

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1963 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶՐԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵՆՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԱԼՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԱՐԱԶՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳՆԵՅԱՆ
Ա. Ի. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀՐԱՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և առաերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միջմասն են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերյան շրջանցված սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ավելի քան գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ծառայման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրությունը իրավունք է վերապահում շրջափակ մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է ալյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
зам. главного редактора
Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редакколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилии автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"

Academy of Sciences of Armenian SSR

24-b, Berekamutian St.,

Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.538 (927)

М. М. ДЖРБАШЯН

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С о д е р ж а н и е

- § 0. Введение.
- § 1. Распределение нулей и асимптотическое поведение одного семейства целых функций экспоненциального типа.
- § 2. Весовые пространства целых функций экспоненциального типа.
- § 3. Интерполяционные разложения в весовых классах целых функций экспоненциального типа.
- § 4. Интерполяционные разложения в весовых классах целых функций второго порядка.
- § 5. Построение биортогональных систем целых функций и их базисность.
- § 6. Задача типа Коши и особая краевая задача в комплексной области.

§ 0. В в е д е н и е

0.1. Излагать здесь более или менее полный обзор и четкие формулировки основных результатов данного обширного исследования мы сочли излишним, и не только потому, что оно было бы сопряжено с немалыми трудностями и заняло бы много места.

Мы нашли более целесообразным избрать другое, более краткое, и, по нашему мнению, более обозримое и доступное для первого чтения изложение введения данной статьи. Оно позволит глубже осветить сущность и взаимную связь поставленных нами задач, нашедших в статье свое полное решение.

Но мы считаем нужным сначала же привести формулировки двух принципиально важных теорем, идейно связанных с данным исследованием и, по существу, служащих его основой.

В исследованиях автора, подытоженных в его монографии [1], на основании замечательных асимптотических свойств целых функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_p(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/p)} \quad (\mu > 0, p > 0) \quad (0.1)$$

была построена завершенная теория гармонического анализа для произвольной конечной системы лучей, исходящих из одной точки $z=0$ комплексной плоскости — далеко идущий аналог теории Фурье-Планшереля.

(а) Пусть $p \geq 1$ — любое целое число и Γ_p — совокупность лучей

$$l_k: \left\{ \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{p} k, 0 < |z| < +\infty \right\} (k=0, 1, \dots, 2p-1),$$

разбивающих плоскость z на $2p$ угловых областей раствора π/p , с общей вершиной $z=0$.

Обозначим через $L_2^w(\Gamma_p)$ класс измеримых на Γ_p функций $\Phi(z)$, для которых конечна величина

$$\int_{\Gamma_p} |\Phi(z)|^2 |z|^w |dz| = \sum_{k=0}^{2p-1} \int_0^{+\infty} |\Phi(re^{-i\frac{\pi}{p}k})|^2 r^w dr, \quad (0.2)$$

при заданном значении параметра $w \in (-1, 1)$.

Тогда в качестве важного следствия нашей общей теоремы 4.4 из [1], после введения более удобных обозначений и надлежащих упрощений, вытекает первое из упомянутых выше нами предложений.

Теорема 1. Пусть $\Phi(z)$ — произвольная функция из класса $L_2^w(\Gamma_p)$ и параметр

$$\mu = \frac{1+w+p}{2p}.$$

Пусть, далее

$$\hat{\Phi}_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\tau} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\tau r} - 1}{-ir} \Phi(e^{-i\frac{\pi}{p}k} r^{\frac{1}{p}}) r^{\mu-1} dr \quad (0.3)$$

— преобразования Фурье для совокупности функций

$$|\Phi(e^{-i\frac{\pi}{p}k} r^{\frac{1}{p}}) r^{\mu-1}|_0^{2p-1} \in L_2(0, +\infty). \quad (0.4)$$

Тогда:

1°. Почти для всех точек $z = re^{i\varphi} \in \Gamma_p$ справедлива формула обращения

$$\begin{aligned} & \Phi(e^{i\varphi} r^{1/p}) = \\ & = r^{1-\mu} \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{d}{dr} \left\{ r^{\mu} \int_0^{+\infty} E_p(e^{i\frac{\pi}{p}(k+\frac{1}{2})} r^{\frac{1}{p}} e^{i\varphi} \tau^{\frac{1}{p}}; \mu+1)^{\mu-1} \hat{\varphi}_k(\tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (0.5)$$

и имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{\Gamma_p} |\Phi(z)|^2 |z|^w |dz| = \pi p \sum_{k=0}^{2p-1} \int_0^{+\infty} |\hat{\varphi}_k(\tau)|^2 d\tau. \quad (0.6)$$

При этом, почти всюду на $(0, +\infty)$ функции системы $|\hat{\varphi}_k(\tau)|_0^{2p-1}$ определяются из соотношений

$$\varphi_k(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2\pi p}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2} \mu} \Phi_{k+1}(-\tau) - e^{i\frac{\pi}{2} \mu} \Phi_k(\tau) \right\} \quad (0.7)$$

$$(k=0, 1, \dots, 2p-1),$$

где следует положить $\Phi_{2p}(\tau) = \Phi_0(\tau)$.

2°. Обозначая

$$\Phi_\tau(z) = \sum_{k=0}^{2p-1} \int_0^\pi E_p(e^{i\frac{\pi}{p}(k+\frac{1}{2})} z\tau^{\frac{1}{p}}; \mu) \tau^{\mu-1} \varphi_k(\tau) d\tau, \quad (0.8)$$

будем иметь

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2p-1} \int_0^\pi |\Phi(e^{-i\frac{\pi}{p}k} r) - \Phi_\tau(e^{-i\frac{\pi}{p}k} r)|^2 r^\omega dr = 0. \quad (0.9)$$

Как непосредственно следует из простых формул

$$E_1(z; 1) = e^z, \quad E_1(z; 2) = \frac{e^z - 1}{z},$$

известная теорема Фурье-Планшереля о преобразовании Фурье в классе $L_2(-\infty, +\infty)$ является весьма специальным случаем теоремы I для случая совокупности лучей

$$\Gamma_1 = (\arg z = 0) \cup (\arg z = \pi),$$

когда, т. о. $p=1$, а $\mu=1$.

(6) В упомянутой уже книге [1] были установлены также теоремы большой общности о параметрическом представлении целых функций произвольного конечного порядка $p \geq 1/2$ и нормального типа $\leq \sigma$, интегрируемых в квадрате модуля и с весом r^ω ($-1 < \omega < 1$) вдоль заданной системы лучей (см. [1], теоремы 6.11—6.16).

Приведем теперь формулировку одной из этих теорем — второго из упомянутых вначале важных предложений, лежащих в основе данной работы, также являющегося далеко идущим обобщением другой широко известной теоремы — теоремы Винера-Пэли.

Обозначим через $W_\sigma^{(p)}\left(\omega; \frac{\pi}{p} \{k\}\right)$ класс целых функций целого порядка $p \geq 1$ и типа $\leq \sigma$, для которых для данного значения $\omega \in (-1, 1)$

$$\int_0^{+\infty} |f(e^{-i\frac{\pi}{p}k} r)|^2 r^\omega dr < +\infty \quad (k=0, 1, \dots, 2p-1). \quad (0.10)$$

Теорема II. 1°. Класс $W_\sigma^{(p)}\left(\omega; \frac{\pi}{p} \{k\}\right)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{2p-1} \int_0^\pi E_p(e^{i\frac{\pi}{p}(k+\frac{1}{2})} z\tau^{\frac{1}{p}}; \mu) \tau^{\mu-1} \varphi_k(\tau) d\tau, \quad (0.11)$$

где $\mu = \frac{1 + \omega + p}{2p}$ и $\{\varphi_k(\tau)\}_{k=0}^{2p-1}$ — произвольные функции из класса $L_2(0, \sigma)$.

2°. В представлении (0.11) функции $\{\varphi_k(\tau)\}_{k=0}^{2p-1}$ единственны и почти всюду на $(0, \sigma)$ определяются из формул

$$\varphi_k(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2\pi p}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \widehat{f}_{k+1}(-\tau) - e^{i\frac{\pi}{2}\mu} \widehat{f}_k(\tau) \right\} \quad (0.12)$$

$(k = 0, 1, \dots, 2p-1),$

где

$$\widehat{f}_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\sigma} \frac{e^{-i\tau r} - 1}{-ir} f(e^{-i\frac{\pi}{p}k} r^{\frac{1}{p}}) r^{\mu-1} dr \quad (0.13)$$

$(k = 0, 1, \dots, 2p-1)$

почти всюду на $(-\infty, +\infty)$, причем следует положить $\widehat{f}_{2p}(\tau) \equiv \widehat{f}_0(\tau)$.

Поскольку $E_1(z; 1) = e^z$, то здесь в специальном случае, когда $p = \mu = 1$, содержится упомянутая выше теорема Винера-Пэли, согласно которой:

Множество W целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$ из класса $L_2(-\infty, +\infty)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt} \varphi(t) dt = \int_0^{\sigma} e^{iz\tau} \varphi_0(\tau) d\tau + \int_{\sigma}^{\sigma} e^{-iz\tau} \varphi_1(\tau) d\tau, \quad (0.14)$$

где функции $\varphi(t) \in L_2(-\sigma, \sigma)$ и $\varphi_k(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ ($k=0, 1$) произвольны.

0.2. (а) В комплексной форме ортонормальная на отрезке $[-\sigma, \sigma]$ система функций Фурье

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{i\frac{\pi x}{\sigma} k} \right\}_{k=-\infty}^{+\infty} \quad (0.15)$$

порождается из следующей краевой задачи.

Если λ — произвольный параметр, то задача Коши

$$\Omega'(z) = \lambda \Omega(z), \quad \Omega(0) = 1/\sqrt{2\sigma}, \quad (0.16)$$

имеет единственное решение

$$\Omega(z) \equiv \Omega(z; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{\lambda z}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (0.17)$$

Рассматривая решение $\Omega(z; \lambda)$ этой задачи Коши лишь на отрезке $[-\sigma, \sigma]$ вещественной оси, поставим для него краевое условие его периодичности

$$\Omega(-\sigma; \lambda) - \Omega(\sigma; \lambda) = 0. \quad (0.18)$$

Тогда мы получим собственные числа и собственные функции краевой задачи (0.16) — (0.18):

$$j_k = i \frac{\pi}{\sigma} k, \quad \varrho_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{i \frac{\pi x}{\sigma} k} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (0.19)$$

образующих, как хорошо известно, полную ортонормальную систему в классе функций $L_2(-\sigma, \sigma)$.

Но указанным общеизвестным положениям теории рядов Фурье можно придать несколько иные формулировки. Приведем их здесь, поскольку именно аналогичными формулировками нам будет более удобно пользоваться в процессе установления и изложения ряда основных результатов данной работы.

Пусть на интервале $(0, \sigma)$ мы имеем две произвольные двумерные вектор-функции из $L_2(0, \sigma)$:

$$y(x) = \{y_k(x)\}_0^1, \quad z(x) = \{z_k(x)\}_0^1.$$

Определим их скалярное произведение, положив

$$[y, z]_2 = \sum_{k=0}^1 \int_0^{\sigma} y_k(x) \overline{z_k(x)} dx. \quad (0.20)$$

Далее, на $(0, \sigma)$ определим последовательность двумерных вектор-функций

$$\varphi_n(x) = \{\varphi_{k,n}(x)\}_0^1 \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (0.21)$$

положив

$$\varphi_{0,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{i \frac{\pi n}{\sigma} x}, \quad \varphi_{1,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{-i \frac{\pi n}{\sigma} x}. \quad (0.21')$$

Тогда легко видеть, что система вектор-функций (0.21) ортонормальна в принятой нами метрике (0.20), т. е.

$$[\varphi_n, \varphi_m]_2 = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (0.22)$$

Далее, взамен данной функции $\Phi(x) \in L_2(-\sigma, \sigma)$ можно определить двумерную вектор-функцию, положив $\Phi(x) = \{\Phi_k(x)\}_0^1 \in L_2(0, \sigma)$, где

$$\Phi_0(x) = \Phi(x), \quad \Phi_1(x) = \Phi(-x), \quad x \in (0, \sigma).$$

Тогда нетрудно убедиться в том, что общеизвестные свойства системы Фурье (0.15) могут быть сформулированы таким образом:

Для любой двумерной вектор-функции $\Phi(x) = \{\Phi_k(x)\}_0^1 \in L_2(0, \sigma)$ вектор-разложение

$$\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\Phi, \varphi_n]_2 \varphi_n(x), \quad x \in (0, \sigma), \quad (0.23)$$

сходится в метрике (0.20), т. е. ряды

$$\Phi_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\Phi, \varphi_n]_2 \varphi_{k,n}(x) \quad (k=0, 1) \quad (0.23')$$

сходятся к своим суммам в метрике $L_2(0, \sigma)$.

Отметим, что эти известные предложения теории рядов Фурье могут быть трактованы как дискретные аналоги теоремы Планшереля в классе $L_2(-\infty, +\infty)$, либо ее переформулировки для двухкомпонентных вектор-функций $\Phi(x) = [\Phi_k(x)]_0^1$ класса $L_2(0, +\infty)$. Более того, как известно (см., напр., [2], §§ 1.1 и 3.2), сама теорема Планшереля может быть установлена с привлечением основных положений теории рядов Фурье в классах $L_2(-\sigma, \sigma)$, путем предельного перехода, когда $\sigma \rightarrow +\infty$.

(6) Последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ с конечной нормой

$$\|a_k\|_p = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \quad (1 < p < +\infty)$$

отнесем к классу l^p .

Среди общих результатов, установленных впервые Б. Я. Левиным [3], [4] (см. также [5] и [6]) об интерполяционных рядах, порожаемых нулями целых функций типа синуса, в качестве частного случая содержится известная теорема Коши—Котельникова в следующей формулировке.

Теорема III. Если $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^p$ ($1 < p < +\infty$), то ряд

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_k \frac{\sin \pi z}{z - \frac{\pi}{\sigma} k} \quad (0 < \sigma < +\infty) \quad (0.24)$$

равномерно сходится в любом круге $|z| \leq R < +\infty$, а также по норме $L_p(-\infty, +\infty)$, и дает взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства l^p на все пространство целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$ с интерполяционными данными $f\left(\frac{\pi}{\sigma} k\right) = a_k$ ($-\infty < k < +\infty$) и с нормой

$$\|f\|_p \asymp \|a_k\|_p. \quad (0.25)$$

На основании сформулированной выше теоремы Винера—Пэли нетрудно установить, что свойство полноты и замкнутости ортонормальной системы Фурье (0.15) и утверждения интерполяционной теоремы III в случае $p=2$ равносильны.

Отметим также, что ввиду двойного неравенства (0.25) из теоремы III вытекает, что система целых функций экспоненциального типа σ

$$\left\{ \left(x - \frac{\pi}{\sigma} k \right)^{-1} \sin \pi x \right\}_{-\infty}^{+\infty} \subset L_2(-\infty, +\infty)$$

является базисом Рисса* в классе целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$ с конечной нормой $\|f\|_2$.

0.3. Выше, с одной стороны, была отмечена связь между ортонормальной и базисной в $L_2(-\sigma, \sigma)$ системами Фурье (0.15) или

* Различные эквивалентные определения и важнейшие свойства базисов Рисса изложены, например, в книге [7].

(0.21)—(0.21') и порождающей ее простой краевой задачей (0.17)—(0.18). С другой стороны, было отмечено также, что посредством теоремы Винера-Пэли можно установить равносильность интерполяционной теоремы III с теоремой разложимости функций из класса $L_2(-\pi, \pi)$ по системе Фурье.

Таким образом, все отмеченные нами и, на первый взгляд, разнородные результаты тесно связаны между собой и идейно, и по существу. Теперь мы в состоянии в общих чертах сформулировать основную проблему, полному решению которой посвящена данная работа.

В пространстве $L_2(0, \pi)$ построить явный аппарат базисных систем вектор-функций произвольного четного числа измерений $2p$ ($p \geq 1$), аналогичный двумерной базисной вектор-системе Фурье (0.21)—(0.21').

Переходя ниже к беглому обзору развитого в работе метода решения поставленной проблемы, мы сочли более целесообразным не придерживаться порядка изложения параграфов самой статьи.

(а) Явный вид искомым биортогональных вектор-систем и их базисность в пространстве $L_2(0, \pi)$ вектор-функций, с тем же четным числом компонент, устанавливается в § 5.

При этом сначала же отметим, что лишь ради более компактной формулировки и упрощения доказательств приведенных в работе результатов, нами без какого-либо ограничения общности рассматриваются вектор-пространства $L_2(0, \pi)$ ($0 < \pi < +\infty$) и разложения по вектор-системам биортогональных в метриках этих пространств в том случае, когда их размерность — не произвольное четное число $2p$ ($p \geq 1$), а равно 4, т. е. минимальной четной размерности после двумерных вектор-рядов Фурье.

Доказательство базисности систем четырехмерных вектор-функций в пространстве $L_2(0, \pi)$ функций той же размерности, во-первых, существенно опирается на нашу теорему II о параметрическом представлении классов $W_*^{(p)}\left(\omega; \frac{\pi}{p} [k]\right)$ целых функций порядка p . Во-вторых, мы опираемся также на установленный нами в § 4 далеко идущий аналог интерполяционной теоремы III, чего мы коснемся еще несколько дальше.

Установленные в § 5 результаты, по существу, являются дискретными аналогами нашей основной теоремы I, так же, как и вектор-ряд Фурье (0.23) является дискретным аналогом интеграла Фурье—Планшереля.

(б) Однако, в заключительном § 6 вскрывается другой глубокий факт, показывающий, что аналогия биортогональных в надлежащей метрике четырехкомпонентных вектор-систем из § 5 с биортогональной в метрике (0.20) вектор-системой Фурье на самом деле имеет значительно более глубокие корни.

Суть дела заключается в том, что системы биортогональных вектор-функций из § 5 существенно связаны с особой краевой зада-

чей. Эта задача ставится для определенного стандартного интегро-дифференциального оператора „порядка $1/2$ “, со свободным параметром λ , и рассматривается на совокупности отрезков

$$e_+ [V\sigma] = [-\sigma, \sigma] \cup [-i\sigma, i\sigma]$$

комплексной плоскости z . Она порождает счетное множество простых собственных чисел $\{\lambda_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ (кроме двукратного числа $\lambda_0 = 0$), лежащих на координатных осях и симметричных относительно начала $\lambda = 0$ плоскости λ .

Наконец, соответствующая система собственных функций нашей краевой задачи, как оказывается, после простой замены переменной в точности совпадает с одной из базисных систем вектор-функций, построенной в § 5.

Таким образом, мы приходим к одному из важнейших результатов данного исследования, заключающемся в том, что система собственных и присоединенных вектор-функций по существу совершенно необычной краевой задачи, притом в комплексной области, является базисом в надлежащем классе вектор-функций в $L_2(0, \sqrt{\sigma})$. Более того, после надлежащей нормировки эти системы будут базисами Рисса.

По поводу § 6 отметим, что впервые в давней совместной с А. Б. Нерсесяном работе автора [8] была рассмотрена краевая задача типа Штурма—Лиувилля на конечном отрезке $[0, 1]$ вещественной оси для интегро-дифференциальных операторов дробного порядка, существенно отличных от рассмотренных нами в данной работе. В той работе, пользуясь методом контурного интеграла, причем ценою значительных усилий, нам удалось установить только равносходимость с рядами Фурье разложений функций из $L_1(0, 1)$ по системе собственных функций поставленной краевой задачи.

(в) Наконец, об интерполяционных теоремах, в частности, об установленной в § 4 теореме, занимающей одно из центральных мест для метода нашего исследования.

Выше уже было отмечено, что Б. Я. Левиным и его последователями были установлены важные обобщения теоремы III, когда в ней узлы интерполяции $\left\{ \frac{\pi}{\sigma} k \right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ заменяются нулями функций типа синуса или нулями более общих классов целых функций экспоненциального типа.

В статье § 3, а затем § 4 посвящены установлению интерполяционных теорем несколько иной природы — для весовых классов целых функций.

Еще в нашей, по существу, одной из первых в этом направлении работе, совместной с С. Г. Рафаэляном [9], было установлено обобщение теоремы III при тех же узлах интерполяции $\left\{ \frac{\pi}{\sigma} k \right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, но для классов целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$ из весовых классов $W_{\sigma, p}^{\rho, \lambda}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \lambda < p-1$) с нормой

$$\|f\|_{p, \infty} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^{\lambda} dx \right)^{1/p} < +\infty$$

и для весовых последовательностей $\{a_k\}$ с нормой

$$\|\{a_k\}\|_{p, \infty} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{\lambda} |a_k|^p \right)^{1/p} < +\infty.$$

Но, казалось бы, небольшое отклонение в заметке [9] от условий теоремы III — введение весов в соответствующих пространствах, привело к значительным осложнениям и потребовало наметить доказательства ряда нелегких лемм с привлечением некоторых тонких теорем функционального анализа. Годом раньше, в менее четкой и полной форме, наметки доказательств части этих лемм, а также формулировка интерполяционной теоремы, в частности, для класса функций $W_{\sigma}^{p, \infty}$, но с узлами уже в нулях целой функции

$$S_{\nu}(\tau z) = \tau z E_{1/2}(-\sigma^2 z^2; 1 + \nu),$$

были приведены в заметках С. Г. Рафаэляна [10] и [11], а затем в его диссертации [12].

В § 3 статьи мы сочли целесообразным привести развернутое изложение полного доказательства указанной теоремы интерполяции. Но это было сделано не только ради полноты и стройности изложения нашей работы в целом. Дело в том, что для безукоризненности доказательства указанной теоремы интерполяции в классе $W_{\sigma}^{p, \infty}$ оказалось необходимым, следуя схеме работы [9], в текст §§ 2 и 3 включить несколько новых лемм, а также иногда значительно видоизменить и улучшить намеченные ранее способы их доказательств, отмеченных ранее в указанных выше работах.

В § 4 прибавляется еще одно важное звено в изложении статьи. Рассматривается класс $W_{\sigma}^{p, \omega} (1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1)$ целых функций второго порядка с конечной нормой

$$\|f; e\{+\}\|_{p, \omega} = \left(\int_{e\{+\}} |f(z)|^p |z|^{\omega} |dz| \right)^{1/p} < +\infty,$$

где $e\{+\}' = (-\infty, +\infty) \cup (-i\infty, +i\infty)$ — совокупность координатных осей.

Для класса $W_{\sigma}^{p, \omega}$ устанавливается интерполяционная теорема с узлами в нулях целой функции

$$S_{\nu}(\sigma z^2) = \sigma z^2 E_{1/2}(-\sigma^2 z^4; 1 + \nu).$$

Именно эта теорема позволяет, опираясь на нашу общую теорему II типа Винера—Пэли, установить, что построенные далее в § 5 биортогональные вектор-системы являются базисами в пространстве четырехкомпонентных вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$.

Наконец, в § 1 заложена основа всей данной работы в целом. Здесь устанавливается ряд тонких результатов о распределении ну-

лей целой функции $S, (z)$, служащих узлами в интерполяционных теоремах §§ 3 и 4, а также порождающих собственные числа краевой задачи из § 6.

Часть результатов данной статьи, но в менее общем и завершенном виде, была анонсирована автором в заметке [13]. Содержание § 1, публикуемое здесь впервые, позволило автору в данной работе придать теоремам указанной заметки, а также заметок [10] и [11] (§§ 2, 3), по нашему мнению, предельно завершенные формулировки.

§ 1. Распределение нулей и асимптотическое поведение одного семейства целых функций экспоненциального типа

1.1 (а) В давней работе Г. Пойа [14] была исследована природа распределения нулей целых функций экспоненциального типа, представимых интегралами вида

$$U(z) = \int_0^1 f(t) \cos zt dt, \quad V(z) = \int_0^1 f(t) \sin zt dt. \quad (1.1)$$

Ниже мы воспользуемся следующей собирательной теоремой, утверждения которой установлены в § 1 и § 6 работы [14].

Теорема А. Пусть функция $f(t)$ определена на интервале $(0,1)$ и удовлетворяет условиям: она положительна и возрастает на $(0,1)$, и, кроме того, $f(t) \in L_1(0,1)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Функции $U(z)$ и $V(z)$ имеют только вещественные и простые корни.

2°. Будучи четной функцией, $U(z)$ не имеет нулей на интервале $[0, \pi/2)$, а ее положительные нули расположены только внутри интервалов $(\pi k - \pi/2, \pi k + \pi/2) (k=1, 2, \dots)$ — по одному в каждом из них.

У нечетной же функции $V(z)$ в интервале $[0, \pi)$ содержится только один нуль — $z=0$, а внутри интервалов $(\pi k, \pi(k+1)) (k=1, 2, \dots)$ содержатся ее остальные положительные корни, вновь по одному в каждом из них.

Мы применим этот результат для выявления природы и распределения нулей семейства целых функций типа Миттаг—Лефрлера вида

$$E_{1/2}(-z^2; 1+\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{\Gamma(1+\nu+2k)}, \quad \nu > -1. \quad (1.2)$$

Во-первых, отметим, что поскольку сама функция

$$E_{1/2}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu+2k)}, \quad \mu > 0, \quad (1.2')$$

целая и имеет дробный порядок $\rho=1/2$, то у нее счетное множество нулей.

Во-вторых, уже из одного нашего результата о нулях функции $E_{1/2}(z; \mu)$ (см. [1], стр. 139—142) непосредственно вытекает, что у четной целой функции экспоненциального типа $E_{1/2}(-z^2; 1+\nu)$ при $-1 < \nu < 2$ все нули с достаточно большим модулем вещественные, простые и асимптотически близки к нулям функции $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu\right)$. Докажем теперь лемму.

Лемма 1.1. 1°. Для значений параметра

$$0 < \nu < 2 \quad (1.3)$$

функция $E_{1/2}(-z^2; 1+\nu)$ имеет только вещественные и простые нули, симметрично расположенные относительно точки $z=0$.

2°. Все нули функции $E_{1/2}(-z^2; 1+\nu)$ при $0 < \nu < 1$ расположены по одному только внутри интервалов

$$\Delta_k^{(1)} = \left(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2} \right) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.4)$$

а если $\nu=0$, то только на их концах.

При $1 < \nu < 2$ корни ее расположены по одному только внутри интервалов

$$\Delta_k^{(2)} = \begin{cases} (\pi k, \pi(k+1)); & k=1, 2, \dots, \\ (\pi(k-1), \pi k); & k=-1, -2, \dots, \end{cases} \quad (1.5)$$

а если $\nu=1$, то только на их концах.

Доказательство. Из определения (1.2) нашей функции непосредственно получим

$$E_{1/2}(-z^2; 1) = \cos z, \quad E_{1/2}(-z^2; 2) = \frac{\sin z}{z}, \quad (1.6)$$

откуда следуют утверждения леммы для значений параметра $\nu=0$ и $\nu=1$.

Далее, пользуясь разложением (1.2), легко установить справедливость формулы

$$\begin{aligned} E_{1/2}(-z^2; \mu + \alpha) &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} E_{1/2}(-z^2 t^2; \mu) t^{\alpha-1} dt \quad (\mu > 0, \alpha > 0). \end{aligned}$$

Положив в ней сначала $\mu=1, \alpha=\nu$ ($0 < \nu < 1$), а затем $\mu=2, \alpha=\nu-1$ ($1 < \nu < 2$) и воспользовавшись формулами (1.6), соответственно получим

$$E_{1/2}(-z^2; 1+\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-t)^{\nu-1} \cos zt \, dt \quad (0 < \nu < 1), \quad (1.17)$$

$$z E_{1/2}(-z^2; 1+\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu-1)} \int_0^1 (1-t)^{\nu-2} \sin zt \, dt \quad (1 < \nu < 2).$$

Но обе функции — как $(1-t)^{\nu-1}$ ($0 < \nu < 1$), так и $(1-t)^{\nu-2}$ ($1 < \nu < 2$) — возрастающие при $0 < t < 1$ и из $L_1(0,1)$. Поэтому все утверждения леммы следуют из интегральных представлений (1.7) на основании теоремы А.

В заключение отметим, что для значений параметра $\nu = -1$ и $\nu = 2$ утверждение леммы заведомо не верно.

В самом деле, как легко следует из (1.2), все нули функций

$$E_{1/2}(-z^2; 0) = -z \sin z, \quad E_{1/2}(-z^2; 3) = 2 \frac{\sin \frac{z^2}{2}}{z^2}$$

вещественные, но не простые.

В связи с этим остается открытым вопрос — верна ли лемма для значений параметра $-1 < \nu < 0$?

(б) Определим теперь целую функцию

$$S_\nu(z) = z E_{1/2}(-z^2; 1+\nu), \quad S_1(z) = \sin z \quad (1.8)$$

порядка $\rho = 1$ и типа 1.

Во-первых, согласно лемме 1.1, при $0 \leq \nu < 2$ все нули $S_\nu(z)$ вещественные, простые и, очевидно, расположены симметрично относительно ее нуля $x_{\nu,0} = 0$.

Во-вторых, полагая, что последовательность всех нулей $\{x_{\nu,k}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ функции $S_\nu(z)$ занумерована в порядке $x_{\nu,k} < x_{\nu,k+1}$ ($-\infty < k < +\infty$), наряду с очевидным равенством $x_{\nu,-k} = -x_{\nu,k}$ ($0 \leq k < +\infty$), мы можем утверждать:

1) При $0 < \nu < 1$

$$x_{\nu,k} \in \Delta_k^{(1)} = \left(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2} \right) \quad (-\infty < k < +\infty), \quad (1.9)$$

а если $\nu = 0$, то

$$x_{0,0} = 0, \quad x_{0,k} = \pi k - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (1.9')$$

2) При $1 < \nu < 2$

$$x_{0,0} = 0, \quad x_{\nu,k} \in \Delta_k^{(2)} = \begin{cases} (\pi k, \pi(k+1)), & 1 \leq k < +\infty, \\ (\pi(k-1), \pi k), & -\infty < k \leq -1, \end{cases} \quad (1.10)$$

а если $\nu = 1$, то

$$x_{1,k} = \pi k \quad (-\infty < k < +\infty). \quad (1.10')$$

Из этих утверждений непосредственно следует, что при $0 < \nu < 2$

$$|x_{\nu,k}| \asymp |k| \quad (-\infty < k < +\infty),$$

т. е. отношение величин, стоящих слева и справа (при $k=0$ они оба равны нулю), лежат между двумя положительными постоянными, не зависящими от k^* .

* Всюду дальше вместо двух оценок такого рода мы будем употреблять символ $\asymp$.

1.2. Перейдем теперь к асимптотическим свойствам функции $S_\nu(z)$ ($0 \leq \nu < 2$), ее нулей $\{x_\nu, k\}_{\pm\infty}^+$, а также последовательности чисел $\{S'_\nu(x_\nu, k)\}_{\pm\infty}^+$, отличных от нуля, согласно лемме 1.1.

(а) С этой целью приведем сначала некоторые необходимые сведения и обозначения.

Как известно, целые функции типа Миттаг—Леффлера $E_\rho(z; \mu)$ произвольного порядка $\rho > 0$ и типа 1 определяются посредством разложения

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}, \quad -\infty < \mu < +\infty.$$

Поэтому, принимая во внимание определение (1.8) функции $S_\nu(z)$, легко убедиться, что справедлива формула

$$S_\nu(z) = \frac{1}{2i} [E_1(iz; \nu) - E_1(-iz; \nu)]. \quad (1.8')$$

Для любого $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ и $0 < \varepsilon < 1$ обозначим через $\gamma_\varepsilon(\alpha) = \partial G_\varepsilon(\alpha)$, пробегаемую в отрицательном направлении границу области

$$G_\varepsilon(\alpha) = \{\zeta: |\arg \zeta| < \alpha, \varepsilon < |\zeta| < +\infty\},$$

и пусть $G_\varepsilon^*(\alpha) = \mathbb{C} \setminus \overline{G_\varepsilon(\alpha)}$ — дополнительная к ней область. Заметим при этом, что при $\varepsilon = 0$ наши области $G_\varepsilon(\alpha)$ и $G_\varepsilon^*(\alpha)$ соответственно переходят во взаимно-дополнительные угловые области

$$\Delta(\alpha) = \{\zeta: |\arg \zeta| < \alpha, 0 < |\zeta| < +\infty\},$$

$$\Delta^*(\alpha) = \{\zeta: |\pi - \arg \zeta| < \pi - \alpha, 0 < |\zeta| < +\infty\},$$

общая граница которых — совокупность двух лучей

$$\gamma_0(\alpha) = \{\zeta: \arg \zeta = \pm \alpha, 0 \leq |\zeta| < +\infty\},$$

пробегаемая в отрицательном к области $\Delta(\alpha)$ направлении.

После введения этих обозначений обратимся к хорошо известному для любого $\rho > 1/2$ интегральному представлению функции $E_\rho(z; \nu)$ (см. [1], лемму 3.2), записав его для случая, когда $\rho = 1$. Тогда для любого $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ и $0 < \varepsilon < 1$ будем иметь

$$E_1(w; \nu) = \begin{cases} w^{1-\nu} e^w + I_\varepsilon(w; \alpha), & w \in G_\varepsilon(\alpha) \\ I_\varepsilon(w; \alpha), & w \in G_\varepsilon^*(\alpha), \end{cases} \quad (1.11)$$

где

$$I_\varepsilon(w; \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon(\alpha)} \frac{e^\zeta \zeta^{1-\nu}}{\zeta - w} d\zeta. \quad (1.12)$$

Отметив, далее, что при условии $0 \leq \nu < 2$ интеграл

$$I_0(w; \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0(\alpha)} \frac{e^\zeta \zeta^{1-\nu}}{\zeta - w} d\zeta \quad (1.12')$$

абсолютно сходится, если только $w \in \gamma_0(\alpha)$, переходом к пределу в (1.11) при $\varepsilon \rightarrow +0$ получим также

$$E_1(w; \nu) = \begin{cases} w^{1-\nu} e^w + I_0(w; \alpha), & w \in \Delta(\alpha), \\ I_0(w; \alpha), & w \in \Delta^*(\alpha). \end{cases} \quad (1.11')$$

(б) Докажем теперь три леммы.

Лемма 1.2. 1°. Функция $S_\nu(x)$ при условии $0 \leq \nu < 2$ допускает представление вида

$$S_\nu(x) = x^{1-\nu} \cos\left(x - \frac{\pi}{2} \nu\right) + J_\nu(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad (1.13)$$

$$S_\nu(x) = -|x|^{1-\nu} \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \nu\right) + J_\nu(x), \quad x \in (-\infty, 0),$$

где

$$J_\nu(x) = \frac{x}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{e^{\zeta} \zeta^{1-\nu}}{\zeta^2 + x^2} d\zeta, \quad 0 < |x| < +\infty, \quad (1.13')$$

а контур $\gamma_0' = \gamma_0(3\pi/4)$ — это совокупность двух лучей $\arg \zeta = \pm 3\pi/4$.

2°. При том же условии $0 \leq \nu < 2$ справедливы асимптотические формулы

$$S_\nu(x) = x^{1-\nu} \cos\left(x - \frac{\pi}{2} \nu\right) + O(x^{-1}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (1.14)$$

$$S_\nu(x) = -|x|^{1-\nu} \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \nu\right) + O(x^{-1}), \quad x \rightarrow -\infty,$$

в которых главными членами будут первые слагаемые.

Доказательство. 1°. Заметим, что обе полупрямые $(i0, +i\infty)$ и $(-i\infty, i0)$ лежат в области $\Delta(3\pi/4)$, и поэтому, когда $z = x$ ($0 < |x| < +\infty$) в формуле (1.8') значения функций $E_1(ix; \nu)$ и $E_1(-ix; \nu)$ могут быть взяты из их представления (1.11'). Поступая так, будем иметь

$$\begin{aligned} S_\nu(x) &= \frac{1}{2i} [E_1(ix; \nu) - E_1(-ix; \nu)] = \\ &= \frac{1}{2i} [(ix)^{1-\nu} e^{ix} - (-ix)^{1-\nu} e^{-ix}] + J_\nu(x), \quad 0 < |x| < +\infty, \end{aligned}$$

где, как легко видеть

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2i} \left\{ I_0\left(ix; \frac{3\pi}{4}\right) - I_0\left(-ix; \frac{3\pi}{4}\right) \right\}.$$

Отсюда и следуют обе формулы (1.13)–(1.13') леммы.

2°. Займемся оценкой интеграла $J_\nu(x)$, заметив, что на бесконечных лучах $\arg \zeta = \pm 3\pi/4$, образующих контур γ_0 интегрирования, в (1.13') при $0 < |x| < +\infty$

$$\left| \frac{e^{\zeta} \zeta^{1-\nu}}{\zeta^2 + x^2} \right| \leq \frac{e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} r^{1-\nu}}{|\pm ir^2 + x^2|} \leq x^{-2} e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} r^{1-\nu}, \quad 0 < r < +\infty.$$

Таким образом, мы получили оценку

$$|J_\nu(x)| \leq \frac{|x|^{-1}}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} r^{1-\nu} dr, \quad 0 < |x| < +\infty, \quad (1.13'')$$

откуда и из тождеств (1.13)—(1.13') вытекают асимптотические формулы (1.14) леммы.

Введем в рассмотрение области

$$D_\pm = \left\{ z: \left| \arg z \mp \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{4}, 1 < |z| < +\infty \right\}, \quad (1.15)$$

соответственно принадлежащие верхней и нижней полуплоскостям плоскости z .

Лемма 1.3. Для функции $S_\nu(z)$ при $0 \leq \nu < 2$ имеют место двусторонние оценки

$$|S_\nu(z)| \asymp (1 + |z|)^{1-\nu} e^{|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \bar{D} = \bar{D}_+ \cup \bar{D}_-, \quad (1.16)$$

причем в них надлежащие постоянные множители зависят только от ν .

Доказательство. Преобразованием $w = iz$ области $D_\mp$ переходят в области $D_\pm^* = iD_\mp$, лежащие соответственно в правой и левой полуплоскостях плоскости w . При этом очевидно, что

$$D_-^* \subset \Delta^* \left(\frac{3\pi}{4} \right) \text{ и } D_+^* \subset \Delta \left(\frac{\pi}{4} \right). \quad (1.17)$$

Заметим теперь, что поскольку в представлении (1.11')—(1.12') функции $E_1(w; \nu)$ параметр $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right)$ произвольный, то при оценке интеграла $I_0(w; \alpha)$ мы можем варьировать его, притом следующим образом.

В случае $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right)$, очевидно, будем иметь

$$|\zeta - w| \geq |w| \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha \right), \quad \text{при } w \in \bar{D}_-^*, \quad \zeta \in \gamma_0(\alpha),$$

а также

$$|\zeta - w| \geq |w| \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha \right), \quad \text{при } w \in \bar{D}_+^*, \quad \zeta \in \gamma_0(\alpha).$$

Поэтому в обоих случаях из представления (1.12') функции $I_0(w; \alpha)$ следует оценка

$$|I_0(w; \alpha)| \leq \frac{\alpha(\alpha)}{|w|}, \quad w \in \bar{D}^*, \quad (1.18)$$

где $D^* = D_+^* \cup D_-^*$ и

$$\alpha(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left| \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha \right) \right|^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-|\cos \alpha| r} r^{1-\nu} dr < +\infty$$

— постоянная, не зависящая от w .

С другой стороны, в силу (1.17) из (1.11') имеем

$$E_1(w; \nu) = \begin{cases} w^{1-\nu} e^w + I_0(w; \alpha), & w \in \bar{D}_+, \\ I_0(w; \alpha), & w \in \bar{D}_- \end{cases}$$

и

$$E_1(-w; \nu) = \begin{cases} (-w)^{1-\nu} e^{-w} + I_0(-w; \alpha), & w \in \bar{D}_+, \\ I_0(-w; \alpha), & w \in \bar{D}_- \end{cases}$$

Поэтому имеем также

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= \frac{1}{2i} \{E_1(w; \nu) - E_1(-w; \nu)\} = \\ &= \frac{1}{2i} \begin{cases} w^{1-\nu} e^w + I_0(w; \alpha) - I_0(-w; \alpha), & w \in \bar{D}_+, \\ -(-w)^{1-\nu} e^{-w} + I_0(w; \alpha) - I_0(-w; \alpha), & w \in \bar{D}_- \end{cases} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Теперь из (1.19) в силу оценки (1.18) получим неравенство

$$|\Phi(w)| \leq \frac{1}{2} |w|^{1-\nu} e^{|\operatorname{Re} w|} + \frac{\alpha(z)}{|w|}, \quad w \in \bar{D}_+ \cup \bar{D}_- = \bar{D}^*.$$

Но поскольку $0 \leq \nu < 2$, то отсюда, очевидно, следует существование постоянной $C_1 > 0$, такой, что

$$|\Phi(w)| \leq C_1 (1 + |w|)^{1-\nu} e^{|\operatorname{Re} w|}, \quad w \in \bar{D}^*.$$

Далее, из того же представления (1.19) функции $\Phi(w)$, вновь пользуясь оценкой (1.18), мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |w|^{1-\nu} e^{\operatorname{Re} w} &\leq |\Phi(w)| + \frac{\alpha(z)}{|w|}, \quad w \in \bar{D}_+, \\ \frac{1}{2} |w|^{1-\nu} e^{-\operatorname{Re} w} &\leq |\Phi(w)| + \frac{\alpha(z)}{|w|}, \quad w \in \bar{D}_-. \end{aligned}$$

Так как $\operatorname{Re} w > 0$ при $w \in \bar{D}_+$, и $\operatorname{Re} w < 0$ при $w \in \bar{D}_-$, то последние два неравенства можно объединить и записать для функции $\Phi(w)$ такое неравенство

$$|\Phi(w)| \geq \frac{1}{2} |w|^{1-\nu} e^{|\operatorname{Re} w|} - \frac{\alpha(z)}{|w|}, \quad w \in \bar{D}_+ \cup \bar{D}_- = \bar{D}^*.$$

Отсюда, поскольку $0 \leq \nu < 2$, мы приходим к оценке вида

$$|\Phi(w)| \geq C_2 (1 + |w|)^{1-\nu} e^{|\operatorname{Re} w|}, \quad w \in \bar{D}^*.$$

Итак, для функции $\Phi(w)$ справедливо утверждение

$$|\Phi(w)| \asymp (1 + |w|)^{1-\nu} e^{|\operatorname{Re} w|}, \quad w \in \bar{D}^*. \quad (1.20)$$

Для завершения доказательства леммы нам остается лишь заметить, что обратным преобразованием $z = -iw$ области $\bar{D}_\pm^*$ переходят в первоначальные области $\bar{D}_\pm = -i\bar{D}_\pm^*$, функция $\Phi(w)$ — в функцию $S_+(z) = \Phi(iz)$ и, наконец, двойное неравенство (1.20) — в утверждение (1.16) леммы.

Следующая лемма устанавливается способом, по существу, аналогичным примененному при доказательстве леммы 1.3.

Лемма 1.3'. Для функции $S_\nu(z)$ при $0 \leq \nu < 2$ и при любом γ ($0 < \gamma < +\infty$) справедливы двусторонние оценки

$$|S_\nu(x \pm i\gamma)| \asymp |x \pm i\gamma|^{1-\nu}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1.16')$$

причем в них надлежащие постоянные множители зависят только от ν и γ .

Доказательство. Преобразованием $w = iz$ прямые $x \pm i\gamma$ ($-\infty < x < +\infty$) переходят в прямые $\mp \gamma + ix$ ($-\infty < x < +\infty$), лежащие соответственно в левой и правой полуплоскостях плоскости w .

Обозначим через

$$\Gamma_\pm(\gamma) = \{\pm \gamma + ix : |x| \geq 2\gamma\}$$

совокупность лучей, лежащих на прямых $\pm \gamma + ix$ ($-\infty < x < +\infty$) соответственно, а через

$$\partial_\pm(\gamma) = \{\pm \gamma + ix : |x| \leq 2\gamma\}$$

— дополнительные к ним отрезки этих прямых. При этом очевидно, что

$$\Gamma_+(\gamma) \subset \Delta\left(\frac{3\pi}{4}\right), \quad \Gamma_-(\gamma) \subset \Delta\left(\frac{3\pi}{4}\right). \quad (1.17')$$

Заметим теперь, что поскольку в представлениях (1.11') и (1.12') функции $E_1(w; \nu)$ параметр $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ произвольный, то, в частности, можем положить $\alpha = 3\pi/4$. В этом случае из простых геометрических соображений заключаем, что

$$|z - w| \geq \frac{|w|}{\sqrt{10}}; \quad w \in \Gamma_+(\gamma) \cup \Gamma_-(\gamma), \quad \zeta \in \gamma_0\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Поэтому из представления (1.12') функции $I_0(w; \alpha)$ при $\alpha = 3\pi/4$ следует оценка

$$|I_0(w; \alpha)| \leq \frac{\alpha}{|w|}, \quad w \in \Gamma(\gamma), \quad (1.18')$$

где $\Gamma(\gamma) = \Gamma_+(\gamma) \cup \Gamma_-(\gamma)$ и

$$\alpha = \frac{\sqrt{10}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2}r} r^{1-\nu} dr < +\infty$$

— постоянная, не зависящая от w .

С другой стороны, в силу (1.17') и (1.11') мы имеем представления

$$E_1(w; \nu) = w^{1-\nu} e^w + I_0\left(w; \frac{3\pi}{4}\right), \quad (w \in \Gamma(\gamma))$$

$$E_1(-w; \nu) = (-w)^{1-\nu} e^{-w} + I_0\left(-w; \frac{3\pi}{4}\right).$$

Поэтому для функции

$$\Phi(w) = \frac{1}{2i} \{E_1(w; \nu) - E_1(-w; \nu)\} =$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ w^{1-\nu} e^z - (-w)^{1-\nu} e^{-w} + I_0\left(w; \frac{3\pi}{4}\right) - I_0\left(-w; \frac{3\pi}{4}\right) \right\} \quad (1.19')$$

$$w \in \Gamma(\gamma),$$

в силу (1.19) и (1.18') получим неравенства

$$|\Phi(w)| \leq |w|^{1-\nu} e^\tau + \frac{a}{|w|}, \quad w \in \Gamma_+(\gamma) \cup \Gamma_-(\gamma) = \Gamma(\gamma).$$

Но поскольку $0 \leq \nu < 2$, то отсюда следует существование постоянной $C_1 = C_1(\nu, \gamma)$, такой, что

$$|\Phi(w)| \leq C_1 |w|^{1-\nu}, \quad w \in \Gamma(\gamma).$$

Далее, из приведенных выше представлений (1.19') функции $\Phi(w)$, вновь пользуясь оценкой (1.18'), мы получим

$$|\Phi(w)| > \frac{1}{2} e^\tau |w|^{1-\nu} - \frac{a}{|w|}, \quad w \in \Gamma(\gamma),$$

и, аналогично, в силу условия $0 \leq \nu < 2$, приходим к оценке вида

$$|\Phi(w)| \geq C_2 |w|^{1-\nu}, \quad w \in \Gamma(\gamma),$$

где $C_2 = C_2(\nu, \gamma)$ не зависит от w .

Итак, для функции $\Phi(w)$ справедливо утверждение

$$|\Phi(w)| \asymp |w|^{1-\nu}, \quad w \in \Gamma(\gamma). \quad (1.20')$$

С другой стороны, поскольку $S_+(z) = \Phi(iz)$, то функция $|\Phi(w) w^{1-\nu}|$ непрерывна на отрезках $\delta_\pm(\gamma)$ и отлична от нуля. Поэтому

$$|\Phi(w)| \asymp |w|^{1-\nu}, \quad w \in \delta_\pm(\gamma),$$

откуда и из (1.20') следуют оценки

$$|\Phi(w)| \asymp |w|^{1-\nu}, \quad w = \pm \gamma + ix \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (1.20'')$$

Наконец, обратным преобразованием $z = -iw$ прямые $w = \mp \gamma + ix$ $(-\infty < x < +\infty)$ переходят в первоначальные прямые $z = x \pm i\gamma$ $(-\infty < x < +\infty)$, функция $\Phi(w)$ — в функцию $S_+(z) = \Phi(iz)$ и, наконец, двойное неравенство (1.20'') — в утверждение (1.16').

Лемма 1.4. Пусть $1 < p < +\infty$, $-1 < k < p-1$ и $\frac{1+k}{p} < \nu < 1 + \frac{1+k}{p}$. Если, как и выше, $|x_{\nu, k}|_{\pm\infty}^{+\infty}$ — суть нули функции $S_+(z)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S_+(x)}{x - x_{\nu, k}} \right|^p |x|^k dx < +\infty, \quad -\infty < k < +\infty, \quad (1.21)$$

а вместе с тем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S_+(x)|^p |x|^k dx = +\infty. \quad (1.22)$$

Доказательство. Во-первых, для данного $k \in (-\infty, +\infty)$ и $R > |x_{\nu, k}|$ очевидно, что

$$\int_{-R}^R \left| \frac{S_{\nu}(x)}{x - x_{\nu, k}} \right|^p |x|^{\alpha} dx < +\infty.$$

Во-вторых, из асимптотических формул (1.14) леммы 1.2 следует, что при том же значении $k \in (-\infty, +\infty)$ и $R > 0$ существует постоянная $C_k(R) > 0$ такая, что

$$\left| \frac{S_{\nu}(x)}{x - x_{\nu, k}} \right|^p |x|^{\alpha} \leq C_k(R) |x|^{\alpha - \nu p}, \quad |x| \geq R.$$

Наконец, так как $\alpha - \nu p < -1$, то имеем также

$$\int_{|x| > R} \left| \frac{S_{\nu}(x)}{x - x_{\nu, k}} \right|^p |x|^{\alpha} dx < +\infty,$$

и, тем самым, конечность интеграла (1.21) доказана.

Чтобы установить расходимость интеграла (1.22), нам следует отметить, что, во-первых, если $0 \leq \nu < 2$, $\alpha \leq 1$, то легко установить, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left| \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \nu \right) \right|^p}{x^{\alpha}} dx = +\infty. \quad (1.23)$$

Во-вторых, обращаясь, например, к первой из формул (1.13) леммы 1.2, напомним неравенство

$$x^{1-\nu} \left| \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \nu \right) \right| \leq |J_{\nu}(x)| + |S_{\nu}(x)|, \quad 1 \leq x < +\infty,$$

откуда следует, что при любом $R > 1$

$$\begin{aligned} 2^{-p} \int_1^R \left\{ x^{1-\nu} \left| \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \nu \right) \right| \right\}^p x^{\alpha} dx &\leq \\ &\leq \int_1^R |J_{\nu}(x)|^p x^{\alpha} dx + \int_1^R |S_{\nu}(x)|^p x^{\alpha} dx. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Но из неравенства (1.13'') имеем $|J_{\nu}(x)| \leq Cx^{-p}$ ($1 \leq x < +\infty$), и поэтому интеграл

$$\int_1^{+\infty} |J_{\nu}(x)|^p x^{\alpha} dx \leq C \int_1^{+\infty} x^{\alpha - p} dx < +\infty, \quad (1.25)$$

ввиду условия $-1 < \alpha < p - 1$.

Интеграл же слева в (1.24) можем записать в виде (1.23), где $\alpha = (\nu - 1)p - \alpha$ и $\alpha < 1$, ввиду условия $\nu < 1 + \frac{1 + \alpha}{p}$.

Наконец, переходя к пределу в неравенстве (1.24) при $R \rightarrow +\infty$, в силу (1.23) и (1.25) приходим ко второму из утверждений леммы (1.22).

(в) В заключение параграфа докажем две леммы об асимптотическом поведении нулей $\{x_{\nu, k}\}$ функции $S_{\nu}(z)$ ($0 \leq \nu < 2$) и последовательности чисел $\{S'_{\nu}(x_{\nu, k})\}$.

Лемма 1.5. При $0 < \nu < 1$ или при $1 < \nu < 2$ справедлива асимптотическая формула

$$x_{\nu, k} = \pi k + \frac{\pi}{2} (\nu - 1) \operatorname{sign} k + O(|k|^{\nu-2}), \quad |k| \rightarrow +\infty, \quad (1.26)$$

а при $\nu = 0$ или $\nu = 1$, согласно (1.9') и (1.10'),

$$x_{0,0} = 0, \quad x_{0,k} = \pi k - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (1.27)$$

$$x_{1,k} = \pi k \quad (-\infty < k < +\infty).$$

Доказательство. Учитывая, что $x_{\nu, -k} = -x_{\nu, k}$, асимптотическое равенство (1.26) достаточно установить лишь для значений $k = 1, 2, \dots$. Положив в первой из формул (1.14) леммы 1.2 (2°)

$$x_{\nu, k} = \pi k + (\nu - 1) \frac{\pi}{2} + \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и заметив, что $S_{\nu}(x_{\nu, k}) = 0$, мы получим

$$x_{\nu, k}^{1-\nu} \cos \left(\pi k - \frac{\pi}{2} + \varepsilon_k \right) = O(x_{\nu, k}^{-1}), \quad k \rightarrow +\infty.$$

Но из приведенных в заключение п. 1.1 формул (1.9)–(1.9') и (1.10)–(1.10'), как там же было отмечено, вытекает, что $|x_{\nu, k}| \asymp |k|$. Поэтому предыдущее асимптотическое равенство запишется в виде

$$\sin \varepsilon_k \sim \varepsilon_k = O(|k|^{\nu-2}), \quad |k| \rightarrow +\infty,$$

что приводит нас к формуле (1.26). Случаи же, когда $\nu = 0$ или $\nu = 1$, и соответствующие им явные формулы (1.27) для нулей $\{x_{0,k}\}$ и $\{x_{1,k}\}$ были отмечены нами ранее.

Лемма 1.6. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} |x_{\nu, k}|^{\nu-1} |S'_{\nu}(x_{\nu, k})| = 1. \quad (1.28)$$

Доказательство. Запишем первую из формул (1.13) леммы 1.2 в виде

$$x^{\nu-1} S_{\nu}(x) = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \nu \right) + x^{\nu-1} J_{\nu}(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

и продифференцируем ее; получим тождество

$$\begin{aligned} & (\nu - 1) x^{\nu-2} S_{\nu}(x) + x^{\nu-1} S'_{\nu}(x) = \\ & = -\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \nu \right) + (\nu - 1) x^{\nu-2} J_{\nu}(x) + x^{\nu-1} J'_{\nu}(x), \quad 0 < x < +\infty. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Согласно неравенству (1.13'')

$$|f_v(x)| \leq C_1 x^{-1} (1 \leq x < +\infty),$$

и из самого определения (1.13') функции $f_v(x)$ для $f_v(x)$ легко следует оценка вида

$$|f'_v(x)| \leq \frac{2x^2}{\pi} \left| \int_{\gamma_0} \frac{e^{\zeta} \zeta^{1-v}}{(\zeta^2 + x^2)^2} d\zeta \right| \leq C_2 x^{-2} (1 \leq x < +\infty),$$

если поступить точно так же, как и при доказательстве леммы 1.2.

Таким образом, из тождества (1.29) следует, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} (v-1)x^{v-2}S_v(x) + x^{v-1}S'_v(x) = \\ = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}v\right) + O(x^{v-3}). \end{aligned}$$

Положив здесь $x = x_{v,k}$ и заметив, что $S(x_{v,k}) = 0$, в силу асимптотической формулы (1.26) мы получим

$$\begin{aligned} x_{v,k}^{v-1} S'_v(x_{v,k}) &= -\sin\left[\pi k - \frac{\pi}{2} + O(k^{v-2})\right] + O(k^{v-3}) = \\ &= (-1)^k \cos[O(k^{v-2})] + O(k^{v-3}), \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ввиду того, что $x_{v,-k} = -x_{v,k}$ ($1 \leq k < +\infty$), а $S'_v(x)$, очевидно, четная функция, из (1.30) и условия $v < 2$ следует предельное соотношение (1.28) леммы.

§ 2. Весовые пространства целых функций экспоненциального типа

2.1. Обозначим через $W_{\sigma}^{p,\lambda}$ ($1 < p < \infty$, $-1 < \lambda < +\infty$) множество целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\lambda} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^{\lambda} dx \right)^{1/p} < +\infty. \quad (2.1)$$

В этом параграфе будет установлен ряд важных для дальнейшего изложения данной работы предложений о свойствах пространств $W_{\sigma}^{p,\lambda}$, которые имеют и самостоятельный интерес.

(а) Приведем сначала некоторые хорошо известные предварительные сведения, необходимые нам на протяжении всего параграфа.

1°. Если $\varphi(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$ ($1 \leq p < +\infty$), то функция Стеклова

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \varphi(t) dt, \quad h > 0, \quad (2.2)$$

непрерывна, равномерно ограничена на всей оси $-\infty < x < +\infty$ и обладает свойствами

$$\| \varphi_h \|_{p,0} = \| \varphi_h \|_p \leq \| \varphi \|_p, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \| \varphi - \varphi_h \|_p = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \| \varphi_h \|_p = \| \varphi \|_p \quad (2.3)$$

(см. [15], гл. XVIII).

2°. Пусть функция $F(z)$ аналитична в полуплоскости $G^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, непрерывна вплоть до ее границы и экспоненциального типа, т. е.

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \{r^{-1} \ln M_F(r)\} \leq \sigma, \quad M_F(r) = \max_{0 < \varphi < \pi} |F(re^{i\varphi})|.$$

Тогда из неравенства

$$|F(x)| \leq M, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.4)$$

следует неравенство

$$|F(z)| \leq M e^{\sigma \operatorname{Im} z}, \quad z \in G^+. \quad (2.4')$$

Напомним лишь, что это утверждение можно получить, если применить уточненный принцип Фрагмена—Линделёфа к функции

$$F_\varepsilon(z) = \exp[-i(\sigma + \varepsilon)z] F(z); \quad \varepsilon > 0, \quad z \in G^+,$$

а затем перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см., например, [16], стр. 188, а также [17], стр. 211).

3°. Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в полуплоскости G^+ , непрерывная вплоть до ее границы, причем

$$\sup_{z \in G^+} |u(z)| < +\infty.$$

Тогда, если

$$u(x) \leq M, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.5)$$

то также будем иметь

$$u(z) \leq M, \quad z \in G^+. \quad (2.5')$$

Это есть принцип максимума в простейшей форме для субгармонических функций (см., например, [17], стр. 195).

Наконец, о классах $H_{\pm}^p$ ($0 < p < +\infty$) функций $\varphi^{\pm}(z)$, которые аналитичны в полуплоскостях $G^{\pm} = \{z: \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ и соответственно подчинены условиям

$$\sup_{0 < y < +\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^{\pm}(x \pm iy)|^p dx \right\} < +\infty.$$

4°. Если $\varphi^{\pm}(z) \in H_{\pm}^p$, то почти всюду существует граничная функция

$$\lim_{y \rightarrow +0} \varphi^{\pm}(x \pm iy) = \varphi^{\pm}(x) \in L_p(-\infty, +\infty), \quad (2.6)$$

причем

$$\| \varphi^{\pm} \|_p = \lim_{y \rightarrow +0} \| \varphi^{\pm}(x \pm iy) \|_p, \quad \lim_{y \rightarrow +0} \| \varphi^{\pm}(x) - \varphi^{\pm}(x \pm iy) \|_p = 0. \quad (2.6')$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\| \varphi^{\pm}(x \pm iy) \|_p \leq \| \varphi^{\pm} \|_p, \quad 0 < y < +\infty. \quad (2.7)$$

Отметим также, что классы $H_{\pm}^p$ с введенными нормами при $1 < p < +\infty$ являются банаховыми пространствами.

(6) Наряду с классом $W_{\sigma}^{p, \pm}$ определим также классы $W_{\sigma}^{p, \pm}[\gamma]$ целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$ с нормой

$$\|f\|_{p, \pm, \gamma} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p (x^2 + \gamma^2)^{x^2/2} dx \right)^{1/p} < +\infty, \quad (2.8)$$

где $1 < p < +\infty$, $-1 < x < +\infty$ и $0 \leq \gamma < +\infty$.

Легко видеть, что множества функций $W_{\sigma}^{p, \pm}$ и $W_{\sigma}^{p, \pm}[\gamma]$ совпадают, хотя нормы в этих классах различны, если $0 < \gamma < +\infty$. При этом очевидно, что

$$W_{\sigma}^{p, \pm}[0] \equiv W_{\sigma}^{p, \pm} \text{ и } \|f\|_{p, \pm, 0} = \|f\|_{p, \pm}. \quad (2.9)$$

Условимся ниже в полуплоскостях $G^{\pm}$ ветви многозначных функций $z^{x/p}$ и $(z \pm i\gamma)^{x/p}$ выбирать следующим образом.

В полуплоскостях G^+ и G^- будем рассматривать ветви функций $z^{x/p}$ в плоскости z с разрезами $(i0, +i\infty)$ соответственно.

Для $0 < \gamma < +\infty$ функцию $(z + i\gamma)^{x/p}$ при $z \in G^+$ будем рассматривать в плоскости z с разрезом $(-i\infty, -i\gamma) \subset G^-$, а функцию $(z - i\gamma)^{x/p}$ при $z \in G^-$ — в плоскости z с разрезом $(i\gamma, +i\infty)$.

Условившись об этом, мы с любой функцией $f(z) \in W_{\sigma}^{p, \pm}[\gamma]$ ($0 \leq \gamma < +\infty$) будем ассоциировать следующие функции:

$$\begin{aligned} \Phi^{\pm}(z) &= z^{x/p} f(z), \text{ при } z \in G^{\pm}, \\ \Phi_{\gamma}^{+}(z) &= (z + i\gamma)^{x/p} f(z), \text{ при } z \in G^{+}, \\ \Phi_{\gamma}^{-}(z) &= (z - i\gamma)^{x/p} f(z), \text{ при } z \in G^{-}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

заметив, что $\Phi_0^{\pm}(z) = \Phi^{\pm}(z)$.

Все эти функции аналитичны в отмеченных выше полуплоскостях, непрерывны вплоть до их границы $-\infty < x < +\infty$, кроме, быть может, точки $x=0$ (если $\gamma=0$); при этом всегда будем иметь

$$\|\Phi_{\gamma}^{\pm}\|_p = \|f\|_{p, \pm, \gamma}. \quad (2.11)$$

Далее, положив

$$M(r; f) = \max_{|z|=r} \|f(z)\|,$$

в соответствии с определениями (2.10), будем иметь

$$\begin{aligned} M(r; \Phi^{\pm}) &= \max_{\substack{z \in G^{\pm} \\ |z|=r}} \|\Phi^{\pm}(z)\| \leq r^{x/p} M(r; f), \\ M(r; \Phi_{\gamma}^{+}) &= \max_{\substack{z \in G^{+} \\ |z|=r}} \|\Phi_{\gamma}^{+}(z)\| \leq (\gamma + r)^{x/p} M(r; f), \\ M(r; \Phi_{\gamma}^{-}) &= \max_{\substack{z \in G^{-} \\ |z|=r}} \|\Phi_{\gamma}^{-}(z)\| \leq (\gamma + r)^{x/p} M(r; f). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Поскольку $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа $\leq \sigma$, то из (2.12) следует: функции $\Phi^{\pm}(z)$ — экспоненциального типа $\leq \sigma$ в со-

ответствующих полуплоскостях $G^{\pm}$; функция $\Phi_{\gamma}^{+}(z)$ — в полуплоскости G^{+} , а функция $\Phi_{\gamma}^{-}(z)$ — в полуплоскости G^{-} .

Докажем лемму.

Лемма 2.1. Если $f(z) \in W_{\sigma}^{p, \gamma}[\gamma]$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \gamma < +\infty$, $0 \leq \gamma < +\infty$), то соответственно будем иметь

$$1^{\circ}. \quad \varphi^{\pm}(z) \equiv e^{\pm i\gamma z} (z \pm i\gamma)^{\pm p} f(z) \in H_{\pm}^p, \quad (2.13)$$

$$2^{\circ}. \quad \|f(x \pm i\gamma)\|_{p, x, \gamma} \leq e^{\sigma \gamma} \|f\|_{p, x}. \quad (2.14)$$

Доказательство. 1°. Очевидно, достаточно провести доказательство лишь для функции $\varphi^{+}(z)$.

Если положить

$$F_h^{+}(z) = \frac{1}{2h} \int_{z-h}^{z+h} \Phi_{\gamma}^{+}(t) dt = \frac{1}{2h} \int_{z-h}^{z+h} f(t)(t+i\gamma)^{-p} dt, \quad h > 0, \quad (2.15)$$

то, во-первых, ввиду отмеченных выше свойств функции $\Phi_{\gamma}^{+}(z)$ и свойств из (6) 1° функций Стеклова, можем утверждать:

1) Функция $F_h^{+}(z)$ аналитична в полуплоскости G^{+} , непрерывна вплоть до ее границы $-\infty < x < +\infty$, где равномерно ограничена.

Кроме того, в силу (2.11)

$$\|F_h^{+}\|_p \leq \|\Phi_{\gamma}^{+}\|_p = \|f\|_{p, x, \gamma} \quad (2.11')$$

для любого $h > 0$.

Отметим еще, что, в силу неравенства Гёльдера, из (2.15) легко следует также оценка

$$|F_h^{+}(x)| \leq (2h)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{p, x, \gamma}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

2) Поскольку в силу (2.12)

$$M_h^{+}(r) = \max_{\substack{z \in G^{+} \\ |z|=r}} \{|F_h^{+}(z)|\} \leq M(r+h; \Phi_{\gamma}^{+}),$$

то, наряду с $\Phi_{\gamma}^{+}(z)$, функция $F_h^{+}(z)$ — также экспоненциального типа $\leq \sigma$ в полуплоскости G^{+} .

Ввиду отмеченных свойств функции $F_h^{+}(z)$ и согласно свойству из (а) 2°, во всей области G^{+} справедливо неравенство

$$|e^{i\sigma z} F_h^{+}(z)| \leq (2h)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{p, x, \gamma}, \quad z \in G^{+}. \quad (2.16)$$

Теперь определим еще одну функцию

$$u_h(z; R) = \int_{-R}^R |e^{i\sigma(z+t)} F_h^{+}(z+t)|^p dt, \quad z \in G^{+}, \quad (2.17)$$

уже субгармоническую и ограниченную в полуплоскости G^{+} , в силу (2.16).

Поскольку при $z = x \in (-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} u_h(x; R) &= \int_{-R}^R |F_h^+(x+t)|^p dt = \\ &= (2h)^{-p} \int_{-R}^R \left| \int_{x+\tau-h}^{x+\tau+h} f(t)(t+i\tau)^{z/p} dt \right|^p d\tau, \end{aligned}$$

то функция $u_h(x; R)$ непрерывна вплоть до границы $-\infty < x < +\infty$ полуплоскости G^+ .

Отсюда, применив неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} u_h(x; R) &\leq \frac{1}{2h} \int_{-R}^R d\tau \int_{-h}^h |f(x+\tau+t)|^p [(x+\tau+t)^2 + \tau^2]^{z/2} dt = \\ &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h dt \int_{x-t-R}^{x+t+R} |f(\tau)|^p (\tau^2 + \tau^2)^{z/2} d\tau \leq \|f\|_{p, x, \tau}^p. \end{aligned}$$

Итак, субгармоническая в полуплоскости G^+ функция $u_h(z; R)$ там ограничена, непрерывна вплоть до ее границы $-\infty < x < +\infty$, причем

$$u_h(x; R) \leq \|f\|_{p, x, \tau}^p.$$

Отсюда, согласно принципу максимума из (а) 3°, будем иметь для любого $R > 0$

$$u_h(z; R) \leq \|f\|_{p, x, \tau}^p, \quad z \in G^+.$$

Имея ввиду определение (2.17) функции $u_h(z; R)$, переходом к пределу при $R \rightarrow +\infty$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_h^+(x+t+iy)|^p dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |F_h^+(x+iy)|^p dx \leq \\ &\leq e^{py} \|f\|_{p, x, \tau}^p, \quad 0 < y < +\infty. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Но, согласно свойствам из (а) 1° функций Стеклова

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|F_h^+(x+iy)\|_p = \|\Phi_\tau^+(x+iy)\|_p,$$

и поэтому, переходом к пределу в (2.18) при $h \rightarrow 0$, приходим к неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)(x+iy+i\tau)^{z/p}|^p dx \leq e^{py} \|f\|_{p, x, \tau}^p, \quad 0 < y < +\infty.$$

Наконец, поскольку $|\exp\{iz(x+iy)\}| = e^{-\tau y}$, $-\infty < x < +\infty$, то отсюда следует также неравенство

$$\|\Phi^+(x+iy)\|_p \leq \|f\|_{p, x, \tau}, \quad 0 < y < +\infty,$$

т. е. утверждение $\Phi^+(z) \in H_+^p$.

2°. Заметим, что, по определению,

$$\|f(x \pm i\gamma)\|_{p, x, \gamma} = \|f(x \pm i\gamma)(x \pm i\gamma)^{x/p}\|_p. \quad (2.19)$$

Но из (2.13), в частности, следует, что соответственно $e^{\pm i\pi x} z^{x/p} f(z) \in H_{\pm}^p$. Поэтому, во-первых, в силу последнего из свойств (а) 4° функций класса $H_{\pm}^p$, т. е. неравенства (2.7), имеем также

$$\begin{aligned} e^{-i\pi x} \|f(x \pm i\gamma)(x \pm i\gamma)^{x/p}\|_p &= \|e^{-i\pi(x \pm i\gamma)} f(x \pm i\gamma)(x \pm i\gamma)^{x/p}\|_p \leq \\ &\leq \|e^{-i\pi x} f(x) x^{x/p}\|_p = \|f\|_{p, x}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу равенства (2.19), приходим к неравенству (2.14) леммы.

Отметим, что метод доказательства этой леммы восходит к Б. Я. Левину, рассмотревшему в примерно тех же условиях функцию $f(z)$, но аналитическую лишь в полуплоскости G^+ .

2.2. В этом пункте мы приведем еще две важные леммы.

(а) Лемма 2.2. 1°. Для любой функции $f(z) \in W_{\sigma}^{p, x}[\gamma]$ справедлива оценка

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^{-x/p} e^{\gamma |\operatorname{Im} z|} \|f\|_{p, x, \gamma}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.20)$$

2°. Класс $W_{\sigma}^{p, x}[\gamma]$ с нормой $\|f\|_{p, x, \gamma}$ является банаховым пространством.

Доказательство. 1°. Введем в рассмотрение полуплоскости

$$G_{\gamma}^{\pm} = \{z: \pm \operatorname{Im} z \geq 2(1 + \gamma)\}$$

и заметим, что имеют место включения

$$G_{\gamma+1/2}^{\pm} \subset G_{\gamma}^{\pm} \subset C_{\gamma} = \{z: |z| \geq 2(1 + \gamma)\}$$

и

$$K_z = \{\zeta: |\zeta - z| < 1\} \subset G_{\gamma}^{\pm}, \quad \text{при } z \in G_{\gamma+1/2}^{\pm}.$$

Тогда легко убедиться в справедливости неравенств

$$|\zeta \pm i\gamma| \leq \frac{3}{2}|z| \text{ и } |\zeta \pm i\gamma| \geq \frac{|z|}{2}, \quad \text{при } z \in C_{\gamma} \text{ и } \zeta \in K_z, \quad (2.21)$$

и, тем более, при $z \in G_{\gamma}^{\pm}$ и $\zeta \in K_z$.

Теперь отметим, что поскольку $|f(z)|^p$ — субгармоническая функция на всей z -плоскости, то для любого $\rho \in (0, +\infty)$ справедливо неравенство

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + \rho e^{i\theta})|^p d\theta, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Умножив его на $\rho d\rho$ и проинтегрировав по отрезку $[0, 1]$, мы получим

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{\pi} \int \int_{|\zeta - z| < 1} |f(\zeta)|^p d\zeta, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.22)$$

Заметим, далее, что в силу (2.21)

$$|\zeta \pm i\gamma| \geq \pi C(x) |z|^x; \quad z \in C_{\gamma}, \quad |\zeta - z| < 1,$$

где $C(x) > 0$ — постоянная, мы, в силу (2.22), можем записать два неравенства

$$|f(z)|^p \leq C(x) |z|^{-x} \int_{|z-\zeta|<1} |f(\zeta)|^p |\zeta \pm i\gamma|^x d\zeta, \quad z \in G_\gamma, \quad (2.23)$$

которые, разумеется, имеют место также при $z \in G_{\gamma+1/2}^+ \subset G_\gamma^+$.

Теперь отметим, что вообще для $z = x + iy \in \mathbb{C}$ будем иметь

$$\begin{aligned} I^\pm(z) &\equiv \int_{|z-\zeta|<1} |f(\zeta)|^p |\zeta \pm i\gamma|^x d\zeta \leq \\ &\leq \int_{y-1}^{y+1} d\eta \int_{x-1}^{x+1} |f(\xi + i\eta)|^p |\xi + i\eta \pm i\gamma|^x d\xi \leq \int_{y-1}^{y+1} \Omega^\pm(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где

$$\Omega^\pm(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi + i\eta)|^p |\xi + i\eta \pm i\gamma|^x d\xi. \quad (2.25)$$

Для содержательности нашей оценки (2.24), разумеется, сначала нужно убедиться в том, что интегралы $\Omega^\pm(\eta)$ конечны при $-\infty < \eta < +\infty$. Но с этой целью, а также для завершения доказательства леммы, нам сначала нужно оценить эти интегралы, когда, соответственно, $\eta \in [0, +\infty)$ и $\eta \in (-\infty, 0]$.

Поскольку, согласно утверждению 1° леммы 2.1, соответственно

$$\varphi^\pm(z) = e^{\pm i\alpha z} (z \pm i\gamma)^{x/p} f(z) \in H_p^\pm,$$

то, пользуясь отмеченным в (а) 4° неравенством (2.7) для функций класса $H_p^\pm$, мы будем иметь:

Если $\eta \geq 0$, то

$$e^{-\alpha p \eta} \Omega^+(\eta) = \|\varphi^+(\xi + i\eta)\|_p^p \leq \|\varphi^+(\xi)\|_p^p = \|f\|_{p, x, \gamma}^p, \quad (2.26')$$

если же $\eta \leq 0$, то

$$e^{\alpha p \eta} \Omega^-(\eta) = \|\varphi^-(\xi + i\eta)\|_p^p \leq \|\varphi^-(\xi)\|_p^p = \|f\|_{p, x, \gamma}^p. \quad (2.26'')$$

Но при $z \in G_{\gamma+1/2}^+$, $y-1 > 2(1+\gamma) > 0$, а при $z \in G_{\gamma+1/2}^-$, $y+1 \leq -2(1+\gamma) < 0$. Поэтому из (2.24) — (2.25) в силу последних оценок получим

$$I^\pm(z) \leq 2 \exp[\alpha p(1+|y|)] \|f\|_{p, x, \gamma}^p, \quad z \in G_{\gamma+1/2}^\pm, \quad (2.27)$$

откуда, в силу (2.23), приходим к неравенству

$$|f(z)| \leq C(x, p) (1+|z|)^{-x/p} e^{\alpha |y|} \|f\|_{p, x, \gamma}, \quad z = x + iy \in G_{\gamma+1/2}^\pm, \quad (2.28)$$

где $C(x, p) > 0$ — другая постоянная, не зависящая от f .

Установим теперь, что интегралы $\Omega^\pm(\eta)$ существуют и конечны для всех $\eta \in (-\infty, +\infty)$. С этой целью отметим сперва, что при любом $R > 0$, если $|\eta| \leq R$, то

$$\sup_{|z|>1} \left\{ \left| \frac{\xi + i\eta - i\gamma}{\xi + i\gamma + i\gamma} \right|^x \right\} = D < +\infty, \quad (2.29)$$

где $D = D(\gamma, x, R) > 0$ — некоторая постоянная.

Далее, интеграл $\Omega^-(\eta)$, конечность и оценка которого при $\eta \leq 0$ даны нами в неравенстве (2.26''), представим в виде суммы

$$\begin{aligned} \Omega^-(\eta) &= \Omega_1^-(\eta) + \Omega_2^-(\eta) = \int_{-1}^1 |f(\xi + i\eta)|^p |\xi + i\eta - i\gamma|^x d\xi = \\ &= \int_{|z|>1} |f(\xi + i\eta)|^p |\xi + i\eta - i\gamma|^x d\xi. \end{aligned}$$

Но, ввиду непрерывности $f(\xi + i\eta)$, конечность интеграла $\Omega_1^-(\eta)$ очевидна не только для $\eta \leq 0$, но и для всех $\eta > 0$, при $-1 < x < +\infty$ и $0 < \gamma < +\infty$.

С другой стороны, в силу (2.29)

$$\Omega_2^-(\eta) \leq D \Omega^+(\eta) < +\infty, \quad 0 \leq \eta \leq R.$$

Следовательно, ввиду произвольности R , интеграл $\Omega^-(\eta)$ конечен для всех $\eta \in (-\infty, +\infty)$.

Вполне аналогично, пользуясь оценкой (2.26'), вновь в силу (2.29), заключаем, что интеграл $\Omega^+(\eta)$ конечен для всех $\eta \in (-\infty, +\infty)$.

Введем теперь в рассмотрение следующие области:

Горизонтальную полосу

$$\Pi_\gamma = \{z: |\operatorname{Im} z| \leq 3 + 2\gamma\},$$

полуполосы той же ширины $2(3 + 2\gamma)$

$$\Pi_\gamma^\pm = \{z: |\operatorname{Im} z| \leq 3 + 2\gamma, \pm \operatorname{Re} z \geq 2(1 + \gamma)\} \subset \mathbb{C}_\gamma$$

и еще прямоугольник

$$\Delta_\gamma = \{z: |\operatorname{Re} z| \leq 2(1 + \gamma), |\operatorname{Im} z| \leq 3 + 2\gamma\},$$

заметив при этом, что

$$\Pi_\gamma = \Pi_\gamma^+ \cup \Pi_\gamma^- \cup \Delta_\gamma.$$

Сначала убедимся в конечности величины

$$\sup_{z \in \Pi_\gamma} \{(1 + |z|)^{x/p} |f(z)|\} < +\infty. \quad (2.30)$$

В самом деле, во-первых, очевидно, что

$$\sup_{z \in \Delta_\gamma} \{(1 + |z|)^{x/p} |f(z)|\} < +\infty.$$

Во-вторых, ввиду оценок (2.23) и (2.24) — (2.25), конечности функций $\Omega^\pm(\eta)$ в любом отрезке $-R \leq \eta \leq R$ и включения $\Pi_\gamma^\pm \subset \mathbb{C}_\gamma$, получим

$$\sup_{z \in \Pi_\gamma^\pm} \{(1 + |z|)^{x/p} |f(z)|\} < +\infty.$$

Итак, (2.31) справедливо.

Далее, из оценок (2.28), в частности, следует, что на границах полуплоскостей $G_{\gamma+1/2}^{\pm}$, т. е. на границе $\partial\Pi_{\gamma}$ полосы Π_{γ}

$$\sup_{z \in \partial\Pi_{\gamma}} |(1+|z|)^{x/p} f(z)| \leq C_1 \|f\|_{p, x, \gamma}. \quad (2.31)$$

Понимая под $|z + i2(2+2\gamma)|^{-x/p}$ главную ее ветвь в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $(-i\infty, -i2(2+2\gamma)) \subset G_{\gamma+1/2}^{-}$, введем в рассмотрение функцию

$$f_{\gamma}(z) = |z + i2(2+2\gamma)|^{-x/p} f(z),$$

и заметим, что

$$|z + i2(2+2\gamma)| \asymp 1 + |z|, \quad z \in \Pi_{\gamma}, \quad (2.32)$$

где соответствующие постоянные зависят только от γ .

Следовательно, в силу неравенств (2.30) и (2.31), функция $f_{\gamma}(z)$ ограничена в полосе Π_{γ} и на её границе $\partial\Pi_{\gamma}$ имеет место оценка вида

$$\sup_{z \in \partial\Pi_{\gamma}} \|f_{\gamma}(z)\| \leq C_2 \|f\|_{p, x, \gamma}.$$

Отсюда, на основании принципа Фрагмена—Линделёфа, заключаем, что

$$|f_{\gamma}(z)| \leq C_2 \|f\|_{p, x, \gamma}, \quad z \in \Pi_{\gamma}.$$

Переходя опять к функции $f(z)$, с учетом оценок (2.32), из последнего неравенства получим

$$|f(z)| \leq C_2 (1+|z|)^{x/p} \|f\|_{p, x, \gamma}, \quad z \in \Pi_{\gamma}.$$

Наконец, отсюда и из (2.28) легко приходим к оценке (2.20) леммы.

2°. Из доказанного нами неравенства (2.20) следует полнота каждого из пространств $W_{\sigma}^{p, x}[\gamma]$.

(б) В приводимой ниже заключительной лемме мы покажем, что пространства $W_{\sigma}^{p, x}$ и $W_{\sigma}^{p, x}[\gamma]$ ($0 < \gamma < +\infty$) совпадают, а соответствующие нормы эквивалентны.

Лемма 2.3. Для любой функции $f(z) \in W_{\sigma}^{p, x}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < x < +\infty$) и при любом $\gamma \in [0, +\infty)$ будем иметь:

$$1^{\circ}. \quad \|f\|_{p, x, \gamma} \asymp \|f\|_{p, x}, \quad (2.33)$$

$$2^{\circ}. \quad \|f(x \pm i\gamma)\|_{p, x} \asymp \|f\|_{p, x}. \quad (2.34)$$

Доказательство. 1°. Заметив, что для любого $\gamma \in (0, +\infty)$ $f \in W_{\sigma}^{p, x}[0] \Leftrightarrow f \in W_{\sigma}^{p, x}[\gamma]$, на $W_{\sigma}^{p, x}[0]$ определим линейный оператор T_{γ} , положив

$$\forall f \in W_{\sigma}^{p, x}[0], \quad T_{\gamma} f = f \in W_{\sigma}^{p, x}[\gamma].$$

Тогда очевидно, что на $W_{\sigma}^{p, x}[\gamma]$ существует также обратный линейный оператор T_{γ}^{-1} , такой, что

$$\forall f \in W_{\sigma}^{p, x}[\gamma], \quad T_{\gamma}^{-1} f = f \in W_{\sigma}^{p, x}[0].$$

Разберем отдельно два случая:

1) Если $x \geq 0$, то $|x|^x \leq |x + i\gamma|^x$ и, очевидно,

$$\|f\|_{p, x} \leq \|f\|_{p, x, \gamma} = \|T_{\gamma} f\|_{p, x, \gamma}, \quad \forall f \in W_{\sigma}^{p, x}[0], \quad (2.35)$$

откуда следует, что

$$\|T_{\gamma}^{-1}f\|_{p, z} \leq \|f\|_{p, z, \gamma}, \quad \forall f \in W_{\sigma}^{p, z}[\gamma].$$

Итак, оператор T_{γ}^{-1} ограничен и, по теореме Банаха, ограничен также оператор T_{γ} , т. е.

$$\|T_{\gamma}f\|_{p, z, \gamma} = \|f\|_{p, z, \gamma} \leq A\|f\|_{p, z}, \quad \forall f \in W_{\sigma}^{p, z}[0], \quad (2.35')$$

где $A > 0$ — постоянная, не зависящая от f .

Из (2.35) и (2.35') следует (2.33) для рассматриваемого случая $z \geq 0$.

2) Если $-1 < z < 0$, то $|x + i\gamma|^z \leq |x|^z$, и поэтому

$$\|T_{\gamma}f\|_{p, z, \gamma} = \|f\|_{p, z, \gamma} \leq \|f\|_{p, z}, \quad \forall f \in W_{\sigma}^{p, z}[0], \quad (2.36)$$

т. е. оператор T_{γ} ограничен. Поэтому обратный оператор T_{γ}^{-1} также ограничен и, следовательно,

$$\|T_{\gamma}^{-1}f\|_{p, z} = \|f\|_{p, z} \leq A^*\|f\|_{p, z, \gamma}, \quad \forall f \in W_{\sigma}^{p, z}[\gamma], \quad (2.36')$$

где $A^* > 0$ — постоянная, не зависящая от f .

Из (2.36) и (2.36') вновь вытекает утверждение (2.33) уже в случае $-1 < z < 0$.

2°. Если в (2.33) заменить функцию $f(x)$ на $f(x \pm i\gamma)$, то, пользуясь оценкой (2.14) леммы 2.1 (2), мы приходим к неравенству

$$\|f(x \pm i\gamma)\|_{p, z} \leq C_1\|f(x \pm i\gamma)\|_{p, z, \gamma} \leq C_1 e^{\sigma\gamma} \|f\|_{p, z}. \quad (2.37)$$

Положив, далее, $\varphi(z) = f(z \pm i\gamma)$, откуда получим

$$\|f\|_{p, z} = \|\varphi(x \mp i\gamma)\|_{p, z} \leq C_1 e^{\sigma\gamma} \|\varphi\|_{p, z}$$

или, что то же самое,

$$\|f\|_{p, z} \leq C_1 e^{\sigma\gamma} \|f(x \pm i\gamma)\|_{p, z}. \quad (2.37')$$

Наконец, из (2.37) и (2.37') следует утверждение (2.34) леммы.

§ 3. Интерполяционные разложения в весовых классах целых функций экспоненциального типа

3.1. Введем в рассмотрение последовательность вещественных чисел $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, ради краткости положив

$$x_k = x_{\nu, k}(\sigma) \equiv \sigma^{-1} x_{\nu, k}, \quad -\infty < k < +\infty,$$

где $\{x_{\nu, k}\}_{-\infty}^{+\infty}$ — суть нули функции $S_{\nu}(z)$ ($0 \leq \nu < 2$).

Тогда, согласно результатам пункта 1.1 (6), числа $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — суть простые вещественные нули целой функции $S_{\nu}(\sigma z)$ ($0 \leq \nu < 2$) экспоненциального типа σ , причем природа их распределения следует из приведенных там же утверждений.

А именно, мы будем иметь

$$x_0 = 0, \quad x_{-k} = -x_k \quad (1 \leq k < +\infty),$$

и, далее,

1) При $0 < \nu < 1$

$$x_k \in \left(\frac{\pi}{\sigma} k - \frac{\pi}{2\sigma}, \frac{\pi}{\sigma} k + \frac{\pi}{2\sigma} \right) \quad (-\infty < k < +\infty),$$

а при $\nu = 0$

$$x_0 = 0, \quad x_k = \frac{\pi}{\sigma} k - \frac{\pi}{2\sigma} \operatorname{sign} k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots);$$

2) При $1 < \nu < 2$

$$x_0 = 0, \quad x_k \in \begin{cases} \left(\frac{\pi}{\sigma} k, \frac{\pi}{\sigma} (k+1) \right) & (k = 1, 2, \dots), \\ \left(\frac{\pi}{\sigma} (k-1), \frac{\pi}{\sigma} k \right) & (k = -1, -2, \dots), \end{cases}$$

а при $\nu = 1$

$$x_k = \frac{\pi}{\sigma} k \quad (-\infty < k < +\infty).$$

Для установления основных результатов данного параграфа нам необходимы несколько лемм.

(а) Первая из этих лемм следующая.

Лемма 3.1. Если $f(z) \in W_{\sigma}^{p, \nu}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \nu < +\infty$), то для любого $h \in (-\infty, +\infty)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x_k + ih)|^p (1 + |k|)^2 \leq C \|f\|_{p, \nu}^p, \quad (3.1)$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от f , и по (2.1)

$$\|f\|_{p, \nu} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^\nu dx \right)^{1/p}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Рассмотрим функции $f(\pm z + ih) z^{1/p}$, которые аналитичны в плоскости z с разрезом $(-\infty, 0)$. Поскольку функции $|f(\pm z + ih)|^p |z|^\nu$ субгармонические в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, то имеют место неравенства

$$|f(\pm x_k + ih)|^p |x_k|^\nu \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta \mp x_k| = \rho} |f(\zeta + ih)|^p |\zeta|^\nu |d\zeta| \quad (k = 1, 2, \dots)$$

для любого $\rho \in (0, r_1)$, где $r_1 = \inf_{-\infty < k < +\infty} (x_k - x_{k-1}) > 0$, в силу лемм 1.1 и 1.5.

Если умножить эти неравенства на $\rho d\rho$ и проинтегрировать по промежутку $(0, \delta)$, где $\delta < r_1/2$, то мы приходим к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} |f(\pm x_k + ih)|^p |x_k|^\nu &\leq \frac{\delta^{-2}}{\pi} \int \int_{|\zeta \mp x_k| < \delta} |f(\zeta + ih)|^p |\zeta|^\nu d\zeta \\ &\leq \frac{\delta^{-2}}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} d\eta \int_{x_k - \delta}^{x_k + \delta} |f(\xi + i(\eta + h))|^p |\xi + i\eta|^\nu d\xi \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Заметив, что $-x_k = x_{-k}$, из этих неравенств заключаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{|k| \geq 1} |f(x_k + ih)|^p |x_k|^2 \leq \\ & \leq \frac{2\delta^{-2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi + i(\eta + h))|^p |\xi + i\eta|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Однако, если воспользоваться утверждениями 1° и 2° леммы 2.3, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi + i(\eta + h))|^p (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} d\xi = \|f(\xi + i(\eta + h))\|_{p, \eta, \eta}^p \leq \\ & \leq C_1 \|f(\xi + i(\eta + h))\|_{p, \eta}^p \leq C_2 \|f\|_{p, \eta}^p, \end{aligned}$$

где здесь и дальше $C_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots$) — постоянные, не зависящие от f .

Поэтому из (3.3) мы получим

$$\sum_{|k| \geq 1} |f(x_k + ih)|^p |x_k|^2 \leq C_3 \|f\|_{p, \eta}^p. \quad (3.4)$$

Нам остается, во-первых, заметить, что, в силу неравенства (2.20) и утверждения 1° леммы 2.3,

$$|f(x_0 + ih)|^p = |f(ih)|^p \leq C_4 \|f\|_{p, \eta}^p. \quad (3.4')$$

Во-вторых, что, ввиду отмеченной нами в начале параграфа природы распределения чисел последовательности $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$,

$$|x_k|^2 \asymp (1 + |k|)^2 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3.5)$$

Тогда из (3.4) и (3.4') будет следовать неравенство (3.1) леммы.

Лемма 3.2. Если $\Psi^\pm \in H_{\eta}^p$, то соответственно будем иметь

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\Psi^\pm(x_k \pm i)|^p \leq C_* \|\Psi^\pm\|_p^p, \quad (3.6)$$

где постоянная $C_* > 0$ от функции $\Psi^\pm$ не зависит.

Доказательство. Сначала заметим, что в силу леммы 1.5 и из самого определения последовательности $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$:

$$x_k \equiv \sigma^{-1} x_{\sigma k}, \quad -\infty < k < +\infty,$$

вытекает существование числа δ ($0 < \delta < 1$), не зависящего от индекса k ($-\infty < k < +\infty$) и такого, что

$$|(x_k \pm i) - (x_{k-1} \pm i)| = |x_k - x_{k-1}| \geq 2\delta \quad (-\infty < k < +\infty). \quad (3.7)$$

Ввиду субгармоничности функций $|\Psi^\pm(z)|^p$, для любого ρ ($0 < \rho \leq \delta$) справедливо неравенство

$$|\Psi^\pm(x_k \pm i)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Psi^\pm(x_k \pm i + \rho e^{i\theta})|^p d\theta,$$

умножив которое на $\rho d\rho$ и проинтегрировав вдоль интервала $(0, \delta)$, получим оценки

$$|\Psi^\pm(x_k \pm i)|^p \leq \frac{\delta^{-2}}{\pi} \int_0^\delta \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi^\pm(x_k \pm i + \rho e^{i\theta})|^p \rho d\rho d\theta \quad (3.8)$$

$$(-\infty < k < +\infty).$$

Но в силу условия (3.7) кружки $|z - (x_k + i)| \leq \delta$ и $|z - (x_k - i)| \leq \delta$ соответственно лежат в полосах $0 < \operatorname{Im} z < 1 + \delta$ и $-(1 + \delta) < \operatorname{Im} z < 0$ и попарно не пересекаются. Поэтому, из неравенств (3.8) и, в силу известного и отмеченного в § 2 свойства 4' функций классов H_-^p , мы приходим к неравенству леммы

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\Psi^\pm(x_k \pm i)|^p \leq \frac{\delta^{-2}}{\pi} \int_0^{1+\delta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi^\pm(x \pm iy)|^p dx \leq \frac{2\delta^{-2}}{\pi} \|\Psi^\pm\|_p^p.$$

(6) Прежде, чем приводить необходимую нам третью лемму, введем одно определение.

Пусть $l^{p, \kappa}$ — банахово пространство последовательностей $\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|\{a_k\}\|_{p, \kappa} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p (1 + |k|)^\kappa \right)^{1/p}, \quad (3.9)$$

в предположении, что параметры p и κ лежат в границах

$$1 < p < +\infty, \quad -1 < \kappa < p - 1. \quad (3.10)$$

Как уже было отмечено в начале параграфа будем полагать, что $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} = \{\sigma^{-1} x_{\nu, k}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ — суть нули функции $S_\nu(z)$ ($0 \leq \nu < 2$), которые все вещественные и простые.

Лемма 3.3. Пусть последовательность

$$\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in l^{p, \kappa} \quad (1 < p < \infty, \quad -1 < \kappa < p - 1)$$

произвольна, а параметр ν в определении функции $S_\nu(z)$ лежит интервале

$$\nu \in \left(\frac{1 + \kappa}{p}, 1 + \frac{1 + \kappa}{p} \right) \subset [0, 2). \quad (3.11)$$

Тогда ряд

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \frac{S_\nu(z)}{S_\nu(\sigma x_k)(z - x_k)} \quad (3.12)$$

равномерно сходится в любом круге $|z| \leq R < +\infty$ и его сумма $f(z)$ является целой функцией, удовлетворяющей интерполяционным условиям

$$f(x_k) = a_k \quad (-\infty < k < +\infty). \quad (3.13)$$

Доказательство. Ввиду природы распределения последовательности чисел $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ — нулей функции $S_\nu(z)$, отмеченной нами в

начале данного параграфа, для любого $R > 0$ существуют постоянная $C_\sigma > 0$ и целое число $N = N(R) \geq 1$, такие, что при $|z| \leq R$

$$|z - x_k| \geq C_\sigma (1 + |k|), \text{ если } |k| \geq N.$$

Тогда, если $m > n > N$ или $n < m \leq -N$, то при $|z| \leq R$

$$\begin{aligned} J_{n,m}(z) &\equiv \left| \sum_{k=n}^m a_k \frac{S_\sigma(z)}{S'_\sigma(\sigma x_k)(z - x_k)} \right| \leq \\ &\leq M_\sigma(R) \sum_{k=n}^m \frac{|a_k|}{|S'_\sigma(\sigma x_k)|} (1 + |k|)^{-1}, \end{aligned}$$

где $M_\sigma(R) = C_\sigma^{-1} \max_{|z|=R} |S_\sigma(z)|$.

Но согласно лемме 1.6 и в силу двойного неравенства (3.5)

$$|S'_\sigma(\sigma x_k)| = |S'_\sigma(x_{\nu,k})| \asymp (1 + |k|)^{1-\nu}, \quad |k| \geq 1, \quad (3.14)$$

и поэтому

$$J_{n,m}(z) \leq M_\sigma^*(R) \sum_{k=n}^m \frac{|a_k|}{(1 + |k|)^{2-\nu}}, \quad |k| \geq 1,$$

где $M_\sigma^*(R) > 0$ — другая, подходящим образом выбранная постоянная. Отсюда, пользуясь неравенством Гёльдера и обозначением (3.9), мы получим, что при $|z| \leq R$ и $m > n > N$ или $n < m \leq -N$,

$$J_{n,m}(z) \leq M_\sigma^*(R) \|\{a_k\}_{p,z}\| \left\{ \sum_{k=n}^m (1 + |k|)^{-q \left(2-\nu + \frac{\nu}{p}\right)} \right\}^{1/q},$$

где $q = \frac{p}{p-1}$.

Наконец, поскольку, в силу условия (3.11), $1 < q \left(2 - \nu + \frac{\nu}{p}\right) < 1 + q$, то из последнего неравенства мы легко заключаем, что все утверждения леммы справедливы.

3.2 (а) Дальше мы будем опираться на два известных предложения, но прежде чем их сформулировать, приведем одно определение.

Обозначим через $H_\pm^p$ ($0 < p < +\infty$) класс функций $f^\pm(z)$, аналитических в полуплоскостях $G^\pm$ соответственно и удовлетворяющих условию

$$\|f^\pm\|_p = \sup_{0 < \theta < \pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |f^\pm(re^{\pm i\theta})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (3.15)$$

При $p = 2$ эти классы впервые были введены в работе автора и А. Е. Аветисяна [18] (см. также [1], гл. VII) и там же был установлен важный факт о совпадении классов $H_\pm^2 \equiv \dot{H}_\pm^2$. В общем случае $0 < p < +\infty$ С. А. Акопяном [19] были установлены включения $H_\pm^p \subset \dot{H}_\pm^p$ и оценка $\|f^\pm\|_p \leq \|f^\pm\|_p$, $f^\pm \in H_\pm^p$, а А. М. Седлецкий [20] доказал обрат.

ное включение $H_-^p \subset H_+^p$ и оценку $\|f^{\pm}\|_p \leq 2^{1/p} \|f^{\pm}\|_p^*$. Таким образом, справедлива

Теорема Б. Если $0 < p < +\infty$, то справедливы следующие утверждения;

$$1^{\circ}. \quad H_{\pm}^p \equiv H_{\pm}^p;$$

$$2^{\circ}. \quad 2^{-1/p} \|f^{\pm}\|_p \leq \|f^{\pm}\|_p^* \leq \|f^{\pm}\|_p, \quad \forall f^{\pm} \in H_{\pm}^p. \quad (3.16)$$

Следующее предложение — это теорема о проектировании, доказательство которой содержится в лемме 1 работы В. М. Мартиросьяна [21] (см. также [22], лемму 2.1 и теорему 2.1).

Теорема В. Пусть $f(x)$ — измеримая на $(-\infty, +\infty)$ функция с конечной нормой

$$\|f\|_{p, \kappa} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^{\kappa} dx \right)^{1/p} < +\infty \quad (1 < p < +\infty, -1 < \kappa < p-1). \quad (3.17)$$

Тогда интегралы типа Коши

$$F^{\pm}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^{\pm}, \quad (3.18)$$

аналитичны в полуплоскостях $G^{\pm}$ соответственно, причем

$$\sup_{0 < \theta < \pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |f^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p r^{\kappa} dr \right\}^{1/p} \leq C_{p, \kappa} \|f\|_{p, \kappa}. \quad (3.19)$$

Следующее предложение, доказательство которого мы приводим, является отнюдь не простым следствием теорем Б и В.

Теорема Г. Пусть $\varphi(x)$ — измеримая на $(-\infty, +\infty)$ функция с конечной нормой.

$$\|\varphi\|_{p, \kappa} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^p |x + i|^{\kappa} dx \right)^{1/p} < +\infty \quad (3.20)$$

и

$$\Phi^{\pm}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^{\pm}. \quad (3.21)$$

Тогда:

1°. Если, как и в § 2, рассматривать функции $(z \pm i)^{\kappa/p}$, $z \in G^{\pm}$, в плоскости z с разрезами $(-i\infty, -i) \subset G^-$ и $(+i, +i\infty) \subset G^+$ соответственно, то

$$(z \pm i)^{\kappa/p} \Phi^{\pm}(z) \in H_{\pm}^p; \quad (3.22)$$

2° справедливы оценки

$$\|(x+i)^{\kappa/p} \Phi^{\pm}(x)\|_p \leq C_{\kappa, p}^* \|\varphi\|_{p, \kappa, 1}. \quad (3.23)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение интегралы типа Коши

$$\Psi_j^\pm(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad \Psi_2^\pm = \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^+, \quad (3.24)$$

и докажем, что для них справедливы оценки вида

$$\sup_{0 < \vartheta < \pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |\Psi_j^\pm(re^{\pm i\vartheta})|^p |re^{\pm i\vartheta} \pm i|^x dr \right\} \leq C_j \|\varphi\|_{p, x, 1}^p \quad (j = 1, 2), \quad (3.25)$$

где, как здесь, так и дальше, $C_j > 0$ ($j \geq 1$) — постоянные, зависящие лишь от параметров p и x .

Займемся сначала функцией $\Psi_1^\pm(z)$. Ввиду неравенства Гёльдера и очевидной оценки $1 \leq |t \pm i| \leq 2$ ($0 \leq t \leq 1$) мы будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\varphi(t)| dt &\leq \left\{ \int_0^1 |\varphi(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq C_3 \left\{ \int_0^1 |\varphi(t)|^p |t \pm i|^x dt \right\}^{1/p} \leq C_3 \|\varphi\|_{p, x, 1}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Отсюда, в силу теоремы В (при $x = 0$) и очевидного неравенства

$$1 \leq |re^{\pm i\vartheta} \pm i| \leq 3; \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi,$$

приходим к оценкам

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \vartheta < \pi} \left\{ \int_0^2 |\Psi_1^\pm(re^{\pm i\vartheta})|^p |re^{\pm i\vartheta} \pm i|^x dr \right\} &\leq \\ &\leq C_4 \sup_{0 < \vartheta < \pi} \left\{ \int_0^2 |\Psi_1^\pm(re^{\pm i\vartheta})|^p dr \right\} \leq \\ &\leq C_4 \int_0^1 |\varphi(t)|^p dt \leq C_5 \|\varphi\|_{p, x, 1}^p. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Перейдем к оценке интеграла

$$\begin{aligned} U(\pm \vartheta) &= \left(\int_2^{+\infty} |\Psi_1^\pm(re^{\pm i\vartheta})|^p |re^{\pm i\vartheta} \pm i|^x dr \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left\{ \int_2^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{|\varphi(t)| |re^{\pm i\vartheta} \pm i|^{x/p}}{|t - re^{\pm i\vartheta}|} dt \right)^p dr \right\}^{1/p}, \quad 0 < \vartheta < \pi. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Если воспользоваться теперь известным неравенством (см. [23], стр. 318)

$$\left\{ \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} |F(x, y)|^p dy \right)^{1/p} dx \right\} \leq \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} |F(x, y)|^p dy \right)^{1/p} dx,$$

а также простой оценкой

$$|t - re^{\pm i\theta}| \geq \frac{1}{2} r; \quad r > 2, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

то получим

$$\begin{aligned} U(\pm \theta) &\leq \int_0^1 \left(\int_2^{+\infty} \frac{|\varphi(t)|^p |re^{\pm i\theta} \pm i|^x}{|t - re^{\pm i\theta}|^p} dr \right)^{1/p} dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^1 |\varphi(t)| dt \left(\int_2^{+\infty} \frac{|re^{\pm i\theta} \pm i|^x}{r^p} dr \right)^{1/p}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (3.28')$$

Наконец, в силу крайних из неравенств (3.26), простой оценки

$$r \leq |re^{\pm i\theta} \pm i| \leq 3r; \quad r \geq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (3.29)$$

и того, что, ввиду условия $x < p - 1$,

$$\int_2^{+\infty} r^{x-p} dr < +\infty,$$

из (3.28') заключаем, что

$$\sup_{0 < \theta < \pi} \left\{ \int_2^{+\infty} |\Psi_1^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p |re^{\pm i\theta} \pm i|^x dr \right\} \leq C_6 \|\varphi\|_{p, x, 1}^p. \quad (3.30)$$

Из неравенств (3.27) и (3.30) следует наше неравенство (3.25) для $j=1$.

Перейдем к доказательству неравенства (3.25) для $j=2$.

Из самого определения (3.24) функции $\Psi_2^{\pm}(z)$, применив неравенство Гёльдера, получим при $|z| \leq 1/2$

$$|\Psi_2^{\pm}(z)| \leq \left\{ \int_1^{+\infty} |\varphi(t)|^p |t \pm i|^x dt \right\}^{1/p} \left\{ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t - z|^q |t \pm i|^{xq/p}} \right\}^{1/q}.$$

Но при $|z| \leq 1/2$ и $1 \leq t < +\infty$, из очевидных неравенств

$$|t - z| \geq t - \frac{1}{2} \geq \frac{t}{2}, \quad 2t \geq |t \pm i| \geq t,$$

следуют конечность интеграла

$$\left\{ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t - z|^q |t \pm i|^{xq/p}} \right\}^{1/q} \leq \left\{ C_7 \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{q(1+x/p)}} \right\}^{1/q} = C_8 < +\infty$$

и оценка для нашей функции

$$\sup_{|z| < 1/2} |\Psi_2^{\pm}(z)| \leq C_8 \|\varphi\|_{p, x, 1}.$$

Отсюда и из очевидных оценок

$$\frac{1}{2} \leq |re^{\pm i\theta} \pm i| \leq \frac{3}{2}; \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

получим

$$\int_0^{1/2} |\Psi_{\pm}^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p |re^{\pm i\theta} \pm i|^2 dr \leq C_9 \|\varphi\|_{p, \pi, 1}^p, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (3.31)$$

Теперь заметим, что, в силу неравенств (3.29),

$$\int_1^{+\infty} |\varphi(x)|^p x^2 dx \leq C_{10} \|\varphi\|_{p, \pi, 1}^p,$$

и поэтому, по теореме В, в частности, справедливо неравенство

$$\sup_{0 < \theta < \pi} \left\{ \int_{1/2}^{+\infty} |\Psi_{\pm}^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p r^2 dr \right\} \leq C_{11} \|\varphi\|_{p, \pi, 1}^p.$$

Наконец, вновь пользуясь оценками (3.29), приходим к неравенству

$$\sup_{0 < \theta < \pi} \left\{ \int_{1/2}^{+\infty} |\Psi_{\pm}^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p |re^{\pm i\theta} \pm i|^2 dr \right\} \leq C_{12} \|\varphi\|_{p, \pi, 1}^p. \quad (3.32)$$

Из (3.31) и (3.32) следует нужное нам неравенство (3.25) для $j=2$.

Поскольку оба неравенства (3.25) доказаны, то, определив функцию

$$\Psi_{\pm}^{\pm}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \Psi_1^{\pm}(z) + \Psi_2^{\pm}(z), \quad z \in G^{\pm},$$

мы легко приходим к оценке

$$\sup_{0 < \theta < \pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |\Psi_{\pm}^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p |re^{\pm i\theta} \pm i|^2 dr \right\}^{1/p} \leq C_{13} \|\varphi\|_{p, \pi, 1}. \quad (3.33)$$

Но функцию $\Phi^{\pm}(z)$ теоремы мы можем представить в виде суммы

$$\Phi^{\pm}(z) = \Psi_{\pm}^{\pm}(z) + \Psi_{\mp}^{\pm}(z), \quad z \in G^{\pm}, \quad (3.34)$$

где

$$\Psi_{\pm}^{\pm}(z) = \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^{\pm}.$$

С другой стороны, простой заменой переменных t и z интеграл $\Psi_{\pm}^{\pm}(z)$ может быть сведен к интегралу вида $\Psi_{\pm}^{\pm}(z)$. Поэтому оценка (3.33) остается в силе и для функции $\Psi_{\pm}^{\pm}(z)$:

$$\sup_{0 < \theta < \pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |\Psi_{\pm}^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p |re^{\pm i\theta} \pm i|^2 dr \right\}^{1/p} \leq C_{14} \|\varphi\|_{p, \pi, 1}. \quad (3.35)$$

Наконец, из (3.33), (3.35) и (3.34) вытекает оценка

$$\sup_{0 < \theta < \pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |\Phi^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p |re^{\pm i\theta} \pm i|^z dr \right\}^{1/p} \leq C_{15} \|f\|_{p, z, 1},$$

и, значит, соответственно $(z \pm i)^{z/p} \Phi^{\pm}(z) \in \dot{H}_z^p$, откуда на основании теоремы Б следует утверждение теоремы.

(6) Перейдем к доказательству основных результатов §§ 2 и 3.

Теорема 3.1. Пусть $\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in l^{p, z}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < z < p-1$), а параметр γ удовлетворяет условию

$$\frac{1+z}{p} < \gamma < 1 + \frac{1+z}{p}. \quad (3.11')$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Ряд

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \frac{S_{\gamma}(\sigma z)}{S_{\gamma}(\sigma x_k)(z - x_k)} \quad (3.36)$$

равномерно сходится в любом круге $|z| \leq R < +\infty$, согласно лемме 3.3, и сходится также в метрике $W_{\sigma}^{p, z}$ к целой функции $f(z) \in W_{\sigma}^{p, z}$.

2°. Функция $f(z)$ удовлетворяет интерполяционным условиям

$$f(x_k) = a_k \quad (-\infty < k < +\infty), \quad (3.37)$$

и для ее нормы имеет место оценка

$$\|f\|_{p, z} \leq C \|a_k\|_{p, z}, \quad (3.38)$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от последовательности $\{a_k\}$.

Доказательство. Для произвольных значений целых чисел $-\infty < n < m < +\infty$ введем в рассмотрение функции

$$f_{n, m}(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=n}^m a_k \frac{S_{\gamma}(\sigma z)}{S_{\gamma}(\sigma x_k)(z - x_k)} \equiv S_{\gamma}(\sigma z) \varphi_{n, m}(z).$$

Поскольку, согласно лемме 1.4,

$$\frac{S_{\gamma}(\sigma z)}{z - x_k} \in W_{\sigma}^{p, z} \quad (-\infty < k < +\infty),$$

то очевидно, что также $f_{n, m}(z) \in W_{\sigma}^{p, z}$, и, в силу леммы 2.3, имеют место неравенства

$$\|f_{n, m}(x)\|_{p, z} \leq C_1 \|f(x+i)\|_{p, z} \leq C_2 \|f_{n, m}(x+i)\|_{p, z}^{1*},$$

т. е.

$$\|f_{n, m}\|_{p, z}^p \leq C_2^p \int_{-\infty}^{+\infty} |S_{\gamma}(x+i) \varphi_{n, m}(x+i)|^p |x+i|^z dx.$$

Заметив теперь, что по лемме 1.3' двойное неравенство

$$|S_{\gamma}(\sigma(x+i))| \asymp |x+i|^{1-\gamma}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

* Здесь и в дальнейшем зависимость постоянных C_j ($j=1, 2, \dots$) от параметров $p, z, \gamma, \dots$ и т. д., как и раньше, мы специально не будем отмечать.

справедливо равномерно для всех x , будем иметь, далее,

$$\|\varphi_{n,m}\|_{p,\delta,x}^p \leq C_3 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{n,m}(x+i)|^p |x+i|^\delta dx, \quad (3.39)$$

где $\delta = x + p(1-\nu)$, причем $-1 < \delta < p-1$, ввиду условия (3.11') теоремы.

Но по теореме Хана-Банаха

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n,m}(x+i)\|_{p,\delta,1} &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{n,m}(x+i)|^p |x+i|^\delta dx \right\}^{1/p} = \\ &= \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,m}(x+i) g(x) |x+i|^{\delta/p} dx \right\}; q = \frac{p}{p-1}, \end{aligned}$$

и, следовательно, существует функция $g_0(x) \in L_q(-\infty, +\infty)$ такая, что $\|g_0\|_q \leq 1$ и

$$\|\varphi_{n,m}(x+i)\|_{p,\delta,1} \leq 2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,m}(x+i) g_0(x) |x+i|^\delta dx \right|. \quad (3.40)$$

Теперь, наряду с функцией $g_0(x)$, рассмотрим функцию $G_0(x) = |g_0(x)| |x+i|^{\delta_1/p}$ и заметим, что

$$\|G_0\|_{q,\delta_1,1} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |G_0(x)|^q |x+i|^{\delta_1} dx \right\}^{1/q} = \|g_0\|_q \leq 1, \quad (3.41)$$

где $\delta_1 = -\frac{\delta}{p} q$, причем $-1 < \delta_1 < q-1$. Кроме того, ввиду (3.40),

$$\|\varphi_{n,m}(x+i)\|_{p,\delta,1} \leq 2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,m}(x+i) G_0(x) dx \right|. \quad (3.40')$$

Рассмотрим также интеграл типа Коши

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_0(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^-,$$

для которого, на основании теоремы Г и неравенства (3.41) можем утверждать:

$$\begin{aligned} 1) \quad & G(z)(z-i)^{\delta_1/q} \in H^q_-, \\ 2) \quad & \|G(x)(x-i)^{\delta_1/q}\|_q \leq C_{p,\delta}^* \|G_0\|_{q,\delta_1,1} \leq C_{p,\delta}^*. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Но имея ввиду определение функции

$$\varphi_{n,m}(z+i) = \sigma^{-1} \sum_{k=n}^m \frac{a_k}{S_k(\sigma x_k)[z - (x_k - i)]},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} J_{n,m} &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,m}(x+i) G_0(x) dx = \sigma^{-1} \sum_{k=n}^m \frac{a_k}{S_v(\sigma x_k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_0(x)}{x-(x_k-i)} dx = \\ &= \sigma^{-1} \sum_{k=n}^m \frac{a_k}{S_v(\sigma x_k)} G(x_k-i) = \sigma^{-1} \sum_{k=n}^m \frac{a_k (x_k-2i)}{S_v(\sigma x_k)} \times \\ &\quad \times |G(x_k-i)| [(x_k-i)-i]^{\delta_1/q}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Для оценки величин $J_{n,m}$ воспользуемся неравенством Гёльдера и заметим, что по лемме 1.5 и по (3.14)

$$|x_k-2i| \asymp 1+|k| \text{ и } |S_v(\sigma x_k)| \asymp (1+|k|)^{1-\nu}, \quad -\infty < k < +\infty.$$

Тогда из (3.43) по лемме 3.2 мы получим

$$|J_{n,m}| \leq C_4 \| \{a_k\}_{n,p,x}^m \| \left\{ \sum_{k=n}^m |G(x_k-i)|^q |(x_k-i)-i|^{\delta_1} \right\}^{1/q}. \quad (3.44)$$

Но согласно (3.42) и лемме 3.2 справедлива оценка

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |G(x_k-i)|^q |(x_k-i)-i|^{\delta_1} \leq C_5,$$

откуда, а также из (3.39), (3.40'), (3.43) и (3.44) мы приходим к оценке

$$\|f_{n,m}\|_{p,x} \leq C_6 \| \{a_k\}_{n,p,x}^m \|.$$

Наконец, в силу леммы 2.2 о полноте пространства $W_{\sigma}^{p,x}$ и в силу леммы 3.3, переходом к пределу при $n \rightarrow -\infty$ и $m \rightarrow +\infty$, мы заключаем о справедливости обоих утверждений 1° и 2° нашей теоремы, поскольку $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^{p,x}$.

Теорема 3.2. Если

$$f(z) \in W_{\sigma}^{p,x} \quad (1 < p < +\infty, -1 < x < p-1),$$

то при условии (3.11') имеет место разложение

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x_k) \frac{S_v(\sigma z)}{S_v(\sigma x_k)(z-x_k)}, \quad (3.45)$$

сходящееся равномерно в любом круге $|z| \leq R$ и в среднем по метрике пространства $W_{\sigma}^{p,x}$.

Доказательство. Природа сходимости ряда (3.45) следует из леммы 3.1 и теоремы 3.1, причем, если мы обозначим его сумму через $f_*(z)$, то функция

$$\omega(z) = f(z) - f_*(z) \in W_{\sigma}^{p,x}$$

удовлетворяет условиям

$$\omega(x_k) = 0 \quad (-\infty < k < +\infty). \quad (3.46)$$

Далее, в силу неравенства (2.20) леммы 2.2 (1°), справедлива оценка

$$|\omega(z)| < C_1 \|\omega\|_{p, z} (1 + |z|)^{-\frac{x}{p}} e^{\sigma \| \operatorname{Im} z \|}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.47)$$

Определим теперь функцию

$$\varphi(z) = \frac{\omega(z)}{S_v(\sigma z)}, \quad (3.48)$$

которая вновь будет целой в силу (3.46) и того, что $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ — суть все, притом простые, нули функции $S_v(\sigma z)$.

Более того, поскольку $\omega(z)$ и $S_v(\sigma z)$ — целые функции экспоненциального типа $\leq \sigma$, то из тождества

$$\omega(z) = S_v(\sigma z) \varphi(z),$$

на основании известной теоремы (см., например, [24], гл. 1, § 9), непосредственно следует, что $\varphi(z)$ также является целой функцией первого порядка и нормального типа.

Далее, согласно лемме 1.3, в областях

$$D_{\pm} = \left\{ z: \left| \arg z \mp \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{4}, 1 < |z| < +\infty \right\}$$

справедлива двусторонняя оценка вида

$$|S_v(\sigma z)| \asymp (1 + |z|)^{1-\nu} e^{\sigma \| \operatorname{Im} z \|}, \quad z \in \bar{D} = \bar{D}_+ \cup \bar{D}_-. \quad (3.49)$$

Рассматривая, далее, угловые области

$$D_{\pm}^0 = \left\{ z: \left| \arg z \mp \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq |z| < +\infty \right\},$$

заметим, что из (3.47) и (3.49) вытекает справедливость оценок

$$|\varphi(z)| < C_2 (1 + |z|)^{\nu - \frac{x}{p} - 1}, \quad z \in D_{\pm}^0.$$

Но если ввести также целую функцию

$$\Psi(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{z}, \quad (3.50)$$

которая также экспоненциального типа, то будем иметь

$$|\Psi(z)| \leq C_3 (1 + |z|)^{\nu - \frac{x}{p} - 2} + \frac{C_4}{1 + |z|}, \quad z \in D_{\pm}^0.$$

Так как по условию $\nu < 1 + \frac{1+x}{p}$, т. е. $\nu - \frac{x}{p} - 2 < -\frac{1}{q}$, то из последнего неравенства непосредственно следует, что

$$\sup_{z \in D_{\pm}^0} \{|\Psi(z)|\} \leq C_5 < +\infty, \quad \lim_{|y| \rightarrow +\infty} \Psi(iy) = 0. \quad (3.51)$$

Поскольку $\Psi(z)$ — экспоненциального типа и ограничена на границах угловых областей $\Omega_+^0 = \{z: |\arg z| < \pi/4\}$ и $\Omega_-^0 = \{z: |\arg z - \pi| < \pi/4\}$ раствора $\pi/2$, то, по принципу Фрагмена-Линделёфа, наряду с (3.51) имеем также

$$\sup_{z \in \Omega_{\pm}^0} |\Psi(z)| \leq C_0 < +\infty. \quad (3.52)$$

Из свойств (3.51) и (3.52) функции $\Psi(z)$ по теореме Лиувилля следует, что $\Psi(z) \equiv 0$, т. е. $\varphi(z) \equiv \varphi(0)$, и, таким образом, в силу (3.50) и (3.51) мы приходим к тождеству

$$\omega(z) \equiv \varphi(0) S_v(\sigma z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Но, с одной стороны, $\omega(z) \in W_{\sigma}^{p, \kappa}$, а с другой, согласно утверждению (1.22), леммы 1.4, $S_v(\sigma z) \notin W_{\sigma}^{p, \kappa}$. Таким образом, мы не приходим к противоречию лишь когда $\varphi(0) = \varphi(z) \equiv 0$.

Итак, мы получили тождество

$$\omega(z) = f(z) - f_*(z) \equiv 0,$$

чем и завершается доказательство теоремы.

На основании теорем 3.1^а и 3.2, а также леммы 3.1 вытекает

Теорема 3.3. Для произвольной последовательности $\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in l^{p, \kappa}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \kappa < p-1$), и при любом значении параметра $v \in \left(\frac{1+\kappa}{p}, 1 + \frac{1+\kappa}{p}\right)$ ряд

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \frac{S_v(\sigma z)}{S_v(\sigma x_k)(z - x_k)},$$

где $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \subset (-\infty, +\infty)$ — нули функции

$$S_v(\sigma z) = \sigma z E_{1,2}(-\sigma^2 z^2; 1+v),$$

сходящийся равномерно в любом круге $|z| \leq R$, а также в метрике $W_{\sigma}^{p, \kappa}$, осуществляет взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l^{p, \kappa}$ на все пространство функций $f(z) \in W_{\sigma}^{p, \kappa}$, причем

$$\|f\|_{p, \kappa} \asymp \|\{a_k\}\|_{p, \kappa} \text{ и } f(x_k) = a_k, \quad k = \pm \infty.$$

§ 4. Интерполяционные разложения в классах $W_{2, \sigma}^{p, \omega}$ целых функций второго порядка

4.1 (а) Пусть

$$e\{+\} = \{z: z \in (-\infty, +\infty) \cup (-i\infty, +i\infty)\} —$$

совокупность координатных осей комплексной плоскости z .

Обозначим через $W_{2, \sigma}^{p, \omega}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$) множество целых функций $f(z)$ порядка $\rho = 2$ и типа $\leq \sigma$, для которых

$$\|f; e\{+\}\|_{p, \infty} = \left(\int_{e\{+\}} |f(z)|^p |z|^\infty |dz| \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f(re^{i\frac{\pi}{2}})|^p r^\infty dr \right)^{1/p} < +\infty. \quad (4.1)$$

Отметим, что как множество $W_{\frac{\pi}{2}}^{p, \infty}$ целых функций экспоненциального типа с нормой (2.1) — $\|f\|_{p, \pi}$, так и множество $W_{\frac{\pi}{2}}^{p, \infty}$ с нормой (4.1) — $\|f; e\{+\}\|_{p, \infty}$, будут банаховыми пространствами. Это утверждение, в частности, следует из леммы, приводимой ниже.

Лемма 4.1. 1°. Класс $W_{\frac{\pi}{2}}^{p, \infty}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2), \quad (4.2)$$

где

$$\varphi(w) \in W_{\frac{\pi}{2}}^{p, \pi_1}, \quad \pi_1 = \frac{\omega-1}{2}; \quad (4.3')$$

$$\psi(w) \in W_{\frac{\pi}{2}}^{p, \pi_2}, \quad \pi_2 = \frac{\omega-1+p}{2}. \quad (4.3'')$$

2°. Справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} \{\|\varphi\|_{p, \pi_1} + \|\psi\|_{p, \pi_2}\} \leq \|f; e\{+\}\|_{p, \infty} \leq \|\varphi\|_{p, \pi_1} + \|\psi\|_{p, \pi_2}, \quad (4.4)$$

а также

$$2^{-1} \{\|\varphi\|_{p, \pi_1}^p + \|\psi\|_{p, \pi_2}^p\} \leq \|f; e\{+\}\|_{p, \infty}^p \leq 2^p \{\|\varphi\|_{p, \pi_1}^p + \|\psi\|_{p, \pi_2}^p\}. \quad (4.4')$$

Доказательство. Сначала же заметим, что вообще, если $f(z)$ — целая функция порядка ρ и типа $\leq \sigma$, то положив

$$\varphi(z^2) \equiv \frac{1}{2} [f(z) + f(-z)] \text{ и } z\psi(z^2) \equiv \frac{1}{2} [f(z) - f(-z)], \quad (4.5)$$

мы получим представление вида (4.2), где $\varphi(w)$ и $\psi(w)$ будут целыми функциями порядка $\leq \rho/2$ и типа $\leq \sigma$. Точнее, хотя бы одна из этих функций будет ровно порядка $\rho/2$.

Верно и обратное утверждение — если $\varphi(w)$ и $\psi(w)$ — суть целые функции порядка $\rho/2$ и типа $\leq \sigma$, то формула (4.2) определяет целую функцию порядка $\leq \rho$ и типа $\leq \sigma$.

1°. Из определения чисел π_1 и π_2 легко следуют равенства

$$\|\varphi\|_{p, \pi_1}^p = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)|^p |u|^{\pi_1} du = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x^2)|^p |x|^\infty dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(-y^2)|^p |y|^\infty dy = \int_{e\{+\}} |\varphi(z^2)|^p |z|^\infty |dz| = \|\varphi(z^2); e\{+\}\|_{p, \infty}^p. \quad (4.6')$$

и аналогично

$$\|\psi\|_{p, x_2}^p = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(u)|^p |u|^{x_2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} |x\psi(x^2)|^p |x|^\omega dx + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} |iy\psi(-y^2)|^p |y|^\omega dy = \int_{e\{+\}} |z\psi(z^2)|^p |z|^\omega |dz| = \|\psi(z^2); e\{+\}\|_{p, \omega}^p. \quad (4.6'')$$

При этом заметим, что наше условие $-1 < \omega < p-1$ соответственно равносильно условиям: $-1 < x_1 < \frac{p}{2} - 1$ и $\frac{p}{2} - 1 < x_2 < p-1$. Поэтому, из наших равенств (4.6') и (4.6'') следует, что утверждения

$$\varphi(w) \in W_{\sigma}^{p, x_1} \text{ и } \varphi(z^2) \in W_{2, \sigma}^{p, \omega},$$

а также

$$\psi(w) \in W_{\sigma}^{p, x_2} \text{ и } z\psi(z^2) \in W_{2, \sigma}^{p, \omega}$$

совершенно равносильны.

2°. Из представления (4.2) в силу неравенства Минковского и равенств (4.6') и (4.6'') мы, во-первых, будем иметь

$$\|f; e\{+\}\|_{p, \omega} \leq \|\varphi(z^2); e\{+\}\|_{p, \omega} + \|z\psi(z^2); e\{+\}\|_{p, \omega} = \|\varphi\|_{p, x_1} + \|\psi\|_{p, x_2}. \quad (4.7')$$

Отсюда, в силу известного неравенства $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ ($0 \leq a, b < +\infty$), следует еще, что

$$\|f; e\{+\}\|_{p, \omega} \leq 2^p \{\|\varphi\|_{p, x_1}^p + \|\psi\|_{p, x_2}^p\}. \quad (4.7'')$$

Во-вторых, по (4.5) и (4.6')—(4.6'') имеем также

$$\|\varphi\|_{p, x_1} = \|\varphi(z^2); e\{+\}\|_{p, \omega} \leq \|f; e\{+\}\|_{p, \omega},$$

$$\|\psi\|_{p, x_2} = \|z\psi(z^2); e\{+\}\|_{p, \omega} \leq \|f; e\{+\}\|_{p, \omega},$$

откуда следуют оценки

$$\|\varphi\|_{p, x_1} + \|\psi\|_{p, x_2} \leq 2 \|f; e\{+\}\|_{p, \omega}, \quad (4.8')$$

$$\|\varphi\|_{p, x_1}^p + \|\psi\|_{p, x_2}^p \leq 2 \|f; e\{+\}\|_{p, \omega}^p. \quad (4.8'')$$

Из установленных выше неравенств (4.7')—(4.7'') и (4.8')—(4.8'') вытекают двусторонние оценки (4.4) и (4.4') леммы.

(б) Вернемся к обозначениям § 1, 3 и введем здесь новые.

Во-первых, определим целую функцию второго порядка и типа σ ($0 < \sigma < +\infty$), положив

$$\pi_{\sigma}(z) \equiv S_{\sigma}(z^2) = \sigma z^2 E_{1/2}(-\sigma^2 z^4; 1+\nu), \quad 0 \leq \nu < 2. \quad (4.9)$$

На основании леммы 1.1 можно утверждать, что для рассматриваемых нами значений параметра $\nu \in [0, 2)$ все нули функции $\pi_{\sigma}(z)$, кроме двукратного нуля $z=0$, простые и расположены только на координатных осях $\operatorname{Im} z=0$ и $\operatorname{Re} z=0$.

В начале § 3 был приведен краткий обзор о распределении нулей функции $S_{\sigma}(z^2)$ —

$$x_k = \sigma^{-1} x_{\nu, k} \quad (-\infty < k < +\infty),$$

которые при $0 \leq \nu < 2$ все простые и симметрично расположены на вещественной оси, причем так, что

$$x_0 = 0, \quad x_{-k} = -x_k \quad (1 \leq k < +\infty).$$

Определим теперь две последовательности чисел, лежащие соответственно на вещественной и мнимой осях комплексной плоскости z :

$$\mu_k = \sqrt{x_k}, \quad \mu_{-k} = -\mu_k = -\sqrt{x_k}; \quad (1 \leq k < +\infty), \quad (4.10)$$

$$\nu_k = i\sqrt{x_k}, \quad \nu_{-k} = -\nu_k = -i\sqrt{x_k};$$

которыми исчерпывается множество всех нулей функции $\pi_\nu(z)$, кроме двукратного нуля $z=0$.

Введем, наконец, единую нумерацию для всех нулей функций $\pi_\nu(z)$, определив последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ таким образом:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 0, \quad \lambda_{2k-1} = \mu_k = \sqrt{x_k}, \quad \lambda_{-2k+1} = \mu_{-k} = -\sqrt{x_k}; \\ \lambda_{2k} = \nu_k = i\sqrt{x_k}, \quad \lambda_{-2k} = \nu_{-k} = -i\sqrt{x_k}. \end{aligned} \quad (1 \leq k < +\infty) \quad (4.11)$$

Например, отметим, что в случае $\nu=1$

$$\pi_1(z) = S_1(\sigma z^2) = \sin \sigma z^2, \quad (4.9')$$

и последовательность нулей этой функции запишется в явном виде

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 0, \quad \lambda_{2k-1} = \sqrt{\pi \sigma^{-1} k}, \quad \lambda_{-2k+1} = -\sqrt{\pi \sigma^{-1} k}; \\ \lambda_{2k} = i\sqrt{\pi \sigma^{-1} k}, \quad \lambda_{-2k} = -i\sqrt{\pi \sigma^{-1} k}. \end{aligned} \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (4.11')$$

(в) Напомним, что, по определению (3.1), $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^{p, \omega} \quad (1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1)$, если

$$\| \{a_k\} \|_{p, \omega} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p (1+|k|)^\omega \right)^{1/p} < +\infty. \quad (4.12)$$

Кроме того, ради краткости, для значений параметров $1 < p < +\infty$ и $-1 < \omega < p-1$ введем также в рассмотрение интервал вида

$$\Delta_{p, \omega} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p}, 1 + \frac{1+\omega}{2p} \right). \quad (4.13)$$

Докажем теперь следующую теорему вложения.

Теорема 4.1. Пусть в определении функции $S_\nu(\sigma z)$ и ее нулей $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty} = \{\sigma^{-1} x_{\nu, k}\}_{-\infty}^{+\infty}$ параметр

$$\nu \in \Delta_{p, \omega} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p}, 1 + \frac{1+\omega}{2p} \right). \quad (4.14)$$

Тогда для любой функции $f(z) \in W_{2,\omega}^{p,\omega}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$) будем иметь

$$\{f(i_k)\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in l^{p, \frac{\omega-1}{2}}; \quad (4.15)$$

при этом справедливы неравенства вида

$$d \|f(i_k)\|_{p, \frac{\omega-1}{2}} \leq \|f; e\|_{p, \omega} \leq D \{ \|f'(i_0)\|^p + \|f(i_k)\|_{p, \frac{\omega-1}{2}}^p \}^{1/p}, \quad (4.16)$$

где $d = d_0(p, \omega) > 0$ и $D = D_0(p, \omega) > 0$ — постоянные, не зависящие от f .

Доказательство. По лемме 4.1 функция $f(z)$ допускает представление вида (4.2), где $\varphi(w) \in W_{\sigma}^{p, x_1}$ ($x_1 = \frac{\omega-1}{2}$) и $\psi(w) \in W_{\sigma}^{p, x_2}$ ($x_2 = \frac{\omega+p-1}{2}$) и, как уже отмечалось, $-1 < x_1 < \frac{p}{2} - 1$ и $\frac{p}{2} - 1 < x_2 < p-1$. Поэтому, согласно теореме 3.3, если

$$v \in \left(\frac{1+x_1}{p}, 1 + \frac{1+x_1}{p} \right) = \left(\frac{1+\omega}{2p}, 1 + \frac{1+\omega}{2p} \right) \subset [0, 2), \quad (4.17)$$

то

$$\|\varphi(x_k)\|_{p, x_1} \asymp \|\varphi\|_{p, x_1}; \quad (4.18)$$

если же

$$v \in \left(\frac{1+x_2}{p}, 1 + \frac{1+x_2}{p} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p}, \frac{3}{2} + \frac{1+\omega}{2p} \right) \subset [0, 2), \quad (4.19)$$

то

$$\|\psi(x_k)\|_{p, x_2} \asymp \|\psi\|_{p, x_2}. \quad (4.20)$$

Следовательно, если параметр v принадлежит общей части обоих интервалов (4.17) и (4.19), т. е. $v \in \Delta_{p, \omega}$, то двойные неравенства (4.18) и (4.20) будут одновременно справедливы. Далее, пользуясь обозначениями (4.11), мы будем иметь

$$f(\lambda_{\pm 2k}) = f(v_{\pm k}) = \varphi(-x_k) \pm i \sqrt{x_k} \psi(-x_k), \quad (1 \leq k < +\infty)$$

$$f(\lambda_{\pm 2k \mp 1}) = f(\mu_{\pm k}) = \varphi(x_k) \pm \sqrt{x_k} \psi(x_k),$$

откуда непосредственно следуют неравенства

$$|f(\lambda_{\pm 2k})|^p \leq 2^p \{ |\varphi(-x_k)|^p + x_k^{p/2} |\psi(-x_k)|^p \}, \quad 0 \leq k < +\infty, \quad (4.21)$$

$$|f(\lambda_{\pm 2k \mp 1})|^p \leq 2^p \{ |\varphi(x_k)|^p + x_k^{p/2} |\psi(x_k)|^p \}, \quad 1 \leq k < +\infty.$$

В начале § 3 мы вновь напомнили природу распределения нулей $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ функции $S_\omega(\sigma z)$; она была исследована нами в § 1. Как отмечалось уже, из их распределения, в частности, следовало двойное неравенство вида

$$|x_k| = |z^{-1} x_{-k}| \asymp 1 + |k| \quad (1 \leq |k| < +\infty). \quad (4.22)$$

Поэтому, заметив, что $x_1 + \frac{p}{2} = x_2$ и $x_{-k} = -x_k$ ($1 \leq k < +\infty$), мы,

видя два неравенств (4.21), приходим к оценкам

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|2k|)^{\alpha_1} |f(i_{2k})|^p \leq C_1 \left\{ \sum_{k=-\infty}^0 (1+|k|)^{\alpha_1} |\varphi(x_k)|^p + \right. \\ & \left. + \sum_{k=-\infty}^0 (1+|k|)^{\alpha_1} |\psi(x_k)|^p \right\}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|2k+1|)^{\alpha_1} |f(i_{2k+1})|^p \leq \\ & \leq C_2 \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |\varphi(x_k)|^p + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |\psi(x_k)|^p \right\}, \end{aligned}$$

где здесь и дальше $C_j = C_j(p, \omega) > 0$ ($j=1, 2, \dots$) — постоянные, не зависящие от функции f .

Сложив эти оценки, а затем пользуясь правыми из двусторонних неравенств (4.18) и (4.20), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{(\omega-1/2)} |f(\lambda_k)|^p & \leq C_3 \{ \|\varphi(x_k)\|_{p, x_1}^p + \|\psi(x_k)\|_{p, x_1}^p \} \leq \\ & \leq C_4 \{ \|\varphi\|_{p, x_1}^p + \|\psi\|_{p, x_1}^p \}. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь левым из неравенств (4.4') леммы 4.1, заключаем, что справедливо как утверждение (4.15), так и левое из неравенств (4.16) теоремы.

Установим теперь правое из требуемых неравенств (4.16).

Поскольку по (4.5)

$$|(\varphi(z^2))^p| \leq |f(z)|^p + |f(-z)|^p \text{ и } |\psi(z^2)|^p \leq (|f(z)|^p + |f(-z)|^p) |z|^{-p} \quad (z \neq 0), \quad (4.23)$$

то, во-первых, в силу обозначений (4.11) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^{\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |\varphi(x_k)|^p & \leq \sum_{k=-1}^{\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |f(\sqrt{x_k})|^p + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |f(-\sqrt{x_k})|^p = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |f(\mu_k)|^p, \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{-1} (1+|k|)^{\alpha_1} |\varphi(x_k)|^p & \leq \sum_{k=-1}^{\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |f(i\sqrt{x_k})|^p + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |f(-i\sqrt{x_k})|^p = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |f(\nu_k)|^p, \end{aligned}$$

где штрих у знака суммы означает, что индекс $k=0$ пропускается.

Сложением этих двух неравенств и равенства $|\varphi(x_0)|^p = |f(\lambda_0)|^p$, с учетом того, что последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ является объединением последовательностей $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \subset (-\infty, +\infty)$, $\{\nu_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \subset (-i\infty, +i\infty)$ и точки $\lambda_0=0$, мы приходим к оценке

$$\|\varphi(x_k)\|_{p, x_1} \leq C_5 \|f(\lambda_k)\|_{p, \frac{\omega-1}{2}}. \quad (4.24)$$

Во-вторых, ввиду тех же обозначений (4.11), а также в силу второй из оценок (4.23), если учесть также, что $x_2 - p/2 = x_1$ и (4.22), мы будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |\psi(x_k)|^p \leq \\ & \leq C_0 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |f(\sqrt{x_k})|^p + \sum_{k=1}^{\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |f(-\sqrt{x_k})|^p \right\} = \\ & = C_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |f(\nu_k)|^p, \end{aligned}$$

и аналогично получим

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} (1+|k|)^{\alpha_1} |\psi(x_k)|^p \leq C_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{\alpha_1} |f(\nu_k)|^p.$$

Складывая эти два неравенства с равенством $|\psi(x_0)|^p = |f'(\lambda_0)|^p$, мы приходим к оценке

$$\|\psi(x_k)\|_{p, \alpha_1} \leq C_7 \left\{ \|f'(\lambda_0)\|^p + \|f(\lambda_k)\|_{p, \frac{m-1}{2}}^p \right\}^{1/p}. \quad (4.25)$$

Наконец, из (4.24) и (4.25), принимая во внимание правое из неравенств (4.4) леммы 4.1, мы придем к правому из неравенств (4.16) чем и завершим доказательство теоремы.

4.2. В этом пункте все введенные в пункте 4.1 обозначения и определения останутся в силе. А именно, пусть, согласно (4.9) и (4.11)

$$\pi_\nu(z) = S_\nu(\sigma z^2) = \sigma z^2 E_{1/2}(-\sigma^2 z^4; 1+\nu), \quad 0 \leq \nu < 2,$$

и $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — последовательность нулей целой функции $\pi_\nu(z)$, которые, кроме двойного нуля $\lambda_0 = 0$, являются простыми и лежат на координатных осях.

Заметив теперь, что $S'_\nu(0) = \Gamma^{-1}(1+\nu)$, введем в рассмотрение последовательность функций, ассоциированную с нулями $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ функции $\pi_\nu(z)$. А именно, положив

$$\begin{aligned} \Omega_0^*(z) &= \Gamma(1+\nu) \frac{\pi_\nu(z)}{\sigma z} = \frac{S_\nu(\sigma z^2)}{\sigma z S'_\nu(0)}, \\ \Omega_0(z) &= \Gamma(1+\nu) \frac{\pi_\nu(z)}{\sigma z^2} = \frac{S_\nu(\sigma z^2)}{\sigma z^2 S'_\nu(0)}, \\ \Omega_k(z) &= \frac{\pi_\nu(z)}{\pi'_\nu(\lambda_k)(z - \lambda_k)} = \frac{S_\nu(\sigma z^2)}{2\sigma \lambda_k S'_\nu(\sigma \lambda_k^2)(z - \lambda_k)} \\ & \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (4.26)$$

определим систему функций

$$\{\Omega_0^*(z), [\Omega_k(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}. \quad (4.27)$$

Имея ввиду природу нулей $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ функции $\pi_\nu(z)$, а также (4.26), нетрудно убедиться в том, что система (4.27) обладает следующими, весьма важными для всего дальнейшего изложения, интерполяционными свойствами:

$$\Omega_0^*(\lambda_j) = 0 \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad \frac{d\Omega_0^*(z)}{dz} \Big|_{z=\lambda_k} = 1; \quad (4.28)$$

$$\Omega_k^*(\lambda_0) = 0, \quad \Omega_k^*(\lambda_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k=j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad (k, j=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.29)$$

(а) Прежде, чем доказывать вторую основную теорему данного параграфа, приведем следующую лемму.

Лемма 4.2. 1°. Для любой последовательности комплексных чисел $\{a_0^*, [a_k]_{k=-n}^{+\infty}\}$ суммы вида

$$S_{n,m}(z) = a_0^* \Omega_0^*(z) + \sum_{k=-n}^m a_k \Omega_k^*(z) \quad (1 \leq n, m < +\infty) \quad (4.30)$$

удовлетворяют интерполяционным условиям

$$S_{n,m}(\lambda_j) = \begin{cases} a_j, & j \in [-n, m], \\ 0, & j \notin [-n, m], \end{cases} \quad S_{n,m}(\lambda_0) = a_0^*. \quad (4.31)$$

2°. Если

$$\frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p} < \nu < 2, \quad (4.32)$$

то каждая из функций системы (4.27), следовательно, и любая сумма вида $S_{n,m}(z)$ принадлежит классу $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$).

Доказательство. Что касается утверждения 1°, то оно является непосредственным следствием интерполяционных свойств (4.28)–(4.29) нашей системы (4.27).

Отметим теперь, что, пользуясь леммой 1.2, мы приходим к оценке

$$|\pi_\nu(z)| = |S_\nu(zz^2)| \leq C(1+|z|^2)^{1-\nu}, \quad z \in e\{+\},$$

где $C > 0$ не зависит от z .

Повтому для любого k ($1 \leq |k| < +\infty$) существует число $r_k > |k|$ такое, что справедливы оценки вида

$$|(z - \lambda_k)^{-1} \pi_\nu(z)| \leq C_k |z|^2, \quad |z| \leq r_k;$$

$$|(z - \lambda_k)^{-1} \pi_\nu(z)| \leq C_k^* |z|^{1-2\nu}; \quad z \in e\{+\}, \quad |z| \geq r_k;$$

и, наконец, $|\pi_\nu(z)| \leq C_0 |z|^2$, $|z| \leq 1$, где C_k , C_k^* и C_0 — постоянные, не зависящие от z .

Из этих оценок легко вытекает конечность всех интегралов при условии $\nu > \frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p}$. Итак, при условии (4.32) утверждение 2° также справедливо.

(б) Обозначим теперь для $f(z) \in W_{2,\sigma}^{p,\omega}$

$$S_{n,m}(z; f) = f'(0) \Omega_0^*(z) + \sum_{k=-n}^m f(\lambda_k) \Omega_k^*(z) \quad (4.33)$$

$$(1 \leq n, m < +\infty)$$

и докажем теорему.

Теорема 4.2. 1°. Для любой функции $f(z) \in W_{\frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}}^{p, \infty}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$) и при любом значении параметра $\nu \in \Delta_{p, \omega}$, т. е. при

$$\frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p} < \nu < 1 + \frac{1+\omega}{2p},$$

справедливо разложение

$$f(z) = f'(0) \mathcal{Q}_0^{\circ}(z) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\lambda_k) \mathcal{Q}_k(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.34)$$

равномерно сходящееся в любом круге $|z| \leq R < \infty$.

2°. Ряд (4.34) сходится к функции $f(z)$ также в метрике $W_{\frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}}^{p, \infty}$, т. е.

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|f(z) - S_{n, m}(z; f); e|+\|_{p, \infty} = 0. \quad (4.35)$$

Доказательство. 1°. Согласно лемме 4.1 мы имеем представление

$$f(z) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2),$$

где

$$\varphi(w) \in W_{\sigma}^{p, \kappa_1} \left(\kappa_1 = \frac{\omega-1}{2} \right) \text{ и } \psi(w) \in W_{\sigma}^{p, \kappa_2} \left(\kappa_2 = \frac{\omega-1+p}{2} \right).$$

Поэтому, согласно теореме 3.2, мы можем утверждать:

Если

$$\nu \in \left(\frac{1+\kappa_1}{p}, 1 + \frac{1+\kappa_1}{p} \right) \text{ или } \nu \in \left(\frac{1+\kappa_2}{p}, 1 + \frac{1+\kappa_2}{p} \right), \quad (4.36)$$

то для функций $\varphi(w)$ и $\psi(w)$ будут справедливы разложения

$$\varphi(w) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x_k) \frac{S_{\nu}(\tau w)}{S_{\nu}(\tau x_k)(w-x_k)}, \quad (4.37)$$

$$\psi(w) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi(x_k) \frac{S_{\nu}(\tau w)}{S_{\nu}(\tau x_k)(w-x_k)},$$

сходящиеся равномерно в любом круге $|w| \leq R < +\infty$, а также соответственно в метриках W_{σ}^{p, κ_1} и W_{σ}^{p, κ_2} .

Но условия (4.36) на допустимые значения параметра ν для справедливости разложений (4.37) соответственно могут быть записаны также в виде

$$\nu \in \left(\frac{1+\omega}{2p}, 1 + \frac{1+\omega}{2p} \right) \text{ или } \nu \in \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p}, \frac{3}{2} + \frac{1+\omega}{2p} \right). \quad (4.36')$$

Но поскольку, как отмечалось и раньше

$$\Delta_{p, \omega} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p}, 1 + \frac{1+\omega}{2p} \right)$$

— суть общая часть интервалов (4.36'), то разложения (4.37) справедливы одновременно, если $\nu \in \Delta_{p, \omega}$.

Теперь отметим, что из представлений (4.5) функций $\varphi(z^2)$ и $z\psi(z^2)$, пользуясь нашими обозначениями (4.11), мы можем вычислить значения коэффициентов разложений (4.37):

$$\varphi(x_k) = \frac{1}{2} [f(\mu_k) + f(\mu_{-k})], \quad \psi(x_k) = \frac{1}{2\mu_k} [f(\mu_k) - f(\mu_{-k})] (1 \leq k < +\infty),$$

$$\varphi(x_k) = \frac{1}{2} [f(\nu_k) + f(\nu_{-k})], \quad \psi(x_k) = \frac{1}{2\nu_k} [f(\nu_k) - f(\nu_{-k})] (-\infty < k \leq -1),$$

отметив также, что $\psi(0) = f'(0)$.

Из разложений (4.37), с учетом только что приведенных формул для значений $\varphi(x_k)$ и $\psi(x_k)$, мы приходим к следующим разложениям, также сходящимся равномерно в любом круге $|z| \leq R < +\infty$:

$$\begin{aligned} \varphi(z^2) &= \frac{1}{2} [f(z) + f(-z)] = f(0) \frac{S_v(\sigma z^2)}{\sigma z^2 S_v'(0)} + \\ &+ \frac{1}{2\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} [f(\mu_k) + f(\mu_{-k})] \frac{S_v(\sigma z^2)}{S_v'(\sigma \mu_k^2)(z^2 - \mu_k^2)} + \\ &+ \frac{1}{2\sigma} \sum_{k=-\infty}^{-1} [f(\nu_k) + f(\nu_{-k})] \frac{S_v(\sigma z^2)}{S_v'(\sigma \nu_k^2)(z^2 - \nu_k^2)}, \\ z\psi(z^2) &= \frac{1}{2} [f(z) - f(-z)] = f'(0) \frac{S_v(\sigma z^2)}{\sigma z S_v'(0)} + \\ &+ \frac{1}{2\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} [f(\mu_k) - f(\mu_{-k})] \frac{z S_v(\sigma z^2)}{\mu_k S_v'(\sigma \mu_k^2)(z^2 - \mu_k^2)} + \\ &+ \frac{1}{2\sigma} \sum_{k=-\infty}^{-1} [f(\nu_k) - f(\nu_{-k})] \frac{z S_v(\sigma z^2)}{\nu_k S_v'(\sigma \nu_k^2)(z^2 - \nu_k^2)}. \end{aligned}$$

Складывая эти разложения, принимая при этом во внимание, что $\mu_k = -\mu_{-k}$ и $\nu_k = -\nu_{-k}$ ($1 \leq k < +\infty$), мы приходим к разложению с той же природой сходимости

$$\begin{aligned} f(z) &= f'(0) \frac{S_v(\sigma z^2)}{\sigma z S_v'(0)} + f(0) \frac{S_v(\sigma z^2)}{\sigma z^2 S_v'(0)} + \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\mu_k) \frac{S_v(\sigma z^2)}{2\sigma \mu_k S_v'(\sigma \mu_k^2)(z - \mu_k)} + \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\nu_k) \frac{S_v(\sigma z^2)}{2\sigma \nu_k S_v'(\sigma \nu_k^2)(z - \nu_k)}. \end{aligned}$$

Наконец, учитывая определения (4.11) и (4.26) последовательности чисел $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ и последовательности функций $\{\mathcal{Q}_0^{\circ}(z), [\mathcal{Q}_k^{\circ}(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}$, мы приходим к утверждению 1° теоремы.

2°. Ввиду установленного нами разложения (4.34) и в силу определения (4.33) суммы $S_{n,m}(z; f)$ и ее свойств (4.31), функция

$$R_{n,m}(z) = f(z) - S_{n,m}(z; f) \in \mathbb{W}_{2,m}^{p,\infty}$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$R_{n,m}(i_0) = 0; R_{n,m}(i_k) = 0, k \in [-n, m];$$

$$R_{n,m}(i_k) = f(i_k), k \in [-n, m].$$

Следовательно, для функции $R_{n,m}(z)$ разложение (4.34) принимает такой вид

$$R_{n,m}(z) = \sum_{\substack{k < -n-1 \\ k > m+1}} f(i_k) \Omega_k(z).$$

Но, в силу правой из оценок (4.16) теоремы вложения 4.1, имеет место неравенство

$$\|R_{n,m}; e\{+\}\|_{p,\omega} = \|f(z) - S_{n,m}(z; f); e\{+\}\|_{p,\omega} \leq$$

$$\leq D \left| \sum_{\substack{k < -n-1 \\ k > m+1}} (1+|k|)^{(\omega-1)/2} |f(i_k)|^p \right|^{1/p}.$$

Поскольку, по той же теореме, стоящий справа ряд в последнем неравенстве сходящийся, то переходом к пределу при $n, m \rightarrow +\infty$ мы докажем и утверждение 2°. Итак, теорема доказана полностью.

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает следующая теорема единственности.

Теорема 4.3. Если $f(z) \in W_{2,\omega}^p$ и

$$f'(i_0) = f(i_k) = 0, -\infty < k < +\infty,$$

то $f(z) \equiv 0$.

(в) Как и прежде, вновь будем полагать, что параметр ν удовлетворяет условию $\nu \in \Delta_{p,\omega}$, обеспечивающему соответствующие свойства нулей функции $\pi_\nu(z) = S_\nu(\sigma z^2)$.

Докажем теперь обращение теоремы 4.2.

Теорема 4.4. Пусть

$$|a_k| \leq l^{\frac{p, \omega-1}{2}} \quad (1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1) \quad (4.38)$$

— произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда:

1°. Для любого $a_0 \in \mathbb{C}$ ряд

$$f(z) = a_0 \Omega_0^*(z) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \Omega_k(z) \quad (4.39)$$

равномерно сходится в любом круге $|z| \leq R < +\infty$ и определяет целую функцию $f(z) \in W_{2,\omega}^p$ с нормой

$$\|f; e\{+\}\|_{p,\omega} \leq D \left\{ |a_0|^p + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{\frac{\omega-1}{2}} |a_k|^p \right\}^{1/p}, \quad (4.40)$$

удовлетворяющую интерполяционным условиям

$$f'(i_0) = a_0^*, f(i_k) = a_k \quad (-\infty < k < +\infty); \quad (4.40')$$

2°. Ряд (4.39) сходится к своей сумме $f(z)$ также и в метрике $W_{2,\omega}^p$.

Доказательство. 1°. Сначала же отметим, что по (4.22)

$$|x_k| \asymp 1 + |k| \quad (1 \leq |k| < +\infty),$$

и по лемме 1.6

$$|S_v(\sigma x_k)| \asymp (1 + |k|)^{1-v} \quad (1 \leq |k| < \infty).$$

Повтому для любого $R (0 < R < +\infty)$ целое число $N = N(R, \sigma) \geq 1$ может быть выбрано таким образом, чтобы выполнялись оценки вида

$$|z - i_k| \geq C_1 \sqrt{|k|}, \quad |i_k| \geq C_2 \sqrt{|k|},$$

при $|z| \leq R$ и $|k| \geq N$, где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — постоянные, не зависящие от k .

Отсюда, принимая во внимание определение (4.26) системы функций (4.27), мы приходим к оценке вида

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{-N \leq k \leq -n \\ N \leq k \leq m}} a_k \Omega_k(z) \right| &= \left| \sum_{\substack{-N \leq k \leq -n \\ N \leq k \leq m}} a_k \frac{S_v(z z^2)}{2^{\sigma |k|} S_k(\sigma i_k^2) (z - i_k)} \right| \leq \\ &\leq C(\sigma, R) \sum_{|k| \geq N} \frac{|a_k|}{(1 + |k|)^{2-v}}, \quad |z| \leq R; \quad n, m \geq N. \end{aligned}$$

Но по неравенству Гёльдера

$$\sum_{|k| \geq N} \frac{|a_k|}{(1 + |k|)^{2-v}} \leq \| |a_k| \|_{p, \frac{\omega-1}{2}} \left(\sum_{|k| \geq N} (1 + |k|)^{-\alpha} \right)^{1/q},$$

где $q = \frac{p}{p-1}$ и $\alpha = \left(2 - v + \frac{\omega-1}{2p} \right) q > 1$, поскольку по условию $v < 1 + \frac{1+\omega}{2p}$.

Следовательно, если в предыдущих двух неравенствах устремить $N \rightarrow +\infty$, то можем заключить, что утверждение о природе сходимости ряда (4.39), а также интерполяционные свойства (4.40') его суммы $f(z)$ непосредственно следуют из свойств (4.28)–(4.29) функций системы (4.27).

Таким образом, части утверждения 1° теоремы доказаны; нам остается установить, что сумма нашего ряда $f(z) \in W_{2, \frac{\omega}{2}}^{p, \infty}$.

Чтобы убедиться в этом, поступим таким образом.

Определим две последовательности комплексных чисел $\{b_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ и $\{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, полагая

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{2} [a_{2k-1} + a_{-2k+1}], & 1 \leq k < +\infty, \\ \frac{1}{2} [a_{2k} + a_{-2k}], & -\infty < k \leq 0; \end{cases} \quad (4.41)$$

$$c_0 = a_0^*, \quad c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} [a_{2k-1} - a_{-2k+1}] x_k^{-\frac{1}{2}}, & 1 \leq k < +\infty, \\ \frac{1}{2} [a_{-2k} - a_{2k}] i |x_k|^{-\frac{1}{2}}, & -\infty < k \leq -1. \end{cases} \quad (4.42)$$

Тогда из очевидных оценок

$$|b_k|^p \leq \begin{cases} |a_{2k-1}|^p + |a_{-2k+1}|^p, & 1 \leq k < +\infty, \\ |a_{2k}|^p + |a_{-2k}|^p, & -\infty < k \leq 0; \end{cases}$$

$$|c_0|^p = |a_0^*|^p, |c_k|^p \leq \gamma_1 (1 + |k|)^{-\frac{p}{2}} \cdot \begin{cases} |a_{2k-1}|^p + |a_{-2k+1}|^p, & 1 \leq k < +\infty, \\ |a_{-2k}|^p + |a_{2k}|^p, & -\infty < k \leq -1, \end{cases}$$

где $\gamma_j = \gamma_j(p, \sigma) > 0$ ($j=1, 2, \dots$), здесь и дальше — постоянные, не зависящие от k , мы для норм последовательностей (4.41) и (4.42) получим следующие оценки:

$$\|b_k\|_{p, z_1} \leq \gamma_2 \|a_k\|_{p, \frac{\omega-1}{2}} < +\infty,$$

$$\|c_k\|_{p, z_2} \leq \gamma_2' |a_0^*|^p + \|a_k\|_{p, \frac{\omega-1}{2}}^{1/p} < +\infty. \quad (4.43)$$

Но тогда, согласно теореме 3.1, ряды

$$\varphi(w) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \frac{S_v(\sigma w)}{S_v(\sigma x_k)(w - x_k)}, \quad v \in \left(\frac{1+x_1}{p}, 1 + \frac{1+x_1}{p} \right); \quad (4.44)$$

$$\psi(w) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{S_v(\sigma w)}{S_v(\sigma x_k)(w - x_k)}, \quad v \in \left(\frac{1+x_2}{p}, 1 + \frac{1+x_2}{p} \right),$$

при отмеченных значениях параметра v равномерно в любом круге $|w| \leq R < +\infty$ и в среднем в соответствующих метриках сходятся к целым функциям $\varphi(w) \in W_{\sigma, z_1}^{p, \omega}$ и $\psi(w) \in W_{\sigma, z_2}^{p, \omega}$, для норм которых, в силу (4.43), будем иметь оценки

$$\|\varphi\|_{p, z_1} \leq \gamma_3 \|a_k\|_{p, \frac{\omega-1}{2}},$$

$$\|\psi\|_{p, z_2} \leq \gamma_4 (|a_0^*|^p + \|a_k\|_{p, \frac{\omega-1}{2}}^{1/p}). \quad (4.45)$$

Оба наши разложения (4.44), как отмечалось уже раньше, справедливы одновременно, если $v \in \Delta_{p, \omega} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p}, 1 + \frac{1+\omega}{2p} \right)$.

Если образовать теперь функцию

$$f(z) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2), \quad (4.46)$$

то она, согласно лемме 4.1, принадлежит классу $W_{2, \sigma}^{p, \omega}$, причем, в силу неравенства (4.4),

$$\|f; e\{+\}\|_{p, \omega} \leq \|\varphi\|_{p, z_1} + \|\psi\|_{p, z_2}.$$

Поэтому и ввиду (4.45) справедлива оценка

$$\|f; e\{+\}\|_{p, \omega} \leq D(p, \sigma) (|a_0^*|^p + \|a_k\|_{p, \frac{\omega-1}{2}}^{1/p}), \quad (4.47)$$

откуда, в частности, вытекает, что $f(z) \in W_{2, \sigma}^{p, \omega}$.

Убедимся теперь, что наша функция $f(z)$ имеет разложение (4.39) теоремы, сходящееся к ней не только равномерно в любом круге $|z| \leq R < +\infty$, но и в метрике $W_{2, \sigma}^{p, \omega}$.

Доказательство, по существу, проводится аналогично доказательству теоремы 4.2.

Во-первых, из разложений (4.44), ввиду наших обозначений (4.41)–(4.42) и (4.11), будем иметь

$$\varphi(z^2) = a_0 \frac{S_v(\sigma z^2)}{\sigma z^2 S_v(0)} + \frac{1}{2\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} [a_{2k-1} + a_{-2k+1}] \frac{S_v(\sigma z^2)}{S_v(\sigma \mu_k^2)(z^2 - \mu_k^2)} + \\ + \frac{1}{2\sigma} \sum_{k=-\infty}^{-1} [a_{2k} + a_{-2k}] \frac{S_v(\sigma z^2)}{S_v(\sigma \nu_k^2)(z^2 - \nu_k^2)},$$

и аналогично

$$z\psi(z^2) = a_0^* \frac{S_v(\sigma z^2)}{\sigma z S_v(0)} + \frac{1}{2\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} [a_{2k-1} - a_{-2k+1}] \frac{z S_v(\sigma z^2)}{\mu_k S_v(\sigma \mu_k^2)(z^2 - \mu_k^2)} + \\ + \frac{1}{2\sigma} \sum_{k=-\infty}^{-1} [a_{2k} - a_{-2k}] \frac{z S_v(\sigma z^2)}{\nu_k S_v(\sigma \nu_k^2)(z^2 - \nu_k^2)}.$$

Сложением этих рядов, с учетом того, что $\mu_k = -\mu_{-k}$ и $\nu_k = -\nu_{-k}$ ($1 \leq k < +\infty$), мы, в силу (4.46), приходим к разложению (4.39) теоремы, если принять во внимание определения (4.11) и (4.26) последовательности чисел $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ и системы функций $\{\Omega_0^*(z), [\Omega_k^*(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}$.

2°. Ввиду интерполяционных свойств (4.40) суммы $f(z)$ ряда (4.39) его частные суммы просто совпадают с суммами $S_{n, \pi}(z; f)$ из (4.33).

Поэтому и ввиду условия (4.38) — $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^{p, \frac{\omega-1}{2}}$ теоремы, сходимость ряда (4.39) к своей сумме $f(z) \in W_{2, \pi}^{p, \omega}$ и в метрике $W_{2, \pi}^{p, \omega}$ устанавливается вполне аналогично утверждению 2° теоремы 4.2.

(г) В заключение параграфа приведем общую интерполяционную теорему, вытекающую из результатов, приведенных выше.

Но предварительно, наряду с пространством $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^{p, \frac{\omega-1}{2}}$ с нормой $\|\{a_k\}\|_{p, \frac{\omega-1}{2}}$, для любого $a_0^* \in \mathbb{C}$ введем также в рассмотрение про-

странство $l_{\bullet}^{p, \frac{\omega-1}{2}}$ последовательностей $\{a_k\}^* = \{a_0^*, [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\}$ с нормой

$$\|\{a_k\}^*\|_{p, \frac{\omega-1}{2}} = \left\{ |a_0^*|^p + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p (1 + |k|)^{\frac{\omega-1}{2}} \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (4.48)$$

Теорема 4.5. 1°. Для любой последовательности комплексных чисел

$$\{a_0^*, [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\} \in l_{\bullet}^{p, \frac{\omega-1}{2}} \quad (1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1) \quad (4.49)$$

ряд

$$f(z) = a_0^* \Omega_0^*(z) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \Omega_k(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.50)$$

равномерно сходится в любом круге $|z| \leq R < +\infty$ и удовлетворяет интерполяционным условиям

$$f'(l_0) = a_0^*, \quad f(l_k) = a_k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (4.51)$$

2°. Ряд (4.50) сходится к своей сумме $f(z) \in W_{2, \pi}^{p, \omega}$ также и в

метрике $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ и осуществляет линейное непрерывное отображение всего пространства $l_{\sigma}^{p,\frac{\omega-1}{2}} (\equiv l_{\sigma}^{p,\frac{\omega-1}{2}})$ на все пространство $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$, причем

$$\|f; e\{+\}\|_{p,\omega} \asymp \| \{a_k\}^* \|_{p,\frac{\omega-1}{2}}. \quad (4.52)$$

Доказательство. Все утверждения этой теоремы, кроме двойного неравенства (4.52), были установлены нами в теоремах 4.1, 4.2 и 4.4.

В теоремах 4.1 и 4.4 было установлено, что для любого элемента $\{a_k\}^* \in l_{\sigma}^{p,\frac{\omega-1}{2}}$ и для каждой функции $f(z)$, представимой рядом (4.50), справедлива оценка вида (4.40), которая, если воспользоваться обозначением (4.48), принимает вид

$$\|f; e\{+\}\|_{p,\omega} \leq D(p, \sigma) \| \{a_k\}^* \|_{p,\frac{\omega-1}{2}}, \quad (4.53)$$

где $D(p, \sigma) > 0$ от $\{a_k\}^*$ не зависит.

Таким образом, посредством ряда (4.50) определяется некоторый линейный и ограниченный оператор L , отображающий банахово пространство $l_{\sigma}^{p,\frac{\omega-1}{2}}$ в банахово пространство $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$.

Далее, поскольку любая функция $f(z) \in W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ разлагается в ряд вида (4.50) с коэффициентами $\{a_k\}^* \in l_{\sigma}^{p,\frac{\omega-1}{2}}$, то по теореме 4.3 оператор L обратимый. Следовательно, по известной теореме С. Банаха об обратном операторе, оператор L^{-1} также ограничен. Иначе говоря, для любой функции $f(z) \in W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ и для коэффициентов $\{a_k\}^*$ ее разложения в ряд (4.50) будем иметь

$$\| \{a_k\}^* \|_{p,\frac{\omega-1}{2}} = \| L^{-1} f \|_{p,\frac{\omega-1}{2}} < d_p \|f; e\{+\}\|_{p,\omega}, \quad (4.54)$$

где $d_p > 0$ не зависит от f .

Из приведенных двух неравенств (4.53) и (4.54) следует утверждение (4.52), и, тем самым, теорема полностью доказана.

Наконец, отметим, что если определить другую систему функций

$$|\tilde{\mathcal{Q}}_0^*(z), [\tilde{\mathcal{Q}}_k(z)]_{-\infty}^{+\infty}|, \quad (4.55)$$

положив

$$\tilde{\mathcal{Q}}_0^*(z) = \mathcal{Q}_0^*(z), \quad \tilde{\mathcal{Q}}_k^*(z) = (1 + |k|)^{(1-\omega)/2p} \mathcal{Q}_k^*(z) (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.56)$$

то из последней теоремы вытекает

Теорема 4.6. 1°. Система функций (4.55) при любом $p \in (1, +\infty)$ является базисом, изоморфным стандартному базису пространства l^p .

2°. В частности, при $p=2$ система (4.55) является базисом Рисса пространства $W_{2,\sigma}^{2,\omega}$.

§ 5. Построение биортогональных систем вектор-функций и их базисность

5.1. В данном пункте приводятся результаты, на которые существенно опирается все наше дальнейшее изложение.

(а) Нам, во-первых, понадобятся две простые, но известные леммы о функциях типа Миттаг—Леффлера $E_2(z; \mu)$, доказательство которых мы приведем и здесь, ради полноты изложения (см. [1], гл. III, § 1 и гл. VI, § 3).

Лемма 5.1. Для любых значений параметров α и β ($0 < \alpha, \beta < +\infty$) и для произвольных комплексных чисел z и λ ($z \neq \lambda$) справедлива формула

$$\int_0^{\sigma} E_2(z\tau^{1/2}; \alpha) \tau^{\alpha-1} E_2(\lambda(\sigma-\tau)^{1/2}; \beta) (\sigma-\tau)^{\beta-1} d\tau = \\ = \frac{E_2(\sigma^{1/2}z; \alpha + \beta - \frac{1}{2}) - E_2(\sigma^{1/2}\lambda; \alpha + \beta - \frac{1}{2})}{z - \lambda} \sigma^{\alpha+\beta-\frac{3}{2}} \quad (5.1)$$

$(0 < \sigma < +\infty).$

Доказательство. Пользуясь разложениями

$$E_2(z\tau^{1/2}; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{n/2} z^n}{\Gamma(\alpha + n/2)},$$

$$E_2(\lambda(\sigma-\tau)^{1/2}; \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sigma-\tau)^{m/2} \lambda^m}{\Gamma(\beta + m/2)},$$

будем иметь при $\lambda \neq 0$

$$\int_0^{\sigma} \tau^{\alpha-1} E_2(z\tau^{1/2}; \alpha) (\sigma-\tau)^{\beta-1} E_2(\lambda(\sigma-\tau)^{1/2}; \beta) d\tau = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n \lambda^m}{\Gamma(\alpha + n/2) \Gamma(\beta + m/2)} \int_0^{\sigma} \tau^{\frac{n}{2} + \alpha - 1} (\sigma-\tau)^{\frac{m}{2} + \beta - 1} d\tau = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n \lambda^m \sigma^{\frac{n+m}{2} + \alpha + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+m)/2)} = \sigma^{\alpha+\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n \lambda^{k-n} \sigma^{k/2}}{\Gamma(\alpha + \beta + k/2)} = \\ = \sigma^{\alpha+\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \sigma^{k/2}}{\Gamma(\alpha + \beta + k/2)} \sum_{n=0}^k \left(\frac{z}{\lambda}\right)^n = \sigma^{\alpha+\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{k/2} (z^{k+1} - \lambda^{k+1})}{\Gamma(\alpha + \beta + k/2)} = \\ = \frac{z E_2(\sigma^{1/2}z; \alpha + \beta) - \lambda E_2(\sigma^{1/2}\lambda; \alpha + \beta)}{z - \lambda} \sigma^{\alpha+\beta-1}. \quad (5.1')$$

Но легко видеть, что в установленном тождестве ограничение $\lambda \neq 0$ уже может быть снято. Наконец, пользуясь очевидным тождеством

$$z E_2\left(z; \mu + \frac{1}{2}\right) = E_2(z; \mu) - \frac{1}{\Gamma(\mu)},$$

из (5.1') приходим к формуле (5.1) леммы.

Лемма 5.2. *Справедливы тождества*

$$\sum_{k=0}^3 e^{-i\frac{\pi k}{2}r} E_2(e^{i\frac{\pi k}{2}} z; \mu) = 4z^r E_{1/2}(z^4; \mu + r/2) \quad (5.2)$$

($r=0, 1, 2, 3$).

Доказательство. Легко убедиться в справедливости следующих формул:

$$\sum_{k=0}^3 e^{i\frac{\pi k}{2}(n-r)} = \begin{cases} 4, & n = r + 4m, \\ 0, & n \neq r + 4m, \end{cases} \quad (r=0, 1, 2, 3; m=0, 1, 2, \dots). \quad (5.3)$$

Поскольку

$$E_2(e^{i\frac{\pi k}{2}} z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi k}{2}n} z^n}{\Gamma(\mu + n/2)},$$

то из (5.3) следует

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^3 e^{-i\frac{\pi k}{2}r} E_2(e^{i\frac{\pi k}{2}} z; \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/2)} \sum_{k=0}^3 e^{i\frac{\pi k}{2}(n-r)} = \\ &= 4z^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{4m}}{\Gamma(\mu + r/2 + 2m)}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает формула (5.2) леммы, поскольку, по определению (1.2') самой функции $E_{1/2}(z; \mu)$,

$$E_{1/2}\left(z; \mu + \frac{r}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\mu + r/2 + 2m)}.$$

Отметим еще, что из общей формулы (5.2) при $r=2$, в частности, следует также тождество

$$\sum_{k=0}^3 (-1)^k E_2(e^{i\frac{\pi k}{2}} z; \mu) = 4z^2 E_{1/2}(z^4; \mu + 1), \quad (5.4)$$

и поскольку по (1.6)

$$E_{1/2}(z; 2) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

то при $\mu=1$ получим также тождество

$$\sum_{k=0}^3 (-1)^k E_2(e^{i\frac{\pi k}{2}} z; 1) = 4 \operatorname{sh} z^2. \quad (5.4')$$

Следующая лемма также играет важную роль в дальнейших наших построениях.

Лемма 5.3 Для любых $z, \lambda \in \mathbb{C}$ и при произвольных значениях параметров

$$\nu \geq 0 \text{ и } 0 < \mu < \frac{1}{2} + \nu$$

справедлива формула

$$\sum_{k=0}^3 e^{-i\frac{\pi}{2}k} \int_0^{\tau} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} z\tau^{1/2}; \mu \right\} \tau^{\mu-1} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \lambda (\sigma-\tau)^{1/2}; \right. \\ \left. \frac{1}{2} + \nu - \mu \right\} (\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\mu} d\tau = \frac{4e^{i\frac{\pi}{4}} \sigma^{\nu-1}}{z-\lambda} |\pi_{\nu}(z) - \pi_{\nu}(\lambda)|, \quad (5.5)$$

где, согласно определению (4.9)

$$\pi_{\nu}(z) \equiv S_{\nu}(z z^2) = z z^2 E_{1/2}(-z^2 z^4; 1 + \nu). \quad (5.6)$$

Доказательство. Полагая пока, что $z \neq \lambda$, воспользуемся формулой (5.1) леммы 5.1, предварительно заменив в ней параметры $\alpha = \mu$, $\beta = \frac{1}{2} + \nu - \mu$, а вместо переменных z и λ соответственно по-

ложив $e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} z$ и $e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \lambda$. Тогда будем иметь для $k=0, 1, 2, 3$

$$\int_0^{\sigma} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} z\tau^{1/2}; \mu \right\} \tau^{\mu-1} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \lambda (\sigma-\tau)^{1/2}; \right. \\ \left. \frac{1}{2} + \nu - \mu \right\} (\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\mu} d\tau = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{z-\lambda} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}k} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \sigma^{1/2} z; \nu \right\} - \right. \\ \left. - e^{-i\frac{\pi}{2}k} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \sigma^{1/2} \lambda; \nu \right\} \right\} \sigma^{\nu-1}. \quad (5.7)$$

Но, согласно формуле (5.4), справедливы тождества:

$$\sum_{k=0}^3 e^{-i\pi k} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \sigma^{1/2} z; \nu \right\} = \\ = 4i\sigma z^2 E_{1/2}(-z^2 z^4; 1 + \nu) = 4i\pi_{\nu}(z), \\ \sum_{k=0}^3 e^{-i\pi k} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \sigma^{1/2} \lambda; \nu \right\} = \\ = 4i\lambda^2 E_{1/2}(-\lambda^2 \lambda^4; 1 + \nu) = 4i\pi_{\nu}(\lambda).$$

Поэтому, умножая тождества (5.7) на $e^{-i\frac{\pi}{2}k}$ и суммируя их по индексу $0 \leq k \leq 3$, мы приходим к формуле (5.5) леммы при $z \neq \lambda$. Но легко видеть, что она остается в силе и при $z = \lambda$.

(б) Приведем, во-вторых, формулировки двух основных теорем — специальные случаи ранних, значительно более общих результатов развитой автором теории гармонического анализа в комплексной области (см. [1], гл. IV, теорему 4.1 и гл. VI, теорему 6.11).

Теорема Д. Пусть $\frac{1}{2} < \mu < 1$ и $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$. Тогда:

1°. Интеграл

$$F(z) = \int_0^1 E_2(z\tau^{1/2}; \mu) \tau^{\mu-1} \varphi(\tau) d\tau \quad (5.8)$$

определяет целую функцию порядка ≤ 2 и типа $\leq \tau$.

2°. Справедливо неравенство

$$\sup_{\frac{\pi}{4} < |\tau| < \pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(re^{i\tau})|^2 r^{\omega} dr \right\} \leq M_{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(\tau)|^2 d\tau, \quad (5.9)$$

где $\omega = 4\mu - 3$ и M_{ω} — постоянная, зависящая только от μ .

Далее, пусть, как и в § 4, $W_{2, \tau}^{2, \omega}$ ($-1 < \omega < 1$, $0 < \tau < +\infty$) — класс целых функций $f(z)$ порядка $\rho = 2$ и нормального типа $\leq \tau$, подчиненных условию

$$\begin{aligned} \|f; e\{+\}\|_{2, \omega} &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(z)|^2 |z|^{\omega} |dz| \right)^{1/2} = \\ &= \left(\sum_{k=0}^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(re^{i\frac{\pi}{2}k})|^2 r^{\omega} dr \right)^{1/2} < +\infty. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Второе из необходимых нам предложений — это частный случай теоремы II введения при $\rho = 2$.

Теорема Е. 1°. Класс $W_{2, \tau}^{2, \omega}$ ($-1 < \omega < 1$) совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} E_2(e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} z\tau^{1/2}; \mu) \tau^{\mu-1} \varphi_k(\tau) d\tau, \quad (5.11)$$

где $\mu = \frac{\omega+3}{4}$, а функции $\varphi_k(\tau) \in L_2(0, \tau)$ ($0 \leq k \leq 3$) произвольны.

2°. Для данной функции $f(z) \in W_{2, \tau}^{2, \omega}$ функции $|\varphi_k(\tau)|^2$ единственны и почти всюду на $(0, \tau)$ определяются из соотношений

$$\varphi_k(\tau) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \Phi_{k+1}(-\tau) - e^{i\frac{\pi}{2}\mu} \Phi_k(\tau) \right] \quad (0 \leq k \leq 3), \quad (5.12)$$

где почти всюду на $(-\infty, +\infty)$

$$\Phi_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(e^{-i\frac{\pi}{2}k} v i^2) \frac{e^{-i\tau v} - 1}{-iv} v^{\mu-1} dv \quad (0 \leq k \leq 3), \quad (5.13)$$

при этом следует положить $\Phi_4(\tau) = \Phi_0(\tau)$.

Иначе говоря, посредством формул (5.11) и (5.12) — (5.13) реализуется линейное, взаимно-однозначное соответствие между пространством $W_{2, \tau}^{2, \omega}$ целых функций $f(z)$ с нормой $\|f; e\{+\}\|_{2, \omega}$ и прост-

ранством $L_2(0, \sigma)$ четырехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3$, $\varphi_k(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ ($0 \leq k \leq 3$) с нормой

$$\|\varphi\| = \left(\sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma |\varphi_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}. \quad (5.14)$$

Но, кроме того, это соответствие непрерывное, поскольку справедлива

Лемма 5.4. *В дополнение к утверждениям теоремы Е имеет место также двойное неравенство*

$$\|f; e\{+\}\|_{2, \omega} \asymp \|\varphi\|. \quad (5.15)$$

Доказательство. Во-первых, из (5.13) по равенству Парсеваля имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_k(\tau)|^2 d\tau &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_k(\tau)|^2 d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} |f(e^{-i\frac{\pi}{2}k} v^{1/2})|^2 v^{2(\mu-1)} dv = 2 \int_0^{+\infty} |f(e^{-i\frac{\pi}{2}k} r)|^2 r^\omega dr, \end{aligned}$$

так как $\mu = \frac{\omega+3}{4}$.

Отсюда и из (5.12), во-вторых, вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma |\varphi_k(\tau)|^2 d\tau \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^3 \int_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_k(\tau)|^2 d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^3 \int_0^{+\infty} |f(e^{-i\frac{\pi}{2}k} r)|^2 r^\omega dr = \frac{1}{\pi} \|f; e\{+\}\|_{2, \omega}^2, \end{aligned} \quad (5.16)$$

т. е. одна из двусторонних оценок (5.15) леммы.

Чтобы установить вторую из требуемых оценок, введем в рассмотрение целые функции

$$f_k(z) = \int_0^\sigma E_2 \left(e^{i\frac{\pi}{2} \left(k + \frac{1}{2} \right)} z^{\tau^{1/2}}; \mu \right) \tau^{\mu-1} \varphi_k(\tau) d\tau$$

$$(0 \leq k \leq 3) \quad (5.17)$$

и интервалы

$$\delta_k = \left\{ \varphi : \left| \frac{\pi}{2} \left(k + \frac{1}{2} \right) + \varphi \right| < \frac{\pi}{4} \right\} \quad (0 \leq k \leq 3),$$

заметив, что по теореме Д

$$\sup_{\varphi \in \delta_k} \left\{ \int_0^{+\infty} |f_k(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} \leq M_\mu \int_0^\sigma |\varphi_k(\tau)|^2 d\tau \quad (0 \leq k \leq 3).$$

Легко видеть, что последние оценки имеют место одновременно для всех $0 \leq k \leq 3$ лишь при $\varphi = \frac{\pi}{2} j$ ($0 \leq j \leq 3$).

Итак, справедливы неравенства

$$\int_0^{+\infty} |f_k(re^{i\frac{\pi}{2}j})|^2 r^\nu dr \leq M_\mu \int_0^\sigma |\varphi_k(\tau)|^2 d\tau \quad (0 \leq k, j \leq 3),$$

и поскольку по (5.11) и (5.17)

$$f(z) = \sum_{k=0}^3 f_k(z),$$

то мы будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\frac{\pi}{2}j})|^2 r^\nu dr &\leq 4 \sum_{k=0}^3 \int_0^{+\infty} |f_k(re^{i\frac{\pi}{2}j})|^2 r^\nu dr \leq \\ &\leq 4M_\mu \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma |\varphi_k(\tau)|^2 d\tau \quad (0 \leq j \leq 3). \end{aligned}$$

Сложением этих неравенств по индексу $j=0, 1, 2, 3$ получим обратную к (5.16) оценку

$$\|f; e[+]\|_{2,\infty}^2 \leq 16 M_\mu \|\varphi\|^2. \quad (5.18)$$

Из (5.16) и (5.18) следует утверждение (5.15) леммы.

5.2. (а) В начале § 4 нами была определена последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — множество всех нулей целой функции $\pi_\nu(z) = S_\nu(z^2)$ ($0 \leq \nu < 2$). Все эти нули простые, кроме двукратного нуля $\lambda_0 = 0$ и записываются в виде

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 0, \lambda_{2k-1} = \sqrt{x_k}, \lambda_{-2k+1} = -\sqrt{x_k}, \\ \lambda_{2k} = i\sqrt{x_k}, \lambda_{-2k} = -i\sqrt{x_k}, \end{aligned} \quad (1 \leq k < +\infty) \quad (5.19)$$

где $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — суть простые и вещественные нули функции $S_\nu(z^2)$.

Для значения параметра $\nu=1$

$$\pi_1(z) = S_1(z^2) = \sin z^2 \quad (5.20)$$

и очевидно, что

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 0, \lambda_{2k-1} = \sqrt{\pi_1^{-1}k}, \lambda_{-2k+1} = -\sqrt{\pi_1^{-1}k}, \\ \lambda_{2k} = i\sqrt{\pi_1^{-1}k}, \lambda_{-2k} = -i\sqrt{\pi_1^{-1}k}. \end{aligned} \quad (1 \leq k < +\infty) \quad (5.19')$$

Там же в § 4 была определена система целых функций

$$\{\Omega_0^*(z), [\Omega_k(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}, \quad (5.21)$$

где

$$\Omega_0^*(z) = \Gamma(1+\nu) \frac{\pi_\nu(z)}{\sigma z}, \quad \Omega_0(z) = \Gamma(1+\nu) \frac{\pi_\nu(z)}{\sigma z^2},$$

$$\Omega_k(z) = \frac{\pi_v(z)}{\pi_v(i_k)(z-i_k)} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.22)$$

Отметим также, что, в силу (5.20), при $v = 1$

$$\Omega_0^*(z) = \frac{\sin \sigma z^2}{\sigma z}, \quad \Omega_0(z) = \frac{\sin \sigma z^2}{\sigma z^2},$$

$$\Omega_k(z) = (\cos \sigma)^{-1} i_k^2 \frac{\sin \sigma z^2}{2\sigma i_k(z-i_k)} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5.22')$$

где последовательность чисел $\{i_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ определяется уже из (5.19').

(6) Согласно лемме 4.2 (2°), при $\rho = 2$ и $-1 < \omega < 1$, если параметр $v \in \left(\frac{3+\omega}{4}, 2\right)$, то каждая из функций системы (5.21) принадлежит классу $W_{2, \sigma}^{2, \infty}$. Поэтому, на основании теоремы Е (1°) можно утверждать, что при условии

$$-1 < \omega < 1, \quad \mu = \frac{3+\omega}{4}, \quad v \in (\mu, 2)$$

функции нашей системы допускают интегральные представления вида

$$\Omega_0^*(z) = \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} E_2 \left\{ e^{i \frac{\pi}{2} \left(k + \frac{1}{2}\right)} z^{\tau^{1/2}}; \mu \right\} \tau^{\mu-1} \varphi_{0,k}^*(\tau) d\tau,$$

$$\Omega_n(z) = \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} E_2 \left\{ e^{i \frac{\pi}{2} \left(k + \frac{1}{2}\right)} z^{\tau^{1/2}}; \mu \right\} \tau^{\mu-1} \varphi_{n,k}(\tau) d\tau \quad (5.23)$$

$$(-\infty < n < +\infty),$$

где вектор-функции $\varphi_0^*(\tau) = \{\varphi_{0,k}^*(\tau)\}_0^3$ и $\varphi_n(\tau) = \{\varphi_{n,k}(\tau)\}_0^3$ единственны и из класса $L_2(0, \sigma)$.

Пользуясь теоремой Е (2°) можно обратить формулы (5.23) и записать значения искомых вектор-функций в виде довольно сложных несобственных интегралов, вычисление которых не удается.

Однако оказалось возможным найти их явный вид совершенно иным путем — на основании леммы 5.3, притом при меньших ограничениях на параметры μ и v . Докажем лемму.

Лемма 5.5. *Для значений параметров*

$$0 \leq v < 2, \quad 0 < \mu < \frac{1}{2} + v$$

функции системы (5.21) допускают представления вида (5.23), где для $k=0, 1, 2, 3$

$$\varphi_{0,k}^*(\tau) = e^{-i \frac{\pi}{2} \left(k + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(1+v)}{4\sigma^v \Gamma\left(\frac{1}{2} + v - \mu\right)} (\sigma - \tau)^{v - \frac{1}{2} - \mu} \quad (5.24)$$

$$\varphi_{0,k}(\tau) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{4\tau^\nu \Gamma(1+\nu-\mu)} (\tau-\tau)^{\nu-\mu}, \quad (5.25)$$

$$\varphi_{n,k}(\tau) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})}}{4\tau^{\nu-1} \Gamma(\nu-\mu)} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \lambda_n (\tau-\tau)^{1/2}; \right. \\ \left. \frac{1}{2} + \nu - \mu \right\} (\tau-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\mu}, \quad (5.26)$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Доказательство. Заметим, что в разложении функции $E_2 \{ e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \lambda (\tau-\tau)^{1/2}; \frac{1}{2} + \nu - \mu \}$ по степеням переменной λ свободный член и коэффициенты при λ соответственно равны

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu - \mu\right)} \text{ и } e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \frac{(\tau-\tau)^{1/2}}{\Gamma(1+\nu-\mu)}.$$

Поэтому формулу (5.24) мы получим из тождества (5.5) леммы 5.3, положив в ней $\lambda=0$ и пользуясь определением (5.22) функции $\Omega_0^*(z)$. Если же продифференцировать тождество (5.5) по λ , а затем вновь положить $\lambda=0$, то получим формулу (5.25), пользуясь определением (5.22) функции $\Omega_0(z)$.

Наконец, формулы (5.26) также непосредственно следуют из того же тождества (5.5), если в нем положить $\lambda=\lambda_n$ ($n=\pm 1, \pm 2, \dots$) и вновь учесть определение (5.22) функций $\Omega_n(z)$. Лемма доказана, причем, согласно теореме E (2°), если $\mu = \frac{3+\omega}{4}$ и $\nu \in (\mu, 2)$, то в представлениях (5.23) подынтегральные вектор-функции $\varphi_0^*(\tau)$ и $\varphi_n(\tau)$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) почти везде на $(0, \tau)$ единственны.

(в) На интервале $(0, \tau)$ определим две системы четырехкомпонентных вектор-функций:

Систему

$$\{e_{0,k}^*(\tau), [e_{n,k}(\tau)]_{\pm n}^{\pm}\} \quad (k=0, 1, 2, 3), \quad (5.27)$$

где

$$e_{0,k}^*(\tau) = e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \frac{\tau^{\mu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}, \quad (5.28)$$

$$e_{n,k}(\tau) = E_2 \{ e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \lambda_n \tau^{1/2}; \mu \} \tau^{\mu-1} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

и систему

$$\{\omega_{0,k}^*(\tau), [\omega_{n,k}(\tau)]_{\pm n}^{\pm}\} \quad (k=0, 1, 2, 3), \quad (5.29)$$

где

$$\omega_{0,k}^*(\tau) = e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^\nu \Gamma(\frac{1}{2} + \nu - \mu)} (\sigma - \tau)^{\nu - \frac{1}{2} - \mu}, \quad (5.30)$$

$$\omega_{0,k}(\tau) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^\nu \Gamma(1+\nu-\mu)} (\sigma - \tau)^{\nu-\mu},$$

$$\omega_{n,k}(\tau) = \overline{\varphi_{n,k}(\tau)} =$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})}}{4\sigma^{\nu-1} \pi_\nu(\lambda_n)} E_2 \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \frac{1}{\lambda_n} (\sigma - \tau)^{1/2}, \frac{1}{2} + \nu - \mu \right\} (\sigma - \tau)^{\nu - \frac{1}{2} - \mu},$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.31)$$

Легко видеть, что как сами функции наших систем (5.27) и (5.29), так и произведения любых двух функций, взятых в отдельности по каждой из них, будут из $L_1(0, \sigma)$ при том же условии $0 < \mu < \frac{1}{2} + \nu$, поставленном нами в лемме 5.5.

Кроме того, легко видеть также, что если вместо прежнего параметр μ удовлетворяет условию $\frac{1}{2} < \mu < \nu$ ($0 < \nu < 2$), то функции наших систем будут уже из класса $L_2(0, \sigma)$, а произведения соответствующих пар функций из них вновь будут из $L_1(0, \sigma)$.

(г) Пусть

$$y(\tau) = \{y_k(\tau)\}_0^3 \text{ и } z(\tau) = \{z_k(\tau)\}_0^3 \quad (5.32)$$

— две произвольные четырехкомпонентные вектор-функции из $L_2(0, \sigma)$. Определим их скалярное произведение таким образом:

$$[y(\tau), z(\tau)] = [y, z] = \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma y_k(\tau) \overline{z_k(\tau)} d\tau. \quad (5.33)$$

Заметим, что для любой вектор-функции $y(\tau) \in L_2(0, \sigma)$

$$\|y\| = [y, y]^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma |y_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \geq 0,$$

при этом $\|y\| = 0$, лишь если на $(0, \sigma)$ почти везде $y(\tau) = 0$, т. е. если $y_k(\tau) = 0$ ($0 \leq k \leq 3$) почти везде на $(0, \sigma)$.

Докажем теперь теорему.

Теорема 5.1. Системы вектор-функций (5.27) и (5.29) биортогональны в метрике (5.33). Иными словами, положив

$$e_0^*(\tau) = \{e_{0,k}^*(\tau)\}_0^3, \quad e_n(\tau) = \{e_{n,k}(\tau)\}_0^3 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5.34)$$

$$\omega_0^*(\tau) = \{\omega_{0,k}^*(\tau)\}_0^3, \quad \omega_n(\tau) = \{\omega_{n,k}(\tau)\}_0^3 \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

будем иметь

$$[e_0^*, \omega_0^*] = 1, \quad (5.35)$$

$$[e_0^*, \omega_m] = 0, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.36)$$

$$[e_n, \omega_0^*] = 0, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.37)$$

$$[e_n, \omega_m] = \delta_{nm}, \quad n, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.38)$$

где δ_{nm} — символ Кронеккера.

Доказательство. Пользуясь представлением (5.23) функции $\mathcal{Q}_0^*(z)$ и формулами (5.28)–(5.30), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0^*(z) &\equiv \Gamma(1+\nu) \frac{\pi_\nu(z)}{\sigma z} = \Gamma(1+\nu) z E_{1/2}(-\sigma^2 z^2; 1+\nu) = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma E_2 \left(e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} z^{\tau^{1/2}; \mu} \tau^{\mu-1} \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Поскольку $\mathcal{Q}_0^*(0) = 0$ и $\frac{d}{dz} \mathcal{Q}_0^*(z)|_{z=0} = 1$, то, пользуясь значениями $e_{0,k}(\tau)$ и $e_{0,k}^*(\tau)$ из (5.28), отсюда соответственно получим

$$\begin{aligned} [e_0, \omega_0^*] &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma e_{0,k}(\tau) \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma E_2(0; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)} d\tau = \mathcal{Q}_0^*(0) = 0, \\ [e_0^*, \omega_0^*] &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma e_{0,k}^*(\tau) \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \tau^{\mu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)} d\tau = \frac{d}{dz} \mathcal{Q}_0^*(z)|_{z=0} = 1. \end{aligned}$$

Итак, как формула (5.35), так и (5.37), но пока лишь для значения $n=0$, установлены. Но мы имеем также $\mathcal{Q}_0^*(\lambda_n) = 0$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$), и поэтому, вновь пользуясь формулой (5.39), положив в ней $z = \lambda_n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) и принимая во внимание значения функций $e_{n,k}(\tau)$ из (5.28), получим

$$[e_n, \omega_0^*] = \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma e_{n,k}(\tau) \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)} d\tau = \mathcal{Q}_0^*(\lambda_n) = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Тем самым, утверждения (5.37) полностью доказаны.

Далее, из определений (5.28) и (5.30) функций $e_{0,k}^*(\tau)$ и $\omega_{0,k}(\tau)$ имеем:

$$\begin{aligned} [e_0^*, \omega_0] &= \\ &= \sum_{k=0}^3 e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(1+\nu)}{4\nu \Gamma(\mu+\frac{1}{2}) \Gamma(1+\nu-\mu)} \int_0^\sigma \tau^{\mu-\frac{1}{2}} (\sigma-\tau)^{\nu-\mu} d\tau = \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sigma}}{4} \sum_{k=0}^3 e^{i\frac{\pi}{2}k} = 0, \end{aligned}$$

т. е. формула (5.36) для значения $m=0$ справедлива.

Чтобы установить формулы (5.36) для остальных значений $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, пользуясь значением функции $\omega_{m,k}(\tau)$ из (5.31), запишем формулу (5.23) для функции $\Omega_m(z)$ в виде

$$\begin{aligned} \Omega_m(z) &= \frac{\pi_\nu(z)}{\pi_\nu(l_m)(z-l_m)} = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma E_2 \left[e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \tau^{\mu-1/2}; \mu \right] \tau^{\mu-1} \overline{\omega_{m,k}(\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отсюда, пользуясь обозначением (5.28), получим для $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} [e_0^*, \omega_m] &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma e_{0,k}^*(\tau) \overline{\omega_{m,k}(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \frac{\tau^{\mu-1/2}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \overline{\omega_{m,k}(\tau)} d\tau = \frac{d}{dz} \Omega_m(z)|_{z=0} = 0, \end{aligned}$$

поскольку для функции $\Omega_m(z)$, как и для $\pi_\nu(z)$, точка $z=0$ является нулем второго порядка. Итак, все формулы (5.36) также справедливы.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы нам осталось установить формулы (5.38).

Из определения (5.22) следует, что для $n, m = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\Omega_m(0) = 0, \quad \Omega_m(l_n) = \delta_{nm}.$$

Поэтому, в силу наших обозначений (5.28), из (5.40) получим, во-первых

$$\begin{aligned} [e_0, \omega_m] &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma e_{0,k}(\tau) \overline{\omega_{m,k}(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma \frac{\tau^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \varphi_{m,k}(\tau) d\tau = \Omega_m(0) = 0, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

и, во-вторых

$$\begin{aligned} [e_n, \omega_m] &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} e_{n,k}(\tau) \overline{\omega_{m,k}(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \lambda_n \tau^{1/2}; \mu \right\} \tau^{\mu-1} \overline{\omega_{m,k}(\tau)} d\tau = \\ &= Q_m(i_n) = \delta_{nm}; \quad n, m = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Представление (5.40) функции $Q_m(z)$, как суммы интегралов, очевидно остается в силе и при $m=0$, т. е. мы имеем

$$Q_0(z) = \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} z \tau^{1/2}; \mu \right\} \tau^{\mu-1} \overline{\omega_{0,k}(\tau)} d\tau.$$

Заметив, что по (5.22) $Q_0(0)=1$, $Q_0(i_n)=0$ ($n=\pm 1, \pm 2, \dots$), получим, во-первых

$$\begin{aligned} [e_0, \omega_0] &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} e_{0,k}(\tau) \overline{\omega_{0,k}(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} \tau^{\mu-1} \overline{\omega_{0,k}(\tau)} d\tau = Q_0(0)=1, \end{aligned}$$

и, во-вторых

$$\begin{aligned} [e_n, \omega_0] &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} e_{n,k}(\tau) \overline{\omega_{0,k}(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \lambda_n \tau^{1/2}; \mu \right\} \tau^{\mu-1} \overline{\omega_{0,k}(\tau)} d\tau = \\ &= Q_0(i_n) = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Легко видеть, что совокупность последних четырех соотношений эквивалентна требуемой формуле (5.38), и теорема полностью доказана.

5.3. Переходим к доказательству теорем разложений по системам вектор-функций

$$\{e_0^*(\tau), [e_n(\tau)]_{\pm\infty}^{\pm\infty}\} \text{ и } \{\omega_0^*(\tau), [\omega_n(\tau)]_{\pm\infty}^{\pm\infty}\}, \quad (5.41)$$

которые были определены нами формулами (5.34), (5.28) и (5.30)—(5.31).

С этой целью, во-первых, напомним, что теоремы 4.1—4.5 для значения $p=2$ были установлены нами в предположении, что параметр ν , участвующий в определении (5.6) функции $\kappa_+(z)$, а, следовательно, и в определении системы целых функций $\{\Omega_0^*(z), [\Omega_k(z)]_{\pm\infty}^{\pm\infty}\}$ и систем вектор-функций (5.41), удовлетворяет условию

$$\nu \in \left(\frac{3+\omega}{4}, \frac{5+\omega}{4} \right) \subset \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right), \quad -1 < \omega < 1. \quad (5.42)$$

Во-вторых, напомним также, что при условии (5.42) нули $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ целой функции $\pi_+(z) = S_+(zz^3)$ обладают всеми свойствами, отмеченными в 4.1 (б), поскольку тогда, в частности, будем иметь $\nu \in [0, 2)$.

Наконец, учитывая замечание, приведенное в конце пункта 5.2 (в), можем утверждать, что при условии

$$\frac{1}{2} < \mu = \frac{3+\omega}{4} < \nu < \frac{5+\omega}{4} < \frac{3}{2}, \quad -1 < \omega < 1 \quad (5.43)$$

система вектор-функций (5.24)–(5.26) полностью определена и принадлежит классу $L_2(0, \sigma)$.

(а) Как в следующей лемме, так и в приводимой за ней теореме, условие (5.43) считается соблюденным.

Лемма 5.6. Система вектор-функций

$$\{e_n^*(\tau), [e_n(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}\} \quad (5.44)$$

полна в классе вектор-функций

$$\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3 \in L_2(0, \sigma).$$

Доказательство. Для любой вектор-функции $\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3 \in L_2(0, \sigma)$ введем в рассмотрение целую функцию

$$f_\varphi(z) = \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} z^{-1/2}; \mu \right\} z^{\mu-1} \overline{\varphi_k(\tau)} d\tau,$$

которая, согласно теореме Е (1°), принадлежит классу $W_{2, \sigma}^{1, \mu}$ при $\mu = \frac{3+\omega}{4}$ ($-1 < \omega < 1$).

Ввиду определения (5.28) системы вектор-функций (5.44) и скалярного произведения (5.33), мы получим

$$\begin{aligned} f_\varphi(\lambda_n) &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \lambda_n^{-1/2}; \mu \right\} z^{\mu-1} \overline{\varphi_k(\tau)} d\tau = \\ &= [e_n^*, \varphi] \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$f'_\varphi(\lambda_0) = f'_\varphi(0) = \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})}}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} z^{\mu-\frac{1}{2}} \overline{\varphi_k(\tau)} d\tau = [e_0^*, \varphi]. \quad (5.45')$$

Поэтому, если для некоторой вектор-функции $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$

$$[e_0^*, \varphi] = [e_n^*, \varphi] = 0 \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

то из (5.45)–(5.45') будет следовать, что для ассоциированной с нею функции $f_\varphi(z) \in W_{2, \sigma}^{1, \mu}$ имеем

$$f'_{\varphi}(\lambda_0) = f_{\varphi}(\lambda_n) = 0 \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Отсюда, согласно теореме единственности 4.3, вытекает, что $f_{\varphi}(z) \equiv 0$, и поэтому, по теореме Е (2°) имеем также $\varphi_k(\tau) = 0$ ($0 \leq k \leq 3$), т. е. вектор-функция $\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3 = 0$ почти всюду на $(0, \sigma)$, и лемма доказана.

(6) Как и в пункте 4.2 (г), обозначим через $l_{2, \frac{\omega-1}{2}}^{\omega-1}$ ($-1 < \omega < 1$) пространство последовательностей комплексных чисел $\{a_0^*, [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\}$, для которых конечна норма

$$\| [a_k]^* \|_{2, \frac{\omega-1}{2}} = \left\{ |a_0^*|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{\frac{\omega-1}{2}} |a_k|^2 \right\}^{1/2} < +\infty. \quad (5.46)$$

Теорема 5.2. 1°. Для любого элемента $\{a_0^*, [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\} \in l_{2, \frac{\omega-1}{2}}^{\omega-1}$ ($-1 < \omega < 1$) вектор-ряд

$$\varphi(\tau) = a_0^* \omega_0^*(\tau) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \omega_j(\tau) \quad (5.47)$$

осуществляет взаимно-однозначное и непрерывное отображение

всего пространства $l_{2, \frac{\omega-1}{2}}^{\omega-1}$ на все пространство вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3 \in L_2(0, \sigma)$.

При этом коэффициенты ряда (5.47) определяются по формулам

$$a_0^* = [\varphi, e_0^*], \quad a_j = [\varphi, e_j] \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.48)$$

2°. Для норм вектор-функции $\varphi(\tau)$ и последовательности чисел $\{a_0^*, [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\}$ справедлива двойная оценка

$$\|\varphi\| = [\varphi, \varphi]^{1/2} \asymp \| [a_k]^* \|_{2, \frac{\omega-1}{2}}. \quad (5.49)$$

Доказательство. Согласно теореме 4.5 ряд

$$f(z) = \overline{a_0^*} \varpi_0^*(z) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{a_j} \varpi_j(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

осуществляет линейное взаимно-однозначное отображение всего про-

странства $\{a_0^*, [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\} \in l_{2, \frac{\omega-1}{2}}^{\omega-1}$ на все пространство целых функций $f(z) \in W_{2, \frac{\omega}{2}}^2$. При этом справедливо двойное неравенство

$$\|f; e[+]\|_{2, \omega} \asymp \| [a_k]^* \|_{2, \frac{\omega-1}{2}}, \quad (5.50)$$

и в силу интерполяционных свойств (4.29) функций системы $\{\varpi_0^*(z), [\varpi_k(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}$, будем иметь:

$$f'(\lambda_0) = \overline{a_0^*}, \quad f(\lambda_k) = \overline{a_k} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.51)$$

С другой стороны, согласно теореме E , посредством формулы представления функций всего класса $W_{2, \frac{m}{2}}^{\frac{1}{2}, m}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} E_2 \left\{ e^{i \frac{\pi}{2} (k + \frac{1}{2})} z^{1/2}; \mu \right\} \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_k(\tau)} d\tau \quad (5.52)$$

осуществляется линейное взаимно-однозначное отображение всего пространства целых функций $f(z) \in W_{2, \frac{m}{2}}^{\frac{1}{2}, m}$ на все пространство четырех-компонентных вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3 \in L_2(0, \pi)$. При этом, согласно лемме 5.4, имеет место двойное неравенство

$$\|f; e\|_{2, \infty} \asymp \|\varphi\|. \quad (5.53)$$

Из двойных неравенств (5.50) и (5.53) легко следует непрерывность обоих наших отображений, а также справедливость двойного неравенства (5.49) теоремы.

Поскольку, таким образом, пространство последовательностей $l_{2, \frac{m-1}{2}}$ гомеоморфно пространству вектор-функций $L_2(0, \pi)$, то для завершения доказательства теоремы нам остается лишь установить справедливость интерполяционных формул (5.48). Для этого заметим, что из (5.52) мы по (5.28), во-первых, имеем

$$\begin{aligned} f'(\lambda_0) = f'(0) &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} \frac{e^{i \frac{\pi}{2} (k + \frac{1}{2})}}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \tau^{\mu - \frac{1}{2}} \overline{\varphi_k(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} e_{0, k}^*(\tau) \overline{\varphi_k(\tau)} d\tau = [e_0^*, \varphi] = [\overline{\varphi}, e_0^*], \end{aligned}$$

и, во-вторых

$$\begin{aligned} f(\lambda_n) &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} E_2 \left\{ e^{i \frac{\pi}{2} (k + \frac{1}{2})} \lambda_n z^{1/2}; \mu \right\} \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_k(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\pi} e_{n, k}(\tau) \overline{\varphi_k(\tau)} d\tau = [e_n, \varphi] = [\overline{\varphi}, e_n], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (5.51), следуют требуемые формулы (5.48), и теорема полностью доказана.

В заключение отметим еще неравенство

$$|a_0^*| \leq \sqrt{2} \left\{ \sigma^{\mu} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1} \|\varphi\|, \quad (5.54)$$

которое легко следует из (5.48).

(6) Перейдем теперь к доказательству теоремы разложения для второй из биортогональных вектор-систем (5.41), т. е. для системы $\{e_0^*(\tau), [e_n(\tau)]_{\pm \infty}^{\pm \infty}\}$.

Сначала же отметим, что если взамен параметра $\mu = \frac{3+\omega}{4}$ ($-1 < \omega < 1$) ввести новый —

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} + \nu - \mu, \quad (5.55)$$

то из основного условия (5.43) легко вытекает справедливость аналогичного условия и для $\bar{\mu}$, т. е. мы будем иметь

$$\frac{1}{2} < \bar{\mu} = \frac{3+\tilde{\omega}}{4} < \nu < \frac{5+\tilde{\omega}}{4}, \quad -1 < \tilde{\omega} < 1, \quad (5.43')$$

где $\tilde{\omega} = 4(\nu - 1) - \omega$.

С параметром $\bar{\mu}$ будем ассоциировать последовательность вектор-функций $\{\tilde{e}_{0,k}(\tau), [\tilde{e}_{n,k}(\tau)]_{-\bar{\mu}}^{+\bar{\mu}}\}$ ($k=0, 1, 2, 3$), по аналогии с формулами (5.28):

$$\tilde{e}_{0,k}(\tau) = e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \frac{\tau^{\bar{\mu}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\bar{\mu}+\frac{1}{2}\right)}, \quad (k=0, 1, 2, 3) \quad (5.28')$$

$$\tilde{e}_{n,k}(\tau) = E_2 \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \lambda_n \tau^{\frac{1}{2}}; \bar{\mu} \right\} \tau^{\bar{\mu}-1} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Сравнивая формулы (5.28') и (5.30)–(5.31), ввиду обозначения (5.55) мы приходим к следующим соотношениям для $k=0, 1, 2, 3$

$$\tilde{e}_{0,k}(\tau) = e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \frac{4\sigma^\nu}{\Gamma(1+\nu)} \overline{\omega_{0,k}(\sigma-\tau)},$$

$$\tilde{e}_{n,k}(\tau) = e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \frac{4\sigma^\nu}{\Gamma(1+\nu)} \overline{\omega_{0,k}^*(\sigma-\tau)},$$

$$\tilde{e}_{n,k}(\tau) = e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} 4\sigma^{\nu-1} \pi_n(\lambda_n) \overline{\omega_{n,k}(\sigma-\tau)} \quad (n=\pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.56)$$

Наряду с этим по аналогии с формулами (5.30)–(5.31) введем вторую систему вектор-функций $\{\tilde{\omega}_{0,k}(\tau), [\tilde{\omega}_{n,k}(\tau)]_{-\bar{\mu}}^{+\bar{\mu}}\}$ ($k=0, 1, 2, 3$), положив

$$\tilde{\omega}_{0,k}(\tau) = e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu - \bar{\mu}\right)} (\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\bar{\mu}},$$

$$\tilde{\omega}_{0,k}(\tau) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^\nu \Gamma(1+\nu-\mu)} (\sigma-\tau)^{\nu-\mu}, \quad (5.30')$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{n,k}(\tau) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})}}{4\sigma^{\nu-1}\pi'_\nu(\lambda_n)} E_2[e^{-i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} i_n(\sigma-\tau)^{\frac{1}{2}}; \\ &\quad \frac{1}{2} + \nu - \mu] (\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\mu} \end{aligned} \quad (5.31')$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Сравнивая формулы (5.30') — (5.31') и (5.28), ввиду обозначения (5.55), приходим к соотношениям для $k=0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{0,k}^*(\tau) e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^\nu} \overline{e_{0,k}(\sigma-\tau)}, \\ \tilde{\omega}_{0,k}(\tau) = e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^\nu} \overline{e_{0,k}^*(\sigma-\tau)}, \\ \tilde{\omega}_{n,k}(\tau) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})}}{4\sigma^{\nu-1}\pi'_\nu(\lambda_n)} \overline{e_{n,k}(\sigma-\tau)} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (5.57)$$

На основании теоремы 5.1 докажем, что справедлива также Теорема 5.1'. Системы вектор-функций (5.56) и (5.57) биортогональны в принятой нами метрике (5.33).

Иными словами, положив

$$\begin{aligned} \tilde{e}_0(\tau) &= \{\tilde{e}_{0,k}^*(\tau)\}_0^3, \quad \tilde{e}_n(\tau) = \{\tilde{e}_{n,k}^*(\tau)\}_0^3 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \tilde{\omega}_0(\tau) &= \{\tilde{\omega}_{0,k}^*(\tau)\}_0^3, \quad \tilde{\omega}_n(\tau) = \{\tilde{\omega}_{n,k}^*(\tau)\}_0^3 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (5.58)$$

будем иметь:

$$[\tilde{e}_0, \tilde{\omega}_0] = 1, \quad [\tilde{e}_m, \tilde{\omega}_m] = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5.59)$$

$$[\tilde{e}_n, \tilde{\omega}_0] = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad [\tilde{e}_n, \tilde{\omega}_m] = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Доказательство. Будем опираться на формулы (5.56), (5.57) и одновременно воспользуемся утверждениями (5.35) — (5.38) теоремы 5.1. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} [\tilde{e}_0, \tilde{\omega}_0] &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma \overline{\omega_{0,k}(\sigma-\tau)} e_{0,k}(\tau-\tau) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^3 \int_0^\sigma e_{0,k}(\tau) \overline{\omega_{0,k}(\tau)} d\tau = [e_0, \omega_0] = 1, \end{aligned}$$

$$[\tilde{e}_0, \tilde{\omega}_0] = \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} e_{0,k}(\tau) \overline{\omega_{0,k}(\tau)} d\tau = [e_0, \omega_0] = 0,$$

$$\begin{aligned} [\tilde{e}_n, \tilde{\omega}_0] &= \sigma^{-1} \pi'_v(\lambda_n) \Gamma(1+\nu) \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} e_{n,k}(\tau) \overline{\omega_{n,k}(\tau)} d\tau = \\ &= \sigma^{-1} \pi'_v(\lambda_n) \Gamma(1+\nu) [e_0, \omega_n] = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

Аналогично будем иметь:

$$[\tilde{e}_0, \tilde{\omega}_0] = \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} e_{0,k}^*(\tau) \overline{\omega_{0,k}(\tau)} d\tau = [e_0^*, \omega_0] = 0,$$

$$[\tilde{e}_0, \tilde{\omega}_m] = \frac{\sigma}{\Gamma(1+\nu) \pi'_v(\lambda_m)} \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} e_{m,k}(\tau) \overline{\omega_{0,k}(\tau)} d\tau =$$

$$\frac{\sigma}{\Gamma(1+\nu) \pi'_v(\lambda_m)} [e_m, \omega_0] = 0 \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$[\tilde{e}_0, \tilde{\omega}_0] = \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} e_{0,k}^*(\tau) \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)} d\tau = [e_0^*, \omega_0^*] = 1,$$

$$[\tilde{e}_0, \tilde{\omega}_m] = \frac{\sigma}{\Gamma(1+\nu) \pi'_v(\lambda_m)} \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} e_{m,k}(\tau) \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)} d\tau =$$

$$= \frac{\sigma}{\Gamma(1+\nu) \pi'_v(\lambda_m)} [e_m, \omega_0^*] = 0 \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

и, наконец,

$$[\tilde{e}_n, \tilde{\omega}_m] = \frac{\pi'_v(\lambda_n)}{\pi'_v(\lambda_m)} \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} e_{m,k}(\tau) \overline{\omega_{n,k}(\tau)} d\tau =$$

$$= \frac{\pi'_v(\lambda_n)}{\pi'_v(\lambda_m)} [e_m, \omega_n] = \delta_{nm} \quad (n, m = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Таким образом, все соотношения (5.59) теоремы доказаны.

В связи с введением параметров

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2} + \nu - \mu \quad \text{и} \quad \tilde{\omega} = 4(\nu - 1) - \omega \quad (-1 < \tilde{\omega} < 1),$$

мы выше видели, что они удовлетворяют условию (5.43'), не только аналогичному, но и эквивалентному условию (5.43), при соблюдении которого была доказана теорема 5.2.

Пусть $l_{2, \frac{1-\omega}{2}}(-1 < \omega < 1)$ — пространство последовательностей комплексных чисел $[b_0^*, [b_k]_{k=-\infty}^{+\infty}]$, для которых конечна норма

$$\|b_k\|_{2, \frac{1-\omega}{2}}^2 = \left\{ |b_0^*|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{\frac{1-\omega}{2}} |b_k|^2 \right\}^{1/2} < +\infty. \quad (5.60)$$

Теорема 5.3. 1°. Для любого элемента $\{b_0^*, [b_k]_{-\infty}^{+\infty}\} \in l_{2, \frac{1-\omega}{2}} \quad (-1 < \omega < 1)$ при условии (5.43) вектор-ряд

$$\varphi(\tau) = b_0^* e_0^*(\tau) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j e_j(\tau) \quad (5.61)$$

осуществляет взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l_{2, \frac{1-\omega}{2}}$ на все пространство вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3 \in L_2(0, \sigma)$. При этом, коэффициенты ряда (5.61) определяются по формулам

$$b_0^* = [\varphi, \omega_0^*], \quad b_j = [\varphi, \omega_j] \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.62)$$

2°. Для норм вектор-функций $\varphi(\tau)$ и последовательности чисел $\{b_0^*, [b_k]_{-\infty}^{+\infty}\}$ справедлива двойная оценка

$$\|\varphi\| = [\varphi, \varphi]^{1/2} \asymp \|b_k\|_{2, \frac{1-\omega}{2}}. \quad (5.63)$$

Доказательство. Заметим сначала, что множества вектор-функций

$$\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3 \in L_2(0, \sigma) \quad \text{и} \quad \bar{\varphi}(\tau) = \{e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \overline{\varphi_k(\sigma-\tau)}\}_0^3 \in L_2(0, \sigma)$$

совпадают, причем, очевидно, $\|\Phi(\sigma-\tau)\| = \|\Phi(\tau)\|$. Следовательно, все утверждения теоремы 5.2 относительно множества вектор-рядов

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \tilde{a}_0^* \tilde{\omega}_0^*(\tau) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_j^* \tilde{\omega}_j(\tau) \quad (5.64)$$

и пространств последовательностей $\{\tilde{a}_0^*, [\tilde{a}_k]_{-\infty}^{+\infty}\} \in l_{2, \frac{\omega-1}{2}}$ останутся в силе.

Убедимся, что указанные утверждения эквивалентны утверждениям данной теоремы.

Воспользовавшись тождествами (5.56) и (5.57), мы последовательно будем иметь из (5.64):

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0^* = [\tilde{\varphi}, \tilde{\omega}_0^*] &= \frac{4\sigma^\nu}{\Gamma(1+\nu)} [\overline{\varphi(\sigma-\tau)}, \overline{\omega_0(\sigma-\tau)}] = \\ &= \frac{4\sigma^\nu}{\Gamma(1+\nu)} [\overline{\varphi}, \overline{\omega_0}], \end{aligned}$$

$$\tilde{a}_0^* \tilde{\omega}_{0,k}^*(\tau) = e^{i\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})} \frac{[\overline{\varphi}, \overline{\omega_0}]}{[\overline{\varphi}, \overline{\omega_0}] e_{0,k}(\sigma-\tau)} \quad (0 \leq k \leq 3), \quad (5.65)$$

$$\tilde{a}_0^* = [\tilde{\varphi}, \tilde{\omega}_0^*] = \frac{4\sigma^\nu}{\Gamma(1+\nu)} [\overline{\varphi(\sigma-\tau)}, \overline{\omega_0^*(\sigma-\tau)}] = \frac{4\sigma^\nu}{\Gamma(1+\nu)} [\overline{\varphi}, \overline{\omega_0^*}],$$

$$\overline{\alpha_0} \overline{\omega_0}, k(\tau) = e^{i \frac{\pi}{2} \left(k + \frac{1}{2}\right)} \overline{[\varphi, \omega_0]} \overline{e_{0,k}(\tau - \tau)} \quad (0 \leq k \leq 3). \quad (5.66)$$

Далее, из тех же тождеств получим для всех $j = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} \overline{a_j} = [\overline{\varphi}, \overline{e_j}] &= 4 \tau^{-1} \overline{\pi_v(\lambda_j)} [\overline{\varphi(\tau - \tau)}, \overline{\omega_j(\tau - \tau)}] = \\ &= 4 \tau^{-1} \overline{\pi_v(\lambda_j)} \overline{[\varphi, \omega_j]} \end{aligned}$$

и поэтому

$$\overline{\alpha_j} \overline{\omega_j}, k(\tau) = e^{i \frac{\pi}{2} \left(k + \frac{1}{2}\right)} \overline{[\varphi, \omega_j]} \overline{e_{j,k}(\tau - \tau)} \quad (0 \leq k \leq 3). \quad (5.67)$$

Ввиду формул (5.65), (5.66) и (5.67) вектор-ряд (5.64) может быть записан в виде скалярных рядов

$$\begin{aligned} e^{i \frac{\pi}{2} \left(k + \frac{1}{2}\right)} \overline{\varphi_k(\sigma - \tau)} &= e^{i \frac{\pi}{2} \left(k + \frac{1}{2}\right)} \overline{[\overline{\varphi}, \overline{\omega_0}]} \overline{e_{0,k}(\sigma - \tau)} + \\ &+ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{[\varphi, \omega_j]} \overline{e_{j,k}(\sigma - \tau)} \quad (0 \leq k \leq 3). \end{aligned}$$

Перейдя в них к сопряженным величинам, предварительно заменив переменную $\sigma - \tau$ на τ , эти ряды вновь можем записать в векторной форме (5.61) теоремы, причем коэффициенты $\{b_0, [b_k]_{-\infty}^{+\infty}\}$ определятся из соотношений

$$b_0 = [\varphi, \omega_0] = \frac{\Gamma(1+\nu)}{4 \tau^\nu} \overline{[\alpha_0]}, \quad b_0 = [\varphi, \omega_0] = \frac{\Gamma(1+\nu)}{4 \sigma^\nu} \overline{[\alpha_0]}, \quad (5.68)$$

$$b_j = [\overline{\varphi}, \overline{\omega_j}] = \frac{\overline{[\alpha_j]}}{4 \sigma^{\nu-1} \pi_v(\lambda_j)} \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Заметим теперь, что поскольку по определению $\pi_v(z) = S_v(z^2)$, то

$$\pi_v(\lambda_j) = 2 \lambda_j S_v(\lambda_j^2) \quad (1 \leq |j| < +\infty). \quad (5.69)$$

Далее, по лемме 1.6

$$|S_v(\lambda_j^2)| \asymp |\lambda_j|^{2(1-\nu)} \quad (1 \leq |j| < +\infty),$$

а по определению (4.11) последовательности $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ и по (4.22)

$$|\lambda_j| \asymp (1 + |j|)^{1/2} \quad (1 \leq |j| < +\infty).$$

Поэтому из (5.69) следует двойное неравенство

$$|\pi_v(\lambda_j)| \asymp (1 + |j|)^{\frac{3}{2} - \nu} \quad (1 \leq |j| < +\infty),$$

откуда и из (5.68) следуют двойные неравенства

$$\begin{aligned} |b_j| &\asymp (1 + |j|)^{\nu - \frac{3}{2}} \overline{[\alpha_j]} \quad (1 \leq |j| < +\infty), \\ (1 + |j|)^{\frac{1-\nu}{2}} |b_j|^2 &\asymp (1 + |j|)^{\frac{\nu-1}{2}} \overline{[\alpha_j]^2} \quad (1 \leq |j| < +\infty), \end{aligned} \quad (5.70)$$

поскольку $\tilde{\omega} = 4\nu - 4 - \omega$.

Следовательно, нормы

$$\| \{b_j\}^* \|_{2, \frac{1-\omega}{2}} \text{ и } \| \{a_j\}^* \|_{2, \frac{\omega-1}{2}}$$

конечны одновременно и так как, очевидно,

$$\|f\| = \|\tilde{f}\| \asymp \| \{a_j\}^* \|_{2, \frac{\omega-1}{2}},$$

то двойное неравенство (5.63) теоремы также доказано.

(в) В заключение параграфа отметим следующее.

От рассмотренных выше вектор-систем (5.41) перейдем к вектор-системам

$$\{\Phi_0^*(\tau), [\Phi_n(\tau)]_{\pm}^{\pm}\} \text{ и } \{\Psi_0^*(\tau), [\Psi_n(\tau)]_{\pm}^{\pm}\}, \quad (5.71)$$

положив

$$\Phi_0^*(\tau) = e_0^*(\tau), \quad \Phi_n(\tau) = (1 + |n|)^{(1-\omega)/4} e_n(\tau),$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.72)$$

$$\Psi_0^*(\tau) = \omega_0^*(\tau), \quad \Psi_n(\tau) = (1 + |n|)^{(\omega-1)/4} \omega_n(\tau).$$

Очевидно, что системы (5.71), в силу теоремы 5.1, также биортогональны в принятой нами метрике $L_2(0, \sigma)$. Тогда установленные выше две основные теоремы 5.2 и 5.3 могут быть сформулированы в таком виде.

Теорема 5.4. *Биортогональные на $(0, \sigma)$ вектор-системы (5.72) являются базисами Рисса пространства вектор-функций $L_2(0, \sigma)$.*

В связи с приведенной формулировкой отметим, что теорему 5.3 можно свести к теореме 5.2 также на основании известной теоремы о базисности Рисса биортогональных систем (см. [7], гл. VI). Однако, автор предпочел изложить здесь метод прямого сведения одной теоремы к другой.

Наконец, в заключение параграфа отметим еще, что как в теоремах 5.2 и 5.3, так и в их объединении—теореме 5.4, на параметр ω ставилось ограничение (5.43)

$$\frac{1}{2} < \mu = \frac{3+\omega}{4} < \nu < \frac{5+\omega}{4} < \frac{3}{2}, \quad -1 < \omega < 1,$$

и, тем самым, он, в частности, может принимать и значение $\nu=1$.

Но в этом случае нули $\{\lambda_k\}_{\pm}^{\pm}$ функции $\tau_1(z) = \sin \sigma z^2$ записывались в явном виде (5.19'), ввиду чего формулы (5.27)—(5.31), посредством которых были определены наши биортогональные системы вектор-функций, также запишутся в наиболее простом и явном виде.

§ 6. Задача типа Коши и особая краевая задача в комплексной области

6.1. В данном пункте сначала приводятся определение и сводка лишь некоторых простейших свойств интегро-дифференциальных операторов Римана—Лиувилля. Более полно эти свойства изложены в

монографии автора (см. [1], гл. IX, § 1). Затем для одного модельного оператора типа Римана—Лиувилля в комплексной области ставится задача типа задачи Коши, единственное решение которой выражается посредством функции типа Миттаг—Леффлера $E_2(z; \mu)$.

(а) Пусть $f(x)$ —произвольная функция из класса $L(0, l)$ ($0 < l < +\infty$). Интегралом порядка α ($0 < \alpha < +\infty$) от функции $f(x)$ с началом в точке $x = 0$ принято называть функцию

$$D^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \in (0, l). \quad (6.1)$$

На основании теоремы Фубини приходим к интегральному неравенству

$$\int_0^l |D^{-\alpha} f(x)| dx \leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^l (l-t)^{\alpha} |f(t)| dt < +\infty$$

и, следовательно, к утверждению

1°. Если $f(x) \in L(0, l)$, то при любом α ($0 < \alpha < +\infty$) функция $D^{-\alpha} f(x)$ определена почти всюду на $(0, l)$ и принадлежит классу $L(0, l)$.

В связи с этим отметим, что применение оператора $D^{-\alpha}$ к функции x^{γ} ($-1 < \gamma < +\infty$) легко приводит нас к формуле

$$D^{-\alpha} \left\{ \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{x^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)} \in L(0, l). \quad (6.2)$$

2°. В каждой точке Лебега функции $f(x) \in L(0, l)$ и, следовательно, почти всюду на $(0, l)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} D^{-\alpha} f(x) = f(x). \quad (6.3)$$

Ввиду этого свойства естественно определение (6.1) оператора $D^{-\alpha} f(x)$ распространить на значение $\alpha = 0$, положив

$$D^{-0} f(x) = f(x), \quad x \in (0, l). \quad (6.1')$$

3°. Если $f(x) \in L(0, l)$ и числа α_k ($0 \leq \alpha_k < +\infty$) ($k = 1, 2$) произвольны, то почти всюду на $(0, l)$

$$D^{-\alpha_1} \{D^{-\alpha_2} f(x)\} = D^{-\alpha_2} \{D^{-\alpha_1} f(x)\} = D^{-(\alpha_1+\alpha_2)} f(x). \quad (6.4)$$

Перейдем теперь к определению производной произвольного порядка и укажем ряд ее свойств.

Пусть α ($0 < \alpha < +\infty$) задано, и целое число $p > 1$ определяется из условия

$$p-1 < \alpha \leq p.$$

Пусть, далее, $f(x) \in L(0, l)$ и функция

$$\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \{D^{-(p-\alpha)} f(x)\}$$

почти всюду на $(0, l)$ имеет производную (не обязательно из $L(0, l)$), при этом, если $\alpha = p \geq 1$, мы должны воспользоваться определением (6.1') оператора $D^{-\alpha}$.

Тогда функцию

$$D^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d^p}{dx^p} \{D^{-(p-\alpha)} f(x)\}, \quad x \in (0, l), \quad (6.5)$$

принято называть *производной порядка α от $f(x)$ с началом в точке $x=0$* .

Ввиду (6.1') при целом $\alpha = p \geq 1$ имеем

$$D^p f(x) = f^{(p)}(x), \quad x \in (0, l),$$

т. е. $D^p f(x)$ есть обычная производная функции $f(x)$ порядка p .

В частности, если $0 < \alpha \leq 1$ и, таким образом, $p=1$, то будем иметь

$$D^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d}{dx} \{D^{-(1-\alpha)} f(x)\}, \quad x \in (0, l), \quad (6.5')$$

причем, ввиду (6.1'), почти всюду на $(0, l)$

$$D^{-0} f(x) = \frac{d}{dx} \{D^{-1} f(x)\} = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x).$$

Поэтому, вообще, естественно полагать, что

$$D^{-0} f(x) = D^{+0} f(x) \equiv D^0 f(x) = f(x) \quad (6.6)$$

почти всюду на $(0, l)$.

Из общего определения производной D^{α} ($0 < \alpha < +\infty$) и ввиду (6.2) имеем, например

$$D^{\alpha} \left\{ \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{d^p}{dx^p} D^{-(p-\alpha)} \left\{ \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)} \quad (-1 < \gamma < +\infty). \quad (6.7)$$

Объединив (6.2) и (6.7), получим общую формулу

$$D^{\alpha} \left\{ \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)} \quad (-1 < \gamma < +\infty, -\infty < \alpha < +\infty). \quad (6.7')$$

В заключение приведем формулировки еще двух свойств операторов Римана—Лиувилля.

4°. Пусть $f(x) \in L(0, l)$. Тогда почти всюду на $(0, l)$

1) при $\alpha \geq \beta \geq 0$

$$D^{\alpha} D^{-\beta} f(x) = D^{-(\beta-\alpha)} f(x), \quad (6.8)$$

2) при $\alpha > \beta \geq 0$, если $D^{-\beta} f(x)$ существует почти всюду на $(0, l)$, то

$$D^{\alpha} D^{-\beta} f(x) = D^{-(\beta-\alpha)} f(x). \quad (6.9)$$

5°. Пусть $f(x) \in L(0, 1)$ и существует производная $D^3 f(x) \in L(0, 1)$, причем $p-1 < \beta \leq p$ ($p > 1$). Тогда для любого $\alpha > 0$

$$D^{-\alpha} D^3 f(x) = D^{3-\alpha} f(x) - \sum_{k=1}^p \{D^{3-k} f(t)\}_{t=0} \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)}. \quad (6.10)$$

Отметим, что отсюда, в частности, следует, что при любых $0 \leq \alpha < +\infty$ и $0 < \beta \leq 1$

$$D^{-\alpha} D^3 f(x) = D^{3-\alpha} f(x) - \{D^{-(1-\beta)} f(t)\}_{t=0} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (6.10')$$

Приведенные выше определения и свойства интеграла и производной дробного порядка могут быть распространены на функции комплексной переменной.

Положим, что функция $f(z)$ определена на римановой поверхности G^∞ функции $\operatorname{Ln} z$, или, более общо, в области $G \subset G^\infty$, звездообразной относительно точки ветвления $z=0$ (т. е. $(0, z_0) \subset G$, $\forall z_0 \in G$).

Если на данном интервале $(0, z_0) \subset G$, соединяющем точки $z=0$ и $z_0 \in G$:

$$(0, z_0) = \{z = r \exp[i \operatorname{Arg} z_0] : 0 < r < |z_0|\},$$

функция $f(z)$ удовлетворяет надлежащим условиям, то для любой точки $z \in (0, z_0)$ оператор интегро-дифференцирования $D^{-\alpha} f(z)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, может быть определен способом, вполне аналогичным вышеприведенному.

Например, вместо формул (6.1) и (6.5) будем иметь:

$$D^{-\alpha} f(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-\zeta)^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta, \quad 0 < \alpha < +\infty, \quad (6.11)$$

$$D^2 f(z) \equiv \frac{d^p}{dz^p} [D^{-(p-\alpha)} f(z)], \quad p-1 < \alpha \leq p \quad (p > 1),$$

предполагая, что как интегрирование, так и дифференцирование производятся вдоль интервала $(0, z) \subset (0, z_0)$.

Разумеется, все приведенные выше свойства 1°—5° и формулы для операторов $D^{-\alpha} f(z)$ и $D^{\alpha} f(z)$ также останутся в силе.

(б) На поверхности G^∞ рассмотрим функцию

$$y_\mu(z; \lambda) = E_2(\lambda z^{1/2}; \mu) z^{\mu-1}, \quad (6.12)$$

где берутся главные ветви функций $z^{1/2}$ и $z^{\mu-1}$, в предположении, что $0 < \mu < +\infty$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ — произвольные параметры.

Лемма 6.1. Функция $y_\mu(z; \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$D^{1/2} y_\mu(z; \lambda) = \frac{z^{\mu-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\right)} + \lambda y_\mu(z; \lambda), \quad z \in G^\infty, \quad (6.13)$$

и начальному условию

$$D^{-(1-\mu)} y_\mu(z; \lambda)|_{z=0} = 1. \quad (6.14)$$

Доказательство. Поскольку мы имеем разложение

$$y_{\mu}(z; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{\frac{k}{2} + \mu - 1}}{\Gamma(\mu + k/2)}, \quad (6.15)$$

то, пользуясь формулой (6.7) для $\alpha = 1/2$, получим

$$\begin{aligned} D^{1/2} y_{\mu}(z; \lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k D^{1/2} \left\{ \frac{z^{\frac{k}{2} + \mu - 1}}{\Gamma(\mu + k/2)} \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{\frac{k-2}{2} + \mu}}{\Gamma(\mu + \frac{k-1}{2})} = \frac{z^{\mu - \frac{3}{2}}}{\Gamma(\mu - 1/2)} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{\frac{k}{2} + \mu - 1}}{\Gamma(\mu + k/2)}. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду (6.15), следует формула (6.13) леммы.

Далее, пользуясь уже формулой (6.7'), но для значения $\alpha = \mu - 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} D^{-(1-\mu)} y_{\mu}(z; \lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k D^{\mu-1} \left\{ \frac{z^{\frac{k}{2} + \mu - 1}}{\Gamma(\mu + k/2)} \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{k/2}}{\Gamma(1 + k/2)} = E_2(z^{1/2}; 1), \end{aligned} \quad (6.14')$$

откуда следует начальное условие (6.14), так как $E_2(0; 1) = 1$.

Если на параметр μ накладывать дополнительные ограничения, то оператор дифференцирования $D^{1/2}$ в формуле (6.13) леммы 6.1 можно заменить оператором интегро-дифференцирования L_{μ} более сложной природы так, чтобы функция $y_{\mu}(z; \lambda)$ взамен (6.13) удовлетворяла уже однородному уравнению вида

$$L_{\mu} y_{\mu}(z; \lambda) = \lambda y_{\mu}(z; \lambda), \quad z \in G^{\infty}. \quad (6.16)$$

Лемма 6.2. Если $\frac{1}{2} < \mu < 1$, то функция $y_{\mu}(z; \lambda)$ является решением уравнения (6.16), где

$$L_{\mu} = D^{-(\mu - \frac{1}{2})} D^1 D^{-(1-\mu)}. \quad (6.17)$$

Доказательство. Воспользуемся вторым из утверждений 4°, т. е. формулой (6.9) для $\alpha = 1$, $\beta = 1 - \mu$, заметив, что $\alpha > \beta > 0$. Тогда получим

$$D^1 D^{-(1-\mu)} y_{\mu}(z; \lambda) = D^{\mu} y_{\mu}(z; \lambda),$$

и, таким образом

$$L_{\mu} y_{\mu}(z; \lambda) = D^{-(\mu - \frac{1}{2})} D^{\mu} y_{\mu}(z; \lambda). \quad (6.18)$$

Обратимся теперь к формуле (6.10'), положив там $\alpha = \mu - \frac{1}{2}$, $\beta = \mu$ и заметив, что в этом случае $\alpha > 0$ и $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Тогда из (6.18) получаем

$$L_{\mu} y_{\mu}(z; \lambda) = D^{1/2} y_{\mu}(z; \lambda) - [D^{-(1-\mu)} y_{\mu}(z; \lambda)]_{z=0} \frac{z^{\mu - \frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\right)},$$

откуда, ввиду начального условия (6.14) и тождества (6.13) леммы 6.1, следует наше утверждение (6.16).

На основании лемм 6.1 и 6.2, при надлежащих условиях на заданную функцию $\Phi(z)$, $z \in (0, z_0)$, мы вправе воспользоваться двумя формами оператора L_{μ} , если $\frac{1}{2} < \mu < 1$, т. е.

$$\begin{aligned} L_{\mu} \Phi(z) &\equiv D^{-(\mu-1/2)} D^1 D^{-(1-\mu)} \Phi(z) \equiv \\ &\equiv D^{1/2} \Phi(z) - \frac{z^{\mu-3/2}}{\Gamma(\mu-1/2)}, \quad z \in (0, z_0). \end{aligned} \quad (6.19)$$

(в) Для данного значения $z_0 \in G^{\infty}$ обозначим через $L_p(0, z_0)$ ($p \geq 1$) множество измеримых на интервале $(0, z_0)$ функций $\Phi(z)$, для которых

$$\int_0^{z_0} |\Phi(z)|^p |dz| < +\infty.$$

В заключение пункта докажем теорему.

Теорема 6.1. При условии

$$\frac{1}{2} < \mu < 1$$

задача типа Коши

$$L_{\mu} \Phi(z) = \lambda \Phi(z), \quad z \in (0, z_0), \quad (6.20)$$

$$D^{-(1-\mu)} \Phi(z)|_{z=0} = 1, \quad (6.21)$$

в классе функций $\Phi(z) \in L_2(0, z_0)$, $z \in (0, z_0)$, имеет единственное решение

$$\Phi_0(z) = y_{\mu}(z; \lambda) = E_2(\lambda z^{1/2}; \mu) z^{\mu-1}. \quad (6.22)$$

Доказательство. Заметим сначала, что если $\mu > 1/2$, то функция $y_{\mu}(z; \lambda) \in L_2(0, z_0) \subset L_1(0, z_0)$ при любом $z_0 \in G^{\infty}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, по лемме 6.1, является решением задачи (6.20)–(6.21). Поэтому, если положить

$$\Psi(z) = \Phi(z) - y_{\mu}(z; \lambda),$$

то нам достаточно доказать, что при условии (6.19) задача типа Коши

$$L_{\mu} \Psi(z) = D^{1/2} \Psi(z) = \lambda \Psi(z), \quad (6.23)$$

$$D^{-(1-\mu)} \Psi(z)|_{z=0} = 0, \quad (6.24)$$

в классе $L_2(0, z_0)$ имеет единственное решение $\Psi(z) = 0$, почти всюду на $(0, z_0)$.

С этой целью запишем (6.23) в виде

$$\frac{d}{dz} D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z) = \lambda \Psi(z), \quad z \in (0, z_0).$$

Интегрированием по интервалу $(0, z_0)$ получим, что почти для всех $z \in (0, z_0)$ справедливо равенство

$$D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z) - [D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z)]_{z=0} = \lambda D^{-1} \Psi(z), \quad (6.25)$$

в правой части которого мы имеем непрерывную на $(0, z_0)$ функцию

$$D^{-1} \Psi(z) = \int_0^z \Psi(\zeta) d\zeta.$$

Поскольку, согласно свойству 1°, функция $D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z)$ почти всюду на $(0, z_0)$ конечна, то из написанного тождества следует, что

$$[D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z)]_{z=0} = C_0 \neq +\infty.$$

Поэтому из тождества (6.25) следует, что функция $D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z)$ также непрерывна на $(0, z_0)$.

Теперь применим к обеим частям (6.25) оператор $D^{-\frac{1}{2}}$. Тогда, в силу свойства 3° операторов Римана-Лиувилля и частного случая формулы (6.2) для $\alpha=1/2$ и $\gamma=0$, будем иметь

$$D^{-1} \Psi(z) = C_0 \frac{z^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + \lambda D^{-\frac{3}{2}} \Psi(z)$$

всюду на $(0, z_0)$.

Дифференцируя, далее, последнее тождество по z , т. е. применив к обеим его частям оператор D^1 , в силу первого из утверждений 4° для $\alpha=1$ и $\beta=\frac{3}{2}$ получим, что почти для всех $z \in (0, z_0)$

$$\Psi(z) = C_0 \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/2)} + \lambda D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z).$$

Если подставить сюда значение $D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z)$ из (6.25), то придем к следующей формуле, также справедливой почти всюду на $(0, z_0)$:

$$\Psi(z) = C_0 \lambda + C_0 \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/2)} + \lambda^2 D^{-1} \Psi(z). \quad (6.26)$$

Отсюда следует, что функция $\Psi(z) \in L_1(0, z_0)$ непрерывна на $(0, z_0]$.

Применим теперь к обеим частям (6.26) оператор интегрирования $D^{-(1-\mu)}$ ($\mu < 1$). Тогда, в силу следствий из формулы (6.2)

$$D^{-(1-\mu)}\{1\} = \frac{z^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)}, \quad D^{-(1-\mu)}\left\{\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/2)}\right\} = \frac{z^{\frac{1}{2}-\mu}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\mu\right)},$$

и свойства 3° интегралов Римана—Лиувилля будем иметь тождество

$$\begin{aligned} D^{-(1-\mu)}\Psi(z) &= C_0 \frac{\lambda z^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)} + C_0 \frac{z^{\frac{1}{2}-\mu}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\mu\right)} + \\ &+ \lambda^2 D^{-(2-\mu)}\Psi(z), \quad z \in (0, z_0). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Так как $\mu < 1$, то

$$\begin{aligned} |D^{-(2-\mu)}\Psi(z)| &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\mu)} \int_0^z |z-\zeta|^{1-\mu} |\Psi(\zeta)| |d\zeta| \leq \\ &\leq \frac{|z|^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)} \int_0^z |\Psi(\zeta)| |d\zeta|, \quad z \in (0, z_0). \end{aligned}$$

Поэтому, если в (6.27) положить $z = 0$ и учесть начальное условие (6.24), то ввиду условия $\mu > \frac{1}{2}$ это не приведет к противоречию лишь при $C_0 = 0$.

Следовательно, тождество (6.26) принимает вид

$$\Psi(z) = \lambda^2 \int_0^z \Psi(\zeta) d\zeta, \quad z \in (0, z_0),$$

причем $\Psi(0) = 0$. Отсюда вытекает, что $\Psi(z) \equiv 0$, $z \in (0, z_0)$, и теорема доказана.

6.2. Для дальнейшего изложения нам необходимо привести здесь также свойства интегро-дифференциальных операторов, несколько отличных от операторов Римана—Лиувилля.

(а) Пусть функция $F(z)$ также определена на поверхности G^∞ или в области $G \subset G^\infty$, звездобразной относительно точки ветвления $z = 0$. Полагая, далее, что на каждом интервале $(0, z_0)$ с концами в точках $z = 0$ и $z = z_0 \in G$ функции $F(z) \in L_p(0, z_0)$ ($p \geq 1$), введем в рассмотрение следующую модификацию интеграла Римана—Лиувилля:

$$D^{-\alpha} F(z) \equiv \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z^2 - \zeta^2)^{\alpha-1} F(\zeta) d\zeta, \quad z \in G, \quad (6.28)$$

где $0 < \alpha < +\infty$ — любое.

При этом, как и в определении $D^{-\alpha} f(z)$, здесь предполагаем, что интегрирование производится вдоль интервала $(0, z) \subset G$.

Далее, поскольку после замены переменной мы имеем представления

$$D^{-\alpha} f(z) = \frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tz) dt, \quad (6.29)$$

$$D^{-\alpha} F(z) = \frac{2z^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-1} F(tz) dt,$$

то ради однозначности наших определений мы будем рассматривать главные ветви многозначных функций z^{α} и $z^{2\alpha-1}$ на римановой поверхности G^{∞} логарифмической функции $\text{Ln } z$. Вообще говоря, функции $D^{-\alpha} f(z)$ и $D^{-\alpha} F(z)$ нами будут рассмотрены на главном листе поверхности G^{∞} с разрезом вдоль полуоси $(-\infty, 0)$: $z = re^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

После простых замен переменных интегрирования легко убедиться в том, что интегральные операторы $D^{-\alpha}$ и $D^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < +\infty$) связаны между собой взаимно-обратными соотношениями

$$D^{-\alpha} F(z) = \{D^{-\alpha} [\zeta^{-\frac{1}{2}} F(\zeta^{1/2})]\}_{\zeta=z^2}, \quad (6.30')$$

$$z \in (0, z_0).$$

$$D^{-\alpha} f(z) = \{D^{-\alpha} [\zeta f(\zeta^2)]\}_{\zeta=z^2}. \quad (6.30'')$$

Далее, для любого α ($0 < \alpha < +\infty$) определим также оператор D^{α} —аналог оператора дробного дифференцирования D^{α} по Риману—Лиувиллю. А именно, по аналогии с формулой (6.30'), мы положим для $0 < \alpha < +\infty$

$$D^{\alpha} F(z) = \{D^{\alpha} [\zeta^{-\frac{1}{2}} F(\zeta^{1/2})]\}_{\zeta=z^2}, \quad z \in (0, z_0), \quad (6.31')$$

в предположении, что правая часть (6.31'), т. е. производная функции $\zeta^{-\frac{1}{2}} F(\zeta^{1/2})$ порядка α в смысле Римана—Лиувилля, существует почти всюду на $(0, z_0)$.

Ввиду свойств (6.6) оператора Римана—Лиувилля, из (6.30') и (6.31') следует, что почти всюду на $(0, z_0)$

$$D^{-0} F(z) = D^{+0} F(z) = D^0 F(z) \equiv z^{-1} F(z). \quad (6.32)$$

Если целое число $p > 1$ определяется из неравенств $p-1 < \alpha \leq p$, то по определению (6.5) оператора D^{α} формула (6.31') принимает следующий вид:

$$D^{\alpha} F(z) = \left\{ \frac{d^p}{d\zeta^p} D^{-(p-\alpha)} [\zeta^{-\frac{1}{2}} F(\zeta^{1/2})] \right\}_{\zeta=z^2}. \quad (6.33)$$

Поэтому в частном случае, когда $0 < \alpha < 1$

$$D^{\alpha} F(z) = \left\{ \frac{d}{d\zeta} D^{-(1-\alpha)} [\zeta^{-\frac{1}{2}} F(\zeta^{1/2})] \right\}_{\zeta=z^2},$$

откуда, в силу определения (6.30'), получим представление

$$D^{\alpha} F(z) = (2z)^{-1} \frac{d}{dz} D^{-(1-\alpha)} F(z), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (6.33')$$

справедливое, в частности, и для крайних значений $\alpha=0$ и $\alpha=1$ параметра α .

Убедимся теперь, что обращение формулы (6.31') для любого значения $0 < z < +\infty$ запишется в аналогичном с (6.30'') виде. Точнее, покажем, что если для данного α ($p-1 < \alpha \leq p$) оператор $D^{\alpha} F(z)$ имеет смысл почти всюду на $(0, z_0)$, то там же почти всюду имеет место также обратная к (6.31') формула

$$D^{\alpha} F(z) = [D^{\alpha} [\zeta F(\zeta^2)]]_{\zeta=z^{-1}\sqrt{z}}. \quad (6.31'')$$

В самом деле, по (6.33) и (6.5)

$$[D^{\alpha} [\zeta F(\zeta^2)]]_{\zeta=z^{-1}\sqrt{z}} = \left\{ \frac{d^p}{d\zeta^p} D^{-(p-\alpha)} [F(\zeta)] \right\}_{\zeta=z} = D^{\alpha} F(z).$$

(6) На римановой поверхности G^{∞} рассмотрим интегро-дифференциальный оператор

$$\tilde{L}_{\mu} \Psi(z) = D^{1/2} \Psi(z) - \frac{z^{2\mu-2}}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\right)}, \quad \mu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \quad (6.34)$$

Обозначим теперь через $L_2^*(G^{\infty})$ множество функций $\Psi(z)$, которые определены на римановой поверхности G^{∞} , у которых для любой точки $z_0 \in G^{\infty}$

$$\int_0^{z_0} |\Psi(z)|^2 |z|^{-1} |dz| = \int_0^1 |\Psi(z_0 t)|^2 t^{-1} dt < +\infty. \quad (6.35)$$

При условии

$$\frac{1}{2} < \mu < 1 \quad (6.36)$$

в классе функций $\Psi(z) \in L_2^*(G^{\infty})$ ставим следующую задачу типа задачи Коши:

$$\tilde{L}_{\mu} \Psi(z) = \lambda z^{-1} \Psi(z), \quad z \in G^{\infty}, \quad (6.37)$$

$$D^{-(1-\mu)} \Psi(z)|_{z=0} = 1. \quad (6.38)$$

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$Y_{\mu}(z; \lambda) = E_2(\lambda z; \mu) z^{2\mu-1}, \quad (6.39)$$

входящую в класс $L_2^*(G^{\infty})$ при условии $\mu > 1/2$ и заметим также, что по определению (6.12) функции $y_{\mu}(z; \lambda)$

$$Y_{\mu}(z; \lambda) = zy_{\mu}(z^2; \lambda), \quad z \in G^{\infty}. \quad (6.40)$$

Лемма 6.3. Функция $Y_{\mu}(z; \lambda) \left(\frac{1}{2} < \mu < 1 \right)$ является решением задачи (6.37)–(6.38).

Доказательство. Пользуясь определением (6.28) оператора $D^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < +\infty$) и разложением функции $E_2(\lambda\zeta; \mu)$ в ряд Тейлора, последовательно будем иметь

$$\begin{aligned} D^{-\frac{1}{2}} Y_{\mu}(z; \lambda) &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^z (z^2 - \zeta^2)^{-\frac{1}{2}} E_2(\lambda\zeta; \mu) \zeta^{2\mu-1} d\zeta = \\ &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma\left(\mu + k/2\right)} \int_0^z (z^2 - \zeta^2)^{-\frac{1}{2}} \zeta^{2\mu+k-1} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k z^{2\mu+k-1}}{\Gamma\left(\mu + \frac{k+1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

и, следовательно, по (6.33')

$$\begin{aligned} D^{1/2} Y_{\mu}(z; \lambda) &= (2z)^{-1} \frac{d}{dz} D^{-\frac{1}{2}} Y_{\mu}(z; \lambda) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k z^{2\mu+k-3}}{\Gamma\left(\mu + \frac{k-1}{2}\right)} = \frac{z^{2\mu-3}}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\right)} + \lambda z^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k z^{2\mu+k-1}}{\Gamma\left(\mu + k/2\right)} \right\}. \end{aligned}$$

Итак, функция $Y_{\mu}(z; \lambda) \in L_2^*(G^{\infty})$ является решением уравнения (6.37).

Далее, при $0 \leq \mu < 1$, вновь по (6.28), имеем

$$\begin{aligned} D^{-(1-\mu)} Y_{\mu}(z; \lambda) &= \frac{2}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^z (z^2 - \zeta^2)^{-\mu} E_2(\lambda\zeta; \mu) \zeta^{2\mu-1} d\zeta = \\ &= \frac{2}{\Gamma(1-\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma\left(\mu + k/2\right)} \int_0^z (z^2 - \zeta^2)^{-\mu} \zeta^{2\mu+k-1} d\zeta = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{\Gamma(1+k/2)} = E_2(\lambda z; 1). \end{aligned}$$

Отсюда следует выполнение начального условия (6.38)

$$D^{-(1-\mu)} Y_{\mu}(z; \lambda)|_{z=0} = 1.$$

Лемма доказана.

(в) Докажем теперь аналог теоремы 6.1.

Теорема 6.2. При условии (6.36) задача типа Коши (6.37)–(6.38) в классе функций $\Psi(z) \in L_2^*(G^{\infty})$ имеет единственное решение

$$\Psi_0(z) \equiv Y_{\mu}(z; \lambda).$$

Доказательство. Поскольку, согласно лемме 6.3, функция $\Psi_0(z) \in L_2^*(G^\infty)$ является решением задачи (6.37)–(6.38), то нам следует лишь убедиться в том, что она является единственным ее решением.

С этой целью, предполагая, что функция $\Psi(z) \in L_2^*(G^\infty)$ является каким-либо решением нашей задачи, образуем функцию

$$\Phi(w) = w^{-\frac{1}{2}} \Psi(w^{1/2}), \quad w \in G^\infty. \quad (6.41)$$

Сначала же отметим, что тогда для любой точки $w_0 \in G^\infty$

$$\int_0^{w_0} |\Phi(w)|^2 |dw| = 2 \int_0^{z_0} |\Psi(z)|^2 |z|^{-1} |dz| < +\infty \quad (z_0 = \sqrt{w_0}),$$

т. е. по аналогии с определением класса $L_2^*(G^\infty)$ можем написать $\Phi(w) \in L_2(G^\infty)$.

Далее, в силу формулы (6.30'')

$$\begin{aligned} D^{-(1-\mu)} \Phi(w)|_{w=0} &= D^{-(1-\mu)} [w^{-\frac{1}{2}} \Psi(w^{1/2})]_{w=0} = \\ &= D^{-(1-\mu)} [\Psi(z)]_{z=0} = 1, \end{aligned}$$

поскольку предполагалось, что $\Psi(z)$ удовлетворяет условию (6.38). Но это значит, что функция $\Phi(w) \in L_2(G^\infty)$ удовлетворяет второму условию (6.21) теоремы 6.1.

Убедимся теперь, что функция $\Phi(w)$ является также решением уравнения (6.20) теоремы 6.1.

В самом деле, мы предполагали, что функция $\Psi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{L}_\mu \Psi(z) = D^{1/2} \Psi(z) - \frac{z^{2\mu-3}}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\right)} = \lambda z^{-1} \Psi(z), \quad (6.42)$$

а из определения (6.41) функции $\Phi(w)$ следует, что

$$\Psi(z) = z\Phi(z^2), \quad z \in G^\infty. \quad (6.41')$$

Поэтому тождество (6.42) запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{L}_\mu \Psi(z) &= \bar{L}_\mu [z\Phi(z^2)] = \\ &= D^{1/2} [z\Phi(z^2)] - \frac{z^{2\mu-3}}{\Gamma(\mu - 1/2)} = \lambda \Phi(z^2). \end{aligned} \quad (6.42')$$

Но пользуясь формулой (6.31') для значения $\alpha = 1/2$, имеем

$$D^{1/2} [z\Phi(z^2)] = |D^{1/2} [\Phi(\zeta)]|_{\zeta=z^2},$$

и поэтому

$$|D^{1/2} [z\Phi(z^2)]|_{z=\sqrt{w}} = D^{1/2} \Phi(w).$$

Теперь в тождестве (6.42') положив $z = \sqrt{w}$, мы получим, что функция $\Phi(w)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$L_{\mu} \Phi(w) = D^{1/2} \Phi(w) - \frac{w^{\mu - \frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\right)} = \lambda \Phi(w) \quad (6.43)$$

и начальному условию

$$D^{-(1-\mu)} \Phi(w)|_{w=0} = 1. \quad (6.44)$$

Но согласно теореме 6.1 решение задачи (6.43)–(6.44) в классе $L_2(G^{\infty})$ единственно: $\Phi_0(w) = y_{\mu}(z; \lambda)$.

Следовательно, решение $\Psi(z)$ нашей задачи (6.37)–(6.38) также единственно, причем мы должны иметь тождество

$$y_{\mu}(w; \lambda) = w^{-\frac{1}{2}} \Psi(w^{1/2}).$$

Это значит, что решение $\Psi(z)$ задачи (6.37)–(6.38) единственно, причем

$$\Psi(z) \equiv zy_{\mu}(z^2; \lambda) \equiv Y_{\mu}(z; \lambda),$$

и теорема доказана.

6.3. Перейдем к выявлению связи предыдущих результатов с краевой задачей в комплексной области для особого модельного интегро-дифференциального оператора, а также с возникающей при этом проблемой разложения функций в ряды по собственным функциям этой задачи, решение которой приводится в п. 6.4.

(а) Но прежде всего напомним, что все теоремы разложения из §§ 4 и 5 связаны с последовательностью нулей $|\lambda_j|_{j=0}^{\infty}$ функции

$$S_{\nu}(\sigma\lambda^2) = \sigma\lambda^2 E_{1/2}(-\sigma^2\lambda^4; 1+\nu). \quad (6.45)$$

Кроме двукратного нуля $\lambda_0 = 0$, при условии $0 \leq \nu < 2$ все нули $S_{\nu}(\sigma\lambda^2)$ простые, лежат только на координатных осях $\operatorname{Im} \lambda = 0$ и $\operatorname{Re} \lambda = 0$ плоскости λ и расположены симметрично относительно начала координат.

Вместе с тем, во всех основных теоремах разложения, установленных в тех же §§ 4 и 5, на параметр ν накладывалось более жесткое ограничение

$$\nu \in \left(\mu, \mu + \frac{1}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \subset [0, 2), \quad (6.46)$$

где, как всегда

$$\mu = \frac{3+\omega}{4} \quad (-1 < \omega < 1). \quad (6.46')$$

Отметим еще, что поскольку $1 \in (\mu, \mu + 1/2)$, то, как уже отмечалось в заключение § 5, как нули функции $S_1(\sigma\lambda^2) = \sin \sigma\lambda^2$, так и формулы (5.27)–(5.31), посредством которых определялись биортогональные системы вектор-функций, в случае $\nu=1$ записываются в наиболее простом и явном виде.

Наконец, преобразованием $\tilde{\lambda} = e^{i\frac{\pi}{4}} \lambda$, т. е. положительным вращением плоскости λ на угол $\pi/4$, функция $S_{\nu}(\sigma\lambda^2)$ переходит в функцию

$$S^*(\sigma \lambda^2) \equiv S, (-i\sigma \lambda^2) = -i\sigma \lambda^2 E_{1/2}(\sigma^2 \lambda^4; 1 + \nu), \quad (6.45')$$

а $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ — в последовательность $\{\tilde{\lambda}_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ ($\tilde{\lambda}_j = e^{i\frac{\pi}{4}} \lambda_j$) ее простых нулей, расположенных на лучах

$$\arg \tilde{\lambda} = \pm \frac{\pi}{4} \text{ и } \arg \tilde{\lambda} = \pm \frac{3\pi}{4}$$

плоскости $\tilde{\lambda}$ и симметричных относительно начала $\lambda_0 = 0$ — единственного двукратного нуля этой функции.

(6) Вспомнив определение (6.39) функции

$$Y_\mu(z; \lambda) = E_2(\lambda z; \mu) z^{2\lambda-1},$$

при условии (6.46)–(6.46'), пользуясь определением (6.28) интегрального оператора $D^{-\alpha}$ и разложением функции $E_2(\lambda z; \mu)$ в ряд Тейлора, получим тождество

$$D^{-(\nu-\mu)} Y_\mu(z; \lambda) = E_2(\lambda z; \nu) z^{2(\nu-1)}, \quad z \in G^\infty. \quad (6.47)$$

Отметим теперь, что на нулевом листе поверхности G^∞ :

$$G_0 = \{z: -\pi < \text{Arg } z \leq \pi\},$$

лежат отрезки

$$e_{\sqrt{\sigma}}^{(k)} = \{z: z = re^{i\frac{\pi}{2}k}, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\sigma}\} \quad (k = -1, 0, 1, 2)$$

с концами в точках $r_k = \sqrt{\sigma} e^{i\frac{\pi}{2}k} \quad (-1 \leq k \leq 2)$.

Совокупность этих отрезков

$$e_+[\sqrt{\sigma}] = \bigcup_{k=-1}^2 e_{\sqrt{\sigma}}^{(k)} \quad (6.48)$$

— это конечный прямоугольный крест — лежащая в круге $|z| \leq \sqrt{\sigma}$ часть координатных осей плоскости z .

Ради краткости положим

$$\Phi_k(\lambda; \mu, \nu) = [D^{-(\nu-\mu)} Y_\mu(z; \lambda)]_{z=e_{\sqrt{\sigma}}^{(k)}} \quad (6.49)$$

и, введя в рассмотрение функцию от параметра λ

$$\Phi_{\mu, \nu}(\lambda) \equiv \sum_{k=-1}^2 e^{-i\pi \nu k} \Phi_k(\lambda; \mu, \nu), \quad (6.50)$$

докажем лемму.

Лемма 6.4. На всей плоскости λ справедливо тождество

$$\Phi_{\mu, \nu}(\lambda) \equiv 4\sigma^\nu \lambda^2 E_{1/2}(\sigma^2 \lambda^4; 1 + \nu). \quad (6.51)$$

Доказательство. Из леммы 5.2, в частности, следовала формула (5.4). Заменяя в ней переменную z на λz , ее можно записать и в виде

$$\sum_{k=-1}^2 e^{-i\pi \nu k} E_2[e^{i\frac{\pi}{2}k} \lambda z; \nu] = 4\lambda^2 z^2 E_{1/2}(\lambda^4 z^4; 1 + \nu). \quad (6.52)$$

Далее, из формул (6.47) и (6.49) следуют равенства

$$e^{-i\pi k} E_2(e^{i\frac{\pi}{2}k} \sqrt{\sigma}; \nu) = \sigma^{1-\nu} e^{-i\pi \nu k} |D^{-(\nu-\mu)} Y_\mu(z; \lambda)|_{z=r_k} = \\ = \sigma^{1-\nu} e^{-i\pi \nu k} \Phi_k(i; \mu, \nu) \quad (k = -1, 0, 1, 2),$$

откуда и из (6.52) приходим к тождеству (6.51).

(в) Пусть, как и выше, параметры μ и ν подчинены условиям

$$\frac{1}{2} < \mu < 1, \quad \mu < \nu < \mu + \frac{1}{2},$$

а λ — произвольный комплексный параметр.

Перейдем, наконец, к постановке нашей краевой задачи.

На кресте комплексной плоскости z

$$e_+[\sqrt{\sigma}] = \bigcup_{k=-1}^2 |z: z = re^{i\frac{\pi}{2}k}, 0 \leq r \leq \sqrt{\sigma}|$$

определить решения $\Psi(z) \in L_2^\infty(G^\infty)$ задачи типа Коши

$$D^{1/2} \Psi(z) - \frac{z^{2\mu-1}}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\right)} = \lambda z^{-1} \Psi(z),$$

$$z \in e_+[\sqrt{\sigma}] \quad (6.53)$$

$$D^{-(\nu-\mu)} \Psi(z)|_{z=0} = 1,$$

которые на концах $r_k = \sqrt{\sigma} e^{i\frac{\pi}{2}k}$ ($k = -1, 0, 1, 2$) креста удовлетворяют краевому условию вида

$$\sum_{k=-1}^2 e^{-i\pi \nu k} |D^{-(\nu-\mu)} \Psi(z)|_{z=r_k} = 0. \quad (6.54)$$

Значения параметра λ , для которых поставленная задача имеет нетривиальные решения, естественно называть *собственными числами*, а соответствующие решения $\Psi(z) \equiv \Psi(z; \lambda)$ — *собственными функциями* краевой задачи (6.53)–(6.54).

Теорема 6.3. Все собственные числа краевой задачи (6.53)–(6.54) совпадают с последовательностью комплексных чисел

$$[\lambda_j]_{-\infty}^{+\infty} \equiv |e^{i\frac{\pi}{4}} \lambda_j|_{-\infty}^{+\infty},$$

т. е. с множеством всех нулей целой функции $S^*(z\lambda^2)$, причем все они простые, за исключением двукратного нуля $\lambda_0 = 0$.

Доказательство. Согласно теореме 6.2, для любого значения λ задача типа Коши (6.53) в классе $L_2^\infty(G^\infty)$ имеет единственное решение

$$\Psi_0(z) \equiv Y_\mu(z; \lambda) = E_2(\lambda z; \mu) z^{2\mu-1}. \quad (6.55)$$

Но по лемме 6.4 имеет место тождество

$$\sum_{k=-1}^2 e^{-i\pi k} |D^{-(\nu-\mu)} \Psi_0(z)|_{z=r_k} \equiv \\ \equiv \Phi_{\mu, \nu}(\lambda) = 4\pi^2 \lambda^2 E_{1/2}(\pi^2 \lambda^4; 1+\nu).$$

Поэтому решение задачи (6.53) может удовлетворять также краевому условию (6.54) лишь для значений $\lambda_j = e^{i\frac{\pi}{4}} \bar{\lambda}_j$, являющихся нулями целой функции $\Phi_{\mu, \nu}(\lambda) = 4\pi^2 \lambda^{2\nu-1} S^*(\pi^2 \lambda^2)$.

Теорема 6.4. Краевая задача (6.53)–(6.54) на кресте $e_+ \cup \sqrt{\sigma}$ имеет счетную систему собственных функций

$$|E_2(e^{i\frac{\pi}{4}} \lambda_n z; \mu) z^{2\lambda-1}|_{\pm\infty}^{\pm\infty}, \quad z \in e_+ \cup \sqrt{\sigma}, \quad (6.56)$$

и одну присоединенную функцию

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} E_2(e^{i\frac{\pi}{4}} \lambda z; \mu) z^{2\lambda-1} \right\}_{\lambda=\lambda_0=0} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} z^{2\mu}}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}, \quad z \in e_+ \cup \sqrt{\sigma}. \quad (6.56')$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 6.4 и теоремы 6.3, если учесть, что все собственные числа нашей краевой задачи — $|e^{i\frac{\pi}{4}} \lambda_j|_{\pm\infty}^{\pm\infty}$ — суть простые нули ее характеристической функции $\Phi_{\mu, \nu}(\lambda)$, за исключением только ее двукратного нуля $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0 = 0$.

Двукратный нуль $\lambda_0 = 0$ функции $\Phi_{\mu, \nu}(\lambda)$, являясь двукратным собственным числом краевой задачи (6.53)–(6.54), наряду с собственной функцией

$$E_2(e^{i\frac{\pi}{4}} \lambda_0 z; \mu) z^{2\lambda-1} = \frac{z^{2\mu-1}}{\Gamma(\mu)},$$

принадлежащей последовательности (6.56), должен порождать также одну присоединенную функцию. Эта функция, равная

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} z^{2\mu}}{\Gamma(\mu + 1/2)}$$

определяется по формуле (6.56'), согласно общепринятой процедуре.

6.4 (а) Рассмотрим теперь значения системы функций (6.56)–(6.56') на отдельных компонентах креста $e_+ \cup \sqrt{\sigma}$, т. е. на отрезках

$$e_{\frac{\pi}{4}}^{(k)} = \{z: z = re^{i\frac{\pi}{2}k}, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\sigma}\} \quad (k = -1, 0, 1, 2).$$

Тогда мы приходим к следующей системе четырехкомпонентных вектор-функций на интервале $(0, \sqrt{\sigma})$:

$$[E_{0,k}^*(r), [E_{n,k}(r)]_{\pm\infty}^{\pm\infty}] \quad (k = -1, 0, 1, 2), \quad (6.57)$$

где

$$E_{0,k}(r) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\Gamma(\mu + 1/2)} (re^{\frac{i\pi}{2}k})^{2\mu}, \quad (6.58)$$

$$E_{n,k}(r) = E_2(e^{\frac{i\pi}{2}(k+\frac{1}{2})}) \lambda_{n,k} r; \mu (re^{\frac{i\pi}{2}k})^{2\mu-1} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Легко проверить, что система вектор-функций (6.57) с введенной в § 5 системой (5.28) связана соотношениями

$$E_{0,k}^*(r) = \exp \left\{ i\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right) k \right\} e_{0,k}^*(r^2) r, \quad (0 < r < +\infty) \quad (6.59)$$

$$E_{n,k}(r) = \exp \left\{ i\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right) k \right\} e_{n,k}(r^2) r, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots; k=-1, 0, 1, 2),$$

поскольку $e_{0,-1}^*(\tau) \equiv e_{0,3}^*(\tau)$ и $e_{n,-1}(\tau) \equiv e_{n,3}(\tau)$.

Нам понадобится также эквивалентная форма этих соотношений

$$e_{0,k}^*(\tau) = \exp \left\{ -i\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right) k \right\} E_{0,k}^*(\tau^{1/2}) \tau^{-1/2}, \quad (0 < \tau < +\infty) \quad (6.59')$$

$$e_{n,k}(\tau) = \exp \left\{ -i\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right) k \right\} E_{n,k}(\tau^{1/2}) \tau^{-1/2}, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots; k=-1, 0, 1, 2).$$

Наряду с (6.57) определим также вторую систему вектор-функций

$$[F_{0,k}^*(r), [F_{n,k}(r)]_{-\infty}^{+\infty}] \quad (k=-1, 0, 1, 2), \quad (6.60)$$

положив

$$F_{0,k}^*(r) = 2 \exp \left\{ i\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right) k \right\} \omega_{0,k}^*(r^2) r, \quad (0 < r < \sqrt{\sigma}) \quad (6.61)$$

$$F_{n,k}(r) = 2 \exp \left\{ i\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right) k \right\} \omega_{n,k}(r^2) r, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots; k=-1, 0, 1, 2).$$

Здесь $[\omega_{0,k}^*(\tau), [\omega_{n,k}(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}]$ — система вектор-функций из § 5 — была определена формулами (5.30)–(5.31), причем вновь будем иметь $\omega_{0,-1}^*(\tau) \equiv \omega_{0,3}^*(\tau)$ и $\omega_{n,-1}(\tau) \equiv \omega_{n,3}(\tau)$.

Соотношения (6.61) могут быть записаны также в виде

$$\omega_{0,k}^*(\tau) = \frac{1}{2} \exp \left\{ -i\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right) k \right\} F_{0,k}^*(\tau^{1/2}) \tau^{-1/2}, \quad (0 < \tau < \sigma) \quad (6.61')$$

$$\omega_{n,k}(\tau) = \frac{1}{2} \exp \left\{ -i\pi \left(\tau - \frac{1}{2} \right) k \right\} F_{n,k}(\tau^{1/2}) \tau^{-1/2} \\ (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots; k=-1, 0, 1, 2).$$

(6) Условимся относить функцию $\rho(r)$, $r \in (0, \sqrt{\sigma})$ к классу $L_2^*(0, \sqrt{\sigma})$, если $\rho(r) r^{-1/2} \in L_2(0, \sqrt{\sigma})$.

Введем, далее, в рассмотрение пространство $L_2^*(0, \sqrt{\sigma})$ вектор-функций

$$\psi(r) = [\psi_k(r)]_{-1}^2, \psi_k(r) \in L_2^*(0, \sqrt{\sigma}) (k = -1, 0, 1, 2),$$

с нормой

$$\|\psi\|_* = \left(\sum_{k=-1}^2 \int_0^{\sqrt{\sigma}} |\psi_k(r)|^2 r^{-1} dr \right)^{1/2} < +\infty.$$

Далее, для любой пары вектор-функций

$$Y(r) = [Y_k(r)]_{-1}^2 \text{ и } Z(r) = [Z_k(r)]_{-1}^2$$

из пространства $L_2^*(0, \sqrt{\sigma})$ определим их скалярное произведение

$$[Y, Z]_* = \sum_{k=-1}^2 \int_0^{\sqrt{\sigma}} Y_k(r) \overline{Z_k(r)} r^{-1} dr, \quad (6.62)$$

заметив, что тогда

$$\|\psi\|_* = [\psi, \psi]_*^{1/2} > 0.$$

Наконец, для определенных выше систем вектор-функций (6.57) и (6.60), как обычно, введем более краткие обозначения

$$E_0^*(r) = [E_{0,k}^*(r)]_{-1}^2, E_n(r) = [E_{n,k}(r)]_{-1}^2, \quad (6.57')$$

$$F_0^*(r) = [F_{0,k}^*(r)]_{-1}^2, F_n(r) = [F_{n,k}(r)]_{-1}^2. \quad (6.60')$$

Тогда справедлива

Теорема 6.5. Системы вектор-функций (6.57') и (6.60') биортогональны в метрике (6.62). Иными словами, будем иметь

$$[E_0^*, F_0^*]_* = 1, [E_0^*, F_m]_* = [E_n, F_0^*]_* = 0, \\ [E_n, F_m]_* = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6.63)$$

Доказательство формулы (6.63) непосредственно следует из утверждений (5.35)–(5.38) теоремы 5.1, если принять во внимание определения (6.59) и (6.60) наших систем (6.57')–(6.60') вектор-функций. Например, мы будем иметь

$$[E_n, F_m]_* = \sum_{k=-1}^2 \int_0^{\sqrt{\sigma}} E_{n,k}(r) \overline{F_{m,k}(r)} r^{-1} dr = \\ = \sum_{k=0}^3 2 \int_0^{\sqrt{\sigma}} e_{n,k}(r^2) \overline{\omega_{m,k}(r^2)} r dr =$$

$$= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} e_{n,k}(\tau) \overline{\omega_{m,k}(\tau)} d\tau = [e_n, \omega_m] = \delta_{nm}$$

$$(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Аналогично получим и остальные формулы (6.63) теоремы.

6.5 (а) В заключение устанавим один из основных результатов данной работы — теорему о базисности вектор-системы собственных и присоединенных функций нашей краевой задачи.

Теорема 6.6. Пусть $[E_0(r), [E_n(r)]_{n=1}^{\infty}]$ — система собственных и присоединенных вектор-функций краевой задачи (6.53) — (6.54).

1°. Тогда любая вектор-функция

$$\psi(r) = [\psi_k(r)]_{k=1}^2 \in L_2(0, \sqrt{\sigma})$$

разлагается в вектор-ряд

$$\psi(r) = [\psi, F_0^*]_* E_0(r) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\psi, F_n]_* E_n(r) \quad (6.64)$$

$$r \in (0, \sqrt{\sigma}).$$

сходящийся в метрике $L_2(0, \sqrt{\sigma})$.

2°. Справедливы двойные неравенства

$$\|\psi\|_* \asymp \left\{ |[\psi, F_0^*]|^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + |n|)^{2(1-\mu)} |[\psi, F_n]_*|^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.65)$$

Доказательство. Перейдем от вектор-функции $\psi(r) = [\psi_k(r)]_{k=1}^2$ к вектор-функции $\varphi(\tau) = [\varphi_k(\tau)]_0^3$, положив для $k=0, 1, 2, 3$

$$\varphi_k(\tau) = \exp \left\{ -i\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right) k \right\} \psi_{k-1}(\tau^{1/2}) \tau^{-1/2} \quad (0 < \tau < \sigma). \quad (6.66)$$

Поскольку

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} |\varphi_k(\tau)|^2 d\tau = 2 \sum_{k=-1}^2 \int_0^{\sqrt{\sigma}} |\psi_k(r)|^2 r^{-1} dr = 2 \|\psi\|_*^2 < +\infty, \quad (6.67)$$

то вектор-функция $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$.

Далее, воспользовавшись формулами (6.66) и (6.61'), получим

$$\begin{aligned} [\varphi, \omega_0^*] &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} \varphi_k(\tau) \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)} d\tau = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{2} \int_0^{\sigma} \psi_{k-1}(\tau^{1/2}) \overline{F_{0,k-1}^*(\tau^{1/2})} \tau^{-1} d\tau = \\ &= \sum_{k=-1}^2 \int_0^{\sqrt{\sigma}} \psi_k(r) \overline{F_{0,k}^*(r)} r^{-1} dr = [\psi, F_0^*]_*, \end{aligned} \quad (6.68)$$

а также для $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned}
[\varphi, \omega_n] &= \sum_{k=0}^3 \int_0^{\sigma} \varphi_k(\tau) \overline{\omega_{n,k}(\tau)} d\tau = \\
&= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{2} \int_0^{\sigma} \psi_{k-1}(\tau^{1/2}) \overline{F_{n,k-1}(\tau^{1/2})} \tau^{-1} d\tau = \\
&= \sum_{k=-1}^2 \int_0^{\sqrt{\sigma}} \psi_k(r) \overline{F_{n,k}(r)} r^{-1} dr = [\psi, F_n]_0.
\end{aligned} \quad (6.68')$$

Но, согласно теореме 5.3, вектор-функция $\varphi(\tau) = [\varphi_k(\tau)]_0^3$ разлагается в вектор-ряд

$$\varphi(\tau) = [\varphi, \omega_0] e_0^*(\tau) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\varphi, \omega_n] e_n(\tau), \quad \tau \in (0, \sigma), \quad (6.69)$$

сходящийся в метрике $L_2(0, \sigma)$, причем имеет место двойная оценка

$$\|\varphi\| \asymp \left\{ \|[\varphi, \omega_0]\|^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+|n|)^{(1-\omega)/2} \|[\varphi, \omega_n]\|^2 \right\}^{1/2}, \quad (6.70)$$

где $\omega = 4\mu - 3$.

Принимая теперь во внимание определения (6.59') и (6.66) вектор-функций системы $\{e_0^*(\tau), [e_n(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}\}$ и вектор-функции $\varphi(\tau)$, учитывая также формулы (6.68)–(6.68'), перейдем от вектор-ряда к его компонентам. В результате получим разложения

$$\begin{aligned}
&\exp \left\{ -i\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right) k \right\} \psi_{k-1}(\tau^{1/2}) \tau^{-1/2} = \\
&= \exp \left\{ -i\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right) k \right\} \left\{ [\psi, F_0]_* E_{0,k}^*(\tau^{1/2}) + \right. \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\psi, F_n]_* E_{n,k}(\tau^{1/2}) \left. \right\} \tau^{-1/2}, \quad \tau \in (0, \sigma), \\
&(k=0, 1, 2, 3). \quad (6.69')
\end{aligned}$$

Сократив обе части разложения (6.69') на $\exp \left\{ -i\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right) k \right\} \tau^{-1/2}$ и заменив в нем $\tau = r^2$, мы придем к скалярному виду вектор-ряда (6.64) теоремы.

Что же касается двойного неравенства (6.65) теоремы, то оно непосредственно следует из (6.70) и формул (6.68)–(6.68'). Из тех же неравенств вытекает также сходимость вектор-ряда (6.64) в метрике $L_2(0, \sqrt{\sigma})$.

В самом деле, положив

$$\begin{aligned}
S(r; N_1, N_2) &= [\psi, F_0]_* E_0^*(r) + \sum_{n=-N_1}^{N_2} [\psi, F_n]_* E_n(r), \\
1 &\leq N_1, N_2 < +\infty,
\end{aligned}$$

согласно (6.65), будем иметь

$$\|\psi - S(r; N_1, N_2)\|_* \asymp \left(\sum_{\substack{n=1-N_1 \\ n \geq 1+N_2}} (1+|n|)^{2(\mu-1)} \|\psi, F_n\|_*^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда, переходом к пределу при $N_1, N_2 \rightarrow +\infty$, следует наше утверждение.

Итак теорема полностью доказана.

(6) В заключение параграфа, и вообще данной статьи, приведем некоторые дополнительные замечания.

1°. От биортогональных в метрике $L_2(0, \sqrt{\sigma})$ вектор-систем (6.57') и (6.60') можно перейти к биортогональным в той же метрике вектор-системам

$$\{\bar{E}_n^*(r), [\bar{E}_n(r)]_{-\infty}^{+\infty}\} \text{ и } \{\tilde{F}_0^*(r), [\tilde{F}_n(r)]_{-\infty}^{+\infty}\}, \quad (6.71)$$

положив для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\bar{E}_0^*(r) = E_0^*(r), \quad \bar{E}_n(r) = (1+|n|)^{\mu-1} E_n(r), \quad (6.71')$$

$$\tilde{F}_0^*(r) = F_0^*(r), \quad \tilde{F}_n(r) = (1+|n|)^{1-\mu} F_n(r).$$

Поэтому из теоремы 6.6 вытекает также

Теорема 6.6'. Биортогональные системы (6.71) образуют базис Рисса в пространстве вектор-функций $L_2(0, \sqrt{\sigma})$.

В самом деле, для первой из двух вектор-систем (6.71) наше утверждение просто эквивалентно теореме 6.6.

Вторая же система (6.71) будет такой же на основании общих положений теории базисов Рисса.

2°. В теореме 6.4 был дан явный вид системы собственных и присоединенных функций краевой задачи (6.53)–(6.54) на всем кресте $e_+ \setminus \sqrt{\sigma}$ комплексной плоскости z .

Эта система может быть записана в виде

$$\{E_0^*(z), [E_n(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}, \quad z \in e_+ \setminus \sqrt{\sigma}, \quad (6.72)$$

где

$$E_0^*(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} z^{2\mu}}{\Gamma(\mu + 1/2)},$$

$$E_n(z) = E_2(e^{i\frac{\pi}{4}} \lambda_n z; \mu) z^{2\mu-1} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Можно доказать существование и записать в явном виде и вторую систему

$$\{F_0^*(z), [F_n(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}, \quad z \in e_+ \setminus \sqrt{\sigma}, \quad (6.73)$$

биортогональную с первой системой на всем кресте $e_+ \setminus \sqrt{\sigma}$ плоскости z ; при этом она принадлежит классу

$$\int_{e_+ \setminus \sqrt{\sigma}} |F(z)|^2 |z| |dz| < +\infty,$$

а первая — классу

$$\int_{e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}} |E(z)|^2 |z|^{-1} |dz| < +\infty.$$

Что касается самих соотношений биортоговальности на кресте $e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}$, то они запишутся в обычном виде, а именно

$$\begin{aligned} \int_{e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}} E_0^*(z) \overline{F_0^*(z)} |dz| &= 1, \\ \int_{e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}} E_0^*(z) \overline{F_m^*(z)} |dz| &= \int_{e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}} E_n(z) \overline{F_0^*(z)} |dz| = 0, \\ \int_{e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}} E_n(z) \overline{F_m^*(z)} |dz| &= \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (6.74)$$

$$(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ввиду приведенных замечаний теорема 6.6 может быть сформулирована также как теорема разложения функций $\psi(z)$, $z \in e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}$, из класса

$$L_2^*[e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}]: \|\psi(z)\|_* = \left(\int_{e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}} |\psi(z)|^2 |z|^{-1} |dz| \right)^{1/2} < +\infty \quad (6.75)$$

на кресте $e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}$. Поэтому справедлива

Теорема 6.7. Пусть $\psi(z)$ — любая функция из класса $L_2^*[e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}]$.

1°. Тогда имеет место следующее разложение по собственным и присоединенным функциям краевой задачи (6.53) — (6.54):

$$\psi(z) = c_0^* E_0^*(z) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n E_n(z), \quad z \in e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}, \quad (6.76)$$

где

$$\begin{aligned} c_0^* &= \int_{e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}} \psi(z) \overline{F_0^*(z)} |dz|, \quad c_n = \int_{e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}} \psi(z) \overline{F_n^*(z)} |dz| \\ & \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (6.77)$$

2°. Это разложение сходится в метрике $L_2^*[e_+ \{ \sqrt{\sigma} \}]$, причем справедливо двойное неравенство

$$\|\psi(z)\|_* \asymp \left\{ |c_0^*|^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + |n|)^{2(1-\mu)} |c_n|^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.78)$$

3°. На основании общих результатов автора по гармоническому анализу в комплексной области вообще, и по теории параметрических представлений целых функций конечного роста, в частности (см. [1], гл. VI), мож-

но существенно обобщить все содержащиеся в данной работе результаты.

А именно, можно дать конструктивное построение биортогональных на данном отрезке вектор-систем любой четной или нечетной размерности, связывая их со специальными краевыми задачами для интегро-дифференциальных операторов дробных порядков, и установить теоремы разложения-базисности по этим системам.

Институт математики АН Армянской ССР

и Ереванский государственный университет

Поступила 28.XI.1983

Մ. Մ. ԶՐԲԱՇԻԱՆ. Ինտերպոլացիոն և սպեկտրալ վերլուծություններ՝ առնչված կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների նկատմամբ (ամփոփում)

Ներկա հետազոտությունում $L_2(0, \pi)$ -ից կոմպակտներիով 4-շախիանի վեկտոր-ֆունկցիաների սարաժանության համար կառուցվում են բացահայտ տեսքով դրված բիօրթոգոնալ բազիսային համակարգեր՝ $L_2(0, \pi)$ -ում ֆուրյեի երկշախի բազիսային համակարգի խորը անալոզները:

Կառուցված համակարգերը միաժամանակ հանդիսանում են կոմպակտ տիրույթում $1/2$ կարգի մոդուլային դիֆերենցիալ հավասարման համար եզրային խնդրի սեփական ու միակցված ֆունկցիաներ և արտահայտվում են Միտագ-Լեֆլերի տիպի

$$E_2(z; \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\nu + n/2)}$$

2-րդ կարգի ամբողջ ֆունկցիայի միջոցով:

Այդ համակարգերի բազիսությունն ապացուցվում է $\rho = 1$ և $\rho = 2$ կարգի ամբողջ ֆունկցիաները հատուկ ինտերպոլացիոն շարքերի վերլուծելու միջոցով: Այդ թեորեմների ապացույցները նախա հենվում են հեղինակի կողմից վաղորոք զարգացված կոմպակտ տիրույթում հարմոնիկ անալիզի ավարտուն տեսության վրա [1].

M. M. DJRBASHIAN. *Interpolating and spectral expansions associated with differential operators of fractional order (summary)*

In this research we construct biorthogonal bases for the space of 4-component vector-functions with components in $L^2(0, \pi)$, which are deep analogues of Fourier system in $L^2(0, \pi)$.

These systems are simultaneously the eigenfunctions and adjoint vectors for the boundary value problem for a differential equation of order $1/2$ in complex domain and are expressed by means of Mittag-Leffler type function

$$E_2(z; \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\nu + n/2)}$$

of second order. Basisness of these systems is proved by expanding special interpolating series of entire functions of orders $\rho = 1$ and $\rho = 2$. These proofs are essentially based on the complete theory of harmonic analysis in complex domain developed by the author earlier [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М. «Наука» (1966).
2. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л. (1948).
3. Б. Я. Левин. О базисах из показательных функций в $L_2(-\pi, \pi)$. Записки физ.-мат. фак-та Харьковского гос. ун-та и Харьковск. матем. об-ва, 27, сер. 4 (1961), 39—48.

4. Б. Я. Левин. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа. Сб. «Математическая физика и функциональный анализ», ФТИНТ АН УССР, вып. 1. Харьков (1969), 136—146.
5. В. Д. Головин. О биортогональных разложениях в L^2 по линейным комбинациям показательных функций, Записки мех.-мат. фак-та Харьковского гос. ун-та и Харьковского матем. сб-ва, 30, сер. 4. (1964), 18—29.
6. Б. Я. Левин. Ю. И. Любарский. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент, Изв. АН СССР, сер. матем., 39, № 3 (1975), 657—702.
7. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука» (1965).
8. М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян. Разложения по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, Труды ММО, т. 10 (1961), 89—179.
9. М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаэлян. О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L_p , ДАН Армянской ССР, т. 53, № 1 (1981), 29—36.
10. С. Г. Рафаэлян. Об одном классе целых функций конечного роста, ДАН Армянской ССР, т. 50, № 2 (1980), 65—71.
11. С. Г. Рафаэлян. О базисности некоторых систем целых функций, ДАН Армянской ССР, т. 50, № 4 (1980), 198—204.
12. С. Г. Рафаэлян. Некоторые вопросы интерполяции в комплексной области и дискретного гармонического анализа (кандидатская диссертация), Ереван (1981).
13. М. М. Джрбашян. Базисность биортогональных систем, порожденных краевыми задачами для дифференциальных операторов дробного порядка, ДАН СССР, т. 261, № 5 (1981).
14. G. Polya. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen, Math. Zeitschr., v. 2 (1918), 352—383.
15. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, М., «Наука» (1974).
16. Е. Тигичмарш. Теория функций, М., «Наука» (1980).
17. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, т. 2, М., «Наука» (1968).
18. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. матем. журнал, т. 1, № 3 (1960), 383—426.
19. С. А. Акопян. Теорема о двух постоянных для класса H_p , Изв. АН Армянской ССР, «Математика», II, № 2 (1967), 123—127.
20. А. М. Седлецкий. Эквивалентное определение пространств H_p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сборник, 96 (138), № 1 (1975), 75—82.
21. В. М. Мартиросян. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Армянской ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6 (1978), 490—531.
22. В. М. Мартиросян. Новое доказательство теоремы М. М. Джрбашяна о параметрическом представлении общих классов целых функций конечного порядка, Изв. АН Армянской ССР, «Математика», XIX, № 1 (1984), 44—74.
23. И. М. Стейн. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., «Мир» (1973).
24. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат (1956).

Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка. Джрбашян М. М. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1984, XIX, № 2, 81—181.

В настоящем исследовании строятся в явном виде биортогональные базисные системы для пространства 4-мерных вектор-функций с компонентами из $L_2(0, \sigma)$ — глубокие аналоги двумерной базисной вектор-системы Фурье в $L_2(0, \pi)$.

Построенные системы одновременно являются системами собственных и присоединенных функций краевой задачи для модельного дифференциального уравнения «порядка $1/2$ » в комплексной области и выражаются через целую функцию типа Миттаг—Леффлера

$$E_2(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/2)}$$

второго порядка. Базисность этих систем доказывается путем разложения в специальные интерполяционные ряды целых функций порядков $\rho = 1$ и $\rho = 2$. Доказательства этих теорем существенно опираются на развитую ранее автором завершенную теорию гармонического анализа в комплексной области [1]. Библиографий 24.

Ր Ո Վ Ա Ն Դ Ա Վ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մ. Մ. Ջրբաշյան. Ինտերպոլյացիոն և սպեկտրալ վերլուծություններ՝ անկլաժ կոտրահային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների հետ 81

СОДЕРЖАНИЕ

М. М. Джрбашян. Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка 81

CONTENTS

M. M. Djrbashian. Interpolating and spectral expansions associated with differential operators of fractional order 81

ԱՊԱՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

В журнале публикуются оригинальные исследования в следующих основных направлениях: комплексный и вещественный анализ, теория операторов, теория дифференциальных уравнений в частных производных, теория вероятностей.

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

Сдано в набор 24.04.1984. Подписано к печати 15.05.1984. ВФ 04239.

Бумага № 1, 70X108¹/₁₆. Усл. изд. 7,9. Тираж 655. Заказ 95. Издат. 6178.

Адрес редакции: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-б, т. 27-97-318.

Издательство АН АрмССР, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24.