

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵՆՏՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱՍՏՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵՆՏՅԱՆ
Ա. Ի. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀՐԱՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քաղաքագիր՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» աթոռագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերը շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ավերածն գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղափոխվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, դրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակչության տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թև շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոգվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չղրադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24րդ, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН

зам. главного редактора

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Н. У. АРАКЕЛЯН

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН

А. А. ТАЛАЛЯН

Р. Л. ШАХБАГЯН

зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редакционной коллегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название места издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, double space, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.984.52

И. Г. ХАЧАТРЯН

О ФОРМУЛАХ ОБРАЩЕНИЯ, СВЯЗАННЫХ
С САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ
ОПЕРАТОРАМИ

В в е д е н и е

Пусть l — дифференциальная операция, заданная на интервале (a, b) ($-\infty < a < b \leq \infty$) по формуле

$$l[y] \equiv p_0 y - \frac{d}{dx} \left[p_1 \frac{dy}{dx} - \dots - \frac{d}{dx} \left[p_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{d}{dx} \left[p_n \frac{d^n y}{dx^n} \right] \right] \dots \right], \quad (1)$$

где коэффициенты $p_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) вещественнозначны и измеримы на интервале (a, b) , кроме того, функции

$$p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), \frac{1}{p_n(x)} \quad (2)$$

суммируемы на каждом конечном отрезке $[a, \beta] \subset (a, b)$. Пусть далее L — некоторый самосопряженный дифференциальный оператор в $L^2(a, b)$, порожденный операцией l .

Хорошо известно (см. [1]—[4]), что разложение по собственным функциям оператора L всегда можно осуществить при помощи фундаментальной системы решений $u_k(x, \lambda)$ ($k=1, 2, \dots, 2n$) уравнения

$$l[y] = \lambda y \quad (3)$$

и некоторой матричной функции распределения $\sigma_{2n}(\lambda)$ порядка $2n$. При этом решения $u_k(x, \lambda)$ называются обобщенными собственными функциями оператора L , матрица $\sigma_{2n}(\lambda)$ называется спектральной матрицей оператора L , а соответствующие формулы разложения называются формулами обращения, связанными с оператором L .

При тех или иных предположениях относительно функций (2) получение разложения при помощи минимальной системы обобщенных собственных функций оператора L является важной задачей спектральной теории дифференциальных операторов (см. [1], стр. 9, 10, 270).

Известно (см. [1]), что если конец a интервала (a, b) регулярен (т. е. функции (2) суммируемы на каждом конечном интервале $(a, \alpha] \subset (a, b)$) и оператор L порождается распадающимися краевыми условиями, то соответствующие формулы обращения можно построить при помощи n решений уравнения (3). При дополнительных ограничениях на функции (2) в [5] и [6] (см. также [1], стр. 357—385) методом Б. М. Левитана получены разложения при помощи минимальной системы обобщенных собственных функций оператора L .

В настоящей работе предполагается, что функции (2) для всех $\alpha \in (a, b)$ удовлетворяют одному из следующих трех условий:

Условие 1.

$$\int_a^x \frac{dx}{|p_n(x)|} < \infty,$$

$$\int_a^x |p_{n-1-k}(x)|(x-a)^{2k} \int_a^x \frac{dt dx}{|p_n(t)|} < \infty, \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

Условие 2. При $n \geq 2$ для некоторого целого числа κ ($1 \leq \kappa \leq n-1$)

$$\int_a^x \frac{(x-a)^\kappa}{|p_n(x)|} dx < \infty,$$

$$\int_a^x (x-a)^{2k-\kappa} h_\kappa(x) |p_{n-1-k}(x)| dx < \infty, \quad k=0, 1, \dots, n-1,$$

где

$$h_\kappa(x) = \int_a^x \frac{(t-a)^\kappa}{|p_n(t)|} dt + (x-a) \int_x^a \frac{(t-a)^{\kappa-1}}{|p_n(t)|} dt.$$

Условие 3.

$$\int_a^x \left[\int_x^a \frac{(t-x)^{\kappa-1}}{|p_n(t)|} dt \right]^2 dx < \infty,$$

$$\int_a^x (x-a)^{2k-n} h_\kappa(x) |p_{n-1-k}(x)| dx < \infty, \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

При каждом из условий 1, 2, 3 для оператора L , порожденного распадающимися краевыми условиями, получены формулы обращения при помощи n решений уравнения (3). Такие формулы обращения можно получить двумя способами. Первый из них—это непосредственное применение метода направляющих функционалов М. Г. Крейна (см. [1]), а второй способ заключается в следующем. Известно (см. [1], [3]), что упомянутая выше матрица $\sigma_{2n}(\lambda)$ выражается через ядро резольвенты оператора L . Если это ядро выразить через решения уравнения (3), то в результате матрица $\sigma_{2n}(\lambda)$ также выразится через решения уравнения (3). Такая формула позволяет заметить, что при подходящем выборе упомянутых выше решений $u_k(x, \lambda)$ в соответствующей матрице $\sigma_{2n}(\lambda)$ все элементы вне первого главного минора $\sigma_n(\lambda)$ n -го порядка равны нулю. Поэтому отмеченные выше общие формулы обращения принимают вид, в котором участвуют только n решений уравнения (3), а именно те решения, которые удовлетворяют в точке $x=a$ краевым условиям, соответствующим оператору L . При

применении указанных методов возникающие затруднения носят лишь технический характер и связаны с исследованием поведения решений уравнения (3) при $x \rightarrow a$. Однако такое исследование проведено автором в работе [7]. Это позволяет теорему о разложении по собственным функциям и примыкающие к ней предложения сформулировать без доказательств.

Затем, используя формулу, в которой матрица $\mathcal{T}_n(\lambda)$ выражается через решения уравнения (3), указывается общая схема дальнейшего понижения порядка спектральной матрицы. Конкретное осуществление этой схемы уже требует дополнительного исследования поведения решений уравнения (3) при $x \rightarrow b$.

§ 1. Вспомогательные предложения

Всюду в дальнейшем предполагается, что функции (2) удовлетворяют одному из условий 1, 2, 3, и это не будет каждый раз оговариваться.

В настоящем параграфе формулируется ряд предложений, которые доказываются методами, примененными в монографии [1] при доказательстве аналогичных предложений в случае регулярного конца a интервала (a, b) . Только в данном случае нужно использовать результаты работы [7], в которой при указанных условиях на функции (2) исследованы поведения при $x \rightarrow a$ квазипроизводных $y^{[k]}(x)$ ($k=0, 1, \dots, 2n-1$) решения $y(x)$ уравнения $l[y] - \lambda y = f$, где $f \in L^2(a, b)$, и в частности, доказана суммируемость с квадратом любого решения этого уравнения на каждом конечном интервале $(a, \alpha] \subset (a, b)$.

Обозначим

$$\begin{aligned} [y, z]_x &= [y(x), z(x)] = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \{y^{[k]}(x) \bar{z}^{[2n-1-k]}(x) - y^{[2n-1-k]}(x) \bar{z}^{[k]}(x)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для функций y и z , зависящих от параметра λ , будем использовать также обозначение $[y, z]_{x, \lambda}$.

Обозначим через L_0 минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный дифференциальным выражением (1) в пространстве $L^2(a, b)$. Пусть D_0 — область определения оператора L_0 , а D_0^* — область определения сопряженного к L_0 оператора L_0^* .

Предложение 1. Для любого решения $z(x)$ уравнения $l[z] = \lambda z$ и для любых чисел $\alpha, \beta \in (a, b)$ ($\alpha < \beta$) существует функция $y \in D_0^*$ такая, что $y(x) = z(x)$, при $x \in (a, \alpha)$ и $y(x) = 0$, при $x \in [\beta, b)$.

Предложение 2. Каждой функции $y \in D_0^*$ соответствует единственное решение $z(x)$ уравнения $l[z] = 0$ такое, что $[w, y]_a = [w, z]_a$ для всех $w \in D_0^*$.

Предложение 3. Индекс дефекта оператора L_0 есть (m, m) , где $n \leq m \leq 2n$. Область определения D_0 оператора L_0 состоит из тех и только тех функций $y \in D_0^*$, которые удовлетворяют

условиям $y^{[k]}(a) = 0$ ($k=0, 1, \dots, 2n-1$) и $[y, z]_b = 0$ для всех $z \in D_0^*$.

Предложение 4. Пусть $w_1, w_2, \dots, w_n$ — некоторые линейно независимые по модулю D_0 функции из D_0^* , удовлетворяющие для всех $z \in D_0^*$ условиям

$$[w_k, z]_b = 0, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Тогда если функции $y_0, y_1, \dots, y_n$ из D_0^* удовлетворяют для всех $z \in D_0^*$ соотношениям

$$[y_j, w_k]_a = 0, \quad [y_j, z]_b = 0,$$

$$k=1, 2, \dots, n; \quad j=0, 1, \dots, n,$$

то функции $y_0, y_1, \dots, y_n$ линейно зависимы по модулю D_0 .

Предложение 5. Если индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n) , то $[y, z]_b = 0$ для любых функций $y, z \in D_0^*$.

Предложение 6. Область определения D всякого самосопряженного расширения L оператора L_0 с индексом дефекта (n, n) есть совокупность всех функций $y(x)$ из D_0^* , удовлетворяющих условиям

$$[y, z_k]_a = 0, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

где $z_1, z_2, \dots, z_n$ — некоторые линейно независимые решения уравнения $l[z] = 0$ такие, что

$$[z_j, z_k]_a = 0, \quad j, k=1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Обратно, каковы бы ни были линейно независимые решения $z_1, z_2, \dots, z_n$ уравнения $l[z] = 0$, удовлетворяющие соотношениям (6), совокупность всех функций $y(x)$ из D_0^* , удовлетворяющих условиям (5), есть область определения некоторого самосопряженного расширения оператора L_0 .

Предложение 7. В случае индекса дефекта (n, n) одно из самосопряженных расширений оператора L_0 определяется краевыми условиями $y^{[k]}(a) = 0$, $k \in Q$, где множество Q определяется следующим образом:

1) при выполнении условия 1

$$Q = \{0, 1, \dots, n-1\};$$

2) при выполнении условия 2

$$Q = \{0, 1, \dots, n-2-x_0, n, n+1, \dots, n+x_0\}, \quad x_0 = \left[\frac{n-1}{2} \right];$$

3) при выполнении условия 3

$$Q = \{0, 1, \dots, n-2-n_0, n, n+1, \dots, n+n_0\}, \quad n_0 = \left[\frac{n-1}{2} \right]$$

$$(Q = \{1\} \text{ при } n=1).$$

В случае индекса дефекта (m, m) ($m > n$) здесь будут рассматриваться только те самосопряженные расширения оператора L_0 , которые определяются распадающимися краевыми условиями.

Предложение 8. *Распадающиеся краевые условия, которые определяют самосопряженное расширение оператора L_0 с индексом дефекта (m, m) , имеют вид*

$$[y, z_k]_a = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

$$[y, w_k]_b = 0, \quad k = 1, 2, m-n, \quad (8)$$

где $z_1, z_2, \dots, z_n$ — линейно независимые решения уравнения $l[z] = 0$, удовлетворяющие соотношениям

$$[z_j, z_k]_a = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

а $w_1, w_2, \dots, w_{m-n}$ — линейно независимые по модулю D_0 функции из D_0^* , удовлетворяющие соотношениям

$$w_j^{[v]}(a) = 0, \quad [w_j, w_k]_b = 0,$$

$$v = 0, 1, \dots, 2n-1; \quad k, \quad j = 1, 2, \dots, m-n.$$

Предложение 9. *Пусть функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ из D_0^* линейно независимы по модулю D_0 и для всех $z \in D_0^*$ удовлетворяют соотношениям*

$$[y_j, y_k]_a = 0, \quad [y_j, z]_b = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда совокупность D_1 всех функций $y(x)$ из D_0^ , удовлетворяющих для всех $z \in D_0^*$ условиям*

$$[y, y_k]_a = 0, \quad [y, z]_b = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

является областью определения некоторого замкнутого симметрического расширения L_1 оператора L_0 . При этом область определения D_1^ сопряженного к L_1 оператора L_1^* есть совокупность всех функций $y(x)$ из D_0^* , удовлетворяющих условиям*

$$[y, y_k]_a = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Кроме того, всякое самосопряженное расширение оператора L_1 определяется распадающимися краевыми условиями вида (7) и (8), в которых решения $z_1, z_2, \dots, z_n$ уравнения $l[z] = 0$ соответствуют функциям $y_1, y_2, \dots, y_n$ в смысле предложения 2.

В связи с предложением 9 отметим, что в монографии [1] (стр. 274) содержится следующее утверждение: пусть конец a регулярен и индекс дефекта оператора L_0 есть (m, m) ($m > n$); пусть, далее, $w_1, w_2, \dots, w_n$ — некоторые линейно независимые по модулю D_0 функции из D_0^* , удовлетворяющие соотношениям

$$[w_j, w_k]_a = 0, \quad [w_j, w_k]_b = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, n; \quad (*)$$

тогда совокупность всех функций $y(x)$ из D_0^* , удовлетворяющих условиям

$$[y, w_k]_a = 0, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (**)$$

является областью определения некоторого симметрического расширения оператора L_0 .

Очевидно, что такое утверждение неверно. Более того, если к условиям (**) добавить еще условие $[y, z]_b = 0$ для всех $z \in D_0$, то опять может не получиться область определения симметрического расширения оператора L_0 . Дело в том, что соотношения (*), вообще говоря, не обеспечивают линейную независимость условий (**).

§ 2. Формулы обращения

Пусть

$$\sigma(\lambda) = \|\tau_k(\lambda)\|_{k=1}^n, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

— матричная функция распределения, т. е. при любом λ матрица $\tau(\lambda)$ эрмитова; при $\lambda' < \lambda''$ разность $\sigma(\lambda'') - \sigma(\lambda')$ — неотрицательно определенная матрица; все функции $\tau_k(\lambda)$ непрерывны слева. С помощью матричной функции распределения $\tau(\lambda)$ n -го порядка вводится гильбертово пространство L^2_n n -компонентных вектор-функций (см. [1], стр. 239—240 и [2], стр. 290—292).

Обозначим через Λ , оператор умножения на независимую переменную в L^2_n .

Теорема 1. Пусть самосопряженное расширение L оператора L_0 с индексом дефекта (m, m) отрезывается распадающимися краевыми условиями (7) и (8), а $u_j(x, \lambda)$ ($j=1, 2, \dots, n$) — некоторые линейно независимые решения уравнения $l[u] = \lambda u$, являющиеся целыми функциями параметра λ и удовлетворяющие краевым условиям (7):

$$[u_j, z_k]_a = 0, \quad j, k=1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Тогда оператору L и системе функций $u_j(x, \lambda)$ соответствует единственная (с точностью до постоянного слагаемого) матричная функция распределения $\sigma(\lambda)$ n -го порядка, такая, что формулы

$$F_j(\lambda) = \int_a^b f(x) \bar{u}_j(x, \lambda) dx, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n F_k(\lambda) u_j(x, \lambda) d\tau_{kj}(\lambda) \quad (11)$$

устанавливают взаимно обратные изометрические отображения $L^2(a, b)$ на L^2_n и L^2_n на $L^2(a, b)$ соответственно, переводящие друг в друга операторы L и Λ_n . При этом интегралы в формулах (10) и (11) сходятся в смысле метрики в L^2_n и $L^2(a, b)$ соответственно и

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,j=1}^n F_k(\lambda) \bar{F}_j(\lambda) d\sigma_{kj}(\lambda).$$

Доказательство теоремы можно провести указанными во введении методами с учетом приведенных выше предложений, и мы его опускаем.

Формулы (10) и (11) называются формулами обращения, связанными с оператором L , а $\sigma(\lambda)$ называется спектральной матрицей оператора L .

Сформулируем теперь несколько следствий теоремы 1, которые доказываются таким же образом, как аналогичные утверждения доказываются в [1].

Следствие 1. Спектр оператора L состоит из точек роста матричной функции $\sigma(\lambda)$, причем собственными значениями являются точки разрыва этой функции.

Следствие 2. Кратность спектра оператора L не превосходит n .

Следствие 3. Непрерывная слева спектральная функция (разложение единицы) E_λ оператора L определяется по формуле

$$E_\lambda f(x) = \int_{-\infty}^{\lambda} \sum_{k,j=1}^n F_k(\mu) u_j(x, \mu) d\sigma_{kj}(\mu),$$

при этом для любого конечного интервала $\Delta = [\lambda', \lambda'']$ разность $E_\Delta = E_{\lambda''} - E_{\lambda'}$ есть интегральный оператор с ядром

$$E(x, t; \Delta) = \int_{\Delta} \sum_{k,j=1}^n u_j(x, \lambda) \bar{u}_k(t, \lambda) d\sigma_{kj}(\lambda). \quad (12)$$

Следствие 4. Для резольвенты R_μ ($\text{Im } \mu \neq 0$) оператора L и ее ядра $R(x, t; \mu)$ имеют место интегральные представления

$$R_\mu f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,j=1}^n \frac{F_k(\lambda)}{\lambda - \mu} u_j(x, \lambda) d\sigma_{kj}(\lambda), \quad (13)$$

$$R(x, t; \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,j=1}^n u_j(x, \lambda) \bar{u}_k(t, \lambda) \frac{d\sigma_{kj}(\lambda)}{\lambda - \mu}. \quad (14)$$

При этом интеграл в (13) сходится равномерно относительно x на каждом конечном отрезке $[a, \beta] \subset (a, b)$, а интеграл в (14) сходится в смысле метрики в $L^2(a, b)$ относительно каждой из переменных x и t при фиксированной второй переменной.

Очевидно, что $R_\mu R_\mu^*$ есть интегральный оператор с ядром

$$G(x, t; \mu) = \int_a^b R(x, \xi; \mu) \bar{R}(t, \xi; \mu) d\xi. \quad (15)$$

Обозначим через $G_{vs}(x, t; \mu)$ квазипроизводные функции $G(x, t; \mu)$ v -го порядка по x и s -го порядка по t . Функции $G_{vs}(x, t; \mu)$ ($v, s = 0, 1, \dots, 2n-1$) непрерывны в области $a < x, t < b$.

Следствие 5. Имеет место формула

$$G_{vs}(x, t; \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k, j=1}^n u_j^{(v)}(x, \lambda) \bar{u}_k^{(s)}(t, \lambda) \frac{d\sigma_{kj}(\lambda)}{|\lambda - \mu|^2}, \quad (16)$$

$$v, s = 0, 1, \dots, 2n-1,$$

в которой интеграл сходится равномерно по совокупности обеих переменных x и t в каждом конечном квадрате $a \leq x, t \leq \beta$, $[a, \beta] \subset (a, b)$.

§ 3. Формула для спектральной матрицы

Пусть оператор L и функции $u_j(x, \lambda)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) те же, что и в теореме 1. Подчиним функции $u_j(x, \lambda)$ дополнительным условиям

$$[u_j, v_k]_{a, \lambda} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j, \end{cases} \quad k, j = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

где функции $v_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — некоторые решения уравнения $l[y] = 0$, которые вместе с решениями $z_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) образуют фундаментальную систему, причем функции $z_k(x)$ те же, что и в крайних условиях (7).

Выведем формулу, в которой спектральная матрица $\sigma(\lambda)$ выражается через решения $y_k(x, \mu) \in L^2(a, b)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) уравнения $l[y] = \mu y$ ($\operatorname{Im} \mu \neq 0$). С этой целью рассмотрим функции (см. (4), (12), (15))

$$P_{kj}(x, t; \Delta) = [v_k(t), [v_j(x), E(x, t; \Delta)]],$$

$$Q_{kj}(x, t; \mu) = [v_k(t), [v_j(x), G(x, t; \mu)]],$$

$$k, j = 1, 2, \dots, n,$$

которые, как нетрудно убедиться, непрерывны в области $a < x, t < b$.

Из формул (12) и (16) имеем

$$P_{vs}(x, t; \Delta) = - \int_{\Delta} \sum_{k, j=1}^n [u_j, v_s]_{x, \lambda} [v_v, u_k]_{t, \lambda} d\sigma_{kj}(\lambda), \quad (18)$$

$$Q_{vs}(x, t; \mu) = - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k, j=1}^n [u_j, v_s]_{x, \lambda} [v_v, u_k]_{t, \lambda} \frac{d\sigma_{kj}(\lambda)}{|\lambda - \mu|^2}. \quad (19)$$

Очевидно, что формула (18) справедлива также для значений $x=t=a$. Учитывая непрерывность функции $Q_{vs}(x, t; \mu)$ в области $a \leq x, t < b$, в силу неравенства Коши—Буняковского и теоремы Дини получим, что интеграл в (19) сходится равномерно по совокупности обеих переменных x и t в каждом конечном квадрате $a \leq x, t \leq a, a \in (a, b)$.

Следовательно, формула (19) справедлива также для значений $x=t=a$. В силу условий (18) и (19) имеем

$$P_{\nu s}(a, a; \Delta) = \int_{\Delta} d\sigma_{\nu s}(\lambda),$$

$$Q_{\nu s}(a, a; \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{\nu s}(\lambda)}{|\lambda - \mu|^2}. \quad (20)$$

Из полученных формул следует, что

$$\sigma_{\nu s}(\Delta) = P_{\nu s}(a, a; \Delta), \quad (21)$$

$$\sigma_{\nu s}(\Delta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon|}{\pi} \int_{\Delta} Q_{\nu s}(a, a; \lambda + i\varepsilon) d\lambda, \quad (22)$$

где $\Delta = [\lambda', \lambda'']$ — произвольный конечный интервал и $\sigma(\Delta) = \sigma(\lambda'') - \sigma(\lambda')$, причем в формуле (22) концы интервала Δ не являются собственными значениями оператора L , а ε — вещественный параметр.

Формула (22) (см. в связи с ней [1], стр. 275 и [3], стр. 304) получается из (20) применением формулы обращения Стильтьеса.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение теоремы 1 о единственности матричной функции $\sigma(\lambda)$ следует именно из формул (21) или (22).

Теперь формулы (20) и (22) представим в другом виде, более удобном для приложений.

Известно (см. [1], стр. 216—229), что ядро $R(x, t; \mu)$ резольвенты оператора L при фиксированном t , рассматриваемое как функция от x , является решением уравнения $l[y] = \mu y$ на каждом из интервалов $(a, t]$ и $[t, b)$, удовлетворяет краевым условиям (7), (8) и принадлежит $L^2(a, b)$. Поэтому при $a < x \leq t$ ядро $R(x, t; \mu)$ есть линейная комбинация функций $u_j(x, \mu)$:

$$R(x, t; \mu) = \sum_{j=1}^n u_j(x; \mu) \bar{g}_j(t, \bar{\mu}), \quad x \leq t. \quad (23)$$

Однако $R_{\mu}^* = R_{\bar{\mu}}$, поэтому $\bar{R}(t, x; \mu) = R(x, t; \bar{\mu})$. Следовательно

$$R(x, t; \mu) = \sum_{j=1}^n g_j(x, \mu) \bar{u}_j(t, \bar{\mu}), \quad x \geq t. \quad (24)$$

Из формулы (24) следует, что функции $g_j(x, \mu)$ являются решениями уравнения $l[y] = \mu y$, принадлежат $L^2(a, b)$ и удовлетворяют краевым условиям (8):

$$[g_j, w_k]_{b, \mu} = 0, \quad k=1, 2, \dots, m-n; \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (25)$$

Выясним условия, которым должны удовлетворять функции $g_j(x, \mu)$ в точке $x=a$. С этой целью используем равенство

$$R_{\nu 0}(x, x+0; \mu) - R_{\nu 0}(x, x-0; \mu) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \nu \leq 2n-2, \\ 1 & \text{при } \nu = 2n-1, \end{cases} \quad (26)$$

где через $R_{\nu s}(x, t; \mu)$ обозначена квазипроизводная функции $R(x, t; \mu)$ ν -го порядка по x и s -го порядка по t . Если учесть формулы (23), (24) и брать последовательные квазипроизводные обеих частей равенства (26), то получим

$$\sum_{j=1}^n \{u_j^{[\nu]}(x, \mu) \bar{g}_j^{[s]}(x, \bar{\mu}) - g_j^{[\nu]}(x, \mu) \bar{u}_j^{[s]}(x, \bar{\mu})\} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu + s \neq 2n - 1, \\ 1 & \text{при } \nu + s = 2n - 1, \quad 0 \leq s \leq n - 1. \end{cases} \quad (27)$$

Используя формулу (27), легко убедиться в справедливости равенств

$$\sum_{j=1}^n \{[u_j, z_k]_{x, \mu} [v_s, g_j]_{x, \bar{\mu}} - [g_j, z_k]_{x, \mu} [v_s, u_k]_{x, \bar{\mu}}\} = -[v_s, z_k]_{x, \mu}, \quad k, s = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

С учетом условий (9) и (17) из равенств (28) получим

$$[g_j, z_k]_{a, \mu} = -[v_j, z_k]_a, \quad k, j = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

Поскольку функции $u_j(x, \mu)$ удовлетворяют условиям (9), то для любых μ' и μ''

$$[u_k(x, \mu'), u_j(x, \mu'')]_{-a} = 0.$$

Однако в силу формулы Лагранжа (см. [1], стр. 192) выражение $[u_k(x, \mu), u_j(x, \bar{\mu})]$ не зависит от x и поэтому

$$[u_k(x, \mu), u_j(x, \bar{\mu})] = 0.$$

Учитывая это, из равенства (27) получаем

$$\sum_{j=1}^n \bar{u}_j(x, \bar{\mu}) [g_j(x, \mu), u_k(x, \bar{\mu})] = \bar{u}_k(x, \bar{\mu}). \quad (30)$$

Так как выражение $[g_j(x, \mu), u_k(x, \bar{\mu})]$ не зависит от x , то из (30) получим соотношения

$$[g_j(x, \mu), u_k(x, \bar{\mu})] = \begin{cases} 1 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j, \end{cases} \quad k, j = 1, 2, \dots, n. \quad (31)$$

Таким образом, функции $g_j(x, \mu)$ в точке $x = a$ удовлетворяют условиям (29), которые эквивалентны условиям (31). Эквивалентность этих условий следует из соотношений

$$[y, z_k]_a = - \sum_{j=1}^n [v_j, z_k]_a [y, u_j]_{a, \mu}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $y(x)$ — произвольная функция из D_0^* , причем

$$\det [v_j, z_k]_{a, j=1}^n \neq 0.$$

Из формул (15), (23) и (24) при $x \leq t$ имеем

$$G(x, t; \mu) = \sum_{k,j=1}^n g_k(x, \mu) \bar{g}_j(t, \mu) \int_a^x \bar{u}_k(\xi, \bar{\mu}) u_j(\xi, \bar{\mu}) d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k,j=1}^n u_k(x, \mu) \bar{g}_j(t, \mu) \int_x^t \bar{g}_k(\xi, \bar{\mu}) u_j(\xi, \bar{\mu}) d\xi + \\
& + \sum_{k,j=1}^n u_k(x, \mu) \bar{u}_j(t, \mu) \int_t^b \bar{g}_k(\xi, \bar{\mu}) g_j(\xi, \bar{\mu}) d\xi.
\end{aligned}$$

Беря последовательные квазипроизводные обеих частей этого равенства и учитывая соотношения (27), получим

$$\begin{aligned}
G_{rs}(x, t; \mu) &= \sum_{k,j=1}^n g_k^{[r]}(x, \mu) \bar{g}_j^{[s]}(t, \mu) \int_a^x \bar{u}_k(\xi, \bar{\mu}) u_j(\xi, \bar{\mu}) d\xi + \\
& + \sum_{k,j=1}^n u_k^{[r]}(x, \mu) \bar{g}_j^{[s]}(t, \mu) \int_x^t \bar{g}_k(\xi, \bar{\mu}) u_j(\xi, \bar{\mu}) d\xi + \\
& + \sum_{k,j=1}^n u_k^{[r]}(x, \mu) \bar{u}_j^{[s]}(t, \mu) \int_t^b \bar{g}_k(\xi, \bar{\mu}) g_j(\xi, \bar{\mu}) d\xi.
\end{aligned}$$

Из полученного равенства следует, что

$$\begin{aligned}
& - Q_{rs}(x, t; \mu) = \\
& = \sum_{k,j=1}^n [g_k, v_s]_{x, \mu} [v_r, g_j]_{t, \mu} \int_a^x \bar{u}_k(\xi, \bar{\mu}) u_j(\xi, \bar{\mu}) d\xi + \\
& + \sum_{k,j=1}^n [u_k, v_s]_{x, \mu} [v_r, g_j]_{t, \mu} \int_x^t \bar{g}_k(\xi, \bar{\mu}) u_j(\xi, \bar{\mu}) d\xi + \\
& + \sum_{k,j=1}^n [u_k, v_s]_{x, \mu} [v_r, u_j]_{t, \mu} \int_t^b \bar{g}_k(\xi, \bar{\mu}) g_j(\xi, \bar{\mu}) d\xi.
\end{aligned}$$

Учитывая условия (17), в частности, получим формулу

$$Q_{rs}(a, a; \mu) = \int_a^b g_r(\xi, \mu) \bar{g}_s(\xi, \mu) d\xi, \quad (32)$$

где учтено также равенство $Q_{rs}(x, t; \mu) = Q_{rs}(x, t; \bar{\mu})$ (см. (19)).

По условию индекс дефекта оператора L_0 есть (m, m) . Поэтому уравнение $l[y] = \mu y$ ($\operatorname{Im} \mu \neq 0$) имеет ровно m линейно независимых решений $y_k(x, \mu)$ ($k=1, 2, \dots, m$), принадлежащих $L^2(a, b)$. Но тогда функции $g_j(x, \mu)$ представляются в виде

$$g_j(x, \mu) = \sum_{k=1}^m \gamma_{jk}(\mu) y_k(x, \mu), \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (33)$$

Учитывая равенства (25) и (29), при каждом j ($1 \leq j \leq n$) для функций $\gamma_{jk}(\mu)$ получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^m \gamma_{jk}(\mu) [y_k, w_s]_{b, \mu} = 0, \quad s=1, 2, \dots, m-n, \quad (34)$$

$$\sum_{k=1}^m \gamma_{jk}(\mu) [y_k, z_s]_{a, \mu} = -[v_j, z_s]_a, \quad s=1, 2, \dots, n. \quad (35)$$

Если же вместо (29) использовать равенство (31), то получим, что функции $\gamma_{jk}(\mu)$ удовлетворяют системе уравнений (34) и

$$\sum_{k=1}^m \gamma_{jk}(\mu) [y_k(x, \mu), u_i(x, \bar{\mu})] = \begin{cases} 1 & \text{при } s=j, \\ 0 & \text{при } s \neq j, \end{cases} \quad s=1, 2, \dots, n. \quad (36)$$

Определитель каждой из систем уравнений (34), (35) и (34), (36) отличен от нуля. Действительно, в противном случае, как нетрудно убедиться, получим, что не вещественное число μ является собственным значением самосопряженного оператора L , что невозможно.

В силу (33) формула (32) принимает вид

$$Q_{rs}(a, a; \mu) = \sum_{k, j=1}^m \gamma_{rk}(\mu) \bar{\gamma}_{sj}(\mu) (y_k, y_j)_\mu,$$

где

$$(y_k, y_j)_\mu = \int_a^b y_k(x, \mu) \bar{y}_j(x, \mu) dx.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Пусть самосопряженное расширение L оператора L_0 с индексом дефекта (m, n) определяется распадающимися краевыми условиями (7), (8), и пусть $u_j(x, \lambda)$ ($j=1, 2, \dots, n$) — решения уравнения $l[u] = \lambda u$, удовлетворяющие условиям (9) и (17). Тогда для спектральной матрицы $\sigma(\lambda)$ оператора L , соответствующей системе функций $u_j(x, \lambda)$, и для ядра $R(x, t; \mu)$ резольвенты оператора L имеют место формулы

$$\sum_{k, j=1}^m \gamma_{rk}(\mu) \bar{\gamma}_{sj}(\mu) (y_k, y_j)_\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{rs}(\lambda)}{|\lambda - \mu|^2}, \quad \text{Im } \mu \neq 0,$$

$$\sigma_{rs}(\Delta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon|}{\pi} \int \left\{ \sum_{k, j=1}^m \gamma_{rk}(\lambda + i\varepsilon) \bar{\gamma}_{sj}(\lambda + i\varepsilon) (y_k, y_j)_{\lambda + i\varepsilon} \right\} d\lambda, \quad (37)$$

$$R(x, t; \mu) = \sum_{k=1}^m \bar{y}_r(t, \bar{\mu}) \sum_{j=1}^n \bar{\gamma}_{jk}(\bar{\mu}) u_j(x, \mu), \quad a < x \leq t < b, \quad (38)$$

где $y_k(x, \mu)$ ($k=1, 2, \dots, m$) — произвольная система линейно независимых решений уравнения $l[g] = \mu g$, принадлежащих $L^2(a, b)$; $\gamma_{jk}(\mu)$ — решения системы уравнений (34), (35) или эквивалентной ей системы (34), (36); Δ — произвольный конечный интервал, концы

которого не являются собственными значениями оператора L , ε — вещественный параметр.

Замечание 2. Если функции $\gamma_{jk}(\mu)$ определить из системы уравнений (34), (36), то в представлении (38) ядра $R(x, t; \mu)$ дополнительные ограничения (17) на решения $u_j(x, \mu)$ не являются существенными.

§ 4. Отбор и нормировка минимальной системы обобщенных собственных функций в непрерывном спектре

В разложении (11) функции $f \in L^2(a, b)$ использована система $u_j(x, \lambda)$ ($j=1, 2, \dots, n$) обобщенных собственных функций оператора L , которая, вообще говоря, не является минимальной. Формула (37) позволяет указать некоторый метод получения разложения при помощи минимальной системы обобщенных собственных функций оператора L . С этой целью будем исходить из следующих предположений:

1) Непрерывный спектр оператора L есть замыкание множества $M = \bigcup_r \Delta_r$, где интервалы $\Delta_r = (\lambda_r^-, \lambda_r^+)$ не пересекаются и не содержат собственных значений.

2) При всех $\operatorname{Im} \mu > 0$ линейно независимые решения $y_k(x, \mu) \in L^2(a, b)$ ($k=1, 2, \dots, m$) уравнения $l[y] = \mu y$ подобраны и пронумерованы так, что для любого отрезка $\Delta \subset M$ положительной длины соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{j=m(\Delta)+1}^m \int_{\Delta} \gamma_{vk}(\lambda + i\varepsilon) \bar{\gamma}_{sj}(\lambda + i\varepsilon) (y_k, y_j)_{\lambda+i\varepsilon} d\lambda + \right. \\ \left. + \sum_{k=m(\Delta)+1}^m \sum_{j=1}^{m(\Delta)} \int_{\Delta} \gamma_{vk}(\lambda + i\varepsilon) \bar{\gamma}_{sj}(\lambda + i\varepsilon) (y_k, y_j)_{\lambda+i\varepsilon} d\lambda \right\} = 0, \\ v, s = 1, 2, \dots, n, \quad (39)$$

имеют место с минимальным числом $m(\Delta)$.

3) Число $m(\Delta)$ постоянно на каждом интервале Δ_r , т. е. $m(\Delta) = m_r$ для всех отрезков $\Delta \subset \Delta_r$ положительной длины.

4) Для любого интервала Δ_r равномерно по λ на каждом отрезке $\Delta \subset \Delta_r$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \gamma_{vk}(\lambda + i\varepsilon) = \gamma_{vk}(\lambda), \quad 1 \leq v \leq n; 1 \leq k \leq m, \quad (40)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\lambda_r^-}^{\lambda} (y_k, y_j)_{\xi+i\varepsilon} d\xi = \rho_{kj}(\lambda), \quad 1 \leq k, j \leq m, \quad (41)$$

где λ_r — фиксированное число из интервала Δ_r .

При указанных предположениях $m_r \leq n$. Действительно, если $y_k(x, \mu) = g_k(x, \mu)$ ($k=1, 2, \dots, n$), где функции $g_k(x, \mu)$ те же, что и в § 3, то для чисел $\gamma_{kj}(\mu)$ имеем

$$\gamma_{kj}(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } 1 \leq j \leq n \text{ и } k = j, \\ 0 & \text{при } n+1 \leq j \leq m \text{ или } 1 \leq j \leq n \text{ и } k \neq j. \end{cases}$$

Поэтому при таком выборе решений $y_k(x, \mu)$ соотношения (39) с числом $m(\Delta) = n$ заведомо выполняются.

В силу (40) и (41) из формул (37) для любого отрезка $\Delta \subset \Delta_r$ имеем

$$\sigma_{vs}(\Delta) = \int_{\Delta} \sum_{k,j=1}^{m_r} \gamma_{vk}(\lambda) \bar{\gamma}_{sj}(\lambda) d\rho_{kj}(\lambda), \quad 1 \leq v, s \leq n. \quad (42)$$

Обозначим

$$\varphi_j(x, \lambda) = \sum_{s=1}^n \bar{\gamma}_{sj}(\lambda) u_s(x, \lambda), \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Отметим, что в силу формулы (38) и замечания 2 функции $\varphi_j(x, \lambda)$ не зависят от выбора решений $u_s(x, \lambda)$, удовлетворяющих краевым условиям (9). Положим

$$\Phi_k(\lambda) = \int_a^b f(x) \bar{\varphi}_k(x, \lambda) dx = \sum_{j=1}^n \gamma_{jk}(\lambda) F_j(\lambda),$$

$$k=1, 2, \dots, m,$$

где функции $F_j(\lambda)$ определяются по формуле (10). В силу (42)

$$\int_{\Delta_r} \sum_{k,j=1}^n F_k(\lambda) u_j(x, \lambda) d\tau_{kj}(\lambda) = \int_{\Delta_r} \sum_{k,j=1}^{m_r} \Phi_k(\lambda) \varphi_j(x, \lambda) d\rho_{kj}(\lambda).$$

Учитывая это, из формулы (11) получаем

$$f(x) = \sum_r \int_{\Delta_r} \sum_{k,j=1}^{m_r} \Phi_k(\lambda) \varphi_j(x, \lambda) d\rho_{kj}(\lambda) +$$

$$+ \sum_n \psi_k(x) \int_a^b f(t) \bar{\psi}_k(t) dt, \quad (43)$$

где $\{\psi_k(x)\}$ — ортонормированная система всех собственных функций оператора L .

Таким образом, для получения разложения (43) с минимальными числами m , вопрос сводится к подходящему выбору решений $y_k(x, \mu)$ и вычислению пределов (41).

Отметим, что полученные в [5] и [6] разложения можно вывести также указанным здесь способом, причем заменив условие суммируемости функций (2) на интервале $(a, a] \subset (a, b)$ одним из условий 1, 2, 3.

Լ. Գ. ԽԱՉԱՏՐԻԱՆ. Ինվերսիոն գիծերի վրա օպերատորների հետ կապված շրջանի բանաձևերի մասին (ամփոփում)

Դիտարկվում է $L^2(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) տարածությունում $2n$ կարգի ինքնահամարված օպերատորը L օպերատորը, որը որոշվում է անշատվող եզրային պայմաններով: Ընդ որում L օպերատորի գործակիցների վրա դրվում են պայմաններ, որոնց դեպքում (a, b) միջակայքի օպերատորը ընդհանրապես սինգուլյար են: Արտածվում են L օպերատորի հետ կապված շրջանի բանաձևեր այդ օպերատորի n ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների միջոցով: Արտածվում է նաև որոշ բանաձև L օպերատորի սպեկտրալ մատրիցի համար: Նշվում է L օպերատորի ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների միմյանց սիստեմի միջոցով վերլուծություն ստանալու մի մեթոդ:

I. G. KHACHATRIAN. On inversion formulas connected with self-adjoint differential operators (summary)

In the space $L^2(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) a self-adjoint differential operator L of order $2n$ which determined by decomposing boundary conditions is considered. We pose some restrictions on the coefficients of the operator L under which both ends of the interval (a, b) are in general singular. We derive inversion formulas connected with the operator L by means of n generalized eigenfunctions of that operator. A formula for the spectral matrix of the operator L is obtained as well and a method of expansion by minimal system of generalized eigenfunctions of the operator L is derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
2. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1966.
3. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИИЛ, 1958.
4. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. Введение в спектральную теорию, М., «Наука», 1970.
5. И. М. Рапопорт. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Киев, Изд-во АН УССР, 1954.
6. М. В. Федорюк. Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов, Труды ММО, 15, 1966, 296—345.
7. И. Г. Хачатрян. Изучение решений обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения, Изв. АН Арм. ССР, серия матем., 17, № 3, 1982, 159—181.

УДК 517.2

Л. ХЕЙНРИХ И Д. ШТОЙЯН

ОБОБЩЕНИЯ ФОРМУЛ ПАЛЬМА—ХИНЧИНА

1. Введение

Формулы Пальма—Хинчина принадлежат к самым старым и хорошо известным формулам теории случайных точечных процессов. Если Φ —простой стационарный точечный процесс интенсивности λ ($0 < \lambda < \infty$) с распределением P и с распределением Пальма P_0 , то для вероятности $P_k(t)$ того, что Φ имеет ровно k точек в интервале $(0, t]$, верно соотношение

$$P_k(t) = \lambda \int_0^t [\pi_{k-1}(x) - \pi_k(x)] dx, \quad k=1, 2, \dots, t > 0, \quad (1)$$

где

$$\pi_i(x) = P_0(\{\varphi: \varphi((0, x]) = i\}), \quad i=0, 1, \dots, \text{ см. [5]. }$$

В дифференциальной форме формула (1) имеет вид

$$\frac{d}{dt} P_k(t) = \lambda [\pi_{k-1}(t) - \pi_k(t)]. \quad (2)$$

При этом должны заметить, что функции Пальма—Хинчина $\pi_i(t)$, $i=0, 1, \dots$, вообще говоря, лишь непрерывны справа и, следовательно, величины $\frac{d}{dt} P_k(t)$ интегрируются как правосторонние производные [6].

Обобщения этих формул для точечных процессов в R^2 доказал Амбарцумян [1], см. также [3], [4]. В октябре 1982 года Р. В. Амбарцумян обратил наше внимание на то, что имеет место обобщение (2), то есть нижестоящая формула (20), в которую входят величины, связанные с 2-х точечным распределением Пальма. Целью этой работы является доказательство одной обобщенной формулы Пальма—Хинчина, которая содержит n -точечные распределение Пальма. Далее мы рассматриваем также точечные процессы в R^d , $d \geq 2$.

2. Обобщенные формулы Пальма—Хинчина

Пусть P —распределение простого точечного процесса в R^d с мерой интенсивности Δ_P

$$\Delta_P(B) = \int_M \varphi(B) P(d\varphi), \quad B \in R^d,$$

R^d — борелевская σ -алгебра в R^d . Далее пусть P_x^I — редуцированное пальмовское распределение в точке x , ср. [7]. Распределение P_x^I связано с обычным распределением Пальма в точке x следующим образом:

$$P_x(Y) = P_x^I(\{\varphi: \varphi + \delta_x \in Y\}), Y \in \mathfrak{M}.$$

При этом обозначим как в [2] через M множество всех точечных последовательностей в R^d и $\mathfrak{M}$ соответствующая σ -алгебра, P есть распределение на $[M, \mathfrak{M}]$. Через φ и ψ обозначаются элементы из M . Для любой неотрицательной измеримой функции $h: R^d \times M \rightarrow R^1$ верна формула Мекке, см. [2], [7], [8]:

$$\int_M \sum_{x \in \varphi} h(x, \varphi - \delta_x) P(d\varphi) = \int_{R^d} \int_M h(x, \varphi) P_x^I(d\varphi) \Lambda_P(dx). \quad (3)$$

Эта формула делает возможным доказательство различных вариантов формулы Пальма—Хинчина.

Через $b(x, \rho)$ обозначим открытый d -мерный шар с центром в точке x и радиуса ρ . Хотелось бы, чтобы распределение P удовлетворяло условию

$$P(\{\varphi: \varphi(x: x \in R^d, \|x\| = r)\} > 1 \text{ для } r > 0) = 0 \quad (4)$$

($\|x\|$ — евклидово расстояние от x до начала O). Тогда для P -почти всех реализаций φ из Φ верно соотношение

$$I_{\{\varphi: \varphi(b(O, \rho)) \geq k\}}(\varphi) = \sum_{x \in \varphi} I_{\{x: \varphi(b(O, \|x\|)) \geq k-1\}}(x) I_{\{\varphi: \varphi(b(O, \|x\|)) = k-1\}}(\varphi), \quad k=1, 2, \dots, \quad (5)$$

причем I_X обозначает индикатор множества X . Если положить величину под знаком суммы в (5) равной $h(x, \varphi - \delta_x)$, то из формулы (3) вытекает следующее

Предложение 1. При предположении (4) для любого $\rho > 0$ справедливо

$$\begin{aligned} P(\{\varphi: \varphi(b(O, \rho)) \geq k\}) &= \int_{b(O, \rho)} P_x^I(\{\varphi: \varphi(b(O, \|x\|)) = \\ &= k-1\}) \Lambda_P(dx), \quad k=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Заметим, что стационарность точечного процесса влечет выполнение условия (4).

Следствие 1. Если точечный процесс интенсивности λ ($0 < \lambda < \infty$) стационарен, то верно

$$\begin{aligned} P(\{\varphi: \varphi(b(O, \rho)) \geq k\}) &= \int_{b(O, \rho)} P_0^I(\{\varphi: \varphi(b(x, \|x\|)) = k- \\ &- 1\}) dx, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Следствие 2. В случае стационарного и изотропного точечного процесса для каждого $k=1, 2, \dots$ верно соотношение

$$P(\{\varphi: \varphi(b(O, \rho)) \geq k\}) = \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \lambda \int_0^{\rho} P_0^l(\{\varphi: \varphi(b(r, 0, \dots, 0), r) = k-1\}) r^{d-1} dr \quad (7)$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{d}{d\rho} P(\{\varphi: \varphi(b(O, \rho)) \geq k\}) = \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \lambda \rho^{d-1} P_0^l(\{\varphi: \varphi(b(\rho, 0, \dots, 0), \rho) = k-1\}). \quad (7')$$

Замечание. Существование (односторонней) производной в (7') было показано Р. В. Амбарцумяном в [1] для $d=2$. В этом случае Амбарцумян доказал формулу прямым путем. Переход от (7) к (7') является не тривиальным. При помощи метода в [1] можно доказать (7') также для $d > 2$. В дальнейшем докажем только (7).

Доказательство. Можно показать, что стационарность и изотропность точечного процесса обеспечивает выполнимость (4). Переходя к полярным координатам в (6), получаем

$$P(\{\varphi: \varphi(b(O, \rho)) \geq k\}) = \lambda \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} P_0^l(\{\varphi: \varphi(b(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}), r) = k-1\}) r^{d-1} \sin \theta_1 \dots (\sin \theta_{d-1})^{d-2} d\theta_{d-1} \dots d\theta_2 d\theta_1 dr.$$

Из изотропности следует для $r > 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i < \pi$, $i=2, \dots, d-1$,

$$P_0^l(\{\varphi: \varphi(b(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}), r) = k-1\}) = P_0^l(\{\varphi: \varphi(b(r, 0, \dots, 0), r) = k-1\}).$$

Интегрирование по $\theta_1, \dots, \theta_{d-1}$ приводит к (7).

Пусть для $B \in R^1$ и $x \in R^1$ в дальнейшем $B^x = B \cap (x, \infty)$ и ${}^x B = B \cap (-\infty, x)$. Для $B \in R^d$, $x \in R^d$ и $\alpha \in$ единичной сфере R^d пусть

$$B_\alpha^x = B \cap S_\alpha^x, \quad {}^x B_\alpha = (B \setminus B_\alpha^x) \setminus H_\alpha^x,$$

причем S_α^x — открытое подпространство R^d , которое не содержит начала координат O и граничит через гиперплоскость H_α^x , которая содержит x и перпендикулярна к прямой, проходящей через O и α . Так как в дальнейшем α фиксировано, то индекс „ α “ опускается. Хотелось бы, чтобы распределение P удовлетворяло условию

$$P(\{\varphi: \varphi(H^x) > 1 \text{ для всех } x \in R^d\}) = 0. \quad (8)$$

Совершенно аналогично предложению 1 доказывается следующее

Предложение 2. При условии (8) для любого $B \in R^d$ верно

$$P(\{\varphi: \varphi(B) \geq k\}) = \int_B F_x^l(\{\varphi: \varphi(B^x) = k-1\}) \Lambda_P(dx) \quad (9)$$

и

$$P(\{\varphi: \varphi(B) \geq k\}) = \int_B P_x^i(\{\varphi: \varphi({}^x B) = k-1\}) \Delta_P(dx), \quad k=1, 2, \dots \quad (10)$$

Следствие 3. Если точечный процесс стационарен и выполнено (8), то

$$P(\{\varphi: \varphi(B) \geq k\}) = \lambda \int_B P_0^i(\{\varphi: \varphi({}^x B - x) = k-1\}) dx \quad (11)$$

и

$$P(\{\varphi: \varphi(B) \geq k\}) = \lambda \int_B P_0^i(\{\varphi: \varphi({}^x B - x) = k-1\}) dx, \quad k=1, 2, \dots \quad (12)$$

В частном случае $d=1$ и $B=(0, t]$ имеют место соотношения

$$P(\{\varphi: \varphi((0, t]) \geq k\}) = \lambda \int_0^t P_0^i(\{\varphi: \varphi(0, x] = k-1\}) dx \quad (13)$$

и

$$P(\{\varphi: \varphi((0, t]) \geq k\}) = \lambda \int_0^t P_0^i(\{\varphi: \varphi((-x, 0)) = k-1\}) dx, \quad k=1, 2, \dots \quad (14)$$

В силу того, что

$$P_0(\{\varphi: \varphi((0, x]) = i\}) = P_0^i(\{\varphi: \varphi((0, x]) = i\}) \quad i=0, 1, 2, \dots,$$

из (13) следует соотношение (1).

3. Формулы Пальма—Хинчина с n -точечным распределением Пальма

Мы рассмотрим обобщения формул Пальма—Хинчина, в которые входят n -точечные распределения Пальма. Они получаются заменой распределения P распределением Пальма.

Следствие 4. Пусть $d=1$, точечный процесс стационарен и 2-го порядка (т. е. моментная мера 2-го порядка радонова) с плотностью 2-го порядка $\rho^{(2)}$. Тогда

$$P_k(t) = \int_0^t \int_0^x \Delta^2 \pi^{(2)}(y, x) \rho^{(2)}(y) dy dx, \quad k=2, 3, \dots, \quad (15)$$

$$P_1(t) = \lambda t + \int_0^t \int_0^x \Delta^2 \pi_1^{(2)}(y, x) \rho^{(2)}(y) dy dx,$$

и

$$P_0(t) = 1 - \lambda t + \int_0^t \int_0^x \Delta^2 \pi_0^{(2)}(y, x) \rho^{(2)}(y) dy dx,$$

где

$$\Delta^2 \pi_k^{(2)} = (\pi_{k-2}^{(2)} - \pi_{k-1}^{(2)}) - (\pi_{k-1}^{(2)} - \pi_k^{(2)}), \quad \pi_{-2}^{(2)} = \pi_{-1}^{(2)} = 0$$

и

$$\pi_i^{(2)}(y, x) = P_{0y}^i(\{\varphi: \varphi((y, x]) = i\}), \quad i=0, 1, 2, \dots, x > y.$$

Доказательство. Мы докажем формулу (15). Из формулы (9) для специального распределения P_0^i следует равенство:

$$P_0^i(\{\varphi: \varphi(0, t] \geq k\}) = \int_0^t (P_{0x}^i(\{\varphi: \varphi((x, t]) = k-1\}) \Lambda_{P_0^i}(dx). \quad (16)$$

Мера интенсивности $\Lambda_{P_0^i}$ для P_0^i выражается через $\rho^{(2)}$ следующим образом:

$$\Lambda_{P_0^i}(B) = \int_B \rho^{(2)}(x) dx / \lambda.$$

Согласно [7] верно $(P_0^i)_x = P_{0x}^i$, причем P_{0x}^i обозначает редуцированное 2-х точечное распределение Пальма для Φ . Так же как (1) вытекает из (11), из (16) вытекает соотношение

$$\pi_k^{(2)}(t) = \int_0^t [\pi_{k-1}^{(2)}(x, t) - \pi_k^{(2)}(x, t)] \rho^{(2)}(x) dx / \lambda. \quad (17)$$

Подставив (17) в (1), получим (15):

$$P_k(t) = \int_0^t \int_0^x [\pi_{k-2}^{(2)}(y, x) - 2\pi_{k-1}^{(2)}(y, x) + \pi_k^{(2)}(y, x)] \rho^{(2)}(y) dy dx.$$

Следствие 5. При условиях следствия 4 верно

$$P_k(t) = \int_0^t \int_0^x \Delta^2 \tilde{\pi}_k^{(2)}(0, y) \rho^{(2)}(y) dy dx, \quad k=2, 3, \dots, \quad (18)$$

где

$$\tilde{\pi}_i^{(2)}(0, t) = P_{0t}^i(\{\varphi: \varphi(0, t) = i\}), \quad i=0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Из формулы (1) следует

$$P_k(t) = \lambda \int_0^t \Delta^2 q_{k+1}(x) dx, \quad (19)$$

где

$$q_k(x) = P_0^i(\{\varphi: \varphi((0, x]) \geq k\}), \quad k=1, 2, \dots$$

Имеет место также следующая формула (ср. с (5)):

$$I_{\{\varphi: \varphi(0, x] \geq k\}}(\varphi) = \sum_{y \in \mathbb{T}} I(y) \quad I_{\{\varphi: \varphi(0, y] = k-1\}}(\varphi).$$

Отсюда следует соотношение (ср. вывод (3))

$$q_k(x) = \int_0^x (P_0^{(1)})_y (\{ \tau: \varphi((0, y)) = k-1 \}) \Lambda_{P_0^{(1)}}(dy) = \\ = \int_0^x \bar{\pi}_{k-1}^{(2)}(0, y) \rho^{(2)}(y) dy / \lambda.$$

Отсюда и из (19) следует (18).

Следствие 6. Если выполнены условия следствия 4, $\pi_k(x, t)$ непрерывно дифференцируемы по t и $\rho^{(2)}(x)$ непрерывна, тогда верны соотношения

$$P_k^*(t) = \Delta^2 \bar{\pi}_k^{(2)}(0, t) \rho^{(2)}(t), \quad k=2, 3, \dots, \quad (20)$$

$$P_k^*(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 \bar{\pi}_k^{(2)}(x, t) \rho^{(2)}(x) dx, \quad k=3, 4, \dots \quad (21)$$

и

$$P_2^*(t) = \rho^{(2)}(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 \bar{\pi}_2^{(2)}(x, t) \rho^{(2)}(x) dx. \quad (22)$$

Доказательство. Из (15) для $\tau > 0$ имеем

$$\frac{P_k^*(t+\tau) - P_k^*(t)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \Delta^2 \bar{\pi}_k^{(2)}(x, t+\tau) \rho^{(2)}(x) dx + \\ + \int_0^t \frac{1}{\tau} (\Delta^2 \bar{\pi}_k^{(2)}(x, t+\tau) - \Delta^2 \bar{\pi}_k^{(2)}(x, t)) \rho^{(2)}(x) dx.$$

Очевидно верны предельные соотношения

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \bar{\pi}_k^{(2)}(x, t+\tau) = 0, \quad k=1, 2, \dots$$

и

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \bar{\pi}_0^{(2)}(x, t+\tau) = 1, \quad \text{для } x \in (t, t+\tau).$$

Итак, предельным переходом ($\tau \rightarrow 0$) получаем, что правые части (20) и (21) равны соответственно (22). Следствие доказано.

Пусть теперь Φ —стационарный процесс восстановления, функция распределения расстояния F которого имеет непрерывную плотность f . В этом случае $\Lambda_{P_0^{(1)}}$ выражается через функцию восстановления

$$h(x) = \frac{d}{dx} E_{P_0^{(1)}} \Phi((0, x]) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)*}(x).$$

Следствие 7. Имеет место следующая формула:

$$\bar{\pi}_k^{(2)}(0, t) = \frac{f^{(k+1)*}(t)}{h(t)}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Доказательство. Из (18) следует

$$\bar{\pi}_k^{(2)}(0, t) = \frac{1}{\rho^{(2)}(t)} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \pi_k^{(2)}(x, t) \rho^{(2)}(x) dx, \quad k=1, 2, \dots, \quad (24)$$

и

$$\bar{\pi}_0^{(2)}(0, t) = 1 + \frac{1}{\rho^{(2)}(t)} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \pi_0^{(2)}(y, t) \rho^{(2)}(y) dy. \quad (25)$$

На основе свойств процессов восстановления имеем

$$\begin{aligned} \pi_k^{(2)}(x, t) &= P_x(\{\varphi: \varphi(x, t) = k\}) = P_0(\{\varphi: \varphi((0, t-x]) = k\}) = \\ &= \pi_k(t-x) = F^{(k)*}(t-x) - F^{(k+1)*}(t-x) \end{aligned}$$

и

$$h(x) = f(x) + \dots + f^{(k)*}(x) + (f^{(k)*} * h)(x), \quad k=1, 2, \dots,$$

и

$$\rho^{(2)}(x) = \lambda h(x).$$

Вместе с (24) и (25) это непосредственно дает формулу (23).

В заключение упомянем еще об одном обобщении. Пусть Φ — стационарный простой точечный процесс в R^1 с плотностью n -го порядка $\rho^{(n)}(x_1, \dots, x_{n-1})$. Тогда для $k=n, n+1, \dots$ верно

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \int_0^t \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{n-2}} (\Delta^n \pi_k^{(n)})(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \times \\ &\times \rho^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1 dx_n, \end{aligned}$$

где

$$\pi_k^{(n)}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = P_{0, x_1, \dots, x_{n-1}}^1(\{\varphi: \varphi((x_{n-1}, x_n]) = k\}).$$

Эти формулы выводятся последовательным применением формулы (3) и правил обращения с n -точечным распределением Пальма.

Факультет математики,
Горная Академия Фрайберг
ГДР

Поступила 26.IV.1983

Լ. ԽԵՅՐԻԽ, Դ. ՇՏՈՅՅԱՆ. Պալմ-եփնյիւնի բաճաճեցիի բնդհանրացումներ (ամփոփում)

Աշխատանքում բերված է R^d -ում կետային պրոցեսների համար Պալմ-եփնյիւնի բաճաճեցի որոշ ընդհանրացումներ: Այնուհետև կետային պրոցեսների համար R -ում ապացուցված են ընդհանրացված Պալմ-եփնյիւնի բաճաճեցի: որոնց մեջ մտնում են Պալմի երկու և n -կետանոց բաշխումները: Որպես մասնավոր դեպք քննարկվում են վերականգնման պրոցեսները:

L. HEINRICH, D. STOYAN. *On generalized Palm—Kchinchin formulae (summary)*

In this paper some generalizations of the Palm—Kchinchin formulae for point processes in R^d are derived; For point processes in R^1 some generalizations of Palm—Kchinchin formulae are proved, where two- and n -point distributions enter. As a special case the renewal processes are discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян. Однородные и изотропные случайные точечные поля на плоскости, *Math. Nachr.* 70, 1976, 365—385.
2. Я. Керстан, К. Маттес и Я. Мекке. Безгранично делимые точечные процессы, «Наука», М., 1982.
3. В. К. Озanian. Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных полей отрезков. В сб.: «Комбинаторные принципы в стохастической геометрии» (под ред. Р. В. Амбарцумяна), Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1980, 81—106.
4. Г. С. Сукиасян. О процессах хорд на прямых, пересекающих случайные поля кругов на плоскости, *ДАН Арм.ССР*, 70, 1980, 297—300.
5. А. Я. Хинчин. Математические методы теории массового обслуживания, Труды ин-та им. Стеклова, т. 49, Изд. АН СССР, 1955.
6. D. J. Daley and R. K. Milne. Orderliness, intensities and Palm—Kchinchin equations for multivariate point processes, *J. Appl. Prob.*, 12, 1975, 383—389.
7. К.—Н. Hantsch. Inversion formulae for n -fold Palm distributions of point processes in LCS—spaces, *Math. Nachr.*, 10, 1982, 171—179.
8. J. Mecke. Stationäre zufällige Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 9, 1967, 36—58.

УДК 517.98

Т. Н. АРУТЮНЯН, С. М. ИВАНЯН

ФИНИТНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛА И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ЙОСТА СИСТЕМЫ ДИРАКА $2n$ -ГО ПОРЯДКА НА ОСИ И ПОЛУОСИ

Рассмотрим систему уравнений Дирака порядка $2n$

$$By' + Q(x)y = \lambda y \quad (1)$$

на оси или полуоси, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} P(x) & Q(x)I \\ IQ(x) - IP(x)I \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а $P(x)$ и $Q(x)$ n -мерные измеримые матрицы.

Работа посвящена изучению связи между финитностью (точнее „односторонней финитностью“) потенциала $Q(x)$ и аналитическими свойствами так называемых матриц-функций Йоста системы (1).

Нетрудно видеть, что

$$E_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} E_n \\ -iI \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \quad \text{и} \quad E_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} E_n \\ iI \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}$$

являются $2n \times n$ -матричными решениями системы (1) при $Q(x) \equiv 0$, где через E_n мы обозначили n -мерную единичную матрицу.

Обратимся вначале к случаю всей оси. Через $F_j^\pm(x, \lambda)$, $j = 1, 2$, обозначим $2n \times n$ матричные решения системы (1), которые обладают асимптотикой:

$$F_j^+(x, \lambda) \rightarrow E_j(x, \lambda) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \quad (-1)^j \operatorname{Im} \lambda \leq 0,$$

$$F_j^-(x, \lambda) \rightarrow E_j(x, \lambda) \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty, \quad (-1)^j \operatorname{Im} \lambda \geq 0.$$

Такие решения, при условиях

$$\|P(x)\| \leq \frac{C}{1+|x|^{2+\varepsilon}}, \quad \|Q(x)\| \leq \frac{C}{1+|x|^{1+\varepsilon}}, \quad C > 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (2)$$

(где $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы), существуют, единственны и допускают представления:

$$F_j^+(x, \lambda) = E_j(x, \lambda) + \int_x^\infty K^+(x, t) E_j(t, \lambda) dt, \quad \text{при} \quad (-1)^j \operatorname{Im} \lambda \leq 0, \quad (3)$$

$$F_j^-(x, \lambda) = E_j(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x K^-(x, t) E_j(t, \lambda) dt, \quad \text{при} \quad (-1)^j \operatorname{Im} \lambda \geq 0, \quad (4)$$

где $K^+(x, t)$ и $K^-(x, t)$ — $2n$ -мерные непрерывные матрицы и, если обозначить

$$K^\pm = \begin{pmatrix} K_{11}^\pm & K_{12}^\pm \\ K_{21}^\pm & K_{22}^\pm \end{pmatrix},$$

то евклидовы нормы n -мерных матриц $K_{ij}^\pm$ удовлетворяют оценкам

$$\|K_{11}^\pm(x, t)\| \leq \frac{c(\gamma)}{1+|x+t|^{1+\epsilon}}, \quad \|K_{ij}^\pm(x, t)\| \leq \frac{c(\gamma)}{(1+|x|^{1+\epsilon})(1+|x+t|^{1+\epsilon})}, \quad (5)$$

при $-\infty < \gamma \leq x \leq t$ для K^+ и при $t \leq x \leq \gamma < \infty$ для K^- . Ядра $K^\pm(x, t)$ связаны с потенциалом $\Omega(x)$ следующим образом:

$$\Omega(x) = BK^+(x, x) - K^+(x, x)B = -(BK^-(x, x) - K^-(x, x)B). \quad (6)$$

Кроме того, существуют $2n$ -мерные матрицы-функции $\Phi^\pm(t)$ такие, что $K^\pm(x, t)$ удовлетворяют интегральным уравнениям:

$$K^+(x, t) + \int_x^\infty K^+(x, u) \Phi^+(u+t) du + \Phi^+(x+t) = 0, \quad (7)$$

$$K^-(x, t) + \int_{-\infty}^x K^-(x, u) \Phi^-(u+t) du + \Phi^-(x+t) = 0^*. \quad (8)$$

Формулы (3), (5), (6), (7) для системы (1) на полуоси получены М. Г. Гасымовым в [1]. Для системы (1) на всей оси формулы (3) — (8) получаются совершенно аналогично методом работы [1]. По поводу этих формул для случая всей оси см. также [2], [3]. Матричные функции $F_j^+(0, \lambda)$, $j=1, 2$, обычно называют матрицами-функциями Йоста системы (1) на полуоси, а $F_j^\pm(0, \lambda)$ — на оси. В случае полуоси верна следующая

Теорема 1. Пусть $\Omega(x)=0$ при $x > R_1 > 0$. Тогда элементы матриц-функций Йоста $F_j^+(0, \lambda)$, $j=1, 2$, есть целые функции экспоненциального типа $2R_1$. Наоборот, если элементы матриц-функций Йоста $F_j^+(0, \lambda)$ системы (1) на полуоси с потенциалом $\Omega(x)$, удовлетворяющим условиям (2), есть целые функции экспоненциального типа $2R_1$, то $\Omega(x)=0$ при $x > R_1$.

Непосредственным следствием теоремы 1 и аналогичного предположения в случае отрицательной полуоси является следующее утверждение для случая всей оси:

Теорема 2. Пусть $\Omega(x)=0$ при $x \in [-R_2, R_1]$, $R_1, R_2 > 0$. Тогда элементы матриц-функций Йоста $F_j^\pm$ есть целые функции

* Если обозначить $\Phi^\pm = \begin{pmatrix} \Phi_{11}^\pm & \Phi_{12}^\pm \\ \Phi_{21}^\pm & \Phi_{22}^\pm \end{pmatrix}$, то евклидовы нормы матриц $\Phi_{ij}^\pm$ удов-

летворяют оценкам $\|\Phi_{ij}^\pm(t)\| < \frac{c(\gamma)}{(1+|t|)^{1+\epsilon}}$, $\|\Phi_{ij}^\pm(t)\| < \frac{c(\gamma)}{(1+|t|)^{2+\epsilon}}$ при $-\infty < \gamma < t$ для Φ^+ и $t < \gamma < \infty$ для Φ^- .

экспоненциального типа $2R_1$, а F_j^- — типа $2R_2$. Наоборот, если элементы матриц-функций Йоста F_j^+ и F_j^- системы (1) на оси с потенциалом $\Omega(x)$, удовлетворяющим условиям (2), есть соответственно целые функции экспоненциального типа $2R_1$ и $2R_2$, то $\Omega(x) = 0$ при $x \in [-R_2, R_1]$.

Финитность потенциала, как следствие условий, наложенных на функции Йоста системы (1) на оси (при $n=1$), исследовалась в работе [4]. „В другую сторону“, т. е. аналитические свойства функций Йоста, вытекающие из финитности потенциала, для уравнения Шрёдингера на полуоси исследованы Т. Редже в [5] (см. также [6]).

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть $\Omega(x) = 0$ при $x > R_1$. Тогда легко видеть, что при $x > R_1$, $F_1^+(x, \lambda) = E_1(x, \lambda)$, $F_2^+(x, \lambda) = E_2(x, \lambda)$. Из представлений (3) следует что

$$\int_x^\infty K^+(x, t) \begin{pmatrix} E_n \\ -il \end{pmatrix} e^{it} dt = \int_x^\infty K^+(x, t) \begin{pmatrix} E_n \\ il \end{pmatrix} e^{-it} dt = 0$$

при всех $x > R_1$. Отсюда и из непрерывности матрицы $K^+(x, t)$ следует, что при всех $t > x > R_1$ имеют место равенства

$$K^+(x, t) \begin{pmatrix} E_n \\ -il \end{pmatrix} = 0, \quad K^+(x, t) \begin{pmatrix} E_n \\ il \end{pmatrix} = 0,$$

т. е.

$$K^+(x, t) \begin{pmatrix} E_n & E_n \\ -il & il \end{pmatrix} = 0,$$

из которого, очевидно, следует, что

$$K^+(x, t) = 0 \text{ при всех } t > x > R_1.$$

Полагая в уравнении (8) $t = x$, имеем

$$\Phi^+(2x) + K^+(x, x) + \int_x^\infty K^+(x, u) \Phi^+(u + x) du = 0, \quad (9)$$

откуда следует, что $\Phi^+(t) = 0$ при $t > 2R_1$. Рассмотрим теперь уравнение (8) при $x = 0$:

$$\Phi^+(t) + K^-(0, t) + \int_0^\infty K^+(0, u) \Phi^+(u + t) du = 0. \quad (10)$$

Отсюда очевидным образом следует, что $K^+(0, t) = 0$ при $t > 2R_1$. При $x = 0$ представление (3) принимает вид:

$$F_j^+(0, \lambda) - E_j(0, \lambda) = \int_0^\infty K^+(0, t) E_j(t, \lambda) dt = \int_0^{2R_1} K^+(0, t) E_j(t, \lambda) dt.$$

Функции $F_j^+(0, \lambda) - E_j(0, \lambda)$ можно рассматривать как преобразование Фурье финитной функции. Из теоремы Винера-Пели [7] следует, что элементы матриц-функций $F_j^+(0, \lambda) - E_j(0, \lambda)$ есть целые функции

экспоненциального типа $2R_1$. Поскольку $E_j(0, \lambda)$ являются постоянными матрицами, то прямое утверждение теоремы 1 доказано.

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Из представления (3) при $x=0$ имеем

$$F_1^+(0, \lambda) - E_1(0, \lambda) = \int_0^{\infty} K^+(0, t) \begin{pmatrix} E_n \\ -il \end{pmatrix} e^{i\lambda t} dt.$$

Так как матрица $F_1^+(0, \lambda) - \begin{pmatrix} E_n \\ -il \end{pmatrix}$ является преобразованием Фурье

матрицы $K^+(0, t) \begin{pmatrix} E_n \\ -il \end{pmatrix}$, элементы которой согласно оценкам (5) принадлежат $L_1(-\infty, \infty)$ и $L_2(-\infty, \infty)$ (можно предполагать что на отрицательной полуоси $K^+(0, t) \equiv 0$), то и ее элементы на действительной оси принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$. Согласно теореме Винера—Пели $K^+(0, t) \begin{pmatrix} E_n \\ -il \end{pmatrix} = 0$ почти всюду при $t > 2R_1$. Из (3) имеем также

$$F_2^+(0, \lambda) - \begin{pmatrix} E_n \\ il \end{pmatrix} = \int_0^{\infty} K^+(0, t) \begin{pmatrix} E_n \\ il \end{pmatrix} e^{-i\lambda t} dt.$$

Из аналогичных рассуждений следует, что $K^+(0, t) \begin{pmatrix} E_n \\ il \end{pmatrix} = 0$ при $t > 2R_1$. Следовательно $K^+(0, t) = 0$ почти всюду при $t > 2R_1$. Из непрерывности $K^+(0, t)$ следует, что $K^+(0, t) = 0$ при всех $t > 2R_1$.

Сделав замену переменной $u + t = \xi$ в интеграле уравнения (10), запишем его в виде

$$K^+(0, t) + \int_t^{\infty} K^+(0, \xi - t) \Phi^+(\xi) d\xi + \Phi^+(t) = 0. \quad (11)$$

Покажем теперь, что существуют матрица $\Gamma(t) \in L_1(0, \infty)$ и число $\beta > 0$ такие, что решение уравнения (11) задается формулой

$$\Phi^+(t) = -K^+(0, t) - \int_t^{\infty} \Gamma(\xi - t) e^{\beta(\xi - t)} K^+(0, \xi) d\xi. \quad (12)$$

Если это будет доказано, то из (12) будет следовать, что $\Phi^+(t) = 0$ при $t > 2R_1$ и, в свою очередь, из уравнения (9) получим, что $K^+(x, x) = 0$ при $x > R_1$. Теперь из равенства (6) будет следовать, что $\Omega(x) = 0$ при $x > R_1$.

Таким образом, для окончания доказательства теоремы 1 нам достаточно доказать формулу (12). Подставляя в (11) вместо $\Phi^+(t)$ правую часть выражения (12), для левой части уравнения (11) получаем выражение

$$M(t) = - \int_t^{\infty} K^+(0, \xi - t) K^+(0, \xi) d\xi - \int_t^{\infty} \Gamma(\xi - t) e^{\beta(\xi - t)} K^+(0, \xi) d\xi -$$

$$-\int_{\xi}^{\infty} K^{+}(0, \xi-t) \int_{\xi}^{\infty} \Gamma(u-\xi) e^{\beta(u-\xi)} K^{+}(0, u) du d\xi. \quad (13)$$

Надо доказать, что $M(t) \equiv 0$ при определенном выборе Γ и β . Умножая обе стороны (13) на $e^{\beta t}$ и вводя обозначения

$$A(t) = \begin{cases} -K^{+}(0, t) e^{-\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad \Gamma_1(t) = \begin{cases} \Gamma(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$R(t) = \begin{cases} K^{+}(0, t) e^{\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad M_1(t) = \begin{cases} M(t) e^{\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases},$$

перепишем (13) в виде

$$M_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi-t) R(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_1(\xi-t) R(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi-t) \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_1(u-\xi) R(u) du d\xi.$$

Заметим, что из того, что $K^{+}(0, t) = 0$ при $t > 2R_1$, следует, что все слагаемые правой части последнего равенства принадлежат $L_1(-\infty, \infty)$. Поэтому, применяя к обеим частям преобразование Фурье в $L_1(-\infty, \infty)$, будем иметь (учитывая свойства преобразования Фурье свертки):

$$\widehat{M}_1(-\lambda) = \widehat{A}(\lambda) \widehat{R}(-\lambda) - \widehat{\Gamma}_1(\lambda) \widehat{R}(-\lambda) + \widehat{A}(\lambda) \widehat{\Gamma}_1(\lambda) \widehat{R}(-\lambda),$$

или

$$\widehat{M}_1(-\lambda) = -[E_{2n} - \widehat{A}(\lambda)][E_{2n} + \widehat{\Gamma}_1(\lambda) - E_{2n}] \widehat{R}(-\lambda), \quad (14)$$

где через $\widehat{F}$ обозначено преобразование Фурье функции F . Число β можно выбрать настолько большим, чтобы

$$\|\widehat{A}(\lambda)\| = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{-i\lambda t} dt \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} K^{+}(0, t) e^{-\beta t} e^{-i\lambda t} dt \right\| < 1,$$

т. е. чтобы матрица $E_{2n} - \widehat{A}(\lambda)$ была обратима. Тогда, согласно теореме Винера ([8], стр. 18), существует матрица $\Gamma_1(t)$ с элементами из $L_1(-\infty, \infty)$ такая, что

$$[E_{2n} - \widehat{A}(\lambda)]^{-1} = E_{2n} + \widehat{\Gamma}_1(\lambda),$$

причем, если $A(t) = 0$ при $t < 0$, то тем же свойством обладает и $\Gamma_1(t)$. Теперь уже ясно, что при таком выборе $\Gamma_1(t)$, а следовательно и $\Gamma(t)$, из (14) получаем $\widehat{M}_1(-\lambda) \equiv 0$, откуда, в свою очередь, следует $M_1(t) \equiv 0$. Таким образом, доказано, что формула (12) задает решение уравнения (11), т. е. теорема 1 полностью доказана.

Авторы выражают признательность И. Г. Хачатряню за полезные обсуждения.

Ереванский государственный университет,
Институт энергетики Армянской ССР

Поступила 22.IX.1982
и 14.XI.1983

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ս. Մ. ԻՎԱՆՅԱՆ. Առանցքի և կիսաառանցքի վրա որոշված $2n$ չափանի Դիրակի եամակարգի պոտենցիալի ֆինիտությունը և իրադի ֆունկցիաների անալիտիկ հատկությունները (ամփոփում)

Իֆերենցիալ համասարումների (1) համակարգի համար առանցքի դեպքում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2. $Q(x) = 0$, $x > R_1 > 0$ ($x < -R_2 < 0$), այն և միայն այն դեպքում, երբ $F_j^+(0, \lambda)$, $(F_j^-(0, \lambda))$, $j=1, 2$, իրադի ֆունկցիաները էկսպոնենցիալ $2R_1(2R_2)$ տիպի ամբողջ ֆունկցիաներ են:

Նույն արդյունքը (եթև հաշվի շառնենք փակագծերում գրվածը) ապացուցված է կիսաառանցքի դեպքում:

T. N. HARUTUNIAN, S. M. IVANIAN. *The finiteness of the potential and analytic properties of the lost functions of the $2n$ -order Dirac system on the axis and halfaxis (summary)*

For the system of differential equations (1) in case of the axis the following theorem is proved:

Theorem 2. $Q(x) = 0$, $x > R_1 > 0$, ($x < -R_2 < 0$), if and only if the lost functions $F_j^+(0, \lambda)$, $(F_j^-(0, \lambda))$, $j = 1, 2$, are entire functions of exponential type $2R_1(2R_2)$.

The same result (without brackets) is proved in the case of halfaxis.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Гасымов. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$, Труды ММО, т. 19, 1968.
2. И. С. Фролов. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси, ДАН СССР, 207, № 1, 1972, 44—47.
3. С. Г. Велиев, Ф. Г. Максудов. Обратная задача теории рассеяния для несамосопряженного оператора Дирака на всей оси, Спектральная теория операторов, изд-во «ЭЛМ», Баку, 1977.
4. М. А. Асланов, А. Н. Соловьёв. Условия финитности потенциала в обратной задаче теории рассеяния для несамосопряженного оператора Дирака на всей оси, Рукопись депонирована в ВИНТИ, № 111-80ДЕП, 1981.
5. T. Regge. Analytic properties of the scattering matrix, Nuovo Cimento, 8, № 5, 1958, 671—679.
6. В. де Альфаро, Т. Редже. Потенциальное рассеяние, «Мир», 1966.
7. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», 1966.
8. М. Г. Крейн, И. Ц. Гохберг. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, вып. 2 (80), 1958.

УДК 519.218

Ю. Р. ДАШЯН, Ю. М. СУХОВ

ГИББСОВСКОЕ ОПИСАНИЕ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ
ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

§ 1. Введение

Задача о гиббсовском описании случайных полей, возникшая в математической теории фазовых переходов, приобрела четкую формулировку после работ Добрушина [1]—[3], Лэнфорда—Рюэля [4] и Рюэля [5]. При таком описании случайному полю (точнее, порожденной им системе условных распределений) ставится в соответствие некоторая функция U (так называемый потенциал), аргументом которой служит произвольный конечный набор значений поля. Полезность такой конструкции состоит в том, что потенциал U играет роль своеобразного „свободно меняющегося“ параметра, индексирующего случайные поля (точнее, классы случайных полей с заданной системой условных распределений). При этом целый ряд интересных свойств исходного случайного поля P можно естественным образом сформулировать в терминах потенциала. К числу таких свойств относятся, например, различные свойства регулярности (перемешивания) случайного поля и связанные с этим предельные теоремы в той или иной форме.

Особую важность имеет вопрос о взаимной однозначности соответствия между случайным полем и потенциалом U . В статистической механике возможность однозначного восстановления случайного поля по заданному потенциалу интерпретируется как отсутствие фазовых переходов. Эта ситуация представляет специальный интерес, поскольку при однозначном восстановлении свойства аслучайного поля в наиболее четкой форме выражаются в терминах потенциала.

Настоящая статья посвящена анализу одного из случаев, когда поле P однозначно восстанавливается по потенциалу U . Мы рассматриваем одномерный случай, когда речь идет о случайных процессах с дискретным временем и пространством значений R . Для других классов случайных процессов (а также—в более общей ситуации—и случайных полей) задача однозначного восстановления рассматривалась в [1]—[5], [6] и ряде других работ (см. в частности, библиографию в [6]).

Результаты настоящей статьи анонсированы в [7].

§ 2. Предварительные сведения и формулировка результатов

В этом параграфе мы сформулируем гиббсовский подход для случайных процессов с дискретным временем и вещественными значениями. Пространством реализаций случайного процесса является декартово

произведение $X = X_Z = R^Z$ — множество всевозможных отображений $x: Z \rightarrow R$, или — что эквивалентно — двусторонних последовательностей $\bar{x} = (x_i, i \in Z)$ вещественных чисел $x_i \in R, i \in Z$. На X рассматривается топология декартова произведения (тихоновская топология). Через γ обозначается σ -алгебра борелевских подмножеств X .

Аналогично, для любого $I \subset Z$ через X_I будем обозначать декартово произведение R^I , т. е., множество последовательностей $\bar{x} = (x_i, i \in I)$, где $x_i \in R, i \in I$, а через γ_I — борелевскую σ -алгебру подмножеств X_I . Для $x \in X, I \subset Z$ положим $\text{Card } x = \text{Card } I$, где $\text{Card } I$ обозначает мощность множества I .

При заданном $\bar{x} = (x_i, i \in I) \in X_I, I \subset Z$ обозначим через $\bar{x}_I$ сужение отображения $\bar{x}$ на множество $I' \subset I: \bar{x}_I = (x_i, i \in I') \in X_{I'}$. Отображение ограничения $\pi: \bar{x} \in X \rightarrow \bar{x}_I \in X_I$ порождает σ -алгебру γ_I' подмножеств X_I , изоморфную σ -алгебре $\gamma_I: \gamma_I = \{A \subseteq X_I: A = \pi_I^{-1} \bar{A}, \bar{A} \in \gamma_I\}$. Обозначим через $B(Z)$ совокупность всевозможных конечных подмножеств $I \subset Z$. Объединение $\gamma^{(0)} = \bigcup_{I \in B(Z)} \gamma_I'$ является алгеброй подмножеств X . Минимальная σ -алгебра, содержащая $\gamma^{(0)}$, совпадает с γ .

Пусть $X_{(0)} = \bigcup_{I \in B(Z)} X_I$. Через γ_0 обозначим σ -алгебру $\{A \subseteq X_{(0)}: A \cap X_I \in \gamma_I, \text{ для любого } I \in B(Z)\}$. Для каждого $I \in B(Z)$ обозначим через m_I лебегову меру на (X_I, γ_I) , являющуюся декартовым произведением $\text{Card } I$ экземпляров лебеговой меры m на R .

Отметим, что для любой пары множеств $I' \subset I \subset Z$ отображение ограничения $\pi_{I', I}: \bar{x} \in X_I \rightarrow \bar{x}_I \in X_{I'}$ порождает изоморфное вложение σ -алгебры $\gamma_{I'}$ в σ -алгебру γ_I , т. е. изоморфизм σ -алгебры $\gamma_{I'}$ и σ -подалгебры $\gamma_I' \subset \gamma_I$. Ввиду этого, всякая мера на γ_I индуцирует — если перейти к ее сужению на σ -подалгебру $\gamma_{I'}$, и затем воспользоваться указанным изоморфизмом — меру на $\gamma_{I'}$.

Если $I_1, I_2, \dots, I_k \subset Z$, где $I_m \cap I_n = \emptyset$ при $1 \leq m < n \leq k$, $\bar{x}_j = (x_i^{(j)}, i \in I_j) \in X_{I_j}, j = 1, \dots, k$, то через $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_k$ обозначим элемент $\bar{x} = (x_i, i \in I) \in X_I$, где $I = \bigcup_{j=1}^k I_j$ и $x_i = x_i^{(j)}$ при $i \in I_j, j = 1, \dots, k$.

На пространствах X и $X_{(0)}$ действует группа сдвигов (трансляций) $T = \{T^j, j \in Z\}$: если $\bar{x} = (x_i, i \in Z) \in X$ (соответственно, $x_i = (x_i, i \in I) \in X_{(0)}$, где $I \in B(Z)$), то $T^j \bar{x} = (x_i, i \in Z)$, где $x_i = x_{i-j}$ (соответственно, $T^j \bar{x}_I = (x_i, i \in I')$, где $I' = \{k \in Z: k-j \in I\}$ и $x_i = x_{i-j}$).

Определение 1. Случайным процессом называется произвольная вероятностная мера P на измеримом пространстве (X, γ) . Случайный процесс P называется трансляционно-инвариантным (стационарным), если для любых $A \in \gamma$ и $j \in Z$ $P(T^j A) = P(A)$.

Замечание 1. Если два случайных процесса P_1 и P_2 совпадают на алгебре $\gamma^{(0)}$, то $P_1 = P_2$.

Для заданного $I \subset Z$ обозначим через P^I ограничение случайного процесса P на σ -алгебру γ_I' , а через P_I — вероятностную меру на (X_I, γ_I) , индуцированную мерой P^I при изоморфизме $\gamma_I' \simeq \gamma_I$.

Нетрудно убедиться в том, что пространство X с тихоновской топологией является так называемым польским пространством (см., например, [8]). Поэтому, согласно теореме Дуба (см. [9], гл. 1, § 3, теорема 3), для произвольного случайного процесса P и любой борелевской σ -подалгебры $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ существует условное распределение $P(\cdot | \mathcal{X}')$, то есть, семейство вероятностных мер $\{[P(\cdot | \mathcal{X}')] (\bar{y}), \bar{y} \in X\}$, порожденное P .

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$Z_+ = Z \cap (0, \infty)$; $Z_- = Z \setminus Z_+$; $\overline{m, n} = \{m, m+1, \dots, n-1, n\}$, где $m, n \in Z$, $m < n$; $I \pm n = \{k \in Z: k \mp n \in I\}$, где $I \subseteq Z$, $n \in Z$. Через $[P^N(\cdot | \mathcal{X}^{Z_+})] (\bar{y})$ или $[P^{Z-N}(\cdot | \mathcal{X}^{Z_+})] (\bar{y})$, где $\bar{y} \in X$ будем обозначать сужение вероятностной меры $[P(\cdot | \mathcal{X}^{Z_+})] (\bar{y})$ на σ -алгебру $\mathcal{X}^{Z-N}$, через P^N — сужение P^{Z-N} и через Var — расстояние по вариации между вероятностными мерами

Определение 2. Случайный процесс называется P процессом с усиленным перемешиванием, если для P — почти всех $\bar{y} \in X$

$$\lim_{N \rightarrow -\infty} \text{Var} [[P^N(\cdot | \mathcal{X}^{Z_+})] (\bar{y}), P^N] = 0.$$

Пусть $I \in \mathcal{B}(Z)$. Вероятностную меру на $(\mathcal{X}_I, \mathcal{I}_I)$, индуцированную сужением $[P'(\cdot | \mathcal{X}^{Z \setminus I})] (\bar{y})$ вероятностной меры $[P(\cdot | \mathcal{X}^{Z \setminus I})] (\bar{y})$ на σ -алгебру $\mathcal{I}_I$, мы обозначим через $P_I(\cdot; \bar{y})$.

Перейдем к определению гиббсовского случайного процесса. Прежде всего, введем определения потенциала и связанных с ним понятий. Потенциалом будем называть произвольную измеримую функцию $U: X_{(0)} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Для заданных $\bar{x} \in X_I$ и $\bar{x}_I \in X_{I_I}$, где $I, I_I \in \mathcal{B}(Z)$, $j = 1, 2$, и $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ положим

$$h(\bar{x}) = \sum_{I' \subseteq I} U(\bar{x}_{I'}), \quad (2.1)$$

$$h(\bar{x}_1; \bar{x}_2) = h(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) - h(\bar{x}_2). \quad (2.2)$$

Определение 3. Будем говорить, что случайный процесс P является гиббсовским случайным процессом с потенциалом U , если при любом $I \in \mathcal{B}(Z)$

А) для $(m_1 \times P)$ — почти всех пар $(\bar{x}, \bar{y}) \in X_I \times X$ существует (конечный или равный ∞) предел

$$h(\bar{x}; \bar{y}_{Z \setminus I}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\bar{x}; \bar{y}_{\overline{-n, n-1}}); \quad (2.3)$$

Б) для P — почти всех $\bar{y} \in X$

$$0 < \Xi_I(\bar{y}) = \int_{X_I} m_1(d\bar{x}) \exp[-h(\bar{x}; \bar{y}_{Z \setminus I})] < \infty. \quad (2.4)$$

В) для P — почти всех $\bar{y} \in X$

$$P_I(A; \bar{y}) = Q_I(A; \bar{y}), \quad A \in \mathcal{I}_I, \quad (2.5)$$

где

$$Q_I(A; \bar{y}) = [\Xi_I(\bar{y})]^{-1} \int_A m_1(d\bar{x}) \exp[-h(\bar{x}; \bar{y}_{Z \setminus I})]. \quad (2.6)$$

Перейдем к формулировке условий, налагаемых нами на потенциал U . Потенциал U называется трансляционно-инвариантным, если для любых $x \in X_{(n)}$ и $j \in Z$ справедливо равенство $U(\bar{x}) = U(T^j \bar{x})$. Потенциал называется бинарным (парным), если $U(\bar{x}) = 0$ для любого $\bar{x} \in X$ с $\text{Card } \bar{x} \geq 3$. Трансляционно-инвариантный бинарный потенциал задается двумя измеримыми функциями: $V_1: \bar{x} \in R \rightarrow V_1(\bar{x}) \in R \cup \{\infty\}$ и $V_2: (x, x'; i) \in R \times R \times Z_+ \rightarrow V_2(x, x'; i) \in R \cup \{\infty\}$. А именно,

$$U(\bar{x}) = \begin{cases} V_1(x), & \text{если } \text{Card } \bar{x} = 1, \bar{x} = (x) \in X_{\{i\}} = R, \text{ где } i \in Z, \\ V_2(x_i, x_j; |i-j|), & \text{если } \text{Card } \bar{x} = 2, \bar{x} = (x_i, x_j) \in X_{\{i, j\}}, \text{ где } \{i, j\} \subset Z, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Сразу же оговорим, что всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что $m(\Omega) > 0$, где

$$\Omega = \{x \in R : V_1(x) < \infty\}, \quad (2.8)$$

и что функция V_2 симметрична относительно перестановки первых двух своих аргументов, т. е. $V_2(x, x'; i) = V_2(x', x; i)$ для любых $x, x' \in R, i \in Z_+$.

Перечислим условия, налагаемые на потенциал U .

[а] Потенциал U является трансляционно-инвариантным и бинарным и, следовательно, имеет вид (2.7).

Дальнейшие ограничения, налагаемые на U , формулируются в терминах функций V_1 и V_2 , фигурирующих в представлении (2.7).

$$[b] \quad \inf_{x \in R} V_1(x) = c_0 > -\infty,$$

$$[c] \quad \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} V_1(x) > 1, \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} V_1(x) > 1,$$

$$[d] \quad 0 \leq V_2(x, x'; i) \leq \Phi(i)|x||x'|, \quad \text{где } 0 \leq \Phi(i) < \infty, \quad i \in Z_+ \quad \text{и} \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Phi(i) \exp(\alpha i) = 0 \quad \text{для любого } \alpha > 0,$$

$$[e] \quad \text{Существуют } \delta, \delta' > 0, \text{ такие, что } 1) \quad V_1(x) \leq \delta \text{ при } |x| < \delta' \text{ и} \\ 2) \quad V_2(x, x'; i) \leq \delta \Phi(i) \text{ при } \min(|x|, |x'|) < \delta'.$$

Замечание 2. При выполнении условия [е] множество Ω , введенное в (2.8), заведомо содержит интервал $(-\delta', \delta)$.

Теорема 1. Пусть U удовлетворяет условиям [а]—[е]. Тогда существует единственный гиббсовский случайный процесс P с потенциалом U .

Теорема 2. Пусть U удовлетворяет условиям [а]—[е]. Случайный процесс P , о котором идет речь в теореме 1, является трансляционно-инвариантным процессом с усиленным перемешиванием.

Перейдем к формулировке результата об эргодических свойствах процесса P . Поскольку случайный процесс P является трансляционно-инвариантным, то четверка $(X, \mathcal{L}, P, T)$ задает динамическую систему в смысле эргодической теории (см. [11]—[12]).

Теорема 3. Пусть U удовлетворяет условиям [а]—[е]. Тогда динамическая система $(X, \mathcal{L}, P, T)$ является Б-системой.

§ 3. Некоторые предварительные оценки

Всюду в дальнейшем предполагается, что потенциал U удовлетворяет условиям $[a]$ — $[e]$. Величину $h(\bar{x}; \bar{y}_{Z \setminus I})$, введенную в (2.3), можно представить в виде

$$h(\bar{x}; \bar{y}_{Z \setminus I}) = h(\bar{x}) + h(\bar{x} | \bar{y}_{Z \setminus I}), \quad (3.1)$$

где $h(\bar{x})$, $\bar{x} = (x_i, i \in I) \in X_I$, введено в (2.1) и теперь имеет вид:

$$h(\bar{x}) = \sum_{i \in I} V_1(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in I, i \neq j} V_2(x_i, x_j; |i - j|), \quad (3.2)$$

а $h(\bar{x} | \bar{y}_{Z \setminus I})$ определено равенством

$$h(\bar{x} | \bar{y}_{Z \setminus I}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\bar{x} | \bar{y}_{-n, n \setminus I}), \quad (3.3)$$

в котором для заданных $\bar{x}_j = (x_i^{(j)}, i \in I_j) \in X_{I_j}$, где $I_j \in B(Z)$, $j=1, 2$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ обозначено

$$h(\bar{x}_1 | \bar{x}_2) = \sum_{i \in I_1, j \in I_2} V_2(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}; |i - j|). \quad (3.4)$$

Поскольку $V_2 \geq 0$, для любых $I \in B(Z)$ и $\bar{y} \in X$ величина $\Xi_I(\bar{y})$, определенная формулой (2.4), удовлетворяет оценкам

$$\Xi_I(\bar{y}) \leq e^{c_1 \text{Card } I}, \quad c_1 = \ln \int_{\mathbb{R}} m(dx) e^{-V_1(x)} < \infty. \quad (3.5)$$

Обозначим: $\Delta_I = \{\bar{x} = (x_i, i \in I) \in X_I : \max_{i \in I} |x_i| < \delta'\}$. Согласно условию $[e]$, для любых $I \in B(Z)$ и $\bar{y} \in X$ имеет место неравенство

$$\Xi_I(\bar{y}) \geq \int_{\Delta_I} m_I(d\bar{x}) e^{-h(\bar{x}; \bar{y}_{Z \setminus I})} > e^{-c_2 \text{Card } I}, \quad (3.6)$$

$$c_2 = \delta' + \ln 2\delta' + 3\delta \sum_{k \geq 1} \Phi(k).$$

Из условия $[d]$ следует, что $c_2 < \infty$.

Ввиду оценок (3.5), (3.6), формула (2.6) определяет при всех $I \in B(Z)$ и $\bar{y} \in X$ вероятностную меру $Q_I(A; \bar{y})$ на $\mathcal{Y}_I$. Доказательство существования и единственности случайного процесса P с потенциалом U опирается на детальное исследование свойств меры $Q_I(A; \bar{y})$, когда множество I , расширяясь, заполняет все Z .

Предложение 3.1. Пусть Φ — неотрицательная функция на множестве Z_+ , такая, что при любом $a > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n) e^{an} = 0$. Зафиксируем произвольное $d > 0$. Тогда существуют две монотонно и неограниченно возрастающие последовательности натуральных чисел $\{r_n, n \in Z_+\}$, $\{s_n, n \in Z_+\}$, и двойная последовательность натуральных чисел $\{m_j^{(n)}, j \in Z, n \in Z_+\}$, удовлетворяющая условию: $m_0^{(n)} \leq m_1^{(n)} < \dots, m_j^{(n)} = m_j^{(n-1)}$, при всех $j \in Z$ такие, что

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} < \infty, \quad \text{где } a_n^{(1)} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(m_k^{(n)}\right)^2},$$

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(2)} = 0, \text{ где } \alpha_n^{(2)} = 2[r_n(s_n + 1) + 1] e^{-\left(m_0^{(n)}\right)^2},$$

$$(в) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(3)} = 0, \text{ где } \alpha_n^{(3)} = 5\left(m_0^{(n)}\right)^2 \sum_{k > r_n} \Phi(k) + \\ + 12 m_0^{(n)} \sum_{k > r_n} \Phi(k) \sum_{j=1}^{k-r_n} m_j^{(n)} + 7 \sum_{k > r_n} \Phi(k) \sum_{j=1}^k m_j^{(n)} m_{j+k}^{(n)},$$

$$(г) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(4)}(d) = \infty, \text{ где } \alpha_n^{(4)}(d) = s_n e^{-5dr_n} - \\ - 2d(r_n + 1) - 4m_0^{(n)} \sum_{k > 1} \Phi(k) \sum_{j=1}^k m_j^{(n)}.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что утверждение предложения 3.1 верно, например, для следующих последовательностей: $r_n = [(5d + d')^{-1} \ln n]$, $d' > 0$ — фиксированное число,

$$s_n = n, m_j^{(n)} = m_0^{(n)} + [\ln |j|], m_0^{(n)} = [\ln n], n \in \mathbb{Z}_+, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

где $[x]$ — означает целую часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Перейдем к детальному изучению вероятностных мер $Q_1(\cdot; \bar{y})$, определенных по формуле (2.6). Выберем $d = c_1 + c_2$ (см. (3.5), (3.6)) и зафиксируем последовательности r_n , s_n и $m_j^{(n)}$, о которых говорится в предложении 3.1. При этом будем предполагать, что последовательность $m_j^{(n)}$ выбрана так, что при всех n и j (см. условие (в)):

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-m_j^{(n)}, m_j^{(n)}]} m(dx) e^{-V_1(x)} \leq 2 e^{-\left(m_j^{(n)}\right)^2}. \quad (3.7)$$

Выбор значения d будет обоснован в § 4 (см. замечание 3). Зафиксируем произвольное конечное множество $I_0 = \overline{k_1, k_2 - 1} \subset \mathbb{Z}$, где $k_1 < k_2$, положим $n_1 = n_1(n) = r_n(s_n + 1) + 1$ и обозначим через I_n множество $\overline{k_1 - n_1, k_2 + n_1 - 1}$. Для любого $I \in \mathcal{B}(\mathbb{Z})$ такого, что $I \supseteq I_n$, обозначим

$$n_2 = n_2(I) = \min \{j : j \in I\}, n_3 = n_3(I) = \max \{j : j \in I\} \text{ и} \\ I_n^- = \overline{n_2, k_1 - 1}, I_n^+ = \overline{k_2, n_3}.$$

Через $Q_{I, I_0}(\cdot; \bar{y})$ будем обозначать вероятностную меру на σ -алгебре $\mathcal{I}_{I_0}$, индуцированную мерой $Q_1(\cdot; \bar{y})$:

$$Q_{I, I_0}(A; \bar{y}) = [\mathbb{E}_I(\bar{y})]^{-1} \int_A m_{I_0}(d\bar{x}) \mathbb{E}_{I, I_0}(\bar{x}; \bar{y}), A \in \mathcal{I}_{I_0}, \quad (3.8)$$

где

$$\mathbb{E}_{I, I_0}(\bar{x}; \bar{y}) = \int_{\mathcal{I}_I \setminus I_0} m_{I \setminus I_0}(d\bar{z}) \exp[-h(\bar{z} \vee \bar{x}; \bar{y}_{\mathbb{Z} \setminus I})]. \quad (3.9)$$

Выберем произвольное $0 < \varepsilon < 1/2$. В силу предложения 3.1, можно выбрать $n_0 = n_0(\varepsilon) > k_2 - k_1$ так, чтобы при всех $n \geq n_0$ выполнялись следующие неравенства:

$$e^{c_1} \alpha_n^{(1)} < \varepsilon/102, e^{c_2} \alpha_n^{(2)} < \varepsilon/102; \quad (3.10)$$

$$e^{\frac{a_n^{(3)}}{e}} - 1 < \varepsilon/6, \quad e^{-\frac{a_n^{(4)}(d)}{e}} < \varepsilon/68. \quad (3.11)$$

Во всех последующих рассуждениях предполагается, что $n > n_0$ так, что выполнены неравенства (3.10) и (3.11).

Обозначим $C_l^{(n)} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq m_l^{(n)}\}$, $\bar{C}_l^{(n)} = \mathbb{R} \setminus C_l^{(n)}$ и положим:

$X^{(n)}(i) = \pi_{i,i}^{-1} C_i^{(n)} \subset X$, $\bar{X}^{(n)}(i) = \pi_{i,i}^{-1} \bar{C}_i^{(n)} \subset X$, $i \in Z$. Положим далее:

$$X_-^{(n)} = \bigcap_{k=-1}^{\infty} X^{(n)}(-k), \quad X_+^{(n)} = \bigcap_{k=-1}^{\infty} X^{(n)}(k) \quad \text{и} \quad \bar{X}_-^{(n)} = X \setminus X_-^{(n)}, \quad \bar{X}_+^{(n)} = X \setminus X_+^{(n)}.$$

Первым шагом доказательства теоремы 1 является следующее утверждение, которое очевидным образом следует из неравенств (3.6), (3.7) и (3.10).

Лемма 3.2. Пусть P — произвольный гиббсовский процесс с потенциалом U , который удовлетворяет условиям $[a] - [e]$. Тогда

$$P(\bar{X}_-^{(n)}) < \varepsilon/102, \quad P(\bar{X}_+^{(n)}) < \varepsilon/102.$$

Для любых $A \in \mathcal{I}_{I_0}$ и $I \in \mathcal{B}(Z)$ такого, что $I \supseteq I_n$, положим

$$A_n(I_0) = A \cap \pi_{k_1, k_2-1}^{-1} \left(\bigcap_{k=k_1}^{k_2-1} T^k X^{(n)}(0) \right), \quad (3.12)$$

$$S^{(n)}(I_n^-) = \pi_{I_n^-}^{-1} \left\{ \left(\bigcap_{k=k_1-n_1}^{k_1-1} T^k X^{(n)}(0) \right) \cap (T^{k_1-n_1} X_-^{(n)}) \right\}, \quad (3.13)$$

$$S^{(n)}(I_n^+) = \pi_{I_n^+}^{-1} \left\{ \left(\bigcap_{k=k_1}^{k_1+n_1-1} T^k X^{(n)}(0) \right) \cap (T^{k_1+n_1-1} X_+^{(n)}) \right\}. \quad (3.14)$$

В дальнейшем, для упрощения записи, условимся множество $(X_{I_n})_n(I_0)$ обозначать через $X_{I_n, n}$, а в интегралах вида (3.8), (3.9) опускать индексы $I_0, I_n^\pm$ и т. д. в обозначении дифференциала меры.

Пусть $I \in \mathcal{B}(Z)$ и $I \supseteq I_n$. Введем следующие величины:

$$\begin{aligned} \Xi_{I_n, n}^{(1)}(\bar{y}) &= \int_{X_{I_n, n}} m(d\bar{x}) \int_{S^{(n)}(I_n^-)} m(d\bar{z}_-) \times \\ &\times \int_{S^{(n)}(I_n^+)} m(d\bar{z}_+) e^{-h(\bar{x}V\bar{z}_-V\bar{z}_+; \bar{y}Z \setminus I)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\Xi_{I_n, I_0}^{(1)}(\bar{x}; \bar{y}) = \int_{S^{(n)}(I_n^-)} m(d\bar{z}_-) \int_{S^{(n)}(I_n^+)} m(d\bar{z}_+) e^{-h(\bar{x}V\bar{z}_-V\bar{z}_+; \bar{y}Z \setminus I)}, \quad (3.16)$$

$$Q_{I_n, I_0}^{(1)}(A; \bar{y}) = [\Xi_{I_n, n}^{(1)}(\bar{y})]^{-1} \int_{A_n(I_0)} m(d\bar{x}) \Xi_{I_n, I_0}^{(1)}(\bar{x}; \bar{y}), \quad A \in \mathcal{I}_{I_0}, \quad (3.17)$$

и, наконец,

$$P_n^{(1)}(A) = \int_{Y(n)} P(d\bar{y}) Q_{I_n, I_0}^{(1)}(\pi_{I_n} A; \bar{y}), \quad A \in \mathcal{I}_{I_0}, \quad (3.18)$$

где

$$Y(n) = T^{k_1-n_1} \left(\bigcap_{k=k_1-n_1-n_2+1}^{\infty} X^{(n)}(-k) \right) \cap T^{k_2+n_1-1} \left(\bigcap_{k=n_2-k_2-n_1+2}^{\infty} X^{(n)}(k) \right). \quad (3.19)$$

Предложение 3.3. Для любых $\bar{y} \in X$ и $I \in B(Z)$ таких, что $I \supseteq I_n$, имеет место оценка

$$0 \leq [\Xi_I^{(1)}(\bar{y})]^{-1} \Xi_I(\bar{y}) - 1 \leq 5\varepsilon/51.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение $1 - [\Xi_I(\bar{y})]^{-1} \Xi_I^{(1)}(\bar{y})$. Нетрудно видеть, что оно представляется в виде

$$\begin{aligned} & [\Xi_I(\bar{y})]^{-1} \left\{ \int_{X_{I_n} \setminus X_{I_0, n}} m(d\bar{x}) \int_{X_{I_n}^-} m(d\bar{z}_-) \int_{X_{I_n}^+} m(d\bar{z}_+) + \int_{X_{I_0, n}} m(d\bar{x}) \times \right. \\ & \times \int_{X_{I_n}^- \setminus S(n)(I_n^-)} m(d\bar{z}_-) \int_{X_{I_n}^+} m(d\bar{z}_+) + \int_{X_{I_0, n}} m(d\bar{x}) \int_{S(n)(I_n^-)} m(d\bar{z}_-) \times \\ & \times \left. \int_{X_{I_n}^+ \setminus S(n)(I_n^+)} m(d\bar{z}_+) \right\} \left(\exp - h(\bar{x} \vee \bar{z}_- \vee \bar{z}_+; \bar{y}_{Z \setminus I}) \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Все три слагаемых в правой части (3.20) оцениваются при помощи аналогичных рассуждений. Например, второе слагаемое не превосходит

$$2e^{c_1} \left(n_1 e^{-\frac{(m_0^{(n)})^2}{2}} + \sum_{i=1}^n e^{-\frac{(m_i^{(n)})^2}{2}} \right) = e^{c_1} (a_n^{(1)} + a_n^{(2)}). \quad (3.21)$$

Той же величиной (3.21) можно оценить сверху третье слагаемое в правой части (3.20). Что касается первого слагаемого, то оно не превосходит величины $e^{c_1} a_n^{(2)}$. Таким образом, утверждение предложения 3.3 следует из оценки (3.10) и того факта, что $0 < \varepsilon < 1/2$.

Лемма 3.4. а) Для любых $A \in \mathcal{I}_n$, $\bar{y} \in X$ и $I \in B(Z)$ такого, что $I \supseteq I_n$

$$|Q_{I, I_n}(A; \bar{y}) - Q_{I, I_n}^{(1)}(A; \bar{y})| \leq \varepsilon/6.$$

б) Пусть P — гиббсовский процесс с потенциалом U . Тогда для любых $A \in \mathcal{I}_n$ и $I \in B(Z)$ такого, что $I \supseteq I_n$

$$|P(A) - P_n^{(1)}(A)| \leq \varepsilon/6.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} |Q_{I, I_n}(A; \bar{y}) - Q_{I, I_n}^{(1)}(A; \bar{y})| & \leq |Q_{I, I_n}(A; \bar{y}) - Q_{I, I_n}(A_n(I_0); \bar{y})| + \\ & + |Q_{I, I_n}(A_n(I_0); \bar{y}) - Q_{I, I_n}^{(1)}(A; \bar{y})|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (3.22) оценивается так же, как и первое слагаемое в правой части выражения (3.20), и таким образом, не превосходит $e^{c_1} a_n^{(2)}$. Далее, в силу предложения 3.3, получаем

$$\begin{aligned} |Q_{I, I_n}(A_n(I_0); \bar{y}) - Q_{I, I_n}^{(1)}(A; \bar{y})| & = [\Xi_I(\bar{y})]^{-1} \int_{A_n(I_0)} m(d\bar{x}) [[\Xi_{I, I_n}(\bar{x}; \bar{y}) - \\ & - \Xi_{I, I_n}^{(1)}(\bar{x}; \bar{y})] - \Xi_{I, I_n}^{(1)}(\bar{x}; \bar{y}) [(\Xi_I^{(1)}(\bar{y}))^{-1} \Xi_I(\bar{y}) - 1]] \leq \\ & \leq \frac{5\varepsilon}{51} + [\Xi_I(\bar{y})]^{-1} \left| \int_{A_n(I_0)} m(d\bar{x}) [\Xi_{I, I_n}(\bar{x}; \bar{y}) - \Xi_{I, I_n}^{(1)}(\bar{x}; \bar{y})] \right|. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Вновь используя рассуждения, проведенные при доказательстве предложения 3.3, нетрудно увидеть, что второе слагаемое в правой части (3.23) не превосходит $2e^{c_1}(\alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)})$. Таким образом, в силу (3.10)

$$|Q_{I, I_0}(A; \bar{y}) - Q_{I, I_0}^{(1)}(A; \bar{y})| \leq \frac{5\varepsilon}{51} + 2e^{c_1} \alpha_n^{(1)} + 3e^{c_1} \alpha_n^{(2)} < \frac{5\varepsilon}{34}. \quad (3.24)$$

Утверждение б) следует из леммы 3.2 и оценки (3.24). Лемма доказана.

Лемма 3.4 представляет собой второй шаг в доказательстве теоремы 1. Рассмотрим бинарный трансляционно-инвариантный потенциал U_n , который задается двумя измеримыми функциями: $V_{1, n}$, $V_{2, n}$ (см. (2.7)), где $V_{1, n} \equiv V_1$, а

$$V_{2, n}(x, x'; i) = \begin{cases} V_2(x, x'; i), & \text{если } i \leq r_n, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введем следующие величины (h_n определяется по формулам (2.1), (2.2) с заменой потенциала U на U_n):

$$\begin{aligned} \Xi_{I, I_0}^{(2)}(\bar{y}) &= \int_{X_{I_0, n}} m(d\bar{x}) \int_{S^{(n)}(I_n^-)} m(d\bar{z}_-) \int_{S^{(n)}(I_n^+)} m(d\bar{z}_+) e^{-h(\bar{x})} \times \\ &\times \exp[-h_n(\bar{x}|\bar{z}_- \vee \bar{z}_+) - h_n(\bar{z}_- \vee \bar{z}_+; \bar{y}_{Z \setminus I})], \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{I, I_0}^{(2)}(\bar{x}; \bar{y}) &= \int_{S^{(n)}(I_n^-)} m(d\bar{z}_-) \int_{S^{(n)}(I_n^+)} m(d\bar{z}_+) e^{-h(\bar{x})} \times \\ &\times \exp[-h_n(\bar{x}|\bar{z}_- \vee \bar{z}_+) - h_n(\bar{z}_- \vee \bar{z}_+; \bar{y}_{Z \setminus I})], \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$Q_{I, I_0}^{(2)}(A; \bar{y}) = [\Xi_{I, I_0}^{(2)}(\bar{y})]^{-1} \int_{A_n(I_0)} m(d\bar{x}) \Xi_{I, I_0}^{(2)}(\bar{x}; \bar{y}), \quad A \in \mathcal{I}_{I_0} \quad (3.27)$$

и, наконец,

$$P_n^{(2)}(A) = \int_{Y(n)} P(d\bar{y}) Q_{I, I_0}^{(2)}(\pi_{I_0} A; \bar{y}), \quad A \in \mathcal{I}_{I_0}. \quad (3.28)$$

Лемма 3.5. а) Для любых $A \in \mathcal{I}_{I_0}$, $\bar{y} \in Y(n)$ и $I \in \mathcal{B}(Z)$ такого, что $I \supseteq I_n$

$$|Q_{I, I_0}^{(1)}(A; \bar{y}) - Q_{I, I_0}^{(2)}(A; \bar{y})| < \varepsilon/6.$$

б) Пусть P — гиббсовский случайный процесс с потенциалом U . Тогда для любых $A \in \mathcal{I}_{I_0}$ и $I \in \mathcal{B}(Z)$ такого, что $I \supseteq I_n$,

$$|P_n^{(1)}(A) - P_n^{(2)}(A)| < \varepsilon/6.$$

Доказательство. В силу условия $[d]$ и выбора последовательностей r_n и s_n нетрудно подсчитать, что для любых

$$\bar{x} \in X_{I_0, n}, \bar{z}_- \in S^{(n)}(I_n^-), \bar{z}_+ \in S^{(n)}(I_n^+) \text{ и } \bar{y} \in Y(n)$$

$$1 \leq \frac{\exp \{ -h(\bar{x}) - h_n(x|\bar{z}_- \vee \bar{z}_+) - h_n(\bar{z}_- \vee \bar{z}_+; \bar{y}_{z \setminus I}) \}}{\exp \{ -h(\bar{x} \vee \bar{z}_- \vee \bar{z}_+; \bar{y}_{z \setminus I}) \}} \leq e^{a_n^{(3)}}.$$

Интегрируя $m(d\bar{x})$, $m(d\bar{z}_-)$ и $m(d\bar{z}_+)$, находим, что

$$1 \leq \frac{\Xi_I^{(2)}(\bar{y})}{\Xi_I^{(1)}(\bar{y})}, \frac{\Xi_{I, I_n}^{(2)}(\bar{x}; \bar{y})}{\Xi_{I, I_n}^{(1)}(\bar{x}; \bar{y})} \leq e^{a_n^{(3)}}.$$

Отсюда

$$|Q_{I, I_n}^{(1)}(A; \bar{y}) - Q_{I, I_n}^{(2)}(A; \bar{y})| \leq \int_{A_n(I_n)} m(d\bar{x}) [\Xi_I^{(2)}(\bar{y})]^{-1} \Xi_{I, I_n}^{(1)}(\bar{x}; \bar{y}) \times \\ \times \left| \frac{\Xi_{I, I_n}^{(2)}(\bar{x}; \bar{y})}{\Xi_{I, I_n}^{(1)}(\bar{x}; \bar{y})} - \frac{\Xi_I^{(2)}(\bar{y})}{\Xi_I^{(1)}(\bar{y})} \right| \leq e^{a_n^{(3)}} - 1.$$

Утверждение а) следует теперь из условия (3.11).

Утверждение б) вытекает из оценки

$$|P_n^{(1)}(A) - P_n^{(2)}(A)| \leq \int_{Y(n)} P(d\bar{y}) |Q_{I, I_n}^{(1)}(\pi_{I_n} A; \bar{y}) - Q_{I, I_n}^{(2)}(\pi_{I_n} A; \bar{y})|$$

и уже доказанного утверждения а). Лемма доказана.

§ 4. Завершение доказательства теоремы 1

Прежде всего, сделаем следующее замечание. Во всех интегралах $\int_B m(dx) \exp \{ -V_1(x) \} \dots$ область интегрирования $B \subseteq \mathbb{R}$ можно заменить на $B \cap \Omega$, где множество Ω введено в (2.8). Введем следующие обозначения: $J_n = \overline{-r_n, r_n - 1}$, $S^{(n)}(J_n) = \Omega^{J_n} \cap \pi_{J_n} \left(\bigcap_{k=-r_n}^{r_n-1} T^k X^{(n)}(0) \right)$, $L_n^2 = L^2(S^{(n)}(J_n), m_{J_n}(\cdot))$. Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать скалярное произведение в пространстве L_n^2 . Рассмотрим в L_n^2 интегральный оператор K_n , который задается следующим образом:

$$(K_n F)(\bar{x}) = \int_{S^{(n)}(J_n)} m(d\bar{z}) \rho_n(\bar{x}, \bar{z}) (F(\bar{z})), F \in L_n^2,$$

где ядро ρ_n имеет вид

$$\rho_n(\bar{x}, \bar{z}) = \exp \{ -h(\bar{x}_-) - h(\bar{x}_+) - h_n(T^{-r_n} \bar{x}_- | \bar{z}) - h_n(T^{r_n} \bar{x}_+ | \bar{z}) \}$$

и где, в свою очередь, $\bar{x}_- = \overline{x_{-r_n}, -1}$, $\bar{x}_+ = \overline{x_0, r_n - 1}$; $\bar{x}, \bar{z} \in S^{(n)}(J_n)$.

Предложение 4.1. Оператор K_n (соответственно, сопряженный оператор K_n^*) имеет единственный (с точностью до скалярного множителя) положительный собственный вектор $\Psi_n \in L_n^2$ (соответственно $\Psi_n^* \in L_n^2$). Соответствующее собственное значение

ние λ_n положительно, невырождено и превосходит модули всех остальных собственных значений оператора K_n (соответственно, K_n^*) в L_n^2 .

Доказательство следует из одной теоремы Крейна-Рутмана (см. [13], стр. 58, утверждение β' и стр. 83, замечание в сноске).

Пусть

$$Y_1(n) = \pi_{n_1, k_1 - n_1 - 1} (T^{k_1 - n_1} X_-^{(n)}) \text{ и } Y_2(n) = \pi_{k_2 + n_1, n_2} (T^{k_2 + n_1 - 1} X_+^{(n)}).$$

Всюду в дальнейшем мы будем, для краткости, использовать обозначения $t_{1,n} = k_1 - n_1 + r_n + 1$ и $t_{2,n} = k_2 + n_1 - r_n - 1$. Рассмотрим следующие функции:

$$\begin{aligned} G_n(\bar{x}; \bar{y}) = & \int_{T^{k_1 - n_1 - 1} C_0^{(n)}} m(dz') \int_{T^{k_2 + n_1 - 1} C_0^{(n)}} m(dz'') \int_{Y_1(n)} m(d\bar{u}) \times \\ & \times \int_{Y_2(n)} m(d\bar{v}) e^{-V_1(z') - V_2(z'')} \exp[-h_n(T^{t_{1,n}} x_- | z') - h_n(T^{t_{2,n}} \bar{x}_+ | z'') - \\ & - h_n(\bar{u}; z' \vee T^{t_{1,n}} \bar{x}_-)] \exp[-h_n(\bar{v}; z'' \vee T^{t_{2,n}} \bar{x}_+)] - \\ & - h_n(z' \vee T^{t_{1,n}} \bar{x}_- \vee \bar{u} | \bar{y}_{n_1 + 1, n_2 - 1})] \exp[-h_n(z'' \vee T^{t_{2,n}} \bar{x}_+ \vee \bar{v} | \bar{y}_{n_2 + 1, n_1 - 1})], \\ & \bar{x} \in S^{(n)}(J_n), \bar{y} \in Y(n) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} F_n(\bar{x}; A_n(I_0)) = & \int_{A_n(I_0)} m(d\bar{z}) \exp[-h(\bar{x}_-) - h(\bar{x}_+) - h(\bar{z})] \times \\ & \times \exp[-h_n(T^{t_{1,n}} \bar{x}_- \vee T^{t_{2,n}} \bar{x}_+ | \bar{z})], \bar{x} \in S^{(n)}(J_n), A \in \mathcal{I}_{I_0}. \end{aligned}$$

Очевидно, что при любых $A \in \mathcal{I}_{I_0}$ и $\bar{y} \in Y(n)$ функции $G_n(\cdot; \bar{y})$ и $F_n(\cdot; A_n(I_0)) \in L_n^2$.

Предложение 4.2. При любых $A \in \mathcal{I}_{I_0}$, $\bar{y} \in Y(n)$ и $I \in \mathcal{B}(Z)$ такою, что $I \supseteq I_n$, справедливо следующее представление:

$$Q_{I, I_0}^{(2)}(A; \bar{y}) = \frac{\langle K_n^{I_n} F_n(\cdot; A_n(I_0)), G_n(\cdot; \bar{y}) \rangle}{\langle K_n^{I_n} F_n(\cdot; X_{I_n, n}), G_n(\cdot; \bar{y}) \rangle}. \quad (4.1)$$

Доказательство мы опускаем. Оно проводится при помощи непосредственной (хотя и несколько громоздкой) выкладки, основанной на определениях величин, входящих в выражение (4.1).

В дальнейшем предполагается, что векторы Ψ_n и Ψ_n^* нормированы так, что $\langle \Psi_n, \Psi_n^* \rangle = 1$. Обозначим

$$\tilde{K}_n = \lambda_n^{-1} K_n, \bar{G}_n(\bar{x}; \bar{y}) = \langle G_n(\cdot; \bar{y}), \Psi_n \rangle^{-1} G_n(\bar{x}; \bar{y})$$

и если $m(A_n(I_0)) > 0$, то

$$\bar{F}_n(\bar{x}; A_n(I_0)) = \langle F_n(\cdot; A_n(I_0)), \Psi_n^* \rangle^{-1} F_n(\bar{x}; A_n(I_0)).$$

Тогда выражение (4.1) перепишется в следующем виде:

$$Q_{I_n, I_n}^{(2)}(A; \bar{y}) = \begin{cases} \tilde{P}_n(A) \frac{1 + \langle \tilde{K}_n^{s_n} \tilde{F}_n(\cdot; A_n(I_0)) - \Psi_n, \tilde{G}_n(\cdot; \bar{y}) \rangle}{1 + \langle \tilde{K}_n^{s_n} \tilde{F}_n(\cdot; X_{I_n, n}) - \Psi_n, \tilde{G}_n(\cdot; \bar{y}) \rangle}, & \text{если} \\ m(A_n(I_0)) > 0; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4.2)$$

где

$$\tilde{P}_n(A) = \langle f_n; (X_{I_n, n}), \Psi_n^* \rangle^{-1} \langle F_n(\cdot; A_n(I_0)), \Psi_n^* \rangle, \quad A \in \mathcal{X}_{I_n}. \quad (4.3)$$

Предложение 4.3. Для любых $\bar{x} \in S^{(n)}(J_n)$, $\bar{y} \in Y(n)$ и $I \in \mathcal{B}(Z)$ такого, что $I \supseteq I_n$, справедлива оценка

$$\tilde{G}_n(\bar{x}; \bar{y}) \leq \Psi_n^*(\bar{x}) \exp [2(c_1 + c_2)(r_n + 1) + 4m_0^{(n)} \sum_{k \geq 1} \Phi(k) \sum_{j=1}^k m_j^{(n)}].$$

Доказательство. Используя условие $V_z \geq 0$ и $[d]$, можно показать, что

$$\frac{\tilde{G}_n(\bar{x}; \bar{y})}{\Psi_n^*(\bar{x})} \leq \frac{\exp \left[2(c_1 + c_2) + 4m_0^{(n)} \sum_{k \geq 1} \Phi(k) \sum_{j=1}^k m_j^{(n)} \right]}{\Psi_n^*(\bar{x}) \int_{S^{(n)}(J_n)} m(d\bar{z}) \Psi_n(\bar{z})}. \quad (4.4)$$

Представив знаменатель из правой части последнего неравенства в виде

$$\int_{S^{(n)}(J_n)} m(d\bar{z}) \Psi_n(\bar{z}) \Psi_n^*(\bar{z}) [(\Psi_n^*(\bar{z}))^{-1} \Psi_n^*(\bar{x})],$$

оценим снизу отношение $(\Psi_n^*(\bar{z}))^{-1} \Psi_n^*(\bar{x})$. Справедлива оценка

$$(\Psi_n^*(\bar{z}))^{-1} \Psi_n^*(\bar{x}) > e^{-2(c_1 + c_2)r_n}. \quad (4.5)$$

В силу того, что $\langle \Psi_n, \Psi_n^* \rangle = 1$, знаменатель в правой части (4.4) оценивается снизу величиной $\exp[-2(c_1 + c_2)r_n]$. Предложение 4.3 доказано.

Согласно предложению 4.3, имеет место неравенство:

$$|\langle \tilde{K}_n^{s_n} \tilde{F}_n(\cdot; A_n(I_0)) - \Psi_n, \tilde{G}_n(\cdot; \bar{y}) \rangle| \leq |\langle \tilde{K}_n^{s_n} \tilde{F}_n(\cdot; A_n(I_0)) - \Psi_n, \Psi_n^* \rangle|, \quad (4.6)$$

$$\Psi_n^* \geq \exp \left[2(c_1 + c_2)(r_n + 1) + 4m_0^{(n)} \sum_{k \geq 1} \Phi(k) \sum_{j=1}^k m_j^{(n)} \right].$$

Предложение 4.4. Для любого $A \in \mathcal{X}_{I_n}$ такого, что $m(A_n(I_0)) > 0$, имеет место оценка

$$\langle \tilde{K}_n^{s_n} \tilde{F}_n(\cdot; A_n(I_0)) - \Psi_n, \Psi_n^* \rangle \leq 2 \left[1 - \frac{1}{2} e^{-5r_n(c_1 + c_2)} \right]^{s_n}.$$

Доказательство. Основу доказательства составляет следующее неравенство:

$$\langle |\tilde{K}_n^{j_n} \tilde{F}_n - \Psi_n|, \Psi_n^* \rangle \leq \left(1 - \frac{1}{2} e^{-5(c_1 + c_2) r_n}\right) \langle |\tilde{K}^{j_n-1} \tilde{F}_n - \Psi_n|, \Psi_n^* \rangle. \quad (4.7)$$

Оно устанавливается при помощи стандартных (хотя и довольно громоздких) рассуждений (см. [15], доказательство леммы 3.4).

Для доказательства предложения 4.4 достаточно применить s^n раз оценку (4.7) и учесть очевидное неравенство $\langle |\tilde{F}_n - \Psi_n|, \Psi_n^* \rangle \leq 2$.

Лемма 4.5. а) Для любых $A \in \mathcal{X}_{I_0}$, $\bar{y} \in Y(n)$ и $I \in B(Z)$ такого, что $I \supseteq I_n$

$$|Q_{I, I_0}^{(2)}(A; \bar{y}) - \tilde{P}_n(A)| < \varepsilon/6.$$

б) Пусть P — иббсовский процесс с потенциалом U . Тогда для любого $A \in \mathcal{X}_{I_0}$ и $I \in B(Z)$ такого, что $I \supseteq I_n$

$$|P_n^{(2)}(A) - \tilde{P}_n(\pi_{I_0} A)| < \varepsilon/6.$$

Доказательство. Так как случай $m(A_n(I_0)) = 0$ тривиален, то мы предположим, что $m(A_n(I_0)) > 0$. Положим $d = c_1 + c_2$. Тогда из предложения 4.4 и оценок (4.6) и (3.11) следует, что

$$|\langle \tilde{K}_n^{j_n} \tilde{F}_n(\cdot; A_n(I_0)) - \Psi_n, \bar{G}_n(\cdot; \bar{y}) \rangle| \leq 2e^{-a_n^{(1)}(d)} < \varepsilon/34. \quad (4.8)$$

Из (4.2), (4.8) и в силу того, что $0 < \varepsilon < 1/2$, получаем

$$|Q_{I, I_0}^{(2)}(A; \bar{y}) - P_n(A)| < 5\varepsilon/34. \quad (4.9)$$

Утверждение б) следует из (4.8) и леммы 3.2. Лемма 4.5 доказана.

Замечание 3. Выбор $d = c_1 + c_2$ продиктован оценкой (4.7).

Завершим теперь доказательство теоремы 1. Согласно утверждениям а) лемм 3.4, 3.5 и 4.5, для любых $\bar{y} \in Y(n)$, $A \in \mathcal{X}_{I_0}$ и $I \in B(Z)$ такого, что $I \supseteq I_n$, имеет место оценка $|Q_{I, I_0}(A; \bar{y}) - \tilde{P}_n(A)| < \varepsilon/2$. Перепишем последнее неравенство в виде

$$\tilde{P}_n(A) - \varepsilon/2 < Q_{I, I_0}(A; \bar{y}) < \tilde{P}_n(A) + \varepsilon/2. \quad (4.10)$$

На множестве $B(Z)$ рассмотрим естественное отношение порядка, определяемое по теоретико-множественному включению. Множество $B(Z)$ с таким отношением порядка является направленным. Через $\lim_{I \uparrow Z}$

$\overline{\lim}_{I \uparrow Z}$ и $\underline{\lim}_{I \uparrow Z}$ будем обозначать, соответственно, предел, верхний и нижний пределы по этому направленному множеству. Из (4.10) получаем, что при любых $A \in \mathcal{X}_{I_0}$ и $\bar{y} \in Y(n)$

$$\overline{\lim}_{I \uparrow Z} Q_{I, I_0}(A; \bar{y}) - \lim_{I \uparrow Z} Q_{I, I_0}(A; \bar{y}) < \varepsilon. \quad (4.11)$$

Обозначим $Y^* = \bigcap_{n \geq 1} Y(n)$. Нетрудно убедиться в том, что $Y^* \neq \emptyset$.

Пусть $\bar{y} \in Y^*$. Тогда $\varepsilon > 0$ в (4.11) может быть взято произвольным, что означает существование $\lim_{I \uparrow Z} Q_{I, I_0}(A; \bar{y})$. Этот предел мы обозначим через $O_{I_0}(A; \bar{y})$. Для любых $A \in \mathcal{Z}_{I_0}$, $\bar{y} \in Y^*$ и $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n имеет место оценка $|O_{I_n}(A; \bar{y}) - \bar{P}_n(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, в силу утверждений б) лемм 3.4, 3.5 и 4.5, для любого $I \in \mathcal{B}(Z)$ такого, что $I \supseteq I_n$, имеем $|P(A) - \bar{P}_n(\pi_{I_n} A)| < \varepsilon/2$, $A \in \mathcal{Z}_{I_0}$. Окончательно получаем $|P(A) - O_{I_0}(\pi_{I_0} A; \bar{y})| < \varepsilon$. В силу произвольности ε , отсюда следует единственность гиббсовского случайного процесса с потенциалом U . Теорема 1 доказана.

§ 5. „Условные“ гиббсовские процессы.

Доказательство теорем 2 и 3

Введем множество $\hat{X} = X \setminus \bigcap_k \bigcup_{n \geq k} \bar{X}_+^{(n)} = \bigcup_k \bigcap_{n \geq k} X_+^{(n)} \in \mathcal{Z}$. Рассмотрим гиббсовский случайный процесс P с потенциалом U . Отметим, что $P(\hat{X}) = 1$.

Определение 4. Случайным процессом над Z_- назовем произвольную вероятностную меру на измеримом пространстве $(X, \mathcal{X}^{Z_-})$.

Как и ранее, для произвольной вероятностной меры P_- на $(X, \mathcal{X}^{Z_-})$ и любой борелевской $\mathcal{Z}$ -алгебры $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{Z}^{Z_-}$ существует условное распределение $P_-(\cdot | \mathcal{Z}') = \{[P_-(\cdot | \mathcal{Z}')] (\bar{y})\}$. Пусть $I \in \mathcal{B}(Z_-) \setminus \mathcal{B}(Z_-)$ — совокупность конечных подмножеств Z_- . Сужение вероятностной меры $[P_-(\cdot | \mathcal{Z}^{Z_-} \setminus \mathcal{Z}^I)] (\bar{y})$ на $\mathcal{Z}$ -алгебру $\mathcal{Z}^I$ индуцирует вероятностную меру на $(X_I, \mathcal{Z}_I)$. Эту индуцированную меру, по аналогии с предыдущим, обозначим через $P_{-, I}(\cdot; \bar{y})$.

Определение 5. Пусть $\bar{y} \in X$. Случайный процесс P_- над Z_- называется условным гиббсовским случайным процессом над Z_- с потенциалом U при условии $\bar{y}_{Z_+}$, если при любом $I \in \mathcal{B}(Z_-)$ для P_- — почти всех $\bar{z} \in X$

$$P_{-, I}(A; \bar{z}) = Q_I(A; \bar{z}_{Z_-} \vee \bar{y}_{Z_+}), \quad A \in \mathcal{Z}_I,$$

где величина $Q_I(A; \cdot)$ введена в (2.6).

Существенную роль в ходе доказательства теорем 2 и 3 играет следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть U удовлетворяет условиям $[a] - [e]$. Тогда для любого $\bar{y} \in X$ существует единственный условный гиббсовский случайный процесс $P_- = P_-(\cdot; \bar{y})$ над Z_- с потенциалом U при условии $\bar{y}_{Z_+}$. Если P — гиббсовский случайный процесс с тем же потенциалом U , то для P — почти всех $\bar{y} \in X$

$$P_-(\cdot; \bar{y}) = [P(\cdot | \chi^Z_+)](\bar{y}). \quad (5.1)$$

Доказательство теоремы 4 мы опускаем. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Перейдем к доказательству теорем 2 и 3. Из рассуждений §§ 3 и 4 следует

Предложение 5.1. Пусть P — гиббсовский процесс с потенциалом U . Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{Z}_+$ такое, что для любых $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1 < k_2$, любого $I \in \mathcal{B}(\mathbb{Z})$ такого, что $I \supseteq \overline{k_1 - n_1, k_2 + n_1}$ и любых $A \in \chi^{\overline{k_1, k_2}}$ и $\bar{y} \in Y(n)$

$$|Q_I, \overline{k_1, k_2}(\pi_{\overline{k_1, k_2}} A; \bar{y}) - P(A)| < \varepsilon/3.$$

В свою очередь, из предложения 5.1 выводится следующее утверждение.

Лемма 5.2. Пусть P (соответственно, $P_-(\cdot; \bar{y}), \bar{y} \in \hat{X}$) — гиббсовский случайный процесс с потенциалом U (соответственно, условный гиббсовский случайный процесс над $\mathbb{Z}_-$ с потенциалом U при условии $\bar{y}_{\mathbb{Z}_+}$). Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{Z}_+$ такое, что для любого $\bar{y} \in \hat{X} \cap X_+^{(n)}$

$$\sup_{m > n_1} \text{Var} [P_{-m, -n_1}^-(\cdot; \bar{y}), P_{-m, -n_1}^-] < \varepsilon. \quad (5.2)$$

Доказательство теоремы 2. Трансляционная инвариантность гиббсовского процесса легко вытекает из следующего равенства (см. § 4):

$$P(A) = O_{I_0}(\pi_{I_0} A; \bar{y}), \quad A \in \chi^{I_0}, \quad I_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{Z}), \quad \bar{y} \in Y^*.$$

В самом деле, положив $\bar{y} = (y_i, i \in \mathbb{Z})$ с $y_i = y_0$ при всех $i \in \mathbb{Z}$, мы получаем из определения $O_{I_0}(\cdot; \bar{y})$, что при любом $j \in \mathbb{Z}$

$$O_{I_0}(\pi_{I_0} A; \bar{y}) = O_{I_0+j}(\pi_{I_0+j}(T^j A); \bar{y}), \quad \text{т. е. } P(A) = P(T^j A), \quad A \in \chi^{(0)}.$$

Заметим теперь, что свойство усиленного перемешивания процесса P является следствием леммы 5.2, ввиду равенства (5.1) и того факта, что $P(\hat{X} \cap \chi_+^{(n)}) = 1$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В ходе доказательства мы будем использовать стандартные понятия и обозначения из эргодической теории (см., например, [11], [12], [14]). Пусть τ_0 — счетное разбиение пространства X с элементами $B_n^{(0)} = \{\bar{y} \in X: y_0 \in [n, n+1)\}$, $n \in \mathbb{Z}$ и пусть $\{\eta_i, i \in \mathbb{Z}_+\}$ — возрастающая последовательность счетных разбиений, измеримых относительно σ -алгебры $\chi^{(0)}$ и таких, что $\eta_i > \tau_0$ и разбиение $\bigvee_{i \geq 0} \bigvee_{j \in \mathbb{Z}} T^j \eta_i$ есть разбиение на отдельные точки mod P . В силу теоремы 2 из [14], нам достаточно проверить, что каждое из разбиений η_i является слабо бернуллиевским (см. [11]). В свою очередь, для этого достаточно доказать следующее. Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $n' \in \mathbb{Z}_+$ такое, что при любом $N' \in \mathbb{Z}_+$ для каждого из элементов $D_n^{1, N'+1}$ разбиения $\bigvee_{j=1}^{N'+1} T^j \eta_i$ за исключением множества элементов суммарной P -меры, меньшей ε , выполнено неравенство

$$\text{Var} [P^{-N'-n', -n'} (\cdot | D_k^{1, N'+1}), P^{-N'-n', -n'}] < \varepsilon, \quad (5.3)$$

где $P^{-N'-n', -n'} (\cdot | D_k^{1, N'+1})$ — сужение на σ -алгебру $\mathcal{F}^{-N'-n', -n'}$ условного распределения $P (\cdot | D_k^{1, N'+1})$, заданного формулой

$$P(A | D_k^{1, N'+1}) = [P(D_k^{1, N'+1})]^{-1} P(A \cap D_k^{1, N'+1}).$$

Неравенство (5.3) доказывается при помощи рассуждений, аналогичных тем, которые применялись при доказательстве теоремы 3 из [15]. Теорема 3 доказана.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса,
Московский институт проблем
передачи информации АН СССР

Поступила 5.VIII.1982

ՅՈՒ. Ռ. ԴԱՇԵԱՆ, ՅՈՒ. Մ. ՍՈՒԽՈՎ. Դիսկրետ ժամանակով պատահական պրոցեսների մի պարամետրային եկագրությունը (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում ապացուցվում է տրված պոտենցիալին համապատասխանող, այսպես կոչված, գիրսայան պատահական պրոցեսի գոյության և միակության թեորեմ: Մեր կողմից դիտարկվում է դիսկրետ ժամանակով և իրական արժեքներով պրոցեսի դեպքը: Ի տարբերություն եղած նախկին արդյունքների, այստեղ հառամասիրվող պրոցեսի իրագործումների տարածությունը կոմպակտ չի: Յուրյց է տրված, որ պրոցեսը, որի մասին խոսվում է, բավարարում է Թուլե կախվածության հատկության, որը մեր կողմից անվանվում է ուժեղացված խառնվածություն: Վերջապես, ապացուցված է մեր պրոցեսի էրգոդիկ հատկությունները, այն է, բերնուլլիությունը:

Yu. R. DASHIAN, Yu. M. SUHOV. *Gibbs description of a class of random processes with discrete time (summary)*

In this paper a theorem is proved on existence and uniqueness of the so called Gibbs random processes corresponding to a given potential. We consider the case of processes with discrete time and real values. Unlike the previous results in this direction, the space of realizations of the process is not assumed compact. It is shown, that the processes in question, satisfy some property of weak dependence. Lastly Bernoulli ergodic properties of the processes are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Добрушин. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, Функци. анализ и его прил., 2, № 4, 1968, 31—43.
2. Р. Л. Добрушин. Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов, Функци. анализ и его прил., 2, № 4, 1968, 44—57.
3. Р. Л. Добрушин. Гиббсовские случайные поля. Общий случай, Функци. анализ и его прил., 3, № 1, 1969, 27—35.
4. O. L. Lanford, D. Ruella. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics, Commun. Math. Phys., 13, № 3, 1969, 194—215.
5. D. Ruella. Superstable interactions in classical statistical mechanics, Commun. Math. Phys., 18, № 2, 1970, 127—159.
6. Р. Л. Добрушин. Условия отсутствия фазовых переходов в одномерных классических системах, Мат. сб., 93, № 1, 1974, 29—49.
7. Ю. Р. Дашян, Ю. М. Сухов. К вопросу о гиббсовском описании случайных процессов с дискретным временем, ДАН СССР, 243, № 3, 1978, 513—516.

8. *K. Matthes, T. Kerstan, T. Mecke. Infinitely divisible point processes*, Ch., N. Y., Br., Tor.: J. Wiley & Sons, 1978.
9. *И. И. Гихман, А. В. Скороход. Теория случайных процессов*, М., «Физматгиз», 1971.
10. *И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов. Гауссовские случайные процессы*, М., «Наука», 1970.
11. *Д. Орнштейн. Эргодическая теория, случайность и динамические системы*, М., «Мир», 1978.
12. *И. Д. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория*, М., «Физматгиз», 1980.
13. *М. Г. Крейн, М. А. Рутман. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха*, УМН, 3, № 1, 1948, 3—95.
14. *D. Ornstein. Two Bernoulli shifts with are isomorphic*, Adv. Math., 5, 1971, 329—348.
15. *Yu. M. Suhov. Random point processes and DLR equations*, Commun. Math. Phys., 50, № 2, 1976, 113—132.

УДК 517.98

М. Г. КРЕЙН, Ф. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ГАНКЕЛЕВЫ ОПЕРАТОРЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПРОБЛЕМЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ

В в е д е н и е

В настоящей статье дается развернутое изложение результатов первой части работы [1] и ряда примыкающих новых результатов. Что же касается утверждений второй части [1], относящихся к теории канонических дифференциальных операторов, то подробному изложению их обоснований мы предполагаем посвятить отдельную статью. Впрочем, частично это было проделано в кандидатской диссертации одного из авторов [2]. Следует подчеркнуть, что исследования в [1] возникли как продолжение работ [3, 4] для акселерант и S -матриц канонических дифференциальных операторов. Лишь на последнем этапе было осознано, что часть результатов [1] можно рассматривать как матрично-континуальные аналоги исследований [5, 6], получивших дальнейшее развитие и, в некотором отношении, завершение в работах [7, 8].

В настоящей работе рассматриваются различные классы матриц-функций заданного порядка $n \times m$, где n и m произвольно фиксированные натуральные числа. Первоначально в [1] рассматривался „квадратный“ случай ($n=m$). После работы [6] стало ясно, что все результаты переносятся на „прямоугольный“ случай ($n \neq m$). Между прочим, это обстоятельство отмечалось уже в [9].

Настоящая статья посвящена решению следующих задач. При их формулировке мы используем обозначения, указанные в § 1, при этом без ограничения общности принимаем $m \leq n$.

Задача (A)₁. *Задана матрица-функция (сокращенно m -функция) $\Gamma \in L^1_{n \times m}(R_+)$ (в дальнейшем именуемая „отправной“). Требуется найти ее продолжение $\bar{\Gamma} \in L^1_{n \times m}(R)$ ($\bar{\Gamma}|_{R_+} = \Gamma$) и постоянную $(n \times m)$ -матрицу $S(\infty)$ так, чтобы m -функция $S(\lambda)$ ($\lambda \in R$), определенная формулой*

$$S(\lambda) = S(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Gamma}(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad (0.1)$$

была бы нерастягивающей при любом $\lambda \in R$ ($|S(\lambda)| \leq 1 \quad \forall \lambda \in R$).

Задача (A)₂. *В случае разрешимости задачи (A)₁ дать описание всех нерастягивающих m -функций $S(\lambda)$, допускающих представление (0.1).*

Оказывается, что решения задач $(A)_1$ и $(A)_2$ естественно получаются в терминах, связанных с ганкелевым оператором $\Gamma: L_{m \times 1}^1(R_+) \rightarrow L_{n \times 1}^1(R_+)$, порождаемым „отправной“ m -функцией Γ по формуле

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^t \Gamma(t+s) f(s) ds \quad (f \in L_{m \times 1}^1(R_+); t \in R_+). \quad (0.2)$$

Имеет место утверждение:

Задача $(A)_1$ разрешима в том и только в том случае, когда $\|\Gamma\|_2 \leq 1$.

Этот результат следует рассматривать как матрично-континуальный аналог классического результата Нехари (см. [5]).

Указанное условие $\|\Gamma\|_2 \leq 1$ является также условием разрешимости „расширенной“ задачи.

Задача $(A)_1$. Задана „отправная“ m -функция $\Gamma \in L_{n \times m}^1(R_+)$. Требуется найти такую m -функцию $\Phi \in H_{n \times m}^\infty$, чтобы

$$R(\lambda) = \int_0^\infty \Gamma(t) e^{-\lambda t} dt + \Phi(\lambda) \quad (\Phi \in H_{n \times m}^\infty; \lambda \in R) \quad (0.3)$$

была бы нерастягивающей m -функцией для почти всех $\lambda \in R$.

Задача $(A)_2$. В случае, когда $\|\Gamma\|_2 \leq 1$, дать описание множества $S(\Gamma)$ всех нерастягивающих m -функций $S(\lambda)$, допускающих представление (0.3).

Задачи $(A)_1$ и $(A)_2$ получают сравнительно простое решение, когда имеет место так называемый вполне неопределенный случай: $\|\Gamma\|_2 < 1$. Это решение было получено в [1] (при $n=m$). В этом случае имеют смысл операторы $(I - \Gamma^* \Gamma)^{-1}$ и $(I - \Gamma \Gamma^*)^{-1}$, действующие в пространствах $L_{m \times m}^p(R_+)$ и $L_{n \times n}^p(R_+)$ соответственно ($1 \leq p \leq \infty$), что позволяет ввести в рассмотрение m -функции $G_{jk}(j, k=1, 2)$ порядка $m_1 \times m_2$ ($j, k=1, 2$; $m_1=m$, $m_2=n$) по формулам

$$G_{11}(\lambda) = I_m + F_+ (I - \Gamma^* \Gamma)^{-1} \Gamma^* \Gamma; \lambda); \quad G_{12}(\lambda) = F_+ (I - \Gamma^* \Gamma)^{-1} \Gamma; \lambda),$$

$$G_{21}(\lambda) = F_- ((I - \Gamma \Gamma^*)^{-1} \Gamma^*; \lambda); \quad G_{22}(\lambda) = I_n + F_- (I - \Gamma \Gamma^*)^{-1} \Gamma \Gamma^*; \lambda).$$

С помощью этой четверки формулой

$$S(\lambda) = (G_{21}(\lambda) + G_{22}(\lambda) B(\lambda)) (G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} \quad (0.4)$$

устанавливается одно однозначное соответствие между множеством всех $B \in B_{n \times m}$ и множеством всех $S \in S(\Gamma)$. Через $B_{n \times m}$ обозначается множество всех нерастягивающих m -функций из класса $H_{n \times m}^\infty$. Более того, описание m -функций $S(\lambda)$, требуемое в задаче $(A)_2$, получается той же формулой (0.4), когда m -функция B пробегает все множество $B_{n \times m} \cap W_{n \times m}^+$ нерастягивающих m -функций из винеровского класса $W_{n \times m}^+$.

В настоящей работе получено полное решение задач $(A)_2$ и $(\bar{A})_2$ и в случае, когда $\|\Gamma\|_2 = 1$.

Для исследования этого случая пришлось предварительно изучить свойства пар Шмидта $\{\xi, \eta\}$ оператора Γ , отвечающих какому-либо s -числу ρ , т. е. решение $\{\xi, \eta\}$ системы уравнений

$$\rho \xi(t) = \int_0^{\infty} \Gamma^*(t+s) \eta(s) ds; \quad \rho \eta(t) = \int_0^{\infty} \Gamma(t+s) \xi(s) ds.$$

Поясним, что так как $\Gamma \in L_{n \times m}^1(R_+)$, то оператор Γ вполне непрерывен и, следовательно, можно говорить о его s -числе. В частности, при $\|\Gamma\|_2 = 1$ число $\rho = 1$ ($= \|\Gamma\|_2$) всегда является (наибольшим) s -числом оператора Γ . Отметим, что в скалярном случае ($n=m=1$) пары Шмидта были исследованы еще в [6], так что полученные нами результаты следует рассматривать как некоторое развитие результатов [6]. Впрочем в этом направлении мы не исчерпали всех возможностей.

В настоящей статье выясняется, что если $\|\Gamma\|_2 = 1$, то при решении поставленных задач существенную роль играет подпространство $\mathfrak{M}(0) \subset C^{m+n}$ векторов $[\xi(0), \eta(0)]$, составленных из значений в нуле пар Шмидта $\{\xi, \eta\}$, отвечающих s -числу $\rho = 1$, а также понятия D -цепочек, образованных парами Шмидта, и базовых элементов этих D -цепочек.

Оказывается, что если $\dim \mathfrak{M}(0) = m$, то в этом и только в этом случае задача $(\bar{A})_1$ (и подавно $(A)_1$) имеет единственное решение. При этом m -функция $S(\lambda)$ оказывается изометрической m -функцией из винеровского класса $W_{n \times m}$ и задается с помощью базовых элементов определенной системы D -цепочек (см. теорему 6.1). Если же $\dim \mathfrak{M}(0) < m$, то решения задач $(\bar{A})_2$ и $(A)_2$ даются опять-таки в виде дробно-линейного преобразования с помощью некоторой матрицы $\hat{G}(\lambda) = \|\hat{G}_{jk}(\lambda)\|_{ik=1}^2 (\lambda \in R)$. Однако в качестве „параметра“ $B(\lambda)$ выступают уже матрицы-функции из более сложно определяемых классов $B_{n \times m}(K)$ и $B_{n \times m}(K) \cap W_{n \times m}^+$ (теоремы 7.2 и 7.3).

Как будет показано в другой работе авторов, результаты настоящей статьи позволяют получить решение матрично-континуальных аналогов „классической“ задачи Шура и ее „предшественницы“ — задачи Каратеодори—Теплица.

Поясним какого рода аналогии мы имеем в виду.

Аналогом задачи Шура является

Задача $(S)_1$. Пусть задана m -функция $C_N \in L_{n \times m}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$).

Требуется найти условие существования m -функции E из класса $B_{n \times m}^+$ (нерастягивающих m -функций, голоморфных в верхней полуплоскости C_+), представляемых в виде

$$E(z) = \int_0^N C_N(t) e^{i\lambda t} dt + e^{i\lambda N} \Phi(\lambda), \quad (0.5)$$

где $\Phi \in H_{n \times m}^-$.

Задача $(S)_2$. В случае разрешимости задачи $(S)_1$ дать описание всех m -функций $F \in B_{n \times m}^+$, допускающих представление (0.5).

Эти задачи сводятся к соответствующим задачам $(\tilde{A})_1$ и $(\tilde{A})_2$. Так, например, на этом пути совсем просто решается задача $(S)_1$. Для формулировки условия ее разрешимости рассмотрим вольтеров оператор $C_N: L_{m \times 1}^2(0, N) \rightarrow L_{n \times 1}^2(0, N)$, определенный формулой

$$(C_N f)(t) = \int_0^t C_N(t-s) f(s) ds \quad (f \in L_{m \times 1}^2(0, N); t \in (0, N)). \quad (0.6)$$

Оказывается, задача $(S)_1$ разрешима в том и только в том случае, когда $\|C_N\| \leq 1$.

Во вполне неопределенном случае $\|C_N\| < 1$ задача $(S)_2$ легко решается на основании решения задачи $(A)_2$ (см. [9], где изложены некоторые результаты рукописи, относящиеся к [1]).

При рассмотрении матрично-континуального аналога проблемы Каратеодори—Теплица по смыслу самой задачи требуется, чтобы $n = m$.

Сформулируем здесь аналог проблемы Каратеодори—Теплица в несколько упрощенной форме.

Задача $(C-T)_1$. Задана m -функция $H_N \in L_{n \times n}^1(0, N)$ ($0 < N < \infty$).

Требуется найти ее продолжение $\tilde{H} \in L_{n \times n}^1(R_+)$ ($\tilde{H}(0, N) = H_N$) такое, что

$$\operatorname{Re} \left(I_n + 2 \int_0^\infty \tilde{H}(t) e^{i\lambda t} dt \right) \geq 0 \quad (\lambda \in C_+). \quad (0.7)$$

Задача $(C-T)_2$. В случае разрешимости задачи $(C-T)_1$ дать описание всех продолжений $\tilde{H} \in L_{n \times n}^1(R_+)$, удовлетворяющих условию (0.7).

Справедливо следующее утверждение.

Задача $(C-T)_1$ разрешима тогда и только тогда, когда оператор H_N , определяемый в $L_{n \times 1}^2(0, N)$ по формуле

$$(H_N f)(t) = \int_0^t H_N(t-s) f(s) ds \quad (f \in L_{n \times 1}^2(0, N); t \in (0, N)), \quad (0.8)$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} (I + 2 H_N) \geq 0. \quad (0.9)$$

При выполнении условия (0.9) решение задачи $(C-T)_2$ сводится к решению задачи $(S)_2$, в которой m -функция C_N определяется из уравнения Вольterra

$$C_N(t) + \int_0^t H_N(t-s) C_N(s) ds + H_N(t) = 0 \quad (0 < t < N). \quad (0.10)$$

Поясним, что соотношение (0.10) эквивалентно операторному равенству

$$I + 2H_N = (I - C_N)(I + C_N)^{-1},$$

из которого, в свою очередь, следует

$$\operatorname{Re}(I + 2H_N) = I + H_N + H_N^* = (I + C_N^*)^{-1}(I - C_N^* C_N)(I + C_N)^{-1},$$

что означает эквивалентность условий $\|C_N\| \leq 1$ и $\operatorname{Re}(I + H_N) > 0$.

Таким образом, задачи $(C - T)$ и (S) сводятся друг к другу.

По существу, задачи $(C - T)_1$ и $(C - T)_2$ ранее рассматривались с различных позиций. В работах [3, 10, 11] по прямым и обратным задачам спектральной теории канонических дифференциальных операторов рассматривалась m -функция $H(H^*(t) = H(-t); (-N < t < N))$, которая при выполнении условия (0.7) называлась акселерантой. В недавнем сообщении [12] изучался скалярный континуальный аналог проблемы Каратеодори — Теплица с обобщением на так называемый индефинитный случай.

Тем самым, по-видимому, впервые выясняется цепочка связей, ведущих от задачи (A) к задаче (S) и, далее, к задаче $(C - T)$.

В заключение следует отметить, что когда работа над статьей близилась к концу, авторами был получен препринт статьи [13], посвященный решению задачи $(A)_1$ при $\|\Gamma\|_2 \leq 1$ в классе изометрических m -функций $S(\lambda)$ и некоторым вопросам, связанным с нею. Как выяснилось, авторы статьи [13] не знали о существовании работы [1]. В то время как еще в [1] для случая $\|\Gamma\| < 1$ было получено общее решение задачи $(\tilde{A})_2$, авторы [13] ограничиваются задачей построения таких продолжений $\tilde{\Gamma}$, которым отвечают изометрические $S(\lambda)$ с наперед заданными отрицательными частными индексами. Как показано в § 4 (теорема 4.2, следствие 2), указанные в препринте результаты получатся как простые следствия решения задачи $(\tilde{A})_2$. Что касается случая $\|\Gamma\|_2 = 1$, то соответствующие исследования были проведены нами и авторами [13] независимо и разными методами, но и в этом случае основные результаты статьи [13] получаются как следствия общего решения задачи $(A)_2$ при $\|\Gamma\|_2 = 1$. Заметим, однако, что более детальное рассмотрение вопроса о частных индексах m -функций $S(\lambda)$ в настоящей редакции нашей статьи было стимулировано ознакомлением с содержанием препринта [13].

§ 1. Основные определения и тождества

1. Как обычно, через $C(R)$ будем обозначать поле комплексных (вещественных) чисел. Верхнюю и нижнюю открытые (замкнутые) полуплоскости обозначим через $C_{\pm}(\overline{C}_{\pm})$, а неотрицательную и неположительную полуоси — через $R_{\pm}^+$. Унитарное „ n “-мерное пространство, элементами которого являются вектор-столбцы из n комплексных чисел, обозначим C^n . Норму $|A|$ $(n \times m)$ -матрицы $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^n$ определим как норму отображения $A: C^m \rightarrow C^n$, определенного этой мат-

рицей. Класс $(n \times m)$ -матриц-функций $A(t) = [a_{jk}(t)]_{j,k=1}^n$, элементы $a_{jk}(j = \overline{1, n}; k = \overline{1, m})$ которых принадлежат определенному функциональному пространству, обозначим символом данного пространства с добавлением внизу индекса $n \times m$. Так, например, $AC_{n \times m}(R_+)$ означает класс $(n \times m)$ -матриц-функций $A(t) = [a_{jk}(t)]_{j,k=1}^n$ таких, что $a_{jk} \in AC(R_+)$ ($j = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$). Здесь $AC(R_+)$ означает банахово пространство абсолютно непрерывных на полуоси R_+ функций $a(t)$ с нормой

$$\|a\| = \sup_{t \in R_+} |a(t)| + \int_0^{\infty} |a'(t)| dt.$$

Через $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}^\pm$ обозначаются винеровские алгебры функций вида

$$c + \tilde{f}(\lambda):= c + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \quad (c \in C; \lambda \in R; f \in L^1(R))$$

и

$$c + F_\pm(f; \lambda):= c + \int_0^{\infty} f(t) e^{\pm i\lambda t} dt \quad (c \in C; \lambda \in R; f \in L^1(R_+)).$$

Множество функций из $\mathcal{W}(\mathcal{W}^\pm)$, в представлении которых $c=0$, образуют подалгебру $\mathcal{W}(\mathcal{W}^\pm)$.

Рассматривая квадратные $((m+n) \times (m+n))$ -матрицы, часто будет удобно задавать их блочно-матричные представления в разложении $C^{m+n} = C^m \oplus C^n$. Так, например, матрицу $J (= J_{m,n})$ определим по формуле

$$J = \begin{bmatrix} iI_m & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix} \quad (I_n \text{ — единичная } (n \times n)\text{-матрица}; J^2 = -I_{m+n}, J^* = -J).$$

Для произвольной m -функции $g \in L_{(m-n) \times (m+n)}^1(R)$ с помощью m -функции $\exp(itJ)$ определим F -преобразование по формуле

$$F(g; \lambda) = \int_0^{\infty} \exp(i\lambda t) g(t) dt \quad (\lambda \in R).$$

Блочно-матричные представления m -функций $\exp(itJ)$ и $F(g; \lambda)$ имеют вид

$$\exp(i\lambda t J) = \begin{bmatrix} e^{i\lambda t} I_m & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda t} I_n \end{bmatrix}; \quad F(g; \lambda) = \begin{bmatrix} F_+(g_{11}; \lambda) & F_+(g_{12}; \lambda) \\ F_-(g_{21}; \lambda) & F_-(g_{22}; \lambda) \end{bmatrix},$$

где $\|g_{jk}(t)\|_{j,k=1}^2$ есть блочно-матричное представление $g(t)$.

Пусть Γ — произвольная $(n \times m)$ -матрица. Через Γ_Δ обозначим $(m+n) \times (m+n)$ -матрицу вида

$$\Gamma_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^* \\ \Gamma & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Легко проверить, что заданная $((m+n) \times (m+n))$ -матрица N имеет вид (1.1) в том и только в том случае, когда выполняются соотношения

$$N^* = N \text{ и } JN = -NJ. \quad (1.2)$$

Лемма 1.1. Пусть $\Gamma \in L^1_{n \times m}(R_+)$ и $g \in L^1_{(m+n) \times (m+n)}(R_+)$ — m -функции, связанные соотношением

$$g(t) - \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s) g(s) ds = \Gamma_\Delta(t) \quad (t \in R_+). \quad (1.3)$$

Тогда m -функция $G(\lambda) := I_{m+n} + F(g; \lambda)$ J -унитарна при каждом вещественном λ :

$$G^*(\lambda) J G(\lambda) = G(\lambda) J G^*(\lambda) = J \quad \forall \lambda \in R. \quad (1.4)$$

Доказательство. Легко видеть, что каждое из соотношений (1.4) означает, что существует $G^{-1}(\lambda) = -J G^*(\lambda) J$. Поэтому достаточно проверить, например, равенство $G^*(\lambda) J G(\lambda) = J$. Оно равносильно равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty g^*(t) \exp(-\lambda t J) dt J \int_0^\infty \exp(\lambda t J) g(t) dt + \\ & + \int_0^\infty g^*(t) \exp(-\lambda t J) dt J + J \int_0^\infty \exp(\lambda t J) g(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty g^*(t) \exp(-\lambda t J) dt J \int_0^\infty \exp(\lambda t J) g(t) dt = \\ & = \int_0^\infty \int_0^t g^*(t) \exp[\lambda(s-t) J] J g(s) ds dt + \\ & + \int_0^\infty \int_t^\infty g^*(t) \exp[\lambda(s-t) J] J g(s) ds dt = \\ & = \int_0^\infty \int_s^\infty g^*(t) \exp[\lambda(s-t) J] J g(s) dt ds + \\ & + \int_0^\infty \int_0^s g^*(t) \exp[\lambda(s-t) J] J g(s) ds dt = \\ & = \int_0^\infty \int_0^\infty g^*(t+s) \exp(-\lambda t J) J g(s) dt ds + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty g^*(t) \exp(\lambda s J) J g(s+t) ds dt. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Последнее слагаемое этого равенства, учитывая соотношение (1.3) и свойства (1.2) матрицы Γ_Δ , можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \int_0^\infty g^*(t) \exp(\lambda s J) J g(s+t) ds dt = \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty g^*(t) \exp(\lambda s J) J \left[\Gamma_\Delta(t+s) + \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s+u) g(u) du \right] ds dt = \\
 &= - \int_0^\infty \left(\int_0^\infty g^*(t) \Gamma_\Delta(t+s) dt \right) \exp(-\lambda s J) ds J - \\
 &- \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\int_0^\infty g^*(t) \Gamma_\Delta(t+s+u) dt \exp(-\lambda s J) J g(u) ds du = \right. \\
 &= \int_0^\infty (\Gamma_\Delta(s) - g^*(s)) \exp(-\lambda s J) ds J + \\
 &+ \int_0^\infty \int_0^\infty (\Gamma_\Delta(s+u) - g^*(s+u)) \exp(-\lambda s J) J g(u) ds du = \\
 &= - \int_0^\infty g^*(s) \exp(-\lambda s J) ds J - \\
 &- \int_0^\infty \int_0^\infty g^*(s+u) \exp(-\lambda s J) J g(u) ds du - \\
 &- J \int_0^\infty \exp(\lambda s J) \left(\Gamma_\Delta(s) + \int_0^\infty \Gamma_\Delta(s+u) g(u) du \right) ds = \\
 &= - \int_0^\infty g^*(s) \exp(-\lambda s J) ds J - \int_0^\infty \int_0^\infty g^*(s+u) \exp(-\lambda s J) J g(s) ds du - \\
 &- J \int_0^\infty \exp(\lambda s J) g(s) ds. \square
 \end{aligned}$$

Знак $\square$ будет обозначать конец доказательства.

Пусть $G(\lambda) = \|G_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^n$ — блочно-матричное представление $G(\lambda)$. Тогда J -унитарность матрицы $G(\lambda)$ ($\lambda \in R$) дает следующую совокупность тождеств:

$$\begin{aligned}
 G_{11}^*(\lambda) G_{11}(\lambda) - G_{21}^*(\lambda) G_{21}(\lambda) &= I_m, \quad G_{22}^*(\lambda) G_{22}(\lambda) - G_{12}^*(\lambda) G_{12}(\lambda) = I_n, \\
 G_{11}^*(\lambda) G_{12}(\lambda) - G_{21}^*(\lambda) G_{22}(\lambda) &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} G_{11}(\lambda) G_{11}^*(\lambda) - G_{12}(\lambda) G_{12}^*(\lambda) &= I_n, \quad G_{22}(\lambda) G_{22}^*(\lambda) - G_{21}(\lambda) G_{21}^*(\lambda) = \\ &= I_n, \quad G_{11}(\lambda) G_{21}^*(\lambda) - G_{12}(\lambda) - G_{22}^*(\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отсюда, в частности, следует обратимость матриц $G_{jj}(\lambda)$ ($j=1, 2$) при любом вещественном λ . В самом деле, $|\det G_{11}(\lambda)|^2 = \det G_{11}(\lambda) C_{11}(\lambda) = \det(I_m + G_{21}(\lambda) G_{21}^*(\lambda)) \geq 1$, аналогично $|\det G_{22}(\lambda)|^2 \geq 1$.

