ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском английском французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилии автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIX, № 5, 1984 Математика

УДК 517.98

М. Г. КРЕЙН, Ф. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ГАНКЕЛЕВЫ ОПЕРАТОРЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПРОБЛЕМЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ
(продолжение)*

§ 5. Свойства пар Шмидта ганкелева оператора

1. В дальнейшем, при рассмотрении *м*-функций $\Gamma \in L^1_{n\times m}(R)$ для определенности будем считать, что $m \leqslant n$. Пусть $\rho \neq 0$ есть некоторое s-число ганкелева оператора Γ, порожденного *м*-функцией $\Gamma(t)$ и действующего из $L^2_{m\times 1}(R)$ в $L^2_{n\times 1}(R)$. Тогда $\rho \in \sigma(\Gamma_\Delta)$. Рассмотрим собственное подпространство $\mathfrak{M}_\rho$ оператора Γ_Δ, отвечающее собственному значению $\rho \neq 0$:

$$\mathfrak{M}_\rho = \{\chi \in L^2_{(m+n)\times 1}(\mathbf{R}_+) | \Gamma\chi = \rho\chi\}.$$

Согласно утверждению 1° § 2: $\mathfrak{M}_\rho \subset AC_{(m+n)\times 1}(\mathbf{R}_+) \cap L^1_{(m+n)\times 1}(\mathbf{R}_+)$, поэтому для $\chi \in \mathfrak{M}_\rho$ имеем

$$\rho \frac{d\chi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\chi(s)\,ds = -\Gamma_\Delta\chi(0) - $$

$$-\int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\frac{d\chi(s)}{ds}\,ds. \tag{5.1}$$

Лемма 5.1. *Если* $\chi \in \mathfrak{M}_\rho$, *то* $J\chi' \in \mathfrak{M}_\rho$ ($\chi' \in \mathfrak{M}_{(-\rho)}$) *в том и только том случае, когда* $\chi(0)=0$.

Справедливость леммы непосредственно следует из равенства (5.1) с учетом соотношения $J\Gamma_\Delta(t) = -\Gamma_\Delta(t)J$ $\forall t \in \mathbf{R}_+$.

Лемма 5.2. *Для произвольных элементов* χ_1 *и* χ_2 *из* $\mathfrak{M}_\rho$ *справедливо соотношение*

$$F^*(\chi_1; \lambda)\,JF(\chi_2; \lambda) = 0 \quad \forall\lambda \in R \quad \left(F(\chi; \lambda) := \int_0^\infty \exp(\lambda tJ)\,\chi(t)\,dt\right). \tag{5.2}$$

Доказательство. С помощью преобразования, аналогичного (1.5), имеем

$$F^*(\chi_1; \lambda)\,JF(\chi_2; \lambda) = \int_0^\infty \chi_1^*(t)\exp(-\lambda tJ)\,dt\,J\int_0^\infty \exp(\lambda tJ)\,\chi_2(t)\,dt =$$

* Начало см. в № 4 с. г.

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_1^*(t+s)\exp(-\lambda tJ)\,J\chi_2(s)\,dsdt+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_1^*(t)\exp(\lambda sJ)\,J\chi_2(t+s)\,dtds.$$

С другой стороны

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_1^*(t)\exp(\lambda sJ)\,J\chi_2(t+s)\,dtds=\frac{1}{\rho}\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_1^*(t)\exp(\lambda sJ)\times$$

$$\times J\left(\int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s+u)\,\chi_2(u)\,du\right)dtds=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \chi_1^*(t)\,\Gamma_\Delta(t+s+u)\,dt\right)\exp(-\lambda sJ)\,J\chi_2(u)\,duds=$$

$$=-\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_1^*(u+s)\exp(-\lambda sJ)\,J\chi_2(u)\,duds.\ \square$$

Соотношение (5.2) можно представить в виде

$$F_+^*(\xi_1;\lambda)\,F_+(\xi_2;\lambda)=F_-^*(\eta_1;\lambda)\,F_-(\eta_2;\lambda)(\lambda\in R).\qquad(5.3)$$

Оно справедливо для пар Шмидта именно ганкелева оператора; для пар Шмидта $\{\xi_j,\eta_j\}$ ($j=1, 2$) произвольного линейного ограниченного оператора можно утверждать только, что $(\xi_1, \xi_2)=(\eta_1, \eta_2)$.

Через $\mathfrak{M}_\rho(0)(\subset C^{m+n})$ обозначим множество значений в нуле функций из $\mathfrak{M}_\rho$: $\mathfrak{M}_\rho(0)=\{\chi(0)|\chi\in\mathfrak{M}_\rho\}$.

Лемма 5.3. *Множество $\mathfrak{M}_\rho(0)$ является J-нейтральным подпространством в C^{m+n}.*

Поэтому (см. [17]), ему соответствует частично изометрический угловой оператор K: $C^m\to C^n$ такой, что значения в нуле пар Шмидта $\{\xi(0), \eta(0)\}$ связаны соотношением $\eta(0)=K\xi(0)$.

Доказательство. Легко видеть, что $F(\chi';\lambda)=-\chi(0)-\lambda JF(\chi;\lambda)$. Отсюда $\chi(0)=\lim\limits_{\lambda\to\infty}-\lambda JF(\chi;\lambda)$; $\chi^*(0)\,J\chi(0)=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda^2 F^*(\chi_1;\lambda)=$

$=JF(\chi_2;\lambda)=0$.

Следствие. $\dim\mathfrak{M}_\rho(0)\leqslant m$.

Определение 5.1. *Упорядоченная система $\{\chi^{[1]},\chi^{[2]},\dots,\chi^{[l]}\}$ элементов из $\mathfrak{M}_\rho$ называется D-цепочкой собственных элементов оператора Γ_Δ, если $\chi^{[1]}(0)\neq 0$, а $\chi^{[k]}(t)=-J\int_0^1\chi^{[k-1]}(s)\,ds$ $(k=\overline{2, l})$.*

Элемент $\chi^{[1]}$ называется базовым элементом D-цепочки, а число l—ее длиной.

D-цепочку с базовым элементом χ и длиной l обозначим через $D(\chi;\ l)$ $(D(\chi;\ l)=\{\chi\,(=\chi^{[1]}),\ \chi^{[2]},\cdots,\chi^{[l]}\}$.

Длина l произвольной D-цепочки $D(\chi;\ l)$ не превышает размерности подпространства $\mathfrak{M}_\rho$ $(l\leqslant\dim\mathfrak{M}_\rho)$. В самом деле, если

$$\sum_{k=1}^{l}\alpha_k\,\chi^{[k]}(t)\equiv 0,$$

то полагая $t=0$, получим $\alpha_1=0$. Далее, дифференцируя полученное тождество и снова полагая $t=0$, получим $\alpha_2=0$, и так далее. Подобным образом, легко убедиться в том, что элементы нескольких D-цепочек в своей совокупности линейно независимы, если линейно независимы значения в нуле их базовых элементов.

В множестве всех D-цепочек введем следующее отношение эквивалентности: $D(\chi_1;\ l_1)\sim D(\chi_2;\ l_2)$, если $\chi_1(0)=\chi_2(0)$. Таким образом, каждому вектору из $\mathfrak{M}_\rho(0)$ ставится в соответствие (одно-однозначно) класс эквивалентных D-цепочек. При этом нулевому вектору соответствует пустой класс.

Определение 5.2. *D-цепочка $D(\chi;\ l)$ называется максимальной, если в классе эквивалентных ей D-цепочек нет цепочки большей длины.*

В $\mathfrak{M}_\rho(0)$ выделим подпространства $\mathfrak{M}_\rho^p(0)\subseteq\mathfrak{M}_\rho^{p-1}(0)\subseteq\cdots$ $\cdots\subseteq\mathfrak{M}_\rho^1(0)=\mathfrak{M}_\rho(0)$ по следующему признаку: $x\,(\in\mathfrak{M}_\rho(0))$ входит в $\mathfrak{M}_\rho^k(0)$, если найдется такая D-цепочка $D(\chi;\ l)$, что $x=\chi(0)$ и $l\geqslant k$.

Пусть $\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_r\}$ — базис в $\mathfrak{M}_\rho(0)$, полученный следующим образом. Выбираем сначала базис в $\mathfrak{M}_\rho^p(0)$, затем дополняем его до базиса в $\mathfrak{M}_\rho^{p-1}(0)$, и так далее, до получения базиса в $\mathfrak{M}_\rho(0)$.

Рассмотрим систему максимальных D-цепочек $D(\chi_k;\ l_k)$ таких, что $\chi_k(0)=x_k$ $(k=\overline{1,\ r})$. Отметим, что длины l_k $(k=\overline{1,\ r})$ этих D-цепочек не зависят от выбора базиса $\{x_k\}_{k=1}^r$ указанным методом.

Лемма 5.4. *Объединение элементов D-цепочек $D(\chi_k,\ l_k)$ $(k=\overline{1,r})$ образует базис в $\mathfrak{M}_\rho$.*

Доказательство. Как было отмечено выше, рассматриваемая система линейно независима. Пусть φ_1 — произвольный элемент из $\mathfrak{M}_\rho$. Найдется такая D-цепочка $D(\psi_1;\ q_1)$, которая содержит φ_1. Положим $\varphi_2=\psi_1-\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_{1,\,k}\chi_k$, где коэффициенты $\alpha_{1,\,k}$ выбраны так, чтобы $\varphi_2(0)=\psi_1(0)-\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_{1,\,k}\chi_k(0)=0$. Заметим при этом, что, поскольку $\psi_1(0)\in\mathfrak{M}_\rho^{q_1}(0)$, в разложении $\psi_1(0)=\sum\alpha_{1,\,k}\chi_k(0)$ участвуют только те $\chi_k(0)$, которые образуют базис в $\mathfrak{M}_\rho^{q_1}(0)$. Поэтому, если $D(\psi_2;\ q_2)$ есть D-цепочка, содержащая φ_2, то $q_2\geqslant q_1+1$. Далее, положим $\varphi_3=\psi_2-$ $-\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_{2,\,k}\chi_k$, где $\alpha_{2,\,k}$ выбраны так, чтобы $\varphi_3(0)=0$. Тогда, если $\varphi_3\in$ $\in D(\psi_3;\ l_3)$, то $q_3>q_1+1$. Поэтому ясно, что, продолжая таким образом, мы необходимо придем к $\psi_n=\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_{n,\,k}\chi_k$. Отсюда φ_n получится интегрированием базового элемента ψ_n. Далее, φ_{n-1} получится интегрированием базового элемента $\psi_{n-1}=\varphi_n+\sum_{k=1}^{r}\alpha_{n-1,k}\chi_k$. Продолжая таким образом, выразим φ_1 через линейную комбинацию элементов D-цепочек $D(\chi_k, l_k)$ $(k=\overline{1, r})$. □

2. Выясним здесь некоторые свойства преобразований $F(\chi; \lambda)$ $(F_+(\xi, \lambda),\ F_-(\eta; \lambda))$ элементов $\chi\in\mathfrak{M}$, (пар Шмидта $\{\xi, \eta\}$).

Лемма 5.5. *Если* $0\neq\rho\in\sigma(\Gamma_\Delta)$ *и* $a\in C^{m+n}$, *то для разрешимости уравнения*

$$\rho\varphi(t)-\int_0^\infty\Gamma_\Delta(t+s)\,\varphi(s)\,ds=\Gamma_\Delta(t)\,a\qquad(a\in C^{m+n})\tag{5.4}$$

в классе $L^1_{(m+n)\times 1}(\mathrm{R}_+)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $a\perp\mathfrak{M}_\rho(0)$.

Доказательство. Из теории Рисса—Шаудера для вполне непрерывных операторов и из включения $\mathfrak{M}_\rho\subset L^\infty_{(m+n)\times1}(R_+)$ следует, что необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (5.4) в классе $L^1_{(m+n)\times1}(R_+)$ является условие

$$\int_0^\infty(\Gamma_\Delta(t)\,a,\ \chi(t))\,dt=0\quad\forall\chi\in\mathfrak{M}_\rho.$$

С другой стороны

$$\int_0^\infty(\Gamma_\Delta(t)\,a, \chi(t))\,dt=\left(a, \int_0^\infty\Gamma_\Delta(t)\,\chi(t)\,dt\right)=\rho\,(a, \chi(0)).\ \square$$

Пусть заданы $\varphi\in L^1_{(m+n)\times1}(R_+)$, $a\in C^{m+n}$ и $\lambda_0\in R$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases}J\psi'(t)-\lambda_0\psi(t)=\varphi(t)\\ \psi(0)=-Ja.\end{cases}\tag{5.5}$$

Легко видеть, что для суммируемого ψ система (5.5) эквивалентна соотношению $a+F(\varphi; \lambda)=(\lambda-\lambda_0)\,F(\psi; \lambda)$, и следовательно, равенство $a+F(\varphi; \lambda_0)=0$ есть необходимое условие разрешимости системы (5.5) в классе $L^1_{(m+n)\times1}(R_+)$.

Лемма 5.6. *Решение системы* (5.5) *при заданных* $a\in C^{m+n}$, $\lambda_0\in R$ *и* φ, *являющемся решением уравнения* (5.4), *принадлежит* $\mathfrak{M}$, *в том и только том случае, когда* $a+F(\varphi; \lambda_0)=0$.

Доказательство. Решение ψ системы (5.5) имеет вид

$$\psi(t)=-J\exp(-\lambda_0tJ)\left(a+\int_0^t\exp(\lambda_0sJ)\,\varphi(s)\,ds\right).$$

При условии $a+F(\varphi; \lambda_0)=0$, ψ представляется также в виде

$$\psi(t)=J\exp(-\lambda_0tJ)\int_t^\infty\exp(\lambda_0sJ)\,\varphi(s)\,ds,$$

и следовательно, является, во всяком случае, ограниченной вектор-функцией. Проверим, что она принадлежит $\mathfrak{M}_\rho$. Имеем

$$(\Gamma_\Delta \psi)(t)=\int_0^\infty \Gamma_\Delta (t+s)\, \psi (s)\, ds=\int_0^\infty \Gamma_\Delta (t + s) \times$$

$$\times \left[-J \exp (- \lambda_0 sJ) \left(a+\int_0^s \exp (\lambda_0 uJ)\, \varphi (u)\, du \right)\right] ds=$$

$$= J \int_0^\infty \exp (\lambda_0 sJ)\, \Gamma_\Delta (t + s)\, ds a +$$

$$+ J\int_0^\infty \Gamma_\Delta (t + s) \int_0^s \exp (- \lambda_0 uJ)\, \varphi (s - u)\, du ds =$$

$$=J\int_0^\infty \exp (\lambda_0 sJ)\, \Gamma_\Delta (t+s)\, ds\, a +$$

$$+J \int_0^\infty \exp (\lambda_0 uJ) \int_0^\infty \Gamma_\Delta (t + s+ u)\, \varphi (s)\, ds du =$$

$$=J\int_0^\infty \exp (\lambda_0 sJ) \left(\Gamma_\Delta (t + s)a + \int_0^\infty \Gamma_\Delta (t+s + u)\, \varphi (u)\, du\right) ds =$$

$$=\rho J \int_0^\infty \exp (\lambda_0 sJ)\, \varphi (t+s)\, ds = \rho J \exp (-\lambda_0 tJ) \times$$

$$\times \int_t^\infty \exp (\lambda_0 sJ)\, \varphi (s)\, ds. \ \square$$

Пусть $\chi \in \mathfrak{M}_\rho$. Тогда, легко проверяется, что $J\chi'$ удовлетворяет уравнению (5.4) при $a = J\chi (0)$. Вместе с тем, $a + F (J\chi'; \lambda)=\lambda F (\chi; \lambda)$. Таким образом, приходим к утверждению.

Следствие 5.1. *Если $\chi \in \mathfrak{M}_\rho$, $\lambda_0 \in R$, то решение системы*

$$\begin{cases} J\psi' (t)-\lambda_0\, \psi (t)= J\chi' (t) \\ \qquad \psi (0) =\chi (0) \end{cases} \tag{5.6}$$

принадлежит $\mathfrak{M}_\rho$ тогда и только тогда, когда $\lambda_0 F (\chi; \lambda_0) = 0$.

Из леммы 5.6 при $a = 0$ непосредственно получаем

Следствие 5.2. *Если $\chi \in \mathfrak{M}_\rho$, $\lambda_0 \in R$, то решение системы*

$$\begin{cases} J\psi' (t)-\lambda_0\psi (t)=\chi (t) \\ \qquad \psi(0)=0 \end{cases} \tag{5.7}$$

принадлежит $\mathfrak{M}_\rho$ тогда и только тогда, когда $F (\chi; \lambda_0)=0$.

При рассмотрениях этого параграфа, приведенных выше, ρ могло быть произвольным s-числом оператора Γ. Для предложения, приводимого ниже, существенно, что ρ есть наибольшее s-число оператора Γ ($\rho=\|\Gamma\|_2$).

Лемма 5.7. *Решение системы* (5.5) *при заданных*

$$a\in C^{m+n}\ (a=[a_1,\ a_2]^{\cdot};\ a_1\in C^m,\ a_2\in C^n)^*,\ \lambda_0\in C_+ \text{ и } \varphi=[\varphi_1,\ \varphi_2]^{\cdot},$$

являющемся решением уравнения (5.4) *при* $\rho=\|\Gamma\|_2$ *и удовлетворяющем условию*

$$|a_1+F_+(\varphi_1;\ \lambda)|>|a_2+F_-(\varphi_2;\ \lambda)|\ (\lambda\in R), \tag{5.8}$$

принадлежит $\mathfrak{M}_\rho$, *если* $a_1+F_+(\varphi_1;\ \lambda_0)=0$.

Доказательство. Решение

$$\psi_1(t)=-i\,e^{-i\lambda_0 t}\left(a+\int_0^t e^{i\lambda_0 s}\,\varphi_1(s)\,ds\right)$$

системы

$$\begin{cases} i\psi_1'(t)-\lambda_0\,\psi_1(t)=\varphi_1(t)\\ \qquad \psi_1(0)=-ia_1,\end{cases} \tag{5.9}$$

при условии $a_1+F_+(\varphi_1;\ \lambda_0)=0$, допускает представление

$$\psi_1(t)=ie^{-i\lambda_0 t}\int_t^\infty e^{i\lambda_0 s}\,\varphi_1(s)\,ds.$$

Так как $\operatorname{Im}\lambda_0>0$, то отсюда уже следует, что $\psi_1\in L^1_{m\times 1}(R_+)\cap$ $\cap\, AC_{m\times 1}(R_+)\subset L^2_{m\times 1}(R_+)$. Это вместе с (5.9) дает $(\lambda-\lambda_0)(a_1+F_+(\varphi;\lambda))=$ $=F_+(\psi;\ \lambda)$. С другой стороны, уравнение (5.4) приводит к соотношению (ср. с (1.10))

$$F_+(\Gamma^*;\lambda)\,(a_2+F_-(\varphi_2;\ \lambda))=\rho\,(a_1+F_+(\varphi_1;\ \lambda)+r_-(\lambda)\ \ (\lambda\in R;\ r_-\in W^-_{m\times 1}).$$

Разделим обе части этого тождества на $\lambda-\lambda_0$. Так как $\lambda_0\in C_+$, то $(\lambda-\lambda_0)^{-1}\,r_-(\lambda)\in \mathring{W}^-_{m\times 1}$ и $(\lambda-\lambda_0)^{-1}\,(a_2+F_-(\varphi_2;\ \lambda))=F_-(\psi_2;\ \lambda)$, где $\psi_2\in$ $\in L^2_{n\times 1}(R_+)$. Таким образом, имеет место тождество

$$F_+(\Gamma^*;\ \lambda)\,F_-(\psi_2;\ \lambda)=\rho\,F_+(\psi_1;\ \lambda)+(\lambda-\lambda_0)^{-1}\,r_-(\lambda)\ \ (\lambda\in R),$$

откуда

$$\rho\psi_1(\lambda)=\int_0^\infty \Gamma^*(t+s)\,\psi_2(s)\,ds\ \ (t\in R_+).$$

В силу неравенства (5.8) имеем $|F_-(\psi_2;\ \lambda)|\leqslant|F_+(\psi_1;\ \lambda)|$ и, следовательно, по теореме Планшереля $\|\psi_2\|_2\leqslant\|\psi_1\|_2$. Поэтому $\rho^2(\psi_2,\ \psi_2)\leqslant\rho^2(\psi_1,\psi_1)=$ $=(\Gamma^*\psi_2,\ \Gamma^*\psi_2)$ или $((\rho^2 I-\Gamma\Gamma^*)\,\psi_2,\ \psi_2)\leqslant 0$, а так как $\rho=\|\Gamma\|_2$, то $(\rho^2 I-$ $-\Gamma\Gamma^*)\,\psi_2=0$. Таким образом, $\{\psi_1,\ \psi_2\}$ есть пара Шмидта оператора Γ, отвечающая s-числу $\rho=\|\Gamma\|_2$.

---

* Через $[a_1,\ a_2]^{\cdot}$ обозначается столбец с элементами a_1 и a_2.

С другой стороны, легко проверить, что полученная вектор-функция $\psi=[\psi_1, \psi_2]^\tau$ удовлетворяет системе (5.5). $\sqcup$

Если $\chi \in \mathfrak{M}_\rho$, то $J\chi'$ удовлетворяет уравнению (5.4) при $a=-J\chi(0)$ и в соотношении (5.8) имеет место знак равенства. Поэтому из леммы 5.7 получаем

Следствие 5.3. *Если* $\chi=[\xi, \eta]^\tau \in \mathfrak{M}_\rho$ *при* $\rho=\|\Gamma\|_2$ *и* $\lambda_0 \in C_+$, *то решение системы* (5.6) *принадлежит* $\mathfrak{M}_\rho$ *в том и только том случае, когда* $F_+(\xi, \lambda_0)=0$.

Замечание 5.1. Подобным образом можно доказать, что при $\chi \in \mathfrak{M}_\rho$ $(\rho=\|\Gamma\|_2)$ и $\lambda_0 \in C_-$, необходимым и достаточным условием разрешимости системы (5.6) в классе $\mathfrak{M}_\rho$ является условие $F_-(\eta; \lambda_0)=0$.

Пусть теперь $D(\chi; l)$—некоторая D-цепочка в $\mathfrak{M}_\rho$ длины l. Если при некотором $\lambda_0 \in R\setminus\{0\}$ $F(\chi; \lambda_0)=0$, то в силу следствия 5.1 существует $\psi \in \mathfrak{M}_\rho$, являющееся решением системы (5.6) или, что одно и то же, удовлетворяющая равенству

$$\psi(t)+\lambda_0\int_0^t J\psi(s)\,ds=\chi(t).$$

Отсюда

$$\psi^{[k]}(t)-\lambda_0\psi^{[k+1]}(t)=\chi^{[k]}(t)\left(k=\overline{1, l};\ \psi^{[1]}:=\psi,\ \psi^{[k+1]}(t)=-J\int_0^t \psi^{[k]}(s)\,ds\right).$$

Это означает, что система $\{\psi^{[1]}, \psi^{[2]},\cdots,\psi^{[l+1]}\}$ образует D-цепочку в $\mathfrak{M}_\Gamma$ длины $l+1$, эквивалентную $D(\chi; l)$.

Поэтому справедливо утверждение.

1°. *Если* $\{\chi^{[1]}, \chi^{[2]},\cdots,\chi^{[l]}\}$ — *максимальная* D-*цепочка, соответствующая некоторому* s-*числу* ρ *оператора* Γ, *то* $F(\chi^{[1]}; \lambda)=0\ \forall\lambda \in R\setminus\{0\}$.

Аналогичным образом из следствия 5.3 и замечания 5.1 получаем

2°. *Если* $\{\chi^{[1]}, \chi^{[2]},\cdots,\chi^{[l]}\}$ $(\chi^{[1]}=[\xi, \eta]^\tau)$— *максимальная* D-*цепочка, соответствующая наибольшему* s-*числу* ρ $(=\|\Gamma\|_2)$ *оператора* Γ, *то* $F_+(\xi; \lambda)\neq 0\ \forall\lambda \in C_+$ *и* $F_-(\eta, \lambda)\neq 0\ \forall\lambda \in C_-$.

Что касается значений $F(\chi^{[k]}; \lambda)$ при $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$, то справедливо утверждение:

3°. *Суммарная кратность нуля вектор-функций* $F(\chi^{[k]}; \lambda)$ $(k=\overline{1, l})$ *в точках* $\lambda=0$ *и* $\lambda=\infty$ *для произвольной максимальной* D-*цепочки* $\{\chi^{[1]}, \chi^{[2]},\cdots,\chi^{[l]}\}$ *постоянна и равна длине этой цепочки. При этом* $F(\chi^{[l]}; \lambda)\neq 0$ *при* $\lambda=0$.

Доказательство этого утверждения основано на следующих легко проверяемых соотношениях

$$\lambda F(\chi^{[1]}; \lambda)=J\chi^{[1]}(0)+F\left(J\frac{d\chi^{[1]}}{dt}; \lambda\right);\ F(\chi^{[1]}; \lambda)=\lambda^{k-1}F(\chi^{[k]}; \lambda)(k=\overline{1, l}). \tag{5.10}$$

В самом деле, теперь достаточно проверить, что $F(\gamma^{[1]}; \lambda)\neq 0$ при $\lambda=0$. Допустим противное. Тогда, в силу следствия 5.2, найдется элемент $\psi\in\mathfrak{M}_\rho$, такой, что $J\psi'=\gamma^{[1]}$ и $\psi(0)=0$, а это противоречит максимальности D-цепочки $D(\gamma^{[1]}; l)$.

Для базового элемента $\gamma=[\xi, \eta]^\tau$ произвольной максимальной D-цепочки $D(\gamma; l)$ длины l вместе с преобразованием $F(\gamma; \lambda)$ рассмотрим „нормализованное“ преобразование

$$F_{\text{н}}^{\pm}(\gamma; \lambda):=\lambda\left(\frac{\lambda\pm i}{\lambda}\right)^l F(\gamma; \lambda).$$

Из утверждений 1°—3° следует

4°. *Для базового элемента γ произвольной максимальной D-цепочки $D(\gamma; l)$, отвечающей наибольшему s-числу ρ операторв* **Г**, *имеем*

$$F_{\text{н}}^{\pm}(\gamma; \lambda):=\lambda\left(\frac{\lambda\pm i}{\lambda}\right)^l F(\gamma; \lambda)\neq 0\ \forall\lambda\in\widehat{R}\ (:=R\cup\{\infty\}),$$

а для компонент ξ и η базового элемента γ максимальной D-цепочки $D(\gamma; l)$, отвечающей наибольшему s-числу ρ $(=|\Gamma|_2)$ оператора **Г**, *имеем*

$$\lambda\left(\frac{\lambda+i}{\lambda}\right)^l F_+(\xi, \lambda)\neq 0\ \forall\lambda\in\overline{C}_+\cup\{\infty\};$$

$$\lambda\left(\frac{\lambda-i}{\lambda}\right)^l F_-(\eta; \lambda)\neq 0\quad \forall\lambda\in\overline{C}_-\cup\{\infty\}.$$

§ 6. S-матрица, порождаемая ганкелевым оператором Г с $|\Gamma|=1$ (определенный случай)

1. Пусть задана *м*-функция $\Gamma\in L^1_{n\times m}(R_+)$ и Г—ганкелев оператор, порождаемый этой *м*-функцией.

Лемма 6.1. *Если существует нерастягивающая м-функция $S(\lambda)(\lambda\in R)$, допускающая представление:*

$$S(\lambda)=F_-(\Gamma; \lambda)+\Phi(\lambda)(\Phi\in H^\infty_{n\times m};\ \lambda\in R),\tag{6.1}$$

то $|\Gamma|_2\leqslant 1$.

Если $|\Gamma|_2=1$, то для любой пары Шмидта $\{\xi, \eta\}$ оператора Г, *отвечающей наибольшему s-числу $\rho=1$, выполняется равенство*

$$S(\lambda)F_+(\xi; \lambda)=F_-(\eta; \lambda)(\lambda\in R).\tag{6.2}$$

Доказательство. Рассмотрим $S(\lambda)F_+(f; \lambda)$, где $f\in L^1_{m\times 1}(R_+)\cap\cap L^2_{m\times 1}(R_+)$. Имеем

$$S(\lambda)F_+(f; \lambda)=\left(\int_0^\infty \Gamma(t)e^{-i\lambda t}dt+\Phi(\lambda)\right)\int_0^\infty f(t)e^{i\lambda t}dt=$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \Gamma(t+s)f(s)\,ds\right)e^{-i\lambda t}dt+$$

$$+\int_0^\infty\left(\int_{-t}^\infty \Gamma(s-t)f(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}\,dt+\Phi(\lambda)F_+(f;\lambda)=F_-(\Gamma f;\lambda)+\hat{\psi}(\lambda).$$

Это означает, что элемент $S(\lambda)F_+(f;\lambda)$ пространства $L^2_{n\times 1}(R)$ разлагается на сумму двух ортогональных элементов $F_-(\Gamma f;\lambda)\in H^{2;-}_{n\times 1}$ и $\hat{\psi}(\lambda)\in H^{2;+}_{n\times 1}$. Поэтому, на основании равенства Парсеваля, имеет место неравенство:

$$\|f\|^2=\|F_+(f;\lambda)\|^2\geqslant\|S(\lambda)F_+(f;\lambda)\|^2=\|F_-(\Gamma f;\lambda)\|^2+\|\hat{\psi}\|^2\geqslant\|F_-(\Gamma f;\lambda)\|^2=\|\Gamma f\|^2,$$

которое и означает, что $\|\Gamma\|_2\leqslant 1$.

Для доказательства второго утверждения леммы рассмотрим $S(\lambda)F_+(\xi;\lambda)$. Аналогично проделанному выше, легко получаем

$$S(\lambda)F_+(\xi;\lambda)=F_-(\Gamma\xi;\lambda)+\hat{\psi}(\lambda)=F_-(\eta;\lambda)+\hat{\psi}(\lambda)\quad(\hat{\psi}\in H^{2;+}_{n\times 1}).\tag{6.3}$$

Отсюда $\|S(\lambda)F_+(\xi;\lambda)\|^2=\|F_-(\eta;\lambda)\|^2+\|\hat{\psi}\|^2\leqslant\|F_+(\xi;\lambda)\|^2$. С другой стороны, в силу (5.3), имеем $\|F_+(\xi;\lambda)\|^2=\|F_-(\eta;\lambda)\|^2$. Это показывает, что вектор-функция $\hat{\psi}$ в соотношении (6.3) равна нулю, т. е. выполняется равенство (6.2). □

2. В дальнейшем, на протяжении этого и последующего параграфов, будем предполагать, что заданная $м$-функция $\Gamma\in L^1_{n\times m}(R_+)$ порождает ганкелев оператор Γ с $\|\Gamma\|_2=1$. Существенную роль в наших последующих рассмотрениях будут играть свойства линеалов $\mathfrak{M}_\rho$ и $\mathfrak{M}_\rho(0)$ при $\rho=1$. Их мы будем обозначать через $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}(0)$.

Рассмотрим систему $D(\chi_k;l_k)$ ($\chi_k=[\xi_k,\ \eta_k]^\top$, $k=\overline{1,r}$; $r=\dim\mathfrak{M}(0)$) базисных D-цепочек линеала $\mathfrak{M}$ (см. лемму 5.4). Через $H(t)=[H_{11}(t)\ H_{21}(t)]^\top$ обозначим $м$-функцию, вектор-столбцами которой служат базовые элементы χ_k ($k=\overline{1,r}$) базисных D-цепочек $D(\chi_k;l_k)(k=\overline{1,r})$:

$$H_{11}(t)=[\xi_1(t),\ \xi_2(t),\cdots,\ \xi_r(t)];\quad H_{21}(t)=[\eta_1(t),\ \eta_2(t),\cdots,\ \eta_r(t)].$$

Вместе с $F_+(H_{11};\lambda)$ и $F_-(H_{21};\lambda)$ рассмотрим также „нормализованные" преобразования:

$$F_{\text{н}}^+(H_{11};\lambda)=\lambda\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda}\right)^{l_k}F_+(\xi_k;\lambda)\right\|_{k=1}^r=\lambda F_+(H_{11};\lambda)\,D_+(\lambda),$$

$$F_{\text{н}}^-(H_{21};\lambda)=\lambda\left\|\left(\frac{\lambda-i}{\lambda}\right)^{l_k}F_-(\eta_k;\lambda)\right\|_{k=1}^r=\lambda F_-(H_{21};\lambda)\,D_-(\lambda).$$

Здесь $D_\pm(\lambda)=\left\|\left(\frac{\lambda\pm i}{\lambda}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^r$ — суть диагональные $(r\times r)$-матрицы-функции, где l_k ($k=\overline{1,r}$) равны длинам базисных D-цепочек $D(\chi_k;l_k)$.

Лемма 6.2. *M-функции $F_{\text{н}}^+(H_{11};\lambda)(F_{\text{н}}^-(H_{21};\lambda)$ имеют полный ранг r ($=\dim\mathfrak{M}(0)$) $\forall\lambda\in\overline{C}_+\cup\{\infty\}(\forall\lambda\in\overline{C}_-\cup\{\infty\})$.*

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\operatorname{rang}F_{\text{н}}^+(H_{11};\lambda)=\operatorname{rang}F_+(H_{11},\lambda)\forall\lambda\in\overline{C}_-\cup\{\infty\})\diagdown\{0\},$$

и рассмотрим $F_+(H_{11};\lambda)a$, где $0\neq a\in C^r$. Легко видеть, что $F_+(H_{11};\lambda)a = = F(\xi;\lambda)$, где $\xi=\sum_{k=1}^{r} a_k\xi_k$ есть первая компонента вектор-функции $\chi=\sum_{k=1}^{r} a_k\chi_k$, являющейся базовым элементом максимальной D-цепочки (линейная комбинация базовых элементов базисных D-цепочек есть базовый элемент максимальной D-цепочки). Поэтому при $\lambda\in\overline{C}_+\setminus\{0\}$ в силу 1° и 2° § 5, имеем $F_+(H_{11};\lambda)\,a\neq 0$ $(0\neq a\in C^r)$.

Для доказательства утверждения при $\lambda=0$, запишем $F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)$ в виде

$$F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)=(\lambda+i)\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda}\right)^{l_k-1}F_+(\xi_k;\lambda)\right\|_{k=1}^{r}=(\lambda+i)\left\|\sum_{j=0}^{l_k-1}c_j\lambda^{-j}\xi_k^{[j]}\right\|_{k=1}^{r}.$$

Здесь c_j суть биномиальные коэффициенты при λ^{-j} в разложении $(1+ + i\lambda^{-1})^{l_k-1}$. Это, в силу соотношений (5.10), дает

$$F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)=(\lambda+i)\,\|F_+(\varphi_k;\lambda)\|_{k=1}^{r},$$

где φ_k есть первая компонента вектор-функции $\chi_k=\sum_{j=1}^{l_k}c_{j-1}\chi_k^{[j]}$, являющейся линейной комбинацией всех членов максимальной D-цепочки $D(\chi_k^{[1]};l_k)(\overline{k=1,r})$, и следовательно, образующей D-цепочку длины $l=1$.

Поэтому для произвольного $0\neq a=[a_1,a_2,\cdots,a_r]\in C^r$ имеем

$$F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)\,a=(\lambda+i)\,F_+(\psi;\lambda),\quad \text{где}\quad \psi_1=\sum_{k=1}^{r}a_k\varphi_k$$

есть первая компонента вектор-функции $\psi\in\mathfrak{M}$, составляющей D-цепочку длины $l=1$. Отсюда для $\lambda\in R$ можем утверждать, что $F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)\,a\neq 0$ так как в противном случае $F(\psi;\lambda)=0$. Но это, в силу следствия 5.2, противоречит тому, что ψ образует D-цепочку длины $l=1$. Далее, $\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda+i)\,F(\psi;\lambda)=J\psi(0)\neq 0$. Таким образом, утверждение леммы доказано и при $\lambda=\infty$. □

Условимся говорить, что для оператора Γ имеет место „определенный случай“, если линеал $\mathfrak{M}(0)$ имеет максимальную размерность, равную m. В этом случае система базисных D-цепочек $D(\chi_k;l_k)$ $(k= =\overline{1,m})$. Поэтому, в силу леммы 6.2, вместе с $м$-функцией $F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)$ алгебре $W_{m\times m}^{+}$ принадлежит и $м$-функция $(F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda))^{-1}$.

Теорема 6.1. *Если для оператора Γ имеет место определенный случай, то существует, и при том единственная, нерастягивающая м-функция $S(\lambda)(\lambda\in R)$, допускающая представление* (6.1).

Она определяется по формуле

$$S(\lambda):=F_{\cdot н}^{-}(H_{21};\lambda)\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^{m}(F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda))^{-1}\tag{6.4}$$

и является изометрической м-функцией.

Кроме того, $S(\lambda)$ допускает представление

$$S(\lambda)=S(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Gamma}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\quad(\widetilde{\Gamma}\in L^1_{n\times m}(R);\ \lambda\in R),\tag{6.5}$$

где $\widetilde{\Gamma}|R_+=\Gamma$, а $S(\infty)=-K$ (K—угловой оператор линеала $\mathfrak{M}(0)$). Частные индексы $\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_m$ м-функции $S(\lambda)$ совпадают соответственно с длинами $l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots\geqslant l_n$ базисных D-цепочек.

Доказательство. Из определения (6.4) м-функции $S(\lambda)(\lambda\in R)$ для $\lambda\neq 0$ имеем

$$S(\lambda)\,F_+(H_{11};\lambda)=F_-(H_{21};\lambda)(S(\lambda)=F_-(H_{21};\lambda)(F_+(H_{11};\lambda))^{-1}).\tag{6.6}$$

Отсюда, в силу тождества (5.3), следует изометричность $S(\lambda)$.

Представление (6.5) также является следствием (6.4), поскольку

$$F_{\cdot\text{u}}^-(H_{21};\lambda)\in W^-_{n\times m};\ \left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^m\in W^-_{m\times m}\quad\text{и}$$

$$(F_{\cdot\text{u}}^+(H_{11};\lambda))^{-1}\in W^+_{m\times m}.$$

Условие $\widetilde{\Gamma}R_+=\Gamma$ следует из включения $(S(\lambda)-F_-(\Gamma;\lambda))\times\times F_+(H_{11};\lambda)\in W^+_{n\times m}$, которое является следствием соотношения (6.6) и нижеследующего равенства

$$F_-(\Gamma;\lambda)\,F_+(H_{11};\lambda)=\int_0^\infty\Gamma(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\cdot\int_0^\infty H_{11}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\Gamma(t+s)\,H_{11}(s)\,ds\right)e^{-i\lambda t}\,dt+\int_0^\infty\left(\int_{-t}^\infty\Gamma(s-t)\,H_{11}(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}\,dt=$$

$$=F_-(H_{21};\lambda)+\hat{\psi}(\lambda),\ (\hat{\psi}(\lambda)\in W^+_{n\times m}).$$

Далее, из соотношений (5.10) следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}F_{\cdot\text{u}}^+(H_{11};\lambda)=i\,H_{11}(0);\ \lim_{\lambda\to\infty}F_{\cdot\text{u}}^-(H_{21};\lambda)=-iH_{21}(0).$$

Отсюда $\lim\limits_{\lambda\to\infty}S(\lambda)=S(\infty)=-H_{21}(0)(H_{11}(0))^{-1}$. Заметим, что $H_{21}(0)\times\times(H_{11}(0))^{-1}$ есть матричное представление углового оператора K, поскольку соответствующие вектор-столбцы матриц $H_{11}(0)$ и $H_{21}(0)$ являются значениями в нуле пар Шмидта $|\xi,\eta|$. Таким образом, $S(\infty)=-K$.

Наконец, утверждение теоремы о частных индексах непосредственно следует из определения частных индексов и леммы 6.2. □

§ 7. S-матрица, порожденная ганкелевым оператором Γ с $\|\Gamma\|_2=1$ (общий случай)

В этом параграфе рассматривается ганкелев оператор $\Gamma(\|\Gamma\|_2=1)$, при условии $\dim\mathfrak{M}(0)=r<m$.

Нерастягивающая m-функция $S(\lambda)$ $(\lambda \in R)$, допускающая представление (6.1), будет существовать и в этом случае, однако определяться она будет уже не однозначно. Здесь мы дадим полное описание множества всех таких m-функций.

Рассмотрим частично изометрический угловой оператор K J-нейтрального подпространства $\mathfrak{M}(0)$.

Как известно, операторы $P_+ = K^*K$ и $P_- = KK^*$ суть ортопроекторы, проектирующие C^m на $R(K^*)$ и C^n на $R(K)$, соответственно. Тогда ортопроекторы P и $Q = I_{m+n} - P$, проектирующие C^{m+n} на $\mathfrak{M}(0)$ и $\mathfrak{M}(0)^{\perp}$ соответственно, будут иметь вид

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} P_+ & K^* \\ K & P_- \end{bmatrix}; \quad Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2I_m - P_+ & -K^* \\ -K & 2I_n - P_- \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем, мы будем пользоваться разложением Q на взаимно ортогональные ортопроекторы Q_1 и Q_2 $(Q_1 + Q_2 = Q;\ Q_1Q_2 = Q_2Q_1 = 0)$ вида

$$Q_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} P_+ & -K^* \\ -K & P_- \end{bmatrix}; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} I_m - P_+ & 0 \\ 0 & I_n - P_- \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Q_+ & 0 \\ 0 & Q_- \end{bmatrix}.$$

Из леммы 5.5 следует, что существует $(m+n)\times(m+n)$-матричное решение $\hat{g}$ уравнения

$$\hat{g}(t) - \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\,\hat{g}(s)\,ds = \Gamma_\Delta(t)\,Q.$$

Это решение можно представить в виде $\hat{g} = \hat{g}_1 + \hat{g}_2$, где $\hat{g}_1$ и $\hat{g}_2$ суть решения уравнений

$$\hat{g}_j(t) - \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\,\hat{g}_j(s)\,ds = \Gamma_\Delta(t)\,Q_j \quad (j = 1, 2). \qquad (7.1_j)$$

Рассмотрим m-функции $\hat{G}_j(\lambda) = Q_j + F(\hat{g}_j; \lambda)$. При выяснении свойств этих m-функций будут использованы следующие предложения.

Лемма 7.1. *Пусть* $\Gamma \in L^1_{n\times m}(R_+)$ *и* $\hat{g}_j \in L^1_{(m+n)\times(m+n)}(R_+)$ $(j=1,2)$ — *m-функции, удовлетворяющие соотношениям* (7.1_j). *Тогда имеют место тождества*

$$\hat{G}_j^*(\lambda)\,J\,\hat{G}_k(\lambda) = Q_jJQ_k \quad (\lambda \in R;\ j, k = 1, 2). \qquad (7.2)$$

Лемма 7.2. *В условиях леммы* 7.1 *имеет место тождество*

$$[I_{m+n} - F(\Gamma_\Delta; \lambda)]\,\hat{G}_j(\lambda) = Q_j - \int_0^\infty \exp(-\lambda tJ)\,\hat{R}_j(t)\,dt \quad (j = 1, 2), \qquad (7.3)$$

где

$$\hat{R}_j(t) = \int_0^\infty \Gamma_\Delta(s)\,\hat{g}_j(t+s)\,ds.$$

Доказываются эти леммы аналогично тому, как доказывались леммы 1.1 и 1.2.

Запись тождеств (7.3) в блочно-матричном представлении $м$-функций $F(\Gamma_\Delta; \lambda)$ и $\widehat{G}_j(\lambda)$ $(j=1, 2)$ приводит к совокупности тождеств, аналогичных тождествам (1.10):

$$F_+(\Gamma^*; \lambda)\, \widehat{G}_{21}^{(j)}(\lambda) = \widehat{G}_{11}^{(j)}(\lambda) - \widehat{Q}_{11}^{(j)} + F_-(\widehat{R}_{11}^{(j)}, \lambda);$$

$$F_+(\Gamma^*; \lambda)\, \widehat{G}_{22}^{(j)}(\lambda) = \widehat{G}_{12}^{(j)}(\lambda) - Q_{12}^{(j)} + F_-(\widehat{R}_{12}^{(j)}; \lambda), \tag{7.4}$$

$$F_-(\Gamma; \lambda)\, \widehat{G}_{11}^{(j)}(\lambda) = \widehat{G}_{21}^{(j)}(\lambda) - Q_{21}^{(j)} + F_+(\widehat{R}_{21}^{(j)}; \lambda);$$

$$F_-(\Gamma; \lambda)\, \widehat{G}_{12}^{(j)}(\lambda) = \widehat{G}_{22}^{(j)}(\lambda) - Q_{22}^{(j)} + F_+(\widehat{R}_{22}^{(j)}; \lambda).$$

В тождествах (7.2), подставляя значение матриц Q_j $(j=1, 2)$, получим

$$1)\ \widehat{G}_1^*(\lambda)\, J\, \widehat{G}_1(\lambda) = 0,\quad 2)\ \widehat{G}_1^*(\lambda)\, J\, \widehat{G}_2(\lambda) = \widehat{G}_2^*(\lambda)\, J \widehat{G}_1(\lambda) = 0,$$

$$3)\ \widehat{G}_2^*(\lambda)\, J\, \widehat{G}_2(\lambda) = J_1, \text{ где } J_1 := \begin{bmatrix} Q_+ & 0 \\ 0 & -Q_- \end{bmatrix}. \tag{7.5}$$

Заметим теперь, что уравнения (7.1_j) $(j=1, 2)$ определяют $\widehat{g}_j$ неоднозначно. Для дальнейшего зафиксируем некоторое решение уравнения (7.1_2), удовлетворяющее условию $\widehat{g}_2(t) Q_2 \equiv \widehat{g}_2(t)$ $(t \in R_+)$. Для определения решения $\widehat{g}_1$ уравнения (7.1_1) воспользуемся следующим фактом. Если $м$-функция H есть $((m+n)\times(m+n))$-матричное решение уравнения

$$H(t) - \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\, H(s)\, ds = 0, \tag{7.6}$$

удовлетворяющая условию $H(0) = -JQ_1$, то $м$-функция $\widehat{g}_1(t) = JH'(t)$ удовлетворяет уравнению (7.1_1). Что касается решения $H(t)$ уравнения (7.6), удовлетворяющего условию $H(0) = -JQ_1$, то оно существует, поскольку $P(-JQ_1) = -JQ_1$.

В дальнейшем, говоря о решении уравнения (7.6), мы будем подразумевать решение $H(t) = \|H_{jk}(t)\|_{j,k=1}^2$, выбранное следующим образом. Каждый столбец $h_k(0)$ $(k=\overline{1, m+n})$ матрицы $H(0) = -JQ_1$ принадлежит линеалу $\mathfrak{M}(0)$, и следовательно, представляется в виде $h_k(0) = \sum_{j=1}^r \alpha_{kj} \chi_j(0)$, где $\chi_j = \chi_j^{[1]}$ суть базовые элементы системы базисных D-цепочек $D(\chi_j; l_j)$ $(j=\overline{1, r})$ линеала $\mathfrak{M}$. В качестве „k"-ого столбца $h_k(t)$ $(k=\overline{1, m+n})$ $м$-функции $H(t)$ возьмем $\sum_{j=1}^r \alpha_{kj} \chi_j(t)$.

Легко видеть, что так выбранная $м$-функция $H(t)$ удовлетворяет условиям: 1) $H(t)\, Q_1 \equiv H(t)$ $(t \in R)$; 2) вектор-функция $H(t)\, a$

для любого $a \in C^{m+n}$ является базовым элементом максимальной D-цепочки.

В качестве решения $\bar{g}_1$ уравнения (7.1_1) будем рассматривать решение $\hat{g}_1(t) = JH'(t)$. Тогда $м$-функция $\bar{g}_1$ удовлетворяет условию $\bar{g}_1(t)\,Q_1 \equiv \hat{g}_1(t)$, и кроме того, F-преобразования $\hat{g}_1$ и H связаны соотношением $G_1(\lambda) = \lambda F(H;\lambda)$ $(\lambda \in R)$.

Для выбранных $м$-функций $\hat{G}_j(\lambda)$ $(j = 1, 2)$ тождества (7.5) вместе с соотношениями $\hat{G}_j(\lambda)\,Q_j = G_j(\lambda)(j = 1,2)$ приводят к следущим группам тождеств:

$$
\begin{array}{ll}
 & \hat{G}^{(1)}_{12}(\lambda) = -\hat{G}^{(1)}_{11}(\lambda)\,K^* \\
 & \hat{G}^{(1)}_{21}(\lambda) = -\hat{G}^{(1)}_{22}(\lambda)\,K \\
 & (\hat{G}^{(1)}_{12}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(1)}_{11}(\lambda) - \hat{G}^{(1)}_{22}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(1)}_{21}(\lambda) = 0. \\
1) & \\
 & (\hat{G}^{(2)}_{11}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(1)}_{12}(\lambda) - (\hat{G}^{(1)}_{21}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(1)}_{22}(\lambda) = 0 \\
 & (\hat{G}^{(2)}_{12}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(1)}_{11}(\lambda) - (\hat{G}^{(2)}_{22}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(1)}_{21}(\lambda) = 0 \\
2) & (\hat{G}^{(2)}_{11}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(1)}_{11}(\lambda)) - (\hat{G}^{(2)}_{21}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(1)}_{21}(\lambda) = 0 \\
 & (\hat{G}^{(2)}_{12}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(1)}_{12}(\lambda) - (\hat{G}^{(2)}_{22}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(1)}_{22}(\lambda) = 0. \\
 & (\hat{G}^{(2)}_{11}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(2)}_{21}(\lambda) - (\hat{G}^{(2)}_{21}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(2)}_{21}(\lambda) = Q_- \\
3) & (\hat{G}^{(2)}_{22}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(2)}_{22}(\lambda) - (\hat{G}^{(2)}_{12}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(2)}_{12}(\lambda) = Q_- \\
 & (\hat{G}^{(2)}_{11}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(2)}_{12}(\lambda) = (\hat{G}^{(2)}_{21}(\lambda))^*\,\hat{G}^{(2)}_{22}(\lambda) = 0.
\end{array}
\tag{7.7}
$$

Отметим некоторые свойства матриц $\hat{G}_1(\lambda), \hat{G}(\lambda)(\lambda \in R)$ и отображений, задаваемых ими.

Лемма 7.3. *Для любого $\lambda \in R \setminus \{0\}$ имеем:*

1) $\hat{G}_1(\lambda)\,a \neq 0$ $\forall 0 \neq a \in QC^{m+n}$ *и подпространство* $\hat{G}_1(\lambda)\,Q_1\,C^{m+n}$ $(\subset C^{m+n})$ *является J-нейтральным.*

2) $\hat{G}(\lambda)\,a \neq 0$ $\forall 0 \neq a \in QC^{m+n}$ *и выполяется равенство*

$$
(J\hat{G}(\lambda)\,a,\, J\hat{G}(\lambda)\,a) = (Ja, a)(= J_1 a, a)). \tag{7.8}
$$

3) $\hat{G}(\lambda)QC^{m+n} \oplus J\hat{G}_1(\lambda)\,Q_1\,C^{m+n} = C^{m+n}$.

Доказательство. 1) В силу равенства $G_1(\lambda) = \lambda F(H;\lambda)$ достаточно проверить, что $F(H;\lambda)\,a \neq 0$ $\forall 0 \neq a \in Q_1 C^{m+n}$. Последнее следует из 1° § 5, так как $F(H;\lambda)\,a = F(\chi;\lambda)$, где χ есть базовый элемент максимальной D-цепочки. J-нейтральность подпространства $\hat{G}_1\,Q_1 C^{m+n}$ следует из тождества (1); 7.5).

2) Поскольку $G(\lambda)a=G_1(\lambda)a$ при $Q_2 a=0$, докажем неравенство $G(\lambda)a\neq 0$ в предположении $Q_2 a\neq 0$. Допустим противное: $G(\lambda)a_0=0$ $(a_0\in QC^{m+n}, Q_2 a_0\neq 0)$. Тогда, в силу леммы 5.6, существует элемент $\psi\in\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условию $\psi(0)=-Ja_0\in\mathfrak{M}(0)$. Это противоречит тому, что $Q_2 a\neq 0$.

Тождество (7.8) легко следует из соотношений (7.5).

3) Ортогональность подпространств $\widehat{G}(\lambda)QC^{m+n}$ и $J\widehat{G}_1(\lambda)Q_1C^{m+n}$ есть следствие тождеств (7.5). С другой стороны,

$$\dim\widehat{G}(\lambda)QC^{m+n}=\dim QC^{m+n}=m+n-r,$$

а

$$\dim J\widehat{G}_1(\lambda)Q_1C^{m+n}=\dim Q_1C^{m+n}=r. \square$$

Следствие 7.1. *Отображение $\widehat{G}(\lambda)$: $QC^{m+n}\to\widehat{G}(\lambda)QC^{m+n}$ $(\lambda\in R\setminus\{0\})$ устанавливает однозначное соответствие между множествами J-неотрицательных (J-нейтральных) подпространств из $\widehat{G}(\lambda)QC^{m+n}$ и QC^{m+n} соответственно.*

При этом максимальное J-неотрицательное подпространство в C^{m+n} входит в $\widehat{G}(\lambda)QC^{m+n}$ тогда и только тогда, когда оно является образом максимального J-неотрицательного расширения J-нейтрального подпространства $J\mathfrak{M}(0)$.

Доказательство. Первое утверждение есть непосредственное следствие соотношения (7.8).

Для доказательства второго утверждения заметим сначала, что, если $\widetilde{N}$ есть максимальное J-неотрицатльное, а N—J-нейтральное подпространства в некотором пространстве с J-метрикой, то условие $\widetilde{N}\supset N$ эквивалентно условию $\widetilde{N}\perp JN$. Теперь, требуемое утверждение в силу леммы 7.3, следует из равенств $\widehat{G}_1(\lambda)Q_1C^{m+n}=\widehat{G}_1(\lambda)J\mathfrak{M}(0)$.

Как известно (см. [17]) понятие углового оператора устанавливает одно-однозначное соответствие между множеством J-неотрицательных (J-нейтральных) подпространств и множеством нерастягивающих (изометрических) операторов. Таким образом, каждому максимальному J-неотрицательному подпространству $\widetilde{N}\subset QC^{m+n}$, содержащему подпространство $J\mathfrak{M}(0)$, соответствует угловой оператор B: $C^m\to C^n$, являющийся расширением оператора $-K$ ($-K$ есть угловой оператор $J\mathfrak{M}(0)$).

С другой стороны, произвольное максимальное J-неотрицательное подпространство в $\widehat{G}(\lambda)Q^{m+n}$ есть образ вышеуказанного подпространства $\widetilde{N}$ при отображении $G(\lambda)$. Угловой оператор S_B такого подпространства может быть найден с помощью дробно-линейного преобразования, ассоциированного с отображением $\widehat{G}(\lambda)$ (см. [15]):

$$S_B=(\widehat{G}_{21}(\lambda)+\widehat{G}_{22}(\lambda)B)(\widehat{G}_{11}(\lambda)+\widehat{G}_{12}(\lambda)B)^{-1}(\lambda\in R\setminus\{0\}). \quad (7.9)$$

Лемма 7.4. *Пусть заданы гильбертовы пространства H_1, H_2 и частично изометрический оператор K: $H_1 \to H_2$. Тогда произвольный нерастягивающий оператор B: $H_1 \to H_2$, являющийся расширением оператора K, имеет вид $B = K \oplus \widehat{B}$, где $\widehat{B} : H_1 \ominus R(K)^* \to H_2 \ominus \ominus R(K)$.*

Доказательство. По условию для любых $x \in R(K^*)$ и $y \in H_2$ имеем $(Kx, y) = (Bx, y)$, и следовательно, $B^*y - K^*y \perp R(K^*)$ $\forall y H_2$. Отсюда, в частности, для $y \in R(K)$ получаем $B^*y = K^*y + z$, где $z \perp R(K^*)$. Это, в силу неравенства $\|y\|^2 \geqslant \|B^*y\|^2 = \|K^*y\|^2 + \|z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, означает, что $z = 0$. Следовательно, $B^*y = K^*y$ $\forall y \in R(K)$, т. е. $B^* : R(K) \to \to R(K^*)$, что эквивалентно утверждению леммы. □

Теорема 7.1. *Произвольная нерастягивающая м-функция $S(\lambda)(\lambda \in R)$, допускающая представление* (6.1), *допускает также для каждого $\lambda \in R \setminus \{0\}$ представление в виде дробно-линейного преобразования* (7.9) *с некоторым нерастягивающим оператором $B = B(\lambda)$ вида*

$$B(\lambda) = -K \oplus \widehat{B}(\lambda), \text{ где } \widehat{B}(\lambda) : Q_+ C^m \to Q_- C^n.$$

Доказательство. Для каждого $\lambda \in R \setminus \{0\}$ произвольный элемент J-нейтрального подпространства $\widehat{G}_1(\lambda) Q_1 C^{m+n} = \widehat{G}_1(\lambda) J \mathfrak{M}(0)$ имеет вид $G_1(\lambda) Q_1 a = \lambda F(H; \lambda) a = \lambda F(Ha; \lambda) = \lambda F(\chi; \lambda)$, где $\chi \in \mathfrak{M}$. Следовательно, в силу леммы 6.1, матрица $S(\lambda)(\lambda \in R \setminus \{0\})$ является расширением углового оператора подпространства $G_1(\lambda) J\mathfrak{M}(0)$. Поэтому $S(\lambda)$ является угловым оператором некоторого максимального J-неотрицательного подпространства, входящего в $G(\lambda) Q C^{m+n}$. Таким образом, в силу вышеуказанного, $S(\lambda)$ допускает представление (7.9). Указанный в теореме вид оператора B обусловлен леммой 7.4. □

Определение 7.1. Через $\mathbf{B}_{m \times n}(K)$ обозначим подмножество из $\mathbf{B}_{m \times n}$ (нерастягивающих м-функций из $H^{\infty}_{n \times m}$), элементы $B(\lambda)$ которого при каждом $\lambda \in R$ являются расширениями оператора $-K$, и следовательно, имеют вид:

$$B(\lambda) = -K \oplus \widehat{B}(\lambda), \quad \text{где} \quad \widehat{B}(\lambda) : Q_+ C^m \to Q_- C^n \ (\lambda \in R).$$

Отметим, что, если для оператора Γ имеет место определенный случай ($\dim \mathfrak{M}(0) = m$), то множество $\mathbf{B}_{n \times m}(K)$ состоит из одного элемента $-K$ ($\mathbf{B}_{n \times m}(K) = \{-K\}$).

Введем $(m \times m)$-матрицу-функцию $D_\pm(\lambda) = \left\| \left(\frac{\lambda \pm i}{\lambda} \right)^{l_k} \delta_{jk} \right\|_{j,k=1}^{m}$, где l_k — длины максимальных D-цепочек, образованных первыми m-столбцами $\chi_k(t)(k = \overline{1, m})$ м-функции $H(t)$ (при $\chi_k(t) \equiv 0$ полагаем $l_k = 0$).

Легко проверить, что так определенная м-функция $D_\pm(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$P_+ D_\pm(\lambda) = D_\pm(\lambda) P_+, \quad Q_+ D_\pm(\lambda) = D_\pm(\lambda) Q_+ = Q_+ \ (\lambda \in R).$$

Лемма 7.5. *Для произвольного* $B\in \mathrm{B}_{n\times m}(K)$ *отображение* $(\hat G_{11}(\lambda)+\hat G_{12}(\lambda)B(\lambda))D_-(\lambda):C^m\to C^m$ *обратимо при каждом* $\lambda\in\overline{C}_+\cup\{\infty\}$.

Доказательство. Ясно, что при $\lambda\neq 0$ достаточно доказать обратимость отображения $\hat G_{11}(\lambda)+\hat G_{12}(\lambda)B(\lambda)$. Рассмотрим вектор-функцию

$$\hat\varphi(\lambda)=\begin{bmatrix}(\hat G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)\hat B(\lambda))\,a\\(G_{21}(\lambda)+G_{22}(\lambda)B(\lambda))\,a\end{bmatrix}=G_1(\lambda)\begin{bmatrix}P_+a\\-KP_+a\end{bmatrix}+$$

$$+G_2(\lambda)\begin{bmatrix}Q_-a\\\hat B(\lambda)Q_+a\end{bmatrix}\ (a\in C^m).$$

Легко видеть, что $\hat\varphi(\lambda)$ представляется в виде

$$\hat\varphi(\lambda)=[a,B(\lambda)a]^\tau+F(\varphi;\lambda),\ \text{где}\ \varphi(t)=\hat g_1(t)[P_+a,-KP_+a]^\tau+$$

$$+\hat g_2(t)[Q_1a,\hat B(\lambda)Q_1a]^\tau$$

является решением уравнения

$$\varphi(t)+\int\limits_0^\infty\Gamma_\Delta(t+s)\varphi(s)\,ds=\Gamma_\Delta(t)\begin{bmatrix}a\\B(\lambda)a\end{bmatrix}. \tag{7.10}$$

При этом $\hat\varphi(\lambda)$ принадлежит J-неотрицательному подпространству $G(\lambda)\mathfrak{M}_B$, где $\mathfrak{M}_B\subset QC^{m+n}$ является J-неотрицательным подпространством, отвечающем угловому оператору $B(\lambda)$. Поэтому для $\varphi(t)$ выполняется условие (5.8). Теперь, если допустить, что $(\hat G_{11}(\lambda)+\hat G_{12}(\lambda)B(\lambda))\,a=0$ $(a\in C^m)$ при $\lambda\in C_+$, то в силу леммы 5.7, существовал бы элемент $\psi\in\mathfrak{M}$, удовлетворяющий системе (5.6). Однако при $Q_+a\neq0$ это противоречит условию $\psi(0)=[a,B(\lambda)a]^\tau\in\mathfrak{M}(0)$. Если же $Q_+a=0$, то имеем

$$\varphi(t)=g_1(t)\begin{bmatrix}P_+a\\-KP_+a\end{bmatrix}=J\frac{d}{dt}\left(H(t)\begin{bmatrix}P_+a\\-KP_+a\end{bmatrix}\right)=$$

$$=2J\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}H_{11}(t)a\\H_{21}(t)a\end{bmatrix}=J\chi'(t),$$

и противоречие получается с тем, что $\chi(t)$ есть базовый элемент максимальной D-цепочки.

Пусть теперь $\lambda\in R$. Рассмотрим вектор-функцию

$$\hat\varphi(\lambda)=\begin{bmatrix}(\hat G_{11}(\lambda)+\hat G_{12}(\lambda)B(\lambda)D_+(\lambda)a\\(\hat G_{21}(\lambda)+\hat G_{22}(\lambda)B(\lambda))D_-(\lambda)a\end{bmatrix}=\hat G_1(\lambda)\begin{bmatrix}D_+(\lambda)P_+a\\-KD_+(\lambda)P_+a\end{bmatrix}+$$

$$+\hat G_2(\lambda)\begin{bmatrix}Q_+a\\\hat B(\lambda)Q_+a\end{bmatrix}(a\in C^m).$$

Так как $\widehat{G}_1(\lambda)=\lambda F(H;\lambda)\ \forall\lambda\in R$, то $\widehat{G}_1(\lambda)[D_+(\lambda)P_+a,-KD_+(\lambda)P_+a]^\tau=$ $=\lambda F([2H_{11}, 2H_{21}]^\tau D_+(\lambda)P_+a,\lambda)$. Отсюда, как и при доказательстве леммы 6.2, получаем $\widehat{G}_1(\lambda)[D_+(\lambda)P_+a,-KD_+(\lambda)P_+a]^\tau=(\lambda+i)F(\chi;\lambda)$, где $\chi\in\mathfrak{M}$ образует D-цепочку длины $l=1$, а $\chi(0)=[P_+a,-KP_+a]^\tau$. Поэтому для $\widehat{\varphi}(\lambda)$ имеем представление

$$\widehat{\varphi}(\lambda)=[a, B(\lambda)a]^\tau+F(\varphi;\lambda),\ \text{где}\ \varphi(t)=J\chi'(t)+i\chi(t)+$$

$$+\widehat{g}_2(t)[Q_+a, \widehat{B}(\lambda)Q_+a]^\tau,$$

и, следовательно, является решением уравнения (7.10).

Допустим теперь, что $(\widehat{G}_{11}(\lambda)+\widehat{G}_{12}(\lambda)\ B(\lambda))D_+(\lambda)a=0$ ($\lambda\in R$; $a\in C^m$). Тогда и $\widehat{\varphi}(\lambda)=0$, что, в силу леммы 5.6, влечет опять существование элемента $\psi\in\mathfrak{M}$, удовлетворяющего системе (5.6) При $Q_+a\neq0$ это противоречие. Если же $Q_+a=0$, то $\widehat{\varphi}(\lambda)=(\lambda+i)F(\chi;\lambda)=0$. Это в силу следствия 5.2, противоречит тому, что $\chi\in\mathfrak{M}$ есть базовый элемент D-цепочки длины $l=1$.

Наконец, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(\widehat{G}_{11}(\lambda)+\widehat{G}_{12}(\lambda)\ B(\lambda))\ D_+(\lambda)=I_m$. □

Замечание 7.1. Рассмотрим класс $\mathrm{B}_{m\times n}(-K^*)$ нерастягивающих м-функций из $H^\infty_{m\times n}$, имеющих вид $B_1(\lambda)=-K^*\oplus\widehat{B}_1(\lambda)$, где $\widehat{B}_1(\lambda): Q_-C^n\to Q_+C^m$. Введем м-функции

$$D^{(1)}_\pm(\lambda)=\left\|\left(\frac{\lambda\pm i}{\lambda}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|^n_{j,k=1},$$

где l_k—длины максимальных D-цепочек с базовыми элементами $\chi_k(t)$ $(k=\overline{1,n})$, являющимися последними n вектор-столбцами м-функции $H(t)$. Тогда, аналогично лемме 7.5 можно доказать, что отображение $(\widehat{G}_{21}(\lambda)B_1(\lambda)+\widehat{G}_{22}(\lambda))D^{(1)}_-(\lambda): C^n\to C^n$ обратимо при каждом $\lambda\in$ $\in\overline{C}_-\cup\{\infty\}$.

Теорема 7.2. *Пусть* $\Gamma\in L^1_{n\times m}(R_+)$ *и* $\|\Gamma\|=1$. *Тогда формулой*

$$S_B(\lambda)=[(\widehat{G}_{21}(\lambda)+\widehat{G}_{22}(\lambda)\ B(\lambda))\ D_-(\lambda)]\ D_-^{-1}(\lambda)\ D_+(\lambda)[(\widehat{G}_{11}(\lambda)+$$

$$+\widehat{G}_{12}(\lambda)\ B(\lambda))\ D_+(\lambda)]^{-1}, \tag{7.11}$$

где $B(\lambda)$ *пробегает все множество* $\mathrm{B}_{n\times m}(K)$, *дается описание всех нерастягивающих м-функций* $S(\lambda)$, *допускающих представление* (6.1).

Доказательство. Формула (7.11) при $\lambda\neq0$ совпадает с формулой (7.9), и следовательно, $|S_B(\lambda)|\leqslant1$.

Для доказательства представления (6.1) рассмотрим сначала м-функцию $S_0(\lambda)$, соответствующую м-функции $B(\lambda)\equiv-K$. Для $S_0(\lambda)$ формула (7.11) имеет вид

$$S_0(\lambda)=[(2\hat{G}_{21}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{21}^{(2)}(\lambda))D_-(\lambda)]D_-^{-1}(\lambda)D_-(\lambda)[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+$$
$$+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))D_+(\lambda)]^{-1}.$$

Имеем

$$D_-^{-1}(\lambda)D_+(\lambda)=\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^m\in W^-_{m\times m};(2G_{21}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{21}^{(2)}(\lambda))D_-(\lambda)\in W^-_{n\times m}$$

и $[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))D_+(\lambda)]^{-1}\in W^+_{m\times m}$. Таким образом, $S_0\in W_{n\times m}$, т. е.

$$S_0(\lambda)=S_0(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Gamma}(t)e^{-i\lambda t}\,dt\ \ (\tilde{\Gamma}\in L^1_{n\times m}(R)).$$

При этом из сравнения тождеств (см. (7.4))

$$S_0(\lambda)(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))=2\hat{G}_{21}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{21}^{(2)}(\lambda),$$

$$F_-(\Gamma;\lambda)(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))=2\hat{G}_{21}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{21}^{(2)}(\lambda)+F_+(\hat{R};\lambda)$$

получаем, что $\tilde{\Gamma}\,|R_+=\Gamma$.

Далее, рассмотрим $S_B(\lambda)-S_0(\lambda)$. С помощью тождеств (7.7) легко проверить соотношение

$$S_0(\lambda)=(2\hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^{*-1}(2\hat{G}_{12}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda))^*.$$

Отсюда, используя опять соотношения (7.7), получаем

$$S_B(\lambda)-S_0(\lambda)=(2\hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^{*-1}\hat{B}(\lambda)(\hat{G}_{11}(\lambda)+\hat{G}_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}=$$

$$=[(2\hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))D_-^{(1)}(\lambda)]^{*-1}D_+^{(1)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)[\hat{G}_{11}(\lambda)+\hat{G}_{12}(\lambda)(-K\oplus\hat{B}(\lambda)]^{-1}.$$

В силу замечания 7.1 имеем $[(2\hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))D_-^{(1)}(\lambda)]^{*-1}\in W^+_{n\times n}\subset$ $\subset H^-_{n\times n}$. Для завершения доказательства, поскольку $D_+^{(1)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)=$ $=\hat{B}(\lambda)D_+(\lambda)=\hat{B}(\lambda)$, достаточно проверить включение

$$D_+^{-1}(\lambda)[\hat{G}_{11}(\lambda)+\hat{G}_{12}(\lambda)(-K\oplus\hat{B}(\lambda)]^{-1}\in H^\infty_{m\times m}. \tag{7.12}$$

Имеем

$$D_+^{-1}(\lambda)[\hat{G}_{11}(\lambda)+\hat{G}_{12}(\lambda)(-K\oplus\hat{B}(\lambda))]^{-1}=(I_m+[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+$$
$$+\hat{G}_{11}^{(2)})D_+(\lambda)]^{-1}\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda))^{-1}[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))D_+(\lambda)]^{-1}.$$

Заметим, что $м$-функция $\hat{G}(\lambda)+\hat{G}_1(\lambda)J$, блочно-матричное представление, которой имеет вид

$$\begin{bmatrix}2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda)\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\\ 2\hat{G}_{21}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{21}^{(2)}(\lambda)\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda)\end{bmatrix},$$

является J-изометрической. Отсюда уже следует, что $\|[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))D_-(\lambda)]^{-1}\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)\|\leqslant q<1$. Это влечет за собой требуемое включение (7.12), а следовательно и включение $S_B(\lambda)-S_0(\lambda)\in H^-_{n\times m}$.

Таким образом, представление (6.1) для $S_B(\lambda)$ доказано.

Обратно, пусть $S(\lambda)$—некоторая нерастягивающая м-функция, допускающая представление (6.1). Согласно теореме 7.1 она имеет также представление (7.9). Нужно доказать, что в этом представлении $B(\lambda)=-K\oplus\hat{B}(\lambda)\in \mathrm{B}_{n\times m}(K)$.

Имеем для $\hat{R}(\lambda):=S(\lambda)-S_0(\lambda)=(2\hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^{*-1}\hat{B}(\lambda)(\hat{G}_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)\hat{B}(\lambda))^{-1}$. Отсюда

$$\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)(2\hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^{*}\hat{R}(\lambda)=\hat{G}_{12}^{(2)}\hat{B}(\lambda)[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))+$$

$$+\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)]^{-1}=I_m-(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))[2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))+$$

$$+\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)]^{-1}.$$

Положим $\hat{X}(\lambda)=(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))^{-1}\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)$ и введем

$$\hat{\Phi}(\lambda):=(I_m+\hat{X}(\lambda)\hat{B}(\lambda))^{-1}(I_m-\hat{X}(\lambda)\hat{B}(\lambda))=$$

$$=[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))+\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)]^{-1}[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))-\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)]=$$

$$=2[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))+\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)]^{-1}(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))-I_m\in H^-_{n\times m}.$$

Далее, рассуждая так же как и в теореме 3.1, приходим к выводу: $B(\lambda)=-K\oplus\hat{B}(\lambda)\in \mathrm{B}_{n\times m}(K)$. □

Теорема 7.3. *Формулой* (7.11), *где* $B(\lambda)\in \mathrm{B}_{n\times m}(K)\cap W^+_{n\times m}$, *дается описание всех нерастягивающих м-функций* $S(\lambda)$, *допускающих представление* (6.4):

$$S(\lambda)=S(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\Gamma}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt,$$

где $\bar{\Gamma}\in L^1_{n\times m}(R)$ *является продолжением* Γ ($\bar{\Gamma}|R_+=\Gamma$). *При этом всегда* $S(\infty)=B(\infty)=-K\oplus\hat{B}(\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим выражение (7.11). Так как $B\in W^+_{n\times m}$, то ясно, что все множители правой части (7.11) принадлежат соответствующим винеровским классам. Поэтому $S\in W_{n\times m}$ и, следовательно, допускает представление (6.4). Условие $\bar{\Gamma}|R_+=\Gamma$ выполняется, поскольку представление (6.4) есть частный случай (6.1).

Обратно, пусть нерастягивающая м-функция $S(\lambda)$ допускает представление (6.4). Тогда она подавно допускает представление (6.1) и, следовательно, в силу теоремы 7.2, определяется формулой (7.11) при некотором $B\in \mathrm{B}_{n\times m}(K)$. Докажем, что $B\in W^+_{n\times m}$. Имеем

$$(S(\lambda)\,\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)-\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))\,\hat{B}(\lambda)=(2G_{21}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{21}^{(2)}(\lambda))-S(\lambda)(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda)). \quad (7.13)$$

Заметим теперь, что при каждом $\lambda\in R$ существует в силу неравенства $|\hat{G}_{12}^{(1)}(\lambda)\,(\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^{-1}|\leqslant q<1$, и следовательно, принадлежит классу $W_{n\times m}$, м-функция $(S(\lambda)\,\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)-\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^{-1}$. С другой стороны, правая часть равенства (7.13) принадлежит $W_{n\times m}$. Таким образом, $B\in W_{n\times m}$, а следовательно, и $W_{n\times m}^{+}$.

Для доказательства равенства $S(\infty)=B(\infty)$ в соотношении $S(\lambda)(\hat{G}_{11}(\lambda)+\hat{G}_{12}(\lambda)\,B(\lambda))=(\hat{G}_{21}(\lambda)+\hat{G}_{22}(\lambda)\,B(\lambda))$ перейдем к пределу при $\lambda\to\infty$. Получим требуемое. □

Следствие 7.2. *Пусть $\tilde{\Gamma}\in L_{n\times m}^{1}(R)$ и для всех $\lambda\in R$*

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Gamma}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\right|\leqslant 1. \quad (7.14)$$

Тогда для оператора Γ, *порождённого м-функцией* $\Gamma:=\tilde{\Gamma}|R_{+}$, *имеет место оценка* $\|\Gamma\|<1$.

Доказательство. Согласно лемме 6.1 имеем $\|\Gamma\|\leqslant 1$. Однако знак равенства здесь исключается. В самом деле, если $\|\Gamma\|=1$, то, согласно теореме 7.3, каждая нерастягивающая м-функция $S(\lambda)$, допускающая представление (6.4), удовлетворяет условию $S(\infty)=-K^{(-)}\oplus\hat{B}(\infty)\neq 0$, а выражение, стоящее под знаком нормы в (7.14), не удовлетворяет указанному условию.

Физико-химический институт АН УССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 23.VI.1983

Մ. Դ. ԿՐԵՅՆ, Տ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ. Ինտեգրալ հանկելյան օպերատորները և նրանց հետ կապված շարունակության խնդիրները (*ամփոփում*)

Հոդվածում դիտարկված են հետևյալ խնդիրները.

Խնդիր A_1. *Տրված է* $(0,\infty)$ *կիսաառանցքի վրա որոշված հանրագումարելի* $\Gamma(t)(n\times m)$*—մատրից-ֆունկցիան։ Պահանջվում է գտնել նրա այնպիսի* $\tilde{\Gamma}(t)$ *հանրագումարելի շարունակություն, որոշված ամբողջ առանցքի վրա, և այնպիսի* $S(\infty)$ *հաստատուն* $(n\times m)$*—մատրից, որ* $S(\lambda)$ *մատրից-ֆունկցիան, (0,1) բանաձևով որոշված, լինի չձգող* ($|S(\lambda)|\leqslant 1$ *կամայական իրական* λ*-ի համար։*

Խնդիր A_2. A_1 *խնդրի լուծելիության դեպքում տալ (0.1) ներկայացում թույլատրող բոլոր չձգող* $S(\lambda)$ *մատրից-ֆունկցիաների նկարագրումը։*

Ապացուցվում է, որ A_1 *խնդիրն ունի լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ* $\|\Gamma\|_2\leqslant 1$ *որտեղ* Γ *-ն ինտեգրալ հանկելյան օպերատոր է, ծնված (0.2) բանաձևով։ Նշված* $\|\Gamma\|_2<1$ *պայմանի առկայության դեպքում տրվում է* A_2 *խնդրի լրիվ լուծումը։*

Դիտարկվում է նաև A_1 *և* A_2 *խնդիրների ընդլայնված տարբերակները, որտեղ դիտարկվում են (0.3) ներկայացում թույլատրող* $S(\lambda)$ *չձգող մատրից-ֆունկցիաները։*

M. G. KREIN, F. E. MELIK-ADAMIAN. *Integral Hankelian operators and associated continuation* (summary)

In the paper the following problems are considered.

Problem A_1. Let $\Gamma(t)$ be an $(n \times m)$ matrix-function integrable on $(0, \infty)$

Construct a $\overline{\Gamma}(t)$ continuation of $\Gamma(t)$ integrable on the real axes as well as a $S(\infty)$ constant $(n \times m)$-matrix, such that the matrix-function $S(\lambda)$ given by (0.1) would be nonstretching ($|S(\lambda)| \leq 1$) for any real λ.

Problem A_2. Provided A_1 is solvable, give the description of all nonstretching $S(\lambda)$ matrix-function, for which (0.1) is valid.

It is proved that the problem A_1 is solvable if and only if $\|\Gamma\|_2 \leq 1$, where Γ—is an integral Hankelian operator, given by (0.2). The complete solution of the problem is given under the condition $\|\Gamma\|_2 < 1$.

Certain "generalization" of the problems A_1 and A_2, are also considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*. Некоторые приложения теоремы о факторизации унитарной матрицы, Функц. анализ и его прилож., 4, вып, 1970, 73—75.
2. *Ф. Э. Мелик-Адамян*. О некоторых прямых и обратных задачах канонических дифференциальных уравнений, Кандидатская диссертация, Ереван, 1968.
3. *М. Г. Крейн*. К теория акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем, ДАН СССР, III, № 6, 1956, 1167—1170.
4. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*. К теории s-матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом, ДАН Арм. ССР, XVI, № 4, 1968, 150—154.
5. *В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн*. Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори-Феера и Шура, Функц. анализ и его прилож., 2, вып. 4, 1968, 1—17.
6. *В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн*. Свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура—Такаги, Мат. сборник, 86 (128), 1971, 34—75.
7. *В. М. Адамян Д. З. Аров, М. Г. Крейн*. Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем. VI, № 2, 1971, 181—206.
8. *В. М. Адамян*. Невыражденные унитраные сцепления полуунитарных операторов. Функц. анализ и его прилож., 7, вып. 4, 1973, 1—16.
9. *Д. З. Аров, М. Г. Крейн*. О вычислении энтропийных функционалов и их минимумов в неопредееленных проблеемах продолжений, Acta SCI Mathem., 45, 1983, 33—50.
10. *М. Г. Крейн*. Континуальные аналоги предложений о многочленах ортогональных на единичной окружности, ДАН СССР, 105, № 4, 1955, 637—640.
11. *Ф. Э. Мелик-Адамян*. К теории матричных акселерант и спектральных матриц-функций канонических дифференциальных систем, ДАН Арм.ССР, XV, № 4, 1967, 145—151.
12. *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер*. Континулальные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по индефинитному весу и связанные с ним проблемы продолжения, ДАН СССР, 258, № 3, 1981.
13. *H. Dym, J. Gohberg*. Hankel integrel operators and isometric interpolants on the line, Journ. of Funct. Anal , 54, № 3, 1983.
14. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 2 (80), 1958, 3—71.
15. *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян*. О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, Мат. исследов., т. II, вып. 3, 1967, 64—96.
16. *В. П. Потпов*. Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Тр. ММО, т. 4, 1955, 125—236.
17. *М. Г. Крейн*. Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теория операторов в этих пространствах, Вторая летняя мат. школа, чсть 1, «Наукова думка», Киев, 1956, 15—93.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 5, 1984 Математика

УДК 517.53

Г. В. МИКАЕЛЯН

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, АССОЦИИРОВАННОЕ С ФУНКЦИЯМИ, МЕРОМОРФНЫМИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

§ 0. Введение

0.1. В работах [1], [2], [3] Л. А. Рубела, Б. А. Тейлора и Г. Р. Маклейна важную роль играет следующая лемма*.

Лемма. *Пусть функция $f(z)(f(0)=1)$ с последовательностью нулей $Z=\{z_n\}_1^\infty$, аналитична в круге $|z|<R\leqslant\infty$ и в окрестности точки $z=0$ имеет место разложение*

$$\log f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k. \tag{0.1}$$

Тогда при $0<r<R$, $0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi$

$$\log|f(re^{i\vartheta})|=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(r)\,e^{ik\vartheta}, \tag{0.2}$$

где $c_k(r)$ определяются по формулам

$$c_0(r)=\sum_{|z_n|<r}\log\frac{r}{|z_n|}, \tag{0.3}$$

$$c_k(r)=\frac{1}{2}\beta_k r^k+\frac{1}{2k}\sum_{|z_n|<r}\left[\left(\frac{r}{z_n}\right)^k-\left(\frac{\bar z_n}{r}\right)^k\right], \tag{0.4}$$

$$c_{-k}(r)=\bar c_k(r)^{**}\ (k=1,2,\cdots). \tag{0.5}$$

Следуя работе Рубела и Тейлора [2] дадим следующее определение.

По произвольным двум последовательностям комплексных чисел $\beta\equiv\{\beta_k\}_1^\infty$ и $Z\equiv\{z_k\}_1^\infty$, $z_k\neq 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=\infty$, построим последовательность $\{c_k(r)\}\equiv\{c_k(r;\,z:\beta)\}$, $k=0,\pm 1,\cdots$ по формулам (0.3), (0.4), (0.5). $\{c_k(r)\}$ назовем последовательностью коэффициентов Фурье ассоциированной с последовательностью Z.

В работе [2] была доказана следующая

Теорема. *Пусть $\{c_k(r)\}\equiv\{c_k(r;\,Z:\beta)\}$, $k=0,\pm 1,\cdots$ — последовательность коэффициентов Фурье, ассоциированная с Z, такая, что для любого $r>0$*

---

* Она по существу восходит к давним работам Ф. и Р. Неванлинн [4], [5], а в явном виде формулы этой леммы впервые встречаются в статьях Н. И. Ахиезера [6] и М. Л. Картрайт [7].

** Здесь и всюду в этой статье черта над величиной будет означать комплексное сопряжение.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r)|^2 < +\infty. \tag{0.6}$$

Тогда существует единственная целая функция $f(z)(f(0)=1)$, *нули которой совпадают с* Z, *а последовательность коэффициентов Фурье функции* $\log|f(re^{i\theta})|-c$ $|c_k(r)|$.

0.2. В § 1 настоящей статьи устанавливаются формулы для преобразования Фурье

$$\Omega_f(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log|f(u+iv)|du \; (-\infty < x < +\infty, \; -\infty < v < 0),$$

где $f(w) \equiv f(u+iv)$ — мероморфная в полуплоскости $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < < 0\}$ функция.

В § 2 по предварительно заданной функции $\Omega(x; v: W, Z)$ строится мероморфная в полуплоскости $G^{(-)}$ функция $f(w)$ с нулями на последовательности $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$, полюсами на $Z \equiv \{z_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$, и такая, что $\Omega_f(x, v)$ совпадает с заданной функцией.

В § 3 строится мероморфная в $G^{(-)}$ функция с заданной последовательностью нулей $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$, рост которой оценивается числовой функцией множества ее нулей W.

В заключение выражаю благодарность М. М. Джрбашяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

§ 1. Основные формулы

1.1. Пусть последовательность комплексных чисел $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \equiv \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ лежит в полуплоскости $G^{(-)}$, причем число точек w_k в каждой полосе $D(a, b) = \{w: -\infty < a \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant b < 0\}$ конечно.

Для $-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0$, $-\infty < v_0 < v < 0$ введем следующие функции:

$$S(x; v_0, v: W) \equiv \frac{1}{2x} \sum_{v_0 < v_k < v} e^{-ixu_k + xv_k} + \frac{e^{xv_0}}{4x} \sum_{v_k = v_0} e^{-ixu_k}, \tag{1.1}$$

$$S_0(x; v_0, v: W) \equiv -e^{xv}\, \overline{S}(-x; v_0, v: W). \tag{1.2}$$

Докажем теорему.

Теорема 1. *Пусть* $f(w)$ — *мероморфная функция в полуплоскости* $G^{(-)}$ *с последовательностями нулей* $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ *и полюсов* $Z \equiv \{z_k\}_1^\infty \equiv \{t_k + i\mu_k\}_1^\infty$, *причем число нулей и полюсов в полосах* $D(a, b)$ *конечно и равномерно по* v *в любом конечном промежутке,* $v \in [a, b] \subset (-\infty, 0)$

$$\lim_{u \to \infty} \frac{f'(u+iv)}{f(u+iv)} = 0. \tag{1.3}$$

Тогда, если при некоторых v_0 $(-\infty < v_0 < 0)$ *и* x $(-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0)$ *существует интеграл*

$$\frac{e^{xv_0}}{\sqrt{2\pi}\, ix} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{f'(u+iv)}{f(u+iv)}\, du = h(x, v_0), \tag{1.4}$$

то при любом v $(-\infty < v_0 < v < 0)$ *справедлива формула*

$$\Omega_f(x, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, ix} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \operatorname{Re} \frac{f'(u+iv)}{f(u+iv)}\, du =$$

$$= \frac{1}{2} [e^{-xv} h(x, v_0) + e^{xv} \bar{h}(-x, v_0)] -$$

$$- \sqrt{2\pi}\, e^{-xv} [S(x; v_0, v: W) - S(x; v_0\, v: Z)] +$$

$$+ \sqrt{2\pi} [S_0(x; v_0, v: W) - S_0(x; v_0, v: Z)]. \tag{1.5}$$

Доказательство. В полуплоскости $G^{(-)}$ рассмотрим область D, которая получается из прямоугольника с вершинами в точках $\sigma_n + iv_0$, $\sigma_n + iv$ $(v_0 < v < 0,\ n = 1, 2)$ выбрасыванием из него малых полукругов с центрами в точках w_k, z_k ($\operatorname{Im} w_k = v_0, v$; $\operatorname{Im} z_k = v_0, v$).

Рассмотрим интеграл

$$I(x) \equiv \int_{\partial D} e^{-ix\zeta} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta,$$

где ∂D—граница области D, ориентированная против часовой стрелки. В силу условия (1.3)

$$\lim_{\sigma_n \to \infty} \int_{v_0}^{v} e^{-ix(\sigma_n + it)} \frac{f'(\sigma_n + it)}{f(\sigma_n + it)}\, dt = 0. \tag{1.6}$$

Далее, для $\zeta \in \partial D$ и малых $r > 0$ введем функции

$$I_1(\zeta, r) \equiv -ir \int_{\pi}^{2\pi} e^{-ix(\zeta + re^{i\varphi})} \frac{f'(\zeta + re^{i\varphi})}{f(\zeta + re^{i\varphi})} e^{i\varphi}\, d\varphi,$$

$$I_2(\zeta, r) \equiv -ir \int_{0}^{\pi} e^{-ix(\zeta + re^{i\varphi})} \frac{f'(\zeta + re^{i\varphi})}{f(\zeta + re^{i\varphi})} e^{i\varphi}\, d\varphi.$$

Обозначим через p_k и q_k, соответственно, кратности нуля w_k и полюса z_k. Легко можно убедиться в том, что

$$\lim_{r \to 0} I_{1,2}(w_k, r) = -i\pi p_k e^{-ixw_k} \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{1.7}$$

$$\lim_{r \to 0} I_{1,2}(z_k, r) = i\pi q\, e^{-ixz_k} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{1.8}$$

Следовательно, в силу (1.6), (1.7), (1.8) и теоремы о вычетах для интеграла

$$H(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{f'(u+iv)}{f(u+iv)} du \tag{1.9}$$

справедлива формула

$$e^{xv} H(x, v) = -\sqrt{2\pi}\, i \sum_{v_0 < v_k < v} e^{-ixw_k} + \sqrt{2\pi}\, i \sum_{v_0 < \rho_k < v} e^{-ixz_k} -$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{2} i \sum_{v_k = v_0,\, v} e^{-ixw_k} + \frac{\sqrt{2\pi}}{2} i \sum_{\rho_k = v_0,\, v} e^{-ixz_k} + ixh(x, v_0). \tag{1.10}$$

В суммах (1.10) каждый нуль и полюс считаются столько раз каковы их кратности.

Замечая теперь, что

$$\Omega_f(x, v) = \frac{1}{2ix} \{H(x, v) + \overline{H}(-x, v)\}, \tag{1.11}$$

в силу (1.10) получаем формулу (1.5).

Теорема доказана.

В случае, когда функция $f(w)$ аналитична, формула (1.5) принимает следующий вид:

$$\Omega_f(x, v) = \frac{1}{2} \{e^{-xv} h(x, v_0) + e^{xv} \overline{h}(-x, v_0)\} -$$

$$-\sqrt{2\pi} e^{-xv} S(x;\, v_0, v\colon W) + \sqrt{2\pi}\, S_0(x;\, v_0, v\colon W). \tag{1.12}$$

Отметим два следствия из этой теоремы.

Следствие 1. *Пусть мероморфная в полуплоскости $G^{(-)}$ функция $f(w)$ обладает свойством* (1.3) *теоремы* 1 *и кроме того для любого v $(-\infty < v < 0)$*

$$\lim_{u \to \infty} |f(u+iv)| = 1, \tag{1.13}$$

причем последовательности нулей $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ и полюсов $\{z_k\}_1^\infty \equiv \{t_k + i\rho_k\}_1^\infty$ функции удовлетворяют условию

$$\lim_{k \to \infty} v_k = \lim_{k \to \infty} \rho_k = 0. \tag{1.14}$$

Тогда, если при некоторых v_0 $(v_0 < v_k,\ v_0 < \rho_k;\ k = 1, 2, \cdots)$ и x $(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0)$ интеграл

$$\frac{e^{xv_0}}{\sqrt{2\pi}\, ix} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{f'(u+iv_0)}{f(u+iv_0)} du = h(x) \tag{1.15}$$

существует, то он не зависит от v_0 и при v $(-\infty < v < 0)$ справедлива формула

$$\Omega_f(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log|f(u+iv)|\, du = \frac{1}{2} \{e^{-xv} h(x) + e^{xv} \overline{h}(-x)\} -$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{v_k<v} e^{-ixu_k}\,\mathrm{sh}\,(x(v_k-v))+\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{\rho_k<v} e^{-ixt_k}\mathrm{sh}\,(x(\rho_k-v)). \quad (1.16)$$

Покажем, что $h(x)$ не зависит от $v_0 (v_0 < v_k, v_0 < \rho_k;\ k=1, 2, \cdots)$. В самом деле, рассмотрим интеграл

$$\int e^{-ix\zeta}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta,$$

взятый по контуру прямоугольника с вершинами в точках σ_n+iv_0, $\sigma_n+iv\,(n=1,\ 2;\ v<v_0<v_k,\ v_0<\rho_k;\ k=1,\ 2,\cdots)$ и, очевидно, тождественно равный нулю для всех $x(-\infty<x<+\infty)$.

Замечая, что согласно условию (1.3)

$$\lim_{\sigma_n\to\infty}\int_v^{v_0} e^{-ix(\sigma_n+it)}\frac{f'(\sigma_n+it)}{f(\sigma_n+it)}\,dt=0,$$

получаем требуемое утверждение.

Так как ввиду (1.13)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\log|f(u+iv)|\,du=\frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\,\mathrm{Re}\frac{f'(u+iv)}{f(u+iv)}\,du,$$

то из (1.5), в силу (1.14), получаем формулу (1.16).

С л е д с т в и е 2. *Пусть в условиях следствия* 1 *для некоторого* $v(-\infty<v<0)$ *функция* $\log|f(u+iv)|\,(-\infty<u<\infty)$ *принадлежит классу* $L_1(-\infty, +\infty)$ *и для любого* $x(-\infty<x<0)$ *сходятся интегралы* (1.15).

Тогда справедлива формула

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\log|f(u+iv)|\,du=\frac{1}{2}h(-0)-$$

$$-\sqrt{2\pi}\sum_{v_k<v}(v_k-v)+\sqrt{2\pi}\sum_{\rho_k<v}(\rho_k-v), \quad (1.17)$$

где

$$h(-0=\lim_{x\to-0}h(x). \quad (1.18)$$

Она следует из (1.16) путем перехода к пределу при $x\to-0$.

Разумеется следствия 1 и 2 остаются справедливыми и в том случае, когда (1.14) заменяется условием конечности числа нулей и полюсов функции $f(w)$.

Таким образом, мы пришли к следующему результату, принадлежащему Б. Я. Левину (см. [8], гл. IV, § 2).

Пусть функция $f(z)$ мероморфна в замкнутой правой полуплоскости, причем $f(0)=1$. Тогда при условии сходимости интеграла в (1.19) и $R>0$ справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log|f(R\cos\vartheta\, e^{i\vartheta})| \frac{d\vartheta}{R\cos^2\vartheta} = \sum_m \left(\frac{\cos\varphi_m}{r_m} - \frac{1}{R}\right) -$$

$$- \sum_n \left(\frac{\cos\psi_n}{\rho_n} - \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Re} f'(0), \tag{1.19}$$

где $r_m e^{i\varphi_m}$ — нули, $\rho_n e^{i\psi_n}$ — полюсы функции $f(z)$, лежащие в области $\left\{z: \left|z - \frac{R}{2}\right| < \frac{R}{2}\right\}$.

Формула (1.19) получается из (1.17) посредством преобразования $z = -\frac{i}{w}$, переводящего $G^{(-)}$ в правую полуплоскость. В самом деле, так как в окрестности точки $z=0$

$$\log|f(z)| = \operatorname{Re}[f'(0)\, z + \cdots],$$

то для малых $R_0 > 0$

$$h(-0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log|f(R_0\cos\vartheta\, e^{i\vartheta})| \frac{d\vartheta}{R_0\cos^2\vartheta} = \sqrt{2\pi}\operatorname{Re} f'(0).$$

1.2. Пусть последовательность $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ $(\lim_{k\to\infty} v_k = 0)$ лежит в полуплоскости $G^{(-)}$ и при $-\infty < \rho < 0$

$$B_\rho(w) \equiv B_\rho(w; w_k) \equiv \prod_{v_k<\rho} \frac{w - w_k}{w - \overline{w}_k - 2i\rho} \quad (\operatorname{Im} w < \rho). \tag{1.20}$$

Положив для $v_0 < v_k$; $k=1, 2, \cdots$

$$h_\rho(x) = \frac{e^{xv_0}}{\sqrt{2\pi}\, ix}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{B_\rho'(u+iv_0)}{B_\rho(u+iv_0)}\, du \quad (-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0), \tag{1.21}$$

будем иметь

$$h_\rho(x) = \frac{2e^{xv_0}}{\sqrt{2\pi}\, x}\sum_{v_k<\rho} (v_k - \rho)\, e^{-ixu_k}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixu}}{[u + i(v_0 - v_k)][u + i(v_0 + v_k - 2\rho)]}\, du.$$

Вычислив последний интеграл, получаем

$$h_\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0 \\ \frac{2\sqrt{2\pi}}{x}\, e^{x\rho}\sum\limits_{v_k<\rho} e^{-ixu_k}\operatorname{sh}(x(v_k - \rho)) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Далее, легко можно проверить, что равномерно по $v \in [a, b] \subset \subset(-\infty, 0)$

$$\lim_{u \to \infty} \frac{B'_\rho(u+iv)}{B_\rho(u+iv)} = 0 \qquad (1.23)$$

и для любого $v\ (-\infty < v < 0)$

$$\lim_{u \to \infty} B_\rho(u+iv) = 1. \qquad (1.24)$$

Таким образом, в силу формулы (1.16) при $-\infty < v < \rho$, $-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0$

$$\Omega_{B_\rho}(x, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log |B_\rho(u+iv)| du =$$

$$= \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{e^{|x|(v-\rho)}}{|x|} \sum_{v < v_k < \rho} e^{-ixu_k} \operatorname{sh}(|x|(v_k - \rho)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sh}(|x|(v-\rho))}{|x|} \sum_{v_k < v} e^{-ixu_k + |x|(v_k - \rho)} \right\}. \qquad (1.25)$$

Но так как для любого $v(-\infty < v < 0)$ $\log|B_\rho(u+iv)| \in L_1(-\infty, +\infty)$, то справедлива также формула

$$\Omega_{B_\rho}(0, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \log |B_\rho(u+iv)| du =$$

$$= \sqrt{2\pi} \left\{ \sum_{v < v_k < \rho} (v_k - \rho) + (v - \rho) \sum_{v_k < v} 1 \right\}. \qquad (1.26)$$

Если последовательность $\{w_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k| < +\infty \qquad (1.27)$$

и

$$B_0(w) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \frac{w - w_k}{w - \bar{w}_k} \quad (\operatorname{Im} w < 0), \qquad (1.28)$$

то в силу оценки (см., напр., [10])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \log \left| \frac{u+iv-w_k}{u+iv-\bar{w}_k} \right| \right| du < \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|,$$

формулы (1.25) и (1.26) справедливы и при $\rho = 0$*.

§ 2. Преобразование Фурье, ассоциированное с последовательностью комплексных чисел

Пусть последовательность комплесных чисел $w \equiv \{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию

* Формулы (1.25) и (1.26) в случае $\rho = 0$ прямым подсчетом установлены в работе [11].

$$\lim_{k\to\infty} v_k = 0, \tag{2.1}$$

и $h(x)$ $(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0)$ — произвольная функция.

Далее, условимся для любых v $(-\infty < v < 0)$ и x $(-\infty < x < +\infty,$ $x \neq 0)$ обозначать через

$$S(x;\ v:\ W) \equiv \frac{1}{2x} \sum_{v_k < v} e^{-ixu_k + xv_k}, \tag{2.2}$$

$$S_0(x;\ v:\ W) \equiv \frac{e^{xv}}{2x} \sum_{v_k < v} e^{-ixu_k - xv_k}. \tag{2.3}$$

Определим теперь функцию

$$\Omega(x;\ v:w) \equiv \frac{1}{2}\ [e^{-xv} h(x) + e^{xv}\ \overline{h}(-x)] -$$

$$- \sqrt{2\pi}\ \{e^{-xv} S(x;\ v:\ W) - S_0(x;\ v:\ W)\} (-\infty < x < 0), \tag{2.4}$$

$$\Omega(x;\ v:\ W) \equiv \overline{\Omega}(-x;\ v:\ W)\ (0 < x < +\infty), \tag{2.5}$$

и назовем ее преобразованием Фурье, ассоциированным с последовательностью W.

Докажем теорему.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega(x;\ v:\ W) \equiv \Omega(x, v)$ — *преобразование Фурье, ассоциированное с последовательностью* W, *причем*

а) $h(x) = 0$ *при* $0 < x < +\infty$,

б) *при любом* v $(-\infty < v < 0)$

$$\Omega(x, v) \in L_2(-\infty, 0), \tag{2.6}$$

в) *при любом* v $(-\infty < v < 0)$ *существует* v_0 $(v_0 < v,\ v_0 < v_k;$ $k = 1, 2, \cdots)$, *такое, что функция* $x\, e^{x(v - v_0)}\, \Omega(x, v)$ *непрерывна и ее преобразование Фурье на полуоси* $(-\infty, 0)$ *принадлежит классу* $L_1(-\infty, +\infty)$.

Тогда существует единственная аналитическая в полуплоскости $G^{(-)}$ *функция* $f(w)$ *со свойствами:*

1) *Равномерно по* $v \in [a, b] \subset (-\infty, 0)$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{f'(u + iv)}{f(u + iv)} = 0,$$

и для любого v $(-\infty < v < 0)$ $\lim\limits_{u\to\infty} f(u + iv) = 1$.

2) *при любом* v $(-\infty < v < 0)$

$$\log |f(u + iv)| \in L_2(-\infty, +\infty),$$

3) *нули* $f(w)$ *совпадают с* w,

4) $\Omega_f(x, v) = \Omega(x, v)$ $(-\infty < v < 0)$.

Доказательство. Для $-\infty < \rho < 0$ введем следующие функции:

$$\Phi(u+i\rho) \equiv \underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{i\tau u}\,\Omega(\tau,\rho)\,d\tau^{*}, \tag{2.7}$$

$$P_\rho(w) = \exp\left\{\frac{2i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{\Phi(z)}{z-w}\,dz\right\}, \tag{2.8}$$

$$f_\rho(w) \equiv B_\rho(w)\,P_\rho(w). \tag{2.9}$$

Функция $f_\rho(w)$ аналитична в полуплоскости $G_\rho^{(-)} = \{w\colon \operatorname{Im} w < \rho\}$, и ее нули совпадают с теми w_k, которые лежат в $G_\rho^{(-)}$.

Докажем, что для любого v $(-\infty < v < \rho)$

$$\lim_{u\to\infty} f_\rho(u+iv) = 1.$$

В самом деле, во-первых, мы имеем формулу (1.24), во-вторых так как при $v \in (-\infty, \rho)$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(x+i\rho)}{x+i\rho-u-iv}\,dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Phi(x+i\rho)|}{\sqrt{(x-u)^2+(\rho-v)^2}}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x+i\rho)|^2\,dx\right\}^{1/2} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+(\rho-v)^2}\right\}^{1/2} < +\infty,$$

то для любого v $(-\infty < v < \rho)$

$$\lim_{u\to\infty} P_\rho(u+iv) = 1.$$

В силу формулы

$$\frac{P_\rho'(w)}{P_\rho(w)} = \frac{2i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty+i\rho}^{+\infty+i\rho} \frac{\Phi(z)}{(z-w)^2}\,dz \tag{2.10}$$

и оценки

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(x+i\rho)}{(x+i\rho-u-iv)^2}\right| \leqslant \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x+i\rho)|^2\right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{[x^2+(\rho-b)^2]^2}\right)^{1/2} \quad (-\infty < v < b < \rho)$$

имеем также, что равномерно по $v \in [a, b] \subset (-\infty, 0)$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P_\rho'(u+iv)}{P_\rho(u+iv)} = 0.$$

Отсюда, учитывая (1.23), получаем, что равномерно по $v \in [a, b]$

* l.i.m. означает предел по норме пространства $L_2(-\infty, +\infty)$.

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f'_\rho(u+iv)}{f_\rho(u+iv)}=\lim_{u\to\infty}\frac{P'_\rho(u+iv)}{P_\rho(u+iv)}+\lim_{u\to\infty}\frac{B'_\rho(u+iv)}{B_\rho(u+iv)}=0.$$

Замечая, что при любом $v\in(-\infty,\rho)$

$$\log|B_\rho(u+iv)|\in L_2(-\infty,+\infty),$$

а также

$$\log|P_\rho(u+iv)|=\frac{2(\rho-v)}{(2(\pi)^{3/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(x+i\rho)}{(x-u)^2+(\rho-v)^2}\,dx\in L_2(-\infty,+\infty)$$

как свертка двух функций из $L_1(-\infty,+\infty)$ и $L_2(-\infty,+\infty)$, мы получаем, что при любом $v\in(-\infty,\rho)$

$$\log|f_\rho(u+iv)|\in L_2(-\infty,+\infty).$$

Докажем теперь, что при $v<\rho$

$$\Omega_{f_\rho}(x,v)=\Omega(x,v). \tag{2.11}$$

Для этого, в силу следствия 1 теоремы 1, достаточно показать, что при некотором v_0 ($v_0<\rho$, $v_0<v_k$; $k=1,2,\cdots$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{xv_0}}{ix}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}\frac{f'_\rho(u+iv_0)}{f_\rho(u+iv_0)}\,du=h(x)(x\neq0). \tag{2.12}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{(z-w)^2}\in L_2(-\infty,+\infty),$$

из (2.7) и (2.10) получаем

$$\frac{P'_\rho(w)}{P_\rho(w)}=\frac{2i}{(2\pi)^{3/2}}\lim_{\sigma\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u+i\rho-w)^2}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}e^{i\tau u}\,\Omega(\tau,\rho)\,d\tau du.$$

Меняя здесь порядок интегрирования и используя формулу (см. [12], стр. 323, № 9)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\tau u}}{(u+i\rho-w)^2}\,du=\begin{cases}0 & \text{при}\quad \tau>0\\ 2\pi\tau\, e^{\tau(\rho+iw)} & \text{при}\quad \tau<0\end{cases}$$

приходим к равенству

$$\frac{P'_\rho(w)}{P_\rho(w)}=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}\tau e^{\tau\rho}e^{i\tau w}\,\Omega(\tau,\rho)\,d\tau.$$

А это ввиду условия в) означает, что при некотором v_0 ($v_0<\rho$, $v_0<v_k$; $k=1,2,\cdots$) справедлива формула обращения (см., напр., [9], теорема 1.9)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{xv_0}}{ix}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}\frac{P'_\rho(u+iv_0)}{P_\rho(u+iv_0)}\,du=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x>0\\ 2e^{x\rho}\,\Omega(x,\rho) & \text{при}\quad x<0.\end{cases} \tag{2.13}$$

Из (1.21), (1.22) и (2.13) вытекает справедливость формулы (2.12).

Докажем, что при $\rho' > \rho$ $f_{\rho'}$ является аналитическим продолжением f_ρ.

В самом деле, рассмотрим следующую функцию:

$$F(w) = \frac{f_{\rho'}(w)}{f_\rho(w)} \quad (\operatorname{Im} w < \rho).$$

Ввиду (2.11) при $v < \rho$ и $x \neq 0$

$$\Omega_F(x, v) = \Omega_{f_{\rho'}}(x, v) - \Omega_{f_\rho}(x, v) = 0.$$

Но так как при любом $v \in (-\infty, \rho)$

$$\log |F(u+iv)| \in L_2(-\infty, +\infty),$$

то согласно теореме順 Планшереля преобразование Фурье функции $\log |F(u+iv)|$ в классе $L_2(-\infty, +\infty)$ почти всюду совпадает с $\Omega_F(x, v)$, и поэтому $|F(w)| \equiv 1$ при $\operatorname{Im} w < \rho$. С другой стороны

$$\lim_{u \to \infty} F(u+iv) = 1 \quad (-\infty < v < \rho).$$

Следовательно, $F(w) \equiv 1$ при $\operatorname{Im} w < \rho$.

Теперь определим функцию $f(w)$ следующим образом:

$$f(w) \equiv f_\rho(w) \text{ при } \operatorname{Im} w < \rho.$$

Легко можно проверить, что функция $f(w)$ аналитична во всей полуплоскости $G^{(-)}$ и обладает свойствами 1), 2), 3), 4).

Докажем единственность функции $f(w)$. Допустив существование двух таких функций f_1, f_2, рассмотрим их отношение

$$\varphi(w) = \frac{f_1(w)}{f_2(w)} \quad (\operatorname{Im} w < \rho).$$

Таким же образом как и выше мы убеждаемся, что

$$\varphi(w) \equiv 1 \quad (\operatorname{Im} w < \rho).$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Метод доказательства этой теоремы может быть использован для построения мероморфных функций. А именно, пусть последовательности комплексных чисел $W \equiv \{w_k\}_1^\infty$ и $Z \equiv \{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{Im} w_k = \lim_{k \to \infty} \operatorname{Im} z_k = 0,$$

а функции $h(x)$ и $\Omega(x, v) \equiv \Omega(x; v: W, Z)$, при любом v $(-\infty < v < 0)$ определенная следующим образом:

$$\Omega(x, v) \equiv \frac{1}{2} \{e^{-xv} h(x) + e^{xv} \bar{h}(-x)\} -$$

$$-\sqrt{2\pi}\, \{S(x; v: W) - S(x; v: Z)\} -$$

$$-\sqrt{2\pi}\,[S_0(x;\,v:\,W)-S_0(x;\,v:\,Z)]\ (-\infty<x<0),$$

$$\Omega(x,v)\equiv\overline{\Omega}(-x,v)\ (0<x<+\infty),$$

удовлетворяют условиям а), б), в) теоремы 2. Тогда, определяя функцию

$$f_\rho(w)\equiv\frac{B_\rho(w;\,w_k)\,P_\rho(w)}{B_\rho(w;\,z_k)}$$

как при доказательстве теоремы 2, мы можем показать, что мероморфная в $G^{(-)}$ функция, определяемая следующим образом:

$$f(w)\equiv f_\rho(w)\ \text{для}\ \operatorname{Im} w<\rho,$$

имеет нули на W, полюсы на Z и обладает свойствами 1), 2), 4) теоремы 2.

§ 3. Построение мероморфной функции с заданными нулями и заданным ростом

Пусть последовательность $W\equiv\{w_k\}_1^\infty\equiv\{u_k+iv_k\}_1^\infty\subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k\to\infty} v_k=0. \tag{3.1}$$

Для любого v $(-\infty<v<0)$ введем следующие обозначения:

$$n(v,\,W)\equiv\sum_{v_k<v}1, \tag{3.2}$$

$$N(v,\,W)\equiv\int_{-\infty}^{v}n(t,\,W)\,dt. \tag{3.3}$$

Заметим, что

$$N(v,\,W)=\int_{-\infty}^{v}(v-t)\,dn(t,\,W)=\sum_{v_k<v}(v-v_k). \tag{3.4}$$

При $v\in(-\infty,0)$ справедливы следующие оценки:

$$|v|\,n(2v,\,W)\leqslant N(v,\,W)\leqslant cn(v,\,W), \tag{3.5}$$

где $c>0$ — постоянная, не зависящая от v.

Далее, для мероморфной в полуплоскости $G^{(-)}$ функции $f(w)$ обозначим

$$E(v,f)\equiv\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\log|f(u+iv)|\right|^2du\right)^{1/2}. \tag{3.6}$$

Теорема 3. *Пусть последовательность* $W\equiv\{w_k\}_1^\infty\equiv\{u_k+iv_k\}_1^\infty\subset G^{(-)}$ *удовлетворяет условию* (3.1). *Тогда существует мероморфная в полуплоскости* $G^{(-)}$ *функция* $f(w)$ *с нулями на* W, *для которой при* $v\to-0$ *справедлива оценка*

$$E(v, f) \leqslant A|v|^{-1} N(Bv, W), \tag{3.7}$$

где A, $B>0$ — постоянные, не зависящие от v.

Доказательство. Определим последовательность $Z \equiv \{z_k\}_1^\infty$ следующим образом: $z_k = u_k + iv_k$, причем так, чтобы $u_k < u'_k < u_k + \pi$, все числа w_k, z_m были разные и для некоторого $v_0 \in (-\infty, 0)$ выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} |e^{-iu_k} - e^{-iu'_k}| < \sum_{k=1}^{\infty} |u_k - u'_k| < N(v_0, W). \tag{3.8}$$

Таким образом, $N(v, Z) = N(v, W)$.

Из (2.3) и (3.5) вытекает справедливость оценок

$$|S_0(x; v: W)| \leqslant \frac{N(v/2, W)}{|x|\,|v|} \tag{3.9}$$

$$(-\infty < x < 0, \ -\infty < v < 0).$$

$$|S_0(x; v: W)| \leqslant \frac{N(v/2, W)}{|x|\,|v|} \tag{3.10}$$

Положим

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x > 0 \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (e^{-ixu_k} - e^{-ixu'_k})\, e^{xv_k} & \text{при} \ x < 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Тогда в силу неравенства

$$|e^{-ixu_k} - e^{-ixu'_k}| \leqslant c\,|x|\ |e^{-iu_k} - e^{-iu'_k}|, \tag{3.12}$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от x, справедлива оценка

$$e^{-xv}\left|\frac{1}{2} h(x) - \sqrt{2\pi}\, S(x; v: W) + \sqrt{2\pi}\, S(x; v: Z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\sqrt{2\pi} \sum_{v_k > v} |e^{-iu_k} - e^{-iu'_k}| \leqslant c\sqrt{2\pi}\, N(v_0, W) \leqslant$$

$$\leqslant c\sqrt{2\pi}\, N(v, W) \ (-\infty < v_0 < v < 0, \ -\infty < x < 0). \tag{3.13}$$

Далее, при $-\infty < v < v' < 0$ и $-\infty < x < 0$

$$|S(x; v': W) - S(x; v: W)| \leqslant \frac{1}{2|x|} \int_v^{v'} e^{xt}\, dn(t, W) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{xv} n(v', W)}{2|x|} \leqslant \frac{e^{xv} N(v'/2, W)}{|x|\,|v'|}. \tag{3.14}$$

Подставив в (3.13) вместо v величину $v' = \log(e^v |xv|^{1/|x|})$ и заметив, что $v' < v(1 - e^{-1})$, в силу (3.14) при $-\infty < x < \frac{1}{v}$ будем иметь

$$e^{-xv}\left|\frac{1}{2} h(x) - \sqrt{2\pi}\, S(x; v: W) + \sqrt{2\pi}\, S(x; v: Z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A' N(B' v, W)}{|x|\,|v|} \quad (-\infty < v_0 < v < 0), \tag{3.15}$$

где $A', B' > 0$—постоянные, не зависящие от x и v.

Нетрудно убедиться, что при любом v $(-\infty < v < 0)$ функции

$$e^{-x\pi}\left\{\frac{1}{2} h(x) - \sqrt{2\pi}\, S(x; v: W) + \sqrt{2\pi}\, S(x; v: Z)\right\},$$

$$S_0(x; v: W) - S_0(x; v: Z),$$

и, следовательно, функция $\Omega(x; v: W, z) = \Omega(x, v)$ входят в класс $L_2(-\infty, 0)$.

Теперь установим, что функция $\Omega(x, v)$ удовлетворяет условию в) теоремы 2. Из неравенства

$$\left| \int_{-\infty}^{0} e^{-ixu}\, x\, e^{x(v-v_0)}\, \Omega(x, v)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2\pi} \sum_{v_k > v} \frac{|u_k - \overset{*}{u}_k|}{|v_k - v_0 - i(u + u_k)|\, |v_k - v_0 - i(u + \overset{*}{u}_k)|} +$$

$$+ \sqrt{2\pi} \sum_{v_k < v} \frac{|u_k - \overset{*}{u}_k|}{|2v - v_k - v_0 - i(u + u_k)|\, |2v - v_k - i(u + \overset{*}{u}_k)|},$$

в силу оценки

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{du}{[a^2 + (u + v_k)^2]^{1/2}\, [a^2 + (u + \overset{*}{u}_k)^2]^{1/2}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{du}{[a^2 + (u + u_k - \overset{*}{u}_k)^2]^{1/2}\, [a^2 + u^2]^{1/2}} \leqslant \frac{\pi}{2a} \quad (a > 0;\ k = 1, 2, \cdots)$$

получаем, что при любых v $(-\infty < v < 0)$ и v_0 $(v_0 < v,\ v_0 < v_k;\ k = 1, 2, \cdots)$ преобразование Фурье функции $x\, e^{x(v-v_0)}\, \Omega(x, v)$ на полуоси $(-\infty, 0)$ принадлежит классу $L_1(-\infty, +\infty)$. Непрерывность этой функции проверяется без труда.

Таким образом, в силу замечания из § 2, существует мероморфная в $G^{(-)}$ функция $f(w)$ с нулями на W, полюсами на Z и такая что при любом v $(-\infty < v < 0)$ $E(v, f) < \infty$ и $\Omega_f(x, v) = \Omega(x, v)$.

Наконец, в силу тождества

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega_f(x, v)|^2\, dx = 2 \int_{-\infty}^{1/v} |\Omega_f(x, v)|^2\, dx + 2 \int_{1/v}^{0} |\Omega_f(x, v)|^2\, dx,$$

равенства Парсеваля и неравенств (3.9), (3.10), (3.13), (3.15), справедлива оценка (3.7).

Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 31.III.1983

Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Կիսահարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիաների հետ զուգորդված Ֆուրյեի ձևափոխություն *(ամփոփում)*։

Հոդվածում ցանկացած $v \in (-\infty, 0)$ *համար ուսումնասիրվում է* $\log|f(u+iv)|$ *ֆունկցիայի Ֆուրյեի ձևափոխությունը*

$$\Omega_f(x, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log|f(v+iv)|\, du \quad (-\infty < x < +\infty),$$

որտեղ $f(w) \equiv f(u+iv)$ *-ն* $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$ *կիսահարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիա է։*

Ստացվում են բանաձևեր $\Omega_f(x, v)$ *ֆունկցիայի համար, որոնցում գլխավոր դեր են խաղում* $f(w)$*-ի զրոները և բևեռները։*

Այնուհետև նախօրոք տրված $\Omega(x; v: W, Z)$ *ֆունկցիայի միջոցով կառուցվում է* $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ *զրոներով,* $Z \equiv \{z_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ *բևեռներով* $G^{(-)}$ *կիսահարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիա, որի համար* $\Omega_f(x, v)$*-ն համընկնում է առաջին ֆունկցիայի հետ։*

Վերջում կառուցվում է զրոների տրված $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \equiv G^{(-)}$ *հաջորդականությունն ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիա, որի աճը գնահատվում է նրա զրոների* W *բազմության թվային ֆունկցիայով։*

G. V. MIKAELIAN. *A Fourier transform associated with functions meromorphic in the half-plane* (summary)

The Fourier transform

$$\Omega_f(x, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log|f(u+iv)|\, du$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

of $\log|f(u+iv)|$ for arbitrary $v \in (-\infty, 0)$ is investigated, where $f(w) \equiv f(u+iv)$ is a meromorphic function in the half-plane $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$.

Formulae for $\Omega_f(x, v)$ are obtained in which the zeros and poles of $f(w)$ are playing the main role.

Further, by means of a given function $\Omega(x; v: W; Z)$ a function meromorphic in the $G^{(-)}$ half-plane is constructed with zeros in $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ and poles in $Z \equiv \{z_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$, for which $\Omega_f(x, v)$ coincides with the first function.

In the end a meromorphic function is constructed with a prescribed sequence $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ of zeros and it's growth is estimated by the number function of the set w of it's zeros.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. A. Rubel.* A Fourier series method for entire functions, Duke. Math. J., 30, 1963, 437—442.
2. *L. A. Rubel, B. A. Taylor.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions, Bull. Soc. Math. France, 96, 1968, 53—96.
3. *G. R. Maclane, L. A. Rubel.* On the growth of Blaschke product, Canadian J. of Math.. XXI, № 3, 1969, 595—601.
4. *F. Nevanlinna.* Bemerhungen zur Theorie der ganzen Eunktionen endlicher Ordnung, Soc. sci. fenn., Comment. Phys, Math., 2, № 4, 1923.
5. *R. Nevanlinna.* Zur Theorie der meromorphen Funktionen, Acta math., 46, 1925.
6. *Н. И. Ахиезер.* Зап. физ.-мат. отд. АН УССР, 1927, 2, № 3, 29—33.

7. *M. L. Cartwright*. Proc. London Math. Soc.. 33, 1931, 209—224.
8. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, М., 1956.
9. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
10. *А. М. Джрбашян*. Факторизация, параметрические представления и граничные свойства некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, канд. диссертация, Харьков, 1983.
11. *Г. В. Микаелян*. Исследование роста произведений типа Бляшке—Неванлинны методом преобразований Фурье, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 3, 1983, 216—229.
12. *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев*. Интегралы и ряды, М., «Наука», 1981.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 5, 1984 Математика

УДК 517.946

В. А. ОГАНЯН

ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Введение

Пусть D — односвязная, ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ, содержащей интервал $(-\beta, \beta)$ действительной оси, и пусть $x_1, x_2, \cdots, x_p$ — точки из этого интервала.

Обозначим через $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$ класс действительных вектор-функций $u(x, y)$, первые производные которых непрерывны всюду в $\overline{D}$ кроме, быть может, граничных точек $x_1, x_2, \cdots, x_p$, а в окрестности этих точек производные удовлетворяют условиям:

$$\lim_{z\to x_k}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot|z-x_k|^{l_k+\varepsilon}=0,\ \lim_{z\to x_k}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot|z-x_k|^{l_k+\varepsilon}=0\quad (k=1, 2, \cdots, p),$$

где $z=x+iy\in D$, l_k — положительные числа, $l_k=m_k+\beta_k$, m_k — целая часть l_k, а β_k — дробная часть.

Обозначим, далее, через $N_\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$ класс действительных вектор-функций $f(z)$, $z\in\Gamma$, которые удовлетворяют условию Гельдера в окрестности любой точки, отличной от точек $x_1, x_2, \cdots, x_p$, а в окрестности точек x_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ функции представляются в виде

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\psi_{k1}(x)}{(x_k-x)^{l_k}}, & \text{при}\quad x\in(x_k-\varepsilon, x_k)\\[2ex] \dfrac{\psi_{k2}(x)}{(x_k-x)^{l_k}}, & \text{при}\quad x\in(x_k, x_k+\varepsilon),\end{cases}$$

где $\psi_{k1}(x)$ и $\psi_{k2}(x)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем α_k $(\beta_k<\alpha_k\leqslant 1)$.

В области D рассмотрим эллиптическую систему

$$L(u)\equiv A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

где A, B, C — действительные постоянные квадратные матрицы n-го порядка, $u(x, y)=\{u_1(x, y)\cdots, u_n(x, y)\}$ — дважды непрерывно-дифференцируемая вектор-функция в области D. В дальнейшем под $(u_1(x, y)$ $u_2(x, y), \cdots, u_n(x, y))$ всегда понимается вектор-столбец.

Напомним, что система (1) называется эллиптической, если $\det C \neq 0$ и характеристическое уравнение

$$\det (A + 2B\lambda + C\lambda^2) = 0 \tag{1*}$$

не имеет действительных корней.

Ставится следующая

Задача А. *Найти в области D регулярное решение системы (1), принадлежащее классу $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$F(u) \equiv a(z)\frac{\partial u}{\partial x} + b(z)\frac{\partial u}{\partial y} + c(z)\, u = f(z),\ z \in \Gamma,\ z \neq x_k\ (k=1, 2, \cdots, p), \tag{2}$$

где

$$f(z) \in N_\Gamma (x_1, x_2, \cdots, x_p;\ l_1, l_2, \cdots, l_p),\ a(z),\ b(z),\ c(z)$$

— заданные на Γ квадратные матрицы n-го порядка.

Как известно, задачу (1), (2) называют нетеровой, если однородная задача (1), (2) имеет конечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(z)$ удовлетворяла конечному числу условий ортогональности.

Для широкого класса эллиптических систем задача (1), (2) изучалась в работах [1—6]. В работе [7] получено достаточное условие нетеровости задачи (1), (2) (условие Я. Б. Лопатинского), которое имеет вид

$$\int\limits_\gamma K'(z, \lambda)\, \Delta(\lambda)\, K(z, \lambda)\, d\lambda \neq 0,\ z \in \Gamma, \tag{L}$$

где $\Delta(\lambda)$ — матрица, обратная к матрице $A + 2B\lambda + C\lambda^2$, $K(z, \lambda) = \|a(z), \lambda b(z)\|$, $K'(z, \lambda)$ — транспонированная к $K(z, \lambda)$ матрица, а γ — контур в плоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$, охватывающий все корни полинома $\det (A + 2B\lambda + C\lambda^2)$, лежащие в этой полуплоскости. Если $a(z) \equiv 0$, $b(z) \equiv 0$, то $K(z, \lambda) = c(z)$.

Задачи, рассмотренные в работах [1—6], удовлетворяют условию (L).

При более общем условии, чем условие (L), в работе [8] изучена задача (1), (2) и доказана ее нетеровость.

Во всех этих работах граничная вектор-функция на контуре области удовлетворяет условию Гельдера.

Задача Пуанкаре для эллиптических систем уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + X(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + Z(x, y)\, u = 0,$$

где $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$ — вещественные, квадратные матрицы, элементы которых — целые функции своих аргументов в случае, когда граничная функция терпит разрыв первого порядка, исследована в монографии [9]. Эта задача приводится к системе сингулярных уравнений с разрывными правыми частями.

В настоящей работе рассматривается задача Пуанкаре при условии, что граничная функция имеет особенность в конечном числе точек, причем особенность может быть и не первого порядка.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение системы (1) имеет только простые корни. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения с положительными мнимыми частями, тогда общее решение системы (1) задается формулой (см. [10]):

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j (x + \lambda_j y), \tag{3}$$

где α_j $(j=1, 2, \cdots, n)$ — ненулевое решение системы

$$(A + 2B\lambda_j + C\lambda_j^2)\, \alpha_j = 0,$$

а $\varphi_j (x + \lambda_j y)(j=1, 2, \cdots, n)$ — произвольные аналитические функции относительно аргумента $x + \lambda_j y$. Система (1) называется слабо связанной, если векторы $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ линейно независимы (см. [10]). Мы будем рассматривать слабо связанную эллиптическую систему.

Обозначим через $A_0(z)$ и $B_0(z)$ матрицы, столбцами которых служат, соответственно, векторы

$$a_j(z) = (a(z) + \lambda_j\, b(z))\, \alpha_j \text{ и } b_j(z) = c(z)\, \alpha_j \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

Предположим, что в малой окрестности точки $x_1, x_2, \cdots, x_p$ элементы матриц $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ аналитические функции комплексной переменной z. Предположим, далее, что

$$\det A_0(z) \neq 0, \text{ при } z \in \Gamma. \tag{4}$$

Основное содержание работы составляет

Теорема. *Задача* (1), (2) *нетерова, индекс* $\varkappa$ *этой задачи определяется формулой*

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi}\, \Delta_\Gamma \arg (\det A_0(z)) + n\,([l_1] + [l_2] + \cdots + [l_p] + 2), \tag{2*}$$

где $\Delta_\Gamma \arg (\det A_0(z))$ — *приращение аргумента функции* $\det A_0(z)$, *когда* z *пробегает контур* Γ *один раз в положительном направлении,* $[l_1], [l_2], \cdots, [l_p]$ — *целые части чисел* $l_1, l_2, \cdots, l_p$, *а* n — *число уравнений в системе* (1).

В работе указан также конструктивный метод решения задачи (1), (2).

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

Пусть G — односвязная область в верхней полуплоскости, γ — ее граница, содержащая интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$ действительной оси ox.

Для исследования задачи (1), (2) мы рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

Задача В. *Найти в области* G *регулярное решение системы* (1), *принадлежащее классу* $M_0\,(0;\, l_0)$ *и удовлетворяющее граничному условию*

$$a_0(z)\frac{\partial u}{\partial x}+b_0(z)\frac{\partial u}{\partial y}+c_0(z)u=0,\ z\in(-\varepsilon,\varepsilon),\ z\neq 0, \tag{5}$$

где $a_0(z)$, $b_0(z)$ и $c_0(z)$ — квадратные матрицы n-го порядка, l_0—положительное число.

Пусть функция $\zeta=x+\lambda_k y$ отображает область G на область G_k $(k=1, 2,\cdots, n)$ и пусть $G_0=\bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$.

Предположим, далее, что элементы матриц $a_0(z)$, $b_0(z)$ и $c_0(z)$ аналитичны в замкнутой области G_0 и $\det\widetilde{A}_0(z)\neq 0$, где $\widetilde{A}_0(z)$— матрица, столбцами которой являются векторы

$$(a_0(z)+\lambda_j b_0(z))\,\alpha_j\ (j=1, 2,\cdots, n).$$

В области G_0 рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$F_0(\varphi)\equiv\widetilde{A}_0(z)\,\varphi'(z)+\widetilde{B}_0(z)\,\varphi(z)=\frac{i}{z^k}\,e_j$$

$$(k=1, 2,\cdots, m,\ j=1, 2,\cdots, n), \tag{6}$$

где $m=[l_0]$, $e_j=(0, 0,\cdots, 0, \underset{j}{1}, 0,\cdots, 0)$, $\widetilde{B}_0(z)$ — матрица, столбцами которой являются векторы $c_0(z)\,\alpha_j$ $(j=1, 2,\cdots, n)$, $\varphi(z)=(\varphi_1(z),\cdots$ $\cdots,\varphi_n(z))$ – искомое решение.

Решая уравнение (6) методом последовательных приближений и оценивая полученное решение, мы убедимся, что $\varphi'(z)$ удовлетворяет оценке

$$|\varphi'(z)|\leqslant\frac{\text{const}}{|z|^k}. \tag{7}$$

Частное решение системы уравнений (6) обозначим через

$$\varphi_{jk}(z)=(\varphi_{jk1}(z),\ \varphi_{jk2}(z),\cdots,\ \varphi_{jkn}(z)).$$

Пусть

$$u_{jk}(z)=\operatorname{Re}\sum_{\rho=1}^{n}\alpha_\rho\,\varphi_{jk\rho}(z_\rho). \tag{8}$$

Легко проверить, что $u_{jk}(z)$ является частным решением задачи (1), (5).

Имеет место следующая

Лемма 1. *Общее решение задачи* (1), (5) *задается формулой*

$$u(x, y)=u_0(x, y)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}c_{jk}\,u_{jk}(z), \tag{9}$$

где $u_0(x, y)$—произвольное решение задачи (1), (5), *производные которого непрерывны в замкнутой области $\overline{G}$, c_{jk} — произвольные действительные постоянные, $u_{jk}(z)$ выше построенные частные решения задачи* (1), (5).

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (1), (5). Так как оно является решением системы (1), то имеем

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(z_k), \tag{10}$$

где $\varphi_k(z_k)$ — произвольная аналитическая функция аргумента $z_k = x + \lambda_k y$, при $(x, y) \in G$. Известно, что в представлении (10) производная функции φ_k линейно выражается через производные решения $u(x, y)$, поэтому $(\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z))$ также принадлежит классу $M_G(0; l_0)$.

Подставляя (10) в граничное условие (5), получим

$$\operatorname{Re} [\widetilde{A}_0(x) \varphi'(x) + \widetilde{B}_0(x) \varphi(x)] = 0, \ x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \ x \neq 0, \tag{11}$$

где $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ — предельные значения $\varphi(z)$ и $\varphi'(z)$, при z стремящемся к x $(z \in G)$.

Из (11) следует, что вектор-функция

$$\Phi(z) = \widetilde{A}_0(z) \varphi'(z) + \widetilde{B}_0(z) \varphi(z) \tag{12}$$

аналитична в области $\Omega_0 = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$ и аналитически продолжается через отрезок $(-\varepsilon, \varepsilon)$ в симметричную область Ω_0^* относительно оси ox по принципу симметрии:

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})}, \text{ при } z \in \Omega_0^*. \tag{13}$$

Так как $\varphi(z) \in M_G(0; l_0)$, то $\Phi(z)$ аналитична в окрестности нуля всюду, кроме точки $x = 0$ и удовлетворяет оценке

$$|\Phi(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^{l_0}}. \tag{14}$$

Поэтому функция $\Phi(z)$ в окрестности точки $z = 0$ представляется в виде

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{m} i c_k z^{-k} + \Phi_0(z), \tag{15}$$

гое c_k — постоянные векторы, m — целая часть числа l_0, а $\Phi_0(z)$ — аналитическая функция в окрестности точки $z = 0$.

Из (11) и (12) следует, что c_k — действительные векторы. Подставляя $\Phi(z)$ из (15) в (12), получим

$$\widetilde{A}_0(z) \varphi'(z) + \widetilde{B}_0(z) \varphi(z) = \sum_{k=1}^{m} i c_k z^{-k} + \Phi_0(z), \quad z \in \Omega_0. \tag{16}$$

Общее решение уравнения (16) в окрестности точки $x = 0$ представляется в виде

$$\varphi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \tag{17}$$

где $\Phi_1(z)$ — частное решение уравнения (16) при $\Phi_0(z) = 0$, а $\Phi_2(z)$ является общим решением уравнения (16) при $c_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$.

Ясно, что в качестве функции $\Phi_1(z)$ можно взять линейную комбинацию функций $\varphi_{k_j}(z)$ с действительными коэффициентами, а функция $\Phi_2(z)$ аналитически продолжается в окрестность нуля.

Обозначим через D_ε пересечение области D с достаточно малой ε-окрестностью нуля.

Подставляя полученную функцию $\varphi(z)$ из (17) в общее решение (10), получим

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} u_{jk}(x, y), \quad (x, y) \in E_\varepsilon, \tag{18}$$

где $u_0(x, y)$ бесконечно-дифференцируемая функция в $\overline{D}_\varepsilon$. Если обозначим через $u_0(x, y)$ в области G функцию, определенную формулой

$$u_0(x, y) = u(x, y) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} u_{jk}(x, y), \tag{19}$$

то согласно равенству (18), $u_0(x, y)$ удовлетворяет условию, сформулированному в лемме 1. Из (19) непосредственно следует лемма 1.

Пусть $f(x) \in N_\gamma(0; l_0)$. Рассмотрим следующее граничное условие:

$$\left(a_0(z)\frac{\partial u}{\partial x} + b_0(z)\frac{\partial u}{\partial y} + c_0(z)\, u\right)\Bigg|_{z=x} = f(x), \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \ x \neq 0, \tag{20}$$

где область G, функция $a_0(z)$, $b_0(z)$, $c_0(z)$ удовлетворяют условиям леммы 1.

В области G_0 рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\overline{A}_0(z)\, \varphi'(z) + \overline{B}_0(z)\, \varphi(z) = \Phi(z), \tag{21}$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{t^m \alpha(t) f(t)}{z^m (t-z)}\, dt, \tag{22}$$

$(z) = (\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z))$ — искомая аналитическая вектор-функция в G_0, функция f — правая часть (20), $\alpha(t)$ — финитная, бесконечно-дифференцируемая функция на действительной оси, в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ равная единице, с носителем, содержащимся в интервале $(-2\varepsilon, 2\varepsilon)$.

Лемма 2. *Производная решения $\varphi(z)$ уравнения (21) непрерывна в замкнутой области $\overline{G}_0$, кроме, быть может, точки $z=0$ и удовлетворяет оценке*

$$|\varphi'(z)| \leqslant \frac{C_\delta}{|z|^{l_0+\delta}}, \tag{23}$$

где δ — сколь угодно малое положительное число, а C_δ — постоянная.

Доказательство. При наших предположениях на $f(t)$, функция в окрестности $z=0$ удовлетворяет следующей оценке ([11]):

$$|\Phi(z)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{c}{|z|^{l_0}}, & \text{если } l_0 \text{ — нецелое,} \\ \dfrac{c}{|z|^{l_0}} \cdot \ln |z|^{-1}, & \text{если } l_0 \text{ — целое.} \end{cases} \tag{24}$$

Из неравенства (24) следует, что производная решения системы (21) удовлетворяет оценке (23).

Лемма 3. *Частное решение задачи* (1), (20) *в классе* $M_G(0;\, l_0)$ *задается формулой*

$$v_0(x,\ y) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x + \lambda_k y), \tag{25}$$

где $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z))$ *является частным решением дифференциального уравнения* (21).

Доказательство. Применяя формулу Сохоцкого—Племеля [12], мы убедимся, что

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in G}} \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-2i}^{2i} \frac{\alpha(t)\, t^m f(t)\, dt}{z^m (t - z)} = \alpha(x) f(x). \tag{26}$$

Используя равенство (26) и оценку (23), убедимся, что функция $v_0(x,\ y)$, определяемая формулой (25), является решением задачи (1), (20) в классе $M_G(0;\ l_0)$.

Из лемм 1 и 3 вытекает

Следствие 1. Общее решение задачи (1), (20) определяется формулой

$$u(x,\ y) = v_0(x,\ y) + u_0(x,\ y) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} u_{jk}(x,\ y), \tag{27}$$

где $u_{jk}(x,\ y)$ и $v_0(x,\ y)$ — функции, определяемые формулами (8) и (25), c_{jk}— произвольные действительные постоянные, $u_0(x,\ y)$—произвольное решение задачи (1), (5) в классе функций, имеющих непрерывные производные в замкнутой области $\overline{G}$.

Лемма 4. *Если линейная комбинация вектор-функций* $u_{jk}(x,\ y)$

$$l(x,\ y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} u_{jk}(x,\ y) \tag{28}$$

имеет непрерывные производные в $\overline{G}$, *то* $c_{jk} = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n,$ $k = 1, 2, \cdots, m)$.

Доказательство. Подставляя значение $u_{jk}(x,\ y)$ из (8) в (28), получим

$$l(x,\ y) = \operatorname{Re} \sum_{\rho=1}^{n} \alpha_\rho \omega_\rho(x + \lambda_\rho y), \tag{29}$$

где

$$\omega_\rho(x + \lambda_\rho y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} \varphi_{jk\rho}(x + \lambda_\rho y). \tag{30}$$

Как указано выше в (29) производные функций $\omega_\rho(x + \lambda_\rho y)$ линейно выражаются через $\dfrac{\partial l(x,\ y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial l(x, y)}{\partial y}$, поэтому $\omega_\rho(x + \lambda_\rho y)$ принадлежит классу $C^1(\overline{D})$.

Применяя к обеим частям равенства (30) оператор F_0 и имея в виду, что вектор φ_{jk} является решением (6), получим

$$F_0(\omega_p(x+\lambda_p y))|_{y=0} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\frac{i}{x^k}e_j. \tag{31}$$

Ясно, что левая часть в (31) является непрерывной функцией по x. Умножая обе части равенства (31) на x^m и переходя к пределу при $x\to 0$, получим

$$c_{jm}=0\ (j=1, 2, \cdots, n).$$

Аналогично получим, что все коэффициенты $c_{jk}=0$. Лемма 4 доказана.

§ 2. Исследование задачи (1), (2)

Для простоты докажем теорему 1 в случае $p=1$, $x_1=0$. Задачу (1), (2) рассмотрим в классе функций $M_D(0; l)$, вектор-функция $f(t)$ в условии (2) берется из класса $N_\Gamma(0; l)$.

Пусть m—целая часть числа l, а $\alpha(x, y)$—бесконечно-дифференцируемая функция, носитель которой содержится в малой окрестности нуля, и в некоторой окрестности этой точки равна единице.

В качестве области G, удовлетворяющей условиям леммы 1, можно взять пересечение области D с малой окрестностью нуля. Если в качестве области G берем пересечение малой окрестности нуля с областью D, то матрицы $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ будут удовлетворять всем условиям леммы 1, поэтому согласно следствию 1 решение задачи (1), (2) естественно искать в виде

$$u(x, y)=\alpha(x, y)v_0(x, y)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\,\alpha(x, y)u_{jk}(x, y)+v(x, y), \tag{32}$$

где c_{jk}— действительные постоянные, а $v(x, y)$—дважды непрерывно-дифференцируемая вектор-функция в D, производные которой непрерывны в $\overline{D}$.

Подставляя $u(x, y)$ из (32) в уравнение (1) и граничное условие (2), получим

$$L(v(x, y)) = h_0(x, y)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}h_{jk}(x, y),\ (x, y)\in D, \tag{33}$$

$$a(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}+c(x, y)v=f(x, y)-f_0(x, y)-$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}f_{jk}(x, y),\ (x, y)\in\Gamma, \tag{34}$$

где

$$h_0(x, y)=L(\alpha(x, y)v_0(x, y)),\ h_{jk}(x, y)=L(\alpha(x, y)u_{jk}(x, y)),$$
$$f_0(x, y)=F(\alpha(x, y)v_0(x, y)),\ f_{jk}(x, y)=F(\alpha(x, y)\cdot u_{jk}(x, y)).$$

Так как функции $v_0(x, y)$ являются решениями задач (1), (20) и (1), (5), соответственно, а $\beta(x, y)$ равна единице в окрестности нуля, то функции $h_0(x, y)$, $h_{jk}(x, y)$, $f_{jk}(x, y)$ и $f(x, y)-f_0(x, y)$ равны нулю в окрестности нуля.

Отсюда, в частности, следует, что

$$h_0(x, y)=\beta(x, y)\,h_0(x, y),\quad h_{jk}(x, y)=\beta(x, y)\,h_{jk}(x, y),$$

где $\beta(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая функция равная единице в объединении носителей функций $h_0(x, y)$ и $h_{jk}(x, y)$ и равная нулю в окрестности нуля. Следовательно, уравнение (33) можно записать в виде

$$L(v)=\beta(x, y)\,h_0(x, y)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\,\beta(x, y)\,h_{jk}(x, y). \tag{35}$$

В работе [13] получено фундаментальное решение уравнения $L(v)=0$. Если корни характеристического уравнения (I*) простые, то фундаментальное решение имеет вид:

$$w(x, y)=\mathrm{Re}\,(a_1 l_n(x+\lambda_1 y)+\cdots+a_n l_n(x+\lambda_n y)),$$

где a_j $(j=1, 2, \cdots, n)$ — некоторые постоянные квадратные матрицы n-го порядка, удовлетворяющие условию

$$\mathrm{Im}\,(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0.$$

Если $w(x, y)$ является фундаментальным решением уравнения $L(v)=0$, то частное решение уравнения (35) определяется формулой

$$v_1(x, y)=\tilde{h}_0(x, y)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\,\tilde{h}_{jk}(x, y), \tag{36}$$

где

$$\tilde{h}_0(x, y)=\iint\limits_{(D)} w(\xi-x, \eta-y)\,\beta(\xi, \eta)\,h_0(\xi, \eta)\,d\xi d\eta, \tag{37}$$

$$\tilde{h}_{jk}(x, y)=\iint\limits_{(D)} w(\xi-x, \eta-y)\,\beta(\xi, \eta)\,h_{jk}(\xi, \eta)\,d\xi d\eta. \tag{38}$$

В работе [14] рассматривается оператор

$$T_D=\iint\limits_{(D)}\frac{g(\xi, \eta)}{\zeta-z}\,d\xi d\eta,$$

где $z\in D$, $\zeta=\xi+i\eta$ и доказано, что если $g(\xi, \eta)$ бесконечно дифференцируема в области D и удовлетворяет условию Гельдера в $\overline{D}$, то функция $T_D(x, y)$ также бесконечно дифференцируема в области D и ее первые производные удовлетворяют условию Гельдера в $\overline{D}$.

В работе [12] показано, что если функция $\mu'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ, то интеграл типа Коши с плотностью $\mu(t)$ и контуром интегрирования Γ принадлежит классу $C^1_\alpha(\overline{D})$, где α — показатель Гельдера первых производных.

Применяя один раз формулу Грина для (37) и (38) и используя указанные выше результаты, мы убедимся, что функции $\tilde{h}_0(x, y)$ и

$\widetilde{h}_{jk}(x, y)$ бесконечно дифференцируемы в области D и принадлежат классу $C^1_*(\overline{D})$.

Общее решение уравнения (35) в классе $c^1_*(\overline{D})$ будет определяться формулой

$$v(x, y) = v_1(x, y) + \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(x+\lambda_j y), \tag{39}$$

где $v_1(x, y)$ определяется формулой (36), $\psi_j(x+\lambda_j y)$—произвольная аналитическая функция аргумента $x+\lambda_j y$, при $(x, y)\in D$, принадлежащая классу $C^1(\overline{D})$.

Функцию $\psi_j(x+\lambda_j y)$ мы всегда можем представить в виде

$$\psi_j(x+\lambda_j y) = (x+\lambda_j y - x_0 - \lambda_j y_0)\,\omega_j(x+\lambda_j y) + c_j, \tag{40}$$

где c_j— комплексная постоянная, $\omega_j(x+\lambda_j y)$ аналитична по аргументу $x+\lambda_j y$ при $(x, y)\in D$ и принадлежит классу $C_1(\overline{D})$, а (x_0, y_0)— фиксированная точка в области D.

Подставляя (40) в (39) получим общее решение уравнения (35) в виде

$$v(x, y) = v_1(x, y) + \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n} a_j (x - x_0 + \lambda_j(y-y_0))\,\omega_j(x+\lambda_j y) + d, \tag{41}$$

где $d=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$— произвольный постоянный вектор. В представлении (41) функция $\omega_j(x+\lambda_j y)$ и d единственным образом определяются через решение уравнения (33).

Подставляя (41) в граничное условие (34) и используя (36), для определения функции $\omega_j(x+\lambda_j y)$, действительного вектора d и действительных чисел c_{jk} получим следующую задачу сопряжения:

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}[a(x, y)+\lambda_j b(x, y))\,a_j\,\omega_j'(x+\lambda_j y)(x - x_0 + \lambda_j(y-y_0)) + (a(x, y)+$$
$$+\lambda_j b(x, y) + c(x, y))\,a_j\,\omega_j] = \overline{f}(x, y) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\,\overline{f}_{jk}(x, y) - c(x, y)\,d,$$
$$(x, y)\in\Gamma, \tag{42}$$

где

$$\overline{f}(x, y) = f(x, y) - f_0(x, y) - F(h_0(x, y)), \tag{43}$$

$$\overline{f}_{jk}(x, y) = F(\widetilde{h}_{jk}(x, y)) - f_{jk}(x, y). \tag{44}$$

Под решением (42) мы понимаем вектор ψ с компонентами

$$\omega_1(x+\lambda_1 y), \cdots, \omega_n(x+\lambda_n y),\ d_1, d_2, \cdots, d_n,$$
$$c_{kj}\ (k=1, 2, \cdots, m,\ j=1, 2, \cdots, n).$$

Линейная независимость рассматривается относительно поля действи тельных чисел.

Если $\overline{f}(x, y)\equiv 0$, то задачу (42) будем называть однородной задачей.

Задача вида (42) является краевой задачей Римана со сдвигом, которая хорошо исследована в монографиях [9], [12], [15].

Эта краевая задача, содержащая также неизвестные постоянные, исследована в работе [8]. Применяя результаты работы [8], для краевой задачи (42) получим: если $\det A_0(z) \neq 0$, $z \in \Gamma$, то

1) однородная задача (42) имеет конечное число линейно-независимых решений (это число обозначим через k);

2) для разрешимости неоднородной задачи (42) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $\tilde{f}(x, y)$ удовлетворяла конечному числу условий вида

$$\int_{\Gamma} \Theta_j(x, y)\, \tilde{f}(x, y)\, ds = 0 \quad (j=1, 2, \cdots, k'), \tag{45}$$

где $\Theta_1(x, y), \cdots, \Theta_{k'}(x, y)$ — n-мерные линейно-независимые вектор-строки на Γ;

3) индекс задачи: $k - k' = \varkappa$, где $\varkappa$ определяется формулой (2*).

Ясно, что задача (1), (2) и задача (42) эквивалентны. Условие (45) является необходимым и достаточным также и для разрешимости задачи (1), (2). Решение же задачи (1), (2) получается из решения однородной задачи (42) по формуле

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk}\left(u_{jk}(x, y) - \tilde{h}_{jk}(x, y)\right) +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x - x_0 + \lambda_j (y - y_0))\, \omega_j (x + \lambda_j y) + d, \tag{46}$$

где вектор-функции $u_{jk}(x, y)$ и $\tilde{h}_{jk}(x, y)$ определены выше, причем $\tilde{h}_{jk}(x, y) \in C^1(\bar{D})$.

В формуле (46) аналитические функции $\omega_j(x+\lambda_j y)$ и постоянные c_{jk}, d_j ($k=1, 2, \cdots, m$, $j=1, 2, \cdots, n$) определяются по $u(x, y)$ единственным образом. Действительно, если $u(x, y) \equiv 0$, то в силу (46) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} u_{jk}(x, y)$ будет принадлежать классу $C^1(\bar{D})$ и согласно лемме 4 $c_{jk} = 0$, следовательно

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x + \lambda_j y - x_0 - \lambda_j y_0)\, \omega_j (x + \lambda_j y) + d \equiv 0 \text{ в } D. \tag{47}$$

Отсюда и получим, что $\omega_j(x+\lambda_j y) \equiv 0$ и $d=0$. Поэтому число линейно независимых решений однородной задачи (1), (2) равно числу линейно независимых решений однородной задачи (42).

Подставляя $\tilde{f}(x, y)$ из (43) в (45), получим

$$L_j(f) = 0 \quad (j=1, 2, \cdots, k'), \tag{48}$$

где $L_j(f)$ — линейные функционалы от f. Докажем, что эти линейные функционалы также линейно независимы.

Действительно, пусть

$$c_1 L_1(f)+c_2 L_2(f)+\cdots+c_{k'} L_{k'}(f)=0. \tag{49}$$

Возьмем в качестве f произвольную функцию, равную нулю в окрестности нуля, тогда $\bar{f}=f$ и

$$L_j(f)=\int_{\Gamma} \Theta_j(x, y) f(x, y)\, ds. \tag{50}$$

Подставляя (50) в (49), получим

$$\int_{\Gamma} (c_1\Theta_1+c_2\Theta_2+\cdots+c_{k'}\Theta_{k'}) f\, ds=0.$$

Отсюда в силу произвольности f, имеем

$$c_1\Theta_1+c_2\Theta_2+\cdots+c_{k'}\Theta_{k'}=0.$$

Но так как $\Theta_1,\cdots,\Theta_{k'}$ линейно независимы, то $c_1=c_2=\cdots=c_{k'}=0$. Следовательно, эти функционалы линейно независимы, то есть число условий разрешимости задачи (1), (2) равно числу условий разрешимости задачи (42).

Таким образом, индексы этих двух задач совпадают и индекс задачи (1), (2) также определяется формулой (2*).

Если в окрестности точки разрыва граничной функции $f(z)$ контур Γ является аналитической дугой, то при помощи конформного отображения области D, задачу (1), (2) можно привести к исследованному случаю и доказать справедливость теоремы 1 и в этом случае.

Аналогичным образом можно решить эту задачу и в случае, когда корни характеристического уравнения (1) кратные.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный
университет

Поступила 16.IX.1983

Վ. Հ. ՕՀԱՆՅԱՆ. Խզվող եզրային պայմաններով երկրորդ կարգի էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի համար Պուանկարեի խնդիրը *(ամփոփում)*

Հարթ, միակապ, սահմանափակ ողորկ եզրով D տիրույթում դիտարկվում է Պուանկարեի խնդիրը էլիպտական համակարգի համար։ Ենթադրվում է, որ եզրային ֆունկցիան D-ի եզրի ցանկացած կետի շրջակայքում բավարարում է Հյոլդերի պայմանին, բացի վերջավոր թվով կետերից, որոնցում կարող է ունենալ խզում։

Լուծումը փնտրվում է այնպիսի ֆունկցիաների դասում, որոնք անընդհատ են և ունեն անընդհատ առաջին կարգի ածանցյալներ $\overline{D}$-ում, բացառությամբ թերևս նշված կետերից, որոնց շրջակայքում ածանցյալները բավարարում են որոշ պայմանների։

Ապացուցված է, որ որոշակի պայմանների առկայության դեպքում խնդիրը նյոթերյան է։ Գտնված է խնդրի ինդեքսը։

V. H. OHANIAN. *The Poincare problem for the elliptic system of differential equations with discontinuous boundary conditions* (summary)

For the elliptic system the Poincare problem is considered in a planar simple-connected bounded domain D with a smooth boundary. It is assumed that the boundary function satisfies Holder condition except a finite number of points where the continuity may fail.

We look for the solution among continuous functions, having first derivatives in $\overline{D}$, except the points mentioned, in a vincinity of which the derivatives satisfy certain conditions.

It is proved that then the problem is noetherian. The index of the problem is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Граничные задачи для систем линейных уравнений эллиптического типа, Сообщ. АН Груз. ССР, 5, № 3, 1944, 761—770.
2. *И. Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений, М., 1948.
3. *М. И. Вишик.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Мат. сб., 29(71), № 3, 1951, 615—676.
4. *Б. В. Боярский.* Некоторые граничные задачи для системы 2-уравнений эллиптического типа на плоскости, ДАН СССР, 124, № 1, 1959, 15—18.
5. *А. И. Вольперт.* Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, Труды ММО, 10, 1961, 41—87.
6. *А. Джураев.* К вопросу об индексе и нормальной разрешимости задач Дирихле и Пуанкаре для общей эллиптической системы второго порядка с двумя независимыми переменными, ДАН Таджикской ССР, т. 7, 1964, 3—6.
7. *Я. Б. Лопатинский.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Укр. матем. ж., 5, № 2, 1953, 123—151.
8. *Н. Е. Товмасян.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, 11, № 1, 2, 1966, 3—23, 163—171.
9. *Н. П. Векуа.* Системы сингулярных интегральных уравнений, М., 1970.
10. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966.
11. *В. А. Оганян.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными граничными условиями, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XVI, № 6, 1981, 465—477.
12. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.
13. *Н. Е. Товмасян.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка, не удовлетворяющих условию Я. Б. Лопатинского, Сиб. матем. журн., VII, № 4, 1966, 920—938.
14. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
15. *Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 5, 1984 Математика

УДК 517.988

А. Г. КАМАЛЯН

О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ РАЗНОСТНО-СУММАРНЫМ ЯДРОМ

В работе [1] были введены и изучены интегральные операторы с ядром K, „почти разностно-суммарным“ в том смысле, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)K(x, t)=\sum_{k=1}^{N} p_k(x)\, q_k(t). \tag{1}$$

В частности, было показано, что уравнения парного типа с ядрами вида (1) поддаются исследованию на разрешимость.

С другой стороны, в работе [2] были разработаны методы обращения матриц, элементы которых удовлетворяют тождеству

$$\delta(s_{n,m})\overset{\mathrm{def}}{=}s_{n,m}+s_{n,m-2}-s_{n-1,m-1}-s_{n+1,m-1}=0. \tag{2}$$

Считая δ дискретным аналогом гиперболического оператора $(\partial_x^2-\partial_t^2)$, естественно рассматривать бесконечные системы алгебраических уравнений с матрицами $s=\|s_{n,m}\|$, удовлетворяющими тождеству

$$\delta(s_{n,m})=\sum_{j=1}^{k} a_n^{(j)} b_m^{(j)}. \tag{3}$$

1°. Ниже изучается аналог интегрального уравнения с двойным ядром и коэффициентами, удовлетворяющими (3), выявляются условия нормальной разрешимости и вычисляется индекс.

Пусть задана бесконечная система алгебраических уравнений

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{n,m} y_m=r_n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2,\cdots), \tag{4}$$

где

$$s_{n,m}=\begin{cases} t_{n-m}^1+h_{n+m}^1+\Psi_{n,m}^1, & m\geqslant 0\\ t_{n-m}^2+h_{n+m}^2+\Psi_{n,m}^2, & m<0,\end{cases} \tag{5}$$

$$\Psi_{n,m}^1=\sum_{j=0}^{m} b_j^1\sum_{l=0}^{m-j} a_{n-m+j+2l}^1, \tag{6}$$

$$\Psi_{n,m}^2=\sum_{j=m}^{-1} b_j^2\sum_{l=m-j}^{0} a_{n-m+j+2l}^2. \tag{7}$$

Относительно $\{t_n^k\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{h_n^k\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{a_n^k\}_{n=-\infty}^{\infty}$ $(k=1, 2)$, $\{b_n^1\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n^2\}_{n=-\infty}^{-1}$ будем предполагать, что они являются коэффициентами

Фурье непрерывных на единичной окружности $\Gamma=\{\zeta;\ |\zeta|=1\}$ комплексной плоскости функций $t_k(\zeta)$, $h_k(\zeta)$, $a_k(\zeta)$, $b_k(\zeta)(k=1,2)$, соответственно. Причем b_n^1, при $n<0$, b_n^2 при $n\geqslant 0$ предполагаются равными нулю. Другими словами, чезаровские средние формальных рядов

$$\sum t_n^k \zeta^n,\ \sum h_n^k \zeta^n,\ \sum a_n^k \zeta^n,\ \sum b_n^k \zeta^n\ (k=1,\ 2;\ \zeta\in\Gamma)$$

равномерно сходятся на Γ ([3]). В частности, достаточно потребовать, чтобы соответствующие ряды коэффициентов абсолютно сходились.

Левая часть (4) задает линейное преобразование L из одного класса двусторонне бесконечномерных последовательностей в другой. Как обычно, будем обозначать через l_2 банахово пространство последовательностей $y=\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ комплексных чисел со сходящейся суммой $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|y_n|^2$ и с нормой

$$\|y\|_{l_2}=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|y_n|^2\right)^{1/2}.$$

В уравнении (1) последовательности $y=\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $r=\{r_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ будем брать из l_2. По теореме Рисса—Фишера $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{r_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ являются коэффициентами Фурье некоторых функций $y(\zeta)$, $r(\zeta)\in L_2(\Gamma)$.

Обозначим, как обычно, через S оператор сингулярного интегрирования вдоль Γ с ядром Коши

$$(S\varphi)(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\text{ v.p.}\int_\Gamma \varphi(\eta)\frac{d\eta}{\eta-\zeta}.$$

Операторы $P_\pm=\frac{1}{2}(J\pm S)$ являются в пространстве $L_2(\Gamma)$ дополнительными ортопроекторами; образ P_+ совпадает с классом Харди $H_2=(H_2^+)$, а образ P_- — с классом H_2^- функций, комплексно сопряженные с которым лежат в H_2 и исчезают в нуле. Под $\varphi_\pm$ будем понимать образы ортопроекторов $P_\pm$ от функции $\varphi(t)$ $(\varphi_\pm(t)=$ $=(P_\pm\varphi)(t))$.

Коэффициенты Фурье функций $\varphi_\pm(t)$ будем обозначать через $\varphi_n^\pm$. Ясно, что

$$\varphi_n^+=\begin{cases}\varphi_n, & n\geqslant 0,\\ 0, & n<0,\end{cases}\qquad \varphi_n^-=\begin{cases}0, & n\geqslant 0,\\ \varphi_n, & n<0.\end{cases}$$

Введем теперь на Γ следующие функции:

$$q_1(\zeta)=b_1(\zeta^{-1})\,y_+(\zeta), \tag{8}$$

$$q_2(\zeta)=\zeta^{-1}\,b_1(\zeta)\,y_+(\zeta^{-1}), \tag{9}$$

$$p_1(\zeta)=b_2(\zeta)\,y_-(\zeta^{-1}), \tag{10}$$

$$p_2(\zeta)=\zeta^{-1}\,b_2(\zeta^{-1})\,y_-(\zeta), \tag{11}$$

$$c_k(\zeta)=a_k(\zeta)(1-\zeta^2)^{-1}\quad (k=1,\ 2), \tag{12}$$

$$f_1(\zeta)=t_1(\zeta)\,y_+(\zeta)+h_1(\zeta)\,y_+(\zeta^{-1}), \tag{13}$$

$$f_2(\zeta)=t_2(\zeta)\,y_-(\zeta)+h_2(\zeta)\,y_-(\zeta^{-1}), \tag{14}$$

$$g_1(\zeta)=-\zeta^2 c_1(\zeta)\,(P_+q_1)(\zeta)+\zeta c_1(\zeta)(P_-q_2)(\zeta), \tag{15}$$

$$g_2(\zeta)=-\zeta^2 c_2(\zeta)(P_+p_1)(\zeta)+\zeta c_2(\zeta)(P_-p_2)(\zeta). \tag{16}$$

Основным результатом этой работы является следующая

Теорема. *Пусть функции* $c_k(\zeta)(k=1,\ 2)$ *непрерывны на* Г. *Тогда для того, чтобы уравнение* (4) *было нетеровым в* l_2, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\Delta(\zeta)=\det\begin{pmatrix} t_1(\zeta^{-1})-\dfrac{a_1(\zeta^{-1})\,b_1(\zeta)}{\zeta^2-1} & h_1(\zeta)-\dfrac{a_1(\zeta)\,b_1(\zeta)}{\zeta^2-1)} \\ h_2(\zeta^{-1})-\dfrac{a_2(\zeta^{-1})\,b_2(\zeta^{-1})}{\zeta^2-1} & t_2(\zeta)-\dfrac{a_2(\zeta)\,b_2(\zeta^{-1})}{\zeta^2-1}\end{pmatrix}\neq 0, \tag{17}$$

при выполнении которого индекс $\varkappa$ *уравнения* (4) *вычисляется по формуле*

$$\varkappa=\operatorname{Ind}\Delta(\zeta)=\operatorname{Var}\arg\Delta(\zeta),\ -\infty<\zeta<+\infty. \tag{18}$$

2°. Доказательство теоремы, как и в [1], основано на сведении (4) к сингулярному интегральному уравнению с карлемановским сдвигом. Сначала остановимся на некоторых соотношениях.

Лемма. *Пусть функции* $c_k(\zeta)$ $(k=1,\ 2)$ *непрерывны на* Г. *Тогда*: (i). *Для n-ых коэффициентов Фурье функций* f_k, g_k $(k=1,\ 2)$ *справедливы следующие формулы*:

$$f_n^1=\sum_{m=0}^{\infty}(t_{n-m}^1+h_{n+m}^1)\,y_m, \tag{19}$$

$$f_n^2=\sum_{m=-\infty}^{-1}(t_{n-m}^2+h_{n+m}^2)\,y_m, \tag{20}$$

$$g_n^1=\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{n,m}^1\,y_m, \tag{21}$$

$$g_n^2=\sum_{m=-\infty}^{1}\Psi_{n,m}^2\,y_m. \tag{22}$$

(ii) L *является линейным ограниченным оператором из* l_2 *в* l_2

Доказательство. Пусть $\sigma_k(\zeta)$—частичная сумма ряда Фурье функции $y_k(\zeta)$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t_1(e^{i\theta})\,y_+(e^{i\theta})\,e^{-in\theta}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t_1(e^{i\theta})[y_+(e^{i\theta})-\sigma_k(e^{i\theta})]\,e^{-in\theta}\,d\theta+\sum_{m=0}^{k}t_{n-m}^1\,y_m^+.$$

В силу оценки

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t_1 (e^{i\theta})[y_+ (e^{i\theta}) - \sigma_k e^{i\theta})] e^{-in\theta} d\theta \right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \| y_+ - \sigma_k \|_{L_2},$$

где $M = \max_{\zeta \in \Gamma} |t_1 (\zeta)|$, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t_1 (e^{i\theta}) y_+ (e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} t_{n-m}^1 y_m^+ . \tag{23}$$

Точно так же

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1 (e^{i\theta}) y_+ (e^{-i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} h_{n+m}^1 y_m^+,$$

которая вместе с (23) дает (19). Аналогично доказывается (20).

Прежде, чем перейти к доказательству (21), сделаем одно замечание относительно $\{c_n^k\}$— коэффициентов Фурье функций $c_k (\zeta)$ $(k = 1, 2)$.

Рассмотрим функции $a_k (\zeta)(1 - r^2\zeta^2)^{-1}$ $(0 < r < 1)$.

Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{r \to 1} \left\| \frac{a_k (\zeta)}{1 - r^2 \zeta^2} - c_k (\zeta) \right\|_{L_2} = 0 \quad (k = 1, 2),$$

откуда следует сходимость $\tilde{c}_n^k (r)$, коэффициентов Фурье функций $a_k (\zeta)(1 - r^2 \zeta^2)^{-1}$, к c_n^k при $r \to 1$ $(k = 1, 2)$.

Из соотношения

$$a_k (\zeta)(1 - r^2 \zeta^2)^{-1} = a_k (\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} (r \zeta)^{2k}$$

имеем $\tilde{c}_n^k (r) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{n-2l}^k r^{2l}$, и поэтому

$$c_n^k = \lim_{r \to 1} \sum_{l=0}^{\infty} a_{n-2l}^k r^{2l} \quad (k = 1, 2). \tag{24}$$

Пользуясь (24) и переходя к пределу при $r \to 1$ в тождестве

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{n+j-2l}^1 r^{2l} = \sum_{l=0}^{j} a_{n+j-2l}^1 r^{2l} + r^{2j+2} \sum_{l=0}^{\infty} a_{n-2-j-2l}^1 r^{2l}$$

$$0 < r < 1, \; j \geqslant 0,$$

получаем

$$c_{n+j}^1 = \sum_{l=0}^{j} a_{n-j+2l}^1 + c_{n-2-j}^1 \quad (j \geqslant 0). \tag{25}$$

Теперь, пользуясь (8), (9), (15) и рассуждениями, аналогичными тем, которыми мы воспользовались при доказательстве (19), получим

$$g_n^1 = -\sum_{j=0}^{\infty} c_{n-2-j}^1\, q_j^1 + \sum_{j=0}^{\infty} c_{n+j}^1\, q_{-j-1}^2 =$$

$$= -\sum_{j=0}^{\infty} c_{n-2-j}^1 \sum_{m=j}^{\infty} b_{m-j}^1\, y_m^+ + \sum_{j=0}^{\infty} c_{n+j}^1 \sum_{m=j}^{\infty} b_{m-j}^1\, y_m^+ =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} y_m^+ \sum_{j=0}^{m} b_{m-j}^1 \left[c_{n+j}^1 - c_{n-2-j}^1\right],$$

где q_n^k — n-ые коэффициенты Фурье функции q_k $(k=1, 2)$.

Подставляя (25) в последнее равенство, получим (21).

Аналогично доказывается (22).

Запишем теперь уравнение (4) в следующем виде:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (t_{n-m}^1 + h_{n+m}^1)\, y_m + \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{n,m}^1\, y_m + \sum_{m=-\infty}^{-1} (t_{n-m}^2 + h_{n+m}^2)\, y_m +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{-1} \Psi_{n,m}^2\, y_m = r_n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2 \cdots). \tag{26}$$

Как видно из формул (19)—(22), левая часть (26) равна n-тому коэффициенту Фурье функции $Ky = f_1 + f_2 + g_1 + g_2$. Пользуясь равенством Парсеваля и формулами (10)—(16), получим

$$\|Ly\|_{l_2} = \|Ky\|_{L_2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{2} \|t_k\|_{L_2} + \|h_k\|_{L_2} + 2\,\|c_k\|_{L_2} \|b_k\|_{L_2}\right) \|y\|_{l_2},$$

что окончательно доказывает лемму.

3°. Перейдем теперь к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы. В силу леммы и представления (4) в виде (26), уравнение (4) равносильно следующему:

$$Ky \equiv f_1 + f_2 + g_1 + g_2 = r, \tag{27}$$

где $r(\zeta)$ — функция из $L_2(\Gamma)$ с коэффициентами Фурье, равными r_n.

Подставляя в (27) значения f_k, g_k $(k=1, 2)$ (см. формулы (10)—(16)), мы придем к следующей граничной задаче относительно пары аналитических, соответственно внутри и вне единичного круга, функций $y_\pm(z)$:

$$Ky \equiv \left[t_1(\zeta) + \frac{\zeta^2 a_1(\zeta) b_1(\zeta^{-1})}{2(\zeta^2-1)}\right] y_+(\zeta) + \left[h_1(\zeta) - \frac{a_1(\zeta)\, b_1(\zeta)}{2(\zeta^2-1)}\right] y_+(\zeta^{-1}) +$$

$$+ \frac{\zeta^2 a_1(\zeta)}{2(\zeta^2-1)} \cdot \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{b_1(\eta^{-1})\, y_+(\eta) + (\zeta\eta)^{-1} b_1(\eta)\, y_+(\eta^{-1})}{\eta - \zeta}\, d\eta + \tag{28}$$

$$+ \left[-t_2(\zeta) + \frac{a_2(\zeta) b_2(\zeta^{-1})}{2(\zeta^2-1)}\right] y_-(\zeta) + \left[-h_2(\zeta) - \frac{\zeta^2 a_2(\zeta)\, b_2(\zeta)}{2(\zeta^2-1)}\right] y_-(\zeta^{-1}) -$$

$$- \frac{\zeta^2 a_2(\zeta)}{2(\zeta^2-1)} \cdot \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{b_2(\eta)\, y_-(\eta^{-1}) + (\zeta\eta)^{-1} b_2(\eta^{-1})\, y_-(\eta)}{\eta - \zeta}\, d\eta = r(\zeta).$$

Подставляя в (28) $y_{\pm}=P_{\pm}y=1/2\,(J\pm S)$ и выделяя стандартным путем (см., например, [1]), вполне непрерывные части, пользуясь компактностью операторов $aS-Sa$ и $S+WSW^{-1}$ в $L_2(\Gamma)$ (здесь $a(\zeta)\in C(\Gamma)$, $(Wy)(\zeta)=y(\zeta^{-1})$ — оператор обратного сдвига Карлемана), получим

$$Ky\equiv a(\zeta)\,Jy+b(\zeta)\,Wy+c(\zeta)\,Sy+d(\zeta)\,WSy+Dy=r, \tag{29}$$

где

$$a(\zeta)=\frac{t_1(\zeta)}{2}+\frac{\zeta^2 a_1(\zeta)\,b_1(\zeta)}{2(\zeta^2-1)}+\frac{t_2(\zeta)}{2}-\frac{a_2(\zeta)\,b_2(\zeta^{-1})}{2(\zeta^2-1)}, \tag{30}$$

$$b(\zeta)=\frac{h_1(\zeta)}{2}-\frac{a_1(\zeta)\,b_1(\zeta)}{2(\zeta^2-1)}+\frac{h_2(\zeta)}{2}+\frac{\zeta^2 a_2(\zeta)\,b_2(\zeta)}{2(\zeta^2-1)}, \tag{31}$$

$$c(\zeta)=\frac{t_1(\zeta)}{2}+\frac{\zeta^2 a_1(\zeta)\,b_1(\zeta^{-1})}{2(\zeta^2-1)}-\frac{t_2(\zeta)}{2}+\frac{a_2(\zeta)\,b_2(\zeta^{-1})}{2(\zeta^2-1)}, \tag{32}$$

$$d(\zeta)=\frac{h_1(\zeta)}{2}-\frac{a_1(\zeta)\,b_1(\zeta)}{2(\zeta^2-1)}-\frac{h_2(\zeta)}{2}-\frac{\zeta^2 a_2(\zeta)\,b_2(\zeta)}{2(\zeta^2-1)}, \tag{33}$$

а D — вполне непрерывный оператор на $L_2(\Gamma)$.

Левая часть (29) является сингулярным интегральным оператором со сдвигом Карлемана $\alpha(\zeta)=\zeta^{-1}$.

Как известно, необходимым и достаточным условием нетеровости этого оператора является (см. § 32 [4])

$$\Delta(\zeta)=\det\begin{pmatrix} a(\zeta^{-1})+c(\zeta^{-1}) & b(\zeta)+d(\zeta) \\ b(\zeta^{-1})-d(\zeta^{-1}) & a(\zeta)-c(\zeta)\end{pmatrix}\neq 0. \tag{34}$$

При выполнении (34) индекс $\varkappa=\operatorname{Ind}K$ равен $\operatorname{Ind}\Delta(\zeta)$ ($|\zeta|=1$). Понятно, что (34) является необходимым и достаточным условием нетеровости и для оператора L, причем $\operatorname{Ind}L=\operatorname{Ind}K=\varkappa$. Подставляя (30)—(33) в (34), получим (17) и (18) и, тем самым, завершим доказательство теоремы.

4°. В случае аналога дискретного уравнения Винера—Хопфа, т. е. системы

$$\sum_{m=0}^{\infty} s_{n,m}\,y_m=r_n \quad (n=0,1,2\cdots), \tag{35}$$

ситуация сводится к (4). Приведем строгие рассуждения.

Пусть $L_1\,(l_2\to l_2)$ — оператор, задаваемый равенством

$$z_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(t^1_{n-m}+h^1_{n+m}+\Psi^1_{n,m})\,y_m\ (z=L_1y=\{z_n\}_{n=-\infty}^{\infty}),$$

а $\Pi^{\pm}$ — проекторы подпространств $l_2^{\pm}$ ($l_2^+=\{y\in l_2;\ y_n=0$ при $n<0\}$, $l_2^-=(l_2^+)^{\perp}$). Левая часть (35) задается оператором $\Pi^+L_1\,(l_2^+\to l_2^+)$, которая, как нетрудно проверить, нётерова лишь одновременно с оператором $L_1\Pi^++\Pi^-\,(l_2\to l_2)$ и в этом случае их индексы и дефектные числа равны. Взяв в (5) $h^2_n=\Psi^2_{n,m}=0$ ($n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots;\ m=-1,-2,\cdots$) и $t^2_0=1$, $t^2_n=0$ ($n=\pm1,\ \pm2,\cdots$), получим $L=L_1\Pi^++\Pi^-$.

Из сказанного ясно, что условие нётеровости можно получить из (17), подставляя $h_2(\zeta)=a_2(\zeta)=b_2(\zeta)=0$ и $t_2(\zeta)=1$. Следовательно, уравнение (35) нётерово тогда и только тогда, когда

$$\Delta(\zeta)=t_1(\zeta)-\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}a_1(\zeta)\,b_1(\zeta^{-1})\neq 0. \tag{36}$$

Соответственно, индекс уравнения (35) равен $\varkappa=-\operatorname{Ind}\Delta(\zeta)$.

5°. Приведем некоторые замечания по поводу возможных обобщений и ослабления налагаемых ограничений на коэффициенты уравнения (4).

Замечание 1. Можно рассматривать уравнение (4) с коэффициентами, равными (см. (6), (7))

$$\bar{s}_{n,m}=\begin{cases} t^1_{n-m}+h^1_{n+m}+\sum\limits_{j=1}^{k_1}\Psi^{1,j}_{n,m} & m\geqslant 0\\ t^2_{n-m}+h^2_{n+m}+\sum\limits_{j=1}^{k_2}\Psi^{2,j}_{n,m} & m<0.\end{cases} \tag{37}$$

Нетрудно понять, что теорема справедлива и в этом случае. Условие (17) примет следующий вид:

$$\Delta(\zeta)=$$

$$=\det\begin{bmatrix} t_1(\zeta^{-1})-\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k_1}a_{1,j}(\zeta^{-1})\,b_{1,j}(\zeta)}{\zeta^2-1} & h_1(\zeta)-\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k_1}a_{1,j}(\zeta)\,b_{1,j}(\zeta)}{\zeta^2-1}\\ h_2(\zeta^{-1})-\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k_2}a_{2,j}(\zeta^{-1})\,b_{2,j}(\zeta^{-1})}{\zeta^2-1} & t_2(\zeta)-\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k_2}a_{2,j}(\zeta)\,b_{2,j}(\zeta^{-1})}{\zeta^2-1}\end{bmatrix}\neq 0. \tag{38}$$

Замечание 2. Для уравнения

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}s_{n,m}y_m+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\bar{s}_{n,m}\bar{y}_m=r_n\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots), \tag{39}$$

где $\bar{s}_{n,m}$ такого же вида, что и $s_{n,m}$, можно получить аналогичные результаты, ибо предложенный метод позволяет свести это уравнение к сингулярному интегральному уравнению с обратным сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными значениями неизвестной функции, теория Нетера которого дана в § 8 [4].

Замечание 3. Мы выбирали условия на уравнение (4) таким образом, чтобы коэффициенты оператора K оказались непрерывными, а нехарактеристический член Dy—вполне непрерывным. Поэтому в теореме предполагается непрерывность функций $c_k(\zeta)(k=1,2)$. Судя по формуле (17), эта теорема должна быть справедлива и при более слабых предположениях (за счет условий на b_k $(k=1,2)$).

Замечание 4. Разумеется, соответствующие результаты могут быть без труда сформулированы и для дискретного аналога парных интегральных уравнений, т. е. когда в уравнении (4)

$$
s_{n,m} = \begin{cases} t^1_{n-m} + h^1_{n+m} + \Psi^1_{n,m}, & n > 0 \\ t^2_{n-m} + h^2_{n+m} + \Psi^2_{n,m}, & n < 0. \end{cases} \tag{40}
$$

Автор выражает благодарность А. Б. Нерсесяну за постановку задачи и обсуждения.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 18.V.1984

Ա. Հ. ՔԱՄԱԼՅԱՆ. Համարյա գումար-տարբերակային կորիզով ինտեգրալ հավասարումների դիսկրետ անալոգի նորմալ լուծելիության մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկվում է հանրահաշվական զույգ տիպի հավասարումների համակարգ $s_{n,m}$ գործակիցներով, որոնք բավարարում են

$$
s_{n,m} + s_{n,m-2} - s_{n-1,m-1} - s_{n+1,m-1} \equiv a_n b_m
$$

նույնությանը։ Բացահայտվում են նորմալ լուծելիության պայմանները և գտնվում է հավասարման ինդեքսը՝ l_2 դասում։

A. G. KAMALIAN. *About the normal solvability of the discrete versions of integral equations with almost summable-difference kernel* (summary)

In the paper infinite system of pair type algebraical equations with coefficiens $s_{n,m}$ satisfying

$$
s_{n,m} + s_{n,m-2} - s_{n-1,m-1} - s_{n+1,m-1} = a_n b_m
$$

are considered. Conditions for normal solvability and the index of the equations in l_2 are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Камалян, А. Б. Нерсесян.* Об обращении интегральных операторов с почти разностно-суммарным ядром, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIX, № 3, 1984.
2. *А. Б. Нерсесян, А. А. Папоян.* Построение матрицы, обратной сумме матриц Теплица и Ганкеля, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 2, 1983, 150—160.
3. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., ИИЛ, 1975.
4. *Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., «Наука», 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 5, 1984 Математика

УДК 517.98

В. А. ЮРКО

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В статье исследуются краевые задачи для дифференциального уравнения диффузии

$$-y'' + (2\lambda p(x) + q(x))\, y = \lambda^2 y,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

с краевыми условиями, полиномиально зависящими от спектрального параметра λ. В первой части работы рассматривается задача Редже для указанного уравнения. Получены необходимые и достаточные условия отсутствия спектра у задачи Редже, а также теоремы единственности восстановления дифференциального уравнения по некоторым спектральным характеристикам. Во второй части исследуется обратная задача в случае, когда краевые условия имеют вид

$$P_1(\lambda)\, y'(0) - P_0(\lambda)\, y(0) = R_1(\lambda)\, y'(\pi) + R_0(\lambda)\, y(\pi) = 0,$$

где $P_k(\lambda)$, $R_k(\lambda)$—многочлены по λ.

Всюду считаем, что $p(x)$, $q(x)$ являются комплекснозначными функциями, а коэффициенты краевых условий—комплексными числами. Условимся, что если рассматриваются некоторые краевые задачи L и $\tilde{L}$ и если некоторый символ обозначает объект, относящийся к задаче L, то этот же символ с $\sim$ наверху обозначает аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{L}$.

1°. Рассмотрим сначала задачу Редже для уравнения Штурма — Лиувилля. Пусть λ_n — собственные значения (с.з.) краевой задачи $L = L(q(x))$

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda^2 y,\ q(x) \in L(0, \pi), \tag{1}$$
$$y'(0) + i\lambda\, y(0) = y(\pi) = 0.$$

Отличительной особенностью задачи L является отсутствие спектра при $q(x) \equiv 0$. Пусть $\tilde{\lambda}_n$— с.з. задачи $\tilde{L} = L(\tilde{q}(x))$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Если при всех n $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ п. в. на $[0, \pi]$. В частности, задача L не имеет с.з. тогда и только тогда, когда $q(x) = 0$, п.в. на $[0, \pi]$.*

При доказательстве для простоты ограничимся случаем $q'(x)$, $\tilde{q}'(x) \in L(0, \pi)$. Пусть функция $\varphi(x, \lambda)$ является решением уравнения (1) при условиях $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = -i\lambda$. Известно ([1], [2]), что имеет место представление

$$\varphi(x, \lambda) = \exp(-i\lambda x) + \int_{-x}^{x} K(x, t)\exp(-i\lambda t)\,dt \qquad (2)$$

и, если продолжить функцию $q(x)$ некоторым способом на отрезок $[-\pi, 0]$, то

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_{-x}^{x} G(x, t)\varphi(t, \lambda)\,dt, \qquad (3)$$

причем

$$\frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} - \tilde{q}(x)\,G(x, t) = \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial t^2} - q(t)\,G(x, t),\ G(x, -x) = 0. \qquad (4)$$

Из (2) следует, что функция $\varphi(\pi, \lambda)$, нули которой совпадают с числами λ_n, является целой аналитической по λ функцией 1-го порядка, конечного типа и при $|\lambda| \to \infty$, $\arg\lambda = \theta \in (0, \pi)$ $\varphi(\pi, \lambda) = \exp(-i\lambda\pi)[1]$, $[1] = 1 + O(\lambda^{-1})$. При условиях теоремы отсюда получаем, что $\varphi(\pi, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}(\pi, \lambda)$ и, следовательно

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(\pi, t)\varphi(t, \lambda)\,dt \equiv 0.$$

Снова используя (2), заключаем (см., например, [2], стр. 32), что функции $\varphi(x, \lambda)$ образуют полную систему в $L_2(-\pi, \pi)$, то есть $G(\pi, t) \equiv 0$, $t \in [-\pi, \pi]$.

Продолжим теперь функцию $\tilde{q}(x)$ на отрезок $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ по формуле $\tilde{q}(x) = \tilde{q}(2\pi - x)$. Ясно, что тогда $G(x, t) = -G(2\pi - x, t)$ и, следовательно, $G(x, x - 2\pi) = 0$, $x \in [\pi, 2\pi]$. Отсюда и из (4), используя единственность решения задачи Гурса, находим, в частности, что $G(x, t) \equiv 0$, $0 \leqslant |t| < x \leqslant \pi$, что приводит к тождеству $\varphi(x, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}(x, \lambda)$. Это означает, что $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $[0, \pi]$ и теорема 1 доказана.

Заметим, что задача Редже для уравнения (1) изучалась во многих работах, в частности, в [3]—[5], где в предположении $q(x) \sim C_\mu{}' x^\mu$, $x \to +0$, $C_\mu \neq 0$ получена теорема о разложении и доказана единственность восстановления $q(x)$ по спектру и так называемым „весовым" числам.

2°. Рассмотрим теперь задачу Редже для уравнения диффузии. Пусть λ_n—с. з. задачи $L = L(p(x), q(x))$

$$-y'' + (2\lambda p(x) + q(x))\,y = \lambda^2 y,\ p'(x),\ q(x) \in L(0, \pi), \qquad (5)$$

$$y'(0) + i\lambda y(0) = y(\pi) = 0. \qquad (6)$$

Выясним сначала, когда задача L не имеет с.з. Пусть функции $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (5) при условиях $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = -i\lambda$, $\psi(\pi, \lambda) = 0$, $\psi'(\pi, \lambda) = -1$. Обозначим

$$\alpha(x)=\int_0^x p(t)\,dt,\ \Delta(\lambda)=\varphi(\pi,\lambda),\ h(x)=q(x)+p^2(x)-ip'(x).$$

Ясно, что если $p(0)=0$, $h(x)\equiv 0$, то $\varphi(x,\lambda)=\exp(-i\lambda x+i\alpha(x))$, и задача L не имеет с.з. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если задача L не имеет с.з., то* $p(0)=0$, $h(x)=0$ *п.в. на* $[0,\pi]$.

При доказательстве для простоты ограничимся случаем $h'(x)\in L(0,\pi)$. Покажем, что имеет место представление

$$\varphi(x,\lambda)=\exp(-i\lambda x+i\alpha(x))+\int_{-x}^{x}P(x,t)\exp(-i\lambda t)\,dt, \tag{7}$$

причем

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2}-q(x)P(x,t)+2ip(x)\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=0, \tag{8}$$

$$P(x,-x)=-\frac{i}{2}p(0)\exp(-i\alpha(x)),\ P(x,x)=$$

$$=\left(-\frac{i}{2}p(0)+\frac{1}{2}\int_0^x h(t)\,dt\right)\exp(i\alpha(x)). \tag{9}$$

В самом деле, пусть функция $P(x,t)$ является решением задачи Гурса (8), (9) при $0\leqslant|t|\leqslant x\leqslant\pi$. Рассмотрим функцию

$$y(x,\lambda)=\exp(-i\lambda x+i\alpha(x))+\int_{-x}^{x}P(x,t)\exp(-i\lambda t)\,dt. \tag{10}$$

Так как

$$\lambda\int_{-x}^{x}P(x,t)\exp(-i\lambda t)\,dt=iP(x,x)\exp(-i\lambda x)-iP(x,-x)\exp(i\lambda x)-$$

$$-i\int_{-x}^{x}\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\exp(-i\lambda t)\,dt,$$

$$\lambda^2\int_{-x}^{x}P(x,t)\exp(-i\lambda t)\,dt=\left(i\lambda P(x,x)+\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=x}\right)\exp(-i\lambda x)-$$

$$-\left(i\lambda P(x,-x)+\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=-x}\right)\exp(i\lambda x)-\int_{-x}^{x}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2}\exp(-i\lambda t)\,dt,$$

то из (8), (9), (10) получаем, что $y''(x,\lambda)+(\lambda^2-2\lambda p(x)-q(x))\,y(x,\lambda)\equiv 0$, то есть функция $y(x,\lambda)$ является решением уравнения (5). Кроме того, из (9), (10) следует, что $y(0,\lambda)=1$, $y'(0,\lambda)=-i\lambda$. В силу единственности решения задачи Коши получаем, что $y(x, \lambda) \equiv \varphi(x, \lambda)$, то есть формула (7) доказана.

Функция $\Delta(\lambda)$ по условию теоремы не имеет нулей, и из (7) следует, что при $|\lambda| \to \infty$, $\arg \lambda = \vartheta \in (0, \pi)$ $\Delta(\lambda) = \exp(-i\lambda\pi + i\alpha(\pi))$ [1]. Следовательно, $\Delta(\lambda) \equiv \exp(-i\lambda\pi + i\alpha(\pi))$, то есть $P(\pi, t) \equiv 0$, $t \in [-\pi, \pi]$. Кроме того, очевидно, что при условиях теоремы $p(0) = 0$, то есть $P(x, -x) = 0$. Повторяя теперь рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, получаем, что $P(x, t) \equiv 0$ при $0 \leqslant |t| \leqslant x \leqslant \pi$, откуда следует, что $\varphi(x, \lambda) = \exp(-i\lambda x + i\alpha(x))$, или $h(x) = 0$ п.в. на $[0, \pi]$. Теорема 2 доказана.

Наряду с L рассмотрим также задачу L_1 для уравнения (5) с краевыми условиями $y'(0) + i\lambda y(0) = y'(\pi) = 0$. Пусть λ_{n1} — с.з. задачи L_1, $\Delta_1(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda)$. Очевидно, что если $p(0) = 0$, $h(x) \equiv 0$, то задача L_1 имеет только одно с.з. Справедливо и обратное утверждение, которое доказывается совершенно аналогично теореме 2.

Теорема 3. *Если задача L_1 имеет только одно с.з., то $p(0) = 0$, $h(x) = 0$ п.в. на $[0, \pi]$.*

Из теорем 2, 3 следует, что уравнение (5), вообще говоря, не восстанавливается однозначно по двум спектрам задач L, L_1. Однако при некоторых ограничениях на функции $p(x)$, $q(x)$ можно получать теоремы единственности восстановления уравнения (5) по двум спектрам или по другим спектральным характеристикам. Пусть, например, $p(0) \neq 0$ или $p(0) = 0$, $h(x) \sim C_\mu x^\mu$, $x \to +0$, $C_\mu \neq 0$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если λ_n — нуль функции $\Delta(\lambda)$ кратности $\varkappa_n$, то в окрестности точки $\lambda = \lambda_n$ имеет место представление*

$$\psi(x, \lambda) = \Delta(\lambda)\, \xi_n(x, \lambda) + \sum_{\nu=1}^{\varkappa_n} \frac{c_{\nu n}\, \Delta(\lambda)}{(\lambda - \lambda_n)^\nu} \varphi(x, \lambda), \tag{11}$$

где $c_{\varkappa_n, n} \neq 0$, а функция $\xi_n(x, \lambda)$ регулярна в точке $\lambda = \lambda_n$.

Доказательство. Используя метод математической индукции, покажем, что существует последовательность функций $\xi_{\nu n}(x, \lambda)$ и чисел $c_{\nu n}$ $(\nu = \overline{1, \varkappa_n})$ таких, что функции $\xi_{\nu n}(x, \lambda)$ имеют в точке $\lambda = \lambda_n$ полюс порядка $\nu - 1$ и

$$\xi_{\nu n}(x, \lambda) = \xi_{\nu+1, n}(x, \lambda) - \frac{c_{\nu n}}{(\lambda - \lambda_n)^\nu} \varphi(x, \lambda), \quad \xi_{\varkappa_n+1, n}(x, \lambda) = \frac{\psi(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)}. \tag{12}$$

Ясно, что отсюда сразу получаем представление (11), где $\xi_n(x, \lambda) = \xi_{1n}(x, \lambda)$.

Так как $\psi(x, \lambda_n) = \gamma_{n0}\, \varphi(x, \lambda_n)$, $\gamma_{n0} \neq 0$, то функция $\xi_{\varkappa_n, n}(x, \lambda)$, определяемая равенством (12) при $\nu = \varkappa_n$, где $c_{\varkappa_n, n} = \gamma_{n0} \cdot \varkappa_n! \left[\Delta^{(\varkappa_n)}(\lambda_n)\right]^{-1}$ имеет в точке $\lambda = \lambda_n$ полюс порядка $\varkappa_n - 1$.

Далее, предположим, что мы доказали существование функций $\xi_{\nu n}(x, \lambda)$ с указанными свойствами при $\nu = \varkappa_n, \varkappa_n - 1, \cdots, s+1$ $(s \geqslant 1)$. Тогда в окрестности точки $\lambda = \lambda_n$ имеет место представление

$$\xi_{s+1, n}(x, \lambda) = \frac{H_{sn}(x, \lambda)}{(\lambda - \lambda_n)^s},$$

где функция $H_{sn}(x, \lambda)$ регулярна в точке $\lambda=\lambda_n$. Очевидно, что при $\lambda=\lambda_n$ функция $H_{sn}(x, \lambda_n)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (5) и краевым условиям (6). Это означает, что $H_{sn}(x, \lambda_n)=c_{sn}\varphi(x, \lambda_n)$. Следовательно, функция $\xi_s(x, \lambda)$, определяемая равенством (12) при $\nu=s$ имеет в точке $\lambda=\lambda_n$ полюс порядка $s-1$. Лемма доказана.

Используя (11), получаем соотношения

$$\psi_\nu(x, \lambda_n)=\sum_{j=0}^{\nu}\gamma_{n,\nu-j}\varphi_j(x, \lambda_n),\ \nu=\overline{0, \varkappa_n-1},\ \gamma_{n0}\neq 0, \tag{13}$$

где

$$\varphi_\nu(x, \lambda)=\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial\lambda^\nu}\varphi(x, \lambda),\ \psi_\nu(x, \lambda)=\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial\lambda^\nu}\psi(x, \lambda),$$

$$\gamma_{n\nu}=\sum_{s=\varkappa_n}^{\varkappa_n+\nu}c_{s-\nu,n}\cdot\frac{\Delta^{(s)}(\lambda_n)}{s!}. \tag{14}$$

Совокупность чисел $\{\lambda_n, \gamma_{n\nu}\}$, $\nu=\overline{0, \varkappa_n-1}$ будем называть спектральными данными задачи L. Заметим, что при достаточно больших n $\varkappa_n=1$. Пусть $\{\tilde{\lambda}_n, \tilde{\gamma}_{n\nu}\}$ — спектральные данные задачи $\tilde{L}=L(\tilde{p}(x), \tilde{q}(x))$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Если при всех* n $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$, $\gamma_{n\nu}=\tilde{\gamma}_{n\nu}$, $\nu=\overline{0, \varkappa_n-1}$, *то* $p(x)=\tilde{p}(x)$, $q(x)=\tilde{q}(x)$ *п.в. на* $[0, \pi]$.

Доказательство проведем для случая $p(0)\neq 0$. Тогда при фиксированном $x\in[0, \pi]$, $\mu=0, 1$ и при $|\lambda|\to\infty$ имеют место асимптотические формулы

$$\varphi^{(\mu)}(x, \lambda)=(-i\lambda)^\mu\exp(-i\lambda x+i\alpha(x))[1]+d\cdot i^\mu\cdot\lambda^{\mu-1}\exp(i\lambda x-i\alpha(x))[1], \tag{15}$$

$$\psi^{(\mu)}(x, \lambda)=-\frac{1}{2}(i\lambda)^{\mu-1}\cdot\exp(-i\lambda(\pi-x)+i\alpha(\pi)-i\alpha(x))[1]-$$

$$-\frac{1}{2}(-i\lambda)^{\mu-1}\cdot\exp(i\lambda(\pi-x)-i\alpha(\pi)+i\alpha(x))[1],\ d=-\frac{1}{2}p(0)\neq 0. \tag{16}$$

Асимптотическая формула для функций $\varphi^{(\mu)}(x, \lambda)$ очевидно следует из (7), (9). Аналогичным образом может быть получена и формула для функций $\psi^{(\mu)}(x, \lambda)$.

Рассмотрим следующие функции:

$$A_j(x, \lambda)=\frac{1}{\tilde{\Delta}(\lambda)}(\psi(x, \lambda)\tilde{\varphi}^{(j-1)}(x, \lambda)-\varphi(x, \lambda)\tilde{\psi}^{(j-1)}(x, \lambda)),\ j=1, 2. \tag{17}$$

Так как

$$\varphi(x, \lambda)=\sum_{\nu=0}^{\varkappa_n-1}\varphi_\nu(x, \lambda_n)\cdot(\lambda-\lambda_n)^\nu+(\lambda-\lambda_n)^{\varkappa_n}\Phi(x, \lambda),$$

$$\psi(x, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\varkappa_n-1} \psi_\nu (x, \lambda_n)\cdot(\lambda-\lambda_n)^\nu + (\lambda-\lambda_n)^{\varkappa_n} \Psi(x, \lambda),$$

где функции $\Phi(x, \lambda)$, $\Psi(x, \lambda)$ регулярны в точке $\lambda=\lambda_n$, то из условий теоремы, используя (13), получаем, что $A_j(x, \lambda)$ при фиксированном $x\in[0, \pi]$ являются целыми аналитическими по λ функциями 1-го порядка конечного типа. С другой стороны, из асимптотических формул (15), (16) следует, что при фиксированном x и при $|\lambda|\to\infty$, $\arg\lambda = \theta\neq 0, \pi$ $A_1(x, \lambda)=O(\lambda^{-1})$, $A_2(x, \lambda)=O(1)$. Следовательно, $A_1(x, \lambda)\equiv 0$, $A_2(x, \lambda)\equiv A(x)$, откуда находим

$$\psi(x, \lambda)\,\tilde\varphi(x, \lambda) \equiv \varphi(x, \lambda)\,\tilde\psi(x, \lambda),$$

$$A(x)\tilde\varphi(x, \lambda) \equiv \frac{\varphi(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)}\left(\tilde\psi(x, \lambda)\,\tilde\varphi'(x, \lambda) - \tilde\varphi(x, \lambda)\,\tilde\psi'(x, \lambda)\right) \equiv \varphi(x, \lambda).$$

Но тогда, используя (15), получаем, что

$$A(x) = \exp(i\alpha(x) - i\tilde\alpha(x)) = d\cdot\tilde d^{-1}(-i\alpha(x) + i\tilde\alpha(x)),$$

то есть $A(x)\equiv 1$. Следовательно, $\varphi(x, \lambda)\equiv\tilde\varphi(x, \lambda)$, или $p(x)=\tilde p(x)$, $q(x)=\tilde q(x)$ п.в. на $[0, \pi]$. Теорема 4 доказана.

Пусть $\tilde\lambda_{n1}$ — с.з. задачи $\tilde L_1 = L_1(\tilde p(x), \tilde q(x))$. Справедлива следующая

Лемма 2. *Если при всех* n $\lambda_n=\tilde\lambda_n$ $(\lambda_{n1}=\tilde\lambda_{n1})$, *то*

$$\Delta(\lambda)[\tilde\Delta(\lambda)]^{-1} \equiv \exp(i\alpha(\pi) - i\tilde\alpha(\pi)), \ (\Delta_1(\lambda)[\tilde\Delta_1(\lambda)]^{-1} \equiv \exp(i\alpha(\pi) - i\tilde\alpha(\pi))).$$

В самом деле, пусть, например, $\lambda_n=\tilde\lambda_n$ при всех n. Тогда функция $\Delta(\lambda)\cdot[\tilde\Delta(\lambda)]^{-1}$ является целой аналитической по λ 1-го порядка конечного типа, не имеет нулей и при $|\lambda|\to\infty$,

$$\arg\lambda=\theta\neq 0, \quad \pi\ \Delta(\lambda)[\tilde\Delta(\lambda)]^{-1} = \exp(i\alpha(\pi) - i\tilde\alpha(\pi))\ [1].$$

Случай $\lambda_{n1}=\tilde\lambda_{n1}$ рассматривается аналогично.

Докажем теперь теорему единственности восстановления функций $p(x)$, $q(x)$ по двум спектрам задач L, L_1.

Теорема 5. *Если при всех* n $\lambda_n=\tilde\lambda_n$, $\lambda_{n1}=\tilde\lambda_{n1}$, *то* $p(x)=\tilde p(x)$, $q(x)=\tilde q(x)$ *п.в. на* $[0, \pi]$.

Как и при доказательстве теоремы 4, считаем, что $p(0)\neq 0$. Так как $\psi'(\pi, \lambda) = -1$, то, используя лемму 1, получаем в окрестности точки $\lambda=\lambda_n$

$$1+\Delta(\lambda)\,\xi_n'(\pi, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa_n} \frac{c_{\nu n}}{(\lambda-\lambda_n)^\nu}\cdot\Delta(\lambda)\cdot\Delta_1(\lambda).$$

Отсюда, из условий теоремы и из леммы 2 находим, что при всех n

$$c_{\nu n}\cdot\exp(2i\alpha(\pi))=\tilde{c}_{\nu n}\cdot\exp(2i\tilde{\alpha}(\pi)),\ \nu=\overline{0,\ \varkappa_n-1}. \tag{18}$$

Из (11), (18) и леммы 2 вытекает, что при фиксированном $x\in[0,\pi]$, $j=1, 2$ функции

$$B_j(x,\lambda)=\frac{1}{\tilde{\Delta}(\lambda)}(\psi(x,\lambda)\tilde{\varphi}^{(j-1)}(x,\lambda)\cdot\exp(i\alpha(\pi)-i\tilde{\alpha}(\pi))-$$

$$-\varphi(x,\lambda)\tilde{\psi}^{(j-1)}(x,\lambda))$$

являются целыми аналитическими по λ 1-го порядка конечного типа. Кроме того, из (15), (16) следует, что при фиксированном x и при $|\lambda|\to\infty$, $\arg\lambda=\theta\neq 0,\pi$ $B_1(x,\lambda)=O(\lambda^{-1})$, $B_2(x,\lambda)=O(1)$. Следовательно, $B_1(x,\lambda)\equiv 0$, $B_2(x,\lambda)\equiv B(x)$.

Далее, как и при доказательстве теоремы 4 убеждаемся, что $p(x)=\tilde{p}(x)$, $q(x)=\tilde{q}(x)$ п.в. на $[0,\pi]$. Теорема 5 доказана.

В случае простого спектра тем же методом можно доказать теорему единственности восстановления функций $p(x)$, $q(x)$ по спектру и так называемым „весовым" числам. „Весовыми" числами задачи L будем называть числа

$$\alpha_n=\lambda_n\int_0^\pi\varphi^2(x,\lambda_n)\,dx-\int_0^\pi p(x)\varphi^2(x,\lambda_n)\,dx.$$

Теорема 6. *Если при всех n $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$, $\alpha_n=\tilde{\alpha}_n$, то $p(x)=\tilde{p}(x)$, $q(x)=\tilde{q}(x)$ п.в. на $[0,\pi]$.*

Как и ранее считаем, что $p(0)\neq 0$. Так как функции $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (5), то

$$(\lambda+\mu)\int_0^\pi\psi(x,\lambda)\varphi(x,\mu)\,dx-2\int_0^\pi p(x)\psi(x,\lambda)\varphi(x,\mu)\,dx=$$

$$=\frac{\Delta(\mu)-\Delta(\lambda)}{\lambda-\mu}-i\psi(0,\lambda). \tag{19}$$

Далее, так как все с.з. простые, то $\varkappa_n=1$ и, используя (13), (14), находим

$$\psi(x,\lambda_n)=c_{1n}\dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n),\ c_{1n}\neq 0.$$

Отсюда и из (19) получаем, что $c_{1n}(2\alpha_n+i)=-1$ и, следовательно, при условиях теоремы $c_{1n}=\tilde{c}_{1n}$. Но тогда функции

$$D_j(x,\lambda)=\frac{1}{\tilde{\Delta}(\lambda)}(\psi(x,\lambda)\tilde{\varphi}^{(j-1)}(x,\lambda)\exp(-i\alpha(\pi)+i\tilde{\alpha}(\pi))-$$

$$-\varphi(x,\lambda)\tilde{\psi}^{(j-1)}(x,\lambda)),\ j=1,2$$

при фиксированном $x \in [0, \pi]$ являются целыми аналитическими по λ функциями 1-го порядка конечного типа. Далее, как и при доказательстве теорем 4, 5 находим, что $D_1(x, \lambda) \equiv 0$, $D_2(x, \lambda) \equiv D(x)$, $D(x) \times \times \tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda)$. Следовательно, как и ранее, получаем, что $p(x) = \tilde{p}(x)$, $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $[0, \pi]$.

Теорема 6 доказана.

3°. Рассмотрим краевую задачу $L = L(p(x), q(x), U, V)$

$$-y'' + (2\lambda p(x) + q(x))\, y = \lambda^2 y, \quad p'(x),\ q(x) \in L(0, \pi), \tag{20}$$

$$U(y) = P_1(\lambda)\, y'(0) - P_0(\lambda)\, y(0) = 0,$$
$$V(y) = R_1(\lambda)\, y'(\pi) + R_0(\lambda)\, y(\pi) = 0, \tag{21}$$

где

$$P_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{\sigma_k} p_{kj} \lambda^j, \quad R_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{\tau_k} r_{kj} \lambda^j, \quad p_{k, \sigma_k} \neq 0, \quad r_{k, \tau_k} \neq 0.$$

При этом считаем, что многочлены $P_1(\lambda)$ и $P_0(\lambda)$, а также $R_1(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$ не имеют общих корней: кроме того, считаем, что $p_{1, \sigma_1} = 1$ (если $\sigma_1 + 1 \geqslant \sigma_0$), $p_{0, \sigma_0} = 1$ $(\sigma_1 + 1 < \sigma_0)$, $r_{1, \tau_1} = 1$ $(\tau_1 + 1 > \tau_0)$, $r_{0, \tau_0} = 1$ $(\tau_1 + 1 < \tau_0)$ и, если $P_1(\lambda) \equiv 0$ $(P_0(\lambda) \equiv 0)$, то $\sigma_1 = -1$, $p_0(\lambda) \equiv 1$ $(\sigma_0 = -1, P_1(\lambda) \equiv 1)$. Аналогично, если $R_1(\lambda) \equiv 0$ $(R_0(\lambda) \equiv 0)$, то $\tau_1 = -1$, $R_0(\lambda) \equiv 1$ $(\tau_0 = -1, R_1(\lambda) \equiv 1)$. Обозначим $\sigma = \max(\sigma_1 + 1, \sigma_0)$, $\tau = \max(\tau_1 + 1, \tau_0)$. Пусть λ_n — с.з. задачи L. Для этой задачи можно провести исследования, аналогичные вышеизложенным. Приведем некоторые результаты. Для простоты ограничимся случаем, когда

$$a_k = p_{0, \sigma_0} + (-1)^k \cdot i \cdot p_{1, \sigma_1} \neq 0, \quad b_k = r_{0, \tau_0} + (-1)^k \cdot i \cdot r_{1, \tau_1} \neq 0.$$

Это условие можно заменить более общим, но при получении теорем единственности совсем отказаться от него нельзя, что показывают вышеизложенные результаты.

Пусть функции $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (20) при условиях $\varphi(0, \lambda) = P_1(\lambda)$, $\varphi'(0, \lambda) = P_0(\lambda)$, $\psi(\pi, \lambda) = R_1(\lambda)$, $\psi'(\pi, \lambda) = -R_0(\lambda)$, и пусть $\Delta(\lambda) = R_1(\lambda)\, \varphi'(\pi, \lambda) + R_0(\lambda)\, \varphi(\pi, \lambda)$.

Отметим, что для краевой задачи (20), (21), как легко видеть, остается справедливой лемма 1 и соотношения (13), (14). Как и ранее, совокупность чисел $\{\lambda_n, \gamma_n\}$ будем называть спектральными данными задачи L. Справедлива следующая

Лемма 3. 1) *При фиксированном* $x \in [0, \pi]$, $\mu = 0, 1$ *и при* $|\lambda| \to \infty$ *имеют место асимптотические формулы*

$$\varphi^{(\mu)}(x, \lambda) = \frac{1}{2} \lambda^{\sigma+\mu-1} \bigl(a_1 (-i)^{\mu-1} \exp(-i\lambda x + i\alpha(x))[1] +$$
$$+ a_2 i^{\mu-1} \exp(i\lambda x - i\alpha(x))[1]\bigr),$$

$$\psi^{(\mu)}(x, \lambda) = -\frac{1}{2} \lambda^{\tau+\mu-1} \bigl(b_1 i^{\mu-1} \exp(-i\lambda(\pi - x) + i\alpha(\pi) - i\alpha(x))[1] +$$
$$+ b_2 (-i)^{\mu-1} \exp(i\lambda(\pi - x) - i\alpha(\pi) + i\alpha(x))[1]\bigr),$$

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{2i}\lambda^{\sigma+\tau-1}(-a_1 b_1 \exp(-i\lambda\pi + i\alpha(\pi))[1] +$$
$$+ a_2 b_2 \exp(i\lambda\pi - i\alpha(\pi))[1]).$$

2) *При $n \to \pm\infty$ справедливы формулы*

$$\lambda_n = n + \chi_1 + o(1), \quad \gamma_{n0} = (-1)^n \cdot n^{\tau-\sigma} \cdot \chi_2 [1 + o(1)],$$

причем при достаточно больших n все с.з. являются простыми нулями функции $\Delta(\lambda)$.

В самом деле, известно ([6]), что в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im}\lambda < 0$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ существует фундаментальная система решений $y_k(x, \lambda)$, $k = 1, 2$ уравнения (20) такая, что при $|\lambda| \to \infty$

$$y_k^{(\mu)}(x, \lambda) = (-1)^{k\mu} \cdot (i\lambda)^{\mu} \cdot \exp((-1)^k (i\lambda x - i\alpha(x)))[1], \quad \mu = 0, 1.$$

Тогда $\varphi(x, \lambda) = C_1(\lambda) y_1(x, \lambda) + C_2(\lambda) y_2(x, \lambda)$, где коэффициенты $C_k(\lambda)$ находятся из системы

$$C_1(\lambda) y_1^{(\mu)}(0, \lambda) + C_2(\lambda) y_2^{(\mu)}(0, \lambda) = P_{1-\mu}(\lambda), \quad \mu = 0, 1,$$

то есть $C_1(\lambda) = \frac{1}{2} i a_1 \lambda^{\sigma-1}[1]$, $C_2(\lambda) = -\frac{1}{2} i a_2 \lambda^{\sigma-1}[1]$. Отсюда получаем асимптотическую формулу для функций $\varphi^{(\mu)}(x, \lambda)$. Аналогично находим асимптотическую формулу для функций $\psi^{(\mu)}(x, \lambda)$. Формула для $\Delta(\lambda)$ теперь становится очевидной. Используя полученную для функции $\Delta(\lambda)$ асимптотическую формулу, известными методами (см., например, [7]) получаем асимптотическую формулу для с.з. λ_n. Наконец, формула для чисел γ_{n0} очевидно следует из асимпотических формул для $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ и для с.з. λ_n.

Наряду с L рассмотрим задачу $\tilde{L} = L(\tilde{p}(x), \tilde{q}(x), \tilde{U}, \tilde{V})$, где

$$\tilde{U}(y) = \tilde{P}_1(\lambda) y'(0) - \tilde{P}_0(\lambda) y(0), \quad \tilde{V}(y) = \tilde{R}_1(\lambda) y'(\pi) + \tilde{R}_0(\lambda) y(\pi),$$

$$\tilde{P}_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{\tilde{\sigma}_k} \tilde{p}_{kj} \lambda^j, \quad \tilde{R}_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{\tilde{\tau}_k} \tilde{r}_{kj} \lambda^j, \quad \tilde{p}_{k,\tilde{\sigma}_k} \neq 0, \quad \tilde{r}_{k,\tilde{\tau}_k} \neq 0.$$

Теорема 7. *Если при всех n $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\gamma_{n\nu} = \tilde{\gamma}_{n\nu}$ $(\nu = \overline{0, \varkappa_n - 1})$, то $p(x) = \tilde{p}(x)$, $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $[0, \pi]$, $P_k(\lambda) \equiv \tilde{P}_k(\lambda)$, $R_k(\lambda) \equiv \tilde{R}_k(\lambda)$, $k = 0, 1$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4, строим функции $A_j(x, \lambda)$ по формулам (17) и убеждаемся, что при условиях теоремы $A_j(x, \lambda)$ при фиксированном $x \in [0, \pi]$ являются целыми аналитическими по λ функциями 1-го порядка конечного типа. Далее, используя лемму 3, получаем, что $\sigma = \tilde{\sigma}$, $\tau = \tilde{\tau}$ и при фиксированном $x \in [0, \pi]$, $|\lambda| \to \infty$, $\arg\lambda = \theta \neq 0, \pi$, $A_1(x, \lambda) = O(\lambda^{-1})$, $A_2(x, \lambda) = O(1)$ и, следовательно, $A_1(x, \lambda) \equiv 0$, $A_2(x, \lambda) \equiv A(x)$. Как и в теореме 4, отсюда получаем, что

$$A(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) \equiv \varphi(x, \lambda), \quad A(x)\tilde{\psi}(x, \lambda) \equiv \psi(x, \lambda)$$

и, используя лемму 3, находим, что

$$A(x) = a_1 \tilde{a}_1^{-1} \exp\left(i\alpha(x) - i\tilde{\alpha}(x)\right) = a_2 \tilde{a}_2^{-1} \exp\left(-i\alpha(x) + i\tilde{\alpha}(x)\right)$$

и, следовательно, $A(x) \equiv A$ — const, то есть

$$A\tilde{\varphi}(x, \lambda) \equiv \varphi(x, \lambda),\ A\tilde{\psi}(x, \lambda) \equiv \psi(x, \lambda),\ A\tilde{P}_k(\lambda) \equiv P_k(\lambda),$$

$$A\tilde{R}_k(\lambda) \equiv R_k(\lambda).$$

В силу нормировки коэффициентов многочленов получаем, что $A = 1$ и, следовательно, $p(x) = \tilde{p}(x)$, $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $[0, \pi]$, $P_k(\lambda) \equiv \tilde{P}_k(\lambda)$ $R_k(\lambda) \equiv \tilde{R}_k(\lambda)$, Теорема 7 доказана.

Как и в п. 2, здесь также можно получать теоремы единственности восстановления функций $p(x)$, $q(x)$ и коэффициентов краевых условий по двум спектрам или в случае простого спектра—по с.з. и некоторым „весовым" числам. Приведем, например, теорему единственности по двум спектрам. Пусть λ_{n1}— с.з. задачи $L_1 = L(p(x), q(x), U, V_1)$, где

$$V_1(y) = R_1^1(\lambda)\, y'(\pi) + R_0^1(\lambda)\, y(\pi),\ R_k^1(\lambda) = \sum_{j=0}^{\tau_k^1} r_{kj}^1 \lambda^j,\ r_{k,\tau_k^1}^1 \neq 0.$$

Обозначим

$$S(\lambda) = R_0^1(\lambda)\, R_1(\lambda) - R_1^1(\lambda)\, R_0(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \lambda^j,\ m = \tau + \tau^1 - 1,$$

$$\tau^1 = \max(\tau_1^1 + 1,\ \tau_0^1)$$

и предположим, что у задач L, L_1 нет общих с.з. Пусть $\tilde{\lambda}_{n1}$— с.з. задачи $\tilde{L}_1 = L(\tilde{p}(x), \tilde{q}(x), \tilde{U}, \tilde{V}_1)$, где

$$\tilde{V}_1(y) = \tilde{R}_1^1(\lambda)\, y'(\pi) + \tilde{R}_0^1(\lambda)\, y(\pi),\ \tilde{R}_k^1(\lambda) = \sum_{j=0}^{\tilde{\tau}_k^1} \tilde{r}_{kj}^1 \lambda^j,\ \tilde{r}_{k,\tilde{\tau}_k^1}^1 \neq 0.$$

Теорема 8. *Если при всех* n $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\lambda_{n1} = \tilde{\lambda}_{n1}$, $\beta_j = \tilde{\beta}_j$ $(j = \overline{0, m})$, *то* $p(x) = \tilde{p}(x)$, $q(x) = \tilde{q}(x)$ *п.в. на* $[0, \pi]$, $P_k(\lambda) \equiv \tilde{P}_k(\lambda)$, $R_k(\lambda) \equiv \tilde{R}_k(\lambda)$, $R_k^1(\lambda) \equiv \tilde{R}_k^1(\lambda)$, $k = 0, 1$.

Доказательство. Обозначим $\Delta_1(\lambda) = R_1^1(\lambda)\, \varphi'(\pi, \lambda) + R_0^1(\lambda) \times \times \varphi(\pi, \lambda)$. Учитывая (11), получаем, что в окрестности точки $\lambda = \lambda_n$

$$S(\lambda) = \Delta(\lambda)\, V_1(\xi_n(x, \lambda)) + \sum_{\nu=1}^{\varkappa_n} \frac{c_{\nu n}}{(\lambda - \lambda_n)^\nu}\, \Delta(\lambda)\, \Delta_1(\lambda), \tag{22}$$

причем $S(\lambda_n) \neq 0$. Из условий теоремы следует, что

$$\Delta(\lambda)\, \Delta_1(\lambda) \cdot [\tilde{\Delta}(\lambda)\, \tilde{\Delta}_1(\lambda)]^{-1} \equiv Q \text{ — const.}$$

Тогда, используя соотношение (22), получаем, что при всех n, $\nu = \overline{1, \varkappa_n}$

$$c_{\nu n} \cdot \tilde{c}_{\nu n}^{-1} = Q. \tag{23}$$

Отсюда, учитывая (14), следует, в частности, что $\gamma_{n0}\cdot\tilde{\gamma}_{n0}^{-1}\equiv\mathrm{const}$ и, следовательно, $\sigma=\tilde{\sigma}$, $\tau=\tilde{\tau}$. Из соотношений (11), (23) вытекает, что при фиксированном $x\in[0,\pi]$ функции

$$W_j(x,\lambda)=\frac{1}{\tilde{\Delta}(\lambda)}\left(\psi(x,\lambda)\,\tilde{\varphi}^{(j-1)}(x,\lambda)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\Delta_1(\lambda)}{\tilde{\Delta}_1(\lambda)}-\varphi(x,\lambda)\,\tilde{\psi}^{(j-1)}(x,\lambda)\right),\quad j=1,\,2$$

являются целыми аналитическими по λ 1-го порядка конечного типа. Используя лемму 3, получаем, что при фиксированном $x\in[0,\pi]$ и при $|\lambda|\to\infty$, $\arg\lambda=\theta\neq0,\pi$ $W_1(x,\lambda)=O(\lambda^{-1})$, $W_2(x,\lambda)=O(1)$ и, следовательно, $W_1(x,\lambda)\equiv0$, $W_2(x,\lambda)\equiv W(x)$. Далее, как и при доказательстве теоремы 7, получаем, что $p(x)=\tilde{p}(x)$, $q(x)=\tilde{q}(x)$ п.в. на $[0,\pi]$, $P_k(\lambda)\equiv\tilde{P}_k(\lambda)$, $R_k(\lambda)\equiv\tilde{R}_k(\lambda)$, $R_k^1(\lambda)\equiv\tilde{R}_k^1(\lambda)$, $k=0,1$. Теорема 8 доказана.

Заметим, что теоремы 7, 8 являются обобщением известных результатов для классической задачи Штурма—Лиувилля (см., например, [1], [8]). В заключение укажем еще на две работы.

В работе [9] исследуется обратная задача для уравнения (20) с краевыми условиями, не зависящими от параметра λ, а в [10] рассматривается краевая задача (1), (21) для случая, когда $P_k(\lambda)=g_{k1}$, $R_k(\lambda)=g_{k2}\cdot\lambda^2+g_{k3}$.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступила 28.IV.1982

Վ. Ա. ՅՈՒՐԿՈ. Պարամետրով եզրային պայմաններում եզրային խնդիրների մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ուսումնասիրվում է հետևյալ եզրային խնդիրները

$$-y''+(2\lambda p(x)+q(x))\,y=\lambda^3 y,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

$$P_1(\lambda)\,y'(0)-P_0(\lambda)\,y(0)=R_1(\lambda)\,y'(\pi)+R_0(\lambda)\,y(\pi)=0,$$

որտեղ $P_k(\lambda)$, $R_k(\lambda)$-*ն բազմանդամներ են։ Ստացված են* $p(x)$ *և* $q(x)$ *ֆունկցիաների վերականգնման միակության թեորեմներ։ Ռեջեի խնդրի համար ստացված են սպեկտրի բացակայության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։*

V. A. JOURKO. *About boundary value problems with a parameter in boundary conditions* (summary)

The article deals with boundary value problems of the following form

$$-y''+(2\lambda p(x)+q(x))\,y=\lambda^2 y,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

$$P_1(\lambda)\,y'(0)-P_0(\lambda)\,y(0)=R_1(\lambda)\,y'(\pi)+R_0(\lambda)\,y(\pi)=0,$$

where $P_k(\lambda)$, $R_k(\lambda)$ are polynomials of λ. We obtain theorems concerning the existence and uniqueness of the functions $p(x)$, $q(x)$ and of boundary conditions coefficients

when some spectral data is given. For Regges problem necessary and sufficient conditions to have no spectrum are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Марченко.* Некоторые вопросы теории линейных дифференциальных операторов второго порядка, 1, Труды ММО, 1, 1952, 327—420.
2. *В. А. Марченко.* Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, К., «Наукова думка», 1972.
3. *Т. Редже.* Восстановление потенциала по резонансным параметрам, «Математика», 7, № 4, 1963, 91—100.
4. *А. О. Кравицкий.* О двукратном разложении в ряд по собственным функциям одной краевой задачи, Диф. уравнения, 4, № 1, 1968, 165—177.
5. *Е. А. Баранова,* Об обратной задаче спектрального анализа для одного класса задач с парамстром в краевых условиях, Диф. уравнения, 8, № 12, 1972, 2130—2139.
6. *Я. Д. Тамаркин.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917.
7. *М. А. Наймарк.* Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
8. *G. Borg.* Eie Umkehrung der Sturm - Liouvilleschen Eigenwertaufgabe Bestimmung der Differential Gleichung durch die Eigenwerte, Acta Math., 78, 1946, 1—96.
9. *М. Г. Гасымов, Г. Ш. Гусейнов.* Определение оператора диффузии по спектральным данным, ДАН Аз.ССР, 37, № 2, 1981, 19—23.
10. *A. Benedek, R. Panzone.* On inverse eigenvalue problems for a second-order dffferential equations with parameter contained in the boundary conditions, Notas algebra y anal, № 9, 1980, 13 pp.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS