

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԴԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶՐԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ

գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵՆՅԱՆ

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

Ա. Ա. ԹԱՎԱԾՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ս. Ն. ՄՆՐԳԵԼՅԱՆ

Ա. Ռ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀՐԱՂՅԱՆ

գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու իրաւաւոր՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրութիւնը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոգւածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտութիւնների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոգւածների ծավալը, որպէս կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոգւածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոգւածները պետք է ներկայացվեն զրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոգւածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումների հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոգւածները, իրենց ցանկութեամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերը շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ավելի խիստ գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականութիւնը տեղադրվում է հոգւածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչութիւնը, հրատարակման տարեթիւնը, հոգւածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոգւածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիւնը և էջերը։

Օգտագործված գրականութիւնը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրութեան ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թիւ շատ զգալի փոփոխութիւնները (օրինակի աղի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոգւածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպէս հոգւածի առաջման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոգւածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրութիւնը իրավունք է վերապահում շփոթվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոգւածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոգւածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոգւածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրութեան հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ։ Գիտութիւնների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН

зам. главного редактора

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Н. У. АРАКЕЛЯН

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН

А. А. ТАЛАЛЯН

Р. Л. ШАХБАГЯН

зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левой стороне страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название места издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKIĭ

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.98

А. А. ВАГАРШАКЯН

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА--ХОПФА

В в е д е н и е

Настоящая статья посвящена исследованию уравнений вида

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} z_k = z_n, \quad n=0, 1, \dots \quad (1)$$

Эти уравнения являются дискретными аналогами хорошо известных уравнений Винера—Хопфа

$$\chi(t) - \int_0^t K(t-s) \chi(s) ds = f(t), \quad 0 < t < \infty. \quad (2)$$

Благодаря многочисленным приложениям в разных вопросах математической физики, эти уравнения были в центре внимания многих математиков. Повтому трудно привести полный обзор работ, посвященных исследованию уравнений (1) и (2). Ниже ограничимся упоминанием только некоторых работ, связанных с исследованными в настоящей статье вопросами.

Первое существенное продвижение в разработке общей теории было сделано Е. Хопфом и Н. Винером [1] в 1931 году. В исследованиях Е. Хопфа и Н. Винера впервые была использована идея факторизации функции, голоморфной в полосе для решения уравнения вида (2). Эта идея получила свое дальнейшее развитие в работах Е. Рейснера [2], В. А. Фока [3], [4], И. М. Рапопорта [5], [6], и др. Достаточно общая и в известном смысле законченная теория интегральных уравнений (2) была построена в работе М. Г. Крейна [7]. Позже оказалось, что уравнения (1) и (2) тесно связаны друг с другом. В книге И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана [8] предложена общая конструкция, которая позволяет с единой точки зрения смотреть на оба уравнения (1) и (2).

При построении общей теории уравнений (1), (2) обычно предполагалась непрерывность символа этих уравнений. В дальнейших работах, посвященных уравнениям (1), (2), было уделено определенное внимание к ослаблению ограничений, налагаемых на символ (см. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман [8], Р. А. Дудучава [9] и др.). Многие исследования посвящены также случаю, когда символ обращается в нуль. Основные результаты, относящиеся к этому случаю, можно най-

ти в книге Э. Пресдорфа [10], в статье М. Г. Крейна и Ю. Л. Шмульяна [11] и др.

В настоящей статье рассматриваются дискретные уравнения (1), символы которых могут иметь точки разрыва, а также могут обращаться в нуль или в бесконечность, исследуется скорость убывания решения уравнения (1) при $n \rightarrow \infty$.

Статья состоит из трех параграфов. В первых двух доказаны вспомогательные предложения. Результаты, относящиеся к уравнениям (1), сформулированы и доказаны в последнем параграфе.

§ 1. Обобщение теоремы Н. Лузина

Хорошо известна следующая теорема Н. Лузина: для любой измеримой функции $f(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, и любого числа $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $g(t)$ такая, что

$$m(|t; f(t) \neq g(t)|) < \varepsilon,$$

где m — мера Лебега. Эта теорема была уточнена в работах Д. Е. Меньшова (см. Н. Бари [12]), который доказал, что $g(t)$ можно выбрать так, чтобы ее ряд Фурье равномерно сходилась. Простое доказательство этого утверждения, а также обзор результатов, связанных с теоремой Н. Лузина — Д. Е. Меньшова можно найти в статье С. В. Хрущева [13]. Существуют результаты, показывающие, что функцию $g(t)$ нельзя брать очень „хорошей“, например с коэффициентами Фурье из l_p , $1 \leq p < 2$ (см. И. Кацнельсон [14], А. М. Олевский [15]). В статье Н. Ароншайна и К. Смита [16] теорема Н. Лузина обобщается в несколько другом направлении. Заранее предполагается, что функция $f(t)$ принадлежит некоторому пространству. Оказывается, что тогда в теореме Н. Лузина меру m можно заменить другой, более тонкой характеристикой множеств. Отметим, что общая схема, предложенная в работе [16], не позволяет утверждать что-нибудь больше, кроме непрерывности функции $g(t)$.

В настоящем параграфе мы заранее предполагаем, что $f(t)$ принадлежит пространству Бесова. Оказывается, что для таких функций можно исправляющую функцию $g(t)$ выбрать из класса Липшица, а меру Лебега заменить более тонкой характеристикой множеств.

Пусть $g(t) \in L_1[0, 2\pi]$. Предположим, что $g(t)$ периодически продолжается на всю действительную ось. Максимальная функция для $g(t)$ определяется по формуле:

$$g^*(x) = \sup_{0 < t < \pi} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |g(y)| dy.$$

Введем обозначение

$$I_\alpha(\sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma(x) d\sigma(y)}{|x-y|^\alpha},$$

где $d\sigma$ — неотрицательная мера, а α , $0 < \alpha < 1$ — некоторое число. Обозначение $\mu \prec E$ означает, что μ — неотрицательная мера с единичной массой, сосредоточенная в E . Число

$$C_\alpha(E) = \left[\inf_{\mu \prec E} I_\alpha(\mu) \right]^{-1}$$

называется α -емкостью множества E .

Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. Функция $f(x)$, $x \in [0, 2\pi]$, принадлежит пространству Бесова B_p^α , если

$$\|f\|_{p,\alpha}^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+\alpha p}} dx dy < \infty.$$

Доказательство следующей теоремы можно найти в книге Л. Карлесона [17].

Теорема 1. Пусть $f(x) \in B_2^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда для любой неотрицательной меры $d\sigma$ имеет место неравенство:

$$\int_0^{2\pi} f^*(x) d\sigma(x) \leq A \|f\|_{2,\alpha}^{\frac{1}{1-2\alpha}}(\sigma),$$

где A — постоянное число.

В дальнейшем мы воспользуемся некоторой модификацией одного интегрального представления М. М. Джрбашяна [18]. В работе М. М. Джрбашяна [19] было введено пространство аналитических в единичном круге функций $f(z)$, для которых сходится интеграл

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p (1-r^2)^\alpha r dr dt < \infty,$$

где $p > 0$, $\alpha > -1$. Этот класс обозначается через $H_p(\alpha)$. Для удобства ссылок целесообразно привести полную формулировку теоремы М. М. Джрбашяна [18] о представлении функций из $H_2(\alpha)$.

Теорема 2. Функции класса $H_2(\alpha)$, $\alpha > -1$, представимы в параметрическом виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(t)}{(1 - e^{-it}z)^{\frac{\alpha+3}{2}}} dt,$$

где $\varphi(t) \in L_2[0, 2\pi]$.

Пусть $f(x) \in B_2^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Если функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 |k|^{2\alpha} < \infty.$$

Для любого числа $0 < \delta \leq \alpha$ функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (1+|k|)^{\delta} \frac{e^{ikx}}{(1+|k|)^{\delta}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-t)}}{(1+|k|)^{\delta}} \right) g(t) dt, \end{aligned}$$

где функции $g(t)$ соответствует ряд Фурье $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$, $c_k = a_k (1+|k|)^{\delta}$, причем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 |k|^{2(\alpha-\delta)} < \infty.$$

Это условие равносильно тому, что $g(t) \in B_2^{\alpha-\delta}$. Продолжим функцию $f(x)$ во внутрь единичного круга, полагая

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{(z - e^{it})^{1-\delta}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{(z - e^{it})^{1-\delta}} dt.$$

Заметим, что почти всюду на $[0, 2\pi]$ имеет место равенство:

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{ix}) = f(x).$$

Имеем, далее

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \frac{1-\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{(z - e^{it})^{2-\delta}} dt.$$

В случае, когда $\delta = \alpha$, получаем формулу по существу совпадающую с приведенным выше интегральным представлением М. М. Джрбашяна.

При $0 < |z| < 1$ имеют место неравенства $1 - |z| \leq |e^{it} - z|$, $|e^{it} - \frac{z}{|z|}| \leq 2|e^{it} - z|$. Поэтому для любого $0 < y < 2$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{1-\delta} \left| \frac{\partial F(z)}{\partial z} \right| (1-|z|)^{1-\delta} &\leq \int_0^{2\pi} \frac{(1-|z|)^{1-\delta}}{|e^{it} - z|^{2-\delta}} |g(t)| dt \leq \frac{1}{1-|z|} \int_{x-y}^{x+y} |g(t)| dt + \\ &+ 2^{2-\delta} (1-|z|)^{1-\delta} \int_y^2 t^{\delta-2} d \left(\int_{x-t}^{x+t} |g(y)| dy \right) \leq \frac{1}{1-|z|} \int_{x-y}^{x+y} |g(t)| dt + \\ &+ \int_0^{2\pi} |g(t)| dt + 8(1-|z|)^{1-\delta} \int_y^2 t^{\delta-2} \left(\int_{x-t}^{x+t} |g(y)| dy \right) dt. \end{aligned}$$

Предположим, что z находится в некотором угле Штольца с вершиной в точке e^{ix} , т. е. $|x - \arg z| \leq C(1 - |z|)$, где C — фиксированная постоянная. Тогда из вышеприведенных неравенств следует, что

$$\left| \frac{\partial F(z)}{\partial z} \right| (1 - |z|)^{1-\alpha} \leq A + Bg^*(x), \quad (3)$$

где A и B — постоянные, не зависящие от x и z . Легко заметить, что можно получить аналогичную оценку для функции $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$.

Лемма 1. Пусть $f(x) \in B_2^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда для любого числа τ , $0 \leq \tau < \alpha$, существует функция $h(x) \in B_2^\alpha$, $h(x) \geq 1$, такая, что имеет место неравенство:

$$|f(x) - f(y)| \leq (h(x) + h(y)) |x - y|^{1-\tau},$$

где $x, y \in [0, 2\pi]$.

Доказательство. Пусть $x, y \in [0, 2\pi]$. Обозначим через $z = re^{i\varphi}$ точку из единичного круга со следующими параметрами:

$r = 1 - \frac{|x-y|}{2\pi}$, $\varphi = \frac{x+y}{2}$. Обозначим через l_1 и l_2 отрезки, соединяющие точку z соответственно с e^{ix} и e^{iy} . В силу оценки (3) имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |F(e^{ix}) - F(e^{iy})| \leq |F(e^{ix}) - F(z)| + |F(z) - F(e^{iy})| \leq \\ &\leq \left| \int_{l_1} \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right| + \left| \int_{l_2} \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right| \leq \\ &\leq 2(A + Bg^*(x)) \int_{l_1} \frac{|dz|}{(1 - |z|)^{1-(\alpha-\tau)}} + 2(A + Bg^*(y)) \int_{l_2} \frac{|dz|}{(1 - |z|)^{1-(\alpha-\tau)}} \leq \\ &\leq 2(2A + Bg^*(x) + Bg^*(y)) |x - y|^{1-\tau}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1 имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} g^*(x) d\mu(x) \leq A \|g\|_{2,\sigma} I_{1-2\sigma}^{1/2}(\mu), \quad (4)$$

для любой неотрицательной меры μ . Рассмотрим билинейный функционал

$$F(f, \mu) = \int_0^{2\pi} f(x) d\mu(x),$$

где $f(x) \geq g^*(x)$, $f(x) \in B_2^\alpha$, а μ — неотрицательная мера, причем $I_{1-2\sigma}(\mu) \leq 1$. Из теоремы минимакса Дж. Неймана (см. Т. Гамелин [20]) следует равенство:

$$\inf_{f \in B_2^\alpha, f \geq g^*} \left[\sup_{\mu > 0, I_{1-2\sigma}(\mu) \leq 1} F(f, \mu) \right] = \sup_{\mu > 0, I_{1-2\sigma}(\mu) \leq 1} \left[\inf_{f \in B_2^\alpha, f \geq g^*} F(f, \mu) \right].$$

Нетрудно заметить, что

$$\sup_{\mu > 0, I_{1-2\sigma}(\mu) < 1} F(f, \mu) = \|f\|_{2, \sigma}, \quad \inf_{f \in B_2^*, f > g^*} F(f, \mu) = \int_0^{2\pi} g^*(x) d\mu(x).$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\inf \|f\|_{2, \sigma}; g^*(x) \leq f(x) = \sup \left\{ \int_0^{2\pi} g^*(x) d\mu(x); \mu > 0, I_{1-2\sigma}(\mu) \leq 1 \right\}.$$

Из полученного равенства и из оценки (4) следует, что существует функция $h(x) \in B_2^*$, мажорирующая $g^*(x)$. Лемма доказана.

Приводимое ниже утверждение является обобщением теоремы Н. Лузина.

Теорема 3. Пусть $f(x) \in B_2^*$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда для любых чисел σ , $0 \leq \sigma < \alpha$ и $\varepsilon > 0$ существует функция $g(x) \in \text{Lip}_{\alpha-\sigma}$ такая, что

$$C_{1-2\sigma}(\{x; f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon,$$

где в случае $\sigma = 0$ емкость следует заменить мерой Лебега.

Доказательство. Мы будем пользоваться следующим результатом, доказательство которого можно найти в статье К. Престона [21]. Если $f(x) \in B_2^*$, то для любого числа $\lambda > 0$ имеет место неравенство

$$C_{1-2\alpha}(\{x; f^*(x) > \lambda\}) < \frac{C}{\lambda},$$

где C не зависит от λ . Применим это утверждение к функции $h(x) \in B_2^*$, фигурирующей в лемме 1. Выбирая λ достаточно большим можно добиться неравенства

$$C_{1-2\sigma}(\{x; h^*(x) > \lambda\}) < \varepsilon.$$

Функция $h^*(x)$ полунепрерывна снизу. Поэтому множество $\{x; h^*(x) > \lambda\}$ является открытым. Наша функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha - \sigma$ на множестве $[0, 2\pi] \setminus \{x; h^*(x) > \lambda\}$. Хорошо известно, что эту функцию можно продолжить на весь отрезок $[0, 2\pi]$ не выходя из пространства $\text{Lip}_{\alpha-\sigma}$. Продолженную функцию мы обозначим через $g(x)$. Она удовлетворяет требованиям теоремы. В случае $\sigma = 0$ функция $h(x) \in L_2$ и повторяя приведенные выше рассуждения, заменяя емкость на меру Лебега, получаем утверждение леммы.

Приводимый ниже результат показывает точность теоремы 3 в случае $\sigma = 0$.

Теорема 4. Для любого числа $\delta > 0$ существует функция $f(x) \in B_2^*$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, такая, что для произвольной функции $g(x) \in \text{Lip}_{\alpha+\delta}$

$$m(\{x; f(x) = g(x)\}) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^{-\alpha n^k - k} e^{ixn^{n^k}}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

где n — натуральное число. Заметим, что $f(x) \in B_2^{\alpha}$. Действительно, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} n^{-2\alpha n^k - 2k} n^{2\alpha n^k} < \infty.$$

Мы утверждаем, что $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы. Предположим обратное, т. е. что существует $g(x) \in \text{Lip}_{\alpha+\delta}$, которая совпадает с $f(x)$ на множестве E , причем $m(E) > 0$. Для любого $k=1, 2, \dots$ разобьем интервал $[0, 2\pi]$ на n^{n^k} равных интервалов. Из каждого разбиения выбираем по одному интервалу I_k так, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(E \cap I_k)}{m(I_k)} = 1.$$

Это можно сделать, так как $m(E) > 0$.

Оценим интеграл

$$\begin{aligned} J_k &= \int_{E \cap I_k} \int_{E \cap I_k} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy = \int_{E \cap I_k} \int_{E \cap I_k} \frac{|g(x) - g(y)|^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy \leq \\ &\leq C_1 \int_{I_k} \int_{I_k} |x - y|^{2\delta-1} dx dy \leq C_2 |I_k|^{1+2\delta} \leq C n^{-(1+2\delta)n^k}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C — постоянные, не зависящие от k . С другой стороны интеграл J_k допускает оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} J_k^{1/2} &\geq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{E \cap I_k} \int_{E \cap I_k} \frac{|n^{-\alpha n^k - k} (e^{ixn^{n^k}} - e^{iy n^{n^k}})|^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{I_k} \int_{I_k} \frac{\left| \sum_{j=0}^{k-1} n^{-\alpha n^j - j} (e^{ixn^{n^j}} - e^{iy n^{n^j}}) \right|^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{I_k} \int_{I_k} \frac{\left| \sum_{j=k+1}^{\infty} n^{-\alpha n^j - j} (e^{ixn^{n^j}} - e^{iy n^{n^j}}) \right|^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{I_k} \int_{I_k} \frac{\left| \sum_{j=k+1}^{\infty} n^{-\alpha n^j - j} (e^{ixn^{n^j}} - e^{iy n^{n^j}}) \right|^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} n^{(2\alpha-1)n^k} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{n^{-2\alpha n^j - j} (e^{ixn^{n^j} - n^k} - e^{iy n^{n^j} - n^k})}{|x-y|^{1+2\alpha}} \right|^2 dx dy \leq$$

$$\leq n^{(2\alpha-1)n^k} \sum_{j=k+1}^{\infty} n^{-2\alpha n^j - 2j} n^{2\alpha(n^j - n^k)} \leq \frac{n^{-n^k - 2k}}{n^2 - 1}.$$

Далее имеем

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{I_k} \int_{I_k} \left| \sum_{j=0}^{k-1} \frac{n^{-\alpha n^j - j} (e^{ixn^{n^j}} - e^{iy n^{n^j}})}{|x-y|^{1+2\alpha}} \right|^2 dx dy \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} n^{-\alpha n^j - j - \alpha n^l - l} \frac{1}{4\pi^2} \int_{I_k} \int_{I_k} |x-y|^{1-2\alpha} n^{n^j + n^l} dx dy \leq$$

$$\leq k^2 n^{-(2-2\alpha)n^k + 2n^{k-1}}.$$

Наконец, рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{E \cap I_k} \int_{E \cap I_k} \left| \frac{n^{-\alpha n^k - k} (e^{ixn^{n^k}} - e^{iy n^{n^k}})}{|x-y|^{1+2\alpha}} \right|^2 dx dy =$$

$$= \frac{n^{-2\alpha n^k - 2k}}{4\pi^2} \int_{G_k} \int_{G_k} \frac{|e^{ix} - e^{iy}|^2}{|x-y|^{1+2\alpha}} dx dy,$$

где G_k получается из $E \cap I_k$ с помощью растяжения в n^k раз. Окончательно получаем

$$\frac{n^{-\alpha n^k - k}}{2\pi} \left(\int_{G_k} \int_{G_k} \frac{\sin^2 \frac{x-y}{2}}{|x-y|^{1+2\alpha}} dx dy \right)^{1/2} = \frac{n^{-\frac{1}{2}n^k - k}}{\sqrt{n^2 - 1}} = kn$$

$$\leq \frac{\sqrt{C}}{2\pi} n^{-\frac{1+2\alpha}{2}n^k}.$$

При достаточно больших k приходим к противоречию, так как $m(G_k) \rightarrow 2\pi$.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 2. Пусть $f(x) \in B_2^{\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда функция

$$G(x) = \sup_{0 < \delta < \pi} \frac{1}{\delta^{1+\alpha}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(x) - f(t)| dt$$

принадлежит пространству L_1 .

Доказательство. В силу леммы 1 можно написать

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^{1+\alpha}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(x) - f(t)| dt &\leq \frac{1}{\delta^{1+\alpha}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} (h(x) + h(t) |x-t|^\alpha) dt \leq \\ &\leq \frac{2}{\alpha+1} h(x) + \frac{1}{\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} h(t) dt \leq \frac{2}{\alpha+1} h(x) + 2 h^*(x), \end{aligned}$$

где $h(x) \in L_2$. Лемма доказана.

§ 2. Оценки снизу для аналитических функций

Исследование поведения решений интересующих нас уравнений естественно приводит к следующему типу задач теории аналитических функций.

Пусть $f(z)$ — аналитическая в единичном круге $D = \{z; |z| < 1\}$ функция. Предполагается, что она непрерывна в замкнутом круге, модуль ее граничных значений принадлежит пространству Липшица порядка α , $0 < \alpha < 1$, и $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Требуется выяснить, к какому пространству принадлежит сама функция $f(z)$. Приведем некоторые, ранее известные результаты, связанные с этой задачей. Заметим, что если $|f(z)| \in \text{Lip}_\alpha(\partial D)$ и $f(z)$ не обращается в нуль в замкнутом круге $\bar{D}$, то из теоремы Зигмунда—Привалова о модуле непрерывности сопряженной функции, следует что $f(z) \in \text{Lip}_\alpha(\bar{D})$, $0 < \alpha \leq 1$. Однако в случае, когда $f(z)$ может обращаться в нуль на границе единичного круга, оказывается, что $f(z) \in \text{Lip}_{\frac{\alpha}{2}}(\bar{D})$, причем $\frac{\alpha}{2}$ является наилучшим

порядком. В статье Дж. Бреннана [22] отмечается, что этот результат впервые был получен С. Якобсом и опубликован в его диссертации [23]. Тот же результат содержится также в диссертации Ф. А. Шамояна [24] и опубликован в статье В. П. Хавина и Ф. А. Шамояна [25]. В работе В. П. Хавина [26] получен более общий результат для функций с заданным модулем непрерывности. Далее появилась упомянутая выше статья Дж. Бреннана, где доказано, что если $|f(z)| \in \text{Lip}_\alpha(\partial D)$, $f(z) \neq 0$ при $z \in D$, то $f(z) \in \text{Lip}_{\frac{\alpha}{2}}(\bar{D})$ при $0 < \alpha < 2$ и $f(z) \in \text{Lip}_1(\bar{D})$ при $\alpha > 2$.

В настоящем параграфе мы приводим новый метод исследования задач вышеуказанного типа.

Теорема 5. Пусть $f(z)$ — внешняя функция, удовлетворяющая условиям

1. $|f(z)| \in B_2^\alpha(\partial D)$, где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$;
2. $f(z) \in H_q$, где $1 \leq q \leq 2p$;
3. $\log^- |f(z)| \in L_p(\partial D)$, где $1 + \frac{1}{\alpha} < p$.

Тогда существует функция $\Phi(\zeta) \in L_{\frac{2pq}{pq+2p-q}}$ такая, что

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq (\Phi(z) + \Phi(\zeta)) |z - \zeta|^{\frac{p(p-1)-1}{2p^2-1}}$$

при $z, \zeta \in \partial D$.

Доказательство. Пусть $\zeta \in \partial D$, а Δ_ζ — угол Штольца с вершиной в точке ζ , т. е.

$$\Delta_\zeta = \{w \in D; |\zeta - w| \leq C(1 - |w|)\},$$

где C — фиксированное постоянное число. Из леммы 1 следует, что для любого ε , $0 \leq \varepsilon < \alpha$, существует функция $h(z) \in B_2^2$ такая, что

$$||f(z)| - |f(\zeta)|| \leq (h(z) + h(\zeta)) |z - \zeta|^{\alpha-\varepsilon}, \quad z, \zeta \in \partial D. \quad (5)$$

Значение числа σ мы уточним позже. Определим множество E_ζ следующим образом:

$$E_\zeta = \{z \in \partial D; h(z) \geq 2h(\zeta)\}.$$

Тогда из неравенства (5) вытекает, что

$$|f(z)| \geq |f(\zeta)| - 3h(\zeta) |z - \zeta|^{\alpha-\varepsilon}, \quad z, \zeta \in \partial D \setminus E_\zeta. \quad (6)$$

Обозначим через I_ζ дугу

$$I_\zeta = \{z \in \partial D; |f(\zeta)| > 6h(\zeta) |z - \zeta|^{\alpha-\varepsilon}\}.$$

Представим функцию $f(z)$ в виде произведения $f(z) = f_1(z) f_2(z)$, где $f_1(z)$ — внешняя функция, модуль которой на единичной окружности определяется следующим образом:

$$|f_1(z)| = \begin{cases} |f(z)|, & \text{при } z \in \partial D \setminus E_\zeta \cap I_\zeta \\ |f(\zeta)| - 3h(\zeta) |z - \zeta|^{\alpha-\varepsilon}, & \text{при } z \in E_\zeta \cap I_\zeta. \end{cases}$$

Функция $f_2(z)$ определяется из соотношения $f(z) = f_1(z) f_2(z)$. Оценим модуль функции $f_1(w)$ снизу в угле Штольца Δ_ζ . Из определения функции $f_1(w)$ имеем

$$\begin{aligned} |f_1(w)| &= \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{E_\zeta \cap I_\zeta} \frac{1 - |w|^2}{|z - w|^2} \log (|f(\zeta)| - 3h(\zeta) |z - \zeta|^{\alpha-\varepsilon}) dm(z) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D \setminus E_\zeta \cap I_\zeta} \frac{1 - |w|^2}{|z - w|^2} \log |f(z)| dm(z) \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{I_\zeta} \frac{1 - |w|^2}{|z - w|^2} \times \right. \\ &\times \log (|f(\zeta)| - 3h(\zeta) |z - \zeta|^{\alpha-\varepsilon}) dm(z) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D \setminus I_\zeta} \frac{1 - |w|^2}{|z - w|^2} \log |f(z)| dm(z) + \\ &+ \left. \frac{1}{2\pi} \int_{I_\zeta \setminus E_\zeta} \frac{1 - |w|^2}{|z - w|^2} \log \frac{|f(z)|}{|f(\zeta)| - 3h(\zeta) |z - \zeta|^{\alpha-\varepsilon}} dm(z) \right\}. \end{aligned}$$

Так как при $z \in \partial D \setminus E_\varepsilon$ имеет место неравенство (6), то

$$|f_1(w)| \geq \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{I_\varepsilon} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \log (|f(\zeta)| - 3h(\zeta) |\zeta-z|^{2-\sigma}) dm(z) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D \setminus I_\varepsilon} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \log |f(z)| dm(z) \right\}. \quad (7)$$

Для первого интеграла в экспоненте имеем:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{I_\varepsilon} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \log (|f(\zeta)| - 3h(\zeta) |\zeta-z|^{2-\sigma}) dm(z) \geq \log |f(\zeta)| + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{I_\varepsilon} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \log \left(1 - \frac{3h(\zeta)}{|f(\zeta)|} |\zeta-z|^{2-\sigma} \right) dm(z) - \\ - \frac{\log |f(\zeta)|}{2\pi} \int_{\partial D \setminus I_\varepsilon} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} dm(z) \geq \log |f(\zeta)| - \\ - \frac{3h(\zeta)}{\pi |f(\zeta)|} \int_{I_\varepsilon} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} |\zeta-z|^{2-\sigma} dm(z) - \frac{\log |f(\zeta)|}{2\pi} \int_{\partial D \setminus I_\varepsilon} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} dm(z).$$

При $w \in \Delta_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$I_1 \geq \log |f(\zeta)| - A \frac{h(\zeta)}{|f(\zeta)|} (1-|w|)^{\alpha-\sigma} - B \log^+ |f(\zeta)| \int_{\frac{|I_\varepsilon|}{1-|w|}}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2},$$

где A и B — постоянные числа.

Если имеет место неравенство $|I_\varepsilon| < 1-|w|$, то

$$|f_1(w)| \geq 0 \geq |f(\zeta)| - 6h(\zeta) (1-|w|)^{\alpha-\sigma}, \quad w \in \Delta_\varepsilon.$$

В случае, когда $|I_\varepsilon| \geq 1-|w|$, имеем

$$I_1 \geq \log |f(\zeta)| - A \frac{h(\zeta)}{|f(\zeta)|} (1-|w|)^{\alpha-\sigma} - B \frac{1-|w|}{|I_\varepsilon|} \log^+ |f(\zeta)|, \quad w \in \Delta_\varepsilon.$$

Заметим, что в случае, когда $I_\varepsilon = \partial D$, для функции $f_1(w)$ справедлива оценка

$$|f_1(w)| \geq |f(\zeta)| - Ah(\zeta)(1-|w|)^{\alpha-\sigma} - \frac{B}{2\pi} (1-|w|) \log^+ |f(\zeta)|, \quad w \in \Delta_\varepsilon.$$

Рассмотрим случай, когда $I_\varepsilon \neq \partial D$. Заметим, что $|I_\varepsilon| = 2 \left(\frac{|f(\zeta)|}{6h(\zeta)} \right)^{\frac{1}{\alpha-\sigma}}$.

Учитывая условие 3 теоремы 5, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D \setminus I_\varepsilon} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \log \frac{1}{|f(z)|} dm(z) \leq D_1 (1-|w|) \int_{\partial D \setminus I_\varepsilon} \frac{\log^+ |f(z)|}{|z-\zeta|^2} dm(z) \leq$$

$$\leq D_2 (1 - |w|) \left(\int_{\partial D \setminus I_\zeta} \frac{dm(z)}{|z - \zeta|^{2r}} \right)^{1/r} \|\log^- |f|\|_p \leq D \frac{1 - |w|}{|I_\zeta|^{1 + \frac{1}{p}}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1,$$

где D, D_1, D_2 — постоянные числа. Следовательно, при $w \in \Delta_\zeta$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |f_1(w)| &\geq \exp \left\{ \log |f(\zeta)| - A \frac{h(\zeta)}{|f(\zeta)|} (1 - |w|)^{\alpha - \sigma} - B \frac{1 - |w|}{|I_\zeta|} \log^+ |f(\zeta)| - \right. \\ &- D \frac{1 - |w|}{|I_\zeta|^{1 + \frac{1}{p}}} \left. \right\} \geq |f(\zeta)| - Ah(\zeta)(1 - |w|)^{\alpha - \sigma} - B |f(\zeta)| \log^+ |f(\zeta)| \frac{1 - |w|}{|I_\zeta|} - \\ &- D |f(\zeta)| \frac{1 - |w|}{|I_\zeta|^{1 + \frac{1}{p}}} = |f(\zeta)| - Ah(\zeta)(1 - |w|)^{\alpha - \sigma} - 6Bh(\zeta) \log^+ |f(\zeta)| \times \\ &\times \frac{1 - |w|}{|I_\zeta|^{1 - \alpha + \sigma}} - 6Dh(\zeta) \frac{1 - |w|}{|I_\zeta|^{1 + \frac{1}{p} - \alpha + \sigma}} \geq |f(\zeta)| - F(\zeta)(1 - |w|)^{\alpha + \sigma} - \\ &- F(\zeta) \frac{1 - |w|}{|I_\zeta|^{1 + \frac{1}{p} - \alpha + \sigma}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $F(\zeta)$ — некоторая функция из пространства L_s при $1 < s < \frac{2}{1 - 2\sigma}$.

Возможны следующие два случая: $|I_\zeta| \geq (1 - |w|)^{p(p+1)}$ и $|I_\zeta| < (1 - |w|)^{p(p+1)}$. Если имеет место неравенство $|I_\zeta| \leq (1 - |w|)^{p(p+1)}$, то

$$|f_1(w)| \geq 0 \geq |f(\zeta)| - 6h(\zeta)(1 - |w|)^{p(\alpha - \sigma)/(p+1)}.$$

Если же имеет место неравенство $|I_\zeta| \geq (1 - |w|)^{p(p+1)}$, то в силу (8)

$$\begin{aligned} |f_1(w)| &\geq |f(\zeta)| - F(\zeta)(1 - |w|)^{\alpha - \sigma} - F(\zeta)(1 - |w|)^{p(\alpha - \sigma)/(p+1)} \geq \\ &\geq |f(\zeta)| - 2F(\zeta)(1 - |w|)^{p(\alpha - \sigma)/(p+1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, независимо от вышеуказанных возможных случаев, существует функция $F_1(\zeta)$ из пространства L_s , $1 < s < \frac{2}{1 - 2\sigma}$, такая, что имеет место неравенство:

$$|f_1(w)| \geq |f(\zeta)| - F_1(\zeta)(1 - |w|)^{p(\alpha - \sigma)/(p+1)}, \quad w \in \Delta_\zeta, \quad (9)$$

Перейдем к оценке функции $|f_2(w)|$. Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |f_2(w)| &= \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{E_\zeta \cap I_\zeta} \frac{1 - |w|^2}{|z - w|^2} \log \frac{|f(z)|}{|f(\zeta)| - 3h(\zeta)|z - \zeta|^{\alpha - \sigma}} dm(z) \right\} \geq \\ &\geq \exp \left\{ - \frac{1}{2\pi} \int_{E_\zeta} \frac{1 - |w|^2}{|z - w|^2} \log^+ |f(\zeta)| dm(z) - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{E_z} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \log^- |f(z)| dm(z) \Big\}. \quad (10)$$

В силу леммы 2 существует функция $G(\zeta) \in L_2$ такая, что

$$\begin{aligned} \frac{m(E_z \cap J_z)}{[m(J_z)]^{1+\sigma}} &\leq \frac{1}{[m(J_z)]^{1+\sigma}} \frac{1}{h(\zeta)} \int_{E_z \cap J_z} [h(z) - h(\zeta)] dm(z) \leq \\ &\leq \frac{1}{[m(J_z)]^{1+\sigma}} \int_{J_z} |h(z) - h(\zeta)| dm(z) \leq G(\zeta), \end{aligned}$$

где J_z — любая дуга из ∂D с центром в точке ζ .

Интегрируя по частям легко можно убедиться, что при $w = |w|\zeta$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{E_z} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \log^- |f(z)| dm(z) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \times \\ &\times \left(\frac{1}{2|\zeta-z|} \int_{E_z \cap \{t: |t-\zeta| \leq |\zeta-z|\}} \log^- |f(t)| dm(t) \right) dm(z). \end{aligned}$$

Из теоремы Гарнака следует, что существует число M такое, что при $w \in \Delta_z$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{E_z} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \log^- |f(z)| dm(z) &\leq \frac{M}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \times \\ &\times \left(\frac{1}{2|\zeta-z|} \int_{E_z \cap \{t: |t-\zeta| \leq |\zeta-z|\}} \log^- |f(t)| dm(t) \right) dm(z). \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись условием $\log^- |f| \in L_p$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{E_z} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \log^- |f(z)| dm(z) &\leq M \|\log^- |f|\|_p \int_{\partial D} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} \times \\ &\times \frac{m^{p-1/p}(E_z \cap \{t: |t-\zeta| \leq |\zeta-z|\})}{2|\zeta-z|} dm(z) \leq M \|\log^- |f|\|_p G^{p-1/p}(\zeta) \times \\ &\times \int_{\partial D} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} |\zeta-z|^{\frac{(1+\sigma)(p-1)}{p}-1} dm(z) \leq M_1 G^{p-1/p}(\zeta) (1-|w|)^{\frac{\sigma(p-1)}{p}-\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

$$w \in \Delta_z.$$

Аналогично можно оценить первый интеграл в экспоненте формулы (10). Легко заметить, что для него получается оценка

$$\log^+ |f(\zeta)| \frac{1}{2\pi} \int_{E_z} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} dm(z) \leq M_2 (1-|w|)^{\sigma} \log^+ |f(\zeta)|, \quad w \in \Delta_z.$$

Окончательно для функции $|f(w)|$ мы приходим к оценке:

$$|f(w)| \geq (|f(\zeta)| - F_1(\zeta)(1 - |w|)^{p(\alpha - \sigma)/p + 1})(1 - G_1^{p-1/p}(\zeta)) \times \\ \times (1 - |w|)^{\frac{\sigma(p-1)}{p} - \frac{1}{p}},$$

при $w \in \Delta_\zeta$, где $F_1(\zeta) \in L_s$, $1 < s < \frac{2}{1-2\sigma}$, $G_1(\zeta) \in L_2$.

Число σ выбираем равным

$$\sigma = \frac{p^2 z + p + 1}{2p^2 - 1}$$

Заметим, что из неравенства $1 + \frac{1}{\alpha} < p$ следует, что σ лежит в допустимых пределах, $0 < \sigma < \alpha$. Так как $f(z) \in H_q$, то $|f(z)| G_1^{p-1/p}(z) \in L_{2pq/(pq+2p-q)}$. Далее имеем $\frac{2}{1-2\sigma} > \frac{2pq}{pq+2p-q}$. Следовательно, при $w \in \Delta_\zeta$ имеет место неравенство

$$|f(w)| \geq |f(\zeta)| - \Phi(\zeta)(1 - |w|)^{p(\alpha(p-1)-1)/(2p^2-1)},$$

где $\Phi(\zeta) \in L_{2pq/(pq+2p-q)}$.

Оценки сверху для функции $|f(w)|$ получается значительно проще. Обозначим через $u(w)$ гармоническую в D функцию с граничными значениями $|f(z)|$, $z \in \partial D$. Так как $|f(w)|$ — субгармоническая функция, то $|f(w)| \leq u(w)$, $w \in D$. В силу леммы¹ для любого λ , $0 < \lambda < \alpha$, существует функция $h(\zeta) \in B_2^\lambda$ такая, что

$$u(w) \leq u(\zeta) + h(\zeta)(1 - |w|)^{\alpha-\lambda}, \quad w \in \Delta_\zeta.$$

Число λ выбираем таким образом, чтобы имело место равенство

$$\alpha - \lambda = \frac{p(\alpha(p-1)-1)}{2p^2-1}.$$

Мы знаем, что $B_2^\lambda \subseteq L_s$, $1 < s < \frac{2}{1-2\lambda}$. Так как $\frac{2}{1-2\lambda} > \frac{2pq}{pq+2p-q}$, то окончательно приходим к неравенству:

$$||f(w)| - |f(\zeta)|| \leq \Phi(\zeta)(1 - |w|)^{p(\alpha(p-1)-1)/(2p^2-1)}, \quad w \in \Delta_\zeta, \quad (11)$$

где $\Phi(\zeta)$ — некоторая функция из пространства $L_{2pq/(pq+2p-q)}$.

Введем функцию

$$\varphi(w) = a \exp \left\{ \frac{ib}{2} \log \frac{1+w}{1-w} \right\}, \quad b > 0.$$

Заметим, что $\varphi(w)$ однолистно отображает единичный круг на риманову поверхность функции $\log z$, накрывающей кольцо

$$K = \left\{ z; |a| \exp \left\{ -\frac{\pi b}{4} \right\} < |z| < |a| \exp \left\{ \frac{\pi b}{4} \right\} \right\}.$$

Пусть $g(w)$ — аналитическая в единичном круге функция, $g(0) = a$ и образ ее содержится в кольце K . Из доказательства теоремы Римана о конформных отображениях следует неравенство $|\varphi'(0)| > |g'(0)|$. Заметим, что число C , определяющее угол Штольца, можно выбрать настолько большим, чтобы для всех w , $\frac{1}{2} < |w| < 1$, имело место включение

$$\left\{ z; |z - w| < \frac{1}{2} (1 - |w|) \right\} \subseteq \Delta_{w/|w|}.$$

Тогда из неравенства (11) следует, что функция $f(z)$ отображает круг $\left\{ z; |z - w| < \frac{1}{2} (1 - |w|) \right\}$ в кольцо

$$K_0 = \left\{ \zeta; ||\zeta| - |f(w)|| \leq \Phi \left(\frac{w}{|w|} \right) (1 - |w|)^{p(\alpha(p-1)-1)/(2p^2-1)} \right\}.$$

Введем функцию $g(z) = f\left(w + \frac{1-|w|}{2} z\right)$. Эта функция отображает единичный круг в кольцо K_0 .

Выберем число $a = g(0) = f(w)$, а b определим из соотношения

$$\frac{4|a|b}{\pi} = \Phi \left(\frac{w}{|w|} \right) (1 - |w|)^{p(\alpha(p-1)-1)/(2p^2-1)}.$$

Заметим, что при вышеуказанном выборе чисел a и b имеет место включение $K_0 \subseteq K$. Следовательно

$$|f'(w)| \frac{1-|w|}{2} = |g'(0)| \leq |\varphi'(0)| = |a|b = \frac{\pi}{4} \Phi \left(\frac{w}{|w|} \right) (1 - |w|)^{p(\alpha(p-1)-1)/(2p^2-1)}.$$

Пусть z и ζ — точки, лежащие на единичной окружности. Обозначим через γ ломанную линию наименьшей длины, лежащую в области $\Delta_z \cup \Delta_\zeta$ и соединяющую точки z и ζ .

Часть γ , которая содержится в Δ_z обозначим γ_1 , а другую часть — через γ_2 . Имеем

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\zeta)| &\leq \int_{\gamma} |f'(w)| |dw| \leq 2\Phi(z) \int_{\gamma_1} (1 - |w|)^{\frac{p(\alpha(p-1)-1)}{2p^2-1} - 1} |dw| + \\ &+ 2\Phi(\zeta) \int_{\gamma_2} (1 - |w|)^{\frac{p(\alpha(p-1)-1)}{2p^2-1} - 1} |dw| \leq 2(\Phi(z) + \Phi(\zeta)) |z - \zeta|^{\frac{p(\alpha(p-1)-1)}{2p^2-1}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ Оценки решений дискретных уравнений Винера — Хопфа

Система уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k} \zeta_k = \eta_j, \quad j=0, 1, \dots, \quad (12)$$

где $\zeta = \{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}$ — искомый вектор, а $\eta = \{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — заданные векторы, принято называть дискретным уравнением Винера — Хопфа. Функцию

$$a(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, |z| = 1,$$

называют символом этого уравнения.

Обозначим через P ортогональный проектор из $L_2(\partial D)$ на H_2 . Тогда уравнение (12) можно записать в виде

$$P(af) = g,$$

где $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k z^k$, $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k$. Оператор $P(af)$ называется оператором Теплица и обозначается $T_a f$. Заметим, что оператор Теплица определен на всюду плотном подмножестве H_2 , если $\log^+ |a(z)| \in L_1$. Действительно, пусть $f(z)$ — внешняя функция, модуль которой на единичной окружности равен

$$|f(z)| = \frac{1}{1 + |a(z)|}, \quad z \in \partial D.$$

Ясно, что для любого $n = 0, 1, \dots$ оператор T_a определен на элементах $z^n f(z)$. Из теоремы А. Берлинга следует, что линейная оболочка системы элементов $z^n f(z)$, $n = 0, 1, \dots$ всюду плотна в H_2 .

Хорошо известно, что если функция $a(z)$ допускает представление

$$\frac{1}{a(z)} = a_+(z) a_-(z), \quad z \in \partial D,$$

где $a_+(z)$ и $a_-(z)$ — внешние функции, причем $a_+(z)$ допускает аналитическое продолжение внутрь единичного круга, а $a_-(z)$ — во внешность единичного круга и $a_-(\infty) = 1$, то решение уравнения

$$T_a f = g$$

допускает представление:

$$f = a_+ P(a_- g), \quad (13)$$

при условии, что правая часть (13) имеет смысл.

Теорема 6. Пусть $a(z)$, $z \in \partial D$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\frac{1}{a(z)} \in B_1^1$, где $0 < \alpha < 1$;
2. $\frac{a(z)}{|a(z)|} \in \text{Lip}_\mu$ и $\lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{a(z)}{|a(z)|} = 0$, где $\alpha < \mu < 1$;
3. $\log^+ |a(z)| \in L_p$, где $1 + \frac{2}{\alpha} < p$;
4. $\frac{1}{a(z)} \in L_q$, где $1 \leq q \leq p$.

Тогда если правая часть $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k$ уравнения

$$T_a f = g \quad (14)$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 k^2 < \infty, \quad \frac{2}{q} - \frac{1}{p} < \sigma < 1,$$

то уравнение (14) имеет единственное в H_2 решение $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k$, для которого сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^s k^{s\lambda} < \infty,$$

где s и λ — любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$1 \leq s < \min \left\{ \frac{2q}{1+q}, \frac{2}{2 + \frac{2}{q} - \frac{1}{p} - \sigma} \right\},$$

$$0 < \lambda < \min \left\{ \frac{p(\sigma(p-1)-2)}{4p^2-2}, \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2q} \right\}.$$

Доказательство. Сначала факторизуем функцию $\frac{1}{a(z)}$. Определим факторы следующими формулами:

$$a_+(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \log a(\zeta) dm(\zeta) \right\}, \quad |z| < 1$$

и

$$a_-(z) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \log a(\zeta) dm(\zeta) \right\}, \quad |z| > 1.$$

Из этих формул следует, что для любых $\zeta \in \partial D$ и $0 < r < 1$ имеет место равенство

$$a_+(r\zeta) a_-\left(\frac{\zeta}{r}\right) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{1-r^2}{|\eta-\zeta r|^2} \log a(\eta) dm(\eta) \right\}.$$

Следовательно, почти всюду на ∂D имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} a_+(r\zeta) a_-\left(\frac{\zeta}{r}\right) = \frac{1}{a(\zeta)}.$$

Таким образом, мы получили явные формулы для факторов a_+ и a_- . Теперь выясним какому пространству принадлежат эти факторы. Сначала рассмотрим функцию $a_+(z)$. Заметим, что $a_+(z)$ — внешняя функция, причем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} |a_+(r\zeta)| = \frac{1}{|a(\zeta)|^{1/p}} \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t-\varphi}{2} \arg a(e^{it}) d\varphi \right\}, \quad \zeta = e^{it}.$$

Условия 1—4 позволяют утверждать, что

- а. $|a_+(z)| \in B_2^{s/2}$;
- б. $a_+(z) \in H_{2q}$, $1 \leq q \leq p$;
- в. $\log^- |a_+(z)| \in L_p$, $1 + \frac{2}{\alpha} < p$.

Действительно, из условия 2 следует, что функция

$$\exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t-\varphi}{2} \arg a(e^{i\varphi}) d\varphi \right\}$$

принадлежит пространству Lip_1 , а функция $\frac{1}{|a(z)|^{1/2}} \in B_2^{s/2}$. Следова-

тельно, произведение этих функций принадлежит $B_2^{s/2}$, что показывает справедливость пункта а. Пункты б. и в. непосредственно следуют из условий 3 и 4 нашей теоремы. В силу теоремы 5 существует функция $\Phi(\zeta) \in L_{2pq/(pq+p-q)}$, такая, что

$$|a_+(z) - a_+(\zeta)| \leq (\Phi(z) + \Phi(\zeta)) |z - \zeta|^{p(\alpha(p-1)-2)/(4p^2-2)}, \quad (15)$$

где $z, \zeta \in \partial D$.

Рассмотрим функцию $a_-(z)$. Эта функция аналитична вне единичного круга и модуль ее граничных значений принадлежит пространству L_{2q} . Следовательно, существуют числа A и B такие, что

$$|a_-(z)| \leq A + \frac{B}{(|z|-1)^{1/2q}}, \quad |z| > 1. \quad (16)$$

Теперь выясним какому пространству принадлежит функция $P(a_-g)$. При исследовании этого вопроса мы будем придерживаться хода рассуждений, предложенного в работах В. П. Хавина [27] и Ф. А. Шамойна [28], где рассмотрены аналогичные задачи. Легко заметить, что пространство $H_2(2\tau-1)$, $0 < \tau < \frac{1}{2}$, является сопряженным к пространству B_2^{τ} , причем двойственность определяется следующим образом:

$$\langle f, g \rangle = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) \overline{f(re^{i\theta})} d\theta.$$

Из условия теоремы следует, что $g \in B_2^{s/2}$. Докажем, что функция $P(a_-g)$ принадлежит пространству $B_2^{\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2q}}$. Достаточно проверить, что для любого $f \in H_2\left(\sigma - \frac{1}{q} - 1\right)$ имеет место неравенство

$$|\langle f, P(a_-g) \rangle| \leq C \|f\|_{H_2\left(\sigma - \frac{1}{q} - 1\right)} \|g\|_{B_2^{\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2q}}}. \quad (17)$$

Заметим, что

$$\langle f, P(a_- g) \rangle = \langle f \tilde{a}_-, g \rangle,$$

где $\tilde{a}_-(z) = \overline{a_-\left(\frac{1}{z}\right)}$. Далее из оценки (16) вытекает, что $f \tilde{a}_- \in H_2(\sigma-1)$.

Следовательно, имеет место неравенство (17) и поэтому $P(a_- g) \in B^{\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2q}}$.

Из леммы 1 следует, что существует функция $G(\zeta) \in L_2$ такая, что

$$|P(a_- g)(z) - P(a_- g)(\zeta)| \leq (G(z) + G(\zeta)) |z - \zeta|^{\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2q}}, \quad z, \zeta \in \partial D.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} & |a_+(z) P(a_- g)(z) - a_+(\zeta) P(a_- g)(\zeta)| \leq |a_+(z) - a_+(\zeta)| |P(a_- g)(z)| + \\ & + |a_+(\zeta)| |P(a_- g)(z) - P(a_- g)(\zeta)| \leq (\Phi(z) + \Phi(\zeta)) |P(a_- g)(z)| \times \\ & \times |z - \zeta|^{\frac{p(p-1)-2}{4p^2-2}} + |a_+(\zeta)| (G(z) + G(\zeta)) |z - \zeta|^{\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2q}}. \end{aligned}$$

Заметим, что $a_+ G \in L_{2q/(1+q)}$. Следовательно, $\Phi(z) P(a_- g)(z) \in L_s$, $1 < s < \frac{2}{2 + \frac{2}{q} - \frac{1}{p} - \sigma}$, так как $P(a_- g)(z) \in L_r$ при $1 < r < \frac{2}{1 - \sigma + \frac{1}{q}}$.

Окончательно приходим к оценке

$$|a_+(z) P(a_- g)(z) - a_+(\zeta) P(a_- g)(\zeta)| \leq (R(z) + R(\zeta)) |z - \zeta|^\lambda, \quad (18)$$

где $R(z) \in L_s$, причем

$$\begin{aligned} 0 < \lambda & \leq \min \left\{ \frac{p(p-1)-2}{4p^2-2}, \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2q} \right\}, \\ 1 \leq s & \leq \min \left\{ \frac{2q}{1+q}, \frac{2}{2 + \frac{2}{q} - \frac{1}{p} - \sigma} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(z) \in B_s^\lambda$. Так как $1 \leq s \leq 2$, то сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^s k^{s\lambda} < \infty.$$

Теперь докажем, что уравнение (14) в пространстве H_2 не имеет других решений. Для этого достаточно доказать, что однородное уравнение $T_a f = 0$ в H_2 имеет только тривиальное решение. Предположим обратное, т. е., что существует $f(z) \in H_2$, $f(z) \neq 0$, и $T_a f = 0$. Тогда существует функция $g(z)$, которая аналитически продолжается вне единичного круга, $g(\infty) = 0$, ее граничные значения принадлежат пространству L_2 , и $a(z) f(z) = g(z)$, $z \in \partial D$. Умножим это соотношение на функцию $a_-(z)$:

$$a_-(z) a(z) f(z) = a_-(z) g(z), z \in \partial D.$$

Заметим, что правая часть этого равенства аналитически продолжается вне единичного круга, $a_-(\infty) g(\infty) = 0$, и принадлежит L_1 . Левая часть аналитически продолжается внутрь единичного круга и принадлежат H_1 . Следовательно, это — целая функция, которая в бесконечности обращается в нуль. Поэтому она тождественно равна нулю и теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19.V.1983

Ա. Ա. ՎԱԴԱՐՇԱԿՅԱՆ. Վիենր-Հոփֆի դիֆերենտ հավասարումների լուծումների վարքի մասին (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{k-j} \zeta_j = \eta_k, k=0, 1, \dots \quad (1)$$

հավասարումների համար դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը՝ դիցուք η_k -ն որոշ արագությամբ ձգտում է զրոյի Այն դեպքում, երբ այդ հավասարումը լուծում ունի, ի՞նչ կարելի է ասել ζ_j լուծման վարքի մասին, երբ $j \rightarrow \infty$. Պարզվում է, որ (1) հավասարման,

$$a(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, |z|=1,$$

սիմվոլի վրա որոշ սահմանափակումների դեպքում այն l_2 -ում ունի միակ լուծումը և գնահատվում է այդ լուծման ջրոյի ձգտելու արագությունը, Հարկ է նշել, որ $a(z)$ -ի վրա դրված պայմանները թույլ են տալիս, որ $a(z)$ -ը դառնա զրո, անվերջություն, հնարավոր են նաև լուծման կետեր:

A. A. VAGARSHAKIAN. On the behaviour of the solution of discrete Wiener-Hopf equations (summary)

In this paper for the equations

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{k-j} \zeta_j = \eta_k, k=0, 1, \dots \quad (1)$$

the following problem is investigated: let η_k tend to zero with some speed. In the case, when this equation has a solution, what can we say about the behaviour of the solution ζ_j when $j \rightarrow \infty$? Under some conditions on the symbol

$$a(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, |z|=1,$$

the equation (1) has unique solution in l_2 . The rate of convergence of this solution to zero is estimated

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. N. Wiener. and E. Hopf. Über eine klasse singulärer integralgleichungen, Sitz., Akad. Wiss., Berlin, 1931. 696—706.
2. E. Relssner, On a class of singular integral equations, Journ. Math. Phys. Mass. inst. Tech., 20, 1941, 219—223.
3. В. А. Фок. О некоторых интегральных уравнениях математической физики, ДАН СССР, 37, 1942, 147.

4. В. А. Фок, О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Матем. сб., 14, 56, № 1—2, 1944, 3—50.
5. И. М. Рапопорт. О некоторых «парных» интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях, Сб. трудов Института матем. АН УССР, № 12, 1949, 102—117.
6. И. М. Рапопорт. Про один класс безконечных систем лінійных алгебранечских рівнянь, ДАН УССР, Відділ фізико-матем та хім, наук, № 3, 1948, с. 6—10.
7. М. Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, XII, вып. 5, 83, 1958, 3—120.
8. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. Уравнения в свёртках и проекционные методы их решения, Изд. «Наука», М., 1971.
9. Р. В. Дулчуава. Исследование некоторых классов дискретных и интегральных уравнений, Автореферат диссер. на соискание уч. степени доктора наук, Тбилиси, 1980.
10. Э. Прёсдорф. Некоторые классы сингулярных уравнений, Изд. «Мир», М., 1979.
11. М. Г. Крейн, Ю. А. Шмудляк. Уравнения Винера—Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты, Известия АН Арм. ССР, XVII, № 5, 1982, 335—375.
12. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды, М., «Физматгиз», 1961.
13. С. В. Хрущёв. Простое доказательство теоремы Меньшова об исправлении, Препринт ЛОМИ Р—1—78, Ленинград, 1978.
14. Y. Katznelson. On a theorem of Menchoff, Proc. Amer. Math. Soc., 53, № 2, 1975, 396—398.
15. А. М. Олевский. Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана, ДАН СССР, 238, 1978, 796—799.
16. N. Aronszajn, K. T. Smith. Functional space and functional completion, Ann. de l'inst. Fourier, 6, 1956, 125—185.
17. Л. Карлесон. Избранные проблемы теории исключительных множеств, Изд. «Мир», М., 171.
18. М. М. Джрбашян. О представимости некоторых классов голоморфных функций в единичном круге, ДАН Арм. ССР, VI, № 5, 1947, 129—133.
19. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм. ССР, III, № 1, 1945, 3—9.
20. Т. Гамелин. Равномерные алгебры, Изд. «Мир», М., 1973.
21. Ch. J. Preston. A theory of capacities and its applications to some convergence results, Advances in Math., 6, 1, 1971, 78—106.
22. J. Brennan. Approximation in the mean by polynomials on non—Carathéodory domains, Arkiv för Matematik, v, 15, N 1, 1977, 117—168.
23. S. Jacobs. Ett extremalproblem för analytiska funktioner i multipelt sammanhängande områden, Uppsala Univ. Math. Dept. report 2, 1969.
24. Ф. А. Шамоян. Некоторые проблемы деления в пространстве аналитических функций, диссертация, ЛГУ, 1970.
25. В. П. Хавин, Ф. А. Шамоян. Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений, Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 19, 1970, 237—239.
26. В. П. Хавин. Обобщение теоремы Зигмунда—Привалова о модуле непрерывности сопряженной функции, Известия АН Арм. ССР, сер. матем., № 6, 1971, 252—258. и № 1, 1972, 265—287.
27. В. П. Хавин. О факторизации аналитических функций, гладких вплоть до границы, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 22, 1971, 202—205.
28. Ф. А. Шамоян. Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах функций, аналитических в круге, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 22, 1971, 206—208.

УДК 517.98

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. З. МКРТЧЯН

О КАЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКАХ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ СПЕКТР ОБЩИХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Основной целью работы является подробное доказательство результатов, анонсированных нами в заметках [1] и [2] (см. также [3]), а также изложение некоторых, примыкающих к ним, дополнительных соображений и фактов.

Рассматривается самосопряженный оператор A , действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения D_A . Пусть E_λ — соответствующее оператору A спектральное семейство проекционных операторов, R_λ — его резольвента, а $\rho(\lambda)$ — спектральная мера.

Для большинства конкретных самосопряженных операторов построение E_λ или даже $\rho(\lambda)$, как правило, оказывается достаточно трудной задачей, поэтому хорошо известная процедура построения системы собственных функционалов посредством дифференцирования E_λ по $\rho(\lambda)$ (см. [4], [5]) оказывается не применимой. В связи с этим в работах [6], [8], [9] была предложена другая процедура построения полной совокупности собственных функционалов оператора A , опирающаяся лишь на предварительное построение резольвенты и изучение его асимптотики при приближении к точкам вещественной оси.

Путем дальнейшего развития именно этой методики, в настоящей работе мы устанавливаем новые соотношения, записываемые исключительно в терминах резольвенты, которые можно рассматривать как обобщенные аналоги неравенства Бесселя, равенства Парсеваля и теоремы Планшереля, ассоциированные с рассматриваемым самосопряженным оператором.

Из этих соотношений следует справедливость нескольких критериев, достаточно полно характеризующих качественные свойства спектра некоторых классов самосопряженных операторов, явное выражение резольвенты которых удается получить.

1°. Вспомогательные предложения и формулировка основных результатов.

Представим исходное пространство H в виде ортогональной суммы инвариантных относительно оператора A подпространств H_k , в каждом из которых спектр сужения $A_k = A|_{H_k}$ простой:

$$H = \sum \oplus H_k.$$

Обозначим через $R_k^{(k)}$, $E_k^{(k)}$, g_k — соответственно резольвенту, разложения единицы и нормированный циклический элемент оператора A_k , а

через $V^*: H_k \rightarrow L_{\rho_k}^2$ — изометрический оператор, существующий в силу основной спектральной теоремы, где $\rho_k(t) = \|E_t^{(k)} g_k\|^2$.

Пусть далее

$$H_k = H_k^d \oplus H_k^a \oplus H_k^s \quad (1)$$

— ортогональное разложение H_k на подпространства, в которых спектр оператора A_k соответственно дискретный, абсолютно непрерывный и сингулярный (относительно меры Лебега), а $\rho_k = \rho_k^d + \rho_k^a + \rho_k^s$ — соответствующее разложение спектральной меры.

Условимся неограниченный линейный оператор G с плотной в H областью определения D_G называть допустимым вспомогательным оператором (ДВО), если $\ker G = \text{coker } G = \{0\}$, а обратный к нему оператор $G^{-1}: H \rightarrow D_G$ является оператором типа Гильберта-Шмидта и поэтому допускает представление

$$G^{-1}f = \sum_{(p)} \mu_p(f, \widehat{\omega}_p) \omega_p; \quad \forall f \in H,$$

где $\sum_{(p)} \mu_p^2 = \|G^{-1}\|_S^2 < +\infty$, а $\{\widehat{\omega}_p\}$ и $\{\omega_p\}$ — полные в H

ортонормальные системы (см., например, [7]).

Для каждого $f \in H$ рассмотрим множество

$$\Lambda_f = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \|R_{\lambda + i\tau} f\| > 0\}$$

и образуем объединение этих множеств по всем $f \in H$, а именно, положим $\Lambda = \bigcup_{f \in H} \Lambda_f$.

Предложение 1. *Множество Λ не более чем счетно и представляет собой совокупность всех собственных значений оператора A .*

Доказательство. Пусть λ_0 не является собственным значением оператора A и, стало быть, λ_0 — точка непрерывности функции $\rho(t)$, тогда для любого $f \in H$ будем иметь

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} f\|^2 = 0.$$

В самом деле, из $f = \sum_{(k)} f_k$, где f_k принадлежат инвариантным относительно R_z подпространствам H_k , имеем

$$\|R_{\lambda_0 + i\tau} f\|^2 = \sum_{(k)} \|R_{\lambda_0 + i\tau} f_k\|^2 \quad (2)$$

и так как $V^{(k)} R_z f_k = \frac{F_k(t)}{t - z}$, где $F_k(t) = V^{(k)} f_k$, то

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} f\|^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{(k)} \tau^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|F_k(t)|^2}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho_k. \quad (3)$$

Далее, поскольку для ряда (3) существует сходящийся мажорантный ряд $\sum_{(k)} \|f_k\|^2 = \|f\|^2$, то можно переходить к пределу под знаком суммы и поэтому

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} f\|^2 = \sum_{(k)} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|F_k(t)|^2 d\rho_k}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2}.$$

Принимая во внимание лемму 1 работы [3], получим

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} f\|^2 = \sum_{(k)} |F_k(\lambda_0)|^2 [\rho_k(\lambda_0) - \rho_k(\lambda_0 - 0)] \quad (4)$$

и поскольку из непрерывности ρ следует непрерывность каждого из ρ_k , то наше утверждение непосредственно следует из формулы (4). Итак, если λ_0 не есть собственное значение, то $\lambda_0 \notin \Lambda$.

Пусть теперь λ_0 — собственное значение оператора A и, стало быть, $\rho(\lambda_0) - \rho(\lambda_0 - 0) > 0$, тогда найдутся ρ_n такие, что $\rho_n(\lambda_0) - \rho_n(\lambda_0 - 0) > 0$ и $f_n \in H_n$ такие, что $(V^{(n)} f_n)(\lambda_0) = F_n(\lambda_0) \neq 0$, поэтому из соотношения (4) непосредственно следует

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} f\|^2 \geq |F_n(\lambda_0)|^2 [\rho_n(\lambda_0) - \rho_n(\lambda_0 - 0)] > 0,$$

т. е. $\lambda_0 \in \Lambda_{f_n} \subset \Lambda$.

Рассмотрим теперь множество

$$\Lambda_G = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \|R_{\lambda + i\tau} G^{-1}\| > 0\},$$

где G — некоторый ДВО.

Предложение 2. Множество Λ_G не зависит от выбора оператора G и совпадает с множеством Λ всех собственных значений оператора A .

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$, тогда легко понять, что найдутся $E_{\lambda_0}^{(k)}$ и $f_k \in H_k$ такие, что

$$\|E_{\lambda_0}^{(k)} - E_{\lambda_0 - 0}^{(k)}\| f_k\|^2 = |F_k^{\lambda}(\lambda_0)|^2 [\rho_k(\lambda_0) - \rho_k(\lambda_0 - 0)] = \delta > 0,$$

где $F_k(t) = V^{(k)} f_k$. С другой стороны, поскольку $\bar{D}_G = H$, то найдется $f^0 \in D_G$ такое, что $\|f_k - f^0\|^2 < \delta/2$.

Далее, нетрудно понять, что $F_k^0(\lambda_0) \neq 0$, ибо в противном случае нижеследующие неравенства

$$\begin{aligned} \|f_k - f^0\|^2 &= \sum_{(n)} \int_{\mathbb{R}} |F_n(t) - F_n^0(t)|^2 d\rho_n > \\ &> \int_{\mathbb{R}} |F_k(t) - F_k^0(t)|^2 d\rho_k \geq |F_k(\lambda_0)|^2 [\rho_k(\lambda_0) - \rho_k(\lambda_0 - 0)] = \delta \end{aligned}$$

привели бы нас к очевидному противоречию.

Поскольку $f^0 \in D_G$ и кроме того ядро оператора G тривиально, то мы можем образовать нормированный элемент $g^0 = Gf^0 / \|Gf^0\|$ и по этому будем иметь очевидное неравенство

$$\|R_{\lambda_0 + i\tau} G^{-1}\|^2 \geq \|R_{\lambda_0 + i\tau} G^{-1} g^0\|^2 = \|R_{\lambda_0 + i\tau} f^0\|^2 / \|Gf^0\|^2.$$

Умножая это неравенство на τ^2 и переходя к пределу будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} G^{-1}\|^2 &= \frac{1}{\|Gf\|^2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{(n)} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau}^{\langle n \rangle} f_n\|^2 > \\ &> \frac{1}{\|Gf\|^2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau}^{\langle s \rangle} f_s\|^2 = \frac{1}{\|Gf\|^2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|F_k^s(t)|^2}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho_k > \\ &> \frac{1}{\|Gf\|^2} |F_k^s(\lambda_0)|^2 [\rho_k(\lambda_0) - \rho_k(\lambda_0 - 0)] > 0, \end{aligned}$$

следовательно, $\lambda_0 \in \Lambda_0$, т. е. включение $\Lambda \subset \Lambda_0$ доказано.

Пусть теперь $\lambda_0 \notin \Lambda$ и, стало быть, λ_0 — точка непрерывности для всех ρ_n . Поскольку G^{-1} является оператором Гильберта—Шмидта, то для любого $f \in H$ имеет место представление

$$G^{-1}f = \sum_{(p)} \mu_p a_p \omega_p, \quad \sum_{(p)} \mu_p^2 = \|G^{-1}\|_S^2 < \infty, \quad a_p = (f, \hat{\omega}_p), \quad (5)$$

где $\{\omega_p\}$ и $\{\hat{\omega}_p\}$ — полные в H ортонормальные системы.

Обозначим через P_n ортопроектор на подпространство H_n и положим $V^{(n)}(P_n \omega_p) = \omega_p^n(t)$, тогда воспользовавшись представлением (5) получим

$$\begin{aligned} \|R_{\lambda_0 + i\tau} G^{-1}\|^2 &= \sup_{\|f\|=1} \|R_{\lambda_0 + i\tau} G^{-1} f\|^2 = \sup_{\|f\|=1} \sum_{(n)} \|R_{\lambda_0 + i\tau}^{\langle n \rangle} P_n G^{-1} f\|^2 = \\ &= \sup_{\{a_p\}} \sum_{(n)} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\sum_{(p)} \mu_p a_p \omega_p^n(t)|^2}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho_n \leq \sum_{(n)} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\Phi_n(t)|^2}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho_n, \end{aligned} \quad (6)$$

где верхняя грань берется по всевозможным $\{a_p\}$ таким, что

$$\sum_{(p)} |a_p|^2 = 1, \quad \text{а} \quad |\Phi_n(t)|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 |\omega_p^n(t)|^2,$$

которая, как легко видеть представляет собой функцию, суммируемую на всей оси по мере ρ_n .

В самом деле

$$\int_{\mathbb{R}} |\Phi_n(t)|^2 d\tau_n \leq \sum_{(p)} \mu_p^2 \int_{\mathbb{R}} |\omega_p^n(t)|^2 d\rho_n \leq \sum_{(p)} \mu_p^2 < +\infty.$$

Обозначим теперь $\hat{\rho}_n(x) = \int_{-\infty}^x |\Phi_n(t)|^2 d\rho_n$, $\hat{\rho}(x) = \sum_{(n)} \hat{\rho}_n(x)$ и докажем,

что $\hat{\rho}(\mathbb{R}) < +\infty$.

В самом деле, переставляя порядки суммирования и интегрирования, а также воспользовавшись изометричностью $V^{(n)}$, будем иметь

$$\hat{\rho}(\mathbb{R}) = \sum_{(n)} \int_{\mathbb{R}} |\Phi_n(t)|^2 d\rho_n = \sum_{(n)} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{(p)} \mu_p^2 |\omega_p^n(t)|^2 \right\} d\rho_n =$$

$$= \sum_{(n)} \sum_{(p)} \mu_p^2 \int_R |\omega_p^n(t)|^2 d\rho_n = \sum_{(p)} \mu_p^2 \sum_{(n)} |V^{(n)} \omega_p^n|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 \|\omega_p\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 < +\infty.$$

Теперь, в силу неравенства (6) будем иметь

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} G^{-1}\|^2 < \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \sum_{(n)} \int_R \frac{d\rho_n}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_R \frac{d\hat{\rho}}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} \quad (7)$$

и поскольку λ_0 является точкой непрерывности для $\hat{\rho}$, то правая часть неравенства (7) равна нулю, следовательно $\lambda_0 \in \Lambda_0$. Итак, множество Λ_0 совпадает с Λ .

Пусть f — произвольный элемент из H и пусть

$$f = \sum_{(k)} f_k, \quad f_k \in H_k,$$

тогда очевидно

$$\|f\|^2 = \sum_{(k)} \|f_k\|^2 = \sum_{(k)} \int_R |F_k(t)|^2 d\rho_k, \quad F_k(t) = (V^{(k)} f)(t). \quad (8)$$

Для каждого $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и каждого $f \in H$ положим

$$|a_{\lambda_0}(f)|^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} f\|^2,$$

тогда имеет место

Предложение 3. Пусть P_{λ_0} — ортопроектор на собственное подпространство оператора A , отвечающее собственному значению λ_0 , тогда

$$|a_{\lambda_0}(f)|^2 = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_0 \notin \Lambda \\ \|P_{\lambda_0} f\|^2, & \text{если } \lambda_0 \in \Lambda. \end{cases}$$

Доказательство. В силу известных свойств резольвенты и изометрического оператора $V^{(k)}$ будем иметь

$$|a_{\lambda_0}(f)|^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \sum_{(k)} \|R_{\lambda_0 + i\tau}^{(k)} f_k\|^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{(k)} \tau^2 \int_R \frac{|F_k(t)|^2 d\rho_k}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2}, \quad (9)$$

но так как ряд (8) очевидно служит мажорантой для ряда (9), то переходя к пределу под знаком суммы, получим

$$|a_{\lambda_0}(f)|^2 = \sum_{(k)} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_R \frac{|F_k(t)|^2 d\rho_k}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2}.$$

Положим $\tilde{\rho}_k(t) = \rho_k(t) - [\rho_k(\lambda_0) - \rho_k(\lambda_0 - 0)] \Theta(t - \lambda_0)$, где Θ — функция Хевисайда, тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_R \frac{|F_k(t)|^2 d\rho_k}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} = |F_k(\lambda_0)|^2 [\rho_k(\lambda_0) - \rho_k(\lambda_0 - 0)] + \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_R \frac{|F_k(t)|^2 d\tilde{\rho}_k}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} \quad (10)$$

и поскольку $t = \lambda_0$ очевидно является точкой непрерывности ρ_k , то в силу леммы 5 работы [8], второе слагаемое справа в (10) равно нулю. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$|a_{\lambda_0}(f)|^2 = \sum_{(k)} |F_k(\lambda_0)|^2 [\rho_k(\lambda_0) - \rho_k(\lambda_0 - 0)], \quad (11)$$

откуда непосредственно заключаем, что если $\lambda_0 \notin \Lambda$, то $|a_{\lambda_0}(f)| = 0$ для любого $f \in H$.

Пусть теперь $\lambda_0 \in \Lambda$, тогда для каждого $f \in H$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|P_{\lambda_0} f\|^2 &= \sum_{(k)} \|P_{\lambda_0} f_k\|^2 = \sum_{(k)} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\lambda_0 - \lambda}^{\lambda_0} |F_k(t)|^2 d\rho_k = \\ &= \sum_{(k)} |F_k(\lambda_0)|^2 [\rho_k(\lambda_0) - \rho_k(\lambda_0 - 0)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Сопоставляя (11) и (12) получаем $|a_{\lambda_0}(f)|^2 = \|P_{\lambda_0} f\|^2$.

Замечание 1. Легко понять, что в том случае, когда собственное подпространство одномерно, то $|a_{\lambda_k}(f)| = |(f, \varphi_k)|$, где φ_k — нормированный собственный элемент, отвечающий собственному значению λ_k , т. е. $a_{\lambda_k}(f)$ совпадает (по модулю) с коэффициентом Фурье элемента f , поэтому представляется уместным и в общем случае называть $a_{\lambda_k}(f)$ коэффициентом Фурье элемента f относительно подпространства $P_{\lambda_k} H$.

Лемма 1. Для каждого $f \in H$ положим $F_k(t) = (V^{(k)} f)(t)$, тогда существует множество E_f полной лебеговской меры такое, что для любого $\lambda \in E_f$ ряд

$$\sum_{(k)} |F_k(\lambda)|^2 \rho'_k(\lambda) \quad (13)$$

сходится, причем

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{(k)} |F_k(\lambda)|^2 \rho'_k(\lambda) d\lambda \leq \|f\|^2.$$

Доказательство. Поскольку члены ряда неотрицательны, то по теореме Белло—Леви

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sum_{(k)} |F_k(\lambda)|^2 \rho'_k(\lambda) d\lambda &= \sum_{(k)} \int_{\mathbb{R}} |F_k(\lambda)|^2 \rho'_k(\lambda) d\lambda \leq \\ &\leq \sum_{(k)} \int_{\mathbb{R}} |F_k(\lambda)|^2 d\rho_k = \sum_{(k)} \|f_k\|^2 = \|f\|^2, \end{aligned}$$

откуда и следует, что ряд (13) сходится на некотором множестве E_f полной лебеговской меры.

2°. В работе [9], в предположении однократности спектра оператора A , было доказано, что при каждом $f \in H$ предел

$$|\Phi_f(\lambda)|^2 = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \|R_{\lambda + i\tau} f\|^2$$

существует при почти всех λ по мере Лебега и представляет собой суммируемую по Лебегу функцию.

Предложение 4. При произвольном характере спектра оператора A для каждого $f \in H$ существует подмножество $M_f \subset \mathbb{R}$ полной лебеговской меры m такое, что при любом $\lambda \in M_f$ имеет место соотношение

$$|\Phi_f(\lambda)|^2 = \sum_{(k)} |F_k(\lambda)|^2 \rho_k^*(\lambda) < +\infty.$$

Доказательство. В силу соответствующих определений и пользуясь известными свойствами резольвенты изометрических операторов $V^{(k)}$, а также теоремой Радона—Никодима, легко заключаем, что

$$\begin{aligned} |\Phi_f(\lambda)|^2 &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \sum_{(k)} [R_{\lambda + i\tau} f]^2 = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \sum_{(k)} \int_{\mathbb{R}} \frac{|F_k(t)|^2 d\rho_k}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \sum_{k=1}^N \frac{\tau}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|F_k(t)|^2 d\rho_k}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} + \lim_{\tau \rightarrow +0} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\tau}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\rho_k^*}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где положено $\rho_k^*(x) = \int_{-\infty}^x |F_k(t)|^2 d\rho_k$.

Введем нижеследующие обозначения: $\sigma_N(t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \rho_k^*(t)$,

$$u_k(\lambda, \tau) = \frac{\tau}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|F_k(t)|^2 d\rho_k}{(t-\lambda)^2 + \tau^2},$$

$$r_N(\lambda, \tau) = \frac{\tau}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma_N(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2},$$

тогда пользуясь теоремой Бепо—Леви будем иметь

$$|\Phi_f(\lambda)|^2 = \sum_{k=1}^N \lim_{\tau \rightarrow +0} u_k(\lambda, \tau) + \lim_{\tau \rightarrow +0} r_N(\lambda, \tau). \quad (15)$$

Для каждого $\delta > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $\Omega_m^\delta = \Omega_m^\delta[a, b] = \{\lambda \in [a, b] | \sigma_m(\lambda) < \delta\}$ и положим $\Omega^\delta = \bigcup_{m \geq 1} \Omega_m^\delta$, тогда имеют место следующие вспомогательные предложения.

Лемма 2. При всяком $\delta > 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes } \Omega_m^\delta = b - a.$$

Доказательство. Принимая во внимание, что мера $\sigma_m([a, b])$ стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ и рассуждая почти так же, как при доказательстве известной леммы (см., например, [10], стр. 226) нетрудно убедиться в справедливости нашего утверждения.

Лемма 3. При всяком $\delta > 0$ множество Ω^δ имеет полную лебеговскую меру в промежутке $[a, b]$, причем для любого $\lambda \in \Omega^\delta$ существует N_λ такое, что $\sigma_N(\lambda) < \delta$ при всех $N > N_\lambda$.

Доказательство. Поскольку при всяком $m \in N$ очевидно имеет место неравенство $\sigma'_m(\lambda) \geq \sigma'_{m+1}(\lambda)$, то легко понять, что $\Omega_m^{\delta} \subset \Omega_{m+1}^{\delta}$, откуда нетрудно заключить, что объединение

$$\Omega^{\delta} = \bigcup_{m \geq 1} \Omega_m^{\delta}$$

является множеством полной лебеговской меры в промежутке $[a, b]$ и кроме того для каждого $\lambda \in \Omega^{\delta}$ найдется N_{λ} такое, что если $N > N_{\lambda}$, то $\sigma'_N(\lambda) < \delta$.

Рассмотрим теперь последовательность чисел δ_n , которая монотонно стремится к нулю, тогда непосредственно из определений будем иметь $\Omega_m^{\delta_{n+1}} \subset \Omega_m^{\delta_n}$ при всяком $m \in N$, следовательно $\Omega^{\delta_{n+1}} \subset \Omega^{\delta_n}$.

Кроме того ясно, что пересечение $\Omega_f = \bigcap_{n \geq 1} \Omega^{\delta_n}$ будет иметь полную лебеговскую меру на $[a, b]$.

Лемма 4. Для каждого $\lambda \in \Omega_f$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют $N_0(\lambda, \varepsilon)$ и $\tau_0(\lambda, \varepsilon)$ такие, что $r_N(\lambda, \tau) < \varepsilon$ коль скоро $N \geq N_0(\lambda, \varepsilon)$ и $\tau \leq \tau_0(\lambda, \varepsilon)$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Omega_f$ и пусть $\delta_n < \varepsilon/2$, тогда по самому построению $\Omega_N^{\delta_n}$ и упомянутой их монотонности по N найдется N_0 , зависящее от λ и ε такое, что $\sigma'_N(\lambda) < \varepsilon/2$ при всех $N > N_0(\lambda, \varepsilon)$.

Далее, из результатов работы [11] (см. лемму 1) следует, что в тех точках λ , в которых существует производная $\sigma'_N(\lambda)$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} r_N(\lambda, \tau) = \sigma'_N(\lambda),$$

поэтому ясно, что найдется τ_0 , зависящее от λ , N_0 и ε , такое, что $r_N(\lambda, \tau) < \varepsilon$, если только $\tau < \tau_0(\lambda, \varepsilon)$. Заметим, наконец, что по самому определению

$$r_{N_0}(\lambda, \tau) = r_{N_0+m}(\lambda, \tau) + \sum_{N_0+1}^{N_0+m} \frac{\tau}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\rho_k^*}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}, \quad \forall m \in N$$

и поскольку все члены в этом соотношении не отрицательны, то непосредственно заключаем, что уже при всех $N \geq N_0(\lambda, \tau)$ будем иметь $r_N(\lambda, \tau) < \varepsilon$, если только $\tau < \tau_0(\lambda, \varepsilon)$.

Возвращаясь теперь к доказательству нашего предложения, для каждого $\lambda \in E_f$ обозначим через $S(\lambda)$ сумму сходящегося в силу леммы 1 ряда (13) и рассмотрим множество $M_f = \Omega_f \cap E_f$, которое очевидно тоже имеет полную лебеговскую меру.

Тогда для каждого $\lambda \in M_f$ и любого $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\lambda, \tau) - S(\lambda) \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^N u_k(\lambda, \tau) - S(\lambda) \right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(\lambda, \tau) \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^N u_k(\lambda, \tau) - S_N(\lambda) \right| + |S(\lambda) - S_N(\lambda)| + r_N(\lambda, \tau), \end{aligned}$$

где $S_N(\lambda)$ — частичная сумма ряда (13).

В силу леммы 4 существуют $N_1(\varepsilon, \lambda)$ и $\tau_1(\varepsilon, \lambda)$ такие, что при любых $N \geq N_1(\varepsilon, \lambda)$ и $\tau < \tau_1(\varepsilon, \lambda)$, $r_N(\lambda, \tau) < \varepsilon/3$. Далее, в силу сходимости ряда (13) найдется $N_2(\varepsilon, \lambda)$ такое, что для всех $N \geq N_2(\varepsilon, \lambda)$ $|S(\lambda) - S_N(\lambda)| < \varepsilon/3$. Положим $N^* = \max\{N_1, N_2\}$, тогда принимая во внимание установленное в [9] (лемма 4) соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|F_k(t)|^2 d\rho_k}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = |F_k(\lambda)|^2 \rho_k(\lambda), \quad \forall \lambda \in E_f,$$

легко понять, что найдется $\tau_2(\varepsilon, \lambda)$ такое, что для всех $\tau < \tau_2(\varepsilon, \lambda)$

$$\left| \sum_{k=1}^{N^*} u_k(\lambda, \tau) - S_{N^*}(\lambda) \right| < \varepsilon/3,$$

поэтому, положив $\tau^* = \min\{\tau_1, \tau_2\}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{N^*} u_k(\lambda, \tau) - S(\lambda) \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^{N^*} u_k(\lambda, \tau) - S_{N^*}(\lambda) \right| + \\ &+ |S(\lambda) - S_{N^*}(\lambda)| + r_{N^*}(\lambda, \tau) < \varepsilon, \end{aligned}$$

если только $\tau < \tau^*(\varepsilon, \lambda)$. Этим и завершается доказательство нашего предложения 4.

Следствие. Принимая во внимание установленное в [6] выражение $V^{(k)}f$ через собственные функционалы $T_\lambda^{(k)}(f)$, а именно, формулу $(V^{(k)}f)(\lambda) = T_\lambda^{(k)}(f)$ получим (для почти всех λ по мере Лебега)

$$|\Phi_f(\lambda)|^2 = \sum_{(k)} |T_\lambda^{(k)}(f)|^2 \rho_k(\lambda).$$

В том частном случае, когда спектр оператора A однократный, сосредоточен лишь на $[0, 1]$ и $\rho(\lambda) \equiv \lambda$, будем иметь $|\Phi_f(\lambda)| = |T_\lambda(f)|$, т. е. в этом случае $\Phi_f(\lambda)$ совпадает (по модулю) с обобщенным преобразованием Фурье элемента f .

3°. В этом пункте, опираясь на доказанные выше вспомогательные предложения, мы устанавливаем некоторые новые соотношения, записываемые исключительно в терминах асимптотического поведения резольвенты, которые можно рассматривать как обобщенные аналоги неравенства Бесселя, равенства Парсеваля и теоремы Планшереля, ассоциированные с рассматриваемым самосопряженным оператором A .

Теорема 1. (аналог неравенства Бесселя). Для каждого $f \in H$ имеет место соотношение

$$\sum_{\lambda, k \in \Lambda} |a_{\lambda, k}(f)|^2 + \int_{\mathbb{R}} |\Phi_f(\lambda)|^2 d\lambda \leq \|f\|_1^2. \quad (16)$$

Доказательство. Пусть $f_k = f_k^d + f_k^a + f_k^s$ — представление элемента $f_k \in H_k$, соответствующее каноническому разложению (1), тогда непосредственно из соответствующих определений будем иметь:

$$\|f_k^d\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |F_k(t)|^2 d\rho_k^d = \sum_{\lambda, n \in \Lambda} |F_k(\lambda, n)|^2 [\rho_k(\lambda, n) - \rho_k(\lambda, n-0)], \quad (17)$$

$$\|f_k\|^2 = \int_R |F_k(t)|^2 d\gamma_k^a = \int_R |F_k(t)|^2 \dot{\rho}_k(t) dt. \quad (18)$$

С другой стороны, в силу доказанного выше соотношения (9)

$$\begin{aligned} \sum_{i_n \in \Lambda} |a_{i_n}(f)|^2 &= \sum_{i_n \in \Lambda} \left\{ \sum_{(i,n)} |F_k(i_n)|^2 [\rho_k(i_n) - \rho_k(i_n - 0)] \right\} = \\ &= \sum_{(i,n)} \left\{ \sum_{i_n \in \Lambda} |F_k(i_n)|^2 [\rho_k(i_n) - \rho_k(i_n - 0)] \right\}, \end{aligned}$$

поэтому, принимая во внимание (17), получим

$$\sum_{i_n \in \Lambda} |a_{i_n}(f)|^2 = \sum_{(k)} \|f_k^{d_i}\|^2 = \|f^d\|^2. \quad (19)$$

Кроме того, опираясь на предложение 4 и соотношение (18), будем иметь

$$\int_R |\Phi_f(i)|^2 d\lambda = \int_R \sum_{(k)} |F_k(i)|^2 \dot{\rho}_k(i) d\lambda = \sum_{(k)} \|f_k^a\|^2 = \|f^a\|^2, \quad (20)$$

поэтому, складывая почленно соотношения (19) и (20), получаем утверждение нашей теоремы.

Отметим, наконец, что именно из этих же доказанных нами основных соотношений (19) и (20), непосредственно следует, что элемент $f \in H$ принадлежит подпространству H^d тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i_n \in \Lambda} |a_{i_n}(f)|^2 = \|f\|^2 \quad (21)$$

и принадлежит подпространству H^a в том и только том случае, когда

$$\int_R |\Phi_f(i)|^2 d\lambda = \|f\|^2, \quad (22)$$

откуда и следует справедливость нижеследующих теорем.

Теорема 2 (критерий полноты). *Для того, чтобы ортогональная сумма всех собственных подпространств оператора A совпала со всем пространством H необходимо и достаточно, чтобы для любого $f \in H$ имело место равенство (21).*

Эту теорему можно рассматривать как аналог теоремы Парсевала для ортонормированных систем.

Теорема 3 (критерий лебеговости спектра). *Для того, чтобы спектр оператора A был чисто лебеговским (т. е. спектральная мера была абсолютно непрерывной по лебеговской мере) необходимо и достаточно, чтобы для любого $f \in H$ имело место равенство (22).*

Теорема 4 (об отсутствии сингулярного спектра). *Для отсутствия сингулярной составляющей спектра оператора A необходимо и достаточно, чтобы для любого $f \in H$ в соотношении (16) имел место знак равенства.*

Теорема 5 (критерий сингулярности спектра): Для того, чтобы спектр оператора A был чисто сингулярным необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_{\lambda}(f)|^2 + \int_{\mathbb{R}} |\Phi_f(\lambda)|^2 d\lambda = 0, \quad \forall f \in H.$$

Замечание 2. Нетрудно убедиться, что при проверке достаточности признаков сформулированных выше теорем, можно ограничиться лишь элементами f , принадлежащими некоторому счетному всюду плотному в H множеству.

Замечание 3. Представляется уместным обратить внимание на то, что при проверке выполнимости условий теорем 2—4 предварительное построение самих собственных элементов или собственных функционалов рассматриваемого оператора не требуется.

Ереванский государственный
университет,

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 6.VII.1984

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐԻԱՆ, Ռ. Ջ. ՄԿՐՏՅԱՆ. Կոմպակտ ինֆինիտիմալ օպերատորների սպեկտրի բնութագրող որակական հայտանիշների վերաբերյալ (ամփոփում)

Սեպարաբիլ հիլբերտյան տարածության մեջ գործող կոմպակտ ինֆինիտիմալ օպերատորի համար ապացուցված են նոր առնչություններ, որոնք գրվում են միայն նրա ռեզոլվենտի տերմիններով և հանդիսանում են Բեսելի անհավասարության, Պարսեվալի հավասարության և Պլանշերելի թեորեմի անալոգները, Այդ առնչություններից ստացված են նոր հայտանիշներ սեփական էլեմենտների լրիվության, սինգուլյար սպեկտրի բացակայության, սպեկտրի լեբեգյան կամ զուտ սինգուլյար լինելու վերաբերյալ:

R. A. ALEXADRIAN, R. Z. MKRTCHIAN. *On the qualitative criteria characterizing the spectrum of arbitrary self-adjoint operators (summary)*

For an arbitrary self-adjoint operator acting in a separable Hilbert space we establish, in terms of the resolvent, some analogues of Bessel's inequality, Parseval's equality and Plancherel's theorem. From these relations we obtain some new criteria for completeness of the system of eigenelements, for absence of the singular spectrum for Lebesqueness or pure singularity of the spectrum.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. Об одном аналоге теоремы Планшереля и качественном характере спектра самосопряженного оператора, Дифференциальные уравнения с частными производными, «Наука», Новосибирск, 1980, 205—209.
2. R. A. Alexandrian. On the qualitative spectral properties of the selfadjoint operators in a separable Hilbert space, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 35, Budapest (Hungary), 1980, 87—91.
3. Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. Критерий полноты системы собственных элементов самосопряженного оператора с бесконечнократным спектром, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, № 3, 1978.
4. И. М. Гельфанд, А. К. Костюченко. Разложение по собственным функциям дифференциальных и других операторов, ДАН СССР, 103, № 3, 1955.
5. Ю. М. Березанский. О разложении по собственным функциям общих самосопряженных дифференциальных операторов, ДАН СССР, 108, № 3, 1956.

6. Р. А. Александриян, Р. Э. Мкртчян. О построении полной системы собственных функционалов произвольного самосопряженного оператора и об исследовании их структуры, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», III, №№ 4—5, 1968.
7. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамопряженных операторов, Наука, М., 1965.
8. Р. А. Александриян, Р. Э. Мкртчян. Об одном критерии полноты системы собственных элементов произвольного самосопряженного оператора с однократным спектром, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», X, № 6, 1975.
9. Р. А. Александриян, Р. Э. Мкртчян. О ядре спектра самосопряженного оператора с простым спектром, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», V, № 2, 1970.
10. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, «Наука», М., 1974, 251—254.

УДК 517.518.4

Ф. Г. АРУТЮНЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ L_p , $0 \leq p < 1$,
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ С БЫСТРО
УБЫВАЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. В в е д е н и е

Пусть G — единичная окружность комплексной плоскости, μ — нормированная мера Лебега на G . Хорошо известно (см. [1]) следующая

Теорема А (Д. Е. Меньшов). Для любой почти всюду конечной на G измеримой, действительной функции $f(z)$ существует тригонометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(d_n z^n), \quad z \in G, \quad (1.1)$$

который сходится к $f(z)$ почти всюду.

В работе [2] А. А. Талаалья было получено некоторое усиление этой теоремы, которое формулируется следующим образом.

Теорема Б. Существует ряд (1.1), обладающий тем свойством, что для любой почти всюду конечной на G измеримой действительной функции $f(z)$ можно указать последовательность $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$ (j_n принимает значения 0 или 1) такую, что $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(j_n d_n z^n) = f(z)$ почти всюду на G .

В литературе ряды (1.1), обладающие свойством теоремы Б, называют универсальными относительно подрядов. В нашей работе [3] доказано, что для представления измеримых функций вместо всей тригонометрической системы можно рассмотреть довольно редкую подсистему (степени функций из этой подсистемы могут иметь нулевую плотность). А именно, пусть $N_k \leq M_k < N_{k+1}$, $k \geq 1$, $M_k - N_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, $I = \{j : N_k \leq j \leq M_k, k \geq 1\}$.

Тогда существует ряд $\sum_{n \in I} d_n z^n$, который является универсальным (в указанном выше смысле). Заметим, что в теореме Д. Е. Меньшова (или в других теоремах представления) ряд $\sum_n |d_n|^2$, вообще говоря, обязан быть расходящимся (кроме тех случаев, когда ряд (1.1) является разложением функции из класса $L^2(G)$). Однако (как это видно из доказательств) в теоремах представления можно обеспечить сходимость ряда $\sum_n |d_n|^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

В [4], стр. 20, П. Л. Ульяновым был поставлен вопрос: пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ — убывающая последовательность положительных чисел,

$\sum_n |a_n| = +\infty$. Существует ли тригонометрический нуль-ряд с коэффициентами d_n , $|d_n|^2 \leq a_n$, $n > 0$. Положительный ответ на этот вопрос был дан в работе [5], где (без доказательства) утверждается, что существует универсальный ряд (1.1) с коэффициентами d_n , $|d_n|^2 \leq a_n$, $n \geq 0$.

Для формулировки результатов настоящей статьи напомним обозначения. Если $p > 0$, то $L^p(G)$ обозначает класс измеримых функций f , для которых $\int_G |f|^p d\mu < +\infty$. Норма в $L^p(G)$ при $p \geq 1$ определяется формулой $\|f\|_{L^p(G)} = \left(\int_G |f|^p d\mu \right)^{1/p}$. При $0 < p < 1$ обозначаем

$$\|f\|_{L^p(G)} = \left(\int_G |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \text{При } 0 < p < 1 \text{ обозначаем}$$

$$\|f\|_{L^p(G)} = \int_G |f|^p d\mu, \quad \text{при } p = 0 \quad \|f\|_{L^p(G)} = \int_G |f| (1 + |f|)^{-1} d\mu.$$

Пусть действительная функция $f \in L^p(G)$, $0 \leq p < 1$. Спрашивается, можно ли в теоремах представления вместе со сходимостью почти всюду обеспечить также сходимость по $L^p(G)$? Как ведет себя сопряженный ряд (можно ли обеспечить сходимость сопряженного ряда по $L^p(i)$)? В настоящей работе доказываются теоремы, которые дают положительный ответ на поставленные вопросы и, вместе с тем, объединяют все вышеуказанные результаты.

Пусть $Q(z) = \sum_n c_n z^n$ — конечный или бесконечный тригонометрический ряд. Обозначим

$$Q^*(z) = \sup_m \left| \sum_{n \leq m} c_n z^n \right|.$$

Справедлива

Теорема 1. Пусть $0 < p < 1$, $\{a_n\}_{n \in I}$ — убывающая последовательность положительных чисел $\sum_{n \in I} a_n = +\infty$. Существует тригонометрический ряд

$$\sum_{n \in I} d_n z^n, \quad |d_n|^2 \leq a_n, \quad n \in I, \quad (1.2)$$

обладающий свойством: для любой действительной функции $f \in L^p(G)$ можно указать подряд

$$\mathcal{Q}_f(z) = \sum_{n \in I} \lambda_n d_n z^n$$

(λ_n — принимает значение 0 или 1), который удовлетворяет условиям

- 1) ряд $\mathcal{Q}_f(z)$ сходится почти всюду на G ,
- 2) $\|\mathcal{Q}_f^*\|_{L^p(G)} \leq \Gamma_p \|f\|_{L^p(G)}$, Γ_p зависит от p ,
- 3) $\operatorname{Re} \mathcal{Q}_f(z) = f(z)$ почти всюду на G .

Заметим, что (как это следует из условия 2)) при $|z| < 1$, $\mathcal{Q}_f(z)$ является функцией из класса H^p .

Теорема 2. Для любой почти всюду конечной на G измеримой действительной функции $f(z)$ существует ряд (1.3) такой, что

$\operatorname{Re} \Omega_f(z) = f(z)$ почти всюду на G ,

$$\|\Omega_f\|_{L^1(G)} \leq \Gamma_0 \int_G |f| \ln(1 + |f|^{-1}) d\mu, \quad \Gamma_0 - \text{постоянная.}$$

В статье не дается полного доказательства теоремы 2, а лишь указывается (в процессе) такое свойство (замечание 3.2) ряда (1.2), в силу которого доказательство приводится к повторению известных рассуждений других работ (например, работы [2]).

В статье широко используется метод, разработанный в нашей работе [6].

Полученные результаты были сообщены на Международной конференции по теории приближения функций (см. [7], стр. 9).

§ 2. Обозначения и вспомогательные леммы

Справедлива

Лемма 2.1. Пусть $\{a_n\}$ — убывающая последовательность положительных чисел, $\sum_{n \in I} a_n = +\infty$, тогда для любого натурального числа s

$$\sum_{sk \in I} a_{sk} = +\infty.$$

Доказательство. Пусть $m_j = sk$ — наименьшее натуральное число, большее или равное N_j . Из условия $M_j - N_j \rightarrow +\infty$ следует, что начиная с некоторого j_0 , $M_j - m_j > s$, $j > j_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{sk \in I} a_{sk} &= \sum_{j > 1} \sum_{N_j < sk < M_j} a_{sk} > \\ &\geq \sum_{j > j_0} \sum_{N_j < sk < M_j} a_{sk} > s^{-1} \sum_{j > j_0} \sum_{n_j < k < M_j} a_k > \\ &\geq (2s)^{-1} \sum_{j > j_0} \left(\sum_{m_j < k < M_j} a_k + \sum_{N_{j+1} < k < m_j} a_k \right) \geq \\ &\geq (2s)^{-1} \sum_{j > j_0} \sum_{N_j < k < M_j} a_k = +\infty. \end{aligned}$$

Лемма 2.2. Пусть $\{a_k\}$ — убывающая последовательность положительных чисел $\sum_{n \in I} a_n = +\infty$, тогда для любого целого числа s

$$\sum_{n \in I_s} a_n = +\infty,$$

где $I_s = \{k : N_j + s \leq k \leq M_j, j \geq 1\}$.

Доказательство. При $s=0$ множество I_s совпадает с множеством I и утверждение леммы тривиально. Если же $s > 0$, то лемма 2.2 следует из 2.1 и из следующего легко проверяемого неравенства

$$\sum_{n \in I_s} a_n \geq \sum_{2sk \in I} a_{2sk}.$$

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Пусть $1 < \nu' < \nu < +\infty$. Существуют константы γ и Γ (зависящие только от ν и ν') такие, что если $\{a_n\}$ — убывающая последовательность положительных чисел $\sum_{n \in I} a_n = +\infty$, то для любых натуральных чисел N и s существует полином

$$T(z) = \sum_{N < sk < M, sk \in I} a_{sk} z^{sk}$$

такой, что

$$1) |a_{sk}|^2 \leq a_{sk}, N \leq sk \leq M, sk \in I,$$

$$2) \sum_{N < sk < M, sk \in I} |a_{sk}|^2 = 1,$$

$$3) \|T^*\|_{L^{\nu'}(G)} \leq \Gamma, \|T\|_{L^{\nu}(G)} \geq \gamma.$$

Доказательство. Согласно лемме 2.1

$$\sum_{sk > N, sk \in I} a_{sk} = +\infty.$$

Следовательно, существует конечная последовательность действительных чисел $\{\beta_{sk}\}$, $N \leq sk \leq M$, $sk \in I$ такая, что

$$0 < \beta_{sk}^2 \leq a_{sk} \text{ и } \sum_{N < sk < M, sk \in I} \beta_{sk}^2 = 1.$$

Пусть $\{r_k(t)\}_{k>1}$ — функции Радемахера. Обозначим

$$T(z, t) = \sum_{N < sk < M, sk \in I} \beta_{sk} r_{sk}(t) z^{sk}.$$

Согласно неравенству Хинчина (см. [8]) для любого $q \geq 1$ существуют константы γ_q и Γ_q такие, что для любого $z \in G$

$$\gamma_q \leq \|T(z, \cdot)\|_{L^q([0, 1])} \leq \|T^*(z, \cdot)\|_{L^q([0, 1])} \leq \Gamma_q.$$

Следовательно

$$\gamma_q^q \leq \int_0^1 d\mu \int_0^1 |T(z, t)|^q dt \leq \int_0^1 d\mu \int_0^1 |T^*(z, t)|^q dt \leq \Gamma_q^q. \quad (2.1)$$

Пусть $\sigma > 0$. Обозначим

$$T_q(t) = \|T(\cdot, t)\|_{L^q(G)}, T_q^*(t) = \|T^*(\cdot, t)\|_{L^q(G)}, \\ E_q(\sigma) = \{t : T_q(t) > \sigma\}, E_q^*(\sigma) = \{t : T_q^*(t) > \sigma\}. \quad (2.2)$$

Меняя порядок интегрирования в неравенстве (2.1) получим

$$\gamma_q \leq \|T_q\|_{L^q([0, 1])} \leq \|T_q^*\|_{L^q([0, 1])} \leq \Gamma_q, q \geq 1. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует

$$\mu(E_q^*(\sigma)) \leq \sigma^{-q} \|T_q^*\|_{L^q([0, 1])}^q \leq \sigma^{-q} \|T_q\|_{L^q([0, 1])}^q \leq (\sigma^{-1} \Gamma_q)^q. \quad (2.4)$$

При $\sigma = 2^{-1} \gamma_{\nu'}$ будем иметь

$$\Gamma_{\nu'} \geq \|T_{\nu'}\|_{L^{\nu'}([0, 1])} \geq \|T_{\nu'}^*\|_{L^{\nu'}([0, 1])} \geq \|T_{\nu'}\|_{L^{\nu'}([0, 1])} \geq \|T_{\nu'}\|_{L^{\nu'}(E_{\nu'}(\sigma))} \geq \\ \geq \|T_{\nu'}\|_{L^{\nu'}(E_{\nu'}(\sigma))} |\mu(E_{\nu'}(\sigma))|^{\frac{\nu' - \nu}{\nu \nu'}} =$$

$$= (\|T_{\gamma'}\|_{L^{\gamma'}([0,1])} - \|T_{\gamma'}\|_{L^{\gamma'}([0,1] \setminus E_{\gamma'}(\sigma))}) |\mu(E_{\gamma'}(\sigma))| \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma\gamma'} \geq 2^{-1} \gamma' \times \\ \times |\mu(E_{\gamma'}(\sigma))| \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma\gamma'},$$

откуда следует, что

$$\mu(E_{\gamma'}(2^{-1}\gamma')) \geq (\gamma' 2^{-1}\gamma') \frac{\gamma\gamma'}{\gamma' - \gamma} = d > 0. \quad (2.5)$$

Взяв в неравенстве (2.4) число σ достаточно большим, будет иметь место $\mu(E_{\gamma'}(\sigma)) < d$. Следовательно, множества $E_{\gamma'}(2^{-1}\gamma')$ и $[0,1] \setminus E_{\gamma'}(\sigma)$ будут иметь непустое пересечение. Если t_0 — общая точка этих множеств, то

$$T_{\gamma'}(t_0) > 2^{-1}\gamma' \text{ и } T_{\gamma'}(t_0) < \sigma.$$

Полагая $\gamma = 2^{-1}\gamma'$, $\Gamma = \sigma$, $\alpha_{sk} = \beta_{sk} r_{sk}(t_0)$,

$$T(z) = T(z, t_0) = \sum_{N \leq sk \leq M, sk \in I} \alpha_{sk} z^{sk},$$

завершив доказательство леммы 2.3.

Лемма 2.4. Для любого $\delta > 0$ и Δ (Δ — интервал из G с центром z_0) существует полином $Q(z) = \sum_{-s \leq n \leq 0} b_n z^n$ такой, что

$$1) \sum_{-s \leq n \leq 0} |b_n| \leq 1,$$

$$2) |Q(z)| > 2^{-2}, z \in \Delta', \text{ где } \Delta' \text{ — интервал с центром } z_0, \text{ а } \mu(\Delta') = 2^{-1} \mu(\Delta),$$

$$3) |Q(z)| < \delta \text{ при } z \in G \setminus \Delta.$$

Доказательство. Пусть h — интервал на G с центром 1

$$\Theta_h(z) = \max \{0, 1 - \pi^{-1} |t| |\mu(h)|^{-1}\},$$

$$\bar{z}_0 \cdot \Delta = \{z \cdot \bar{z}_0, z \in \Delta\}, \Theta_{\Delta}(z) = \Theta_{\bar{z}_0 \cdot \Delta}(z \cdot \bar{z}_0).$$

Ясно, что $\Theta_{\Delta}(z) = 0$ при $z \in G \setminus \Delta$ и

$$\sum_n |\hat{\Theta}_{\Delta}(n)| = \sum_n |\hat{\Theta}_{\Delta}(n) z_0^n| = \Theta_{\bar{z}_0 \cdot \Delta}(1) = 1 \quad (2.6)$$

($\hat{\Theta}_{\Delta}(n)$ — коэффициенты Фурье функции $\Theta_{\Delta}(z)$).

Пусть для некоторого m

$$\left\| \sum_{-m \leq n \leq m} \hat{\Theta}_{\Delta}(n) z^n - \Theta_{\Delta} \right\|_{\infty} < \min \{\delta, 2^{-2}\}.$$

Положим $s = 2m + 1, b_n = \hat{\Theta}_{\Delta}(n + m)$, $-s \leq n \leq 0$ и $Q(z) = \sum_{-s \leq n \leq 0} b_n z^n$. Условие 1) следует из (2.6). Проверим справедливость 2) и 3). Они вытекают из следующих двух неравенств. При $z \in \Delta'$

$$\begin{aligned}
 |Q(z)| &= \left| \sum_{-s < n < 0} b_n z^n \right| = \left| \sum_{-m < n < m} \hat{\theta}_\Delta(n) z^{n+m} \right| = \\
 &= \left| \sum_{-m < n < m} \hat{\theta}_\Delta(n) z^n \right| \geq \left| \sum_{-m < n < m} \hat{\theta}_\Delta(n) z^n \right| > \\
 &\geq |\theta_\Delta(z)| - \left| \sum_{-m < n < m} \hat{\theta}_\Delta(n) z^n - \theta_\Delta(z) \right| > 2^{-2},
 \end{aligned}$$

при $z \in G \setminus \Delta$

$$\begin{aligned}
 |Q(z)| &= \left| \sum_{-m < n < m} \hat{\theta}_\Delta(n) z^n \right| \leq \\
 &\leq \left| \sum_{-m < n < m} \hat{\theta}_\Delta(n) z^n - \theta_\Delta(z) \right| + |\theta_\Delta(z)| < \delta.
 \end{aligned}$$

Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. Пусть $1 \leq \nu' < \nu < +\infty$. Существуют постоянные $\gamma_{\nu, \nu'}$ и $\Gamma_{\nu, \nu'}$ такие, что для любой убывающей последовательности положительных чисел $\{a_n\}$, $\sum_{n \in I} a_n = +\infty$, для любого $\varepsilon > 0$,

натурального числа N и интервала $\Delta \subseteq G$ существует полином

$$P(z) = \sum_{N < j < M, j \in I} c_j z^j, \quad |c_j|^2 \leq a_j, \quad N \leq j \leq M,$$

$j \in I$, который удовлетворяет условиям

$$1) \|P\|_{L^{\nu'}(\Delta)} \geq \gamma_{\nu, \nu'} |\mu(\Delta)|^{1/\nu'},$$

$$2) \|P^*\|_{L^{\nu}(\Delta)} \leq \Gamma_{\nu, \nu'} |\mu(\Delta)|^{1/\nu},$$

$$3) \|P^*\|_{L^{\nu}(G \setminus \Delta)} < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть полином

$$Q(z) = \sum_{-s < n < 0} b_n z^n$$

удовлетворяет условиям леммы 2.4. Применяя леммы 2.2 и 2.3 мы построим полином

$$T(z) = \sum_{N+s < sk < M, sk \in I_s} a_{sk} z^{sk},$$

который удовлетворяет условиям 2.3, где вместо N берется число $N+s-1$, а вместо I берется I_s . Полагая $P(z) = Q(z) \cdot T(z)$ будем иметь

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \sum_{N+s < ks < M, ks \in I_s} Q(z) a_{sk} z^{sk} = \\
 &= \sum_{N+s < ks < M, ks \in I_s} \sum_{-s < n < 0} b_n a_{sk} z^{n+sk}.
 \end{aligned}$$

Пусть $N+s < sk \leq M$, $sk \in I_s$ и $-s < n \leq 0$, тогда $j = sk + n \in I$ и $N \leq j \leq M$. Положим $c_j = b_n a_{sk}$. Тогда

$$P(z) = \sum_{N+s < ks < M, ks \in I_s} \sum_{s(k-1) < j < sk} c_j z^j.$$

Имеем

$$|c_j|^2 = |b_n a_{sk}|^2 \leq |z_{sk}|^2 \leq a_{sk} \leq a_j. \quad (2.7)$$

Убедимся в справедливости условий 1)–3) леммы 2.5.

Условие 1). Рассмотрим интервалы

$$\Delta_{s,m} = \{z : 2\pi s^{-1}(m-1) \leq \arg z \leq 2\pi s^{-1}m\}, \quad 1 \leq m \leq s.$$

Пусть $\Delta_{s,j}$, $j_1 \leq j \leq j_2$ — все те интервалы, которые лежат в Δ' (см. условие 2) леммы 2.4).

Взяв $s > 2^{-2} |\mu(\Delta)|^{-1}$, будем иметь

$$s^{-1}(j_2 - j_1 + 1) = \sum_{j_1 < j < j_2} \mu(\Delta_{s,j}) \geq 2^{-1} \mu(\Delta').$$

Отсюда, из второй части условия 3) леммы 2.3 и из условия 2) леммы 2.4 имеем

$$\begin{aligned} \|P\|_{L^{v'}(\Delta)}^{v'} &\geq \sum_{j_1 < j < j_2} \|P\|_{L^{v'}(\Delta_{s,j})}^{v'} = \\ &= \sum_{j_1 < j < j_2} \|QT\|_{L^{v'}(\Delta_{s,j})}^{v'} \geq 2^{-2p} \sum_{j_1 < j < j_2} \|T\|_{L^{v'}(\Delta_{s,j})}^{v'} = \\ &= 2^{-2v'}(j_2 - j_1 + 1) \|T\|_{L^{v'}(\Delta_{s,1})}^{v'} = 2^{-2v'}(j_2 - j_1 + 1) \times \\ &\times s^{-1} \|T\|_{L^{v'}(\Delta)}^{v'} \geq 2^{-v'} s^{-1}(j_2 - j_1 + 1) \gamma^{v'} \geq \\ &\geq 2^{-2v'-1} \gamma \mu(\Delta') = 2^{-2v'-2} \gamma \mu(\Delta) = \gamma_{v,v}^{v'} \mu(\Delta). \end{aligned}$$

Условие 1) доказано.

Условие 2). Пусть $\Delta_{s,j}$, $j_3 \leq j \leq j_4$ — все интервалы, которые имеют непустое пересечение с Δ . Тогда

$$(j_4 - j_3 + 1) s^{-1} = \sum_{j_3 < j < j_4} \mu(\Delta_{s,j}) \leq 3 \mu(\Delta).$$

Отсюда, из первой части условия 3) леммы 2.3 и условие 1) леммы 2.4 следует

$$\begin{aligned} \|P^*\|_{L^v(\Delta)}^v &\leq \|Q^* T^*\|_{L^v(\Delta)}^v \leq \|T^*\|_{L^v(\Delta)}^v \leq \\ &\leq \sum_{j_3 < j < j_4} \|T^*\|_{L^v(\Delta)}^v = (j_4 - j_3 + 1) \|T^*\|_{L^v(\Delta_{s,1})}^v = \\ &= (j_4 - j_3 + 1) s^{-1} \|T^*\|_{L^v(\Delta)}^v \leq \\ &\leq (j_4 - j_3 + 1) s^{-1} \Gamma \leq 3 \Gamma \mu(\Delta) = \Gamma_{v,v} \mu(\Delta). \end{aligned}$$

Условие 2) доказано.

Условие 3). При $z \in [0,1] \setminus \Delta$ частичные суммы полинома $P(z)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\sum_{N+s < sk \leq sm < M, sk \in I_s} a_{sk} z^{sk} Q(z) + \\ &+ a_{sm} \sum_{j < n < 0} b_n z^n, \quad sm \in I_s, \quad -s < j \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно

$$P^*(z) \leq \delta T^*(z) + |a_{s,m}| \leq \delta T^*(z) + a_N^{1/2},$$

откуда

$$\|P^*\|_{L^{\nu'}(G \setminus \Delta)} \leq \delta \Gamma + a_N^{1/2}.$$

Заметим, что число Γ зависит только от ν и ν' , следовательно, взяв число δ достаточно малым $\delta \Gamma$ будет меньше, чем $2^{-1}\varepsilon$. С другой стороны, если бы с самого начала рассмотрели вместо последовательности $\{a_n\}$, $n \in I$ другую меньшую последовательность, с условием $a_N < 2^{-2}\varepsilon^2$, то получили бы $\|P^*\|_{L^{\nu'}(G \setminus \Delta)} < \varepsilon$ и этим обеспечили бы выполнение условия 3).

Справедливость условий 1)–3) вместе с соотношением (2.7) завершает доказательство леммы 2.5.

Из леммы 2.5 легко следует

Лемма 2.6. Пусть $1 \leq \nu' < \nu < +\infty$. Существуют константы γ_1 и Γ_1 (зависящие только от ν и ν') такие, что для любой последовательности a_n , $\sum_{n \in I} a_n = +\infty$ и для любого $\delta > 0$, натурального числа N и интервала $\Delta \subseteq G$ существует полином

$$P(z) = \sum_{N < j < M, j \in I} c_j z^j, \quad |c_j|^2 \leq a_j, \quad N \leq j \leq M, \quad j \in I$$

и ступенчатая функция $\Psi(z)$, с нулевым интегралом, которые обладают свойствами

$$1) \quad \|P^*\|_{L^{\nu'}(\Delta)} \leq \Gamma_1 |\mu(\Delta)|^{1/\nu}, \quad \|\Psi\|_{L^{\nu'}(\Delta)} \leq \gamma_1 |\mu(\Delta)|^{1/\nu'},$$

$$2) \quad \|P^*\|_{L^{\nu'}(G \setminus \Delta)} < \delta,$$

$$3) \quad \|P - \Psi\|_{L^{\nu'}(G)} < \delta,$$

$$4) \quad \Psi(z) = 0 \text{ при } z \in G,$$

$$5) \quad \|\Psi\|_{L^{\nu'}(\Delta)} \geq \gamma_1 |\mu(\Delta)|^{1/\nu'}.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $2 = \nu' < \nu < +\infty$. Пусть $\sigma_k > 0$ и $\sum_{k \geq 1} \sigma_k = +\infty$. Построим последовательность полиномов

$$T_k(z) = \sum_{s_{k-1} < n < s_k, n \in I} d_n z^n, \quad (2.8)$$

$$s_0 = 0, \quad k \geq 1, \quad |d_n|^2 \leq a_n, \quad n \in I$$

и ступенчатых функций $\chi_k(z)$, $k \geq 1$ следующим образом: пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_{n_1}$ — произвольное разбиение G на интервалы. Для любого k , $1 \leq k \leq n_1$ построим полином $P_k(z)$ и ступенчатую функцию $\Psi_k(z)$, которые удовлетворяют условиям леммы (2.6), где вместо N , Δ и δ берутся s_{k-1} , Δ_k и $\delta_k = \min \{\sigma_k, 6^{-1} \gamma_1 |\mu(\Delta_k)|^{1/2}\}$, соответственно. Функции $\{\Psi_k\}_{k=1}^{n_1}$ дают новое Δ_k ($n_1 < k \leq n_2$) — разбиение G , на каждом из которых функции Ψ_j , $1 \leq j \leq n_1$ постоянны, и каждая из них лежит в одном из Δ предыдущей группы. Для вновь полученных Δ_k поступим аналогично. И так далее. Заметим, что при построении мы можем следить за тем, чтобы $\mu(\Delta_n) \rightarrow 0$. Учитывая, что $\|P_k\|_{L^2(G)} = 2^{1/2} \|\operatorname{Re} P_k\|_{L^2(G)}$, можем оценить

$$\begin{aligned}
\|\Psi_k\|_{L^1(\Delta_k)} &= \|\Psi_k\|_{L^1(O)} \leq \|P_k\|_{L^1(O)} + \delta_k = \\
&= 2^{1/2} \|\operatorname{Re} P_k\|_{L^1(O)} + \delta_k \leq 2^{1/2} \|\operatorname{Re} \Psi_k\|_{L^1(O)} + 3\delta_k \leq \\
&\leq 2^{1/2} \|\operatorname{Re} \Psi_k\|_{L^1(\Delta_k)} + 2^{-1} \gamma_1 |\mu(\Delta_k)|^{1/2} \leq \\
&\leq 2^{1/2} \|\operatorname{Re} \Psi_k\|_{L^1(\Delta_k)} + 2^{-1} \|\Psi_k\|_{L^1(\Delta_k)}.
\end{aligned}$$

Следовательно, полагая $T_k(z) = j^{-\frac{1}{2}} P_k(z)$ и $\chi_k(z) = j^{-\frac{1}{2}} \Psi_k(z)$ при $n_{j-1} < k \leq n_j$, $j \geq 1$, будем иметь:

Замечание 2.1. Действительные и мнимые части $\chi_k(z)$, $k \geq 1$ образуют ортогональную систему функций с нулевыми интегралами и

$$\|\chi_k\|_{L^1(\Delta_k)} \leq \gamma_2 \|\operatorname{Re} \chi_k\|_{L^1(\Delta_k)}.$$

Отсюда следует

$$|\mu(\Delta_k)|^{-1} \|\operatorname{Re} \chi_k\|_{L^1(\Delta_k)}^2 \geq \gamma_2^{-2} |\mu(\Delta_k)|^{-1} \|\chi_k\|_{L^1(\Delta_k)}^2 \geq \gamma_1^2 \gamma_2^2 j^{-1} = \gamma_3 j^{-1}. \quad (2.9)$$

Обозначим

$$E_{\Delta_k}(|\operatorname{Re} \chi_k|^2, z) = |\mu(\Delta_k)|^{-1} \|\operatorname{Re} \chi_k\|_{L^1(\Delta_k)}^2$$

при $z \in \Delta_k$ и $E_{\Delta_k}(|\operatorname{Re} \chi_k|^2, z) = 0$ в остальных точках G . В силу (2.9) имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1} E_{\Delta_k}(|\operatorname{Re} \chi_k|^2, z) &= \\
&= \sum_{j \geq 1} \sum_{n_{j-1} < k \leq n_j} E_{\Delta_k}(|\operatorname{Re} \chi_k|^2, z) \geq \\
&\geq \sum_{j \geq 1} \gamma_3 j^{-1} = +\infty \text{ при } z \in G.
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1} \|\chi_k\|_{L^1(O)}^2 &= \sum_{j \geq 1} \sum_{n_{j-1} < k \leq n_j} \|\chi_k\|_{L^1(\Delta_k)}^2 \leq \\
&\leq \sum_{j \geq 1} \sum_{n_{j-1} < k \leq n_j} j^{-\gamma} \Gamma_1^{-\gamma} \mu(\Delta_k) = \Gamma_1^{-\gamma} \sum_{j \geq 1} j^{-\gamma} < +\infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, справедливо

Замечание 2.2

$$\left(\sum_{k \geq 1} |\chi_k|^{\gamma} \right)^{1/\gamma} \in L^{\gamma}(G).$$

Из замечаний 2.1, 2.2 и из (2.10) следует

Замечание 2.3. Система функций $|\operatorname{Re} \chi_k(z)|$, $k \geq 1$ является центрированной (определение центрированной системы см. [9], стр. 207) и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \leq n} \operatorname{Re} \chi_k(z) = +\infty \text{ почти всюду на } G$$

(см. [9], предложение IV.6.2 и IV.6.3).

Пусть $n_{j-1} < k \leq n_j$, $j \geq 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|T_k\|_{L^1(O)}^{\gamma} &= j^{-\frac{\gamma}{2}} (\|P_k\|_{L^1(\Delta_k)}^{\gamma} + \|P_k\|_{L^1(O \setminus \Delta_k)}^{\gamma}) \leq j^{-\frac{\gamma}{2}} \Gamma_1^{\gamma} \mu(\Delta_k) + \\
&+ \delta_k^{\gamma} \leq j^{\gamma/2} (\Gamma_1^{\gamma} \mu(\Delta_k) + 6^{-\gamma} \Gamma_1^{\gamma} \mu(\Delta_k)) = j^{\gamma/2} \Gamma_2^{\gamma} \mu(\Delta_k).
\end{aligned}$$

Из (2.11) следует

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} |T_{k, L^v}^*(G)| &= \sum_{j \geq 1} \sum_{n_{j-1} < k \leq n_j} |T_{k, L^v}^*(G)| = \\ &= \sum_{j \geq 1} \sum_{n_{j-1} < k \leq n_j} j^{-\frac{v}{2}} \Gamma_2^v \mu(\Delta_k) = \Gamma_2^v \sum_{j \geq 1} j^{-\frac{v}{2}} < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливы

Замечание 2.4

$$(\sum_{k \geq 1} |T_k^*(z)|^v)^{1/v} \in L^v(G).$$

Замечание 2.5

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k - \gamma_k\|_{L^v(G)} < +\infty.$$

Замечание 2.6. Существует (см. [10]) постоянная Γ_3 (зависящая от v) такая, что для любой последовательности $\{b_n\}_{n \geq 1}$

$$\|\sup_{j \geq 1} |\sum_{n \leq j} b_n \gamma_n|\|_{L^v(G)} \leq \Gamma_3 \|\sum_{n \geq 1} b_n \gamma_n\|_{L^v(G)}.$$

В дальнейшем символы d_k , T_k и γ_k останутся неизменными.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Через G^* обозначим систему множеств G , каждое из которых является объединением конечного числа интервалов. Пусть e_1 и e_2 — множества из G^* равной меры, $e_1 \cap e_2 = \emptyset$. Обозначим

$$r_{e_1, e_2}(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \in e_1 \\ -1 & \text{при } z \in e_2 \\ 0 & \text{при } z \in G \setminus (e_1 \cup e_2). \end{cases} \quad (3.1)$$

Справедлива

Лемма 3.1. Пусть заданы $e \in G^*$, $\sigma > 0$, действительное число ψ и натуральное число n . Тогда существуют разбиение множества $e = e^+ \cup e^-$ и функция

$$\Psi_e(z) = \sum_{n < k \leq m} \eta_k \gamma_k(z)$$

($\eta_k = 0$ или 1, $n < k \leq m$), которые удовлетворяют условиям

$$1) \|\operatorname{Re} \Psi_e - \psi r_{e^+, e^-}\|_{L^v(G)} < \sigma,$$

$$2) \|(\operatorname{Re} \Psi_e)^*\|_{L^v(G)} \leq 2 \|\psi\| \mu(e)^{1/v},$$

$$(\operatorname{Re} \Psi_e(z))^* = \sup_{n < j \leq m} \left| \sum_{n < k \leq j} \operatorname{Re}(\eta_k \gamma_k(z)) \right|,$$

3) $\eta_k \gamma_k(z) = 0$ при $z \in G \setminus e$, $n < k \leq m$ (напомним, что $v > 2$ — заранее фиксированное число).

Доказательство. Если $\psi = 0$, то достаточно взять $\eta_k = 0$, $n < k \leq m$. Предположим $\psi \neq 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$) выберем позже). $l > m$ такое, что при $k \geq l$ либо $\Delta_k \subseteq e$, либо $\Delta_k \subseteq G \setminus e$ и

$$\|\sup_k |\lambda_k| \|_{L^p(G)} < \varepsilon \quad (\text{см. замечание 2.2}). \quad (3.2)$$

Рассмотрим ряд $\sum_{k \geq l} \alpha_k \lambda_k(z)$, где $\alpha_k = 0$, если Δ_k лежит в $G \setminus e$ и $\alpha_k = 1$, если $\Delta_k \subseteq e$. Из замечания 2.3 следует

$$\sup_{j > l, k \leq j} |\operatorname{Re}(\alpha_k \lambda_k(z))| = +\infty \text{ почти всюду на } e. \quad (3.3)$$

Через $j(z)$ обозначим наименьшее число j , $j > l$, при котором

$$|\sum_{l < k \leq j(z)} \operatorname{Re}(\alpha_k \lambda_k(z))| \geq |\psi|.$$

В силу (3.3) $j(z)$ — почти всюду конечная функция на e . Поэтому для некоторого натурального числа m $\mu(e_1) < \varepsilon$, где

$$e_1 = \{z : z \in e, j(z) > m\}.$$

Положим $\tau(z) = j(z)$ при $z \in e \setminus e_1$ и $\tau(z) = m$ — в остальных точках G . Определим β_k , $l \leq k \leq m$, полагая $\beta_k = 1$ всегда, кроме тех случаев, когда $\Delta_k \subseteq e$ и в некоторой точке $z \in \Delta_k$ $j(z) < k$. В этом случае берем $\beta_k = 0$.

Рассмотрим функцию

$$\Psi_e(z) = \sum_{n < k \leq m} \eta_k \lambda_k(z), \text{ где } \eta_k = 0 \text{ при}$$

$n < k < l$ и $\eta_k = \alpha_k \beta_k$ при $l \leq k \leq m$. Докажем, что

$$\left. \begin{aligned} \eta_k \lambda_k(z) &= \alpha_k \lambda_k(z) \text{ при } z \in G, l \leq k \leq \tau(z) \text{ и} \\ \eta_k \lambda_k(z) &= 0 \text{ при } z \in G, \tau(z) < k \leq m. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Вне e утверждение очевидно. Пусть $z_0 \in e$.

Предположим $\eta_k \lambda_k(z_0) \neq \alpha_k \lambda_k(z_0)$, тогда $z_0 \in \Delta_k$, $\beta_k = 0$ и $\alpha_k \lambda_k(z_0) \neq 0$. Следовательно, для некоторого $z_1 \in \Delta_k$ $j(z_1) < k$. Так как все функции $\lambda_j(z)$, $l \leq j \leq j(z)$ постоянны на Δ_k , то $j(z_1) = j(z) = \tau(z)$ всюду на Δ_k и, в частности, $k > \tau(z_0)$.

Пусть теперь $k > \tau(z_0) = j(z_0)$. Если $z_0 \notin \Delta_k$, то $\eta_k \lambda_k(z_0) = 0$. Если же $z_0 \in \Delta_k$, то по определению $\beta_k = 0$ и, следовательно, $\eta_k \lambda_k(z_0) = 0$, и, тем самым, утверждение (3.4) доказано.

Из (3.4) следует

$$\begin{aligned} \Psi_e(z) &= \sum_{l < k \leq \tau(z)} \alpha_k \lambda_k(z), \quad z \in G, \\ (\operatorname{Re} \Psi_e(z))^* &\leq |\sum_{l < k \leq \tau(z)} \operatorname{Re}(\alpha_k \lambda_k(z))| + \\ &+ \sup_{k > l} |\lambda_k(z)| \leq |\psi| + \sup_{k > l} |\lambda_k(z)|, \quad z \in e \end{aligned} \quad (3.5)$$

и

$$|\operatorname{Re} \Psi_e(z)| \geq |\psi|, \quad z \in e \setminus e_1.$$

Следовательно, в силу (3.2)

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re} \Psi_e - |\psi|\|_{L^p(e)} &\leq \|\operatorname{Re} \Psi_e - |\psi|\|_{L^p(e \setminus e_1)} + \|\operatorname{Re} \Psi_e - |\psi|\|_{L^p(e_1)} \leq \\ &\leq \|\sup |\lambda_k|\|_{L^p(G)} + 2|\psi|\mu(e)^{1/p} < \varepsilon + 2|\psi|\mu(e_1)^{1/p} < \varepsilon + 2|\psi|\varepsilon^{1/p} \end{aligned} \quad (3.6)$$

и

$$\|(\operatorname{Re} \Psi_e)^*\|_{L^{\nu}(e)} < \|\sup_{k \geq l} |Z_k|\|_{L^{\nu}(e)} + \|\psi\|_{L^{\nu}(e)} < \varepsilon + \|\psi\|_{\mu}(e)^{1/\nu}.$$

Последнее соотношение показывает, что при достаточно малом ε условие 2) леммы 3.1 будет выполнено. Выполнено также условие 3). Нам остается убедиться в справедливости 1). Обозначим через e_1 то множество из e , на котором функции $\operatorname{Re} \Psi_e(z)$ и ψ имеют одинаковый знак и через e_2 — множество из e , на котором $\operatorname{Re} \Psi_e(z)$ и ψ имеют противоположные знаки. Очевидно, e_1 и e_2 принадлежат G^* . Из (3.2), (3.5) и (3.6) имеем

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{\mu}(e_1) + \varepsilon &\geq \int_{e_1} |\psi| d\mu + \|\sup_{k \geq l} |Z_k|\|_{L^{\nu}(e)} \geq \\ &\geq \int_{e_1} |\psi| d\mu + \int_{e_1} \sup_{k \geq l} |Z_k| d\mu \geq \int_{e_1} (\operatorname{Re} \Psi_e)^* d\mu \geq \\ &> \int_{e_1} |\operatorname{Re} \Psi_e| d\mu = 2^{-1} \int_e |\operatorname{Re} \Psi_e| d\mu > \\ &> 2^{-1} \int_e |\psi| d\mu - 2^{-1} \int_e ||\operatorname{Re} \Psi_e| - |\psi|| d\mu \geq \end{aligned}$$

$$> 2^{-1} \|\psi\|_{\mu}(e) - 2^{-1} \|\operatorname{Re} \Psi_e - \psi\|_{L^{\nu}(e)} > 2^{-1} \|\psi\|_{\mu}(e) - \varepsilon - \|\psi\|_{\mu}(e)^{1/\nu}.$$

Следовательно, $\mu(e_1) > 2^{-1} \mu(e) - (2\varepsilon \|\psi\|_{\mu}(e)^{-1} + \varepsilon^{1/\nu})$. Точно так же докажем, что $\mu(e_2) > 2^{-1} \mu(e) - (2\varepsilon \|\psi\|_{\mu}(e)^{-1} + \varepsilon^{1/\nu})$. Мы можем считать, что $\mu(e_1) < 2^{-1} \mu(e)$ и $\mu(e_2) < 2^{-1} \mu(e)$. Пусть $e' = e \setminus (e_1 \cup e_2)$. Очевидно $\mu(e') < 2(2\varepsilon \|\psi\|_{\mu}(e)^{-1} + \varepsilon^{1/\nu})$. Множество e' разобьем на две части e_1' , e_2' (e_1' и e_2' принадлежат G^*) так, чтобы $\mu(e^+) = \mu(e_1) + \mu(e_1') = 2^{-1} \mu(e)$ и $\mu(e^-) = \mu(e_2) + \mu(e_2') = 2^{-1} \mu(e)$, где $e^+ = e_1 \cup e_1'$ и $e^- = e_2 \cup e_2'$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re} \Psi_e - \psi\|_{L^{\nu}(e^+)} &\leq \|\operatorname{Re} \Psi_e - \psi\|_{L^{\nu}(e_1)} + \\ &+ \|\operatorname{Re} \Psi_e\|_{L^{\nu}(e_1')} + \|\psi\|_{L^{\nu}(e_1')} \leq \\ &\leq \|\operatorname{Re} \Psi_e - \psi\|_{L^{\nu}(e_1)} + \|\sup_{k \geq l} |Z_k|\|_{L^{\nu}(e)} + \\ &+ 2 \|\psi\|_{\mu}(e') < 3\varepsilon + 2 \|\psi\|_{\mu}(e)^{1/\nu} + \\ &+ 4 \|\psi\|_{\mu}(e) (2\varepsilon \|\psi\|_{\mu}(e)^{-1} + \varepsilon^{1/\nu}) = 11\varepsilon + 6 \|\psi\|_{\mu}(e)^{1/\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при достаточно малом ε будет

$$\|\operatorname{Re} \Psi_e - \psi\|_{L^{\nu}(e^+)} < 2^{-1} \sigma.$$

Точно так же убеждаемся, что

$$\|\operatorname{Re} \Psi_e + \psi\|_{L^{\nu}(e^-)} < 2^{-1} \sigma.$$

Последние два неравенства показывают справедливость условия 1) леммы 3.1. Тем самым лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. Пусть заданы $e \in G^*$, $\varepsilon > 0$, действительное число ψ и натуральное число l_0 . Тогда существуют разбиение мно-

жества $e = e^- \cup e^+$ и полином $Q_e(z) = \sum_{l_0 < k < l_1, k \in I} \lambda_k d_k z^k$, $\lambda_k = 0$ или 1 , $l_1 < k \leq l_2$ (определение чисел d_k см. (2.8)), которые удовлетворяют условиям:

$$1) \|\operatorname{Re} Q_e - \psi r_{e^+, e^-}\|_{L^v(\sigma)} < \varepsilon,$$

$$2) \|Q_e\|_{L^v(\sigma)} \leq \Gamma_3 |\psi| |\mu(e)|^{1/v}$$

(Γ_3 — постоянная, зависящая от v),

$$3) \|Q_e\|_{L^v(\sigma \setminus e)} < \varepsilon.$$

Доказательство. При $\psi = 0$ берем $Q_e(z) \equiv 0$ и условия леммы 3.2 будут выполнены. Пусть $\psi \neq 0$ и $\sigma > 0$. Выберем число n так, чтобы

$$s_{n-1} > l_0, \sup_{k > n} \|T_k\|_{L^v(\sigma)} < \sigma, \quad (3.7)$$

$\sum_{k > n} \|T_k - \chi_k\|_{L^v(\sigma)} < \sigma$ (см. замечания 2.4 и 2.5). Пусть $\Psi_e(z) = \sum_{n < k < m} \eta_k \chi_k(z)$ (η_k принимает значения 0 или 1) удовлетворяет условиям леммы 3.1.

Обозначим $Q_e(z) = \sum_{n < k < m} \eta_k T_k(z)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re} Q_e - \psi r_{e^+, e^-}\|_{L^v(\sigma)} &\leq \|\operatorname{Re} Q_e - \operatorname{Re} \Psi_e\|_{L^v(\sigma)} + \\ &+ \|\operatorname{Re} \Psi_e - \psi r_{e^+, e^-}\|_{L^v(\sigma)} < \sum_{k > n} \|T_k - \chi_k\|_{L^v(\sigma)} + \sigma < 2\sigma. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.7) и замечания 2.6 следует

$$\begin{aligned} \|Q_e\|_{L^v(\sigma)} &\leq \sup_{n < j < m} \left\| \sum_{n < k < j} \eta_k T_k \right\|_{L^v(\sigma)} + \\ &+ \sup_{k > n} \|T_k\|_{L^v(\sigma)} < \sup_{n < j < m} \sum_{n < k < j} \eta_k \|\chi_k\|_{L^v(\sigma)} + \\ &+ \sum_{k > n} \|T_k - \chi_k\|_{L^v(\sigma)} + \sigma \leq \Gamma_3 \|\Psi_e\|_{L^v(\sigma)} + \\ &+ 2\sigma \leq \Gamma_3 \|Q_e\|_{L^v(\sigma)} + \Gamma_3 \sum_{k > n} \|T_k - \chi_k\|_{L^v(\sigma)} + \\ &+ 2\sigma \leq \Gamma_3 \|Q_e\|_{L^v(\sigma)} + \sigma (\Gamma_3 + 2). \end{aligned}$$

Известно, что существует постоянная Γ_5 (теорема Рисса) такая, что $\|Q_e\|_{L^v(\sigma)} \leq \Gamma_5 \|\operatorname{Re} Q_e\|_{L^v(\sigma)}$, следовательно

$$\begin{aligned} \|Q_e\|_{L^v(\sigma)} &\leq \Gamma_5 \|\operatorname{Re} \Psi_e\|_{L^v(\sigma)} + \Gamma_5 \sum_{k > n} \|T_k - \chi_k\|_{L^v(\sigma)} \\ &\leq \Gamma_5 \|(\operatorname{Re} \Psi_e)^*\|_{L^v(\sigma)} + \Gamma_5 \sigma \leq 2\Gamma_5 |\psi| |\mu(e)|^{1/v} + \Gamma_5 \sigma. \end{aligned}$$

Стало и из предыдущего неравенства вытекает

$$\|Q_e\|_{L^v(\sigma)} \leq 2\Gamma_3 \Gamma_5 |\psi| |\mu(e)|^{1/v} + \sigma (\Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_5 + 2). \quad (3.9)$$

Далее, из (3.7) следует

$$\begin{aligned} \|Q_e\|_{L^v(\sigma \setminus e)} &\leq \sup_{n < k < j} \left\| \sum_{n < k < j} \eta_k T_k \right\|_{L^v(\sigma \setminus e)} + \\ &+ \sup_{k > n} \|T_k\|_{L^v(\sigma)} \leq \sup_{n < j < m} \left\| \sum_{n < k < j} \eta_k \chi_k \right\|_{L^v(\sigma)} + \sum_{k > n} \|T_k - \chi_k\|_{L^v(\sigma)} + \sigma < 2\sigma. \end{aligned}$$

Если примем: $l_1 = s_m$, $\lambda_j = 0$ при $l_0 < j < s_{n-1}$, $\lambda_j = \tau_k$ при $s_{k-1} < j \leq s_k$, $n < k \leq m$, то из (3.8)–(3.10) будет следовать, что при достаточно малом ε будут выполняться условия 1)–3) леммы 3.2. Лемма доказана.

Пусть $0 < p < 1$ и $Q_e(z)$ удовлетворяет условиям леммы 3.2. Имеем

$$\| \operatorname{Re} Q_e - \psi r_{e^+, e} \|_{L^p(G)} < \varepsilon$$

и

$$\begin{aligned} \|Q_e^*\|_{L^p(G)} &\leq \|Q_e^*\|_{L^p(e)} + \|Q_e^*\|_{L^p(G \setminus e)} \leq \\ &\leq \|Q_e^*\|_{L^p(e)} |\mu(e)|^{1-\frac{p}{p_0}} + \|Q_e^*\|_{L^p(G \setminus e)} \times \\ &\times |\mu(G \setminus e)|^{1-\frac{p}{p_0}} < \Gamma_4 |\psi|^p + \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Из полученных неравенств следует

Замечание 3.1. В формулировке леммы 3.2 можно добавить условия

$$4) \quad \| \operatorname{Re} Q_e - \psi r_{e^+, e} \|_{L^p(G)} < \varepsilon,$$

$$5) \quad \|Q_e^*\|_{L^p(G)} \leq \Gamma_4 |\psi| \mu(e).$$

Пусть $L^0(G)$ — класс почти всюду конечных действительных измеримых функций и $f \in L^0(G)$. Обозначим

$$\|f\|_{L^0(G)} = \int_G |f| (1 + |f|)^{-1} d\mu.$$

Из леммы также легко получить

Замечание 3.2. В формулировке леммы 3.2 можно добавить условия

$$6) \quad \int_G | \operatorname{Re} Q_e - \psi r_{e^+, e} | \ln(1 + | \operatorname{Re} Q_e - \psi r_{e^+, e} |^{-1}) d\mu < \varepsilon,$$

$$7) \quad \|Q_e^*\|_{L^0(G)} \leq \Gamma_4 |\psi| \ln(1 + |\psi|^{-1}) \mu(e).$$

Для дальнейшего продолжения доказательства теоремы 1 (теоремы 2) нужны только условия 4) и 5) (соответственно 6) и 7)).

Пусть $e \in G^*$, ψ — действительное число, $\psi_e(z) = \psi$ при $z \in e$ и $\psi_e(z) = 0$ при $z \in G \setminus e$. Справедлива

Лемма 3.3. Пусть заданы $e \in G^*$, p , $0 < p < 1$, $\sigma > 0$, ψ — действительное число, p_0 — натуральное число. Тогда существует полином

$$P_e(z) = \sum_{n_k < k < n_1, k \in I} \lambda_k d_k z^k$$

(λ_k принимает значения 0 или 1), который удовлетворяет условиям

$$1) \quad \| \operatorname{Re} P_e - \psi_e \|_{L^p(G)} < \sigma,$$

$$2) \quad \|P_e^*\|_{L^p(G)} \leq \Gamma_\sigma \|\psi_e\|_{L^p(G)}$$

(Γ_σ — постоянная, зависящая от p).

Доказательство. При $\psi = 0$ лемма будет справедлива, если взять $P_e(z) \equiv 0$. Пусть $\psi \neq 0$. Обозначим $e_1 = e_0^- = e$.

Построим функции $r_{e_k^+}, e_k^-(z)$ и полиномы

$$Q_{e_k}(z) = \sum_{l_{k-1} < j < l_k, j \in I} \lambda_j d_j z^j, \quad k \geq 1$$

следующим образом. Применяя замечание 3.1 мы построим функцию $r_{e_1^+}, e_1^-(z)$ и полином $Q_{e_1}(z)$, $l_0 = n_0$, которые удовлетворяют условиям 4) и 5) замечания 3.1, где вместо ε берется $2^{-1}\varepsilon$. Предположим построены $r_{e_1^+}, e_1^-(z), \dots, r_{e_{k-1}^+}, e_{k-1}^-(z); Q_{e_1}(z), \dots, Q_{e_{k-1}}(z)$. Положим $e_k = e_{k-1}^-$. Применяя замечание 3.1, построим $r_{e_k^+}, e_k^-(z)$ и $Q_{e_k}(z)$, которые удовлетворяют условиям

$$\|\operatorname{Re} Q_{e_k} - 2^{k-1} \psi r_{e_k^+}, e_k^-\|_{L^p(\sigma)} < 2^{-k} \varepsilon,$$

$$\|Q_{e_k}^*\|_{L^p(\sigma)} \leq \Gamma_4^p |\psi|^p 2^{p(k-1)} \mu(e_k).$$

Пусть s — натуральное число. Обозначим

$$P_e(z) = \sum_{1 \leq k \leq s} Q_{e_k}(z) \text{ и } \psi_s(z) = \sum_{1 \leq k \leq s} 2^{k-1} \psi r_{e_k^+}, e_k^-(z).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|P_e^*\|_{L^p(\sigma)} &\leq \left\| \sum_{1 \leq k \leq s} Q_{e_k}^* \right\|_{L^p(\sigma)} \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq k \leq s} \|Q_{e_k}^*\|_{L^p(\sigma)} \leq \Gamma_4^p |\psi|^p \sum_{1 \leq k \leq s} 2^{p(k-1)} \mu(e_k) \leq \\ &\leq \Gamma_4^p |\psi|^p \sum_{k \geq 1} 2^{p(k-1)} \mu(e_k). \end{aligned}$$

По построению,

$$\mu(e_k) = \mu(e_{k-1}^-) = 2^{-1} \mu(e_{k-1}) = 2^{-2} \mu(e_{k-2}) = \dots = 2^{1-k} \mu(e_1) = 2^{1-k} \mu(e).$$

Поэтому

$$\|P_e^*\|_{L^p(\sigma)} \leq \Gamma_4^p |\psi|^p \mu(e) \sum_{k \geq 1} 2^{(p-1)(k-1)} = \Gamma_6 \|\psi_e\|_{L^p(\sigma)}$$

(Γ_6 — зависит от p).

Условие 2) выполнено. Перейдем к доказательству условия 1).

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re} P_e - \psi_e\|_{L^p(\sigma)} &\leq \|\operatorname{Re} P_e - \psi_s\|_{L^p(\sigma)} + \\ &+ \|\psi_s - \psi_e\|_{L^p(\sigma)} \leq \sum_{1 \leq k \leq s} \|\operatorname{Re} Q_{e_k} - 2^{k-1} \times \\ &\times \psi r_{e_k^+}, e_k^-\|_{L^p(\sigma)} + \|\psi_s - \psi_e\|_{L^p(\sigma)} < \\ &< \varepsilon \sum_{k \geq 1} 2^{-k} + \|\psi_s - \psi_e\|_{L^p(\sigma)} = \varepsilon + \|\psi_s - \psi_e\|_{L^p(\sigma)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Оценим $\|\psi_s - \psi_e\|_{L^p(\sigma)}$. Пусть $z \in e_k^+$, $1 \leq k \leq s$.

Имеем

$$z \in e_k^+ \subseteq e_k = e_{k-1}^- \subseteq e_{k-1} \subseteq e_{k-2}^- \subseteq \dots \subseteq$$

$$\subseteq e_1^-, z \in e_k^- = e_{k+1}^- \supseteq e_{k+1}^- = e_{k+2}^- \supseteq \dots \supseteq e_s^-.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \psi_s(z) &= \sum_{1 \leq j \leq k} 2^{j-1} \psi_{e_j^+, e_j^-}(z) = \\ &= 2^{k-1} \psi - \sum_{1 \leq j \leq k} 2^{j-1} \psi = \psi, \quad z \in e_k^+, \quad 1 \leq k \leq s. \end{aligned} \quad (3.12)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} e_s^- &= e_s \setminus e_s^+ = e_{s-1}^- \setminus e_s^+ = e_{s-1} \setminus (e_s^+ \cup e_{s-1}^+) = \\ &= \dots = e_1 \setminus \bigcup_{k=2}^s e_k^+ = e \setminus \bigcup_{k=2}^s e_k^+. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\psi_s(z) = -\psi \sum_{1 \leq k \leq s} 2^{k-1} = \psi(1 - 2^s), \quad z \in e_s^-.$$

Следовательно, в силу (3.12)

$$\|\psi_s - \psi\|_{L^p(G)} = \|\psi_s - \psi\|_{L^p(e_s^-)} = 2^{(p-1)s} \mu(e).$$

Учитывая неравенство (3.11) получим

$$\|\operatorname{Re} P_\varepsilon - \psi\|_{L^p(G)} < \varepsilon + 2^{(p-1)s} \mu(e).$$

Отсюда видно, что при достаточно малом ε и достаточно большом s будет выполняться условие 1) и, тем самым, лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. Пусть заданы $\varepsilon > 0$, p , $0 < p < 1$, действительная функция $f \in L^p(G)$, натуральное число l_0 . Тогда существует полином

$$Q(z) = \sum_{l_0 \leq k \leq l_1, k \in I} \lambda_k d_k z^k$$

(λ_k принимает значения 0 или 1), который удовлетворяет условиям

- 1) $\|\operatorname{Re} Q - f\|_{L^p(G)} < \varepsilon$,
- 2) $\|Q^*\|_{L^p(G)} \leq \Gamma_1 \|f\|_{L^p(G)}$

(Γ_1 — постоянная, зависящая от p).

Доказательство. При $\|f\|_{L^p(G)} = 0$ берем $Q(z) \equiv 0$ и условия леммы будут выполнены. Пусть $\|f\|_{L^p(G)} \neq 0$, $\sigma = \min \{\|f\|_{L^p(G)}, \varepsilon\}$, $\psi(z)$ — действительная ступенчатая на G функция такая, что $\|f - \psi\|_{L^p(G)} < 2^{-1}\sigma$. Обозначим через $e_1, \dots, e_s$ интервалы постоянства функции $\psi(z)$ и через $\psi_{e_k}(z)$, $1 \leq k \leq s$ функцию, принимающую значение (постоянное) $\psi(z)$ при $z \in e_k$ и 0 вне e_k . Поочередно применяя лемму 3.3, мы построим полиномы

$$P_{e_k}(z) = \sum_{n_{k-1} < j \leq n_k, j \in I} \lambda_j d_j z^j, \quad 1 \leq k \leq s$$

(λ_j — принимает значения 0 или 1, $l_0 = n_0 < n_1 < \dots < n_s = l_1$), которые удовлетворяют условиям

$$\|\operatorname{Re} P_{e_k} - \psi_{e_k}\|_{L^p(G)} < 2^{-1} s^{-1} \sigma$$

и

$$\|P_{e_k}^*\|_{L^p(G)} \leq \Gamma_0 \|\psi_{e_k}\|_{L^p(G)}.$$

Обозначим

$$\Omega(z) = \sum_{1 \leq k \leq s} P_{e_k}(z) = \sum_{1 \leq k \leq s} \sum_{l_1, k \in l} \lambda_k d_k z^k.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re} \Omega - f\|_{L^p(\sigma)} &\leq \|\operatorname{Re} \Omega - \psi\|_{L^p(\sigma)} + \|\psi - f\|_{L^p(\sigma)} \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq k \leq s} \|\operatorname{Re} P_{e_k} - \psi_{e_k}\|_{L^p(\sigma)} + 2^{-1} \sigma \leq \sigma < \varepsilon \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \|\Omega^*\|_{L^p(\sigma)} &\leq \left\| \sum_{1 \leq k \leq s} P_{e_k}^* \right\|_{L^p(\sigma)} \leq \sum_{1 \leq k \leq s} \|P_{e_k}^*\|_{L^p(\sigma)} \leq \Gamma_0 \sum_{1 \leq k \leq s} \|\psi_{e_k}\|_{L^p(\sigma)} = \\ &= \Gamma_0 \|\psi\|_{L^p(\sigma)} \leq \Gamma_0 \|f - \psi\|_{L^p(\sigma)} + \Gamma_0 \|f\|_{L^p(\sigma)} \leq 2\Gamma_0 \|f\|_{L^p(\sigma)} = \Gamma_1 \|f\|_{L^p(\sigma)}. \end{aligned}$$

Лемма 3.4 доказана.

Аналогичным образом можно убедиться в следующем:

Замечание 3.3. Пусть заданы действительная функция $f \in L^0(G)$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует полином

$$\Omega(z) = \sum_{1 \leq k \leq s} \sum_{l_1, k \in l} \lambda_k d_k z^k$$

(λ_k — принимает значения 0 или 1), который удовлетворяет условиям

$$1) \quad \int_0^1 |\operatorname{Re} \Omega - f| \ln(1 + |\operatorname{Re} \Omega - f|^{-1}) d\mu < \varepsilon,$$

$$2) \quad \|\Omega^*\|_{L^0(\sigma)} \leq \Gamma_1 \int_0^1 |f| \ln(1 + |f|^{-1}) d\mu$$

при $f = 0$ ($|f| \ln(1 + |f|^{-1})$ полагаем равным нулю).

Доказательство теоремы 2 основывается на замечании 3.3. Его мы не будем приводить.

Доказательство теоремы 1. В случае $\|f\|_{L^p(\sigma)} = 0$ теорема тривиальна (полагаем $\Omega_f(z) \equiv 0$). Пусть $\|f\|_{L^p(\sigma)} \neq 0$. Согласно лемме 3.4 существует полином

$$\Omega_1(z) = \sum_{1 \leq j \leq l_1} \sum_{j \in l} \lambda_j d_j z^j$$

(λ_j — принимает значения 0 или 1), удовлетворяющий условиям

$$\|\operatorname{Re} \Omega_1 - f\|_{L^p(\sigma)} < 2^{-1} \|f\|_{L^p(\sigma)}$$

и

$$\|\Omega_1^*\|_{L^p(\sigma)} \leq \Gamma_1 \|f\|_{L^p(\sigma)}.$$

Пусть уже построен полином

$$\Omega_{k-1}(z) = \sum_{1 \leq j \leq l_{k-1}} \sum_{j \in l} \lambda_j d_j z^j, \quad k \geq 1,$$

Применяя лемму 3.4, построим полином

$$\Omega_k(z) = \sum_{1 \leq j \leq l_k} \sum_{j \in l} \lambda_j d_j z^j,$$

удовлетворяющий условиям

$$\|\operatorname{Re} \Omega_k - (f - \sum_{1 \leq n \leq k} \Omega_n)\|_{L^p(\sigma)} < 2^{-k} \|f\|_{L^p(\sigma)} \quad (3.13)$$

и

$$\|\Omega_k\|_{L^p(G)} \leq \Gamma_1 \|f\| - \sum_{1 \leq n < k} \operatorname{Re} \Omega_n \|_{L^p(G)}.$$

По построению

$$\|\Omega_k\|_{L^p(G)} \leq \Gamma_1 2^{1-k} \|f\|_{L^p(G)}.$$

Через $\Omega_f(z)$ обозначим раскрытый ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in I} i_k d_n z^n.$$

Имеем

$$\|\Omega_f\|_{L^p(G)} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \right\|_{L^p(G)} \leq \Gamma_1 \|f\|_{L^p(G)} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} = 2 \Gamma_1 \|f\|_{L^p(G)} = \Gamma_p \|f\|_{L^p(G)}.$$

Для завершения доказательства теоремы нам остается убедиться, что $\operatorname{Re} \Omega_f(z) = f(z)$ почти всюду на G . Полученное выше неравенство показывает, что ряд $\Omega_f(z)$ сходится почти всюду. Следовательно, почти всюду сходится и ряд $\operatorname{Re} \Omega_f(z)$. Как видно из (3.13) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \Omega_k(z)$ сходится к $f(z)$ в метрике $L^p(G)$. Следовательно, $\operatorname{Re} \Omega_f(z) = f(z)$ почти всюду на G . Теорема 1 доказана.

Ереванский государственный университет

Поступила 6.VII.1984

3. Գ. ՀԱՐՈՒՄԻՅԱՆԻԱՆ. L^p , $0 < p < 1$ դասի ֆունկցիաների երկայնացումը արագ նվազող քառակիցներով եռանկյունաշափական շարքերով (ամփոփում)

Ինքնադրժն $N_k < M_k < N_{k+1}$, $k \geq 1$, $M_k - N_k \rightarrow \infty$, ճիշտ է հետևյալ փաստը. Դիցուք $\{a_n\}$, $n \in I$, $\sum_{n \in I} a_n = +\infty$, որտեղ $I = \{j: N_k < j < M_k, k \geq 1\}$: Այդ դեպքում ամեն մի իրական f ֆունկցիայի համար ($f \in L^p(G)$, $0 < p < 1$, G -ն կոմպլեքս հարթության միավոր շրջանագիծն է) գոյություն ունի եռանկյունաշափական շարք $\sum_{n \in I} d_n z^n$, $|d_n|^2 < a_n$, $n \in I$, որը սաղարարում է հետևյալ պայմաններին:

1) $\sum d_n z^n$ լուրջամիտում է G -ի համարյա բոլոր կետերում,

2) $\sup_m \left| \sum_{n < m, n \in I} d_n z^n \right\|_{L^p(G)} < \Gamma_p \|f\|_{L^p(G)},$

3) $\operatorname{Re} \sum d_n z^n = f(z)$ G -ի համարյա բոլոր կետերում: Նման արդյունք ճիշտ է $L^0(G)$ դասի ֆունկցիաների համար:

F. G. HARUTIUNIAN. Representation of functions from L^p , $0 < p < 1$ by trigonometrical series with rapidly decreasing coefficients (summary)

Let $N_k < M_k < N_{k+1}$, $k \geq 1$, $M_k - N_k \rightarrow +\infty$, $I = \{j: N_k < j < M_k, k \geq 1\}$ and G be the unit circle of complex plane.

Theorem: let $\{a_n\}$, $n \in I$ and $\sum_{n \in I} a_n = +\infty$, then for every real function

$f \in L^p(G)$, $0 < p < 1$ there exists a trigonometrical series $\sum_{n \in I} d_n z^n$, $|d_n|^2 < a_n$, $n \in I$ such that

1) the series $\sum d_n z^n$ converges almost everywhere on G ,

2) $\sup_m \left| \sum_{n < m, n \in I} d_n z^n \right\|_{L^p(G)} < \Gamma_p \|f\|_{L^p(G)},$

3) $\operatorname{Re} \sum d_n z^n = f(z)$ almost everywhere on G . A similar result holds also for

functions from the class $L^0(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов. Sur la representation des fonctions mesurables par des series trigonometriques, Матем. сб. 9 (51), 1951, 667—692.
2. А. А. Талалаян. Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов. Изв. АН СССР, серия матем., 27, 1963, 621—660.
3. Ф. Г. Арутюнян. Представление функций кратными рядами, ДАН Арм.ССР, LXIV, № 2, 1977, 72—76.
4. П. Л. Ульянов. Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19, 1, 1964, 3—69.
5. Н. Б. Позосян. Об универсальных рядах Фурье, УМН, 83, № 1, 1983, 185—186.
6. Ф. Г. Арутюнян. Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами, Матем. сб., 90 (132):4, 1973, 483—520.
7. Ф. Г. Арутюнян. Представление функций из класса L_p , $0 < p < 1$, тригонометрическими рядами, Международная конференция по теории приближения функций, СССР, Киев, 30 мая—6 июня, 1983, стр. 9.
8. А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров. Über die Konvergenz der Reihen deren Glieder durch den zufall bestimmt wurden, Матем. сб., 32 (1925), 668—677.
9. Ж. Неве. Математические основы теории вероятностей, «Мир», М., 1969.
10. D. L. Burkholder. Distribution function inequalities for martingales, Ann. Probability, 1, 1973, 19—42.

УДК 517.43

Р. Г. АЙРАПЕТЯН, И. М. ГЕЛЬФАНД, М. И. ГРАЕВ,
Г. Р. ОГАНЕСЯН

ТЕОРЕМА ПЛАНШЕРЕЛЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СВЯЗАННОГО С ПАРОЙ ГРАССМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Введение

Пусть G_p и G_q — многообразия p -мерных и q -мерных подпространств комплексного линейного пространства размерности n ($p < q \leq n - q$). Свяжем с G_p и G_q интегральное преобразование I , переводящее функции на G_p в функции на G_q : если f — функция на G_p и $h \in G_q$, то, по определению, $(If)(h)$ равно интегралу функции f по множеству $G_p(h) \subset G_p$ p -мерных подпространств, принадлежащих h^* . Возникает задача получить формулу обращения для преобразования I , т. е. восстановить исходную функцию f по функции If . Эта задача для случая $p=1$ была решена в [4], а для произвольного p — в работе [5].

Поскольку $\dim G_p < \dim G_q$, то для восстановления f задание If на всем многообразии G_q является избыточным, достаточно предполагать, что функция If задана только на некотором подмногообразии $K \subset G_q$ той же размерности, что и G_p . Мы называем $K \subset G_q$ допустимым комплексом, если функция f на G_p однозначно определяется значениями If на K , причем значение f в произвольной точке $l \in G_p$ выражается только через значения функции If в точках $h \in K$, бесконечно близких к l (локальность формулы обращения). Важный класс допустимых комплексов был определен для случая $p=1$ С. Г. Гиндикиным [7]; формула обращения для этих комплексов следует непосредственно из [4]. В данной статье аналогичный класс комплексов (гармонические комплексы) определяется при произвольном p ; для них формула обращения следует непосредственно из результатов [5]**).

Задачей второй статьи являются теорема Планшереля для интегрального преобразования I , связанного с гармоническим комплексом K , и описание образа I . Именно, мы вводим скалярные произведения

* При таком определении предполагается, что на каждом подмногообразии $G_p(h) \subset G_p$ фиксирована мера, по которой ведется интегрирование, и тем самым на G_p задана дополнительная структура. Чтобы этого избежать мы используем в статье несколько модифицированное определение преобразования I (см. [5] и § 1 этой работы), при котором функции на G_p и G_q заменяются сечениями некоторых одномерных векторных расслоений над G_p и G_q , а I переводит сечения над G_p в сечения над G_q .

** Описание всех допустимых комплексов получено только для случая $p=1$, $q=2$ (т. е. когда G_p — проективное пространство, а G_q — многообразие прямых). см. [3] и [8].

в пространствах функций на G_p и K и доказываем теорему Планшереля: преобразование I изометрично относительно этих скалярных произведений (см. теорему 1). Тем самым, получено выражение для скалярного произведения функций из исходного пространства через их образы. Далее доказывается (теорема 2), что образ I состоит из функций на K , удовлетворяющих простому дополнительному условию, которое мы называем здесь условием Кавальери. Для случая $p=1$ эти результаты были ранее получены в [1].

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

1°. Определение гармонического комплекса. Пусть V — комплексное линейное пространство размерности n . Обозначим через $G_p(V)$ многообразие линейных p -мерных подпространств в V или, что то же, многообразие $(p-1)$ -мерных плоскостей проективного пространства $PV = \mathbb{C}P^{n-1}$. Пусть фиксированы произвольные натуральные числа p, q такие, что

$$0 < p < q \leq n - q.$$

Зададим произвольное комплексное подмногообразие $C \subset G_{q-p}(V)$ размерности $N = p(q-p)$. Назовем *символом Крофтона* многообразия C функцию $Cr_C(b)$ на грассманиане $G_{n-p}(V)$, относящую каждому $b \in G_{n-p}(V)$ число подпространств $c \in C$, принадлежащих b . (В другой интерпретации, Cr_C есть функция на грассманиане $G_p(V')$, где V' — пространство, двойственное V , относящая каждому $b' \in G_p(V')$ число подпространств $c \in C$, ортогональных b'). Функция Cr_C почти всюду конечна и принимает целые неотрицательные значения. Назовем C *гармоническим многообразием*, если $Cr_C(b) = \text{const} \neq 0$ для почти всех $b \in G_{n-p}(V)$. Эту константу обозначим через $Cr(C)$ и назовем *числом Крофтона*. Отметим, что $Cr_C(b) = \text{const}$ для алгебраических подмногообразий C ; при этом существуют многообразия C , для которых $Cr_C = 0$.

Свяжем с каждым подмногообразием $C \subset G_{q-p}(V)$ размерности $N = p(q-p)$ многообразие $K_C \subset G_q(V)$, состоящее из подпространств $h \in G_q(V)$, содержащих хотя бы одно подпространство $c \in C^*$. Легко проверить, что $\dim K_C = \dim G_p(V) = p(n-p)$. В самом деле, многообразие подпространств $h \in G_q(V)$, содержащих фиксированное $c \in C$, есть $G_p(V/c)$; следовательно, $\dim K_C = \dim C + \dim G_p(V/c) = p(q-p) + p(n-q) = p(n-p)$.

Назовем K_C *гармоническим комплексом*, если C — гармоническое многообразие.

Пример. Пусть $q-p=1$, тогда C — p -мерное подмногообразие в проективном пространстве, а комплекс K_C состоит из всех $(q-1)$ -мерных плоскостей, пересекающих C . Число Крофтона $Cr(C)$

* Для случая $p=1$ эти подмногообразия были введены Гиндикиным [7].

равно числу точек пересечения многообразия C с $(n-q)$ -мерной плоскостью общего положения.

2°. Интегральное преобразование, связанное с комплексом K_C .

Введем одномерное расслоение над грассманианом $G_p(V)$:

$$\pi_p: \bar{G}_p(V) \rightarrow G_p(V),$$

где $\bar{G}_p(V)$ — многообразие p -векторов $x = x_1 \wedge \dots \wedge x_p \neq 0$, $x_i \in V$, а проекция π_p относит каждому p -вектору $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ подпространство, натянутое на $x_1, \dots, x_p$. Обозначим через $F_p^{k_1, k_2}$ пространство C^∞ -функций на $\bar{G}_p(V)$, удовлетворяющих условию однородности:

$$f(jx) = \lambda^{-k_1} \bar{\lambda}^{-k_2} f(x). \quad (1.1)$$

Пространство $F_p^{k_1, k_2}$ можно интерпретировать и как пространство C^∞ -функций на многообразии $E_{p,n}$ p -реперов $x = (x_1, \dots, x_p)$ в V или, в координатной форме, на многообразии $p \times n$ -матриц ранга p , удовлетворяющих следующему условию однородности:

$$f(gx) = (\det g)^{-k_1} (\overline{\det g})^{-k_2} f(x) \quad (1.2)$$

для любого $g \in GL(p, \mathbb{C})$. В дальнейшем будут использоваться обе реализации пространства $F_p^{k_1, k_2}$.

Замечание. Введенное пространство $F_p^{k_1, k_2}$ можно также интерпретировать как пространство гладких сечений некоторого одномерного векторного расслоения над $G_p(V)$, см. Добавление к § 1.

Наша задача — определить интегральное преобразование

$$I: F_p^{q, q} \rightarrow F_p^{p, p}, \text{ где } p < q \leq n - p$$

(см. [5])*. Для этого введем сначала дифференциальную форму $\omega_{pq}(t)$ на многообразии $E_{p,q}$ $p \times q$ -матриц $t = \|t_{ij}\|$ ранга p :

$$\omega_{p,q} = \bigwedge_{l=1}^p \omega_{p,q}^l(t), \quad (1.3)$$

где

$$\omega_{p,q}^l(t) = \frac{1}{(q-p)!} \sum \text{sgn}(j_1, \dots, j_q) t_1^{j_1} \dots t_p^{j_p} dt_1^{p+1} \wedge \dots \wedge dt_q^{p+1},$$

сумма берется по перестановкам индексов $1, \dots, q$. Легко проверяются следующие свойства:

1) Форма $\omega_{p,q}$ удовлетворяет условию однородности

$$\omega_{p,q}(g_1 t g_2) = (\det g_1)^q (\det g_2)^p \omega_{p,q}(t) \quad (1.4)$$

* В [5] рассматривался случай вещественного пространства; однако, результаты из [5] автоматически переносятся на комплексный случай.

для любых $g_1 \in GL(p, \mathbb{C})$, $g_2 \in GL(q, \mathbb{C})$; в частности, $\omega_{p,q}(g_1 t g_2) = \omega_{p,q}(t)$ для любых $g_1 \in SL(p, \mathbb{C})$, $g_2 \in SL(q, \mathbb{C})$. Из (1.4) следует, что $\omega_{p,q}(t)$ опускается с многообразия $E_{p,q}$ на многообразие p -векторов $t_1 \wedge \dots \wedge t_p$.

2) Условием (1.4) форма $\omega_{p,q}$ определяется однозначно с точностью до постоянного множителя.

Пусть $f \in F_{p,q}^{q,p}$ и $x \in E_{q,n}$. Зададим дифференциальную (N, N) -форму, $N = p(q-p)$ на $E_{p,q}$:

$$f(tx) \omega_{p,q}(t) \wedge \overline{\omega_{p,q}(t)}.$$

Из (1.2) и (1.4) следует, что эта форма опускается на $G_{p,q} = G_p(\mathbb{C}^q)$ при естественном отображении $E_{p,q} \rightarrow G_{p,q}$, и мы полагаем:

$$(If)(x) = \left(\frac{i}{2}\right)^N \int_{G_{p,q}} f(tx) \omega_{p,q}(t) \wedge \overline{\omega_{p,q}(t)}. \quad (1.5)$$

Очевидно, что $If \in F_{q,p}^{p,p}$.

Пусть теперь $K_C \subset G_q(V)$ — комплекс Гиндикина. Обозначим через $\tilde{K}_C$ прообраз K_C в многообразии q -векторов $\tilde{G}_q(V)$ и через F_C^p — пространство функций $\varphi|_{\tilde{K}_C}$, где $\varphi \in F_{q,p}^{p,p}$. Определим интегральное преобразование

$$I_C : F_{p,q}^{q,q} \rightarrow F_C^p,$$

полагая

$$I_C f = If|_{\tilde{K}_C}.$$

З а м е ч а н и е. Если $F_{q,p}^{p,p}$ реализовано как пространство функций на многообразии $E_{q,n}$ q -реперов в V , то в этой реализации F_C^p есть пространство функций $\varphi|_{E_{q,n}^C}$, $\varphi \in F_{q,p}^{p,p}$, где $E_{q,n}^C \subset E_{q,n}$ — прообраз K_C в $E_{q,n}$ и $I_C f = If|_{E_{q,n}^C}$.

3°. Формула Планшереля для преобразования I_C . Наша цель — получить формулу Планшереля для преобразования I_C , где $C \subset G_{q-p}(V)$ — гармоническое многообразие. Для этого нужно ввести скалярные произведения в пространствах $F_{p,q}^{q,q}$ и F_C^p .

Предварительно введем пространства дифференциальных операторов на $\tilde{G}_p(V)$. Пусть L — пространство линейных кососимметрических p -форм на пространстве V' , двойственном V , $L = \bigwedge^p V$. Положим

$$H_p^{m_1, m_2}(V) = S^{m_1}(L) \otimes \overline{S^{m_2}(L)} \quad (m_1, m_2 = 0, 1, \dots),$$

где $S^m(L)$ — m -ая симметризованная тензорная степень L ; $S^0(L) = \mathbb{C}$.

Элементы из $H_p^{m_1, m_2}(V)$ являются функциями на многообразии $\tilde{G}_p(V')$.

Обозначим через $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ линейный однородный дифференциальный

оператор на $\tilde{G}_p(V)$ с символом $P(\xi) \in H_p^{m_1, m_2}(V)$. Если в пространствах

V и V' фиксированы дуальные базисы, то элементы из $\tilde{G}_p(V)$ и $\bar{G}_p(V')$ мы можем задавать матрицами ранга p , $x = \|x^i_j\|$, $\xi = \|\xi^i_j\|$ ($i \in \overline{1, p}$, $j \in \overline{1, n}$). В этом случае $H^{m_1, m_2}_p(V)$ реализуется как пространство однородных многочленов $P(\xi)$ степени однородности (m_1, m_2) от p -ми-норов матрицы ξ . Дифференциальный оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ получается из $P(\xi)$ заменой ξ^i_j на $\frac{\partial}{\partial x^i_j}$.

Пусть фиксирован произвольный ненулевой элемент

$$P(\xi) \in H^{m_1, m_2}_p(V), \quad m_1 + m_2 = n - 2q.$$

Отнесем каждой паре функций $f_1, f_2 \in F^{q, q}_p$ следующую дифференциальную (N_1, N_2) -форму на $\tilde{G}_p(V)$, где $N_1 = p(n-p)$:

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)f_1(z)\right)\overline{\left(P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)f_2(z)\right)}\omega_{p, n}(z) \wedge \overline{\omega_{p, n}(z)},$$

где $\omega_{p, n}(z)$ задаётся формулой (1.3) при $q=n$, $t=z$. Из условий однородности для f_i , P и $\omega_{p, n}$ следует, что эта дифференциальная форма имеет степень однородности 0, а потому она опускается с $\tilde{G}_p(V)$ на грассманиан $G_p(V)$. Положим

$$(f_1, f_2)_p = \left(\frac{i}{2}\right)^{N_1} \int_{G_p(V)} \left(P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)f_1(z)\right)\overline{\left(P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)f_2(z)\right)}\omega_{p, n}(z) \wedge \overline{\omega_{p, n}(z)}. \quad (1.6)$$

Обозначим через $F^{q, q}_p$ пополнение $F^{q, q}_p$ по норме $\|f\| = (f, f)^{1/2}_p$.

Чтобы задать скалярное произведение в пространстве F^p_C введем сначала две дифференциальные формы на многообразии q -реперов $E_{q, n}$. Представим реперы $x \in E_{q, n}$ в виде пар $x = (y, z)$, где $y \in E_{q-p, n}$ и $z \in E_{p, n}$ — реперы, составленные, соответственно, из первых $q-p$ и последних p векторов репера x . Определим дифференциальную форму x с операторными коэффициентами по формуле (см. [5]):

$$x = \bigwedge_{i=1}^{q-p} \bigwedge_{j=1}^p d^i_j, \quad \text{где} \quad d^i_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial z^k_j} dy^i_k. \quad (1.7)$$

Положим далее

$$\sigma_y(z) = \bigwedge_{i=1}^p \sigma^i_y(z), \quad (1.8)$$

где

$$\sigma^i_y(z) = \sum \text{sgn}(j_1, \dots, j_n) x^{i_1}_{j_1} \dots x^{i_q}_{j_q} dz^{j_{q+1}} \wedge \dots \wedge dz^{j_n} (x = (y, z)),$$

суммирование ведется по перестановкам индексов $1, \dots, n$.

Отнесем каждой паре функций $\varphi_1, \varphi_2 \in F^p_C$ следующую дифференциальную форму на многообразии q -реперов $(y, z) \in E_{q, n}$ таких, что $\pi_{q-p} y \in C$:

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2) = \left(\sigma_y(z) \wedge P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \chi \varphi_1 \right) \wedge \overline{\left(\sigma_y(z) \wedge P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \chi \varphi_2 \right)}.$$

Обозначим через $G_q^c(V)$, где $c \in C$, многообразие подпространств $h \in G_q(V)$, содержащих c , и через $E_{q,n}^y$ — многообразие q -реперов $(y, z) \in E_{q,n}$, где y фиксировано. Заметим, что $G_q^c(V) \simeq G_p(V/c)$ и что $G_q^c(V)$, где $c = \pi_{q-p} y$, является образом $E_{q,n}^y$ при отображении $E_{q,n} \rightarrow G_q(V)$.

Форма $\Omega(\varphi_1, \varphi_2)$ при фиксированных y и dy является дифференциальной формой на $E_{q,n}^y$, и нетрудно проверить, что она опускается на многообразие $G_q^c(V) \simeq G_p(V/c)$ при отображении $E_{q,n}^y \rightarrow G_q^c(V)$. Таким образом, определен интеграл формы $\Omega(\varphi_1, \varphi_2)$ по многообразию $G_p(V/c)$, который является дифференциальной (N, N) -формой на $\pi_{q-p}^{-1} C$, $N = p(q-p)$. Полученная дифференциальная форма на $\pi_{q-p}^{-1} C$ в свою очередь опускается на C при отображении π_{q-p} . Положим

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_p = \frac{c(p, q, n)}{Cr(C)} \left(\frac{i}{2} \right)^{p(n-p)} \int \int_{G_p(V/c)} \left(\sigma_y(z) \wedge P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \chi \varphi_1 \right) \wedge \overline{\left(\sigma_y(z) \wedge P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \chi \varphi_2 \right)}, \quad (1.9)$$

где $Cr(C)$ — число Крофтона, а $c(p, q, n)$ — числовой множитель, который будет определен позднее (см. § 3).

Обозначим через $\bar{F}_C^p$ пополнение F_C^p по норме $\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle_p^{1/2}$.

Замечание. В силу сказанного выше, $\Omega(\varphi_1, \varphi_2)$ является дифференциальной формой на расслоении, база которого C , а слой над $c \in C$ — многообразие $G_q^c(V) \subset G_q(V)$ подпространств $h \in G_q(V)$, содержащих c . Это расслоение совпадает с K_C с точностью до подмногообразия меньшей размерности или образует конечнолистное накрытие над K_C .

Теорема 1. Пусть $0 < p < q \leq n - q$, $C \subset G_{q-p}(V)$ — гармоническое подмногообразие, $I_C: F_p^{q,q} \rightarrow F_C^p$ — интегральное преобразование, определенное в п. 2. Тогда I_C изометрично относительно введенных в $F_p^{q,q}$ и F_C^p скалярных произведений, т. е. для любых $f_1, f_2 \in F_p^{q,q}$ имеем

$$(f_1, f_2)_p = \langle I_C f_1, I_C f_2 \rangle_p. \quad (1.10)$$

Следовательно, I_C продолжается до изометрического отображения гильбертовых пространств $\bar{F}_p^{q,q} \rightarrow \bar{F}_C^p$.

4°. Описание образа пространства $\bar{F}_p^{q,q}$ при отображении I_C . Введем дельта-функцию $\delta(x)$ на многообразии комплексных $p \times p$ -матриц, определяемую равенством

$$(\delta, f) = f(0),$$

для любой основной функции f , т. е.

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{p^2} \int \delta(x) f(x) dx \wedge \bar{dx} = f(0), \quad dx = \bigwedge_{i,j=1}^p dx_{ij}.$$

Положим далее для любых $k_1, k_2 = 0, 1, \dots$

$$\delta^{(k_1, k_2)}(x) = D^{k_1} \bar{D}^{k_2} \delta(x),$$

где $D = \det \left\| \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right\|$, $\bar{D} = \det \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{x}_{ij}} \right\|$. Из определения следует, что

$$\delta^{(k_1, k_2)}(gx) = \delta^{(k_1, k_2)}(xg) = (\det g)^{-p-k_1} (\det g)^{-p-k_2} \delta^{(k_1, k_2)}(x) \quad (1.11)$$

для любого $g \in GL(p, \mathbb{C})$.

Назовем поливекторы на V и V' ортогональными, если ортогональны порожденные ими подпространства в V и V' .

Пусть $\varphi \in F_C^p$, $c \in C$, $\zeta \in G_p(V')$, причем $c \perp \zeta$. Фиксируем произвольный $(q-p)$ -вектор $y \in \pi_{q-p}^{-1} c$ и введем следующую дифференциальную форму на $\tilde{G}_p(V)$:

$$\varphi(y \wedge z) \delta^{(n-q-p, n-q-p)}(z^*) \sigma_y(z) \wedge \overline{\sigma_y(z)}, \quad (1.12)$$

где $z^* = \langle z_1, \zeta \rangle$, σ_y — дифференциальная форма, заданная равенством (1.8). В силу (1.11), форма (1.12) не зависит от способа задания z и ζ в виде $z = z_1 \wedge \dots \wedge z_p$, $\zeta = \zeta^1 \wedge \dots \wedge \zeta^p$.

Из условий однородности для φ , $\delta^{(n-q-p, n-q-p)}$ и σ_y непосредственно следует:

1) форма (1.12) сохраняется при замене y на λy ($\lambda \neq 0$); следовательно, она зависит только от c и ζ ;

2) форма (1.12) опускается на $G_p(V/c)$ при композиции стандартных отображений $\tilde{G}_p(V) \rightarrow \tilde{G}_p(V/c) \rightarrow G_p(V/c)$.

Положим

$$\bar{\varphi}(c, \zeta) = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-q)} \int_{G_p(V/c)} \varphi(y \wedge z) \delta^{(n-q-p, n-q-p)}(z^*) \sigma_y(z) \wedge \overline{\sigma_y(z)}. \quad (1.13)$$

В силу определения $\bar{\varphi}$ есть функция на многообразии ортогональных пар (c, ζ) , где $c \in C$, $\zeta \in \tilde{G}_p(V')$, удовлетворяющая следующему условию однородности:

$$\bar{\varphi}(c, \lambda \zeta) = \lambda^{q-n} \bar{\lambda}^{q-n} \bar{\varphi}(c, \zeta). \quad (1.14)$$

Определение. Скажем, что функция $\varphi \in F_C^p$ удовлетворяет условию Кавальери, если для почти каждого $\zeta \in \tilde{G}_p(V')$ $\bar{\varphi}(c, \zeta)$ не зависит от выбора подпространства $c \in C$, ортогонального ζ , т. е. для любых $c_1, c_2 \in C$ таких, что $c_1 \perp \zeta$, $c_2 \perp \zeta$ имеем:

$$\bar{\varphi}(c_1, \zeta) = \bar{\varphi}(c_2, \zeta).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда образ пространства $\overline{F}_{\bar{p}}^{q,q}$ при отображении I_c есть замыкание подпространства функций $\varphi \in F_C^p$ удовлетворяющих условию Кавальери.

Примечание. Необходимость условия Кавальери вытекает из следующего факта. Если $\varphi = I_C f$, где $f \in F_p^{q,q}$, то, как нетрудно убедиться, интеграл (1.13) равен

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-p)} \int_{G_p(V)} f(z) \bar{\partial}^{(n-q-p, n-q-p)}(z) \omega_{p,n}(z) \wedge \overline{\omega_{p,n}(z)}.$$

Значит, он зависит только от ζ .

Добавление. Введенные здесь пространства $F_p^{k_1, k_2}$ можно интерпретировать как пространства гладких сечений некоторых одномерных векторных расслоений над $G_p(V)$, которые мы сейчас определим (ср. [4] для случая $p=1$). Рассмотрим многообразие всевозможных пар (x, t) , где $x \in \bar{G}_p(V)$, $t \in \mathbb{C}$. отождествим в нем пары (x, t) и $(\lambda x, \lambda^{-k_1} \bar{\lambda}^{-k_2} t)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$; при этом мы получим новое многообразие, которое обозначим через $G_p^{k_1, k_2}(V)$. Зададим отображение

$$\tau: G_p^{k_1, k_2}(V) \rightarrow G_p(V),$$

положив $\tau(x, t) = \pi_p x$. Определение τ корректно, так как при этом отображении эквивалентные пары имеют один и тот же образ. Нетрудно убедиться, что $\tau: G_p^{k_1, k_2}(V) \rightarrow G_p(V)$ является одномерным векторным расслоением над $G_p(V)$.

Покажем, что гладкие сечения расслоения можно канонически отождествить с элементами пространства $F_p^{k_1, k_2}$. Пусть $f \in F_p^{k_1, k_2}$. Отнесем каждому $x \in G_p(V)$ множество пар $(x, f(x))$ таких, что $\pi_p x = x$. Так как $f(\lambda x) = \lambda^{-k_1} \bar{\lambda}^{-k_2} f(x)$, оно состоит из эквивалентных между собой пар и тем самым задает точку из $G_p^{k_1, k_2}(V)$, лежащую над x . Итак, функции $f \in F_p^{k_1, k_2}$ отнесено сечение расслоения τ . Обратно, пусть задано гладкое сечение расслоения τ , т. е. каждой точке $x \in G_p(V)$ отнесен класс эквивалентных пар (x, t) , где $\pi_p x = x$. Возьмем класс эквивалентных пар, отвечающих x . Для заданного x он содержит единственную пару вида (x, t) . Таким образом, сечению расслоения τ отвечает гладкая функция на $\bar{G}_p(V): x \rightarrow t = f(x)$. Так как $(x, f(x)) \sim (\lambda x, f(\lambda x))$, то f удовлетворяет условию однородности $f(\lambda x) = \lambda^{-k_1} \bar{\lambda}^{-k_2} f(x)$, а потому $f \in F_p^{k_1, k_2}$.

§ 2. Обобщенное преобразование Радона

1°. Оператор $I: R_p^{k_1, k_2}$. При доказательстве теорем 1 и 2 будет использовано обобщенное преобразование Радона, которое здесь будет введено. Введем, наряду с пространством $F_p^{k_1, k_2}$ функций на $\bar{G}_p(V)$ пространство $\Phi_p^{k_1, k_2}$ C^∞ -функций на $\bar{G}_p(V')$ (т. е. на многообразии p -векторов $\zeta = \zeta^1 \wedge \dots \wedge \zeta^p \neq 0$, $\zeta^i \in V'$), удовлетворяющих условию:

$$f(\lambda\zeta) = \lambda^{-k_1} \bar{\lambda}^{-k_2} f(\zeta), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus 0. \quad (2.1)$$

Отметим, что $\Phi_p^{k_1, k_2}$ можно интерпретировать и как пространство C^∞ -функций на многообразии $E_{p, n}$ p -реперов $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^p)$ в V' или, в координатной форме, как пространство C^∞ -функций на многообразии $n \times p$ -матриц ранга p , удовлетворяющих условию

$$f(\zeta g) = (\det g)^{-k_1} (\overline{\det g})^{-k_2} f(\zeta) \quad (2.2)$$

для любого $g \in GL(p, \mathbb{C})$.

В дальнейшем будем предполагать, что $p \leq k_1 \leq n - p$, $i = 1, 2$ и $k_1 + k_2 \leq n$. Пусть $f \in F_p^{k_1, k_2}$ и $\zeta \in \tilde{G}_p(V')$. Зададим следующую дифференциальную форму на $\tilde{G}_p(V)$.

$$f(z) \delta^{(n-k_1-p, n-k_2-p)}(z^*) \omega_{p, n}(z) \wedge \overline{\omega_{p, n}(z)},$$

где $\delta^{(m_1, m_2)}$ — обобщенная функция на многообразии $p \times p$ -матриц, введенная в §1, п. 4°. Эта форма имеет степень однородности 0, а потому она опускается с $\tilde{G}_p(V)$ на $G_p(V)$.

Определим обобщенное преобразование Радона функции $f \in F_p^{k_1, k_2}$ формулой:

$$(R_{p, n}^{k_1, k_2} f)(\zeta) = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-p)} \int_{G_p(V)} f(z) \delta^{(n-k_1-p, n-k_2-p)}(z^*) \omega_{p, n}(z) \wedge \overline{\omega_{p, n}(z)}. \quad (2.3)$$

В силу этого определения, интегрирование ведется по множеству подпространств из $G_p(V)$, ортогональных ζ .

Очевидно, что $R_{p, n}^{k_1, k_2} f \in \Phi_p^{n-k_1, n-k_2}$; таким образом, мы получаем отображение

$$R_{p, n}^{k_1, k_2}: F_p^{k_1, k_2} \rightarrow \Phi_p^{n-k_1, n-k_2}.$$

2°. Теорема Планшереля для $R_{p, n}^{k_1, k_2}$. Введем скалярные произведения в пространствах $F_p^{k_1, k_2}$ и $\Phi_p^{n-k_1, n-k_2}$. Для этого зафиксируем произвольный ненулевой многочлен $P(\zeta) \in H_p^{m_1, m_2}(V)$, где $m_1 + m_2 = n - (k_1 + k_2)$. Положим для любых $f_1, f_2 \in F_p^{k_1, k_2}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_p^{n-k_1, n-k_2}$:

$$(f_1, f_2)_P = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-p)} \int_{G_p(V)} \left(P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) f_1(z) \right) \overline{\left(P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) f_2(z) \right)} \omega_{p, n}(z) \wedge \overline{\omega_{p, n}(z)}, \quad (2.4)$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_P = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-p)} \int_{G_p(V')} |P(\zeta)|^2 \varphi_1(\zeta) \overline{\varphi_2(\zeta)} \omega_{n, p}(\zeta) \wedge \overline{\omega_{n, p}(\zeta)}. \quad (2.5)$$

(Подынтегральные формы заданы на $\tilde{G}_p(V)$ и $\tilde{G}_p(V')$; однако они имеют степень однородности 0, а потому опускаются, соответственно, на $G_p(V)$ и $G_p(V')$).

Обозначим через $\bar{F}_p^{k_1, k_2}$ и $\bar{\Phi}_p^{n-k_1, n-k_2}$ пополнения $F_p^{k_1, k_2}$ и $\Phi_p^{n-k_1, n-k_2}$ по введенной метрике.

Предложение 1. Существует константа $a_{p, n}$, не зависящая от k_1, k_2 такая, что отображение $R = a_{p, n} R_{p, n}^{k_1, k_2}: F_p^{k_1, k_2} \rightarrow \Phi_p^{n-k_1, n-k_2}$ изометрично относительно введенных скалярных произведений,

$$(f_1, f_2)_p = \langle Rf_1, Rf_2 \rangle_p;$$

следовательно, оно продолжается до изометрического отображения $\bar{F}_p^{k_1, k_2} \rightarrow \bar{\Phi}_p^{n-k_1, n-k_2}$. Полученное отображение

$$R: \bar{F}_p^{k_1, k_2} \rightarrow \bar{\Phi}_p^{n-k_1, n-k_2}$$

является изоморфизмом гильбертовых пространств.

Доказательство. Сначала предположим, что $k_1 + k_2 = n$. В этом случае $P(\zeta) = \text{const}$. Зададим в пространствах $\bar{F}_p^{k_1, k_2}$ и $\bar{\Phi}_p^{n-k_1, n-k_2}$ представления группы $SL(V)$ по формулам:

$$(T_g f)(z) = f(zg), \quad (\hat{T}_g \zeta)(\zeta) = \varphi(g^{-1} \zeta),$$

где $z \rightarrow zg$ и $\zeta \rightarrow g^{-1} \zeta$ — естественные действия группы $SL(V)$ на многообразиях $\tilde{G}_p(V)$ и $\tilde{G}_p(V')$. Нетрудно убедиться, что представления T_g и $\hat{T}_g$ унитарны, а $R_{p, n}^{k_1, k_2}$ является сплетающим оператором этих представлений. Известно (см., например, [6]), что представления T_g и $\hat{T}_g$ неприводимы. Отсюда непосредственно следует существование числа $c(k_1, k_2)$ такого, что оператор $R = c(k_1, k_2) R_{p, n}^{k_1, k_2}$ обладает свойствами, сформулированными в предложении.

Пусть теперь l_1, l_2 — произвольные индексы такие, что $p \leq l_i \leq k_i$ ($i = 1, 2$). Докажем, что оператор $R_1 = c(k_1, k_2) R_{p, n}^{l_1, l_2}$ также обладает свойствами, сформулированными в предложении. Отсюда будет непосредственно следовать предложение 1.

Пусть $P(\zeta) \in H_p^{m_1, m_2}(V)$, где $m_1 = k_1 - l_1$, $m_2 = k_2 - l_2$ и, значит, $m_1 + m_2 = n - (l_1 + l_2)$. Положим $f_1 = P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)f$, $f \in F_p^{l_1, l_2}$. Тогда $f_1 \in F_p^{k_1, k_2}$, а потому, в силу уже доказанного, имеем:

$$(f_1, f_1) = \langle Rf_1, Rf_1 \rangle.$$

Из определения функций $\delta^{(k_1, k_2)}$ и операторов $R_{p, n}^{k_1, k_2}$, $R_{p, n}^{l_1, l_2}$ легко следует, что $Rf_1 = R\left(P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)f\right) = (-1)^{(m_1+m_2)p} P(\zeta) R_1 f$; следовательно, $\langle Rf_1, Rf_1 \rangle = \langle R_1 f, R_1 f \rangle_p$. Так как, с другой стороны, $(f_1, f_1) = (f, f)_p$, то $(f, f)_p = \langle R_1 f, R_1 f \rangle_p$, т. е. оператор $R_1 = c(k_1, k_2) R_{p, n}^{l_1, l_2}$ изометричен. Далее из уже доказанного для k_1, k_2 следует, что пространство функций $R\left(P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)f\right) = \pm P(\zeta) R_1 f$, $f \in F_p^{l_1, l_2}$ плотно в $\bar{\Phi}_p^{n-l_1, n-l_2}$. Отсюда вытекает, что пространство функций $R_1 f$ плотно в $\bar{\Phi}_p^{n-l_1, n-l_2}$ и, значит, $R_1: \bar{F}_p^{l_1, l_2} \rightarrow \bar{\Phi}_p^{n-l_1, n-l_2}$ является изоморфизмом пространств.

Примечание. Аналогично можно доказать, что отображение $R^{-1}: \bar{\Phi}^{n-k_1, n-k_2} \rightarrow \bar{F}_p^{k_1, k_2}$, обратное к $R = a_{p, n} R_{p, n}^{k_1, k_2}$, задается формулой

$$(R^{-1} \varphi)(z) = \hat{a}_{p, n} \left(\frac{i}{2} \right)^{p(n-p)} \int_{a_p(V')} \varphi(\zeta) \delta^{(k_1-p, k_2-p)}(z\zeta) \omega_{n, p}(\zeta) \wedge \overline{\omega_{n, p}(\zeta)},$$

где множитель $a_{p, n}$ не зависит от k_1, k_2 .

В дальнейшем будет использовано несколько более общее соотношение.

Предложение 1'. Для любых $f_1, f_2 \in F_p^{k_1, k_2}$ и любых $P_1, P_2 \in H_p^{m_1, m_2}(V)$, где $m_1 + m_2 = n - (k_1 + k_2)$, выполняется следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_{a_p(V)} \left(P_1 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) f_1(z) \right) \overline{\left(P_2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) f_2(z) \right)} \omega_{p, n}(z) \wedge \overline{\omega_{p, n}(z)} = \\ = |a_{p, n}|^2 \int_{a_p(V')} (P_1(\zeta) \varphi_1(\zeta)) \overline{(P_2(\zeta) \varphi_2(\zeta))} \omega_{n, p}(\zeta) \wedge \overline{\omega_{n, p}(\zeta)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\varphi_i = R_{p, n}^{k_1, k_2} f_i$ ($i=1, 2$), а $a_{p, n}$ — коэффициент, определенный в предложении 1.

Доказательство дословно то же, что и доказательство предложения 1.

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

1°. Два вспомогательных утверждения. Обозначим для любого $\varphi \in F_p^p$ через $\tilde{\varphi}(c, \zeta)$ функцию на многообразии пар $c \in C, \zeta \in \bar{G}_p(\text{Annc})$, определенную равенством (1.13):

$$\tilde{\varphi}(c, \zeta) = \left(\frac{i}{2} \right)^{p(n-q)} \int_{a_p(V/c)} \varphi(y \wedge z) \delta^{(n-q-p, n-q-p)}(z\zeta) \tau_y(z) \wedge \overline{\tau_y(z)}, \quad (3.1)$$

где $y = y_1 \wedge \dots \wedge y_{q-p}$ — произвольный фиксированный $(q-p)$ -вектор из прообраза c (напомним, что от его выбора правая часть не зависит).

Определим дифференциальную форму $\tau_y(\zeta)$ на $\bar{G}_p(\text{Annc})$ с помощью равенства

$$\omega_{n, p}(\zeta) = \left(\bigwedge_{i=1}^{q-p} \bigwedge_{j=1}^p \langle y_i, d\zeta^j \rangle \right) \wedge \tau_y(\zeta). \quad (3.2)$$

Из определения следует, что

$$\tau_y(\lambda\zeta) = \lambda^{n-(q-p)} \tau_y(\zeta) \text{ для любого } \lambda \neq 0.$$

Предложение 2. Для любых $\tau_1, \tau_2 \in F_p^p, Q_1, Q_2 \in H_p^{m_1, m_2}(V)$, где $m_1 + m_2 = n - q - p$, и любого $c \in C$ имеет место равенство

$$\int_{G_p(V/c)} \left(Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi_1(y \wedge z) \right) \overline{\left(Q_2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi_2(y \wedge z) \right)} \sigma_y(z) \wedge \overline{\sigma_y(z)} =$$

$$= |a_{p, n-q+p}|^2 \int_{G_p(\text{Апп} c)} (Q_1(\zeta) \tilde{\varphi}_1(c, \zeta)) \overline{(Q_2(\zeta) \tilde{\varphi}_2(c, \zeta))} \tau_y(\zeta) \wedge \overline{\tau_y(\zeta)},$$

где $y = y_1 \wedge \dots \wedge y_{q-p}$ — произвольный фиксированный $(q-p)$ -вектор в прообразе c , а $a_{p, n-q+p}$ — коэффициент, определенный в предложении 1.

Замечание. Подынтегральные выражения являются дифференциальными формами на $\tilde{G}_p(V/c)$ и $\tilde{G}_p((V/c)') = \tilde{G}_p(\text{Апп} c)$. Легко, однако, проверить, что они имеют степень однородности 0, а потому опускаются, соответственно, на $G_p(V/c)$ и $G_p(\text{Апп} c)$.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что левая и правая части равенства (3.3) — однородные функции от y степени однородности $(-p, -p)$. Поэтому равенство достаточно проверить для какого-нибудь одного $(q-p)$ -вектора y из прообраза c .

Зафиксируем $y \in \pi_{q-p}^{-1} c$ и обозначим через z образ $z \in \tilde{G}_p(V)$ в $\tilde{G}_p(V/c)$ при отображении $\tilde{G}_p(V) \rightarrow \tilde{G}_p(V/c)$, индуцированном отображением $V \rightarrow V/c$. Очевидно, что при фиксированном y функции $\varphi_i(y \wedge z)$ зависят только от z , и мы положим

$$\psi_i(\hat{z}) = \varphi_i(y \wedge z), \quad i = 1, 2.$$

Так как функции $\psi_i(\hat{z})$ однородны степени однородности $(-p, -p)$, то для них имеет место соотношение (2.6) предложения 1'. Именно, обозначим через $\hat{Q}_i(\zeta)$ ограничение $Q_i(\zeta)$ на $\tilde{G}_p(\text{Апп} c)$ и через $\hat{Q}_i\left(\frac{\partial}{\partial \hat{z}}\right)$ —

дифференциальный оператор на $\tilde{G}_p(V/c)$ с символом $Q_i(\zeta)$, $i = 1, 2$.

Пусть, далее, $\tilde{\psi}_i(\zeta) = (R_{p, r}^{p, p} \psi_i)(\zeta)$, $\zeta \in \tilde{G}_p(\text{Апп} c)$ ($r = n - q + p$). Тогда, в силу предложения 1', имеем

$$\int_{G_p(V/c)} \left(\hat{Q}_1 \left(\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) \psi_1(\hat{z}) \right) \overline{\left(\hat{Q}_2 \left(\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) \psi_2(\hat{z}) \right)} \omega_{p, r}(\hat{z}) \wedge \overline{\omega_{p, r}(\hat{z})} =$$

$$= |c_{p, n-q+p}|^2 \int_{G_p(\text{Апп} c)} (Q_1(\zeta) \psi_1(\zeta)) \overline{(Q_2(\zeta) \psi_2(\zeta))} \omega_{r, p}(\zeta) \wedge \overline{\omega_{r, p}(\zeta)}. \quad (3.4)$$

Полученное равенство совпадает с равенством (3.3), что вытекает из следующих простых утверждений:

1) Если в V и V' заданы двойственные базисы $\{e_i\}$ и $\{e^i\}$ такие, что $e_i = y_i$, $i = 1, \dots, q-p$, то в этих базисах имеем:

$$\sigma_y(z) = \omega_{p, r}(\hat{z}), \quad \tau_y(\zeta) = \omega_{r, p}(\zeta);$$

2) $\tilde{\varphi}_i(\zeta) = \tilde{\varphi}_i(c, \zeta)$, где $\tilde{\varphi}_i$ — функция, заданная равенством (3.1);

3) $\tilde{Q}_i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{\varphi}_i(\bar{z}) = Q_i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi_i(y \wedge z)$.

Предложение 3. Пусть $f \in F_p^{q,q}$ и $\varphi = Icf$. Тогда функция $\tilde{\varphi}$, определенная равенством (3.1), связана с функцией $\tilde{f} = R_{p,n}^{q,q} f$ следующим соотношением:

$$\tilde{\varphi}(c, \zeta) = \tilde{f}(\zeta) \quad (3.5)$$

для любого $\zeta \in \bar{G}_p(V')$ и любого $c \in C$, ортогонального ζ .

Доказательство. По определению

$$\tilde{f}(\zeta) = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-p)} \int_{\sigma_p(V)} f(z) \delta^{(n-q-p, n-q-p)}(z\zeta) \omega_{p,n}(z) \wedge \overline{\omega_{p,n}(z)}, \quad (3.6)$$

где z — $p \times n$ -матрица, а ζ — $n \times p$ -матрица. Удобно записывать матрицы z в виде $z = (z_1, z_2, z_3)$, где z_1, z_2, z_3 — матрицы, соответственно

но, из $q - p, n - q$ и p столбцов. Аналогично будем писать $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}$.

Пусть $\zeta \in \bar{G}_p(V')$ и $c \perp \zeta$. Так как интеграл (3.6) не зависит от выбора исходного базиса $e_1, \dots, e_n$ в V , то можно предполагать, что векторы $e_1, \dots, e_{q-p}$ образуют базис в c . Так как $\zeta \perp c$, то в базисе, двойственном к $e_1, \dots, e_n$ имеем: $\zeta_1 = 0$. В результате, перейдя в выражении для $\tilde{f}$ к неоднородным координатам, $z = (t, w, e)$, где e — единичная матрица, получим

$$\tilde{f}(\zeta) = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-p)} \int f(t, w, e) \delta^{(n-q-p, n-q-p)}(w\zeta_2 + \zeta_3) dt \wedge dw \wedge \bar{dt} \wedge \bar{dw},$$

где $dt = \bigwedge_{i,j} dt_{ij}$, $dw = \bigwedge_{i,j} dw_{ij}$.

Теперь преобразуем выражение (3.1) для $\tilde{\varphi}$. В этом выражении можно принять, что $y = (e, 0)$, где e — единичная матрица, а z пробегает p -векторы из пространства V_1 , натянутого на $e_{q-p+1}, \dots, e_n$, т. е. задается матрицами $z = (0, z_2, z_3)$. Тогда выражение для $\tilde{\varphi}$ принимает вид

$$\tilde{\varphi}(c, \zeta) = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-q)} \int_{\sigma_p(V_1)} \varphi(y, z) \delta^{(n-q-p, n-q-p)}(z_2\zeta_2 + z_3\zeta_3) \omega_{p,r}(z_2, z_3) \wedge \overline{\omega_{p,r}(z_2, z_3)},$$

или в неоднородных координатах $(z_2, z_3) = (w, e)$

$$\tilde{\varphi}(c, \zeta) = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-q)} \int \varphi(y, z) \delta^{(n-q-p, n-q-p)}(w\zeta_2 + \zeta_3) dw \wedge \bar{dw},$$

где $z = (0, w, e)$. Подставим сюда выражение функции φ через f , записанное в неоднородных координатах:

$$\varphi(y, z) = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(q-p)} \int f(ty+z) dt \wedge d\bar{t} = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(q-p)} \int f(t, w, e) dt \wedge d\bar{t},$$

где $t - p \times (q-p)$ -матрица, $dt = \bigwedge_{j=1} dt_j^i$. Мы получим

$$\bar{\varphi}(c, \zeta) = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-p)} \int f(t, w, e) \delta^{(n-q-p, n-q-p)}(w\zeta_2 + \zeta_3) dt \wedge d\bar{t} \wedge dw \wedge d\bar{w}.$$

Итак, $\bar{\varphi}(c, \zeta) = \bar{f}(\zeta)$, что и требовалось доказать.

2°. Доказательство теоремы 1. Введем многообразие A пар (c, γ) , где $c \in C$, $\gamma \in G_p(V')$ и $c \perp \gamma$. Определим отображения $\pi_1: A \rightarrow G_p(V')$ и $\pi_2: A \rightarrow C$, полагая $\pi_1(c, \gamma) = \gamma$, $\pi_2(c, \gamma) = c$.

Пусть $f_1, f_2 \in F_p^{q,q}$, $\varphi_i = I_c f_i$ и пусть $\tilde{\varphi}_i(c, \zeta)$ — функции, определяемые через φ_i равенством (3.1). Пусть, далее, $P(\zeta) \in H_p^{m_1, m_2}(V)$, где $m_1 + m_2 = n - 2q$. Зададим следующую дифференциальную форму на многообразии $\tilde{A}$ пар (c, ζ) , где $c \in C$, $\zeta \in \bar{G}_p(V')$ и $c \perp \zeta$:

$$|P(\zeta)|^2 \tilde{\varphi}_1(c, \zeta) \overline{\tilde{\varphi}_2(c, \zeta)} \omega_{n,p}(\zeta) \wedge \overline{\omega_{n,p}(\zeta)}.$$

Эта форма имеет степень однородности 0 относительно ζ , а потому она опускается с $\tilde{A}$ на A при естественном отображении $\tilde{A} \rightarrow A$. Положим

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-p)} \int_A |P(\zeta)|^2 \tilde{\varphi}_1(c, \zeta) \overline{\tilde{\varphi}_2(c, \zeta)} \omega_{n,p}(\zeta) \wedge \overline{\omega_{n,p}(\zeta)}.$$

Преобразуем этот интеграл двумя способами. С одной стороны, ввиду гармоничности C для почти каждого $\gamma \in G_p(V')$ прообраз $\pi_1^{-1}(\gamma)$ состоит из конечного числа точек, равного $Cr(C)$. При этом, в силу предложения 3, $\tilde{\varphi}_i(c, \zeta) = \tilde{f}_i(\zeta)$ на $\pi_1^{-1}(\gamma)$. Следовательно

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = Cr(C) \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-p)} \int_{G_p(V')} |P(\zeta)|^2 \tilde{f}_1(\zeta) \overline{\tilde{f}_2(\zeta)} \omega_{n,p}(\zeta) \wedge \overline{\omega_{n,p}(\zeta)}.$$

Отсюда по теореме Планшереля для обобщенного преобразования Радона (предложение 1) получаем

$$\begin{aligned} J(\varphi_1, \varphi_2) &= \frac{Cr(C)}{|a_{p,n}|^2} \left(\frac{i}{2}\right)^{p(n-p)} \int_{G_p(V)} \left(P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) f_1(z) \right) \times \\ &\times \left(\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) f_2(z)} \right) \omega_{p,n}(z) \wedge \overline{\omega_{p,n}(z)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{Cr(C)}{|a_{p,n}|^2} (f_1, f_2)_p. \quad (3.7)$$

С другой стороны, поскольку A является расслоением над C , то $J(\varphi, \varphi_2)$ можно представить как повторный интеграл. Для этого зададим сечение $s: C \rightarrow \pi_{q-p}^{-1} C \subset G_{q-p}(V)$ и представим дифференциальную форму $\omega_{p,p}(\zeta)$ на A в виде (3.2):

$$\omega_{p,p}(\zeta) = \left(\bigwedge_{i,j} \langle y_i \wedge d^* y_j \rangle \right) \wedge \tau_y(\zeta) = (-1)^{p(q-p)} \bigwedge_{i,j} \langle y_i, dy_j \rangle \wedge \tau_y(\zeta),$$

где $y = sc$. Мы имеем

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = \left(\frac{i}{2} \right)^{p(n-p)} \int_C \int_{\pi_2^{-1}(c)} |P(\zeta)|^2 \overline{\varphi_1(c, \zeta)} \overline{\varphi_2(c, \zeta)} \bigwedge_{i,j} \langle y_i, dy_j \rangle \times \\ \times \bigwedge_{i,j} \overline{\langle y_i, dy_j \rangle} \wedge \tau_y(\zeta) \wedge \overline{\tau_y(\zeta)}.$$

Применяя к внутреннему интегралу предложение 2, получаем

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = |a_{p, n-q+p}|^{-2} \left(\frac{i}{2} \right)^{p(n-p)} \int_C \int_{G_{p,p}(V|c)} \left(\sigma_y(z) \wedge P \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_{i,j} \bigwedge \right. \\ \left. \wedge \left\langle \frac{\partial}{\partial z_j}, dy_i \right\rangle \varphi_1 \right) \wedge \overline{\left(\sigma_y(z) \wedge P \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_{i,j} \left\langle \frac{\partial}{\partial z_j}, dy_i \right\rangle \varphi_2 \right)} = \\ = |a_{p, n-q+p}|^{-2} \left(\frac{i}{2} \right)^{p(n-p)} \int_C \int_{G_{p,p}(V|c)} \left(\sigma_y(z) \wedge P \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_{i,j} \varphi_1 \right) \wedge \\ \wedge \overline{\left(\sigma_y(z) \wedge P \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_{i,j} \varphi_2 \right)},$$

т. е.

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{Cr(C)}{c(p, q, n)} |a_{p, n-q-p}|^{-2} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_p. \quad (3.8)$$

Сравнивая (3.7) и (3.8), заключаем: если в формуле (1.9) для $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_p$ принять

$$c(p, q, n) = \left| \frac{a_{p, n}}{a_{p, n-q+p}} \right|^2, \quad (3.9)$$

то $(f_1, f_2)_p = \langle J_C f_1, J_C f_2 \rangle_p$, что и требовалось доказать.

Примечание. Мы не приводим явного числового выражения для $a_{p,n}$, а тем самым и для $c(p, q, n)$. Заметим лишь, что $a_{p,n}$ можно представить в виде интеграла. Например, если $n=2m$, то

$$a_{p,n}^{-1} = \left(\frac{i}{2} \right)^{p(n-p)} \int_{G_{p,p}} \det(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^{-m} \delta^{(m-p, m-p)}(z_1) \omega_{p,n}(z) \wedge \overline{\omega_{p,n}(z)}, \quad (3.10)$$

где $z = (z_1, z_2)$, z_1, z_2 — соответственно, $p \times p$ и $p \times (n-p)$ -матрицы. В самом деле, положим $f = \det(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^{-m}$, $f \in F_p^{m,m}$. Нетрудно убедиться, что $R_{p,n}^{m,m} f = c \det(\zeta \zeta^*)^{-m}$. Отсюда следует, что $|a_{p,n}| = |c|^{-1}$, и можно принять $a_{p,n} = c^{-1}$. Полагая в равенстве $a_{p,n}^{-1} \det(\zeta \zeta^*)^{-m} = R_{p,n}^{m,m} f$

$\zeta = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$, где e — единичная матрица, получаем равенство (3.10). Аналогичное выражение для a_p получается при нечетном p .

3°. Доказательство теоремы 2. Теорема 2 следует непосредственно из предложения 3. Именно, если $\varphi \in \bar{F}_p^q$ принадлежит образу пространства $\bar{F}_p^{q,q}$, то, в силу предложения 3, φ удовлетворяет условию теоремы 2. Обратно, если φ удовлетворяет условию теоремы 2, то определим функцию $f = \bar{F}_p^{q,q}$ равенством $\tilde{f}(\zeta) = \tilde{\varphi}(c, \zeta)$, где $\tilde{f}$ — обобщенное преобразование Радо на функции f , а $c \in C$ — произвольное подпространство, ортогональное ζ . Это определение корректно, в силу условия теоремы 2. Тогда, если $\psi = I_C f$, то для любой ортогональной пары c, ζ имеем: $\tilde{\psi}(c, \zeta) = \tilde{f}(\zeta) = \tilde{\varphi}(c, \zeta)$, откуда $\varphi = \psi = I_C f$.

Институт прикладной математики АН СССР.

Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 17.V.1983

Ի. Դ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ի. Մ. ԳԵԼՖԱՆԴ, Մ. Ի. ԳՐԱԵՎ, Գ. Ռ. ՕԳԱՆԵՍՅԱՆ. Պլանշերելի բևեռների գրամմանի թաղմանությունների զույգի հետ կապված ինտեգրալ ձևափոխության համար (ամփոփում)

Հոդվածում դիտարկվում է ինտեգրալ ձևափոխություն, որը կապված է $G_p(V)$ և $G_q(V)$ գրամմանի թաղմանությունների զույգի հետ, V -զծային կոմպլեքս n -չափանի տարածություն է, $p(q-p)$ -չափանի $C \subset G_{q-p}(V)$ ենթաթաղմանության օգնությամբ որոշված է K_C կոմպլեքսը, K_C -ը ն կազմված է այն $h \in G_q(V)$ ենթատարածություններից, որոնք պարունակում են զոնն մեկ ենթատարածություն $c \in C$, Դիցույ I_C -ն ինտեգրալ ձևափոխություն է, որը ամեն մի f ֆունկցիային $G_p(V)$ -ի վրա համապատասխանեցնում է $\varphi(h)$ ֆունկցիա K_C -վրա, $\varphi(h)$ -ն հավասար է f -ի ինտեգրալին $h \in K_C$ ենթատարածությունով, Այն դեպքում, երբ C -ն հարմոնիկ թաղմանություն է, այդ ձևափոխության համար ապացուցված է Պլանշերելի բևեռները և ստացված է ձևափոխության պատկերի նկարագրումը:

R. G. AIRAPETIAN, I. M. GELFAND, M. I. GRAEV, G. R. HOVHANNISIAN.

The Plancherel theorem for integral transformation, connected with a pair of Grassman manifolds (summary)

In the paper an integral transformation connected with a pair of Grassman manifolds $G_p(V)$ and $G_q(V)$ is considered, where V is the linear complex n -dimensional space. By means of $p(q-p)$ -dimensional submanifold $C \subset G_{q-p}(V)$ the complex $K_C \subset G_q(V)$ is defined: K_C consists of the subspaces $h \in G_q(V)$ containing no less than one subspace $c \in C$. Let I_C be an integral transformation mapping every function f on $G_p(V)$ to a function $\varphi(h)$ on K_C : $\varphi(h)$ is the integral of f by the subspace $h \in K_C$. The Plancherel theorem for this transformation is described in the case where C is a harmonic manifold.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Г. Айрапетян, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Г. Р. Оганесян. Формула Планшереля для интегрального преобразования, связанного с комплексом p -мерных плоскостей в CP^n , ДАН СССР, 268, № 2, 1983, 265—268.
2. И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, М. И. Граев. Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах, В сб. «Современные проблемы математики», т. 16 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР), М., 76, 1980.

3. И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Комплексы прямых в пространстве S^n . Функци. анализ и его прилож., 2, № 3, 1968, 39—52.
4. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Э. Я. Шапиро. Интегральная геометрия в проективном пространстве, Функци. анализ и его прилож., 4, № 1, 1970, 14—32.
5. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Э. Я. Шапиро. Задача интегральной геометрии, связанная с парой грассмановых многообразий, ДАН СССР, 193, № 2, 1970, 259—262.
6. И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк. Унитарные представления классических групп, Труды Матем. ин-та им. Стеклова, 36, 1950.
7. С. Г. Гиндикин. Унитарные представления групп автоморфизмов римановых симметрических пространств нулевой кривизны, Функци. анализ и его прилож., 1, № 1, 1967, 32—37.
8. К. Майус. Структура допустимых комплексов прямых в S^n , Труды ММО, 39, 1979, 181—211.
9. Е. Е. Петров. Пресобразование Радона в пространствах матриц и грассмановых многообразиях, ДАН СССР, 177, № 4, 1967, 782—785.
10. Е. Е. Петров. Пресобразование Радона в пространстве матриц, Тр. семинара по векторам и тензорам, анализу с их прилож. к геометрии, мех. и физ., МГУ, вып. 15, 1970, 299—315.

Ր Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Պ. Ա. Վաղարշակյան, Վիներ-Հոպֆի դիսկրետ հավասարումների լուծումների վարքի մասին	415
Ռ. Ա. Ալեքսանդրյան, Ռ. Զ. Ալեքսանդրյան, Կամայական ինքնահամարած օպերատորների էսպեկտորը բնութագրող որակական հայտանիշների վերաբերյալ	436
Յ. Ի. Հարությունյան, L^p $0 \leq p < 1$ դասի ֆունկցիաների ներկայացումը արագ նվազող գործակիցներով եռանկյունաչափական շարքերով	448
Խ. Գ. Հայրապետյան, Ի. Մ. Կելթանյ, Մ. Ի. Կրան, Գ. Ռ. Հովհաննիսյան, Պլանշերեի թևերով գրասմանի բազմաձևությունների դուգի հետ կապված ինտեգրալ ձևափոխության համար	467

СОДЕРЖАНИЕ

А. А. Вагаршакян. О поведении решения дискретных уравнений Винера—Хопфа	415
Р. А. Александриян, Р. З. Мкртчян. О качественных признаках, характеризующих спектр общих самосопряженных операторов	436
Յ. Գ. Հարությունյան. Представление функций из L^p , $0 \leq p < 1$ тригонометрическими рядами с быстро убывающими коэффициентами	448
Р. Г. Айрапетян, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Г. Р. Оганесян. Теорема Планшереля для интегрального преобразования, связанного с парой грассмановых многообразий	467

CONTENTS

A. A. Vagarshakyan. On the behaviour of the solution of discrete Wiener—Hopf equations	415
R. A. Alexandrian, R. Z. Mkrтчian. On the qualitative criteria characterizing the spectrym of arbitrary self-adjoint operators	436
F. G. Harutunian. Representation of functions from L^p , $0 \leq p < 1$ by trigonometrical series with rapidly decreasing coefficients	448
R. G. Atrapetian, I. M. Gelfand, M. I. Graev, G. R. Hovhannistan. The Plancherel theorem for integral transformation, connected with a pair of Grassman manifolds	467

Ր Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա»
ամսագրի 1984 թ., XIX, №№ 1—6

Գ. Ռ. Ալեքսանդրյան. Մի մոդելային հավասարման Կոչու խնդրի սլարամետրիկսը և լուծման ալգորիթի ճակատը	3, 219
Ռ. Ա. Ալեքսանդրյան, Ռ. Ջ. Մկրտչյան. Կամայական ինքնահամալուծ օպերատորների սպեկտրը բնութագրող որակական հայտանիշների վերաբերյալ	6, 436
Յու. Ռ. Դաշյան և Յու. Մ. Սուխով. Դիսկոնտ ժամանակով պատահական պրոցեսների մի մասի գերբայան նկարագրությունը	4, 294
Ի. Գ. Խաչատրյան. Ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ օպերատորների հետ կապված շրջման բանաձևերի մասին	4, 265
Լ. Խեյդրի, Գ. Շուշյան. Պայմ-հիշյի բանաձևերի ընդհանրացումներ	4, 289
Մ. Լ. Կարախանյան. Կոմուտատորների ասիմպտոտիկ հատկությունները բանախան հանրահաշիվներում	3, 187
Ն. Կ. Կարապետյան, Ռ. Ս. Ռուբին. Կոտորակային ինտեգրման օպերատորների մասին կշռով տարածություններում	1, 31
Մ. Գ. Կեյն, Ֆ. Է. Միլլ-Ադամյան. Ինտեգրալ Հանկելյան օպերատորները և նրանց հետ կապված շարունակության խնդիրները	4—5, 311
Յու. Ա. Կուտայան. Պուսսոնյան տիպի պրոցեսների սլարամետրիկ դիսկոնտինյու	3, 233
Յ. Գ. Հաբաթյանյան. $Lp, 0 < p < 1$ դասի ֆունկցիաների ներկայացումը արագ նվազող գործակիցներով եռանկյունաչափական շարքերով	6, 448
Տ. Ն. Հաբաթյանյան, Ս. Մ. Իվանյան. Առանցքի և կիսաառանցքի վրա որոշված 2 չափանի Դիրակի համակարգի պոտենցիալի ֆինիտությունը և Իոստի ֆունկցիաների անալիտիկ հատկությունները	4, 289
Ռ. Գ. Հաբաթյան, Ի. Մ. Գեյզադ, Մ. Ի. Գրան, Գ. Ռ. Հովհաննիսյան. Պլանշերեի թեորեմ գրասմանի բազմաձևությունների դուգի հետ կապված ինտեգրալ ձևափոխության համար	6, 467
Վ. Մ. Մարտիրոսյան. Վերջավոր կարգի ամբողջ ֆունկցիաների ընդհանուր դասերի պարամետրական ներկայացման Մ. Մ. Զրբաշյանի թեորեմի նոր առաջացում	1, 44
Դ. Վ. Միլայանյան. Կիսահարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիաների հետ զուգորդված ֆուրյեի ձևափոխություն	5, 361
Վ. Ա. Յուրկա. Պարամետրով եզրային պայմաններում եզրային խնդիրների մասին	5, 398
Ռ. Լ. Շահբադյան. Ընդհանուր եզրային խնդրի բարձր կարգի էլիպտական օպերատորների համար եզրով անվերջ չափանի բազմաձևությունների վրա	1, 3
Ա. Ա. Վաղարշապետյան. Վինհեր-Հոպֆի դիսկոնտ հավասարումների լուծումների վարքի մասին	6, 415
Մ. Մ. Զրբաշյան. Ինտերպոլյացիոն և սպեկտրալ վերլուծություններ՝ առնված կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների հետ	2, 81
Ս. Գ. Ռաֆայիյան. Որոշ լիոթթագոնալ համակարգերի բազիսությունը կշռային դասերում	3, 207
Յ. Ա. Սիդիբի. Անվերջ դիֆերենցիալ ֆունկցիաների դասերի համարժեցության մասին	1, 19
Ա. Հ. Փամպյան. Համարյա գումարա-տարբերակային կորիզով ինտեգրալ հավասարումների դիսկոնտ անալիզի նորմալ լուծելիության մասին	3, 187
Ա. Հ. Փամպյան, Հ. Ռ. Նուրիյան. Համարյա գումարա-տարբերակային կորիզով ինտեգրալ օպերատորների շրջման մասին	5, 390
Վ. Կ. Օհանյան. Պատահական խոնկարի ատիպիկ կողի երկարության բաշխման մասին	5, 377
Վ. Հ. Օհանյան. Խզվող եզրային պայմաններով երկրորդ կարգի էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի համար Պուանկարեի խնդիրը	3, 248

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия «Математика» за 1984 г.,
XIX, №№ 1—6

<i>Р. Г. Айрапетян, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Г. Р. Оганесян.</i> Теорема Планшереля для интегрального преобразования, связанного с парой грассмановых многообразий	6, 467
<i>Г. Р. Александрян.</i> Параметрикс и распространение волнового фронта решения задачи Коши для одного модельного уравнения	3, 219
<i>Р. А. Александрян, Р. Э. Мкртчян.</i> О качественных признаках, характеризующих спектр общих самосопряженных операторов	6, 436
<i>Ф. Г. Арутюнян.</i> Представление функций из $L^p, 0 \leq p < 1$ тригонометрическими рядами с быстро убывающими коэффициентами	6, 449
<i>Т. Н. Арутюнян, С. М. Иваниц.</i> Финитность потенциала и аналитические свойства функций Йоста системы Дирака 2-го порядка на оси и полуоси	4, 289
<i>А. А. Вазаришакян.</i> О поведении решения дискретных уравнений Винера—Хопфа	6, 415
<i>Ю. Р. Дашян, Ю. М. Сухов.</i> Гиббсовское описание одного класса случайных процессов с дискретным временем	4, 294
<i>М. М. Джрбашян.</i> Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка	2, 81
<i>А. Г. Камалян.</i> О нормальной разрешимости дискретного аналога интегральных уравнений с почти разностно-суммарным ядром	5, 390
<i>А. Г. Камалян, А. Б. Нерсисян.</i> Об обращении интегральных операторов с почти разностно-суммарным ядром	3, 187
<i>Н. К. Карапетянц, Б. С. Рубин.</i> Об операторах дробного интегрирования в пространствах с весом	1, 31
<i>М. И. Караханян.</i> Асимптотические свойства коммутаторов элементов банаховых алгебр	3, 242
<i>М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.</i> Интегральные ганкелевы операторы и связанные с ними проблемы продолжения	4—5, 311
<i>Ю. А. Кутоянц.</i> Оценивание параметров процессов пуассоновского типа	3, 233
<i>В. М. Мартиросян.</i> Новое доказательство теоремы М. М. Джрбашяна о параметрическом представлении общих классов целых функций конечного порядка	1, 44
<i>Г. В. Микаелян.</i> Преобразование Фурье ассоциированное с функциями мероморфными в полуплоскости	5, 361
<i>В. А. Оганян.</i> Задача Пуанкаре для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными граничными условиями	5, 377
<i>В. К. Оганян.</i> О распределении длины «типичного» ребра случайной мозаики	3, 248
<i>С. Г. Рафаян.</i> Базисность некоторых биортогональных систем в $L^2(-\sigma, \sigma)$ с весом	3, 207
<i>Дж. А. Сиддики.</i> Об эквивалентности классов бесконечно дифференцируемых функций	1, 19
<i>И. Г. Хачатрян.</i> О формулах обращения, связанных с самосопряженными дифференциальными операторами	4, 265
<i>Л. Хейнрих, Д. Штойян.</i> Обобщения формул Пальма—Хинчина	4, 289
<i>Р. А. Шахбазян.</i> Общая краевая задача для эллиптических операторов высокого порядка на бесконечномерных многообразиях с краем	1, 3
<i>В. А. Юрко</i> О краевых задачах с параметром в краевых условиях	5, 398.

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR
 seria "Mathematika", 1984, vol. 19, №№ 1-6

<i>R. G. Atrapietian, I. M. Gelfund, M. I. Graev, G. R. Hovhannisian.</i> The Plancherel theorem for integral transformation, connected with a pair of Grassman manifolds	6, 467
<i>G. R. Alexandrtun.</i> Parametrix and propagation of the wave front to a Cauchy problem for a model hyperbolic equation	3, 219
<i>R. A. Alexandrtun, R. Z. Mkrtclan.</i> On the qualitative criteria characterizing the spectrum of arbitrary self-adjoint operators	6, 436
<i>Yu. R. Dashlian, Yu. M. Suhov.</i> Gibbs description of a class of random processes with discrete time	4, 294
<i>M. M. Djrbashlian.</i> Interpolating and spectral expansions associated with differential operators of fractional order	2, 81
<i>F. G. Harutluntan.</i> Representation of functions from L^p , $0 < p < 1$ by trigonometrical series with rapidly decreasing coefficients	6, 448
<i>T. N. Harutluntan, S. M. Ivanian.</i> The finiteness of the potential and analytic properties of the lost functions of the $2-n$ order Dirac system on the axis and half-axis	4, 289
<i>L. Heinrich, D. Stoyan.</i> On generalized Palm-Kchinchin formulas	4, 289
<i>A. G. Kamalian.</i> About the normal solvability of the discrete versions of integral equations with almost summable-difference kernel	5, 390
<i>A. G. Kamalian, A. B. Nerseslan.</i> About the inversion of the integral operators with the almost sum-difference kernel	3, 187
<i>M. I. Karahantian.</i> The asymptotic properties of the Banach algebras elements commutators	3, 242
<i>N. K. Karapetians, B. S. Rubin.</i> On the fractional integration operators in weight spaces	1, 31
<i>I. G. Khachatrtian.</i> On inversion formulas connected with self-adjoint differential operators	4, 265
<i>M. G. Krain, F. E. Melik-Adamian.</i> Integral Hankelian operators and prolongation problems considered with them	4-5, 311
<i>Yu. A. Kutoyants.</i> Parameter estimation for Poisson type processes	3, 233
<i>G. V. Mikaelian.</i> A Fourier transform associated with functions meromorphic in the half-plane	5, 361
<i>V. K. Ogantan.</i> On distribution of the length of the "typical" edge of a random tessellation	3, 248
<i>V. H. Ohantian.</i> The Poincare problem for the elliptic system of differential equations with discontinuous boundary conditions	5, 377
<i>V. M. Martirosian.</i> A new proof of the M. M. Djrbashian's theorem on the parametric representation for general classes of entire functions of finite order	1, 44
<i>S. G. Rafaelian.</i> Basisness of some biorthogonal systems in $L^2(-\pi, \pi)$ with weight	3, 207
<i>R. L. Shakhbagtan.</i> General boundary problem for elliptic operators of high order on the infinite dimensional manifolds with a boundary	1, 3
<i>J. A. Stiddiqi.</i> On the equivalence of classes of infinitely differentiable functions	1, 19
<i>A. A. Vagarshaklian.</i> On the behaviour of the solution of discrete Wiener-Hopf equations	6, 415
<i>V. A. Jourko.</i> About boundary value problems with a parameter in boundary conditions	5, 398