Замечание 1.1. Ниже мы отмечаем как отражаются те или иные структурные свойства m -функции $\Gamma(t)$ на m -функцию $G(\lambda)$.

Предварительно напомним обозначения. Для произвольной $(n \times m)$ -матрицы $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^{n,m}$ через $\bar{A}$ обозначается комплексно сопряженная матрица: $\bar{A} = \|\bar{a}_{jk}\|_{j,k=1}^{n,m}$, а через A^T — транспонированная: $A^T = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^{n,m}$.

1) Если $\Gamma(t)$ — симметрическая матрица: $\Gamma(t) = \Gamma^T(t) \quad \forall t \in R_+$ (разумеется, в этом случае $n=m$), то $G(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$J_0 C(\lambda) J_0 = \bar{G}(\lambda) \left(\lambda \in R; J_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \right). \quad (1.8)$$

В самом деле, легко видеть, что $\Gamma_\Delta(t) = J_0 \Gamma(t) J_0$. Отсюда $I_0 g(t) J_0 = \overline{g(t)}$, что, вместе с равенством $\exp(\lambda t J) = J_0 \exp(it J) J_0$, приводит к соотношению (1.8).

2) Если $\Gamma(t)$ — вещественная матрица: $\Gamma(t) = \overline{\Gamma(t)} \quad \forall t \in R_+$, то $\overline{G(\lambda)} = G(-\lambda) \quad (\lambda \in R)$.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из того, что $\Gamma_\Delta(t) = \overline{\Gamma_\Delta(t)}$, следовательно, и $g(t) = \overline{g(t)}$.

3) Если $\Gamma(t)$ — вещественная и симметрическая матрица:

$$\Gamma(t) = \Gamma^T(t) = \overline{\Gamma(t)} \quad \forall t \in R_+, \text{ то } J_0 G(\lambda) J_0 = \overline{G(\lambda)} = G(-\lambda) \quad (\lambda \in R_+).$$

4. Если $\Gamma(t)$ эрмитова матрица: $\Gamma(t) = \Gamma^*(t) \quad \forall t \in R_+$, то $J_0 G(\lambda) J_0 = G(-\lambda) \quad (\lambda \in R)$.

Лемма 1.2. При условиях леммы 1.1 имеет место тождество:

$$[I_{m+n} - F(\Gamma_\Delta; \lambda)][I_{m+n} + F(g; \lambda)] = I_{m+n} - F(R; -\lambda) \quad (\lambda \in R), \quad (1.9)$$

где $R(t)$ — m -функция, определенная равенством

$$R(t) = \int_0^\infty \Gamma_\Delta(s) g(t+s) ds.$$

Доказательство. С помощью преобразования, аналогичного (1.5), находим

$$\begin{aligned} F(\Gamma_\Delta; \lambda) F(g; \lambda) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s) \exp(-\lambda t J) g(s) ds dt + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t) \exp(\lambda s J) g(t+s) dt ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$[I_{m+n} - F(\Gamma_\Delta; \lambda)][I_{m+n} + F(g; \lambda)] =$$

$$= I_{m+n} - \int_0^{\infty} \exp(-\lambda s f) \int_0^{\infty} \Gamma_{\Delta}(t) g(t+s) dt ds - \\ - \int_0^{\infty} \exp(\lambda t f) \left(\Gamma_{\Delta}(t) - g(t) + \int_0^{\infty} \Gamma_{\Delta}(t+s) g(s) ds \right) dt.$$

В силу соотношения (1.3) это приводит к равенству (1.9). $\square$

Равенство (1.9) в блочно-матричном представлении можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} I_m & -F_+(\Gamma^*; \lambda) \\ -F_-(\Gamma; \lambda) & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}(\lambda) & G_{12}(\lambda) \\ G_{21}(\lambda) & G_{22}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - F_-(R_{11}; \lambda) & F_-(R_{12}; \lambda) \\ -F_+(R_{21}; \lambda) & I_n - F_+(R_{22}; \lambda) \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем следующую совокупность тождеств:

$$\begin{aligned} F_+(\Gamma^*; \lambda) G_{21}(\lambda) &= G_{11}(\lambda) - I_m + F_-(R_{11}; \lambda); \\ F_+(\Gamma^*; \lambda) G_{22}(\lambda) &= G_{12}(\lambda) + F_-(R_{12}; \lambda); \\ F_-(\Gamma; \lambda) G_{11}(\lambda) &= G_{21}(\lambda) - F_+(R_{21}; \lambda); \\ F_-(\Gamma; \lambda) G_{12}(\lambda) &= G_{22}(\lambda) - I_n + F_+(R_{22}; \lambda). \end{aligned} \quad (1.10)$$

§ 2. λ -функция ганкелева оператора

1°. Через $E_{n \times m}$ будем обозначать какое-либо из пространств $L_{n \times m}^1(R_+)$ ($1 \leq p < \infty$) или $AC_{n \times m}(R_+)$. Любая λ -функция $\Gamma \in L_{n \times m}^1(R_+)$ порождает ганкелев оператор $\Gamma: E_{m \times 1} \rightarrow E_{n \times 1}$, действующий по формуле

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^{\infty} \Gamma(t+s) f(s) ds \quad (f \in E_{m \times 1}). \quad (2.1)$$

1°. Как известно (см. [6] стр. 70), ганкелев оператор Γ , действующий из $E_{m \times 1}$ в $E_{n \times 1}$, вполне непрерывен и в каждом из пространств $E_{m \times 1}$ имеет одни и те же s -числа. Пары Шмидта $[\xi, \eta]$, соответствующие данному s -числу ρ : $\Gamma^* \eta = \rho \xi$ и $\Gamma \xi = \rho \eta$, также не зависят от выбора пространства $E_{m \times 1}$, в котором рассматривается оператор Γ .

Это предложение, вместе с некоторыми другими предложениями, характеризующими ганкелев оператор, приведены в [6] для скалярного случая. Обобщение их на матричный случай не вызывает затруднений.

Вместе с функцией $\Gamma(t)$ и оператором Γ рассмотрим функцию $\Gamma_{\Delta}(t)$, определенную формулой (11), и ганкелев оператор Γ_{Δ} , порождаемый λ -функцией $\Gamma_{\Delta}(t)$. Оператор Γ_{Δ} , рассматриваемый в пространстве $L_{(m+n) \times (m+n)}^2(R_+)$, самосопряжен. Следовательно, его спектр $\sigma(\Gamma_{\Delta})$ вещественный. Легко убедиться, что $\sigma(\Gamma_{\Delta})$ симметричен относительно нуля и $\sigma(\Gamma_{\Delta}) \cap R_+$ совпадает с множеством s -чисел оператора Γ . Более того, если λ — собственный элемент Γ_{Δ} , отвечающий собственному

значению $\varphi \in R_+$ ($\Gamma_\Delta \chi = \varphi \chi$; $\varphi \in \sigma(\Gamma_\Delta) \cap R_+$), то представление $\chi(t) = [\xi(t), \eta(t)]$ ($\xi \in L_{m+1}^2(R_-)$; $\eta \in L_{n \times 1}^2(R_+)$) в разложении $L_{(m+n) \times 1}^2(R_+) = L_{m \times 1}^2(R_+) \oplus L_{n \times 1}^2(R_-)$ определяет пару Шмидта $\{\xi, \eta\}$ оператора Γ . В силу утверждения 1°, сказанное выше верно для оператора Γ , рассматриваемого в каждом из пространств $E_m \times 1$.

Если $1 \notin \sigma(\Gamma_\Delta)$, то уравнение (1.3) будет иметь решение $g \in L_{(m+n) \times (m+n)}^1(R_+)$, и следовательно, с оператором Γ_Δ можно будет связать J -унитарную m -функцию $G(\lambda)$. Ее мы будем называть G -матрицей, „сопровождающей“ ганкелев оператор Γ_Δ (или Γ).

В дальнейших наших рассмотрениях существенную роль будет играть условие: $\|\Gamma_\Delta\|_2 < 1$ для Γ_Δ , рассматриваемого в $L_{(m+n) \times 1}^2(R_+)$. Всюду на протяжении этого параграфа будем считать это условие выполненным.

Рассмотрим „сопровождающую“ m -функцию $G(\lambda)$ ($\lambda \in R$) оператора Γ_Δ . Ее блочно-матричное представление имеет вид

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} G_{11}(\lambda) & G_{12}(\lambda) \\ G_{21}(\lambda) & G_{22}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m + F_+(g_{11}; \lambda) & F_+(g_{12}; \lambda) \\ F_-(g_{21}; \lambda) & I_n + F_-(g_{22}; \lambda) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Непосредственно выражение m -функций G_{jk} ($j, k=1, 2$) через оператор Γ было дано во введении. Как явствует из записи (2.2), m -функции $G_{11}(\lambda)$ и $G_{12}(\lambda)$ ($G_{21}(\lambda)$ и $G_{22}(\lambda)$) аналитически продолжаются в верхнюю (нижнюю) полуплоскость и при этом принадлежат соответствующим винеровским классам.

Теорема 2.1. При условии $\|\Gamma_\Delta\|_2 < 1$ матрица $G_{11}(G_{22})$ обратима при любом $\lambda \in \bar{C}_+$ ($\lambda \in \bar{C}_-$) и, следовательно, в силу теоремы Винера, $G_{11}^{-1} \in W_{m \times m}^+$ ($G_{22}^{-1} \in W_{n \times n}^+$).

Доказательство. Обратимость $G_{11}(G_{22})$ при $\lambda \in R$ была доказана выше. Рассмотрим $G_{11}(\lambda)$ при $\lambda \in C_+$. Допустим, что $\det G_{11}(\lambda_0) = 0$ при некотором $\lambda_0 \in C_+$. Тогда найдется такой вектор $a \in C^m$, что $G_{11}(\lambda_0)a = 0$. Поэтому вектор-функция $\hat{h}_+(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-1} G_{11}(\lambda)a$ аналитична в верхней полуплоскости и, более того, принадлежит классу $H_{m \times 1}^2$. В силу теоремы Пэли-Винера она представима в виде

$$\hat{h}_+(\lambda) = \int_0^\infty h_+(t) e^{i\lambda t} dt \quad (h_+ \in L_{m \times 1}^2(R_+); \lambda \in C_+).$$

Для вектор-функции $\hat{h}_-(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-1} G_{21}(\lambda)a$ подавно имеем

$$\hat{h}_-(\lambda) = \int_0^\infty h_-(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (h_- \in L_{n \times 1}^2(R_+); \lambda \in C_-).$$

Разделив соответствующее из тождеств (1.10) на $\lambda - \lambda_0$ и применив его к вектору a , получим

$$F_+(\Gamma^*; \lambda) \hat{h}_-(\lambda) = \hat{h}_+(\lambda) + r_-(\lambda) \quad (\lambda \in R; r_- \in W_{m \times 1}^-).$$

В терминах Фурье-образов это соотношение дает

$$\int_0^{\infty} \Gamma^*(t+s) h_-(s) ds = h_+(t) \quad (t \in R_+). \quad (2.3)$$

С другой стороны, из (1.6) имеем

$$\begin{aligned} |h_+(\lambda)|^2 &= \left(G_{11}(\lambda) \frac{a}{\lambda - \lambda_0}, G_{11}(\lambda) \frac{a}{\lambda - \lambda_0} \right) = \left(G_{11}^*(\lambda) G_{11}(\lambda) \frac{a}{\lambda - \lambda_0}, \frac{a}{\lambda - \lambda_0} \right) = \\ &= \left(\frac{a}{\lambda - \lambda_0}, \frac{a}{\lambda - \lambda_0} \right) + \left(G_{21}^*(\lambda) G_{21}(\lambda) \frac{a}{\lambda - \lambda_0}, \frac{a}{\lambda - \lambda_0} \right) = \left| \frac{a}{\lambda - \lambda_0} \right|^2 + \\ &+ |\widehat{h}_-(\lambda)|^2 > |\widehat{h}_+(\lambda)|^2 \quad (\lambda \in R). \end{aligned}$$

Потому $\|\widehat{h}_+\|_2^2 > \|\widehat{h}_-\|_2^2$ и, следовательно, по теореме Планшереля, $\|\widehat{h}_+\|_2 > \|\widehat{h}_-\|_2$. Последнее, в силу соотношения (2.3), противоречит условию $\|\Gamma_3\|_2 < 1$. Аналогично доказывается соответствующее утверждение для G_{22} . $\square$

Следствие 2.1. $\det G_{11}(\lambda) = \det G_{22}^*(\bar{\lambda})$ ($\lambda \in \bar{C}_+$).

В самом деле, из (1.6) для $\lambda \in R$ имеем

$$\begin{aligned} \det G_{11}(\lambda) \det G_{11}^*(\lambda) &= \det (G_{11}^*(\lambda) G_{11}(\lambda)) = \det (I_m + G_{21}^*(\lambda) G_{21}(\lambda)) = \\ &= \det (I_n + G_{21}(\lambda) G_{21}^*(\lambda)) = \det (G_{22}(\lambda) G_{22}^*(\lambda)) = \det G_{22}^*(\lambda) \det G_{22}(\lambda). \end{aligned}$$

Из доказанной теоремы следует, что $(\det G_{11}(\lambda))^{\pm 1} \in \mathbb{W}^+$ и $(\det G_{22}^*(\lambda))^{\pm 1} \in \mathbb{W}^+$. Поэтому справедливо соотношение

$$(\det G_{22}^*(\lambda))^{-1} \det G_{11}(\lambda) = \det G_{22}(\lambda) (\det G_{11}^*(\lambda))^{-1} \quad (\lambda \in R).$$

Оно означает, что функция $(\det G_{12}^*(\lambda))^{-1} \det G_{11}(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Замечая теперь, что $\det G_{22}^*(\infty) = \det G_{11}(\infty) = 1$, приходим к равенству

$$(\det G_{22}^*(\bar{\lambda}))^{-1} \det G_{11}(\lambda) \equiv 1. \quad \square$$

2. Определим в полуплоскости $\bar{C}_+$ $(m \times n)$ -матрицу-функцию $X(\lambda)$, полагая

$$X(\lambda) := G_{11}^{-1}(\lambda) G_{12}(\lambda) (= G_{21}^*(\bar{\lambda}) (G_{22}^*(\bar{\lambda}))^{-1}, \text{ в силу (1.7)}). \quad (2.4)$$

Ясно, что $X \in \mathbb{W}_{m \times n}^+$. Более того, существует q ($0 < q < 1$) такое, что

$$|X(\lambda)| \leq q \quad \forall \lambda \in \bar{C}_+. \quad (2.5)$$

В самом деле, на оси R m -функция X является сжимающей, ибо в силу (1.7)

$$X(\lambda) X^*(\lambda) = I_m - G_{11}^{-1}(\lambda) (G_{11}^*(\lambda))^{-1} \ll I_m \quad (\lambda \in R).$$

С другой стороны, $X(\infty) = 0$. Следовательно, найдется такое q ($0 < q < 1$), что $|X(\lambda)| \leq q \quad \forall \lambda \in R$. Неравенство (2.5) теперь следует из принципа максимума для аналитических функций.

По m -функции X однозначно восстанавливается матрица G . Действительно, из (2.4) следует

$$G_{11}^{-1}(\lambda) (G_{11}^*(\lambda))^{-1} = I_m - X(\lambda) X^*(\lambda); \quad G_{22}^{-1}(\lambda) (G_{22}^*(\lambda))^{-1} = \\ = I_n - X^*(\lambda) X(\lambda) \quad (\lambda \in R). \quad (2.6)$$

Поэтому m -функции G_{11}^{-1} и G_{22}^{-1} находятся как левые множители левой и правой канонической факторизации* m -функций $I_m - X(\lambda) X^*(\lambda)$ и $I_n - X^*(\lambda) X(\lambda)$ соответственно. Найдя G_{11} и G_{22} , находим G_{12} и G_{21} по формулам

$$G_{12}(\lambda) = G_{11}(\lambda) X(\lambda) (\lambda \in C_+), \quad G_{21}(\lambda) = G_{22}(\lambda) X^*(\lambda) (\lambda \in C_-). \quad (2.7)$$

M -функцию X в дальнейшем будем называть характеристической m -функцией оператора Γ и будем обозначать $X(\lambda) = X(\lambda; \Gamma)$.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы некоторой $(m \times n)$ -матрице-функции $X(\lambda)$ ($\lambda \in \bar{C}_+$) отвечал ганкелев оператор Γ с $\|\Gamma\|_2 < 1$ такой, что $X(\lambda) = X(\lambda; \Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$1) X \in \mathcal{W}_{m \times n}^+; \quad 2) |X(\lambda)| \leq q \quad \forall \lambda \in \bar{C}_+ \text{ при некотором } q < 1.$$

Доказательство. Необходимость условий 1), 2) доказана выше. Перейдем к доказательству достаточности. Условия 1) и 2), наложенные на m -функцию X , обеспечивают существование правой (левой) канонической факторизации m -функций $I_m - X(\lambda) X^*(\lambda)$ ($I_n - X^*(\lambda) X(\lambda)$) с нулевыми частными индексами (см. [14]). Это дает возможность по формулам (2.6) и (2.7) определить m -функции G_{jk} ($j, k=1, 2$). Легко проверить, что справедливы тождества (1.7). Это означает, что блочная матрица $G(\lambda) = \|G_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^2$ является J -унитарной при каждом вещественном λ . Отсюда следует справедливость тождества (1.6).

Определим теперь m -функцию $S_0(\lambda)$ ($\lambda \in R$) формулой

$$S_0(\lambda) := G_{21}(\lambda) G_{11}^{-1}(\lambda) = (G_{22}^*(\lambda))^{-1} G_{12}^*(\lambda), \text{ в силу (1.6)}. \quad (2.8)$$

Поскольку $G_{21} \in \mathcal{W}_{n \times m}^-$ и $G_{11}^{-1} \in \mathcal{W}_{m \times m}^+$, $S_0 \in \mathcal{W}_{n \times m}$, т. е.

$$S_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (\tilde{\Gamma} \in L_{n \times m}^1(R); \lambda \in R). \quad (2.9)$$

С другой стороны, $S_0(\lambda)$ является сжимающей матрицей при всех $\lambda \in R$, ибо, в силу (2.8),

$$I_m - S_0(\lambda) S_0^*(\lambda) = (G_{11}^*(\lambda))^{-1} (C_{11}^*(\lambda) (C_{11}(\lambda) - \\ - G_{21}^*(\lambda) G_{21}(\lambda)) G_{11}^{-1}(\lambda) = (G_{11}^*(\lambda))^{-1} G_{11}(\lambda) \gg 0.$$

Покажем теперь, что ганкелев оператор Γ_+ , порожденный $(n \times m)$ -матрицей-функцией $\Gamma = \tilde{\Gamma}|R_+$, является сжимающим: $\|\Gamma_+\|_2 < 1$. Для это-

* Определение правой и левой факторизаций см. стр. 329.

Отметим только, что для положительных m -функций из алгебры $\mathcal{W}_{k \times k}$ частные индексы $\alpha_j = 0$ ($j = \overline{1, k}$) (см. [14]).

го рассмотрим оператор $\hat{U}: L^2_{m \times 1}(R) \rightarrow L^2_{m \times 1}(R)$, действующий по формуле

$$(\hat{U}f)(\lambda) = S_0(\lambda) \hat{f}(\lambda) \quad (f \in L^2_{m \times 1}(R); \lambda \in R).$$

Ясно, что $\hat{U}$ является сжимающим оператором. Будем рассматривать вектор-функции $\hat{f}(\lambda)$ как Фурье-образы элементов $f \in L^2_{m \times 1}(R)$:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt.$$

Последнее пространство естественным образом отождествим с ортогональной суммой двух копий пространства $L^2_{m \times 1}(R_+)$, а именно, всякому $f \in L^2_{m \times 1}(R)$ сопоставим пару $[f_+, f_-]$ ($f_{\pm} \in L^2_{m \times 1}(R_+)$), полагая $f_{\pm}(t) = f(\pm t)$ ($t \in R_+$). Тогда оператор $\hat{U}$ будет порождать сжимающий оператор $U: L^2_{m \times 1}(R_+) \oplus L^2_{m \times 1}(R_+) \rightarrow L^2_{m \times 1}(R_+) \oplus L^2_{m \times 1}(R_+)$; который можно представить в виде матрицы

$$U = \begin{bmatrix} T_+ & \Gamma_+ \\ \Gamma_- & T_- \end{bmatrix},$$

где операторы $T_{\pm}$ и $\Gamma_{\pm}$ определяются формулами

$$(T_{\pm}f)(t) = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\pm(t-s)) f(s) ds; \quad (2.10)$$

$$(\Gamma_{\pm}f)(t) = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\pm(t+s)) f(s) ds \quad (f \in L^2_{m \times 1}(R_+); t \in R_+).$$

Условие $U^*U \leq I$ приводит, в частности, к неравенству $([T_-^* T_- + \Gamma_-^* \Gamma_-]f_-, f_-) \leq (f_-, f_-)$. Отсюда $\|\Gamma_+ f_+\| \leq \|f_+\|$, что, в силу полной непрерывности Γ_+ , дает $\|\Gamma_+\|_2 \leq 1$.

Докажем теперь, что $X(\lambda)$ является характеристической функцией именно оператора Γ_+ : $X(\lambda) = X(\lambda; \Gamma_+)$. Заметим сперва, что построенная по $X(\lambda)$ J -унитарная m -функция $G(\lambda)$ представима в виде (2.2). Нужно доказать, что m -функция $g(t) = \|g_{jk}(t)\|_{j,k=1}^2$, участвующая в этом представлении, удовлетворяет уравнению (1.3), где m -функция $\Gamma(t) = \tilde{\Gamma}(t)$ ($t \in R_+$) взята из представления (2.9) матрицы $S_0(\lambda)$. Для этого достаточно проверить справедливость тождеств

- 1) $S_0(\lambda) G_{11}(\lambda) = G_{21}(\lambda)$; 2) $S_0(\lambda) G_{12}(\lambda) = G_{22}(\lambda) - (G_{22}^*(\lambda))^{-1}$;
- 3) $S_0^*(\lambda) G_{22}(\lambda) = G_{12}(\lambda)$; 4) $S_0^*(\lambda) G_{21}(\lambda) = G_{11}(\lambda) - (G_{11}^*(\lambda))^{-1}$,

поскольку переход в этих соотношениях к Фурье-преобразованиям приводит к соотношению (1.3).

Тождества 1) и 3) непосредственно следуют из определения (3.8) m -функции $S_0(\lambda)$. Проверим равенство 2).

$$\begin{aligned} S_0(\lambda) G_{12}(\lambda) &= S_0(\lambda) G_{11}(\lambda) X(\lambda) = G_{21}(\lambda) G_{11}^{-1}(\lambda) G_{11}(\lambda) X(\lambda) = \\ &= G_{21}(\lambda) X(\lambda) = G_{21}(\lambda) (G_{21}^*(\lambda) (G_{22}^*(\lambda))^{-1}) = \\ &= (G_{21}(\lambda) G_{22}^*(\lambda) - I_n) (G_{22}^*(\lambda))^{-1} = G_{22}(\lambda) - (G_{22}^*(\lambda))^{-1}. \end{aligned}$$

Равенство 4) проверяется аналогично. $\square$

§ 3. Описание множества нерастягивающих матриц-функций, порождаемых сжимающим ганкелевым оператором

1. Как обычно, через $H_{n \times m}^*$ обозначается множество $(n \times m)$ -матриц-функций, элементы которых голоморфны в C_+ и ограничены в C_+ . Через $B_{n \times m}$ обозначим множество нерастягивающих $n \times m$ матриц-функций $B(\lambda) (|B(\lambda)| \leq 1 \forall \lambda \in \overline{C}_+)$, принадлежащих $H_{n \times m}^*$.

Как и в § 2, рассмотрим ганкелев оператор Γ с $\|\Gamma\|_2 \leq 1$ и его сопутствующую матрицу $G(\lambda) = \|G_{ik}(\lambda)\|_{j,l=1}^2 (\lambda \in R)$.

Теорема 3.1. Формулой

$$S_B(\lambda) = (G_{21}(\lambda) + G_{22}(\lambda) B(\lambda)) (G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} (\lambda \in R), \quad (3.1)$$

где $B \in B_{n \times m}$, дается описание всех измеримых $(n \times m)$ -матриц-функций $S(\lambda)$ со свойствами

1) $|S(\lambda)| \leq 1$ почти всюду на вещественной оси.

2) $S(\lambda) - F_-(\Gamma; \lambda) \in H_{n \times m}^*$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda)$. Из определения характеристической m -функции $X(\lambda; \Gamma)$ имеем

$$G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda) = G_{11}(\lambda) (I_m + X(\lambda; \Gamma) B(\lambda)).$$

Поскольку $|X(\lambda; \Gamma) B(\lambda)| \leq q < 1 \forall \lambda \in \overline{C}_+$, существует и принадлежит $H_{m \times m}^*$ выражение $(I_m + X(\lambda; \Gamma) B(\lambda))^{-1}$. С другой стороны, $G_{11}^{-1} \in W_{m \times m}^+ \subset H_{m \times m}^*$. Таким образом, при любом $B \in B_{n \times m}$ существует и принадлежит $H_{n \times m}^*$ m -функция $(G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1}$. Следовательно, формула (3.1) имеет смысл при любом $B \in B_{n \times m}$ и определяет почти всюду на R m -функцию $S_B(\lambda)$. Подставив в (3.1) $B(\lambda) \equiv 0$, получим сжимающую m -функцию $S_0(\lambda)$, введенную в теореме 2.2:

$$S_0(\lambda) = G_{21}(\lambda) G_{11}^{-1}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (\tilde{\Gamma} \in L_{n \times m}^1(R)).$$

Там же было доказано, что m -функция Γ , порождающая ганкелев оператор Γ , совпадает с $\tilde{\Gamma}|_{R_+}$. Таким образом, m -функция S_0 удовлет-

воряет условиям теоремы. Пусть теперь S_B m -функция, определенная формулой (3.1) при некотором $B \in B_{n \times m}$. Учитывая второе представление для $S_0(\lambda)$: $S_0(\lambda) = (G_{22}^*(\lambda))^{-1} G_{21}^*(\lambda)$ и тождества (1.6), находим

$$S_B(\lambda) - S_0(\lambda) = (G_{22}^*(\lambda))^{-1} B(\lambda) (G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} \in H_{n \times m}^\infty.$$

Повтому S_B вместе с S_0 удовлетворяет условию 2. С другой стороны, формула (3.1) определяет почти всюду на R сжимающую m -функцию. S_B при любом $B \in B_{n \times m}$, в силу J -унитарности почти всюду m -функции $G(\lambda)$. Дело в том, что всякая J -унитарная матрица $A = \|A_{jk}\|_{j,k=1}^2$ характеризуется с точностью до скалярного множителя тем свойством, что для нее имеет смысл дробно-линейное преобразование $(A_{21} + A_{22} B) \times \times (A_{11} + A_{12} B)^{-1}$ над любой матрицей B из гипершара $|B| \leq 1$, причем это преобразование отражает этот гипершар и множество его внутренних точек одно-однозначно на себя (см. [15]).

Таким образом, в одну сторону теорема доказана.

Докажем обратное. Пусть дана измеримая почти всюду на вещественной оси R $(n \times m)$ -матрица-функция $S(\lambda)$, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Покажем, что она может быть получена по формуле (3.1) при определенном выборе $B \in B_{n \times m}$.

Из J -унитарности матрицы $G(\lambda)$ следует, что коль скоро $S(\lambda)$ удовлетворяет условию 1), то найдется сжимающая $(n \times m)$ -матрица-функция $B(\lambda)$, такая, что будет иметь место равенство (3.1). Покажем, что если $S(\lambda)$ удовлетворяет также условию 2), то $B(\lambda)$ принадлежит $H_{n \times m}^\infty$. В самом деле, при $R(\lambda) := S(\lambda) - S_0(\lambda)$ имеем

$$R(\lambda) = (G_{22}^*(\lambda))^{-1} B(\lambda) (G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} \in H_{n \times m}^\infty.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} G_{12}(\lambda) G_{22}^*(\lambda) R(\lambda) &= G_{12}(\lambda) B(\lambda) (G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} = \\ &= I_m - G_{11}(\lambda) (G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} \end{aligned}$$

и поэтому

$$(G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} = G_{11}^{-1}(\lambda) (I_m - G_{12}(\lambda) G_{22}^*(\lambda) R(\lambda)) \in H_{n \times n}^\infty.$$

Положим

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &:= (I_m + X(\lambda; \Gamma)^{-1} B(\lambda)) (I_m - X(\lambda; \Gamma) B(\lambda)) = \\ &= (G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} (G_{11}(\lambda) - G_{12}(\lambda) B(\lambda)) = 2(G_{11}(\lambda) + \\ &\quad + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} G_{11}(\lambda) - I_m \in H_{n \times n}^\infty. \end{aligned}$$

Так как $|X(\lambda; \Gamma) B(\lambda)| \leq q < 1$ почти всюду на вещественной оси, то $\operatorname{Re} \Phi(\lambda) \gg 0$ при $\lambda \in R$, а следовательно, и при $\lambda \in \bar{C}_+$. Стало быть при $\lambda \in \bar{C}_+$ имеет смысл дробно-линейное преобразование $(I_m + \Phi(\lambda))^{-1} \times \times (I_m - \Phi(\lambda)) = X(\lambda; \Gamma) B(\lambda)$, являющееся голоморфной сжимающей m -функцией. Таким образом, $B(\lambda) = G_{22}^*(\lambda) R(\lambda) G_{11}(\lambda) (I_m + X(\lambda; \Gamma) B(\lambda))$ принадлежит классу $H_{n \times m}^\infty$. $\square$

Замечание 3.1. Так как $B(\lambda) \equiv 0$ есть внутренняя точка гипершара $|B| \leq 1$ при каждом $\lambda \in R$, то $|S_0(\lambda)| < 1 \quad \forall \lambda \in R$. Кроме того, $S_0(\infty) = 0$. Поэтому

$$\max |S_0(\lambda)| \quad \forall \lambda \in R \cup \{\infty\} < 1.$$

Теорема 3.2. Формулой (3.1), где $B \in B_{n \times m} \cap W_{n \times m}^+$, дается описание всех m -функций $S(\lambda)$ со свойствами:

1) $|S(\lambda)| \leq 1$ всюду на вещественной оси R ,

2) имеет место представление

$$S(\lambda) = S(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (\lambda \in R) \quad (3.2)$$

при некотором $\tilde{\Gamma} \in L_{n \times m}^1(R)$, являющемся продолжением заданного Γ ($\Gamma = \tilde{\Gamma}|_{R_+}$). При этом, всегда $S(\infty) = B(\infty)$.

Доказательство. Ясно, что если $B \in W_{n \times m}^+$, то и $(G_{11} + G_{12} B) \in W_{n \times m}^+$. Если еще $B \in B_{n \times m}$, то как было доказано в теореме 3.1, существует и, следовательно, принадлежит классу $W_{n \times m}^+$ m -функция $(G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1}$. Поэтому m -функция $S(\lambda)$, полученная по формуле (3.1), принадлежит классу $W_{n \times m}^+$ и, стало быть, допускает представление (3.2).

При этом, m -функция $\tilde{\Gamma}(t)$ ($t \in R$) является продолжением заданного $\Gamma(t)$ ($t \in R_+$) в силу того, что $S(\lambda)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 3.1.

Обратно, пусть некоторая m -функция $S(\lambda)$ ($\lambda \in R$) обладает свойствами 1) и 2) теоремы 3.2. Тогда она подавно будет обладать свойствами 1) и 2) теоремы 3.1 и, стало быть, будет представима формулой (3.1) с некоторым $B \in B_{n \times m}$. Выразим $B(\lambda)$ через $S(\lambda)$. Так как эти m -функции связаны соотношением (3.1), то $B(\lambda)$ выражается дробно-линейным преобразованием $S(\lambda)$ с помощью m -функции $G^{-1}(\lambda) = -J G^*(\lambda) J$ (см. [15]) в виде

$$B(\lambda) = (-G_{12}^*(\lambda) + G_{22}^*(\lambda) S(\lambda))(G_{11}^*(\lambda) + (G_{21}^*(\lambda) S(\lambda))^{-1}).$$

Вместе с S классу $W_{n \times n}$ принадлежит, очевидно, и $(-G_{12}^*(\lambda) + G_{22}^*(\lambda) S(\lambda))$.

Что касается m -функции $(G_{11}^*(\lambda) + G_{21}^*(\lambda) S(\lambda))^{-1}$, то она также принадлежит классу $W_{n \times m}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} (G_{11}^*(\lambda) + G_{21}^*(\lambda) S(\lambda))^{-1} &= [G_{11}^*(\lambda) (I_m + (G_{11}^*(\lambda))^{-1} G_{21}^*(\lambda) S(\lambda))]^{-1} = \\ &= (I_m + S_0^*(\lambda) S(\lambda))^{-1} (G_{11}^*(\lambda))^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $\max |S_0(\lambda)|; \forall \lambda \in R \cup \{\infty\} < 1$, то существует и, следовательно, принадлежит $W_{m \times m}$ m -функция $(I_m + S_0^*(\lambda) S(\lambda))^{-1}$. Поэтому

классу $W_{m \times m}$ принадлежит m -функция $(G_{11}^*(\lambda) + G_{21}^*(\lambda) S(\lambda))^{-1}$, а потому $B \in W_{n \times m}^+$. Соотношение $S(\infty) = B(\infty)$ непосредственно следует из формулы (3.1) и равенства $G(\infty) = I_{m+n}$. $\square$

§ 4. Унитарные продолжения, порожденные квадратным сжимающим ганкелевым оператором

1. Всюду в этом параграфе предполагается, что $\Gamma(t)$ — квадратная m -функция порядка n , порождающая сжимающий ганкелев оператор Γ ($\Gamma \in L_{n \times n}^L(R_+)$; $\|\Gamma\|_2 < 1$). Простым следствием теоремы 3.1 является

Теорема 4.1. Формулой (3.1), где $B \in W_{n \times n}$ и принимает почти всюду на оси унитарные значения, дается описание множества всех измеримых на оси R $(n \times n)$ -матриц-функций $S(\lambda)$ ($\lambda \in R$) со свойствами

1) $S(i)$ -унитарная m -функция почти всюду на R ,

2) $S(\lambda) \rightarrow F_- (\Gamma; \lambda) \in H_{n \times n}^\infty$.

Для дальнейшего нам понадобятся конечное матричное произведение Бляшке—Потапова (сокращенно БП-произведение). Оно имеет вид

$$\Pi(z) = U \prod_{j=1}^p \left[I_n - \left(\frac{z - \alpha_j}{z + \alpha_j} - 1 \right) P_j \right] \quad (z \in C).$$

Здесь U — унитарная матрица порядка n , P_j — самосопряженные идемпотентные матрицы того же порядка

$$(P_j^* = P_j^2 = P_j; j = \overline{1, p}), \quad \text{а} \quad \alpha_j \in C_+ (j = \overline{1, p}).$$

Легко видеть, что $\Pi(z)$ обладает следующими свойствами:

1) $\Pi(z)$ — голоморфная m -функция в C_+ ,

2) $|\Pi(z)| \leq 1 \quad \forall z \in C_+$,

3) $\Pi(z)$ — непрерывная унитарная m -функция на сомкнутой вещественной оси $\widehat{R} = R \cup \{\infty\}$ ($\Pi(+\infty) = \Pi(-\infty)$).

Этими свойствами конечное БП-произведение характеризуется полностью. Иными словами можно утверждать следующее (см. [16]).

1°. Для того, чтобы заданная $(n \times n)$ -матрица-функция $\Pi(z)$ ($z \in C_+$) совпадала с некоторым конечным БП-произведением, необходимо и достаточно, чтобы $\Pi(z)$ обладала свойствами 1)–3),

Отметим, что $\det \Pi(z) = (\det U) \prod \left(\frac{z - \alpha_j}{z + \alpha_j} \right)^{r_j}$, где r_j равен рангу

P_j ($r_j = \text{rang } P_j = \dim P_j C^n, j = \overline{1, p}$). Таким образом

$$\text{ind } \det \Pi(z) = \sum_{j=1}^p r_j. \quad (4.1)$$

Теперь мы можем дополнить теорему 4.1 следующим предложением.

Теорема 4.2. Для того, чтобы некоторая непрерывная унитарная на сомкнутой оси $\widehat{R} = R \cup \{\infty\}$ m -функция $S(\lambda)$ ($S(\lambda) \times S^*(\lambda) = S^*(\lambda) S(\lambda) = I_n \forall \lambda \in \widehat{R}$; $S(+\infty) = S(-\infty)$) обладала свойством

1) $S(\lambda) - F_-(\Gamma; \lambda) \in H_{n \times n}^+$, необходимо и достаточно, чтобы в ее представлении (3.1) m -функция $B(\lambda)$ была бы конечным БП-произведением.

Если это условие выполнено, то:

а) $S \in \mathcal{W}_{n \times n}$ и допускает представление

$$S(\lambda) = U + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

где $\tilde{\Gamma} \in \Gamma_{n \times n}^1(R)$ и $\tilde{\Gamma}|_{R_+} = \Gamma$.

б) Все частные индексы $S(\lambda)$ неотрицательны; более того, они совпадают, соответственно, с частными индексами $B(\lambda)$, и следовательно

$$\text{ind det } S(\lambda) = \text{ind det } B(\lambda). \quad (4.2)$$

В пояснение условия б) отметим, что если $(n \times n)$ -матрица-функция $S(\lambda)$ имеет представление (3.2) и $\det S(\lambda) \neq 0$ ($\lambda \in R$), то согласно общим теоремам из [14] она допускает правую (левую) факторизацию, т. е. представление вида

$$S(\lambda) = L_+(\lambda) D(\lambda) L_-(\lambda) \quad (S(\lambda) = R_-(\lambda) D(\lambda) R_+(\lambda)), \quad (4.3)$$

где $D(\lambda)$ — диагональная m -функция $\left\| \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i} \right)^{x_j} \delta_{jk} \right\|_{j,k=1}^n$, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ — некоторые целые числа, а $L_{\pm}(\lambda)$ ($R_{\pm}(\lambda)$) — голоморфные в $C_{\pm}$ и непрерывные в $\overline{C}_{\pm}$ порядка $(n \times n)$ m -функции, причем $\text{rang } L_{\pm}(\lambda) = n$ ($\text{rang } R_{\pm}(\lambda) = n$) $\forall \lambda \in \overline{C}_{\pm}$. Числа x_j ($j = 1, n$) называются правыми (левыми) частными индексами m -функции $S(\lambda)$. Если же m -функция $S(\lambda)$ унитарна ($S^*(\lambda) = S^{-1}(\lambda)$), то легко видеть, что системы правых и левых частных индексов совпадают, и поэтому можно говорить просто о системе индексов $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ m -функции $S(\lambda)$. Отметим также, что $\text{ind det } S(\lambda) = \sum_{j=1}^n x_j$.

Доказательство теоремы: Пусть унитарная m -функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условию 1). Тогда по теореме 4.1 она будет допускать представление (3.1) с $B(\lambda)$ ($\in B_{n \times n}$), принимающим унитарные значения на R . При этом условие непрерывности на $\widehat{R}$ для $S(\lambda)$ эквивалентно условию непрерывности на $\widehat{R}$ для $B(\lambda)$. Таким образом, для $B(\lambda)$ выполняются условия 1)–3) и, стало быть, является конечным БП-произведением.

Условие а) является следствием теоремы 3.2, поскольку, как легко видеть, всякое конечное БП-произведение принадлежит множеству $B_{n \times n} \cap \mathcal{W}_{n \times n}^+$.

Для доказательства условия б) преобразуем представление (3.1) m -функции $S(\lambda)$ к виду (4.3). Имеем

$$\begin{aligned} & (G_{21}(\lambda) + G_{22}(\lambda) B(\lambda))(G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} = \\ & = G_{22}(\lambda)(G_{22}^{-1}(\lambda) G_{21}(\lambda) B^*(\lambda) + I_n) B(\lambda)(G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} = \\ & = G_{22}(\lambda)(X^*(\lambda) B^*(\lambda) + I_n) B(\lambda)(G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1}. \end{aligned}$$

Обратимость $G_{22}(\lambda)(X^*(\lambda) B^*(\lambda) + I_n)$ следует из теоремы 2.1 и условия $|X^*(\bar{\lambda}) B^*(\bar{\lambda})| \leq q < 1 \quad \forall \lambda \in C_-$. Таким образом, представление (3.1) сведется к виду (4.3), коль скоро к тому же виду преобразуется $B(\lambda)$. Это доказывает, что частные индексы $S(\lambda)$ совпадают с частными индексами $B(\lambda)$, а последние неотрицательны, так как $B(\lambda)$ голоморфна в C_+ . $\square$

Следствие 4.1. Существует такое продолжение $\tilde{\Gamma}$ m -функции Γ ($\tilde{\Gamma}|_{R_+} = \Gamma$), что представление (4.3) m -функции $S(\lambda)$ имеет наперед заданный диагональный множитель $D(\lambda)$, а следовательно, наперед заданные неотрицательные частные индексы.

В справедливости этого утверждения легко убедиться, заметив, что диагональная m -функция $D(\lambda) = \left\| \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i} \right)^{1/2} \delta_{jk} \right\|_{j,k=1}^2$ может быть представлена в виде БП-произведения.

Следствие 4.2. Для того, чтобы некоторая непрерывная на сомкнутой оси $\bar{R}$ унитарная m -функция $S(\lambda)$ ($S(\lambda) S^*(\lambda) = S^*(\lambda) S(\lambda) = I_n$; $S(+\infty) = S(-\infty)$) удовлетворяла условиям

$$1) \quad S(\lambda) = S(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

где $\tilde{\Gamma} \in L_{n \times n}^1(R)$ и $\tilde{\Gamma}|_{R_+} = \Gamma$;

2) $S(\lambda)$ допускает факторизацию с нулевыми частными индексами, необходимо и достаточно, чтобы в представлении (3.1) m -функция $B(\lambda)$ была бы постоянной унитарной матрицей, равной $S(\infty)$.

Утверждение непосредственно следует из сопоставления равенств (4.1) и (4.3).

Рассмотрим унитарную m -функцию $S(\lambda)$, удовлетворяющую условиям 1), 2) следствия 4.2. В дальнейшем для простоты записи положим $S(\infty) = I_n$. Это не ограничивает общности дальнейших рассуждений.

Подобно тому, как это было проделано в § 2 при доказательстве теоремы 2.2, по m -функции $S(\lambda)$ строится унитарный оператор U , действие которого в пространстве $L_{n \times 1}^2(R_+) \oplus L_{n \times 1}^2(R_-)$ задается блочной матрицей

$$U = \begin{bmatrix} I + T_+ & \Gamma_+ \\ \Gamma_- & I + T_- \end{bmatrix},$$

где операторы $T_{\pm}$ и $\Gamma_{\pm}$ определяются по формулам (2.10). Из унитарности оператора U ($UU^* = U^*U = I$) следует ряд соотношений для опе-

раторов $T_{\pm}$ и $\Gamma_{\pm}$. В частности, получаем $(I+T_{-})^{*}(I+T_{-})=I-\Gamma_{+}^{*}\Gamma_{+}$. Отсюда следует, что $\|\Gamma_{+}\|_2 \leq 1$. Однако знак равенства здесь исключается. В самом деле, так как оператор Γ_{+} вполне непрерывен, то условие $\|\Gamma_{+}\|_2=1$ означает, что оператор $(I-\Gamma_{+}^{*}\Gamma_{+})$ аннулируется на некотором ненулевом векторе $\varphi \in L_{n \times 1}^2(R_{+})$. Отсюда $0=((I-\Gamma_{+}^{*}\Gamma_{+})\varphi, \varphi)=((I+T_{+})^{*}(I+T_{-})\varphi, \varphi)=\|(I+T_{-})\varphi\|_2^2$. Но это противоречит условию 2), поскольку оно эквивалентно условию обратимости оператора $I+T_{-}$ (см. [14]).

Это вместе со следствием приводит к утверждению.

Теорема 4.3. Пусть $\Gamma \in L_{n \times n}^1(R_{+})$ и U -унитарная матрица порядка n . Для того, чтобы существовало продолжение $\tilde{\Gamma}_U \in L_{n \times n}^1(R)$ m -функции Γ ($\tilde{\Gamma}_U|_{R_{+}}=\Gamma$), которому по формуле

$$S_U(\lambda)=U+\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}_U(t) e^{-i\lambda t} dt$$

отвечала бы унитарная m -функция $S_U(\lambda)$ с нулевыми частными индексами, необходимо и достаточно, чтобы $\|\Gamma\|_2 < 1$, где Γ — ганкелев оператор, порожденный m -функцией $\Gamma(t)$.

При выполнении этого условия m -функция $S_U(\lambda)$, а с ней и продолжение $\tilde{\Gamma}$, определяются однозначно формулой (3.1) с $B(\lambda) \equiv U$.

В завершение этого параграфа рассмотрим как отражаются те или иные структурные свойства m -функции $\Gamma(t)$ на свойствах m -функции $S_U(\lambda)$.

Воспользовавшись замечанием 1.1 § 1, легко находим:

1) Если $\Gamma(t)=\Gamma^{*}(t) \forall t \in R_{+}$, то $\bar{S}_U(\lambda)=S_{U^{*}}^{-1}(\lambda)$, в частности, $\bar{S}_{I_n}(\lambda)=S_{I_n}^{-1}(\lambda) \forall \lambda \in R$.

2) Если $\Gamma(t)=\bar{\Gamma}(t) \forall t \in R_{+}$, то $\bar{S}_U(\lambda)=S_{\bar{U}}(-\lambda)$, в частности, $\bar{S}_{I_n}(\lambda)=S_{I_n}(-\lambda) \forall \lambda \in R$.

3) Если $\Gamma(t)=\Gamma^{*}(t)=\bar{\Gamma}(t) \forall t \in R_{+}$, то $\bar{S}_U(\lambda)=S_{U^{*}}^{-1}(\lambda)=S_{\bar{U}}(-\lambda)$, в частности, $\bar{S}_{I_n}(\lambda)=S_{I_n}^{-1}(\lambda)=S_{I_n}(-\lambda) \forall \lambda \in R$.

4) Если $\Gamma(t)=\Gamma^{*}(t) \forall t \in R_{+}$, то $S_U(-\lambda)=S_{U^{*}}^{-1}(\lambda) \forall \lambda \in R$.

(Продолжение в следующем номере).

Физико-химический институт АН УССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 23.VI.1983

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян. Некоторые приложения теоремы о факторизации унитарной матрицы, Функциональный анализ и его приложения, 4, вып. 1970, 73—75.
2. Ф. Э. Мелик-Адамян. О некоторых прямых и обратных задачах канонических дифференциальных уравнений, Кандидатская диссертация, Ереван, 1968.

3. М. Г. Крейн. К теории акселерант и S -матриц канонических дифференциальных систем, ДАН СССР, III, № 6, 1956, 1167—1170.
4. М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян. К теории S -матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом, ДАН Арм.ССР, XVI, № 4, 1968, 150—154.
5. В. М. Адамян, Д. Э. Аров, М. Г. Крейн. Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори-Феера и Шура, Функц. анализ и его прилож., 2, вып. 4, 1968, 1—17.
6. В. М. Адамян, Д. Э. Аров, М. Г. Крейн. Свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура—Такаги, Мат. сборник, 86 (128), 1971, 34—75.
7. В. М. Адамян, Д. Э. Аров, М. Г. Крейн. Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем. VI, № 2, 1971, 181—206.
8. В. М. Адамян. Невырожденные унитарные сцепления полуунитарных операторов. Функц. анализ и его прилож., 7, вып. 4, 1973, 1—16.
9. Д. Э. Аров, М. Г. Крейн. О вычислении энтропийных функционалов и их минимумов в неопределенных проблемах продолжений, Acta SCI, Mathem., 45, 1983, 33—50.
10. М. Г. Крейн. Континуальные аналоги предложений о многочленах ортогональных на единичной окружности, ДАН СССР, 105, № 4, 1955, 637—640.
11. Ф. Э. Мелик-Адамян. К теории матричных акселерант и спектральных матриц-функций канонических дифференциальных систем, ДАН Арм.ССР, XV, № 4, 1967, 145—151.
12. М. Г. Крейн, Г. К. Лангер. Континуальные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по индефинитному весу и связанные с ним проблемы продолжения, ДАН СССР, 258, № 3, 1981.
13. H. Dym and J. Gohberg, Hankel Integral Operators and Isometric Interpolants on the Line, Journ. of Functional Analysis, 54, № 3, December, 1983.
14. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 2 (80), 1958, 3—71.
15. М. Г. Крейн, Ю. А. Шмультян. О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, Мат. исслед., т. II, вып. 3, 1967, 64—96.
16. В. П. Потапов. Мультипликативная структура J -нерастягивающих матриц-функций, Тр. ММО, т. 4, 1955, 125—236.
17. М. Г. Крейн. Введение в геометрию индефинитных J -пространств и теория операторов в этих пространствах, Вторая летняя мат. школа, часть 1, «Наукова думка», Киев, 1965, 15—93.

THE LATER TO THE EDITOR

In my paper "On the equivalence of classes of infinitely differentiable functions" (cf. Izv. Akad. Nauk Armenian SSR, Ser. Mat. 19 (1984) 19—30) the text beginning with the line 16 from the top on page 28 and ending with the line 6 from the top on page 29 should be replaced by the following:

Let

$$f(x) = \delta \frac{T_{[r]}(l_1^{-1}x)}{U_{L^f}(r)} \quad x \in I, \quad r \geq 1.$$

Since

$$f^{(n)}(x) = \frac{\delta l_1^{-n} T_{[r]}^{(n)}(l_1^{-1}x)}{U_{L^f}(r)}, \quad \text{for } n \leq r,$$

$$= 0 \quad \text{for } n > r$$

and $|T_{[r]}^{(n)}(x)| \leq r^n e^{|x|}$ for all $x \in \mathbb{R}$, we have

$$|f^{(n)}(x)| \leq \delta r^n e^{l_1^{-1}l} L_n^f, \quad \text{for } x \in A_l \quad \text{and } n \leq r.$$

Thus $f \in F$. Also

$$p_{l_1}(f) = \sup_{n \leq r} \left\{ \max_{x \in A_{l_1}^f} |f^{(n)}(x)| \right\} (L_n^f)^{-1} =$$

$$= \frac{\delta}{U_{L^f}(r)} \sup_{n \leq r} \frac{l_1^{-n} |T_{[r]}^{(n)}(1)|}{L_n^f} =$$

$$= \frac{\delta}{U_{L^f}(r)} \sup_{n \leq r} \left(\frac{e}{2} \right)^n l_1^{-n} \frac{r^{2n}}{n^n L_n^f}$$

$$\leq \frac{\delta}{U_{L^f}(r)} \sup_{n \leq l_0} \frac{r^{2n}}{n^n L_n^f} = \delta.$$

Therefore, $f \in V_{j_0, l}$, where we can suppose $l_0 > l_1$. Thus for $n \leq r$

$$\frac{\delta l_1^{-n} |T_{[r]}^{(n)}(1)|}{U_{L^f}(r)} \leq j_0^{n+1} M_n^f$$

or

$$\delta \left(\frac{2}{en} \right)^n \left(\frac{r}{2} \right)^{2n} \frac{1}{U_{L^f}(r)} \leq j_0^{n+1} M_n^f.$$

Since for fixed n , this inequality holds for each $r \geq n$, we get

$$\delta \left(\frac{1}{4e} \right)^n \frac{1}{n^n} \sup_{n \leq r} \frac{r^{2n}}{U_{L^f}(r)} \leq j_0^{n+1} M_n^f$$

or

$$L_n^f \leq \delta^{-1} (4e)^n j_0^{n+1} M_n^f.$$

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ծ. Գ. Խաչատրյան. Ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ օպերատորների հետ կապված շրջան բանաձևերի մասին	265
Լ. Խեյնրիխ, Դ. Շտոյան. Պալմ-Խինչինի բանաձևերի ընդհանրացումներ	280
Յ. Ն. Հադուրյան, Ս. Մ. Խվանյան. Առանցքի և կիսառանցքի վրա որոշված 2-րդ աստիճանի դիֆերենցիալ օպերատորների և իրենց ֆունկցիաների անալիտիկ հատկությունները	299
Յու. Ռ. Իսախանյան և Յու. Մ. Սաֆյան. Դիֆերենցիալ ժամանակով պատահական պրոցեսների մի մասի գերբայական նկարագրությունները	294
Ե. Գ. Կրեյն, Յ. Է. Մելիք-Ադամյան. Հանկելյան ինտեգրալ օպերատորները և նրանց հետ կապված շարունակական խնդիրները	311
Պատասխան խմբագրությանը	333

СОДЕРЖАНИЕ

И. Г. Хачатрян. О формулах обращения, связанных с самосопряженными диффе- ренциальными операторами	265
Л. Хейнрих, Д. Штойян. Обобщения формул Пальма—Хинчина	280
Т. Н. Арутюнян, С. М. Иванян. Финитность потенциала и аналитические свой- ства функций Йоста системы Дирака 2n-го порядка на оси и полуоси	289
Ю. Р. Дашян, Ю. М. Сухов. Гиббсовское описание одного класса случайных про- цессов с дискретным временем	294
М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян. Интегральные ганкелевы операторы и связан- ные с ними проблемы продолжения	311
Письмо в редакцию	333

CONTENTS

I. G. Khachatryan. On inversion formulas connected with self-adjoint differen- tial operators	265
L. Heinrich, D. Stogan. On generalized Palm—Kchinechin	280
T. N. Harutunyan, S. M. Ivanian. The finiteness of the potential and analy- tic properties of the lost functions of the 2n order Dirac system on the axis and half-axis	289
Yu. R. Dashtan, Yu. M. Sakhov. Gibbs description of a class of random proces- ses with discrete time	294
M. G. Krain, F. E. Melik-Adamian. Integral Hankel operators and asso- ciated continuation	311
Letter to the editor	333