ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском английском французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

Գինը 85 կ.
ЦЕНА 85 К.

Индекс 77735

1985 №2

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XX, № 2, 1985 Математика

УДК 517.9

С. Я. ХАВИНСОН

О ПОЛНЫХ СИСТЕМАХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Введение

Настоящая работа связана с изучением вопросов аппроксимации с учетом величин коэффициентов приближающих агрегатов. Разработка общих вопросов такой аппроксимации началась с работы Дейвиса и Фань-Цзы [1] (см. также [2]) и была продолжена в работах автора [3]—[5]. Учет величин коэффициентов аппроксимирующих линейных агрегатов («полиномов») осуществляется с помощью некоторой преднормы p, действующей в пространстве коэффициентов. В работах [1], [2] рассматривались лишь два специальных вида p: один, соответствующий норме в пространстве l^1 с весами, и другой — норме в пространстве l^δ, $\delta > 1$ без весов (см. далее формулы (32), (56) и (69)). Общий случай произвольной преднормы p изучался в [3]—[5]. В работах [1]—[5] рассматривались два типа усиленной полноты систем: $O(p)$ полнота — когда всякий элемент пространства приближается полиномами по данной системе с ограниченными в преднорме p коэффициентами и $o(p)$ полнота—когда аппроксимирующие произвольный элемент полиномы можно выбрать со сколь угодно малыми в преднорме p коэффициентами (терминология из работы [5]).

В настоящее время известно также много конкретных результатов подобного рода для различных систем в функциональных пространствах и с различными конкретными преднормами p. В частности, имеются результаты, дополняющие и определенным образом усиливающие в направлении учета коэффициентов классические аппроксимационные теоремы Вейрштрасса, Мюнца, Лаврентьева и др. В некоторых из упомянутых работ (Стафни [6], Рульер [7]—[8], фон Голичек [9], фон Голичек и Левиатан [10], Бак, фон Голичек и Левиатан [11], Левиатан [12], Гурарий и Мелитиди [13], Самокиш [14], Тригуб [15] результаты были получены специальными приемами без привлечения общей теории работ [1]—[5]. Другие конкретные результаты получены различными авторами либо опираясь на эту теорию, либо с прямым привлечением соображений двойственности экстремальных задач, на которых эта теория основана (Дейвис и Фань-Цзы [1], [2], Хавинсон [3]—[5], [16]—[19], Хавин [20], [21], Мурадян [22], [23], Мурадян и Хавинсон [24], Мартиросян [25], Вагаршакян [26], Напалков [27], Чацкая [28]—[30], Шрётер [31].

Хорошо известно, что установление факта полноты (обычной) какой-либо системы $\{x_j\}$ часто связано с теоремами единственности аналитических функций: на основе теорем о представлении линейных функционалов (в том или ином пространстве) с рассматриваемым линейным функционалом f связывается аналитическая функция $F(z)$ и обращение функционала f в нуль на элементах системы $\{x_j\}$ означает обращение в нуль функции $F(z)$ в определенных точках. С помощью соответствующей теоремы единственности отсюда стараются заключить, что $F(z) \equiv 0$ и вывести затем, что и функционал $f \equiv 0$.

Однако в теории аналитических функций имеются более сильные теоремы единственности, когда заключение $F(z) \equiv 0$ делается из того лишь, что $F(z)$ достаточно мала на определенном множестве точек. Вопрос о том, какие аппроксимационные процессы отвечают таким «сильным» теоремам единственности и привел к созданию теории работ [1]—[5]. На таких теоремах единственности, естественно, основано и получение конкретных результатов, отправляясь от общей теории полноты с учетом величин коэффициентов.

Основным предметом настоящей статьи является впервые исследуемая в общем виде связь между обычным понятием полноты и полнотой в усиленном смысле, когда в расчет принимается рост коэффициентов в процессах аппроксимации (§§ 2—4). В связи с этим получен ряд новых результатов об обычной полноте систем. Другой вопрос, обсуждаемый в §§ 6—7, — сохранение для новых понятий полноты свойств устойчивости, известных для базисов минимальных систем, систем полных в обычном смысле и некоторых других классов систем (см., например, обзор [32]). В § 5 уточняется один способ конструирования усиленно полных систем из полных, рассматривавшийся в [1] и [31]. В § 1 мы даем новое изложение основных критериев аппроксимации с учетом величин коэффициентов значительно более короткое, единообразное и полное, чем в работах [3]—[5]. Основная теорема I этого параграфа дает критерий, когда тот или иной элемент пространства можно аппроксимировать полиномами по данной системе, имеющими оцениваемые определенным образом коэффициенты. Таким образом, эта теорема является локализацией критериев полноты из [3]—[5]; ранее такая локальная теорема рассматривалась ([3]) лишь для $o(p)$ полноты.

Приводимые доказательства в значительной части как будто бы существенно связаны со счетностью рассматриваемых систем. Между тем для целого ряда конкретных приложений было бы интересно рассматривать и несчетные системы. Возникает задача для дальнейшего исследования; интересно также было бы выяснить, в каком виде рассматриваемая теория может быть распространена на пространства, не являющиеся нормированными.

§ 1. Общие теоремы об аппроксимации с учетом величин коэффициентов приближающих полиномов

Пусть X— банахово пространство, X^*—сопряженное к X. Рассмотрим еще последовательность пространств E^n, $n=1, 2, \cdots$, где E^n—n-мерное пространство. Для элементов $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in E^n$ определена преднорма $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, причем выполняется условие согласования:

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, 0, \cdots, 0) \quad \forall m > n. \tag{1}$$

Пространства X и все E^n, $n=1, 2, \cdots$ предполагаем одновременно комплексными или вещественными.

Для линейных функционалов над E^n, задаваемых векторами $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, определим сопряженную с p норму

$$p^*(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sup_{p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) < 1} \left| \sum_1^n \alpha_k \lambda_k \right|. \tag{2}$$

Ясно, что $p^*(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) < +\infty$ только для функционалов $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, которые обращаются в нуль на всех тех элементах $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, для которых $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = 0$. Для остальных $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ полагаем $p^*(\alpha_1, \cdots$ $\cdots, \alpha_n) = \infty$. (Если мы рассмотрим фактор пространство E_n/E_0^n, где E_0^n состоит из тех $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in E^n$, для которых $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = 0$, то $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ может быть истолковано как норма в E^n/E_0^n. Тогда векторы $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ такие, что $\sum\limits_1^n \alpha_j \lambda_j = 0$, если $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in E_0^n$, определяют пространство $(E^n/E_0^n)^*$, сопряженное к E^n/E_0^n и $p^*(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ — норма в этом пространстве).

Пусть $\{x_j\}$ — некоторая система элементов из X. Для $\forall \omega \in X$ положим

$$\bar{p}(\omega) = \inf \varliminf_{k \to \infty} p(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_{n_k}^k), \tag{3}$$

где inf взята по всевозможным числовым наборам $\{(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_{n_k}^k)\}$ таким, что

$$\left\| \omega - \sum_1^{n_k} \lambda_j^k x_j \right\| \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{4}$$

Если для данного ω вообще нет последовательности линейных комбинаций $\sum \lambda_j^k x_j$ („полиномов“), сходящейся к ω, то полагаем $\bar{p}(\omega) = \infty$.

Определение. Элемент ω называется $O(p)$ аппроксимируемым системой $\{x_j\}$, если $\tilde{p}(\omega) < +\infty$. Элемент ω называется $o(p)$ аппроксимируемым системой $\{x_j\}$, если $\bar{p}(\omega) = 0$.

Таким образом, $O(p)$ аппроксимируемость элемента ω системой $\{x_j\}$ означает существование такого числа $C = C(\omega)$, что для $\forall \varepsilon > 0$ найдутся коэффициенты $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, $n = n(\varepsilon)$, такие, что

$$\left\| \omega - \sum_1^n \lambda_j x_j \right\| < \varepsilon,\ p(\lambda_1, \cdots \lambda_n) \leqslant C. \tag{5}$$

В свою очередь, $o(p)$ аппроксимируемость элемента ω системой $\{x_j\}$ означает, что для $\forall \varepsilon > 0$ найдутся коэффициенты $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, $n = n(\varepsilon)$ такие, что

$$\left\| \omega - \sum_1^n \lambda_j x_j \right\| < \varepsilon,\ p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) < \varepsilon. \tag{6}$$

Теорема 1. *Имеет место соотношение двойственности:*

$$\sup_{\substack{f \in X^*,\ p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) < 1, \\ n = 1, 2, \cdots}} |f(\omega)| = \bar{p}(\omega). \tag{7}$$

Доказательство. Возьмем произвольное число $K>0$ и зафиксируем n. Имеет место равенство (ср. [3], теорема 5):

$$\sup_{\substack{f\in X^*,\, \|f\|\leq K,\\ p^*(f(x_1),\cdots,f(x_n))\leq 1}} |f(\omega)| = \inf_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \left[K \left\| \omega - \sum_1^n \lambda_j x_j \right\| + p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \right]. \qquad (8)$$

Это равенство следует из соотношения (26) работы [33]; предполагаемая там линейная независимость элементов $x_1,\cdots, x_n$ для справедливости (8) не нужна. Для полноты изложения наметим доказательство (8). Рассмотрим прямое произведение Y пространств X и $E^n: Y = X\times E^n$, снабдив его преднормой $P(x;\lambda_1,\cdots,\lambda_n) = K\|x\| + p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. В пространстве Y^* определится сопряженная с P норма $P^*(f, \alpha_1,\cdots,\alpha_n) = \max\left(\frac{\|f\|}{K}, p^*(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\right)$. Здесь $f\in X^*$, $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ — такой набор, что $p^*(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) < +\infty$. Функционал $F = (f, \alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ действует на элемент $(x, \lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ по формуле

$$f(x) - \sum_1^n \alpha_j \lambda_j. \qquad (9)$$

В пространстве Y с преднормой P рассмотрим аппроксимацию элемента $\Omega = (\omega, 0)$ элементами вида

$$y = \left(\sum_1^n \lambda_j x_j, (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\right), \ \forall (\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

Элементы указанного вида образуют подпространство E в Y.

Согласно обычному соотношению двойственности М. Г. Крейна—С. М. Никольского ([34], [35]; см. также [36], [37], [38]) для задачи наилучшего приближения слегка обобщенному на случай рассмотрения преднорм вместо норм

$$\sup_{\substack{F\in Y^*,\, P^*(F)\leq 1,\\ F\in E^\perp}} |F(\Omega)| = \inf_{y\in E} P(\Omega - y). \qquad (10)$$

Здесь $E^\perp$ — аннулятор E, т. е. совокупность таких линейных функционалов над Y, для которых $y\in E \Rightarrow F(y) = 0$. Поскольку $F = (f, \alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ условие $F\in E^\perp$ означает в силу (9), что

$$f(x_j) = \alpha_j,\ j = 1,\cdots, n. \qquad (11)$$

Учитывая (11) и все сказанное про Y, Y^*, P, P^* и Ω, видим, что (10) совпадает с (8).

Выведем теперь из (8) равенство (7). Допустим сперва, что $\bar{p}(\omega) < \infty$. Возьмем $\forall f\in X^*$, для которого $p^*(f(x_1),\cdots,f(x_n))\leq 1$, $n = 1,\cdots$. Для $\forall\varepsilon > 0$ найдется такой полином $\sum_1^n \lambda_j x_j$, что

$$\left\| \omega - \sum_1^n \lambda_j x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{\|f\|},\ p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \leq \bar{p}(\omega) + \varepsilon. \qquad (12)$$

Имеем в силу (12)

$$|f(\omega)| = \left| f(\omega) - \sum_1^n \lambda_j x_j) + f\left(\sum_1^n \lambda_j x_j\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\| \left\| \omega - \sum_1^n \lambda_j x_j \right\| + p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \bar{p}(\omega) + \varepsilon = \bar{p}(\omega) + 2\varepsilon. \tag{13}$$

Из (13) получается, что левая часть в (7) не более правой. Если $\tilde{p}(\omega) = 0$, то (7) уже доказано. Пусть $\tilde{p}(\omega) > 0$. Если бы для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

$$\sup_{\substack{f \in X^*,\ p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1 \\ n=1, 2, \cdots}} |f(\omega)| < \bar{p}(\omega) - \varepsilon_0 = A, \tag{14}$$

то в силу (8) тем более при любом $K > 0$

$$\inf_{\substack{n \\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n}} \left[K \left\| \omega - \sum_1^n \lambda_j x_j \right\| + p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \right] = \sup_{\substack{f \in X^*,\ \|f\| \leqslant K, \\ p^*(f_1, (f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1, \\ n=1, 2, \cdots}} |f(\omega)| \leqslant$$

$$\sup_{\substack{f \in X^*,\ p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1 \\ n=1, 2, \cdots}} |f(\omega)| \leqslant \bar{p}(\omega) - \varepsilon_0 = A. \tag{15}$$

Зададимся числом ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$. В силу (15) для $\forall K > 0$ найдется полином $\sum_1^n \lambda_j x_j$ (n и $\{\lambda_j\}$ зависят от K) такой, что

$$\left\| \omega - \sum_1^n \lambda_j x_j \right\| \leqslant \frac{A}{K},\ p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \leqslant A + \varepsilon \leqslant \bar{p}(\omega) - \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{16}$$

Так как

$$\left\| \omega - \sum_1^n \lambda_j x_j \right\| \to 0 \text{ при } K \to \infty, \tag{17}$$

то получается, что $\bar{p}(\omega) \leqslant \bar{p}(\omega) - \frac{\varepsilon_0}{2}$. Противоречие.

Итак, в случае $\bar{p}(\omega) < \infty$ равенство (7) доказано. Допустим теперь, что $\tilde{p}(\omega) = \infty$, а в левой части (7) стоит число $A < +\infty$. Снова имеем соотношения (15), из которых вытекают неравенства (16) с произвольным $\varepsilon > 0$. Из (17) и (16) получается тогда, что $\bar{p}(\omega) \leqslant A$ вопреки предположению $\bar{p}(\omega) = \infty$.

Следствие 1. Для того, чтобы элемент ω был $O(p)$ аппроксимируем системой $\{x_j\}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало число $C = C(\omega)$ такое, что для $\forall f \in X^*$

$$p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1,\ n = 1, 2, \cdots \Rightarrow |f(\omega)| \leqslant C. \tag{18}$$

Следствие 2. Для того, чтобы элемент ω был $o(p)$ аппроксимируем системой $\{x_j\}$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall f \in X^*$

$$p^* \; (f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1, \; n=1, 2, \cdots \Rightarrow f(\omega) = 0. \tag{19}$$

Следствие 3. Пусть E — замкнутое подпространство в X. Для того, чтобы каждый элемент E был $O(p)$ аппроксимируем системой $\{x_j\}$ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа D, что для $\forall f \in X^*$

$$p^* \, (f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1, \; n=1, 2, \cdots \Rightarrow \|f\|_E \leqslant D. \tag{20}$$

Здесь $\|f\|_E$ — норма сужения функционала f на подпространство E.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (20). Для $\forall \omega \in E$ и f удовлетворяющего неравенствам $p^* \, (f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1$, $n=1, \cdots$ тогда имеем:

$$|f(\omega)| \leqslant \|f\|_E \, \|\omega\| \leqslant D \|\omega\| = C(\omega). \tag{21}$$

Согласно следствию 1 неравенство (21) означает, что ω является $O(p)$ аппроксимируемым системой $\{x_j\}$.

Необходимость. Обозначим через X_N совокупность всех элементов $\omega \in X$, для которых $\tilde{p}(\omega) \leqslant N$, $N=1, 2, \cdots$. Легко видеть, что X_N — замкнутое множество. Поэтому множество $E_N = E \cap X_N$ также замкнуто. Поскольку все элементы E по предположению являются $O(p)$ аппроксимируемыми, $E = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} E_N$. Согласно принципу Бэра какое-то из множеств E_N будет всюду плотным в некотором замкнутом шаре пространства E; пусть множество E_{N_0} всюду плотно в шаре $\bar{S}(x_0, r)$ с центром в x_0 и радиуса r и значит (по замкнутости E_{N_0}) содержит этот шар. Тогда, как обычно делается при доказательстве теоремы Банаха—Штейнгауза (см., например, [39]), получаем, что $\exists D > 0$ такое, что

$$\tilde{p}(\omega) \leqslant D \|\omega\| \tag{22}$$

для $\omega \in E$.

Пусть теперь для $f \in X^*$ выполняются условия $p^* \, (f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1$, $n=1, 2, \cdots$. Тогда для $\forall \omega \in E$, $\|\omega\| \leqslant 1$, получаем из (7):

$$|f(\omega)| \leqslant \tilde{p}(\omega) \leqslant D \|\omega\| \leqslant D. \tag{23}$$

В силу (23) имеем $\|f\|_E \leqslant D$ и доказательство завершено.

Следствие 4. Пусть E — подпространство в X. Для того, чтобы каждый элемент $\omega \in E$ был $o(p)$ аппроксимируем системой $\{x_j\}$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall f \in X^*$

$$p^* \, (f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1, \; n=1, 2, \cdots \Rightarrow f \in E^{\perp}. \tag{24}$$

Множество всех $o(p)$ аппроксимируемых элементов X — замкнутое подпространство X.

Первое утверждение немедленно вытекает из следствия 2, второе легко усматривается прямо из определения $o(p)$ аппроксимируемости.

Определение. Система $\{x_j\}$ называется $O(p)$ (соответственно $o(p)$) полной в X, если каждый элемент $\omega \in X$ является $O(p)$ (соответственно $o(p)$) аппроксимируемым этой системой.

Таким образом, $O(p)$ полнота $\{x_j\}$ означает, что $\bar{p}(\omega) < +\infty$ для всех $\omega \in X$. Иными словами, для каждого $\omega \in X$ возможна аппроксимация (5). Далее $o(p)$ полнота $\{x_j\}$ означает, что $\tilde{p}(\omega) = 0$ для всех $\omega \in x$; иными словами, для каждого $\omega \in X$ возможна аппроксимация (6).

Следствие 5. Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была $O(p)$ полна в X необходимо и достаточно существование такой константы D, что для $\forall f \in X^*$

$$p^*(f_1(x_1)), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1, \ n=1, 2, \cdots \Rightarrow \|f\| \leqslant D. \tag{25}$$

Следствие 6. Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была $o(p)$ полна в X необходимо и достаточно, чтобы для $\forall f \in X^*$

$$p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1, \ n=1, 2, \cdots \Rightarrow f \equiv 0. \tag{26}$$

Следствие 5—специальный случай следствия 3, а следствие 6 — специальный случай следствия 4.

В работе Дэйвиса и Фань—Цзы [1], см. также [2], были введены и изучались понятия эквивалентные $o(p)$ полноте для двух специальных видов p: для p, являющегося нормой в пространстве l^1 числовых последовательностей (весовом) или в пространстве l^δ, $\delta > 1$ (см. далее формулы (35) или, что то же, (59) и (72) соответственно), а также понятие, эквивалентное $O(p)$ полноте для p вида (35).

Следствие 2 и следствие 6 были получены в работах [3]—[5]. Следствие 5—в работах [4] и [5]. Эти результаты являлись основными для указанных работ. Теорема 1 в полном объеме в работах [3]—[5] установлена не была. Теорема 1 может рассматриваться как обобщение на рассматриваемую ситуацию аппроксимации с учетом величин коэффициентов классической двойственности Крейна—Никольского, на которую мы существенно опирались в ходе доказательства.

§ 2. Связь между $O(p)$ полнотой и обычным понятием полноты

Из определения $O(p)$ и $o(p)$ полноты ясно, что каждая $O(p)$ или $o(p)$ полная система обязана быть полной в обычном смысле. Вознакают, естественно, обратные вопросы: 1. Всякая ли полная система является $O(p)$ полной для некоторой преднормы (соответственно—нормы) p? 2. Всякая ли полная система является $o(p)$ полной для некоторой преднормы (соответственно—нормы) p и если нет, то какие именно системы можно сделать $o(p)$ полными? Ответ на первый вопрос на самом деле очевиден.

Теорема 2. *Всякая полная система $\{x_j\}$ является $O(p)$ полной для некоторой преднормы p.*

Доказательство. Достаточно положить

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\|, \ n=1, 2, \cdots. \tag{27}$$

Тогда для $\forall \omega \in X$ будет $\bar{p}(\omega) = \|\omega\|$ и система $\{x_j\}$ оказалась $O(p)$ полной. В случае линейной независимости системы $\{x_j\}$ p— норма.

В работе Гурария и Мелитиди [40] был получен результат, который может рассматриваться как более содержательный ответ на вопрос 1. Речь идет об $O(p)$ полноте с p специального и притом весьма важного для применений вида. Мы сформулируем их результат в наших терминах. Пусть задана последовательность положительных чисел $\{C_j\}_1^\infty$. Положим

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left| \frac{\lambda_j}{C_j} \right|, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{28}$$

Теорема 3 [40]. *Для произвольной полной системы $\{x_j\}$ можно найти такие положительные числа $\{C_j\}$, что $\{x_j\}$ будет $O(p)$ полна относительно нормы p, определяемой равенством* (28).

Таким образом, для произвольной полной системы $\{x_j\}$ можно так подобрать положительные числа $\{C_j\}$, что для $\forall \omega \in X$, $\|\omega\| \leqslant 1$, и $\forall \varepsilon > 0$ возможна аппроксимация: (n_k, $\{\lambda_j\}$ зависят от ε)

$$\left\| \omega - \sum_1^{n_k} \lambda_j x_j \right\| < \varepsilon, \quad |\lambda_j| \leqslant C_j, \quad j = 1, \cdots, n_k; \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{29}$$

(Чтобы в этом убедиться, надо увеличить C_j из теоремы 3 так, чтобы $\|\omega\| \leqslant 1 \Rightarrow \bar{p}(\omega) \leqslant 1$. Легко видеть, что этого всегда можно добиться).

Приведем двойственные результаты к теореме 3, дающие новые характеристики полных систем.

Теорема 4. *Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была полной необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность положительных чисел $\{C_j\}$ такая, что для $\forall f \in X^*$*

$$\sum_1^\infty C_k |f(x_k)| \leqslant 1 \Rightarrow \|f\| \leqslant 1. \tag{30}$$

Доказательство. Достаточность. Условие (30) согласно следствию из теоремы 1 означает $O(p)$ полноту системы $\{x_j\}$ относительно нормы p, определяемой формулами (28). Действительно, для p из (28) сопряженная норма p^* определяется равенством

$$p^*(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_1^n C_k |\alpha_k|, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{31}$$

Однако $O(p)$ полнота системы $\{x_j\}$ тем более означает обычную полноту этой системы.

Можно рассуждать и следующим образом. Пусть f—функционал, обращающийся в нуль на всех элементах системы $\{x_j\}$. Тогда при любом $R > 0$ функционал Rf удовлетворяет условиям (30) и поэтому $\|Rf\| \leqslant 1$ и $\|f\| \leqslant R^{-1}$. Следовательно, $f \equiv 0$ и по обычному признаку полноты система $\{x_j\}$ полна.

Необходимость. Если $\{x_j\}$ полна, то по теореме 3 она $O(p)$ полна относительно p из (28) с некоторыми $\{C_j > 0\}$. Так как p^* имеет вид (31), то согласно следствию 5 найдется D такое, что для $\forall f \in X^*$

$$\sum_{1}^{n} C_k |f(x_k)| \leqslant 1, \ n = 1, 2, \cdots \Rightarrow \|f\| < D. \tag{32}$$

Положим $C'_k = C_k \cdot D$. Тогда для $f \in X^*$

$$\sum_{1}^{\infty} C'_k |f(x_k)| \leqslant 1 \Rightarrow \|f\| \leqslant 1. \tag{33}$$

Таким образом, имеет место (30) с заменой C_k на C'_k.

Теорема 4'. *Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была полной необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные числа $\{\varepsilon_j\}$ такие, что для $\forall f \in X^*$*

$$|f(x_j)| \leqslant \varepsilon_j, \ j = 1, \cdots, \Rightarrow \|f\| \leqslant 1, \tag{33'}$$

Доказательство. Пусть $\{x_j\}$ полна и $\{C_j\}$ такая последовательность, что имеет место (30). Достаточно теперь взять ε_j такими, чтобы

$$\sum_{1}^{\infty} C_j \varepsilon_j \leqslant 1. \tag{34}$$

Пусть имеет место (33). Если мы положим

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{1}^{n} \varepsilon_j |\lambda_j|, \tag{35}$$

то сопряженная норма p^* будет иметь вид:

$$p^*(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left|\frac{\alpha_j}{\varepsilon_j}\right| \tag{36}$$

и (33) означает, что для $\forall f \in X^*$

$$p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1 \Rightarrow \|f\| \leqslant 1.$$

Следовательно, по следствию 5 из § 1 $\{x_j\}$ является $O(p)$ полной и тем более полной системой. Можно было бы, конечно, рассуждать и отправляясь от обычного признака полноты, как в предыдущей теореме.

В части необходимости теоремы 4 и 4' содержат новую информацию о полных системах. Было бы интересно установить эти результаты непосредственно, не обращаясь к теоремам 1 и 3.

§ 3. $o(p)$ полные системы и свойство переполненности

Рассмотрим поставленный в начале § 2 вопрос 2 об условиях на систему, гарантирующих ее $o(p)$ полноту при некоторой норме p. Назовем систему элементов $\{x_j\}$ переполненной (ср. [32]), если при исключении из $\{x_j\}$ любой конечной совокупности ее элементов оставшаяся система будет полна.

Теорема 5. *Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была $o(p)$ полной при некоторой норме p необходимо и достаточно, чтобы $\{x_j\}$ была переполненной системой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_j\}$ является $o(p)$ полной при некоторой норме p, но не является переполненной. Это означает, что существуют элементы $x_{k_1}, \cdots, x_{k_m}$ такие, что если их все исключить из системы $\{x_j\}$, то замкнутая линейная оболочка E оставшихся элементов отлична от X. Пусть, для определенности, $x_{k_1} \overline{\in} E$. Тогда существует линейный функционал $f \in X^*$ такой, что $f(x_{k_1})=1$, $f(x_j)=0$ для $j=k_1, \cdots, k_m$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$p^*(\varepsilon f(x_1), \varepsilon f(x_2), \cdots) = p^*\,(0, \cdots, \varepsilon, 0, \cdots, \varepsilon f(x_{k_2}), 0, \cdots, \varepsilon f(x_{k_m}), 0, \cdots) \leqslant 1$$

какими бы ни были значения f на $x_{k_2}, \cdots, x_{k_m}$. Таким образом, из неравенств

$$p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leqslant 1, \; n=1, 2, \cdots$$

не вытекает, что $f \equiv 0$ и значит по следствию 6 к теореме 1 система $\{x_j\}$ не $o(p)$ полна.

Достаточность. Пусть $\{x_j\}$—переполненная система. Используя ее переполненность, легко построить всюду плотную в X последовательность элементов

$$y_n = \sum_{j=q_{n-1}+1}^{q_n} \lambda_j^n x_j, \tag{37}$$

где $\{q_n\}$— возрастающая к ∞ последовательность натуральных чисел $(q_0=0)$. Определим последовательность положительных чисел $\{C_j\}$, положив в промежутках $q_{n-1} < j \leqslant q_n$

$$\begin{aligned} &C_j = |\lambda_j^n|, \quad \text{если} \quad \lambda_j^n \neq 0 \\ &C_j > 0 \text{ — произвольное, если } \lambda_j^n = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

С помощью чисел C_j определим нормы p равенством

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) = \sum_1^m \frac{1}{2^j} \left|\frac{\lambda_j}{C_j}\right|, \; m=1, 2, \cdots. \tag{39}$$

Для $\forall \omega \in X$ и $\forall \varepsilon > 0$ найдется полином y_n со сколь угодно большим номером n, для которого

$$\|\omega - y_n\| < \varepsilon, \; p\,(0, \cdots, \lambda_{q_{n-1}+1}, \cdots, \lambda_{q_n}^n) < \frac{1}{2^{q_{n-1}+1}}.$$

Так как $2^{-(q_{n-1}+1)}$ сколь угодно мало, то $\bar{p}(\omega) = 0$.

Таким образом, всякий элемент ω $o(p)$ аппроксимируем системой $\{x_j\}$ и система $\{x_j\}$ $o(p)$ полна в X.

В силу следствия 6 к теореме 1 получаем двойственный результат.

Теорема 6. *Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была переполненной необходимо и достаточно, чтобы существовали такие положительные числа $\{\varepsilon_j\}$, что для $\forall f \in X^*$*

$$|f(x_j)| \leqslant \varepsilon_j, \ j=1, 2, \cdots \Rightarrow f \equiv 0. \tag{40}$$

Теорема 6 может рассматриваться как абстрактный вариант „сильных" теорем единственности теории аналитических функций, упоминавшихся во введении, когда заключение $F(z) \equiv 0$ делается из того, что $F(z)$ достаточно мала в точках некоторой последовательности.

Следствие. Пусть $\{x_j\}$—переполненная система. Для того, чтобы последовательность линейных функционалов $\{f_n\} \subset X^*$ была слабо сходящейся необходимо и достаточно, чтобы $\|f_n\|$ были равномерно ограничены и для каждого номера j нашелся бы номер N_j такой, что при $n > N_j$ и $m \geqslant N_j$ выполняется условие

$$|f_n(x_j) - f_m(x_j)| < \varepsilon_j, \tag{41}$$

где ε_j — числа, определенные в теореме 6.

Доказательство. Необходимость тривиальна. Установим достаточность. В силу равномерной ограниченности норм последовательность $\{f_n\}$ секвенциально компактна в слабой (*) топологии X^* (наличие полной счетной системы $\{x_j\}$ в X гарантирует секвенциальную компактность шара в X^* в слабой (*) топологии X^*). Если бы $\{f_n\}$ имела две предельные точки f и φ, то в силу (41) выполнялись бы условия

$$|\varphi(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon, \ j=1, \cdots$$

и по теореме 6 $f(x) \equiv \varphi(x)$. Таким образом, $\{f_n\}$ слабо (*) сходится в X^*.

Доказанное следствие может рассматриваться как конечный (неинфинитезимальный) вариант критерия Коши для слабой сходимости функционалов.

Приведем два конкретных примера, иллюстрирующих данное следствие.

1. Пусть $X = C_A(\Gamma)$—пространство, состоящее из функций $x(\zeta)$ на единичной окружности Γ, являющихся граничными значениями на Γ функций $x(z)$ аналитических при $|z| < 1$ и непрерывных при $|z| \leqslant 1$ (с равномерной метрикой). Пусть система $\{x_j\}$ образована функциями $x_j(\zeta) = (\zeta - \alpha_j)^{-1}$, где

$$|\alpha_j| > 1, \ \sum_{1}^{\infty} (|\alpha_j| - 1) = \infty, \ \frac{|\alpha_j| - |\alpha_{j+1}|}{(1 - |\alpha_j|)(1 - |\alpha_{j+1}|)} \geqslant d > 0 \tag{42}$$

(d от j не зависит). Возьмем произвольную последовательность чисел $\{r_j\}$, $r_j > 0$, $r_j \to +\infty$ и положим

$$\varepsilon_j = \exp\left[\frac{r_j}{1 - \alpha_j}\right]. \tag{43}$$

Числа (43) для системы $\{x_j(\zeta)\}$ в пространстве $C_A(\Gamma)$ обладают свойствами, отмеченными в следствии. Действительно, пусть $f \in X^*$. Согласно представлению Рисса $f(x) = \int\limits_{\Gamma} x(\zeta)\, d\mu$, где μ—некоторая комплекс ная мера. Если $|f(x_j)| \leqslant \varepsilon_j$, то это означает, что

$$\left|\int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu}{\zeta - \alpha_j}\right| \leqslant \varepsilon_j, \ j=1, 2, \cdots. \tag{44}$$

По теореме единственности из [41], [42] из неравенств (34)—(44) вытекает, что аналитическая функция $F(z)=\int\limits_{\Gamma}\frac{d\mu}{\zeta-z}\equiv 0$ при $|z|>1$. Но тогда $d\mu=\varphi(\zeta)\,d\zeta$, где $\varphi(z)$ аналитическая при $|z|<1$ функция из класса H^1 (см. [43]). Поэтому функционал $f\equiv 0$ над X. Нетрудно понять из рассуждений, применявшихся при выводе следствия, что тем самым доказано наличие у числа (43) нужного свойства.

2. Пусть $X=C[0,1]$—пространство непрерывных на $[0,1]$ функций, $x_j(t)=t^j$, $j=0, 1,\cdots$. Пусть последовательность $\{M_j>0\}$ такова, что найдется подпоследовательность индексов $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой выполняются условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(j_k)^{-1}=\infty, \quad \lim_{k\to\infty}(M_{j_k})^{\frac{1}{j_k}}=\infty. \tag{45}$$

Положим $\varepsilon_j=M_j^{-1}$. Из результатов работ [9], [24] по усилению теоремы Вейерштрасса в направлении учета коэффициентов вытекает, что числа ε_j при выполнении (45) обладают свойством, указанным в следствии.

Случай, когда p—преднорма, а не норма, изучим при дополнительном предположении монотонности p. Будем называть преднорму p монотонной, если выполнено условие:

$$|\lambda_1|\leqslant|\mu_1|,\cdots,|\lambda_n|\leqslant|\mu_n|,\cdots \Rightarrow p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\leqslant p(\mu_1,\cdots,\mu_n). \tag{46}$$

Назовем индекс j ненулевым для преднормы p, если

$$p(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{j},0,\cdots)\neq 0. \tag{47}$$

Пусть J — множество всех ненулевых индексов преднормы p. Очевидно J — непусто тогда и только тогда, когда $p\not\equiv 0$. Действительно, если J— не пусто, то $p\not\equiv 0$. Обратное утверждение вытекает из неравенства треугольника. Если p монотонна, $j\in J$ и $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$—произвольны, но $\lambda_j\neq 0$, то $p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\neq 0$. Таким образом,

$$p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0 \Leftrightarrow \lambda_j=0,\ \forall j\in J,\ 1\leqslant j\leqslant n. \tag{48}$$

Для сопряженной с p нормы p^* отсюда вытекает, что

$$p^*(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)<+\infty \Leftrightarrow \alpha_j=0,\ \forall j\in N\setminus J \tag{49}$$

(N — множество натуральных чисел).

Будем говорить, что система $\{x_j\}$ переполнена относительно некоторого (непустого) множества индексов J, если система, получающаяся из нее удалением любой конечной совокупности элементов, индексы которых входят в J, является полной.

Теорема 5'. *Пусть J — некоторое непустое множество индексов. Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была $o(p)$ полной с монотонной преднормой p, для которой J— множество ненулевых индексов, необходимо и достаточно, чтобы $\{x_j^*\}$ была переполненной относительно J.*

Следствие. Для того, чтобы система $\{x_j\}$ была $o(p)$ полной относительно некоторой монотонной преднормы $p \not\equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы она была переполненной относительно некоторого непустого множества индексов.

Доказательство теоремы 5′ не слишком усложняется в сравнении с доказательством теоремы 5 и мы его опустим.

§ 4. Минимальные системы и аппроксимация с учетом величин коэффициентов

Система $\{x_j\}$ называется минимальной (или усиленно линейно независимой) в пространстве X, если любой ее элемент x_k не принадлежит замкнутой линейной оболочке системы $x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots$ (см. [44], [46], [32]). Известно, что минимальность $\{x_j\}$ равносильна наличию биортогональной с ней системы линейных функционалов $\{f_k\} \subset X^*$. Таким образом, $f_k(x_j) = \delta_{kj}$, $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kj} = 0$ при $k \neq j$. Класс минимальных систем совпадает с классом систем, не являющихся переполненными ни по какому непустому множеству индексов. Поэтому теорема 5′ может быть переформулирована следующим образом

Теорема 5″. *Для того, чтобы система $\{x_j\}$ не была $o(p)$ полной ни при какой (монотонной) преднорме $p \not\equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы эта система была минимальной.*

Следствие. Ортонормальная система в гильбертовом пространстве не может быть $o(p)$ полной ни при какой монотонной преднорме p.

Действительно, ортонормальная система обязательно минимальна. Если $\{x_j\}$— полная минимальная система, то произвольному $\omega \in X$ отвечает единственный ряд

$$\omega \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\omega)\, x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \tag{50}$$

который, однако, не обязан сходиться, а если он сходится, то сумма его не обязана совпадать с ω. Может быть и так, что у разных ω_1 и ω_2 ряд (50) один и тот же (см. [45], [46]). Система $\{x_j\}$ есть базис X, если для $\forall\omega$ ряд (50) сходится к ω (47).

Теорема 7. *Пусть $\{x_j\}$— полная минимальная система в банаховом пространстве X, а p— монотонная преднорма. Тогда для $\forall\omega \in X$*

$$\varliminf_{n\to\infty} p(a_1, \cdots, a_n) \leqslant \tilde{p}(\omega), \tag{51}$$

где $\{a_k\}$—последовательность коэффициентов ряда (50). Если какая-то последовательность S_{n_m} частных сумм ряда (50) сходится к ω, то

$$\varliminf_{n\to\infty} p(a_1, \cdots, a_n) = \bar{p}(\omega). \tag{52}$$

В частности, если $\{x_j\}$—базис, то равенство (52) имеет место для всех $\omega \in X$.

Доказательство. Так как $p(a_1, \cdots, a_n) = p(a_1, \cdots, a_n, 0) \leqslant \leqslant p(a_1, \cdots, a_{n+1})$ (в силу (1) и (46)), то конечный или бесконечный предел в левой части (51) обязательно существует. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Существует последовательность $\omega_m = \sum_{k=1}^{N_m} \lambda_k^m x_k \to \omega$, для которой

$$p(\lambda_1^m, \cdots, \lambda_{N_m}^m) \leqslant \bar{p}(\omega) + \varepsilon, \; m = 1, 2, \cdots.$$

В силу монотонности p при любом фиксированном n имеем

$$p(\lambda_1^m, \cdots, \lambda_n^m) \leqslant p(\lambda_1^m, \cdots, \lambda_{N_m}^m) \leqslant \bar{p}(\omega) + \varepsilon$$

для достаточно большого m (мы считаем, что $N_m \to \infty$, так как случай, когда N_m ограничены сверху только проще). Однако

$$p(a_1, \cdots, a_n) = p(f_1(\omega), \cdots, f_n(\omega)) = \lim_{m \to \infty} p(f_1(\omega_m), \cdots, f_n(\omega_m)) =$$

$$= \lim_{m \to \infty} p(\lambda_1^m, \cdots, \lambda_n^m) \leqslant \bar{p}(\omega) + \varepsilon. \tag{53}$$

В силу произвольности ε получаем из (53) при любом n неравенство

$$p(a_1, \cdots, a_n) \leqslant \bar{p}(\omega). \tag{54}$$

Ясно, что (54) влечет (51). Пусть теперь последовательность частных сумм $S_{n_m} = \sum_1^{n_m} a_k x_k$ ряда (50) сходится к ω. Тогда, с одной стороны по определению $\bar{p}(\omega)$

$$\bar{p}(\omega) \leqslant \lim_{n_m \to \infty} p(a_1, \cdots, a_{n_m}) = \lim_{n \to \infty} p(a_1, \cdots, a_n), \tag{55}$$

а с другой—имеется неравенство (51). Из (51) и (55) вытекает неравенство (52).

Неравенство (51) может рассматриваться как обобщение неравенства Бесселя на произвольные минимальные системы, а равенство (52)—как обобщение равенства Парсеваля. Равенство (52) показывает оптимальность коэффициентов базисного разложения элемента в сравнении со всеми другими способами аппроксимации данного элемента полиномами по системе $\{x_j\}$. При этом сравнение величин коэффициентов делается по произвольной монотонной преднорме p.

В связи с теоремой 4 возникает естественный вопрос. Поставим в соответствие каждому линейному функционалу $f \in X^*$ точку пространства s всевозможных последовательностей:

$$(f(x_1), \cdots, f(x_n), \cdots). \tag{56}$$

Отображение $X^* \to s$, задаваемое (56), обозначим через T. Пусть $K(\varepsilon)$—круг: $K(\varepsilon) = \{z : |z| \leqslant \varepsilon\}$ в комплексной плоскости или отрезок $[-\varepsilon, \varepsilon]$, если рассматриваются вещественные пространства. Пусть $\{\varepsilon_k\}$—последовательность положительных чисел. Рассмотрим прямое произведение кругов (отрезков) $K(\varepsilon_j)$:

$$K = \prod_{j=1}^{\infty} K(\varepsilon_j) \subset s.$$

Упомянутый выше вопрос состоит в следующем. Какой должна быть система элементов $\{x_j\}$, чтобы нашлась последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_j\}$ такая, что при отображении $T: X^* \to s$, задаваемом (56)

$$T(X^*) \supset K. \tag{57}$$

Теорема 8. 1. *Для того, чтобы существовали положительные числа $\{\varepsilon_j\}$ такие, что имеет место включение* (57), *необходимо и достаточно, чтобы система $\{x_j\}$ была минимальной.* 2. *Для того, чтобы при выполнении* (38) *система $\{x_j\}$ была еще и полной, необходимо и достаточно, чтобы $\{\varepsilon_j\}$ можно было выбрать так, что из включения*

$$T(f) \in K \Rightarrow \|f\| \leqslant 1.$$

Доказательство. 1. Пусть $\{x_j\}$—минимальная система и $\{f_k\}$—биортогональная с ней система линейных функционалов. Возьмем числа $\varepsilon_j > 0$ так, чтобы $\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_j \|f_j\| < +\infty$. Для $\forall (\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots) \in$

$\in \prod_{1}^{\infty} K(\varepsilon_j)$ функционал $f = \sum_{1}^{\infty} \alpha_j f_j$ входит в X^* (ряд сходится в X^* по норме) и $f(x_j) = \alpha_j$. Таким образом, (57) имеет место с выбранными так ε_j. Если теперь известно, что имеет место (57) с некоторыми ε_j, то при $\forall k$ точка $(0, \cdots, 0, \varepsilon_k, 0, \cdots) \in T(X^*)$ и значит существует функционал F_k, интерполирующий на системе $\{x_j\}$ значения $0, \cdots, 0, \varepsilon_k, 0, \cdots$. Тогда функционалы $f_k = \frac{1}{\varepsilon_k} F_k$ дадут систему, биортогональную с $\{x_j\}$ и значит $\{x_j\}$ минимальна. Вторая часть теоремы вытекает из теоремы 4.

§ 5. Построение $o(p)$ полных (переполненных) систем из полных

Известен и применялся в некоторых вопросах способ построения переполненных систем из полных путем рассмотрения значений векторно-значных аналитических функций (см., например, обзор [32]). В работе [1] (теорема 3) этот способ получил количественное выражение как некоторая теорема об $o(p)$ полноте. Однако условия, наложенные на p в этой работе, не точны. Более точный результат был получен в работе [31] (§ 9 этой работы), однако необходимость полученных там условий была доказана лишь при дополнительном предположении о том, что исходная система является минимальной. Мы снимаем это ограничение.

Теорема 9. *Пусть $\{x_j\}$— полная система в бесконечномерном банаховом пространстве X, причем*

$$\overline{\lim}\,(\|x_n\|^{1/n})=\sigma<+\infty. \tag{58}$$

Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям $0<|z_n|<\sigma^{-1}$, $n=1, 2,\cdots$, $z_n\to 0$. Определим норму p равенствами

$$p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\sum_1^n C_j\,|\lambda_j|,\ n=1, 2,\cdots, \tag{59}$$

где C_j — последовательность положительных чисел. Система элементов y_n:

$$y_n=\sum_{k=1}^{\infty} z_n^k\, x_k \tag{60}$$

будет $o(p)$ полной тогда и только тогда, когда для каждого натурального m существует бесконечная последовательность индексов $\{n_k^m\}$, $k=1, 2,\cdots$, такая, что

$$C_{n_k^m}=o\,(|z_{n_k^m}|^m). \tag{61}$$

(Поскольку m — любое натуральное число, то в (61) можно o формулы заменить на O).

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим в круге $|z|<\sigma^{-1}$ векторнозначную аналитическую функцию со значениями в X:

$$F(z)=\sum_1^{\infty} x_k\, z^k. \tag{62}$$

Тогда $y_n=F(z_n)$. Для любого линейного функционала $f\in X^*$ будем иметь

$$f(y_n)=\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)\, z_n^k=F_f(z_n), \tag{63}$$

где $F_f(z)=f\circ F(z)$ — обычная аналитическая функция в круге $|z|<\sigma^{-1}$. Для $o(p)$ полноты $\{y_n\}$ из неравенств

$$|f(y_n)|=|F_f(z_n)|\leqslant C_n \tag{64}$$

должно вытекать, что $f\equiv 0$. Из условий (64) следует, что $F_f(z)\equiv 0$. Действительно, если бы $F_f(z)\not\equiv 0$, то в точке $z=0$ у $F_f(z)$ был бы нуль некоторого порядка m. Но тогда неравенства (64) не могли бы осуществляться для последовательности индексов $\{n_k^m\}$ из-за (61). Итак, $F_f(z)\equiv 0$ для любого $f\in X^*$, удовлетворяющего (64). Но тогда в силу (63) $f(x_k)=0$, $k=1, 2,\cdots$ и $f\equiv 0$ из-за полноты $\{x_k\}$. Мы находимся в условиях следствия 6 к теореме 1.

Необходимость. Допустим, что требования теоремы не имеют места. Это значит, что для некоторого m нет бесконечной последовательности индексов, для которой осуществляется (61). Последнее равносильно тому, что

$$C_n\geqslant A\,|z_n|^m \tag{65}$$

при некотором $A>0$. В силу бесконечномерности можно найти такое $N>m$, что x_N будет линейно независим от $x_1,\cdots,x_{N-1}$. Построим линейный функционал $f \in X^*$, для которого $f(x_1) = \cdots = f(x_{N-1}) = 0$, $f(x_N) = 1$. Функция

$$F_f(z) = \sum_1^{\infty} f(x_k) z^k = \sum_{k \geq N} f(x_k) z^k \tag{66}$$

будет иметь в точке $z=0$ нуль порядка N. Тогда в силу (65) она будет удовлетворять неравенствам $|f(y_n)| = |F_f(z_n)| \leqslant C_n$ при достаточно больших n. Взяв $f_1 = kf$ при достаточно малом k добьемся выполнения неравенств $|f_1(y_n)| \leqslant C_n$ при всех $n = 1, 2, \cdots$. Однако $f_1 \not\equiv 0$ и следовательно, система $\{y_n\}$ не является $o(p)$ полной.

В упоминавшейся выше теореме 3 из 1 было доказано лишь, что условие $C_n^{1/m} = o(|z_n|)$ является достаточным. Ясно, что теоремы, подобные теореме 9, могут быть близкими методами получены на основе других свойств единственности аналитических функций. Так, например, основываясь на теореме единственности из [41], уже упоминавшейся нами в примере 1 к следствию из теоремы 7, можно установить следующий результат.

Теорема 10. *Пусть $\{x_j\}$ — полная система в X, причем*

$$\overline{\lim} \, (\|x_n\|^{1/n}) = 1, \; \sum_1^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty.$$

Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям:

$$|z_n| < 1, \; n = 1, 2, \cdots; \; \sum_1^{\infty} (1 - |z_n|) = \infty, \; \frac{|z_{n+1}| - |z_n|}{(1 - |z_n|)(1 - |z_{n+1}|)} \geqslant d > 0$$

(*d не зависит от n*). *Если числа $\{C_j\}$ удовлетворяют условию*

$$\lim_{n \to \infty} (1 - |z_n|) \ln C_n = -\infty,$$

то система (60) *$o(p)$ полна с нормой p из* (59).

§ 6. Устойчивость $O(p)$ и $o(p)$ полных систем

В известной работе М. Г. Крейна, Д. П. Мильмана и М. А. Рутмана [48] была установлена устойчивость базисов в банаховых пространствах. Фактически там была установлена устойчивость и полных минимальных систем. В явном виде последний факт отмечен А. И. Маркушевичем в его докторской диссертации [46] (см. также [49]). Устойчивость свойства полноты была доказана Гурарием и Мелитиди [40] (см. также обзор [32]). Мы установим устойчивость $O(p)$ и $o(p)$ полных систем. Будем предполагать сопряженную норму p^* удовлетворяющей условию монотонности (46) с заменой p на p^*.

Теорема 11. *Пусть $\{x_j\}$ — $O(p)$ полная система, где p — некоторая предкорма и p^* монотонна. Пусть $\{\varepsilon_j\}$ — последовательность неотрицательных чисел, для которой*

$$p^*(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \leqslant q, \; n = 1, 2, \cdots, \; Dq < 1, \tag{67}$$

где D—константа из соотношений (25). *Тогда всякая система* $\{y_j\}$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$\|x_j - y_j\| \leqslant \varepsilon_j,\ j=1, 2, \cdots, \tag{68}$$

является $O(p)$ полной.

Доказательство. Достаточно показать, что для $\forall f \in X^*$

$$p^*(f(y_1), \cdots, f(y_n)) \leqslant q,\ n=1, \cdots \Rightarrow \|f\| \leqslant C \tag{69}$$

с некоторым C. Предположим что первое из неравенств (69) имеет место. С помощью условия монотонности p^* имеем:

$$p^*(f(x_1), \cdots, f(x_n)) = p^*(|f(x_1)|, \cdots, |f(x_n)|) \leqslant$$
$$\leqslant p^*(|f(y_1)| + \|f\| \|x_1 - y_1\|, \cdots, |f(y_n)| + \|f\| \|x_n - y_n\|) \leqslant$$
$$\leqslant p^*(f(y_1), \cdots, f(y_n)) + \|f\| p^*(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \leqslant q(1 + \|f\|). \tag{70}$$

Воспользовавшись (25) из (70) получаем

$$\|f\| \leqslant Dq(1 + \|f\|),\ \|f\| \leqslant \frac{Dq}{1 - Dq} \overset{\text{def}}{=} C. \tag{71}$$

Таким образом, (69) установлено.

Поскольку p предполагалась лишь преднормой, а не нормой, то чтобы достичь неравенства (67) некоторые ε_j возможно по необходимости будут равными нулю. Эта необходимость исключена, когда p — норма.

Следствие. Если система $\{x_j\}$ $O(p)$ полна, причем p — норма, то существуют положительные числа $\{\varepsilon_j\}$ такие, что всякая система $\{\ _j\}$, для которой

$$\|x_j - y_j\| < \varepsilon_j,\ j=1, 2, \cdots,$$

также будет $O(p)$ полной. В качестве ε_j можно взять любые положительные числа, для которых имеет место (67).

Теорема 12. *Пусть $\{x_j\}$ — $o(p)$ полная система, где p—некоторая преднорма, причем p^* монотонна. Пусть $\{\varepsilon_j\}$ — последовательность неотрицательных чисел, для которой выполняется условие:*

$$p^*(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \leqslant q,\ n=1, 2, \cdots\ (\forall q < +\infty). \tag{72}$$

Тогда всякая система $\{y_j\}$, удовлетворяющая (68), *является $o(p)$ полной.*

Доказательство. Условия (25) теперь выполняются со сколь угодо малым D. Поэтому и C из (71) сколь угодно мало. В силу следствия 6 к теореме 1 доказательство завершено.

Следствие 1. Если в условиях теоремы 12 p—норма, то существуют положительные $\{\varepsilon_j\}$ такие, что из неравенств (68) вытекает $o(p)$ полнота $\{x_j\}$. В качестве $\{\varepsilon_j\}$ можно выбрать любые, при которых имеет место (72).

Следствие 2. Пусть $\{x_j\}$ —переполненная система. Существуют положительные числа $\{\varepsilon_j\}$ такие, что система $\{y_j\}$, удовлетворяющая неравенствам (68), также являтся переполненной.

Доказательство вытекает из теоремы 7 и предыдущего следствия. Нам неизвестно, отмечалась ли ранее устойчивость свойства переполненности систем.

§ 7. Теоремы типа Винера-Пэли

Другой формой выражения фактов устойчивости являются теоремы типа известного критерия Винера—Пэли [50]. Для случая обычной полноты в банаховом, а не в гильбертом, как в [50], пространстве соответствующие факты отмечались в [51], [52], [53]. Перенесение этого факта на $o(p)$ полные системы было сделано в работе [1] для специальных p: для p, имеющего вид (35) (или, что то же самое, (59)), или для p вида:

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \left(\sum_1^n |\lambda_j|^\delta\right)^{1/\delta}, \ \delta > 1, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{73}$$

(В работе [1] все изложение ведется лишь для p указанных двух видов). Однако доказательство проходит при любой преднорме p, а также для случая $O(p)$ полноты.

Теорема 13. *Пусть для систем $\{x_j\}$ и $\{y_j\}$ существует число q, $0 < q < 1$, такое, что при любом n и любых $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ выполняются неравенства:*

$$\left\|\sum_1^n \lambda_j (x_j - y_j)\right\| \leqslant q \left\|\sum_1^n \lambda_j x_j\right\|. \tag{74}$$

Тогда из $O(p)$ или $o(p)$ полноты системы $\{x_j\}$ следует аналогичное свойство $\{y_j\}$.

Доказательство. Пусть для некоторого $f \in X^*$ выполнены неравенства

$$p^*(f(y_1), \cdots, f(y_n)) \leqslant 1, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{75}$$

Положим $\alpha_j = f(x_j - y_j)$, $j = 1, \cdots$. Имеем при любых $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ оценку

$$\left|\sum_1^n \lambda_j \alpha_j\right| \leqslant \|f\| \left\|\sum_1^n \lambda_j (x_j - y_j)\right\| \leqslant q \|f\| \left\|\sum_1^n \lambda_j x_j\right\|. \tag{76}$$

Поэтому в силу хорошо известного следствия из теоремы Хана—Банаха существует функционал $F \in X^*$, для которого

$$F(x_j) = \alpha_j, \ j = 1, \cdots, \ \|F\| \leqslant q \|f\|. \tag{77}$$

Имеем

$$(f - F)(x_j) = f(x_j - y_j) + f(y_j) - F(x_j) = \alpha_j + f(y_j) - \alpha_j = f(y_j). \tag{78}$$

Из (75) и (78) вытекает, что

$$p^*((f - F)(x_1), \cdots, (f - F)(x_n)) \leqslant 1, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{79}$$

Поэтому если система $\{x_j\}$ была $o(p)$ полной, то из (79) следует, что $f - F \equiv 0$ и в силу (77) $f = F \equiv 0$. Таким образом, $\{y\}$ — $o(p)$ полная система. Если же $\{x_j\}$ была $O(p)$ полной, то из (79) вытекает, что $\|f-F\| \leqslant D$ и, следовательно, в силу (77) $\|f\| \leqslant D+q\|f\|$, т. е.

$$\|f\| \leqslant \frac{D}{1-q}. \tag{80}$$

Поскольку из (75) вытекает (80), то $\{y_j\}$ — $O(p)$ полна.

Следствие. Пусть неравенство (74) имеет место с $q<\frac{1}{2}$. Тогда $\{x_j\}$ и $\{y_j\}$ одновременно $O(p)$ (соответственно $o(p)$) полны или нет.

Доказательство. Имеем

$$\left\|\sum_1^n \lambda_j x_j\right\| - \left\|\sum_1^n \lambda_j y_j\right\| \leqslant \left\|\sum_1^n \lambda_j (x_j-y_j)\right\| \leqslant q\left\|\sum_1^n \lambda_j x_j\right\|.$$

Поэтому

$$\left\|\sum_1^n \lambda_j x_j\right\| \leqslant \frac{1}{1-q}\left\|\sum_1^n \lambda_j y_j\right\|.$$

Теперь (65) дает

$$\left\|\sum_1^n \lambda_j (x_j-y_j)\right\| \leqslant \frac{q}{1-q}\left\|\sum_1^n \lambda_j y_j\right\|,$$

где $\frac{q}{1-q}<1$, так как $q<\frac{1}{2}$. Осталось применить теорему 13.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила 20.X.1984

Ս. Յա. ԽԱՎԻՆՍՈՆ. Բանախի տարածություններում լրիվ համակարգերի մասին *(ամփոփում)*

Ներմուծվում և հետազոտվում են X նորմավորված տարածության ω էլեմենտի տրված $\{x_j\}$ համակարգի էլեմենտների գծային կոմբինացիաներով (բազմանդամներով) O(p) և o(p) մոտարկելիությունների գաղափարները: O(p) մոտարկելիությունը նշանակում է ըստ p նախանորմայի սահմանափակ գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով ω էլեմենտին ցանկացած մոտիկությամբ մոտարկելու հնարավորությունը, իսկ o(p) մոտարկելիությունը՝ նշված մոտարկման հնարավորությունն է ըստ p նախանորմայի ցանկացած չափով փոքր գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով: Այդ գաղափարները հանդիսանում են հեղինակի կողմից արդեն դիտարկված համակարգերի O(p) և o(p) լրիվությունների գաղափարների լոկալիզացիան: Աշխատանքի հիմնական արդյունքները կապերի հաստատումն է O(p) և o(p) լրիվությունների և սովորական լրիվության միջև: Այսպես, օրինակ, ապացուցվում է, որ $\{x_j\}$ համակարգը կլինի o(p) լրիվ որևէ p նորմայի նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանից կամայական վերջավոր բազմությամբ էլեմենտներ դուրս գցելուց հետո արդյունքում մնում է լրիվ համակարգ (այդպիսի համակարգերը կոչվում են գերլրիվացված): Դրա հիման վրա ստացված են լրիվ և գերլրիվացված համակարգերի նոր բնութագրություններ. $\{x_j\}$ համակարգը լրիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի դրական թվերի այնպիսի $\{\varepsilon_j\}$ համակարգ, որ ամեն մի $f \in X$ էլեմենտի համար $|f(x_j)|<\varepsilon_j$ անհավասարություններից հետևում է, որ $\|f\|<1$, իսկ գերլրիվացված է այն և միայն այն դեպքում, երբ նշված անհավասարություններից հետևում է, որ $f \equiv 0$: Մինիմալ համակարգերի համար ստացված է արդյունք, որը կարելի է մեկնաբանել որպես գործակիցների մեծությունը չափող կամայական նախանորմայով Բեսելի անհավասարության և Պարսևալի հավասարության ընդհանրացում: Բերված են նաև թեորեմներ O(p) և o(p) լրիվությունների կայունության մասին:

S. Ya. HAVINSON. *On complete systems in Banach spaces* (summary)

Let X be a normed space. We introduce and investigate $O(p)$ and $o(p)$ approximations of the elements $\omega \in X$ by the linear combinations (polynomials) of the elements from a system $\{x_j\} \subset X$. Here p is some seminorm; $O(p)$-approximation of ω is that by the polynomials with the p — bounded coefficients; $o(p)$-approximation it that with arbitrary small (in p) coefficients. Earlier the author considered the $O(p)$ and $o(p)$ — completeness concept, and the $O(p)$, respectively $o(p)$-approximations are its localizations. The main results of the paper are the connections between the $O(p)$ and $o(p)$ — completeness, and the usual completeness. They enable to give new characterization of the completeness: a system $\{x_j\}$ is complete if there exist $\{\varepsilon_j > 0\}$ such that for every $f \in X^*$ we have: $|f(x_j)| < \varepsilon_j \Rightarrow \|f\| < 1$. Also, for minimal systems we give a result, which may be considered as generalized Bessel inequality and Parseval equality for arbitrary seminorm p. Further, we prove some theorems on stability of $O(p)$ and $o(p)$ — completeness.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ph. Davis and Fan Ky.* Complete sequences and approximation in normed spaces, Duke Mathem. Journ., 1957, v. 24, № 2, 183–192.
2. *Far Ky.* Linear inequalities and closure properties in normed linear spaces, In book: Seminars of analytic functions Institute of advanced study, v. 2, Princeton, 1958.
3. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые вопросы полноты систем, ДАН СССР, 1961, 137, № 4, 793—796.
4. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые теоремы о приближении с учетом величин коэффициентов приближающих многочленов, ДАН СССР, 1971, 196, № 6, 1283—1286.
5. *С. Я. Хавинсон.* О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1971, 6, № 2—3, 221—234.
6. *J. Stafney.* A permissible restrictions on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C\,[0, 1]$, Duke Mathem, Journ., 1967, 34, № 3, 393–396.
7. *John A. Roulier.* Permissible Bounds on the Coefficients of Approximating Polynomials, Journ. of Approxim. Theory, 1970, 3, 117—122.
8. *John A. Roulier.* Restrictions on the Coefficients of Approximating Polynomials, Journ. of Approxim. Theory, 1972, 6, 276–282.
9. *M. von Golitschek.* Permissible bounds on the Coefficients of generalised polynomials. In the book: Approximation Theory. Proceedings of a Conference on Approxim. Theory, Austin, Texas, New York; Academic Press, 1973.
10. *M. von Golitschek and D. Leviatan.* Permissible bounds on the coefficients of approximation polynomials with real and complexe exponents, Mathem. Analysis and Applications, 1977, 60, № 1, 123–137.
11. *J. Bak, M. von Golitschek, D. Leviatan.* The Rate of approximation by means of polynomials with restricted coefficients, Israel Journ. of Mathem., 1977, 26, № 3—4, 265—275.
12. *D. Leviatan.* Approximation by polynomials with restricted coefficients, In book: Approximation Theory, v. 2, New York: Academic Press, 1976, 417—422.
13. *В. И. Гурарий, М. А. Мелитиди.* Об оценках коэффициентов полиномов, аппроксимирующих непрерывные функции, Функциональный анализ и его приложения, 1971, 5, № 1, 73—75.
14. *Б. А. Самокиш.* О поведении коэффициентов многочленов, приближающих регулярную на отрезке функцию, в кн.: Методы вычислений, Ленинград: ЛГУ, 1963, вып. 1, 58—65.
15. *Р. М. Тригуб.* О приближении функций многочленами со специальными коэффициентами, Изв. ВУЗ-ов, сер. математика, 1977, № 1 (176), 93—99.

16. *С. Я. Хавинсон.* Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным ограничениям внутри области и применении этих задач к вопросам аппроксимации, ДАН СССР, 1960, 135, № 2, 270—273.
17. *С. Я. Хавинсон.* Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов, Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1961, 60, 557—590.
18. *С. Я. Хавинсон.* Об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль, ДАН СССР, 1960, 131, № 4, 793—796.
19. *С. Я. Хавинсон.* Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций, Матем. заметки, 1969, 6, № 5 619—625.
20. *В. П. Хавин.* О пространстве ограниченных регулярных функций, ДАН СССР, 1960, 131, № 1, 40—43.
21. *В. П. Хавин.* О пространстве ограниченных регулярных функций, Сибирский матем. журнал, 1961, 2, № 4, 622—638.
22. *О. А. Мурадян.* О росте коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в теореме Мюнца, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1973, 8, № 1, 70—87.
23. *О. А. Мурадян.* О некоторых теоремах единственности и величинах коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в задаче Мюнца, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1977, 12, № 6, 435—446.
24. *О. А. Мурадян* и *С. Я. Хавинсон.* О величинах коэффициентов многочленов в аппроксимационной теореме Вейерштрасса, Матем. заметки, 1977, 22, № 2, 269—276.
25. *В. А. Мартиросян.* О росте коэффициентов многочленов, осуществляющих равномерное приближение на комплексной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1980, 15, № 6, 419—432.
26. *А. А. Вагаршакян.* Теоремы единственности для ограниченных аналитических функций и их приложение в теории аппроксимации, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1977, 12, № 5, 345—357.
27. *В. В. Напалков.* Аппроксимация функций многих переменных с учетом роста коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, Матем. сборник, 1980, 111 (153), № 1. 144—156.
28. *Е. Ш. Чацкая.* Об одновременной аппроксимации непрерывных функций рациональными дробями и их производными на некоторых замкнутых множествах комплексной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1964, 17, № 4, 9—22.
29. *Е. Ш. Чацкая.* Двойственное истолкование граничной теоремы единственности, Ученые записки Ленингр. пед. ин-та им. Герцена, 1967, вып. 328, 250—255.
30. *Е. Ш. Чацкая.* Об усилении одной теоремы Кегеяна. В кн.: Линейные операторы и их обобщения. Межвузовский сборник научных трудов, Ленинград: Ленингр. пед. ин-т им. Герцена, 1981, 65—70.
31. *G. Schröeter* Ein Beitrag zum Müntzschen Problem und zur (a_n) — Abgeschlossenheit in Banach räumen, Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen, 1973, № 105, 1—57.
32. *В. Д. Мильман.* Геометрическая теория пространств Банаха. Ч. 1, УМН, 1970, 25, № 3 (153), 113—174: Ч. 2,—УМН, 1971, 26, № 6 (162), 74—149.
33. *С. Я. Хавинсон.* О двух классах экстремальных задач для полиномов и моментов. Изв. АН СССР, сер. матем., 1961, 25, № 4, 557—590.
34. *М. Г. Крейн.* Проблема моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве, Статья IV в кн.: Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, ГОНТИ, 1938.
35. *С. М. Никольский.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв. АН СССР, 1946, т. 10, 207—256.
36. *Н. П. Корнейчук.* Экстремальные задачи теории приближения, М., Наука, 1976.
37. *В. М. Тихомиров.* Некоторые вопросы теории приближения, М., МГУ, 1976.
38. *М. Г. Крейн, А. А. Нудельман.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., Наука, 1973.
39. *Н. Донфорд, Шварц.* Линейные операторы. Общая теория, т. 1, М.. ИИЛ, 1962.

40. *В. И. Гурарий, М. А. Мелитиди.* Устойчивость полноты последовательностей в банаховых пространствах, Бюллетень Польской АН, серия мат., астр. и физ. наук. 1970, 18, № 9, 533—536.
41. *С. Я. Хавинсон.* Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным ограничениям внутри области и применении этих задач к вопросам аппроксимации, ДАН СССР, 1960, 135, № 2, 270—273.
42. *С. Я. Хавинсон.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН, 1963, 18, № 2, 25—98.
43. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., Гостехиздат, 1950.
44. *С. С. Левин.* Ueber einige mit Konvergenz im Mittel verbundenden Eigenschaften von Funktionen—Folgen, Mathem. Zeitschrift, 1930, Bd. 32, 491—511.
45. *А. И. Маркушевич.* О базисе (в широком смысле слова), ДАН СССР, 1943, 41, № 2, 241—243.
46. *А. И. Маркушевич.* Некоторые вопросы теории приближения и разложения функций в ряды, Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ-мат. наук, М., МГУ, 1944. 169 с.
47. *С. Банах.* Курс функционального анализа, Киев, Радяньска школа, 1948.
48. *М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман.* Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха, Ученые записки Харьковского матем. общества, 1940, 4, № 16, 106—110.
49. *В. И. Гурарий, М. И. Кадец.* О минимальных системах и квазидополненных в пространстве Банаха, ДАН СССР, 1962, 145, № 2, 256—258.
50. *Н. Винер, Р. Пели.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., Наука, 1964.
51. *R. P. Boas.* General expansions theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1940. v. 26, 139—143.
52. *B. de Sz. Nagy.* Expansions theorems of Paley—Wiener type, Duke Mathem., Journ., 1947, 14, № 3, 975—978.
53. *F. Schäfke.* Das Kirterium von Paley und Wiener in Banachschen Raum, Mathem. Nachrichten, 1949—50, v. 3, 59—61.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 2, 1985 Математика

УДК 517.986

С. А. ГРИГОРЯН

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ КОММУТАТИВНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

Введение

Пусть A и B—коммутативные банаховы алгебры с единицей. Говорят, что B является расширением алгебры A, если существует сохраняющий единицу банахов изоморфизм из A в B. Один из примеров расширения—это известное расширение Аренса—Гофмана, которое строится следующим образом (см. [1]).

Для коммутативной банаховой алгебры A с единицей рассмотрим $A[x]$—алгебру полиномов над A от неизвестного x. Пусть $\alpha(x)= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ — некоторый унитарный полином от x с коэффициентами из A, и $B = A[x]/\alpha(x) A[x]$—фактор-алгебра, полученная факторизацией алгебры $A[x]$ по идеалу $\alpha(x) A[x]$. С помощью положительного числа t, удовлетворяющего неравенству $t^n > \|a_1\| t^{n-1} + \cdots + \|a_n\|$ можно таким образом задать норму на B (для каждого класса $b = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i + \alpha(x) A[x]$, $\|b\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|c_i\| t^i$), что B станет коммутативной банаховой алгеброй. Естественное вложение A в B является изометрическим изоморфизмом и поэтому можно предположить, что A — замкнутая подалгебра банаховой алгебры B.

В § 1 данной статьи вводится понятие полиномиального расширения коммутативных банаховых алгебр (см. определение 1.2) и показывается, что расширение Аренса—Гофмана является частным случаем полиномиального расширения.

В § 2 вводится понятие „сильного полиномиального расширения". Пример 2 показывает, что каждое сильное полиномиальное расширение является также полиномиальным расширением, хотя обратное неверно.

Следующий параграф посвящен полиномиально замкнутым и целозамкнутым равномерным алгебрам. Здесь формулируется достаточное условие полиномиальной замкнутости равномерной алгебры; для плоского компакта K находятся условия, при которых классические алгебры $P(K)$ и $R(K)$ являются полиномиально замкнутыми и целозамкнутыми.

В § 4 дается понятие дифференцирования в коммутативных банаховых алгебрах, обобщающее точечное дифференцирование, и устанавливается связь между полиномиальными расширениями и дифференцированием.

В заключение приводится несколько нерешенных задач, естественным образом возникающих из содержания настоящей работы*.

§ 1. Расширение Аренса—Гофмана

Основные свойства расширений Аренса—Гофмана описаны в [1]. Здесь укажем только те, которые нам понадобятся в дальнейшем:

а) Из построения алгебры B (см. введение) видно, что каждый элемент $b \in B$ однозначно представим в виде $a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$. Иными словами, алгебра B является свободным A-модулем с базисом $e, x, \cdots, x^{n-1}$, e — единица алгебры A. Поэтому норма на B эквивалентна покоординатной норме.

б) Если B—расширение Аренса—Гофмана алгебры A с помощью полинома $\alpha(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, зная M_A— пространство максимальных идеалов алгебры A, можно описать M_B— пространство максимальных идеалов алгебры B. Пусть π_A — естественная проекция из M_B на M_A. Эта проекция в данном случае является сюръекцией и для любого $m \in M_A$ множество $(\pi_A^B)^{-1}(m)$ состоит не более, чем из n точек. Действительно, если $m_0 \in (\pi_A^B)^{-1}(m)$, то $m_0(\alpha(x)) = 0$ в силу построения алгебры B, поэтому число $m_0(x)$ есть одно из решений уравнения

$$y^n + m(a_1)\, y^{n-1} + \cdots + m(a_n) = 0. \tag{1.1}$$

И обратно—для каждых двух решений y_1, y_2 $(y_1 \neq y_2)$ уравнения (1.1) найдутся единственные m_1, $m_2 \in (\pi_A^B)^{-1}(m)$ такие, что $m_1(x) = y_1$, $m_2(x) = y_2$. Таким образом, card $(\pi_A^B)^{-1}(m)$ совпадает с числом решений, без учета кратности, уравнения (1.1). Поэтому справедливо следующее

Предложение 1.1. *Пусть B— нетривиальное расширение Аренса—Гофмана алгебры A. Если $M_A = M_B$, то B имеет нетривиальный радикал.*

Действительно, из условия $M_A = M_B$ следует, что уравнение (1.1) имеет одно, без учета кратности, решение. Следовательно, для каждого $m \in M_A$ решение уравнения (1.1) равно числу $-\dfrac{m(a_1)}{n}$. А поскольку $M_A = M_B$ и $m(x)$ является решением уравнения (1.1), $m\left(x + \dfrac{a_1}{n}\right) = 0$ для любого $m \in M_B$. Отсюда $x + \dfrac{a_1}{n}$ принадлежит радикалу алгебры B.

Следствие. *Пусть банахова алгебра B является расширением Аренса—Гофмана банаховой алгебры A с помощью полинома $\alpha(x) = x^2 + a_1 x + a_2$. card $(\pi_A^B)^{-1}(m) \equiv 1$ на M_A тогда и только тогда, когда $a_1^2 - 4a_2$ принадлежит радикалу алгебры A.*

---

* Некоторые частные случаи результатов настоящей работы анонсированы в [2].

Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Обозначим через $A[x_1\cdots x_n]$ алгебру полиномов от неизвестных $x_1\cdots x_n$ над A.

Определение 1.2. *Пусть A и B—коммутативные банаховы алгебры с единицей. Скажем, что B является полиномиальным расширением алгебры A, если найдутся такое число n и гомоморфизмы Φ_A^B I, Ψ, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\Phi_A^B"] \arrow[dr, "I"'] & & B \\ & A[x_1\cdots x_n] \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, где отображение Φ_A^B осуществляет банахов изоморфизм между A и некоторой замкнутой подалгеброй алгебры B, имеющей с B общую единицу; Ψ — гомоморфизм из $A[x_1\cdots x_n]$ на B, а I—естественное вложение A в $A[x_1\cdots x_n]$.

Следующий пример показывает, что не каждое полиномиальное расширение является расширением Аренса—Гофмана, хотя, как будет видно из дальнейшего, между этими расширениями есть связь.

Пример 1. Пусть D — единичный круг, $X=D\times[0,1]$ и B — алгебра тех непрерывных функций на X, которые при фиксированном $t\in[0,1]$ принадлежат диск-алгебре, а $A=\{f\in B;\ f_z(0,t)=0\}$. Очевидно, $M_A=M_B$ и $B=A+zA$ — полиномиальное расширение алгебры A, но не расширение Аренса--Гофмана (см. предложение 1.1).

Теорема 1.3. *Пусть банахова алгебра B — полиномиальное расширение алгебры A. Тогда существует такая башня банаховых алгебр*

$$A=A_0\subseteq\cdots\subseteq A_n,$$

что каждая алгебра A_i является расширением Аренса—Гофмана предыдущей алгебры A_{i-1}, $1<i\leqslant k$, и такой непрерывный гомоморфизм Φ из A_n на B, что $\Phi(a)=\Phi_A^B(a)$ для всех $a\in A$.

Доказательство. Пусть B — полиномиальное расширение алгебры A. Не теряя общности можно предположить: $A\subset B$ и существуют такие $b_1,\cdots,b_n\in B$, что $B=A[b_1\cdots b_n]$. Пусть B_k—пространство полиномов от $b_1,\cdots,b_n$ над A, степень которых не превосходит k. Тогда $B=A[b_1,\cdots,b_n]=\bigcup_{1}^{\infty} B_k$. По теореме Бэра о категориях найдется такое число $k_0\geqslant 1$, что B_{k_0} является множеством второй категории в B. Обозначим через D пространство полиномов над A от неизвестных $y_1,\cdots,y_n$, степень которых не превосходит k_0. Очевидно, что D — есть банахово пространство в норме

$$\left\| \sum_{j_1+\cdots+j_n<k_0} a_{j_1\cdots j_n} y_1^{j_1}\cdots y_n^{j_n}\right\| = \sum_{j_1+\cdots+j_n<k_0} \|a_{j_1\cdots j_n}\|$$

и естественно определенный A-линейный оператор T из D в B непрерывен и отображает D на B_{k_0} — пространство второй категории в B. Отсюда, по теореме об открытом отображении (см. [3], стр. 58), $B_{k_0}=B$. Покажем теперь, что каждый элемент из B является целым над A. Для фиксированного $b\in B$ и каждого элемента d из базиса свободного A-модуля D можно подобрать такой элемент $S(d)\in D$, что $T(S(d))=bT(d)$. Тем самым определено A-линейное отображение $S: D\to D$, удовлетворяющее условию $TS=bT$. По теореме Кэли—Гамильтона ([4], стр. 446) существует такой унитарный многочлен α, что $\alpha(S)=0$, откуда легко следует, что $\alpha(b)=0$. Тем самым доказано, что каждый элемент из B является целым над A. Пусть $\alpha_i(x_i)$ — такой унитарный полином над A от неизвестного x_i, для которого b_i является корнем, $1\leqslant i\leqslant n$. Полагая $A_0=A$, через A_i обозначим расширение Аренса—Гофмана алгебры A_{i-1} с помощью полинома $\alpha_i(x_i)$, $1\leqslant i\leqslant n$. В полученной башне банаховых алгебр

$$A=A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_n$$

каждая последующая алгебра является расширением Аренса—Гофмана предыдущей алгебры. Если теперь через k_i обозначить степень полинома $\alpha_i(x_i)$, то из построения алгебры A_n следует, что каждый элемент из A_n представим единственным образом в виде

$$\sum a_{j_1\cdots j_n} x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}, \text{ где } j_i\leqslant k_i-1,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ a_{j_1\cdots j_n}\in A.$$

Поэтому норма, заданная на A_n, эквивалентна покоординатной норме. Следовательно, гомоморфизм Φ из A_n на B — $\Phi\left(\sum a_{j_1\cdots j_n} x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}\right) = \sum a_{j_1\cdots j_n} b_1^{j_1}\cdots b_n^{j_n}$ — непрерывен и $\Phi(a)=a$ для всех $a\in A$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Каждый элемент из B является целым над* $\Phi_A^B(A)$.

Доказательство. Из построения алгебры A_n следует, что каждый элемент из A_n является целым над A. Следовательно, каждый элемент из B — целый над $\Phi_A^B(A)$.

Следствие 2. *Пусть A и B — коммутативные банаховы алгебры. Если* B *— полиномиальное расширение алгебры A, то на B можно задать структуру конечномерного A-модуля.*

Доказательство. Из доказательства теоремы следует, что B является конечномерным $\Phi_A^B(A)$-модулем. Но алгебра $\Phi_A^B(A)$ изоморфна алгебре A. Следовательно, на B можно задать структуру конечномерного A-модуля.

§ 2. Полиномиальные расширения

Если банахова алгебра A является замкнутой подалгеброй банаховой алгебры B, то из того, что B — полиномиальное расширение алгебры A еще не следует, что для некоторых $b_1, \cdots, b_n \in B$ алгебра B совпадает с $A[b_1, \cdots, b_n]$.

Пример 2. Пусть D — единичный круг и $X = D \times [0,1]$. B — алгебра, состоящая из тех непрерывных функций на X, которые при фиксированном $t \in [0, 1/4]$ принадлежат диск-алгебре, а A — алгебра тех функций из $C(X)$, которые при фиксированном $t \in [0, 1/2]$ принадлежат диск-алгебре. Очевидно, $A \subset B$, и A и B изометрически изоморфны. Поэтому B является полиномиальным расширением алгебры A, но, как легко проверить, каковы бы ни были $b_1, \cdots, b_n \in B$, алгебра $A[b_1, \cdots, b_n]$ не совпадает с B.

Определение 2.1. *Пусть A — замкнутая подалгебра банаховой алгебры B, имеющая с B общую единицу. Скажем, что B является сильным полиномиальным расширением алгебры A если существуют такие $b_1, \cdots, b_n \in B$, что B совпадает с $A[b_1 \cdots \cdots b_n]$ — алгеброй полиномов над A от $b_1, \cdots, b_n$.*

Таким образом, под „B — сильное полиномиальное расширение алгебры A" подразумеваем, что A — подалгебра алгебры B, а роль Φ_A^B (см. определение 1.2) играет естественное вложение.

Предположим, что A является подалгеброй конечной коразмерности в B. Тогда B, очевидно, — сильное полиномиальное расширение алгебры A. Хорошо известно как получаются алгебры конечной коразмерности. Например, каждая подалгебра коразмерности 1 алгебры B совпадает либо с ядром некоторого точечного дифференцирования, т. е. ядром такого линейного функционала δ на B, что для некоторого $m \in M_B$ и любых $a, b \in B$, $\delta(ab) = m(a)\,\delta(b) + m(b)\,\delta(a)$, либо получается склеиванием двух точек пространства максимальных идеалов алгебры B (см. [5]). А поскольку каждая подалгебра конечной коразмерности содержится в подалгебре коразмерности 1 алгебры B, то каждая такая алгебра либо содержится в ядре точечного дифференцирования, либо в алгебре, полученной с помощью склеивания двух точек пространства M_B.

Аналогичный результат верен и для сильных полиномиальных расширений.

Теорема 2.2. *Пусть B — нетривиальное сильное полиномиальное расширение алгебры A. Тогда либо найдутся $m_1, m_2 \in M_B$, $m_1 \neq m_2$, такие, что $A \subset \{b \in B;\ m_1(b) = m_2(b)\}$, либо найдется ненулевое непрерывное точечное дифференцирование δ на B, что*

$$A \subset \{b \in B;\ \delta(b) = 0\}.$$

Доказательству теоремы предпошлем две леммы, представляющие самостоятельный интерес.

Для каждого $b \in B$ через $r(b)$ обозначим минимальную из степеней унитарных полиномов над A от неизвестного x, для которых $b \in B$ является корнем.

Лемма 2.3. *Пусть A—замкнутая подалгебра банаховой алгебры B, имеющей с ней общую единицу. Предположим, что для некоторого $b \in B$, $A[b]$ замкнута в B. Тогда найдется такая замкнутая подалгебра D алгебры $A[b]$,*

$$A \subset D \subset A[b], \quad \text{что} \quad A[b]/D = r(b) - 1.$$

Доказательство. Пусть

$$a(x) = x^k + a_{k-1}^0 x^{k-1} + \cdots + a_0^0 \tag{2.1}$$

—один из унитарных полиномов над A степени $k = r(b)$, для которого $b \in B$ является корнем; A^0—расширение Аренса—Гофмана алгебры A с помощью $a(x)$, и Φ—отображение, фигурирующее в теореме 1.3 (в теореме 1.3 надо заменить A_n на A^0 и B на $A[b]$). Из § 1 а) следует, что каждый элемент из A^0 однозначно представим в виде $\sum\limits_0^{k-1} a_i x_i$, $a_i \in A$. Из построения Φ (см. теорему 1.3) следует, что $\operatorname{Ker}\Phi$ состоит из тех полиномов $p(x) \in A^0$, для которых $p(b) = 0$. Для $p(x) \in \operatorname{Ker}\Phi$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}$, пусть $K_p = \{m \in \in M_A;\ m(a_{k-1}) = 0\}$. Множество $\bigcap\limits_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$ не пусто. Действительно, в противном случае нашлись бы такие $d_1, \cdots, d_n \in A$ и полиномы $p_1, \cdots \cdots, p_n \in \operatorname{Ker}\Phi$, что $\sum\limits_1^n d_i a_{k-1}^{(i)} = 1$, где $a_{k-1}^{(i)}$ — показатель полинома p_i при x^{k-1}, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому у полинома $p(x) = \sum\limits_1^n d_i p_i(x)$ коэффициент при x^{k-1} равен единице, т. е. является унитарным полиномом степени $k-1$, и, кроме того, $p(b) = 0$. А это противоречит минимальности числа $k = r(b)$. Покажем теперь, что для каждого $p(x) \in \operatorname{Ker}\Phi$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}$, справедливо равенство: $m(a_i) = 0$ для любого $m \in \bigcap\limits_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

Пусть i_0— такое число, $0 < i_0 < k-1$, что для любого полинома $p(x) = \sum\limits_0^{k-1} a_i x^i \in \operatorname{Ker}\Phi$, $m(a_i) = 0$ для всех $i > i_0$ и $m \in \bigcap\limits_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$. Покажем, что $m(a_{i_0}) = 0$. Для этого, умножив полином $p(x)$ на x и заменив $-x^k$ на $\sum\limits_0^{k-1} a_i^0 x^i$ (см. равенство (2.1)), получим новый полином $\sum\limits_0^{k-1} d_i x^i$ из $\operatorname{Ker}\Phi$ с коэффициентами $d_0 = -a_{k-1} a^0$, $d_{i+1} = -a_{i+1}^0 a_{k-1} + a_i$, $0 \leqslant i \leqslant k-2$. Но, в силу допущения, $m(d_{i_0+1}) = 0$ для всех $m \in \bigcap\limits_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$; следовательно, $m(a_{i_0}) = 0$. Таким образом, для каждого $p(x) \in \operatorname{Ker}\Phi$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}$, выполняется равенство $m(a_i) = 0$ для всех $m \in \bigcap\limits_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

Пусть I — максимальный идеал алгебры A, соответствующий некоторому $m \in \bigcap\limits_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$. Из сказанного выше следует, что все коэффициенты каждого полинома из $\operatorname{Ker}\Phi$ содержатся в $D^0 = A + Ix + \cdots$

$\cdots + Ix^{k-1}$, и поскольку D^0 является замкнутой подалгеброй алгебры A^0, то $D=\Phi(D^0)$ замкнут в $A[b]$. Очевидно, $D=A+Ib+\cdots+Ib^{k-1}$.

Покажем теперь, что никакая линейная комбинация элементов $b, b^2, \cdots, b^{k-1}$ не принадлежит D. Действительно, пусть существуют такие комплексные числа $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$, что $\sum_1^{k-1} \alpha_i b^i$ принадлежит D. Тогда $\sum_1^{k-1} \alpha_i b^i = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{k-1} b^{k-1}$, где $a_i \in I$, $i \geqslant 1$. Следовательно, $a_0 + \sum_1^{k-1} (\alpha_i - a_i)\ b^i = 0$, т. е. полином $p(x) = -a_0 + \sum_1^{k-1} (\alpha_i - a_i) x^i$ принадлежит Ker Φ. Поэтому $m(\alpha_i - a_0) = 0$, а так как $m(a_i)=0$, то $m(\alpha_i)=0$. Отсюда $\alpha_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Таким образом, $\dim A[b]/D = k-1$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть банахова алгебра B является нетривиальным сильным полиномиальным расширением банаховой алгебры A. Тогда существует замкнутая подалгебра конечной коразмерности в B, содержащая алгебру A.*

Доказательство. Из определения 2.1 следует, что найдутся такие $b_1, b_2, \cdots, b_n \in B$, что $A[b_1, \cdots, b_n] = B$. Для каждого b_i через k_i, $i \geqslant 2$, обозначим минимальную из степеней унитарных полиномов от неизвестного x_i над $A[b_1, \cdots, b_{i-1}]$, для которых b_i является корнем. Не теряя общности, можно считать, что $k_i \geqslant 2$. Пусть $\alpha_i(x_i)$, $2 \leqslant i \leqslant n$, —такой унитарный полином степени k_i от неизвестного x_i над $A[b_1, \cdots, b_{n-1}]$, для которого b_i является корнем, и $\alpha_1(x_1)$ — произвольный унитарный полином над A, для которого b_1 является корнем. Рассмотрим башню таких банаховых алгебр

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n,$$

что каждая алгебра A_i является расширением Аренса—Гофмана алгебры A_{i-1} с помощью $\alpha_i(x_i)$. Так как каждый элемент из A_n однозначно представим в виде $\sum a_{j_1 \cdots j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$, где $j_i < k_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и норма на A_n эквивалентна покоординатной, то отображение Φ:

$$\Phi\left(\sum a_{j_1 \cdots j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}\right) = \sum a_{j_1 \cdots j_n} b_1^{j_1} \cdots b_n^{j_n}$$

является непрерывным гомоморфизмом из A_n на B и (см. доказательство леммы 2.3) существует такой максимальный идеал I алгебры A_{n-1}, что Ker $\Phi \subset A_{n-1} + Ix_n + \cdots + Ix_n^{k_n-1} = D^0$. Поскольку алгебра D^0 замкнута в A_n и Φ—непрерывное отображение из A_n на B, то $D = \Phi(D^0)$—замкнутая подалгебра алгебры B, содержащая алгебру A. Так как $\dim A_n/D^0 = k-1$, то $\dim B/D = k-1$.

Доказательство теоремы 2.2. Из леммы 2.4 следует, что существует подалгебра конечной коразмерности в B, содержащая алгебру A. Поэтому (см. рассуждения, предшествующие теореме 2.2) либо A содержится в ядре некоторого точечного дифференцирования, либо найдутся $m_1, m_2 \in M_B$, $m_1 \neq m_2$ такие, что $A \subset \{b \in B;\ m_1(b) = m_2(b)\}$. Теорема доказана.

Пусть X — компактное пространство, A и B — равномерные алгебры на X, т. е. замкнутые подалгебры $C(X)$, содержащие константы и разделяющие точки X.

Следствие 1. *Пусть равномерная алгебра B является сильным полиномиальным расширением равномерной алгебры A. Если $M_B = X$ и каждая точка X — есть обобщенная точка пика для B, то $B = A$.*

Доказательство. Поскольку каждая точка из X является точкой пика для B и $M_B = X$, на B нет нетривиального точечного дифференцирования. Поэтому, так как A разделяет точки X, получим $B = A$.

Следствие 2. *Пусть равномерная алгебра B на X является полиномиальным расширением равномерной алгебры A. Если каждая точка X есть точка пика для B и $M_B = X$, то либо A и $Б$ изометрически изоморфны, либо, в противном случае, найдутся такие $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, что $\Phi_A^B(A)$ содержится в $B_0 = \{b \in B;\ b(x_1) = b(x_2)\}$.*

Доказательство. Если алгебра $\Phi_A^B(A)$ разделяет точки X, то согласно следствию 1, $\Phi_A^B(A) = B$ и, следовательно, Φ_A^B осуществляет изоморфизм между A и B. А так как A и B — равномерные алгебры, Φ_A^B является изометрическим изоморфизмом. Если же $\Phi_A^B(A)$ не разделяет точки X, то найдутся такие $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, что $\Phi_A^B(A) \subset B_0 = \{b \in B;\ b(x_1) = b(x_2)\}$.

§ 3. Полиномиально замкнутые и целозамкнутые равномерные алгебры

Пусть A — равномерная алгебра на компакте X. Будем говорить что A — полиномиально замкнутая алгебра, если у A нет нетривиальных сильно полиномиальных расширений в категории равномерных алгебр на компакте X, т. е. каждая равномерная алгебра на X, являющаяся сильным полиномиальным расширением алгебры A, совпадает с A.

Теорема 3.1. *Пусть A — такая равномерная алгебра на X, что $M_A = X$. Если каждая точка из X является точкой пика для A, то A — полиномиально замкнутая алгебра.*

Доказательство. Пусть B — некоторая равномерная алгебра на X, являющаяся сильным полиномиальным расширением алгебры A. Тогда, поскольку каждый элемент из B — целый над A и $A \subset B$, $M_B = X$ (см. [7], стр. 130, [9]). Следовательно, из следствия 1 теоремы 2.2, $B = A$. Теорема доказана.

Пусть A — замкнутая подалгебра коммутативной банаховой алгебры B, содержащая единицу. Говорят, что B — целое расширение алгебры A, если каждый элемент из B является целым над A. Будем называть равномерную алгебру A на X целозамкнутой, если каждая равномерная на X алгебра B, являющаяся целым расширением алгебры A, совпадает с A. Скажем, что A — сильно целозамкнутая алгебра, если каждый элемент из $C(X)$, являющийся целым над A, принадлежит A (ср. [8]).

Напомним, что для банаховых алгебр A и B, $A \subset B$, через π_A^B обозначили естественную проекцию из M_B в M_A.

Лемма 3.2.([11]). *Пусть B — целое расширение алгебры A. Тогда $\pi_A^B(M_B) = M_A$.*

Для каждого замкнутого множества $F \subset X$ через A_F будем обозначать равномерное замыкание сужения A на F.

Лемма 3.3. *Пусть равномерная алгебра B—целое расширение равномерной алгебры A, и $\{F\}$ — разбиение X на максимальные множества антисимметрии относительно A. Тогда для каждого $F \in \{F\}$, B_F — целое расширение алгебры A_F.*

Доказательство очевидно.

Пусть K — компакт в комплексной плоскости, $P(K)$ — равномерная алгебра на K, порожденная полиномами, а $R(K)$—рациональными функциями с полюсами вне K. Через $\partial P(K)$ (соответственно $\partial R(K)$) будем обозначать границу Шилова алгебры $P(K)$ (соответственно $R(K)$).

Лемма 3.4. *Пусть B — равномерная алгебра на K, содержащая $P(K)$. Предположим, что граница Шилова ∂B алгебры B совпадает с $\partial P(K)$. Если $\pi_{P(K)}^B(M_B) = M_{P(K)}$, то $B = P(K)$.*

Доказательство. Так как гельфандовское представление алгебры $P(K)$ на $M_{P(K)}$ является относительно максимальной алгеброй, достаточно показать, что $M_B = M_{P(K)}$ (см. [7], стр. 72). Пусть m_1, $m_2 \in M_B$ такие, что $\pi_{P(K)}^B(m_1) = \pi_{P(K)}^B(m_2)$. Если μ_1 и μ_2 — представляющие меры соответственно m_1 и m_2, носители которых содержатся в ∂B, то мера $\mu_1 - \mu_2$ ортогональна к алгебре Дирихле $P(\partial B)$. Следовательно, $\mu_1 = \mu_2$. Лемма доказана.

Обозначим через $\{F\}_P$ разбиение K на максимальные множества антисимметрии относительно $P(K)$.

Теорема 3.5. 1) *Алгебра $P(K)$ целозамкнута тогда и только тогда, когда ни одно из неодноточечных множеств $F \in \{F\}_P$ не имеет изолированных точек. $P(K)$ является сильно целозамкнутой тогда и только тогда, когда K — полиномиально выпуклый компакт.*

2) *Предположим, что каждая точка из ∂K — топологической границы компакта K — является точкой пика для $R(K)$. Тогда $R(K)$ — полиномиально замкнутая алгебра.*

Доказательство. 1) Пусть $z \in K$ — изолированная точка для некоторого $F \in \{F\}_P$. Тогда найдется $b \in C(K)$, удовлетворяющее условию $b(z)=1$, $b=0$ на $K \setminus \{z\}$. Так как $z \overline{\in} \partial P(K)$, $P(K)$ — подалгебра коразмерности 1 в равномерной алгебре, порожденной функциями из $P(K)$ и b. Следовательно, $P(K)$ в этом случае не целозамкнутая алгебра.

Обратно, пусть ни одно из множеств $F \in \{F\}_P$ не имеет изолированных точек. Покажем, что для любого целого расширения B равномерной алгебры $P(F)$, ∂B совпадает с $\partial P(F)$ (см. леммы 3.2—3.4), Допустим противное. Пусть $z_0 \in F \setminus \partial P(F)$ является точкой пика для алгебры B. Так как F не имеет изолированных точек, найдется счетное множество пика E для алгебры B и такая окрестность U точки z_0, что для любого $a \in P(F)$ из условия $a|_{E \cap U} = 0$ следует $a|_U = 0$ $(E \cup U \neq U)$.

Пусть $b \in B$—функция, пикующая на множестве E. Тогда $b_0 = 1 - b$ обращается в нуль только на множестве E. Так как B—целое расширение алгебры $P(F)$, существуют такие $a_1, \cdots, a_n \in P(F)$, что $b_0^n + a_1 b_0^{n-1} + + \cdots + a_n = 0$. А поскольку $a_n|_{E \cap U} = 0$, то, из построения множества E, $a_n|_U = 0$. Следовательно, $(b_0^n + a_1 b_0^{n-1} + \cdots + a_n)|_U = b_0(b_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1})|_U = 0$, а так как E—счетное множество и F не имеет изолированных точек, $b_0|_{U \setminus E} \neq 0$, то $(b_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1})|_U = 0$. Отсюда $a_{n-1}|_{U \cap E} = 0$. Следовательно, $a_{n-1}|_U = 0$. Продолжая этот процесс, получим, что $b_0|_U = 0$. Пришли к противоречию. Таким образом, $\partial B = \partial P(F)$. Применив теперь леммы 3.2—3.4, получим, что $P(K)$—целозамкнутая алгебра. Если теперь K—полиномиально выпуклый компакт, $P(K)$—относительно максимальна и поэтому является сильно целозамкнутой алгеброй (см. [7], стр. 72). Если же K не полиномиально выпукло и z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$ — две точки из некоторой ограниченной компоненты дополнения к K, функция $b(z) = \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}$ принадлежит $C(K)$ и является целой над $P(K)$. Очевидно, $b(z) \notin P(K)$.

2). Пусть B—сильное полиномиальное расширение алгебры $A = R(K)$; не теряя общности, можно предположить, что существует такое $b \in B$, что $B = A[b]$. Обозначим через $r(b)$ минимальную из степеней унитарных полиномов над A от неизвестного x, для которых b является корнем. Покажем, что $b \in A$, т. е. $r(b) = 1$. Обозначим через L линейное пространство полиномов от x над A, степень которых не превосходит $k = r(b) - 1$ и для которых b является корнем. Поскольку $M_A = K$, то и $M_B = K$ (см. [7], стр. 130). Следовательно (см. предложение 1.1) B не является расширением Аренса—Гофмана алгебры A, и поэтому пространство L не тривиально.

Для каждого $p \in \mathrm{L}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$, пусть $K_p = \{m \in M_A;\ m(a_k) = 0\}$. Как было показано при доказательстве леммы 2.3, из нетривиальности пространства L следует, что $\bigcap_{p \in \mathrm{L}} K_p$ не пусто и для каждого $m_0 \in \bigcap_{p \in \mathrm{L}} K_p$ алгебра $D = A + Ib + \cdots Ib^k$, где I—максимальный идеал алгебры A, соответствующий точке $m_0 \in M_A$, является замкнутой подалгеброй конечной коразмерности в B. Поскольку $M_A = M_B$, каждая подалгебра конечной коразмерности содержится в ядре некоторого точечного дифференцирования. В частности, алгебра D содержится в ядре точечного дифференцирования на B, соответствующей точке $m_0 \in M_A$. А так как каждая точка из ∂K является точкой пика для $A = R(K)$, то $m_0 \in \operatorname{int} K$ (см. [6]). Пусть теперь полином $p \in \mathrm{L}$ не тривиален и равен $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$. Тогда (см. доказательство леммы 2.3) $m_0(a_i) = 0$ для всех i, и следовательно, если $a_i \neq 0$, то найдется такое целое число n_i, что $a_i = (z - z_0)^{n_i} d_i$, где $z_0 = m_0(z)$, $d_i \in A$, $m_0(d_i) \neq 0$, $0 \leqslant i \leqslant k$. Пусть $n = \min(n_0, \cdots, n_k)$. Тогда

$$c_i = \frac{a_i}{(z-z_0)^n} \in A, \text{ и } c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k \in \mathrm{L}.$$

Из построения c_i следует, что найдется такое j, $0 \leqslant j \leqslant n$, что $m_0(c_j) \neq 0$. А это противоречит условию $m_0 \in \bigcap_{p \in \mathrm{L}} K_p$. Таким образом, $\bigcap_{p \in \mathrm{L}} K_p$ пусто. Поэтому L тривиально. А это и означает, что $r(b) = 1$, т. е. $b \in A$. Теорема доказана.

Замечание. На каждом компактном множестве X, содержащем канторово множество, можно построить целозамкнутую равномерную алгебру, отличную от $C(X)$, а вот сильно целозамкнутую нельзя. Например, если A — равномерная сильно целозамкнутая алгебра на окружнусти T, то $A = C(T)$. Действительно, из сильной целозамкнутости A следует, что каждый максимальный идеал алгебры A, ядро которого содержится в T, является алгебраически замкнутым. Поэтому $A = C(T)$ (см. [10]).

Лемма 3.6. *Пусть нормальная в смысле Шилова равномерная алгебра B является целым расширением равномерной алгебры A. Тогда для любого замкнутого множества $F \subset X$ пространство максимальных идеалов M_{A_F} алгебры A_F совпадает с F.*

Доказательство. Так как пространство максимальных идеалов алгебры $B|_F$, полученной из сужения B на F, совпадает с F, а $B|_F$ — целое расширение алгебры $A|_F$, пространство максимальных идеалов алгебры $A|_F$ совпадает с F. Следовательно, $M_{A_F} = F$. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Пусть A и B удовлетворяют условиям леммы 3.6, тогда A — нормальная алгебра.*

Доказательство. Так как $M_A = X$ (см. лемму 3.6), достаточно показать, что A — регулярная алгебра. Пусть E — замкнутое в X множество. Покажем, что для точки $x_0 \in X \setminus E$ найдется $a \in A$, что $a(x_0) = 1$, $a|_E = 0$. Для этого рассмотрим систему таких открытых окрестностей $\{U_i\}_1^\infty$ точки x_0, что $\overline{U}_{i+1} \subset U_i$ и $E = X \setminus U_1$. Пусть $\{b_i\}_1^\infty$ — набор таких функций, что каждое b_i равно нулю на $X \setminus U_{2i}$ и единице на U_{2i+1}. Рассмотрим $b = \sum_1^\infty \frac{b_i + b_{i+1}}{2^i \|b_i - b_{i+1}\|}$. Очевидно, $b \in B$, $b|_{E_i} = \frac{1}{2^i \|b_i - b_{i+1}\|}$, где $E_i = \overline{U}_{2i+1} \setminus \setminus U_{2(i+1)}$. Так как $b \in B$ — целое над A, найдутся $a_1^0, \cdots, a_n^0 \in A$ такие, что $b^n + a_1^0 b^{n-1} + \cdots + a_n^0 = 0$. Рассмотрим полином $\Lambda(x, \alpha) = \alpha^n + \alpha^{n-1} \cdot a_1^0(x) + \cdots + a_n^0(x)$ с теми же коэффициентами $a_1^0, \cdots, a_n^0$ над полем комплексных чисел. При каждом фиксированном $x \in X$ полином $\Lambda(x, \alpha)$ имеет ровно n корней. Поэтому найдется такое положительное число i, что $\alpha_0 = b|_{E_{i_0}} = \frac{1}{2^i \|b_i - b_{i+1}\|}$ не является корнем полинома $\Lambda(x_0, \alpha)$. Поэтому $a_0 = \Lambda(x, \alpha_0) \in A$ равен нулю на $E_{i_0} = \overline{U}_{2i_0+1} \setminus U_{2i_0+2}$, а в точке $x_0 \in X$ отлично от нуля. Так как множество $F = X \setminus E_{i_0}$ не связано и $M_{A_F} = F$ (см. лемму 3.6), по теореме Шилова об иденпотентах найдется такая последовательность $\{a_n\}_1^\infty \subset A$, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n|_{X\setminus U_{2l_0+1}} = 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n|_{U_{2l_0+2}} = \frac{1}{a(x_0)}.$$

Тогда последовательность $\{a_n \cdot a_0\}$ равномерно сходится на X к некоторому $a \in A$, и $a(x_0) = 1$, $a|_E = 0$. Лемма доказана.

Следствие. (ср. [12]). *Пусть B—нормальная равномерная алгебра, содержащая равномерную алгебру* A. *Предположим, что каждый элемент из B локально принадлежит алгебре A, тогда $A = B$.*

Доказательство. Так как каждый элемент из B локально принадлежит алгебре A, для любого $b \in B$ найдутся такие $a_1, \cdots, a_n \in A$, что $\prod_1^n (b - a_i) = 0$, т. е. B является целым расширением алгебры A. Следовательно, A — нормальная алгебра. Но каждая нормальная алгебра является локальной. Поэтому $A = B$.

Следующую лемму можно доказать точно так же, как предыдущую, предварительно заметив, что нормальность является инвариантом при изоморфизме.

Лемма 3.8. *Пусть равномерная алгебра B является полиномиальным расширением равномерной алгебры A. Если B—нормальная алгебра, A—также нормальна.*

Равномерная алгебра A на компакте X называется *максимальной*, если любая замкнутая подалгебра B алгебры $C(X)$, содержащая A, совпадает либо с A, либо с $C(X)$.

Теорема 3.9. *Максимальная алгебра целозамкнута.*

Доказательство. Пусть A—максимальная алгебра. Тогда, как хорошо известно (см., например, [13]), A не может быть нормальной алгеброй. Поэтому, если B является целым расширением алгебры A, то в силу леммы 3.7, $B \neq C(X)$. Следовательно, $B = A$.

Теорема 3.10. *Пусть $C(X)$—полиномиальное расширение равномерной алгебры A. Тогда $A = C(M_A)$.*

Доказательство. Не теряя общности можно предположить, что для некоторого $b \in C(X)$ справедливо равенство $A_0[b] = C(X)$, где $A_0 = \Phi_A^{C(X)}(A)$ (см. определение 1.2). Покажем, что для каждой точки $x_0 \in X$ найдется такая замкнутая окрестность E, что $b_E \in A_0|_E$. Действительно, пусть $r(b) = n$. Тогда $C(X) = A_0 + bA_0 + \cdots + b^{n-1}A_0$. Если I—максимальный идеал алгебры A_0, ядро которого содержит фиксированную точку $x_0 \in X$, алгебра $J = I + bI + \cdots + bI^{n-1}$ является идеалом конечной коразмерности в $C(X)$. Поэтому hull J—ядро идеала J—конечен и, следовательно, $x_0 =$ hull J. Пусть E_1 — некоторая замкнутая окрестность точки x_0, не содержащая остальные точки множества hull J. Тогда $J|_{E_1}$ является максимальным идеалом алгебры $C(E)$. Поэтому сужение алгебры $A_0 + bI + \cdots + b^{n-1} I$ на E_1 совпадает с $C(E_1)$, следовательно, найдутся $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2} \in I$, $a_{n-1} \in A$, что для точек из E справедливо равенство

$$b^{n-1} = a_1 b^{n-1} + \cdots + a_{n-1}. \tag{3.2}$$

Так как A—нормальная алгебра (см. лемму 3.8), существует такая замкнутая окрестность E_2 точки x_0, содержащаяся в E_1, и такой элемент $a \in A$, что $\Phi_A^{C(X)}(a)|_{E_2} = \frac{1}{1-a_1}$. Таким образом, умножив обе части равенства (3.2) на $\Phi_A^{C(X)}(a)$, получим, что найдутся такие $c_1, \cdots, c_{n-3} \in I$, $c_{n-2} \in A_0$, что для точек из множества E_2 справедливо равенство

$$b^{n-1} = c_1 b^{n-2} + \cdots + c_{n-2}.$$

Продолжая этот процесс, получим, что для точки $x_0 \in X$ найдется такая замкнутая окрестность E, что $b|_E \in A_0|_E$. Следовательно, $A_0|_E = C(E)$. Таким образом, для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность E, что $A_0|_E = C(X)$. Поэтому $A_0 = C(M_{A_0})$. А так как A изоморфна A_0, то $A = C(M_A)$. Теорема доказана.

Пусть равномерная алгебра B является целым расширением равномерной алгебры A. Для каждого $b \in B$ через N_b обозначим множество точек из X, для каждой из которых существует окрестность, на которой функция $b \in B$ аппроксимируется функциями из A. Из определения N_b следует, что N_b— открытое множество. Покажем, что $\overline{N_b} = X$. Допустим противное. Пусть $a(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ такой унитарный полином от x над A, что $a(b) = 0$. Через $a^{(k)}(x)$ обозначим формальную производную порядка k от $a(x)$ по x. Если теперь V—некоторое открытое множество в $X \setminus N_b$, найдется такое k_0, $0 \leqslant k_0 \leqslant n-1$, что $a^{(k_0)}(b)|_V = 0$, а $a^{(k_0+1)}(b)|_V \neq 0$. Поэтому, по теореме о неявной функции для банаховых алгебр (см. [7], стр. 119) для некоторой точки $x \in X$ найдется такая окрестность U, что b на V аппроксимируется функциями из A. Отсюда $U \subset N_b$. Полученное противоречие показывает, что $\overline{N_b} = X$.

Теорема 3.11. *Пусть $C(X)$—целое расширение равномерной алгебры A. Предположим, что найдутся такие $b_1, \cdots, b_n \in C(X)$, что равномерная алгебра, порожденная функциями из A и $b_1, \cdots, b_n$ совпадает с $C(X)$. Тогда $A = C(X)$.*

Доказательство. Не теряя общности, можно предположить, что A антисимметрическая алгебра. Покажем, что X состоит из одной точки. Пусть $b_1, \cdots, b_n$ — элементы, фигурирующие в условии теоремы и $N_{b_1}, \cdots, N_{b_n}$ — вышеопределенные множества. Из построения N_{b_i} видно, что $N = \bigcap_1^n N_{b_i}$ не пусто. Допустим, что X неодноточечно. Тогда, поскольку N—открытое в X множество, а A — нормальная равномерная алгебра (см. лемму 3.6), найдется такое открытое множество W, $\overline{W} \subset N$, и $a \in A$, $a \neq 0$, что $a|_{X \setminus W} = 0$. Так как на N каждая функция b_i локально аппроксимируется функциями из A, $b_i|_{\overline{W}} \in A|_{\overline{W}}$ (см. [13]), $1 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, $A_{\overline{W}} = C(\overline{W})$, и поэтому существует последовательность $\{a_n\} \subset A$, сходящаяся на $\overline{W}$

к $\bar{a}$. Следовательно, последовательность $\{a_n a\}$ фундаментальна в A и сходится к $|a|^2 = \mathrm{const}$. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

§ 4. Дифференцирование в коммутативных банаховых алгебрах

Как уже отмечалось в § 2, если A — подалгебра коразмерности 1 алгебры B, то либо A совпадает с ядром некоторого точечного дифференцирования, либо найдутся $m_1, m_2 \in M_B$, $m_1 \neq m_2$ такие, что $A = \{b \in B;\ b(m_1) = b(m_2)\}$. Близкий результат можно получить и для полиномиальных расширений А коразмерности 1.

Пусть B — коммутативная банахова алгебра с единицей.

Определение 4.1. *Непрерывное нетривиальное линейное отображение* D *из* B *в некоторую коммутативную банахову алгебру назовем дифференцированием на* B, *если существует такой непрерывный гомоморфизм* φ *из* B *в* C, *что для любых* $a, b \in B$

$$\mathrm{D}(ab) = \varphi(a)\mathrm{D}(b) + \varphi(b)\mathrm{D}(a).$$

Данное определение является обобщением точечного дифференцирования.

Дадим несколько примеров таких дифференцирований.

1) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, и B — расширение Аренса-Гофмана алгебры A с помощью $\alpha(x) = x^2$. Тогда $B = A + Ax$. Рассмотрим два оператора φ и D из B в A, $\varphi(a_1 + a_2) = a_1$, $D(a_1 + a_2) = a_2$. Поскольку $x^2 = 0$, $x \in B$, можно показать, что φ — гомоморфизм, а D — дифференцирование:

$$\mathrm{D}(ab) = \varphi(a)\mathrm{D}(b) + \varphi(b)\mathrm{D}(a).$$

2) Пусть I — максимальный идеал алгебры A из примера 1). Тогда алгебра $B_0 = A + Ix$ будет замкнутой подалгеброй коразмерности 1 в B и сужение D на $\bar{B}$ — также есть дифференцирование.

3) Пусть $C^1[0, 1]$ — банахова алгебра непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой: $\|f\| = \sup\limits_x |f| + \sup\limits_x |f'|$, $f \in C^1[0,1]$. Тогда отображение D: $C^1[0,1] \to C[0,1]$, задаваемое $\mathrm{D}(f) = f'$, является дифференцированием на $C^1[0,1]$.

Приведенные примеры интересны тем, что в примере 1) A является полиномиальным расширением ядра оператора D, в примере 2) B — полиномиальное расширение ядра дифференцирования D тогда и только тогда, когда I — конечномерный A-модуль. В третьем же примере $A = \mathrm{Ker}\, D$ состоит из констант, и $C^1[0, 1]$ не является полиномиальным расширением A. Таким образом, существование дифференцирования D — еще не гарантия того, что B — полиномиальное расширение $\mathrm{Ker}\, \mathrm{D}$.

Под полиномиальным расширением в этом параграфе мы будем понимать самое простое полиномиальное расширение, т. е. полиномиальное расширение вида $B = A + dA$, где d является расширением некоторого унитарного полинома второго порядка с коэффициентами из A.

Пусть $B = A + dA$. Обозначим через $I = \{a \in A;\ aB \subset A\}$. Очевидно, I — идеал в B. Пусть $B_0 = B/I$, $A_0 = A/I$.

Лемма 4.2. 1) *B_0 — полиномиальное расширение алгебры A_0. 2) Найдется такое $b_0 \in B_0$, что $b_0^2 = a_0 \in A_0$, $B_0 = A_0 + b_0A_0$ и $A_0 \cap b_0A = \{0\}$. 3) Если $a \in A_0$ такое, что $a \cdot b_0 = A_0$, то $a = 0$.*

Доказательство. Что B_0 является полиномиальным расширением алгебры A_0 — очевидно. Пусть $d \in B_0$ такое, что $A_0 + d_0A_0 = B_0$. Тогда $b_0^2 = a_1d_0 + a_2$, $a_1a_2 \in A_0$. Следовательно, $\left(d_0 - \frac{1}{2}a_1\right)^2 = \frac{1}{4}a_1^2 + a_2$. Положим $b_0 = d_0 - \frac{1}{2}a_1$, $a_0 = \frac{1}{4}a_1^2 + a_2$. Пусть теперь $a \in A_0 \cap b_0A_0$. Так как $a = b_0 \cdot c$, $aB_0 \subset aA_0 + b_0^2 \cdot c \cdot A_0 \subset A_0$, из построения алгебр A_0 и B_0 следует $a = 0$. Отметим, что утверждение 3) эквивалентно 2). Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть на коммутативной банаховой алгебре B с единицей есть нетривиальное дифференцирование D. Для того, чтобы B было полиномиальным расширением $A = \operatorname{Ker}\mathrm{D}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое дифференцирование D_0 из B в некоторую банахову алгебру C, что*

1) $A = \operatorname{Ker}\mathrm{D}_0$,

2) $\mathrm{D}_0(B) = \varphi_0(B)$, *где φ_0 — гомоморфизм, соответствующий* D_0,

3) *существует такое $b_0 \in B$, что $\mathrm{D}_0(b_0) = e$, $\varphi_0(b_0) = 0$, e — единица алгебры* C.

Доказательство. Достаточность. Из условия 3) и определения дифференцирования следует, что для любого $d \in B$, $\mathrm{D}_0(b_0d) = \varphi_0(d)$. Так как $\mathrm{D}_0(B) = \varphi_0(B)$ (условие 2), для $d \in B$ найдется $b \in B$ такое, что $\mathrm{D}_0(d) = \varphi_0(b) = \mathrm{D}_0(b_0 \cdot b)$. Отсюда $\mathrm{D}(d - b_0b) = 0$. Следовательно, каждый элемент $d \in B$ можно представить в виде $d = a + b_0b$, где $a \in A = \operatorname{Ker}\mathrm{D}$, $b \in B$. Применив теперь снова условие 3), получим $\varphi(d) = \varphi(a)$. Таким образом, для каждого $d \in B$ существует $a \in A$ такое что $\varphi(d) = \varphi(a)$. Отсюда $\mathrm{D}_0(B) = \varphi_0(A)$. Следовательно, для каждого $d \in B$ найдется $a \in A$, что $\mathrm{D}_0(d) = \varphi_0(a) = \mathrm{D}_0(b_0a)$. Поэтому $\mathrm{D}(d - b_0a) = 0$, а это и означает, что $B = A + b_0A$.

Необходимость. Предположим, что B — полиномиальное расширение алгебры A. Так как $I = \{a \in A;\ a \cdot B \subset A\}$ — идеал алгебры B, содержащийся в A и фактор-алгебра $B_0 = B/I$ является полиномиальным расширением алгебры $A_0 = A/I$, дифференцирование D на B порождает некоторое новое дифференцирование на B_0. Это дифференцирование строится следующим образом.

Пусть φ — соответствующий гомоморфизм, участвующий в разложении D. Тогда $\mathrm{D}(ab) = \varphi(a)\mathrm{D}(b)$, $a \in A$, $b \in B$, и $\mathrm{D}(ab) = 0$, если $a \in I$. Следовательно, $\varphi(I)$ — идеал банаховой алгебры, порожденной элементами из $\varphi(B)$ и $\mathrm{D}(B)$, которую обозначим через C. Пусть $C_0 = C/J$, где $J = \overline{\varphi(I)}$, и Ψ — канонический гомоморфизм из C на C_0. Тогда легко проверить, что $\varphi_1 = \Psi \circ \varphi$ — гомоморфизм, а $\mathrm{D}_1 = \Psi \circ \mathrm{D}$ — дифференцирование из B_0 в C_0, и $\mathrm{D}_1(ab) = \varphi_1(a)\mathrm{D}_1(b) + \varphi_1(b)\mathrm{D}(a)$. Поскольку $B_0 = A_0 + b_0A_0$ и $b_0^2 = a_0 \in A_0$ (см. лемму 4.2), с одной стороны $\mathrm{D}_1(b_0^2) = 0$, а с другой — $\mathrm{D}_1(b_0^2) = \varphi_1(b_0) \cdot \mathrm{D}_1(b_0)$. Поэтому $\mathrm{D}_1(b_0^3) = \varphi_1(b_0^2)\mathrm{D}_1(b_0) = 0$. Таким образом, $b_0^3 \in A_0$, но $b_0^3 = a_0 \cdot b_0$. Следовательно, $a_0=0$ (см. лемму 4.2). Определим теперь дифференцирование на B. Для этого сперва определим дифференцирование D_2 на B_0; $D_2(a_1+b_0a_2)=a_2$, $\varphi_2(a_1+b_0a_2))=a_1$. Поскольку $b_0^2=0$, то D_2—дифференцирование и $D_2(b_0)=e$—единица алгебры A_0, $\varphi_2(b_0)=0$, $D_2(B_0)=$ $=\varphi_2(B_0)$. Пусть Ψ—канонический гомоморфизм из B на B_0. Тогда $D_0=D_2\circ\Psi$— дифференцирование на B, и $\varphi_0=\varphi_2\circ\Psi$ — соответствующий ей гомоморфизм. Лемма доказана.

При доказательстве леммы 4.3 было показано, что если на B есть некоторое дифференцирование, ядро которого совпадает с A, то это дифференцирование можно распространить на алгебру B_0, и обратно — каждое дифференцирование на B_0 с ядром A_0 расширяется до некоторого дифференцирования на B, ядро которого есть A. Более того, хотя B, вообще говоря, не является расширением Аренса-Гофмана алгебры A, B_0 — расширение Аренса-Гофмана. Поэтому для простоты изложения, если не оговорено противное, в дальнейшем в этом параграфе, мы будем предполагать, что B — расширение Аренса-Гофмана алгебры A с помощью некоторого унитарного полинома $\alpha(x)=x^2—a_0$. Таким образом

$$B=A+xA\,,\ x^2=a_0. \tag{4.2}$$

Лемма 4.4. (см. [1]). *Пусть π_A^B — естественная проекция из M_B в M_A. Тогда*

1) $\pi_A^B(M_B)=M_A$.

2) *для всякого $m\in M_A$, $(\pi_A^B)^{-1}(m)$ состоит из двух точек тогда и только тогда, когда $m(a_0)\neq0$, где a_0 удовлетворяет равенству* (4.2) $x^2=a_0$. *В противном случае $(\pi_A^B)^{-1}(m)=m$.*

Лемма 4.5. *Предположим, что A — полупростая алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $M_A=M_B$;

2) *существует дифференцирование на B с ядром A.*

Доказательство. Так как $B=A+xA$ и $x^2=a_0$, то из $M_A=M_B$ и леммы 4.4 следует $m(a_0)=0$ для всех $m\in M_A$. А поскольку A полупростая, $a_0=0$. Тогде $D(a_1+ax_2)=a_2$ есть дифференцирование. Обратное следует из леммы 4.2.

Элемент $a\in A$ называется делителем нуля, если существует такой $b\in A$, $b\neq0$, что $ab=0$.

Лемма 4.6. *Предположим, что a_0 из (4.2) не является делителем нуля в полупростой алгебре A. Тогда существуют два непрерывных гомоморфизма Φ_1 и Φ_2 из B в некоторую полупростую алгебру C такие, что $A=\{b\in B;\ \Phi_1(b)=\Phi_2(b)\}$.*

Доказательство. Поскольку A — полупростая алгебра, $x^2=a_0$ и a_0 не является делителем нуля в A, то B— полупростая алгебра. Действительно, пусть $b=a_1+xa_2$— обобщенный нильпотентный элемент в B. Так как $m(b)=0$ для всех $m\in M_B$, то воспользовавшись леммой 4.4, можно показать, что $m(a_1)=0$ для всех $m\in M_A$, а поскольку A—полупростая, $a_1\equiv0$. Умножив теперь b на x, получим $bx=a_0\cdot a_2\in A$. Из нильпотентности b и полупростоты алгебры A следует, что $a_0 \cdot a_2=0$. А так как a_0 не является делителем нуля в A, то $a_2=0$. Таким образом, $b=0$. Следовательно, B—полупростая алгебра.

Пусть C—алгебра всех ограниченных, не обязательно непрерывных, функций на M_A. Построим два гомоморфизма из B в C: Φ_1 и Φ_2. Напомним, что для каждого $m \in M_A$, card $(\pi_A^B)^{-1}(m) < 2$. Поэтому, если $(\pi_A^B)^{-1}(m)=m$, положим $\Phi_1(b)(m)=\Phi_2(b)(m)=b(m)$, если же $(\pi_A^B)^{-1}(m)=(m_1, m_2)$, то положим $\Phi_1(b)(m)=b(m_1)$, $\Phi_2(b)(m)=b(m_2)$. Очевидно, Φ_1 и Φ_2— два гомоморфизма из B в C и если $a \in A$, $\Phi_1(a)= =\Phi_2(a)$. Пусть теперь $b \in B$ такое, что $\Phi_1(b)=\Phi_2(b)$. Тогда, если $b=a_1+xa_2$, то $m(b)=m(a_1)$ для всех $m \in M_B$. А так как B — полупростая алгебра, $b=a_1$. Лемма доказана.

Замечание. Отметим, что, вообще говоря, гомоморфизмы Φ_1 и Φ_2 определяются неоднозначно. Наряду с теми гомоморфизмами, которые были построены здесь, могут существовать и другие гомоморфизмы из B в другую алгебру, отличную от C, при которых лемма 4.6 остается справедливой.

Лемма 4.7. *Предположим, что $a_0 \neq 0$ является делителем нуля в полупростой алгебре A. Тогда существуют два гомоморфизма Φ_1 и Φ_2 из B в некоторую алгебру C и дифференцирование* D *из* $B_0=\{b \in B;$ $\Phi_1(b)=\Phi_2(b)\}$ в A, *такие, что* $\mathrm{Ker}\, D=A$.

Доказательство. Пусть C — алгебра, построенная в лемме 4.6 и Φ_1 и Φ_2 — соответствующие гомоморфизмы. Поскольку A — полупростая алгебра, для каждого $b \in B_0=\{b \in B;$ $\Phi_1(b)=\Phi_2(b)\}$, $b=a_1+xa_2$, справедливо равенство $m(xa_2)=0$ для всех $m \in M_B$. Следовательно, $x^2 \cdot a_2=a_0 \cdot a_2=0$. Поэтому $a_2 \in J=\{a \in A;$ $a_0 \cdot a=0\}$. Отсюда $B_0=A+xJ$. Определим на B_0 два оператора — D и φ: $D(a_1+xa_2)=a_2$, $\varphi(a_1+ +xa_2)=a_1$. Можно проверить, что $D(b_1 \cdot b_2)=\varphi(b_1)D(b_2)+\varphi(b_2)D(b_1)$, $b_1, b_2 \in B_0$. Лемма доказана.

Из лемм 4.2—4.7 непосредственно следует

Теорема 4.8. *Пусть алгебра B является нетривиальным полиномиальным (не обязательно Аренса-Гофмана) расширением алгебры A, и $I=\{a \in A;$ $aB \subset A\}$. Предположим, что $A_0=A/I$ — полупростая алгебра. Тогда справедливо одно из следующих утверждений*:

1) *существует дифференцирование из B на A_0, ядро которого совпадает с A;*

2) *существуют два таких гомоморфизма Φ_1 и Φ_2, $\Phi_1 \neq \Phi_2$, из B в C — алгебру ограниченных функций на M_{A_0}, что $A=\{a \in B;$ $\Phi_1(b)=\Phi_2(b)\}$;*

3) *существуют два гомоморфизма Φ_1 и Φ_2, $\Phi_1 \neq \Phi_2$, из B в алгебру C и нетривиальное дифференцирование* D *из* $B_0=\{b \in B;$ $\Phi_1(b)=\Phi_2(b)$ *в* A_0 *такое, что* $\mathrm{Ker}\, D=A$.

Заметим, что утверждение о подалгебрах коразмерности 1 (см. начало данного параграфа) является следствием вышеизложенной теоремы. Действительно, пусть A — подалгебра коразмерности 1 в B, имеющая с B общую единицу и $I=\{a \in A;$ $aB \subset B\}$ — максимальный идеал алгебры

A и, следовательно, A и B удовлетворяют условию теоремы 4.8. Поэтому для этих алгебр справедливо одно из трех утверждений этой теоремы.

Сразу отметим, что третье утверждение теоремы в данном случае не имеет места, так как, если бы оно выполнялось, то из включения $A \subset B_0 \subset B$ (см. теорему 4.8) следовало бы, что $\dim B/A \geqslant 2$. Поэтому либо A совпадает с ядром некоторого дифференцирования D из B на A_0, а так как A_0 изоморфна полю комплексных чисел, D—точечное дифференцирование, либо существуют два таких гомоморфизма Φ_1 и Φ_2 из B в алгебру $C(M_{A_0})$—ограниченных функций на M_A, что $A = \{b \in B;\ \Phi_1(b) = \Phi_2(b)\}$. Поскольку M_{A_0} одноточечно, $C(M_{A_0}) = \mathbf{C}$ — полю комплексных чисел и, следовательно, Φ_1 и Φ_2 — мультипликативные функционалы на B.

Отметим, что следствие теоремы 4.8 является также следствием основного результата работы [14].

В заключение приведем несколько нерешенных задач.

1. Пусть K — плоский компакт. В § 3 было показано, что если каждая точка из ∂K есть точка пика для $R(K)$, то $R(K)$ — полиномиально замкнутая алгебра. Доказать, что $R(K)$ — всегда полиномиально замкнутая алгебра.

2. Пусть каждый элемент из $C(X)$ является целым над равномерной алгеброй A на компакте X. Верно ли, что $A = C(X)$?

3. Как хорошо известно, если A — такая равномерная алгебра на X, что $M_A = X$ и каждая точка из X является точкой пика для A, любое точечное дифференцирование на A тривиально. Поэтому каждое дифференцирование из такой алгебры A в полупростую банахову алгебру C тривиально. Можно также показать, воспользовавшись тем, что $C(X)$ — единственная аменабельная равномерная алгебра на X (см. [5], стр. 245, [16]), что каждое дифференцирование из $C(X)$ в любую (необязательно полупростую) банахову алгебру тривиально. Из вышесказанного естественно возникает вопрос: найти необходимое и достаточное условие, при котором каждое дифференцирование на равномерной алгебре тривиально.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5. VII. 1983
и 23. VIII. 1984

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Տեղափոխելի բանախյան հանրահաշիվների բազմանդամային լայնացումները. *(ամփոփում)*

Հոդվածում ներմուծվում է բազմանդամային լայնացման գաղափարը, որի մասնավոր դեպքն է հանդիսանում Արենս-Հոֆմանի լայնացումը։ Հայտնաբերվում է բազմանդամային լայնացումների և կետային դիֆերենցումները ընդհանրացնող դիֆերենցումների միջև եղած կապը։ Ձևակերպվում են մի քանի չլուծված խնդիրներ։

S. A. GRIGORIAN. *Polynomial expansions of commutative Banach algebras* (summary)

In the paper the notion of polynomial expansion is introduced of which the Avense—Hoffman expansion is a particular case. A connection between polynomial expansions and a certain generalization of the point differentation is established. Some unsolved problems are formulated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R Arens and K. Hoffman*. Algebraic extensions of normed algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 7, 1956, 203—210
2. *С. А. Григорян*. О полиномиальных расширениях коммутативных банаховых алгебр, УМН, 39, № 1, 1984.
3. *У. Рудин*. Функциональный анализ, «Мир», 1975.
4. *С. Ленг*. Алгебра, «Мир», 1968.
5. *Е. А. Горин*. Подалгебры конечной коразмерности, Матем. заметки, 6, № 3, 1969, 321—328.
6. *P.J. Cohen*. A note on constructive methods in Banach algebras, P.A.M.S. 12, 1961, 159—163.
7. *Т. Гамелин*. Равномерные алгебры, «Мир», 1975.
8. *М. И. Караханян*. О некоторых алгебраических характеристиках алгебры всех непрерывных функций на локально связном компакте, Матем. сб., 107, № 3, 1978, 416—434.
9. *I. Glitsberg*. Maximal algebras and a theorem of Rado, P J.M., 14, 1964, 919—941.
10. *Е. А. Горин, М. И. Караханян*. О некоторых характеристических свойствах алгебры всех непрерывных функций на локально связном компакте, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XI, № 3, 1976, 237—255.
11. *J. A. Lindberg*. Integrall extensions of commutative Banach algebras, Can. J. Math., vol. XXV, 4, 1973, 679—686.
12. *J. Rainwater*. A remark on regular Banach algebras, P.A.M.S, 18, 1967, 255—256.
13. *С. А. Григорян*. О некоторых свойствах локально аппроксимативных алгебр, Уч. записки ЕрГУ, № 1, 1974, 3—10.
14. *В. Г. Нармания*. О подалгебрах С-коразмерности 1. Сообщения АН ГССР, 91, № 2, 1978, 553—555.
15. *F. F. Bonsall, J. Duncan*. Complete Normed Algebras, 1973.
16. *М. В. Шейнберг*. Об одной характеристике алгебры $C(\Omega)$ в терминах когомологий, УМН, XXXII, № 5, 203—204.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 2, 1985 Математика

УДК 517.53

А. Г. БАЛАКЯН

МЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ ТИПА L

1. Впервые Лузиным и Приваловым [1] были построены примеры мероморфных в единичном круге функций, равномерно стремящихся к нулю на единичной окружности по области D, которая получается из единичного круга удалением внутренностей некоторой счетной системы внешних друг к другу контуров, заключающих внутри себя все полюсы. Далее, А. А. Гончар [2] обобщил эти примеры Лузина—Привалова, рассмотрев области типа L, которые получаются из единичного круга удалением счетного множества непересекающихся кружков. Им был получен метрический критерий единственности аналитических функций в областях типа L.

В настоящей работе с разных точек зрения изучается вопрос единственности в областях типа L. При изучении этого вопроса основным фактором является связь свойства единственности области D типа L с гармонической мерой $\omega = \omega(z, \Gamma_0, D)$ единичной окружности Γ_0 относительно D: если $\omega > 0$, то область D обладает свойством единственности (это сразу вытекает из теоремы о двух константах). Отметим, что вышеуказанный критерий единственности Гончара также основывается на условии $\omega > 0$.

Итак, все случаи неединственности относятся к таким областям типа L, для которых $\omega = 0$.

Естественно возникает вопрос: существуют ли такие области типа L с условием $\omega = 0$, которые обладали бы свойством единственности.

В этой связи укажем на работу Н. У. Аракеляна и П. М. Готье [3], где приведено описание примера А. А. Гончара области типа L, для которой $\omega = 0$, но тем не менее область обладает свойством единственности.

Этот пример наталкивает на задачу получения метрических критериев единственности для областей типа L при условии $\omega = 0$.

Настоящая работа посвящена изучению этой задачи. Основным результатом является теорема 2.1, изложенная в параграфе 2, где приведены достаточно обозримые метрические критерии единственности.

Основная трудность получения таких критериев связана с необходимостью установления двусторонних оценок гармонических мер единичной окружности относительно конечносвязанных областей, аппроксимирующих область D, с учетом того, что указанные гармонические меры стремятся к нулю.

Отметим еще, что метод доказательства теоремы 2.1 принципиально отличается от метода построения вышеуказанного примера единственности Гончара, основанного на понятии квазианалитичности Данжуа-Карлемана и опирается на другую идею «предельного» использования теоремы о двух константах*.

Для полноты изложения в параграфе 1 настоящей работы мы приводим подробное доказательство некоторых результатов о единственности, относящихся к случаю $\omega > 0$, которые были без доказательства сформулированы А. А. Гончаром в работе [2]. Они естественным образом предшествуют результатам § 2.

2°. Введем обозначения: $K(a, r) = \{z;\ |z-a| < r\}$,

$$\Gamma(a, r) = \{z;\ |z-a| = r\},\quad K(a, r_1, r_2) = \{z;\ r_1 < |z-a| < r_2\}$$

и

$$K_0 = K(0, 1),\ \Gamma_0 = \Gamma(0, 1).$$

Пусть $\{z_j\}_1^\infty$ — некоторая последовательность точек из K_0, такая, что $|z_j| \to 1$, при $j \to \infty$ и $\{z_j\}' = \Gamma_0$. Пусть, далее, $\{\rho_j\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел, таких, что замкнутые кружки $\overline{K}(z_j, \rho_j)$ лежат в K_0 и попарно не пересекаются. Обозначим $K_j = K(z_j, \rho_j)$ и $\Gamma_j = \Gamma(z_j, \rho_j)$.

Определение 1. Областью типа L называется бесконечносвязная область вида

$$D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty) = K_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{K}_j.$$

Кружки K_j, $j = 1, 2, \ldots$, назовем *исключительными* кружками области D.

В течение всего изложения нам понадобится понятие гармонической меры $\omega(z, E, D)$ некоторого граничного множества E относительно области D в точке z.

Пусть $H(D)$ — класс голоморфных в D функций, а $H_B(D)$ — класс голоморфных и ограниченных в D функций. Очевидно $H_B(D) \subset H(D)$.

Евклидово расстояние между точкой z и множеством E обозначим через $d(z, E)$.

Определение 2. Пусть $D \subset \mathbf{C}$ — область, $E \subset \partial D$. Скажем, что D обладает свойством H-единственности (соответственно H_B-единственности) относительно множества E, если из условий $f \in H(D)$ (соответственно, $f \in H_B(D)$) и

$$\lim_{d(z, E) \to 0} f(z) = 0 \qquad (*)$$

следует, что $f \equiv 0$.

Очевидно, свойство H-единственности D относительно E более сильное, чем свойство H_B-единственности D относительно E.

Впредь, рассматривая H-(или H_B)-единственность области D типа L, будем предполагать, что $E = \Gamma_0$, поэтому слова «относительно Γ_0» будем опускать.

Лемма 1. *Пусть D и D_1 являются областями типа L с конечным числом несовпадающих исключительных кружков. Тогда эти области об-*

---

* А. А. Гончар любезно сообщил автору, что эта общая идея была высказана Л. Карлесоном во время их научной беседы.

ладают (не обладают) свойством H-(или H_B)-единственности одновременно.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда D_1 получается из D удалением одного кружка из множества исключительных кружков, т. е. если $D=D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty)$, то $D_1=D(\{z_j, \rho_j\}_2^\infty)$ и доказать, что свойство H-(или H_B)-единственности области D_1 влечет это же свойство для области D.

Для этого, в свою очередь, достаточно доказать следующее утверждение: всякую функцию $f\in H(D)$ можно представить в виде

$$f(z)=f_1(z)\cdot f_2(z), \text{ для } z\in D, \tag{1}$$

где $f_1\in H(D_1)$, $f_2\in H(\mathbf{C}\setminus K_1)$ и f_2 не имеет нулей вне некоторой окрестности кружка K_1.

Действительно, предположим, что область D_1 обладает свойством H-единственности, и пусть функция $f\in H(D)$ удовлетворяет условию ($*$). Тогда из представления (1) следует, что функция $f_1\in H(D_1)$ также удовлетворяет условию ($*$). Следовательно, имеем, что $f_1(z)\equiv 0$, для $z\in D_1$, поэтому ввиду (1) получим, $f(z)\equiv 0$ для $z\in D_1$, откуда $f\equiv 0$, т. е. область D обладает свойством H-единственности.

Если в факторизации (1) дополнительно предположить, что $f\in H_B(D)$, то ввиду отсутствия нулей у функции f_2 вне некоторой окрестности K_1, мы сразу получаем, что $f_1\in H_B(D)$, что приводит к доказательству леммы в случае H_B-единственности.

Переходя к доказательству сформулированного утверждения, выберем окружность $\gamma=\Gamma(z_1, \rho)$, $\rho>\rho_1$, отделяющую кружок K_1 от остальных кружков K_j, $j=2, 3,\cdots$ и так, чтобы функция f не имела нулей на γ

Пусть $\mathrm{Ind}_{f(\gamma)}(0)=m$. Тогда в достаточно малой окрестности γ—в кольце вида $K(z_1, \tau_1, \tau_2)$ $(\rho_1<\tau_1<\rho<\tau_2)$, можно выделить однозначную ветвь аналитической функции

$$\Phi(z)=\log[f(z)(z-z_1)^{-m}].$$

Из лоранового разложения функции Φ в $K(z_1, \tau_1, \tau_2)$ имеем представление $\Phi(z)=\varphi_1(z)+\varphi_2(z)$ для $z\in K(z_1, \tau_1, \tau_2)$, где $\varphi_1\in H(K(z_1, \tau_2))$ и $\varphi_2\in H(\mathbf{C}\setminus K(z_1, \tau_1))$.

Отсюда следует, что

$$f(z)=f_1(z)\cdot f_2(z),\ z\in K(z_1, \tau_1, \tau_2), \tag{2}$$

где положено $f_1=\exp\{\varphi_1(z)\}$, для $z\in K(z_1, \tau_2)$ и $f_2(z)=(z-z_1)^m\times$ $\times\exp\{\varphi_2(z)\}$, для $z\in\mathbf{C}\setminus K(z_1, \tau_1)$.

Записав представление (2) в виде $f_2(z)=\dfrac{f(z)}{f_1(z)}$ для $z\in K(z_1, \tau_1, \tau_2)$ и учитывая, что обе функции f и f_1 голоморфны в кольце $K(z_1, \rho_1, \tau_2)$ и f_1 не имеет там нулей, заключаем, что функция f_2 допускает аналитическое продолжение из области $\mathbf{C}\setminus K(z_1, \tau_1)$ в область $\mathbf{C}\setminus K_1$, т. е. можно считать, что $f_2\in H(\mathbf{C}\setminus K_1)$.

При этом возможные нули функции f_2, очевидно, расположены в кольце $K(z_1, \rho_1 \tau_1)$.

Аналогичным рассуждением показываем, что функция f_1 допускает аналитическое продолжение из круга $K(z_1, \tau_2)$ в область D_1, т. е. $f_1 \in H(D_1)$.

Поскольку все три функции f, f_1, f_2 голоморфны в области D, то из внутренней теоремы единственности следует, что представление (2) верно во всей области D. Лемма доказана.

§ 1. Метрические критерии единственности для областей типа L, основанные на положительности гармонической меры

Следующая теорема в существенном совпадает с признаком единственности А. А. Гончара, сформулированном им в работе [2] без доказательства.

Теорема 1.1. *Пусть* $D = D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty)$ — *область типа* L. *Если*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-|z_j|}{\log \frac{1-|z_j|^2}{\rho_j}} < \infty, \tag{1.1}$$

то область D *обладает свойством* H*-единственности.*

Доказательство. Ввиду лемы 1, не ограничивая общности, можно считать, что удовлетворяются условия

$$|z_j| \geqslant \frac{1}{2}, \ j = 1, 2, \cdots \tag{1.2}$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-|z_j|}{\log \frac{1-|z_j|^2}{\rho_j}} \leqslant \theta < \frac{1}{4} \cdot \tag{1.3}$$

Пусть функция $f \in H(D)$ удовлетворяет условию (*).

Поскольку из условия (*) и из компактности Γ_0 следует, что f ограничена в некоторой окрестности Γ_0, то отсюда вытекает, что функция f будет ограниченной в некоторой области D' типа L, являющейся подобластью D и отличающейся от D только конечным числом исключительных кружков. Следовательно, из леммы 1 имеем, что D и D' одновременно обладают свойством H_B-единственности, поэтому без ограничения общности можно считать, что $f \in H_B(D)$.

Итак, пусть функция $f \in H_B(D)$ удовлетворяет условию (*), докажем, что $f \equiv 0$. Для этой цели воспользуемся теоремой о двух константах, вернее, следующим следствием из этой теоремы.

Пусть $D \subset \mathbf{C}$ — область, $E \subset \partial D$ — замкнутое множество такое, что $\omega(z, E, D) > 0$, для $z \in D$. Тогда если функция $f \in H_B(D)$ удовлетворяет условию (*), то $f \equiv 0$.

Так как $0 \in D$ (ввиду (1.2)) и положительность гармонической меры не зависит от выбора точки z, то нам будет достаточно показать, что из условия (1.3) следует, что

$$\omega(0, \Gamma_0, D) > 0.$$

Полагая $G_j = K_0 \setminus \overline{K}_j$, $\omega_j(z) = \omega(z, \Gamma_j, G_j)$, при $j = 1, 2, \cdots$, рассмотрим функцию $v(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(z)$.

Функция v либо тождественно равна бесконечности, либо гармонична в D (по теореме Гарнака). Во втором случае, очевидно выполняются соотношения

$$\varliminf_{z \to \zeta} v(z) \geqslant 1 \quad \text{для} \quad \zeta \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j, \tag{1.4}$$

$$\varliminf_{z \to \zeta} v(z) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad \zeta \in \Gamma_0. \tag{1.5}$$

Если теперь сопоставим функции $\omega\left(z, \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j, D\right)$ и $v(z)$, то учитывая, что первая из них является обобщенным решением задачи Дирихле [5] с предельными значениями 0 на Γ_0 и 1 на $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$, из (1.4) и (1.5) получаем, что $\omega\left(z, \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j, D\right) \leqslant v(z)$ для $z \in D$, т. е. $\omega(z, \Gamma_0, D) \geqslant 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(z)$ для $z \in D$. В частности, в точке $z=0$ имеем

$$\omega(0, \Gamma_0, D) \geqslant 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(0).$$

Из полученной формулы, ввиду (1.3) заключаем, что теорема будет доказана, если покажем, что имеет место соотношение

$$\omega_j(0) \leqslant 4 \frac{1 - |z_j|}{\log \frac{1 - |z_j|^2}{\rho_j}}. \tag{1.6}$$

Рассмотрим два случая.

а) Пусть сначала

$$\rho_j \leqslant \frac{1 - |z_j|}{2}. \tag{1.7}$$

Область G_j конформно отобразим при помощи функции $w = \frac{z - z_j}{1 - z\bar{z}_j}$ на область G_j', которая представляет единичный круг, с удаленным кружочком, содержащим внутри точку 0. При этом гармоническая мера останется инвариантной.

Далее рассмотрим кольцо $K(0, \rho_j', 1)$, где

$$\rho_j' = \max_{z \in \Gamma_j} \left| \frac{z - z_j}{1 - z\bar{z}_j} \right| = \frac{\rho_j}{1 - |z_j|^2 - |z_j|\rho_j}.$$

Применяя принцип Карлемана расширения области [4] и известную формулу гармонической меры меньшей окружности относительно кольца, получаем

$$\omega_j(z) \leqslant \omega(w, \Gamma(0, \rho_j'), K(0, \rho_j', 1)) = \frac{\log \frac{1}{|w|}}{\log \frac{1}{\rho_j}}.$$

В частности, в точке $z = 0$, с учетом (1.2) имеем

$$\omega_j(0) \leqslant \frac{\log \frac{1}{|z_j|}}{\log \frac{1-|z_j|^2-|z_j|\rho_j}{\rho_j}} \leqslant 2\, \frac{1-|z_j|}{\log \frac{1-|z_j|^2-|z_j|\rho_j}{\rho_j}}. \tag{1.8}$$

Из (1.7) следует, что

$$\left(\frac{1-|z_j|^2-|z_j|\rho_j}{\rho_j}\right)^2 \geqslant \frac{1-|z_j|^2}{\rho_j}.$$

Отсюда и из (1.8) получаем (1.6).

б) Пусть теперь

$$\rho_j > \frac{1-|z_j|}{2}. \tag{1.9}$$

Полагая $G_j^* = K_0 \setminus \overline{K}(z_j, 1-|z_j|)$, из принципа Карлемана расширения области имеем

$$\omega_j(z) \leqslant \omega(z, \Gamma(z_j, 1-|z_j|), G_j^*). \tag{1.10}$$

Далее, область G_j^* конформно отобразим при помощи функции

$$w = \frac{z+1}{2(z-1)} \text{ на полосу } G_j^{**} = \left\{w;\ -\frac{|z_j|}{2(1-|z_j|)} \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant 0\right\}.$$

При этом окружность $\Gamma(z_j, 1-|z_j|)$ переходит в прямую l_j: $\operatorname{Re} w = -\frac{|z_j|}{2(1-|z_j|)}$. Из (1.10) имеем

$$\omega_j(z) \leqslant \omega(w, l_j, G_j^{**}) = -2 \operatorname{Re} w\, \frac{1-|z_j|}{|z_j|}.$$

В частности, для $z = 0$ получаем оценку

$$\omega_j(0) \leqslant \frac{1-|z_j|}{|z_j|}. \tag{1.11}$$

Из (1.11) с учетом (1.9) и (1.2) легко получим (1.6).

Теорема доказана.

Учитывая, что $\log \frac{1-|z_j|^2}{\rho_j} > c > 0$, из теоремы 1.1 вытекает следующая

Теорема 1.2. *Пусть $D=D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty)$—область типа L, такая, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_j|) < \infty. \tag{1.12}$$

Тогда D обладает свойством H-единственности. В частности, если f—мероморфная в K_0 функция, такая, что

$$f(z)\to 0 \quad \text{при} \quad |z|\to 1,\ z\in D,\ \text{то}\ f\equiv 0.$$

Последнее утверждение можно доказать и непосредственно, рассмотрев голоморфную и ограниченную в K_0 функцию

$$F(z)=f(z)\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\bar{z}_j}{|z_j|}\,\frac{z_j-z}{1-z\bar{z}_j}.$$

Второе утверждение теоремы 1.2 означает: если $\{z_j\}_1^\infty$ стремится к единичной окружности достаточно быстро, а именно, со скоростью (1.12), то любая мероморфная функция не может стремиться к нулю при $|z|\to 1$, $z\in D(\{z_j,\rho_j\}_1^\infty)$.

Возникает вопрос, существуют ли последовательности $\{z_j\}_1^\infty$, медленнее стремящиеся к K_0, и нетривиальные мероморфные в K_0 функции, удовлетворяющие условию (*) в $D=D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty)$.

Следующая теорема отвечает на этот вопрос.

Теорема 1.3. *Для любого $\alpha>1$ существует область $D=D(\{z_j,\rho_j\}_1^\infty)$, типа L, такая, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_j|)^\alpha < \infty \tag{1.13}$$

и нетривиальная мероморфная в K_0 функция f (с полюсами, лежащими внутри исключительных кружков области D), удовлетворяющая условию $f(z)\to 0$ при $|z|\to 1$, $z\in D$.

Доказательство этой теоремы может быть проведено при помощи схемы А. А. Гончара, примененной им при получении критерия неединственности [2], если фигурирующие там параметры Δ_j, δ_j, ρ_j, $j=1, 2,\cdots$ выбирать следующим образом:

для произвольного фиксированного $\alpha>1$ положим

$$0<\varepsilon<\alpha-1,\ R_j=1-\frac{1}{e^j},\ \Delta_j=R_{j+1}-R_j=c\,\frac{e-1}{e^{j+1}},$$

$\delta_j=\dfrac{c\,\theta_j}{e^{j(1+\varepsilon)}}$, $\rho_j<\dfrac{\delta_j}{2}$, где c и θ_j определяются из условий $\theta_j\to 1-0$, при $j\to\infty$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\Delta_j=1-R_0$ и $\dfrac{2\pi R_j}{\delta_j}$ — целое число.

§ 2. Метрические критерии единственности для областей типа L в случае, когда Γ_0—гармоническое нульмножество

В этом параграфе будем рассматривать частный класс областей типа L.

Пусть заданы последовательности $\frac{1}{2}<R_1<R_2<\cdots<R_j<\cdots<1$, $R_j\to 1$ при $j\to\infty$, $n_1, n_2,\cdots n_j,\cdots$, где n_j $(j=1,2,\cdots)$—натуральные числа, $\rho_1>\rho_2>\cdots>\rho_j>0$, $\rho_j<\min\left(\frac{R_j}{n_j}, \frac{R_{j+1}-R_j}{2}\right)$.

Пусть каждая из окружностей $\Gamma(0, R_j)$, $j=1, 2,\cdots$ разбита на n_j равных частей и $\zeta_{j,p}$ $(p=1, 2,\cdots, n_j)$—суть точки деления. Обозначим $K_{j,p}=K(\zeta_{j,p}, \rho_j)$, $\Gamma_{j,p}=\Gamma(\zeta_{j,p}, \rho_j)$ и

$$D(\{R_j, n_j, \rho_j\}_1^\infty)=K_0\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{p=1}^{n_j}\overline{K}_{j,p}.$$

Очевидно, область $D(\{R_j, n_j, \rho_j\}_1^\infty)$ является областью типа L.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.1. (*достаточное условие H-единственности*). *Пусть $D=D(\{R_j, n_j, \rho_j\}_1^\infty)$—область типа L, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{R_{j-1}}{R_j}\right)^{n_j}<\infty, \tag{2.1}$$

$$10\, R_j^{n_j\varepsilon_j}<n_j\rho_j=\left(R_j\prod_{k=1}^{j-1}R_k^{n_k}\right)^{A_j}\leqslant\left(\frac{1-R_j}{2}\right)^2, \tag{2.2}$$

где $A_j>1$ и $\varepsilon_j>0$, $j=1, 2,\cdots$, $A_j\uparrow\infty$, $\varepsilon_j\downarrow 0$ при $j\to\infty$. Тогда область D обладает свойством H-единственности.

Отметим, что метрические ограничения, фигурирующие в теореме 2.1, гарантируют выполнение условия $\omega(z, \Gamma_0, D)=0$ (см. лемму 3).

Сначала докажем лемму 2, где рассматриваются конечносвязанные области следующего вида.

Пусть $1/2<R<1$ и n — натуральное число. Окружность $\Gamma(0, R)$ разобьем на n равных частей. Точки деления обозначим через ζ_p, $p=1, 2,\cdots, n$.

Пусть $0<\rho<\frac{R}{n}$, $K_p=K(\zeta_p, \rho)$ и $\Gamma_p=\Gamma(\zeta_p, \rho)$. Рассмотрим область $G=G(R, n, \rho)=K_0\setminus\bigcup_{p=1}^{n}\overline{K}_p$.

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon>0$ и $G=G(R, n, \rho)$.*

Если

$$10\, R^{n\varepsilon}\leqslant n\rho\leqslant R, \tag{2.3}$$

то $\omega(0, \Gamma_0, G)<\varepsilon$.

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что $\zeta_1=R$.

Рассмотрим функцию $u(z)=\log\left|\frac{1-R^n z^n}{z^n-R^n}\right|$, гармоническую в G и удовлетворяющую условию

$$u(z)=0,\ z\in\Gamma_0. \tag{2.4}$$

Если $u\leqslant\Delta$ на $\bigcup_{p=1}^{n}\Gamma_p$, то функция $v=\frac{u}{\Delta}$ будет минорантой для $\omega\left(z,\ \bigcup_{p=1}^{n}\Gamma_p,\ G\right)$. Таким образом, наша ближайшая задача — оценить функцию u сверху на $\bigcup_{p=1}^{n}\Gamma_p$.

Ввиду симметричности функции u относительно окружностей Γ_p, $p=1,2,\cdots,n$, достаточно оценить $u(z)$ на Γ_1, на остальных окружностях Γ_p, $p=2,3,\cdots,n$ будет такая же оценка.

Оценим сначала величину $|z^n-R^n|$ для $z\in\Gamma_1$. Полагая $z=R+w$ имеем, что $|w|=\rho$ и с учетом формулы бинома Ньютона получим:

$$|z^n-R^n|=\left|\sum_{k=1}^{n}C_n^k\,w^k R^{n-k}\right|\geqslant n\rho\,R^{n-1}-\sum_{k=2}^{n}C_n^k\rho^k R^{n-k}.$$

Отсюда с учетом условия $n\rho\leqslant R$ имеем:

$$|z^n-R^n|\geqslant\left(1-\sum_{k=2}^{n}C_n^k\,n^{-k}\right)n\rho\,R^{n-1}>\left[3-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]n\rho\,R^{n-1}>$$
$$\geqslant(3-e)\,n\rho\,R^{n-1}\geqslant0{,}2\,n\rho\,R^n.$$

Так как $|1-R^n z^n|\leqslant2$ при $|z|\leqslant1$, то окончательно имеем

$$u(z)\leqslant\log\frac{10}{n\rho R^n}\quad\text{для}\quad z\in\bigcup_{p=1}^{n}\Gamma_p. \tag{2.5}$$

Полагая $v(z)=u(z)/\log\frac{10}{n\rho R^n}$ с учетом (2.4) и (2.5) получим, что $\omega\left(z,\ \bigcup_{p=1}^{n}\Gamma_p,\ G\right)\geqslant v(z)$ для $z\in G$, откуда

$$\omega(0,\ \Gamma_0,\ G)\leqslant1-v(0)<\log\frac{10}{n\rho}\Big/\log\frac{1}{R^n}<\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Замечание. Отметим, что условие (2.3) равносильно двум условиям

$$n>\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\log(10R^{-1})}{\log R^{-1}}\quad\text{и}\quad\frac{10R^{n\varepsilon}}{n}<\rho<\frac{R}{n}, \tag{2.6}$$

которые прозрачнее показывают как выбрать n и ρ, при заданных R и ε, чтобы обеспечить условие $\omega(0,\ \Gamma_0,\ G)<\varepsilon$.

При помощи доказанной леммы 2 легко установить следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $D=D(\{R_j,\ n_j,\ \rho_j\}_1^\infty)$—область типа L. Если R_j, n_j, ρ_j удовлетворяют условию*

$$10\, R_j^{n_j \varepsilon_j} \leqslant n_j \rho_j \leqslant R_j,\ j=1, 2, \cdots, \tag{2.7}$$

где $\varepsilon_j > 0,\ j=1, 2, \cdots$. *и* $\varepsilon_j \downarrow 0$ *при* $j \to$ *то* ∞

$$\omega\,(0,\ \Gamma_0,\ D) = 0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Полагая $G_j = G\,(R_j,\ n_j,\ \rho_j)$, с учетом леммы 2, для любого $j=1, 2, \cdots$ имеем оценку

$$\omega\,(0,\ \Gamma_0,\ D) \leqslant \omega\,(0,\ \Gamma_0,\ G_j) < \varepsilon_j,$$

откуда ввиду условия $\varepsilon_j \downarrow 0$ при $j \to \infty$ получим (2.8).

Теперь приступим к доказательству теоремы 2.1. Пусть функция $f \in H\,(D)$ удовлетворяет условию (*), надо доказать, что $f \equiv 0$. Достаточно показать, что $f\,(0) = 0$. Как было замечено при доказательстве теоремы 1.1, без ограничения общности можно считать, что $f \in H_B\,(D)$, т. е. положить $|f\,(z)| \leqslant 1,\ z \in D$.

Заметим, что из теоремы Фату и из факта возможности факторизации (в доказательстве леммы 1) следует, что функция f почти везде на $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{p=1}^{n_j} \Gamma_{j,\,p}$ имеет угловые предельные значения, которые обозначим через $f\,(\zeta),\ \zeta \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{p=1}^{n_j} \Gamma_{j,\,p}$, и убедимся, что функция имеет следующее интегральное представление:

$$f\,(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n_j} \int\limits_{\Gamma_{j,\,p}} \frac{f\,(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},\ z \in D. \tag{2.9}$$

Действительно, пусть z—произвольная фиксированная точка области D. Выберем последовательность конечносвязанных, содержащих точку z областей G_k, таких что $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset D$, G_k аппроксимируют D, при $k \to \infty$ и $\partial G_k = \bigcup\limits_{(k)} \Gamma_{j,\,p} \cup l_k$, где $l_k \subset D\,(k = 1, 2, \cdots)$ — концентрические окружности с центром в точке $z = 0$, которые стремятся к Γ_0 при $k \to \infty$.

Представляя функцию f в области G_k (в частности в точке z) интегралом Коши и переходя к пределу, при $k \to \infty$, получаем (2.9), поскольку в этом представлении интеграл по l_k стремится к нулю при $k \to \infty$ (последнее легко получить, учитывая, что из условия (*) имеем $\max\limits_{\zeta \in l_k} |f\,(\zeta)| \to 0$, при $k \to \infty$ и дл. l_k ограничены).

В силу произвольности выбора точки z заключаем, что представление (2.9) справедливо во всей области D.

Обозначим теперь

$$f_m\,(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=1}^{n_j} \int\limits_{\Gamma_{j,\,p}} \frac{f\,(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},\ z \in D, \tag{2.10}$$

$$\varphi_m\,(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n_j} \int\limits_{\Gamma_{j,\,p}} \frac{f\,(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},\ z \in D. \tag{2.11}$$

Имеем

$$f(z)=f_m(z)+\varphi_m(z),\ z\in D. \tag{2.12}$$

Доопределив функцию f на Γ_0: $f(z)=0$, $z\in\Gamma_0$, с учетом (2.12) получаем

$$|f_m(z)|=|\varphi_m(z)|,\ z\in\Gamma_0. \tag{2.13}$$

Оценим $|\varphi_m(z)|$ на Γ_0. Имеем

$$|\varphi_m(z)|\leqslant\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{n_j\rho_j}{1-R_j-\rho_j}\leqslant 2\sum_{j=m+1}^{\infty}(n_j\rho_j)^{1/2}, \tag{2.14}$$

поскольку, согласно (2.2) имеем, что

$$1-R_j-\rho_j>\frac{1-R_j}{2}>(n_j\rho_j)^{1/2}.$$

Чтобы оценить последний ряд, сопоставим два последующих члена ряда. Сначала заметим, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}R_j^{n_j}<\infty, \tag{2.15}$$

так как ввиду (2.2) имеем

$$10\,R_j^{n_j}\leqslant 10R_j^{n_jA_j}\leqslant\left(R_j\prod_{k=1}^{j-1}R_k^{n_k}\right)^{A_j}\leqslant R_{j-1}^{n_{j-1}},\qquad \text{следовательно}$$

$$R_j^{n_j}\leqslant\frac{1}{10}R_{j-1}^{n_{j-1}}\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{1}{10}\right)^{j-1}R_1^{n_1}.$$

Имеем

$$n_{j+1}\rho_{j+1}=\left(R_{j+1}\prod_{k=1}^{j}R_k^{n_k}\right)^{A_{j+1}}\leqslant R_j^{n_j-1}\left(R_j\prod_{k=1}^{j-1}R_k^{n_k}\right)^{A_j}=R_j^{n_j-1}\cdot n_j\rho_j\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}n_j\rho_j, \tag{2.16}$$

поскольку из (2.15) и леммы 1 вытекает, что без ограничения общности можно считать $R_j^{n_j}<\frac{1}{8}$, $j=1,2,\cdots$, следовательно $R_j^{n_j-1}<\frac{1}{4}$, $j=1,2,\cdots$

Из (2.14) ввиду (2.16) имеем

$$|\varphi_m(z)|\leqslant(n_{m+1}\rho_{m+1})^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\leqslant 2\left(\prod_{k=1}^{m}R_k^{n_k}\right)^{\frac{A_{m+1}}{2}},\quad z\in\Gamma_0,$$

следовательно, учитывая (2.13) имеем

$$|f_m(z)|\leqslant 2\left(\prod_{k=1}^{m}R_k^{n_k}\right)^{\frac{A_{m+1}}{2}},\ z\in\Gamma_0. \tag{2.17}$$

Так как $f_m\in H_B(D_1^m)$, где $D_1^m=D(\{R_j,\ n_j,\ \rho_j\}_1^m)$, (можно положить $|f_m(z)|<1$, $z\in D_1^m$), то учитывая (2.17) и применяя теорему о двух константах, получаем

$$\log|f_m(0)| \leqslant \omega(0, \Gamma_0, D_1^m)\left(\log 2 + \frac{A_{m+1}}{2}\log\prod_{k=1}^{m} R_k^{n_k}\right). \tag{2.18}$$

Для оценки $\omega(0, \Gamma_0, D_1^m)$ снизу рассмотрим гармоническую в D_1^m функцию

$$u(z) = \log\prod_{k=1}^{m}\left|\frac{1 - z^{n_k} R_k^{n_k}}{z^{n_k} - R_k^{n_k}}\right|.$$

Очевидно имеем

$$u(z) = 0, \quad z \in \Gamma_0. \tag{2.19}$$

Оценим функцию u на $\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{p=1}^{n_j}\Gamma_{j,p}$. Сначала оценим ее на одной-окружности $\Gamma_{j,p}$. Ввиду симметричности функции u относительно окружностей $\Gamma_{j,p}$, $p=1, 2, \cdots, n_j$, достаточно оценить $u(z)$ на $\Gamma_{j,1}$. Из (2.15) вытекает, что произведение $\prod_{k=1}^{\infty}|1 - z^{n_k} R_k^{n_k}|$ равномерно сходится при $|z| \leqslant 1$, следовательно, в силу леммы 1, без ограничения общности можно считать, что

$$\prod_{k=j}^{m}|1 - z^{n_k} R_k^{n_k}| > \frac{1}{2}, \quad z \in \Gamma_{j,1}. \tag{2.20}$$

Теперь оценим произведение $\prod_{k=j}^{m}|z^{n_k} - R_k^{n_k}|$ на $\Gamma_{j,1}$.

Для первого множителя получаем

$$|z^{n_j} - R_j^{n_j}| \leqslant |z - R_j|(|z|^{n_j-1} + R_j|z|^{n_j-2} + \cdots + R_j^{n_j-1}) \leqslant n_j\rho_j(R_j + \rho_j)^{n_j-1} \leqslant$$

$$\leqslant n_j\rho_j R_j^{n_j-1}\left(1 + \frac{1}{n_j}\right)^{n_j} \leqslant 3\prod_{k=1}^{j} R_k^{n_k}\left(\prod_{k=1}^{j-1} R_k^{n_k}\right)^{A_j-1}.$$

Так как $A_j \uparrow \infty$ при $j \to \infty$, то в силу (2.15), без ограничения общности, можно считать, что $\left(\prod_{k=1}^{j-1} R_k^{n_k}\right)^{A_j-1} \leqslant \frac{1}{48}$, следовательно имеем

$$|z^{n_j} - R_j^{n_j}| \leqslant \frac{1}{16}\prod_{k=1}^{j} R_k^{n_k}, \quad z \in \Gamma_{j,1}. \tag{2.21}$$

Далее

$$|z^{n_{j+1}} - R_{j+1}^{n_{j+1}}| \leqslant (R_j + \rho_j)^{n_{j+1}} + R_{j+1}^{n_{j+1}} \leqslant 2R_{j+1}^{n_{j+1}}, \quad z \in \Gamma_{j,1}. \tag{2.22}$$

И наконец, для множителей $|z^{n_k} - R_k^{n_k}|$, $j+2 \leqslant k \leqslant m$, имеем

$$|z^{n_k} - R_k^{n_k}| \leqslant (R_j + \rho_j)^{n_k} + R_k^{n_k} \leqslant R_k^{n_k}\left(1 + \left(\frac{R_{k-1}}{R_k}\right)^{n_k}\right), \quad z \in \Gamma_{j,1}. \tag{2.23}$$

Поскольку из (2.1) следует сходимость произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \left(\frac{R_{k-1}}{R_k}\right)^{n_k}\right),$$

то без ограничения общности можно считать, что

$$\prod_{k=j+2}^{m}\left(1+\left(\frac{R_{k-1}}{R_k}\right)^{n_k}\right)<2. \tag{2.24}$$

Учитывая все оценки (2.20)—(2.24) и очевидное неравенство

$$\prod_{k=1}^{j-1}\left|\frac{z^{n_k}-R_k^{n_k}}{1-z^{n_k}R_k^{n_k}}\right|\leqslant 1,$$

для точек $z\in\Gamma_{j,1}$ получаем

$$u(z)\geqslant\log\frac{2}{\prod\limits_{k=1}^{m}R_k^{n_k}}. \tag{2.25}$$

Итак оценка (2.25) справедлива на $\bigcup\limits_{p=1}^{n_j}\Gamma_{j,p}$, и поскольку она не зависит от выбора j, то можно утверждать, что (2.25) справедлива для всех точек $z\in\bigcup\limits_{j=1}^{m}\bigcup\limits_{p=1}^{n_j}\Gamma_{j,p}$.

Теперь рассмотрим гармоническую в D_1^m функцию

$$v(z)=\log\prod_{k=1}^{m}\left|\frac{1-z^{n_k}R_k^{n_k}}{z^{n_k}-R_k^{n_k}}\right|\Big/\log\frac{2}{\prod\limits_{k=1}^{m}R_k^{n_k}}.$$

Отсюда, на основании (2.19) и (2.25) имеем

$$v(z)=0 \text{ для } z\in\Gamma_0 \text{ и } v(z)\geqslant 1 \text{ для } z\in\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{p=1}^{n_j}\Gamma_{j,p}.$$

Следовательно получаем оценку

$$\omega\left(z,\ \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{p=1}^{n_j}\Gamma_{j,p},\ D_1^m\right)\leqslant v(z),\quad z\in D_1^m,$$

и равносильную ей другую оценку

$$\omega(z,\ \Gamma_0,\ D_1^m)\geqslant 1-v(z),\quad z\in D_1^m.$$

В частности, в точке $z=0$ имеем

$$\omega(0,\ \Gamma_0,\ D_1^m)\geqslant\log 2\Big/\log\frac{2}{\prod\limits_{k=1}^{m}R_k^{n_k}}.$$

Подставляя эту оценку в (2.18), получаем

$$\log|f_m(0)|\leqslant\left(\log^2 2+\frac{A_{m+1}}{2}\log 2\log\prod_{k=1}^{m}R_k^{n_k}\right)\Big/\log\frac{2}{\prod\limits_{k=1}^{m}R_k^{n_k}}.$$

Переходя к пределу в этом соотношении при $m\to\infty$, ввиду того, что $f_m(0)$ стремится к $f(0)$, а $A_m\uparrow\infty$, получаем $\log|f(0)|=-\infty$, следовательно $f(0)=0$.

Теорема доказана.

Приведем пример области типа L, удовлетворяющей условиям теоремы 2.1, следовательно являющейся областью H-единственности.

Параметры, фигурирующие в теореме 2.1 выберем следующим образом:

$$R_j = e^{-(1/j)} n_j = j^2 e^{j^2}, \ A_j = \sqrt{j}, \quad \varepsilon_j = \frac{1}{\sqrt{j}} \quad \text{и}$$

$$\rho_j = \frac{1}{n_j}\left(R_j \prod_{k=1}^{j-1} R_k^{n_k} \right)^{A_j}.$$

Легко убедиться, что при таком выборе параметров удовлетворяются условия (2.1) и (2.2), следовательно, соответствующая этим параметрам область $D = D(\{R_j, n_j, \rho_j\}_1^\infty)$ обладает свойством H-единственности. Однако этот факт нельзя усмотреть из теоремы 1.1, так как не выполняется условие (1.1).

В заключение приношу глубокую благодарность Н. У. Аракеляну и А. А. Гончару за ценные советы и обсуждения.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 11. VII. 1984

Հ. Գ. ԲԱԼԱԿՅԱՆ Հոլոմորֆ ֆունկցիաների միակության մետրիկական պայմաններ L տիպի անվերջ-կապանի տիրույթներում *(ամփոփում)*

Այս աշխատանքի հիմնական արդյունքը պարագրաֆ 2-ում շարադրված 2.1 թեորեմն է, որտեղ ստացված են L տիպի D տիրույթի միակության հատկության բավարար պայմաններ, երբ միավոր շրջանագծի հարմոնիկ չափը D-ի նկատմամբ 0 է։ Պարագրաֆ 1-ում բերված են միակության և ոչմիակության բավարար պայմաններ, հիմնվելով՝ միավոր շրջանագծի՝ D-ի նկատմամբ հարմոնիկ չափի դրական լինելու վրա։

H. G. BALAKIAN. *The metric criterions of uniqueness of holomorphic functions in infinitely connected regions of L type* (summary)

The main result of this paper is the theorem 2.1, where we obtain sufficient conditions of characteristic uniqueness in domain D of L type, in case the harmonic measure of unique circumference, against D is zero. In § 1 we give sufficient conditions of characteristic uniqueness and non-uniqueness, basing upon positiveness of harmonic measure of circumference against D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М. Л. 1950.
2. *А. А. Гончар.* О примерах неединственности аналитических функций, Вестник МГУ, «Математика, механика», 1964, № 1, 37—44.
3. *N. U. Arakelian and P. M. Gauthier.* On tangential approximation by holomorphic functions, Известия АН Арм. ССР, „Математика“, XVII, № 6, 1982.
4. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
5. *М. Брело.* Основы классической теории потенциала, М., 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XX, № 2, 1985 Математика

УДК 517.5

К. С. КАЗАРЯН

СУММИРУЕМОСТЬ И СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ ОБОБЩЕННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ И ФУРЬЕ—ХААРА

Введение

Если дана некоторая полная ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определенных на множестве E, $|E| > 0$, функций, то для представления функции f, имеющей особенности в некоторых точках, рядом по системе Φ сходящимся в том или ином смысле, целесообразно рассматривать обобщенные ряды Фурье по системе Φ, что означает ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\varphi_n(x)$, где

$$a_n(f) = \int_E f(t)\,[\varphi_n(t) - P(\varphi_n)(t)]\,dt, \tag{0.1}$$

P — линейный оператор, определенный на конечных линейных комбинациях системы Φ. Оператор P определяется в зависимости от системы Φ, множества точек, где функции f имеет особенности, и порядка особенностей в этих точках таким образом, чтобы функции $P(\varphi_n)(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ интерполировали функции $\varphi_n(t)$ в заданных точках с такой кратностью, чтобы интеграл в правой части $(0,1)$ был конечен.

В настоящей работе рассматриваются обобщенные ряды Фурье для тригонометрической системы и системы Хаара. Для тригонометрической системы рассматривается случай, когда число точек интерполирования и кратность в них конечны. Для случая системы Хаара, ввиду кусочно-постоянности функций Хаара, понятие кратности интерполирования теряет смысл. В этом случае благодаря простой конструкции функций Хаара удается рассматривать обобщенные ряды Фурье—Хаара с бесконечным числом точек интерполирования. В § 2 дается описание множеств, для которых мы можем провести такие посторoения для системы Хаара.

В настоящей работе доказывается суммируемость почти всюду методом Абеля—Пуассона обобщенного ряда Фурье функции f к ней. Результаты, касающиеся тригонометрической системы, со всеми необходимыми определениями излагаются в § 1 настоящей работы. Теорема 1 обобщает приводимую ниже теорему Фату для функций, имеющих особенности конечного порядка в конечном числе точек.

Теорема Фату. Пусть $f \in L_{[-\pi, \pi]}$, тогда ряд Фурье этой функции

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(t)\cos nt\,dl, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt,$$

почти всюду методом Абеля—Пуассона суммируется к ней, более того гармоническая функция в единичном круге

$$U_r(f,\ x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n$$

почти всюду сходится к ней по некасательным путям.

Теорема 1 и ее дальнейшие обобщения могут иметь отношение к следующей задаче:

дана произвольная измеримая функция своими значениями, определить коэффициенты тригонометрического ряда, изображающего ее.

В своей монографии «Интеграл и тригонометрический ряд» (см. [1]) Н. Н. Лузин уделил большое внимание этой задаче, называя ее задачей Фурье. Но учитывая, что в приведенной общей формулировке впервые эту задачу изучал Н. Н. Лузин, правомерно будет назвать ее задачей Фурье—Лузина. Имеет смысл рассмотреть аналогичную задачу и для других ортонормированных систем (см. [1], стр. 49—51). Обычно система Хаара больше чем какая-либо другая система доступна изучению. Настоящий случай не является исключением из этого общего правила. Согласно теореме Хаара [2] имеем, что для любой интегрируемой по Лебегу функции ее ряд Фурье—Хаара почти всюду сходится к ней. Не удивительно, что для системы Хаара удается доказать аналоги результатов, справедливых для тригонометрической системы, полагая сходимость почти всюду вместо суммируемости. Более того, для системы Хаара доказываются результаты, аналоги которых в тригонометрическом случае для нас в настоящее время не доступны изучению. Результаты, касающиеся тригонометрической системы и системы Хаара, независимы и формулируются по разному, хотя общая схема их доказательств одинаковая. Поэтому соответствующие определения и обозначения отдельно приводятся в каждом случае.

Ряды с коэффициентами, определяемыми формулами (0.1), в связи с другими вопросами были рассмотрены в ряде работ автора [3], [4], [5] и т. д., в работах В. Ф. Гапошкина [6], [7] и других. Особенно хочется отметить работы А. Ю. Петровича [8], [9] и М. И. Дьяченко [10], в которых рассмотрены обобщенные ряды Фурье для функций, имеющих особенность только в одной точке. В этих работах изучается сходимость рядов в индивидуальных точках, и они стали нам известны, когда рукопись настоящей работы была готова к печати. Поэтому в § 1 не упоминается о поведении обобщенных рядов Фурье в индивидуальных точках, несмотря на то, что подобные результаты сразу получаются применением в доказательстве вместо упомянутой выше теоремы Фату соответствующего классического результата.

Хочется также отметить интересный способ, которым в работе [9] определены обобщенные ряды Фурье для функций, имеющих в одной точке особенность бесконечного порядка. Обобщенные ряды Фурье для функций, имеющих особенности бесконечного порядка, в настоящей работе определены исходя из другого принципа. Для случая тригонометрической системы это приводит к задачам, которые для нас недоступны и по всей видимости очень сложны. Эти задачи представляют также интерес и с точки зрения мультипликативного дополнения неполных систем.

§ 1. Случай тригонометрической системы

Приведем некоторые необходимые определения.

Определение 1. Будем говорить, что измеримая функция $f(x)$ в точке x_0 имеет особенность порядка k $(k = 1, 2, \dots)$ степени q, если существует положительное число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$(x - x_0)^{k-1} f(x) \overline{\in} L^q_{(x_0-\delta_0,\, x_0+\delta_0)};\quad (x-x_0)^k f(x) \in L^q_{(x_0-\delta_0,\, x_0-\delta_0)}.$$

Определение 2. Скажем, что измеримая функция $f(x)$ в точке x_0 имеет особенность бесконечного порядка степени q, если для любых натуральных чисел k $(k = 1, 2, \dots)$ и любого $\delta > 0$

$$(x - x_0)^k f(x) \overline{\in} L^q_{(x_0-\delta,\, x_0+\delta)}.$$

Если $q = 1$, то будем просто говорить, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет особенность порядка k. Замыкание системы функций $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в метрике пространства L будем обозначать $R(\Psi)$.

Определение 3. Если $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая подсистема тригонометрической системы, $E \subset [-\pi, \pi)$ и $\chi_E(x)$ — функция, определенная на множестве E и принимающая ненулевые целочисленные значения и ∞, то пару $\{E, \chi_E(x)\}$ будем называть характеристикой единственности подсистемы $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, если из того, что

$$F \in R(\Phi),\quad F \in L^{\infty}_{[-\pi,\pi]}$$

и функция F^{-1} в каждой точке x_0 множества E имеет особенность порядка $\chi_E(x)$ степени ∞, следует

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\varphi_n(t)\,dt = 0,\quad (n = 1, 2, \dots).$$

Определение 4. Будем говорить, что $\{E, \chi_E(x)\}$ является минимальной характеристикой единственности подсистемы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ относительно полной ортонормированной системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, если для любой функции $\varphi_0(x)$ из системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, ортогональной всем $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ $\{E, \chi_E(x)\}$, являясь характеристикой единственности для подсистемы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, не является характеристикой единственности для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

В настоящем параграфе далее будем предполагать, что на полуинтервале $[-\pi, \pi]$ дан произвольный набор различных точек $x = \{x_j\}_{j=1}^{s}$ и каждой точке x_j из этого набора соответствует некоторое натуральное число α_j, $N = \{\alpha_j\}_{j=1}^{s}$. Обозначая $\Lambda = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j$, для данных $\varkappa$

и N определим набор фундаментальных интерполирующих полиномов $T(x_j, \lambda, x)$ $(1 \leqslant j \leqslant s;\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_j - 1)$ следующим образом. Если $\Lambda = 2N+1$ $(N = 0, 1, \cdots)$, то $T(x_j, \lambda, x)$ — тригонометрический полином самое большее N-го порядка, определяемый из следующих условий:

$$T^{(h)}(x_j, \lambda, x_i) = \delta_{ij} \cdot \delta_{h\lambda}, \tag{1.1}$$

где $T^{(h)}$ означает производную h-го порядка, $T^{(0)} \equiv T$ и δ_{ij} — символ Кронекера. Если $\Lambda = 2N (N = 1, 2), \cdots$, то кроме условий (1.1) на полиномы N-го порядка $T(x_j, \lambda, x)$ $(1 \leqslant j \leqslant s,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_j - 1)$ налагается также условие, чтобы или порядок был строго меньше N или в этих полиномах отношение коэффициента при $\sin Nx$ к коэффициенту при $\cos Nx$ было равно отношению коэффициента при $\cos Nx$ к коэффициенту при $\sin Nx$ со знаком минус тригонометрического полинома

$$\omega(x) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} \sin^{\alpha_j} \frac{x - x_j}{2}. \tag{1.2}$$

Когда в $\omega(x)$ коэффициент при $\cos Nx$ или при $\sin Nx$ равен нулю, то в полиномах $T(x_j, \lambda, x)$ коэффициенты соответственно при $\sin Nx$ или $\cos Nx$ должны быть равными нулю. Для случая, когда $\Lambda = 2N$, это условие налагается, чтобы полиномы $T(x_j, \lambda, x)$ были единственными.

Доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть* $x = \{x_j\}_{j=1}^{s}$ — *совокупность различных точек на полуинтервале* $[-\pi, \pi)$, $\mathrm{N} = \{\alpha_j\}_{j=1}^{s}$ — *набор натуральных чисел и* f — *измеримая функция, которая в каждой точке* x_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ *имеет особенность порядка* α_j *и в других точках не имеет особенностей. Пусть, далее,* $\Lambda = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j$ *и* K_Λ — *целая часть числа* $\Lambda/2$. *Тогда ряд* $\sum_{n=k_\Lambda+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, *где*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\cos nt - \sum_{j=1}^{s} \sum_{\lambda_j=0}^{\alpha_j-1} \frac{d^{\lambda_j}}{dt^{\lambda_j}} \cos nt \,\Big|_{t=x_j} \cdot T(x_j \lambda_j, t) \right] dt, \tag{1.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\sin nt - \sum_{j=1}^{s} \sum_{\lambda_j=0}^{\alpha_j-1} \frac{d^{\lambda_j}}{dt^{\lambda_j}} \sin nt \,\Big|_{t=x_j} T(x_j, \lambda_j, t) \right] dt, \tag{1.4}$$

методом Абеля—Пуассона почти всюду суммируется к данной функции f, *более того, гармоническая в единичном круге функция*

$$U_r(f, x) = \sum_{n=k_\Lambda+1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n \tag{1.5}$$

почти всюду сходится к f *по некасательным путям.*

Для доказательства теоремы 1 докажем две леммы, соответственно для случаев четного и нечетного Λ. Сначала приведем некоторые обозначения. Обозначим

$$\xi_r(x)=1-2r\cos x+r^2;\quad P_r(x)=(1-r^2)\,\xi_r^{-1}(x)=1/2+\sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu}\cos\nu x,$$

где $P_r(x)$ — ядро Пуассона,

$$P_{x,N,r}(x,t)=P_r(x-t)-\sum_{j=1}^{s}\sum_{\lambda_j=0}^{\alpha_j-1} P_r^{(\lambda_j)}(x_j-t)\,T(x_j,\lambda_j,x), \tag{1.6}$$

$$B_{rj}(x,t)=P_r(x-t)\,T(x_j,0,x)-\sum_{\lambda_j=0}^{\alpha_j-1} P_r^{(\lambda_j)}(x_j-t)\,T(x_j,\lambda_j,x), \tag{1.7}$$

где $P_r^{(\lambda)}(\xi)=\dfrac{d^{\lambda}}{d\xi^{\lambda}}P_r(\xi)$, $P_r^{(0)}(\xi)=P_r(\xi)$. Используем равенство

$$\textstyle\sum_{j=1}^{s} T(x_j,0,x)\equiv 1, \tag{1.8}$$

которое при $\Lambda=2N+1$ сразу следует из теоремы о единственности интерполяции тригонометрическими полиномами, а при $\Lambda=2N$ нужно также заметить, что согласно дополнительному условию, наложенному на многочлены $T(x_j,\lambda,x)$,

$$\textstyle\sum_{j=1}^{s} T(x_j,0,x)-1$$

не может совпадать с полиномами вида $C\,\omega(x)$. Из (1.6) — (1.8) получаем

$$P_{x,N,r}=\sum_{j=1}^{s} B_{rj}(x,t). \tag{1.9}$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\Lambda=2N+1$ $(N=0,1,\cdots)$, *тогда для любого* $j\,(1\leqslant j\leqslant s)$ *имеет место равенство*

$$B_{rj}(x,t)=P_r(x-t)\,\omega(x)\left[G_r'(t)\sin\frac{x-x_j}{2}+G_r''(t)\cos\frac{x-x_j}{2}\right], \tag{1.10}$$

где

$$G_r'(t)=P_1(\xi_r^{-1}(t-x_j),\ r,\ \sin(t-x_j),\ \cos(t-x_j)),$$

$$G_r''(t)=P_2(\xi_r^{-1}(t-x_j),\ r,\ \sin(t-x_j),\ \cos(t-x_j))$$

и $P_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$, $P_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ — *многочлены от переменных* ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4.

Лемма 2. *Пусть* $\Lambda=2N$ $(N=1,2,\cdots)$, *тогда для любого* $j\,(1\leqslant j<s)$ *имеет место равенство*

$$B_{rj}(x,t)=P_r(x-t)\,\omega(x)\,[G_r'(t)\sin(x-x_j)+G_r''(t)\cos(x-x_j)+G_r'''(t)], \tag{1.11}$$

где

$$G_r'(t)=P_1(\xi_r^{-1}(t-x_j),\ r,\ \sin(t-x_j),\ \cos(t-x_j)),$$

$$G_r''(t)=P_2(\xi_r^{-1}(t-x_j),\ r,\ \sin(t-x_j),\ \cos(t-x_j)),$$

$$G_r'''(t)=P_3(\xi_r^{-1}(t-x_j),\ r,\ \sin(t-x_j),\ \cos(i-x_j))$$

и $P_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ $(i=1,2,3)$ — *полиномы от переменных* $\xi_k(k=1,2,3,4)$..

Доказательство леммы 1. Обозначим

$$T_{rj}(x, t) = (x_j, 0, x) - P_r^{-1}(x-t)\sum_{\lambda=0}^{\alpha_j-1} P_r^{(\lambda)}(x_j - t)\, T(x_j, \lambda, x). \quad (1.12)$$

Очевидно, что для фиксированных t и r $T_{rj}(x, t)$ по x является тригонометрическим полиномом $N+1$-го порядка и в точках x_i $(1 \leqslant i \leqslant s, i \neq j)$ имеет нули порядка α_i. Покажем, что $T_{rj}(x, t)$ в точке $x = x_j$ имеет нуль порядка α_j. Из определения $T_{rj}(x, t)$ сразу следует, что $T_{rj}(x_j, t) = 0$. Предполагая, что для неотрицательного целого числа k $(0 \leqslant k < \alpha_j - 1)$ $\frac{d^\nu}{dx^\nu} T_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = 0$ $(0 \leqslant \nu \leqslant k)$, покажем, что

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} T_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = 0.$$

Из нашего предположения получаем

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} B_{rj}(x, t)\Big|_{x=x_j} = \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{\nu}{k+1} P_r^{(\nu)}(x_j - t) \frac{d^{k+1-\nu}}{dx^{k+1-\nu}} T_{rj}(x, t)\Big|_{x=x_j} =$$

$$= P_r(x_j - t) \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} T_{rj}(x, t)\Big|_{x=x_j}.$$

Откуда, ввиду того, что $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} B_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = 0$ $(0 \leqslant k < \alpha_j - 1)$ и $P_r(x_j - t) \neq 0$ $(0 < r < 1)$ получаем $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} T_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = 0$. Следовательно, показано, что

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} T_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = 0 \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \alpha_j - 1). \quad (1.13)$$

Отсюда очевидно следует, что сумма

$$T_{rj}(x, t) + P_r^{-1}(x-t)\, P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j - t)\, T(x_j, \alpha_j - 1, x)$$

при фиксированных t и r в точках x_i $(1 \leqslant i \leqslant s, i \neq j)$ имеет нули порядка α_i, а в точке x_j нуль порядка $\alpha_j - 1$ и является тригонометрическим полиномом $N+1$-го порядка.

Следовательно

$$T_{rj}(x, t) + P_r^{-1}(x-t)\, P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j - t)\, T(x_j, \alpha_j - 1, x) =$$

$$= \omega_j'(x) \sin^{\alpha_j - 1}\frac{x - x_j}{2} L_{rj}(x, t), \quad (1.14)$$

где

$$\omega_j'(x) = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant s \\ k \neq j}} \sin^{\alpha_k}\frac{x - x_k}{2}, \quad (1.15)$$

$$L_{rj}(x, t) = \beta_{r1}(t) + \beta_{r2}(t)\cos(x - x_j) + \beta_{r3}(t)\sin(x - x_j) \quad (1.16)$$

и функции $\beta_{r1}(t)$, $\beta_{r2}(t)$, $\beta_{r3}(t)$ являются многочленами от четырех переменных $\xi_r^{-1}(t - x)$, r, $\sin(t - x_j)$, $\cos(t - x_j)$. Последнее утверждение сразу получаем приравнивая, для фиксированных r, t, коэффициенты при старших членах и свободные члены многочленов, стоящих в обеих частях равенства (1.14). В равенстве (1.14), подставляя

$$T(x_j, \alpha_j - 1, x) = b_j \omega_j'(x) \sin^{\alpha_j - 1} \frac{x - x_j}{2},$$

где b_j — константа, определяемая из условия $T^{(\alpha_j - 1)}(x_j, \alpha_j - 1, x_j) = 1$, получаем

$$T_{rj}(x, t) = \omega_j'(x) \sin^{\alpha_j - 1} \frac{x - x_j}{2} \left[L_{rj}(x, t) - b_j P_r^{-1}(x - t) P^{(\alpha_j - 1)}(x_j - t) \right]. \tag{1.17}$$

Очевидными тригонометрическими преобразованиями из условия (1.16) получаем

$$L_{rj}(x, t) - b_j P_r^{-1}(x - t) P^{(\alpha_j - 1)}(x_j - t) = \beta_{r1}(t) -$$
$$- b_j \frac{1 + r^2}{1 - r^2} P_r^{(\alpha_j - 1)}(x_j - t) + \cos(x - x_j) \left[\beta_{r2}(t) + \right.$$
$$\left. + 2 b_j \frac{r}{1 - r^2} P_r^{(\alpha_j - 1)}(x_j - t) \cos(t - x_j) \right] + \sin(x - x_j) \left[\beta_{r3}(t) + \right.$$
$$\left. + 2 b_j \frac{r}{1 - r^2} P_r^{(\alpha_j - 1)}(x_j - t) \sin(t - x_j) \right]. \tag{1.18}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\beta_{r1}(t) - b_j \frac{1 + r^2}{1 - r^2} P_r^{(\alpha_j - 1)}(x_j - t) =$$
$$\left[\beta_{r2}(t) + = 2 b_j \frac{r}{1 - r^2} P_r^{(\alpha_j - 1)}(x_j - t) \cos(t - x_j) \right], \tag{1.19}$$

так как из условия (1.13) $\frac{d^{\alpha_j - 1}}{dx^{\alpha_j - 1}} T_{rj}(x, t)|_{x = x_j} = 0$ и из (1.17) получаем $L_{rj}(x, t) - b_j P_r^{-1}(x - t) P_r^{(\alpha_j - 1)}(x_j - t) = 0$.

Из соотношений (1.18) и (1.19) следует

$$L_{rj}(x, t) - b_j P_r^{-1}(x - t) P^{(\alpha_j - 1)}(x_j - t) =$$
$$= -2 \sin^2 \frac{x - x_j}{2} \left[\beta_{r2}(t) + 2 b_j \frac{r}{1 - r^2} P_r^{(\alpha_j - 1)}(x_j - t) \cos(t - x_j) \right] =$$
$$= \sin(x - x_j) \left[\beta_{r3}(t) + 2 b_j \frac{r}{1 - r^2} P_r^{(\alpha_j - 1)}(x_j - t) \sin(t - x_j) \right],$$

откуда немедленно получаем требования леммы 1, учитывая утверждение, касающееся функций $\beta_{r1}(t)$, $\beta_{r2}(t)$, $\beta_{r3}(t)$.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 1. Как и там получаем тождество (1.14), где уже

$$L_{rj}(x,\ t)=\beta_{r1}(t)\cos\frac{x-x_j}{2}+\beta_{r2}(t)\sin\frac{x-x_j}{2}+$$
$$+\beta_{r3}(t)\cos 3/2\,(x-x_j)+\beta_{r4}(t)\sin 3/2\,(x-x_j),$$

и для функций $\beta_{rl}(t)$ ($l=1, 2, 3, 4$) справедливо подобное утверждение. Следующее различие, на которое следует обратить внимание, это то, что при $\Lambda=2N$

$$T(0,\ \alpha_j-1,\ x)=b_j\omega_j'(x)\sin^{\alpha_j-1}\frac{x-x_j}{2}\cos\frac{x-x_j}{2}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что тригонометрический многочлен, определенный условием (1.20), удовлетворяет условиям (1.1), а также дополнительному условию, налагаемому при $\Lambda=2N$. Учитывая эти различия и следуя схеме доказательства леммы 1 получаем утверждение леммы 2, где уже

$$G_r'(t)=-2\beta_{r3}(t)-b_j\frac{2r}{1-r^2}P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j-t)\cos(t-x_j),$$

$$G_r''(t)=2\beta_{r4}(t)+b_j\frac{2r}{1-r^2}P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j-t)\sin(t-x_j),$$

$$G_r'''(t)=\beta_{r2}(t)+\beta_{r4}(t)+b_j\frac{2r}{1-r^2}P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j-t)\sin(t-x_j).$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим следующее ядро:

$$P_{r,N}(x)=P_r(x)-1/2-\sum_{\nu=1}^{N}r^\nu\cos\nu x. \tag{1.21}$$

Из условий (1.3)—(1.5) и (1.21) легко получаем, что

$$U_r(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[P_{r,k_\Lambda}(t-x)-\sum_{j=1}^{s}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_j-1}P_r^{(\lambda_j)}(x_j-x)\ T(x_j,\lambda_j,t)\right]dt. \tag{1.22}$$

Убедимся в справедливости тождества

$$P_r(t-x)-\sum_{j=1}^{s}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_j-1}P_r^{(\lambda_j)}(x_j-x)\ T(x_j,\lambda_j,t)\equiv$$

$$\equiv P_{rk_\Lambda}(t-x)-\sum_{j=1}^{s}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_j-1}P_{rk_\Lambda}^{(\lambda_j)}(x_j-x)\ T(x_j,\lambda_j,t). \tag{1.23}$$

Действительно, учитывая тождество (1.8), получаем

$$1/2+\sum_{\nu=1}^{k_\Lambda}r^\nu\cos\nu(t-x)-\sum_{j=1}^{s}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_j-1}\frac{d^{\lambda_j}}{dt^{\lambda_j}}\left[1/2+\sum_{\nu=1}^{k_\Lambda}r^\nu\cos\nu(t-x)\right]\Bigg|_{t=x_j}\times$$

$$\times T(x_j, \lambda_j, t) = 1/2 - 1/2\sum_{j=1}^{s} T(x_j, 0, t) + \sum_{\nu=1}^{k_\Lambda} r^\nu \Bigg[\cos\nu(t-x) -$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_j-1}\frac{d^{\lambda_j}}{dt^{\lambda_j}}\cos\nu(t-x)\Big|_{t=x_j}\cdot T(x_j, \lambda_j, t)\Bigg] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k_\Lambda} r^\nu\Bigg[\cos\nu(t-x) - \sum_{j=1}^{s}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_j-1}\frac{d^{\lambda_j}}{dt^{\lambda_j}}\cos(t-x)\Big|_{t=x_j} T(x_j, \lambda_j, t)\Bigg] \equiv 0.$$

Последнее тождество следует из теоремы о единственности интерполирующего полинома. Когда $\Lambda = 2N + 1$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$) ввиду того, что левая часть этого тождества является полиномом N-ой степени, имеющим нули в точках x_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ соответственно порядка α_j $(\sum_{j=1}^{s}\alpha_j = \Lambda)$. Если $\Lambda = 2N$ ($N = 1, 2, \cdots$), то нужно также учесть, что согласно условию, налагаемому в этом случае на полиномы $T(x_j, \lambda_j, t)$ $(0 \leqslant \lambda_j \leqslant \alpha_j - 1$, $1 \leqslant j \leqslant s)$, левая часть последнего тождества не может совпадать с полиномами вида $C\omega(x)$, где

$$\omega(x) = \prod_{1\leqslant j\leqslant s}\sin^{\alpha_j}\frac{x-x_j}{2}$$

и C — некоторая постоянная. Таким образом, тождество (1.23) доказано. Из условий (1.21)—(1.23) сразу получаем

$$U_r(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Bigg[P_r(t-x) - \sum_{j=1}^{s}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_j-1} P^{(\lambda_j)}(x_j - x)\, T(x_j, \lambda_j, t)\Bigg]dt.$$

Отсюда, из условий (1.6), (1.7), (1.9), лемм 1, 2 и теоремы Фату, ввиду того, что $f \in L_{[-\pi, \pi]}(|\omega|\,dx)$, легко следует сходимость почти всюду по некасательным путям функции $U_r(f, x)$. Для завершения доказательства теоремы 1 нам остается убедится, что $U_r(f, x)$ сходится к функции $f(x)$.

Сначала рассмотрим случай $\Lambda = 2N+1$ ($N = 0, 1, 2, \cdots$). Применяя теорему 1 работы [4] легко убеждаемся, что система $\{\omega(x)\cos nx, \omega(x)\sin nx\}_{n=k_\Lambda}^{\infty}$, где $\omega(x)$ определяется условием (1.2), замкнута и минимальна в пространстве $L_{[-\pi, \pi]}$, откуда сразу следует, что система $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k_\Lambda+1}^{\infty}$ замкнута и минимальна в весовом пространстве $L_{[-\pi, \pi]}(|\omega(x)|\,dx)$. Следовательно, во-первых, конечные линейные комбинации системы $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k_\Lambda+1}^{\infty}$ всюду плотны в пространстве $L_{[-\pi, \pi]}(|\omega(x)|\,dx)$ и, во-вторых, для произвольной такой линейной конечной комбинации $l(x)$, гармоническая функция $U_r(l, x)$ сходится к $f(x)$ по всем некасательным путям. Поэтому, учитывая, что в теореме 1 функция f принадлежит пространству $L_{[-\pi, \pi]}(|\omega(x)|\,dx)$ из Принципа Банаха ([11], см. также [12], стр. 1—3), выводим, что $U_r(f, x)$ почти всюду по некасательным путям сходится к $f(x)$.

Для случая $\Lambda = 2N$ ($N = 1, 2, \ldots$) рассуждения аналогичны. В этом случае уже нужно показать, что система

$$\{\lambda_N \cos Nx + \eta_N \sin Nx,\ \cos(N+1)x,\ \sin(N+1)x, \cdots\},$$

где $\lambda_N^2 + \eta_N^2 = 1$ и η_N/λ_N равно отношению коэффициента при $\sin\ Nx$ к коэффициенту при $\cos\ Nx$ тригонометрического полинома $\omega(x)$, является замкнутой и минимальной в пространстве $L_{[-\pi,\pi]}(|\omega(x)|\,dx)$. Для этого теорему 1 работы [4] применяем к системе

$$\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos(N-1)x, \sin(N-1)x, \eta_N \cos Nx -$$
$$-\lambda_N \sin Nx,\ \lambda_N \cos Nx + \eta_N \sin Nx, \cdots\}.$$

Теорема 1 доказана.

Дальнейшее продвижение в этом вопросе, на наш взгляд, связано со следующей задачей, которая на сегодняшний день кажется недоступной.

Задача 1. Описать все те бесконечные подсистемы тригонометрической системы, которые имеют минимальные характеристики единственности (см. опред. 4), и для каждой такой подсистемы описать все минимальные характеристики единственности.

К сожалению ни для одной бесконечной подсистемы тригонометрической системы мы не можем доказать существование минимальной характеристики единственности. Можно рассмотреть также вопросы в некотором смысле обратные к поставленной задаче. Взяв некоторую пару $\{E, \chi_E(x)\}$ (см. определение 3), найти подсистему, для которой эта пара является минимальной характеристикой единственности. Для случая, когда функция $\chi_E(x)$ в некоторой точке принимает значение ∞ или сумма значений $\chi_E(x)$ не ограничена, ответ на этот вопрос открыт.

§ 2. Случай системы Хаара

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (см. [13], с. 54—55)

$$\chi_0^{(0)}(x) \equiv 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\chi_k^{(j)}(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{если } \dfrac{2j-2}{2^{k+1}} < x < \dfrac{2j-1}{2^{k+1}} \\ -2^{k/2}, & \text{если } \dfrac{2j-1}{2^{k+1}} < x < \dfrac{2j}{2^{k+1}} \\ 0, & \text{если } x \in\!\!\!\!/ \left[\dfrac{j-1}{2^k}, \dfrac{j}{2^k}\right], \end{cases}$$

где для каждого $k=0, 1, 2, \cdots$ индекс j пробегает значения $1, 2, \cdots, 2^k$. Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, упорядоченная обычным образом: $\chi_0^{(0)}(x) = \chi_1(x)$, а при

$$n = 2^k + j\,(k=0, 1, 2, \cdots;\ j=1, 2, \cdots, 2^k),\ \chi_k^{(j)}(x) = \chi_n(x).$$

Изучая обсуждаемый вопрос для системы Хаара будем считать, что каждая двоично-рациональная точка ν на интервале $[0, 1]$ «расщеплена» на две различные точки $\nu_л$ и $\nu_п$, характеризующиеся тем, что для любых $a < \nu < b$

$$\nu_з \in (a, \nu], \ \nu_з \overline{\in} [\nu, b) \text{ и } \nu_п \in [\nu, b), \ \nu_п \overline{\in} (a, \nu].$$

Поэтому говоря об окрестностях точек $\nu_з$ и $\nu_п$ соответственно подразумеваются интервалы вида (a, ν) и (ν, b). Необходимость такой договоренности диктуется тем, что в двоично-рациональных точках некоторые функции Хаара разрывны. Значения функций Хаара $\chi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ в точках $\nu_з$ и $\nu_п$ определяются следующим образом:

$$\chi_n(\nu_з) = \lim_{a \to \nu-} \chi_n(a); \ \chi_n(\nu_п) = \lim_{b \to \nu+} \nu_п(b).$$

Интервалами Хаара будем называть замкнутые сегменты, являющиеся замыканиями носителей функций Хаара. Изучая вопрос для системы Хаара и говоря, что некоторая функция $f(x)$ в точке $\nu_з$ или $\nu_п$ имеет особенность, соответственно, понимаем, что

$$\int_a^\nu |f(x)|\,dx = +\infty; \ \int_\nu^b |f(x)|\,dx = +\infty.$$

Так как функции Хаара кусочно-постоянны, то говорить о порядке особенности в настоящем параграфе нет нужды. Учитывая вышесказанное, для подсистем системы Хаара, как и в случае тригонометрической системы, определяются характеристика единственности и минимальная характеристика единственности. Очевидно, что в этих случаях функцию $\chi_E(x)$ можем считать характеристической функцией множества E. Через $\Delta_п$ будем обозначать множество $\{x : \chi_n(x) \neq 0\}$. Замкнутое множество точек $E \subset [0, 1]$ будем называть разряженным по Хаару, если существуют такие непересекающиеся интервалы Хаара, что в каждую из них попадает самое большее одна точка из множества E и объединение этих интервалов имеет меру, равную единице.

Пусть γ равно мощности множества E, т. е. $\gamma = \infty$, если E — счетное множество и $\gamma = N$, если E состоит из N точек. Определим некоторую подсистему системы Хаара $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, для которой пара $\{E, \chi_E(x)\}$ является минимальной характеристикой единственности. Пусть $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ состоит из следующих функций Хаара:

функции Хаара, тождественно равной единице и всех тех и только тех функций Хаара, замыкание левых и правых половин которых содержат хотя бы одну точку из множества E. Подсистему $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, выбранную указанным образом, будем называть аннулирующейся подсистемой Хаара множества E.

Лемма 3. $\{E, \chi_E(x)\}$ *является характеристикой единственности для* $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\gamma}$ — *аннулирующейся подсистемы Хаара множества* E (E — *множество, разряженное по Хаару*).

Доказательство. Возьмем произвольную функцию

$$f \in R\,[\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\gamma}] \text{ и } f \in L^{\infty}_{[0,1]}.$$

Из предположения, касающегося множества E и выбора подсистемы $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\gamma}$ очевидно, что f — ступенчатая функция. Ряд Фурье—Хаара функции f очевидно почти всюду сходится к f, и согласно лемме Шаудера [14] его частичные суммы на интервалах постоянства Δ_n

равны $1/|\Delta_n| \int\limits_{\Delta_n} f(t)\,dt$, откуда следует, что если $|f(x)| \leqslant M$ почти всюду, то

$$\left|\sum_{l=1}^{N} a_{n_l} \chi_{n_l}(x)\right| < M, \tag{2.1}$$

где

$$a_{n_l} = \int_0^1 f(t) \chi_{n_l}(t)\,dt. \tag{2.2}$$

Предположим, что функция f^{-1} в каждой точке множества E имеет особенность. Покажем, что в этом случае все коэффициенты a_{n_l} определяемые условием (2.2), равны нулю. Для этого докажем следующее

Утверждение. *Если для некоторой функции Хаара $\chi_{n_{l_0}}(x)$ из подсистемы $\{\chi_{n_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ множество $E \cap \Delta_{n_{l_0}}$ имеет самое большее одну точку сгущения, то коэффициент Фурье—Хаара $a_{n_{l_0}}$ функции f равен нулю, $a_{n_{l_0}} = 0$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда множество $E \cap \Delta_{n_{l_0}}$ состоит из конечного числа точек. В этом случае, согласно выбору аннулирующейся подсистемы Хаара множества $E - \{\chi_{n_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$, получаем, что из этой подсистемы только конечное число функций Хаара на $\Delta_{n_{l_0}}$ принимают ненулевые значения. Выберем среди таких функций функцию Хаара $\chi_{n_{l_1}}(x)$ с наибольшим индексом. Ввиду того, что как в левой, так и в правой половинах $\Delta_{n_{l_1}}$ есть хотя бы одна точка из E и функция f равна нулю в этих точках, получаем $a_{n_{l_1}} = 0$.

Предположим теперь, что $E \cap \Delta_{n_{l_0}}$ состоит из счетного числа точек, которые имеют только одну точку сгущения. Пусть

$$\sum_{|\Delta_{n_l}| > |\Delta_{n_{l_0}}|} a_{n_l} \chi_{n_l}(x) = c_0 \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{n_{l_0}}. \tag{2.3}$$

Если $c_0 = 0$, то сразу получаем $a_{n_{l_0}} = 0$. Пусть $c_0 \neq 0$. Очевидно, что в левой или в правой половине $\Delta_{n_{l_0}}$ находится только конечное число точек из E. Обозначим этот интервал Хаара через $\Delta'_{n_{l_0}}$. Точно таким же образом, как и выше выводим, что коэффициенты всех тех функций Хаара из $\{\chi_{n_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$, носители которых лежат в этой половине, равны нулю. Следовательно

$$\sum_{|\Delta_{n_l}| > |\Delta_{n_{l_0}}|} a_{n_l} \chi_{n_l}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Delta'_{n_{l_0}}.$$

Отсюда и из (2.3) получаем, что

$$\sum_{|\Delta_{n_l}| > |\Delta_{n_{l_0}}|} a_{n_l} \chi_{n_l}(x) = 2c_0, \quad x \in \Delta_{n_{l_0}} \setminus \Delta'_{n_{l_0}}. \tag{2.4}$$

Из подсистемы $\{\chi_{n_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ выберем ту функцию Хаара с наименьшим индексом, носитель которой лежит в $\Delta_{n_{l_0}} \setminus \Delta'_{n_{l_0}}$. Точно таким же образом, как и выше получаем, что сумма

$$\sum_{|\Delta_{n_l}| > |\Delta_{n_{l_1}}|} a_{n_l} \chi_{n_l}(x)$$

на одной половине $\Delta_{n_{l_1}}$ равна нулю, а на другой $- 2^2 c_0$. Повторяя эти рассуждения k раз, получаем, что на одной из половин интервала $\Delta_{n_{l_k}}$ сумма $\sum\limits_{|\Delta_{n_l}| > |\Delta_{n_{l_k}}|} a_{n_l} \chi_{n_l}(x)$ равна $2^{k+1} c_0$. Выбирая k довольно большим, приходим к противоречию с условием (2.1). Следовательно, $c_0 = 0$ и тем самим $a_{n_{l_0}} = 0$. Утверждение доказано.

Перейдем к доказательству леммы 3. Если $\gamma < \infty$, то очевидно, что лемма 3 сразу вытекает из доказанного выше утверждения. Поэтому предположим, что $\gamma = \infty$. Так как множество E разряжено по Хаару, то можно найти такое разбиение $\{\Delta^{\nu}\}_{\nu \in I(E)}$ отрезка $[0, 1]$, которое обладает следующими свойствами: Δ^{ν} — интервалы Хаара, которые не пересекаются и $\bigcup\limits_{\nu \in I(E)} \Delta^{\nu} = [0, 1]$, для любого $\nu \in I(E)$ множество $\Delta^{\nu} \cap E$ имеет самое большее одну точку сгущения и любой интервал Хаара Δ, содержащий Δ^{ν} $(\Delta \supset \Delta^{\nu})$, содержит по крайней мере две точки сгущения множества E.

Такое разбиение будем называть S_E-разбиением отрезка $[0, 1]$. Очевидно оно определяется единственным образом. Определим замкнутое множество $E_1 \subset E$ следующим образом:

для каждого $\nu \in I(E)$ в интервале Δ^{ν} берем самое большее одну точку x_{ν}, следуя правилу: x_{ν} является точкой сгущения множества $E \cap \Delta^{\nu}$, если такая точка существует; является одной из точек $E \cap \Delta^{\nu}$, если оно состоит из конечного числа точек, и наконец, если $E \cap \Delta^{\nu}$ — пустое множество, то мы не выбираем какую либо точку. Замыкание выбранного множества обозначим E_1. Если S_E-разбиение отрезка $[0,1]$ состоит только из $[0,1]$, то $E_1 = \varnothing$.

Очевидно, что множество $E_1 \subset E$ разряжено по Хаару. Если множество E_1 не пусто, то возьмем S_{E_1}-разбиение отрезка $[0,1]$ и аналогичным образом построим множество E_2. Для каждого натурального числа n по индукции точно таким же образом определим множество E_n, связанное с множеством E_{n-1}, если $E_{n-1} \neq \varnothing$. Таким образом получим последовательность разряженных по Хаару замкнутых и вложенных друг в друга множеств $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$, $E_0 = E$:

$$E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots. \tag{2.5}$$

Далее нам понадобится понятие порядкового числа. Мы будем следовать обозначениям и определениям книги И. П. Натансона (см. 15, глава 14). Порядковое число множества всех натуральных чисел, расположенных в естественном порядке $\{1, 2, \ldots\}$, будем обозначить ω. Вторым числовым классом k_0 называется множество всех порядковых чисел, являющихся типами счетных вполне упорядоченных множеств. Первый числовой класс есть множество $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Для всякого порядкового числа из второго числового класса определим множество E_α следующим образом: если α— число первого рода (т. е. оно имеет непосредственно предшествующее число) и β—непосредственно предшествующее его порядковое число, то E_α определяется с помощью E_β таким же образом как E_n из E_{n-1}. Если α число второго рода, то

$$E_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} E_\beta. \tag{2.6}$$

Очевидно, что для любого порядкового числа α множество E_α разряжено по Хаару, замкнуто и

$$E_\alpha \subset E_\beta, \quad \text{если } \beta < \alpha. \tag{2.7}$$

Возьмем S_E-разбиение отрезка $[0,1]$— $\{\Delta^\nu\}_{\nu\in I(E)}$. Через $\{n_i(0)\}_{i=1}^\infty$ обозначим индексы всех тех функций Хаара, которые входят в подсистему $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^\infty$ и носители которых совпадают или лежат в одном из интервалов Хаара Δ^ν ($\nu\in I(E)$). Легко видеть, что подсистема

$$\{\chi_{n'_i(0)}(x)\}_{i=1}^\infty = \{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^\infty \setminus \{\chi_{n_i(0)}(x)\}_{i=1}^\infty$$

состоит из всех тех функций $\chi_{n'_i(0)}(x)$ $(i=1, 2,\cdots)$ Хаара, в каждой половине носителя которых находится хотя бы одна точка из E_1. Следовательно, для множества E_1 и подсистемы $\{\chi_{n'_i(0)}(x)\}_{i=1}^\infty$ можем применить доказанное выше утверждение. Если для некоторого натурального числа n $E_n=\varnothing$, то очевидно, что лемма доказана. В противном случае замечаем, что подсистема Хаара

$$\{\chi_{n'_i(\omega)}(x)\}_{i=1}^\infty, \text{ где } \{n'_i(\omega)\}_{i=1}^\infty=\{n_i\}_{i=1}^\infty\setminus \bigcup_{j=1}^\infty \{n_i(j)\}_{i=0}^\infty$$

является аннулирующей подсистемой Хаара множества E_ω, следовательно для них опять можем применить доказанное выше утверждение. Пусть α — число второго класса и ни одно из множеств E_β, $\beta<\alpha$ не является пустым множеством. Легко показать, что подсистема $\{\chi_{n'_i(\alpha)}(x)\}_{i=1}^\infty$, где $\{n'_i(\alpha)\}=\{n_i\}_{i=1}^\infty\setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \{n_i(\beta)\}$ является аннулирующейся подсистемой Хаара множества E_α. Применим следующий (см. [15], стр. 381)

Принцип стационарности Кантора-Бэра. Пусть всякому порядковому числу α из первого или второго числового класса отвечает замкнутое множество E_α, причем из $\alpha<\beta$ следует $E_\beta\subset E_\alpha$

$$E_0\supset E_1\supset\cdots\supset E_\alpha\supset\cdots.$$

Тогда все множества цепочки $\{E_\alpha\}$, начиная с некоторого, совпадают друг с другом, т. е. найдется такое порядковое число $\mu<\Omega$, что $E_\mu=E_{\mu+1}=\cdots$.

Отсюда, ввиду того, что в нашем построении условие $E_\mu=E_{\mu+1}$ может выполняться только в том случае, когда $E_\mu=\varnothing$, получаем утверждение леммы 3.

Покажем, что пара $\{E, \chi_E(x)\}$ является минимальной характеристикой единственности подсистемы $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ относительно системы Хаара. Возьмем произвольное натуральное число n $(n \neq n_i;\ i=1,2,\cdots)$ и убедимся в том, что существуют такие единственные вещественные числа $\{a_i^{(n)}\}$, для которых линейная комбинация функций Хаара

$$\chi_n(x) + \sum_{\Delta_{n_i} \supset \Delta_n} a_i^{(n)} \chi_{n_i}(x) = 0 \text{ при } x \in E. \tag{2.8}$$

Пусть $0 = n_1 < n_{i_1} < \cdots < n_{i_{k(n)}}$ — все те индексы из $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, пронумерованные в естественном порядке, для которых $\Delta_{n_{i_j}} \supset \Delta_n$ $(j = 1, 2, \cdots, k(n))$. Если $\Delta_{n_{i_2}}$ не совпадает с отрезком $[0,1]$, то согласно выбору подсистемы $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ имеем, что в $[0,1] \setminus \Delta_{n_{i_2}}$ нет точек множества E. Обозначим через $\Delta'_{n_{i_j}}$ ту половину интервала $\Delta_{n_{i_j}}$, которая не содержит Δ_n. Выберем число $b_2^{(n)}$ таким образом, чтобы

$$\chi_0(x) + b_2^{(n)} \chi_{n_{i_2}}(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta'_{n_{i_2}}. \tag{2.9}$$

Легко видеть, что вне множества $\Delta'_{n_{i_2}} \cup \Delta_{n_{i_3}}$ также нет точек из E. Выберем число $b_3^{(n)}$ таким образом, чтобы

$$\chi_0(x) + b_2^{(n)} \chi_{n_{i_2}}(x) + b_3^{(n)} \chi_{n_{i_3}}(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta'_{n_{i_2}} \cup \Delta'_{n_{i_3}}. \tag{2.10}$$

Продолжая этот процесс, через конечное число шагов получаем, что вне множества $\bigcup_{j=1}^{k(n)-1} \Delta'_{n_{i_j}} \cup \Delta_{n_{i_{k(n)}}}$ нет точек из

$$E \cap (\Delta_{n_{i_{k(n)}}} \setminus \Delta_n) = \varnothing \tag{2.11}$$

и существуют числа $\{b_j^{(n)}\}_{j=2}^{k(n)}$ такие, что

$$\chi_0(x) + \sum_{j=2}^{k(n)} b_j^{(n)} \chi_{n_{i_j}}(x) = 0 \text{ при } x \in \bigcup_{j=2}^{k(n)} \Delta'_{n_{i_j}}. \tag{2.12}$$

Согласно выбору подсистемы $\{\chi_{n_i}(x)\}_{n=1}^{\infty}$, точки из множества E могут находиться только в одной из половин интервала Δ_n. Эту половину обозначим Δ'_n. Соответствующим образом выбирая число $b_n \neq 0$ получаем, что

$$\chi_0(x) + \sum_{j=2}^{k(n)} b_j^{(n)} \chi_{n_{i_j}}(x) + b_n \chi_n(x) = 0 \text{ при } x \in \bigcup_{j=2}^{k(n)} \Delta'_{n_{i_j}} \cup \Delta'_n,$$

откуда сразу следует (2.8).

Сейчас покажем, что если возьмем неотрицательную функцию $M(x)$, имеющую в каждой точке множества E особенность некоторого порядка степени ∞, то система

$$\{M(x)\chi_n(x);\ n \neq n_i,\ i = 1, 2, \cdots\}$$

будет замкнутой и минимальной в пространстве $L_{[0,1]}$. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4. *Пусть ортонормированная система функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на измеримом множестве G, полна относительно L_G и $f_n \in L_G^{\infty}$ $(n=1, 2, \cdots)$. Пусть далее, $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторая подсистема системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $M \in L_p^G$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Тогда для того, чтобы система $\{M(x) f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ была замкнута, минимальна в пространстве L_G^p необходимо и достаточно, чтобы соответственно имели место следующие условия 1), 2).*

1) *Функция $[M(x)]^{-1} g(x)$, где $g \in L_G^p$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$ и*

$$a_m = \int_G g(t) f_m(t)\, dt = 0$$

для любого натурального $m \neq n_i$ $(i=1, 2, \cdots)$, принадлежит пространству L_G^q тогда и только тогда, когда

$$a_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots);$$

2) *Для каждого натурального числа n $(n \neq n_i,\ i = 1, 2, \cdots)$ существует некоторая функция $g_n(x)$, $g_n \in L_G^q$ такая, что для любого $m \neq n_i$ $(i=1, 2, \cdots)$*

$$\int_G [g_n(t) - f_n(t)] f_m(t)\, dt = 0 \text{ и } [M(x)]^{-1}[g_n(x) - f_n(x)] \in L_G^q.$$

Доказательство леммы 4 получается почти дословным повторением доказательства теоремы 1 работы [4], поэтому его не будем приводить. Считаем необходимым отметить, что идея этого доказательства восходит к Р. Боасу и Г. Полларду [16]. Из лемм 3, 4 и условия (2.8) сразу получаем, что система $\{M(x)\chi_n(x);\ n \neq n_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ замкнута и минимальна в пространстве $L_{[0,1]}$. Таким образом, мы уже проделали всю необходимую работу для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $E \subset [0, 1]$ — произвольное замкнутое разряженное по Хаару множество, f — произвольная измеримая функция, имеющая в каждой точке множества E особенность конечного или бесконечного порядка. Пусть, далее, $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — аннулирующаяся подсистема Хаара множества E. Тогда ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) = f(x) \qquad \text{почти всюду,} \tag{2.13}$$

где

$$a_n = 0, \qquad \text{если} \quad n = n_i \tag{2.14}$$

и когда $n \neq n_i$

$$a_n = \int_0^1 f(t)\left[\chi_n(t) - \sum_{\Delta_{n_i} \supset \Delta_n} a_i^{(n)} \chi_{n_i}(t)\right] dt, \tag{2.15}$$

где коэффициенты $\{a_i^{(n)}\}$ определяются единственным образом согласно условию (2.8).

Для доказательства теоремы 2 сначала покажем, что ряд по системе Хаара $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$, коэффициенты которого определяются условиями (2.14), (2.15), почти всюду сходится. Ввиду того, что множество E является разряженным по Хаару, можем найти счетное число непересекающихся интервалов Хаара $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что мера объединения $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ равна единице и

$$\Gamma_n \cap E = \varnothing \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{2.16}$$

Для любого натурального числа n ($n = 1, 2, \ldots$) рассмотрим все те функции Хаара, носители которых лежат в Γ_n. Из (2.8), (2.15), (2.16) имеем, что коэффициенты этих функций в ряде (2.13) являются коэффициентами Фурье—Хаара. Следовательно, часть ряда (2.13), взятая только по этим функциям, почти всюду сходится на Γ_n, а вне Γ_n все функции равны нулю. Таким образом, рассматривая часть ряда (2.13), в которую входят только те функции Хаара, носители которых лежат в одном из интервалов Γ_n ($n = 1, 2, \ldots$), получаем сходящийся почти всюду на $[0, 1]$ ряд. Но очевидно, что оставшаяся часть ряда (2.13) тоже почти всюду сходится, так как верхний предел носителей функций Хаара из этой части состоит самое большее из счетного числа точек. Остальная часть доказательства совпадает с доказательством аналогичной части теоремы 1. То, что система $\{\chi_n(x);\ n \neq n_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ является замкнутой минимальной в некотором весовом пространстве $L_{[0,1]}(\varphi\, dt)$, мы уже показали. Откуда, применяя Принцип Банаха, получаем утверждение теоремы. Теорема 2 полностью доказана.

Нам неизвестно, насколько можно ослабить предположение, касающееся множества E. Например, можно ли доказать аналог теоремы 2, когда E — канторово множество. С этими вопросами связаны также обратные в некотором смысле задачи, когда дана конечная или бесконечная подсистема системы Хаара и нужно найти соответствующее ей множество E, чтобы $\{E, \chi_E(x)\}$ была минимальной характеристикой единственности для этой подсистемы. Описание таких множеств для конечных подсистем Хаара дано в работе [5]. Такие множества существуют и для подсистем системы Хаара, которые не являются полными ни на каком множестве положительной меры. Полное описание подсистем системы Хаара, которые являются полными на некоторых множествах положительной меры, дано в работе Дж. Прайса и Р. Зинка [17]. Нам неизвестно, существует ли подсистема системы Хаара, полная по мере на некотором множестве положительной меры и имеющая минимальную характеристику единственности.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 6. III. 1984

Գ. Ս. ԿԱԶԱՐՅԱՆ. Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Հաարի ընդհանրացված շարքերի համարյա ամենուրեք հանրագումարումը և զուգամիտությունը *(ամփոփում)*

Որոշակի բազմությունների վրա եզակիություն ունեցող ֆունկցիաների համար սահմանվում են Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Հաարի շարքեր։ Այդ շարքերի համար ապացուցվում են թեորեմներ, որոնք հանդիսանում են Ֆատուի և Հաարի թեորեմների ընդհանրացումները։

K. S. KAZARIAN. *On the summability and almost everywhere convergence of the generalized Fourier and Fourier—Haar series* (summary)

For the functions which have singularities on certain sets of points the generalized Fourier and Fourier Haar series are defined. We prove two theorems which are generalizations of Fatou and Haar theorems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Н. Лузин.* Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1951.
2. *A. Haar.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionsysteme, Inauguraldissertation Göttingen, 1909.
3. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении базисных последовательностей L^p, $1 \leqslant p < \infty$, до базисов в L^p, ДАН Арм.ССР, 52 1976 203—209.
4. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в L^p, $1 \leqslant p < \infty$. Analysis Math., 4, № 1, 1978, 37—52.
5. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении некоторых систем, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 13, № 4, 1978, 315—351.
6. *В. Ф. Гапошкин.* Мультипликативное пополнение тригонометрической системы до базисов Чезаро, Сооб. АН Груз.ССР, 96, № 3, 1979, 541—543.
7. *V. F. Gapošhkin.* Trigonometric Cesàro bases on the spaces of functiones integrable with power weight, Analysis Math., 8 № 2, 1982, 103—124.
8. *А. Ю. Петрович.* О суммируемости обобщенных рядов Фурье, Analysis Math. 4, № 4, 1978, 303—311.
9. *А. Ю. Петрович.* О суммируемости методом Абеля обобщенных рядов Фурье Мат. сб., 122, № 2, 1983, 232—244.
10. *М. И. Дьяченко.* Об обобщенных синус-рядах Фурье, Мат. заметки, 29, 5, 1981, 641—657.
11. *S. Banach.* Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires, I et II, Bull, Sci. Math., 50, 1926, 27—32 et 36—43.
12. *A. M. Garsia.* Topics in almost everywhere convergence, Markham Publ. Comp., 1970.
13. *Г. Алексич.* Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., 1958.
14. *J. Schauder.* Eine Eigenschoft des Haarschen Orthogonalsystems, Math. Z., 28, 1928, 317—320.
15. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, «Наука», 1974.
16. *R. P. Boas, H. Pollard.* The multiplicative completion of sets of functiones, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 1948, 518—522.
17. *J. J. Price, R. E. Zink.* On sets of completeness for families of Haar functions. Trans. Amer. Math. Soc., 119, № 2, 1965, 262—269.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS