

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Ա Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԻՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵՆԱՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱՆՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄՆՐԴՆԱՅԱՆ
Ա. Ի. ՆՐՍՍՅԱՆ
Ի. Լ. ՇԱՀՐԱՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀՆԴԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրատարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկություններ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համառուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերը շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ավրածն գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում կչի ձևի մասում։

5. Գրականությունը տեղափոխվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, դրբերի համար նշվում է՝ հեղինակը, զրբի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Նրբագրության մամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (ւրիզինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վեռամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համառում է վեռնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում շարադրել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском
английском французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН

зам. главного редактора

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Н. У. АРАКЕЛЯН

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН

А. А. ТАЛАЛЯН

Р. Л. ШАХБАГЯН

зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Огансян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статью в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название места издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
 associate editor
 R. V. AMBARTZUMIAN
 N. U. ARAKELIAN
 S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN
 A. A. TALALIAN
 R. L. SHAKHBAGIAN
 associate editor
 I. D. ZASLAVSKII

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Drafts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
 Academy of Sciences of Armenian SSR
 24-b, Marshal Bagramian Ave.
 Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.95

К. А. ЯГДЖЯН

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ
 КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ
 С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В в е д е н и е

Пусть $x \in R^n$, $t \in J = [0, T]$, $T > 0$, $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}$, α -мультииндекс

тииндекс

$$P(t, D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{\substack{j+|\alpha| < m \\ j < m}} a_{j,\alpha}(t) D_t^j D_x^\alpha, \quad (0.1)$$

$P_s(t; \tau, \xi) = \sum_{j+|\alpha|=s} a_{j,\alpha}(t) \tau^j \xi^\alpha$, $\tau \in R^1$, $\xi \in R^n$. Рассмотрим уравнение

$$Pu = f \quad (0.2)$$

и для него задачу Коши с начальными условиями

$$D_t^i u|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad i=0, \dots, m-1, \quad t \in J. \quad (0.3)$$

Хорошо известно, что для корректности задачи Коши даже в очень слабом смысле необходимым условием является вещественность всех характеристических корней $\tau = \tau_j(t, \xi)$ уравнения

$$\tau^m + \sum_{j+|\alpha|=m, j < m} a_{j,\alpha}(t) \tau^j \xi^\alpha = 0, \quad \xi \in R^n \setminus 0. \quad (0.4)$$

Если они различны, то выполнена L_2 -оценка [1], и, наоборот, [2]. Нас будет интересовать случай, когда все корни совпадают при некоторых (t, ξ) . Если теперь мы потребуем всего лишь, чтобы для любых достаточно гладких правых частей f и начальных данных φ_i задача Коши имела единственное решение, то вообще говоря, для подобной корректности необходимо будет накладывать некоторые условия на P_s , $s < m$.

Часто эти условия называют условиями Е. Е. Леви [3], который указал достаточные условия корректности задачи Коши для уравнений с характеристиками постоянной кратности (т. е. не зависящей от t, x, ξ) при $n = 1$. Нахождению этих условий посвящены работы многих математиков. Обзоры этих работ можно найти в [2], [4], поэтому мы остановимся только на некоторых результатах, которые тесно связаны с интересующим нас случаем уравнения, коэффициенты которого не зависят от x .

Наиболее общее достаточное условие корректности задачи Коши с $t_c = 0$ для уравнения (по повторяющимся индексам ведется суммирование)

$$u_{tt} - \lambda^2(t)(a^{ij}(t, x) u_{x_i x_j}) = b'(t, x) u_x + b^0 u_t + cu + f, \quad (0.5)$$

где $\lambda(0) = 0$, $\lambda(t > 0) > 0$, $a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \delta |\xi|^2$, $\delta = \text{const} > 0$, было предложено А. Б. Нерсесяном [5] и имеет следующий вид:

$$\int_0^t \max_x |b'(\tau, x)| d\tau \leq \text{const } \lambda(t). \quad (0.6)$$

Условия для уравнений высокого порядка [6] в применении к (0.5) дают

$$\max_{\substack{x \\ 0 < \tau < t}} |b'(\tau, x)| \leq \text{const } \lambda_t(t), \quad \left(\lambda_t = \lambda' = \frac{d\lambda}{dt} \right). \quad (0.7)$$

В дальнейшем им же было предложено заменить λ_t в правой части (0.7) на $\frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)}$, где $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$. Необходимость условия (0.7) для

уравнений с C^∞ коэффициентами в случае, когда при некотором k $\frac{d^k \lambda}{dt^k}(0) \neq 0$ следует из очень общих результатов работы В. Я. Иврия и В. М. Петкова [2]. Для уравнений второго порядка с $n=1$ и с аналитическими коэффициентами необходимые и достаточные условия указаны Т. Нишитани [7]. Необходимым условиям на главный символ нестрого гиперболического оператора посвящены работы [8], [9] [10].

Для оператора ($n > 0$)

$$P = D_t^2 + A^2 \exp(-2t^{-n}) D_x^2 + iBt^{-n-1-l} \exp(-t^{-n}) D_x, \quad (0.8)$$

где A, B, n, l — постоянные, задача (0.2), (0.3) с $t_c = 0$ была исследована в [11] С. Тарамой, и было установлено, что задача корректна при $\text{Re } B \neq 0$ ($\text{Re } B = 0$) тогда и только тогда, когда $l \leq 0$ ($l \leq n$).

В [12], [13] автором для уравнений с двукратными характеристиками были указаны условия на $\text{Im } b'(t)$ и $\text{Re } b'(t)$, достаточные для C^∞ -корректности задачи с любым $t_c \in J$, которые в широком классе операторов являются и необходимыми.

В настоящей статье мы обобщаем результаты работ [12], [13].

Формулировка результатов. Относительно характеристических корней $\tau_j(t, \xi)$, $j = 1, \dots, m$, предположим, что

$$\tau_j(t, \xi) = \lambda(t) \lambda_j(t, \xi), \quad j = 1, \dots, m, \quad (0.9)$$

где $\lambda \in C^1(J)$, $\lambda(0) = \lambda_t(0) = 0$, $\lambda(t) > 0$, $t > 0$, и с некоторой постоянной c_1

$$c_1 \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \leq \frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)} \leq \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}, \quad c_1 > \frac{m-1}{m}, \quad \Lambda(t) \equiv \int_0^t \lambda(s) ds, \quad t \in J^0 = (0, T], \quad (0.10)$$

а

$$i_i(t, \xi) \neq \lambda_j(t, \xi), \quad i \neq j, \quad (0.11)$$

при всех $t \in J$, $\xi \in R^n \setminus 0$. Для простоты изложения предположим, что $a_{i, \alpha} \in C(J) \cap C^1(J^0)$.

Обозначим через $C_i^m(J; H^s)$ класс функций, осуществляющих вместе со своими производными по t порядка $\leq m$ непрерывные отображения J в $H^s(R^n)$ с нормой $\left(\sum_{i=0}^m \sup_{t \in J} \|D_i^i u\|_s^2 \right)^{1/2}$, где $\|\cdot\|_s$ — норма пространства $H^s(R^n)$, а через $E_s(u; t)$ — сумму $\sum_{i=0}^{m-1} \|D_i^i u(t)\|_{m-1+s-i}^2$, когда она имеет смысл. Конус $\{(t, x) \in J \times R^n; |x - x^0| \leq \gamma(t^0 - t)\}$ с вершиной (x^0, t^0) обозначим через $K_\gamma(x^0, t^0)$.

Теорема 1. Пусть функции $\lambda_i(t, \xi)$, $i = 1, \dots, m$, вещественны, выполнены условия (0.9)–(0.11), и пусть c некоторой положительной постоянной c для всех α, j , и всех $t \in J^0$

$$|D_i^k a_{j, \alpha}(t)| \leq c \lambda^{m-j}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{m-j-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad k=0,1, \quad (0.12)$$

$$|D_i^k \operatorname{Im} a_{m-1-|\alpha|, \alpha}(t)| \leq c \lambda^{|\alpha|}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^{1+k}, \quad k=0,1. \quad (0.13)$$

Тогда существуют положительные постоянные s_0, C , такие, что для любых $t_c \in J$, $f \in C_i^0(J; H^{s+s_0})$, $\varphi_j \in H^{s+s_0-1}(R^n)$, $j=0, \dots, m-1$, задача (0.2), (0.3) имеет решение $u \in \bigcap_{i=0}^m C_i^1(J; H^{s+m-i})$. Это решение единственно и удовлетворяет при всех $t \in J$ энергетическому неравенству

$$E_s(u; t) \leq C \left(E_{s+s_0}(u; t_c) + \int_t^{t_c} \|f(\tau)\|_{s+s_0}^2 d\tau \right). \quad (0.14)$$

При этом задача (0.2), (0.3) имеет обычный конус зависимости, т. е. из $f|_{K_\gamma(x^0, t^0)} = 0$, $\varphi_j|_{K_\gamma(x^0, t^0) \cap \{t=t_c\}} = 0$, $j \leq m-1$, следует $u|_{K_\gamma(x^0, t^0)} = 0$, если

$$|\gamma| \geq \max_{i, t \in J} |\tau_i(t, \xi)|, \quad |\xi|=1. \quad (0.15)$$

Отметим, что для задачи с $t_c=0$ условия для оператора с гладкими коэффициентами, зависящими и от x , главный символ которого имеет характеристические корни, слипающиеся с бесконечной по $|x| \cdot t$ скоростью к нулю, эквивалентные (0.12), (0.13), приведены в [14].

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 задача оказывается корректной в смысле следующих определений.

Определение 1. Задачу (0.2), (0.3) с $t_c \in J$ будем называть $C^{m, \infty}$ -корректной, если:

(E) для любых $\varphi_j \in C^\infty(R^n)$, $j=0, \dots, m-1$, $f \in C_i^0(J; C^\infty(R^n))$ существует $u \in C_i^m(J; C^\infty(R^n))$ решение задачи (0.2), (0.3);

(U_K) существует конус зависимости, т. е. если $f|_{K_\gamma(x^0, t^0) \cap \{t=t_c\}} = 0$, $0 \leq j \leq m-1$, $f|_{K_\gamma(x^0, t^0)} = 0$, то $u|_{K_\gamma(x^0, t^0)} = 0$, где (0.15) и $\gamma(t^0 - t) > 0$

Определение 2. Задачу (0.2), (0.3) будем называть равномерно по $t \in J$ C^m -корректной, если (E), (U_K) имеют место для всех $t_c \in J$ равномерно.

Условие (0.12), (0.13) являются необходимыми для C^m -корректности задачи Коши в классах операторов, описанных в нижеследующих теоремах.

Теорема 2. Предположим, что для некоторого вектора $\xi \in R^n \setminus 0$ корни $\{\tau_j(t, \xi)\}_1^m$ вещественны и допускают представление (0.9) с непрерывными функциями $|\lambda_j(t, \xi)|_1^m$, удовлетворяющими (0.11) для всех $t \in J$, и функцией $\lambda(t)$, удовлетворяющей (0.10). И пусть

$$\sum_{|\alpha|=m-1-j} \operatorname{Im} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha = \lambda^{m-1-j}(t) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \frac{b_j(t)}{\nu(t)}, \quad j=0, \dots, m-2, \quad (0.16)$$

с функциями $\nu, b_0, \dots, b_{m-2} \in C^1(J^0) \cap C(J)$ такими, что при $t \in J^0$

$$\nu(t) > 0, \quad \frac{\nu_t(t)}{\nu(t)} \leq \frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)} \frac{1}{|\ln \lambda(t)|}, \quad (0.17)$$

$$\sum_{j=0}^{m-2} |b_j(0)| \neq 0, \quad \sum_{j=0}^{m-2} |D_t b_j(t)| \leq c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}. \quad (0.18)$$

Предположим далее, что для всех $l=0, \dots, m-1, j=0, \dots, m-1, m-l-j > 0$

$$|D_t^l \sum_{|\alpha|=m-l-j} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha| \leq c \lambda^{m-j}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^l \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad k=0, 1, \quad (0.19)$$

а оставшиеся коэффициенты $a_{j,\alpha}(t) \in C(J) \cap C^1(J^0)$, $j=0, \dots, m-1$, удовлетворяют неравенствам (0.12) с $|\alpha|=0$.

Тогда, если $\nu(0)=0$, то задача (0.2), (0.3) ни при каком $t_c \in J$ не является C^m -корректной.

Случай более сильного нарушения условия (0.13), т. е. большей скорости стремления к нулю функции ν в (0.16), а также случай нарушения условия (0.12) описываются следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть для некоторого вектора $\xi \in R^n \setminus 0$ и для некоторой пары $(\tilde{j}, \tilde{k}), 0 < \tilde{k} \leq m-1, m-\tilde{j}-\tilde{k} > 0$, имеет место представление

$$\sum_{|\alpha|=m-\tilde{k}-\tilde{j}} a_{\tilde{j},\alpha}(t) \xi^\alpha = \lambda^{m-\tilde{j}}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{\tilde{k}} \frac{b(t)}{\nu(t)}, \quad (0.20)$$

с комплекснозначной функцией $b \in C^1(J^0)$, неотрицательной функцией $\nu \in C^1(J^0)$, с $\lambda(t)$, удовлетворяющей (0.10), и пусть при некоторой постоянной $\varepsilon > 0$

$$\nu(t) > 0, \quad |\ln |b(t)|| < c, \quad \left| \frac{db(t)}{dt} \right| \leq c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}, \quad t \in J^0,$$

$$0 < \frac{\nu_t}{\nu} \leq (m - \widehat{j} - 1 - \varepsilon) \frac{\lambda_t}{\lambda} - (\widehat{k} - 1) \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad t \in J^0, \quad (0.21)$$

а для остальных

$$(j, k), \quad k=0, \dots, m-1, \quad m-j-k > 0, \quad a_{j,\alpha}, \quad \sum_{|\alpha|=m-k-j} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha \in C(J),$$

и

$$\left| \sum_{|\alpha|=m-k-j} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha \right| < c \lambda^{m-j}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^k. \quad (0.22)$$

Предположим далее, что непрерывно дифференцируемые на J^0 комплексные корни $(m - \widehat{j})$ -ой степени из $b(t)/|b(t)|$, обозначим их через $\{Z_l(t)\}_1^{m-\widehat{j}}$, можно так пронумеровать и разбить на две группы $\{Z_l(t)\}_1^r, \{Z_l(t)\}_{r+1}^{m-\widehat{j}}$, $0 \leq r \leq m - \widehat{j}$, что $\operatorname{Im} Z_{m-\widehat{j}} \leq 0$, и с некоторыми положительными постоянными δ, δ_1

$$\min_{r+1 < l < m-\widehat{j}} |\operatorname{Im} Z_l(t)| \geq \delta > 0, \quad t \in J^0, \quad (0.23)$$

$$\min_{r+1 < l < m-\widehat{j}} |\operatorname{Im} Z_l(t)| > -(1 + \delta_1) \min_{1 < l < r} \operatorname{Im} Z_l(t), \quad t \in J^0. \quad (0.24)$$

(При $r=0$ первая группа пустая, и условие (0.24) отсутствует).

Тогда если $\lim_{t \rightarrow 0} \nu(t) = 0$, то задача Коши (0.2), (0.3) с $t_C = 0$ не является C^m -корректной.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Отметим предварительно, что предпосылки предлагаемого нами метода доказательств имелись еще в работе И. С. Березина [9]. Опишем метод вкратце.

Косасательное расслоение $T^*(J \times R^n)$ с помощью вспомогательных поверхностей $t = t_1(\xi), t = t_\xi, \xi \in R^n$, разбивается на три области (зоны). Здесь $0 < t_1(\xi) < t_\xi < T, |\xi| > M$, и будут уточнены ниже. В первой зоне, содержащей многообразие вырождения, оператор P ведет себя как оператор с коэффициентами, интегралы (по t) модулей которых ограничены функцией $c \ln |\xi|$. Во второй зоне доминируют младшие члены и учитывается еще и порядок оператора (но не тип!). Наконец в третьей зоне, где доминирует главный символ, проверяется выполнение условия $|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \leq c \left(\frac{\lambda_t}{\lambda} + \frac{\lambda \ln^2 \lambda}{\Lambda^2 |\xi|} \right)$, откуда

$$\int_{t_1}^T |\operatorname{Im} \Delta_k(\tau, \xi)| d\tau \leq c (1 + \ln(1 + |\xi|)), \quad k=1, \dots, m, \quad (1.1)$$

где $\Delta_k(t, \xi)$ — корни полного символа оператора, т. е. решения уравнения

$$\Delta^m + \sum_{j+|a| \leq m, j < m} a_{j,a}(t) \xi^a \Delta^j = 0. \quad (1.2)$$

Очевидна связь условия (1.1) с условием гиперболичности по Адамару [15]. В каждой из зон получаем микролокальную энергетическую оценку (т. е. оценку образа решения при преобразовании Фурье по переменной x).

В условиях теорем 2, 3 в одной из зон это не удастся, поэтому задаем на ее границе данные Коши, подходящим образом выбранные, и прослеживаем за ростом образа Фурье решения при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Итак, введем функцию $t_1 = t_1(\xi)$ как решение уравнения

$$|\xi| \lambda^{m-1}(t_1) |\ln \lambda(t_1)|^{m-2} = N_1 \Lambda^{m-2}(t_1). \quad (1.3)$$

Здесь положительное число N_1 будет выбрано ниже. Определим также функцию $t_\xi = t_\xi(\xi)$ как решение следующего уравнения:

$$|\xi| \Lambda(t_\xi) = -N \ln \lambda(t_\xi), \quad (1.4)$$

где положительная постоянная N будет уточнена ниже. Нетрудно проверить, что если N/N_1 достаточно велико, то $t_1 < t_\xi$, при больших M .

Предложение 1. В условиях теоремы 1 для обыкновенного дифференциального уравнения

$$D_t^m u(t, \xi) + \sum_{\substack{j+|a| < m \\ j < m}} a_{j,a}(t) \xi^a D_t^j u(t, \xi) = f(t, \xi) \quad (1.5)$$

с параметром $\xi \in R^n$ существуют положительные постоянные c, k, M, N такие, что для энергии решения $E(t, u) = \sum_{i=0}^{m-1} |D_t^i u(t, \xi)|^2$ при всех $|\xi| > M, s_1, s_2 \in [0, t_\xi]$ имеет место неравенство

$$E(s_2, u) \leq c (1 + |\xi|)^{2k} (E(s_1, u) + \left| \int_{s_1}^{s_2} |f(\tau, \xi)|^2 d\tau \right|). \quad (1.6)$$

Доказательство. Рассмотрим первую зону $0 \leq t \leq t_1$. При $|a| > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \left| \sum_{j+|a| < m-1} a_{j,a}(\tau) \xi^a \right| d\tau &\leq c \sum_{j+|a| < m-1} |\xi|^{|a|} \int_0^t \lambda^{|a|} \left(\frac{\lambda}{\Lambda} |\ln \lambda| \right)^{m-j-|a|} d\tau \leq \\ &\leq c \sum_{j+|a| < m-1} |\xi|^{|a|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} |\ln \lambda(t)| \right)^{m-j-|a|} \lambda^{|a|}(t) \frac{\Lambda(t)}{\lambda(t)} \leq \\ &\leq c \sum_{j+|a| < m-1} N_1^{|a|} \left(\frac{\Lambda(t_1)}{\lambda(t_1) |\ln \lambda(t_1)|} \right)^{|a|(m-2)-m+j+|a|+1} |\ln \lambda(t_1)|, \end{aligned} \quad (1.7)$$

и так как функция $\Lambda/(\lambda |\ln \lambda|)$ ограничена, а $|a|(m-2) - m + j + |a| + 1 \geq 0$, из (1.7) выводим

$$\int_0^t \left| \sum_{j+|a| < m, j < m} a_{j,a}(\tau) \xi^a \right| d\tau \leq -c \ln \lambda(t_1). \quad (1.8)$$

Далее, функция λ ($\lambda |\ln|\Lambda|$) $^{m-2}$ монотонно стремится к 0 при $t \rightarrow 0$, откуда

$$\ln |\xi| = \ln \left(N_1 \frac{\Lambda^{m-2}(t_1)}{|\ln \lambda(t_1)|^{m-2} \lambda^{m-1}(t_1)} \right) = \ln N_1 - \ln \lambda^s(t_1) - \ln \frac{\lambda^{m-1-s}(t_1) |\ln \lambda(t_1)|^{m-2}}{\Lambda^{m-2}(t_1)},$$

и если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\lambda^{m-1-s} |\ln \lambda|^{m-2} < \Lambda^{m-2}$, и тогда

$$\ln |\xi| > -\varepsilon \ln \lambda(t_1). \quad (1.9)$$

Оценивая $\left| \frac{dE(t, u)}{dt} \right|$ и используя лемму Гронуолла получаем (1.6) для всех $s_1, s_2 \in [0, t_1]$, $|\xi| > M$ с постоянными, зависящими только от констант в оценках условий теоремы.

Рассмотрим теперь зону $[t_1, t_2]$. Введем вектор $U = (u, D_t u, \dots, D_t^{m-1} u)$ и перепишем (1.5) в виде системы первого порядка

$$D_t U = AU + F, \text{ где } F = (0, \dots, 0, f). \quad (1.10)$$

Обозначим через $\rho(t, \xi)$ положительный корень уравнения

$$\rho^m - 1 - |\xi| \lambda^m(t) \Lambda^{1-m}(t) |\ln \lambda(t)|^{m-1} = 0,$$

а через N^{-1} — диагональную матрицу с элементами $(N^{-1})_{kl} = \delta_{kl} \rho^{k-1}$, где δ_{kl} — символ Кронекера. Тогда $(N)_{ij} = \delta_{ij} \rho^{-i+1}$. Введем новую неизвестную функцию $V = NU$, которая будет удовлетворять уравнению

$$D_t V = BV + iNN^{-1} V + NV, \quad (1.11)$$

где $B = NAN^{-1}$, и ее элементы B_{kl} выражаются через элементы A_{kl} матрицы A следующим образом: $B_{kl} = \rho^{l-k} A_{kl}$. Но $A_{k, k+1} = 1$, и

$$A_{mk}(t, \xi) = \sum_{|\alpha| < m-k+1} a_{k-1, \alpha}(t) \xi^\alpha, \quad k=1, \dots, m, \quad (1.12)$$

а остальные A_{kl} равны нулю. Поэтому

$$\begin{aligned} |B_{mk}| &\leq \rho^{k-m} \left| \sum_{k-1+|\alpha|=m} a_{k-1, \alpha}(t) \xi^\alpha \right| + \rho^{k-m} \left| \sum_{k+|\alpha| < m} a_{k-1, \alpha}(t) \xi^\alpha \right| \leq \\ &\leq c \rho^{k-m} (\lambda(t) |\xi|)^{m+1-k} + c \rho^{k-m} \sum_{k+|\alpha| < m} \lambda^{|\alpha|} |\xi|^{|\alpha|} \left(\frac{\lambda}{\Lambda} |\ln \lambda| \right)^{m-k+1-|\alpha|}. \end{aligned}$$

Но

$$\left(\frac{\lambda(t) |\xi|}{\rho(t, \xi)} \right)^m \leq \left(\frac{|\xi| \Lambda(t)}{|\ln \lambda(t)|} \right)^{m-1} \leq \left(\frac{|\xi| \Lambda(t_2)}{|\ln \lambda(t_2)|} \right)^{m-1} \leq N^{m-1},$$

и

$$\begin{aligned} \rho^{-m} \left\{ \rho^{k-m} \lambda^{m-k+1} |\xi|^{|\alpha|} \left(\frac{|\ln \lambda|}{\Lambda} \right)^{m-k+1-|\alpha|} \right\}^m &\leq \\ \leq \left(\frac{|\xi| \Lambda(t)}{|\ln \lambda(t)|} \right)^{m|\alpha|-m+k-1} &\leq \left(\frac{|\xi| \Lambda(t_2)}{|\ln \lambda(t_2)|} \right)^{m|\alpha|-m+k-1} = N^{m|\alpha|-m+k-1}, \end{aligned}$$

так как при $|\alpha| \neq 0$, $k > 1$, $k + |\alpha| \leq m$ имеем $m|\alpha| - m + k - 1 > 0$.

Если же $|a| = 0$, то $\rho^{k-m} |a_{k-1, \alpha}(t)| < \text{const}$. Таким образом $|B| \leq c\rho$. С другой стороны, ясно, что $\|NN_i^{-1}\| \leq c\lambda/\Lambda$. Поэтому для $E(t, V) = \sum_{i=1}^m |V_i(t, \xi)|^2$ получаем

$$\left| \frac{dE}{dt} \right| \leq c \left(\rho + \frac{\lambda_t}{\lambda} \right) E + c|f|. \quad (1.13)$$

Очевидно, что для всех $s_1, s_2 \in [t_1, t_\xi]$

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\lambda_t}{\lambda} dt \leq -\ln \lambda(t_1) \leq c \ln |\xi|,$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \rho(\tau) d\tau \leq \int_{t_1}^{t_\xi} d\tau + \int_{t_1}^{t_\xi} \left(|\xi| \lambda^m(\tau) \left(\frac{|\ln \lambda(\tau)|}{\Lambda(\tau)} \right)^{m-1} \right)^{1/m} d\tau.$$

С другой стороны

$$\int_0^t \lambda(\tau) \Delta^{(1-m)/m}(\tau) |\ln \lambda(\tau)|^{(m-1)/m} d\tau \leq c \left(\frac{\Lambda(t)}{|\ln \lambda(t)|} \right)^{1/m} \ln \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right). \quad (1.14)$$

Таким образом, при всех $s_1, s_2 \in [t_1, t_\xi]$, $|\xi| > M$, имеем

$$\int_{s_1}^{s_2} \rho(\tau) d\tau \leq c \ln |\xi|, \quad |N| \leq c, \quad |N^{-1}| \leq c|\xi|.$$

Используя теперь лемму Грокуолла из (1.13) легко выводим (1.6). Предложение доказано.

Замечание. Условием $c_1 > (m-1)/m$ мы воспользовались только при введении первой зоны. Ее возникновение связано с тем, что, вообще говоря, $t_c \neq 0$. В противном случае, когда $t_c = 0$, можно принять во внимание неотрицательную определенность матрицы NN_i^{-1} , что приведет к отсутствию в (1.13) ядра λ_t/λ .

Рассмотрим теперь третью зону, т. е. $t_\xi \leq t \leq T$. Покажем, что оценка (1.6) остается справедливой и при $s_1, s_2 \in [t_\xi, T]$ за счет интегральной (по t) гиперболичности (т. е. (1.1)). Для этого в (1.2) осуществим однородную замену $\Delta = \lambda(t) |\xi| \gamma$. Тогда γ будет решением уравнения

$$\gamma^m + \sum_{0 < j < m} \left(\sum_{|\alpha| = m-j} (\lambda |\xi|)^{j-m} a_{j, \alpha}(t) \xi^\alpha + B_{j+1} \right) \gamma^j = 0, \quad (1.15)$$

где

$$B_{j+1} = \sum_{|\alpha| < m-1-j} (t |\xi|)^{j-m} a_{j, \alpha}(t) \xi^\alpha, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Согласно условию, при $0 \leq t \leq T$, $\xi \neq 0$, корни $\mu_k = \lambda_k(t, \xi)/|\xi|$, $k = 1, \dots, m$, уравнения

$$\mu^m + \sum_{j < m} \left(\sum_{|\alpha| = m-j} (\lambda |\xi|)^{j-m} \alpha_{j, \alpha}(t) \xi^\alpha \right) \mu^j = 0 \quad (1.16)$$

вещественные и простые. Поэтому, если мы докажем, что в (1.15) добавки B_j малы, то корни уравнения (1.15) будут аналитически зависеть от этих возмущений и, следовательно, представляться в виде рядов

$$\gamma^k(t, \xi) = \mu_k(t, \xi) + \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_m > 0} \alpha_{i_1, \dots, i_m}^k B_1^{i_1} B_2^{i_2} \dots B_m^{i_m}. \quad (1.17)$$

Действительно, так как $j \leq m-1$, то

$$\begin{aligned} |B_{j+1}| &\leq |(\lambda |\xi|)^{j-m} \alpha_{j, 0}| + \left| \sum_{|0 < |\alpha| \leq m-1-j} (\lambda |\xi|)^{j-m} \alpha_{j, \alpha}(t) \xi^\alpha \right| \leq \\ &\leq c (\lambda |\xi|)^{j-m} + c \sum \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t) |\xi|} \right)^{m-j-|\alpha|} \leq \\ &\leq c (\Lambda(t_\xi) |\xi|)^{j-m} + c \sum \left(\frac{|\ln \lambda(t_\xi)|}{\Lambda(t_\xi) |\xi|} \right)^{m-j-|\alpha|} \leq c \sum_{0 < |\alpha| \leq m-1-j} N^{j+|\alpha|-m}. \end{aligned}$$

Поэтому для любого положительного ε за счет выбора N и M получаем $\sum_{j=1}^m |B_j| < \varepsilon$ при всех $t \in [t_\xi, T]$, $|\xi| > M$.

Итак

$$\Delta_k(t, \xi) = \lambda(t) \lambda_k(t, \xi) + \lambda(t) |\xi| \sum_{i_1 + \dots + i_m > 0} \alpha_{i_1, \dots, i_m}^k B_1^{i_1} \dots B_m^{i_m}, \quad (1.18)$$

где

$$\alpha_{i_1, \dots, i_m}^k = - \frac{(j-1)! \mu_k^{(j-1)}(t, \xi)}{\prod_{r \neq k} (\mu_k(t, \xi) - \mu_r(t, \xi))}.$$

Следовательно

$$\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi) = \lambda(t) |\xi| \sum_{j=1}^m \{ \alpha_{0 \dots 1 0 \dots 0}^k(t, \xi) \operatorname{Im} B_j + |B_j|^2 O(1) \}, \quad (1.19)$$

откуда

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| &\leq \lambda(t) |\xi| \left\{ \left| \sum_{j+|\alpha| \leq m-2} (\lambda |\xi|)^{j-m} \alpha_{j, \alpha}(t) \xi^\alpha \right| + \right. \\ &+ \left. \left| \sum_{j+|\alpha|=m-1} (\lambda |\xi|)^{j-m} \operatorname{Im} \alpha_{j, \alpha}(t) \xi^\alpha \right| + O(1) \sum_{j=1}^m |B_j|^2 \right\} \leq \\ &\leq c \sum_{j+|\alpha| \leq m-2} \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|^2}{\Lambda^2(t) |\xi|} \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{|\xi| \Lambda(t)} \right)^{m-j-|\alpha|-2} + c \frac{\lambda_t}{\lambda} + \\ &+ O(1) \lambda(t) |\xi| \sum |B_j|^2 \leq c \left(\frac{\lambda_t}{\lambda} + \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|^2}{\Lambda^2(t) |\xi|} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $k \leq m$ при всех $t \in [t_\xi, T]$, $|\xi| > M$ имеем

$$|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \leq c \left(\frac{\lambda_l(t)}{\lambda(t)} + \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) |\xi|} \right). \quad (1.20)$$

Аналогично, легко убедиться в том, что при указанных t, ξ

$$|\Delta_k(t, \xi)| \leq c \lambda(t) |\xi|, \quad |D_l \Delta_k(t, \xi)| \leq c \lambda_l(t) |\xi|, \quad (1.21)$$

$$|\Delta_k(t, \xi) - \Delta_l(t, \xi)| > c \delta_{kl} \lambda(t) |\xi|. \quad (1.22)$$

Далее, пусть $N^{-1} = V(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m)$ есть матрица Вандермонда, диагонализующая A , тогда при $t \in [t_\xi, T]$:

$$\|NN_i^{-1}\| \leq c \frac{\lambda_l}{\lambda}. \quad (1.23)$$

Вектор $V = NU$, где $U = (u, D_l u, \dots, D_l^{m-1} u)$ удовлетворяет уравнению

$$D_l V = A_1 V + iNN_i^{-1} V + NF \text{ с } F = (0, \dots, 0, f),$$

где $(A_1)_{kl} = \delta_{kl} \Delta_k$. Для энергии $E(t, V) = \sum_{k=1}^m |V_k(t, \xi)|^2$ нетрудно вывести, что

$$\left| \frac{dE}{dt} \right| \leq c \left(\frac{\lambda_l(t)}{\lambda(t)} + \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) |\xi|} \right) E + |f(t, \xi)|^2 \quad (1.24)$$

при всех $t \in [t_\xi, T]$. Но

$$\begin{aligned} \int_{t_\xi}^T \frac{\lambda(\tau) \ln^2 \lambda(\tau)}{\Lambda^2(\tau)} d\tau &= - \frac{\ln^2 \lambda(\tau)}{\Lambda(\tau)} \Big|_{t_\xi}^T + 2 \int_{t_\xi}^T \frac{\lambda_l(\tau) \ln \lambda(\tau)}{\lambda(\tau) \Lambda(\tau)} d\tau \leq \\ &\leq \frac{\ln^2 \lambda(t_\xi)}{\Lambda(t_\xi)} = - \frac{|\xi|}{N} \ln \lambda(t_\xi) \leq c \ln |\xi|, \end{aligned}$$

поэтому с помощью леммы Гронуолла из (1.24) выводим, что для всех $s_1, s_2 \in [t_\xi, T]$, $|\xi| > M$ верно неравенство

$$E(s_1, V) \leq c (1 + |\xi|)^{2k} \left\{ E(s_2, V) + \left| \int_{s_1}^{s_2} |f(t, \xi)|^2 dt \right| \right\}.$$

С учетом того, что $\|N^{-1}\| < c |\xi|^{-1}$, $\|N\| \leq c$, получаем оценку (1.6) для указанных s_1, s_2 . Но для остальных $s_1, s_2 \in [0, T]$, $|\xi| > M$ (1.6) имеет место согласно предложению 1.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно осуществить в (0.2), (0.3) преобразование Фурье по переменной x и воспользоваться теоремой существования и единственности задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром и уже доказанной оценкой (1.6). Существование конуса зависимости проверяется как в [16].

§ 2. Доказательство теоремы 2

Если задача (0.2), (0.3) является $C^{m, \infty}$ -корректной, то с помощью теоремы о замкнутом графике устанавливается, что для любого ком-

пакта $K \subset J \times R^n$ существует постоянная C_K такая, что для любого решения (0.2), (0.3) с $f \equiv 0$

$$\sum_{j+|q| < m-1} \sup_K |D_j^q D_x^\alpha u| \leq C_K \sum_{|q| < C_K, l < m-1} \sup_{\Gamma_K \cap \{t' = t\}} |D_x^\alpha \varphi|, \quad (2.1)$$

где Γ_K есть объединение конусов зависимости всех точек K .

В условиях теоремы 2 мы построим асимптотическое решение, для которого оценка (2.1) не может иметь места. Будем искать его в виде $u(t, \xi) \exp(ix \cdot \xi)$, где $\xi = \hat{\xi} |\xi| / |\hat{\xi}|$, $|\xi| \rightarrow \infty$, а $u(t, \xi)$ есть решение уравнения (1.5) с $f \equiv 0$.

Предварительно отметим следующее. В условиях теоремы 2 утверждение предложения 1 остается в силе для всех $\xi = \hat{\xi} |\xi| / |\hat{\xi}|$, $|\xi| > M$.

Более того, в силу „слабости“ нарушения гиперболичности (по определению гиперболичность эквивалентна $C^{m, \infty}$ -корректности задачи Коши), которое имеет место в условиях теоремы 2, оценка (1.6) может быть продолжена на зону $[t_1, t_3]$, где $t_3 = t_3(\xi)$ определяется из условия

$$|\hat{\xi}| \Lambda(t_3) = \Lambda_2 \nu(t_3) \ln^2 \lambda(t_3), \quad (2.2)$$

за счет оставшейся интегральной гиперболичности

$$\int_{t_1}^{t_3} |\operatorname{Im} \Delta_k(\tau, \xi)| d\tau \leq c(1 + \ln(1 + |\xi|)), \quad k=1, \dots, m. \quad (2.3)$$

Здесь, конечно, $t_3 \gg t_1$, в чем нетрудно убедиться.

Действительно, рассуждая точно так же, как в § 1 при получении (1.15)–(1.24), в нашем случае $t \in [t_1, t_3]$ мы должны только принять во внимание, что слагаемые $(\lambda(t) |\xi|)^{1+j-m} \left| \sum_{|q|=m-1-j} \operatorname{Im} a_{j,q}(t) \xi^q \right|$, входящие в оценку $|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)|$ не превосходят $c^1(t) / (\Lambda(t) \nu(t))$, что приводит вместо (1.20) к оценке

$$|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \leq c \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} + \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) |\xi|} \right), \quad t_1 \leq t \leq t_3. \quad (2.4)$$

Но при этих t очевидно, что

$$\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \leq N_3 \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) |\xi|}, \quad t_1 \leq t \leq t_3. \quad (2.5)$$

Поэтому, осуществляя преобразования § 1 вместо (1.24) получаем

$$\left| \frac{dE}{dt} \right| \leq c \left(1 + \frac{\lambda \ln^2 \lambda}{\Lambda^2 |\xi|} \right) E + |f|^2, \quad t_1 \leq t \leq t_3. \quad (2.6)$$

Из (2.3) и (2.6) уже нетрудно получить (1.6) в зоне $[t_1, t_3]$.

Рассмотрим теперь зону $[t_3, T]$. Рассуждения § 1 относительно поведения корней $\{\Delta_k\}_1^m$ в зоне $[t_1, T]$ и, в частности, разложения (1.18), (1.19), оценки (1.21)–(1.23), сохраняют свою силу, исключая только (1.20), (2.4). Покажем, что тем не менее существует зона $[t_4, T]$, в

которой старший символ доминирует, и, как будет доказано ниже, оценка (1.6) имеет место. Действительно, пусть t_3 есть решение уравнения

$$-N_4 \ln \lambda(t_4) = \nu(t_4) \ln |\xi|.$$

Ясно, что $t_4 > t_3$. Далее, в зоне $[t_4, T]$, $|\xi| > M$, имеет место (2.4). С другой стороны, при $t > t_3$

$$\frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) |\xi|} : \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} = \frac{1}{N_3},$$

так что

$$|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \leq c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)}, \quad k=1, \dots, m. \quad (2.7)$$

Вернемся в зону $[t_3, T]$. Исследуем функции $\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)$. Для этого перепишем (1.19) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda(t) \nu(t)}{\lambda(t)} \operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi) \prod_{r=k}^m (\mu_k(t, \xi) - \mu_r(t, \xi)) = \\ & = - \sum_{j=0}^{m-2} j! \mu_k^j(t, \xi) b_j(t) - \frac{(m-1)! \Lambda(t) \nu(t)}{\lambda(t)} \mu_k^{m-1}(t, \xi) \operatorname{Im} a_{m-1,0}(t) - \\ & - \frac{\Lambda(t) \nu(t)}{\lambda(t)} \sum_{j=1}^m j! \mu_k^j(t, \xi) \left| \sum_{|\alpha| = m-j-1} (\lambda(t) |\xi|)^{j-m} \operatorname{Im} a_{j-1, \alpha}(t) \xi^\alpha + \right. \\ & \left. + \lambda(t) |\xi| O(1) |B_j^c| \right|, \quad k=1, \dots, m. \end{aligned}$$

Очевидно, что с некоторыми постоянными δ_1, δ_2 , $0 < \delta_1 \leq \det \|(j-1)!\mu_k^{j-1}(t, \xi)\|_{k, j-1}^m \leq \delta_2$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda(t) \nu(t)}{\lambda(t)} (\lambda(t) |\xi|)^{j+1-m} \left| \sum_{|\alpha| = m-j-2} a_{j, \alpha}(t) \xi^\alpha \right| \leq c \frac{\nu(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda(t) |\xi|} \leq \frac{c}{N_3}, \\ & \frac{\Lambda(t) \nu(t)}{\lambda(t)} (\lambda(t) |\xi|)^{1+2j-2m} \left| \sum_{|\alpha| = m-j-1} a_{j, \alpha}(t) \xi^\alpha \right| \leq c \frac{\nu(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda(t) |\xi|} \leq \frac{c}{N_3}. \end{aligned}$$

Пронумеруем теперь корни Δ_k так, чтобы числа $Z_k = - \sum_{j=0}^{m-2} j! \mu_k^j(0, \xi) b_j(0)$ разбились на две группы: $\{Z_k\}_1^r$ и $\{Z_k\}_{r+1}^m$, где $Z_k = 0$ при $k \leq r$, и $Z_k \neq 0$ при $k \geq r+1$. Из (0.18) следует, что вторая группа непуста, т. е. $r \leq m-1$. Тогда с некоторой постоянной $\delta > 0$ при достаточно малых t и достаточно больших N_3

$$|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \geq \delta \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)}, \quad t \geq t_3, \quad k=r+1, \dots, m$$

и

$$|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \leq o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)}, \quad t \geq t_3, \quad k=1, \dots, r.$$

Обозначим $\sigma_k = \text{sign Im } \Delta_k(t, \xi)$, $k = r+1, \dots, m$. Согласно теореме Виета $\left| \sum_{k=1}^m \text{Im } \Delta_k(t, \xi) \right| = |\text{Im } a_{m-1,0}(t)| < \text{const}$, а с другой стороны $\sum_{k=1}^m |\text{Im } \Delta_k(t, \xi)| > (m-r) \delta \lambda(t) / (\Lambda(t) \nu(t))$. Следовательно, среди σ_k есть разные, и, не ограничивая общности можно предположить что, $\sigma_m = -1$, $\sigma_{m-1} = +1$.

Осуществим как и в § 1 замену $V = NU$, где $N^{-1} = V(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m)$ и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D_t V = A_1 V + iNN_t^{-1} V \quad (2.8)$$

с параметром ξ рассмотрим при $t \geq t_3$ вспомогательную задачу Коши с данными на поверхности $t = t_3$:

$$V_1(t_3, \xi) = V_2(t_3, \xi) = \dots = V_{m-1}(t_3, \xi) = 0, \quad V_m(t_3, \xi) = 1. \quad (2.9)$$

Для её решения V введем форму $S(t, \xi) = - \sum_{k=r+1}^m \sigma_k |V_k(t, \xi)|^2 - \sum_{k=1}^r |V_k(t, \xi)|^2$. Обозначив $(NN_t^{-1})_{kl}$ через n_{kl} для этой формы легко получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = & \sum_{k=r+1}^m 2\sigma_k (\text{Im } \Delta_k) |V_k|^2 + \sum_{k=1}^r 2(\text{Im } \Delta_k) |V_k|^2 + \\ & + \sum_{k=r+1}^m \sum_{l=1}^m 2\sigma_k \text{Re}(\bar{V}_k n_{kl} V_l) + \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^m 2\text{Re}(\bar{V}_k n_{kl} V_l). \end{aligned} \quad (2.10)$$

В силу неравенства $|n_{kl}| \leq c \lambda_l(t) / \lambda(t)$, $t \geq t_3$, откуда следует, что

$$\frac{dS}{dt} \geq c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \|V\|^2 \geq \alpha \frac{\lambda_r(t)}{\lambda(t) \nu(t)} S(t, \xi), \quad t > t_3, \quad (2.11)$$

с постоянной $\alpha > 0$. Так как $S(t_3, \xi) = 1$ из (2.11) выводим, что

$$\begin{aligned} S(t, \xi) & \geq S(t_3, \xi) \exp\left(\alpha \int_{t_3}^t \frac{\lambda_r(\tau)}{\lambda(\tau) \nu(\tau)} d\tau\right) > \\ & \geq \exp\left(k \frac{\ln \lambda(t)}{\nu(t)}\right) = \exp\left(k \frac{\ln \lambda(t)}{\nu(t)}\right) \exp\left(-k \frac{\ln \lambda(t_3)}{\nu(t_3)}\right) \end{aligned}$$

с постоянной $k > 0$. Но при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем $\nu \lambda^{2-\varepsilon} \ln^2 \lambda \leq \Lambda$, откуда

$$-\ln \lambda > \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\nu \ln^2 \lambda}{\Lambda}\right), \quad \alpha > 0,$$

и, следовательно

$$\begin{aligned} S(t, \xi) & \geq \exp\left(k \frac{\ln \lambda(t)}{\nu(t)}\right) \exp\left(\frac{k}{\alpha} \frac{1}{\nu(t_3)} \ln \frac{\nu(t_3) \ln^2 \lambda(t_3)}{\Lambda(t_3)}\right) = \\ & = \exp\left(k \frac{\ln \lambda(t)}{\nu(t)}\right) \exp\left(\frac{k}{\alpha} \frac{1}{\nu(t_3)} \ln \frac{|\xi|}{N_0}\right) = [\lambda(t)]^{\frac{k}{\nu(t)}} \left(\frac{|\xi|}{N_0}\right)^{\frac{k}{\alpha} \frac{1}{\nu(t_3)}}, \quad t > t_3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

С другой стороны

$$S(t, \xi) \leq E(t, V(t, \xi)) \leq cE(t, u(t, \xi)).$$

Итак, существуют положительные постоянные c, δ, γ, M такие, что для решения $u(t, \xi)$ задачи Коши с данными, соответствующими (2.9), для всех $\xi = \widehat{\xi}|\xi|/\widehat{|\xi|}$, $|\xi| > M$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=0}^{m-1} |D_i^t u(t, \xi)|^2 \geq c [\lambda(t)]^{\frac{\delta}{\gamma}(t)} (1 + |\xi|)^{\frac{\gamma}{\delta}(t)}, \quad t > t_3. \quad (2.13)$$

Учитывая также и оценку в зоне $[0, t_3]$ приходим к выводу, что для $u(t, \xi) \exp(ix \cdot \xi)$ при достаточно большом $|\xi|$ оценка (2.1) с $t_c = 0$ не имеет места. Итак, для $t_c = 0$ теорема доказана.

Рассмотрим случай $t_c = T$. Для этого осуществим преобразование, приводящее нас к системе уравнений (2.8), и для энергии $E(t, \xi) = \sum_{k=1}^m |V_k(t, \xi)|^2$ стандартным образом выведем неравенство

$$\left| \frac{dE(t, \xi)}{dt} \right| \leq c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} E(t, \xi) + |f(t, \xi)|^2, \quad t > t_4. \quad (2.14)$$

Но

$$\int_{t_4}^T \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} dt \leq -c \frac{\ln \lambda(t_4)}{\nu(t_4)} \leq \frac{c}{N_4} \ln |\xi|.$$

Таким образом, (1.6) имеет место и для всех $s_1, s_2 \in [t_4, T]$, $|\xi| > M$. Итак, „разрушение“ решения как в случае $t_c = 0$, так и в случае $t_c = T$ происходит в зоне $[t_3, t_4]$.

Рассмотрим для системы (2.8) задачу Коши с данными на поверхности $t = t_4$:

$$V_1(t_4, \xi) = \dots = V_{m-2}(t_4, \xi) = V_m(t_4, \xi) = 0, \quad V_{m-1}(t_4, \xi) = 1, \quad (2.15)$$

и для ее решения введем форму

$$S_1 = -S = \sum_{k=r+1}^m \sigma_k |V_k(t, \xi)|^2 + \sum_{k=1}^r |V_k(t, \xi)|^2.$$

Вспомним, что $\text{sign } \text{Im } \Delta_{m-1} = 1$. Тогда

$$\frac{dS_1}{dt} \leq -\alpha \frac{\lambda(t)}{\lambda(t) \nu(t)} S_1, \quad t_3 \leq t \leq t_4,$$

и так как $S_1(t_4, \xi) = 1$, откуда получаем

$$\begin{aligned} S_1(t_3, \xi) &\geq \exp \left(\alpha \int_{t_3}^{t_4} \frac{\lambda(t)}{\lambda(t) \nu(t)} dt \right) > \\ &> [\lambda(t_4)]^{\frac{\alpha}{\nu(t_4)}} \left(\frac{|\xi|}{N_3} \right)^{\frac{k}{\alpha} \frac{1}{\nu(t_4)}} \geq \delta |\xi|^{-\frac{\alpha}{N_3} + \frac{k}{\alpha} \frac{1}{\nu(t_4)}}, \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (2.16.)$$

Дальнейшие рассуждения ничем не отличаются от проведенных для случая $t_c = 0$. Теорема доказана.

Следствие из теоремы 2. Пусть выполнены (0.12) и условия на главный символ, фигурирующие в теореме 1. Тогда условие (0.13) эквивалентно условию гиперболичности (1.1), которое, в свою очередь, эквивалентно C^m -корректности задачи Коши (0.2), (0.3).

Что касается условий (0.12), то, на наш взгляд, они, вообще говоря, являются необходимыми условиями локальной разрешимости (0.2) в окрестности точки $t=0, x=0$.

Замечание. Как видно из доказательства, можно несколько усилить теорему 2, отказавшись от условия непрерывности в точке $t=0$ функций b_0, \dots, b_{m-2} , и заменив его условием на функции

$$Z_k(t) = - \sum_{j=0}^{m-2} \int \lambda_k^j(t, \xi) b_j(t), \quad k=1, \dots, m.$$

Потребуем, чтобы для каждого k либо $\lim_{t \rightarrow 0} Z_k(t) = 0$, либо с некоторой постоянной δ $0 < \delta < |Z_k(t)| < \delta^{-1}$ при всех $t \in J^0$. Тогда если среди $Z_k(t)$ есть отрицательная, то задача (0.2), (0.3) с $t_c = 0$ не является C^m -корректной. Если же есть положительная функция, то задача (0.2), (0.3) с $t_c = T$ не является C^m -корректной.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Как и в § 2 мы построим решение, для которого (2.1) не выполнено. Пусть снова $u(t, \xi)$ есть решение (1.5) с $f \equiv 0$, $\xi = \widehat{\xi} |\xi| / |\widehat{\xi}|$. Исследуем поведение по (t, ξ) его энергии. Несколько отходя от обозначений § 1 обозначим через t_1 следующий минимум:

$$t_1 = t_1(\widehat{\xi}) = \min \left\{ a, b |\widehat{\xi}|^{m-k-j} \lambda^{m-j-1}(a) |\ln \lambda(a)|^{k-1} = N_1 \vee (a) \Lambda^{k-1}(a), \right. \\ \left. |\widehat{\xi}| \lambda^{m-1}(b) |\ln \lambda(b)|^{m-2} = N_1 \Lambda^{m-2}(b) \right\} \quad (3.1)$$

и рассмотрим зону $[0, t_1]$. Вспомним доказательства оценок (1.7), (1.8). Совершенно аналогично получаем

$$\int_0^t \left| \sum_{|\alpha|=m-j-k} a_{j,\alpha}(\tau) \xi^\alpha \right| d\tau \leq -c \ln \lambda(t_1), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (j, k) \neq (\widehat{j}, \widehat{k}), \quad (3.2)$$

для всех $|\widehat{\xi}| > M$, $k=0, \dots, m$. Поэтому остается только заметить, что

$$\int_0^t \left| \sum_{|\alpha|=m-\widehat{j}-\widehat{k}} a_{\widehat{j},\alpha}(\tau) \xi^\alpha \right| d\tau \leq -c \ln \lambda(t_1), \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (3.3)$$

Из условий теоремы выводим, что $-\ln \lambda(t_1) \leq c \ln |\widehat{\xi}|$. Оценивая $\left| \frac{dE(t, u)}{dt} \right|$ и применяя лемму Гронуолла получаем (1.6) для всех $s_1, s_2 \in [0, t_1]$, $|\widehat{\xi}| > M$.

Покажем, что оценка (1.6) может быть продолжена на зону $[t_1, t_2]$, где t_2 есть решение уравнения

$$|\xi| \Lambda(t_2) = -N_2 v^{m-\widehat{k}-\widehat{j}}(t_2) \ln \lambda(t_2), \quad (3.4)$$

Нетрудно проверить, что $t_2 > t_1$. Обозначим через $\rho_1 = \rho_1(t, \xi)$, $\rho = \rho(t, \xi)$ положительные корни

$$\rho = \sqrt[m]{|\xi| \lambda^m(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{m-1}}, \quad \rho_1 = \sqrt[m-\widehat{j}]{|\xi|^{m-\widehat{k}-\widehat{j}} \lambda^{m-\widehat{j}}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{\widehat{k}} \frac{|b(t)|}{v(t)}}$$

и воспользуемся диагональной матрицей N , $(N)_{kl} = \delta_{kl} (\rho + \rho_1)^{-k+1}$ для перехода к новой неизвестной вектор-функции $V = NU$, где $U = (u, D_1 u, \dots, D_1^{m-1} u)$. Запишем уравнение (1.5) в виде системы первого порядка ($f \equiv 0$): $D_1 U = AU$. Тогда $D_1 V = BV + iNN_1^{-1} V$, где $B = NAN^{-1}$, и как нетрудно убедиться, $\|NN_1^{-1}\| \leq c_1 \rho_1$. Ясно, что $B_{ml} = (\rho + \rho_1)^{l-m} A_{ml}$, поэтому, как и при выводе (1.13) в доказательстве теоремы 1 $\|B(t, \xi)\| \leq c(\rho_1(t, \xi) + \rho(t, \xi))$. С другой стороны

$$\int_{t_1}^{t_2} (\rho(\tau, \xi) + \rho_1(\tau, \xi)) d\tau \leq c \ln |\xi|. \quad (3.5)$$

Поэтому для энергии $E(t, V) = \sum_{k=1}^m |V_k(t, \xi)|^2$ теперь уже нетрудно получить оценку $E(s_1, V) < c(I + |\xi|)^{2k} E(s_2, V)$ для всех $s_1, s_2 \in [t_1, t_2]$. Учитывая еще и очевидные оценки $\|N^{-1}\| \leq c|\xi|$, $\|N\| \leq c$ получаем неравенство (1.6) ($f \equiv 0$) в зоне $[t_1, t_2]$.

Рассмотрим теперь зону $[t_2, t_2]$, где t_2 определена в § 1. Здесь доминирует коэффициент, для которого условие корректности нарушено. Действительно, так как $m(m-j-k) - m + j \geq 0$, то для любого положительного ε при достаточно малом T

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{m(m-\widehat{j})}}{\rho_1^{m(m-\widehat{j})}} &\leq c \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{|\xi| \Lambda(t)} v^{m-\widehat{k}-\widehat{j}}(t) \right)^{m(m-\widehat{j}-\widehat{k})-m+j} \frac{v^{m-\widehat{j}}}{v^{m-\widehat{k}-\widehat{j}}}(t) \leq \\ &< c \left(\frac{|\ln \lambda(t_2)|}{|\xi| \Lambda(t_2)} v^{m-\widehat{k}-\widehat{j}}(t_2) \right)^{m(m-\widehat{j}-\widehat{k})-m+j} \frac{v^{m-\widehat{j}}}{v^{m-\widehat{k}-\widehat{j}}}(t_2) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, будем считать его главной частью оператора и строить диагонализатор. Обозначим через $\Delta_k = \Delta_k(t, \xi)$, $k = 1, \dots, m - \widehat{j}$, решения уравнения

$$\Delta^{m-\widehat{j}} + B(t, \xi) = 0, \quad (3.6)$$

где

$$B(t, \xi) = |\xi|^{m-\widehat{k}-\widehat{j}} \lambda^{m-\widehat{j}}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{\widehat{k}} \frac{b(t)}{v(t)} = -\rho_1^{m-\widehat{j}} e^{i\tau}.$$

Тогда $\Delta_k = \rho_k e^{i\varphi_k}$, $\varphi_k = \arg \Delta_k$, $k=1, \dots, m-\widehat{j}$. Запишем уравнение в виде системы первого порядка $D_t U = AU$ и построим частичный диагонализатор матрицы A :

$$N_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ (1+\rho) & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (1+\rho)^{\widehat{j}-1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -(1+\rho)^{\widehat{j}} V(\Delta_1, \dots, \Delta_{m-\widehat{j}}) \end{bmatrix},$$

где $V(\Delta_1, \dots, \Delta_{m-\widehat{j}})$ — матрица Вандермонда системы $|\Delta_l|_1^{m-\widehat{j}}$. Нетрудно проверить, что матрица $N_1 A N_1^{-1}$ представима в виде $B_1 + B_2$, где B_1 — диагональная матрица с элементами $(B_1)_{kk} = 0$, если $k \leq \widehat{j}$, и $(B_1)_{kk} = \Delta_{k-\widehat{j}}$, если $k > \widehat{j}$, а матрица B_2 такова, что $\|B_2(t, \xi)\| \leq c(1 + \rho(t, \xi))$ при всех $t \in [t_2, \xi]$, $|\xi| > M$. Действительно

$$\rho_1^{m-\widehat{k}-\widehat{j}}(t_2) > N_2 |b(t_2)| \left| \frac{\lambda(t_2) \ln \lambda(t_2)}{\Delta(t_2)} \right|^{m-\widehat{j}},$$

и с другой стороны, если $(j, k) \neq (\widehat{j}, \widehat{k})$, $j \leq \widehat{j}$, $m-j-k > 0$, то

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{|a|=m-j-k} a_{j,a}(t) \xi^a (1+\rho)^{j-\widehat{j}} \rho_1^{-m+\widehat{j}+1} \right| \leq \\ & \leq c \left| \sum_{|a|=m-j-k} a_{j,a}(t) \xi^a \right| (1+\rho)^{j-m+1} \leq c N^{m-k-j-\frac{m-1}{m}} (1+\rho(t, \xi)). \end{aligned}$$

Если же $(j, k) \neq (\widehat{j}, \widehat{k})$, $m-j-k=0$, то $|a_{j,0}(t)| (1+\rho)^{j-\widehat{j}} \rho_1^{-m+1} \leq c(1+\rho)$.

Итак, после частично диагонализующей замены $V = N_1 U$ получаем систему

$$D_t V = B_1 V + B_2 V + i N_1 N_1^{-1} V, \quad (3.7)$$

для которой рассмотрим задачу Коши с данными на границе $t = t_2$ зоны „микрокорректности“:

$$V_l(t_2, \xi) = \delta_{lm}, \quad l=1, \dots, m. \quad (3.8)$$

Введем обозначение $\sigma_l = -\text{sign} \text{Im} \Delta_l$, $l=r+1, \dots, m-\widehat{j}$, и для решения задачи (3.7), (3.8) рассмотрим форму

$$S(t, \xi) = - \sum_{l=1}^{\widehat{j}+r} |V_l|^2 + \sum_{l=\widehat{j}+r+1}^m \sigma_{l-\widehat{j}} |V_l|^2. \quad (3.9)$$

Тогда

$$\frac{dS}{dt} = 2 \sum_{l=\widehat{j}}^{\widehat{j+r}} \operatorname{Im} (\overline{V}_l D_l V_l) - 2 \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} \operatorname{Im} (\overline{V}_l D_l V_l). \quad (3.10)$$

Но

$$2 \sum_{l=\widehat{j}}^{\widehat{j+r}} \operatorname{Im} (\overline{V}_l D_l V_l) \geq 2 \sum_{l=\widehat{j+1}}^{\widehat{j+r}} (\operatorname{Im} \Delta_{l-\widehat{j}}) |V_l|^2 - c \left(1 + \rho + \frac{\lambda_l}{\lambda}\right) \sum_{l=\widehat{j}}^m |V_l|^2 \quad (3.11)$$

(при $r=0$ первое слагаемое справа в (3.11) отсутствует), и

$$-2 \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} \operatorname{Im} (\overline{V}_l D_l V_l) \geq 2 \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m |\operatorname{Im} \Delta_{l-\widehat{j}}| |V_l|^2 - c \left(1 + \rho + \frac{\lambda_l}{\lambda}\right) \sum_{l=\widehat{j}}^m |V_l|^2.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &\geq 2\rho_1 (\min_{r+1 < l < m - \widehat{j}} |\operatorname{Im} Z_l(t)|) \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m |V_l|^2 + 2\rho_1 (\min_{1 < l < r} \operatorname{Im} Z_l(t)) \sum_{l=\widehat{j+1}}^{\widehat{j+r}} |V_l|^2 - \\ &- c \left(1 + \rho + \frac{\lambda_l}{\lambda}\right) \sum_{l=\widehat{j}}^m |V_l|^2 > 2\rho_1 (\min_{r+1 < l < m - \widehat{j}} |\operatorname{Im} Z_l(t)|) \left\{ \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m |V_l|^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{1 + \delta_1} \sum_{l=\widehat{j+1}}^{\widehat{j+r}} |V_l|^2 \right\} - c \left(1 + \rho + \frac{\lambda_l}{\lambda}\right) \sum_{l=\widehat{j}}^m |V_l|^2. \quad (3.12) \end{aligned}$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ при $t \geq t_2$

$$\left(\frac{\lambda_l(t)}{\lambda(t) \rho_1(t, \xi)} \right)^{m-\widehat{j}} \leq \alpha \left(\frac{1}{v^{m-\widehat{k}-\widehat{j}}(t_2) |\ln \lambda(t_2)|} \frac{1}{\Lambda(t_2) |\xi|} \right)^{m-\widehat{k}-\widehat{j}} \frac{1}{|\ln \lambda(t)|^{m-\widehat{j}}} \leq \varepsilon N_2^{\widehat{k}+\widehat{j}-m}.$$

Поэтому из (3.12) получаем, что с постоянной $\alpha = \delta(2 + \delta_1)/(1 + \delta_1)$

$$\frac{dS(t, \xi)}{dt} > \alpha \rho_1(t, \xi) S(t, \xi), \quad t \in [t_2, t_\xi]. \quad (3.13)$$

Так как $S(t_2, \xi) = 1$ из (3.13) следует, что

$$S(t_\xi, \xi) > \exp \left(\alpha \int_{t_2}^{t_\xi} \rho_1(\tau, \xi) d\tau \right). \quad (3.14)$$

Но

$$\int_{t_2}^{t_\xi} \lambda(t) \Lambda^{-\frac{\widehat{k}}{m-\widehat{j}}}(t) \left\{ \frac{|\ln \lambda(t)|^{\widehat{k}}}{v(\lambda)} \right\}^{\frac{1}{m-\widehat{j}}} dt \geq \frac{m-\widehat{j}}{m-\widehat{j}-\widehat{k}} \times$$

$$\times \left(\Lambda^{\frac{m-\widehat{J}-\widehat{k}}{m-\widehat{J}}}(t) \left\{ \frac{|\ln \lambda(t)|^{\widehat{k}}}{\nu(t)} \right\}^{m-\widehat{J}} \right) \Big|_{t_2}^{t_\xi}.$$

Далее

$$\frac{|\xi|^{m-\widehat{k}-\widehat{J}} \Lambda^{m-\widehat{k}-\widehat{J}}(t_2) |\ln \lambda(t_2)|^{\widehat{k}}}{\nu(t_2)} = N_2^{m-\widehat{k}-\widehat{J}} |\ln \lambda(t_2)|^{m-\widehat{J}},$$

$$\frac{|\xi|^{m-\widehat{k}-\widehat{J}} \Lambda^{m-\widehat{k}-\widehat{J}}(t_\xi) |\ln \lambda(t_\xi)|^{\widehat{k}}}{\nu(t_\xi)} = \frac{N^{m-\widehat{k}-\widehat{J}}}{\nu(t_\xi)} |\ln \lambda(t_\xi)|^{m-\widehat{J}}.$$

Поэтому с некоторыми положительными постоянными α, c

$$S(t_\xi, \xi) \geq [\lambda(t_\xi)]^{\frac{1}{\nu^{m-\widehat{J}}(t_\xi)}} \lambda^c(t_2). \quad (3.15)$$

Из условий теоремы нетрудно вывести, что $\lambda^R(t_\xi) N |\ln \lambda(t_\xi)| \leq \Lambda(t_\xi)$ с постоянной $R > 0$, а следовательно $\lambda^{-R}(t_\xi) \geq |\xi|$. С другой стороны, $\lambda(t_2) \geq \lambda(t_1) \geq |\xi|^{-\beta}$, $\beta > 0$, поэтому с постоянной $\gamma > 0$

$$S(t_\xi, \xi) \geq |\xi|^{-\frac{\beta}{c} + 2\gamma \widehat{J} - m}(t_\xi) \geq |\xi|^{\frac{1}{\gamma \widehat{J} - m}(t_\xi)}. \quad (3.16)$$

Принимая во внимание, что $\|N_1(t, \xi)\| \leq \text{const}$, получаем, что $S(t_\xi, \xi) \leq cE(t_\xi, u(t_\xi, \xi))$. Таким образом

$$E(t_\xi, u(t_\xi, \xi)) \geq c |\xi|^{\frac{1}{\gamma \widehat{J} - m}(t_\xi)}, \quad c > 0. \quad (3.17)$$

Вместе с оценкой (1.6) ($f=0$) в зоне $[0, t_2]$ неравенство (3.17) при достаточно больших $|\xi|$ противоречит (2.1). Этим завершается доказательство теоремы.

§ 4. Обобщения. Примеры

Предложенный выше метод доказательств позволяет исследовать более общие гиперболические операторы с кратными характеристиками. Опишем некоторые типичные ситуации.

1°. *Разные скорости слипания.*

Теорема 4. *Предположим, что характеристические корни представимы в виде*

$$\tau_i(t, \xi) = \lambda_i(t) \lambda_i(t, \xi), \quad i=1, \dots, m,$$

где $\lambda_i(t) \in C^1(J)$, $\lambda_i(0) = \lambda_i(0) = 0$, $\lambda_i(t) > 0$, $t > 0$, и с некоторой постоянной $c_1 > (m-1)/m$ для всех $i=1, \dots, m$, $k=1, \dots, m-1$,

$$c_1 \frac{\lambda_l(t)}{\Lambda_l(t)} \leq \frac{\lambda_l'(t)}{\lambda_l(t)} \leq \frac{\lambda_l(t)}{\Lambda_l(t)}, \quad \Lambda_l(t) = \int_0^t \lambda_l(s) ds, \quad t \in J^0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\lambda_k'(t)}{\lambda_k(t)} \leq \frac{\lambda_{k+1}'(t)}{\lambda_{k+1}(t)}, \quad \lambda_{k+1}(t) \leq \text{const } \lambda_k(t), \quad t \in J^0. \quad (4.2)$$

При $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{k+1}(t)/\lambda_k(t) \neq 0$ мы без ограничения общности будем считать, что $\lambda_{k+1}(t) \equiv \lambda_k(t)$. Пусть, далее,

$$\lambda_i(t, \xi) \neq \lambda_j(t, \xi), \quad i \neq j, \quad (4.3)$$

при всех $t \in J$, $\xi \in R^n \setminus 0$ если $\lambda_l(t) \neq \lambda_j(t)$, а для всех $l=1, \dots, m-1$, $r=1, \dots, l-1$, $j=1, \dots, l-r$, при всех $t \in J^0$ выполнены условия

$$\lambda_l(t) \left(\prod_{l-r}^l \lambda_l(t) \right) \left(\prod_{k=r+j}^l \frac{|\ln \lambda_k(t)|}{\Lambda_k(t)} \right) < \text{const } \lambda_r^{l-r+2}(t) \left(\frac{|\ln \lambda_r(t)|}{\Lambda_r(t)} \right)^{l-r+1-l}. \quad (4.4)$$

Тогда достаточными для корректности задачи Коши (0.2), (0.3) в смысле теоремы 1 являются следующие условия:

$$|D_i^k a_{j, \alpha}(t)| \leq c \lambda_{m-j-1}(t) \left(\prod_{i=1}^{m-j-1} \lambda_i(t) \right) \left(\prod_{l=|a|}^{m-j-1} \frac{|\ln \lambda_l(t)|}{\Lambda_l(t)} \right) \left(\frac{\lambda_{m-j-1}(t)}{\Lambda_{m-j-1}(t)} \right)^k, \quad (4.5)$$

$$|D_i^k \text{Im } a_{m-1-|a|, \alpha}(t)| \leq c \left(\prod_{l=1}^{l_0} \lambda_l(t) \right) \left(\frac{\lambda_{l_0}(t)}{\Lambda_{l_0}(t)} \right)^{k+1}, \quad k=0, 1. \quad (4.6)$$

2°. *Интегральные условия.* Можно несколько усилить теоремы 1–4, придав условиям на символ оператора интегральный вид. Сделаем это, например, в случае, соответствующем описанному теоремой 1.

Теорема 5. Пусть функция $\lambda(t)$ удовлетворяет условиям (0.10), а точки $t_1(\xi)$, t_2 определены выше в (1.3) и (1.4), соответственно. Предположим, что с некоторыми постоянными N , N_1 , M , c для всех j, α , и всех $|\xi| > M$

$$\int_0^{t_1(\xi)} |a_{j, \alpha}(t)| dt \leq c |\xi|^{-|a|} \ln |\xi|, \quad (4.7)$$

$$\int_{t_1(\xi)}^{t_2} \lambda^{j+1-m}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{\frac{(m-1)(j+1-m)}{m}} |a_{j, \alpha}(t)| dt \leq c |\xi|^{\frac{m-1-j-m|a|}{m}} \ln |\xi|, \quad (4.8)$$

а корни $\{\tilde{\Delta}_k(t, \xi)\}_1^m$ уравнения

$$\tilde{\Delta}^m + \sum_{m-1 < j+|a| < m, j < m} \tilde{\Delta}^j \text{Re } a_{j, \alpha}(t) \xi^\alpha = 0 \quad (4.9)$$

вещественны при $t > t_\varepsilon$, $|\xi| > M$. Обозначим через $N^{-1}(t, \xi)$ матрицу Вандермонда $V(\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \dots, \tilde{\Delta}_m)$, а через $\tilde{A}(t, \xi)$ — матрицу с элементами

$$\tilde{A}_{jk}(t, \xi) = \delta_{mj} \left(\sum_{|a| < m-k-1} a_{k-1, a}(t) \xi^a + \sum_{|a| = m-k} \operatorname{Im} a_{k-1, a}(t) \xi^a \right).$$

Тогда, если при $|\xi| \geq M$

$$\int_{t_\varepsilon}^T \|N(t, \xi) \tilde{A}(t, \xi) N^{-1}(t, \xi)\| + \|N(t, \xi) N_t^{-1}(t, \xi)\| dt \leq c \ln |\xi|, \quad (4.10)$$

$$\text{и} \quad \|N(t, \xi)\| + \|N^{-1}(t, \xi)\| \leq c |\xi|^c, \quad t > t_\varepsilon, \quad (4.11)$$

то справедливо утверждение теоремы 1.

Аналогичным образом можно сформулировать теоремы, обобщающие теоремы 2, 3, 4.

3°. Факторизация оператора. Пусть $a_{j, \alpha} \in C^\infty(J)$. Если только часть характеристических корней оператора P представима в виде

$$\tau_i(t, \xi) = \lambda(t) \lambda_i(t, \xi), \quad i=1, \dots, r, \quad r < m,$$

и при всех $t \in J$, $\xi \neq 0$

$$\tau_i(t, \xi) \neq \tau_j(t, \xi), \quad i=1, \dots, m, \quad j=r+1, \dots, m \quad i \neq j,$$

то оператор P допускает факторизацию

$$P(t, D_t, D_x) = P_1(t, D_t, D_x) P_2(t, D_t, D_x) + \sum_{j=0}^{m-1} R_j(t, x, D_x) D_t^j, \quad (4.12)$$

где P_1, P_2 — п. д. операторы по x , дифференциальные по t , $\operatorname{ord} P_1 = r$, $\operatorname{ord} P_2 = m - r$, $\operatorname{ord} R_j = -\infty$ и P_2 — строго гиперболический. При этом условия на полный символ оператора P достаточные или необходимые (в смысле теорем 1—5) для $C^{m, \infty}$ -корректности задачи Коши выполняются одновременно с соответствующими условиями на полный символ оператора P_1 . Последние имеют либо вид (0.12), (0.13), либо (0.16), (0.19), либо (0.20), (0.22), либо (4.7)—(4.11). Вычисления в ситуации, соответствующей теореме 1, приводят к следующим условиям:

$$|D_t^k a_{j, \alpha}(t)| \leq c \lambda^{r-j}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{m-j-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad k=0, 1, \quad (4.13)$$

$$|D_t^k \operatorname{Im} a_{m-1-|\alpha|, \alpha}(t)| \leq c \lambda^{|\alpha|+r-m}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^{1+k}, \quad k=0, 1, \quad (4.14)$$

$|\alpha| > m - r$, которые являются достаточными в смысле теоремы 1 для корректности задачи Коши (0.2), (0.3). Аналогичные обобщения допускают теоремы 2, 3, 4, 5.

4°. Пример 1. Пусть

$$\lambda(t) = \exp(-t^{-r}), \quad r = \operatorname{const} > 0, \quad \Lambda(t) = \int_0^t \exp(-s^{-r}) ds,$$

и рассмотрим уравнение

$$u_{III} - A^2 \lambda^2(t) u_{I,xx} + B(t) \frac{\lambda^3(t)}{\Lambda(t)} u_{xx} + C(t) \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} u_{Ix} + D(t) \frac{\lambda^3(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t)} u_x = f. \quad (4.15)$$

(а) Если

$$A \in \mathbf{R}, A > 0, |D_i^k B(t)| + |D_i^k C(t)| \leq c |\ln \lambda(t)| \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad k=0, 1,$$

$$|\operatorname{Re} B(t)| + |\operatorname{Re} C(t)| + |D(t)| \leq c,$$

то выполнены условия теоремы 1; (в) Пусть

$$B(t) = [id \ln \lambda(t) + b/\nu(t)], \quad d \in \mathbf{C}, \quad \nu(t) = \underbrace{(\ln \ln \dots \ln |\ln t|)}_m^{-1},$$

$$C(t) = D(t) \equiv 0.$$

Если $A > 0, l > 0, b \in \mathbf{R} \setminus 0$, то, согласно теореме 2, задача (0.2), (0.3) не является C^3 -корректной ни при каких $m \geq 1, d \in \mathbf{C}, t_c \in [0, T]$;

(с) Пусть $B(t) = b(\ln \lambda(t))/\nu(t), A \in \mathbf{C}, b \in \mathbf{C}, D(t) = C(t) = 0$. Если $\nu(t)$ как в (в), $l > 0, m > 0$, то задача не является C^3 -корректной с $t_c = 0$. Пусть теперь $\nu(t) = \lambda^\alpha(t)$. Если $\alpha > 1, b \neq 0$, то коэффициент уравнения имеет особенность в $t = 0$. Такие уравнения в настоящей работе не рассматриваются. Если $\alpha < 0$, то выполнены условия теоремы 1. Если $\alpha = 0$ и $\operatorname{Re} b \neq 0$, то задача с $t_c = 0$ не является корректной. Если $0 < \alpha < 1, b \in \mathbf{C} \setminus 0$, то, согласно теореме 3, задача с $t_c = 0$ не корректна; (d) Пусть $D(t) = C(t) = 0, B(t) = b t^l \Lambda(t)/\lambda^3(t)$. Если $b \in \mathbf{C} \setminus 0$, то, при любом $l > 0$ выполнены условия теоремы 3. Аналогично рассматриваются случаи $D(t) \neq 0, C(t) \neq 0$; (е) Пусть

$$\lambda(t) = \exp(-\exp t^{-r}), \quad \Lambda(t) = \int_0^t \exp(-\exp s^{-r}) ds.$$

Тогда справедливы утверждения пунктов (а) — (с). Если же $D(t) = C(t) = 0, B(t) = b \exp(-t^{-r}) \Lambda(t)/\lambda^3(t), b \in \mathbf{C} \setminus 0$ и $r_1 > 0$, то выполнены условия теоремы 3 (ср. с теоремой 4.1 [2]).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14.XII. 1983

4. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Կոշու խնդրի կոսեկուսիայան անհրաժեշտ և բավարար պայմանները բազմապատիկ բնութագրիչներով օպերատորների համար (ամփոփում)

Հոդվածում առամասնավորում է փոփոխական պատկուսիայամբ խարակտերիստիկ արմատներով բարձր կարգի հիպերբոլական տիպի հավասարման համար Կոշու խնդրի C^∞ -կորեկտությունը, Ենթադրվում է, որ օպերատորի գործակիցները կախված են միայն t -ից, նշված են պայմաններ ցածր կարգի անդամների գործակիցների վրա, որոնք բավարար են Կոշու խնդրի կորեկտության համար, երբ սկզբնական պայմանները տրվում են ինչպես $t=0$ հիպերհարթության վրա, այնպես նաև նրանից դուրս: Բավականին ընդհանուր դասերի հավասարումների համար ապացուցված է, որ նշված բավարար պայմանները հանդիսանում են C^∞ -կորեկտության համար նաև անհրաժեշտ պայմաններ:

К. Н. YAGDJIAN. *Necessary and sufficient conditions for well-posed Cauchy problem for operators with multiple characteristics* (summary)

The paper deals with the operators with multiple characteristic roots. It is assumed that the coefficients depend on time variable only. For a wide class of such operators a necessary and sufficient conditions of the well-posedness of the Cauchy problem is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Гордин. Задача Коши для гиперболических уравнений, М., ИЛ, 1961.
2. В. Я. Иврий, В. М. Петков. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 29, вып. 5, 1974, 3—70.
3. E. Levi. Caratteristiche multiple e problema di Cauchy, Ann. di Matem. Ser. a, 1909, v. 16, 161—201.
4. O. A. Oleinik. On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations. Comm. Pure Appl. Math., 1970, v. 23, p. 6, 359—389.
5. А. Б. Нерсисян. Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 1971, 196, № 2, 289—292.
6. А. Б. Нерсисян, А. О. Оганесян. О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», VIII, № 3, 1973, 255—273.
7. T. Nishitani. A necessary and sufficient condition for the hyperbolicity of second order equations with two independent variables, Jour. Math. Kyoto Univ., 1984, v. 24, p. 1, 91—104.
8. Ф. О. Мамиконян, А. Б. Нерсисян. Об устойчивости решения задачи Коши для гиперболического уравнения с данными на линии параболичности, Ученые записки ЕГУ, 1972, № 1, 3—14.
9. И. С. Березин. О задаче Коши для линейного уравнения второго порядка с начальными данными на линии параболичности, Мат. сб., 24, № 2, 1949, 301—320.
10. F. Colombini, S. Spagnolo. An example of weakly hyperbolic Cauchy problem not well posed in C^∞ , Acta Math., 1982, 148, 243—253.
11. S. Tarama. Un exemple dans le probleme de Cauchy pour les equations faiblement hyperboliques, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 1979, v. 15, p. 2, 455—468.
12. К. А. Ягджян. Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических операторов, «Материалы VII советско-чехословацкого семинара», Ереван, 1981.
13. К. А. Ягджян. О корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 15, № 6, 1980, 475—487. (Engl. transl.: Soviet J. of Contemporary Math. Anal., 1980, v. 15, № 6, 54—65).
14. S. Tarama. Sur le probleme de Cauchy pour une classe des operateurs differentielles du type faiblement hyperbolique, Jour. Math. Kyoto Univ., 1982, v. 22, p. 2, 333—368.
15. С. Мизохата. Теория уравнений с частными производными, М., «Мир», 1977.
16. Г. Р. Александрян, К. А. Ягджян. Условия корректности задачи Коши и распространение особенностей решений уравнений с кратными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 18, № 2, 1983, 134—149. (Engl. transl.: Soviet J. of Contemporary Math. Anal., 1983, v. 18, № 2, 53—68).

УДК 517.983

Р. Л. ШАХБАГЯН

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С БЕСКОНЕЧНЫМ
ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1°. В цилиндрической области, основанием которой является CL -многообразие M с краем*, рассмотрим следующую параболическую задачу:

$$\widehat{P}\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right)u \equiv \sum_{k=0}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{A}(x, \xi)\right)^k u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$x \in M, t \in R^1,$$

$$\widehat{N}_j\left(x', \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right)u \Big|_{\partial M} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{B}(x', \xi)\right)^{n_j} u \Big|_{\partial M} = g_j(x', t), \quad (2)$$

$$x' \in \partial M, t \in R^1, j=1, 2, \dots, m,$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, k=0, 1, \dots, m-1, x \in M, \quad (3)$$

где \widehat{A} — эллиптический оператор второго порядка, \widehat{B} — оператор первого порядка, заданный на границе (подробнее условия на операторы \widehat{P} и \widehat{N}_j приводятся ниже).

В настоящей статье изучается разрешимость сформулированной задачи. Привлекая технику преобразования Лапласа она сводится к эллиптической задаче с параметром, исследованной автором в работе [1].

При этом решение задачи (1)–(3) получается как обратное преобразование Лапласа соответствующей эллиптической задачи.

Однородная начально-краевая задача для параболических уравнений второго порядка исследована в работе М. И. Вишика и А. В. Марченко [2].

Ю. Л. Далецким в работе [6] доказана однозначная разрешимость задачи Коши для параболического уравнения вида

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{Sp} [A^*(t, x) F''(t, x) A(t, x)] + \dots = 0$$

с начальными данными

$$u|_{t=0} = \Phi(x),$$

* Определение CL -многообразия см. в [1], [2].

где x — точка функционального пространства, $F(t, x)$ — искомый функционал, F'' — вторая производная F по x в смысле Фреше, A и A^* — сопряженные операторы, зависящие, вообще говоря, от t и x , ограниченные в соответствующих функциональных пространствах, а многочленом в уравнении обозначены младшие члены. Функционал $\Phi(x)$ принадлежит классу $C^{(2)}(H_1)$, где H_1 — представитель шкалы гильбертовых пространств.

Совершая формально преобразование Лапласа по t задача (1) — (3) трансформируется в следующую задачу:

$$\bar{P}(x, \xi, \lambda) \bar{u}(x, \lambda) = \bar{f}(x, \lambda), \quad x \in M, \quad (4)$$

$$\bar{N}_j(x', \xi, \lambda) \bar{u}(x, \lambda)|_{\partial M} = \bar{g}_j(x', \lambda), \quad x' \in \partial M, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

(здесь через \bar{u} , \bar{f} , \bar{g}_j обозначено преобразование Лапласа по t , соответственно, функций u , f , g_j).

Под преобразованием Лапласа (см., например, [3]) функции $h(t)$, тождественно равной нулю при $t < 0$ и для которой $e^{-\gamma t} h \in L_1(\mathbb{R}^1)$, будем понимать функцию

$$\bar{h}(\lambda) = \Lambda_{t \rightarrow \lambda} h(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} h(t) dt,$$

где $\lambda \in \mathbf{C}_\gamma = \{\lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} \lambda \geq \gamma\}$.

Как известно, обратное преобразование Лапласа $\Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1}$ задается формулой

$$h(t) = \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} \bar{h}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} e^{\lambda t} \bar{h}(\lambda) d\lambda$$

для $\gamma_1 > \gamma$.

Задача (4) — (5), как уже отмечалось, подробно изучена в работе автора [1]. Опишем вкратце классы символов операторов $\bar{P}(x, \xi, \lambda)$ и $\bar{N}_j(x', \xi, \lambda)$ (полные определения даны в [1]).

Пусть H — вещественное гильбертово пространство l_2 . Пространство H_1 , по определению, гильбертово пространство последовательностей $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечной нормой $\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \sigma_i^{-2} \right)^{1/2}$, где $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность чисел, $\sigma_i > 1$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^{-2} < +\infty$.

Пусть, далее, U — окрестность в H_1 . Предполагается, что символы операторов \bar{P} и \bar{N}_j локально представимы в виде

$$P(x, \xi, \lambda) = \sum_{k=0}^m (A(x, \xi) + \lambda)^k, \quad x \in U, \xi \in H.$$

где $A(x, \xi) = (A_1(x) \xi, \xi) + (c(x), \xi) + c_0(x)$,

$$(A_1(x)\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^{\bar{n}} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, (c(x), \xi) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} c_i(x)\xi_i.$$

Коэффициенты $a_{ij}(x)$, $c_i(x)$, $c_0(x) \in CL^-(U)$, матрица $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{\bar{n}}$ предполагается симметрической, $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots)$ принадлежит пространству H при любом $x \in U$, λ — комплексный параметр, принадлежащий \mathbb{C}_τ . На символ $A(x, \xi)$ налагается условие эллиптичности:

$$C^{-1}\|\xi\|^2 \leq (A_1(x)\xi, \xi) \leq c\|\xi\|^2, \forall x \in U, \xi \in H,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $\|\xi\| = \left(\sum_{i=1}^{\bar{n}} \xi_i^2\right)^{1/2}$.

Класс символов $P(x, \xi, \lambda)$, удовлетворяющих вышеприведенным условиям, обозначим через $E(U)$ (подробнее описание класса $E(U)$ см. в [1]).

Обозначим через U_α ($\alpha \in A$) координатное покрытие CL -многообразия M , $\{\chi_\alpha\}$ — система локальных карт: $\chi_\alpha: U_\alpha \rightarrow H_1$, $\{\varphi_\alpha\}$ — набор функций, удовлетворяющих условию $\sum \varphi_\alpha \equiv 1$.

По символу $P(x, \xi, \lambda) \in E(M)$ определим теперь оператор \hat{P} . Пусть $s \geq 2m$, на функциях $u \in CL^s(M)$ оператор \hat{P} определяется следующим образом:

$$\hat{P}u = \sum_{\alpha} \chi_\alpha^* \hat{P}_\alpha (\chi_\alpha^{-1})^* \varphi_\alpha u, \quad (6)$$

где семейство функций $\{P_\alpha(x, \xi, \lambda)\}$, $\alpha \in A$, отображают $\chi_\alpha(U_\alpha) \times H \times \mathbb{C}_\tau \rightarrow \mathbb{C}$ и подчинены некоторым условиям (см. определение 2 из [1]).

Аналогично определяются операторы \hat{N}_j на границе ∂M многообразия M . На границе ∂U окрестности $U \subset H_1$ символы операторов \hat{N} задаются следующим образом:

$$N_j(x', \xi, \lambda) \equiv (B(x', \xi) + \lambda)^{n_j} = \left(\xi_1 + \sum_{k=2}^{\bar{n}} b_k(x')\xi_k + \lambda\right)^{n_j}, \quad (7)$$

$$j=1, 2, \dots, m, b = (b_2(x'), b_3(x'), \dots) \in H, \forall x' \in \partial U.$$

Функции $b_k(x')$ бесконечно дифференцируемы на ∂U , а

$$\text{ord } \hat{N}_j = n_j < 2m.$$

Пусть, как и выше, U_α , $\alpha \in A$ — координатное покрытие CL -многообразия M . Обозначим через $\Gamma = A \setminus \{\alpha \in A, U_\alpha \cap \partial M = \emptyset\}$. По определению CL -многообразия, при $\alpha \in \Gamma$ $\partial M \cap U_\alpha = \emptyset$ и $\chi_\alpha(\partial M \cap U_\alpha) \subset \{x \in H_1^+, x_1 = 0\}$. Для любого $\alpha \in \Gamma$ обозначим через $U'_\alpha = \partial M \cap U_\alpha$.

Мы скажем, что на границе ∂M CL -многообразия M заданы символы $N_j \in E(\partial M)$, $j=1, 2, \dots, m$, если задано семейство функций $\{N_{j,\alpha}(x', \xi, \lambda)\}$, $\alpha \in \Gamma$, отображающих $\chi_\alpha(U'_\alpha) \times H \times \mathbb{C}_\tau \rightarrow \mathbb{C}$, имеющих

представление (7), где $x' \in \gamma_\alpha(U'_\alpha)$, а коэффициенты $b_\alpha = \{b_{2,\alpha}(x'), b_{3,\alpha}(x'), \dots\} \in H$, $\forall x' \in \gamma_\alpha(U'_\alpha)$ (см. определение 3 работы [1]).

Определим теперь граничные операторы (5). На функциях $u \in CL^s(M)$, при $s \geq n_j$ оператор \tilde{N}_j определяется следующим образом:

$$\tilde{N}_j u = \sum_{\alpha \in \Gamma} \gamma_\alpha^* \tilde{N}_{j,\alpha} (\gamma_\alpha^{-1})^* \varphi_\alpha u. \quad (8)$$

2°. Введем функциональное пространство, в котором будем искать решение \tilde{u} задачи (4), (5). Как будет доказано ниже (предложение 1) решение u задачи (1)–(3) будет получено из решения \tilde{u} задачи (4), (5) с помощью обратного преобразования Лапласа.

Пространство $\Lambda CL(M, \gamma)$. Функция $\tilde{h}(x, \lambda)$ принадлежит, по определению, пространству $\Lambda CL(M, \gamma)$, если

а) Для любого $\lambda_0 \in C_\gamma$ функция $\tilde{h}(x, \lambda_0) \in CL^0(M)$, причем как функция от λ $\tilde{h}(x, \lambda)$ непрерывна в C_γ со значениями в $CL^0(M)$.

б) $\tilde{h}(x, \lambda)$ аналитична по λ со значениями в $CL^0(M)$, при этом $\tilde{h}(x, \lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ в C_γ .

с) Положим $\lambda = \sigma + i\tau$. Требуется, чтобы для любого $\sigma \geq \gamma$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma + i\tau|^m \|\tilde{h}(x, \sigma + i\tau)\|_{C(M)} d\tau \leq K < +\infty, \quad (9)$$

где $K > 0$ — постоянная, не зависящая от σ .

Пространство $\Lambda CL(\partial M, \gamma)$ определяется аналогично. Функция $\tilde{h}(x', \lambda)$, $x' \in \partial M$, принадлежит, по определению, пространству $\Lambda CL(\partial M, \gamma)$, если выполнены условия а)–с), в которых необходимо заменить x на x' , $CL^0(M)$ — на $CL^0(\partial M)$, а условие (9) записывается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma + i\tau|^m \|\tilde{h}(x', \sigma + i\tau)\|_{C(\partial M)} d\tau \leq K < +\infty, \quad (9')$$

где постоянная K не зависит от σ .

Обозначим через \mathfrak{M} оператор задачи (4), (5):

$$\mathfrak{M} \tilde{u} = \{\tilde{P} \tilde{u}(x, \lambda), x \in M, \tilde{N}_1 \tilde{u}|_{\partial M}, \dots, \tilde{N}_n \tilde{u}|_{\partial M}, \lambda \in C_\gamma\}$$

и пусть $\Omega_{\mathfrak{M}}$ — область определения его замыкания.

Определение. Мы скажем, что функция $\tilde{u}(x, \lambda) \in \Omega_{\mathfrak{M}}$ является решением задачи (4), (5), если $\tilde{u} \in \Lambda CL(M, \gamma)$, ограничение \tilde{u}

на $\partial M: \bar{u}|_{\partial M} \in \Delta CL(\partial M, \gamma)$ и для любого $\lambda \in C_T$ удовлетворяет уравнениям (4), (5).

3°. Предложение 1. Пусть $\bar{f}(x, \lambda) \in \Delta CL(M, \gamma)$, $\bar{g}_j(x', \lambda) \in \Delta CL(\partial M, \gamma)$, а $\bar{u}(x, \lambda)$ — соответствующее им решение задачи (4), (5).

Тогда $u(x, t) = \Lambda^{-1} \bar{u}(x, \lambda)$ является решением задачи (1)–(3), соответствующее правой части $f(x, t) = \Lambda^{-1} \bar{f}(x, \lambda)$ и функциям $g_j(x', t) = \Lambda^{-1} \bar{g}_j(x', \lambda)$, заданным на границе ∂M , при этом \bar{F} и $\bar{N}_j u|_{\partial M}$ непрерывны по t со значениями в $CL^0(M)$ и $CL^0(\partial M)$ соответственно.

Доказательство. Пусть $\bar{u}(x, \lambda)$ — решение задачи (4), (5). Проверим вначале выполнение условия (3). Имеем для $k, 0 \leq k \leq m-1$ и $\sigma > \gamma$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (\sigma + i\tau)^k e^{(\sigma+i\tau)t} \bar{u}(x, \sigma + i\tau) d\tau,$$

откуда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} e^{-\sigma t} \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |\sigma + i\tau|^k |\bar{u}(x, \sigma + i\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |\sigma + i\tau|^k \|\bar{u}(x, \sigma + i\tau)\|_{C(M)} d\tau \leq K_1 < +\infty. \end{aligned}$$

При выводе последней оценки мы воспользовались условием (9). Из этого неравенства очевидным образом следует, что

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \equiv 0, \text{ при } t < 0 \text{ и } k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Докажем теперь, что $u = \Lambda^{-1} \bar{u} \in \mathcal{O}_{\text{int}}$ для любого $t > 0$, а также, что функция u удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (2).

Функция $\bar{u}(x, \lambda) \in \Delta CL(M, \gamma)$, следовательно, в силу условия а), она непрерывна в C_T . Пусть

$$\Lambda_{N,j}^{-1} \bar{u} = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \bar{u}(x, \sigma + i\tau_j) e^{(\sigma+i\tau_j)t} \Delta\tau_j$$

— интегральная сумма для интеграла

$$u_N(x, t) \equiv \Lambda_N^{-1} \bar{u} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-iN}^{\sigma+iN} \bar{u}(x, \sigma + i\tau) e^{(\sigma+i\tau)t} d\tau.$$

Имеем $\lim_{\max |\Delta\tau_j| \rightarrow 0} \Lambda_{N,j}^{-1} \bar{u} = \Lambda_N^{-1} \bar{u}$ в $CL^0(M)$. По определению решения $\bar{u} \in \Omega_{\mathcal{D}\mathcal{D}}$, откуда следует, что $\Lambda_{N,j}^{-1} \bar{u} \in \Omega_{\mathcal{D}\mathcal{D}}$. Следовательно, к функции $\Lambda_{N,j}^{-1} \bar{u}$ можно применить оператор \hat{P} . Имеем

$$\begin{aligned} \hat{P}(x, \xi, \lambda) \Lambda_{N,j}^{-1} \bar{u} &= \sum_{k=0}^m (\hat{A}(x, \xi) + \lambda)^k \Lambda_{N,j}^{-1} \bar{u} = \Lambda_{N,j}^{-1} \hat{P} \bar{u} = \\ &= \Lambda_{N,j}^{-1} \left(\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k c_{k,l} \lambda^l [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l} \bar{u} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k c_{k,l} \Lambda_{N,j}^{-1} (\lambda^l [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l} \bar{u}) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k c_{k,l} [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l} \Lambda_{N,j}^{-1} (\lambda^l \bar{u}). \end{aligned}$$

Из условия а) следует, что $\Lambda_{N,j}^{-1} (\lambda^l \bar{u}) \rightarrow \Lambda_N^{-1} (\lambda^l \bar{u})$ при $\max |\Delta\tau_j| \rightarrow 0$ в пространстве $CL^0(M)$. Таким образом

$$\hat{P}(x, \xi, \lambda) \Lambda_{N,j}^{-1} \bar{u} \rightarrow \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k c_{k,l} [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l} \Lambda_N^{-1} (\lambda^l \bar{u}).$$

С другой стороны, мы имели, что $\Lambda_{N,j}^{-1} \bar{u} \rightarrow \Lambda_N^{-1} \bar{u}$ в $CL^0(M)$. Пользуясь теперь замкнутостью оператора \hat{P} в $CL^0(M)$, получим, что $\Lambda_N^{-1} \bar{u} \in \Omega_{\mathcal{D}\mathcal{D}}$ и

$$\hat{P} \Lambda_N^{-1} \bar{u} = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k c_{k,l} [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l} \Lambda_N^{-1} (\lambda^l \bar{u}).$$

Далее, из условий в) и с) определения пространства $\Lambda CL(M, \gamma)$ имеем: $\Lambda_N^{-1} \bar{u} \rightarrow \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} \bar{u}$, при $N \rightarrow \infty$ и

$$\hat{P} \Lambda_N^{-1} \bar{u} \rightarrow \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k c_{k,l} [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l} \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} (\lambda^l \bar{u}). \quad (10)$$

В обоих случаях сходимость имеет место в $CL^0(M)$.

Еще раз используя замкнутость оператора \hat{P} будем иметь $\hat{P} \Lambda_N^{-1} \bar{u} \rightarrow \hat{P} \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} \bar{u}$. Заметим, что $\Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} (\lambda^l \bar{u}) = \frac{\partial^l u}{\partial t^l}$, откуда и из (10) получим

$$\begin{aligned} \hat{P} u &= \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} \left(\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k c_{k,l} [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l} \lambda^l \bar{u} \right) = \\ &= \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} (\hat{P}(x, \xi, \lambda) \bar{u}) = \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} \bar{f} = f(x, t). \end{aligned}$$

Из непрерывности $\Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} (\lambda^l \bar{u})$ вытекает непрерывность по t $\hat{P} u(x, t)$ в $CL^0(M)$.

Таким образом, доказано, что функция u удовлетворяет уравнению (1) при любом $t > 0$.

Рассмотрим теперь граничные операторы. Имеем

$$\widehat{N}_k(x', \xi, \lambda) \bar{u}(x, \lambda)|_{\partial M} = \bar{g}_k(x', \lambda), \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Функция $\bar{u}(x, \lambda) \in \mathcal{Q}_{\text{гг}}$. Поскольку она является решением задачи, то ограничение \bar{u} на границу $\partial M: \bar{u}|_{\partial M} \in \Lambda CL(\partial M, \gamma)$. Тогда согласно условию а) определения пространства $\Lambda CL(\partial M, \gamma)$ $\bar{u}|_{\partial M}$ непрерывно в C_γ со значениями в $CL^0(\partial M)$. Далее очевидно, что $(\Lambda_{N', j}^{-1} \bar{u})|_{\partial M} = \Lambda_{N', j}^{-1} (\bar{u}|_{\partial M})$ и так же как и выше получаем

$$\lim_{\max |\Delta \gamma_j| \rightarrow 0} \Lambda_{N', j}^{-1} (\bar{u}|_{\partial M}) = \Lambda_{N'}^{-1} (\bar{u}|_{\partial M}). \quad (11)$$

Из принадлежности $\Lambda_{N', j}^{-1} (\bar{u}|_{\partial M})$ к $\mathcal{Q}_{\text{гг}}$ выводим, что к ней можно применить оператор \widehat{N}_k . Разлагая его, как и выше, по степеням λ , получим

$$\begin{aligned} (\widehat{N}_k(x', \xi, \lambda) \Lambda_{N', j}^{-1} \bar{u})|_{\partial M} &= [(\widehat{B}(x', \xi) + \lambda I)^{n_k} \Lambda_{N', j}^{-1} \bar{u}]|_{\partial M} = \\ &= \Lambda_{N', j}^{-1} [(\widehat{B}(x', \xi) + \lambda I)^{n_k} (\bar{u}|_{\partial M})] = \\ &= \Lambda_{N', j}^{-1} \left[\sum_{l=0}^{n_k} c_l \lambda^l (\widehat{B}(x', \xi))^{n_k-l} (\bar{u}|_{\partial M}) \right] = \\ &= \sum_{l=0}^{n_k} c_l (\widehat{B}(x', \xi))^{n_k-l} \Lambda_{N', j}^{-1} (\lambda^l \bar{u}|_{\partial M}). \end{aligned}$$

Условия в) и с) определения пространства $\Lambda CL(\partial M, \gamma)$ обеспечивают при $N \rightarrow \infty$ сходимость в $CL^0(\partial M)$:

$$(\widehat{N}_k \Lambda_{N', j}^{-1} \bar{u})|_{\partial M} \rightarrow \sum_{l=0}^{n_k} c_l [\widehat{B}(x', \xi)]^{n_k-l} \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} (\lambda^l \bar{u}|_{\partial M}).$$

Из замкнутости оператора \widehat{N}_k и того, что $\Lambda_{N'}^{-1} \bar{u}|_{\partial M} \rightarrow \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} \bar{u}|_{\partial M}$, получаем

$$\begin{aligned} \widehat{N}_k u|_{\partial M} &= \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} \left(\sum_{l=0}^{n_k} c_l [\widehat{B}(x', \xi)]^{n_k-l} \lambda^l \bar{u}|_{\partial M} \right) = \\ &= \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} (\widehat{N}_k(x', \xi, \lambda) \bar{u})|_{\partial M} = \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} \bar{g}_k(x', \lambda) = g_k(x', t) \end{aligned}$$

при любом $t > 0$.

Непрерывность $\widehat{N}_k u|_{\partial M}$ по t в $CL^0(\partial M)$ вытекает из непрерывности $\Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} (\lambda^l \bar{u}|_{\partial M})$, $l=0, 1, \dots, n_k$. Тем самым установлено, что функция $u = \Lambda_{\lambda \rightarrow t}^{-1} \bar{u}$ удовлетворяет граничным условиям (2), чем и завершается доказательство предложения.

4°. Обратимся к вопросу о существовании решения задачи (4), (5). Как уже отмечалось выше эта задача решена в работе [1] (теорема 2). Приведем ее формулировку.

Теорема А. Пусть операторы \hat{P} и \hat{N}_j удовлетворяют условиям, приведенным в п. 1° и, кроме того, связаны следующим алгебраическим условием:

$$\det \left\| N_{j,2}(x', -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda) \omega_{k,2}(x, x_1, \xi', \lambda) \right\|_{x_1=0} \neq 0,$$

$$\forall z \in \Gamma, \forall x' \in \gamma_\alpha(U_2), \|\xi'\| + |\lambda| \neq 0, \xi' = (\xi_2, \xi_3, \dots),$$

где $\omega_{k,2}$, $k = 1, 2, \dots, m$ — базис в пространстве устойчивых решений уравнения

$$P_{0,2}\left(x, -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda\right) v = 0, x \in \gamma_2(U_2), \quad (11')$$

а $P_{0,2}$ — слагаемые представления главной части символа P .

Тогда для достаточно больших $|\operatorname{Re} \lambda|$ оператор \mathfrak{R} задачи (4), (5) осуществляет изоморфное отображение $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{R}}$ на пространство

$CL^0(M) \times \prod_{j=1}^m CL^0(\partial M)$ и имеет место оценка

$$\|\mathfrak{R}^{-1} \{\bar{f}, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m\}\|_{C(M)} \leq C |\operatorname{Re} \lambda|^{-\varepsilon} \left\{ \|\bar{f}\|_{C(M)} + \sum_{j=1}^m \|\bar{g}_j\|_{C(\partial M)} \right\}, \varepsilon > 0. \quad (12)$$

Теорема. Пусть операторы \hat{P} и \hat{N}_j ($j=1, 2, \dots, m$) удовлетворяют условиям теоремы А, $\Delta_{t-\lambda} f(x, t) \in \Delta CL(M, \gamma)$, $\Delta_{t-\lambda} g_j(x', t) \in \Delta CL(\partial M, \gamma)$ с достаточно большим $|\gamma|$. Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима.

Доказательство. Пусть $\gamma > 0$ достаточно велико.

Имея в виду предложение 1 однозначная разрешимость задачи (1)–(3) будет установлена, если мы докажем, что решение u задачи (4), (5) (существование и единственность которого обеспечивается теоремой А) принадлежит пространству $\Delta CL(M, \gamma)$.

Проверим вначале условие с) определения пространства $\Delta CL(M, \gamma)$.

По условию теоремы $\bar{f} \in \Delta CL(M, \gamma)$, а $\bar{g}_j \in \Delta CL(\partial M, \gamma)$. Тогда для них справедливы, соответственно, оценки (9), (9'). Воспользуемся теперь оценкой (12) для решения u задачи (4), (5). Из нее следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma + i\tau|^m \|u(x, \sigma + i\tau)\|_{C(M)} d\tau \leq C |\operatorname{Re} \lambda|^{-\varepsilon} \times \\ \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma + i\tau|^m \|f(x, \sigma + i\tau)\|_{C(M)} d\tau + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_{\sigma+i\tau}^{\sigma+i\tau+\pi} |\tilde{g}_j(x', \sigma+i\tau)|_{C(\partial M)} d\tau \} \leq C_1 |\operatorname{Re} \lambda|^{-s},$$

где C_1 — некоторая константа, не зависящая от $\operatorname{Re} \lambda$.

Последнее неравенство означает, что для \tilde{u} выполнено условие с). Далее, из оценки (12) вытекает сходимость $\|\tilde{u}\|_{C(M)} = \|\mathfrak{M}^{-1}[\tilde{f}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m]\|_{C(M)} \rightarrow 0$, при $\lambda \rightarrow \infty$, т. е. требование, входящее в условие в) определения пространства $\Lambda CL(M, \gamma)$.

Проверим теперь условие а). С этой целью воспользуемся представлением для регуляризатора задачи (4), (5), полученного в [1]. Регуляризатор, отвечающий внутренности многообразия M , имеет вид

$$\widehat{R}\tilde{f} = \sum \chi_\alpha [\widehat{\varphi}_\alpha P_{0,\alpha}^{-1} (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha \tilde{f}], \quad (13)$$

а решение $\tilde{u} = \widehat{R} \circ (E + \widehat{T})^{-1}$, где $\widehat{T} = \widehat{P} \circ \widehat{R} - E$ (E — тождественный оператор).

Суммирование в (13) проводится по $\alpha \in B \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in A, U_\alpha \cap \partial M = \emptyset\}$, а $\{\psi_\alpha\}$ — накрывающие многообразия M .

Символы слагаемых представления (13) принадлежат соответствующим классам $\sum_{A, -2m+s, s}$, введенным в [1], [2], откуда следует, что эти операторы порождаются счетно-аддитивными мерами $\mu_\alpha(x, dz, \lambda)$.

Обозначим через $\widehat{C}_\alpha = \widehat{\varphi}_\alpha P_{0,\alpha}^{-1} (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha$. Имеем

$$\widehat{C}_\alpha \tilde{f}(x, \lambda) = \int \tilde{f}(x-z, \lambda) \mu_\alpha(x, dz, \lambda),$$

где интегрирование ведется по H_1 , а $x \in \chi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset H_1$. Для доказательства непрерывности $\widehat{C}_\alpha \tilde{f}$ по λ рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \widehat{C}_\alpha \tilde{f}(x, \lambda + \Delta\lambda) - \widehat{C}_\alpha \tilde{f}(x, \lambda) &= \int \tilde{f}(x-z, \lambda + \Delta\lambda) \mu_\alpha(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) - \\ &- \int \tilde{f}(x-z, \lambda) \mu_\alpha(x, dz, \lambda) = \int [\tilde{f}(x-z, \lambda + \Delta\lambda) - \\ &- \tilde{f}(x-z, \lambda)] \mu_\alpha(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) + \\ &+ \int \tilde{f}(x-z, \lambda) [\mu_\alpha(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) - \mu_\alpha(x, dz, \lambda)] = J_1 \tilde{f} + J_2 \tilde{f}. \end{aligned}$$

Оценим вначале слагаемое J_2 . Функция $\tilde{f}(x, \lambda)$ равномерно ограничена по λ . Следовательно, $\|\tilde{f}\|_{C(M)} \leq K$, где $K > 0$ — некоторая константа. Далее для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\text{Var}_z [\mu_\alpha(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) - \mu_\alpha(x, dz, \lambda)] < \varepsilon,$$

при $|\Delta\lambda| < \delta$. Отсюда при $|\Delta\lambda| < \delta$ имеем

$$\| \tilde{A} f \|_{C(V_\alpha)} \leq \| f \|_{C(M)}, \text{Var}_z [\mu_\alpha(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) - \mu_\alpha(x, dz, \lambda)] < \varepsilon K. \quad (14)$$

Для оценки оператора J_1 выберем $R > 0$ настолько большим, чтобы при $\|z\|_{H_1} > R$ имело место: $\text{Var}_z \mu_\alpha(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) < \varepsilon$ при любом $x \in \mathcal{X}_\alpha(U_\alpha)$ (этого можно добиться в силу равномерной непрерывности на бесконечности мер μ_α). Представим теперь J_1 в виде

$$J_1 \tilde{f} = \int_{\|z\|_{H_1} < R} [\tilde{f}(x-z, \lambda + \Delta\lambda) - \tilde{f}(x-z, \lambda)] \mu_\alpha(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) + \\ + \int_{\|z\|_{H_1} > R} [\tilde{f}(x-z, \lambda + \Delta\lambda) - \tilde{f}(x-z, \lambda)] \mu_\alpha(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) \equiv J_1' \tilde{f} + J_1'' \tilde{f}.$$

Имеем в силу равномерной непрерывности \tilde{f} и равномерной ограниченности μ_α : $\text{Var}_z \mu_\alpha \leq K_1$

$$\| \tilde{A} \tilde{f} \|_{C(V_\alpha)} \leq \| \tilde{f}(z', \lambda + \Delta\lambda) - \tilde{f}(z', \lambda) \|_{C(M)} \text{Var}_z \mu_\alpha < \varepsilon K_1. \quad (15)$$

Наконец, для J_1' имеем такую оценку ($\|z\|_{H_1} > R$)

$$\| \tilde{A} \tilde{f} \|_{C(V_\alpha)} \leq 2 \| \tilde{f} \|_{C(M)} \text{Var}_z \mu_\alpha < 2 K \varepsilon. \quad (16)$$

Из неравенств (14)–(16) вытекает непрерывность $\tilde{C}_\alpha \tilde{f}$ по λ . Исследуем теперь регуляризатор задачи вблизи границы ∂M . Он имеет следующее представление (см. [1], теорема 2):

$$\hat{R}_1 = \sum_{\alpha \in \Gamma} P^+ \hat{Q}_\alpha + \sum_{\alpha \in \Gamma} \hat{Q}_\alpha, \quad (17)$$

здесь P^+ — оператор проектирования на границу, а

$$P^+ \hat{Q}_\alpha [\tilde{f}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m] = \mathcal{X}_\alpha^* P^+ \rho(x_1/\delta) \varphi_\alpha^* \{ \hat{P}_{0,\alpha}^{-1} l(\mathcal{X}_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha \tilde{f} + \\ + \sum_{j=1}^m \hat{Q}_{j,\alpha}(\mathcal{X}_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha [\tilde{g}_j - \hat{N}_j u_0|_{x_1=0}] \},$$

$$\hat{Q}_\alpha \tilde{f} = \mathcal{X}_\alpha^* (1 - \rho(x_1/\delta)) [\varphi_\alpha^* \hat{P}_{0,\alpha}^{-1}(\mathcal{X}_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha \tilde{f}],$$

где $\rho(x_1)$ — монотонная функция, удовлетворяющая следующим условиям: $\rho(x_1) \in C^\infty(R_1^+)$, $\rho(x_1) \geq 0$, $\rho(x_1) \equiv 1$, при $x_1 \leq \frac{1}{2}$ и $\rho(x_1) \equiv 0$, $x_1 > 1$,

δ — ширина полосы, в которой оператор \hat{P} приводится к некоторому специальному виду, l — оператор продолжения, $\hat{Q}_{j,\alpha}$ — канонический базис в пространстве устойчивых решений уравнения (11'), $u_0 = \hat{P}_0^{-1} l \tilde{f}$.

Справедливость условия а) для слагаемых \widehat{Q}_{a2} проверяется точно так же, как и выше, поскольку их символы равны нулю вблизи границы.

Операторы $P^+ \widehat{Q}_{a1}$ состоят из двух слагаемых. Для первого слагаемого имеем: символы $\psi_a^* P_{0,a}^{-1}$, продолженные нулем в $H_1 \setminus V_a$, принадлежат классу $\sum_{A_1}^{-2m+a, s}$ и, следовательно, операторы

$$\widehat{C}_a^{(1)} = \gamma_a^* P^+ \rho(x_1/\delta) \varphi_a^* \widehat{P}_{0,a}^{-1} \circ l = \gamma_a^* P^+ \rho(x_1/\delta) \varphi_a^* \widehat{\psi}_a^* P_{0,a}^{-1} \circ l$$

порождаются мерами $\mu_a^{(1)}(x, dz, \lambda)$ и непрерывным образом отображают пространство $CL^0(H_1^+)$ в $CL^0(V_a)$ ($V_a \subset H_1^+$). Таким образом, имеем представление

$$\widehat{C}_a^{(1)} f = P^+ \int \widetilde{f}(x-z, \lambda) \mu_a^{(1)}(x, dz, \lambda).$$

Непрерывность $\widehat{C}_a^{(1)} f$ по λ доказывается теперь повторением рассуждений, проведенных для операторов \widehat{C}_a .

Рассмотрим, наконец, операторы

$$\widehat{C}_{a,j}^{(2)} = \rho(x_1/\delta) \varphi_a^* \widehat{\Omega}_{j,a} = \rho(x_1/\delta) \varphi_a^* \widehat{\psi}_a^* \Omega_{j,a} \quad (j=1, 2, \dots, m).$$

Продолжим их символы нулем в $H_1 \setminus V_a$. В силу леммы 2 из [4] при $n > m - 1$ операторы $\widehat{C}_{a,j}^{(2)}$ принадлежат классу $\sum_{A_1}^{m-n, j-1+a, s}$ ($s > 0$ — любое, $\varepsilon > 0$) и, следовательно, в силу предложения 3 работы [4] для любого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ существует счетно-аддитивная мера $\mu_{a,j}(x', x_1, dz', \lambda)$ заданная на H_1 такая, что имеет место представление

$$\gamma_a^* P^+ \widehat{C}_{a,j}^{(2)} \widetilde{g}(x', \lambda) = P^+ \int \widetilde{g}(x' - z', \lambda) \mu_{a,j}(x', x_1, dz', \lambda). \quad (18)$$

Изучим ядра $G_{a,j}$ операторов $P^+ \widehat{C}_{a,j}^{(2)}$:

$$G_{a,j}^{(N)}(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda) = P^+ (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{H^{n-1}} e^{i((\xi')^{n-1}, (x')^{n-1})} \times \\ \times C_{a,j}^{(2)}(\tau^N, x_1, (\xi')^{n-1}, \lambda) d(\xi')^{n-1}.$$

Аналогично тому, как это было установлено в лемме 2 работы [4], для ядер $G_{a,j}^{(N)}$ имеют место равномерные по λ оценки

$$\|G_{a,j}^{(N)}\|_{L_1(H^{n-1})} \leq K < +\infty, \quad (19)$$

при $\forall N, n$ и $x^N \in V_a \cap H_+^N = \{x^N \in H_1^N, x_1 > 0\}$, а также оценки для моментов

$$\sup_{\lambda > 2} \int_{H^{n-1}} |z^2 G_{a,j}^{(N)}(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda)| d(z')^{n-1} \leq K \quad (20)$$

для $\forall N, n$ и при любом фиксированном $x^N \in H_+^N \cap V_a$.

Далее, поскольку символы рассматриваемых операторов „слабо“ зависят от далеких переменных, имеем также

$$\sup_{\substack{\|x\|_{H^1} < R \\ x \in V_0}} \|G_{\alpha, j}^{(N)}(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda) - G_{\alpha, j}^{(N+k)}(x^{N+k}, x_1, (z')^{n-1}, \lambda)\|_{L_1(H^{n-1})} \rightarrow 0 \quad (21)$$

при $N \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$.

Из оценок (19)—(21) (см. [5], теорему 3.3) следует равномерная ограниченность $\text{Var}_x \mu_{\alpha, j}$, после чего почти идентичными рассуждениями проводятся оценки, аналогичные (14)—(16), из которых вытекает непрерывность операторов $P + \tilde{C}_{\alpha, j}^{(2)}$ по λ .

Таким образом, проверено также выполнение условия а) для слагаемых регуляризатора \tilde{R}_1 задачи вблизи границы ∂M .

Для рядов (13) и (17), представляющих регуляризатор задачи, соответственно, во внутренней многообразии M и вблизи границы, справедливы оценки вида (12), откуда непосредственно следует, что при $|\text{Re } \lambda| \geq \alpha$ (α — некоторое фиксированное число) упомянутые ряды равномерно относительно λ сходятся в $CL^0(M)$ и $CL^0(M) \times \prod_{j=1}^m CL^0(\partial M)$.

По условию $\tilde{f} \in \Delta CL(M, \gamma)$, $\tilde{g}_j \in \Delta CL(\partial M, \gamma)$ и, следовательно, удовлетворяют условию а) определения пространства $\Delta CL(M, \gamma)$ и $\Delta CL(\partial M, \gamma)$, откуда в силу равномерной сходимости рядов (13), (17) по λ , выводим, что $\tilde{R} \tilde{f}$ и $\tilde{R}_1 \{\tilde{f}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m\}$ также удовлетворяют условию а).

Далее, в силу теоремы А при достаточно больших $|\text{Re } \lambda|$ оператор \mathfrak{X} задачи (4), (5) обладает обратным оператором \mathfrak{X}^{-1} . Отсюда получаем, что и для решения $\tilde{u} = \mathfrak{X}^{-1} \{\tilde{f}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m\}$ задачи, представимого в виде ряда, равномерно сходящегося относительно λ , при $|\text{Re } \lambda| \geq \lambda_0$ (где λ_0 достаточно велико) выполняется условие а).

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что решение \tilde{u} задачи аналитично по λ со значениями в $CL^0(M)$ (требование, входящее в условие в) определения пространства $\Delta CL(M, \gamma)$).

Установим вначале аналитичность слагаемых $\tilde{C}_{\alpha} \tilde{f}$ регуляризатора \tilde{R} . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{C}_{\alpha} \tilde{f}(x, \lambda + \Delta\lambda) - \tilde{C}_{\alpha} \tilde{f}(x, \lambda)}{\Delta\lambda} &= \int \frac{\tilde{f}(x-z, \lambda + \Delta\lambda) - \tilde{f}(x-z, \lambda)}{\Delta\lambda} \times \\ &\times \mu_{\alpha}(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) + \int \tilde{f}(x-z, \lambda) \frac{\mu_{\alpha}(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) - \mu_{\alpha}(x, dz, \lambda)}{\Delta\lambda} \equiv \\ &\equiv J_3 \tilde{f} + J_4 \tilde{f}. \end{aligned} \quad (22)$$

Выбирая, как и при оценке J_1 , $R > 0$ настолько большим, чтобы имело место: $\text{Var}_z \mu_{\alpha}(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) < \varepsilon$ при любом $x \in V_{\alpha}$, представим затем $J_3 \tilde{f}$ в виде

$$J_3 \tilde{f} = \int_{\|z\|_{H_1} < R} \frac{\tilde{f}(x-z, \lambda + \Delta\lambda) - \tilde{f}(x-z, \lambda)}{\Delta\lambda} \mu_\alpha(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) + \\ + \int_{\|z\|_{H_1} > R} \frac{\tilde{f}(x-z, \lambda + \Delta\lambda) - \tilde{f}(x-z, \lambda)}{\Delta\lambda} \mu_\alpha(x, dz, \lambda + \Delta\lambda) \equiv J_3' \tilde{f} + J_3'' \tilde{f}.$$

В силу аналитичности \tilde{f} по λ со значениями в $CL^0(M)$ имеем, что существует

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x-z, \lambda + \Delta\lambda) - \tilde{f}(x-z, \lambda)}{\Delta\lambda} = \tilde{f}'_\lambda(x-z, \lambda)$$

в $CL^0(M)$, откуда ввиду равномерной сходимости под знаком интеграла следует существование $\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} J_3' \tilde{f}$.

Далее, поскольку

$$\frac{\tilde{f}(x-z, \lambda + \Delta\lambda) - \tilde{f}(x-z, \lambda)}{\Delta\lambda} = \tilde{f}'(x-z, \lambda + \theta \Delta\lambda),$$

где $0 < \theta < 1$, в силу равномерной ограниченности \tilde{f}'_λ и равномерной непрерывности на бесконечности мер μ_α , имеем оценку

$$\|J_3'' \tilde{f}\|_{C(M)} \leq \|\tilde{f}'_\lambda\|_{C(M)} \text{Var}_z \mu_\alpha < \varepsilon K,$$

откуда вытекает, что $J_3'' \tilde{f} \rightarrow 0$ при $\Delta\lambda \rightarrow 0$ в $CL^0(M)$.

Докажем теперь существование предела $\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} J_4 \tilde{f}$.

Ядра $G_\alpha^{(N)}$ операторов \hat{C}_α аналитически зависят от λ , при этом легко заметить, что $\frac{\partial C_\alpha}{\partial \lambda} \in \Sigma_{A_0}^{-2(m+1)+s, s}$. Отсюда следует, что $\frac{\partial G_\alpha^{(N)}}{\partial \lambda} \in L_1(H^n)$, при этом имеет место равномерная оценка

$$\left\| \frac{\partial G_\alpha^{(N)}}{\partial \lambda} \right\|_{L_1(H^n)} \leq K < \infty. \quad (23)$$

Поскольку операторы \hat{C}_α порождались мерами $\mu_\alpha(x, dz, \lambda)$, то из последней оценки следует существование $\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial \lambda}$, а также равномерная ограниченность $\text{Var}_z \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial \lambda}$. Это позволяет нам утверждать, что существует $\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} J_4 \tilde{f}$.

Таким образом, правая часть соотношения (22) имеет предел при $\Delta\lambda \rightarrow 0$, откуда следует существование $\frac{\partial \tilde{C}_\alpha \tilde{f}}{\partial \lambda}$, то есть аналитичность слагаемых $\tilde{C}_\alpha \tilde{f}$ регуляризатора $\tilde{R} \tilde{f}$.

Аналитичность по λ $\tilde{R} \tilde{f}$ теперь вытекает из равномерной сходимости ряда (13) и аналитичности его слагаемых $\tilde{C}_\alpha \tilde{f}$.

Совершенно аналогично доказывается аналитичность $\tilde{R}_1 \{ \tilde{f}, \tilde{g}_1, \dots, \dots, \tilde{g}_m \}$. Надо лишь заметить, что ядра операторов $\frac{\partial \tilde{C}_\alpha^{(2)}}{\partial \lambda}$ удовлетворяют равномерной оценке вида (23), которая, в свою очередь, следует из принадлежности символов этих операторов классу $\sum_{A, 0}^{0, 0}$.

Из аналитичности $\tilde{R} \tilde{f}$ и $\tilde{R}_1 \{ \tilde{f}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m \}$ очевидным образом следует аналитичность $u = \mathfrak{M}^{-1} \{ \tilde{f}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m \}$ при достаточно больших $|\operatorname{Re} \lambda|$. Справедливость условия в) также установлена.

Таким образом, $u \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{M}}$ и теорема доказана.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 31.I.1984

Ռ. Լ. ՇԱԿՔԱԴԳԻԱՆ. Խառը խնդրի անվերջ բվով սեկվախ փոփոխականներով բարձր կարգի պարարական հավաարումների համար (ամփոփում)

Նշանախն տիրություն, որի հիմքը հանդիսանում է եզրով անվերջ-շափանի ողորկ բաղ-մաձևություն, դրտարկվում է բարձր կարգի անվերջ-շափանի պարարական հավաարումների մի դաս: Երվում է խառը խնդիր ընդհանուր տեսքի եզրախն պարմաններով գլանի կողմնախն մտկերևություն վրա: Լապլասի ձևափոխության օգնությամբ խնդիրը բերվում է կոմպլեքս պարամետրից կախված համապատասխան էլիպտական խնդրի ուսումնասիրմանը մի դասի եզրով հիլբերտյան բաղմաձևությունների վրա:

Նապես նենվելով [1] աշխատանքում հեղինակի կողմից ստացված էլիպտական խնդրի լուծելիության վերաբերյալ արդյունքների վրա ապացուցվում է պարարական հավաարումների համար խառը խնդրի միարժեք լուծելիությունը հատուկ ձևով կառուցված ֆունկցիոնալ տարածություններում:

R. L. SHAKHBAGIAN. A mixed problem for high order equations of parabolic type with infinite number of independent variables (summary)

We consider a class of infinite dimensional high order parabolic equations in a tube domain, the base of which is an infinite dimensional smooth manifold with a border. We pose a mixed problem where general boundary conditions are given on the boundary surface of a cylinder. By means of Laplace transform the problem is reduced to the study of the corresponding elliptic problem with a complex parameter on some class of Hilbert manifolds with a border. Basing on the results on solvability of this problem obtained earlier by the author in [1], the univalent solvability of the mixed problem for parabolic equations in some specially constructed functional spaces is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Шахбабян. Общая краевая задача для эллиптических операторов высокого порядка на бесконечномерных многообразиях с краем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIX, № 1, 1984, 3—18.
2. М. И. Вишик, А. В. Марченко. Краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений второго порядка на бесконечномерных многообразиях с краем, Матем. сб., 90, № 3, 1973, 331—371.
3. Л. Шварц. Математические методы для физических наук, «Мир», М., 1965.
4. Р. Л. Шахбабян. Общая краевая задача для уравнений эллиптического типа высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVIII, № 1, 1983, 49—64.
5. П. М. Блехер, М. И. Вишик. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях, Матем. сб., 86, № 3, 1971, 446—494.
6. Ю. Л. Далецкий. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения, УМН, 22, № 4 (136), 1967, 3—54.

УДК 517.984.5

И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ СЛЕДОВ

В настоящей работе выводится соотношение между данными рассеяния для обыкновенного дифференциального оператора L порядка $2n > 2$ на полуоси (см. [1]—[3]). Это соотношение является обобщением известной в случае $n=1$ формулы Левинсона [4] (см. также [5], [6]) и представляет собой формулу для индекса некоторого оператора V , построенного при помощи данных рассеяния. Оно позволяет усовершенствовать указанные автором в [7] необходимые и достаточные условия, налагаемые на данные рассеяния, при которых разрешима обратная задача. Аналогичные соотношения будут приведены здесь также для оператора Штурма—Лиувилля с матричным потенциалом и для оператора Дирака.

В случае оператора Штурма—Лиувилля со скалярным потенциалом известное соотношение между данными рассеяния имеет вид (см. [6], стр. 195, 221)

$$\frac{1}{2\pi i} [\ln S(+\infty) - \ln S(+0)] + \frac{1}{4} [S(\infty) - S(0)] = -r,$$

где $S(\lambda)$ — функция рассеяния, а r — число собственных значений. Аналогичное соотношение, как показали Э. С. Агранович и В. А. Марченко [8], имеет место и в случае оператора Штурма—Лиувилля с матричным потенциалом. В связи с этим отметим, что в случае операторов Штурма—Лиувилля полученные здесь соотношения по форме отличаются от известных и, конечно, эквивалентны им.

1. Пусть L — самосопряженный дифференциальный оператор, порожденный в пространстве $L^2(0, \infty)$ заданной по формуле

$$l[y(x)] \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x) + \sum_{k=0}^{2n-2} q_k(x) y^{(k)}(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

самосопряженной по Лагранжу дифференциальной операцией l порядка $2n > 2$ (см. [2], [9], [10]), где коэффициенты $q_k(x)$ при $k > 1$ имеют абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset (0, \infty)$ производные до $(k-1)$ -го порядка включительно и удовлетворяют условиям

$$\int_0^{\infty} x^{2n-1-k} |q_k(x)| dx + \int_0^{\infty} x^{2n-1} |q_k^{(k)}(x)| dx < \infty, \quad (2)$$

$$k = 0, 1, \dots, 2n-2.$$

Область определения оператора L описывается при помощи p краевых условий в точке $x=0$ (их вид не является существенным). Непрерывный спектр оператора L прост и совпадает с полуосью $[0, \infty)$ (здесь под кратностью непрерывного спектра оператора L подразумевается кратность спектра части оператора L , действующей в ортогональном дополнении линейной оболочки всех собственных функций оператора L). Точечный спектр оператора L не имеет отличной от нуля конечной точки сгущения и не содержит точку нуль, причем кратность положительных собственных значений не превосходит $n-1$ (число положительных собственных значений кратности $n-1$ конечно), а кратность отрицательных собственных значений (их число конечно) не превосходит n (точечный спектр более подробно исследован автором в [11]).

Обозначим через T^+ (T^-) множество всех чисел $\lambda > 0$ ($\arg \lambda = -\pi/2n$) таких, что числа λ^{2n} являются собственными значениями оператора L . Положим $T = T^+ \cup T^-$.

При каждом $\lambda > 0$ ($\lambda \in T^+$) дифференциальное уравнение

$$l[y(x)] = \lambda^{2n} y(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (3)$$

имеет с точностью до постоянного множителя одно ограниченное решение $u(x, \lambda)$, удовлетворяющее в точке $x=0$ краевым условиям, соответствующим оператору L . При этом справедлива асимптотическая формула

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [S_0(\lambda) e^{ix\lambda} + S_n(\lambda) e^{-ix\lambda} + o(1)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Решение $u(x, \lambda)$ нормируем условием

$$S_n(\lambda) = 1. \quad (5)$$

Тогда (см. [2])

$$|S_0(\lambda)| = 1. \quad (6)$$

При указанной нормировке решение $u(x, \lambda)$ по непрерывности определяется также для значений $\lambda \in T^+$. При этом существуют непрерывные производные $\frac{\partial}{\partial \lambda} u(x, \lambda)$ ($x > 0, \lambda > 0$) и $S_0(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Решение $u(x, \lambda)$ является нормированной обобщенной собственной функцией оператора L , соответствующей непрерывному спектру, т. е. по формуле

$$(U\varphi)(x) = \int_0^{\infty} u(x, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda, \quad 0 < x < \infty, \quad (7)$$

где $\varphi \in L^2(0, \infty)$, а интеграл сходится по метрике $L^2(0, \infty)$, определяется в $L^2(0, \infty)$ ограниченный оператор U , для которого выполняются равенства

$$U^*U = I, \quad UU^* = I - P, \quad (8)$$

где I —единичный оператор, P —ортопроектор на замыкании линейной оболочки всех собственных функций оператора L , а U^* —сопряженный к U оператор.

Пусть P_λ ($\lambda \in T$) — ортопроектор на собственное подпространство оператора L , соответствующее собственному значению λ^{2n} . Очевидно, что P_λ является интегральным оператором. Его ядро обозначим через $P(x, t; \lambda)$ ($0 < x, t < \infty$).

Для оператора L данные рассеяния вводятся при предположении, что при каждом λ ($\text{Im } \lambda > 0$) уравнение (3) имеет решение $y(x, \lambda)$, которое обладает асимптотикой

$$y(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty,$$

и при каждом $x > 0$ как функция от λ голоморфно в полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$ и непрерывно вплоть до вещественной оси.

При указанном предположении нормированная обобщенная собственная функция $u(x, \lambda)$ и ядро $P(x, t; \lambda)$ представляются в виде

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n S_k(\lambda) y(x, \lambda \omega_k), \quad \lambda > 0, \quad (9)$$

$$P(x, t; \lambda) = \sum_{k, j=1}^n N_{kj}(\lambda) y(x, \lambda \omega_k) \bar{y}(t, \lambda \omega_j), \quad \lambda \in T, \quad (10)$$

причем

$$N_{kn}(\lambda) = N_{nk}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in T^+, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

где

$$\omega_k = \exp\left(i \frac{\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1. \quad (12)$$

Введем эрмитовы неотрицательно определенные матрицы

$$S(\lambda) = \frac{1}{2\pi} (S_k(\lambda) S_j(\lambda))_{k, j=0}^n, \quad \lambda > 0, \quad (13)$$

$$N(\lambda) = (N_{kj}(\lambda))_{k, j=1}^n, \quad \lambda \in T. \quad (14)$$

Отметим, что ранг r_λ матрицы $N(\lambda)$ совпадает с кратностью собственного значения λ^{2n} .

Рассмотрим набор данных

$$\{T, N(\lambda) (\lambda \in T), S(\lambda) (\lambda > 0)\}, \quad (15)$$

которые условимся называть данными рассеяния оператора L .

Будем говорить, что для дифференциальной операции l существует оператор преобразования, если существует функция $K(x, t)$ ($0 < x \leq t < \infty$), удовлетворяющая следующим условиям:

а) $K(x, t) = K_1(x+t) + K_2(x, t)$, где функция $K_1(x)$ имеет абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset (0, \infty)$ производные до $(2n-2)$ -го порядка включительно, а $K_2(x, t)$ имеет непрерывные в области $0 < x \leq t < \infty$ частные производные до $(2n-1)$ -го порядка включительно, и, кроме того, выполняются оценки

$$\left| \frac{\partial^k K(x, t)}{\partial x^v \partial t^{k-v}} \right| < \frac{1}{x^k} \psi_k(x+t), \quad 0 \leq v \leq k \leq 2n-1, \quad (16)$$

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} K(x, t) \right| \right\} dt dx < \infty, \quad (17)$$

где $\psi_k(x)$ ($0 \leq k \leq 2n-2$) — невозрастающие и вместе с $\psi_{2n-1}(x)$ суммируемые на полуоси $(0, \infty)$ функции;

б) при каждом λ ($\text{Im } \lambda \geq 0$) определенная по формуле

$$y(x, \lambda) = e^{ix\lambda} + \int_x^{\infty} e^{it\lambda} K(x, t) dt, \quad 0 < x < \infty, \quad (18)$$

функция $y(x, \lambda)$ является решением уравнения (3).

При этом оператором преобразования называется $I + K$, где K — вольтерров интегральный оператор с указанным ядром $K(x, t)$ ($0 < x \leq t < \infty$) (ниже K рассматривается как оператор в $L^2(0, \infty)$).

Заметим, что для дифференциальной операции l оператор преобразования существует, например, если коэффициенты $q_k(x)$ аналитически продолжаются с полуоси $(0, \infty)$ в сектор

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \quad (19)$$

и удовлетворяют оценкам

$$\int_0^{\infty} x^{2n-2-k} |q_k(x+z)| dx < h(\text{Re } z), \quad k=0, 1, \dots, 2n-2, \quad (20)$$

где $h(x)$ — невозрастающая суммируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция (см. [12], а также пример в [13]).

Отметим, что при существовании оператора преобразования множество T^+ ограничено и

$$\sum_{\lambda \in T^+} \sqrt{\lambda^n} < \infty. \quad (21)$$

Заметим еще, что при условиях (20) функции $S_k(\lambda)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) стремятся к конечным пределам при $\lambda \rightarrow \infty$.

Выведем соотношение между данными рассеяния (15) оператора L в предположении, что для дифференциальной операции l существует оператор преобразования. С этой целью введем следующие обозначения:

$$v(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n S_k(\lambda) e^{ix\lambda \omega_k}, \quad \lambda > 0, \quad (22)$$

$$F_S(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[\int_0^{\infty} \int_0^x \int_0^t v(\xi, \lambda) \bar{v}(\eta, \lambda) d\eta d\xi d\lambda - \min\{x, t\} \right],$$

$$F_N(x, t) = \sum_{\lambda \in T^+} \sum_{k, j=1}^n N_{kj}(\lambda) e^{ix\lambda \omega_k} e^{it\lambda \omega_j}, \quad (23)$$

$$F(x, t) = F_S(x, t) + F_N(x, t), \quad 0 < x, t < \infty. \quad (24)$$

Здесь $F(x, t)$ — аналог ядра Гельфанда—Левитана—Марченко (см. [6], [14]).

Теорема 1. Пусть для дифференциальной операции l выполняются условия (2) и существует оператор преобразования. Тогда данные рассеяния (15) оператора L удовлетворяют соотношению

$$\int_0^{\infty} F(x, x) dx + \sum_{\lambda \in T^-} \left[r_\lambda + \sum_{k, j=1}^{n_\lambda} \frac{N_{kj}(\lambda)}{i(\omega_k + i\omega_j)} \right] + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left[\frac{S'_0(\lambda)}{S_0(\lambda)} + \sum_{\substack{k, j=0 \\ 0 < k+j < 2n}}^n \frac{S_k(\lambda) \bar{S}_j(\lambda)}{\lambda(\omega_k - \omega_j)} \right] d\lambda = 0, \quad (25)$$

где r_λ — ранг матрицы $N(\lambda)$, $n_\lambda = n$ при $\lambda \in T^-$, $n_\lambda = n-1$ при $\lambda \in T^+$, а интегралы и ряд сходятся абсолютно. В частности, если сумма r всех чисел r_λ конечна, то

$$\int_0^{\infty} F_S(x, x) dx + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left[\frac{S'_0(\lambda)}{S_0(\lambda)} + \sum_{\substack{k, j=0 \\ 0 < k+j < 2n}}^n \frac{S_k(\lambda) \bar{S}_j(\lambda)}{\lambda(\omega_k - \omega_j)} \right] d\lambda = -r. \quad (26)$$

Доказательство наметим ради простоты для случая, когда множество T конечно. Действующий в $L^2(0, \infty)$ ограниченный оператор V определим по формуле

$$(V\varphi)(x) = \int_0^{\infty} v(x, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda, \quad 0 < x < \infty,$$

где $\varphi \in L^2(0, \infty)$, а интеграл сходится по метрике $L^2(0, \infty)$. Используя оператор преобразования $I + K$, в силу (9), (18) и (22) для определенного по формуле (7) оператора U получим равенство

$$U = (I + K)V. \quad (27)$$

Из равенств (8) и (27) следует, что оператор V обратим вместе с U , а оператор V^* имеет r -мерное нулевое подпространство.

Ядро $F_S(x, t)$ определяет в $L^2(0, \infty)$ ограниченный интегральный оператор F_S и, как нетрудно убедиться

$$I + F_S = VV^*. \quad (28)$$

Рассмотрим также оператор

$$I + A = V^*V. \quad (29)$$

Можно показать, что A есть интегральный оператор с ядром

$$A(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k, j=0}^n \frac{\bar{S}_k(\lambda) S_j(\mu)}{\lambda\omega_k - \mu\omega_j}, \quad 0 < \lambda, \mu < \infty. \quad (30)$$

Используя равенства (8) и (27), из (28) и (29) получим

$$F_S + P + VV^*K^* + KV^*V + KV^*K^* = 0, \quad (31)$$

$$A + V^*K^*V + V^*KV + V^*K^*KV = 0. \quad (32)$$

Поскольку K — оператор Гильберта — Шмидта, то операторы KVV^*K^* и V^*K^*KV являются ядерными и, очевидно, имеют одинаковый след. Используя оценки (16) и (17), можно доказать, что ядра интегральных операторов Гильберта — Шмидта $VV^*K^* + KVV^*$ и $V^*K^*V + V^*KV$ тоже имеют одинаковый конечный след. Поэтому соотношение (26) получается из (31) и (32) с учетом равенств (5), (6), (30), $r = \text{sp} P$ и непрерывности рассматриваемых ядер.

В общем случае теорема доказывается аналогично; нужно лишь равенство (31) использовать в виде

$$F - F_N + P + VV^*K^* + KVV^* + KVV^*K^* = 0,$$

где F_N и F — интегральные операторы с ядрами (23) и (24) соответственно, и учесть, что ортопроектор P является интегральным оператором, ядро $P(x, t)$ ($0 < x, t < \infty$) которого определяется при помощи ядра (10) по формуле

$$P(x, t) = \sum_{\lambda \in T} P(x, t; \lambda),$$

причем

$$\int_0^{\infty} P(x, x; \lambda) dx = r, \lambda \in T.$$

2. Приведем характеристические свойства данных рассеяния (15) оператора L в предположении, что для дифференциальной операции L выполняются условия (2) и существует оператор преобразования.

1°. $T = T^- \cup T^+$, где T^- — конечное множество точек на открытом луче $\arg \lambda = -\pi/2n$ ($n > 1$ — фиксированное натуральное число), а T^+ — ограниченное множество точек на полуоси $\lambda > 0$, не имеющее отличных от нуля точек сгущения.

2°. При каждом $\lambda \in T \setminus N(i)$ есть отличная от нуля эрмитова неотрицательно определенная матрица (14), причем выполняются равенства (11).

3°. При каждом $\lambda > 0$ $S(\lambda)$ есть матрица (13), где все функции $S_k(\lambda)$ непрерывны на полуоси $\lambda > 0$, существует непрерывная производная $S'_0(\lambda)$ и выполняются равенства (5), (6).

4°. Функции

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, t) = & \sum_{\lambda \in T^-} \sum_{k, j=1}^n \frac{N_{kj}(\lambda)}{|\lambda|^2 \omega_k \omega_j} [e^{ix\lambda \omega_k} - 1] [e^{it\lambda \omega_j} - 1] + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sum_{\substack{k, j=0 \\ 0 < k+j < 2n}}^n \frac{S_k(\lambda) \bar{S}_j(\lambda)}{\lambda^2 \omega_k \omega_j} [e^{ix\lambda \omega_k} - 1] [e^{it\lambda \omega_j} - 1] d\lambda, \\ & 0 \leq x, t < \infty, \end{aligned}$$

где числа ω_k определяются по формуле (12), непрерывна в замкнутой области $0 \leq x, t < \infty$ и имеет непрерывные в открытой области $0 < x, t < \infty$ первые частные производные и смешанную производную

$$F(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \bar{F}(x, t),$$

причем выполняется оценка $|F'(x, t)| \leq \varphi(x+t)$, где $\varphi(x)$ — невозрастающая суммируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция. Кроме того, функция

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{Re} [S_0(\lambda) e^{ix\lambda}] d\lambda, \quad 0 < x < \infty, \quad (33)$$

имеет абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset (0, \infty)$ производные до $2n$ -го порядка включительно (как следствие, сумма $F(x, t) + f''(x+t)$ имеет непрерывные в области $0 < x, t < \infty$ частные производные любого порядка).

5°. Имеет место равенство (25).

6°. При $0 < x \leq t < \infty$ выполняются оценки

$$\left| \frac{\partial^k F(x, t)}{\partial x^v \partial t^{k-v}} \right| \leq \frac{1}{x^2} \varphi_k(x+t), \quad 0 \leq v \leq k, \quad 1 \leq k \leq 2n-1,$$

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) \right| \right\} dt dx < \infty,$$

где $\varphi_k(x)$ ($1 \leq k \leq 2n-2$) — невозрастающие и вместе с $\varphi_{2n-1}(x)$ суммируемые на полуоси $(0, \infty)$ функции.

7°. Оператор $I + F$ обратим в $L^2(0, \infty)$, где F — интегральный оператор с ядром $F(x, t)$ ($0 < x, t < \infty$).

Теорема 2. *Чтобы данные (15) были данными рассеяния некоторого самосопряженного дифференциального оператора L , порожденного в $L^2(0, \infty)$ самосопряженной по Лагранжу дифференциальной операцией l вида (1), для которой выполняются условия (2) и существует оператор преобразования, необходимо и достаточно выполнение условий 1°—7°.*

В связи с условием 7° отметим, что при любом $n \geq 2$ можно построить пример данных (15), для которых все условия 1°—6° выполняются, но оператор $I + F$ не имеет обратного.

Замечание 1. В работах [2] и [15] автором сформулирована теорема о том, что при условиях типа (20) оператор L по своей спектральной матрице определяется однозначно. Этот результат можно усилить. А именно, указанное утверждение остается верным также при предположении, что для дифференциальной операции l выполняются условия (2) и существует оператор преобразования.

Укажем теперь характеристические свойства данных рассеяния (15) оператора L в предположении, что коэффициенты $q_k(x)$ аналитически продолжаются с полуоси $(0, \infty)$ в сектор (19) и удовлетворяют оценкам

$$\int_0^{\infty} x^{2n-2-l} |q_k(x+z)| dx + \int_0^{\infty} x^{2n-2} |q_k^{(k)}(x+z)| dx \leq h(\operatorname{Re} z), \quad (34)$$

$$k=0, 1, \dots, 2n-2,$$

где $h(x)$ — невозрастающая суммируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция.

При условиях (34) дополнительно выполняются следующие свойства.

6'. Функция $F_0(x, \xi) = F(x, x + \xi)$ ($x > 0, \xi \geq 0$) и все ее частные производные

$$F_k(x, \xi) = \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} F_0(x, \xi), \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1,$$

при каждом $\xi \geq 0$ по переменной x аналитически продолжаются с полуоси $(0, \infty)$ в сектор (19). Кроме того, при всех z из сектора (19) выполняются оценки

$$\int_0^\infty t^{2n-2} \left| \frac{\partial^{2n-1-k}}{\partial z^{2n-1-k}} F_k(z+t, \xi) \right| dt < \beta(x+\xi), \quad 0 \leq k \leq 2n-1,$$

$$\int \left| \frac{\partial}{\partial z} F_0(z, \xi) \right| d\xi \leq \gamma(x) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq n}}^{2n-1} \bar{\gamma} \left(\left| x - y \operatorname{tg} \frac{\pi s}{2n} \right| \right),$$

где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, а $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ — невозрастающие и вместе с $\bar{\gamma}(x)$ суммируемые на полуоси $(0, \infty)$ функции.

7'. При каждом $z \in (0, \infty)$ из замыкания сектора (19) оператор $I + G_z$ обратим в $L^2(0, \infty)$, где G_z — интегральный оператор с ядром

$$G(z; x, t) = \begin{cases} F_0(z+x, t-x) & \text{при } 0 < x \leq t < \infty, \\ \bar{F}_0(\bar{z}+t, x-t) & \text{при } 0 < t \leq x < \infty. \end{cases} \quad (35)$$

Теорема 3. Чтобы данные (15) были данными рассеяния некоторого самосопряженного дифференциального оператора L , порожденного в $L^2(0, \infty)$ самосопряженной по Лагранжу дифференциальной операцией l вида (1) с голоморфными в секторе (19) и удовлетворяющими оценкам (34) коэффициентами $q_k(x)$, необходимо и достаточно выполнение условий 1°–5° и 6', 7'.

Сделаем несколько замечаний относительно условия 7'. Из условий 1°–4° и 6' следует, что оператор G_z вполне непрерывен и является голоморфной оператор-функцией от z в секторе (19); кроме того, $\|G_z\| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ и $I + G_z > 0$ при $z \geq 0$. Непосредственно из формулы (35) следует, что при каждом $a > 0$ имеет место равенство

$$G_{z+a} = B_a^* G_z B_a,$$

где операторы B_a и B_a^* определяются по формулам

$$B_a g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < a, \\ g(x-a) & \text{при } x > a, \end{cases}$$

$$B_a^* g(x) = g(x+a), \quad x > 0,$$

причем $B_a^* B_a = I$. Используя эти свойства, легко доказывается (см. [16]), что оператор $I + G_z$ обратим для всех z вне некоторого ограниченного множества, не имеющего точек сгущения внутри сектора (19)

и не содержащего точек из полуоси $(0, \infty)$. Заметим, что в силу теоремы 2 лишь обратимость оператора $I + G_0$ ($G_0 = F$) вместе с условиями $1^\circ - 5^\circ$ и $6'$ уже обеспечивает существование дифференциального оператора L , обладающего данными рассеяния (15). Однако коэффициенты $q_k(x)$ будут иметь особенности в точках z , для которых оператор $I + G_z$ не имеет обратного. Отметим, что для любой точки $z_0 \in (0, \infty)$ из замыкания сектора (19) можно построить пример данных (15), для которых все условия $1^\circ - 5^\circ$ и $6'$ выполняются, оператор $I + G_0$ обратим, но оператор $I + G_{z_0}$ не имеет обратного.

Замечание 2. В случае $n = 1$ (т. е. для оператора Штурма—Лиувилля с удовлетворяющим условию $xq(x) \in L^1(0, \infty)$ потенциалом $q(x)$) удастся указать характеристические свойства данных рассеяния, несколько отличающиеся от тех свойств, которые указал В. А. Марченко [6]. Прежде всего заметим, что при $n = 1$ данные рассеяния представляют собой набор величин $\{\lambda_k, m_k (k = 1, 2, \dots, r); S_0(\lambda) (\lambda > 0)\}$, где λ_k и $m_k (k = 1, 2, \dots, r)$ — положительные числа, причем $\lambda_k \neq \lambda_j$ при $k \neq j$ (в данном случае

$$T = \{-i\lambda_1, -i\lambda_2, \dots, -i\lambda_r\} \text{ и } N(-i\lambda_k) = m_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

а $S_0(\lambda)$ — функция, участвующая в асимптотической формуле (4) при нормировке (5) (в приведенной в начале статьи формуле функция $S(\lambda)$ есть $-S_0(\lambda)$). При $n = 1$ в качестве характеристических свойств данных рассеяния можно принимать следующие: функция $S_0(\lambda)$ имеет не прерывную на полуоси $\lambda > 0$ производную и $|S_0(\lambda)| = 1$; функция (33) имеет абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset (0, \infty)$ производные r -го порядка включительно, причем функция

$$F_{S_0}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \operatorname{Re} [S_0(\lambda) e^{i\lambda x}] d\lambda - \frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_1^\infty \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{Re} [S_0(\lambda) e^{i\lambda x}] d\lambda$$

удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty x |F'_{S_0}(x)| dx < \infty;$$

имеет место равенство

$$\int_0^\infty F_{S_0}(2x) dx + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{S'_0(\lambda)}{S_0(\lambda)} + \frac{S_0(\lambda) - \bar{S}_0(\lambda)}{2i} \right] d\lambda = -r.$$

3. В случае краевой задачи Штурма—Лиувилля

$$-y''(x) + Q(x)y(x) = \lambda^2 y(x), \quad y(0) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

с эрмитовой $n \times n$ -матрицей $Q(x)$, евклидова норма $|Q(x)|$ которой удовлетворяет условию $x|Q(x)| \in L^1(0, \infty)$, удастся получить формулу

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sp} F_S(2x) dx + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \operatorname{sp} \left[S'(\lambda) S^*(\lambda) + \frac{S(\lambda) - S^*(\lambda)}{2\lambda} \right] d\lambda = -r, \quad (36)$$

где $S(\lambda)$ — унитарная $n \times n$ -матрица рассеяния, $S'(\lambda)$ — производная матрицы $S(\lambda)$, r — размерность линейной оболочки всех собственных вектор-функций рассматриваемой краевой задачи, а $n \times n$ -матричное ядро $F_S(x+t)$ определяется по формуле

$$F_S(x+t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[\int_0^{\infty} \int_0^x \int_0^t v(\xi, \lambda) v^*(\eta, \lambda) d\eta d\xi d\lambda - \min\{x, t\} E \right],$$

причем E — единичная $n \times n$ -матрица и

$$v(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{i\lambda x} S(\lambda) + e^{-i\lambda x} E].$$

Отметим, что равенство (36) после упрощения приводится к известному виду (см. [6], стр. 223 и [8], стр. 262; в этих книгах в качестве матрицы рассеяния принимается $-S(\lambda)$). Однако по причинам общности и инвариантности записи относительно краевых условий мы предпочитаем форму (36).

4. В случае канонической краевой задачи Дирака (см. [17])

$$By'(x) + [\Omega(x) + mT]y(x) = iy(x), \quad 0 < x < \infty,$$

где m — неотрицательное число, $y(x)$ — вектор-функция с $2n$ компонентами,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} P(x) & Q(x) I_n \\ I_n Q(x) & -I_n P(x) I_n \end{pmatrix},$$

причем E_n — единичная $n \times n$ -матрица, а $n \times n$ -матрица I_n имеет вид

$$I_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

предполагается, что евклидовы нормы вещественных симметрических $n \times n$ -матриц $P(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют оценкам

$$|P(x)| \leq C(1+x)^{-2-\varepsilon}, \quad |Q(x)| \leq C(1+x)^{-1-\varepsilon}$$

с некоторыми положительными числами C и ε , кроме того, матрица $\Omega(x)$ абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset (0, \infty)$ и $x|\Omega'(x)| \in L^1(0, \infty)$. При указанных условиях можно доказать, что унитарная $n \times n$ -матрица рассеяния $S(\lambda)$ имеет непрерывную производную $S'(\lambda)$ и справедлива формула (в работе [17] в качестве матрицы рассеяния принимается $-S^*(\lambda)$)

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sp} F_S(2x) dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \operatorname{sp} \left[S'(\lambda) S^*(\lambda) + \frac{m}{2} \frac{S(\lambda) - S^*(\lambda)}{\lambda^2 - m^2} \right] d\lambda = -r, \quad (37)$$

где $\Delta = (-\infty, -m) \cup (m, \infty)$, r — размерность линейной оболочки всех собственных вектор-функций рассматриваемой краевой задачи (краевые условия задаются в точке $x=0$ и являются самосопряженными), а $2n \times 2n$ -матричное ядро $F_S(x+t)$ определяется по формуле

$$F_S(x+t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[\int_{\Delta} \int_0^x \int_0^t v(\xi, \lambda) v^*(\eta, \lambda) d\xi d\eta d\lambda - \min\{x, t\} E_{2n} \right],$$

причем

$$v(x, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi b(\lambda)}} \left\{ \begin{pmatrix} b(\lambda) E_n \\ -i I_n \end{pmatrix} S(\lambda) e^{i\pi a(\lambda)} + \begin{pmatrix} b(\lambda) E_n \\ i I_n \end{pmatrix} e^{-i\pi a(\lambda)} \right\},$$

$$a(\lambda) = \lambda \sqrt{1 - \frac{m^2}{\lambda^2}}, \quad b(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda + m}{\lambda - m}}.$$

Отметим, что при рассматриваемых здесь ограничениях на $\Omega(x)$ тоже можно указать условия разрешимости обратной задачи рассеяния при этом в качестве одного из этих условий служит равенство (37).

В заключение автор благодарит В. Б. Лидского и Б. В. Федосова за обсуждение результатов и внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 29.VIII.1983

Ի. Գ. ԽԱՇԱՏՐԻԱՆԻ ՀԵՏԻՖԻԻ ՄԻ ԲԱՆՈՒՄԻ ՄԱՍԻՆ (ամփոփում)

Հոդվածում բերվում է մի անչուֆյուն ցրման սվյալների միջև կիսաանցքի վրա $2n \geq 2$ կարգի սվորական դիֆերենցիալ L օպերատորի համար: Այդ անչուֆյունը հանդիսանում է $n=1$ դեպքում հայտնի Ակիսոնի բանաձևի ընդհանրացումը և իրենից ներկայացնում է բանաձև ցրման սվյալներով կառուցված որոշ V օպերատորի ինդեքսի համար: Նման անչուֆյուններ բերվում են նաև մատրիցային պոտենցիալով Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորի և Դիրակի օպերատորի համար:

I. G. KHACHATRIAN. On a trace formula (summary)

A relation for the scattering data for the ordinary differential operator L of order $2n > 2$ on the half-axis is given. This relation is a generalization of the well-known Levinson formula in the case $n=1$ and in fact it is a formula for index of some operator V constructed by means of scattering data. Similar relations for the Sturm-Liouville operator with matrix potential and for Dirac operator are also given.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Хачатрян. Об одной обратной задаче, ДАН Арм.ССР, 70, № 3, 1980, 160—166.
2. И. Г. Хачатрян. О некоторых обратных задачах для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси. Функци. анализ и его прилож., 17, № 1, 1983, 40—52.
3. И. Г. Хачатрян. Об обратной задаче рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков, УМН, 38, № 2 (230), 1983, 229—230.

4. *N. Levinson*. On the uniqueness of the potential in a Schroedinger equation for a given asymptotic phase, Kgl. Danske Videnskab Selskab Mat.-Fys. Medd., 25, № 9, 1949.
5. *Л. Д. Фаддеев*. Обратная задача квантовой теории рассеяния, УМН, 14, № 4 (88), 1959, 57—119.
6. *В. А. Марченко*. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения, Киев, «Наукова думка», 1977.
7. *И. Г. Хачатрян*. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси, ДАН Арм.ССР, 77, № 2, 1983, 55—58.
8. *Э. С. Агранович, В. А. Марченко*. Обратная задача теории рассеяния, Харьков, 1960.
9. *М. А. Наймарк*. Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
10. *И. Г. Хачатрян*. О некоторых формулах следов, ДАН Арм.ССР, 78, № 1, 1984, 23—27.
11. *И. Г. Хачатрян*. Изучение точечного спектра обыкновенного дифференциального оператора, ДАН Арм.ССР, 76, № 3, 1983, 103—105.
12. *И. Г. Хачатрян*. О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 14, № 6, 1979, 424—445.
13. *И. Г. Хачатрян*. Об одной обратной задаче для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 18, № 5, 1983, 394—402.
14. *И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан*. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР, серия матем., 15, № 4, 1951, 309—360.
15. *И. Г. Хачатрян*. О единственности восстановления дифференциального оператора с аналитическими коэффициентами по его спектральной матрице-функции, ДАН Арм.ССР, 71, № 2, 1980, 91—97.
16. *И. Г. Хачатрян*. О некоторых решениях уравнения нелинейной струны, ДАН Арм.ССР, 78, № 3, 1984, 108—112.
17. *М. Г. Гасымов*. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$, Труды ММО, 19, 1968, 41—112.

УДК 517.95

Г. Р. АЛЕКСАНДРЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ ДЛЯ
 ОДНОГО КЛАССА СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
 УРАВНЕНИЙ

Работа посвящена исследованию ветвления особенностей для одного класса модельных слабо гиперболических уравнений с вырождением достаточно общего вида, допускающих нетривиальную факторизацию. При этом рассматриваются как случаи общего степенного, так и экспоненциального вырождения.

Для строго гиперболических операторов волновые фронты были исчерпывающе изучены в работах Хермандера (см., напр., [1]), а также Лакса и Ниренберга (см. [2]). Для слабо гиперболических операторов возможно ветвление сингулярностей при прохождении через многообразие вырождения. Это явление было обнаружено В. Я. Иврием в [3], а в дальнейшем подробно изучалось на модельных уравнениях Алиньяком в [4], Танигучи и Тозаки в [5] и др. (см. также [7], [8]).

Изучаемое ниже уравнение допускает сингулярную факторизацию, однако отметим, что из приведенного далее явного решения все еще трудно усмотреть характер ветвления особенностей. Повтому оказывается целесообразным строить с его помощью параметрикс в виде интегрального оператора Фурье. Это построение осуществляется с помощью исследования асимптотик соответствующих интегралов.

Изучение сингулярностей мы будем проводить микролокально, в терминах волнового фронта. Приведем здесь его определение.

Пусть X — область в R^n , $(x_0, \xi^0) \in X \times (R^n \setminus 0)$, u — распределение из $D'(X)$. Говорят, что (x_0, ξ^0) не принадлежит волновому фронту u ($WF(u)$), если существует такое распределение с компактным носителем $v \in E'(X)$, что $u = v$ в окрестности x_0 и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для любого $N > 0$ существует постоянная $C_N > 0$ такая, что

$$|\widehat{v}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} \text{ при } \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\xi^0}{|\xi^0|} \right| < \varepsilon,$$

т. е. преобразование Фурье $\widehat{v}(\xi)$ быстро убывает в конической окрестности ξ^0 .

Подробное описание волновых фронтов и их свойств можно найти, например, в [9].

Рассматривается следующая задача Коши

$$u_{tt} - \lambda^2(t) u_{xx} - \left(\lambda'(t) + \frac{2\lambda(t)}{t} \right) u_x = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=-1} = \varphi_0(x), \quad u_t|_{t=-1} = \varphi_1(x), \quad (2)$$

где $t \in J = (-1, 1)$, $x \in R^1$. Относительно $\lambda(t)$ предположим, что $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(t) > 0$ и $\lambda(t) \neq 0$ при $t \neq 0$. Кроме того предположим, что

$\int_0^t \frac{\lambda(\tau)}{\tau} d\tau$ сходится. Отметим, что это очень слабое ограничение,

поскольку, например, при его нарушении $\lambda(t)$ уже не может быть из C^∞ .

Модельное уравнение (1) было впервые рассмотрено в [6] и обнаружено, что по отношению к некоторым классическим задачам оно проявляет аномальные свойства. Однако задача Коши для него корректна (см. [6], [7]).

1°. В этом пункте мы сформулируем и докажем теорему о ветвлении особенностей для случая общего степенного вырождения.

Теорема 1. Пусть $\lambda(t) = t^k \lambda_0(t)$, где $\lambda_0(t) \neq 0$, $\lambda_0 \in C^\infty$, $k \in \mathbb{N}$, и пусть $WF(\varphi_0) \cup WF(\varphi_1) = \{(x_0, \xi^0)\}$, тогда волновой фронт решения (1)–(2) распространяется вдоль следующих нулевых бихарактеристик:

$$\Gamma_1(x, \xi) = \{(x_0 + (-1)^i (\Lambda(t) - \Lambda(-1)), t, \xi, (-1)^{i-1} \lambda(t) \xi), t < 0\},$$

$$\Gamma_2(x, \xi) = \{(x + (-1)^i \Lambda(t), t, \xi, (-1)^{i-1} \lambda(t) \xi), t \geq 0\}$$

$$i=1, 2, \quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds,$$

а именно:

$$WF(u(t)) = \Gamma_1(x_0, \xi^0) \cup \Gamma_2(x_0, \xi^0) \cup$$

$$\cup \gamma_1(x_0 - \Lambda(-1), \xi^0) \cup \gamma_2(x_0 - \Lambda(-1), \xi^0) \cup \gamma_1(x_0 + \Lambda(-1), \xi^0).$$

Для доказательства рассмотрим сначала вспомогательную задачу

$$v_{tt} - \lambda^2(t) v_{tx} - \left(\lambda'(t) + \frac{2\lambda(t)}{t} \right) v_x = 0, \quad (3)$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi(x). \quad (4)$$

Заметим, что уравнение (3) факторизуется, а именно

$$\begin{aligned} t[v_{tt} - \lambda^2(t) v_{xx} - (\lambda'(t) + 2t^{-1}\lambda(t)) v_x] = \\ = \partial_+ (t\partial_- v - v), \quad \partial_\pm = (\partial_t \pm \lambda(t) \partial_x). \end{aligned} \quad (5)$$

Лемма 1. Пусть $\widehat{v}(t, \xi)$ — частичное преобразование Фурье решения (3)–(4), тогда

$$\widehat{v}(t, \xi) = e^{-i\lambda(t)\xi} \widehat{\varphi}(\xi) + e^{i\lambda(t)\xi} [t\widehat{\psi}(\xi) + A(t, \xi)\widehat{\varphi}(\xi)], \quad (6)$$

где

$$A(t, \xi) = 2i\xi t \int_0^t e^{-2i\lambda(\tau)\xi} \frac{\lambda(\tau)}{\tau} d\tau. \quad (7)$$

Поскольку один из операторов первого порядка в (5) имеет особенность в точке $t = 0$, то решение задачи (3)–(4) требует предва-

рительной регуляризации. Например, можно показать, что ее решение есть предел решений $v_\varepsilon(t, x)$ семейства задач Коши

$$\partial_+ (t \partial_- v_\varepsilon - v_\varepsilon) = 0, \tag{8}$$

$$v_\varepsilon \Big|_{t=1} = \varphi(x), \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \Big|_{t=1} = \psi(x) \tag{9}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Что же касается решения (8)–(9), то для его получения мы применяем частичное преобразование Фурье и последовательно решаем возникающие при этом обыкновенные дифференциальные уравнения. Наконец, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ убеждаемся в справедливости леммы.

Покажем далее, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Параметрикс задачи Коши (3)–(4) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} v(t, x) = & \iint e^{i(x-y-\Lambda(t))\xi} a_1(t, \xi) \varphi(y) dy d\xi + \\ & + \iint e^{i(x-y+\Lambda(t))\xi} a_2(t, \xi) \varphi(y) dy d\xi + \\ & + t \iint e^{i(x-y+\Lambda(t))\xi} \psi(y) dy d\xi \pmod{C^\infty}, \end{aligned} \tag{10}$$

где a_1, a_2 по ξ являются эллиптическими символами нулевого порядка.

Отметим, что, как нетрудно убедиться, $A(t, \xi)$ не является символом из класса $S_{p, \delta}^n$ (см. [9]), поэтому для доказательства этой леммы нам нужно выяснить его асимптотическое поведение при больших $|\xi|$. Поскольку у $\Lambda(t)$ есть только одна стационарная точка конечного порядка $k - t = 0$, то, в силу известных результатов, при достаточно большом $|\xi|$

$$A(t, \xi) \sim e^{-2i\Lambda(t)\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) \xi^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(t) \xi^{-n}, \tag{11}$$

где α_n, β_n вычисляются по определенным формулам (см. [10]).

Далее, применяя обратное преобразование Фурье и принимая во внимание лемму 1 и соотношение (11), нетрудно убедиться в справедливости леммы 2.

Используя теперь лемму 2 и то, что параметрикс (10) при каждом фиксированном $t > 0$ представляет собой сумму классических эллиптических псевдодифференциальных операторов и следовательно, сохраняет волновой фронт, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 на $\lambda(t)$ и пусть $WF(\varphi) \cup WF(\psi) = \{(x_0, \xi^0)\}$, тогда возможны следующие два случая: а) если $(x_0, \xi^0) \notin WF(\varphi)$, то волновой фронт решения (3)–(4) распространяется только вдоль одной нулевой бихарактеристики, исходящей из точки $(x_0, 0, \xi^0, 0)$

$$WF(v(t)) = \gamma_1(x_0, \xi^0);$$

б) в остальных случаях распространение волнового фронта происходит вдоль обеих нулевых бихарактеристик, т. е.

$$WF(u(t)) = \gamma_1(x_0, \xi^0) \cup \gamma_2(x_0, \xi^0).$$

Аналогично доказательству леммы 1 нетрудно доказать, что частичное преобразование Фурье решения задачи Коши (1)–(2) в области $t < 0$ задается формулой:

$$\begin{aligned} \widehat{u}(t, \xi) = & t e^{i\Lambda(t)\xi} \{ [\widehat{\varphi}_0(\xi) + \widehat{\varphi}_1(\xi) - i^{\lambda}(-1) \widehat{\varphi}_0(\xi)] \times \\ & \times \left[\frac{1}{t} e^{-2i\Lambda(t)\xi + i\Lambda(-1)\xi} + 2i\xi e^{i\Lambda(-1)\xi} \int_{-1}^0 \frac{\lambda(\tau)}{\tau} e^{-2i\Lambda(-1)\xi\tau} d\tau \right] + \\ & + e^{-i\Lambda(-1)\xi} \widehat{\varphi}_1(\xi) - i^{\lambda}(-1) e^{-i\Lambda(-1)\xi} \widehat{\varphi}_0(\xi) \}. \end{aligned} \quad (12)$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда

$$WF(u(0, x)) = \{(x_0 - \Lambda(-1), \xi^0)\}.$$

Действительно, устремляя в (12) t к нулю, получаем

$$\widehat{u}(0, \xi) = e^{i\Lambda(-1)\xi} [\widehat{\varphi}_1(\xi) + \widehat{\varphi}_0(\xi) - i^{\lambda}(-1) \widehat{\varphi}_0(\xi)]. \quad (13)$$

Затем, осуществляя в (13) обратное преобразование Фурье, приходим к следующей формуле:

$$u(0, x) = \iint e^{i(x-y+\Lambda(-1))\xi} [\widehat{\varphi}_0(y) + \widehat{\varphi}_1(y) - i^{\lambda}(-1) \widehat{\varphi}_0(y)] dy d\xi, \quad (14)$$

откуда и следует утверждение леммы 3.

Возвращаясь к доказательству теоремы 1 заметим, что в области строгой гиперболичности ($t < 0$) распространение волнового фронта из точки (x_0, ξ^0) с $t = -1$ происходит вдоль обеих нулевых бихарактеристик $\Gamma_1(x_0, \xi^0)$, $\Gamma_2(x_0, \xi^0)$, поэтому, принимая во внимание лемму 3 и теорему 2 легко убеждаемся в справедливости теоремы 1.

2°. В этом пункте мы покажем, что некоторая модификация описанной выше схемы позволяет исследовать также случай экспоненциального характера вырождения уравнения (1), а именно, имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $\Lambda(t) = e^{-\frac{1}{|t|^\alpha}}$, $\frac{1}{\alpha} = m \in \mathbb{N}$ и $WF(\varphi_0) \cup \cup WF(\varphi_1) = \{(x_0, \xi^0)\}$. Тогда для решения задачи Коши (1)–(2) имеем

$$\begin{aligned} WF(u(t)) = & \widetilde{\Gamma}_-(x_0, \xi^0) \cup \widetilde{\Gamma}_+(x_0, \xi^0) \cup \widetilde{\Gamma}_-\left(x_0 - \frac{1}{e}, \xi^0\right) \cup \\ & \cup \widetilde{\Gamma}_+\left(x_0 - \frac{1}{e}, \xi^0\right) \cup \widetilde{\Gamma}_-\left(x_0 + \frac{1}{e}, \xi^0\right), \end{aligned}$$

где

$$\widetilde{\Gamma}_\pm(x, \xi) = \left\{ \left(x \pm \left(e^{-\frac{1}{|t|^\alpha}} - \frac{1}{e} \right), t, \xi, \mp \alpha |t|^{-\alpha-1} e^{-|t|^{-\alpha}} \xi \right), t \leq 0 \right\},$$

$$\tilde{\gamma}_{\pm}(x, \xi) = \{(x \pm e^{-|t|^{-\alpha}}, t, \xi, \mp \alpha |t|^{-\alpha-1} e^{-|t|^{-\alpha}} \xi), t > 0\}.$$

Заметим, что в случае, когда $\Lambda(t)$ имеет нуль бесконечного порядка для интегралов типа (7), ситуация значительно усложняется, поскольку обычный метод стационарной фазы не применим, поэтому мы докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4. Пусть $\Lambda(t) = e^{-t^{-\alpha}}$, $\alpha^{-1} = m \in \mathbb{N}$, тогда при каждом $t > 0$ для $A(t, \xi)$, задаваемой формулой (7) при $|\xi| \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое разложение

$$A(t, \xi) \sim e^{-2i\Lambda(t)\xi} [Q_m^0(t, \ln \xi) + Q_{m-1}^1(t, \ln \xi) \xi^{-1} + \dots + Q_{m-1}^s(t, \ln \xi) \xi^{-s} + \dots] + R_m(t, \ln \xi), \quad (15)$$

где $Q_m^0(t, u)$, $R_m(t, u)$ — полиномы по u степени не выше m , Q_{m-1}^i ($i=1, 2, \dots$) — полиномы степени не выше $m-1$ и которые могут быть явно вычислены.

Действительно, для доказательства сделаем в интеграле (7) замену переменной $s = e^{-\alpha^{-1}t} \xi$, тогда нетрудно видеть, что

$$A(t, \xi) = 2it \int_0^{\Lambda(t)\xi} e^{-2is} \sum_{k=0}^m C_m^k (-1)^k \left(\frac{\ln s}{\ln \xi}\right)^k ds. \quad (16)$$

Далее, мы ограничимся лишь случаем, когда $\alpha=1$, поскольку в общем случае доказательство принципиально не отличается, но становится более громоздким. Теперь, разбивая интервал интегрирования в (16) от 0 до t_0 и от t_0 до $\Lambda(t)\xi$ и интегрируя по частям получим

$$A(t, \xi) = \int_0^{t_0} e^{-2is} \ln s ds - t \ln \xi e^{-2i\Lambda(t)\xi} + t \ln \xi - t (e^{-2is} \ln s) \Big|_{t_0}^{\Lambda(t)\xi} + t \int_{t_0}^{\Lambda(t)\xi} e^{-2is} \frac{ds}{s}. \quad (17)$$

Из (17) нетрудно увидеть, что последовательное интегрирование по частям приведет нас к следующему соотношению:

$$\int_0^{\Lambda(t)\xi} e^{-2is} \ln s ds = \int_0^{t_0} e^{-2is} \ln s ds + \left[\frac{1}{2i} \ln t_0 + \left(-\frac{1}{2i} \right)^2 \frac{1}{t_0} + \dots + \left(-\frac{1}{2i} \right)^{p+1} \frac{1}{t_0^p} + \dots \right] e^{-2it_0} + e^{-2i\Lambda(t)\xi} \left[-\frac{1}{2i} \ln \xi + \frac{1}{2i} t^{-1} - \sum_{p=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2i} \right)^{p+1} \frac{\xi^{-p}}{(\Lambda(t))^p} \right]. \quad (18)$$

Поскольку при любом фиксированном $t > 0$, $|\xi|$ можно выбрать как угодно большим, то $\Lambda(t)\xi > 1$, поэтому мы можем выбрать $t_0 = 1$ и

ряд $\sum_{p=1}^{\infty} (2it_0)^{-p}$ будет сходиться. Далее из (18) и (16) нетрудно убедиться в справедливости леммы 4, и в случае $e^{-r^{-1}}$ асимптотика (15) принимает следующий простой вид

$$A(t, \xi) \sim \left[-1 + t \sum_{p=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2i} \right)^p (\Lambda(t))^{-p} \xi^{-p} \right] e^{-2i\Lambda(t)\xi} + \\ + t \ln \xi - (c_1 + e^{-2i} c_2) t,$$

где

$$c_1 = 2i \int_0^1 e^{-2is} \ln s ds, \quad c_2 = \sum_{p=1}^{\infty} (-2i)^{-p}.$$

Теорема 4. Пусть $\Lambda(t) = \exp(-t^{-\alpha})$, $t \geq 0$ и $WF(\varphi) \cup WF(\psi) = \{(x_0, \xi^0)\}$, тогда для волнового фронта решения (3)–(4) возможны только два случая: если $(x_0, \xi^0) \notin WF(\varphi)$, то

$$WF(v(t)) = \tilde{\gamma}_-(x_0, \xi^0),$$

во всех остальных случаях

$$WF(v(t)) = \tilde{\gamma}_{\pm}(x_0, \xi^0).$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, аналогичное лемме 2.

Лемма 5. Пусть $\Lambda(t) = \exp(-t^{-\alpha})$, тогда параметрикс задачи (3)–(4) может быть записан в виде

$$v(t, x) = \iint e^{i(x-y-\Lambda(t))\xi} \tilde{a}_1(t, \xi) \varphi(y) dy d\xi + \\ + \iint e^{i(x-y+\Lambda(t))\xi} \tilde{a}_2(t, \xi) \varphi(y) dy d\xi + \\ + t \iint e^{i(x-y+\Lambda(t))\xi} \psi(y) dy d\xi \pmod{C^-}, \quad (19)$$

где

$$\tilde{a}_1(t, \xi) = \left[1 + Q_m^0(t, \ln \xi) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Q_{m-1}^p(t, \ln \xi)}{\xi^p} \right], \quad \tilde{a}_2 = R_m(t, \ln \xi).$$

Справедливость леммы 5 может быть установлена с помощью лемм 1 и 4 аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 2.

Заметим, что существенное отличие лемм 2 и 5 заключается в том, что, в то время как в (10) символы были классическими и эллиптическими, то в (19) они не классические и у них нет главного символа в обычном понимании. Это связано с наличием экспоненциального вырождения (см. [8]). Поэтому теорема 4 не может быть сразу получена из леммы 5 аналогично теореме 2, поскольку нельзя применить непосредственно свойства эллиптических псевдодифференциальных операторов. Однако, применяя конструкцию параметрикса для эллипти-

ческих операторов можно показать, что псевдодифференциальные операторы с такими символами с точки зрения волновых фронтов ведут себя как эллиптические. После этого, учитывая (19), уже нетрудно проверить справедливость теоремы 4.

Отметим, что утверждение леммы 3 сохраняется и для случая

$\Lambda(t) = e^{-\frac{1}{|t|^2}}$, поскольку формула (12) справедлива для любого $\Lambda(t)$. Поэтому теорема 3 может быть установлена с помощью леммы 3 и теоремы 4 аналогично тому, как доказывалась теорема 1.

Ереванский государственный
университет

Поступила 24.XII.1984

Գ. Ռ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐԻԱՆ. Արիֆային եսկատների տարածումը բայլ ճիպերբոլական եսկատումների մի դասի եսմար (ամփոփում)

Աշխատանքում հետազոտվում է թույլ հիպերբոլական հավասարումների մի մոդելային դասի լուծումների եղակիությունների էությունները նաև այն դեպքում երբ բնութագրիչների շոշափումն ունի բավականաչափ ընդհանուր բնույթ (թե աստիճանային և թե էքսպոնենցիալ):

G. R. ALEXANDRIAN. *Propagation of the wave front for a class of weakly hyperbolic equations (summary)*

The paper investigates the branching of singularities for a class of weakly hyperbolic equations, where the degeneration has rather general character.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Hormander. Linear differential operators, Pros. International Congress Math (Nice). vol. 1, Gauthier—Villars, Paris, 1972, 121—133.
2. L. Nirenberg. Lectures on linear partial differential equations, Regional Conf. Serles in Math., Amer. Math. Soc., № 17, 1973, 1—29.
3. В. Я. Иорый. Волновые фронты решений некоторых микролокально гиперболических уравнений, ДАН СССР, № 6, 1976, 1009—1011.
4. S. Alinhac. Branching of singularities for a class of hyperbolic operators, Indiana Univ. Math. J., 1979, 87—97.
5. K. Tuntgucht, Y. Tozakt. A hyperbolic equation with double characteristics wich has a solution with branching singularities, Math. Japonica, 25, № 3, 1980, 273—300.
6. А. Ш. Атабян, А. Б. Нерсесян. О некоторых задачах для одного модельного слабо гиперболического уравнения, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 16, № 5, 1981, 397—407.
7. Г. Р. Александрян, К. А. Ягдзян. Условия корректности задачи Коши и распространение особенностей решений уравнений с кратными характеристиками. Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 18, № 2, 1983, 134—149.
8. Г. Р. Александрян. Параметрикс и распространение волнового фронта решения задачи Коши для одного модельного уравнения, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 19, № 3, 1984, 219—233.
9. М. А. Шубин. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, «Наука», 1978.
10. А. Эрдейи. Асимптотические разложения, ГИФМЛ, 1962.

УДК 517.18.36

Փ. Գ. ԱՐՄԵՆՅԱՆ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ ПО БАЗИСАМ В L^v , $v > 2$

§ 1. В в е д е н и е

Н. Н. Лузин (см. [1], стр. 190) сформулировал следующую задачу
 Пусть $F(x)$ — произвольная измеримая функция на $[0, 2\pi]$ (со значениями $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры). Существует ли тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (1.1)$$

который сходится или суммируется тем или иным методом к функции $F(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$?

Первые результаты, связанные с этой задачей, получены им же в работе ([2], стр. 236). Фундаментальный результат в этом направлении был получен Д. Е. Меньшовым (см. [3]). Им была установлена

Теорема А (Д. Е. Меньшов). *Для любой почти везде конечной на $[0, 2\pi]$ измеримой функции $F(x)$ существует тригонометрический ряд (1.1), который сходится к ней почти всюду на $[0, 2\pi]$.*

В настоящее время остается открытым вопрос о возможности представления, обращающихся в $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры, измеримых функций почти всюду сходящимися тригонометрическими рядами.

В связи с этой проблемой Д. Е. Меньшовым был рассмотрен вопрос о представлении произвольных измеримых функций сходящимися по мере тригонометрическими рядами, и показал, что в этой постановке проблема имеет положительное решение (см. [4]).

Далее в работе [5], А. А. Талалян распространил эту теорему Д. Е. Меньшова на любые полные ортонормированные системы (и на любые базисы пространства L^v , $v > 1$). А именно

Теорема Б (А. А. Талалян). *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n>1}$ — базис пространства $L^v(G)$, $G = [0, 1]$, $v > 1$. Тогда для любой измеримой на G функции $F(x)$ ($F(x)$ может принимать значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры) существует ряд*

$$\sum_{n>1} d_n \varphi_n(x), \quad d_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty, \quad (1.2)$$

который сходится к $F(x)$ по мере.

После работы [5] А. А. Талаляна возник вопрос о возможности представления измеримых функций почти всюду сходящимися рядами по полным системам. В нашей совместной с А. А. Талаляном работе [6] и в работе [7] Gundy показано, что ряд по системе Хаара (или по системе Уолша) не может сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры. Следовательно, в теореме Б сходимость по мере нельзя заменить сходимостью почти всюду.

Многие работы посвящены вопросу представления измеримых функций почти всюду сходящимися рядами. В них доказываются либо усиление, либо аналоги теоремы Д. Е. Меньшова: для конкретных систем (например, для систем Хаара и Уолша), для базисов $C(G)$ и так далее.

В 1976 году в работах [8], [9] Б. С. Кашин построил пример полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n>1}$ с тем свойством, что расходимость ряда $\sum_{n>1} |d_n|^2$ влечет расходимость ряда (1.2) на множестве положительной меры. Построенный пример показывает, что в теореме Б сходимость по мере нельзя заменить сходимостью почти всюду, даже в том случае, когда $F(x)$ почти всюду конечная функция.

Напомним обозначения. Если $\nu > 0$, то $L^\nu(G)$ означает класс измеримых на G функций $f(x)$, для которых $\int_G |f(x)|^\nu dx < +\infty$ и $L^0(G)$ — класс измеримых почти всюду конечных функций на G . Норма в $L^\nu(G)$, $\nu > 1$ определяется формулой $\|f\|_{L^\nu(G)} = \left| \int_G |f(x)|^\nu dx \right|^{1/\nu}$. Обозначим

$$\|f\|_{L^\nu(G)} = \int_G |f(x)|^\nu dx \text{ при } 0 < \nu < 1 \text{ и } \|f\|_{L^1(G)} = \int_G |f(x)| |1 + |f(x)||^{-1} dx.$$

Пусть, далее, $\varphi(t)$ — положительная возрастающая функция на $[0, +\infty)$. Наряду с пространствами $L^\nu(G)$, $\nu \geq 0$ мы будем рассматривать более общие классы $L^\varphi(G)$ функций, для которых $\varphi(|f(x)|) \in L^1(G)$. Положим

$$\|f\|_{L^\varphi(G)} = \int_G \varphi(|f(x)|) dx.$$

Обозначим

$$\varphi^*(t) = t \int_t^{+\infty} u^{-2} \varphi(u) du = \int_0^1 \varphi(u^{-1}t) du, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Очевидно $\varphi^*(t)$ либо обращается в $+\infty$ всюду на $(0, +\infty)$, либо $\varphi^*(t)$ — положительная возрастающая функция на $(0, +\infty)$. Если потребуем выполнения условий

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0, \quad \int_1^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt < +\infty,$$

то $\varphi^*(t)$ будет непрерывной положительной возрастающей функцией и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi^*(t) = 0. \quad (1.4)$$

Легко проверяется также, что если $\varphi(t)$ обладает свойством $\varphi(t_1 + t_2) \leq \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$, $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$, то этим свойством обладает и $\varphi^*(t)$.

Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n>1}$ — некоторая система функций из $L^0(G)$, а

$$\Omega(x) = \sum_{n>1} d_n \varphi_n(x)$$

— конечный или бесконечный ряд по этой системе. Обозначим

$$\Omega_\Phi^*(x) = \sup_{j>1} \left| \sum_{n=j}^{\infty} d_n \varphi_n(x) \right|, \\ \|\Omega\|_{L^0(G), \Phi} = \sup_{j>1} \left\| \sum_{n=j}^{\infty} d_n \varphi_n \right\|_{L^0(G)}. \quad (1.5)$$

Определение 1.1. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n>1}$ — базис пространства $L^0(G)$, $\nu > 1$. Φ называется базисом типа $\langle \nu, \nu \rangle$ (или же $\Phi \in \langle \nu, \nu \rangle$), если $S_\Phi(f, x) \in L^0(G)$ для любого $f(x) \in L^0(G)$, где $S(f, x) = \sum_{n>1} c_n(f) \varphi_n(x)$ — разложение $f(x)$ по базису Φ .

Известно, что если $\Phi \in \langle \nu, \nu \rangle$, то существует постоянная $M, > 0$ такая, что

$$\|S_\Phi^*(f)\|_{L^0(G)} \leq M \|f\|_{L^0(G)}. \quad (1.6)$$

Свойством $\langle \nu, \nu \rangle$ обладают многие классические системы, как например тригонометрическая система, системы Хаара и Уолша и другие.

Пример, построенный Б. С. Кашином, не является $\langle 2, 2 \rangle$ системой. Следовательно естественно рассмотреть вопрос: верна ли теорема А для систем типа $\langle 2, 2 \rangle$? (На этот вопрос обратил внимание Б. С. Кашин на Всесоюзной конференции по метрической теории функций, прошедшей в Агверане (Ереван, 1975 г.).

В настоящей статье доказываются теоремы, которые дают положительный ответ на поставленный вопрос. Прежде чем сформулировать результаты, сделаем несколько замечаний.

Замечание 1.1. Если положительная возрастающая на $[0, +\infty)$ функция $\varphi(t)$ обладает свойствами

$$1) \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0, \quad 2) \int_1^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt < +\infty,$$

$$3) \varphi(t_1 + t_2) \leq \varphi(t_1) + \varphi(t_2), \quad t_1, t_2 \in [0, +\infty),$$

то $\varphi^*(t)$ — непрерывная, положительная, возрастающая функция на $[0, +\infty)$ и

$$1^\circ. \lim_{t \rightarrow 0} \varphi^*(t) = 0, \quad 2^\circ. \varphi^*(t_1 + t_2) \leq \varphi^*(t_1) + \varphi^*(t_2)$$

для всех $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$.

Замечание 1.2. Если $\varphi(t) = t(1+t)^{-1}$, то $\varphi^*(t) = t \ln(1 + |t|^{-1})$ (при $t=0$ $\varphi^*(t)$ полагаем равной нулю).

Замечания 1.3. Если $\varphi(t) = t^p$, $0 < p < 1$, то $\varphi^*(t) = N_p t^p$ (N_p — постоянная, большая нуля). Следовательно, $L^\varphi(G) = L^{\varphi^*}(G) = = L^p(G)$. Справедлива

Теорема 1.1. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n>1}$ — базис типа $\langle \nu, \nu \rangle$, $\nu > 2$, а функция $\varphi(t)$ обладает свойствами 1)–3) замечания 1.1. Тогда существует ряд (1.2) такой, что для любой функции $F(x) \in L^{\varphi^*}(G)$ существует частичный ряд

$$\mathcal{Q}_F(x) = \sum_{n>1} \lambda_n d_n \varphi_n(x) \quad (1.7)$$

(λ_n — принимает значения 0 или 1), который удовлетворяет условиям

- 1) $\mathcal{Q}_F(x) = F(x)$ почти всюду на G ,
- 2) $\mathcal{Q}_F(x)$ по метрике $L^{\varphi^*}(G)$ сходится к функции $F(x)$ и

$$\|\mathcal{Q}_F\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leq \Gamma_\varphi \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)},$$

- 3) $\|(\mathcal{Q}_F)_\Phi\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leq \Gamma_\varphi \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)}$ (Γ_φ и Γ_φ^* — постоянные, большие нуля).

Из теоремы 1.1 и замечаний 1.2 и 1.3 следуют

Теорема 1.2. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n>1}$ — базис типа $\langle \nu, \nu \rangle$, $\nu > 2$. Тогда существует ряд (1.2) такой, что для любой функции $F(x) \in L^0(G)$ существует частичный ряд (1.7), который удовлетворяет условиям

- 1) $\mathcal{Q}_F(x) = F(x)$ почти всюду на G ,

- 2) $\|(\mathcal{Q}_F)_\Phi\|_{L^0(G)} \leq \Gamma_0 \int_G |F(x)| \ln(1 + |F(x)|^{-1}) dx$ (Γ_0 — постоянная,

большая нуля).

Теорема 1.3. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n>1}$ — базис типа $\langle \nu, \nu \rangle$, $\nu \geq 2$, $0 < p < 1$. Тогда существует ряд (1.2) такой, что для любой функции $F(x) \in L^p(G)$ существует частичный ряд (1.7), который удовлетворяет условиям

- 1) $\mathcal{Q}_F(x) = F(x)$ почти всюду на G ,

- 2) $\|(\mathcal{Q}_F)_\Phi\|_{L^p(G)} \leq \Gamma_p \|F\|_{L^p(G)}$ (Γ_p — постоянная, большая нуля).

Метод доказательства теорем позволяет обеспечить сходимость ряда $\sum_{n>1} |d_n|^{2+\varepsilon}$ одновременно для всех положительных ε , но за этим мы следить не будем.

В доказательствах теорем 1.1–1.3 широко используется метод, разработанный в нашей работе [10], где важную роль играют мартингалльные свойства системы Хаара (см. [7] и [11]).

Теорема 1 (без условий 2) и 3)) анонсирована в нашей работе [12].

§ 2. Обозначения и вспомогательные леммы

Пусть $\varphi(t)$ — возрастающая положительная функция на $[0, +\infty)$ с условием

$$\int_1^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt < +\infty. \quad (2.1)$$

Мы будем предполагать, что $\varphi(t)$ — непрерывна (это требование не обязательно, оно добавляется лишь для облегчения рассуждений). Будем считать также $\varphi(+\infty) = +\infty$.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 2.1. Пусть $\{f_n(x)\}_{n>1}$ — последовательность положительных функций на G с условием

$$\int_G f_n(x) dx \leq M < +\infty, \quad n > 1.$$

Тогда можно указать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n>1}$ такую, что

$$\int_G \varphi(\sup_{n>1} n^{-1} f_{k_n}(x)) dx < +\infty.$$

Доказательство. Не ограничивая общности мы можем предположить, что функция $\varphi(t)$ неограничена. Через $\tilde{f}_n(x)$, $n > 1$ обозначим равноизмеримую с $f_n(x)$, невозрастающую функцию. Очевидно

$$\int_G \tilde{f}_n(x) dx = \int_G f_n(x) dx. \quad (2.2)$$

Из последовательности $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n>1}$ можно выделить почти всюду сходящуюся подпоследовательность $\{f_{j_n}(x)\}_{n>1}$. Обозначим $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}_n(x)$, она будет невозрастающей функцией на G и

$$\int_G f(x) dx \leq M.$$

Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_G |\varphi(m \tilde{f}_{j_n}(x)) - \varphi(mf(x))| dx = 0 \quad (2.3)$$

при любом m , $0 \leq m \leq 1$.

Пусть $x_0 \in G$, имеем

$$\begin{aligned} \int_G |\varphi(m \tilde{f}_{j_n}(x)) - \varphi(mf(x))| dx &\leq \int_0^{x_0} \varphi(m \tilde{f}_{j_n}(x)) dx + \\ &+ \int_0^{x_0} \varphi(mf(x)) dx + \int_{x_0}^1 |\varphi(m \tilde{f}_{j_n}(x)) - \varphi(mf(x))| dx = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Из (2.2) следует $\tilde{f}_{j_n}(x) \leq Mx^{-1}$, $0 < x \leq 1$, следовательно

$$J_1 < \int_0^{x_0} \varphi(Mx^{-1}) dx = M \int_{Mx_0^{-1}}^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt.$$

Правая часть неравенства не зависит от n . Следовательно, J_1 стремится к нулю (равномерно относительно n) при $x_0 \rightarrow 0$. Точно также убедимся, что $J_2 \rightarrow 0$ при $x_0 \rightarrow 0$.

При фиксированном x_0 последовательность $|\varphi(n f_{1/n}(x)) - \varphi(n f \times \times(x))|$, $x_0 \leq x \leq 1$ ограничена и почти всюду сходится к нулю. Следовательно к нулю стремится J_2 . Соотношение (2.3) доказано.

Из последовательности $\{f_{1/n}(x)\}_{n>1}$ выделим подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n>1}$ такую, что

$$\sum_{n>1} \int_0^1 |\varphi(n^{-1} f_{k_n}(x)) - \varphi(n^{-1} f(x))| dx < 1. \tag{2.4}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\sup_{n>1} n^{-1} f_{k_n}(x)) &\leq 1 + \varphi(0) + \sup_{n>1} [\varphi(n^{-1} f_{k_n}(x)) - \\ &- 1 - \varphi(0)]^+ \leq 1 + \varphi(0) + \sum_{n>1} [\varphi(n^{-1} f_{k_n}(x)) - 1 - \varphi(0)]^+ \end{aligned}$$

(здесь a^+ означает a , если $a \geq 0$ и 0 , если $a < 0$). Следовательно, в силу (2.4) имеет место

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \varphi(\sup_{n>1} n^{-1} f_{k_n}(x)) dx \leq 1 + \varphi(0) + \\ &+ \sum_{n>1} \int_0^1 [\varphi(n^{-1} f_{k_n}(x)) - 1 - \varphi(0)]^+ dx = \\ &= 1 + \varphi(0) + \sum_{n>1} \int_0^1 [\varphi(n^{-1} \tilde{f}_{k_n}(x)) - 1 - \varphi(0)]^+ dx < \tag{2.5} \\ &\leq 2 + \varphi(0) + \sum_{n>1} \int_0^1 [\varphi(n^{-1} f(x)) - 1 - \varphi(0)]^+ dx = \\ &= 2 + \varphi(0) + \sum_{n>1} \int_0^{x_n} [\varphi(n^{-1} f(x)) - 1 - \varphi(0)] dx. \end{aligned}$$

Обозначим $F_n(x) = \varphi(n^{-1} f(x)) - 1 - \varphi(0)$. Определим обратную к $F_n(x)$ функцию $F_n^{-1}(y)$. С этой целью сначала определим обратные (к $f(x)$ и $\varphi(t)$) функции $f^{-1}(y)$, $y \geq 0$ и $\varphi^{-1}(y)$, $y \geq \varphi(0)$.

Положим $e_y = \{x : f(x) = y\}$, $y \geq 0$ (будем считать, что $f(0-) = +\infty$). Если e_y содержит одну точку, то полагаем $f^{-1}(y) = x$. Если e_y содержит более одной точки (количество таких y может быть лишь счетным), то в качестве $f^{-1}(y)$ берем любое x из e_y . Ес-

ли e_y — пустое множество, то существует $x \in G$ такая, что $y \in [f(x-), f(x+)]$ (будем считать, что $f(1+) = 0$). В таких точках y полагаем $f^{-1}(y) = x$. Известно, что $f^{-1}(y)$ не возрастает и

$$\int_0^{+\infty} f^{-1}(y) dy = \int_0^{+\infty} f(x) dx \quad (2.6)$$

$\varphi^{-1}(y)$ в промежутке $[\varphi(0), +\infty)$ определяется обычным образом. Положим

$$F_n^{-1}(y) = f^{-1}(n\varphi^{-1}(1 + \varphi(0) + y)), \quad y > 0.$$

Тогда имеет место

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} [\varphi(n^{-1}f(x)) - 1 - \varphi(0)] dx &= \int_0^{+\infty} F_n^{-1}(y) dy = \\ &= \int_0^{+\infty} f^{-1}(n\varphi^{-1}(1 + \varphi(0) + y)) dy = \int_{1+\varphi(0)}^{+\infty} f^{-1}(n\varphi^{-1}(y)) dy. \end{aligned}$$

Обозначим

$$F(x) = \int_{1+\varphi(0)}^{+\infty} f^{-1}(x\varphi^{-1}(y)) dy, \quad x > 1.$$

Очевидно функция $F(x)$ не возрастает. Следовательно, в силу (2.5) сходимость ряда

$$\sum_{n>1} \int_0^{+\infty} [\varphi(n^{-1}f_n(x)) - 1 - \varphi(0)]^+ dx$$

равносильна сходимости интеграла

$$I = \int_1^{+\infty} dx \int_{1+\varphi(0)}^{+\infty} f^{-1}(x\varphi^{-1}(y)) dy.$$

Подставляя $t = \varphi^{-1}(y)$, получим

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} dx \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(xt) d\varphi(t) = \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} d\varphi(t) \times \\ &\times \int_1^{+\infty} f^{-1}(xt) dx = \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} d\varphi(t) \int_t^{+\infty} f^{-1}(u) t^{-1} du = \\ &= \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(u) du \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^u t^{-1} d\varphi(t) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(u) du [u^{-1} \varphi(u) + \\
&+ \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^u t^{-2} \varphi(t) dt] \leq \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(u) u^{-1} \varphi(u) du + \\
&+ \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(u) du \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt.
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы 2.1 достаточно убедиться, что первый интеграл в правой части полученного неравенства конечен. Из (2.6) вытекает

$$u f^{-1}(u) \leq \int_0^{+\infty} f^{-1}(u) du \leq M < +\infty, u \geq 0.$$

Следовательно

$$\int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(u) u^{-1} \varphi(u) du \leq M \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} u^{-2} \varphi(u) du < +\infty.$$

Лемма 2.1 доказана.

Заметим, что в случае $\varphi(t) = t(1+t)^{-1}$ лемма 2.1 следует также из оценок, полученных в работе [13] (см. [13], стр. 222).

Из доказательства леммы 2.1 следует

Лемма 2.2. Пусть $\{f_n(x)\}_{n>1}$ — последовательность равноизмеримых, интегрируемых положительных функций, а $\varphi(t), t \geq 0$ удовлетворяет условию (2.1). Тогда

$$\int_0^{\infty} \varphi\left(\sup_{n>1} n^{-1} f_n(x)\right) dx < +\infty.$$

Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n>1}$ — базис пространства $L^v(G)$, $v > 1$ типа $\langle v, v \rangle$, $U = \{u_n(x)\}_{n>1}$ — сопряженная к Φ система из $L^v(G)$, $|v'|^{-1} + v^{-1} = 1$. Если $f(x) \in L^v(G)$ и $\mathcal{Q}_f(x) = \sum_{n>1} c_n(f) \varphi_n(x)$ — разложение функции по системе Φ , то коэффициенты $c_n(f)$, $n \geq 1$ определяются формулой

$$c_n(f) = \int_0^{\infty} f(x) u_n(x) dx. \quad (2.7)$$

Построим ортогональную и нормированную по равномерной метрике систему $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k>1}$. Пусть $\{\sigma_k\}_{k>1}$ — убывающая последовательность положительных чисел $\sum_{k>1} \sigma_k < +\infty$. Положим $j_1 = 1$, $\psi_1(x) = r_{j_1}(x)$ ($r_j(x)$, $j \geq 1$ — функции Радемахера) и $s_0 = 0$. Существует натуральное число s_1 такое, что

$$\|\psi_1 - \sum_{s_0 < n < s_1} c_n (\psi_1) \varphi_n\|_{L^p(G)} < \min \{ \mu(\Delta_1), \tau_1 \}$$

(где $\Delta_1 = G$).

Остальные функции мы будем строить по пачкам $\psi_k(x)$, $n_1 < k \leq n_{j+1}$, $j > 1$ (считаем, что в первой пачке одна функция $\psi_1(x)$, считаем также $0 = n_0 < n_1 = 1$). Рассмотрим интервалы постоянства функции $\psi_1(x)$, $\Delta_2, \dots, \Delta_{n_1}$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ при $n_1 < i \neq j \leq n_2$, $\cup_{n_1 < i < n_2} \Delta_i = G$ (всюду мы будем считать, что из отрезка G выброшены двоично рациональные точки). Заметим, что Δ_k , $n_1 < k \leq n_2$ — двоичные интервалы. Построим вторую пачку функций $\psi_k(x)$, $n_1 < k \leq n_2$, $\text{supp } \psi_k(x) = \Delta_k$. Если функции $\psi_1(x), \dots, \psi_{k-1}(x)$, $n_1 \leq k < n_2$ уже построены (построены и числа $s_0 < s_1 < \dots < s_{k-1}$), то функция $\psi_k(x)$ и число s_k строятся следующим образом. Пусть $\chi_{\Delta}(x)$ — характеристическая функция интервала Δ тогда для любого $n \geq 1$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^1 \chi_{\Delta}(x) r_j(x) \psi_n(x) dx = 0.$$

Следовательно, полагая $\psi_k(x) = \chi_{\Delta_k}(x) r_{j_k}(x)$, при достаточно большом j_k будем иметь

$$\| \sum_{1 < n < s_{k-1}} c_n (\psi_k) \varphi_n \|_{L^p(G)} < \delta_k = \min \{ |\mu(\Delta_k)|^{1/p}, 2^{-1} \sigma_k \}. \quad (2.8)$$

Найдем $s_k > s_{k-1}$, при котором

$$\|\psi_k - \sum_{n < s_k} c_n (\psi_k) \varphi_n\|_{L^p(G)} < \delta_k. \quad (2.9)$$

Обозначим

$$v_k(x) = \sum_{s_{k-1} < n < s_k} c_n (\psi_k) \varphi_n(x).$$

Из (2.8) и (2.9) следует

$$\begin{aligned} \|\psi_k - v_k\|_{L^p(G)} &\leq \|\psi_k - \sum_{n < s_k} c_n (\psi_k) \times \\ &\times \varphi_n\|_{L^p(G)} + \|\sum_{n < s_{k-1}} c_n (\psi_k) \varphi_n\|_{L^p(G)} < 2\delta_k \leq \sigma_k. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отсюда имеем (см. 16))

$$\| (v_k^*)_{\varphi} \|_{L^p(G)} \leq M, \|v_k\|_{L^p(G)} \leq 2M, \|\psi_k\|_{L^p(G)}. \quad (2.11)$$

Вторая пачка функций системы Ψ построена. Пусть построены функции первых $j-1$ пачек $\psi_k(x)$, $k \leq n_{j-1}$. Рассмотрим интервалы постоянства функций $\psi_k(x)$, $k \leq n_{j-1}$, $\Delta_{n_{j-1}+1}, \dots, \Delta_{n_j}$,

$$\cup_{n_{j-1} < i < n_j} \Delta_i = G, \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, n_{j-1} < i \neq i' \leq n_j.$$

Аналогичным образом, на каждом из этих интервалов Δ_k , $n_{j-1} < k \leq n_j$ построим функцию j -ой пачки $\psi_k(x)$ так, чтобы выполнялись условия (2.10) и (2.11), при этом каждая из этих функций имеет вид

$$\psi_k(x) = \chi_{\Delta_k}(x) r_{j_k}(x), j_{k+1} > j_k, k \geq 1,$$

где Δ_k — двоичный интервал и

$$\int_{\Delta_k} r_{j_k}(x) dx = 0. \quad (2.12)$$

Положим

$$V_i(x) = \left(\sum_{n_{l-1} < k < n_l} (v_k^*(x))_{\Phi}^v \right)^{1/v}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |V_i(x)|^v dx &= \sum_{n_{l-1} < k < n_l} \int_0^1 (v_k^*(x))_{\Phi}^v dx \leq \\ &\leq \sum_{n_{l-1} < k < n_l} 2 \cdot M_v^v \int_0^1 |\psi_k(x)|^v dx = 2 \cdot M_v^v = M. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу леммы 2.1 существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{i_j\}_{j>1}$ такая, что

$$\int_0^1 \varphi \left(\sup_{j>1} j^{-1} V_{i_j}(x) \right)^v dx < +\infty, \quad (2.13)$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (2.1). Предположим $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$, тогда из (2.13) получим

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \varphi \left(\sup_{j>n} j^{-1} \ln^{-1}(j+1) V_{i_j}(x) \right)^v dx = 0. \quad (2.14)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $i_j = j$, $j > 1$.

Обозначим

$$b_k = (j \ln(j+1))^{-\frac{1}{v}} \quad (2.15)$$

при $n_{j-1} < k < n_j$, $j > 1$. Пусть $n_{l-1} < n \leq n_l$. Имеем

$$\begin{aligned} \sup_{k>n} h_k (v_k^*(x))_{\Phi} &\leq \sup_{j>l} \left(\sum_{n_{j-1} < k < n_j} |b_k (v_k^*(x))_{\Phi}|^v \right)^{1/v} = \\ &= \sup_{j>l} |j \ln(j+1)|^{-\frac{1}{v}} V_j(x). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу (2.14)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \varphi \left(\sup_{j>n} b_k (v_k^*(x))_{\Phi} \right)^v dx = 0.$$

Положим $\omega(t) = \omega_{\varphi}(t) = \varphi(t^v)$. Справедливо

Замечание 2.1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sup_{k>n} b_k (v_k^*)_{\Phi} \right\|_{L^{\infty}(G)} = 0,$$

где $\omega(t)$ — монотонно возрастающая функция на $[0, +\infty)$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0, \int_1^{+\infty} t^{-\nu-1} \omega(t) dt < +\infty, \nu > 1. \quad (2.16)$$

Легко проверить, что если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (2.1), то $\omega(t) = \varphi(t)$ или $\omega(t) = \varphi^*(t)$ будет удовлетворять условию (2.16). Следовательно, из замечания 2.1 будет вытекать

Замечание 2.2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sup_{k > n} b_k (v_k^*) \right\|_{L^{\nu^*}(G)} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sup_{k > n} b_k (v_k^*) \right\|_{L^{\nu}(G)} = 0,$$

где $\varphi(t)$ — возрастающая функция на $[0, +\infty)$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0, \int_1^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt < +\infty. \quad (2.17)$$

Замечание 2.3.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k > n} b_k |v_k - \psi_k| \right\|_{L^{\omega}(G)} = 0,$$

где функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию (2.16).

Замечание 2.4.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k > n} b_k |v_k - \psi_k| \right\|_{L^{\nu^*}(G)} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k > n} b_k |v_k - \psi_k| \right\|_{L^{\nu}(G)} = 0,$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (2.17).

Замечание 2.4 следует из замечания 2.3. Убедимся в справедливости замечания 2.3. Обозначим

$$Q_n(x) = \sum_{k > n} b_k |v_k(x) - \psi_k(x)| \text{ и } \varepsilon_n = \|Q_n\|_{L^{\nu}(G)}.$$

Пусть $\tilde{Q}_n(x)$ — возрастающая равноизмеримая с $Q_n(x)$ функция, тогда $\tilde{Q}_n(x) \leq \varepsilon_n x^{-1}$. Отсюда

$$\|Q_n\|_{L^{\omega}(G)} = \|Q_n\|_{L^{\nu}(G)} \leq$$

$$\leq \int_0^1 \varphi(\varepsilon_n t^{-1}) dt = \varepsilon_n \int_{\varepsilon_n}^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt = \varphi^*(\varepsilon_n).$$

Из (2.10) следует, что $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, в силу (1.4) стремится к нулю и $\varphi^*(\varepsilon_n)$. Замечание 2.3 доказано.

Замечание 2.5. При $\nu > 2$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k < n} b_k \psi_k(x) \right| = +\infty \text{ почти всюду на } G.$$

Доказательство. В силу (2.14) имеет место

$$\sum_{k \geq 1} |b_k \psi_k(x)|^2 = \sum_{j \geq 1} |j \ln(j+1)|^{-\frac{2}{v}} \times$$

$$\times \sum_{n_{j-1} < k < n_j} |\psi_k(x)|^2 = \sum_{j \geq 1} |j \ln(j+1)|^{-\frac{2}{v}} = +\infty \text{ почти всюду на } G.$$

Если учесть, что функция $\psi_k(x)$, $k \geq 1$ является полиномом из функций j_k -ой пачки системы Хаара и при этом $j_{k+1} > j_k$ (см. 2.12), то из полученного неравенства следует (см. [7] и [10]) справедливость замечания 2.5.

Замечание 2.6. Если в формуле (2.15) взять $b_k = (j \ln(j+1))^{-\frac{1}{2}}$ при $n_{j-1} < k \leq n_j$, $j \geq 1$, то при $v > 2$ получили бы

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sup_{k > n} b_k (v_k)_{\sigma} \|_{L^v(\sigma)} = 0,$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sum_{k > n} b_k (v_k - \psi_k) \|_{L^v(\sigma)} = 0.$$

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Через G^* обозначим систему множеств из G , каждое из которых является объединением конечного числа двоичных интервалов. Пусть e_1 и e_2 — множества из G^* равной меры,

$$r_{e_1, e_2}(x) = \chi_{e_1}(x) - \chi_{e_2}(x). \quad (3.1)$$

Справедлива

Лемма 3.1. Пусть заданы $e \in G^*$, $\sigma > 0$, действительное число f и натуральное число n . Тогда существует разбиение множества $e = e^+ \cup e^-$ и функция

$$\Psi_e(x) = \sum_{n < k < m} \eta_k b_k \psi_k(x)$$

($\eta_k = 0$ или 1 , $n < k \leq m$), которые удовлетворяют условиям

$$1) \quad \|\Psi_e - f r_{e^+, e^-}\|_{L^v(\sigma)} < \sigma$$

($v \geq 2$ — заранее фиксированное число).

$$2) \quad (\Psi_e^*(x))_v \leq (|f| + \sigma) \chi_e(x) \text{ для всех } x \in G.$$

(Определение $(\Psi_e^*(x))_v$ см. 1.5)).

Доказательство. При $f=0$ достаточно взять $\Psi_e(x) \equiv 0$, $x \in G$ и условия леммы будут выполнены. Предположим, что $f \neq 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$) выберем позднее) $l > n$ и

$$\sup_{k > l} |b_k| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Рассмотрим ряд $\sum_{k > l} a_k b_k \psi_k(x)$, где $a_k = 0$, если Δ_k лежит в $G \setminus e^+$ и $a_k = 1$, если $\Delta_k \subseteq e^+$. Из замечания 2.5 следует

$$\sup_{j > l} \|\sum_{l < k < j} a_k b_k \psi_k(x)\| \geq |f| \text{ почти всюду на } e. \quad (3.3)$$

Через $j(x)$ обозначим наименьшее число j , $j > l$, при котором

$$|\sum_{l < k < j(x)} a_k b_k \psi_k(x)| \geq |f|. \quad (3.4)$$

В силу (3.3) $j(x)$ — почти всюду конечная функция на e . Поэтому для некоторого натурального числа m $\mu(e_\varepsilon) < \varepsilon$, где $e_\varepsilon = \{x : x \in e, j(x) > m\}$.

Пусть $\tau(x) = j(x)$ при $x \in e \setminus e_\varepsilon$ и $\tau(x) = m$ в остальных точках G . Определим β_k , $l \leq k \leq m$, полагая $\beta_k = 1$ всегда, кроме тех случаев, когда $\Delta_k \subseteq e$ и в некоторой точке x из Δ_k $j(x) < k$. В этом случае берем $\beta_k = 0$.

Рассмотрим функцию

$$\Psi_e(x) = \sum_{n < k \leq m} \eta_k b_k \psi_k(x), \text{ где } \eta_k = 0 \text{ при}$$

$n < k < l$ и $\eta_k = a_k \beta_k$ при $l \leq k \leq m$. Докажем, что

$$\eta_k b_k \psi_k(x) = a_k b_k \psi_k(x), \quad x \in G, \quad l \leq k < \tau(x)$$

и

$$\eta_k b_k \psi_k(x) = 0, \quad x \in G, \quad \tau(x) < k \leq m. \quad (3.5)$$

Вне e утверждение очевидно. Пусть $x_0 \in e$. Предположим $\eta_k b_k \psi_k(x_0) \neq a_k b_k \psi_k(x_0)$, тогда $x_0 \in \Delta_k$, $\beta_k = 0$ и $a_k b_k \psi_k(x_0) \neq 0$. Следовательно, для некоторого $x_1 \in \Delta_k$ $j(x_1) < k$. Так как функции $\psi_j(x)$, $l \leq j \leq j(x_1)$ постоянны на Δ_k , то $j(x_1) = j(x) = \tau(x)$ всюду на Δ_k и, в частности, $k > \tau(x_0)$.

Пусть теперь $k > \tau(x_0) = j(x_0)$. Если $x_0 \notin \Delta_k$, то $\eta_k b_k \psi_k(x_0) = 0$. Если же $x_0 \in \Delta_k$, то $\beta_k = 0$. Следовательно, $\eta_k b_k \psi_k(x_0) = 0$. Тем самым утверждение (3.5) доказано.

Из (3.5) и, соответственно, из (3.4) имеем

$$\Psi_e(x) = \sum_{l < k < \tau(x)} a_k b_k \psi_k(x), \quad x \in G,$$

$$(\Psi_e^*(x))_{\mathbb{C}} \leq |\sum_{l < k < \tau(x)} a_k b_k \psi_k(x)| + \sup_{k > l} |b_k| \leq |f| + \varepsilon, \quad x \in e. \quad (3.6)$$

Это показывает, что при $\varepsilon > \sigma$ условие 2) леммы 3.1 выполнено.

Нам остается убедиться в справедливости условия 1).

Обозначим через e_1 то множество из e , на котором функция $\Psi_e(x)$ и f имеют одинаковый знак, и через e_2 множество из e , на котором $\Psi_e(x)$ и f имеют противоположные знаки. Очевидно e_1 и e_2 принадлежат G^* .

Из (3.4) и (3.6) следует

$$\begin{aligned} |f| \mu(e_1) + \varepsilon &> \int_{e_1} \Psi_e(x) dx = 2^{-1} \int_{e_1} |\Psi_e(x)| dx = \\ &= 2^{-1} \int_{e \setminus e_2} |\Psi_e(x)| dx \geq 2^{-1} \int_{e \setminus e_2} |f| dx > 2^{-1} |f| (\mu(e) - \varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mu(e_1) > 2^{-1} \mu(e) - 2^{-1} \varepsilon - |f|^{-1} \varepsilon$. Точно также убедимся, что $\mu(e_2) > 2^{-1} \mu(e) - 2^{-1} \varepsilon - |f|^{-1} \varepsilon$. Мы можем считать, что $\mu(e_1) < 2^{-1} \mu(e)$ и $\mu(e_2) < 2^{-1} \mu(e)$. Пусть $e' = e \setminus (e_1 \cup e_2)$. Имеем $\mu(e') < \varepsilon + 2|f|^{-1} \varepsilon$. Множество e' разобьем на две e_1 и e_2 части (e_1 и e_2 при-

надлежат G^*) так, чтобы $\mu(e^+) = 2^{-1} \mu(e)$ и $\mu(e^-) = 2^{-1} \mu(e)$ (где $e^+ = e_1 \cup e_j$ и $e^- = e_2 \cup e_j$). Имеем

$$\|V_e - f\|_{L^1(e^+)} \leq \|V_e - f\|_{L^1(e_1)} + \|V_e\|_{L^1(e^+)} + \|f\|_{L^1(e^+)} \leq \varepsilon \mu(e) + 2\|f\|_2 + 4\varepsilon.$$

Отсюда следует, что при достаточно малом ε будет

$$\|V_e - f\|_{L^1(e^+)} < 2^{-1} \varepsilon.$$

Точно также убедимся, что

$$\|V_e + f\|_{L^1(e^-)} < 2^{-1} \varepsilon.$$

Из последних двух неравенств следует справедливость условия 1) леммы 3.1. Тем самым лемма 3.1 доказана.

Из замечаний 2.1 и 2.3 легко получить такое утверждение.

Лемма 3.1'. Пусть заданы: $e \in G^*$, $\sigma > 0$, f — действительное число, m_0 — натуральное число. Тогда существуют разбиение $e = e_1 \cup e_2$, полином

$$V_e(x) = \sum_{n < k < m} \eta_k b_k \psi_k(x) \quad (3.7)$$

($\eta_k = 0$ или 1, $n < k \leq m$), которые удовлетворяют условиям:

- 1) $\|V_e - f\|_{L^1(e)} < \sigma$,
- 2) $\|(V_e)_\Phi\|_{L^1(e)} \leq 3\|f\|_{L^1(e)}$,
- 3) $\|(V_e)_\Phi\|_{L^1(e \setminus e)} < \sigma$

(функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию (2.16)).

Из замечания 2.6 следует

Лемма 3.1". Пусть заданы $e \in G^*$, $\sigma > 0$, f — действительное число, m_0 — натуральное число. Тогда при $\nu > 2$ существуют разбиение $e = e^+ \cup e^-$, полином (3.7), которые удовлетворяют условиям

- 1) $\|V_e - f\|_{L^1(e)} < \sigma$,
- 2) $\|(V_e)_\Phi\|_{L^1(e)} \leq 3\|f\|_{L^1(e)}$,
- 3) $\|(V_e)_\Phi\|_{L^1(e \setminus e)} < \sigma$.

Леммы 3.1' и 3.1" мы не будем использовать, однако мы их привели, так как считаем, что они представляют самостоятельный интерес.

Справедлива

Лемма 3.2. Пусть заданы: $e \in G^*$, $\varepsilon > 0$, f — действительное число, m_0 — натуральное число. Тогда существует полином по системе Ψ

$$\Psi_e(x) = \sum_{m_0 < k < m_1} \eta_k b_k \psi_k(x)$$

(η_k — принимает значения 0 или 1), который удовлетворяет условиям

- 1) $\|\Psi_e - f\|_{L^1(e)} < \varepsilon$,

$$2) \|\Psi_{e_k}\|_{L^{\varphi}(\sigma)} \leq \gamma \|f \chi_{e_k}\|_{L^{\varphi}(\sigma)}$$

$$3) \|\Psi_e^*\|_{L^{\varphi}(\sigma)} < \Gamma \|f \chi_e\|_{L^{\varphi}(\sigma)}$$

(γ и Γ — постоянные большие нуля, функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1) и 3) замечания 1.1)

Доказательство. Если $f = 0$, то $\Psi_e(x) \equiv 0$ будет удовлетворять условиям леммы. Предположим $f \neq 0$. Построим функцию $r_{e_k^+, e_k^-}(x)$ и

$$\Psi_{e_k}(x) = \sum_{l_{k-1} < l_k} \gamma_k b_k \psi_k(x), \quad k \geq 1$$

(γ_k принимает значения 0 и 1) следующим образом: положим $e_1 = e_0^- = e$. Применяя лемму 3.1, построим функции $r_{e_1^+, e_1^-}(x)$ и $\Psi_{e_1}(x)$, где

вместо n и σ берутся $l_0 = m_0$ и $2^{-1}\sigma$, соответственно. Предположим построены $r_{e_1^+, e_1^-}(x), \dots, r_{e_{k-1}^+, e_{k-1}^-}(x), \Psi_{e_1}(x), \dots, \Psi_{e_{k-1}}(x)$. Положим

$e_k = e_{k-1}^-$. Применяя лемму 3.1, построим $r_{e_k^+, e_k^-}(x)$ и $\Psi_{e_k}(x)$, кото-

рые удовлетворяют условиям

$$\|\Psi_{e_k} - 2^{k-1} f r_{e_k^+, e_k^-}\|_{L^{\varphi}(\sigma)} < 2^{-k} \sigma, \quad (3.8)$$

$$(\Psi_{e_k}^*(x))_{\varphi} \leq (2^{k-1} |f| + 2^{-k} \sigma) \chi_{e_k}(x), \quad x \in G. \quad (3.9)$$

Пусть s — натуральное число. Обозначим

$$\Psi_j(x) = \sum_{1 \leq k \leq j} \Psi_{e_k}(x), \quad 1 \leq j \leq s,$$

$$\Psi_e(x) = \Psi_s(x)$$

и

$$f_j(x) = \sum_{1 \leq k \leq j} 2^{k-1} f r_{e_k^+, e_k^-}(x), \quad 1 \leq j \leq s.$$

Из (3.9) имеем

$$\begin{aligned} (\Psi_e^*(x))_{\varphi} &\leq \sum_{1 \leq k \leq s} (\Psi_{e_k}^*(x))_{\varphi} \leq \sum_{1 \leq k < n} 2^{k-1} |f| \chi_{e_k}(x) + \\ &+ \sum_{1 \leq k \leq s} 2^{-k} \sigma \chi_{e_k}(x) \leq \sum_{1 \leq k < s} 2^{k-1} |f| \chi_{e_k}(x) + \sigma \chi_e(x). \end{aligned}$$

По построению

$$\mu(e_k) = \mu(e_{k-1}^-) = 2^{-1} \mu(e_{k-1}) = \dots = 2^{1-k} \mu(e_1) = 2^{1-k} \mu(e).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|(\Psi_e^*)_{\varphi}\|_{L^{\varphi}(\sigma)} &\leq 2 \mu(e) \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(2^{k-1} |f|) 2^{-k} + \\ &+ \varphi(\sigma) \leq 2 \mu(e) \int_0^{+\infty} \varphi(|f| t^{-1}) dt + \varphi(\sigma) = \\ &= 2 \mu(e) |f| \int_{|f|}^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt + \varphi(\sigma) = 2 \|f \chi_e\|_{L^{\varphi}(\sigma)} + \varphi(\sigma). \end{aligned}$$

Так как $\varphi(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$, то полученное неравенство показывает, что при достаточно малом σ условие 3) леммы 3.2 будет выполнено.

Убедимся в справедливости условия 1). Пусть $x \in e_k^+$, $1 \leq k \leq j \leq s$.

Тогда

$$x \in e_k^+ \subseteq e_k = e_{k-1}^- \subseteq e_{k-1} \subseteq e_{k-2}^- \subseteq \dots \subseteq e_1^-, \quad x \in e_k^- = e_{k-1} \supseteq e_{k+1}^- = e_{k+2}^- \supseteq \dots \supseteq e_j^-.$$

Следовательно

$$f_j(x) = \sum_{1 \leq l < k} 2^{l-1} f_{r_{e_l^+, e_l^-}}(x) = 2^{k-1} f - \sum_{1 \leq l < k} 2^{l-1} f = f, \quad x \in e_k^+, \quad 1 \leq k \leq j \leq s. \quad (3.10)$$

С другой стороны

$$e_j^- = e_j \setminus e_j^+ = e_{j-1}^- \setminus e_j^+ = e_{j-1}^- \setminus (e_j^+ \cup e_{j-1}^+) = \dots = e_1^- \setminus \bigcup_{1 \leq k < j} e_k^+ = e_1^- \setminus \bigcup_{1 \leq k < j} e_k^+, \quad 1 \leq j \leq s. \quad (3.11)$$

Поэтому

$$f_j(x) = -f \sum_{1 \leq k < j} 2^{k-1} = (1-2^j)f, \quad x \in e_j^-, \quad 1 \leq j \leq s. \quad (3.12)$$

Отсюда и из (3.10)–(3.11) вытекает

$$f|_{e_s} - f_s(x) = 2^s f|_{e_s^-}(x), \quad x \in G.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \|f|_{e_s} - f_s\|_{L^{\varphi^*}(G)} &= \varphi^*(2^s |f|_{e_s^-}) = \\ &= \varphi^*(2^s |f|) 2^{-s} \mu(e) = |f| \mu(e) \int_{2^s |f|}^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Пусть

$$e_j(\sigma) = \{x : |\Psi_j(x) - f_j(x)| > \sigma^{1/2}, x \in e_j\}.$$

Применяя неравенство Чебышева, в силу (3.8) будем иметь

$$\begin{aligned} \mu(e_j(\sigma)) &\leq \sigma^{-\frac{1}{2}} \int_G |\Psi_j(x) - f_j(x)| dx \leq \\ &\leq \sigma^{-\frac{1}{2}} \|\Psi_j - f_j\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leq \sigma^{-\frac{1}{2}} \sum_{1 \leq k < j} \|\Psi_{e_k} - 2^{k-1} f \times \\ &\quad \times r_{e_k^+, e_k^-}\|_{L^{\varphi^*}(G)} < \sigma^{1/2}, \quad 1 \leq j \leq s. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \|\Psi_j - f_j\|_{L^{\varphi^*}(G)} &\leq \int_{e_j(\sigma)} \varphi^*(|\Psi_j(x) - f_j(x)|) dx + \\ &+ \int_{e - e_j(\sigma)} \varphi^*(|\Psi_j(x) - f_j(x)|) dx \leq \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\leq \varphi^* (2^j |f| + \sigma) \sigma^{1/2} + \sigma^{1/2} \mu(e).$$

Это неравенство вместе с (3.13) дает

$$\begin{aligned} \|\Psi_e - f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)} &\leq \sigma^{1/2} + \varphi^* (2^j |f| + \sigma) \sigma^{1/2} + \\ &+ |f| \int_{2^j/\Delta}^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

При достаточно большом s J_3 будет меньше $3^{-1}\varepsilon$. После выбора s выберем достаточно малое σ , при котором $J_1 < 3^{-1}\varepsilon$, $J_2 < 3^{-1}\varepsilon$, и убедимся в справедливости условия 1).

Условие 2). Имеем

$$\begin{aligned} \|\Psi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma), \Psi} &\leq \sup_{1 < j < s} \|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)} + \sup_{1 < j < s} |\Psi_j - \\ &- f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)} + \sup_{1 < k < s} \|(\Psi_{e_k})_{\Psi}\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)} = J_4 + J_5 + J_6. \end{aligned}$$

Из (3.10)–(3.12) следует

$$\begin{aligned} J_4 &\leq \sup_{1 < j < s} \varphi^* (|f|) \mu(e \setminus e_j^-) + \varphi^* ((2^j - 1)|f|) \mu(e_j^-) \leq \\ &\leq 2\varphi^* (|f|) \mu(e) = 2\|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)}. \end{aligned}$$

Из (3.14) вытекает, что при достаточно малом σ $J_5 \leq \|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)}$. Из (3.9) следует

$$J_6 \leq \varphi^* (2^{k-1}|f|) \mu(e_k) + \varphi^* (\sigma) \leq \varphi^* (|f|) \mu(e) + \varphi^* (\sigma).$$

Отсюда при достаточно малом σ $J_6 \leq 2\|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)}$. Полученные неравенства вместе дают

$$\|\Psi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma), \Psi} \leq s\|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)} = \gamma\|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)}.$$

Условие 2) выполнено. Тем самым, лемма 3.2, доказана.

Лемма 3.3. Пусть заданы $e \in G^*$, $\sigma > 0$, f — действительное число, l_0 — натуральное число. Тогда существует полином по системе Φ

$$P_e(x) = \sum_{l_0 < k < l_1} \tau_k b_k v_k(x)$$

(τ_k принимает значения 0 или 1), который удовлетворяет условиям

- 1) $\|P_e - f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)} < \sigma$,
- 2) $\|P_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma), \Phi} \leq \gamma_1 \|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)}$,
- 3) $\|(P_e^*)_{\Phi}\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)} \leq \Gamma_1 \|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(\sigma)}$,

(γ_1 и Γ_1 — постоянные, большие нуля, функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1)–3) замечания 1.1).

Доказательство. Если $f = 0$, то $P_e(x) \equiv 0$ будет удовлетворять условиям леммы. Предположим $f \neq 0$. В силу замечаний 2.2 и 2.4 найдем число $m_0 > l_0$ такое, что

$$\| \sum_{k>m_0} b_k |\psi_k - v_k| \|_{L^{\varphi^*}(G)} < \varepsilon, \quad \| \sup_{k>m_0} b_k (v_k)_{\Phi} \|_{L^{\varphi^*}(G)} < \varepsilon,$$

$$\| \sum_{k>m_1} b_k |\psi_k - v_k| \|_{L^{\varphi}(G)} < \varepsilon, \quad \| \sup_{k>m_1} b_k (v_k)_{\Phi} \|_{L^{\varphi}(G)} < \varepsilon$$

(ε — наперед заданное число, большее нуля).

Пусть $\Psi_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3.2. Обозначим

$$P_\varepsilon(x) = \sum_{m_0 < k < m_1} \tau_k b_k v_k(x).$$

Имеем

$$\| P_\varepsilon - f \|_{L^{\varphi^*}(G)} \leq \| P_\varepsilon - \Psi_\varepsilon \|_{L^{\varphi^*}(G)} + \| f - \Psi_\varepsilon \|_{L^{\varphi^*}(G)} <$$

$$\leq \| \sum_{k>m_0} b_k |\psi_k - v_k| \|_{L^{\varphi^*}(G)} + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

$$\| P_\varepsilon \|_{L^{\varphi^*}(G), \Phi} \leq \| \Psi_\varepsilon \|_{L^{\varphi^*}(G), \Phi} + \| \sum_{k>m_1} b_k |\psi_k -$$

$$- v_k \|_{L^{\varphi^*}(G)} + \| \sup_{k>m_0} b_k (v_k)_{\Phi} \|_{L^{\varphi^*}(G)} \leq \Gamma \| f \|_{L^{\varphi^*}(G)} + 2\varepsilon,$$

$$\| (P_\varepsilon)_{\Phi} \|_{L^{\varphi}(G)} \leq \| (\Psi_\varepsilon)_{\Phi} \|_{L^{\varphi}(G)} + \| \sum_{k>m_0} b_k |\psi_k - v_k| \|_{L^{\varphi}(G)} + \| \sup_{k>m_0} b_k (v_k)_{\Phi} \|_{L^{\varphi}(G)} \leq$$

$$\leq \Gamma \| f \|_{L^{\varphi}(G)} + 2\varepsilon.$$

Взяв $\tau_k = 0$ при $l_0 < k < m_0$, $l_1 = m_1$ убедимся, что при достаточно малом ε будут выполняться условия 1) и 3) леммы 3.3.

Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. Пусть заданы $\varepsilon > 0$, функция $F(x) \in L^*(G)$, натуральное число m_0 . Тогда существует полином

$$\Omega(x) = \sum_{m_0 < k < m_1} \tau_k b_k v_k(x)$$

(τ_k принимает значения 0 или 1), который удовлетворяет условиям

$$1) \quad \| \Omega - F \|_{L^{\varphi^*}(G)} < \varepsilon,$$

$$2) \quad \| \Omega \|_{L^{\varphi^*}(G), \Phi} \leq \Gamma_1 \| F \|_{L^{\varphi^*}(G)},$$

$$3) \quad \| \Omega_{\Phi} \|_{L^{\varphi}(G)} \leq \Gamma_2 \| F \|_{L^{\varphi^*}(G)}$$

(Γ_1 и Γ_2 — постоянные, большие нуля, $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1)–3) замечания 1.1).

Доказательство. При $\| F \|_{L^{\varphi^*}(G)} = 0$ берем $\Omega(x) \equiv 0$. Пусть $\| F \|_{L^{\varphi^*}(G)} \neq 0$, $\sigma < \min \{ \| F \|_{L^{\varphi^*}(G)}, \varepsilon \}$, $f(x)$ — ступенчатая на G функция такая, что $\| F - f \|_{L^{\varphi^*}(G)} < 2^{-1}\sigma$. Обозначим через e_1, \dots, e_s интервалы постоянства функции $f(x)$. Поочередно применяя лемму 3.3 мы построим полиномы

$$P_{e_j}(x) = \sum_{l_{j-1} < k < l_j} \tau_k b_k v_k(x), \quad 1 \leq j \leq s$$

(τ_k принимает значения 0 или 1, $m_0 = l_0 < l_1 < \dots < l_s = m_1$), которые удовлетворяют условиям

$$\| P_{e_j} f \|_{L^{\varphi^*}(G)} \leq 2^{-1} s^{-1} \sigma, \quad 1 \leq j \leq s,$$

$$\| P_{e_j} \|_{L^{\varphi^*}(G), \Phi} \leq \Gamma_1 \| f \|_{L^{\varphi^*}(G)}, \quad 1 \leq j \leq s$$

и

$$\| (P_{e_j})_{\Phi} \|_{L^{\varphi}(O)} \leq \Gamma \| f^{\lambda_{e_j}} \|_{L^{\varphi}(O)}$$

Положим

$$\Omega(x) = \sum_{1 \leq j < s} P_{e_j}(x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|\Omega - F\|_{L^{\varphi}(O)} &\leq \|\Omega - f\|_{L^{\varphi}(O)} + \|F - f\|_{L^{\varphi}(O)} \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq j < s} \|P_{e_j} - f^{\lambda_{e_j}}\|_{L^{\varphi}(O)} + 2^{-1} \varepsilon < \varepsilon, \\ \|\Omega\|_{L^{\varphi}(O), \Phi} &\leq \sum_{1 \leq j < s} \|P_{e_j}\|_{L^{\varphi}(O), \Phi} \leq \\ &\leq \gamma_1 \sum_{1 \leq j < s} \|f^{\lambda_{e_j}}\|_{L^{\varphi}(O)} \leq \gamma_1 \|f\|_{L^{\varphi}(O)} \leq \\ &< \gamma_1 \|f\|_{L^{\varphi}(O)} + \gamma_1 \|F - f\|_{L^{\varphi}(O)} \leq 2\gamma_1 \|F\|_{L^{\varphi}(O)}, \\ \|\Omega_{\Phi}\|_{L^{\varphi}(O)} &\leq \sum_{1 \leq j < s} \|P_{e_j}\|_{L^{\varphi}(O)} \leq \\ &\leq \Gamma_1 \sum_{1 \leq j < s} \|f^{\lambda_{e_j}}\|_{L^{\varphi}(O)} = \Gamma_1 \|f\|_{L^{\varphi}(O)} \leq \\ &< \Gamma_1 \|f - F\|_{L^{\varphi}(O)} + \Gamma_1 \|F\|_{L^{\varphi}(O)} \leq 2\Gamma_1 \|F\|_{L^{\varphi}(O)}. \end{aligned}$$

Лемма 3.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Через

$$\Omega(x) = \sum_{k>1} d_k \varphi_k(x)$$

обозначим раскрытый по внутренней сумме ряд

$$\sum_{k>1} b_k v_k(x).$$

В случае $\|F\|_{L^{\varphi}(O)} = 0$ теорема тривиальна надо положить $\Omega_F(x) \equiv 0$.Пусть $\|F\|_{L^{\varphi}(O)} \neq 0$. Согласно лемме 3.4 существует положить

$$\Omega_1(x) = \sum_{l_0 < k < l_1} \lambda_k d_k \varphi_k(x), \quad l_0 = 0$$

 $(\lambda_k$ принимает значения 0 или 1), удовлетворяющий условиям

$$\|\Omega_1 - F\|_{L^{\varphi}(O)} < 2^{-1} \|F\|_{L^{\varphi}(O)},$$

$$\|\Omega_1\|_{L^{\varphi}(O), \Phi} \leq \gamma_2 \|F\|_{L^{\varphi}(O)},$$

$$\|(\Omega_1)_{\Phi}\|_{L^{\varphi}(O)} < \Gamma_2 \|F\|_{L^{\varphi}(O)}.$$

Пусть построен полином

$$\Omega_{j-1}(x) = \sum_{l_{j-2} < k < l_{j-1}} \lambda_k d_k \varphi_k(x), \quad j > 1.$$

Применяя лемму 3.4 построим полином

$$\Omega_j(x) = \sum_{l_{j-1} < k < l_j} \lambda_k d_k \varphi_k(x),$$

удовлетворяющий условиям

$$\|\Omega_j - (F - \sum_{1 \leq n < j} \Omega_n)\|_{L^{\varphi}(O)} < 2^{-j} \|F\|_{L^{\varphi}(O)}, \quad (3.15)$$

$$\|\Omega_j\|_{L^{\nu^*}(G), \Phi} \leq \gamma_2 \|F - \sum_{1 < n < j} \Omega_n\|_{L^{\nu^*}(G)}, \quad (3.16)$$

$$\|(\Omega_j^*)_{\Phi}\|_{L^{\nu^*}(G)} \leq \Gamma_2 \|F - \sum_{1 < n < j} \Omega_n\|_{L^{\nu^*}(G)}. \quad (3.17)$$

По построению

$$\|(\Omega_j^*)_{\Phi}\|_{L^{\nu^*}(G)} \leq \Gamma_2 2^{1-j} \|F\|_{L^{\nu^*}(G)}.$$

Обозначим

$$\Omega_F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k d_k \varphi_k(x).$$

Из (3.17) следует

$$\begin{aligned} \|(\Omega_F^*)_{\Phi}\|_{L^{\nu^*}(G)} &\leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} (\Omega_j^*)_{\Phi} \right\|_{L^{\nu^*}(G)} \leq \\ &\leq \Gamma_2 \|F\|_{L^{\nu^*}(G)} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{1-j} \leq 2 \Gamma_2 \|F\|_{L^{\nu^*}(G)} = \Gamma_{\Phi} \|F\|_{L^{\nu^*}(G)}. \end{aligned}$$

Полученное неравенство, в частности, показывает, что ряд $\Omega_F(x)$ сходится почти всюду. С другой стороны, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \Omega_j(x)$ в метрике $L^{\nu^*}(G)$ сходится к функции $F(x)$ (см. (3.15)). Следовательно, $\Omega_F(x)$ почти всюду на G сходится к $F(x)$. Для завершения доказательства теоремы 1.1 нам остается показать справедливость пункта 2). Из (3.16) имеем

$$\begin{aligned} \|\Omega_F\|_{L^{\nu^*}(G), \Phi} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\Omega_j\|_{L^{\nu^*}(G), \Phi} \leq \\ &\leq \gamma_2 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \|F\|_{L^{\nu^*}(G)} \leq \gamma_{\Phi} \|F\|_{L^{\nu^*}(G)}. \end{aligned}$$

Эта оценка в частности, показывает сходимость ряда $\Omega_F(x)$ по метрике $L^{\nu^*}(G)$. Теорема 1.1 доказана.

Известен следующий результат (см. [14], стр. 96—97) Гарсия: Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n>1}$ — безусловный базис пространства $L^{\nu}(G)$, $\nu > 1$. Тогда существует постоянная M , такая, что для любого $F(x) \in L^{\nu}(G)$ можно указать перестановку $\Phi' = \{\varphi_{j_n}(x)\}_{n>1}$ системы Φ такую, что

$$\|S_{\Phi'}^*(F)\|_{L^{\nu}(G)} \leq M \|F\|_{L^{\nu}(G)}.$$

Наш метод вместе с оценкой Гарсия позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n>1}$ — безусловный базис пространства $L^{\nu}(G)$, $\nu \geq 2$. Тогда существуют перестановка $\Phi' = \{\varphi_{j_n}(x)\}_{n>1}$ системы Φ и ряд (по системе Φ')

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_{j_n}(x) \quad (3.18)$$

такой, что для любой функции $F(x) \in L^{\nu^*}(G)$ ($\varphi^*(t)$, $t > 0$ удовлетворяет условиям замечания 1.1) существует частичный ряд

$$\Omega_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n d_n \varphi_{j_n}(x) \quad (3.19)$$

(λ_n принимает значения 0 или 1), который удовлетворяет условиям

1) $\mathcal{Q}_F(x) = F(x)$ *почти всюду на G ,*

2) *Ряд $\mathcal{Q}_F(x)$ по метрике $L^{\nu^*}(G)$, сходится к функции $F(x)$ и*

$$\|\mathcal{Q}_F\|_{L^{\nu^*}(G), \Phi'} \leq \Gamma_{\nu} \|F\|_{L^{\nu^*}(G)}$$

3) $\|(\mathcal{Q}_F^*)_{\Phi'}\|_{L^{\nu}(G)} \leq \Gamma_{\nu} \|F\|_{L^{\nu^*}(G)}$

(Γ_{ν} и Γ_{ν} — постоянные, большие нуля).

Заметим, что если при доказательстве теоремы 3.1 применить еще и метод, указанный в работе [15] А. М. Олевского (в [15] строится ряд по системе Хаара, корорый после перестановки сходится к $+\infty$ почти всюду, то можно получить следующий результат.

Теорема 3.2. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — безусловный базис пространства $L^{\nu}(G)$, $\nu > 2$. Тогда существует перестановка $\Phi' = \{\varphi_{j_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ системы Φ и ряд (3.18) (по этой системе Φ') такой, что для любой измеримой на G функции $F(x)$, принимающей значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры, существует частичный ряд, который сходится к $F(x)$ почти всюду.

В тех случаях, когда $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — тригонометрическая система, система Уолша или полная ортонормированная система, ограниченная в совокупности, этот факт был отмечен в работах, соответственно, [11] и [16], [17], [18].

Доказательство теоремы 3.1 совершенно аналогично доказательству теоремы 1.1. Что же касается теоремы 3.2, то ее доказательство имеет свои трудности. Эта трудность появляется в том случае, когда изображаемая функция принимает значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры.

Доказательство теоремы 3.2 мы здесь не приводим.

Ереванский государственный
университет

Поступила 20.VIII.1984

Յ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ. Զափելի ֆունկցիաների ներկայացումը L^{ν} , $\nu > 2$ տարածությունների վրա (ամփոփում)

L^{ν} տարածության բազիսը կոչվում է $\langle \nu, \nu \rangle$ տիպի, եթե L^{ν} զատի ամեն մի ֆունկցիայի վերլուծության մասնակի գումարների մաթրանսը L^{ν} -ից է: Հոդվածում ապացուցվում է, որ $\langle \nu, \nu \rangle$, $\nu > 2$ տիպի սխտեմը ունի այն հատկությունը, որ ամեն մի չափելի համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիա ներկայացվում է սխտեմով գրված համարյա ամենուրեք ղուգամետ շարքով:

F. G. ARUTUNIAN. Representation of measurable functions by bases of L^{ν} , space, $\nu > 2$ (summary)

The base in L^{ν} space is called of $\langle \nu, \nu \rangle$ -type if the evaluation of any function in L^{ν} is again from L^{ν} . It is proved that every $\langle \nu, \nu \rangle$ type system $\nu > 2$, has property that any measurable, almost everywhere finite function is represented by almost everywhere convergent series.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лузин. Собрание сочинений, т. I, М., Изд. АН СССР, 1953.
2. Н. Н. Лузин. Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
3. Д. Е. Меньшов. Sur la représentation des fonctions mesurables par des séries trigonométriques, Матем. сб., 9 (51), 1941, 667—692.
4. Д. Е. Меньшов. О сходимости по мере тригонометрических рядов, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, вып. 32, 1950.
5. А. А. Талалаян. Представление измеримых функций рядами. УМН, 15÷5, 1960, 77—141.
6. А. А. Талалаян, Ф. Г. Арутюнян. О сходимости рядов по системе Хаара $k + \infty$, Матем. сб., 66 (108), 1965, 240—247.
7. R. F. Gundy. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, Trans. Amer. Math. Soc., 124, № 2, 1966, 228—248.
8. Б. С. Кашин. Об одной полной ортонормированной системе, Матем. сб., 99, № 3, 1976, 356—365.
9. Б. С. Кашин. О некоторых свойствах ортонормированных систем сходимости, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 143, 1977.
10. Ф. Г. Арутюнян. Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами. Матем. сб., 90 (132), 4, 1973, 483—520.
11. Ф. Г. Арутюнян. О рядах по системе Хаара, ДАН Арм.ССР, т. 42, № 3, 1966, 134—140.
12. Ф. Г. Арутюнян. Представление функций кратными рядами, ДАН Арм.ССР, т. 64, № 2, 1977, 72—76.
13. J. Komlós. A generalization of a problem of Steinhaus, Acta Math. Acad. sci. Hung., т. XVIII, № 1—2, 1967, 217—231.
14. A. Garsia. Topics in almost everywhere convergence, Chicago, 1970.
15. А. М. Олевский. О некоторых особенностях рядов Фурье в пространствах L^p ($p < 2$), Матем. сб., 77, № 2, 1968, 251—258.
16. Ф. Г. Арутюнян. Система представления, ДАН Арм.ССР, № 2, 1973, 65—71.
17. Р. И. Овсепян. О представлении функций ортогональными рядами, ДАН Арм.ССР, LVII, № 1, 1973, 483—494.
18. Н. Б. Полюсян. Представление измеримых функций ортогональными рядами, Матем. сб., 98 (140), № 1 (9), 1975, 102—112.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Կ. Հ. Յաղչյան. Կոշու խնդրի կորեկտության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները բազմա-պատիկ բնութագրիչներով օպերատորների համար	3
Ռ. Լ. Շահբալյան. Խառը խնդիր անվերջ թվով անկախ փոփոխություններով բարձր կարգի պարաբոլական հավասարումների համար	26
Ի. Գ. Խաչատրյան. Հետքերի մի բանաձևի մասին	41
Գ. Ռ. Ալիբաևդրյան. Ալիբային ճակատների տարածումը թույլ հիպերբոլական հավասարումների մի դասի համար	53
Ֆ. Գ. Հարությունյան. Չափելի ֆունկցիաների ներկայացումը $L^v, v \geq 2$, տարածություն բազիսներով	60

СО Д Е Р Ж А Н И Е

К. А. Ягджян. Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для операторов с кратными характеристиками	3
Р. Л. Шахбалян. Начально-краевая задача для параболических уравнений высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных	26
И. Г. Хачатрян. Об одной формуле следов	41
Г. Р. Александрян. Распространение волновых фронтов для одного класса слабо гиперболических уравнений	53
Ф. Г. Арутюнян. Представление измеримых функций по базисам в $L^v, v \geq 2$,	60

C O N T E N T S

К. А. Yagdjyan. Necessary and sufficient conditions for well-posed Cauchy problem for operators with multiple characteristics	3
R. L. Shakhbalian. A mixed problem for high order equations of parabolic type with infinite number of independent variables	26
I. G. Khachatryan. On a trace formula	41
G. R. Alexandrian. Propagation of the wave front for a class weakly hyperbolic equations	53
F. G. Arutunian. Representation of measurable functions by bases of space, $L^v, v \geq 2$	60