ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском английском французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

Գինը 85 կ.
ЦЕНА 85 к.

Индекс 77735

TO THE. AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Marshal Bagramian Ave.
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 3, 1984 Математика

УДК 517.988

А. Г. КАМАЛЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН

ОБ ОБРАЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОЧТИ РАЗНОСТНО-СУММАРНЫМ ЯДРОМ

Введение

Как известно (см. [1], § 7), исследование интегральных операторов на полупрямой с разностно-суммарным ядром сводится к решению задачи Римана с карлемановским сдвигом. С другой стороны, Л. А. Сахновичем ([2—4]) предложен метод обращения оператора общего вида с разностным ядром, основанный на предварительном решении четырех уравнений. Некоторые из этих результатов перенесены на случай разностно-суммарных ядер ([5]).

В работах [6, 7] были введены интегральные операторы с ядром K, „почти разностным" в том смысле, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)K(x, t)=\sum_{k=1}^{N}p_k(x)\,q_k(t). \tag{0.1}$$

Как оказалось, построение обратного оператора в этом случае аналогично случаю разностного ядра (т. е. когда $p_k = q_k \equiv 0$).

В работе [8] были изучены операторы с ядрами, удовлетворяющими уравнениям с частными производными, обобщающими соотношение (0.1). В частности ([8], § 4), было показано, что уравнение парного типа с ядрами вида (0.1) поддаются исследованию на разрешимость. Последние результаты, как и некоторые результаты работ [2—4], были перенесены на уравнения со многими ядрами типа (0.1) в работе [9]. В работе [13], по сути, также изучаются операторы подобного типа специальной структуры.

В предлагаемой работе изучаются интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими (в обобщенном смысле) в скалярном случае соотношению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)K(x, t)=\sum_{k=1}^{N}p_k(x)\,q_k(t). \tag{0.2}$$

Такие ядра естественно считать „почти разностно-суммарными".

Структура резольвентных ядер таких операторов изучалась в [8] (примеры 2, 3). Ниже показано, что на этот случай могут быть перенесены основные результаты работ [2—5, 9].

§ 1. Нётеровость некоторых интегральных операторов с почти разностно-суммарным ядром

1°. Рассмотрим в $L_n^2(R)$ интегральный оператор

$$(\widetilde{\mathbf{K}}y)(x)=\lambda y(x)+\mu y(-x)-\int_{-\infty}^{\infty}K(x,t)\,y(t)\,dt \tag{1.1}$$

с ядром следующего вида:

$$K(x,t)=\begin{cases} k_1(x-t)+r_1(x+t)+\displaystyle\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}p_1(u)\,q_1(\tau)\,du\,d\tau, & 0\leqslant t<\infty \\ k_2(x-t)+r_2(x+t)+\displaystyle\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}p_2(u)\,q_2(\tau)\,du\,d\tau, & -\infty<t<0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где λ, $\mu\in C$; k_i, r_i — матрицы-функции $(n\times n)$, p_i — $(n\times\alpha)(\alpha\geqslant 1)$ с элементами из $L^1(R)(i=1,2)$; q_i $(i=1,2)$ — матрицы-функции $(\alpha\times n)$ с элементами соответственно из $L^1(0,\infty)$ и $L^1(-\infty,0)$.

В (1.2) не входят значения $q_1(t)$ при $t<0$ и $q_2(t)$ при $t>0$, так что можно доопределить эти функции на всю прямую, считая $q_1(t)\equiv 0$ при $t<0$ и $q_2(t)\equiv 0$ при $t>0$.

Интеграл в (1.1) понимается в смысле сходимости в $L^2(R)$. Интегральное уравнение с оператором (1) запишем в общепринятой форме

$$\widetilde{\mathbf{K}}y=(\lambda J+\mu W-\mathbf{K})\,y=g, \tag{1.1'}$$

где

$$(Jy)(t)=y(t),\ (Wy)(t)=y(-t),$$

$$(\mathbf{K}y)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau.$$

В дальнейшем будем обозначать через S оператор сингулярного интегрирования вдоль вещественной оси с ядром Коши

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

а оператор умножения на матрицу-функцию $a(t)$ — той же буквой: $(a\varphi)(t)=a(t)\,\varphi(t)$.

Прямое и обратное преобразования Фурье, соответственно, обозначим

$$(F\varphi)(\xi)=\hat{\varphi}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\xi}\varphi(t)\,dt,\quad (F^{-}\varphi)(\xi)=\check{\varphi}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi}\varphi(t)\,dt.$$

Рассмотрим матрицы-функции

$$v_i(t)=\int_{-\infty}^{\infty}p_i(t-\tau)\,q_i(\tau)\,d\tau,\quad i=1,2 \tag{1.3}$$

$$w_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(t+\tau)\, q_i(\tau)\, d\tau, \quad i=1,\ 2. \tag{1.4}$$

В дальнейшем через E_n обозначим единичную матрицу.

Основным результатом § 1 является следующая

Теорема 1. *Пусть p_i $(i=1,\ 2)$ обладают первообразными, принадлежащими $L_n^1(R)$ и $|\lambda|-|\mu|\neq 0$. Тогда для того, чтобы интегральный оператор* (1.1) *был нётеров, необходимо и достаточно выполнение следующего условия*:

$$\Delta(t) = \det\begin{pmatrix} \lambda E_n - \hat{k}_1(-\xi) - i\xi^{-1}\hat{p}_1(-\xi)\hat{q}_1(\xi), & \mu E_n - \hat{r}_1(\xi) - i\xi^{-1}\hat{p}_1(\xi)\hat{q}_1(\xi) \\ -\mu E_n + \hat{r}_2(-\xi) + i\xi^{-1}\hat{p}_2(-\xi)\hat{q}_2(-\xi), & -\lambda E_n + \hat{k}_2(\xi) + i\xi^{-1}\hat{p}_2(\xi)\hat{q}_2(-\xi) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{1.5}$$

При выполнении (1.5) индекс интегрального оператора (1.1) вычисляется по формуле

$$\operatorname{Ind}\tilde{\mathbf{K}} = \operatorname{Ind}\Delta(t) = \operatorname{Var}\arg\Delta(t), \quad -\infty < t < +\infty. \tag{1.6}$$

2°. Доказательство теоремы 1 основано на сведении, при помощи преобразования Фурье, к сингулярному интегральному оператору с карлемановским сдвигом. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $\gamma(x,t)(-\infty < x,\ t < \infty)$ — измеримая по обеим переменным функция, обладающая следующими свойствами*:

а) *существуют функции $h_1,\ h_2 \in L^1(R)$ такие, что*

$$|\gamma(x,t)| < h_1(x-t) + h_2(x+t),$$

(б) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(x+h,t) - \gamma(x,t)|\, dt < \varepsilon \text{ при } |h| < \delta.$$

*Тогда $\gamma(x,t)$ порождает в каждом из пространств $L^p(R)\ (1 \leqslant \leqslant p \leqslant \infty)$ линейный ограниченный оператор**

$$(\Gamma y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x,t)\, y(t)\, dt.$$

Эта лемма во многом схожа с леммой 6.1 [10] и ее доказательство, приведенное в [10], с несущественными изменениями проходит и здесь.

Рассмотрим матрицу-функцию

$$\psi(x,t) = \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} p(u)\, q(\tau)\, du\, d\tau \tag{1.7}$$

* Для $y \in L^p(R)(1 < p < \infty)$ интеграл понимается в смысле сходимости в $L^p(R)$.

(где $p(x)$—матрица-функция $(n\times\alpha)$, $q(x)-(\alpha\times n)$ с элементами из $L^1(R)$); матрицы-функции $v^\pm(x)$, $w^\pm(x)$*

$$v^\pm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|p(x-t)||q_\pm(t)|\,dt,\quad w^\pm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|p(x+t)||q_\pm(t)|\,dt$$

и порождаемый $\psi(x,t)$ оператор

$$(\Psi y)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)\,y(t)\,dt. \tag{1.8}$$

Лемма 2.2. *Пусть матрица-функция $p(x)$ обладает первообразной из $L^1(R)$. Тогда (i) Ψ — ограниченный оператор на каждом из $L^p_n(R)$.* (ii) *В пространствах $L^1_n(R)$ и $L^2_n(R)$ для преобразования Фурье Ψ_y справедлива формула*

$$(\widehat{\Psi y})(\xi)=i2\pi\xi^{-1}\hat p(\xi)\left\{\left[\hat q_+(\xi)-\frac{1}{2}\,q(\xi)\right]\check y(\xi)-\right.$$

$$\left.-\left[\check q_+(\xi)-\frac{1}{2}\,\hat q(\xi)\right]\hat y(\xi)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat q(\eta)\check y(\eta)+\check q(\eta)\hat y(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta\right\}. \tag{1.9}$$

В операторной форме (1.9) примет вид

$$F\Psi=i2\pi\xi^{-1}\hat p\left\{\left(\hat q_+-\frac{1}{2}\hat q\right)F^- -\left(\check q_+-\frac{1}{2}\check q\right)F-\frac{1}{2}\,S(\hat q F^- +\check q F)\right\}. \tag{1.9'}$$

Доказательство. Легко видеть, что (*i*) достаточно доказать в скалярном случае ($n=1$).

Покажем, что в этом случае функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет условиям а, в) леммы 2.1

$$|\psi(x,t)|\leqslant\int_{x-t+2\tau}^{x+t}\int_0^t|p(u-\tau)||q_+(\tau)|\,d\tau du+$$

$$+\int_{x+t-2\tau}^{x-t}\int_0^t|p(u+\tau)||q_-(\tau)|\,d\tau du\leqslant\int_{x-t}^{x+t}(v^+ + w^-)(u)du\leqslant$$

$$\leqslant(V^+ + W^-)(x+t)+(V^+ - W^-)(x-t),$$

откуда следует свойство а).

$$|\psi(x+h,t)-\psi(x,t)|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{x+t}^{x+h+t}\int_0^t|p(u-\tau)\,q(\tau)|\,d\tau du+\int_{x-t}^{x+h-t}\int_0^t|p(u+\tau)\,q(\tau)|\,d\tau du\leqslant$$

---

* Всюду в § 1 под $\varphi_+(t)$ ($\varphi_-(t)$) будем понимать функции, равные нулю при $t<0$ ($t>0$) и $\varphi_+(t)-\varphi_-(t)=\varphi(t)$.

$$\leqslant |V^+(x+h+t)-V^+(x+t)|+|V^-(x+h+t)-V^-(x+t)|+$$
$$+|W^+(x+h-t)-W^+(x-t)|+|W^-(x+h-t)-W^-(x-t)|.$$

Из этого неравенства непосредственно вытекает свойство б), что и доказывает первую часть леммы.

Формулу (1.9) вначале докажем для $y(t)\in L^1(R)$. Пользуясь теоремой Фубини, получим

$$(\hat{\Psi}y)(\xi)=i\hat{p}(\xi)\xi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi}\left\{\int_0^t e^{i\xi\tau}q(\tau)\,d\tau\right\}y(t)\,dt-$$
$$-i\hat{p}(\xi)\xi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\xi}\left\{\int_0^t e^{-i\xi\tau}q(\tau)\,d\tau\right\}y(t)\,dt.$$

Обозначая, соответственно, через $J_1(\xi)$, $J_2(\xi)$ первый и второй интегральные члены последнего равенства, получим

$$(\hat{\Psi}y)(\xi)=i\xi^{-1}\hat{p}(\xi)[J_1(\xi)-J_2(\xi)]. \tag{1.10}$$

Имеем $J_1(\xi)=2\pi\hat{q}_+(\xi)\check{y}(\xi)-\hat{f}_+(\xi)$, где

$$f(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}q(\tau+t)\,y(t)\,dt.$$

Пользуясь равенствами

$$\hat{f}_+(\xi)=\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{f}(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta,\quad \hat{f}(\xi)=2\pi\hat{q}(\xi)\,\check{y}(\xi)$$

для $J_1(\xi)$ получим

$$\frac{1}{2\pi}J_1(\xi)=\left[\hat{q}_+(\xi)-\frac{1}{2}\hat{q}(\xi)\right]\check{y}(\xi)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{q}(\eta)\check{y}(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta. \tag{1.11}$$

Аналогично для $J_2(\xi)$ имеем

$$J_2(\xi)=2\pi\check{q}_+(\xi)\,\hat{y}(\xi)-2\pi\check{f}_+(\xi).$$

Воспользовавшись теперь тем, что

$$\check{f}_+(\xi)=\frac{1}{2}\check{f}(\xi)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\check{f}(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta,\quad \check{f}(\xi)=\check{q}(\xi)\,\hat{y}(\xi),$$

получим

$$\frac{1}{2\pi}J_2(\xi)=\left[\check{q}_+(\xi)-\frac{1}{2}\check{q}(\xi)\right]\hat{y}(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\check{q}(\eta)\hat{y}(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta. \tag{1.12}$$

Подстановкой (1.11) и (1.12) в (1.10) получим формулу (1.9) для $y\in L^1_n(R)$.

Рассмотрим два оператора

$$T_1 = F\Psi;\ T_2 = i2\pi\,\xi^{-1}\,\hat{p}\left\{\left(\hat{q}_+ - \frac{1}{2}\hat{q}\right)F^- - \left(\check{q}_+ - \frac{1}{2}\check{q}\right)F - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}S(\hat{q}F^- + \check{q}F)\right\}.$$

Нетрудно убедиться, что эти операторы являются линейными ограниченными операторами на $L^2_n(R)$ (по поводу ограниченности оператора S см. § 3 [11]).

В силу доказанного эти операторы совпадают на плотном в $L^2_n(R)$ множестве $L^1_n(R) \cap L^2_n(R)$, поэтому из-за непрерывности они совпадают на $L^2_n(R)$. Равенство $T_1 = T_2$ окончательно доказывают лемму.

Подставляя в (1.9) вместо $p(t)$, $q(t)$, $y(t)$ соответственно $p_i(t)$, $q_i(t)$, $y_\pm(t)$, получим для

$$(\Psi_i\,y_\pm)(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} p_i(u)\,q_i(\tau)\,du\,d\tau\right\} y_\pm(t)\,dt,\ i = 1, 2$$

следующие формулы:

$$(\widehat{\Psi_1 y_+})(\xi) = i\pi\,\xi^{-1}\,\hat{p}_1(\xi)\left\{\hat{q}_1(\xi)\,\check{y}_+(\xi) - \check{q}_1(\xi)\,\hat{y}_+(\xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{q}_1(\eta)\,\check{y}_+(\eta) + \check{q}_1(\eta)\,\hat{y}_+(\eta)}{\eta - \xi}\,d\eta\right\}, \tag{1.13}$$

$$(\widehat{\Psi_2 y_-})(\xi) = i\pi\,\xi^{-1}\,\hat{p}_2(\xi)\left\{\check{q}_2(\xi)\,\hat{y}_-(\xi) - \hat{q}_2(\xi)\,\check{y}_-(\xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{q}_2(\eta)\,\check{y}_-(\eta) + \check{q}_2(\eta)\,\hat{y}_-(\eta)}{\eta - \xi}\,d\eta\right\}. \tag{1.14}$$

Перейдем теперь к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы 1. Записывая $y(t)$ в виде разности $y(t) = y_+(t) - y_-(t)$ и подставляя в (1.1′), получим

$$(\bar{\mathbf{K}}y)(x) = \left\{\lambda y_+(x) + \mu y_+(-x) - \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{k}_1(x-t)\,y_+(t)\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} r_1(x+t)\,y_+(t)\,dt - (\Psi_1 y_+)(x)\right\} - \left\{\lambda y_-(x) + \mu y_-(-x) - \right. \tag{1.15}$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\,y_-(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} r_2(x+t)\,y_-(t)\,dt - (\Psi_2 y_-)(x)\right\} = g(x).$$

Применяя преобразование Фурье к обеим частям (1.15) и группируя коэффициенты при $\widehat{y}_+(\xi)$, $\widehat{y}_+(-\xi)$, $\widehat{y}_-(\xi)$, $\widehat{y}_-(-\xi)$, —пользуясь при этом формулами (1.13), (1.14),—получим

$$(\widehat{Ly})(\xi)=(F\overline{K}y)(\xi)=A_1(\xi)\widehat{y}_+(\xi)+A_2(\xi)\widehat{y}_-(\xi)+$$

$$+B_1(\xi)\widehat{y}_+(-\xi)+B_2(\xi)\widehat{y}_-(-\xi)+\frac{C_1(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_1(\eta)\widehat{y}_+(\eta)}{\eta-\xi}d\eta+ \tag{1.16}$$

$$\frac{C_2(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_2(\eta)\widehat{y}_-(\eta)}{\eta-\xi}d\eta+\frac{C_1(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_1(-\eta)\widehat{y}_+(-\eta)}{\eta-\xi}d\eta+$$

$$+\frac{C_2(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_2(-\eta)\widehat{y}_-(-\eta)}{\eta-\xi}d\eta=\widehat{g}(\xi),$$

где

$$A_j(\xi)=(-1)^{j+1}\left\{\lambda E_n-\widehat{k}_j(\xi)+(-1)^{j+1}\frac{i}{2}\xi^{-1}\widehat{p}_j(\xi)\widehat{q}_j(-\xi)\right\},$$

$$B_j(\xi)=(-1)^{j+1}\left\{\mu E_n-\widehat{r}_j(\xi)+(-1)^{j}\frac{i}{2}\xi^{-1}\widehat{p}_j(\xi)\widehat{q}_j(\xi)\right\}, \tag{1.17}$$

$$C_j(\xi)=(-1)^{j+1}\frac{i}{2}\xi^{-1}\widehat{p}_j(\xi),\quad D_j(\xi)=\widehat{q}_j(-\xi),\quad j=1,2.$$

Таким образом, уравнение (1,1′) свелось к своеобразной граничной задаче (для пары аналитических в верхней и нижней полуплоскости вектор-функций $\widehat{y}_\pm(\xi)$), содержащей сингулярный интегральный оператор.

Применяя формулы Племеля—Сохоцкого ([11], § 3) и пользуясь тем, что $S^2=J$ и $Sa-aS$, —при непрерывном $a(t)$, —вполне непрерывный оператор (см. [11], § 3), нетрудно убедиться в справедливости следующих формул:

$$\frac{C_1(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_1(\eta)\widehat{y}_+(\eta)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{1}{2}C_1(\xi)D_1(\xi)\widehat{y}(\xi)+$$

$$+\frac{C_1(\xi)D_1(\xi)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{y}(\eta)}{\eta-\xi}d\eta+(N_1\widehat{y})(\xi), \tag{1.18}$$

$$\frac{C_2(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_2(\eta)\widehat{y}_-(\eta)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{1}{2}C_2(\xi)D_2(\xi)\widehat{y}(\xi)-$$

$$-\frac{C_2(\xi)D_2(\xi)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{y}(\eta)}{\eta-\xi}d\eta+(N_2\widehat{y})(\xi), \tag{1.19}$$

$$\frac{C_1(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_1(-\eta)\,\hat{y}_-(-\eta)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{1}{2}C_1(\xi)\,D_1(-\xi)\,\hat{y}(-\xi)-$$

$$-\frac{C_1(\xi)\,D_1(-\xi)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{y}(\eta)}{\eta+\xi}d\eta+(N_3\hat{y})(\xi), \tag{1.20}$$

$$\frac{C_2(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_2(-\eta)\,\hat{y}_-(-\eta)}{\eta-\xi}d\eta=-\frac{1}{2}C_2(\xi)\,D_2(-\xi)\,\hat{y}(-\xi)+$$

$$+\frac{C_2(\xi)\,D_2(-\xi)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{y}(\eta)}{\eta+\xi}d\eta+(N_4\hat{y})(\xi), \tag{1.21}$$

где $N_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — вполне непрерывные операторы.

После подстановки формул Племеля—Сохоцкого и (1.18)—(1.21) в (1.16), получим

$$(\mathbf{L}\hat{y})(\xi)=a(\xi)\,\hat{y}(\xi)+b(\xi)\,\hat{y}(-\xi)+\frac{c(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{y}(\eta)}{\eta-\xi}d\eta+$$

$$+\frac{d(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{y}(\eta)}{\eta+\xi}d\eta+(N\hat{y})(\xi)=\hat{g}(\xi), \tag{1.22}$$

где

$$a(\xi)=\frac{1}{2}\{A_1(\xi)-A_2(\xi)+C_1(\xi)\,D_1(\xi)+C_2(\xi)\,D_2(\xi)\},$$

$$b(\xi)=\frac{1}{2}\{B_1(\xi)-B_2(\xi)-C_1(\xi)\,D_1(-\xi)-C_2(\xi)\,D_2(-\xi)\}, \tag{1.23}$$

$$c(\xi)=\frac{1}{2}\{A_1(\xi)+A_2(\xi)+C_1(\xi)\,D_1(\xi)-C_2(\xi)\,D_2(\xi)\},$$

$$d(\xi)=\frac{1}{2}\{B_1(\xi)+B_2(\xi)-C_1(\xi)\,D_1(-\xi)+C_2(\xi)\,D_2(-\xi)\},$$

а $(N\hat{y})(\xi)$ — вполне непрерывный оператор. Уравнение (1.22) является сингулярным интегральным уравнением со сдвигом Карлемана $\alpha(t)=-t$.

Как известно (§ 32, [11]) условие нётеровости оператора $\mathbf{L}$ в $L_n^2(R)$ определяется из соотношения

$$\Delta(\xi)=-\det\begin{pmatrix}a(-\xi)+c(-\xi) & b(\xi)+d(\xi)\\ d(-\xi)-b(-\xi) & c(\xi)-a(\xi)\end{pmatrix} \tag{1.24}$$

и индекс оператора $\mathbf{L}$ равен

$$\mathrm{Ind}\, \mathbf{L} = \mathrm{Ind}\, \Delta(\xi). \tag{1.25}$$

Но так как $(\hat{\mathbf{L}}\, y)(\xi) = (F\tilde{\mathbf{K}} y)(\xi)$, то есть $\mathbf{L}F = F\tilde{\mathbf{K}}$, то условия нётеровости $\mathbf{L}$ и $\tilde{\mathbf{K}}$ одни и те же, причем $\mathrm{Ind}\, \mathbf{L} = \mathrm{Ind}\, \tilde{\mathbf{K}}$. Чтобы закончить доказательство теоремы, остается подставить в (1.24) формулы (1.23), а в полученный результат — формулы (1.17).

3°. Приведем некоторые замечания.

Замечание 1. Предположения относительно первообразных p_i $(i=1, 2)$ (см. (1.3), (1.4)), в условии теоремы, нельзя отбросить или ослабить другими предположениями, так как нетрудно заметить, что при этом теряется непрерывность функций $(\tilde{\Psi}\, y_{\pm})(t)$ (см. форм. (1.13), (1.14)), что означает, что оператор $\tilde{\mathbf{K}}$ не переводит пространства $L_n^1(R)$, $L_n^2(R)$ в себя. Это следует из того простого факта, что преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции есть непрерывная функция.

Чтобы первообразные v_i, w_i $(i=1, 2)$ принадлежали пространству $L_n^1(R)$, достаточно, чтобы этим свойством обладала хотя бы одна из пары матриц-функций p_i, q_i $(i = 1, 2)$.

Замечание 2. Можно было бы рассматривать уравнения

$$\tilde{\mathbf{K}}_1\, y + \tilde{\mathbf{K}}_2 \bar{y} = g, \tag{1.26}$$

где $\tilde{\mathbf{K}}_i$ $(i = 1, 2)$— операторы вида $\tilde{\mathbf{K}}$ в (1.1). Нетрудно видеть, что преобразование Фурье переводит это уравнение в интегральное уравнение с обратным сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными значениями неизвестной функции. Теория Нётера этого уравнения дана в § 8 [11]. Используя эти результаты, можно выписать условия нётеровости уравнения (1.26) и найти индекс.

Замечание 3. В случае когда $|\lambda|-|\mu|=0$ в (1.1) надо еще наложить условие на бесконечности, обеспечивающее осмысленность формулы (1.6) (см. [1]).

Замечание 4. В скалярном случае $n=1$, $\alpha=1$ функция $K(x, t)$ в (1.2) есть не что иное, как обобщенное решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) K(x, t) = p(x)\, q(t)$$

в классе $L^1(R)$, где $p(x)\, q(t) = p_i(x)\, q_i(t)$ $(i = 1$ при $0 \leqslant t$, $i=2$ при $t < 0)$.

Замечание 5. В случае аналога уравнения Винера—Хопфа (когда в (1.2) $k_2(x) = r_2(x) = p_2(x) = q_2(x) = 0$ и (1.1) рассматривается для $x > 0$), определитель Δ в теореме 1.1 нужно считать равным элементу матрицы (1.5) в левом верхнем углу.

§ 2. Обращения общих интегральных операторов с почти разностно-суммарным ядром

1°. Рассмотрим интегральный оператор, действующий в $L_n^2(0, \omega)$ и определенный формулой

$$K_\omega = P_\omega + \Psi_\omega, \tag{2.1}$$

где

$$(P_\omega y)(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\omega y(t)\,[k(x-t) + r(x+t)]\,dt \tag{2.2}$$

$$(\Psi_\omega y)(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\omega y(t)\left\{\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\tau)\,p(u)\,du\,d\tau\right\} dt, \tag{2.3}$$

где элементы k'_{kl}, r'_{kl} $(1 \leqslant k,\ l \leqslant n)$, p_{kl} $(1 \leqslant k \leqslant \alpha,\ 1 \leqslant l \leqslant n)$, q_{kl} $(1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant \alpha)$ матриц $k'(x)$, $r'(x)$, $p(x)$, $q(x)$ принадлежат, соответственно, $L^2(-\omega, \omega)$, $L^2(0, 2\omega)$, $L^2(-\omega, 2\omega)$, $L^2(0, \omega)$.

Существенную роль в дальнейшем будут играть матрицы-функции $N_k(x)$, $M_k(x)$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$, $Q(x, t)$, удовлетворяющие соотношениям (E_n — единичная матрица)

$$\begin{aligned} &K_\omega N_1 = E_n && K^*_\omega M_1 = N^*(x) \\ &K_\omega N_2 = xE_n && K^*_\omega M_2 = N^*_0(x) \\ &K_\omega N_3 = M(x) && K^*_\omega M_3 = E_n \\ &K_\omega N_4 = M_0(x) && K^*_\omega M_4 = xE_n \\ &K_\omega N_5 = p(x) && K^*_\omega M_5 = N^*_p(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$Q(x, t) = \sum_{l=1}^{5} M^*_l(t)\,N_l(x), \tag{2.5}$$

где строки матриц N_k, M_k $(k=1, 2, \cdots, 5)$ принадлежат $L^2_n(0, \omega)$, а

$$M(x) = -[k(x) + r(x)], \quad M_0(x) = k'(x) - r'(x),$$

$$N(x) = k(-x) + r(x) + \int_0^x q(\tau)\int_{\tau-x}^{x-\tau} p(t)\,dt\,d\tau, \tag{2.6}$$

$$N_0(x) = k'(-x) + r'(x) + \int_0^x q(t)\,[p(x-t) - p(t-x)]\,dt;$$

$$N_p(x) = 2\int_0^x (t-x)\,q(t)\,dt.$$

Через $W^{(l)}_{2,n}$ обозначим совокупность l раз дифференцируемых вектор-функций $\varphi(x)$ таких, что $\varphi^{(l)}(x) \in L^2_n(0, \omega)$. На $W^{(3)}_{2,n}$ определим оператор

$$T\varphi = \varphi(0)\,N_1(x) + \varphi'(0)\,N_2(x) - \int_0^\omega \varphi''(t)\,Q(x, t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_x^{\omega}\varphi'(t-x)N_1(t)\,dt-\frac{1}{2}\varphi'(0)\int_x^{\omega}N_1(u)\,du+$$

$$+\frac{1}{2}\varphi''(0)\int_x^{\omega}\int_v^{\omega}N_1(u)\,dudv+$$

$$+\frac{1}{2}\int_x^{\omega}\varphi''(t-x)N_2(t)\,dt-\frac{1}{2}\varphi''(0)\int_x^{\omega}N_2(u)\,du- \tag{2.7}$$

$$-\frac{1}{2}\int_x^{\omega}\int_0^{\omega+x-t}\varphi'''(t-x+u)\,Q(t,u)\,dudt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_x^{\omega}\int_{t-x}^{\omega}\varphi'''(x-t+u)\,Q(t,u)\,dudt.$$

Легко видеть, что $T\varphi\in L_n^2(0,\omega)$.

Пусть

$$(A_0y)(x)=-\int_0^x\int_0^t y(u)\,dudt,\quad y\in L_n^2(0,\omega). \tag{2.8}$$

Соответственно получаем

$$(A_0^*y)(x)=-\int_x^{\omega}\int_t^{\omega}y(u)\,dudt,\ y\in L_n^2(0,\omega). \tag{2.9}$$

2°. В работах Л. А. Сахновича [2, 3] и И. И. Кальмушевского [5] показано, что в случае разностного и разностно-суммарного ядер построение обратного оператора сводится к нахождению конечного числа функций типа N_k и M_k. Покажем, что эти результаты переносятся на случай оператора K_ω.

Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Для любого ограниченного оператора K_ω вида (1)—(3) имеет место равенство*

$$(A_0K_\omega-K_\omega A_0^*)\,y=$$

$$=\int_0^{\omega}y(t)\,[M(x)+N(t)+N_0(t)\,x+tM_0(x)+N_p(t)\,p(x)]\,dt. \tag{2.10}$$

Доказательство. Как и в [5] доказывается равенство

$$(A_0P_\omega-P_\omega A_0^*)\,y=$$

$$=\int_0^{\omega}y(t)\,\{-[k(x)+r(x)]+[k(-t)+r(t)]\}\,dt+ \tag{2.11}$$

$$+\int_0^\infty y(t)\{[k'(-t)+r'(t)]x+t[k'(x)-r'(x)]\}\,dt.$$

Учитывая (2.3) и (2.8) имеем

$$A_0\Psi_\infty y=\int_0^\infty y(v)\int_0^v q(\tau)\left\{\int_{v-\tau}^{x+v-\tau} p(t)\,dt+\int_{x-v+\tau}^{\tau-v} p(t)\,dt\right\}d\tau dv+$$

$$+x\int_0^\infty y(v)\left\{\int_0^v q(\tau)[p(v-\tau)-p(\tau-v)]\,d\tau\right\}dv.$$

Окончательно получаем

$$A_0\Psi_\infty y=\int_0^\infty y(v)\int_0^v q(\tau)\left\{\int_{x-v+\tau}^{x+v-\tau} p(t)\,dt\right\}d\tau dv+$$

$$+\int_0^\infty y(v)\int_0^v q(\tau)\left\{\int_{\tau-v}^{v-\tau} p(t)\,dt\right\}d\tau dv+ \tag{2.12}$$

$$+x\int_0^\infty y(v)\left\{\int_0^v q(\tau)[p(v-\tau)-p(\tau-v)]\,d\tau\right\}dv.$$

Учитывая (2.3) и (2.9) имеем

$$\Psi_\infty A_0^* y=-\int_0^\infty y(v)\int_0^v q(\tau)\left\{\int_\tau^v [p(x+t-\tau)+p(x-t+\tau)]\right\}d\tau dv+$$

$$+2\int_0^\infty y(v)\left\{\int_0^v (v-t)\,q(t)\,dt\right\}p(x)\,dv.$$

Окончательно получаем

$$\Psi_\infty A_0^* y=\int_0^\infty y(v)\int_0^v q(\tau)\left\{\int_{x-v+\tau}^{x+v-\tau} p(t)\,dt\right\}d\tau dv+$$

$$+\int_0^\infty y(v)\,N_p(v)\,p(x)\,dv. \tag{2.13}$$

Из (2.11), (2.12)), (2.13) получаем утверждение леммы. Формулу (2.10) можно записать в виде

$$(A_0K_\infty-K_\infty A_0^*)\,y=(y,N^*)E_n+(y,N_0^*)xE_n+$$

$$+(y,E_n)M(x)+(y,tE_n)M_0(x)+(y,N_p^*)p(x). \tag{2.14}$$

Лемма 2.2. *Если существует ограниченный оператор T_ω, обратный оператору K_ω, то имеет место следующее равенство*:

$$(T_\omega A_0 - A_0^* T_\omega)\, y = \int_0^\omega y(t)\, Q(x, t)\, dt. \qquad (2.15)$$

Доказательство леммы следует из равенства $T_\omega A_0 - A_0^* T_\omega = T_\omega (A_0 K_\omega - K_\omega A_0^*) T_\omega$, и формул (2.14), (2.4), (2.5). Операторные уравнения вида (2.15) рассматривались в работе [12]. Следующая теорема непосредственно следует из результатов, полученных в указанной работе.

Теорема 2.1. *Пусть ограниченный оператор T_ω удовлетворяет уравнению* (2.15). *Тогда справедливо равенство*

$$T_\omega y = -\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\omega y(s)\, \frac{\partial^2}{\partial s^2}\, \Phi(x, s)\, ds, \qquad (2.16)$$

где

$$\Phi(x, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x+s}^{2\omega+x-s}\int_{x-s}^{u-2\omega} Q\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv\,du + V(x+s), & x-s \leqslant 0, \\[2ex] \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x+s}^{2\omega-x+s}\int_{x-s}^{2\omega-u} Q\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv\,du + V(x+s), & x-s \geqslant 0, \end{cases}$$

а $V(x)$—некоторая матрица-функция такая, что $V(x) \equiv 0$ при $x > \omega$.

Таким образом, обращение оператора K_ω сводится к нахождению матриц-функций $N_k(x)$, $M_k(x)$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$ и $V(x)$.

3°. В работе [4] Л. А. Сахновичем предложен метод нахождения правого обратного оператора на $W_{2,n}^{(2)}$ для оператора с матричным ядром, зависящим от разности аргументов. Этот метод, опирающийся, казалось бы существенно, на разностую структуру ядра, на самом деле может быть перенесен на случай оператора K_ω.

Теорема 2.2. *Пусть оператор K_ω, определенный по формулам* (2.1)—(2.3), *ограничен в пространстве $L_n^2(0, \omega)$ и существуют матрицы-функции $N_k(x)$, $M_k(x)$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$ с элементами из $L^2(0, \omega)$, удовлетворяющие соотношениям* (2.4). *Тогда оператор T, определенный по формуле* (2.7) *на $W_{2,n}^{(3)}$, — правый обратный для оператора K_ω, т. е.*

$$K_\omega T\varphi = \varphi, \quad \varphi \in W_{2,n}^{(3)}. \qquad (2.17)$$

Доказательство. Положив $L_1 = N_1$ и $L_2 = N_2$, введем матрицы-функции L_m $m=3, 4\cdots$ рекуррентным соотношением

$$\frac{1}{m(m+1)} L_{m+2} = -\left\{\int_0^\omega L_m(t)\, N(t)\, dt\, N_1(x) + \right.$$

$$+\int_0^\infty L_m(t)\,N_0(t)\,dt\cdot N_2(x)+\int_0^\infty L_m(t)\,dt\cdot N_3(x)+$$

$$+\int_0^\infty L_m(t)\,t\,dt\cdot N_4(x)+\int_0^\infty L_m(t)\,N_p(t)\,dt\cdot N_5(x)\Big|+\int_x^\infty L_m(t)\,(t-x)\,dt. \tag{2.18}$$

Действуя оператором K_ω на обе части равенств (2.18) и пользуясь формулой (2.10), полагая $y=L_m$, получим

$$A_0\,K_\omega\,L_m=-\frac{1}{m(m+1)}\,K_\omega\,L_{m+2},\ m=1,2,\cdots. \tag{2.19}$$

Вспомнив теперь формулы (2.4), по индукции получим следующие соотношения:

$$K_\omega\,L_m=x^{m-1}E_n,\ m=1,2,\cdots. \tag{2.20}$$

Следуя [4], положим

$$B(x,\lambda)=\sum_{m=0}^\infty\frac{(i\lambda)^m}{m!}\,L_{m+1}. \tag{2.21}$$

Введем норму матрицы $A(x)=\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ следующим образом:

$$\|A(x)\|=\left(\sum_{i,j=1}^n\int_0^\infty|a_{ij}|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Из соотношения (2.18) имеем

$$\|L_{m+2}\|\leqslant Cm(m+1)\|L_m\|,\ \text{т. е.}\ \|L_{m+2}\|<C^m(m+1)!,$$

откуда и вытекает сходимость ряда (2.21) при $|\lambda|<C^{-1}$.

Из (2.20) и (2.21) следует соотношение

$$K_\omega\,B(x,\lambda)=e^{i\lambda x}E_n. \tag{2.22}$$

Пользуясь формулами (2.18), (2.21) получим

$$B(x,\lambda)=u(x,\lambda)-\lambda^2\int_x^\infty B(t,\lambda)(t-x)\,dt, \tag{2.23}$$

где

$$u(x,\lambda)=\sum_{i=1}^5 a_i(\lambda)\,N_i(x), \tag{2.24}$$

$$a_1(\lambda)=E_n+\lambda^2\int_0^\infty B(t,\lambda)\,N(t)\,dt,$$

$$a_2(\lambda)=i\lambda E_n+\lambda^2\int_0^\infty B(t,\lambda)\,N_0(t)\,dt,\ a_3(\lambda)=\lambda^2\int_0^\infty B(t,\lambda)\,dt,$$

$$a_4(\lambda)=\lambda^2\int_0^\infty B(t,\lambda)\,t\,dt\ \ a_5(\lambda)=\lambda^2\int_0^\infty B(t,\lambda)\,N_p(t)\,dt, \tag{2.25}$$

Решая интегральное уравнение (2.23), получим

$$B(x, \lambda) = u(x, \lambda) - \lambda \int_x^\infty u(t, \lambda) \sin[\lambda(t-x)]\, dt. \tag{2.26}$$

В силу аналитичности $B(x, \lambda)$, $e^{i\lambda x}$, $\sin[\lambda(t-x)]$ по λ формулы (2.22), (2.24) — (2.26), доказанные при условии $\lambda < C^{-1}$, остаются верными при всех λ.

Пользуясь (2.22) формулу (2.24) можно записать в виде

$$u(x, \lambda) = N_1(x) + i\lambda N_2(x) + \lambda^2 \int_0^\infty e^{i\lambda t} Q(x, t)\, dt. \tag{2.27}$$

Подставляя (2.27) в формулу (2.26), получим

$$B(x, \lambda) = N_1(x) + i\lambda N_2(x) + \lambda^2 \int_0^\infty e^{i\lambda t} Q(x, t)\, dt +$$

$$+ \frac{i\lambda}{2} \int_x^\infty e^{i\lambda(t-x)} N_1(t)\, dt - \frac{i\lambda}{2} \int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)} N_1(t)\, dt - \frac{\lambda^2}{2} \int_x^\infty e^{i\lambda(t-x)} N_2(t)\, dt +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2} \int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)} N_2(t)\, dt + \frac{i\lambda^3}{2} \int_x^\infty e^{i\lambda(t-x)} \int_0^\infty e^{i\lambda u} Q(t, u)\, du dt -$$

$$- \frac{i\lambda^3}{2} \int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)} \int_0^\infty e^{i\lambda u} Q(t, u)\, du dt. \tag{2.28}$$

Введем теперь матрицы-функции

$$B_{++}(x, \lambda) = N_1(x) + i\lambda N_2(x) + \lambda^2 \int_0^\infty e^{i\lambda t} Q(x, t)\, dt +$$

$$+ \frac{i\lambda}{2} \int_x^\infty e^{i\lambda(t-x)} N_1(t)\, dt - \frac{i\lambda}{2} \int_x^\infty N_1(u)\, du - \frac{\lambda^2}{2} \int_x^\infty \int_v^\infty N_1(u)\, du dv - \tag{2.29}$$

$$- \frac{\lambda^2}{2} \int_x^\infty e^{i\lambda(t-x)} N_2(t)\, dt + \frac{\lambda^2}{2} \int_x^\infty N_2(u)\, du +$$

$$+ \frac{i\lambda^3}{2} \int_x^\infty \int_0^{\infty+x-t} e^{i\lambda(t-x+u)} Q(t, u)\, du dt - \frac{i\lambda^3}{2} \int_x^\infty \int_{t-x}^\infty e^{i\lambda(x-t+u)} Q(t, u)\, du dt,$$

$$B_{+-}(x, \lambda) = \frac{i\lambda^3}{2} \int_x^\infty \int_{\infty+x-t}^\infty e^{i\lambda(t-x+u)} Q(t, u)\, du dt, \tag{2.30}$$

$$B_-(x,\lambda)=\frac{\lambda^3}{2}\left\{-\int_x^\omega e^{i\lambda(x-t)}\int_t^\omega\int_v^\omega N_1(u)\,du\,dv\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_x^\omega e^{i\lambda(x-t)}\int_t^\omega N_2(u)\,du\,dt+\int_x^\omega\int_0^{t-x} e^{i\lambda(x-t+u)}\,Q(t,u)\,du\,dt,\right. \tag{2.31}$$

$$B_+(x,\lambda)=B_{++}(x,\lambda)+B_{+-}(x,\lambda). \tag{2.32}$$

Сравнивая (2.28), (2.31), (2.32), получаем

$$B(x,\lambda)=B_+(x,\lambda)+B_-(x,\lambda). \tag{2.33}$$

Подобно [4] доказывается равенство

$$K_\omega B_-(x,\lambda)=0,\ K_\omega B_+(x,\lambda)=e^{i\lambda x}E_n. \tag{2.34}$$

Далее из (2.29), (2.30), (2.32), (2.34) следует

$$\frac{1}{|\lambda|^3}\|e^{-i\omega\lambda}B_{+-}(x,\lambda)\|=O(1),\ \lambda\to\infty,\ \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0,$$

$$\frac{1}{|\lambda|^3}\|e^{-i\omega\lambda}B_{++}(x,\lambda)\|=O(1),\ \lambda\to\infty,\ \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0,$$

$$K_\omega(e^{-i\omega\lambda}B_{+-}(x,\lambda))=e^{i\lambda(x-\omega)}-K_\omega(e^{-i\lambda\omega}B_{++}(x,\lambda)),$$

откуда, в силу аналитичности $\frac{1}{\lambda^3}K_\omega(e^{-i\omega\lambda}B_{+-}(x,\lambda))$ по λ, вытекают равенства

$$K_\omega B_{+-}(x,\lambda)=0,\ K_\omega B_{++}(x,\lambda)=e^{i\lambda x}E_n. \tag{2.35}$$

Из формул (2.7) и (2.29) следует

$$B_{++}(x,\lambda)=Te^{ix\lambda}E_n. \tag{2.36}$$

Согласно (2.35) и (2.36) верно соотношение

$$K_\omega T e^{i\lambda x}E_n=e^{i\lambda x}, \tag{2.37}$$

из которого следует справедливость теоремы 2.2.

4°. Полученные результаты в основном распространяются на ядра „мозаичного“ типа (сравнить с [8]).

Пусть заданы два набора чисел $0=a_1<a_2<\cdots<a_{m_1+1}=\omega$, $0=b_1<b_2<\cdots<b_{m_2+1}=\omega$ и матриц-функций $K_{ij}(x,t)(1\leqslant j\leqslant m_1,$ $1\leqslant i\leqslant m_2)$, заданных на прямоугольниках $[b_i,b_{i+1}]\times[a_j,a_{j+1}]$ и имеющих вид

$$K_{ij}(x,t)=k_{ij}(x-t)+r_{ij}(x+t)+\int_{a_j}^{t}\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}q_{ij}(\tau)\,p_{ij}(u)\,du\,d\tau, \tag{2.38}$$

$$b_i\leqslant x\leqslant b_{i+1},\ a_j\leqslant t\leqslant a_{j+1},$$

где элементы матриц $k'_{ij}(x)$, $r'_{ij}(x)$, $p_{ij}(x)$, $q_{ij}(x)$ — непрерывные функции, соответственно, на отрезках $[b_i-a_{j+1},\ b_{i+1}-a_j]$,

$$[b_i+a_j,\ b_{i+1}+a_{j+1}],\ [b_i-a_{j+1},\ b_{i+1}+a_{j+1}],\ [a_j,\ a_{j+1}].$$

Рассмотрим интегральный оператор K'_ω, действующий в $L^2_n(0,\omega)$:

$$(K'_\omega y)(x)=\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^\omega y(t)\,K(x,t)\,dt, \tag{2.39}$$

где $K(x,t)=K_{ij}(x,t)$ на каждом прямоугольнике

$$[b_i,\ b_{i+1}]\times[a_j,\ a_{j+1}]\ (1\leqslant i\leqslant m_2,\ 1\leqslant j\leqslant m_1).$$

Для этого оператора верны утверждения, аналогичные результатам 2° § 2, Их доказательство, с помощью более громоздких вычислений, проводится по той же схеме, что и в 2° § 2. Приведем здесь только конечные результаты.

Введем следующие обозначения:

$$H_0(k,t)=\Big\{\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{a_j,j+1}(t)\frac{\partial}{\partial x}K_{kj}(b_k,t)-$$

$$-\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{a_j,j+1}(t)\Big[\frac{\partial}{\partial x}K_{lj}(b_{l+1},t)-\frac{\partial}{\partial x}K_{lj}(b_l,t)\Big]\Big\},$$

$$H_1(k,t)=-\sum_{i=1}^{k-1}(b_{i+1}-b_i)\sum_{l=1}^{i-1}\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{a_j,j+1}(t)\Big[\frac{\partial}{\partial x}K_{lj}(b_{l+1},t)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}K_{lj}(b_l,t)\Big],$$

$$H_2(k,t)=-\sum_{l=1}^{k-1}b_{l+1}\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{a_j,j+1}(t)\Big[\frac{\partial}{\partial x}K_{lj}(b_{l+1},t)-\frac{\partial}{\partial x}K_{lj}(b_l,t)\Big],$$

$$H_3(k,t)=\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{a_j,j+1}(t)\Big[b_{l+1}\frac{\partial}{\partial x}K_{lj}(b_{l+1},t)-b_l\frac{\partial}{\partial x}K_{lj}(b_l,t)\Big], \tag{2.40}$$

$$H_4(k,t)=-\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{a_j,j+1}(t)[K_{lj}(b_{l+1},t)-K_{lj}(b_l,t)],$$

$$1\leqslant k\leqslant m_2.$$

$$H_0(t)=\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}(t)H_0(k,t), \tag{2.41}$$

$$H(t)=\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}(t)\Big\{-b_kH_0(k,t)+\sum_{i=1}^{4}H_i(k,t)+K(b_k,t)\Big\}, \tag{2.42}$$

$$H_j^1(t)=-\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}\Big\{k'_{kj}(t-a_{j+1})-r'_{kj}(x+a_{j+1})-$$

$$-\int\limits_{a_j}^{a_{j+1}}q_{kj}(\tau)[p_{kj}(t+a_{j+1}-\tau)+p_{kj}(t-a_{j+1}+\tau)]\,d\tau\Big\}, \tag{2.43}$$

$$H_j^2(t)=\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}(t)\,\{k'_{kj}(t-a_j)-r'_{kj}(t+a_j)\},$$

$$H_j^3(t)=\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}(t)\{k_{kj}(t-a_{j+1})+r_{kj}(t+a_{j+1})-$$

$$-\int_{a_j}^{a_{j+1}}\int_{\tau}^{a_{j+1}}q_{kj}(\tau)[p_{kj}(t+u-\tau)-p_{kj}(t-u+\tau)]\,du\,d\tau\},$$

$$H_j^4(t)=-\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}(t)\{k_{kj}(t-a_j)+r_{kj}(t+a_j)\},$$

$$H_j^p(t)=-2\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}(t)\left\{\chi_{a_j,j+1}(t)\int_{a_j}^{t}(t-v)\,q_{kj}(v)\,dv+\chi_{a_{j+1}}(t)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{a_j}^{a_{j+1}}(t-v)\,q_{kj}(v)\,dv\right\},$$

$$p_j(t)=\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}(t)\,p_{kj}(t),\ 1\leqslant j\leqslant m_1,$$

где $\chi(t)$ — функция Хевисайда, а $\chi_{a_j}(t)=\chi(t-a_j)$, $\chi_{a_j,j+1}(t)=\chi(t-a_j)\chi(a_{j+1}-t)$, $\chi_{b_k,k+1}(t)=\chi(t-b_k)\chi(b_{k+1}-t)$. Введем функции вида

$$\begin{array}{ll}
K_\infty' N_{-1}=E_n & K_\infty'^{*} M_{-1}=H^{*}(x)\\
K_\infty' N_0=xE_n & K_\infty'^{*} M_0=H_0^{*}(x)\\
K_\infty' N_{1j}=H_j^1(x) & K_\infty'^{*} M_{1j}=\chi_{a_{j+1}}(x)(x-a_{j+1})\\
K_\infty' N_{2j}=H_j^2(x) & K_\infty'^{*} M_{2j}=\chi_{a_j}(x)(x-a_j)\\
K_\infty' N_{3j}=H_j^3(x) & K_\infty'^{*} M_{3j}=\chi_{a_{j+1}}(x)\\
K_\infty' N_{4j}=H_j^4(x) & K_\infty'^{*} M_{4j}=\chi_{a_j}(x)\\
K_\infty' N_{5j}=p_j(x) & K_\infty'^{*} M_{5j}=H_j^{p*}(x)
\end{array}\qquad(2.44)$$

$$1\leqslant j<m_1,$$

$$Q'(x,t)=M_{-1}^{*}(t)\,N_{-1}(x)+M_0^{*}(t)\,N_0(t)+\sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{m_1}M_{kj}^{*}(t)\,N_{kj}(x).\qquad(2.45)$$

Для K_∞' имеет место следующее равенство:

$$(\dot{A}_0K_\infty-K_\infty A_0^{*})\,y=$$

$$=\int_0^\infty y(t)\left\{H(t)+H_0(t)\,x+\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{a_{j+1}}(t)\,(t-a_{j+1})\,H_j^{'}(x)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{a_j}(t)\,(t-a_j)\,H_j^{2}(x)+\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{j+1}(t)\,H_j^3(x)+\sum_{j=1}^{m_1}\chi_j(t)\,H_j^4(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m_1} H_j^p(t)\, p_j(x)\Bigg\}\, dt. \tag{2.46}$$

Из этого фундаментального соотношения (см. [2]) следует

Теорема 2.3. *Если существует ограниченный оператор T'_ω, обратный оператору K'_ω, то*

$$(T'_\omega A_0 - A_0^* T'_\omega)(x) = \int_0^\omega y(t)\, Q'(x, t)\, dt \tag{2.47}$$

и справедливо равенство

$$T'_\omega y = -\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\omega y(s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Phi'(x, s)\, ds, \tag{2.48}$$

где

$$\Phi'(x, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x+s}^{2\omega+x-s}\int_{x-s}^{u-2\omega} Q'\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv\, du + V(x+s), & x-s \leqslant 0, \\[2ex] \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x+s}^{2\omega-x+s}\int_{x-s}^{2\omega-u} Q'\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv\, du + V(x+s), & x-s > 0, \end{cases}$$

а $V(x)$—некоторая матрица-функция, такая, что $V(x)\equiv 0$ при $x \geqslant \omega$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.XII.1983

Ա. Հ. ՔԱՄԱԼՅԱՆ, Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Համարյա գումար-տարբերակային կորիզով ինտեգրալ օպերատորների շրջման մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում են ինտեգրալ օպերատորներ, որոնց կորիզները բավարարում են (0. 2) հավասարմանը։ § 1-ում բացահայտվում են նորմալ լուծելիության պայմանները, իսկ § 2-ում կառուցվում է հակադարձ օպերատորը։ Արդյունքներն ընդհանրացնում են Լ. Ա. Սախնովիչի, Ի. Ի. Կալմուշևսկիի և այլոց աշխատանքները։

A. G. KAMALIAN, A. B. NERSESIAN. *About the inversion of the integral operators with the almost sum-difference kernel* (summary)

In the paper the integral operators with kernel satisfying the equation (0.2) are considered. In § 1 a condition of the normal solvability is found, and in § 2 the inverse operator is constructed. The results generalizate those of L. A. Sahnovich, J. J. Calmushevsky and others.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Д. Гахов. Ю. И. Черский.* Уравнение типа свертки, М., «Наука», 1978.
2. *Л. А. Сахнович.* О подобии операторов. Сиб. мат. журн., № 4, 1972, 868—883.
3. *Л. А. Сахнович.* Об интегральном уравнении с ядром, зависящим от разности аргументов. Мат. исслед., Кишинев, 8, № 2, 1973, 138—146.

4. *Л. А. Сахнович*. Системы уравнений с разностными ядрами, Украинский мат. журн., 32, № 1, 1980, 61—68.
5. *И. И. Кальмушевский*. О решении некоторых интегральных уравнений с ядрами, зависящими от суммы и разности аргументов, Диф. уравн., 16, № 5, 1980, 941—943.
6. *T. Kailath, A. Vieira, M. Morf*. Inverses of Toeplitz operators, innovations and orthogonal polynomials, SIAM Review, 20, № 1, 1978, 106—119.
7. *T. Kailath, S. Y. Kung, M. Morf*. Displasement ranks of matrix, Bull. Amer. Mat. Soc. (N. S), 1, № 5, 1979, 769—773.
8. *А. Б. Нерсесян*. Структура резольвенты некоторых интегральных операторов, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVII, № 6, 1982, 442—463.
9. *А. Б. Нерсесян, Н. А. Чернявская*. Об обращении интегральных операторов с почти разностным ядром, ДАН Арм.ССР, 79, 3, 1984.
10. *М. Г. Крейн*. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументово, УМН, 13, 5 (83), 1958, 3—120.
11. *Г. С. Литвинчук*. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., «Наука», 1977.
12. *Л. Н. Дудко, И. И. Кальмушевский*. Об условиях подобия оператору *I* в терминах характеристической матрицы-функции, Изв. вузов, «Математика», № 4 (167), 1976, 38—46.
13. *Ю. И. Черский*. Интегральное уравнение, обратное уравнение Винера-Хопфа и его дискретный аналог, ДАН УССР, серия А, № 6, 1982, 29—32.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 3, 1984 Математика

УДК 517.53

С. Г. РАФАЕЛЯН

БАЗИСНОСТЬ НЕКОТОРЫХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ В $L^2(-\sigma, \sigma)$ С ВЕСОМ

В основополагающем исследовании М. М. Джрбашяна [1] и в цикле его дальнейших исследований, подытоженных в монографии [2], была построена теория гармонического анализа для системы лучей комплексной плоскости, обобщающая классическую теорию Фурье-Планшереля. Основой для этого послужили замечательные асимптотические свойства целой функции типа Миттаг—Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \quad (\rho > 0, \; -\infty < \mu < +\infty)$$

порядка ρ и типа $\sigma = 1$.

В данной статье получен ряд новых результатов о базисности систем функций типа Миттаг-Леффлера, ассоциированных с последовательностями нулей целых функций определенного класса (обобщающего класс целых функций типа синуса). Эти результаты являются дискретными аналогами интегральных преобразований М. М. Джрбашяна с ядрами $E_1(z; \mu)$.

Обозначим через $W_\sigma^{p, \omega}$ $(1 < p < +\infty, \; -1 < \omega < p-1, \; \sigma > 0)$ пространство целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ с нормой

$$\|f\|_{p, \omega} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p |x|^\omega \, dx \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Классы функций $W_\sigma^{2, \omega}$ и более общие классы были введены М. М. Джрбашяном [3] (см. также [2], гл. VI) и установлена следующая теорема о параметрическом представлении, которая в специальном случае содержит в себе теорему Винера-Пэли.

Теорема А. *Класс* $W_\sigma^{2, \omega}$ $(-1 < \omega < 1, \; \sigma > 0)$ *совпадает с классом функций, допускающих представление вида*

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} E_1(izx; \mu) \, \varphi(x) \, dx,$$

где $\mu = 1 + \frac{\omega}{2}$ *и* $\varphi(x) \in L^{2, -\omega}(-\sigma, \sigma)$.

Другие представления функций класса в виде интерполяционных разложений были установлены в наших работах [4]—[6].

Чтобы сформулировать основной результат статьи [6] приведем некоторые определения.

Обозначим через $S_\varkappa$ $(-1 < \varkappa < 1)$ класс целых функций $S(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ и таких, что при некоторых положительных константах c, C и K (зависящих от функции $S(z)$) выполняются неравенства вида

$$0 < c < |S(z)\, z^{-\varkappa}|\, e^{-\sigma |\operatorname{Im} z|} < C < +\infty$$

при $|\operatorname{Im} z| > K$ и $\inf\limits_{z_k \neq z_j} |z_k - z_j| > 0$, где $\{z_k\}$ — последовательность нулей функции $S(z)$.

Отметим, что класс целых функций типа синуса Б. Я. Левина ([7], [8])—это подкласс тех функций из S_0, которые не имеют кратных нулей.

Пользуясь методом М. М. Джрбашяна построения биортогональных систем (см., например, [9]), восходящем к давним его работам, совместным с А. Б. Нерсесяном [10], приведем, далее, построение одной системы функций, ассоциированной с функцией $S(z) \in S_\varkappa$ и с ее нулями.

Пусть $S(z) \in S_\varkappa$ и $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность ее корней, перенумерованных в порядке неубывания их модулей. Обозначим через $s_k \geqslant 1$ и $p_k \geqslant 1$ $(k \geqslant 0)$ кратности появления числа z_k соответственно на отрезке $\{z_j\}_0^k$ и во всей последовательности $\{z_j\}_0^\infty$. Очевидно, что $1 \leqslant s_k \leqslant p_k < +\infty$.

Положим

$$a_j(z_k) = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{dz^j} \frac{(z-z_k)^{p_k}}{S(z)} \right\}_{z=z_k}$$

и введем в рассмотрение целые функции

$$\Omega_k(z) = \frac{S(z)}{(s_k-1)!\,(z-z_k)^{p_k-s_k-1}} \sum_{j=0}^{p_k-s_k} a_j(z_k)(z-z_k)^j .$$

Если z_{k_0} является простым нулем функции $S(z)$, то $s_{k_0} = p_{k_0} = 1$, $a_0(z_{k_0}) = \dfrac{1}{S'(z_{k_0})}$ и, следовательно,

$$\Omega_{k_0}(z) = \frac{S(z)}{S'(z_{k_0})(z-z_{k_0})} .$$

Справедливы следующие утверждения [6]:

1) $\Omega_k^{(s_j-1)}(z_j) = \delta_{k,j}\ (k, j \geqslant 0)$

2) Если $2\varkappa + \omega < 1$, то $\Omega_k(z) \in W_\sigma^{2,\omega}$.

В данной работе мы используем следующий результат, который является частным случаем, установленным в работе автора [6] теоремы 3.4.

Теорема В. *Пусть* $\{z_k\}_0^\infty$ — *нули функции* $S(z) \in S_\varkappa$, *где* $-1 < 2\varkappa + \omega < 1$ $(-1 < \omega \leqslant 1)$. *Тогда система функций*

$$\{(1+|z_k|)^{-\omega/2}\Omega_k(z)\}_0^\infty \equiv \{\Phi_k(z)\}_0^\infty$$

образуют базис Рисса в пространстве $W_\sigma^{2,\omega}$, *т. е. всякая функция* $f(z)\in W_\sigma^{2,\omega}$ *разлагается в ряд*

$$f(z)=\sum_{k=0}^\infty c_k(f)\Phi_k(z),\quad c_k(f)=f^{(s_k-1)}(z_k)(1+|z_k|)^{\omega},$$

сходящийся в $W_\sigma^{2,\omega}$, *и*

$$\|f\|_{2,\omega}\asymp\|\{c_k\}\|_{l^2}.$$

§ 1. Базисность систем функций типа Миттаг-Леффлера

Пусть $\sigma>0$, $-1<\omega<1$ и $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность нулей некоторой функции $S(z)\in S_\varkappa$, перенумерованная как обычно. Обозначим через $s_k\geqslant 1$ кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$.

Обозначим $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$ — класс всех измеримых функций в $(-\sigma,\sigma)$ с нормой

$$\|f\|_{L^{2,\omega}}\equiv\left\{\int_{-\sigma}^{\sigma}|f(x)|^2|x|^{\omega}\,dx\right\}^{1/2}<+\infty.$$

Теорема 1.1 *Система функций*

$$\{(1+|z_k|)^{\omega/2}E_1^{(s_k-1)}(iz_kx;\mu)(ix)^{s_k-1}\}_0^\infty\equiv\{G_k(x)\}_0^\infty,\tag{1.1}$$

где $\mu=1+\dfrac{\omega}{2}$ *и* $-1<\omega+2\varkappa<1$ *является базисом Рисса в пространстве* $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$, *т. е. любая функция* $f(x)\in L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$ *единственным образом разлагается в ряд*

$$f(x)=\sum_{k=0}^\infty c_k(f)G_k(x),\tag{1.2}$$

сходящийся по норме пространства $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$, *и*

$$\|f\|_{L^{2,\omega}}\asymp\|\{c_k\}\|_{l^2}.\tag{1.3}$$

Доказательство. Как уже было доказано выше, если $2\varkappa+\omega<1$, то

$$\Phi_k(z)=(1+|z_k|)^{-\omega/2}\Omega_k(z)\in W_\sigma^{2,\omega}\ (0\leqslant k<+\infty).$$

Следовательно, по теореме А. М. М. Джрбашяна существует система функций $\{\varphi_k(x)\}_0^\infty$, $\varphi_k(x)\in L^{2,-\omega}(-\sigma,\sigma)$ такая, что

$$\Phi_k(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}E_1(izx;\mu)\varphi_k(x)\,dx,\tag{1.4}$$

где $\mu=1+\dfrac{\omega}{2}$ и каждая функция $\varphi_k(x)$ определяется единственным образом по $\Phi_k(z)$.

После (s_j-1)-кратного дифференцирования по z из (1.4) получим

$$\Phi_k^{(s_j-1)}(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} E_1^{(s_j-1)}(izx;\ \mu)(ix)^{s_j-1}\ \varphi_k(x)\,dx =$$

$$= (1+|z_j|)^{-\omega/2}\int_{-\sigma}^{\sigma} G_j(x)\ \varphi_k(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Так как функция $\Omega_k(z)$ обладает интерполяционными свойствами $\Omega_k^{(s_j-1)}(z_j)=\delta_{k,\,j}$, то

$$\Phi_k^{(s_j-1)}(z_j) = (1+|z_j|)^{-\omega/2}\,\delta_{k,\,j}.$$

Отсюда и из (1.5) получаем

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} G_j(x)\ \varphi_k(x)\,dx = \delta_{k,\,j}$$

и, следовательно, система функций $\{\varphi_k(x)\}_0^\infty$ образует с последовательностью $\{G_k(x)\}_0^\infty$ биортогональную систему.

Из теоремы А следует, что оператор

$$C\varphi = \int_{-\sigma}^{\sigma} E_1(izx;\ \mu)\ \varphi(x)\,dx,\quad \mu = 1+\frac{\omega}{2}$$

отображает $L^{2,-\omega}$ на $W_\sigma^{2,\omega}$, а из теоремы 4.3 монографии [2] следует ограниченность оператора C.

С другой стороны, система функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ образует базис Рисса в $W_\sigma^{2,\omega}$. Следовательно, система функций $\{\varphi_k(x)\}_0^\infty$ также является базисом Рисса в пространстве $L^{2,-\omega}(-\sigma,\sigma)$. Так как эта система функций биортогональна с системой (1.1), то система (1.1) также образует базис Рисса в $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$ (см. [11]). Поэтому, если $f\in L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$ и в метрике $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$

$$f(x) = \sum_0^\infty c_k(f)\ G_k(x),$$

где

$$c_k(f) = \int_{-\sigma}^{\sigma} f(x)\,G_k(x)\,dx,\quad k=0,\ 1,\ 2,\cdots,$$

то

$$\|f\|_{L^{2,\omega}} \asymp \|\{c_k\}\|_{l^2}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим два специальных случая этой теоремы, которые представляют особый интерес.

1. Пусть $\omega = 0 (\mu = 1)$ и $\varkappa \neq 0$. Тогда в виду того, что $E_1(z; 1) = e^z$, система (1.1) переходит в систему $\{e^{iz_k x}(ix)^{s_k-1}\}_0^\infty$ и получим следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность нулей некоторой функции $S(z) \in S_\varkappa$, где $-\frac{1}{2} < \varkappa < \frac{1}{2}$ и s_k — кратность появления числа z_j на отрезке $\{z_j\}_0^k$. Тогда система функций*

$$\{e^{iz_k x}(ix)^{s_k-1}\}_0^\infty$$

образует базис Рисса в $L^2(-\sigma, \sigma)$.

Отметим, что в случае $\varkappa = 0$ теорема 1.2 переходит в известную теорему Б. Я. Левина (см. [7], [8], [12]). А если положим $s_k = 1$ и $-\frac{1}{2} < \varkappa < \frac{1}{2}$ — эта теорема примыкает к некоторым результатам работы [13]. Окончательный результат (необходимое и достаточное условие того, чтобы семейство экспонент $\{e^{iz_k x}\}_0^\infty$ образовывало базис Рисса в $L^2(-\sigma, \sigma)$, получен в работе Б. С. Павлова [14] (см. также [15]).

2) При $-1 < \omega < 1$, $\varkappa = 0$ и $s_k = 1$ из теоремы (1.1) следует

Теорема 1.3. *Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность нулей функции $S(z)$ типа синуса. Тогда система функций*

$$\{(1 + |z_k|)^{\omega/2} E_1(iz_k x; \mu)\}_0^\infty,$$

где $\mu = 1 + \frac{\omega}{2}$, образует базис Рисса в $L^{2,\omega}(-\sigma, \sigma)$.

В другом специальном случае, когда

$$S(z) = E_1(i\sigma z; \mu) - E_1(-i\sigma z; \mu), \quad (-1 < \mu < 2)$$

теорема 1.1 была анонсирована в статье автора [4].

§ 2. Построение биртогональной системы

В этом параграфе будем предполагать, что z_k являются нулями целой функции

$$S_1(z; \nu) = E_1(i\sigma z; \nu) - E_1(-i\sigma z; \nu), \quad (0 < \nu < 2). \tag{2.1}$$

Пользуясь асимптотическими свойствами функции $E_1(z; \nu)$ (см. [2], гл. III) нетрудно показать, что $S_1(z; \nu) \in S_{1-\nu}$. С другой стороны, из (2.1) следует, что функция $S_1(z; \nu)$ допускает представление вида

$$S_1(z; \nu) = 2 iz E_{1/2}(-\sigma^2 z^2; 1 + \nu). \tag{2.2}$$

Как сообщил мне М. М. Джрбашян, им недавно было установлено, что все нули функции $E_{1/2}(z; \mu)$ при $1 \leqslant \mu < 3$ простые и вещественные. Отсюда и из (2.2) вытекает, что все нули функции $S_1(z; \nu)$ при $1 \leqslant \nu < 2$ также простые и вещественные. В работе [4] нам было лишь известно, что у функции $S_1(z; \nu)$ нули будут простыми и вещественными только, начиная с некоторого номера.

Вместе с (11) рассмотрим системы вида

$$\{E_1(iz_k x;\ \mu)\,|x|^{\mu-1}\}_0^\infty \equiv \{e_\mu(x;\ iz_k)\}_0^\infty, \tag{2.3}$$

где $\{z_k\}_0^\infty$ — нули функции $S_1(z;\ \nu)$.

Из теоремы 1.1 следует, что если $-\frac{1}{2}<\mu-\nu<\frac{1}{2}$, то система (2.3) образует базис Рисса в $L^2(-\sigma,\ \sigma)$.

Теперь следуя методу, примененному М. М. Джрбашяном в работе [16], займемся построением биортогональной с (2.3) системы. Для этого нам понадобится одна важная формула из монографии [2] (гл. III, (1—21)). Для любых комплексных λ, λ^* и α, $\beta>0$ справедлива следующая формула:

$$\int_0^\sigma x^{\alpha-1} E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ \alpha)\,(\sigma-x)^{\beta-1} E_\rho(\lambda^*(\sigma-x)^{1/\rho};\ \beta)\,dx =$$

$$=\frac{\lambda E_\rho(\sigma^{1/\rho}\lambda;\ \alpha+\beta)-\lambda^* E_\rho(\sigma^{1/\rho}\lambda^*;\ \alpha+\beta)}{\lambda-\lambda^*}\,\sigma^{\alpha+\beta-1}. \tag{2.4}$$

Полагая $\rho=1$, $\alpha=\mu$, $\beta=1+\nu-\mu$ и пользуясь равенством

$$zE_1(z;\ \mu+1)=E_1(z;\ \mu)-1/\Gamma(\mu),$$

формулу (2.4) можем записать в таком виде

$$\int_0^\sigma x^{\mu-1} E_1(\lambda x;\ \mu)\,(\sigma-x)^{\beta-1} E_1(\lambda^*(\sigma-x;\ \beta)\,dx =$$

$$=\frac{E_1(\sigma\lambda;\ \nu)-E_1(\sigma\lambda^*;\ \nu)}{\lambda-\lambda^*}\,\sigma^{\nu-1}. \tag{2.5}$$

Вместо λ, λ^* подставим соответственно $-\lambda$, $-\lambda^*$ и полученную формулу прибавим к (2.5), тогда

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |x|^{\mu-1} E_1(\lambda x;\ \mu)\,(\sigma-|x|)^{\beta-1} E_1(\lambda^*(\sigma-|x|)\,sgn\,x;\ \beta)\,dx =$$

$$=\frac{S_1(-i\lambda;\ \nu)+S_1(i\lambda^*,\ \nu)}{\lambda-\lambda^*}\,\sigma^{\nu-1}.$$

Подставляя здесь $\lambda^*=iz_k$ и пользуясь обозначениями (2.3), из последнего равенства будем иметь

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} e_\mu(x;\ \lambda)\,e_\beta((\sigma-|x|)\,sgn x;\ iz_k)\,dx=\frac{S_1(-i\lambda;\ \nu)}{\lambda-iz_k}\,\sigma^{\nu-1}. \tag{2.6}$$

Так как $\lambda=iz_k$ является простым нулем функции $S_1(-i\lambda;\ \nu)$, то

$$\left.\frac{S_1(-i\lambda;\ \nu)}{\lambda-iz_k}\right|_{\lambda=iz_n}=\begin{cases}-iS_1'(z_n;\ \nu), & n=k\\ 0\quad, & n\neq k.\end{cases}$$

Следовательно, отсюда и из (2.6)

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} e_\mu(x;\ iz_n)\, e_\beta((\sigma-|x|)\operatorname{sgn} x;\ iz_k)\, dx = \begin{cases} -iS_1'(z_n;\ \nu)\,\sigma^{\nu-1}, & n=k \\ 0, & n\neq k. \end{cases}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.1. *Система функций*

$$\left\{\frac{i}{\sigma^{\nu-1} S_1'(z_k;\ \nu)}\, e_\beta((\sigma-|x|)\operatorname{sgn} x;\ iz_k)\right\}_{k=0}^{\infty},\quad (\beta = 1+\nu-\mu)$$

биортогональна с системой (2.3) *на* $(-\sigma, \sigma)$.

В случае $\mu=1$ $(\beta=\nu)$ система функций $\{e_\mu(x;\ iz_k)\}_0^\infty$ переходит в систему $\{e^{iz_k x}\}_0^\infty$ и получаем следующее

Следствие. *Системы функций*

$$\{e^{iz_k x}\}_0^\infty;\ \left\{\frac{i}{\sigma^{\nu-1} S_1'(z_k;\ \nu)}\, e_\nu((\sigma-|x|)\operatorname{sgn} x;\ iz_k)\right\}_0^\infty \equiv$$

$$\equiv \left\{\frac{i}{\sigma^{\nu-1} S_1'(z_k;\ \nu)}\, E_1(iz_k((\sigma-|x|\operatorname{sgn} x;\ \nu)\,(\sigma-|x|)^{\nu-1}\right\}_0^\infty,$$

которые образуют базис Рисса (после нормировки) в $L^2(-\sigma, \sigma)$, *биортогональны на* $(-\sigma, \sigma)$.

§ 3. Специальные краевые задачи

В этом параграфе мы покажем, что система (2.3) является системой собственных функций краевой задачи для специального интегро-дифференциального оператора.

1°. Приведем определение и ряд свойств операторов интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля (более подробно эти свойства с доказательствами изложены в монографии [2]):

а) Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $L(-l, l)$ $(0<l<\infty)$. Интегралом от f порядка $s\,(s>0)$ называют функцию

$$D^{-s} f(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^x |x-t|^{s-1} f(t)\, dt,\quad x\in(-l,\ l). \tag{3.1}$$

Известно, что

1°. Для любого $s\,(s>0)$ функция $D^{-s}f(x)$ определена почти всюду на $(-l, l)$ и принадлежит классу $L(-l, l)$.

2°. В каждой точке Лебега функции $f(x)$ и, следовательно, почти всюду на $(-l, l)$

$$\lim_{s\to+0} D^{-s} f(x) = f(x).$$

Ввиду свойства 2° вполне естественно определение оператора $D^{-s}f(x)$ распространить на значение $s=0$, положив

$$D^{-0} f(x) = f(x).$$

б) Пусть $f(x)\in L(-l, l)$ и $0\leqslant s<1$. Тогда функция

$$D^s f(x)=\frac{d}{dx}\{D^{-(1-s)}f(x)\},\quad x\in(-l, l) \tag{3.2}$$

называется производной порядка s от $f(x)$. При $s=1$ будем иметь:

$$D^1 f(x)=\frac{d}{dx}f(x),\quad x\in(-l, l), \tag{3.3}$$

т. е. $D^1 f$ совпадает с обычной производной $f'(x)$ функции f. В случае $s=0$ имеем

$$D^0 f(x)=\frac{d}{dx}\{D^{-1}f(x)\}=\frac{d}{dx}\left\{\int\limits_0^x f(t)\,dt\right\}=f(x)$$

почти всюду на $(-l, l)$.

в) Для любого $\mu>0$ введем в рассмотрение функцию

$$e_\mu(x;\lambda)\equiv E_1(\lambda x;\mu)\,|x|^{\mu-1},\quad x\in(-l, l) \tag{3.4}$$

полагая пока, что λ — произвольный параметр.

Лемма 3.1. *Для любого* s $(0<s<1)$ *и* $\lambda\in C$ *справедливы формулы*

$$D^{-s}\,e_\mu(x;\lambda)=e_{\mu+s}(x;\lambda)\operatorname{sgn}x, \tag{3.5}$$

$$D^s\,e_\mu(x;\lambda)=e_{\mu-s}(x;\lambda). \tag{3.6}$$

Доказательство. Из самого определения (3.4) функции следует, что

$$e_\mu(x;\lambda)=\sum_0^\infty\frac{\lambda^k x^k}{\Gamma(\mu+k)}\,|x|^{\mu-1}.$$

Отсюда имеем

$$D^{-s}e_\mu(x;\lambda)=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_0^\infty\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu+k)}\int\limits_0^x|x-t|^{s-1}t^k\,|t|^{\mu-1}\,dt.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^x|x-t|^{s-1}t^k\,|t|^{\mu-1}\,dt=\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(s+\mu+k)}\,x^{k-1}\,|x|^{s+\mu-2},$$

то

$$D^{-s}e_\mu(x;\lambda)=\sum_0^\infty\frac{\lambda^k x^k}{\Gamma(\mu+s+k)}\,|x|^{s+\mu-1}\operatorname{sgn}x=$$

$$=E_1(\lambda x;\mu+s)\,|x|^{\mu+s-1}\operatorname{sgn}x=e_{\mu+s}(x;\lambda)\operatorname{sgn}x,$$

что совпадает с формулой (3.5) леммы.

Из формулы (3.5) следует, что

$$D^s e_\mu(x;\lambda)=\frac{d}{dx}\{D^{-(1-s)}e_\mu(x;\lambda)\}=\frac{d}{dx}\{e_{\mu+1-s}(x;\lambda)\operatorname{sgn}x\}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{\sum_0^\infty\frac{\lambda^k x^k}{\Gamma(\mu-s+k+1)}\,|x|^{\mu-s}\operatorname{sgn}x\right\}=e_{\mu-s}(x;\lambda).$$

Лемма доказана.

2°. а) Пусть функция $S(z)\in S_\varkappa$ и a — один из ее корней. Из определения классов $S_\varkappa$ и $W_\sigma^{2,\omega}$ вытекает, что если $2\varkappa+\omega<1$, то

$$\frac{S(z)}{z-a}\in W_\sigma^{2,\omega},$$

и, следовательно, по теореме А существует единственная функция $\varphi_a(x)\in L^2(-\sigma, \sigma)$ такая, что имеет место представление

$$S(z)=(z-a)\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} E_1(izx;\ \mu)\,|x|^{\mu-1}\,\varphi_a(x)\,dx=$$

$$=(z-a)\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e_\mu(x;\ iz)\,\varphi_a(x)\,dx. \tag{3.7}$$

б) Пусть дана совокупность $\{\mu;\ \gamma_1;\ \gamma_2\}$ трех чисел

$$1\leqslant\mu<\frac{3}{2},\ 0\leqslant\gamma_1,\ \gamma_2\leqslant 1 \text{ и } \gamma_1+\gamma_2=\mu.$$

Введем в рассмотрение операторы

$$Ly=D^{-(\mu-1)}\{D^{\gamma_2}\{D^{\gamma_1}y\}\}. \tag{3.8}$$

Отметим, что если $\mu=\gamma_1=1$, $\gamma_2=0$, то $Ly(x)=y'(x)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$Ly=\lambda y, \tag{3.9}$$

$$D^{-(1-\gamma_1)}y|_{x=0}=0,\ D^{-(1-\gamma_2)}\{D^{\gamma_1}y\}|_{x=0}=1, \tag{3.10}$$

$$(\lambda-a)\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} y(x)\,\varphi_a(x)\,dx=0. \tag{3.11}$$

Отметим, что краевая задача типа (3.11) для обыкновенных дифференциальных операторов была рассмотрена, например, в работе А. Б. Нерсесяна [17].

Из теоремы 5 статьи [18] непосредственно следует что задача типа Коши (3.9)—(3.10) имеет единственное решение $y(x;\ \lambda)$, причем такое, что $y(x;\ \lambda)\in L^2(-\sigma, \sigma)$ при $\gamma_1>2-\mu$.

Лемма 3.2. *Функция* $y=e_\mu(x;\ iz_k)$, *где* z_k — *нули функции* $S(z)\in S_\varkappa$, *является решением краевой задачи* (3.9)—(3.11).

Доказательство. Из леммы (3.1) вытекают формулы

$$D^{\gamma_1}e_\mu(x;\ \lambda)=e_{\mu-\gamma_1}(x;\ \lambda),$$

$$D^{\gamma_2}\{D^{\gamma_1}e_\mu(x;\ \lambda)\}=e_{\mu-\gamma_1-\gamma_2}(x;\ \lambda),$$

но $\gamma_1+\gamma_2=\mu$, следовательно

$$D^{\gamma_2}\{D^{\gamma_1}e_\mu(x;\ \lambda)\}=e_0(x;\ \lambda)=\lambda E_1(\lambda x;\ 1)\operatorname{sgn}x.$$

Теперь из формулы (3.5) и определения оператора L имеем

$$Le_\mu(x;\ \lambda)=D^{-(\mu-1)}\{\lambda E_1(\lambda x;\ 1)\operatorname{sgn}x\}=$$

$$=\lambda D^{-(\mu-1)}\{E_1(x;\ \lambda)\operatorname{sgn} x\}=\lambda e_\mu(x;\ \lambda).$$

С другой стороны, эти функции должны удовлетворять условию (3.11). Подставив $y=e_\mu(x;\ \lambda)$ в равенство (3.11) и пользуясь (3.7), получим $S(-i\lambda)=0$, т. е. $\lambda=iz_k$. Лемма доказана.

в) Систему $\left\{\frac{d^{s_k-1}}{d\lambda^{s_k-1}}e_\mu(x;\ \lambda)\,x^{s_k-1}\Big|_{\lambda=iz_k}\right\}$, где $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$, будем называть системой собственных и присоединенных функций нашей краевой задачи.

Теорема 3.1. *Система собственных и присоединенных функций краевой задачи* (3.9)—(3.11) *является базисом Рисса в пространстве* $L^2(-\sigma,\ \sigma)$.

Доказательство. Лемма 3.2 показывает, что собственные значения краевой задачи (2.9)—(2.11) — суть нули целой функции $S(z)$, и если $\{z_\nu\}$ — множество собственных значений этой задачи, то семейством ее собственных функций будет $\{e_\mu(x;\ iz_k)\}_0^\infty$.

С другой стороны, система функций $\{e^{(s_k-1)}(x;\ iz_k)\,x^{s_k-1}\}_0^\infty$ образует базис Рисса в $L^2(-\sigma,\ \sigma)$ (теорема 1.1). Этим и завершается доказательство теоремы.

В заключение рассмотрим некоторые частные случаи краевой задачи (3.9)—(3.11).

1) $\mu=\gamma_2=1,\ \gamma_1=0,\ \sigma=\pi,\ \varphi_0(x)=1\ (S(z)=2i\sin\pi z)$.

В этом случае краевая задача (3.9)—(3.11) совпадает с классической краевой задачей на отрезке $[-\pi,\ \pi]$

$$y'=\lambda y,\ y(-\pi)=y(\pi),$$

порождающей систему Фурье $\{e^{ikx}\}_{-\infty}^{\infty}$.

2) $1<\mu<\dfrac{3}{2}$, $\gamma_2=1,\ \gamma_1=\mu-1,\ \varphi_a(x)=1$.

Воспользовавшись некоторыми формулами из статьи [18], получим краевую задачу

$$y'-\frac{[D^{\mu-1}y]_{x=0}}{\Gamma(\mu-1)}x^{\mu-2}=\lambda y,$$

$$D^{-(2-\mu)}y|_{x=0}=0,\ D^{\mu-1}y|_{x=0}=1,$$

$$(\lambda-a)\int_{-a}^{a}y(x;\ \lambda)\,dx=0,$$

решениями которой, как легко видеть, являются функции $e_\mu(x;\ iz_n)$, где $\{z_n\}$ — суть нули функции $S_1(z;\ \mu+1)$. Согласно теореме 3.1 система собственных функций этой задачи образует базис Рисса в $L^2(-\sigma,\ \sigma)$.

В заключение выражаю благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный
университет

Поступила 18.I. 1983

Ս. Գ. ՌԱՖԱՅԵԼՅԱՆ. Որոշ բիօրթոգոնալ համակարգերի բազիսությունը $L^2(-\sigma, \sigma)$ կշռային դասերում (*ամփոփում*)

Դիցուք $\{z_k\}_0^\infty$*-ն որևէ* $S(z) \in S_\alpha$ *ֆունկցիայի զրոների հաջորդականությունն է և* s_k*-ն* z_k *թվի հանդես գալու պատիկությունն է* $\{z_j\}_0^k$ *հատվածում։ Ապացուցվում է, որ պարամետրերի վրա դրված որոշ պայմանների դեպքում ֆունկցիաների հետևյալ համակարգը.*

$$\{(1+|z_k|)^{\omega/2} E_1^{(s_k-1)}(iz_kx;\ \mu)\, x^{s_k-1}\}_0^\infty \qquad (*)$$

$L^{2,\omega}(-\sigma, \sigma)$ *դասում կազմում է Ռիսսի բազիս։ Այստեղ*

$$E_1(z;\mu) = \sum_0^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k)}$$

Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիա է ($\rho = 1$)*։*
Բացահայտ տեսքով կառուցվում է նաև (**)-ին բիօրթոգոնալ համակարգը։*

S. G. RAFAELIAN. *Basisness of some biorthogonal systems in* $L^2(-\sigma, \sigma)$ *with weight* (summary)

Let $\{z_k\}_0^\infty$ be a sequence of zeros some function $S(z) \in S_\alpha$ and s_k be the multiplicity of the number z_k in the interval $\{z_j\}_0^k$. It is proved that under some conditions the system of functions

$$\{(1+|z_k|)^{\omega/2} E_1^{(s_k-1)}(iz_kx;\ \mu)\, x^{s_k-1}\}_0^\infty$$

forms a Riesz basis in the space $L^{2,\omega}(-\sigma, \sigma)$.

Here

$$E_1(z;\mu) = \sum_0^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k)}$$

is the Mittag-Leffler function ($\rho = 1$). The explicit form of functions biorthogonal with (*) is also constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, ДАН СССР, 95, 1954; Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 1955.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
3. *М. М. Джрбашян.* Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, ДАН СССР, 85, № 1, 1952; Матем. сб., 1953, 33 (75), № 4, 485—530.
4. *С. Г. Рафаелян.* О базисности некоторых систем целых функций, ДАН Арм.ССР, 70, № 4, 1980.
5. *М. М. Джрбашян* и *С. Г. Рафаелян.* О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L_p, ДАН Арм.ССР, 72, № 4, 1981.
6. *С. Г. Рафаелян.* Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVIII, № 3, 1983, 167—186.
7. *Б. Я. Левин.* О базисах показательных функций в $L^2(-\pi, \pi)$, Записки физ.-мат. фак-та Харьковского гос. у-та и Харьковск. мат. об-ва, 27, сер. 4, 1961.
8. *Б. Я. Левин.* Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа, Сб. «Матем. физика и функ. анализ», ФТИНТ АН УССР, вып. 1, 1961.

9. *М. М. Джрбашян.* Теоремы единственности аналитических функций, асимптотически представимых рядами Дирихле—Тейлора, Матем. сб., 91, № 4 (8), 1973.
10. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян.* О построении некоторых специальных биортогональных систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, XII, № 5, 1959.
11. *Н. К. Бари.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Ученые записки Московского университета, т. 48, «Математика», 1951.
12. *В. Д. Головин.* О биортогональных разложениях в L^2 по линейным комбинациям показательных функций, Записки мех.-мат. фак-та Харьковского гос. ун-та и Харьковского матем. об-ва, 30, сер. 4, 1964.
13. *С. А. Авдонин.* К вопросу о базисах Рисса из показательных функций в L^2, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех., астр., 13, 5, 1974.
14. *Б. С. Павлов.* Базисность системы экспонент и условие Макенхоупта, ДАН СССР, 247, № 1, 37, 1979.
15. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, С. В. Хрущев.* Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. III, Препринты ЛОМИ, Р—10—80.
16. *М. М. Джрбашян.* Базисность биортогональных систем, порожденных краевыми задачами для дифференциальных операторов дробного порядка, ДАН СССР, 261, № 5, 1981.
17. *А. Б. Нерсесян.* Разложение по собственным функциям некоторых несамосопряженных краевых задач, ДАН СССР, 135, № 5, 1960; Сибирский матем, журнал, 11, № 3, 1961.
18. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, № 1, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 3, 1984 Математика

УДК 517.95

Г. Р. АЛЕКСАНДРЯН

ПАРАМЕТРИКС И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе, на примере одного модельного уравнения проводится детальное исследование распространения волнового фронта решения задачи Коши для случая, когда вырождение гиперболичности оператора имеет экспоненциальный характер.

Пусть $x \in \mathbf{R}^1$, $t \in J=[-1, 1]$. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$Pu = u_{tt} - \mu^2(t) u_{xx} - a(t) \frac{\mu^2(t)}{\Lambda(t)} u_x = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=-1} = \varphi_0(x), \ u_t|_{t=-1} = \varphi_1(x), \tag{2}$$

где $a(t) = \begin{cases} a_1, & t > 0 \\ a_2, & t \leqslant 0 \end{cases}$, $\mu(t) = (\operatorname{sign} t)\, t^{-2} \exp(-|t|^{-1})$, a_1, a_2 — const. $\Lambda(t) = \exp(-|t|^{-1})$. Корректность подобной задачи была доказана в [2], где, кроме того, приводилась теорема о распространении волнового фронта решения. Однако эта теорема не давала исчерпывающего ответа на вопрос о том, как именно, в зависимости от младших коэффициентов и начальных данных, распространяется волновой фронт решения. Для случая конечной (степенной) скорости слипания характеристик (см. [1], [4], [5]) в [1] на примере задачи Коши

$$u_{tt} - t^{2k} u_{xx} - a t^{k-1} u_x = 0, \ a = \text{const}, \ k \in N \tag{3}$$

$$u|_{t=-1} = \varphi_0(x), \ u_t|_{t=-1} = \varphi_1(x), \tag{4}$$

был дан полный анализ распространения волнового фронта решения в зависимости от a и k. В настоящей работе сначала строится параметрикс задачи (1)—(2), а затем приводятся точные теоремы распространения сингулярностей как для задачи Коши (1)—(2) (линия вырождения внутри области), так и для случая, когда данные Коши задаются на самой линии вырождения $t=0$. При этом оказывается, что в отличие от конечной скорости вырождения главной части оператора P, в рассматриваемом случае сингулярности распространяются в область $t>0$ вдоль обеих характеристик независимо от $a(t)$, если только $u|_{t=0} \in C^\infty$ (ср. [1]). Кроме того, в работе получено точное описание потери гладкости решения и проведено сравнение полученных результатов с соответствующими оценками, полученными в [5], [6], [9].

1°. Параметрикс и распространение особенностей при $t \leqslant 0$

Обозначим преобразование Фурье $u(t, x)$ по переменной x через $\hat{u}(t, \xi)$. Когда $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) для $\hat{u}(t, \xi)$ выполнено

$$\hat{u}_{tt} + \left(\mu^2(t)\xi^2 - ia(t)\frac{\mu^2(t)}{\Lambda(t)}\xi\right)\hat{u} = 0. \tag{5}$$

Сделаем замену неизвестной функции $\hat{u}(t, \xi) = t\hat{w}(t, \xi)$, тогда для $\hat{w}(t, \xi)$ имеем

$$\hat{w}_{tt} + \frac{2}{t}\hat{w}_t + \left(\mu^2(t)\xi^2 - ia(t)\frac{\mu^2(t)}{\Lambda(t)}\xi\right)\hat{w} = 0. \tag{6}$$

Далее, замена $\tau = \Lambda(t)\xi$ переводит (6) в уравнение

$$\hat{w}_{\tau\tau} + \frac{1}{\tau}\hat{w}_\tau + \left(1 - \frac{ia}{\tau}\right)\hat{w} = 0. \tag{7}$$

Обозначим $f(z) = e^{z/2}w\left(\frac{z}{2i}\right)$, где $z = 2i\tau$, тогда (7) перейдет в уравнение Куммера

$$zf_{zz} + (1 - z)f_z - \alpha f = 0, \alpha = \frac{1 + a(t)}{2}, \tag{8}$$

линейно независимые решения которого даются парой вырожденных гипергеометрических функций $f_1 = \Psi(\alpha, 1, z)$, $f_2 = e^z\Psi(1 - \alpha, 1, -z)$, где

$$\Psi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}e^{-i\pi\alpha}\Gamma(1-\alpha)\int_{\infty e^{i\varphi}}^{(0+)} e^{-zt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}dt, \tag{9}$$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi + \arg z < \frac{\pi}{2}$, $\arg t = \varphi$ в начальной точке пути (см. [8]), а $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера. Пусть теперь $t \leqslant 0$, тогда имеем $\alpha = \alpha_2 = \frac{1 + a_2}{2}$, $\Lambda(t) = \exp(t^{-1})$, $\mu(t) = -t^{-2}\exp(t^{-1})$. Из линейной независимости f_1 и f_2 нетрудно видеть, что система функций

$$\hat{u}_1(t, \xi) = te^{-i\Lambda(t)\xi}\Psi(\alpha_2, 1, 2i\Lambda(t)\xi), \tag{10}$$

$$\hat{u}_2(t, \xi) = te^{i\Lambda(t)\xi}\Psi(1 - \alpha_2, 1, -2i\Lambda(t)\xi) \tag{11}$$

при $t \leqslant 0$ образует фундаментальную систему решений уравнения (5). Поэтому решение исходной задачи Коши (1)—(2) в области $-1 \leqslant t \leqslant 0$ запишется в виде

$$u(t, x) = \iint e^{i\xi(x-y)}[p_0(t, \xi)\varphi_0(y) + p_1(t, \xi)\varphi_1(y)]\,dy\,d\xi, \tag{12}$$

где

$$p_0(t, \xi) = \frac{1}{W(-1, \xi)}[\hat{u}_{2_t}(-1, \xi)\hat{u}_1(t, \xi) - \hat{u}_{1_t}(-1, \xi)\hat{u}_2(t, \xi)], \tag{13}$$

$$p_1(t, \xi) = \frac{1}{W(-1, \xi)} [\hat{u}_1(-1, \xi) \hat{u}_2(t, \xi) - \hat{u}_2(-1, \xi) \hat{u}_1(t, \xi)], \quad (14)$$

$$W(t, \xi) = \begin{vmatrix} \hat{u}_1(t, \xi) & \hat{u}_2(t, \xi) \\ \hat{u}_{1_t}(t, \xi) & \hat{u}_{2_t}(t, \xi) \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Заметим, что для $\Psi(\alpha, \bar{\gamma}, z)$ при малых $|z|$ имеет место

$$\Psi(\alpha, \bar{\gamma}, z) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} [\ln z + \psi(\alpha) - 2\gamma] + o(|z \ln z|), \quad (16)$$

где $\psi(\alpha)$ — логарифмическая производная $\Gamma(\alpha)$, γ — постоянная Эйлера (см. [8]). Учитывая (16) и то, что $W(t, \xi)$ не зависит от t, нетрудно показать, что

$$W(t, \xi) = W(0, \xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} [\psi(\alpha) - \psi(1-\alpha) + i\varepsilon\pi] \neq 0, \quad (17)$$

где $\varepsilon = \operatorname{sign} \xi$. Для удобства введем следующие обозначения:

$$H_-(\alpha, \bar{\gamma}, z) = e^{i\varepsilon\alpha\pi} \Psi(\alpha, \bar{\gamma}, z), \quad (18)$$

$$H_+(\alpha, \tilde{\gamma}, z) = e^{i\varepsilon\pi(\alpha - \tilde{\gamma})} \Psi(1-\alpha, \bar{\gamma}, -z), \quad (19)$$

$$J_\pm(\alpha, \bar{\gamma}, z) = e^{\mp\frac{z}{2}} \frac{d}{dz} [e^{\pm\frac{z}{2}} H_\pm(\alpha, \bar{\gamma}, z)]. \quad (20)$$

В этих обозначениях нетрудно видеть, что

$$\hat{u}_{1_t}(t, \xi) = e^{-i\pi\varepsilon\pi} e^{-\frac{z}{2}} [H_-(\alpha_2, 1, z) - 2i\xi t^{-1} \Lambda(t) J_-(\alpha_2, 1, z)],$$
$$z = 2i\Lambda(t)\xi \quad (21)$$

$$\hat{u}_{2_t}(t, \xi) = e^{i\pi\varepsilon(1-\alpha_2)} e^{z/2} [H_+(\alpha_2, 1, z) - 2i\xi t^{-1} \Lambda(t) J_-(\alpha_2, 1, z)],$$
$$z = 2i\Lambda(t)\xi. \quad (22)$$

Отсюда, учитывая (13), (14) и (17), легко получить следующие выражения для $p_0(t, \xi)$ и $p_1(t, \xi)$:

$$p_0(t, \xi) = \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(1-\alpha_2) e^{i\pi\varepsilon(1-2\alpha_2)} t}{\psi(\alpha_2) - \psi(1-\alpha_2) + i\varepsilon\pi} \{e^{-\frac{z-z_0}{2}} H_-(\alpha_2, 1, z) \times$$
$$\times [H_+(\alpha_2, 1, z_0) + z_0 J_+(\alpha_2, 1, z_0)] - e^{(z-z_0)/2} H_+(\alpha_2, 1, z_0) \times$$
$$\times [H_-(\alpha_2, 1, z_0) + z_0 J_-(\alpha_2, 1, z_0)]\}, \quad (23)$$

$$p_1(t, \xi) = \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(1-\alpha_2) e^{i\pi\varepsilon(1-2\alpha_2)} t}{\psi(\alpha_2) - \psi(1-\alpha_2) + i\varepsilon\pi} [e^{-\frac{z-z_0}{2}} H_-(\alpha_2, 1, z) \times$$
$$\times H_+(\alpha_2, 1, z_0) - e^{(z-z_0/2)} H_+(\alpha_2, 1, z) H_-(\alpha_2, 1, z_0)], \quad (24)$$

$$z = 2i\Lambda(t)\xi, \quad z_0 = 2i\Lambda(-1)\xi = \frac{2i\xi}{e}.$$

Заметим, что p_0, p_1 имеют особенности при $\xi=0$, однако для наших целей достаточно ограничиться областью $|\xi|>r>0$. Поэтому, учитывая (12), (23) и (24), нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Параметрикс задачи Коши* (1)—(2) *в области* $-1\leqslant t<0$ *задается формулой*

$$u(t,x)=\iint\frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(1-\alpha_2)e^{i\pi(1-2\alpha_2)\varepsilon}}{\psi(\alpha_2)-\psi(1-\alpha_2)+i\varepsilon\pi}\{\varphi_0(y)[e^{i\xi\left(x-y-\Lambda(t)+\frac{1}{e}\right)}\times$$

$$\times tH_-(\alpha_2,1,z)(H_+(\alpha_2,1,z_0)+z_0J_+(\alpha_2,1,z_0))-$$

$$-e^{i\xi\left(x-y+\Lambda(t)-\frac{1}{e}\right)}tH_+(\alpha_2,1,z)(H_-(\alpha_2,1,z_0)+$$

$$+z_0J_-(\alpha_2,1,z_0))]+\varphi_1(y)[e^{i\xi\left(x-y-\Lambda(t)+\frac{1}{e}\right)}tH_-(\alpha_2,1,z)\times$$

$$\times H_+(\alpha_2,1,z_0)-e^{i\xi\left(x-y+\Lambda(t)-\frac{1}{e}\right)}tH_+(\alpha_2,1,z)\times$$

$$\times H_-(\alpha_2,1,z_0)]\}\,dyd\xi\ (\mathrm{mod}\ C^\infty),\tag{25}$$

$$z=2i\Lambda(t)\xi,\quad z_0=\frac{2i\xi}{e},$$

Кроме того, заметим, что в силу (16) имеем

$$\lim_{t\to-0}tH_-(\alpha_2,1,2i\Lambda(t)\xi)=-\frac{e^{i\pi\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)},\tag{26}$$

$$\lim_{t\to-0}tH_+(\alpha_2,1,2i\Lambda(t)\xi)=-\frac{e^{i\pi(\alpha_2-1)}}{\Gamma(1-\alpha_2)},\tag{27}$$

поэтому из теоремы 1 легко получаем

Следствие 1. *Решение* $u(t,x)$ *при* $t\to-0$ *имеет вид*:

$$u(0,x)=-\iint\{c_+(\alpha_2,\varepsilon)e^{i\xi\left(x-y+\frac{1}{e}\right)}[H_+(\alpha_2,1,z_0)+$$

$$+z_0J_+(\alpha_2,1,z_0)]+c_-(\alpha_2,\varepsilon)e^{i\xi\left(x-y-\frac{1}{e}\right)}[H_-(\alpha_2,1,z_0)+$$

$$+z_0J_-(\alpha_2,1,z_0)]\}\varphi_0(y)\,dyd\xi-\iint[c_+(\alpha_2,\varepsilon)e^{i\xi\left(x-y+\frac{1}{e}\right)}\times$$

$$\times H_+(\alpha_2,1,z_0)+c_-(\alpha_2,\varepsilon)e^{i\xi\left(x-y-\frac{1}{e}\right)}H_-(\alpha_2,1,z_0)]\varphi_1(y)\,dyd\xi\ (\mathrm{mod}\ C^\infty),\tag{28}$$

где

$$c_+(\alpha,\varepsilon)=\frac{\Gamma(1-\alpha)e^{i\pi\varepsilon(1-\alpha)}}{\psi(\alpha)-\psi(1-\alpha)+i\varepsilon\pi},\quad c_-(\alpha,\varepsilon)=-\frac{\Gamma(\alpha)e^{-i\pi\varepsilon\alpha}}{\psi(\alpha)-\psi(1-\alpha)+i\varepsilon\pi}.\tag{29}$$

Далее, убедившись в законности дифференцирования асимптотики (16) продифференцируем (25) по t и устремив $t \to -0$, получим

Следствие 2. *Производная $u_t(t, x)$ при $t \to -0$ имеет вид*

$$u_t(0, x) = -\iint \{c_+(\alpha_2, \varepsilon)\varphi_0(y)[e^{i\xi\left(x-y+\frac{1}{e}\right)}(H_+(\alpha_2, 1, z_0) +$$

$$+ z_0 J_+(\alpha_2, 1, z_0))(\ln|2\xi| + d_+(\alpha_2, \varepsilon))] + c_-(\alpha_2, \varepsilon)\varphi_0(y) \times$$

$$\times [e^{i\xi\left(x-y-\frac{1}{e}\right)}(H_-(\alpha_2, 1, z_0) + z_0 J_-(\alpha_2, 1, z_0))(\ln|2\xi| + d_-(\alpha_2, \varepsilon))]\}\, dy d\xi -$$

$$-\iint \{c_+(\alpha_2, \varepsilon)\varphi_1(y)[e^{i\xi\left(x-y+\frac{1}{e}\right)} H_+(\alpha_2, 1, z_0)(\ln|2\xi| + d_+(\alpha_2, \varepsilon))] +$$

$$+ c_-(\alpha_2, \varepsilon)\varphi_1(y)[e^{i\xi\left(x-y-\frac{1}{e}\right)} H_-(\alpha_2, 1, z_0)(\ln|2\xi| +$$

$$+ d_-(\alpha_2, \varepsilon))]\}\, dy\, d\xi \,(\mathrm{mod}\, C^\infty), \tag{30}$$

где

$$d_+(\alpha, \varepsilon) = \psi(\alpha) - 2\gamma + i\varepsilon\frac{\pi}{2}, \tag{31}$$

$$d_-(\alpha, \varepsilon) = \psi(1-\alpha) - 2\gamma - i\varepsilon\frac{\pi}{2}. \tag{32}$$

Заметим, что для функции $\Psi(\alpha, \tilde{\gamma}, z)$ имеет место следующее асимптотическое разложение (см. [8]):

$$\Psi(\alpha, \tilde{\gamma}, z) \sim z^{-\alpha}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(\alpha)_k(\alpha - \tilde{\gamma} + 1)_k}{k!}z^{-k}\right] \tag{33}$$

при $z \to \infty$ и когда $-\frac{3\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2}$, где $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$.

Поэтому, в силу определения H_+ и H_- для них справедливы следующие асимптотические разложения:

$$H_-(\alpha, 1, z) \sim (e^{\mp i\pi}z)^{-\alpha}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(\alpha)_k^2}{k!}z^{-k}\right], \tag{34}$$

$$H_+(\alpha, 1, z) \sim z^{\alpha-1}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\alpha)_k^2}{k!}z^{-k}\right]. \tag{35}$$

Из (34) и (35) легко видеть, что при каждом фиксированном $t \neq 0$ H_+ и H_- удовлетворяют при достаточно большом $|\xi|$ следующим неравенствам:

$$|\partial_\xi^m H_+(\alpha, 1, 2i\Lambda(t)\xi)| \leqslant c_m(t)\langle\xi\rangle^{\alpha-1-m}, \tag{36}$$

$$|\partial_\xi^m H_-(\alpha, 1, 2i\Lambda(t)\xi)| \leqslant \tilde{c}_m(t)\langle\xi\rangle^{-\alpha-m}. \tag{37}$$

Поэтому, $H_+(\alpha, 1, 2i\Lambda(t)\xi)$ и $H_-(\alpha, 1, 2i\Lambda(t)\xi)$ являются эллиптическими символами соответственно из классов $S^{\alpha-1}$ и $S^{-\alpha}$. Учитывая формулы дифференцирования вырожденных гипергеометрических функций (см. [8]), нетрудно проверить, что $J_+(\alpha, 1, z_0)$ и $J_-(\alpha, 1, z_0)$ принадлежат тем же классам $S^{\alpha-1}$ и $S^{-\alpha}$. Отсюда легко видеть, что как (28), так и (25) при каждом фиксированном $t<0$ представляют собой сумму эллиптических псевдодифференциальных операторов. Далее, учитывая то, что $\Gamma(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ имеют полюсы I-го порядка в точках $\alpha=-n$, $n=0, 1,\cdots$, легко видеть, что $c_+(\alpha_2, \varepsilon)$ и $c_-(\alpha_2, \varepsilon)$ в (28) обращаются в нуль соответственно при $a_2=-2n-1$ и $a_2=2n+1, n=0, 1,\cdots$. Отсюда, принимая во внимание свойства эллиптических п.д.о. (см [7]), нетрудно доказать следующую теорему о распространении волнового фронта.

Теорема 2. *Волновой фронт решения задачи Коши* (1)—(2) $(WF(u(t)))$ *при* $t\in[-1, 0)$ *инвариантен относительно потоков, определяемых гамильтонианами* $H_1=\tau-\mu(t)\xi$ *и* $H_2=\tau+\mu(t)\xi$. *Если* $\{(x_0, \xi_0)\}=WF(\varphi_0)\cup WF(\varphi_1)$, *то для* $WF(u(0))$ *возможны следующие три случая*:

а) $a_2=-2n-1,\ n=0, 1,\cdots,$ *тогда* $WF(u(0))=\left\{\left(x_0+\frac{1}{e}, \xi_0\right)\right\}$,

б) $a_2=2n+1,\ n=0, 1,\cdots,$ *тогда* $WF(u(0))=\left\{\left(x_0-\frac{1}{e}, \xi_0\right)\right\}$,

в) *в остальных случаях* $WF(u(0))=\left\{\left(x_0+\frac{1}{e}, \xi_0\right),\right.$

$$\left.\left(x_0-\frac{1}{e}, \xi_0\right)\right\}.$$

Заметим, что учитывая замкнутость волнового фронта и наличие энергетических оценок образа Фурье решения (1)—(2) (см. [2]), можно, не используя явной формы параметрикса, доказать что $\left(x_0+\frac{1}{e}, \xi_0\right)$, $\left(x_0-\frac{1}{e}, \xi_0\right)\in WF(u(0))\cup WF(u_t(0))$ (см. [2]). Однако для нас особенно важно знать, когда эти точки принадлежат именно $WF(u(0))$.

2°. Параметрикс и распространение особенностей в области $t>0$

В виду частичной гипоэллиптичности оператора P, решение задачи Коши (1)—(2) с $t=-1$ до $t=1$ эквивалентно ее решению с $t=-1$ до $t=0$ и далее с $t=0$ до $t=1$. Поэтому рассмотрим следующую задачу Коши:

$$Pv=v_{tt}-\mu^2(t)v_{xx}-a_1\frac{\mu^2(t)}{\Lambda(t)}v_x=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{38}$$

$$v|_{t=0}=\psi_0(x),\ v_t|_{t=0}=\psi_1(x). \tag{39}$$

После частичного преобразования Фурье по переменной x, (38)—(39) перейдет в задачу Коши:

$$\hat{v}_{tt}+\left(\mu^2(t)\xi^2-ia_1\frac{\mu^2(t)}{\Lambda(t)}\xi\right)\hat{v}=0, \tag{40}$$

$$\hat{v}|_{t=0} = \hat{\varphi}_0(\xi), \quad \hat{v}_t|_{t=0} = \hat{\varphi}_1(\xi). \tag{41}$$

Проводя далее преобразования, аналогичные проделанным в 1°, легко видеть, что (40) перейдет в уравнение Куммера и поэтому функции

$$\hat{v}_1(t, \xi) = te^{-i\Lambda(t)\xi}\,\Psi(\alpha_1, 1, 2i\Lambda(t)\xi), \tag{42}$$

$$\hat{v}_2(t, \xi) = te^{i\Lambda(t)\xi}\,\Psi(1-\alpha_1, 1, -2i\Lambda(t)\xi), \tag{43}$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + a_1)$, представляют собой фундаментальную систему решений (40). Поэтому, решение $v(t, x)$ запишется в виде

$$v(t, x) = \iint e^{i\xi(x-y)}[\tilde{p}_0(t, \xi)\,\varphi_0(y) + \tilde{p}_1(t, \xi)\,\varphi_1(y)]\,dy\,d\xi, \tag{44}$$

где

$$\tilde{p}_0(t, \xi) = \frac{1}{W(0, \xi)}[\hat{v}_{2_t}(0, \xi)\,\hat{v}_1(t, \xi) - \hat{v}_{1_t}(0, \xi)\,\hat{v}_2(t, \xi)], \tag{45}$$

$$\tilde{p}_1(t, \xi) = \frac{1}{W(0, \xi)}[\hat{v}_1(0, \xi)\,\hat{v}_2(t, \xi) - \hat{v}_2(0, \xi)\,\hat{v}_1(t, \xi)]. \tag{46}$$

Дифференцируя (42) и (43) по t, получаем

$$\begin{aligned}\hat{v}_{1_t}(t, \xi) = {} & e^{-i\Lambda(t)\xi}(1 - t^{-1}\Lambda(t))\,\Psi(\alpha_1, 1, 2i\Lambda(t)\xi) + \\ & + e^{-i\Lambda(t)\xi}\,2i\xi t^{-1}\Lambda(t)\,\Psi_z(\alpha_1, 1, 2i\Lambda(t)\xi),\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_{2_t}(t, \xi) = {} & e^{i\Lambda(t)\xi}(1 + t^{-1}\Lambda(t))\,\Psi(1-\alpha_1, 1, -2i\Lambda(t)\xi) - \\ & - 2i\xi t^{-1}\Lambda(t)\,e^{i\Lambda(t)\xi}\,\Psi_z(1-\alpha_1, 1, -2i\Lambda(t)\xi).\end{aligned} \tag{48}$$

Далее, учитывая асимпотику (16) и законность ее дифференцирования, из (47) и (48) легко получаем

$$\hat{v}_{1_t}(0, \xi) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\left[\ln|2\xi| + i\varepsilon\frac{\pi}{2} + \psi(\alpha_1) - 2\gamma\right], \tag{49}$$

$$\hat{v}_{2_t}(0, \xi) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}\left[\ln|2\xi| - i\varepsilon\frac{\pi}{2} + \psi(1-\alpha_1) - 2\gamma\right], \tag{50}$$

$$\hat{v}_1(0, \xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}, \quad \hat{v}_2(0, \xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}. \tag{51}$$

Поэтому из (49)—(51) и (45), (46) для $\tilde{p}_0(t, \xi)$ и $\tilde{p}_1(t, \xi)$ имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_0(t, \xi) = {} & \frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(1-\alpha_1)}{\psi(\alpha_1) - \psi(1-\alpha_1) + i\varepsilon\pi}\Bigg\{-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}\Bigg[\ln|2\xi| - i\varepsilon\frac{\pi}{2} + \\ & + \psi(1-\alpha_1) - 2\gamma\Bigg]te^{-i\Lambda(t)\xi}\,\Psi(\alpha_1, 1, z) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\Bigg[\ln|2\xi| + i\varepsilon\frac{\pi}{2} + \\ & + \psi(\alpha_1) - 2\gamma\Bigg]te^{i\Lambda(t)\xi}\,\Psi(1-\alpha_1, 1, -z)\Bigg\},\end{aligned} \tag{52}$$

$$\bar{p}_1(t,\xi)=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_1)}{\psi(\alpha_1)-\psi(1-\alpha_1)+i\varepsilon\pi}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}te^{i\Lambda(t)\xi}\Psi(1-\alpha_1,1,-z)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}te^{-i\Lambda(t)\xi}\Psi(\alpha_1,1,z),\right. \tag{53}$$

где $z=2i\Lambda(t)\xi$, $\varepsilon=\operatorname{sign}\xi$. Таким образом, учитывая (44) и (52), (53) нетрудно проверить, что верна следующая

Теорема 3. *Параметрикс задачи Коши* (38)—(39) *задается формулой*:

$$v(t,x)=\iint c_-(\alpha_1,\varepsilon)\,e^{i\xi(x-y-\Lambda(t))}t\ln|2\xi|\,H_-(\alpha_1,1,2i\Lambda(t)\xi)\times$$

$$\times\psi_0(y)\,dyd\xi+\iint c_-(\alpha_1,\varepsilon)\,d_-(\alpha_1,\varepsilon)\,e^{i\xi(x-y-\Lambda(t))}tH_-(\alpha_1,1,2i\Lambda(t)\xi)\times$$

$$\times\psi_0(y)\,dyd\xi+\iint c_-(\alpha_1,\varepsilon)\,e^{i\xi(x-y-\Lambda(t))}tH_-(\alpha_1,1,2i\Lambda(t)\xi)\times$$

$$\times\psi_1(y)\,dyd\xi+\iint c_+(\alpha_1,\varepsilon)\,e^{i\xi(x-y+\Lambda(t))}t\ln|2\xi|\,H_+(\alpha_1,$$

$$1,2i\Lambda(t)\xi)\psi_0(y)\,dyd\xi+\iint c_+(\alpha_1,\varepsilon)\,d_+(\alpha_1,\varepsilon)\,e^{i\xi(x-y+\Lambda(t))}\times$$

$$\times tH_+(\alpha_1,,1\,2i\Lambda(t)\xi)\,\psi_0\,dyd\xi+\iint c_+(\alpha_1,\varepsilon)\times$$

$$\times e^{i\xi(x-y+\Lambda(t))}tH_+(\alpha_1,1,2i\Lambda(t)\xi)\,\psi_1(y)\,dyd\xi\ (\mathrm{mod}\ C^\infty), \tag{54}$$

где $c_\pm$, $d_\pm$ *определяются выражениями* (29), (31), (32).

Учитывая (54) и эллиптичность символов $H_\pm(\alpha,1,2i\Lambda(t)\xi)$, мы сразу можем, для случая $\psi_0(x)\in C^\infty$ описать распространение сингулярностей $v(t,x)$, а именно справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть* $WF(\psi_1)=\{y_0,\eta_0\}$, $\psi_0(x)\in C^\infty$, *тогда*: а) *если* $\alpha_1=-2n-1$, $n=0,1,\cdots$, *т. е.* $c_+(\alpha_1,\varepsilon)=0$, *то* $WF(v(t))=$ $=\{(y_0+\Lambda(t),\eta_0)\,|t\geqslant0\}=\tilde{\Gamma}_+(y_0,\eta_0)$, б) *если* $\alpha_1=2n+1$, $n=0,1,\cdots$, *т. е.* $c_-(\alpha_1,\varepsilon)=0$, *то* $WF(v(t))=\{(y_0-\Lambda(t),\eta_0)\,|t\geqslant0\}=\tilde{\Gamma}_-(y_0,\eta_0)$, в) *для остальных* α_1 $WF(v(t))=\tilde{\Gamma}_+(y_0,\eta_0)\cup\tilde{\Gamma}_-(y_0,\eta_0)$.

Для исследования параметрикса (54) рассмотрим следующий оператор:

$$Au(x)=\iint e^{i\xi(x-y)}a(\xi)\ln|\xi|\,u(y)\,dyd\xi, \tag{55}$$

где $a(\xi)$ — классический эллиптический символ из класса S^m. Заметим, что A не является эллиптическим псевдодифференциальным оператором, поскольку его главный символ в обычном понимании равен 0. Однако, проводя конструкцию доказальства теоремы о распространении волнового фронта для интегральных операторов Фурье (см. [7]), нетрудно доказать, что $WF(Au) \subset WF(u)$. Далее, замечая, что аналогичное включение можно доказать и для оператора

$$Bv(z) = \iint e^{i\eta(z-t)} \frac{1}{\ln|\eta|\, a(\eta)} v(t)\, dt\, d\eta \tag{56}$$

и то, что $B = A^{-1} + R$, где $S^{-\infty} \ni R$ — сглаживающий оператор, сразу получаем, что $WF(u) = WF(Au)$. Таким образом, каждое слагаемое в (54) ведет себя как эллиптический п.д.о., поэтому нетрудно проверить справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $|(y_0, \eta_0)| = WF(\psi_0) \cup WF(\psi_1)$. *Тогда*: 1) *если* $\psi_0 \overline{\in} C^\infty$, *то* $WF(v(t)) = \widetilde{\Gamma}_+(y_0, \eta_0) \cup \widetilde{\Gamma}_-(y_0, \eta_0)$, 2) *если* $\psi_0(x) \in C^\infty$, *то* $WF(v(t))$ *описывается теоремой 4.*

Таким образом, в отличие от конечной скорости слипания характеристик, в рассматриваемом случае особенности распространяются вдоль обеих характеристик для любой постоянной a_1, если только $\psi_0(x) \overline{\in} C^\infty$.

3°. Параметрикс и распространение волнового фронта при $-1 \leqslant t \leqslant 1$

Комбинируя результаты теоремы 3 и следствий 1, 2, т. е. подставляя (28) и (30) в (54), легко получаем выражение параметрикса задачи (1)—(2) в области $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Теорема 6. *Параметрикс задачи Коши* (1)—(2) *при* $t \geqslant 0$ *задается формулой*:

$$u(t, x) = -\int c_-(a_1, \xi)\, e^{i\xi(x-y-\Lambda(t))}\, tH_-(a_1, 1, z)(\ln|2\xi| + d_-(a_1, \xi)) \times$$

$$\times \{c_+(a_2, \xi')\, e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{\varepsilon}\right)} [H_+(a_2, 1, z_0') + z_0' J_+(a_2, 1, z_0')]\, \varphi_0(\eta) + c_-(a_2, \xi') \times$$

$$\times e^{i\xi'\left(y-\eta-\frac{1}{\varepsilon}\right)} [H_-(a_2, 1, z_0') + z_0' J_-(a_2, 1, z_0')]\, \varphi_0(\eta) + c_+(\xi_2, \varepsilon')\, e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{\varepsilon}\right)} \times$$

$$\times H_+(a_2, 1, z_0')\, \varphi_1(\eta) + c_-(a_2, \xi')\, e^{i\xi'\left(y-\eta-\frac{1}{\varepsilon}\right)} H_-(a_2, 1, z_0')\, \varphi_1(\eta)\}\, d\eta\, d\xi'\, dy\, d\xi -$$

$$-\int [c_-(a_1, \xi)\, e^{i\xi(x-y-\Lambda(t))}\, tH_-(a_1, 1, z) + c_+(a_1, \xi)\, e^{i\xi(x-y+\Lambda(t))} t \times$$

$$\times H_+(a_1, 1, z)]\, \{c_+(a_2, \varepsilon')\, \varphi_0(\eta)\, [e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{\varepsilon}\right)} (H_+(a_2, 1, z_0') +$$

$$+ z_0' J_+(a_2, 1, z_0'))\, (\ln|2\xi'| + d_+(a_2, \varepsilon'))] + c_-(a_2, \varepsilon')\, \varphi_0(\eta) \times$$

$$\times [e^{i\xi'\left(y-\eta-\frac{1}{\varepsilon}\right)} (H_-(a_2, 1, z_0') + z_0' J_-(a_2, 1, z_0'))\, (\ln|2\xi'| + d_-(a_2, \varepsilon'))] +$$

$$+ c_+(\alpha_2, \varepsilon')\varphi_1(\eta)[e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{e}\right)} H_+(\alpha_2, 1, z_0')(\ln|2\xi'| + d_+(\alpha_2, \varepsilon'))] -$$

$$- c_-(\alpha_2, \varepsilon')\varphi_1(\eta)[e^{i\xi'\left(y-\eta-\frac{1}{e}\right)} H_-(\alpha_2, 1, z_0')(\ln|2\xi'| + d_-(\alpha_2, \varepsilon'))]| \,d\eta\, d\xi' dy\, d\xi -$$

$$- \int [c_+(\alpha_1, \varepsilon)\, e^{i\xi(x-y+\Lambda(t))} t H_+(\alpha_1, 1, z)\,(\ln|2\xi| + d_+(\alpha_1, \varepsilon))] \times$$

$$\times \{c_+(\alpha_2, \varepsilon')\, e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{e}\right)} [H_+(\alpha_2, 1, z_0') + z_0 J_+(\alpha_2, 1, z_0')]\,\varphi_0(\eta) +$$

$$+ c_-(\alpha_2, \varepsilon')\, e^{i\xi'\left(y-\eta-\frac{1}{e}\right)} [H_-(\alpha_2, 1, z_0') + z_0' J_-(\alpha_2, 1, z_0')]\,\varphi_0(\eta) +$$

$$+ c_+(\alpha_2, \varepsilon')\, e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{e}\right)} H_+(\alpha_2, 1, z_0')\,\varphi_1(\eta) + c_-(\alpha_2, \varepsilon') \times$$

$$\times e^{i\xi'\left(y-\eta-\frac{1}{e}\right)} H_-(\alpha_2, 1, z_0')\,\varphi_1(\eta)|\, d\eta\, d\xi'\, dy d\xi \pmod{C^\infty}, \tag{57}$$

где $z = 2i\Lambda(t)\xi$, $z_0' = \dfrac{2i\xi'}{e}$. *При* $t < 0$ *параметрикс задается формулой* (25).

Для получения описания волнового фронта решения задачи Коши при $-1 \leqslant t \leqslant 1$ достаточно теперь применить последовательно теоремы 2 и 5. Но прежде, для простоты введем следующие обозначения:

$$\Gamma_\pm(x_0, \xi_0) = \left\{\left(x_0 \mp \left(\Lambda(t) - \frac{1}{e}\right), \xi_0\right) | t \in [-1, 0)\right\},$$

$$\tilde{\Gamma}_\pm(y_0, \eta_0) = \{(y_0 \pm \Lambda(t), \eta_0) \,|\, t \in [0, 1]\}.$$

Теорема 7. *Пусть* $\{(x_0, \xi_0)\} = WF(\varphi_0) \cup WF(\varphi_1)$, *тогда*: а) *если* $\alpha_2 \neq \pm(2n+1)$, $n = 0, 1, \cdots$, *то* $WF(u(t)) = \Gamma_+(x_0, \xi_0) \cup \Gamma_-(x_0, \xi_0) \cup \cup \tilde{\Gamma}_\pm\left(x_0 + \frac{1}{e}, \xi_0\right) \cup \tilde{\Gamma}_\pm\left(x_0 - \frac{1}{e}, \xi_0\right)$, б) *если* $\alpha_2 = -2n-1$ *и при этом* $\alpha_1 = -2k-1$, $k = 0, 1, \cdots$, *то*

$$WF(u(t)) = \Gamma_+(x_0, \xi_0) \cup \Gamma_-(x_0, \xi_0) \cup \tilde{\Gamma}_\pm\left(x_0 + \frac{1}{e}, \xi_0\right) \cup$$

$$\cup \tilde{\Gamma}_+\left(x_0 - \frac{1}{e}, \xi_0\right),$$

б)$_2$ *если* $\alpha_2 = -2n-1$ *и при этом* $\alpha_1 = 2k+1$, $k=0, 1, \cdots$, *то*

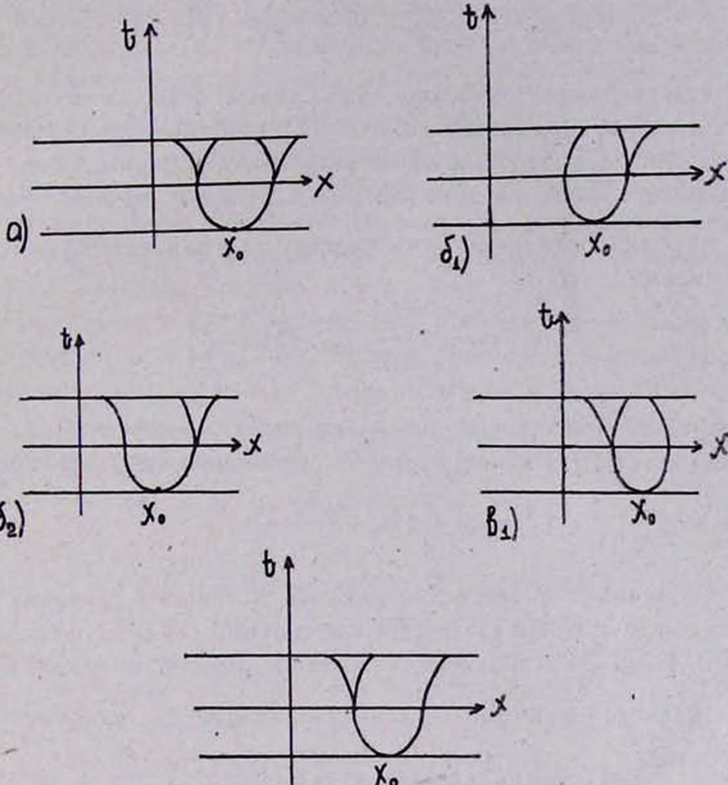
$$WF(u(t)) = \Gamma_+(x_0, \xi_0) \cup \Gamma_-(x_0, \xi_0) \cup \tilde{\Gamma}_\pm\left(x_0 + \frac{1}{e}, \xi_0\right) \cup \tilde{\Gamma}_-\left(x_0 - \frac{1}{e}, \xi_0\right),$$

в)$_1$ *если* $\alpha_2 = 2n+1$, $n = 0, 1, \cdots$ *и при этом* $\alpha_1 = 2k+1$. $k = 0, 1, \cdots$, *то*

$$WF(u(t)) = \Gamma_+(x_0, \xi_0) \cup \Gamma_-(x_0, \xi_0) \cup \tilde{\Gamma}_\pm\left(x_0 - \frac{1}{e}, \xi_0\right) \cup \Gamma_-\left(x_0 + \frac{1}{e}, \xi_0\right),$$

в$_2$) *если* $a_2=2n+1$, $n=0, 1, \cdots$ *и при этом* $a_1=-2k-1$, $k=0, 1, \cdots$, *т*

$$WF(u(t))=\Gamma_+(x_0, \xi_0)\cup\Gamma_-(x_0, \xi_0)\cup\tilde{\Gamma}_\pm\left(x_0-\frac{1}{e}, \xi_0\right)\cup\tilde{\Gamma}_+\left(x_0+\frac{1}{e}, \xi_0\right).$$



4°. Пространства корректности задачи Коши

В работе Алиньяка [5] рассматривается задача Коши, аналогичная (38)—(39), но с $\mu(t)=t^l$. В этом случае доказывается, что решение $v(t, x)$ представимо в виде $v=N_1\varphi_0+M_1\varphi_1$, где N_1 и M_1 — непрерывные операторы, обладающие следующими свойствами:

$$N_1: H_s\to C_l^r(J_0; H_{s-n_1(l)-r}), \tag{58}$$

$$M_1: H_s\to C_l^r(J_0; H_{s-m_1(l)-r}), \tag{59}$$

где через $C_l^r(J_0; H_s)$ обозначен класс r-раз непрерывно дифференцируемых отображений из $J_0=[0,1]$ в H_s, а

$$n_1(l)=\sup\left(0, -\frac{1}{2}l(l+1)^{-1}+\frac{1}{2}(l+1)^{-1}\left|a_1\mu^3(t)(\Lambda(t))^{-1}t^{1-l}\right|\right), \tag{60}$$

$$m_1(l)=n(l)-(l+1)^{-1}. \tag{61}$$

Заметим, что рассматриваемый нами случай бесконечной (экспоненциальной) скорости слипания характеристик формально соответствует тому, что $l \to \infty$. Тогда в силу (60), (61) потери гладкости, соответствующие N_1 и M_1, будут стремиться к следующему:

$$n_1(l),\ m_1(l) \underset{l \to \infty}{\to} \sup\left(0, \frac{1}{2}(|a_1|-1)\right). \tag{62}$$

Однако, как это будет показано ниже, таким образом полученная потеря гладкости не учитывает некоторой дополнительной потери, возникающей при рассмотрении экспоненциального вырождения главной части оператора P. В работах [3], [9] получены оценки сверху для индекса корректности $\bar{m}$ и, в частности, для задачи (38)—(39), согласно [9], имеем:

$$\tilde{m} \leqslant \max\left\{1, \frac{1}{2}(a_1-1)+\frac{3}{2}\right\}. \tag{63}$$

В [6] получены оценки снизу для индекса корректности $\bar{m}$ и, применяя результаты [6] к оператору P, легко получить оценку:

$$\bar{m} \geqslant \frac{1}{2}(|a_1|-1)-\frac{1}{2}. \tag{64}$$

Для получения более естественного и точного описания п отери гладкости в задаче Коши (38)—(39), рассмотрим следующие пространства $B_{p,k}$ (см. [10]). Это пространства распределений w таких, что образ Фурье $\hat{w}$ является функцией, удовлетворяющей следующему условию

$$\|w\|_{p,k} = \left(\frac{1}{2\pi}\int |k(\xi)\,\hat{w}(\xi)|^p\,d\xi\right)^{1/p} < \infty, \tag{65}$$

где $k(\xi)$ — медленно растущая весовая функция, т. е. $k(\xi)>0$ и существует положительная постоянная C такая, что

$$k(\xi+\eta) \leqslant (1+C|\xi|)^N k(\eta) \tag{66}$$

для некоторого $N \in \mathbf{Z}^+$.

Теперь, используя теорему 3, нетрудно описать потерю гладкости в задаче (38)—(39), а именно справедливо следующее

Предложение 1. *Решение задачи Коши* (38)—(39) *представимо в виде* $v = N\varphi_0 + M\varphi_1$, *причем* N, M — *непрерывные операторы, действующие в следующих пространствах*:

$$N: H_s \to C_t^r([0,1],\ B_{2,k_1}), \tag{67}$$

$$M: H_s \to C_t^r([0,1],\ H_{s-r-\bar{m}_1}) \tag{68}$$

для любого $s \in \mathbf{R}^1$ *и* $r \in \mathbf{Z}^+$, *где*

$$k_1 = k_1(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(s-\bar{m}_1-r)}(1+\ln(1+|\xi|)), \tag{69}$$

$$\tilde{m}_1 = \max\left(0, \frac{1}{2}(|a_1| - 1)\right). \qquad (70)$$

Таким образом, это предложение показывает неправомерность предельного перехода (62) для вычисления потери гладкости в задаче (38)—(39), если $\varphi_0(x) \overline{\in} C^\infty$ и необходимость рассмотрения в пространствах $B_{p,k}$ задачи Коши для таких операторов.

Рассмотрим теперь задачу Коши (1)—(2) при $-1 \leqslant t \leqslant 0$. Заметим, что в силу (25) нетрудно проверить, что при $t < 0$ потери гладкости нет вообще, и это связано с тем, что в области $t < 0$ оператор P строго гиперболичен. Гладкость теряется по достижении линии вырождения $t = 0$. Используя следствия 1, 2 нетрудно проверить справедливость следующего предложения.

Предложение 2. *Существуют такие операторы P_i, Q_i $(i = 1, 2)$, что $u(0, x)$ и $u_t(0, x)$ могут быть записаны соответственно, в виде $u(0, x) = P_1\varphi_0 + Q_1\varphi_1$, $u_t(0, x) = P_2\varphi_0 + Q_2\varphi_1$, причем P_i, Q_i $(i = 1, 2)$ — непрерывные линейные операторы, действующие в следующих пространствах*:

$$P_1: H_s \to H_{s-\tilde{m}_2'}, \quad Q_1: H_s \to H_{s-\tilde{m}_1'}, \qquad (71)$$

$$P_2: H_s \to B_{2, k_2'}, \quad Q_2: H_s \to B_{2, k_1'}, \qquad (72)$$

где

$$\tilde{m}_1' = \max\left\{0, \frac{1}{2}(|a_2| - 1)\right\}, \quad \tilde{m}_2' = \frac{1}{2}(|a_2| + 1). \qquad (73)$$

$$k_i' = k_i'(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}(s - \tilde{m}_i')}(1 + \ln(1 + |\xi|)) \quad (i = 1, 2). \qquad (74)$$

Что же касается потери гладкости в (1)—(2) при $-1 \leqslant t \leqslant 1$, то она складывается из потерь гладкости, возникающих при решении (1)—(2) от $t = -1$ до $t = 0$ и далее от $t = 0$ до $t = 1$, описываемые предложениями 1 и 2.

В заключение выражаю искреннюю признательность А. Б. Нерсесяну, обратившему мое внимание на уравнение (1) и К. А. Ягджяну за полезные обсуждения.

Ереванский государственный университет

Поступила 15.VI.1983

Գ. Ռ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ. Մի մոդելային հավասարման Կոշու խնդրի պարամետրիկսը և յածման ալիքային ճակատը *(ամփոփում)*

Աշխատանքում կառուցված է մի մոդելային հիպերբոլական հավասարման պարամետրիկսը այն դեպքում, երբ բնութագրիչների շոշափումը ունի էքսպոնենցիալ բնույթ և այնուհետև բերված են ալիքային ճակատի տարածման ճշգրիտ թեորեմներ։

Պարզվում է, որ ի տարբերություն [1]-ում դիտարկված դեպքից, եզակիությունները այստեղ միշտ էլ տարածվում են դեպի $t>0$ տիրույթը երկու բնութագրիչների երկայնությամբ անկախ a-ի արժեքից։ Բացի այդ ստացված է ողորկության կորուստի ճշգրիտ նկարագրությունը և նրա համեմատումը [5], [6], [9]-ում բերված գնահատականների հետ։

G. R. ALEXANDRIAN. *Parametrix and propagation of the wave front to a Cauchy problem for a model hyperbolic equation* (summary)

The paper investigates a weakly hyperbolic equation with exponentional degeneration of hyperbolicity. First the parametrix of the Cauchy problem is constructed and some theorems on propagation of the wave front are proved. In contrast to the case investigated in [1] here the singularities propagats into domain $t > 0$ along both characteristics for any a. Besides that, exact description of the loss of regularity is given. The results are compared with those of [5], [6], [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Taniguchi, Y. Tozaki.* A hyperbolic equation with double characteristics which has a solution with branching singularities, Math. Japonica, 25, № 3, 1980, 279—300.
2. *Г. Р. Александрян, К. А. Ягджян.* Условия корректности задачи Коши и распространение особенностей решений уравнений с кратными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 18, № 2, 1983, 134—149.
3. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 3, № 2, 1968, 79—100.
4. *O. A. Oleinik.* On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Commum, Pure Appl. Math., 23, № 6, 1979, 359—386.
5. *S. Alinhac.* Paramotrix et propogation des singularites pour on problem de Cauchy a multiplicite variable Asterisque, 34—35, 1976, 3—36.
6. *T. Mandai.* On energy inequalities and regularity of solutions to weakly hyperbolic Cauchy problems, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 18, 1982, 607—660.
7. *M. Taylor.* Pseudodifferential operators, Princeton Mathematical Series, 34, 1981.
8. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции, 1, «Наука», 1973.
9. *Г. Р. Оганесян.* Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений с коэффициентами, зависящими только от временной переменной, Изв.. АН Арм.ССР, «Математика», 16, № 4, 1981, 301—331.
10. *Л. Хёрмандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 3, 1984 Математика

УДК 519.24

Ю. А. КУТОЯНЦ

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССОВ ПУАССОНОВСКОГО ТИПА

§ 1. Введение

Настоящая работа является продолжением исследования [1] локальной структуры семейства мер, отвечающих процессам пуассоновского типа [2] и посвящена описанию асимптотического поведения оценок максимального правдоподобия (ОМП) и байесовских оценок (БО) параметров интенсивности этих процессов. Ранее было установлено, что в условиях регулярности указанное семейство локально асимптотически нормальное, что позволило привести нижнюю границу Гаека [3] на риск произвольных оценок и построить асимптотически локально наиболее мощный критерий в задаче проверки близких (континуальных) гипотез [1]. Ниже показано, что некоторое усиление условий [1] позволяет доказывать состоятельность, асимптотическую нормальность, сходимость моментов и асимптотическую эффективность ОМП и БО параметров интенсивности. В аналогичной постановке описывались свойства ОМП в работе Огата [4], (состоятельность и асимптотическая нормальность) для стационарных процессов пуассоновского типа (и в некотором смысле близких к ним). Более простая модель точечного процесса—неоднородный процесс Пуассона, изучалась в [5], [6] (см. также [7]), где описаны свойства ОМП и БО параметров θ интенсивностей, включающих и такие, как $S(\theta, t) = \theta^{(1)}[1 + \cos(\theta^{(2)} t + \theta^{(3)})] + \lambda$, $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)})$. Приводимые в настоящей работе условия носят достаточно общий характер и могут быть выполнены как и для стационарных процессов пуассоновского типа так и для ряда неоднородных процессов Пуассона, например, приведенного выше, периодического.

Сходной задаче—оценке параметров спектральных плотностей стационарных процессов пуассоновского типа посвящены работы Бриллинджера [8], [9] и Туана [10]. Подход в описании свойств оценок в [8], [10] аналогичен традиционному подходу в оценивании спектральных параметров стационарных последовательностей.

Отметим также интересные работы [11]—[13] Огаты, Акаике, Вё—Джонса, в которых рассмотрены алгоритмы моделирования на ЭВМ реализаций ряда конкретных примеров процессов пуассоновского типа, предложены алгоритмы численного нахождения ОМП параметров интенсивности и обсуждаются вопросы приложений этих моделей к реальным явлениям.

В предлагаемой работе используется ряд результатов теории точечных процессов, изложенных в монографии Липцера, Ширяева [2] и две теоремы Ибрагимова, Хасьминского [3] об описании свойств ОМП и БО через свойства нормированного отношения правдоподобия. В работе результаты статьи [5] прямо переносятся на схему наблюдений процессов пуассоновского типа, поэтому из трёх лемм в § 3 доказывается только одна.

§ 2. Вспомогательные результаты

Пусть $\{\Omega, F, P\}$ — полное вероятностное пространство и $\{F_t, t\geqslant 0\}$ — неубывающее семейство непрерывных справа σ-алгебр $F_t\subset F$, пополненных множествами нулей вероятности. Обозначим $\tau=\{t_1, t_2, \cdots\}$ последовательность марковских относительно $\{F_t, t\geqslant 0\}$ моментов, обладающих с вероятностью 1 свойствами: $t_1>0$, $t_j<t_{j+1}$, $j=1, 2, \cdots$, и введем точечный процесс

$$X(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{\{t_j<t\}},\quad t\geqslant 0,$$

где $\chi_{\{\cdot\}}$ — индикатор. Значение $X(t)$ очевидно равно числу точек t_j (событий) на интервале $[0, t]$. Задание τ эквивалентно заданию процесса $X=\{X(t), F_t, t\geqslant 0\}$. Заметим, что реализации X — кусочно-постоянные функции такие, что $X(0)=0$, $X(t)=X(t-)+(1$ или $0)$. Процесс X при всех $t\geqslant 0$ допускает разложение Дуба — Мейера $X(t)=M(t)+A(t)$, где $M=\{M(t), F_t, t\geqslant 0\}$ — локальный мартингал и $A=\{A(t), F_t, t\geqslant 0\}$ — натуральный возрастающий процесс ([2], теорема 18.1). Точечный процесс X с абсолютно непрерывным компенсатором $A(t)=\int\limits_0^t\lambda(s)\,ds$ назовем процессом пуассоновского типа (ППТ). Обозначим $F_t^X=\sigma\{\omega: X(s), s\leqslant t\}$ и рассмотрим ППТ $X=\{X(t), F_t^X, t\geqslant 0\}$, который также имеет разложение Дуба—Мейера $X(t)=\overline{M}(t)+\overline{A}(t)$, где $\overline{M}(t)$ и $\overline{A}(t)$ F_t^X-измеримы (называемое минимальным), причем

$$\overline{A}(t)=\int\limits_0^t\overline{\lambda}(s)\,ds\quad \text{с}\ \overline{\lambda}(t)=E\{\lambda(t)|F_{t-}^X\}.$$

Случайный процесс $\overline{\lambda}=\{\overline{\lambda}(t), F_t^X, t\geqslant 0\}$ назовем интенсивностью ППТ.

Всюду далее считаем $F_t^X=F_t$ и обозначаем $S(t)=\overline{\lambda}(t)$. Нас будут интересовать задачи оценивания параметра $\theta\in\Theta\subset R^k$ интенсивности $S(\theta)=\{S(\theta, t), F_t, t\geqslant 0\}$ ППТ X. Примеры таких ППТ см. в [2], [9], [10]—[13]. Ради простоты обозначений считаем процесс $S(\theta)$ положитнльным с вероятностью 1 при всех $\theta\in\Theta$.

Обозначив D_T — пространство реализаций ППТ $X_T=\{X(t), F_t, 0\leqslant t\leqslant T\}$, т. е. пространство кусочно-постоянных функций $x_T=\{x(t), 0\leqslant t\leqslant T\}$ таких, что $x(0)=0$, $x(t)=x(t-)+(1$ или $0)$, $x(T)<\infty$ и $B_T=\sigma\{\omega: x(s), s\leqslant t\}$.

При каждом $\theta \in \Theta$ ППТ отвечает на (D_T, B_T) мера P_θ. Согласно теореме 19.7 [2] условие: при всех $\theta, \tilde{\theta} \in \Theta$

$$P_\theta\left\{\int_0^T S(\tilde{\theta}, t)\, dt < \infty\right\} = 1 \qquad (2.1)$$

необходимое и достаточное для эквивалентности всех мер семейства $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ и отношение правдоподобия $L(\theta, \theta_0; X_T) = dP_\theta/dP_{\theta_0}(X_T)$ при этом имеет вид

$$L(\theta, \theta_0; X_T) = \exp\left\{\int_0^T \ln\frac{S(\theta, t)}{S(\theta_0, t)} dX(t) - \int_0^T [S(\theta_1, t) - S(\theta_0, t)]\, dt\right\}, \qquad (2.2)$$

где первый интеграл понимается в смысле Лебега—Стилтьеса [2], теорема 19.7. Оценку максимального правдоподобия $\bar{\theta}$ определяем как решение уравнения

$$L(\hat{\theta}, \theta_0; X_T) = \sup_{y \in \Theta} L(y, \theta_0; X_T).$$

Заметим, что нахождение этой оценки зачастую довольно сложно. Например, уже в случае $S(\theta, t) = \sum_{i=1}^{k} \theta^{(i)} f_i(t)$, $k > 1$ она в явном виде не выписывается.

Условия состоятельного оценивания параметров интенсивности ППТ методом максимального правдоподобия можно формулировать как при $T \to \infty$, так и при фиксированном T, но $S(\theta, t) \to \infty$, например, $S(\theta, t) = nS_0(\theta, t)$ и $n \to \infty$. Для объединения этих предельных переходов будем сразу рассматривать задачу в схеме серий, т. е. считаем заданной последовательность задач, индексируемую $\varepsilon \in (0, 1]$ и предельный переход отвечает $\varepsilon \to 0$. Процесс $S(\theta, t) = S_\varepsilon(\theta, t)$, $t > 0$ и значение $T = T_\varepsilon$ меняются с ε произвольным образом, обеспечивающим выполнение приводимых ниже условий. Заметим, что, хотя в работах [1], [5]—[7] считается, что $T \to \infty$, сам факт стремления T к бесконечности в доказательствах не используется и простое переобозначение позволит перенести результаты этих работ на схему серий.

§ 3. Основной результат

Пусть Θ — ограниченное, открытое, выпуклое подмножество и при каждом $\varepsilon \in (0,1]$ и $\theta \in \Theta$ задан ППТ $X_\varepsilon = \{X_\varepsilon(t), F_t;\ 0 \leq t \leq T_\varepsilon\}$ интенсивности $S_\varepsilon(\theta) = \{S_\varepsilon(\theta, t), F_t;\ 0 \leq t \leq T_\varepsilon\}$. Требуется по реализации X_ε оценить θ и описать свойства оценки при $\varepsilon \to 0$. Ниже описываются свойства ОМП $\hat{\theta}_\varepsilon$ и БО $\bar{\theta}_\varepsilon$ параметра θ.

Нам понадобится следующая группа условий:

I. *При почти всех $t \in [0, T_\varepsilon]$ случайная функция $S_\varepsilon(\theta, t)$, $\theta \in \Theta$, $t \in [0, T_\varepsilon]$ с вероятностью 1 непрерывно дифференцируема по θ и*

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_0^{T_\varepsilon} S_\varepsilon(\theta, t)\,dt = \int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{\partial S_\varepsilon(\theta, t)}{\partial\theta}\,dt.$$

II. *Информационная матрица Фишера*

$$I_\varepsilon(\theta) = E_\theta \int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{\partial S_\varepsilon(\theta, t)'}{\partial\theta}\,\frac{\partial S_\varepsilon(\theta, t)}{\partial\theta}\,S_\varepsilon(\theta, t)^{-1}\,dt$$

положительно определена при всех $\theta \in \Theta$ *и* $\varepsilon \in (0,1)$ *и матрица* $\varphi_\varepsilon(\theta) = I_\varepsilon(\theta)^{-1/2}$ *обладает свойством*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\varphi_\varepsilon(\theta)\,\varphi_\varepsilon(\theta)'| = 0.$$

Здесь $|A| = \sup\limits_{|e|=1}(Ae, e)$, штрих обозначает транспонирование. Ниже K—произвольный компакт в Θ, вектор

$$\dot S_\varepsilon(\theta, t) = \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^{(1)}} S_\varepsilon(\theta, t), \dots, \frac{\partial}{\partial\theta^{(k)}} S_\varepsilon(\theta, t)\right\},\ \theta_x = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta)\,x.$$

III. *При всех* $\lambda \in R^k$ *равномерно по* $\theta \in K$

$$P_\theta - \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{T_\varepsilon} [\lambda'\varphi_\varepsilon(\theta)'\,\dot S_\varepsilon(\theta, t)]^2\,S_\varepsilon(\theta, t)^{-1}\,dt = |\lambda|^2.$$

IV. *Равномерно по* $\theta \in K$ *для любого* $\delta > 0$

$$P_\theta - \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{T_\varepsilon} |\varphi_\varepsilon(\theta)'\,\dot S_\varepsilon(\theta, t)|^2\,\chi_{\{|\varphi_\varepsilon(\theta)'\,\dot S_\varepsilon(\theta, t)| > \delta\}}\,S_\varepsilon(\theta, t)^{-1}\,dt = 0.$$

V. *Для любого* $C > 0$ *равномерно по* $\theta \in K$

$$P_\theta - \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{|u|+|v|<C}\int\limits_0^{T_\varepsilon}\left|\varphi_\varepsilon(\theta)'\left(\frac{\dot S_\varepsilon(\theta_u, t)}{S_\varepsilon(\theta_v, t)} - \frac{\dot S_\varepsilon(\theta, t)}{S_\varepsilon(\theta, t)}\right)\right|^2 S_\varepsilon(\theta, t)\,dt = 0,$$

где $u, v \in U_{\theta,\varepsilon} = \{u : \theta + \varphi_\varepsilon(\theta)\,u \in \Theta\}$.

Введем функцию

$$h_{\theta,\varepsilon}(u) = -\ln E_\theta \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^{T_\varepsilon}\left(\sqrt{S_\varepsilon(\theta_u, t)} - \sqrt{S_\varepsilon(\theta, t)}\right)^2 dt\right\}.$$

VI. *Имеет место неравенство*

$$\inf_{\theta\in K} h_{\theta,\varepsilon}(u) \geqslant c\,|u|^\gamma,$$

где $\gamma > 0$ *и постоянная* c *зависит только от* K.

VII. *При некотором* $m > k/2$

$$E_\theta\left(\int\limits_0^{T_\varepsilon} |\varphi_\varepsilon(\theta)'\,\dot S_\varepsilon(\theta, t)|^2\,S_\varepsilon(\theta, t)^{-1}\,dt\right)^m +$$

$$+E_\theta \int_0^{T_\varepsilon} \left| \varphi_\varepsilon(\theta_1)' \frac{\dot S_\varepsilon(\theta, t)}{S_\varepsilon(\theta, t)} \right|^{2m} S_\varepsilon(\theta, t)\, dt < C,$$

где постоянная C не зависит от θ, θ_1 и ε.

Теорема 3.1. *Если выполнены условия* I—VII, *то оценка максимального правдоподобия $\hat\theta_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $\theta \in K$ состоятельная:*

$$P_\theta - \lim_{\varepsilon \to 0} \hat\theta_\varepsilon = \theta,$$

асимптотически нормальная

$$\mathrm{L}_\theta \{\varphi_\varepsilon(\theta)^{-1} (\hat\theta_\varepsilon - \theta)\} \Rightarrow N(0, J),$$

J — единичная матрица, и имеет место сходимость моментов

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_\theta |\varphi_\varepsilon(\theta)^{-1} (\hat\theta_\varepsilon - \theta)|^p = E|\xi|^p,$$

где $\mathrm{L}\{\xi\} = N(0, J)$, $p > 0$.

Доказательство проводится методом Ибрагимова—Хасьминского и заключается в установлении ряда свойств нормированного отношения правдоподобия

$$Z_\varepsilon(u) = L(\theta + \varphi_\varepsilon(\theta) u, \theta; X_\varepsilon),$$

где θ — истинное значение оцениваемого параметра, сформулированных в приводимых ниже леммах.

Лемма 3.1. *Если выполнены условия* I—V, *то семейство мер $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ при $\varepsilon \to 0$ локально асимптотически нормально равномерно по $\theta \in K$, с правильной нормирующей матрицей $\varphi_\varepsilon(\theta)$, т. е.*

$$Z_\varepsilon(u) = \exp\left\{u' \Delta_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon) - \frac{1}{2}|u|^2 + \psi_\varepsilon(\theta, u, X_\varepsilon)\right\},$$

где

$$\Delta_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon) = \varphi_\varepsilon(\theta)' \int_0^{T_\varepsilon} \frac{\dot S_\varepsilon(\theta, t)}{S_\varepsilon(\theta, t)} [dX_\varepsilon(t) - S_\varepsilon(\theta, t)\, dt]$$

и равномерно по $\theta \in K$

$$\mathrm{L}_\theta\{\Delta_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon)\} \Rightarrow N(0, J), \tag{3.1}$$

$$P_\theta - \lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(\theta, u, X_\varepsilon) = 0.$$

Доказательство практически повторяет все выкладки доказательства теоремы 3.1 [1], но имеется два отличия. Первое — в лемме 3.1 [1] все сходимости равномерные по $\theta \in K$, а в теореме 3.1 [1] — при каждом $\theta \in \Theta$, но здесь равномерность сходимости следует из условий теоремы.

Замечание. Под равномерной по $\theta \in K$ состоятельностью $\hat\theta_\varepsilon$ (сходимостью по вероятности) понимается следующее: для любого $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\theta\in K} P_\theta^{(\varepsilon)}\{|\hat\theta_\varepsilon-\theta|>\delta\}=0.$$

Второе: в [1] доказательство (3.1) опиралось на центральную предельную теорему для стохастического интеграла по центрированному процессу пуассоновского типа, в которой условие IV настоящей работы заменено условием типа Ляпунова. В представленном виде (3.1) вытекает из условий III, IV согласно [14].

Лемма 3.2. *Если выполнены условия* I, VII, *то*

$$\sup_{\theta\in K} E_\theta |Z_\varepsilon^{1/2m}(u_2)-Z_\varepsilon^{1/2m}(u_1)|^{2m}\leqslant C|u_2-u_1|^{2m}.$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 2 в [6], так как в сделанных предположениях процесс $Z_\varepsilon(u)$ дифференцируем по u с вероятностью 1 и имеет место неравенство Новикова [15]:

$$E\left\{\int_0^T f(t)\,dY(t)\right|^{2m}\leqslant C_m\left\{E\left|\left(\int_0^T |f(t)|^2 S(t)\,dt\right)^m+\int_0^T |f(t)|^{2m} S(t)\,dt\right]\right.,$$

где $Y(t)=X(t)-\int_0^t S(v)\,dv$ и C_m не зависит от T, $S(\cdot)$ и $f(\cdot)$.

Лемма 3.3. *Если выполнено условие* VI, *то*

$$\sup_{\theta\in K} P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{Z_\varepsilon(u)>\exp\left[-\frac{2}{5}c|u|^\gamma\right]\right\}<\exp\left[-\frac{2}{5}c|u|^\gamma\right].$$

Доказательство. Обозначим $g(u)=\dfrac{2}{5}c|u|^\gamma$, $S_1=S_\varepsilon(\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u,t)$, $S=S_\varepsilon(\theta,t)$ и воспользуемся неравенствами Чебышева и Коши—Буняковского:

$$P_\theta^{(\varepsilon)}\{Z_\varepsilon(u)>\exp[-g(u)]\}\leqslant\exp\left[\frac{g(u)}{4}\right]\times$$

$$\times E_\theta\exp\left\{\frac{1}{4}\int_0^{T_\varepsilon}\ln\frac{S_1}{S}\,dX_\varepsilon(t)-\frac{1}{2}\int_0^{T_\varepsilon}(\sqrt{S_1S}-S)\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\int_0^{T_\varepsilon}(S_1+S-2\sqrt{S_1S})\,dt\right\}\leqslant\exp\left[\frac{g(u)}{4}\right]\times$$

$$\times\left(E_\theta\exp\left\{\int_0^{T_\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{S_1S}}{S}\,dX_\varepsilon(t)-\int_0^{T_\varepsilon}[\sqrt{S_1S}-S]\,dt\right\}\times\right.$$

$$\left.\times E_\theta\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^{T_\varepsilon}\left(\sqrt{S_1}-\sqrt{S}\right)^2dt\right\}\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{c}{2}|u|^{\gamma}+\frac{c}{10}|u|^{\gamma}\right\}=\exp\left[-\frac{2}{5}c|u|^{\gamma}\right],$$

так как

$$E_{\theta}\exp\left\{\int_{0}^{T_{\varepsilon}}\ln\frac{\sqrt{S_1 S}}{S}dX_{\varepsilon}(t)-\int_{0}^{T_{\varepsilon}}(\sqrt{S_1 S}-S)\,dt\right\}=1.$$

Действительно, здесь записано равенство

$$E_{\theta}\frac{dP^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta}^{(\varepsilon)}}(X_{\varepsilon})=1,$$

где $P^{(\varepsilon)}$— мера, отвечающая процессу пуассоновского типа интенсивности $\{\sqrt{S_{\varepsilon}(\theta+\varphi_{\varepsilon}(\theta)\,u,\,t)\,S_{\varepsilon}(\theta,t)},\ F_t;\ 0\leqslant t\leqslant T_{\varepsilon}\}$. Теперь из приведенных в леммах свойств отношения правдоподобия и теоремы 3.1.1. [3] следует доказательство теоремы 3.1.

Замечание. Если, как и в [3], ввести понятие ассимптотической эффективности оценок и условие: равномерно по $\theta_1, \theta_2 \in K$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_{\varepsilon}(\theta_1)^{-1}\varphi_{\varepsilon}(\theta_2)=B(\theta_1,\theta_2)$$

и матрица $B(\theta_1, \theta_2)$ непрерывна по θ_1, то не трудно будет доказать асимптотическую эффективность ОМП и БО.

Пусть θ — случайная величина, $\pi(y), y\in\Theta$—плотность ее априорного распределения (непрерывная, ограниченная, положительная функция) и функция потерь $W(\theta, y)=|\theta-y|^{a}$; $a>1$, тогда имеет место

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* I—VII *и неравенство в условии* VII *с* $m=1$, *тогда байесовская оценка* $\tilde{\theta}_{\varepsilon}$ *при* $\varepsilon\to 0$ *обладает теми же свойствами, что и ОМП в теореме* 3.1.

Доказательство следует из лемм 3.1, 3.3 и леммы 3.2 с $m=1$ согласно теореме 3.2.1 в [3].

§ 4. Примеры

Прежде всего отметим, что условия I—VII подобраны таким образом, что они выполнены для всех схем неоднородных процессов Пуассона, рассмотренных в [7], п. 4.2.5. Например, в случае

$$S(\theta,t)=\exp\{\theta^{(1)}\cos(\theta^{(2)}t+\theta^{(3)})\},\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

где $\theta\in(\theta^{(1)},\theta^{(2)},\theta^{(3)})$, $\Theta=(\alpha_1,\beta_1)\times(\alpha_2,\beta_2)\times(\alpha_3,\beta_3)$, $0<\alpha_1<\beta_1<\infty$, $0<\alpha_2<\beta_2<\infty$, $0<\alpha_3<\beta_3<2\pi$ и предельный переход соответствует $T\to\infty$. Наиболее сложное условие VI проверяется как и в примере 4, стр. 286 в [3].

Пусть стационарный случайный процесс $S_{\varepsilon}(\theta,t)=S(\theta,t)$ имеет две непрерывные ограниченные производные по θ ($k=1$), $\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\sqrt{S(\theta,t)}\right|\geqslant$ $\geqslant\varkappa>0$ и равномерно по $\theta\in\Theta$ справедлив закон больших чисел

$$P_{\theta}-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\frac{\dot S(\theta,t)^2}{S(\theta,t)}dt=I(\theta),$$

тогда условия I—VII выполнены и ОМП обладает всеми перечисленными в теореме 3.1 свойствами. В частности, если $S(\theta, t) = \theta f(t)$, где $f(t)$ — $\mathbf{F}_t$-согласованный предсказуемый случайный процесс, $0 < c < f(t) < C$ и равномерно по $\theta \in \Theta$

$$P_\theta - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^{-1}\,dt = I(\theta),$$

то ОМП

$$\hat\theta_T = X(t) \Big/ \int_0^T f(t)\,dt$$

и

$$L_\theta\{\sqrt{T}(\hat\theta_T - \theta)\} = N(0, I(\theta)^{-1}).$$

Представляет интерес проверка условий I—VII для схем ППТ, рассмотренных в работах [11]—[13].

Ереванский государственный университет Поступила 27.I.1983

ՅՈՒ. Ա. ԿՈՒՏՈՅԱՆՑ. Պուասոնյան տիպի պրոցեսների պարամետրերի գնահատումը *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում են պուասոնյան տիպի պրոցեսի ինտենսիվության ֆունկցիայի բազմաչափ պարամետրի մաքսիմալ ճշմարտանմանության և բայեսյան գնահատականների ասիմպտոտիկ հատկությունները։

Ապացուցվում է այդ գնահատականների ունակայնությունը, ասիմպտոտիկ նորմալությունը և մոմենտների զուգամիտությունը։

Yu. A. KUTOYANTS. *Parameter estimation for Poisson type processes* (summary)

The asymptotical properties of the maximum likelihood and Bayessian estimates of multidimensional parameters for Poisson type processes are investigated. We prove the consistency, asymptotical normality and convergence of moments of these estimates.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. А. Кутоянц.* Локальная асимптотическая нормальность для процессов пуассоновского типа, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIV, 1, 1979, 3—20.
2. *R. S. Liptser, A. N. Shiryaev.* Statistics of Random Processes II. Applications, Springer—Verlag, Berlin, 1978.
3. *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский.* Асимптотическая теория оценивания, Изд. «Наука», М., 1979.
4. *Y. Ogata.* The asymptotic behavior of maximum likelihood estimators for Stationary point processes, Ann. Inst. Statist. Mathem., 30, 2A, 1978, 243—261.
5. *Ю. А. Кутоянц.* Оценка параметра интенсивности неоднородного процесса Пуассона, Проблемы управления и теории информации, 8, 2, 1979, 137—149.
6. *Yu. A. Kutoyants.* Multidimensional parameter estimation of the intensity function of inhomogeneous Poisson processes, Problems of Control and Information Theory, 11, 4, 1982, 325—334.
7. *Ю. А. Кутоянц.* Оценивание параметров случайных процессов, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1980.

8. *D. R. Brillinger.* Statistical inference for stationary point processes. In "Stochastic processes and related Topics", vol. 1, Academic Press, New York, 1975, 55—99.

9. *D. R. Brillinger.* Comparative aspects of the study of ordinary time series and of point processes, Developments in statistics, vol. 1, 1980, 33—133.

10. *P. D. Tuan.* Estimation of the Spectral parameters of a stationary point processes, Ann. Statist., 9, 3, 1981, 615—627.

11. *Y. Ogata.* On Lewis' simulation method for point processes, IEEE Trans. Inform. Theory, IT—27, 1, 1981, 23—31.

12. *Y. Ogata, H. Akaike.* On linear intensity models for mixed dobly stochastic Poisson and self-exciting point processes, J. Koyal Statist. Soc., 44, 1B, 1982, 102—107.

13. *Y. Ogata, D. Vere—Jones.* Inference for earth quake models:— A self-correcting model, Ann. Inst. Statist. Math., 34, 2, 1982, 314—323.

14. *K. Rebolledo.* Central limit theorem for local martingales, Z. Wahrscheinlichkeits theorie Gebiete, 51, 1980, 269—286.

15. *А. А. Новиков.* О разрывных мартингалах, Теория вероятностей и ее применение, 20, 1, 175—194.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 3, 1984 Математика

УДК 513.8

М. И. КАРАХАНЯН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОММУТАТОРОВ ЭЛЕМЕНТОВ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

Пусть $B(H)$ — банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на комплексном гильбертовом пространстве H. Классическая теорема Фуглида—Путнама утверждает, что если для пары нормальных операторов N_1, $N_2 \in B(H)$ имеет место условие $N_1 T = T N_2$, где $T \in B(H)$, то $N_1^* T = T N_2^*$ (см., напр., [1], стр. 337). Позднее Р. Муром [2] был получен асимптотический вариант теоремы Фуглида—Путнама: при фиксированных нормальных операторах N_1, $N_2 \in B(H)$ для каждого T с $\|T\| \leqslant 1$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\|N_1 T - T N_2\| < \delta$ следует $\|N_1^* T - T N_2^*\| < \varepsilon$. В дальнейшем Е. А. Горин и автор в [3] усилили результаты из [2], установив, в частности, следующую теорему: Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 — такие элементы комплексной банаховой алгебры, что

$$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = 0 \text{ и } \|e^{\bar{\lambda} a_1 - \lambda b_1}\| = o(|\lambda|^{1/2}),\ \|e^{\bar{\lambda} a_2 - \lambda b_2}\| = o(|\lambda|^{1/2})$$

при $|\lambda| \to \infty$. Тогда равномерно в каждом шаре $\|x\| \leqslant R < \infty$ имеет место неравенство $\|b_1 x - x b_2\| \leqslant \varphi(\|a_1 x - x a_2\|)$, где $\varphi(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Недавно Д. Роджерс (см. [4]) показал, что теорема Мура остается справедливой, если в алгебре операторов гильбертова пространства вместо равномерной рассмотреть сильную или слабую операторную топологию.

В работе [5] автор, используя методику работ [3], [4], обобщил результаты из [4] на алгебру ограниченных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве в том же духе, в каком работа [3] обобщает теоремы Фуглида—Путнама—Мура.

В данной работе, как и в [5], исходя из позиций работ [3], [4] будет доказан асимптотический вариант теоремы Фуглида—Путнама для довольно широкого класса топологий, заданных на комплексной банаховой алгебре A. Для дальнейшего нам понадобятся несколько стандартных понятий и определений, которые мы сейчас приведем.

Пусть A — комплексная банахова алгебра и Y — разделяющее элементы алгебры A пространство комплексных линейных непрерывных функционалов (т. е. можно считать, что $Y \subset A^*$). В этом случае говорят, что $\langle A, Y \rangle$ — дуальная пара.

Будем говорить, что пространство Y является A-инвариантным, если для каждого функционала $\varphi \in Y$ и произвольных пар элементов $a, b \in A$ функционал $\varphi_{a,b} \in Y$, где $\varphi_{a,b}(x) = \varphi(axb)$. При этом соответствующую дуальную пару $\langle A, Y \rangle$ будем также называть A-инвариантной. Примером A-инвартной дуальной пары является $\langle A, A^*\rangle$. На алгебре A вместе с исходной рассмотрим также Y-слабую топологию (обозначают $\sigma(A, Y)$), т. е. слабейшую топологию на A, в которой все функционалы из Y и только они непрерывны. Введем также на алгебре A топологию равномерной сходимости на $\sigma(Y, A)$-ограниченных подмножествах Y, которую обозначают через $\beta(A, Y)$. Обозначим через $\Sigma(Y, A)$ класс всех $\sigma(Y, A)$-ограниченных подмножеств Y. Отметим, что топология $\beta(A, Y)$—локально выпуклая топология на A, которая порождается семейством полунорм $\{p_K\}$, $K\in\Sigma(Y, A)$, где $p_K(x) = \sup_{\varphi\in K}|\varphi(x)|$, причем база окрестностей нуля задается множествами

$$U = U(K_{\alpha_1},\cdots, K_{\alpha_m}; \varepsilon) = \{x\in A : \sup_{\varphi\in K_{\alpha_p}} |\varphi(x)| < \varepsilon, \text{ где}$$

$$K_{\alpha_p}\in\Sigma(Y, A);\ p = 1,\cdots, m\}.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть A — комплексная банахова алгебра $\langle A, Y\rangle$ есть A-инвариантная дуальная пара и a_1, a_2, b_1, b_2 — такие элементы из A, что $[a_j, b_j]=0$ и $\|e^{\bar\lambda a_j-\lambda b_j}\| = o(|\lambda|^{1/2})$ при $|\lambda|\to\infty$, где $j=1, 2$. Тогда для каждой окрестности нуля U в топологии $\beta(A, Y)$ существует такая окрестность нуля V (в той же топологии), что из условий $x\in A$, $\|x\|\leqslant 1$ и $a_1x - xa_2\in V$, следует $b_1x - xb_2\in U$.*

Доказательство. Ввиду того, что K_{α_p} есть $\sigma(Y, A)$-ограниченные множества в Y, то существует такое $M>0$, что для всех $\varphi\in\bigcup_{p=1}^{m} K_{\alpha_p}$, $\|\varphi\|\leqslant M$. Не ограничивая общности будем считать, что $\|a_j\|\leqslant 1$, $\|b_j\|\leqslant 1$, где $j=1, 2$. Пусть $\omega(r) = \max_{j=1,2}\max_{|\lambda|=r}\|e^{\bar\lambda a_j-\lambda b_j}\|$. Так как $\omega(r) = o(r^{1/2})$, то для каждого $\varepsilon>0$ найдется $r>0$, такое, что

$$\frac{M\{[\omega(r)+1]^2+1\}}{r} < \varepsilon.$$

Пусть $\Gamma_r = \{\lambda : |\lambda|=r\}$. Выберем натуральное число n таким, что $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{r^k}{k!} < e^{-r}$.

Рассмотрим окрестность нуля

$$U = U(K_{\alpha_1},\cdots, K_{\alpha_m}; \varepsilon) = \{x\in A : \sup_{\varphi\in K_{\alpha_p}}|\varphi(x)| < \varepsilon, \text{ где}$$

$$K_{\alpha_p}\in\Sigma(Y, A);\ p = 1,\cdots, m\}.$$

Пусть $h_j(\lambda) = \exp(\lambda b_j)$, где $j=1, 2$. Тогда $h_j(\lambda)$ — равномерно непрерывные функции от λ на Γ_r со значением в A. Поэтому существует такое конечное множество $\mathrm{P}\subset\Gamma_r$, что для каждого $\lambda\in\Gamma_r$ при подходящем $\gamma\in\mathrm{P}$

$$\|h_1(\lambda) - h_1(\gamma)\| + \|h_2(-\lambda) - h_2(-\gamma)\| \leqslant e^{-r}.$$

Пусть $\delta = \frac{M}{r}e^{-r}$ и

$$V=\{y\in A:\sup|\tilde{\varphi}_\gamma(a_1^{k-l-1}\,y\,a_2^l)|<\delta;\ \gamma\in P,\ l=0,\cdots,k;$$
$$k=0,\cdots,n;\ p=1,\cdots,m\},$$

где $\tilde{\varphi}_\gamma(z)=\varphi[e^{\gamma b_1}ze^{-(\gamma b_2-\gamma a_2)}]$, а $\varphi\in\bigcup_{p=1}^{m}K_{\alpha_p}$. В силу A-инвариантности дуальной пары $<A,\ Y>$ функционал $\tilde{\varphi}_\gamma\in Y$. Пусть теперь $x\in A$, $\|x\|\leqslant 1$, $a_1x-xa_2\in V$. Для $\varphi\in\bigcup_{p=1}^{m}K_{\alpha_p}$ рассмотрим целую функцию

$$f_\varphi(\lambda)=\varphi(h_1(\lambda)\,x\,h_2(-\lambda)).$$

Так как $\|h_j(\lambda)\|\leqslant e^r$, то для $\lambda,\gamma\in\Gamma_r$, где $\gamma\in P$, имеем

$$|f_\varphi(\lambda)-f_\varphi(\gamma)|\leqslant\|\varphi\|\,\{\|h_1(\lambda)-h_1(\gamma)\|+\|h_2(-\lambda)-h_2(-\gamma)\|\}\,e^r\leqslant M.$$

Отсюда

$$\|f_\varphi\|_r=\max\{|f_\varphi(\lambda)|:|\lambda|=r\}\leqslant\max\{|f_\varphi(\gamma)|:\gamma\in P\}+M.$$

Оценим $|f_\varphi(\gamma)|$, когда $\gamma\in P$

$$|f_\varphi(\gamma)|\leqslant\|\varphi\|\,\omega^2(r)+|\varphi[e^{\gamma b_1}(e^{-\gamma a_1}x-xe^{-\gamma a_2})e^{-(\gamma b_2-\gamma a_2)}]|=$$

$$=\|\varphi\|\omega^2(r)+|\tilde{\varphi}_\gamma(e^{-\gamma a_1}x-xe^{-\gamma a_2})|\leqslant$$

$$\leqslant\|\varphi\|\,\omega^2(r)+\sum_{k=0}^{n}\frac{r^k}{k!}\sum_{l=0}^{k-1}|\tilde{\varphi}_\gamma[a_1^{k-l-1}(a_1x-xa_2)\,a_2^l]|+2e^{-r}\|\tilde{\varphi}_\gamma\|\leqslant$$

$$\leqslant\|\varphi\|\,[\omega^2(r)+2\omega(r)]+\sum_{k=0}^{n}\frac{r^k}{k!}\sum_{l=0}^{k-1}|\tilde{\varphi}_\gamma[a_1^{k-l-1}(a_1x-xa_2)a_2^l]|.$$

Так как $a_1x-xa_2\in V$, то

$$\sum_{l=0}^{k-1}|\tilde{\varphi}_\gamma[a_1^{k-l-1}(a_1x-xa_2)\,a_2^l]|<k\delta,$$

откуда

$$|f_\varphi(\gamma)|\leqslant\|\varphi\|[\omega^2(r)+2\omega(r)]+r\delta e^r<M[\omega(r)+1]^2.$$

Значит

$$\sup_{\varphi\in K_{\alpha_p}}\|f_\varphi\|_r\leqslant\sup_{\varphi\in K_{\alpha_p}}\max\{|f_\varphi(\gamma)|:\gamma\in P\}+M\leqslant M\{[\omega(r)+1]^2+1\},$$

где $p=1,\cdots,m$.

Из формулы Коши

$$f'_\varphi(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f_\varphi(\lambda)}{\lambda^2}\,d\lambda$$

следует

$$\sup_{\varphi\in K_{\alpha_p}}|f'_\varphi(0)|\leqslant\frac{M\{[\omega(r)+1]^2+1\}}{r},$$

где $p=1,\cdots,m$.

Но так как $f'_\varphi(0)=\varphi(b_1x-xb_2)$, то получаем, что $\sup_{\varphi\in K_{\alpha_p}}|\varphi(b_1x-xb_2)|<\varepsilon$, где $p=1,\cdots,m$, т. е. $b_1x-xb_2\in U$. Теорема доказана.

Пусть $\langle A, Y\rangle$ — дуальная пара и $\varkappa(A, Y)$ — локально выпуклая топология на A, согласованная с двойственностью $\langle A, Y\rangle$. Это значит, что пространство, топологически сопряженное к $(A, \varkappa(A, Y))$, совпадает с Y. Тогда имеет место

Теорема 2. *Пусть A — комплексная банахова алгебра $\langle A, Y\rangle$ есть A-инвариантная дуальная пара и $\varkappa(A, Y)$ — локально выпуклая топология на A, согласованная с двойственностью $\langle A, Y\rangle$. Пусть a_1 a_2, b_1 b_2 — такие элементы из A, что $[a_j, b_j]=0$ и $\|e^{i\lambda a_j - i\lambda b_j}\| = o(|\lambda|^{\frac{1}{2}})$ при $|\lambda| \to \infty$, где $j=1, 2$. Тогда для каждой окрестности нуля U в топологии $\varkappa(A, Y)$ существует окрестность нуля V (в той же топологии), что из условий $x \in A$, $\|x\| \leqslant 1$ и $a_1x - xa_2 \in V$ следует $b_1x - xb_2 \in U$.*

Доказательство. В самом деле, по теореме о биполяре (см., напр., [6], стр. 160) топология $\varkappa(A, Y)$, которая согласована с двойственностью $\langle A, Y\rangle$, есть топология равномерной сходимости на классе $\varkappa$-равностепенно непрерывных подмножеств Y. В силу теоремы Банаха—Алаоглу этот класс состоит в точности из множеств относительно компактных в топологии $\sigma(Y, A)$. Остается применить теорему 1.

Используя теорему 2 и тот факт, что пара $\langle A, A^*\rangle$ есть A-инвариантная дуальная пара, получаем

Следствие 1. *Пусть A — комплексная банахова алгебра и $\varkappa(A, A^*)$ — локально выпуклая топология на A, согласованная с двойственностью $\langle A, A^*\rangle$. Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 — такие элементы из A, что $[a_j, b_j] = 0$ и $\|e^{i\lambda a_j - i\lambda a_j}\| = o(|\lambda|^{\frac{1}{2}})$ при $|\lambda| \to \infty$, где $j=1,2$. Тогда для каждой окрестности нуля U в топологии $\varkappa(A, A^*)$ существует окрестность нуля V (в той же топологии), что из условий $x \in A$, $\|x\| \leqslant 1$ и $a_1x - xa_2 \in V$ следует $b_1x - xb_2 \in U$.*

Замечания. 1. Так как Y — слабая топология $\sigma(A, Y)$ и топология Макки $\tau(A, Y)$ согласованы с двойственностью $\langle A, Y\rangle$, т теорема 2 верна, в частности, для этих топологий, которые являются крайними в классе топологий, согласованных с двойственностью, т. ео $\sigma(A, Y) \leqslant \varkappa(A, Y) \leqslant \tau(A, Y)$.

2. В случае, когда $Y = A^*$, топология $\tau(A, A^*)$ совпадает с исходной топологией банахова пространства на A и следствие 1 дает вышеуказанный результат из [3], который обобщает результаты Мура из [2].

3. В случае, когда $A = B(H)$ и $Y = F$, где F — пространство операторов конечного ранга, то каждый оператор $T \in F$ может быть реализован как линейный функционал на $B(H)$ и F — слабая топология, порождаемая этими функционалами, т. е. топология $\sigma(B(H), F)$ есть в точности слабая операторная топология, и мы получаем результат Д. Роджерса из [4].

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $A=B(H)$. В случае, когда $Y = B(H)^*$ или $Y = J_1$, где J_1 — идеал операторов с конечным следом, Y — слабая топология задает соответственно слабо банахову топологию и ультраслабую операторную топологию на $B(H)$.

В этих случаях Y является A-инвариантным и используя теорему 2, получаем

Следствие 2. *Пусть N_1 и N_2 — нормальные операторы из $B(H)$, тогда для каждой окрестности нуля U в слабо банаховой или ультраслабой операторной топологии существует окрестность нуля V (в соответствующей топологии), что из условий $T\in B(H)$, $\|T\|\leqslant 1$ и $N_1T-TN_2\in V$, следует $N_1^*T-TN_2^*\in U$.*

Следствие 3. *Пусть f — комплекснозначная непрерывная функция на объединении спектров нормальных операторов N_1 и N_2 из $B(H)$. Тогда для каждой окрестности нуля U в слабо банаховой (или ультраслабой операторной) топологии существует окрестность нуля V, в соответствующей топологии, что из условий $T\in B(H)$, $\|T\|\leqslant 1$ и $N_1T-TN_2\in V$, следует $f(N_1)\,T-Tf(N_2)\in U$.*

Следствие 1 позволяет, учитывая прием, принадлежащий С. Берберяну [7], получить для слабо банаховой или ультраслабой операторной топологии обобщение асимптотической теоремы Фуглида—Путнама для субнормальных операторов, как это делается в [8] для нормальных операторов.

Теорема 3. *Пусть N_1 и N_2^* — субнормальные операторы из $B(H)$. Тогда для каждой окрестности нуля U в слабо банаховой (или ультраслабой операторной) топологии существует такая окрестность нуля V в соответствующей топологии, что из условия $T\in B(H)$, $\|T\|\leqslant 1$ и $N_1T-TN_2\in V$, следует $N_2^*T-TN_2^*\in U$.*

Доказательство. Нормальные расширения C_{N_1} и $C_{N_2^*}$, соответственно, операторов N_1 и N_2^*, действующих в $H\oplus H$, таких, что сужение на $H\oplus\{0\}$, соответственно, есть N_1 и N_2^*, будем искать в виде

$$C_{N_1}=\begin{pmatrix}N_1, & P_{12}\\ O & P_{22}\end{pmatrix} \text{ и } C_{N_2^*}=\begin{pmatrix}N_2^*, & T_{12}\\ O, & T_{22}\end{pmatrix}.$$

Определим подмножество

$$\tilde{U}=\left\{\begin{pmatrix}T_1, & T_2\\ T_3, & T_4\end{pmatrix}: T_k\in U,\ k=1,2,3,4\right\}\subset B(H\oplus H).$$

Тогда $\tilde{U}$ является окрестностью нуля в $B(H\oplus H)$ в той топологии (слабо банаховой, ультраслабой), в которой U — окрестность нуля в $B(H)$. В силу следствия 1 существует такая окрестность нуля $\tilde{V}$ на $H\oplus H$ в соответствующей топологии, что из условий $\tilde{T}\in B(H\oplus H)$, $\|\tilde{T}\|\leqslant 1$ и $C_{N_1}\tilde{T}-\tilde{T}\,C_{N_2^*}\in\tilde{V}$ следует $C_{N_1}^*\tilde{T}-\tilde{T}\,C_{N_2^*}^*\in\tilde{U}$.

Определим $V=\left\{T:\begin{pmatrix}T, & 0\\ 0, & 0\end{pmatrix}\in\tilde{V}\right\}$.

Тогда моожество V—окрестность нуля в $B(H)$ в той же топологии, что $\tilde{V}$ в $B(H\oplus H)$. Пусть $T\in B(H)$ с $\|T\|\leqslant 1$ и $N_1T-TN_2\in V$, тогда $\tilde{T}=\begin{pmatrix}T, & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in B(H\oplus H)$, и так как

$$C_{N_1}\tilde{T} - \tilde{T}C^{*}_{N_2} = \begin{pmatrix} N_1T - TN_2, & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \tilde{V},$$

то имеем

$$C^{*}_{N_1}\ \bar{T} - \bar{T}\,C_{N^{*}_2} = \begin{pmatrix} N^{*}_1\,T - T\,N^{*}_2, & -NT_{12} \\ P^{*}_{12}\,T, & 0 \end{pmatrix} \in \bar{U},$$

откуда $N^{*}_1\,T - TN^{*}_2 \in U$. Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 24.V.1983

Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ. *Կոմուտատորների ասիմպտոտիկ հատկությունները բանախյան հանրահաշիվներում* (ամփոփում)

Տվյալ հոդվածում ստացված է մասնավորապես հետևյալ արդյունքը։ Դիցուք A-ն բանախյան հանրահաշիվ է, $\varkappa(A, A)^{*}$—լոկալ ուռուցիկ տոպոլոգիա է A-ի վրա, որը համաձայնեցված է $<A, A^{*}>$ երկակիության հետ։ Դիցուք a_1, a_2, b_1, b_2-նայնպիսի տարրեր են A-ից, որ $[a_j, b_j]=0$ և $\|e^{\bar{\lambda}a_j-\lambda b_j}\|=o(|\lambda|^{\frac{1}{2}})$ երբ $|\lambda|\to\infty$, որտեղ $j=1, 2$. Այդ դեպքում զրոյի կամայական U շրջակայքի համար $\varkappa(A, A^{*})$ տոպոլոգիայում գոյություն ունի այնպիսի զրոյի V շրջակայք (նույն տոպոլոգիայում), որ եթե $x\in A$, $\|x\|<1$ և $a_1x - xa_2\in V$, ապա $b_1x - xb_2\in U$.

Այս արդյունքը թույլ է տալիս ստանալ Ֆուգլիդ-Պուտնամի ասիմպտոտիկ թեորեմի դասական տարբերակները նորմալ և սուբնորմալ օպերատորների համար։

M. I. KARAHANIAN. *The asymptotic properties of the Banach algebras element's commutators* (summary)

The asymptotic properties of the commutators are proved. Let A be a complex Banach algebra and $\varkappa(A, A^{*})$ — local convex topology on A, concordant with duality $< A, A^{*} >$. Let a_1, a_2, b_1, b_2 — be such elements in A, that $[a_j, b_j]=0$, and $\|e^{\bar{\lambda}a_j-\lambda b_j}\|=o(|\lambda|^{\frac{1}{2}})$ for $|\lambda|\to\infty$, where $j=1, 2$. Then for the each neighbourhood of zero in the topology $\varkappa(A, A^{*})$ there exists a neighbourhood V of zero (in the same topology) that from conditions $x\in A$, $\|x\|<1$ and $a_1x - xa_2\in V$ follows $b_1x - xb_2\in U$ This result generalizes the asymptotic versions of the Fuglede and Putnam theorem about the normal and subnormal Hilbert space operator commutators.

ЛИТЕРАТУРА

1. *У. Рудин.* Функциональный анализ, М., «Мир», 1975.
2. *R. Moore.* An asymptotic Fuglede theorem., Proc, Amer. Math. Soc., 50, 1975. 138—148.
3. *Е. А. Горин, М. И. Караханян.* Асимптотический вариант теоремы Фуглида—Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр, Матем. заметки, 22, № 2, 1977, 179—189. РЖМат, 1977, 12Б911.
4. *D. D. Rogers.* On Fugledes theorem and operator topologies, Proc. Amer. Math. Soc., 75, № 1, 1979, 32—36.
5. *М. И. Караханян.* Асимптотический вариант теоремы Фуглида—Путнама о коммутаторах линейных ограниченных операторов в сильной и слабой операторных топологиях, ДАН Арм.ССР, 78, № 5, 1981, 265—268.
6. *Х. Шефер.* Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971.
7. *S. K. Berberian.* Note on a theorem of Fuglede and Putnam., Proc. Amer. Math. Soc., 10, 1959, 175—182.
8. *T. Furuta.* Normality can be relaxed in the asymptotic Fuglede—Putnam theorem., Proc. Amer. Mat. Soc., 79, № 4, 1980, 593—596.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIX, № 3, 1984 Математика

УДК 519 212.3

В. К. ОГАНЯН

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИНЫ „ТИПИЧНОГО" РЕБРА СЛУЧАЙНОЙ МОЗАИКИ

Рассматриваются случайные мозаики на плоскости, инвариантные относительно группы всех евклидовых движений плоскости.

Задача состоит в вычислении длины „типичного" ребра мозаики в терминах маркированного точечного процесса $\{P_i, \Psi_i\}$, где $\{P_i\}$— точечный процесс пересечений ребер мозаики с фиксированной прямой g_0, а маркой Ψ_i служит угол, под которым происходит пересечение в точке P_i.

Эта и аналогичная задача для процессов многоугольников рассматривались Р. В. Амбарцумяном в работе [1] и в его монографии [2].

Использованный в [1] и [2] метод требовал предположений о существовании некоторых пределов эргодического характера.

Цель настоящей статьи показать, что эти предположения можно обойти, если пользоваться надлежащими определениями распределений „типичных" элементов. Эти определения даны в [3] и [4].

Решение вышеупомянутой задачи дает нижестоящая формула (17).

Дополнительно предполагается, что среднее квадрата числа ребер мозаики, пересекающих любое ограниченное борелевское множество, конечно, а также, что с вероятностью 1 мозаика не содержит узлов типа Т.

С точки зрения методологии статья продолжает исследования автора в [5], [6], [7] (см. также [8], стр. 821 и [3]) по интегрированию комбинаторных разложений (общая теория комбинаторных разложений приведена в [2]).

Случайной мозаикой на плоскости называется случайное поле отрезков с вероятностью единица, разбивающая плоскость на непустые выпуклые ограниченные многоугольники.

Случайные поля отрезков на плоскости можно определять как случайные точечные поля в пространстве отрезков (см. [9]).

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех мозаик (реализаций);

Вероятность P на $\mathfrak{M}$ (точнее на соответствующей σ-алгебре) называется распределением случайной мозаики.

Вершины многоугольников из m называются узлами мозаики.

Узел Q называется узлом типа Т, если существует прямая, проходящая через точку Q и оставляющая все ребра мозаики, исходящие из Q, в одной замкнутой полуплоскости.

Группа М движений полуплоскости индуцирует группу преобразований $\mathfrak{M}$ в себя (группа движений $\mathfrak{M}$). Случайная мозаика $m(w)$

называется однородной и изотропной, если ее распределение P инвариантно относительно этой группы (M-инвариантна).

Хорошо известной M-инвариантной, с вероятностью единица не имеющей узлов типа T, мозаикой является мозаика, порожденная пуассоновским случайным процессом прямых.

§ 1. Комбинаторное разложение для m

Пусть G — пространство всех прямых плоскости, $g \in G$. Обозначим через $[K_R] = \{g \in G : g \cap K_R \neq \varnothing\}$, где K_R — открытый круг радиуса R с центром в начале координат.

Рассмотрим некоторый элемент $m \in \mathfrak{M}$, не имеющий узлов типа T. Запишем комбинаторную формулу Р. В. Амбарцумяна (см. [9], стр. 15 или [2]) для инвариантной меры $\mu(\cdot)$ множества

$$B_0 = \left\{ \begin{array}{l} g \in [K_R] : \text{прямая } g \text{ не пересекает ни одного отрезка} \\ \qquad\qquad \text{из } m \cap K_R \end{array} \right\}.$$

Легко убедиться, что $[K_R] \setminus B_0$ принадлежит бюффонову кольцу $B_r\{\mathbf{P}_i\}$ (см. [9] или [8]), где $\mathbf{P}_i$ — концы отрезков из $m \cap K_R$, лежащих на окружности ∂K_R. Согласно алгоритму, указанному в [9], имеем

$$\mu(B_0) = \mu([K_R]) - 2\sum_i |\chi_i| + \sum_i |d_i| \cdot I_0(d_i) - \sum_i |s_i| \cdot I_0(s_i) \tag{1}$$

Здесь мы применили следующие обозначения:

$I_0(\tau) = I_{B_0}(\tau) = 1$, если отрезок τ не пересекается с отрезками из $m \cap K_R$; $|\cdot|$ — длина отрезка;

Отрезок типа χ есть отрезок из $m \cap K_R$, являющийся хордой круга K_R;

Другие обозначения показаны на рис. 1.

Рис. 1.

Пунктирными линиями отмечены отрезки, соединяющие точки $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}_j \in \partial K_R$, но не принадлежащие $m \cap K_R$. Они могут быть типа d или s. Тип зависит от направления отрезков из $m \cap K_R$, концами которых являются точки $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}_j$. Имеем тип s, если упомянутые отрезки из $m \cap K_R$ лежат в одной полуплоскости относительно пунктирной линии, и тип d — в противном случае.

§ 2. Интегрирование комбинаторного разложения

Будем интегрировать обе части (1) относительно M-инвариатного распределения P случайной мозаики $m(w)$, удовлетворяющего дополнительному условию:

$$P\{w:\ m \text{ имеет узлы типа } T\}=0.$$

Для уяснения цели, с которой выполняется это интегрирование, рассмотрим интеграл от члена в левой части (1). Мы имеем:

$$a_1=\int_{\mathfrak{M}}\mu(B_0)\,dP=\int_{\mathfrak{M}}\left(\int_{G}I_0(\chi(g)\,dg\right)dP=\int_{[K_R]}p_0(\chi(g))\,dg,$$

где $p_0(\chi)=\int_{\mathfrak{M}}I_0(\chi(g))\,dP$ есть вероятность следующего события:

$\binom{\chi}{0}=\{$хорда $\chi(g)=g\cap K_R$ не пересекается отрезками из $m\cap K_R\}$.

Используя M-инвариантность P и вид элемента инвариантной меры $dg=\frac{\chi}{2\sqrt{D^2-\chi^2}}\,d\chi\cdot d\varphi$ после интегрирования по всем направлениям φ получим

$$a_1=\pi\cdot\int_0^D\frac{\chi\cdot p_0(\chi)\,d\chi}{\sqrt{D^2-\chi^2}}\quad(D=2R). \tag{2}$$

Следовательно, интегрирование (1) даст некоторое представление для интеграла (2). Отсюда можно будет получить выражение для $p_0(\chi)$, используя формулу обращения для уравнения типа Абеля.

Проинтегрируем второе слагаемое в правой части (1). Используя один из вариантов формулы Мекке (см. также [3]), мы получим

$$a_2=\int_{\mathfrak{M}}\left(\sum_i|\chi_i|\right)dP=\lambda\int_{[K_R]}\chi(g)\,dg\int_{\chi}^{\infty}(\tau-\chi)\,dF(\tau),$$

где λ—интенсивность процесса ребер случайной мозаики $m(w)$, а $F(\tau)$—распределение длины типичного ребра мозаики $m(w)$. Следовательно

$$a^2=\pi\cdot\lambda\int_0^D\frac{\chi^2\,d\chi}{\sqrt{D^2-\chi^2}}\int_{\chi}^{\infty}(\tau-\chi)\,dF(\tau). \tag{3}$$

Интегрирование двух последних слагаемых в правой части (1) дает:

$$a_3=\int_{\mathfrak{M}}\left(\sum_i|d_i|\cdot I_0(d_i)-\sum_i|s_i|\cdot I_0(s_i)\right)dP=$$

$$= \int\limits_{[\Delta_R]\times[\Delta_R]}\int [I_d(\chi_{12}) - I_s(\chi_{12})]\cdot \chi_{12}\cdot \Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\ 0\end{pmatrix}\cdot \mu_2(d\delta_1\cdot d\delta_2). \tag{4}$$

Интегрирование в (4) проводится по множеству $[\Delta_R]\times[\Delta_R]$, где $[\Delta_R]$ есть множество *направленных* отрезков δ, задевающих K_R, причем начало отрезка $\delta\cap K_R = \nu$ лежит на ∂K_R;

χ_{12}—отрезок, соединяющий точки входа, направленных отрезков δ_1 и δ_2 в K_R;

$I_p(\cdot)=1$, если χ_{12} есть отрезок типа d, $I_s(\cdot)=1-I_d(\cdot)$; $\Pi_{\delta_1\delta_2}$ есть пальмовское распределение процесса $m(w)$, при условии, что отрезки δ_1 и $\delta_2 \in m(w)$ фиксированы;

$\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\ 0\end{pmatrix}$ есть соответствующая вероятность события $\begin{pmatrix}\chi\\ 0\end{pmatrix}$, где

$$\begin{pmatrix}\chi\\ 0\end{pmatrix} = \left\{\begin{array}{l} m\text{: хорда } \chi \text{ круга } K_R\text{, соединяющая точки} \\ \quad\text{входа в } K_R \text{ отрезков } \delta_1 \text{ и } \delta_2 \text{ не пересе-} \\ \quad\text{кается другими отрезками процесса.}\end{array}\right\}$$

μ_2 есть вторая моментная мера случайного процесса ребер мозаики $m(w)$.

§ 3. Переход к „стереологической" форме записи

На множестве $[\Delta_R]\times[\Delta_R]$ можно использовать координаты $(l_1, l_2, \varphi_1, \varphi_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$, где l_i — точка, где отрезок δ_i входит в K_R, φ_i — угол между δ_i и ∂K_R в точке l_i, t_i — длина части отрезка δ_i, лежащая в K_R, τ_i — длина отрезка δ_i $(i=1, 2)$.

Мы предполагаем, что μ_2 на $[\Delta_R]\times[\Delta_R]$ абсолютно непрерывна относительно $dl_1dl_2d\varphi_1d\varphi_2dt_1dt_2d\tau_1d\tau_2$, dl_i — элемент длины на ∂K_R, т. е.

$$\mu_2(d\delta_1 d\delta_2) = f\cdot dl_1 dl_2\cdot d\Phi, \tag{5}$$

где $d\Phi = d\varphi_1 d\varphi_2 dt_1 dt_2 d\tau_1 d\tau_2$.

Мера μ_2 может быть записана также в координатах: $(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$, где x_i есть точка пересечения прямой g_i, на которой лежит отрезок δ_i с фиксированной прямой g_0 и ψ_i есть угол между g_i и g_0 $(i=1, 2)$. Из (5) следует, что

$$\mu_2(d\delta_1, d\delta_2) = f_1\cdot dx_1 dx_2 d\psi_1 d\psi_2 dt_1 dt_2 d\tau_1 d\tau_2.$$

Мы имеем $f = f(\chi, \varphi_1, \varphi_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$, где χ— длина хорды, соединяющая точки $l_1, l_2 \in \partial K_R$, и аналогично, $f_1 = f_1(\chi, \psi_1, \psi_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$, где $\chi = |x_1 - x_2|$ (следует из M-инвариантности P).

Между f и f_1 имеется связь. Из условия $[dx_i, d\psi_i, dt_i, d\tau_i] = [dl_i, d\varphi_i, dt_i, d\tau_i]$, где $[\nu, \alpha, \beta, \gamma]$ обозначает множество отрезков, которые лежат на прямых, пересекающих отрезок ν, их направления лежат в α, их сдвиги лежат в β, а длины лежат в γ, можно показать, что

$$dx_i = (\sin\alpha\cdot \operatorname{ctg}\psi_i - \cos\alpha)\cdot[I(\psi_i < \alpha) - I(\psi_i > \alpha)]\cdot dl_i,\ i=1, 2.$$

$I(\psi_i<\alpha)$, $I(\psi_i\geqslant\alpha)$ суть индикаторы событий, стоящих в скобках. Обозначения показаны на рис. 2 $\left(\sin\alpha=\frac{\chi}{D}\right)$.

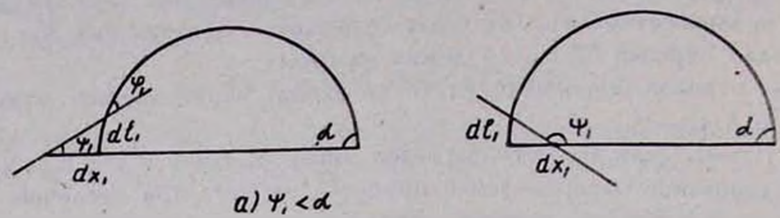


Рис. 2.

Лемма 1. $f(\chi,\varphi_1,\varphi_2,t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)=f_1(\chi,\psi_1,\psi_2,t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)\cdot$

$$(\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\psi_1-\cos\alpha)\cdot(\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\psi_2-\cos\alpha)\cdot[I_d(\chi)-I_s(\chi)]$$

(так как $I_d(\chi)-I_s(\chi)=[I(\psi_1<\alpha)-I(\psi_1\geqslant\alpha)][I(\psi_2<\alpha)-I(\psi_2\geqslant\alpha)]$).

Применяя M-инвариантность P и лемму 1, (4) можно записать в виде

$$a_3=\pi D^3\int_0^D\frac{\chi\cdot d\chi}{\sqrt{D^2-\chi^2}}B_D(\chi),\tag{6}$$

где

$$B_D(\chi)=\int_{\Delta_1}\Pi_{\tau_1\tau_2}\binom{\chi}{0}(\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\psi_1-\cos\alpha)\cdot(\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\psi_2-\cos\alpha)\cdot f_1\cdot d\Phi,$$

$$\Delta_1=\{(\psi_1,\psi_1,t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)\colon\psi_1\in[0,\pi),\ \psi_2\in[0,\pi),\ \tau_1\in(0,\infty),$$
$$\tau_2\in(0,\infty),\ t_1\in(0,\tau),\ t_2\in(0,\tau_2)\}.\tag{7}$$

Из (2), (3) и (4), (6) окончательно, получаем

$$\int_0^D\frac{[\chi\cdot p_0(\chi)+2\lambda\chi^2\cdot C(\chi)]\,d\chi}{\sqrt{D^2-\chi^2}}=D+D^2\cdot\int_0^D\frac{\chi\cdot B_D(\chi)\,d\chi}{\sqrt{D^2-\chi^2}},\tag{8}$$

где

$$C(\chi)=\int_\chi^\infty(\tau-\chi)\,dF(\tau).$$

§ 4. Обращение стохастического разложения (8)

Заметим, что соотношение (8) имеет вид уравнения Абеля:

$$\int_0^x\frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{x^2-s^2}}=\Gamma(x).$$

Решение этого уравнения хорошо известно:

$$\frac{\alpha(x)}{x}=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx^2}\left|\int_0^{x^2}\frac{\Gamma(t)\,d(t^2)}{\sqrt{x^2-t^2}}\right|. \tag{9}$$

Следовательно, соотношение (8) можно обратить:

$$p_0(\chi)+2\chi\int_\chi^\infty(\tau-\chi)\,dF(\tau)=1+\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx^2}\left[\int_0^{\chi^2}\frac{t^2\,d(t^2)}{\sqrt{\chi^2-t^2}}\int_0^t\frac{udu}{\sqrt{t^2-u^2}}B_t(u)\right]. \tag{10}$$

Функции $\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}$ и f_1 не зависят от t. Применяя теорему Фубини, мы можем последнее слагаемое в (10) преобразовать следующим образом:

$$\frac{d}{d\chi^2}\left[\int_0^{\chi^2}\frac{t^2\,d(t^2)}{\sqrt{\chi^2-t^2}}\int_0^t\frac{u\,du}{\sqrt{t^2-u^2}}B_t(u)\right]=\frac{d}{d\chi^2}\int_0^{\chi^2}u\,du\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}\cdot f_1\,d\Phi\times$$

$$\times\left|\pi\cdot u^2\cdot\operatorname{ctg}\psi_1\cdot\operatorname{ctg}\psi_2-2u\sqrt{\chi^2-u^2}\cdot(\operatorname{ctg}\psi_1+\operatorname{ctg}\psi_2)+\frac{\pi}{2}(u^2-\chi^2)\right|$$

$$\left(\text{выше мы использовали}\int_{u^2}^{\chi^2}\frac{d(t^2)}{\sqrt{\chi^2-t^2}\sqrt{t^2-u^2}}=\pi\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\chi^2\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}\cdot f_1\cdot\operatorname{ctg}\psi_1\cdot\operatorname{ctg}\psi_2\,d\Phi-\int_0^\chi\frac{u^2\,du}{\sqrt{\chi^2-u^2}}\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}\times$$

$$\times f_1(\operatorname{ctg}\psi_1+\operatorname{ctg}\psi_2)\,d\Phi-\frac{\pi}{2}\int_0^\chi u\,du\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}f_1d\Phi. \tag{11}$$

Лемма 2.

$$\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}\cdot f_1\,d\Phi=\frac{d^2}{du^2}[p_0(u)].$$

Используя лемму 2 мы преобразуем последнее слагаемое в (11) к виду

$$\int_0^\chi u\,du\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}\cdot f_1\,d\Phi=\chi\cdot p_0'(\chi)-p_0(\chi)+1.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Предложение. *Пусть P--M-инвариантная случайная мозаика, для которой вторая моментная мера μ_2 локально финитна и имеет плотность, а также с вероятностью единица отсутствуют узлы типа T.*

Тогда для производной $p_0'(\chi)$ имеем следующее представление

$$p_0'(\chi) = -2\lambda \int\limits_{\chi}^{\infty} (\tau - \chi)\, dF(\tau) + \chi \cdot \int\limits_{\Delta_1} \Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix} \operatorname{ctg}\psi_1 \cdot \operatorname{ctg}\psi_2 \cdot f_1\, d\Phi -$$

$$-\frac{2}{\pi\cdot\chi}\int\limits_0^{\chi}\frac{u^2\,du}{\sqrt{\chi^2-u^2}}\int\limits_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}\cdot f_1\cdot(\operatorname{ctg}\psi_1+\operatorname{ctg}\psi_2)\,d\Phi. \qquad (12)$$

Рассмотрим последнее слагаемое (обозначим его через a_4) в (12). Если мы сделаем дополнительное предположение, что $m(w)$ инвариантно относительно отражений, тогда a_4 обращается в нуль. Однако сравнение (12) с результатом статьи [6] показывает, что $a_4=0$ и без дополнительного предположения инвариантности относительно отражений.

Замечание.

$$\int\limits_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}\cdot f_1\cdot \operatorname{ctg}\psi_i\, d\Phi = 0,\ i=1,2.$$

Следовательно, мы имеем

$$\int\limits_{\chi}^{\infty}(\tau-\chi)\,dF(\tau) = -\frac{1}{2\lambda}p_0'(\chi)+\frac{\chi}{2\lambda}\int\limits_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}\operatorname{ctg}\psi_1\cdot\operatorname{ctg}\psi_2\cdot f_1\,d\Phi.$$

Отсюда дифференцированием получаем

$$F(\chi)=1-\frac{p_0''(\chi)}{2\lambda}+\frac{1}{2\lambda}\frac{d}{d\chi}\left[\chi\cdot\int\limits_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}\operatorname{ctg}\psi_1\cdot\operatorname{ctg}\psi_2\cdot f_1\cdot d\Phi\right]. \qquad (13)$$

В интеграле правой части (13) можно провести интегрирование по переменным $(\tau_1, \tau_2, t_1, t_2)$. Результат запишется в терминах случайного точечного процесса $\{\mathbf{P}_i, \psi_i\}$ на фиксированной прямой g_0, где $\{\mathbf{P}_i\}$ — точечный процесс пересечений мозаики с прямой g_0, а ψ_i — угол, под которым происходит пересечение в точке $\mathbf{P}_i$.

Результат будет иметь вид

$$\int\limits_{\Delta}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}\cdot\operatorname{ctg}\psi_1\cdot\operatorname{ctg}\psi_2\cdot f_1 d\Phi=\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\operatorname{ctg}\psi_1\cdot\operatorname{ctg}\psi_2\cdot P\left(\begin{matrix}\chi\\0\end{matrix}\Big/\chi,\psi_1,\psi_2\right)\times$$

$$\times f_2\,d\psi_1,\,d\psi_2, \qquad (14)$$

где $f_2(\chi,\psi_1,\psi_2)$ — плотность второй моментной меры процесса $\{\mathbf{P}_i, \psi_i\}$, $P\left(\begin{matrix}\chi\\0\end{matrix}\Big/\chi,\psi_1,\psi_2\right)$ — условная вероятность события $\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}$ при условии, что точки $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ находятся на расстоянии χ и марки в точках $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ равны ψ_1 и ψ_2 соответственно.

Покажем, что правую часть (13) можно записать в терминах аспределения „типичного“ маркированного интервала процесса $\{\mathbf{P}_i, \psi_i\}$ (рсм. [2], главу 9). Обозначим через $W(x)$ функцию распределения длины „типичного“ интервала l, а через $f(\chi, \psi_1, \psi_2)$ — совместную плотность распределения тройки (l, ψ_1, ψ_2).

Из формулы Пальма следует, что

$$p_0^*(\chi) = a \cdot w'(\chi), \tag{15}$$

где a — интенсивность точечного процесса пересечений $\{x_i\}$.

Легко убедиться, что

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \mathrm{ctg}\,\psi_1 \cdot \mathrm{ctg}\,\psi_2 \cdot P\left(\begin{matrix}\chi \\ 0\end{matrix} \Big/ \chi, \psi_1, \psi_2 \right) f_2 \, d\psi_1 d\psi_2 = a \int_0^\pi \int_0^\pi \mathrm{ctg}\,\psi_1 \cdot \mathrm{ctg}\,\psi_2 \cdot f \cdot \psi_1 d\psi_2. \tag{16}$$

Используя (14), (15), (16), формулу (13) можно записать в терминах распределения „типичного“ маркированного интервала

$$F(\chi) = 1 - \frac{1}{a} w'(\chi) + \frac{1}{a} \frac{d}{d\chi} \left[\chi \cdot \int_0^\pi \int_0^\pi \mathrm{ctg}\,\psi_1 \cdot \mathrm{ctg}\,\psi_2 \cdot f(\chi, \psi_1, \psi_2)\, d\psi_1 d\psi_2 \right] \cdot \tag{17}$$

Формула (17) дает решение нашей основной задачи.

Последняя формула совпадает с формулой (37) в [1], которая была получена методом усреднения тождества типа Плейеля, требовавшим существование некоторых пределов эргодического характера.

Следствие 1. Если распределение „типичного“ маркированного интервала такого, что l, ψ_1 и ψ_2 независимы, то формула (17) принимает вид:

$$F(\chi) = 1 - \frac{1}{a} W'(\chi).$$

Следствие 2. Если к условиям следствия 1 добавить условие, что „типичный“ интервал имеет экспоненциальное распределение, то $F(\chi)$ также имеет экспоненциальное распределение с тем же средним.

Ереванский государственный
университет

Поступила 23.VI.1983

Վ. Կ. ՕՀԱՆՅԱՆ. Պատահական խճանկարի «տիպիկ» կողի երկարության բաշխման մասին. (ամփոփում)

Դիտարկվում են համասեռ և իզոտրոպ պատահական խճանկարներ հարթության վրա։ Առաջված է բանաձև, որը թույլ է տալիս «տիպիկ» կողի երկարության բաշխումը հաշվել $\{P_i, \psi_i\}$ պիտակավորված կետային պրոցեսի տերմիններով, որտեղ պիտակ ψ_i վերցվում է այն անկյունը, որի տակ տեղի է ունենում հատումը P_i կետում։

V. K. OGANIAN. *On distribution of the length of the "typical" edge of a random tesselation* (summary)

Random tesselations, with distribution invariant with respect to the group of euclidean motions of the plane are considered. The main result is a formula giving the length distribution of the "typical" edge of a random tesselation in terms of the

marked point process of intersections $\{P_i, \psi_i\}$, induced on a line, where P_i is an intersection point, ψ_i is the corresponding angle.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. V. Ambartzumian.* Convex polygons and Random Tesselations. В сборнике: "Stochastic Geometry" John Wiley, New York (editors E. F. Harding and D. G. Kendall), 1974, 176—191.
2. *R. V. Ambartzumian.* Combinatorial Integral Geometry: with applycations to Mathematical Stereology. John Wiley, 1982.
3. *R. V. Ambartzumian.* Probability distributions in stereology of Random geometrical processes. In Recent Trends in Mathematics, Reinhardbrunn (collection of papers). Teubner Texte zur Mathematik, 1982, Band 50, Leipzig, 5—12.
4. *R. V. Ambartzumian.* Factorization in integral and stochastic Geometry. Teubner Texte zur Mathematik, 1984.
5. *В. К. Оганян.* Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных полей отрезков, ДАН Арм.ССР, 68, № 3, 1979, 150—154.
6. *В. К. Оганян.* Комбинаторные принципы в стохастической геометрии и случайных полей отрезков, в сборнике [9], 81—106.
7. *V. K. Oganian.* On Palm distributions of processes of lines in the plane. Teubner Texte zur Mathematik, 1984.
8. *R. V. Ambartzumian.* Stochastic Geometry from the standpoint of integral geometry, Appl. prob. 9, 1977, 792—823.
9. *Р. В. Амбарцумян* (редактор) Комбинаторные принципы в стохастической геометрии, Сборник статей, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1980.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 3, 1984 Математика

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В моей работе [1] содержатся некоторые неточности. В условии (T) теоремы 2 вместо множителя $|\ln t|$ следует читать $|\ln t|^{m-j}$. Далее из справедливости предложения 2 на стр. 322 делается вывод о справедливости необходимой части утверждения теоремы 1, что неверно, так как при $1 \leqslant j < m-2$ оценка (12б), в которой надо поменять знак неравенства, вообще говоря с интервала $[t_2, t_3]$ не продолжается на интервал $[t_2, T]$.

Таким образом, условия теоремы 1 необходимы лишь при $j = m-1$. Эта же ошибка вкралась и в заметку [2], условия теоремы 1 которой необходимы лишь при $p = r$.

Автор выражает признательность К. А. Ягджяну, указавшему на несоответствие результатов работ [1] и [3].

Г. Р. Оганесян

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Р. Оганесян.* Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений с коэффициентами, зависящими только от временной переменной, Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, XVI, № 4, 1981, 301—331.
2. *Г. Р. Оганесян.* Условия корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений, сб. «Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики», Ереван, 1982, 260—263.
3. *S. Tarama.* Sur le probleme de Cauchy pour une classe des operateurs differentiels du type faiblaiment hyperbolique". J. Math. Kyoto Univ., 22, № 2, 1982 333—368.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS