$, сосредоточенные в точках $\xi \in [0,1]$. Если $b_i(\cdot) \in L^2(0,1; \mathbf{C}^n)$, управление u_i будем называть распределенным, а если $b_i(x) = b_i \delta(x - x_i)$, где $b_i \in \mathbf{C}^n$, $x_i \in [0,1]$ — сосредоточенным. Пусть u_i, $i = 1, 2, \cdots, l$ — распределенные, u_j, $j = l+1, \cdots, m$ — сосредоточенные управления. Можно показать, что решение уравнения (3) в рассматриваемом случае сводится к решению следующей начально-краевой задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + r(x)\frac{\partial y}{\partial x} + q(x)y + \sum_{i=1}^{l} u_i b_i(x), \tag{16}$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \tag{17}$$

$$p(x_j)\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x_j^+, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x_j^+, t)\right) = u_j(t)\, b_j,\ j = l+1, \cdots, m, \tag{18}$$

причем, если ни одна из точек x_j, $j = l+1, \cdots, m$ не совпадает с 0 или 1, то дополнительно выполняются условия (13), (14), а если, например, $x_s = 0$, $s \in \{l+1, \cdots, m\}$, то вместо условия (18) с $j = s$ и (13) выполняется неоднородное краевое условие

$$-p(0)\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) + \alpha_0 y(0, t) + \beta y(1, t) = b_s u_s(t). \tag{19}$$

Таким образом, рассматриваемая схема включает также и случай граничного упрзвления.

Аналогичным образом, если оператор наблюдения $C: V \to Z = \mathbf{C}^N$ определен как $(Cy)_j = \langle c_j, y \rangle$, $j = 1, \cdots, N$, то будем называть s-е наблюдение распределенным, если $c_s(\cdot) \in L^2$ и сосредоточенным, если $c_s(x) = c_s \delta(x - x_s)$, $c_s \in \mathbf{C}$. Задачу стабилизации с помощью сосредоточенной системы управления можно теперь понимать следующим образом: для заданного оператора B построить оператор сосредоточенного наблюдения $C_N: V \to \mathbf{C}^N$ и конечномерный линейный оператор $L_N: \mathbf{C}^N \to U = \mathbf{C}^m$ так, чтобы оператор $A \dotplus BK_N$, $K_N = L_N C_N$ был устойчив.

Отметим, что корректность определения оператора $A \dotplus BK_N$ вытекает из леммы 2 и замечания 1, поскольку $\dim U = m < \infty$.

Рассмотрим вначале частный случай $n = m = 1$, $\beta = 0$, изучавшийся в [8]. Управление будем считать граничным: $Bu = u\delta(x)$. Оператор A в скалярном случае подобен A^*: $A = \Phi A^* \Phi^{-1}$, где Φ — оператор умножения на функцию $\exp\left(-\int r(x)/p(x)\, dx\right)$. Поэтому собственные значения A вещественные. Легко видеть также, что в скалярном случае они простые: $r_\lambda = 1$. Таким образом, (7) сводится к условию $\psi_\lambda^*(0) \neq 0$, где ψ_λ^* — собственные функции A^*, отвечающие собственным числам $\lambda \geqslant 0$. Но поскольку $\psi_\lambda^* = \Phi\psi_\lambda$, где ψ_λ — собственные функции A, условие $\psi_\lambda^*(0) \neq 0$ эквивалентно условию $\psi_\lambda(0) \neq 0$, которое легко вытекает из (13). Таким образом, рассматриваемая система стабилизируема, причем согласно теореме 4 существует стабилизирующая обратная связь вида

$$u = Ky = \int_0^1 k(x)\, y(x)\, dx, \tag{20}$$

где функция $k(x)$ — некоторая линейная комбинация собственных функций $\psi_\lambda^*(x)$, отвечающих неотрицательным собственным значениям λ. По условию, однако, наблюдается не все состояние $y(x)$, а лишь значения $y(x_j)$, $j = 1, \cdots, N$. Из теории квадратурных формул [11], известно, что при соответствующем выборе „узлов“ x_j интеграл (20) может быть аппроксимирован суммами вида

$$K_N y = L_N C_N y \equiv \sum_{j=1}^{N} c_j k(x_j) y(x_j) \tag{21}$$

таким образом, что $|Ky - K_N y| \leqslant \varepsilon |y|_1$, где $\varepsilon \to 0$ при $N \to \infty$. Существование стабилизирующей обратной связи требуемого вида вытекает теперь из теоремы 3.

Сделаем теперь замечание по поводу изучавшейся в [9] задачи стабилизации системы уравнений ($n > 1$). В отличие от скалярного ($n = 1$) случая здесь нетрудно построить примеры, когда оператор A (13)—(15) имеет в правой полуплоскости $\mathbf{C}^+$ кратные собственные значения. Теорема 5 показывает, что в этом случае объект не может быть стабилизирован, если имеется лишь одно ($m = 1$) управляющее воздействие. Не меняет дела и использование динамической обратной связи. Поэтому результат [9] не может быть справедлив без дополнительных ограничений. Применение теорем 3—6 позволяет проверить разрешимость задачи и получить ее решение аналогично случаю $n = 1$.

Ленинградский горный институт
им. Г. В. Плеханова

Поступила 12. IV. 1983

Վ. Գ. ԴԵՅՉ. Սեկտորիալ ձևերի գրգռումները էլիպտական օպերատորների կայունացման խնդիրներում *(ամփոփում)*

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ սեկտորիալ ձևերի տեսությունը հանդիսանում է եզրային կառավարման ու դիտման ժամանակ էլիպտական օպերատորների կայունացման խնդիրների կոռեկտ դրման ու լուծելու համար ադեկվատ ապարատ։ Այդպիսի ձևերի գրգռման վերաբերյալ թեորեմները թույլ են տալիս ստանալ կայունացման խնդիրներում տարբեր մոտավորությունների զուգամիտության հայտանիշներ։ Դա հնարավորություն է տալիս եզրային կառավարումների դեպքում կայունացման հայտանիշի ապացույցը բերել բաշխված կառավարումների վերաբերյալ հայտնի դեպքին։ Մյուս կողմից, միաչափ խնդիրներում ապացուցված է կայունացման հնարավորությունը օգտագործելով միայն կենտրոնացված կառավարումները ու դիտումները։

V. G. DEICH. *Perturbation of the sectorial forms in stabilization problems for elliptic operators* (summary)

We show that the theory of sectorial forms yields a natural technique for the stabilization problems of elliptic operators with the boundary control and observation gives. A theorem about the perturbations of such a form allows to get criteria of the convergence of certain approximation in stabilization problems. This enables to reduce the problem of the boundary stabilizability to the case of distributed control. On the other hand, for one-dimensional operators we demonstrate the possibility of stabilization by means of localized control and observation only.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Уонэм.* Линейные многомерные системы управления, М., «Наука», 1980.
2. *R. Curtain, A. Pritchard.* Infinite dimensional linear control systems, Springer, 1978.
3. *Ж. Л. Лионс.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, М., «Мир», 1972.
4. *T. Nambu.* Feedback stabilization for distributed parameter systems of parabolic type, Journ. diff, eq-s, 33, 1979, 167—188.

5. *R. Triggiani.* On Nambu's boundary stabilazability for diffusion processes, Journ diff eq-s, 33, 1979, 189—200.
6. *R. Triggiani.* Boundaryfeedback stabilization of parabolic equations, Appl. Math. Optimiz., 6:3, 1980, 201—220.
7. *Т. Като.* Теория возмущений линейных операторов, М., «Мир», 1972.
8. *В. А. Бучин.* Стабилизация неустойчивого режима работы химического реактора как объекта с распределенными параметрами с помощью сосредоточенных систем управления, Изв. АН СССР, сер. МЖГ, № 6, 1974, 4—16.
9. *В. А. Бучин.* Стабилизация неустойчивого режима работы химического реактора с рециклом как объекта с распределенными параметрами посредством сосредоточенных систем управления, Изв. АН СССР, сер. МЖГ, № 3, 1981, 11—24.
10. *С. Л. Соболев.* Некоторые приложения функционального анализа в математической физике, Л., Изд. ЛГУ, 1950.
11. *С. М. Никольский.* Квадратурные формулы, М., «Наука», 1978.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 3, 1985 Математика

УДК 517.53

К. Г. КАЗАРЯН, В. М. МАРТИРОСЯН

РЕШЕНИЕ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ И РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НЕКОТОРЫМ БИОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

§ 0. Введение

0.1 (а). Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из единичного круга, среди которых могут быть числа произвольной конечной или бесконечной кратности. Следуя М. М. Джрбашяну [1, 2], обозначим через $s_k \geqslant 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$.

В работе [2] М. М. Джрбашяном была поставлена общая задача свободной интерполяции с кратными узлами в классах H_p $(0 < p < +\infty)$ Харди—Рисса, которую можно сформулировать следующим образом.

Выявить условия на последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ *и на пространство последовательностей* J, *при которых имеет место совпадение*

$$\{(f^{(s_k-1)}(\alpha_k))_{k=1}^\infty : f \in H_p\} = J, \tag{0.1}$$

и построить аппарат для эффективного представления решений интерполяционной задачи

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k \ (k=1, 2, \cdots); \ \{\gamma_k\}_1^\infty \in J. \tag{0.2}$$

В том специальном случае, когда $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — суть различные друг от друга точки круга $|z| < 1$ и, таким образом, $s_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, эта задача сводится к интерполяционной задаче

$$f(\alpha_k) = \gamma_k \ (k=1, 2, \cdots) \tag{0.2'}$$

с простыми узлами $\{\alpha_k\}_1^\infty$.

При рассмотрении этих задач оказалось естественным ограничиться идеальными банаховыми пространствами J последовательностей* и, в частности, весовыми l_p-пространствами последовательностей.

Критерии *существования решения* задачи (0.2′) в класса H^∞ ограниченных в круге $|z| < 1$ голоморфных функций, либо в классах H_p $(1 < p < +\infty)$ были установлены в ряде работ (см. [3—5], а также [6, 7], где приведены подробные литературные указания по этому поводу). В ра-

* Пусть J — банахово пространство последовательностей комплексных чисел, в котором плотны финитные последовательности. J называется идеальным, если из условий $\{a_k\}_1^\infty \in J$ и $|b_k| \leq |a_k|$ $(k \geq 1)$ следует, что $\{b_k\}_1^\infty \in J$.

боте В. П. Кабайла [8] было дано эффективное решение задачи (0.2′) в классах H_p $(0 < p \leqslant 1)$.

В случае, когда различные точки последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$ появляются двукратно либо с одинаковой кратностью, в классе H_2 задача была решена в работах [9—11], но вновь лишь в постановке существования ее решений. Отметим однако, что эти работы, посвященные решению задачи (0.1), существенно опираются на методы теории гильбертовых пространств.

б) В работе М. М. Джрбашяна [2] был предложен новый, по существу чисто аналитический, метод для полного решения сформулированной выше общей интерполяционной задачи (0.1)—(0.2) в классе H_2, метод, позволяющий дать также аналитический аппарат для представления решений этой задачи. Он основан на построении специальных систем аналитических в круге $|z| < 1$ систем функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, ассоциированных с последовательностью $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и биортогональных на окружности $|z|=1$.

Применением указанного метода биортогонализации М. М. Джрбашяна (по поводу этого метода см. [12], где приведены подробные литературные указания) было дано полное решение общей интерполяционной задачи (0.1)—(0.2) в классах H_p $(0 < p \leqslant +\infty)$ в круге $|z| < 1$, а также в классах H_p $(1 < p < +\infty)$ в полуплоскости и в угловых областях комплексной плоскости (см. [2, 12—21]). При этом была установлена непосредственная связь этой задачи с вопросами описания замыканий и разложений в ряды по вполне определенным системам рациональных функций.

0.2. В работах М. М. Джрбашяна [22, 23], посвященных систематическому изложению и исследованию вопросов представления и замкнутости ряда важных систем аналитических функций, была введена также система функций, определяемая следующим образом.

Пусть $\{\sigma_j\}_0^\infty$ $(|\mathrm{Im}\,\sigma_j| < \pi/2)$ — произвольная последовательность комплексных чисел и $p_k \geqslant 1$ $(k \geqslant 0)$ — кратность появления числа σ_k на отрезке $\{\sigma_j\}_0^k$.

Рассмотрим полиномы

$$\varkappa_0(t) \equiv 1;\ \varkappa_j(t) = \left(\frac{1}{2} + it\right)\left(\frac{3}{2} + it\right)\cdots\left(\frac{2j-1}{2} + it\right),\ j \geqslant 1, \quad (0.3)$$

и ассоциированную с последовательностью $\{\sigma_j\}_0^\infty$ систему функций

$$\{\varkappa_{p_j-1}(t)\, e^{-i\sigma_j t}\}_0^\infty. \quad (0.4)$$

Пусть, далее, $\{\rho_j(t)\}_0^\infty$ — ортогонализация этой системы на всей оси $(-\infty, +\infty)$ с весом $\omega(t) = \mathrm{ch}^{-1}\pi t$.

В процитированных работах [22, 23] были установлены интегральные представления для функций системы $\{\rho_j(t)\,\mathrm{ch}^{-\frac{1}{2}}\pi t\}_0^\infty$ и критерий ее замкнутости в метрике $L_2(-\infty, +\infty)$. Там же были установлены важные связи функций этой системы с полиномами Поллачека.

Отметим, что когда числа последовательности $\{\sigma_j\}_0^\infty$ попарно различны, и тогда $p_k=1$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$, система (0.4) переходит в систему $\{e^{-i\sigma_j t}\}_0^\infty$, критерий замкнутости которой на оси $(-\infty, +\infty)$ в метрике L_2 с весом $e^{-\pi|t|}$ был установлен Н. Винером и Р. Пэли [24].

Отметим также, что в общем случае линейные комбинации функций систем (0.4) и $\{e^{-i\sigma_j t}\, t^{p_j-1}\}_0^\infty$ совпадают. Следовательно, совпадают критерии замкнутости системы (0.4) в пространстве L_2 с весом $\mathrm{ch}^{-1}\,\pi t$ и системы $\{e^{-i\tau_j t}\, t^{p_j-1}\}_0^\infty$ в пространстве L_2 с весом $e^{-\pi|t|}$ на оси $(-\infty, +\infty)$.

0.3 (а). Данная работа посвящена решению интерполяционной задачи (0.1) — (0.2) в классах H_p $(1 < p < +\infty)$ в полосе $|Im z| < h$ $(0 < h < +\infty)$, а также исследованию связанных с этой задачей вопросов замыкания, минимальности и базисности определенных систем рациональных и экспоненциальных функций.

Напомним, что система $\{x_k\}_1^\infty$ элементов банахова пространства X называется минимальной, если ни один элемент этой системы нельзя приблизить в метрике X линейными комбинациями остальных элементов. При этом, как легко следует из теоремы Хана-Банаха, система $\{x_k\}_1^\infty$ минимальна в X тогда и только тогда, когда она имеет биортогональное дополнение, т. е. существует последовательность $\{x_k^*\}_1^\infty$ ограниченных линейных функционалов такая, что

$$x_k^*(x_m) = \delta_{k,m} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (k, m = 1, 2, \cdots). \tag{0.5}$$

Система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом в своем замыкании (т. е. в замыкании в метрике X линейной оболочки системы $\{x_k\}_1^\infty$, если каждый элемент x из этого замыкания единственным образом представим в виде суммы сходящегося по метрике X ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\, x_k, \tag{0.6}$$

где $c_k(x)$ $(k \geqslant 1)$ — комплексные коэффициенты.

б) Исследование ряда свойств пространств H_p в полосе $S_h = \{z;\ |\mathrm{Im}\, z| < h\}$ (их мы обозначаем $H_p[S_h]$) и пространств типа H_p в совокупности полуплоскостей $S_h^* = \{z;\ |\mathrm{Im}\, z| > h\}$ (которые мы обозначаем $H_p[S_h^*]$) проведено в § 1 данной работы.

В § 2 рассматриваются системы рациональных функций вида

$$r_k(z) = (s_k - 1)!\,(z - \lambda_k)^{-s_k} \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{0.7}$$

где $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset S_h$, а $s_k \geqslant 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$.

Устанавливаются критерии полноты и минимальности системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в $H_p[S_h^*]$ $(1 < p < +\infty)$. В случае неполноты такой системы дается полное внутреннее описание ее замыкания, а в случае минимальности применением отмеченного выше метода биортогонализации М. М. Джрбашяна строится биортогональная с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на ∂S_h^* система функций $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$.

В § 3 устанавливаются критерии базисности в их замыканиях систем функций $\{r_k(z)\}_1^\infty \subset H_p[S_h^*]$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty \subset H_p[S_h]$ $(1<p<+\infty)$ и дается полное решение интерполяционной задачи (0.1)—(0.2) в классах $H_p[S_h]$ $(1<p<+\infty)$.

В § 4 рассмотрены системы функций вида $\{e^{-i\lambda_k t}\, t^{s_k-1}\}_1^\infty$ в пространстве L_2 с весом $e^{-2h|t|}$ на оси $(-\infty, +\infty)$. Построено унитарное отображение этого пространства на $H_2[S_h^*]$, переводящее указанную систему в систему $\{r_k(z)\}_1^\infty$. С использованием результатов предыдущих параграфов приводится новое доказательство теоремы Винера—Пэли и М. М. Джрбашяна, дающей критерий замкнутости системы $\{e^{-i\lambda_k t}\, t^{s_k-1}\}_1^\infty$, и устанавливаются критерии ее минимальности и базисности в своем замыкании. В случае незамкнутости такой системы дается полное внутреннее описание ее замыкания, в случае ее минимальности построена биортогональная с ней на оси $(-\infty, +\infty)$ система функций $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$.

Отметим, что теоремы 1.1—1.4 и леммы 1—3 установлены авторами совместно. Лемма 4, теоремы 2.3—2.8 и результаты § 3 и § 4 принадлежат К. Г. Казаряну.

Авторы приносят глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за проявленное к работе внимание.

§ 1. Пространства $H_p[S_h]$ и $H_p[S_h^*]$

1.1. Пусть $0<h<+\infty$. Обозначим через

$$S_h=\{z: |\operatorname{Im} z|<h\},\quad S_h^*=\{z: |\operatorname{Im} z|>h\} \tag{1.1}$$

соответственно, полосу S_h ширины $2h$ и дополнительное к ней множество S_h^*, состоящее из объединения полуплоскостей $\operatorname{Im} z>h$ и $\operatorname{Im} z<-h$. Их общую границу обозначим через ∂S_h (через ∂S_h^*), полагая, что направление на ∂S_h (на ∂S_h^*) совпадает с направлением положительного обхода S_h (обхода S_h^*).

Обозначим через $H_p[S_h]$ $(0<p<+\infty)$ класс функций $F(z)$, аналитических в области S_h и удовлетворяющих условию

$$\|F;\, S_h\|_p=\sup_{|y|<h}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x+iy)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty. \tag{1.2}$$

Далее, через $H_p[S_h^*]$ $(0<p<+\infty)$ обозначим класс функций $F(z)$, аналитических в S_h^* и удовлетворяющих условию

$$\|F;\, S_h^*\|_p=\left\{\sup_{y<-h}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x+iy)|^p\,dx+\sup_{y>h}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x+iy)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty. \tag{1.3}$$

Наконец, обозначим через $L_p(\partial S_h)$ $(0<p<+\infty)$ пространство измеримых на ∂S_h функций $F(\zeta)$ с нормой

$$\|F, \partial S_h\|_p = \left\{ \int_{\partial S_h} |F(\xi)|^p |d\xi| \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{1.4}$$

(б) Пусть $H_p\,(0 < p < +\infty)$ — известный (см., например, [6]) класс функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{0<x<+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dy \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

а H_p^* — это класс функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и таких, что

$$\|f\|_{H_p^*} = \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \, dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Следующая теорема при $p = 2$ была установлена в совместной работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [25], а при $p \in (0, +\infty)$ в одну сторону — в работе С. А. Акопяна [26], а в другую — в работе А. М. Седлецкого [27].

Теорема А. *Для любого $p \in (0, +\infty)$ справедливы утверждения:*

1°. $H_p = H_p^*$.

2°. $2^{-1/p}\|f\|_{H_p} \leqslant \|f\|_{H_p^*} \leqslant \|f\|_{H_p}$.

Стандартными методами (см., напр., [7], гл. VII) устанавливаются следующие две теоремы.

Теорема 1.1. *Для любой функции $F(z) \in H_p[S_h^*]\,(1 < p < +\infty)$ справедливы следующие утверждения:*

1°. *Почти всюду на ∂S_h^* функция $F(z)$ имеет угловые граничные значения $F(\zeta) \in L_p(\partial S_h^*)$, причем*

$$\lim_{y \to \pm h} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy) - F(x \pm ih)|^p \, dx = 0;$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_h^*} \frac{F(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \begin{cases} F(z), & z \in S_h^*, \\ 0, & z \in S_h. \end{cases}$$

Теорема 1.1*. *Для любой функции $F(z) \in H_p[S_h]\,(1 < p < +\infty)$ справедливы следующие утверждения:*

1°. *Почти всюду на ∂S_h функция $F(z)$ имеет угловые граничные значения $F(\zeta) \in L_p(\partial S_h)$, причем*

$$\lim_{y\to\pm h}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x+iy)-F(x\pm ih)|^p\,dx=0;$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h}\frac{F(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\begin{cases}F(z), & z\in S_h,\\ 0 & z\in S_h^*;\end{cases}$$

3°. *Для любого* $h_0\,(0<h_0<h)$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\{\max_{|y|<h_0}|F(x+iy)|\}=0.$$

(в) Известно, что $H_p[S_h]$ — банахово пространство при $1\leqslant p<+\infty$ и пространсто Фреше при $0<p<1$ [27].

Убедимся в справедливости неравенств

$$2^{-1/p}\|F;\ \partial S_h\|_p\leqslant\|F;\ S_h\|_p\leqslant\|F;\ \partial S_h\|_p \tag{1.5}$$

для произвольного $F(z)\in H_p[S_h]$ $(0<p<+\infty)$, из которых следует, что нормы (1.2) и (1.4) порождают в $H_p[S_h]$ эквивалентные топологии.

Пусть $F(z)\in H_p[S_h]$. $w=e^{\pi z/2h}$ взаимно-однозначно и конформно отображает полосу S_h на правую полуплоскость.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(w)=\left(\frac{2h}{\pi}\right)^{1/p}F\left(\frac{2h}{\pi}\log w\right)w^{-1/p}=\left(\frac{2h}{\pi}\right)^{1/p}F(z)\,e^{-\pi z/2hp}.$$

Тогда $\Phi(w)\in H_p^*$ и

$$\|\Phi\|_{H_p^*}=\|F;\ S_h\|_p. \tag{1.6}$$

С другой стороны, легко проверить, что $\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(iy)|^p\,dy=\|F;\ \partial S_h\|_p^p$ и, принимая во внимание, что $\|\Phi\|_{H_p}^p=\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(iy)|^p\,dy$, получаем

$$\|\Phi\|_{H_p}=\|F;\ \partial S_h\|_p. \tag{1.7}$$

Из (1.6), (1.7) и теоремы А (2°) получаем неравенства (1.5).

Легко показывается, что $H_p[S_h^*]$ $(1\leqslant p<+\infty)$ с нормой (1.3) тоже является банаховым пространством. Из этого следует, что $H_p[S_h^*]$ можно рассматривать как замкнутое подпространство банахова пространства $L_p(\partial S_h^*)$.

1.2. Из известной теоремы о проектировании ([28], стр. 176—183) вытекает

Теорема 1. 2. *Если* $F(\xi)\in L_p(\partial S_h)$ $(1<p<+\infty)$, *то интеграл типа Коши*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \begin{cases} F^{(+)}(z), & z \in S_h, \\ F^{(-)}(z), & z \in S_h^{*}, \end{cases}$$

обладает следующими свойствами:

1°. $F^{(+)}(z) \in H_p[S_h]$, $F^{(-)}(z) \in H_p[S_h^{*}]$;

2°. *Имеют место неравенства*

$$\|F^{(+)};\ \partial S_h\|_p \leqslant B_p\|F;\ \partial S_h\|_p,\quad \|F^{(-)};\ \partial S_h\|_p \leqslant B_p\|F;\ \partial S_h\|_p,$$

где $B_p \in (0, +\infty)$ *не зависит от* $F(\xi)$;

3°. *Почти всюду на* ∂S_h $F(\xi) = F^{(+)}(\xi) - F^{(-)}(\xi)$.

Следствие. *Пусть* $F(\xi) \in L_p(\partial S_h)$ $(1 < p < +\infty)$. *Для того, чтобы* $F(\xi)$ *была граничной функцией некоторой функции из класса* $H_p[S_h]$, *необходимо и достаточно условие*

$$\int\limits_{\partial S_h}\frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = 0,\quad z \in S_h^{*}.$$

1.3. Мы хотим установить вид линейного функционала в пространстве $H^p[S_h^{*}]$ удобный для наших дальнейших целей. Сначала докажем две леммы.

Лемма 1. *Если* $F(z) \in H_p[S_h^{*}]$ *и* $G(z) \in H_q[S_h^{*}]$ $\left(1 < p < +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, *то*

$$\int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\,G(\xi)\,d\xi = 0. \tag{1.8}$$

Доказательство. Поскольку $F(iz + ih) \in H_p^{*}, G(iz+ih) \in H_q^{*}$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x + ih)\,G(x + ih)\,dx = 0$ (см. [12], лемму 2). Аналогично $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x - ih)\,G(x - ih)\,dx = 0$. Из этих двух равенств и следует (1.8).

Лемма 2. *Если* $F(z) \in H_p[S_h]$ *и* $G(z) \in H_q[S_h]$ $\left(1 < p < +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, *то*

$$\int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\,G(\xi)\,d\xi = 0. \tag{1.9}$$

Доказательство. Для фиксированных значений σ и l $(0 < \sigma < +\infty,\ 0 < l < h)$ обозначим через $C(\sigma;\ l)$ границу области $\{z: |\mathrm{Re}\,z| < \sigma, |\mathrm{Im}\,z| < l\}$. По теореме Коши

$$\int\limits_{C(\sigma;\ l)} F(z)\,G(z)\,dz = 0. \tag{1.10}$$

С другой стороны, в силу теоремы 1.1* (3°) имеем

$$\max_{|y|<l} |F(\pm\sigma+iy)|=o(1), \quad \max_{|y|<l} |G(\pm\sigma+iy)|=o(1), \quad \sigma\to+\infty,$$

откуда

$$\int_{-l}^{l} F(\pm\sigma+iy)\, G(\pm\sigma+iy)\, dy=o(1), \quad \sigma\to+\infty.$$

Следовательно, устремив в (1.10) $\sigma\to+\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+il)\, G(x+il)\, dx-\int_{-\infty}^{+\infty} F(x-il)\, G(x-il)\, dx=0, \tag{1.11}$$

и поскольку в силу теоремы 1.1* (1°), при $l\to h$ будем иметь

$$F(x\pm ih)=\underset{l\to h}{\overset{(p)}{\text{l.i.m.}}}\, F(x\pm il), \quad G(x\pm ih)=\underset{l\to h}{\overset{(q)}{\text{l.i.m.}}}\, G(x\pm il),$$

то устремив в (1.11) $l\to h$, получим (1.9).

Теорема 1.3. *Пусть Φ — ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $H_p[\overset{*}{S}_h]$ $(1<p<+\infty)$. Тогда существует единственная функция $G(z)\in H_q[S_h]$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ такая, что*

$$\Phi[F]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overset{*}{S}_h} F(\xi)\, G(\xi)\, d\xi, \quad F\in H_p[\overset{*}{S}_h]. \tag{1.12}$$

При этом

$$\|\Phi\|_* < \frac{1}{2\pi}\|G;\partial S_h\|_q \leqslant B_p\|\Phi\|_*, \tag{1.13}$$

где $\|\Phi\|_*$ — это норма функционала Φ на пространстве $H_p[S_h]$, а $B_p\in(0,+\infty)$ не зависит от Φ.

Обратно, если $G(z)\in H_q[S_h]$, то формулой (1.12) определяется ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $H_p[\overset{*}{S}_h]$.

Эта теорема доказывается по той же схеме, что и аналогичная теорема 4 из [12].

1.4. В заключение этого параграфа опишем множество нулей функций класса $H_p[S_h]$. При помощи отображения $w=e^{\pi z/2h}$ полосы S_h на полуплоскость $\operatorname{Re} w>0$, мы можем рассматривать произведение Бляшке для области S_h

$$B_h(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\pi z/2h}-e^{\pi\lambda_k/2h}}{e^{\pi z/2h}+e^{\pi\bar{\lambda}_k/2h}}\cdot\frac{|1-e^{\pi\lambda_k/h}|}{1-e^{\pi\lambda_k/h}}, \tag{1.14}$$

где $\{\lambda_k\}_1^{\infty}\subset S_h$. Тогда в силу известных свойств произведения Бляшке для полуплоскости $\operatorname{Re} w>0$ (см., напр., [16], гл. 5) справедлива

Лемма А. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Re}\lambda_k\right)} \tag{1.15}$$

сходится, то произведение Бляшке для S_h сходится абсолютно и равномерно внутри S_h и определяет аналитическую функцию $E_h(z)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$. Более того

$$|B_h(z)| \leqslant 1 \ (z \in S_h); \ B^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots);$$

$$|B_h(\zeta)| = 1 \textit{ почти всюду на } \partial S_h.$$

Если же ряд (1.15) *расходится, то частичные произведения $B_{h,n}(z)$ произведения (1.14) при $n \to +\infty$ равномерно сходятся к нулю внутри* области S_h.

Следующая теорема доказывается по схеме доказательства теоремы 5 из [12].

Теорема 1.4. *Пусть $1 < p < +\infty$. Справедливы утверждения:*

1°. *Если ряд* (1.15) *сходится, то существует функция $G(z) \in H_p[S_h]$, обращающаяся в нуль лишь в точках последовательности $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$, причем*

$$G^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots); \tag{1.16}$$

2°. *Если ряд* (1.15) *расходится и функция $G(z) \in H_p[S_h]$ удовлетворяет условиям* (1.16), *то $G(z) \equiv 0$.*

§ 2. Полнота и замыкание биортогональных систем $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^{\infty}$

2.1. (а). Пусть $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел из области S_h, среди которых могут быть числа произвольной конечной или даже бесконечной кратности. Для любого целого $k \geqslant 1$ обозначим через s_k и p_k кратности появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$, и во всей последовательности $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$, соответственно. Очевидно, что $1 \leqslant s_k \leqslant p_n \leqslant +\infty$ $(k=1, 2, \cdots)$. Отметим также, что если ряд (1.15) сходится, то число p_k будет конечным при всех $k \geqslant 1$. Условимся также ниже полагать

$$1 < p < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ (\text{тогда } 1 < q < +\infty). \tag{2.1}$$

(б) С последовательностью $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ ассоциируем систему простейших рациональных дробей $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$, положив

$$r_k(z) = \frac{(s_k-1)!}{(z-\lambda_k)^{s_k}} \ (k=1, 2, \cdots). \tag{2.2}$$

Так как $r_k(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{S_h}$, а при $|z| \to +\infty$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$, то $r_k(z) \in H_p[S_h]$ $(k=1, 2, \cdots)$.

Теорема 2.1. *Для полноты системы* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *в пространстве* $H_p[S_h^*]$ *необходимо и достаточно, чтобы ряд* (1.15) *расходился.*

Эта теорема доказывается тем же способом, что и теорема 6 из [12].

Аналогично, если ряд (1.15) расходится, то система $\{r_k(z)\}_{k=2}^\infty$ полна в пространстве $H_p[S_h^*]$. Таким образом, если ряд (1.15) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не минимальна в $H_p[S_h^*]$ и, следовательно, не имеет биортогонального дополнения.

(в) Если система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не полна в $H_p[S_h^*]$ (т. е. ряд (1.15) сходится), то она порождает в $H_p[S_h^*]$ некоторое замкнутое собственное подпространство. Мы хотим дать полное внутреннее описание этого подпространства.

При условии сходимости ряда (1.15) обозначим через $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$ множество тех функций $F(z)\in H_p[S_h^*]$, для которых $F(\xi)B_h(\xi)$, $\xi\in\partial S_h$, являются угловыми значениями некоторой функции из класса $H_p[S_h]$.

В силу следствия из теоремы 1.2 справедлива

Лемма 3. *Если ряд* (1.15) *сходится, то класс* $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$ *совпадает с множеством тех* $F(z)\in H_p[S_h^*]$, *для которых*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\frac{F(\xi)B_h(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=0,\quad z\in S_h^*. \tag{2.3}$$

Из этой леммы легко следует, что $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$ является замкнутым подпространством пространства $H_p[S_h^*]$.

Теорема 2.2. *Если ряд* (1.15) *сходится, то замыкание в метрике* $H_p[S_h^*]$ *линейной оболочки системы* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *совпадает с классом* $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$.

Доказательство проводится тем же методом, что и доказательство теоремы 7 из [12].

2.2. (а). Если ряд (1.15) сходится, то, как было установлено выше, система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ имеет биортогональную с ней на ∂S_h систему. Займемся ее построением, пользуясь известным методом, предложенным М. М. Джрбашяном (см., напр., [29], [30]).

(б). Пусть ряд (1.15) сходится. Тогда бесконечное произведение (1.14) сходится в области S_h и представляет там ограниченную аналитическую функцию $B_h(z)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. При этом для функции $B_h(z)$ точка $z=\lambda_k$ является нулем кратности p_k. Очевидно, что функция

$$\zeta_k(z)=(z-\lambda_k)^{p_k}B_h^{-1}(z)\quad (k=1,2,\cdots) \tag{2.4}$$

регулярна и отлична от нуля в некоторой окрестности точки $z=\lambda_k$. Следовательно, при достаточно малом $\delta>0$ справедливо разложение

$$\zeta_k(z)=\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu(\lambda_k)(z-\lambda_k)^\nu,\quad |z-\lambda_k|<\delta; \tag{2.5}$$

$$a_\nu(\lambda_k)=\frac{1}{\nu!}\zeta_k^{(\nu)}(\lambda_k) \quad (\nu=0,1,\cdots;\ k=1,2,\cdots). \tag{2.6}$$

Отметим, что $a_0(\lambda_k)\neq 0 \quad (k=1, 2,\cdots)$.
Введем в рассмотрение полиномы

$$q_k(z)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(\lambda_k)(z-\lambda_k)^\nu \quad (k=1, 2,\cdots) \tag{2.7}$$

и функции

$$\Omega_k(z)=\frac{B_h(z)\,q_k(z)}{(s_k-1)!\,(z-\lambda_k)^{p_k-s_k+1}}=\frac{B_h(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)^{p_k-s_k-\nu+1}}. \tag{2.8}$$

Так как функция $B_h(z)$ аналитична и ограничена в области S_h и в точке $z=\lambda_k$ имеет нуль кратности p_k, то $\Omega_k(z)$ аналитична и ограничена в той же области S_h. Более того, при $|z|\to+\infty$ функция $\Omega_k(z)$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$. Отсюда легко видеть, что

$$\Omega_k(z)\in H_p[S_h] \ (k=1, 2,\cdots).$$

Рассуждая, как и в работах [29, 30], получим следующее утверждение.

Лемма 4. *Функции системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ удовлетворяют следующим интерполяционным данным*

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\lambda_n)=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases} \quad (k, n=1, 2,\cdots).$$

Теорема 2.3. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Тогда системы* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *биортогональны в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h} r_n(\xi)\,\Omega_k(\xi)\,d\xi=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases} \quad (k, n=1, 2,\cdots). \tag{2.9}$$

Эта теорема следует из леммы 4, так как написанный в (2.9) интеграл равен $\Omega_k^{(s_n-1)}(\lambda_n)$ (в силу (2.2) и теоремы 1.1* (2°)).

Из этой теоремы и замечания, приведенного после доказательства теоремы 2.1, заключаем, что для минимальности системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ необходима и достаточна сходимость ряда (1.15).

(в) Теперь мы хотим описать замкнутую линейную оболочку системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty\subset H_p[S_h]$. Напомним, что эта система определена лишь при условии сходимости ряда (1.15).

Пусть ряд (1.15) сходится. Обозначим через $\overline{H}_p\{\lambda_k; S_h\}$ множество тех функций $f(z)\in H_p[S_h]$, для которых $f(\xi)\,B_h^{-1}(\xi)$, $\xi\in\partial S_h$, являются граничными значениями некоторой функции из класса $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$.

Теорема 2.4. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Тогда замыкание в метрике $H_p[S_h]$ линейной оболочки системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ совпадает с классом $\overline{H}_p\{\lambda_k; S_h\}$.*

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 9 из [12].

Теорема 2.5. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Если* $f(z)\in \widetilde{H}_p\{\lambda_k; S_h\}$ *и* $f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0$ $(k=1, 2, \cdots)$, *то* $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Так как $f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0$ $(k\geqslant 1)$, то $f(\xi)\times \times B_h^{-1}(\xi)\in H_p[S_h]$. С другой стороны, из $f(z)\in \widetilde{H}_p\{\lambda_k; S_h\}$ имеем $f(\xi)\times \times B_h^{-1}(\xi)\in H_p\{\lambda_k; S_h\}$. Следовательно, в силу теоремы 1.1* (2°) и леммы 3

$$\int_{\partial S_h}\frac{f(\xi)\, B_h^{-1}(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\equiv 0,\ z\in S_h\cup \overset{*}{S}_h.$$

Отсюда заключаем, что $f(\xi)\,B_h^{-1}(\xi)=0$ почти всюду на ∂S_h (см. теорему 1.2 (3°)), и поскольку $|B_h(\xi)|=1$ почти всюду на ∂S_h, то $f(z)\equiv 0$.

Теорема 2.6. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Тогда любая функция* $G(z)\in H_p[S_h]$ *представима в виде*

$$G(z)=g(z)+\frac{B_h(z)}{2\pi i}\int_{\partial S_h}\frac{G(\xi)}{B_h(\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi-z},\ z\in S_h, \tag{2.10}$$

где

$$g(z)\in H_p\{\lambda_k;\ S_h\},\ \widetilde{G}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h}\frac{G(\xi)}{B_h(\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi-z}\in H_p[S_h].$$

При этом справедливо неравенство

$$\|g;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p\,\|G;\ \partial S_h\|_p,$$

где $B_p\in(0, +\infty)$ *не зависит от* $G(z)$.

Доказательство. Пусть $G(z)\in H_p[S_h]$. Так как $|B_h(\xi)|=1$ почти всюду на ∂S_h, то по теореме 1.1* (1°)

$$G(\xi)\,B_h^{-1}(\xi)\in L_p(\partial S_h).$$

Следовательно, положив

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h}\frac{G(\xi)}{B_h(\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi-z}=\begin{cases}\widetilde{G}(z), & z\in S_h,\\ -F(z), & z\in \overset{*}{S}_h,\end{cases}$$

в силу теоремы 1.2 можем написать

$$\widetilde{G}(z)\in H_p[S_h],\quad F(z)\in H_p[\overset{*}{S}_h],$$

причем $\|F;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p\,\|G;\ \partial S_h\|_p$. Более того, почти всюду на ∂S_h

$$G(\xi)\,B_h^{-1}(\xi)=\widetilde{G}(\xi)+F(\xi).$$

Следовательно, определив функцию $g(z)$ равенством

$$g(z) = G(z) - B_h(z)\,\widetilde{G}(z), \quad z \in S_h.$$

будем иметь: $g(z) \in H_p[S_h]$ и почти всюду на ∂S_h $g(\xi)\,B_h^{-1}(\xi) = F(\xi)$. Отсюда на основании определения класса $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\, S_h\}$ заключаем, что $F(z) \in H_p\{\lambda_k;\, S_h^*\}$. Следовательно, $g(z) \in \widetilde{H}_p\{\lambda_k;\, S_h\}$, причем

$$\|G;\, \partial S_h\|_p = \|gB^{-1};\, \partial S_h\|_p = \|F;\, \partial S_h\|_p \leqslant B_p\,\|G;\, \partial S_h\|_p.$$

Теорема 2.7. *Если ряд (1.15) сходится, то*

1°. *При любом целом $k \geqslant 1$ формулой*

$$\chi_k[\varphi] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h} \Omega_k(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \quad \varphi \in H_p\{\lambda_k;\, S_h^*\},$$

на пространстве $H_p\{\lambda_k;\, S_h^*\}$ определяется ограниченный линейный функционал χ_k;

2°. *Системы $\{\chi_k\}_1^\infty$ и $\{r_k\}_1^\infty$ биортогональны:*

$$\chi_k[r_n] = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k,\, n = 1,\, 2, \cdots),$$

3°. *Справедливы неравенства*

$$\|\Omega_k;\, \partial S_h\|_q \leqslant C_p\,\|\chi_k\| \quad (k = 1,\, 2, \cdots),$$

где $\|\chi_k\|$ — это норма функционала χ_k на пространстве $H_p\{\lambda_k;\, S_h^*\}$, а $C_p \in (0, +\infty)$ не зависит от $k \geqslant 1$.

Доказательство. Так как $\Omega_k(z) \in H_q[S_h]$ и $H_p\{\lambda_k;\, S_h^*\} \subset H_p[S_h^*]$, то утверждение 1° следует из теоремы 1.3. Утверждение 2° следует из теоремы 2.3. Перейдем к доказательству утверждения 3° теоремы.

Положим

$$T_k(\xi) = \Omega_k(\xi)\,B_h^{-1}(\xi) = \frac{1}{(s_k - 1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} \frac{a_\nu(\lambda_k)}{(\xi - \lambda_k)^{p_k - s_k - \nu + 1}}, \quad \xi \in \partial S_h.$$

Нетрудно видеть, что $T_k \in H_q[S_h^*]$ и $\|T_k;\, \partial S_h\|_q = \|\Omega_k;\, \partial S_h\|_q$. Следовательно, по теореме 1.3 формулой

$$\Phi_k[G] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h} T_k(\xi)\,G(\xi)\,d\xi, \quad G \in H_p[S_h]$$

определяется ограниченный линейный функционал Φ_k, заданный на пространстве $H_p[S_h]$. При этом

$$\|\Omega_k;\, \partial S_h\|_q = \|T_k;\, \partial S_h\|_q \leqslant 2\pi B_p \sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h} T_k(\xi)\,G(\xi)\,d\xi\right|\right\}, \tag{2.11}$$

где верхняя грань берется по всем $G \in H_p[S_h]$ с нормой $\|G;\, \partial S_h\|_p \leqslant 1$. По теореме 2.6 каждая такая функция представима в виде

$$G(z)=g(z)+B_h(z)\widetilde{G}(z),\quad z\in S_h, \tag{2.12}$$

где $g(z)\in\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$, $\widetilde{G}(z)\in H_p[S_h]$, причем $\|g;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p$. Но так как функция $B_h(z)\widetilde{G}(z)$ вместе с $B_n(z)$ в точке $z=\lambda_k$ имеет нуль кратности p_k, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}T_k(\xi)B_h(\xi)\widetilde{G}(\xi)\,d\xi=0,$$

и из (2.12) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}T_k(\xi)G(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}T_k(\xi)g(\xi)\,d\xi. \tag{2.13}$$

Однако $g(z)\in\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$. Значит

$$g(\xi)B_h^{-1}(\xi)=\varphi(\xi)\in H_p\{\lambda_k;\ \mathring{S}_h\}, \tag{2.14}$$

и поскольку $\|g;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p$, то $\|\varphi;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p$. Наконец, так как $T_k(\xi)B_h(\xi)=\Omega_k(\xi)$, то из (2.12) и (2.13) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}T_k(\xi)G(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\Omega_k(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда и из (2.11) заключаем, что

$$\|\Omega_k;\ \partial S_h\|_q\leqslant 2\pi B_p\sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\Omega_k(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right|\right\},$$

где верхняя грань берется по всем $\varphi(\xi)\in H_p\{\lambda_k;\ \mathring{S}_h\}$ с нормой $\|\varphi;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p$, откуда и вытекает утверждение 3°.

Аналогично доказывается

Теорема 2.8. *Если ряд (1.15) сходится, то* 1°. *При любом целом $k\geqslant 1$ формулой*

$$R_k[g]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}r_k(\xi)g(\xi)\,d\xi,\quad g\in\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\},$$

на пространстве $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ определяется ограниченный линейный функционал R_k.

2°. *Системы $\{R_k\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k\}_1^\infty$ биортогональны:*

$$R_k[\Omega_n]=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases}\quad (k,\ n=1,\ 2,\cdots);$$

3°. *Справедливы неравенства*

$$\|r_k;\ \partial S_h\|_p\leqslant C_p\|R_k\|\quad (k=1,\ 2,\cdots),$$

где $\|R_k\|$ — это норма функционала R_k на пространстве $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$, а $C_p\in(0,\ +\infty)$ не зависит от $k\geqslant 1$.

§ 3. Базисность системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$, $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ и решение кратной интерполяционной задачи в классах $H_p[S_h]$

3.1. (а) Для удобства читателя приведем здесь некоторые известные определения и факты.

Пусть X — банахово пространство и $\{x_k\}_1^\infty$ — система элементов этого пространства. Обозначим через $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$ замкнутую линейную оболочку системы $\{x_k\}_1^\infty$.

Как известно, система $\{x_k\}_1^\infty$ называется базисом пространства $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$, если любой элемент $x \in V(\{x_k\}_1^\infty; X)$ единственным образом разлагается в сходящийся по метрике X ряд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\, x_k, \tag{3.1}$$

где $c_k(x)$ — комплексные коэффициенты. В этом случае система $\{c_k(x)\}_1^\infty$ будет биортогональна с системой $\{x_k\}_1^\infty$.

Напомним, что системы $\{x_k\}_1^\infty \subset X$ и $\{\overset{*}{x}_k\}_1^\infty \subset X^*$ называются биортогональными, если

$$\overset{*}{x}_k(x_n) = \delta_{k,n} \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{3.2}$$

где $\delta_{k,n}$ — символ Кронекера.

Если система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом пространства $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$, то эта система имеет биортогональное дополнение $\{\overset{*}{x}_k\}_1^\infty$, причем справедливо неравенство

$$\sup_{k \geq 1} \{\|x_k\|\, \|\overset{*}{x}_k\|\} < +\infty, \tag{3.3}$$

где $\|\overset{*}{x}_k\|$ — это норма функционала $\overset{*}{x}_k$ на пространстве $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$ (см. [31], стр. 164—171).

Скажем, что система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$, изоморфным стандартному базису пространства l_p, если существует ограниченный обратимый линейный оператор T_p: $V(\{x_k\}_1^\infty; X) \to l_p$ такой, что $T_p(x_k) = \{\delta_{k,n}\}_{n=1}^\infty$ при всех $k \geq 1$.

(б) Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset S_h$ — произвольная последовательность. Как и раньше, для произвольного целого $j \geq 1$ через s_j и p_j будем обозначать кратности появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_k\}_1^j$ и во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ соответственно.

Обозначим через $US(S_h)$ класс тех последовательностей $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset S_h$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\inf_{k \geq 1} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_k}}^{\infty} \left| \frac{e^{\pi\lambda_k/2h} - e^{\pi\lambda_j/2h}}{e^{\pi\lambda_k/2h} + e^{\overline{\pi\lambda_j}/2h}} \right| \right\} > 0, \quad \sup_{k \geq 1} \{p_k\} < +\infty. \tag{3.4}$$

Отметим, что из первого из этих условий вытекает сходимость ряда (1.15).

Очевидно также, что условия (3.4) можно записать и в следующем виде.

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_k}}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4h}(\lambda_k-\lambda_j)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4h}(\lambda_k-\bar{\lambda}_j)}\right|\right\}>0,\quad \sup_{k\geq 1}\{p_k\}<+\infty. \tag{3.4'}$$

С последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем новую последовательность $\lambda_{(q)}\equiv\{\lambda_k^{(q)}\}_1^\infty$, положив

$$\lambda_k^{(q)}=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right|^{s_k-\frac{1}{q}}\ (k=1,2,\cdots). \tag{3.5}$$

Пусть, далее, $\varkappa\equiv\{\varkappa_k\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел. Обозначим через $l_p\{\varkappa\}$ банахово пространство всевозможных последовательностей комплексных чисел $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\|\gamma;\varkappa\|_p=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\varkappa_k^p|\gamma_k|^p\right\}^{1/p}<+\infty.$$

Очевидно, что если последовательность $w\equiv\{w_k\}_1^\infty$ и $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^\infty$ удовлетворяют условиям $w_k=\varkappa_k\gamma_k\ (k\geqslant 1)$, то $\gamma\in l_p(\varkappa)$ тогда и только тогда, когда $w\in l_p$.

Наконец, напомним, что выше мы условились через p и q обозначать параметры, определяемые из условий (2.1).

3.2 (a). Докажем лемму.

Лемма 5. *Если $\lambda\in S_h$ и $n\geqslant 1$, то*

$$\left[\frac{4h}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda\right)\right]^n\int_{\partial S_h}\frac{|d\xi|}{|\xi-\lambda|^{n+1}}\geqslant\frac{2}{n}\left(\frac{4}{\pi}\right)^n.$$

Доказательство. Имеем

$$I_n(\lambda)=\int_{\partial S_h}\frac{|d\xi|}{|\xi-\lambda|^{n+1}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^{n+1/2}}\left\{\frac{1}{(h+\operatorname{Im}\lambda)^n}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(h-\operatorname{Im}\lambda)^n}\right\}\geqslant\frac{2}{n}\left\{\frac{1}{(h+\operatorname{Im}\lambda)^n}+\frac{1}{(h-\operatorname{Im}\lambda)^n}\right\}.$$

Следовательно, воспользовавшись неравенством $\sin\tau\geqslant\frac{2}{\pi}\tau\left(0\leqslant\tau\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ при $0\leqslant\operatorname{Im}\lambda<h$ можем написать

$$I_n(\lambda)>\frac{2}{n}(h-\operatorname{Im}\lambda)^{-n}=\frac{2}{n}\left(\frac{\pi}{2h}\right)^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda\right)^{-n}\geqslant$$

$$>\frac{2}{n}\left(\frac{\pi}{2h}\right)^n\left[\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda\right)\right]^{-n}=\frac{2}{n}h^{-n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda\right)\right]^{-n}.$$

Аналогично, при $-h<\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$

$$I_n(\lambda)>\frac{2}{n}h^{-n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda\right)\right]^{-n}.$$

Из полученных оценок следует утверждение леммы.

Лемма 6. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Если*

$$\sup_{k>1} \{\|r_k;\ \partial S_h\|_p \|\Omega_k;\ \partial S_h\|_q\} = C < +\infty, \tag{3.6}$$

то $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset US(S_h)$.

Доказательство. Сначала заметим, что в силу сходимости ряда (1.15) число p_n при любом $n \geqslant 1$ конечно.

Обозначим через $\{N\}$ множество тех индексов n, для которых $p_n = s_n$. Из определения (2.8) функций $\Omega_k(z)$ следует, что

$$\Omega_n(z) = \frac{a_0(\lambda_n)}{(p_n-1)!}\,\frac{B_h(z)}{z-\lambda_n},\quad n \in \{N\},$$

причем

$$|a_0(\lambda_n)| = \left\{\frac{4h}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_n\right)\right\}^{p_n}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_n}}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4h}(\lambda_n-\lambda_j)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4h}(\lambda_n-\overline{\lambda}_j)}\right|\right\}. \tag{3.7}$$

Имеем также

$$r_n(z) = \frac{(p_n-1)!}{(z-\lambda_n)^{p_n}},\quad n \in \{N\}.$$

Учитывая, что $|B_h(\xi)| = 1$ почти всюду на ∂S_h и, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|a_0(\lambda_n)| \int_{\partial S_h} \frac{|d\xi|}{|\xi-\lambda_n|^{p_n+1}} = \int_{\partial S_h} |r_n(\xi)|\,|\Omega_n(\xi)|\,|d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \|r_n;\ \partial S_h\|_p \|\Omega_n;\ \partial S_h\|_q,\quad n \in \{N\}.$$

Отсюда и из теоремы 2.5 получаем $F(z) \equiv 0$, откуда заключаем, что

$$\frac{2}{p_n}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{p_n} \leqslant C\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_n}}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4h}(\lambda_n-\lambda_j)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4h}(\lambda_n-\overline{\lambda}_j)}\right|\right\},\quad n \in \{N\}. \tag{3.8}$$

Так как $4/\pi > 1$, а выражение справа в (3.8) не превосходит C, то из (3.8) получаем (3.4).

Лемма 7. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Если система* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *при какой-либо перестановке членов является базисом замыкания в метрике* $H_p[\overset{*}{S}_h]$ *своей линейной оболочки, то* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$.

Доказательство. Напомним, что при условии сходимости ряда (1.15) система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ определена. При том же условии замыкание в метрике $H_p[\overset{*}{S}_h]$ линейной оболочки системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ совпадает с пространством $H_p\{\lambda_k;\ \overset{*}{S}_h\}$ (см. теорему 2.2).

Если система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ при какой-либо перестановке членов является базисом пространства $H_p\{\lambda_k;\ \overset{*}{S}_h\}$, то в силу теоремы 2.7 и (3.3) имеет место (3.6). Остается воспользоваться леммой 6.

Аналогично доказывается

Лемма 8. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Если система* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *при какой-либо перестановке членов является базисом замыкания в метрике* $H_p[S_h]$ *своей линейной оболочки, то* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$.

(б) Следующее утверждение играет существенную роль при установлении достаточных условий базисности систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\{z_k\}_1^\infty$ — *последовательность попарно различных точек из* S_h, *удовлетворяющая условию*

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{e^{\pi z_k/2h}-e^{\pi z_j/2h}}{e^{\pi z_k/2h}+e^{\pi z_j/2h}}\right|\right\}>0. \tag{3.9}$$

Тогда для любой функции $f(z)\in H_p[S_h]$ *справедливы неравенства*

$$L_r[f]\equiv\sum_{k=1}^{\infty}|z_k^{(r;\,q)}|^p\,|f^{(r-1)}(z_k)|^p\leqslant D_p^{(r)}\,\|f;\,\partial S_h\|_p^p, \tag{3.10}$$

где $D_p^{(r)}\in(0,+\infty)$ *не зависит от* $f(z)$, *а*

$$z_k^{(r;\,q)}=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}z_k\right)\right]^{r-\frac{1}{q}}. \tag{3.5'}$$

Доказательство. Наряду с последовательностью $\{z_k\}_1^\infty$ рассмотрим новую последовательность $\{w_k\}_1^\infty$ из полуплоскости $\operatorname{Re} w>0$, где

$$w_k=e^{\pi z_k/2h}\quad(k=1,2,\cdots). \tag{3.11}$$

Тогда, как известно, [19], в силу (3.9) для любого $F(w)\in H_p$ будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{Re}w_k)^{p(r-1)+1}\,|F^{(r-1)}(w_k)|^p\leqslant A_p^{(r)}\,\|F\|_{H_p}^p\quad(r=1,2\cdots), \tag{3.12}$$

где $A_p^{(r)}\in(0,+\infty)$ не зависит от $F(w)$.

Пусть теперь $f(z)\in H_p[S_h]$. Положим

$$F(w)=\left(\frac{2h}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}f\left(\frac{2h}{\pi}\log w\right)w^{-\frac{1}{p}},\ \operatorname{Re}w>0. \tag{3.13}$$

Легко показать, что тогда $F(w)\in H_p^*$. Значит $F(w)\in H_p$ по теореме A и (3.12) для функции $F(w)$ имеет место.

С другой стороны, применив индукцию по r $(r=1,2,\cdots)$, нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$\left.\frac{d^{r-1}f(z)}{dz^{r-1}}\right|_{z=\frac{2h}{\pi}\log w}=\sum_{\nu=0}^{r-1}C_\nu^{(r)}\,w^{\nu+\frac{1}{p}}\,\frac{d^\nu F(w)}{dw^\nu},\ \operatorname{Re}w>0,$$

где $C_\nu^{(r)}$ $(0\leqslant\nu\leqslant r-1)$ не зависит от w и $f(z)$. Отсюда и из (3.11) с применением неравенства

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right|^p \leqslant N^{p/q} \sum_{n=1}^{N} |a_n|^p \tag{3.14}$$

получим

$$|f^{(r-1)}(z_k)|^p \leqslant B_p^{(r)} \sum_{\nu=0}^{r-1} |w_k|^{p\nu+1} |F^{(\nu)}(w_k)|^p \quad (k \geqslant 1),$$

где $B_p^{(r)} \in (0, +\infty)$ не зависит от $k \geqslant 1$ и $f(z)$. Следовательно

$$L_r[f] \leqslant B_p^{(r)} \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} |z_k^{(r;q)}|^p \, |w_k|^{p\nu+1} \, |F^{(\nu)}(w_k)|^p. \tag{3.15}$$

Легко проверить, что $p\left(r - \dfrac{1}{q}\right) > p\nu + 1$, $\nu = 0, 1, \cdots, r-1$ и поэтому

$$|z_k^{(r;q)}|^p \, |w_k|^{p\nu+1} \leqslant (\operatorname{Re} w_k)^{p\nu+1} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant r-1).$$

Воспользовавшись этим неравенством и (3.12), из (3.15) получим

$$L_r[f] \leqslant B_p^{(r)} \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re} w_k)^{p\nu+1} \, |F^{(\nu)}(w_k)|^p \leqslant$$

$$\leqslant B_p^{(r)} \sum_{\nu=0}^{r-1} A_p^{(\nu+1)} \|F\|_{H_p}^p \quad (r = 1, 2, \cdots),$$

откуда в силу равенства (1.7) вытекает (3.10). Теорема доказана.

Следствие. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$, то для любой функции $f(z) \in H_p[S_h]$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{(q)}|^p \, |f^{(p_k-1)}(\lambda_k)|^p \leqslant D_p \|f;\, \partial S_h\|_p^p, \tag{3.16}$$

где $\{\lambda_k^{(q)}\}_1^\infty$ определяется из (3.5), а $D_p \in (0, +\infty)$ не зависит от $f(z)$.

(в) Сейчас нам понадобится следующая лемма об оценках коэффициентов разложения (2.5), которая доказывается так же, как и лемма 1.6 из работы [2].

Лемма 9. *Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$, то для коэффициентов разложения (2.5) справедливы оценки*

$$|a_\nu(\lambda_k)| \leqslant A \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2h} \operatorname{Im} \lambda_k\right)\right\}^{p_k - \nu} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant p_k - 1, \ k \geqslant 1),$$

где $A \in (0, +\infty)$ не зависит от ν и k.

Лемма 10. *Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$ и последовательность $\{\lambda_k^{(q)}\}_1^\infty$ определяется согласно (3.5), то для любой функции $F(\xi) \in L_q(\partial S_h)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{(q)}|^{-q} \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_h} F(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi\right|^q \leqslant C_q^1 \|F;\, \partial S_h\|_q, \tag{3.17}$$

где $C_q^1 \in (0, +\infty)$ не зависит от $F(\xi)$.

Доказательство. Положим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_h} \frac{F(\xi)\, B_h(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \in S_h. \tag{3.18}$$

Так как $F(\xi) B_h(\xi) \in L_q(\partial S_h)$, то по теореме 1.2 имеем $f(z) \in H_q[S_h]$, причем

$$\|f;\ \partial S_h\|_q \leqslant B_q \|F(\xi) B_h(\xi);\ \partial S_h\|_q = B_q \|F;\ \partial S_h\|_q, \tag{3.19}$$

где $B_q \in (0, +\infty)$ не зависит от $F(\xi)$.

Принимая во внимание определения (2.8) и (3.18) функций $\Omega_k(z)$ и $f(z)$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h} F(\xi)\,\Omega_k(\xi)\,d\xi = \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{a_\nu(\lambda_k)}{(s_k-1)!\,(p_k-s_k-\nu)!} f^{(p_k-s_k-\nu)}(\lambda_k).$$

Применив здесь неравенство (3.14) (с заменой p на q), получим

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h} F(\xi)\,\Omega_k(\xi)\,d\xi\right|^q \leqslant (p_k-s_k+1)^{q/p} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\lambda_k)|^q |f^{(p_k-s_k-\nu)}(\lambda_k)|^q. \tag{3.20}$$

Так как в силу условия $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$ должно быть

$$\sup_{k\geqslant 1} p_k = P < +\infty, \tag{3.21}$$

то из (3.20), воспользовавшись леммой 9, получим

$$[\lambda_k^{(q)}]^{-q}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h} F(\xi)\,\Omega_k(\xi)\,d\xi\right|^q \leqslant P^{q/p}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} [\lambda_k^{(q)}]^{-q} \times$$

$$\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right]^{(p_k-\nu)q} |f^{(p_k-s_k-\nu)}(\lambda_k)|^q = P^{q/p} A^q \times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right]^{\left(p_k-s_k-\nu+\frac{1}{q}\right)q} |f^{(p_k-s_k-\nu)}(\lambda_k)|.$$

Произведя здесь замену переменной $p_k - s_k - \nu + 1 = r$ и учитывая (3.21), можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^{(q)}]^{-q}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h} F(\xi)\,\Omega_k(\xi)\,d\xi\right|^q \leqslant P^{q/p} A^q \times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{p_k-s_k+1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right]^{\left(r-\frac{1}{p}\right)q} |f^{(r-1)}(\lambda_k)|^q. \tag{3.22}$$

Теперь обозначим через $\{z_k\}_1^\infty$ последовательность попарно различных точек последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$, а через $\{J_k\}$ обозначим множество тех индексов $j \geqslant 1$, для которых $\lambda_j = z_k$ при $j \in \{J_k\}$. Непосредственно видно, что

$$\{J_{k_1}\} \cap \{J_{k_2}\} = \varnothing\ (k_1 \neq k_2);\ \bigcup_{k=1}^{\infty}\{J_k\} = \{j\}_1^\infty.$$

Учитывая эти замечания и (3.21), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right]^{(r-1/p)q} |f^{(r-1)}(\lambda_k)|^q =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in\{J_k\}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_j\right)\right]^{(r-1/p)q}|f^{(r-1)}(\lambda_j)|^q\leqslant$$

$$\leqslant P\sum_{k=1}^{\infty}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}z_k\right)\right|^{(r-1/p)q}|f^{(r-1)}(z_k)|^q\ (1\leqslant r\leqslant P).$$

Отсюда и из (3.22) получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\gamma_k^{(q)}]^{-q}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}F(\xi)\,\Omega_k(\xi)\,d\xi\right|^q\leqslant$$

$$\leqslant P^{q/p+1}A^q\sum_{r=1}^{P}\sum_{k=1}^{\infty}[z_k^{(r;p)}]^q\,|f^{(r-1)}(z_k)|^q. \tag{3.23}$$

Поскольку $\{\lambda_k\}_1^{\infty}\in US(S_h)$, то последовательность $\{z_k\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию (3.9). Следовательно, воспользовавшись теоремой 3.1 (предварительно заменив p на q) из (3.23) и (3.19) получим (3.17).

Лемма 11. *Если $\{\lambda_k\}_1^{\infty}\in US(S_h)$, то для любой функции $F(\xi)\in\in L_q(\partial S_h)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\lambda_k^{(p)}]^q\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}F(\xi)\,r_k(\xi)\,d\xi\right|^q\leqslant C_q^2\|F;\partial S_h\|_q, \tag{3.24}$$

где $C_q^2\in(0,+\infty)$ не зависит от $F(\xi)$.

Доказательство. Положим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\frac{F(\xi)}{\xi-z}\,d\xi,\ z\in S_h. \tag{3.25}$$

По теореме 1.2 имеем $f(z)\in H_q[S_h]$, причем

$$\|f;\partial S_h\|_q\leqslant B_q\|F;\partial S_h\|_q. \tag{3.26}$$

Принимая во внимание определения (2.2) и (3.25) функций $r_k(z)$ и $f(z)$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}F(\xi)\,r_k(\xi)\,d\xi=f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\ (k\geqslant1).$$

Следовательно, чтобы получить (3.24) остается воспользоваться следствием из теоремы 3.1 (пердварительно заменив p на q).

Лемма 12. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Если $f(z)\in H_p\{\lambda_k;S_h^*\}$ и*

$$\int\limits_{\partial S_h}f(\xi)\,\Omega_k(\xi)\,d\xi=0\quad(k=1,2,\cdots), \tag{3.27}$$

то $f(z)\equiv0$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что при любом $k\geqslant1$ функция $B_h(z)(z-\lambda_k)^{-sk}$ принадлежит классу $\bar{H}_q\{\lambda_k;S_h\}$. Следовательно, воспользовавшись теоремой 2.4 (заменив в ней p на q) можем утверждать, что существует последовательность $\{P_n(z)\}$ линейных комбинаций функций системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, сходящаяся в метрике $H_q[S_h]$ к $B_h(z)(z-\lambda_k)^{-s_k}$. Но в силу (3.27) имеем

$$\int\limits_{\partial S_h} f(\xi)\, P_n(\xi)\, d\xi = 0 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

Устремив здесь $n \to +\infty$, получим

$$\int\limits_{\partial S_h} \frac{f(\xi)\, B_h(\xi)}{(\xi-\lambda_k)^{s_k}} d\xi = 0 \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{3.28}$$

Теперь заметим, что из определений классов $H_p\{\lambda_k; \overset{*}{S_h}\}$ и $\widetilde{H}_p\{\lambda_k; S_h\}$ следует, что если $f(z) \in H_p\{\lambda_k; \overset{*}{S_h}\}$, то $F(\xi) = B_h(\xi)\cdot f(\xi)$, $\xi \in \partial S_h$ является граничной функцией некоторой функции $F(z) \in \widetilde{H}_p\{\lambda_k; S_h\}$. Для этой функции из (3.28) получаем

$$F^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Отсюда и из теоремы 2.5 получаем $F(z) \equiv 0$, откуда заключаем, что $f(z) \equiv 0$. Лемма доказана.

3.3. Пусть последовательность $\lambda_{(p)} = \{\lambda_k^{(p)}\}_1^\infty$ определяется из (3.5). Тогда имеет место

Теорема 3.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$, *то система* $\{\lambda_k^{(p)} r_k(z)\}_1^\infty$ *является базисом пространства* $H_p\{\lambda_k; \overset{*}{S_h}\}$, *изоморфным стандартному базису пространства* l_p.

2°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} US(S_h)$, *то система* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *ни при какой перестановке членов не является базисом замыкания в метрике* $H_p[\overset{*}{S_h}]$ *своей линейной оболочки.*

Доказательство 1°. Пусть $f(z)$ — произвольная функция из класса $H_p\{\lambda_k; \overset{*}{S_h}\}$. Определим последоватальность $\gamma(f) \equiv \{\gamma_k(f)\}_1^\infty$ следующим образом:

$$\gamma_k(f) = [\lambda_k^{(p)}]^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} f(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{3.29}$$

Из определения класса $H_p\{\lambda_k; \overset{*}{S_h}\}$ следует, что $f(\xi) \in L_p(\partial S_h)$. Следовательно, воспользовавшись леммой 10 (предварительно заменив в ней p на q), можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k(f)|^p = \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^{(p)}]^{-p} \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} f(\xi)\cdot \Omega_k(\xi)\, d\xi\right|^p \leqslant C_p^1 \|f; \partial S_h\|_p^p,$$

где $C_p^1 \in (0, +\infty)$ не зависит от $f(\xi)$.

Определим теперь оператор T_p следующим образом:

$$T_p[f] = \gamma(f),\ f \in H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}.$$

Из (3.30) следует, что T_p — ограниченный линейный оператор, отображающий $H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}$ в l_p. При этом, в силу леммы 12, оператор T_p переводит разные элементы из $H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}$ в разные элементы пространства l_p. С другой стороны, в силу теоремы 2.3

$$T_p[\lambda_k^{(p)} r_k] = \{\delta_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}\ (k=1, 2, \cdots),$$

где $\delta_{k,n}$ — символ Кронекера.

Таким образом, чтобы завершить доказательство утверждения 1° теоремы, нам нужно показать, что T_p отображает $H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}$ на все пространство l_p.

Пусть $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^{\infty} \in l_p$. В силу теоремы Хана—Банаха

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(p)} r_k;\ \partial S_h \right\|_p = \sup\left\{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi) \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(p)} r_k(\xi)\, d\xi \right| \right\}, \tag{3.31}$$

где верхняя грань берется по всем $F(\xi) \in L_q(\partial S_h)$ с нормой $\|F; \partial S_h\|_q \leqslant \leqslant 2\pi$. Однако, в силу неравенства Гельдера и леммы 11 можем написать

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi) \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(p)} r_k(\xi)\, d\xi \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \left\{ \lambda_k^{(p)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi) r_k(\xi)\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} [\lambda_k^{(p)}]^q \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi) r_k(\xi)\, d\xi \right|^q \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_q^2 \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} \|F; \partial S_h\|_q.$$

Отсюда и из (3.31) получаем

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(p)} r_k;\ \partial S_h \right\|_p \leqslant 2\pi C_q^2 \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p}\ (n,\ m=1, 2, \cdots).$$

Следовательно, ряд

$$f_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \lambda_k^{(p)} r_k(z)$$

сходится в метрике $H_p[S_h^*]$ и определяет некоторую функцию $f_\gamma(z) \in \in H_p\{\lambda_k,\ S_h^*\}$ (см. теорему 2.2), а в силу теоремы 2.3 $T_p[f_\gamma] = \gamma = = \{\gamma_k\}_1^{\infty}$. Утверждение 1° доказано.

2°. Если ряд (1.15) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ не минимальна в $H_p(S_h^*)$ и, следовательно, ни при какой перестановке членов не является базисом.

Если же ряд (1.15) сходится, то надо воспользоваться леммой 7. Теорема доказана.

Установим теперь критерий базисности системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$. Напомним, что эта система определена лишь при условии сходимости ряда (1.15). При этом замыкание в метрике $H_p[S_h]$ ее линейной оболочки совпадает с пространством $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ (см. теорему 2.4).

Если $\lambda_{(q)}=\{\lambda_k^{(q)}\}_1^\infty$ определяется из (3.5), то имеет место

Теорема 3.3. *Пусть ряд (1.15) сходится. Справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty\in US(S_h)$, *то система* $\{(\lambda_k^{(q)})^{-1}\,\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *является базисом пространства* $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$, *изоморфным стандартному базису пространства* l_p.

2°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty\overline{\in}US(S_h)$, *то система* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *ни при какой перестановке членов не является базисом пространства* $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$.

Доказательство 1°. Пусть $f(z)\in\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$. Определим последовательность $\gamma(f)\equiv\{\gamma_k(f)\}_1^\infty$ следующим образом:

$$\gamma_k(f)=\lambda_k^{(q)}\ f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\quad(k=1,\ 2,\cdots).$$

Нетрудно видеть, что

$$\gamma_k(f)=\lambda_k^{(q)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}f(\xi)\,r_k(\xi)\,d\xi\quad(k=1,\ 2,\cdots),$$

причем из определения класса $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ следует, что $f(\xi)\in L_q(\partial S_h)$. Следовательно, воспользовавшись леммой 11 (предварительно заменив в ней q на p), можем написать

$$\sum_{k=1}^\infty|\gamma_k(f)|^p\leqslant C_p^2\|f;\ \partial S_h\|_p^p,\tag{3.32}$$

где $C_p^2\in(0,\ +\infty)$ не зависит от $f(\xi)$.

Определим теперь оператор Q_p следующим образом:

$$Q_p[f]=\gamma[f],\ f\in\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}.$$

Из (3.32) следует, что Q_p — ограниченный линейный оператор, отображающий $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ в l_p. При этом, в силу теоремы 2.5, оператор Q_p переводит разные элементы из $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ в разные элементы пространства l_p. С другой стороны, в силу леммы 4

$$Q_p[(\lambda_k^{(q)})^{-1}\,\Omega_k]=\{\delta_{k,\,n}\}_{n=1}^\infty\quad(k=1,\ 2,\cdots).$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство утверждения 1° теоремы, нам нужно показать, что Q_p отображает $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ на все пространство l_p.

Пусть $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty \in l_p$. В силу теоремы Хана—Банаха

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k (\lambda_k^{(q)})^{-1} \Omega_k; \partial S_h \right\|_p = \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi) \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k (\lambda_k^{(q)})^{-1} \Omega_k(\xi)\, d\xi \right| \right\}, \quad (3.33)$$

где верхняя грань берется по всем $F(\xi) \in L_q(\partial S_h)$ с нормой $\|F, \partial S_h\|_q <$ $\leqslant 2\pi$. Однако в силу неравенства Гельдера и леммы 10 можем написать

$$\left| \sum_{n=n}^{n+m} \gamma_k \left\{ (\lambda_k^{(q)})^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} (\lambda_k^{(q)})^{-q} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi \right|^q \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} C_q^1 \|F; \partial S_h\|_q \quad (n, m = 1, 2, \cdots).$$

Следовательно, ряд

$$f_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (\lambda_k^{(q)})^{-1} \Omega_k(z)$$

сходится в метрике $H_p[S_h]$ и определяет некоторую функцию $f_\gamma(z) \in$ $\in \bar{H}_p\{\lambda_k; S_h\}$ (см. теорему 2.4), а в силу леммы 4 $Q_p[f_\gamma] = \gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty$. Утверждение 1° доказано.

Утверждение 2° следует из леммы 8. Теорема доказана.

Воспользовавшись леммой 4 и теоремой 2.5, из теоремы 3.2 получаем

Следствие. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$, то для любой функции $f(z) \in H_p[S_h]$ справедливо представление вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\, \Omega_k(z) + \frac{B_h(z)}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} \frac{f(\xi)}{B_h(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - z}, \quad z \in S_h,$$

где ряд сходится по метрике $H_p[S_h]$.

3.4. Для пространств $H_p[S_h]$ задачу (0.1)—(0.2) можно сформулировать следующим образом:

Выявить условия на последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$, при которых пространство последовательностей

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f \in H_p[S_h]\} \quad (3.34)$$

совпадает с каким-либо идеальным пространством I и дать аппарат для явного построения решений интерполяционной задачи

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \gamma_k \ (k=1, 2, \cdots); \ \{\gamma_k\}_1^\infty \in J.$$

В следующей теореме содержится полное решение этой задачи.

Теорема 3.4. 1°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$, *то справедливы следующие утверждения:*

а) *если последовательность* $\lambda_{(q)}\equiv\{\lambda_k^{(q)}\}_1^\infty$ *определяется из* (3.5), *то справедливы равенства*

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z)\in H_p[S_h]\} =$$

$$=\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z)\in \widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}\}=l_p\{\lambda_{(q)}\}; \tag{3.35}$$

б) *Если* $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^\infty\in l_p\{\lambda_{(q)}\}$, *то ряд*

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty \gamma_k\,\Omega_k(z) \tag{3.36}$$

сходится в метрике $H_p[S_h]$ *и определяет функцию* $f(z)\in\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ *которая удовлетворяет следующим интерполяционным данным:*

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=\gamma_k\quad (k=1,\ 2,\cdots); \tag{3.37}$$

в) *функция из класса* $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$, *удовлетворяющая интерполяционным данным* (3.37), *единственна.*

2°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty\overline{\in} US(S_h)$, *то пространство* (3.34) *не совпадает ни с каким идеальным пространством последовательностей.*

Доказательство 1°. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty\in US(S_h)$. В силу следствия из теоремы 3.1 имеем

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z)\in \widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}\}\subset$$

$$\subset\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f\in H_p[S_h]\}\subset l_p\{\lambda_{(q)}\}.$$

Следовательно, равенства (3.35) будут доказаны, если мы докажем утверждение б).

Пусть $\gamma=\{\gamma_k\}_1^\infty\in l_p\{\lambda_{(q)}\}$. Тогда последовательность $\{\lambda_k^{(q)}\gamma_k\}_1^\infty$ принадлежит l_p. Следовательно, в силу утверждения 1° теоремы 3.3 ряд (3.36) сходится по метрике $H_p[S_h]$, и по теореме (2.4) сумма этого ряда принадлежит классу $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$.

Равенства (3.40) вытекают из леммы 4.

Наконец, утверждение в) является следствием теоремы (2.5) и утверждение 1° доказано.

2°. Пусть теперь $\{\lambda_k\}_1^\infty\overline{\in} US(S_h)$. Предположим, что пространство последовательностей (3.34) совпадает с каким-либо идеальным пространством последовательностей I. Но легко видеть, что пространство последовательностей (3.34) совпадает с пространством

$$\{(\Phi[r_k])_1^\infty:\ \Phi\in(H_p[S_h])^*\}, \tag{3.38}$$

где $(H_p[S_h])^*$ — это сопряженное пространство пространства $H_p[S_h$ (нужно только воспользоваться теоремами 1.1, 1.3 и определением (2.2) функций $r_k(z)$). Но тогда пространство последовательностей (3.38) также совпадает с J. Следовательно, система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ является безусловным базисом замыкания в метрике $H_p[S_h]$ своей линейной оболочки (см. [32], стр. 27), а это противоречит утверждению 2° теоремы 3.2. Теорема доказана.

Так как при любом $s(1 \leqslant s < +\infty)$ пространство $l_s(\varkappa)$ является идеальным, то из утверждения 2'' теоремы 3.4, в частности, следует, что

если $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} US(S_h)$, то пространство последовательностей (3.34) не совпадает ни с каким пространством вида $l_s(\varkappa)$ $(1 \leqslant s < +\infty)$.

§ 4. Замыкание, минимальность и базисность системы функций $\{e^{-i\lambda_k t}\, t^{s_k-1}\}_1^\infty$

4.1. Введем еще несколько необходимых обозначений. Обозначим через

$$S_h^*(+) = \{z;\ \mathrm{Im}\, z > h\},\quad S_h^*(-) = \{z;\ \mathrm{Im}\, z < -h\}.$$

Далее, через $H_2[S_h^*(+)]$ обозначим класс функций $F(z)$, аналитических в области $S_h^*(+)$ и удовлетворяющих условию

$$\|F;\ S_h^*(+)\|_2 = \sup_{y>h} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2\, dx \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Через $H_2[S_h^*(-)]$ обозначим класс функций $F(z)$, аналитических в области $S_h^*(-)$ и удовлетворяющих условию

$$\|F;\ S_h^*(-)\|_2 = \sup_{y<-h} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2\, dx \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Наконец, обозначим через $L_2(e^{-2h|t|}dt) = L_2(-\infty, +\infty;\ e^{-2h|t|}dt)$ пространство измеримых на вещественной оси функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L_2(e^{-2h|t|}dt)} = \|f(t)\, e^{-h|t|}\|_{L_2(-\infty,+\infty)} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2h|t|}\, dt \right\}^{1/2} < +\infty.$$

3.2. (a) Рассмотрим функцию

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{izt} f(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{izt}\, e^{ht} \times$$

$$\times \{f(t)\, e^{-ht}\}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{i(z-ih)t} \{f(t)\, e^{-ht}\}\, dt.$$

Обозначим $\varphi(t) = f(t)\, e^{-ht}$ и предположим, что $\varphi(t) \in L_2(0, +\infty)$.

Рассмотрим также функцию

$$\Phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{iwt} \varphi(t)\, dt.$$

Ясно, что $\Phi(w)=F^+(w+ih)$. По теореме Винера—Пэли $\Phi(w)\in H_2^+$, то есть

$$\|\Phi\|_{H_2^+}=\sup_{0<y<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(x+iy)|^2\,dx\right\}^{1/2}<+\infty.$$

Следовательно, $F^+(w)\in H_2[S_h^*(+)]$. Кроме того

$$\|F^+;\ S_h^*(+)\|_2=\|\Phi\|_{H_2^+}=\|\varphi\|_{L_2(0,+\infty)}=\|f(t)\,e^{-ht}\|_{L_2(0,+\infty)}\,. \tag{4.1}$$

Аналогично, если предполагать, что $f(t)\,e^{-h|t|}\in L_2(-\infty,0)$, то для функции

$$F^-(z)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{izt}f(t)\,dt$$

будем иметь $F^-(z)\in H_2[S_h^*(-)]$ и

$$\|F;\ S_h^*(-)\|_2=\|f(t)\,e^{-h|t|}\|_{L_2(0,+\infty)}. \tag{4.2}$$

Рассмотрим следующий оператор

$$W(f)(z)=F(z)=\begin{cases}F^+(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{izt}f(t)\,dt, & \operatorname{Im}z>h,\\[2ex] F^-(z)=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^{izt}f(t)\,dt, & \operatorname{Im}z<-h,\end{cases} \tag{4.3}$$

определенный на классе $L_2(e^{-2h|t|}dt)$.

Теорема 4.1. *Если в $H_2[S_h^*]$ рассматривать норму (1.4), то оператор $W(f)$ является изометрией между пространствами $L_2(e^{-2h|t|}\,dt)$ и $H_2[S_h^*]$.*

2°. *Обратный оператор W^{-1} определяется формулой*

$$W^{-1}(F)(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\partial S_h^*}e^{-i\xi t}F(\xi)\,d\xi,\quad t\in(-\infty,+\infty), \tag{4.4}$$

где написанное равенство нужно понимать в том смысле, что

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\partial S_h^*\cap\{|\operatorname{Re}\xi|<\sigma\}}e^{-i\xi t}F(\xi)\,d\xi-f(t)\right|^2e^{-2h|t|}\,dt=0. \tag{4.5}$$

Доказательство. Утверждение 1° следует из (4.1) и (4.2). Теперь докажем утверждение 2°.

Из теоремы Винера-Пэли легко следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}F(x+ih)\,dx=\begin{cases}0, & t\in(-\infty,0),\\ f(t)\,e^{-ht}, & t\in(0,+\infty),\end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}F(x-ih)\,dx = \begin{cases} -f(t)\,e^{-ht}, & t\in(-\infty,\ 0),\\ 0, & t\in(0,\ +\infty),\end{cases}$$

где интегралы понимаются в смысле сходимости в среднем по метрике L_2.

Отсюда получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x+ih)}F(x+ih)\,dx = \begin{cases} 0, & t\in(-\infty,\ 0),\\ f(t), & t\in(0,+\infty),\end{cases}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-ih)}F(x-ih)\,dx = \begin{cases} f(t), & t\in(-\infty,\ 0),\\ 0, & t\in(0,\ +\infty).\end{cases}$$

Складывая эти равенства, получим (4.4).

Интегрированием по частям легко получается

Лемма 13. *Справедливы следующие равенства:*

$$W(e^{-i\lambda_k t}t^{s_k-1}) = \frac{i^{s_k}}{\sqrt{2\pi}}\,r_k(z)\quad (k=1,\ 2,\cdots). \tag{4.6}$$

(б) Приведем новое доказательство следующего утверждения, которое, как уже отмечалось во введении, было установлено М. М. Джрбашяном [22, 23] и в специальном случае, когда члены последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ попарно различны (тогда $s_k=1$, $k>1$), переходит в результат Н. Винера и Р. Пэли [24].

Теорема В. *Для полноты системы* $\{e^{-i\lambda_k t}\,t^{s_k-1}\}_1^\infty$ *в пространстве* $L_2(e^{-2h|t|}\,dt)$ *необходимо и достаточно, чтобы ряд* (1.15) *расходился.*

Доказательство. Поскольку оператор W изометричный, то из леммы 13 следует, что для полноты системы $\{e^{-i\lambda_k t}\,t^{s_k-1}\}_1^\infty$ в пространстве $L_2(e^{-2h|t|}\,dt)$ необходима и достаточна полнота системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в $H_2[S_h^*]$. Остается сослаться на теорему 2.1.

Если ряд (1.15) сходится, то система $\{e^{-i\lambda_k t}t^{s_k-1}\}_1^\infty$ не полна в $L_2(e^{-2h|t|}\,dt)$. При этом условии обозначим через $L_2\{e^{-2h|t|}\,dt;\ \lambda_k\}$ замыкание в метрике $L_2(e^{-2h|t|}\,dt)$ линейной оболочки системы $\{e^{-i\lambda_k t}\,t^{s_k-1}\}_1^\infty$.

Так как оператор W изометричный, то из теоремы 2.2 получаем следующую теорему

Теорема 4.2. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Тогда замыкание в метрике* $L_2(e^{-2h|t|}\,dt)$ *системы* $\{e^{-i\lambda_k t}\,t^{s_k-1}\}_1^\infty$ *совпадает с множеством функций* $f(t)$, *представимых в виде*

$$f(t) = W^{-1}(F)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\partial S_h^*} e^{-i\xi t}F(\xi)\,d\xi,$$

где $F\in H_2\{\lambda_k;\ S_h^*\}$ *произвольна, а интеграл понимается в смысле* (4.5).

(в) Из приведенных выше соображений и критерия минимальности системы $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$, легко следует также

Теорема 4.3. *Для минимальности системы* $\{e^{-i\lambda_k t} t^{s_k-1}\}_1^{\infty}$ *необходима и достаточна сходимость ряда* (1.17).

При условии сходимости ряда (1.17) построим биортогональную с $\{e^{-i\lambda_k t} t^{s_k-1}\}_1^{\infty}$ систему функций.

Пусть $\Omega_k(z)$ определяется из (2.8). Поскольку $\Omega_k(z) \in H_2[S_h]$, то из теоремы Винера—Пэли легко следует, что

$$\Omega_k(z) = i^{s_k-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izt} \varphi_k(t)\,dt, \tag{4.7}$$

где $e^{h|t|}\varphi_k(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$, причем

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \dfrac{(-i)^{s_k-1} e^{ht}}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, \Omega_k(x - ih)\,dx, & t \in (-\infty, 0), \\ \dfrac{(-i)^{s_k-1} e^{-ht}}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, \Omega_k(x + ih)\,dx, & t \in (0, +\infty), \end{cases}$$

а интегралы понимаются в смысле сходимости в среднем по метрике L_2. Из (4.7) вытекает, что

$$\Omega_k^{(s_j-1)}(\lambda_j) = (-i)^{s_j-s_k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda_j t} t^{s_j-1} \varphi_k(t)\,dt,$$

но так как $\Omega_k^{(s_j-1)}(\lambda_j) = \delta_{k,j}$, то получим следующую теорему.

Теорема 4.4. *Пусть ряд* (1.17) *сходится. Тогда системы* $\{e^{-i\lambda_k t} t^{s_k-1}\}_1^{\infty}$ *и* $\{\varphi_k(t)\}_1^{\infty}$ *биортогональны в следующем смысле:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda_j t} t^{s_j-1} \varphi_k(t)\,dt = \delta_{k,j} \quad (k, j = 1, 2, \cdots).$$

Из изометричности оператора W, леммы 13 и теоремы 3.2 вытекает следующая

Теорема 4.5. *Справедливы следующие утверждения.*

1°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^{\infty} \in US(S_h)$, *то система* $\{\lambda_k^p e^{-i\lambda_k t} t^{s_k-1}\}_1^{\infty}$ *является базисом пространства* $L_2\{e^{-2h|t|}dt; \lambda_k\}$, *изоморфным стандартному базису пространства* l_p.

2°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^{\infty} \overline{\in} US(S_h)$, *то система* $\{e^{-i\lambda_k t} t^{s_k-1}\}_1^{\infty}$ *ни при какой перестановке членов не является базисом замыкания в метрике* $L_2(e^{-2h|t|}dt)$ *своей линейной оболочки.*

Отметим, что в случае, когда все члены последовательности $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ попарно различны (т. е. $s_k = 1$, $k \geq 1$), критерий базисности системы $\{e^{-i\lambda_k t}\}_1^{\infty}$ был установлен в работе [27].

Ереванский государственный
университет
Институт математики АН
Армянской ССР

Поступила 1. II. 1984

Կ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Շերտում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը և վերլուծություններ ֆունկցիաների որոշ բիօրթոգոնալ համակարգերով *(ամփոփում)*

Աշխատանքը նվիրված է որոշ ռացիոնալ և էքսպոնենցիալ ֆունկցիաների համակարգերի փակույթի, մինիմալության ու բազիսության հարցերին: Ստացվել են այդպիսի համակարգերի լրիվության, մինիմալության ու բազիսության հայտանիշները համապատասխան մետրիկաներում տրվել է շերտում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի էֆեկտիվ լուծումը.

K. H. KAZARIAN, V. M. MARTIROSIAN. *Solution of the multiple interpolation problem in the strip and decompositions by biorthogonal systems of functions* (summary)

The problems of closure, minimality and basisness of some systems of rational or exponential functions are investigated. The criteria of completeness, minimality and basisness of such systems in the corresponding metrics are found. An effective solution of the multiple interpolation problem in the class H_p in strip is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$. ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
2. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм.ССР, Математика, IX, № 5, 1974, 339—373.
3. *W. K. Hayman.* Interpolation by bounded functions, Ann. Inst. Fourier (Grenob le) 8, 1959, 277—290.
4. *D. J. Newman.* Interpolation in H^∞, Trans. Amer. Math. Soc., 92, 1959, 501—507.
5. *L. Carleson.* An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
6. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
7. *P. L. Duren.* Theory of H^p-spaces, Ac. Press, New York and London, 1970.
8. *В. П. Кабайла.* Интерполяционные последовательности для классов H^p в случае $p < 1$, Лит. матем. ж., III, № 1, 1963, 141—147.
9. *J. Rosenbaum.* Simultaneous interpolation in H_2, II, Pacific J. Math., 27, 1968, 607—610.
10. *J. Rosenbaum.* Simultaneous interpolation in H_2, Michigan Math. J., 14, 1967, 65—70.
11. *B. L. Chalmers.* Some interpolation probbem in Hilbert spaces, Michigan Math. J., 18, 1971, 41—49.
12. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
13. *Г. М. Айрапетян.* О базисности некоторых биорготогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм.ССР, Математика, X, № 2, 1975, 133—152.
14. *Ф. А. Шамоян.* Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в пространствах H_p, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XI, № 2, 1976, 124—131.
15. *В. М. Мартиросян.* Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм.ССР, 63, № 5, 1976, 278—283.
16. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H_p в полуплоскости, ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 517—520; Изв. АН СССР, сер. матем., 43, № 6, 1973, 1322—1384.
17. *Г. М. Айрапетян.* Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах H_p Харди, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XII, № 4, 1977, 262—277.

18. *А. М. Джрбашян*. Кратная интерполяция в классах H^p $0 < p \leqslant +\infty$. ДАН СССР, 234, № 6, 1977, 1253—1256.
19. *Ш. А. Григорян*. Об одном свойство функций из H^p $(0 < p < +\infty)$. Изв. АН Арм.ССР, Математика, XII, № 5, 1977, 335—340.
20. *В. М. Мартиросян*. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в H_p $[\alpha; \omega]$. ДАН СССР, 245, № 1, 1979, 24—27.
21. *В. М. Мартиросян*. Эффективное решение задачи кратной интерполяции в H^∞ применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XVI, № 5, 1981, 339—357; ДАН СССР, 263, № 4, 1982, 805—808.
22. *М.М. Джрбашян*. Об интегральном представлении некоторых ортогональных систем, ДАН Арм.ССР, 35, № 1, 1962, 1—5.
23. *М. М. Джрбашян*. Представление и замкнутость некоторых ортогональных систем, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XIV, № 6, 1979, 446—493.
24. *Н. Винер, Р. Пэли*. Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», М., 1964.
25. *М. М. Джрбашян*. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460, Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
26. *С. А. Акопян*. Теорема о двух постоянных для функций класса H_p, Изв. АН Арм.ССР, Математика, II, № 2, 1967, 123—127.
27. *А. М. Седлецкий*. Эквивалентное определение пространств H_p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сб., 96 (138), № 1, 1975, 75—82.
28. *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
29. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, Математика, VIII, № 1, 1973, 384—409.
30. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси, Матем. сб., 95 (137), № 3 (11), 1974, 418—444.
31. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев*. Элементы функционального анализа, Наука, М., 1965.
32. *С. А. Виноградов*. Базисы из показательных функций и свободная интерполяция в банаховых пространствах с L_p-нормой. Записки научных семинаров ЛОМИ, том 65, вып. VII, 1976, 17—68.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS