ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ «Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском английском французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилии автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

Нок 411

Գին 85 կ.
ЦЕНА 85 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIX, № 1, 1984 Математика

УДК 517.983

Р. А. ШАХБАГЯН

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КРАЕМ

В работе изучается общая краевая задача для эллиптических операторов с параметром порядка $2m$ $(m>1)$ на некотором классе бесконечномерных многообразий с краем.

Как и в конечномерном случае основную роль при изучении краевых задач на многообразиях с краем играет исследование аналогичных задач в полупространстве.

Общая краевая задача в полупространстве изучена в работе автора [1]. В ней построен параметрикс задачи и доказана ее однозначная разрешимость (при достаточно больших значениях параметра) в соответствующих функциональных пространствах.

Задача Дирихле для эллиптических операторов второго порядка на некотором специальном классе гильбертовых многообразий (так называемых CL-многообразиях) с краем исследована в работе М. И. Вишика и А. В. Марченко [2].

Здесь обобщаются результаты, полученные в [2] на случай уравнений высокого порядка и общих краевых условий.

1°. Приведем определение многообразия класса CL, а также некоторые его свойства, необходимые нам в дальнейшем (подробнее см. в [2]).

Обозначим через H вещественное гильбертово пространство l_2. Пространство $H_1 \supset H$, по определению, гильбертово пространство последовательностей $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечной нормой $\|x\|_1 = (\sum x_i^2 \sigma_i^{-2})^{1/2}$, где $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность чисел, $\sigma_i > 1$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^{-2} < +\infty$.

Пусть, далее, P^N—оператор ортогонального проектирования H_1 на R^N.

Как обычно, через $C_\Phi(H_1)$ обозначим пространство цилиндрических функций, заданных на H_1. Это пространство представляет собой линейную оболочку множества

$$\bigcup_{N=0}^{\infty} C_\Phi(N), \text{ где } C_\Phi(N) \overset{\text{def}}{=} (P^N)^* C_0^{(\infty)}(R^N).$$

Пусть U — область, принадлежащая H_1 и $\varkappa\colon U \to H_1$ — оператор вложения. По определению, $C_\Phi(U) = \varkappa^* C_\Phi(H_1)$.

На $C_\Phi(U)$ определим полунорму следующим образом: пусть $s \in Z_+$, $M \subset U$—произвольное множество, для любого $f \in C_\Phi(U)$

$$\|f\|_{s,M} = \sum_{|\alpha|<s} \sup_{x\in M} |D^\alpha f(x)|. \tag{1}$$

Определение 1. Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k \in C_\Phi(U)$ фундаментальна, если

а) $\sup\limits_k \|f_k\|_{s,U} < \infty$,

в) для любого ограниченного множества $R\subset U$

$$\|f_m - f_n\|_{s,R} \to 0, \text{ при } m, n \to \infty.$$

Пространство $CL^s(U)$, по определению, —пополнение $C_\Phi(U)$ в смысле этой сходимости,

$$CL^\infty(U) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{s=0}^{\infty} CL^s(U).$$

Отображения класса CL. Пусть U— область в H_1. Отображение z: $U \to H_1$ $(z(x) = (z_1(x), \cdots z_k(x), \cdots,))$ принадлежит, по определению, классу CL^s, $s\in Z_+$, если

1. Существует последовательность конечномерных гладких отображений $\{\zeta^M\}_{M=1}^{\infty}$, ζ^M: $U \to H_1$ $(\zeta^M = (\zeta_1^M, \cdots, \zeta_k^M, \cdots))$, $\zeta_k^M \in C_\Phi(U)$ при $\forall k$, $M\in Z_+$ такая, что для любого ограниченного множества $R\subset U$ и $\forall k \in Z_+$

$$\lim_{M\to\infty} \|z_k - \zeta_k^M\|_{s,R} = 0 \tag{2}$$

и

$$\sup_{k,M} \sum_{1<|\beta|<s} \|D^\beta \zeta_k^M\|_{0,U} < \infty. \tag{3}$$

2. Пусть $\alpha = dz - E$, тогда

$$\|\alpha\|_{\sigma(H, H_1^*), s, U} \overset{\text{def}}{=} \sum_{|\beta|<s} \Big(\sum_{l,k} \sup_{x\in U} |D^\beta \alpha_l^k(x)|^2 \sigma_k^2\Big)^{1/2} < \infty, \tag{4}$$

где $\alpha_l^k = \dfrac{\partial z_k}{\partial x_l} - \delta_{lk}$.

Обозначим через $\alpha^{(n)} = d\zeta^n - E$, тогда требуется, чтобы

$$\sup_n \|\alpha^{(n)}\|_{\sigma(H, H_1^*), s, U} < \infty \tag{5}$$

и для любого ограниченного множества $R\subset U$

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha - \alpha^{(n)}\|_{\sigma(H, H_1^*), s, R} = 0. \tag{6}$$

Если условия 1, 2 выполнены для любого $s\in Z_+$, то будем говорить, что отображение z является CL-отображением.

Многообразия класса CL. Мы скажем, что гильбертово многообразие M, моделируемое на H_1, с координатным покрытием $U_\alpha (\alpha\in A)$, системой локальных карт $\{\chi_\alpha\}$, χ_α: $U_\alpha \to H_1$ и набором функций $\{\varphi_\alpha\}$, $\{\psi_\alpha\}$, является многообразием класса CL (CL-многообразием), если выполнены следующие условия:

1. Пусть $B = \{\alpha \in A$: $U_\alpha \cap \partial M = \varnothing\}$ и $\Gamma = A\setminus B$. Требуется, чтобы при $\alpha\in\Gamma$ образ $\chi_\alpha(U_\alpha) \subset H_1^+$ $(H_1^+ = \{x\in H_1, x_1 > 0\})$ и $\chi_\alpha(\partial M \cap U_\alpha) \subset$ $\subset \{x\in H_1^+, x_1 = 0\}$; для любых α, $\beta\in A$ функции перехода $\chi_{\alpha\beta} = \chi_\beta \circ \chi_\alpha$,

заданные на $\chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, являлись CL-отображениями, а при $\alpha, \beta \in \Gamma$ сохраняли координату x_1 (а вместе с ней и границу).

2. *Для* любых $\alpha, \beta \in A$

$$\|d\chi_{\alpha\beta} - E\|_{\alpha\,(H, H_1^*), s, \chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} < N, \tag{7}$$

где N зависит лишь от s (и не зависит от α, β).

3. $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x) \equiv 1$ и $(\chi_\alpha^{-1})^* \varphi_\alpha \in CL^\infty(\chi_\alpha(U_\alpha))$.

При $\alpha \in B$ $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$, а если $\alpha \in \Gamma$, то $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha \cup \{\overline{U}_\alpha \cap \partial M\}$.

Имеет место оценка

$$\sup_{\beta \in A} \sum_\alpha \sup_{x \in \chi_\beta(U_\beta)} \sum_{|\gamma| < s} |D^\gamma (\chi_\beta^{-1})^* \varphi_\alpha| \leqslant R < \infty, \tag{8}$$

при этом, если $\beta \in B$, то $s = 2m$, если же $\beta \in \Gamma$, то $s = \max\limits_{1 < j < m} n_j$ ($2m$ и n_j — порядки рассматриваемых в работе операторов, см. п°. 2).

4. $(\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha \in CL^\infty(\chi_\alpha U_\alpha)$, $\psi_\alpha \varphi_\alpha \equiv \varphi_\alpha$, и если $\alpha \in B$, то $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subset U_\alpha$, а если же $\alpha \in \Gamma$, то $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha \cup \{\overline{U}_\alpha \cap \partial M\}$. Выполнена также следующая оценка:

$$\sup_{\alpha \in A} \|(\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha\|_{s, \chi_\alpha(U_\alpha)} < \infty, \tag{9}$$

где s принимает те же значения, что и выше.

Пространство $CL^s(M)$. Пусть $C(M)$— пространство непрерывных функций, заданных на CL-многообразии M с равномерной топологией.

Мы скажем, что $f \in C(M)$ принадлежит пространству $CL^s(M)$, если выполнены следующие условия:

а) $\quad \forall \alpha \in A$ функция $(\chi_\alpha^{-1})^* f \in CL^s(\chi_\alpha(U_\alpha))$, $\quad$ (10)

в) $$\sup_\alpha \|(\chi_\alpha^{-1})^* f\|_{s, \chi_\alpha(U_\alpha)} < \infty. \tag{11}$$

Замечание. Пространство $CL^\infty(M)$, по определению, есть $\bigcap\limits_{s=1}^\infty CL^s(M)$.

2°. Пусть U — область в H_1. Введем в рассмотрение оператор $\hat{P}$ порядка $2m$ с символом

$$P(x, A(x, \xi, \lambda)) = \sum_{k=0}^m a_k(x) [A(x, \xi, \lambda)]^k, \ x \in U, \ \xi \in H, \tag{12}$$

где $A(x, \xi, \lambda) = (A_1(x)\xi, \xi) + (c(x), \xi) + c_0(x) + \lambda^*$,

$$(A_1(x)\xi, \xi) = \sum_{i, j=1}^\infty a_{ij}(x) \xi_i \xi_j, \quad (c(x), \xi) = \sum_{i=1}^\infty c_i(x) \xi_i,$$

---

* В работе [1] был рассмотрен класс операторов (в полупространстве) несколько более частного вида, а именно, символы рассматриваемых там операторов имели вид (12), где $c_i(x) \equiv 0$, $i = 0, 1, 2, \cdots$. Однако все полученные там результаты, на самом деле, остаются справедливыми для рассматриваемого нами класса операторов.

функции $a_{ij}(x)$, $c_i(x)$, $c_0(x) \in CL^{\infty}(U)$, матрица $\|a_{ij}\|$ предполагается симметрической, $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \cdots)$ — элемент пространства H при любом $x \in U$, λ — комплексный параметр, принадлежащий $\mathbf{C}_+ = \{\lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}\lambda > 0\}$. Коэффициенты $a_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, бесконечно дифференцируемы и ограничены на U, при этом $a_m(x) \neq 0$, при $x \in U$.

Пусть, далее, существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\gamma^{-1} \|\xi\|^2 \leqslant (A_1(x)\xi, \xi) \leqslant \gamma \|\xi\|^2, \ \forall x \in U, \ \xi \in H \tag{13}$$

(символом $\|\xi\|$ обозначаем $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i^2\right)^{1/2}$.

Это условие обеспечивает эллиптичность оператора $\hat{P}$. Класс символов P, удовлетворяющих приведенным условиям, обозначим через $E(U)$.

На границе ∂U зададим операторы $\hat{N}_j$ с символами

$$N_j(B(x', \xi, \lambda)) = [B(x', \xi, \lambda)]^{n_j}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{14}$$

где

$$B(x', \xi, \lambda) = \xi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(x')\xi_k + \lambda, \tag{15}$$

$$x' \in \partial U, \ b = (b_2(x'), \cdots, b_k(x'), \cdots) \in H, \ \forall x' \in \partial U.$$

Коэффициенты $b_k(x')$ бесконечно дифференцируемы на ∂U, а $\operatorname{ord} \hat{N}_j = n_j \leqslant 2m$.

Как и в случае полупространства (см. [1]), граничные операторы $\hat{N}_j$ будут подчинены условию, аналогичному условию Лопатинского.

3°. Как установлено в работе [2] с помощью CL-отображений возможно привести оператор с символом $P \in E(U)$ к некоторому простому виду.

Точнее, в окрестности $U_\varepsilon = \{x \in H_1, x_1 \in [0, \varepsilon]\}$ края $x_1 = 0$ пространства H_1^+ существует следующая замена переменных $y = y(x)$:

$$y_1 = x_1, \ y_k = y_k(x_1, x_2, \cdots), \ y_k(0, x_2, x_3, \cdots) = x_k, \ k \geqslant 2,$$

где y — отображение класса CL, такое, что оператор P с символом (12) в некоторой окрестности $U_\delta \subset U_\varepsilon$ переходит в оператор $\hat{P}'$, символ которого имеет вид

$$P'(y, \xi, \lambda) = \sum_{k=0}^{m} a'_k(y)\left(\xi_1^2 + \sum_{i,j \geqslant 2} a'_{ij}(y)\xi_i\xi_j + (c'(y), \xi) + \lambda\right)^k. \tag{16}$$

Указанная замена переменных автоматически сохраняет край $x_1 = 0$ и граничные операторы (14).

4°. Определение 2. Мы скажем, что на CL-многообразии M задан символ $P \in E(M)$, если задано семейство функций $\{P_\alpha(x, \xi, \lambda)\}$, $\alpha \in A$, отображающих $\chi_\alpha(U_\alpha) \times H \times \mathbf{C}_+ \to \mathbf{C}$, при этом выполнены следующие условия:

а) Символы $P_\alpha \in E(\chi_\alpha(U_\alpha))$ и требуется, чтобы в выражении (12) для символа P_α функция $A_1(x)$ допускала представление $A_1 = A_1' + A_1''$, где A_1' не зависит от x, при этом $A_1'(\xi)$ и постоянная λ не зависели от $\alpha \in A$, а при замене координат $\chi_{\alpha\beta}$ выполнялись условия согласования, то есть формальный дифференциальный оператор $\widehat{P}_\alpha$ переходил бы в оператор $\widehat{P}_\beta$;

в) Выполнено условие (13) (обеспечивающее эллиптичность оператора $\widehat{P}$) равномерно по $\alpha \in A$ и $x \in \chi_\alpha(U_\alpha)$.

По символу $P \in E(M)$ на функциях $u \in CL^s(M)$, при $s \geqslant 2m$ оператор $\widehat{P}$ определяется следующим образом:

$$\widehat{P}u = \sum_\alpha \chi_\alpha^* \widehat{P}_\alpha (\chi_\alpha^{-1})^* \varphi_\alpha u. \tag{17}$$

При этом $\widehat{P}_\alpha$ задается вначале на функциях из $C_\Phi(U)$ как обычно (то есть в выражении для символа $P_\alpha(x, \xi)$ вместо ξ_l подставляется D_l), а затем путем замыкания продолжается на пространство $CL^s(U_\alpha)$.

Обратимся теперь к граничным операторам. Пусть M — CL-многообразие с краем, а $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$ — его координатное покрытие. По определению CL-многообразия, при $\alpha \in \Gamma$ $\partial M \cap U_\alpha \neq \varnothing$ и $\chi_\alpha(\partial M \cap U_\alpha) \subset \subset \{x \in H_1^+,\ x_1 = 0\}$. Для $\forall \alpha$, $\alpha \in \Gamma$ обозначим через $U_\alpha' = \partial M \cap U_\alpha$.

Определение 3. Мы скажем, что на границе ∂M CL-многообразия M заданы символы $N_j \in E(\partial M)$, $j = \overline{1, m}$, если задано семейство функций $\{N_{j,\alpha}(x', \xi, \lambda)\}$, $\alpha \in \Gamma$, отображающих $\chi_\alpha(U_\alpha') \times H \times \mathbf{C}_+ \to \mathbf{C}$, определяемых следующим образом (ср. (14), (15)):

$$N_{j,\alpha}(x', \xi, \lambda) = [B_\alpha(x', \xi, \lambda)]^{n_j}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{18}$$

где

$$B_\alpha(x', \xi, \lambda) = \xi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_{k,\alpha}(x')\,\xi_k + \lambda, \tag{19}$$

$$x' \in \chi_\alpha(U_\alpha'),\ b_\alpha = (b_{2,\alpha}(x'), \cdots) \in H,\ \forall x' \in \chi_\alpha\ (U_\alpha').$$

На функциях $u \in CL^s(M)$ при $s > n_j$, оператор $\widehat{N}_j$ определяется следующим образом:

$$\widehat{N}_j u = \sum_{\alpha \in \Gamma} \chi_\alpha^* \widehat{N}_{j,\alpha} (\chi_\alpha^{-1})^* \varphi_\alpha u, \tag{20}$$

где операторы $\widehat{N}_{j,\alpha}$ определяются по символам $N_{j,\alpha}$ точно так же, как было описано выше при задании оператора $\widehat{P}$ на многообразии M.

5°. Формулировка краевой задачи. Пусть M—многообразие класса CL с границей ∂M.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\widehat{P}u(x) = f(x),\ x \in M, \tag{21}$$

$$\widehat{N}_j u|_{\partial M} = g_j(x'),\ x' \in \partial M,\ j=\overline{1, m}, \tag{22}$$

где операторы $\widehat{P}$ и $\widehat{N}_l$ задаются представлениями (17) и (20) в соответствии с определениями 2 и 3 п. 4°.

Обозначим через P_0 главную часть символа P:

$$P_0(x, \xi, \lambda) = a_m(x)\,[A(x, \xi, \lambda)]^m \tag{23}$$

и пусть

$$P_1(x, \xi, \lambda) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x)\,[A(x, \xi, \lambda)]^j. \tag{24}$$

Как и в конечномерном случае (см. [3]) изучение задачи (21), (22) на многообразии существенно опирается на результаты по ее разрешимости в случае полупространства H_1^+. Дело в том, что многообразия класса CL наделены структурой, обеспечивающей локальное выпрямление границы.

В связи с этим, мы будем существенно пользоваться результатами работы [1], в которой изучена эта же задача в полупространстве H_1^+.

Как указано в упомянутой работе основным условием, связывающем оператор $\widehat{P}$ с граничными операторами $\widehat{N}_j$, является условие типа Лопатинского. Оно будет играть существенную роль также при изучении задачи (21), (22) на многообразии. Прежде чем сформулировать это условие, сделаем следующее

Замечание. Анализируя доказательство теоремы 1 работы [1], легко усмотреть, что регуляризатор задачи (21), (22) в полупространстве остается тем же, если рассмотреть символы более общего вида (12), в представлении которых „квадратичная форма“ $A(x, \xi, \lambda)$ содержит линейные члены.

Как было отмечено выше символы класса $E(M)$ локально возможно привести к виду (16). Учитывая сделанное только что замечание, не ограничивая общности, можно считать, что в представлении P_0 (главной части символа P) $c_i(x) \equiv 0$, $i=0, 1, 2, \cdots$, а $a_m(x) \equiv 1$.

Обозначим через $\omega_{k,\alpha}$, $k=1, 2, \cdots, m$ (ср. [1]) базис в пространстве устойчивых решений уравнения

$$P_{0,\alpha}\left((x, -i\frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda\right) v = 0,\ x \in \chi_\alpha(U_\alpha), \tag{25}$$

где

$$P_{0,\alpha}\left(x, -i\frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda\right) = F^{-1}_{\xi_1 \to x_1} P_{0,\alpha}(x, \xi_1, \xi', \lambda).$$

Легко видеть (см. [1]), что элементы базиса имеют следующий вид:

$$\omega_{k,\alpha}(x, x_1, \xi', \lambda) = x_1^{k-1} \exp\{-S_\alpha(x, \xi', \lambda)\, x_1\}, \tag{26}$$

$$k = 1, 2, \cdots, m,$$

где

$$S_\alpha(x, \xi', \lambda) = \Big(\sum_{j,k \geq 2} a_{jk}^{(\alpha)}(x)\, \xi_j \xi_k + \lambda\Big)^{1/2},\ x \in \chi_\alpha(U_\alpha).$$

Обозначим, далее, через

$$N_{j,\alpha}\left(B_\alpha\left(x'-i\frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda\right)\right)=F^{-1}_{\xi_1\to x_1} N_{j,\alpha}(x', \xi_1, \xi', \lambda), \quad x'\in\chi_\alpha(U'_\alpha).$$

Условие I. Требуется, чтобы операторы $\widehat{P}$ и $\widehat{N}_j$ удовлетворяли следующему алгебраическому условию:

$$\det\left\| N_{j,\alpha}\left(B_\alpha\left(x', -i\frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda\right)\right)\omega_{k,\alpha}(x, x_1, \xi', \lambda)|_{x_1=0}\right\|\neq 0 \tag{27}$$

$$\forall\alpha\in\Gamma,\ x'\in\chi_\alpha(U'_\alpha),\ |\xi'|+|\lambda|\neq 0.$$

Введем в рассмотрение „канонический" базис (см. [1], [3]) $\Omega_{k,\alpha}(x, x_1, \xi', \lambda)$ в пространстве устойчивых решений уравнения (25), определяемый следующими граничными условиями:

$$N_{j,\alpha}\left(B_n\left(x', -i\frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda\right)\right)\Omega_{k,\alpha}(x, x_1, \xi', \lambda)|_{x_1=0}=\delta_{jk}, \tag{28}$$

$$j, k=1, 2,\cdots, m,\ \forall\alpha\in\Gamma,\ \forall x'\in\chi_\alpha(U'_\alpha).$$

Предложение 1. *Оператор $\widehat{P}$ с символом $P\in E(M)$ допускает замыкание в $CL^0(M)$.*

Доказательство этого факта мы опускаем, поскольку оно, по существу, совпадает с доказательством теоремы 1 работы [4].

Предложение 2. *Операторы N_j $(j=\overline{1, m})$ с символами $N_j\in E(\partial M)$ допускают замыкание в пространстве $CL^0(M)$.*

Доказательство, по существу, совпадает с доказательством предложения 1 работы [1], поэтому мы его не приводим.

6°. Пусть M — CL-многообразие с краем ∂M. Обозначим через $\mathfrak{M}$ оператор краевой задачи (21), (22):

$$\mathfrak{M}u=\{\widehat{P}u(x), x\in M, \widehat{N}_1 u|_{\partial M},\cdots, \widehat{N}_m u|_{\partial M}\},$$

и пусть $\Omega_{\mathfrak{M}}$ — область определения его замыкания, а $\Omega_{\widehat{P}}$ — область определения замыкания оператора $\widehat{P}$.

В этом пункте построен регуляризатор краевой задачи (21), (22) и доказана ее однозначная разрешимость при достаточно больши $|\mathrm{Re}\,\lambda|$. При этом, построение регуляризатора будет проводиться в два приема: сначала на многообразии без края, а затем—вблизи границы.

В работе [1] построен регуляризатор $\widehat{R}$ задачи (21), (22) в случае полупространства H_1^+.

Он имеет следующий вид:

$$\widehat{R}(f, g_1,\cdots, g_m)=P^+\left\{\widehat{P}_0^{-1}lf+\sum_{j=1}^{m}{}^{\wedge}\,\Omega_j[g_j(x')-\widehat{N}_j u_0|_{x_1=0}]\right\}, \tag{29}$$

где $lf\in CL^0(H_1)$ — гладкое продолжение f на H_1, $u_0=\widehat{P}_0^{-1}lf$, при этом все операторы, входящие в представление для регуляризатора, порождаются мерами в соответствующих функциональных пространствах.

Теорема 1. *Пусть M — CL-многообразие без края, а символ $P \in E(M)$, тогда при достаточно больших $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ оператор $\widehat{P}$ изоморфно отображает $\Omega_{\widehat{p}}$ на пространство $CL^0(M)$, а для обратного ему оператора $\widehat{P}^{-1}$ справедлива следующая оценка:*

$$\|\widehat{P}^{-1} f\|_{C(M)} \leqslant C\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\varepsilon}\,\|f\|_{C(M)}, \tag{30}$$

*где $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные**).

Доказательство. В идейном отношении доказательство теоремы близко доказательству теоремы 5.1 работы [2].

Пусть $\{U_\alpha\}$ — координатное покрытие многообразия M, $\{\chi_\alpha\}$ — система локальных карт, а $\{\varphi_\alpha\}$ и $\{\psi_\alpha\}$ — функции разбиения единицы и накрывающие. Обозначим далее через $V_\alpha = \chi_\alpha(U_\alpha) \subset H_1$,

$$\varphi_\alpha^* = (\chi_\alpha^{-1})^* \varphi_\alpha,\ \psi_\alpha^* = (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha;\ \varphi_\alpha \text{ и } \psi_\alpha\colon V_\alpha \to R_1^+.$$

Пусть, далее, $P_{0,\alpha}(x, \xi, \lambda)$ — главная часть символа P_α, записанная в локальной системе координат, т. е. $P_{0,\alpha}(x, \xi, \lambda)\colon V_\alpha \times H \times C_+ \to C$. Имеем $P_{0,\alpha} \in E(V_\alpha)$, $\psi_\alpha^* P_{0,\alpha} \equiv 0$ при $x \in H_1 \setminus V_\alpha$. В силу равномерного условия эллиптичности (см. определение 2 п. 4°) существует оператор $\widehat{P}_{0,\alpha}^{-1}$, порожденный символом $P_{0,\alpha}^{-1}(x, \xi, \lambda)$, при этом, очевидно, $\varphi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1} \in \sum_{A_0}^{-2m+\varepsilon, s}$ (определение класса $\sum_{A_0}^{r, s}$ см. в [1]).

Введем в рассмотрение оператор $\widehat{R}$, действующий в пространстве $CL^{2m}(M)$ по формуле

$$\widehat{R} f = \sum_\alpha \chi_\alpha^* [\widehat{\ }\varphi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1} (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha f],\ f \in CL^{2m}(M). \tag{31}$$

Докажем, что он является регуляризатором для оператора $\widehat{P}$.

Поскольку на носителе функции φ_α имеем, что $\psi_\alpha \equiv 1$, то очевидно оператор $\widehat{\ }\varphi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1} \equiv \varphi_\alpha^* \widehat{\ }\psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1}$; продолжим его нулем в $H_1 \setminus V_\alpha$, тогда продолженный таким образом символ $\psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1} \in \sum_{A_0}^{-2m+\varepsilon, s}$ и в силу теоремы 3 работы [3] соответствующий ему оператор $\varphi_\alpha^* \widehat{\ }\psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1}$ непрерывным образом действует из пространства $CL^0(H_1)$ в $CL^0(V_\alpha)$.

Оценим оператор $\widehat{R}$. Для любого $f \in CL^0(M)$

$$\begin{aligned}
\|\widehat{R} f\|_{C(M)} &= \sup_{x \in M} \Big|\sum_\alpha \chi_\alpha^* \widehat{\ }\varphi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1} (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha f\Big| = \\
&= \sup_{x \in M} \Big|\sum_\alpha \chi_\alpha^* \varphi_\alpha^* \widehat{\ }\psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1} (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha f\Big| = \\
&= \sup_{x \in M} \Big|\sum_\alpha \varphi_\alpha \widehat{\ }\psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1} (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha f\Big| \leqslant \\
&\leqslant \sup_\alpha \|\widehat{\ }\psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1} (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha f\|_{C(V_\alpha)} \cdot \sum_\alpha \varphi_\alpha = \\
&= \sup_\alpha \|\widehat{\ }\psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1} (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha f\|_{C(V_\alpha)}.
\end{aligned} \tag{32}$$

---

* Здесь и далее через C будут обозначаться различные константы.

При выводе этой оценки мы воспользовались тем, что $\varphi_\alpha \geqslant 0$, $\forall \alpha$ и $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha \equiv 1$. Далее, в силу условия в) определения 2, обеспечивающего равномерную по α эллиптичность оператора $\widehat{P}$, а также того, что $\psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1} \in \sum_{A_0}^{-2m+\varepsilon, \delta}$, в соответствии с теоремой 1.2 из [2] имеем оценку

$$\|\psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1}\|_0 \leqslant C\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{m}{2}+\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0)$$

(определение $\|\cdot\|_0$ см. в [1]).

Очевидно

$$\|(\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha f\|_{C(H_0)} \leqslant \|f\|_{C(M)}.$$

Учитывая последние оценки из (32) получим

$$\|\widehat{R} f\|_{C(M)} \leqslant C\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{m}{2}+\varepsilon} \|(\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha f\|_{C(H_0)} \leqslant C\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{m}{2}+\varepsilon} \|f\|_{C(M)}, \tag{33}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от α и f.

Последняя оценка свидетельствует об ограниченности оператора $\widehat{R}$ в пространстве $CL^0(M)$, при этом норма оператора имеет следующий порядок по λ: $|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{m}{2}+\varepsilon}$.

Докажем теперь, что $\widehat{R}$ — правый регуляризатор для оператора $\widehat{P}$. Рассмотрим композицию $\widehat{P}_\alpha \circ \widehat{R}$.

Имеем $\widehat{P}_\alpha \circ \widehat{R} = \widehat{P}_{0,\alpha} \circ \widehat{R} + \widehat{P}_{1,\alpha} \circ \widehat{R}$, где

$$\widehat{P}_{0,\alpha} \circ \widehat{R} = \sum_\alpha \chi_\alpha^* \psi_\alpha^* \widehat{P}_{0,\alpha} \circ \varphi_\alpha^* \widehat{P}_{0,\alpha}^{-1} \circ (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha, \tag{34}$$

$$\widehat{P}_{1,\alpha} \circ \widetilde{R} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_\alpha \chi_\alpha^* \psi_\alpha^* \widehat{P}_{j,\alpha} \circ \varphi_\alpha^* \widehat{P}_{0,\alpha}^{-1} \circ (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha. \tag{35}$$

Воспользовавшись формулой композиции для псевдодифференциальных операторов, получим для слагаемых представления (34):

$$\psi_\alpha^* \widehat{P}_{0,\alpha} \circ \varphi_0^* \widehat{P}_{0,\alpha}^{-1} = \sum_{l=0}^{2m} \widehat{T}_{l,\alpha},$$

где

$$T_{l\alpha} = \sum_{|\beta|=l} \frac{1}{\beta!} \partial_\xi^\beta (\psi_\alpha^* P_{0,\alpha}) D_x^\beta (\varphi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1}),$$

при этом символ $T_{0,\alpha} = \varphi_\alpha^*$ (так как на носителе φ_α функция $\psi_\alpha \equiv 1$), а сумма конечна, поскольку оператор $\widehat{P}_{0,\alpha}$ — дифференциальный.

Обозначим далее $\widehat{T}_l = \sum\limits_\alpha \chi_\alpha^* \widehat{T}_{l,\alpha} \circ (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha$. Очевидно

$$T_0 = \sum_\alpha \chi_\alpha^* T_{0,\alpha} (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha =$$

$$=\sum \chi_\alpha^* \varphi_\alpha^* (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha = \sum_\alpha \chi_\alpha^* (\chi_\alpha^{-1})^* \varphi_\alpha (\chi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha = 1. \qquad (35')$$

Следовательно $\widehat{T}_0 = I$.

Оценим нормы операторов $\widehat{T}_i$, $i=\overline{1, 2m}$.

В силу формулы Лейбница нам надлежит оценить операторы с символами вида

$$\psi_\alpha^* \partial_\xi^\beta P_{0,\alpha} D_x^\gamma \varphi_\alpha^* D_x^{\beta-\gamma} P_{0,\alpha}^{-1}, \ |\beta|=i. \qquad (36)$$

Оценки будем производить последовательно. При $i=1$ имеем

$$T_{1,\alpha} = \psi_\alpha^* \sum_{(j)} \frac{\partial}{\partial \xi_j} P_{0,\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1}) =$$

$$= \psi_\alpha^* \sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} P_{0,\alpha} \left[\varphi_\alpha^* \frac{\partial}{\partial x_j} P_{0,\alpha}^{-1} + \frac{\partial \varphi_\alpha^*}{\partial x_j} P_{0,\alpha}^{-1} \right].$$

Для любого $f \in C(M)$

$$\|\widehat{T}_1 f\|_{C(M)} \leqslant C \left[\sum_\alpha |\varphi_\alpha| \sup \left\| \psi_\alpha^* \sum_j \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial \xi_j} \frac{\partial P_{0,\alpha}^{-1}}{\partial x_j} \right\|_0 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha, j} \left| \frac{\partial \varphi_\alpha^*}{\partial x_j} \right| \sup_{\alpha, x, j} \left\| \psi_\alpha^* \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial \xi_j} P_{0,\alpha}^{-1} \right\|_0 \right] \|f\|_{C(M)}. \qquad (37)$$

Символ P_0 — эллиптический и имеет порядок $2m$. В силу леммы 2.1 работы [5] имеем следующую оценку:

$$\left\| \psi_\alpha^* \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial \xi_j} \cdot P_{0,\alpha}^{-1} \right\|_0 \leqslant C_1 |\mathrm{Re}\,\lambda|^{-1/2}. \qquad (38)$$

Чтобы оценить первое слагаемое правой части неравенства (37) заметим, что $\frac{\partial}{\partial x_j} P_{0,\alpha}^{-1} = -\frac{1}{P_{0,\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_j} P_{0,\alpha}$. Воспользовавшись этим, запишем

$$\psi_\alpha^* \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial \xi_j} \frac{\partial P_{0,\alpha}^{-1}}{\partial x_j} = - \psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1+\varepsilon} \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial \xi_j} P_{0,\alpha}^{-1-\varepsilon} \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial x_j}.$$

Отсюда

$$\left\| \psi_\alpha^* \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial \xi_j} \frac{\partial P_{0,\alpha}^{-1}}{\partial x_j} \right\|_0 < \left\| \psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1+\varepsilon} \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial \xi_j} \right\|_0 \left\| P_{0,\alpha}^{-1-\varepsilon} \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial x_j} \right\|_0.$$

Символ $P_{0,\alpha}^{-1-\varepsilon} \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial x_j}$ имеет порядок по ξ, равный $-\varepsilon$, следовательно, в силу леммы 2.2 из [5] $\left\| P_{0,\alpha}^{-1} \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial x_j} \right\|_0 \leqslant C_2$, а для символа $P_{0,\alpha}^{-1+\varepsilon} \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial \xi_j}$ так же как и выше имеем оценку

$$\left\| \psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1+\varepsilon} \frac{\partial P_{0,\alpha}}{\partial \xi_j} \right\|_0 < C_3 |\mathrm{Re}\,\lambda|^{(-1+\varepsilon)/2}.$$

Далее в силу (8) $\sum_{\alpha, j} \left| \frac{\partial \varphi_\alpha^*}{\partial x_j} \right| \leqslant C_4$.

Таким образом, собирая оценки (38) и далее, получаем

$$\|\widehat{T}_1 f\|_{C(M)} \leqslant C_5 |\operatorname{Re} \lambda|^{(-1+\varepsilon)/2} \|f\|_{C(M)}. \tag{39}$$

Символы операторов $\widehat{T}_i$ $(i \geqslant 2)$ можно представить в виде суммы символов вида (36), при этом слагаемые, в которых $\gamma \neq 0$ (т. е. хотя бы одно дифференцирование падает на φ^*_α), оцениваются в точности так же, как операторы $\widehat{T}_s$, при $s \leqslant i-1$ с использованием условия (8). Остается оценить слагаемые с символами

$$\psi^*_\alpha \partial^\beta_\xi P_{0,\alpha} \cdot \varphi^*_\alpha D^\beta_x P^{-1}_{0,\alpha}, \ |\beta| = i.$$

Легко видеть, что $D^\beta_x P^{-1}_{0,\alpha}$ $(|\beta| = i)$, в свою очередь, можно представить в виде суммы символов

$$\frac{1}{P^s_{0,\alpha}} D^{\gamma_1}_x P_{0,\alpha} D^{\gamma_2}_x P_{0,\alpha} \cdots D^{\gamma_q}_x P_{0,\alpha}, \text{ где } s=2, 3, \cdots, i+1,$$

$$q \leqslant s-1, \ \sum_{k=1}^{q} |\gamma_k| = |\beta| = i.$$

Отсюда имеем

$$\psi^*_\alpha \partial^\beta_\xi P_{0,\alpha} \cdot \varphi^*_\alpha P^{-s}_{0,\alpha} D^{\gamma_1}_x P_{0,\alpha} D^{\gamma_2}_x P_{0,\alpha} \cdots D^{\gamma_q}_x P_{0,\alpha} =$$
$$= \psi^*_\alpha P^{-1+\varepsilon}_{0,\alpha} \partial^\beta_\xi P_{0,\alpha} \cdot \varphi^*_\alpha P^{-(s-1)-\varepsilon}_{0,\alpha} D^{\gamma_1}_x P_{0,\alpha} \cdots D^{\gamma_q}_x P_{0,\alpha},$$

при этом поскольку $i > 1$, то $\|\psi^*_\alpha P^{-1+\varepsilon}_{0,\alpha} \partial^\beta_\xi P_{0,\alpha}\|_0 \leqslant C_6 |\operatorname{Re} \lambda|^{(-i+\varepsilon)/2}_2$, а

$$\|\varphi^*_\alpha P^{-(s-1)-\varepsilon}_{0,\alpha} D^{\gamma_1}_x P_{0,\alpha} \cdots D^{\gamma_q}_x P_{0,\alpha}\|_0 \leqslant C_7.$$

Из этих оценок аналогично тому, как это было проведено для оператора $\widehat{T}_1$, будем иметь

$$\|\widehat{T}_i f\|_{C(M)} \leqslant C_8 |\operatorname{Re} \lambda|^{(-1+\varepsilon)/2} \|f\|_{C(M)}, \quad i = \overline{2, 2m}. \tag{40}$$

Доказательство теоремы будет по существу завершено, если мы установим оценку вида (40) для операторов $\psi^*_\alpha \widehat{P}_{j,\alpha} \circ \varphi^*_\alpha P^{-1}_{0,\alpha}$ $j = 0, \cdots, m-1$ (см. представление (35)).

Заметим, что по условию коэффициенты $a_{j,\alpha}(x)$, $x \in \chi_\alpha(U_\alpha)$ операторов $\widehat{P}_j$ бесконечно дифференцируемы и ограничены в H_1, а операторы $\widehat{P}_{j,\alpha}$ имеют порядок $2j$.

Как и выше

$$\psi^*_\alpha \widehat{P}_{j,\alpha} \circ \varphi^*_\alpha \widehat{P}^{-1}_{0,\alpha} = \sum_{l=0}^{2j} \widetilde{T}_{j,l,\alpha}$$

и повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве неравенств (40), получим для операторов $\widehat{T}_{j,l} = \sum_\alpha \chi^*_\alpha T_{j,l,\alpha} \circ (\chi^{-1}_\alpha)^* \psi_\alpha$ следующие оценки:

$$\|\hat{T}_{j,l} f\|_{C(M)} \leqslant C_0 |\operatorname{Re}\lambda|^{-\frac{1+\varepsilon}{2}+j-m}. \tag{41}$$

Обозначим через $\hat{T} = \sum\limits_{l=1}^{2m} \hat{T}_l + \sum\limits_{j=0}^{m-1} \sum\limits_{l=0}^{2j} \hat{T}_{j,l}$.

Поскольку $\hat{T}_0 = E$, то имеем представление

$$\hat{P} \circ \hat{R} = E + \hat{T},$$

где в силу (39)—(41) для оператора $\hat{T}$ имеем оценку

$$\|\hat{T} f\|_{C(M)} < C |\operatorname{Re}\lambda|^{(-1+\varepsilon)/2} \|f\|_{C(M)}$$

для любого $f \in C(M)$. Отсюда следует, что при достаточно большом $\operatorname{Re}\lambda|$ существует оператор $(E+\hat{T})^{-1}$, откуда получаем, что оператор $\hat{R} \circ (E+\hat{T})^{-1}$ является правым обратным к оператору $\hat{P}$ и отображает пространство $CL^0(M)$ в себя.

Доказательство того, что $\hat{R}$ является также левым регуляризатором для $\hat{P}$: $\hat{R} \circ \hat{P} = E + \hat{T}'$ проводится аналогично, с той лишь разницей, что необходимо воспользоваться формулой композиции для псевдодифференциальных операторов с остаточным членом (см. [5], формулу (4.3′)), а также условием (9). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть M — CL-многообразие с краем ∂M, символ $P \in E(M)$, а символы $N_j \in E(\partial M)$, $j=1, 2, \cdots, m$,* ord $N_j = n_j > m-1$ *и выполнено условие I.*

Тогда при достаточно больших $|\operatorname{Re}\lambda|$ оператор $\mathfrak{M}$ изоморфно отображает $\Omega_{\mathfrak{M}}$ на пространство $CL^0(M) \times \prod\limits_{j=1}^{m} CL^0(\partial M)$ и для обратного оператора справедлива оценка

$$\|\mathfrak{M}^{-1}\{f, g_1, \cdots, g_m\}\|_{C(M)} \leqslant C |\operatorname{Re}\lambda|^{-\varepsilon} \{\|f\|_{C(M)} + \\ + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{C(\partial M)}\}, \quad \varepsilon > 0. \tag{42}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $\psi \in CL^\infty(U_\varepsilon)$ — функция из разбиения единицы или накрывающая и $P \in E(U_\varepsilon)$ ($U_\varepsilon = \{x \in H_1, x_1 \in [0, \varepsilon]\}$), то с помощью замены переменных, указанной в п. 3°, оператор $\psi\hat{P}$ в некоторой окрестности U_δ, $U_\delta \subset U_\varepsilon$, переходит в оператор

$$\psi D_1^2 + \psi \sum_{l,k \geq 2} a'_{lk} D_l D_k + \cdots.$$

Регуляризатор задачи (21), (22) будем искать в следующем виде:

$$\hat{R} = \hat{R}_1 + \hat{R}_2,$$

где $\hat{R}_1$ имеет вид (31) и суммирование распространяется на $\alpha \in B$:

$$\hat{R}_1 f = \sum_{\alpha \in B} \chi^{*}_{\alpha} [\,\hat{}\, \varphi^{*}_{\alpha} P^{-1}_{0,\alpha} (\chi^{-1}_{\alpha})^{*} \psi_{\alpha} f], \tag{31'}$$

а каждый из операторов последней суммы является локальным регуляризатором оператора $\hat{P}$, отвечающим внутренности M.

Для того, чтобы задать оператор $\hat{R}_2$, являющийся, по существу, регуляризатором вблизи границы ∂M, воспользуемся леммой 4.4 работы [2] и приведем в некоторой полосе $0 \leqslant x_1 \leqslant \delta$, $x' \in H'_1$ оператор $\hat{P}$ к виду (16), при этом это приведение можно осуществить равномерно относительно $\alpha \in \Gamma$ ($\delta > 0$ не зависит от α). Рассмотрим затем монотонную бесконечно гладкую функцию $\rho(x_1) \in C^{\infty}(R^{+}_1)$, $\rho(x_1) \geqslant 0$, $\rho(x_1) \equiv 1$, при $x_1 \leqslant \frac{1}{2}$ и $\rho(x_1) \equiv 0$, при $x_1 > 1$.

В соответствии с представлением (29) регуляризатора в полупространстве зададим оператор $\hat{R}_2$ в виде

$$\hat{R}_2 = \sum_{\alpha \in \Gamma} P^{+} \hat{Q}_{\alpha 1} + \sum_{\alpha \in \Gamma} \hat{Q}_{\alpha 2} = \hat{R}'_2 + \hat{R}^{*}_2, \tag{43}$$

где

$$\hat{Q}_{\alpha 2} f = \chi^{*}_{\alpha} (1 - \rho(x_1/\delta)) [\,\hat{\varphi}^{*}_{\alpha} P^{-1}_{0,\alpha} (\chi^{-1}_{\alpha})^{*} \psi_{\alpha} f, \tag{44}$$

а

$$P^{+} \hat{Q}_{\alpha 1} \{f, g_1, \cdots, g_m\} = \chi^{*}_{\alpha} P^{+} \rho(x_1/\delta)\, \varphi^{*}_{\alpha} \{P^{-1}_{0,\alpha}\, l\, (\chi^{-1}_{\alpha})^{*} \psi_{\alpha} f +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \widehat{} \Omega_{j,\alpha} (\chi^{-1}_{\alpha})^{*} \psi_{\alpha} [g_j - N_j u_0|_{x_1=0}]\}. \tag{45}$$

Оператор $\hat{R}_1$ отвечает внутренности многообразия M и поэтому для него в силу теоремы 1 справедлива оценка вида (33)

$$\|\hat{R}_1 f\|_{C(M)} \leqslant C |\mathrm{Re}\, \lambda|^{-\frac{m}{2}+\varepsilon} \|f\|_{C(M)}. \tag{33'}$$

Такая же оценка имеет место и для оператора $\hat{R}^{*}_2$.

Остается рассмотреть оператор $\hat{R}'_2 = \sum_{\alpha \in \Gamma} \hat{Q}_{\alpha 1}$.

Как было отмечено при доказательстве теоремы 1 символы операторов $\widehat{}\psi^{*}_{\alpha} P^{-1}_{0,\alpha}$, продолженные нулем в $H_1 \setminus V_{\alpha}$, принадлежат классу $\sum_{A_0}^{-2m+\varepsilon, x}$, откуда следует, что оператор

$$\rho(x_1/\delta)\, \varphi^{*}_{\alpha} \hat{P}^{-1}_{0,\alpha} = \rho(x_1/\delta))\, \varphi^{*}_{\alpha} \widehat{} \psi^{*}_{\alpha} P^{-1}_{0,\alpha}$$

непрерывным образом действует из пространства $CL^0(H_1)$ в $CL^0(V_{\alpha})$. Используя далее лемму 1 из [1], получим, что оператор $\chi^{*}_{\alpha} P^{+} \rho(x_1/\delta) \times \varphi^{*}_{\alpha} \widehat{} P^{-1}_{0,\alpha} \circ l$ непрерывен, как оператор, действующий из пространства $CL^0(H^{+}_1)$ в $CL^0(V_{\alpha})$ $(V_{\alpha} \subset H^{+}_1)$.

Далее, по той же схеме, что и в теореме 1, придем к оценке (33′) для оператора $\hat{R}'_{21}=\sum_{\alpha\in\Gamma}\chi^{*}_{\alpha}\,P^{+}\,\rho(x_1/\delta)\,\varphi^{*}_{\alpha}\,\hat{P}^{-1}_{0,\alpha}\,l(\chi_{\alpha}^{-1})^{*}\,\psi_{\alpha}$.

Рассмотрим теперь операторы $\hat{Q}^{(j)}_{\alpha 1}=\rho(x_1/\delta)\,\varphi^{*}_{\alpha}\,\hat{\Omega}_{j,\alpha}=\rho(x_1/\delta)\,\varphi^{*}_{\alpha}\widehat{\ }\times$ $\times\widehat{\ }\psi^{*}_{\alpha}\,\Omega_{j,\alpha}$ $(j=\overline{1,m})$. Продолжим их символы нулем в $H_1\setminus V_{\alpha}$. При $n_j>m-1$ ([1], теорема 2) операторы $\hat{Q}^{(j)}_{\alpha 1}$ непрерывны как операторы, действующие из пространства $CL^0(H'_1)$ в $CL^0(V_{\alpha})$ (их символы принадлежат классу $'\Sigma^{m-n_j-1+\varepsilon,s}_{\Lambda_\theta(\xi',\lambda)}$, $s>0$ — любое, $\varepsilon>0$).

Для оператора $\hat{R}'_{2,1}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha\in\Gamma}\hat{Q}^{(j)}_{\alpha,1}(\chi_{\alpha}^{-1})^{*}\psi_{\alpha}$ имеем аналогично (32) оценку

$$\|\hat{R}'_{2,1}\{g_1,\cdots,g_m\}\|_{C(M)}\leqslant C\sum_{j=1}^{m}\sup_{\alpha}\|\hat{Q}^{(j)}_{\alpha 1}(\chi_{\alpha}^{-1})^{*}\psi_{\alpha}\,g_j\|_{C(V_{\alpha})}\,. \tag{46}$$

Воспользовавшись теперь неравенством (44) из [1] для символов $Q^{(j)}_{\alpha 1}$ получим

$$\|Q^{(j)}_{\alpha 1}\|_0\leqslant C\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\varepsilon}\quad(\varepsilon>0), \tag{47}$$

а для $(\chi_{\alpha}^{-1})^{*}\psi_{\alpha}\,g_j$ выполнено неравенство

$$\|(\chi_{\alpha}^{-1})^{*}\psi_{\alpha}\,g_j\|_{C(H'_1)}\leqslant\|g_j\|_{C(\partial M)},\ j=\overline{1,m}. \tag{48}$$

В силу (47), (48) имеем

$$\|\hat{R}'_{2,1}\{g_1,\cdots,g_m\}\|_{C(M)}\leqslant C\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\varepsilon}\sum_{j=1}^{m}\|g_j\|_{C(\partial M)}, \tag{49}$$

где постоянная $C>0$ не зависит от α и g_j.

Для завершения доказательства теоремы рассмотрим, наконец, композицию $\hat{N}_k\circ\hat{R}_2$.

Очевидно, что необходимо лишь изучить действие граничных операторов $\hat{N}_k$ на $\hat{R}'_2$ (поскольку вблизи границы $\rho(x_1/\delta)\equiv 1$). Для операторов $\hat{N}_k$ имеем представление (20):

$$\hat{N}_k u=\sum_{\alpha\in\Gamma}\chi^{*}_{\alpha}\hat{N}_{k,\alpha}(\chi_{\alpha}^{-1})^{*}\varphi_{\alpha}\,u.$$

В силу формулы композиции для псевдодифференциальных операторов, как и выше, имеем

$$\hat{N}_k\circ\hat{R}'_2=\sum_{i=0}^{n_k}\hat{T}_{i,k}$$

(сумма конечна, поскольку оператор $\hat{N}_k$ дифференциальный), при этом, как легко заметить, оператор $\hat{T}_{0,k}=E$ (выкладка аналогична (35′)). Оценки для операторов $\hat{T}_{i,k}$, $i\geqslant 1$, мы получим опять же с привлечением формулы композиции и соответствующих оценок в полупространстве, доказанных в [1].

Операторы $\hat{T}_{l,k}$ разлагаются в сумму операторов $\sum\limits_{\alpha} \hat{T}_{l,k,\alpha}$, символ каждого из которых имеет вид

$$T_{l,k,\alpha} = \sum_{|\beta|=l} \frac{1}{\beta!} \partial_\xi^\beta (\psi_\alpha^* N_{k,\alpha}) D_x^\beta Q_{\alpha l}.$$

Поскольку $n_k \leqslant 2m$, слагаемые $\partial_\xi^\beta (\psi_\alpha^* N_{k,\alpha}) D_x^\beta (\varphi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1})$, входящие в представление символа $T_{l,k,\alpha}$, оцениваются так же, как и в теореме 1 (см. вывод неравенств (37)—(40)).

Осталось оценить слагаемые вида $\partial_\xi^\beta (\psi_\alpha^* N_{k,\alpha}) D_x^\beta \mathfrak{Q}_{j,\alpha}$.

В [1] для операторов $\hat{N}_k \circ P^+ \hat{\mathfrak{Q}}_j$ в полупространстве H_1^+ доказана оценка вида (30).

Используя ее, как и выше, приходим к неравенству

$$\|T_{l,k}\{f, g_1, \cdots, g_m\}\|_{C(M)} \leqslant$$

$$\leqslant C_k |\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\varepsilon} \left(\|f\|_{C(M)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{C(\partial M)}\right), \qquad (50)$$

где $\varepsilon > 0$, $i = 0, 1, \cdots, n_k$, $k = 1, 2, \cdots, m$.

Из оценок (33'), (49), (50) следует, что при достаточно больших $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ оператор $\mathfrak{M}$ обладает ограниченным обратным оператором $\mathfrak{M}^{-1}$ и оценка (42).

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 4.IV.1983

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ. Ընդհանուր եզրային խնդիր բարձր կարգի էլիպտական օպերատորների համար եզրով անվերջ չափանի բազմաձևությունների վրա *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է եզրային խնդիր բարձր կարգի էլիպտական տիպի հավասարումների համար եզրով անվերջչափանի բազմաձևությունների վրա՝ ենթադրելով, որ դիտարկվող խնդրի օպերատորը բավարարում է որոշ հանրահաշվական պայմանի ապացուցվում է նրա լուծման գոյությունն ու միակությունը հատուկ ձևով կառուցված ֆունկցիոնալ տարածություններում։

R. L. SHAKHBAGIAN. *General boundary problem for elliptic operators of high order on the infinite dimensional manifolds with a boundary* (summary)

The paper studies the boundary problem for elliptic equations of high order on infinite dimensional Hilbert manifolds with a boundary.

Under assumtion that the operator of the problem satisfies certain algebraic condition the univalent solvability in specially constructed functional spaces is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Л. Шахбагян.* Общая краевая задача для уравнений эллиптического типа высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XVIII, № 1, 1983, 49—64.

2. *М. И. Вишик. А. В. Марченко.* Краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений второго порядка на бесконечномерных многобразиях с краем, Матем. сб., 90, № 3, 1973, 331—371.
3. *М. С. Агранович, М. И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, XIX, вып. 3 (117), 1964, 53—161.
4. *Р. Л. Шахбагян.* Задача Дирихле в полупространстве для эллиптических операторов высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XVI, № 2, 1981, 150—166.
5. *П. М. Блехер, М. И. Вишик.* Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях, Матем. сб., 86, № 3, 1971, 446—494.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 1, 1984 Математика

УДК 517.548

J. A. SIDDIQI

ON THE EQUIVALENCE OF CLASSES OF INFINITELY DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

1. Let I be an arbitrary subinterval of R and let $M=(M_n)$ be a given sequence of positive numbers. We denote by $C_M(I)$ the class of functions $f\in C^\infty(I)$ such that

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant Ak^n M_n \quad \forall n\geqslant 0, \quad \forall x\in I \quad k=k(f)$$

and by $\overset{\bullet}{C}_M(I)$ the class of functions $f\in C^\infty(I)$ such that for each $x_0\in I$ there is a compact subinterval $J_{x_0}\subset I$ with the property that

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant Ak^n M_n \quad \forall n>0, \quad \forall x\in J_{x_0}, \quad k=k(f, J_{x_0}),$$

If I is a compact interval, then clearly $\overset{\bullet}{C}_M(I)\equiv C_M(I)$.

The problem of the equivalence of classes $C_M(I)$ for a fixed interval consists in finding necessary and sufficient conditions on sequences L and M in order that the classes $C_L(I)$ and $C_M(I)$ (resp. $\overset{\bullet}{C}_L(I)$ and $\overset{\bullet}{C}_M(I)$) be identical. A solution of this problem follows immediately from the analogous problem for inclusion viz that $C_L(I)\subseteq C_M(I)$ (resp. $\overset{\bullet}{C}_L(I)\subseteq$ $\subseteq \overset{\bullet}{C}_M(I)$). This inclusion problem was first posed by T. Carleman [3] (p. 76) and conditions which vary according to the nature of interval I, were found successively in cases when I is the whole line (for classes $C_M(I)$), an open or closed finite interval (for classes $\overset{\bullet}{C}_M(I)$), a closed halfline (for classes $C_M(I)$) by A. Gorny [6] (cf. also S. Mandelbrojt [7], [8]), H. Cartan and S. Mandelbrojt [4] and S. Agmon [1] respectively. J. Boman and L. Hörmander [2] gave simple proof of the theorem on equivalence of classes when $I=$ R using Baire's category theorem.

The problem of inclusion for clesses $C_M(\overset{\bullet}{R}_+)$, $\overset{\bullet}{C}_M(R_+)$ and $\overset{\bullet}{C}_M(\overset{\bullet}{R}_+)$, where $R_+=[0, \infty[$ and $\overset{\bullet}{R}_+=]0, \infty[$, however, remains open. In this paper, we settle this by using the Bair's category theorem. In order to give a unified approach to the treatment of the problem by this method for classes $C_M(I)$ and $\overset{\bullet}{C}_M(I)$, where I is any type of linear interval, we also give simple alternative proofs of the results of the above authors.

2. In order to formulate the theorems which we prove in the sequel, we need a few definitions and results about the regularizations

---

The research was supported in part by National Research Council of Canada Grant № A9378 and in part by a FCAC Grant of the Quebec Ministry of Education for 1981—82.

of sequences and of classes (cf. S. Mandelbrojt [9]). We recall that a sequence $M=\{M_n\}$ of positive numbers is called log-convex if the sequence $\{\log M_n\}$ is a convex sequence. A sequence $M^c=\{M_n^c\}$ is called a log-convex regularization of M if $\{\log M_n^c\}$ is the largest convex minorant of $\{\log M_n\}$, it is defined by the relations

$$T_M(r)=\sup_{n>0}\frac{r^n}{M_n},\quad M_n^c=\sup_{r>0}\frac{r^n}{T_M(r)}.$$

It is easily seen that (cf. S. Mandelbrojt [9]):

$$T_{M^c}(r)=\sup_{n>0}\frac{r^n}{M_n^c},\quad M_n^c=\sup_{r>0}\frac{r^n}{T_{M^c}(r)}. \tag{1}$$

We define the sequence M^d by the following relations

$$N_n=n^n M_n,\quad N_n^c=n^n M_n^d \qquad (n\geqslant 1).$$

It follows readily from (1) that

$$\tilde{T}_{M^d}(r)=\sup_{n>0}\frac{r^n}{n^n M_n^d},\quad n^n M_n^d=\sup_{r>0}\frac{r^n}{\tilde{T}_{M^d}(r)}. \tag{2}$$

Let M be a sequence of positive numbers. We recall that the exponential regularization M^0 of M is defined by the relations

$$S_M(r)=\max_{n<r}\frac{r^n}{M_n}\ (r>1),\quad M_n^0=\sup_{r>n}\frac{r^n}{S_M(r)}.$$

It is easily seen that (cf. S. Mandelbrojt [9])

$$S_{M^0}(r)=\max_{n<r}\frac{r^n}{M_n^0},\quad M_n^0=\sup_{r>n}\frac{r^n}{S_{M^0}(r)}. \tag{3}$$

We define the sequence M^f by the following relations

$$N_n=(n^n M_n)^{\frac{1}{2}},\quad N_n^0=(n^n M_n^f)^{\frac{1}{2}}. \qquad (n>1).$$

It follows from (3) that

$$U_{M^f}(r)=\max_{n<r}\frac{r^{2n}}{n^n M_n^f},\quad n^n M_n^f=\sup_{r>n}\frac{r^{2n}}{U_{M^f}(r)}. \tag{4}$$

The sequences M^c, M^d, M^0, M^f are called the regularized sequences of M and possess the property of being the smallest sequences representing the classes $C_M(\mathrm{R})$, $C_M(\mathrm{R}^d)$, $\overset{*}{C}_M(I)$ (I a finite or infinite open interval), $C_M^*(I)$ (I a finite closed or a finite or infinite semi-closed interval) respectively. The processus of defining the classes by regularized sequences is called the regularisation of classes and is realized by using the Gorny—Cartan inequalities between the bounds of the modulii of the successive derivatives of a functions which vary according to the type of the interval considered. The following theorems due to the above cited authors describe these classes.

Theorem A. (i) *If* $\liminf M_n^{1/n}=0$, C_M (R)$\equiv${*constants*}; *if* $0<\liminf M_n^{1/n}<\infty$, C_M (R)$=C_1$ (R); *if* $\lim M_n^{1/n}=\infty$, C_M (R)$\equiv C_{M^c}$(R).

(ii) *If* $\liminf n\,M_n^{1/n}<\infty$, $C_M(d\mathrm{R})\subseteq Cn^{-n}$ $(d\mathrm{R})$; *if* $\lim nM_n^{1/n}=\infty$, C_M $(d\mathrm{R})\equiv C_{M^d}$ $(d\mathrm{R})$, *where* dR *denotes a half-line.*

(iii) $C_M^*(I)\equiv C_{M^p}^*(I)$, *where* I *is a finite or infinite open interval.*

(iv) $C_M^*(I)=C_{M^f}^*(I)$, *where* I *is a compact interval or a finite or infinite semi-closed interval.*

3. We begin by showing that a category argument can be used to give a short and simple proof of the following basic theorem of S. Mandelbrojt (cf. [7], pp. 91—93) which gives a necessary condition for the inclusion of classes.

Theorem B. *If* $C_L(I)\subseteq C_M(I)$, *then* $(L_n^c)^{1/n}=O\,[(M_n^c)^{1/n}]$ *for any arbitrary interval* $I\subseteq$ R.

Proof: Since $L_n^c\leqslant L_n$ for $n\geqslant 0$, it follows that $C_{L^c}(I)\subseteq C_M(I)$. Let

$$B=\{f\in C^\infty(I):\|f^{(n)}\|_\infty\leqslant AL_n^c\ \forall n>0,\ A=A(f)\}.$$

B is a Banach space if we introduce the norm $f\to\|f\|_B=\sup_{n>0}\{\|f^{(n)}\|_\infty/L_n^c\}$. For $j=1,2,\cdots$, let

$$V_j=\{f\in B:\|f^{(n)}\|_\infty\leqslant j^{n+1}M_n,\ \forall n\geqslant 0\}.$$

Since $C_{L^c}(I)\subseteq C_M(I)$, $B=\bigcup_{j=1}^{\infty}V_j$. Since V_j's are closed in B, by Baire's category theorem, there exist a V_j and a $\delta>0$ such that $\|f\|_B\leqslant\delta$ implies that $f\in V_j$.

Put

$$f(x)=\frac{\delta e^{ixr}}{T_{L^c}(r)}\quad(r>0)$$

Clearly $\|f\|_B\leqslant\delta$ and hence $f\in V_j$ i. e.

$$\frac{\delta r^n}{T_{L^c}(r)}\leqslant j^{n+1}M_n\ (r>0)$$

and hence, by (1),

$$\delta L_n^c=\delta\sup_{r>0}\frac{r^n}{T_{L^c}(r)}<j^{n+1}M_n$$

or

$$(L_n^c)^{1/n}=O\,[(M_n)^{1/n}].$$

Since M^c is the largest convex minorant of M, it follows that we also have

$$(L_n^c)^{1/n}=O\,[(M_n^c)^{1/n}].$$

This theorem can be extended to classes $C_M^*(I)$ as follows.

Theorem B'. *If* $C_L^*(I)\subseteq C_M^*(I)$, *then* $(L_n^c)^{1/n}=O\,[(M_n^c)^{1/n}]$ *for any arbitrary interval* $I\subseteq$ R.

Poof: We proceed as abowe and define the Banach space B. Let $I=\bigcup_1^\infty J_k$, a countable union of non-overlapping compact intervals. For each $j=1, 2, \cdots$ and $k=1, 2, \cdots$ let

$$V_{j,k}=\{f\in B: |f^{(n)}(x)|\leqslant j^{n+1} M_n, \ \forall x\in J_k \text{ and } \forall n\geqslant 0\}.$$

Since $C^*_{L^c}(I)\subseteq C^*_M(I)$, $B=\bigcup_{j,k=1}^\infty V_{j,k}$. The rest of the proof goes through as above.

4. Using the category argument as in the proof Theorem A, we give a simple proof of the following theorem which solves the inclusion problem for different classes:

Theorem C. *Let L and M be two sequences of positive numbers.*

(i) *If* $\liminf_{n\to\infty} L_n^{1/n}=\liminf_{n\to\infty} M_n^{1/n}=0$, $C_L(\mathrm{R})=C_M(\mathrm{R})=\{constants\}$, *if* $0<\liminf_{n\to\infty} L_n^{1/n}<\infty$ *and* $0<\liminf_{n\to\infty} M_n^{1/n}<\infty$, $C_L(\mathrm{R})=C_M(\mathrm{R})=C_1(\mathrm{R})$, *if* $\lim_{n\to\infty} L_n^{1/n}=\infty$, *then* $C_L(\mathrm{R})\subseteq C_M(\mathrm{R})$ *if and only if* $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n}=\infty$ *and* $(L_n^c)^{1/n}=O(M_n^{1/n})$ *or* $(L_n^c)^{1/n}=O[(M_n^c)^{1/n}]$.

(ii) *If* $\liminf_{n\to\infty} L_n^{1/n}>0$ *and* $\liminf_{n\to\infty} M_n^{1/n}>0$, *then* $C_L(d\mathrm{R})\subseteq C_M(d\mathrm{R})$ *if and only if* $(L_n^d)^{1/n}=O(M_n^{1/n})$ *or* $(L_n^d)^{1/n}=O(M_n^d)^{1/n}$, *where* $d\mathrm{R}$ *represents any open or closed halfline.*

(iii) $C_L^*(I)\subseteq C_M^*(I)$ *if and only if* $(L_n^0)^{1/n}=O(M_n^{1/n})$ *or* $(L_n^0)^{1/n}=O[(M_n^0)^{1/n}]$ *for any finite or infinite open interval.*

(iv) $C_L^*(I)\subseteq C_M^*(I)$ *if and only if* $(L_n^f)^{1/n}=O(M_n^{1/n})$ *or* $(L_n^f)^{1/n}=O[(M_n^f)^{1/n}]$ *for any closed finite interval or any semi-closed finite or infinite interval.*

Proof: Since the conditions given in (i)—(iv) are clearly sufficient, we need only prove that they are necessary.

(i) If $\lim L_n^{1/n}=\infty$, it follows from Theorem A (i) that $C_L(\mathrm{R})=C_{L^c}(\mathrm{R})$. Applying Theorem B, we get the result.

(ii) By Theorem A (ii), $C_L(d\mathrm{R})=C_{L^d}(d\mathrm{R})$ and $C_M(d\mathrm{R})=C_{M^d}(d\mathrm{R})$. Suppose that $C_{L^d}(d\mathrm{R})\subseteq C_{M^d}(d\mathrm{R})$. Without loss of generality, we can suppose that $d\mathrm{R}=\mathrm{R}_+=[0,\infty)$. Put $\mathrm{B}=\{f\in C^\infty(\mathrm{R}): \|f^{(n)}\|_\infty\leqslant AL_n^d, \forall n>0\}$ and define the norm $f\to\|f\|_B$ by setting $\|f\|_B=\sup_{n>0}\{\|f^{(n)}\|_\infty/L_n^d\}$. B is a Banach space and for every integer $j\geqslant 1$, $V_j=\{f\in B: \|f^{(n)}\|_\infty\leqslant j^{n+1}M_n^d, \forall n>0\}$ is a closed subspace of B. Since $C_{L^d}(d\mathrm{R})\subseteq C_{M^d}(d\mathrm{R})$, $B=\bigcup_{j=1}^\infty V_j$. By Baire's category theorem, there exist a $\delta>0$ and a V_j such that $\|f\|_B\leqslant\delta$ implies that $f\in V_j$. Consider the function g defined by

$$g(x)=\delta e^{-x}\Lambda_{[r]}(x)/2a\,\widetilde{T}_{L^d}(r), \quad (r>1),$$

where Λ_n is a Laguerre polynomial of degree n defined by setting

$$\Lambda_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_{n,\,n-k}\frac{(-x)^k}{k!}\quad (n\geqslant 1)$$

and where $a=\max[1, L_1^d, L_1^d(L_0^d)^{-1}]$. It is known (cf. [9], p. 208) that for all $x\in R_+$

$$e^{-x}|\Lambda_n(x)|\leqslant 1,$$

$$|[e^{-x}\Lambda_n(x)]^{(k)}|\leqslant 2(4e^2 n k^{-1})^k,\ 0<k<n,$$

$$|[e^{-x}\Lambda_n(x)]^{(k)}|\leqslant 4^k,\ k\geqslant n.$$

It follows that for $k\geqslant[r]$

$$\|g^{(k)}\|_\infty\leqslant\frac{\delta 4^k}{2a\,\widetilde{T}_{L^d}(r)}\leqslant\frac{\delta 4^k}{a}L_1^d.$$

Since $\liminf L_n^{1/n}>0$, there exists a positive constant $\lambda<1$ such that $n^n L_n>\lambda^n n^n$. Since $\lambda^n n^n$ is log-convex and $n^n L_n^d$ is the largest log-convex minorant of $n^n L^n$ we have $n^n L_n^d\geqslant n^n\lambda^n$ or $L_n^d\geqslant\lambda^n$ for all $n\geqslant 1$. Thus for $k\geqslant[r]$

$$\|g^{(k)}\|_\infty\leqslant\delta 4^k\frac{L_1^d}{a\lambda^k}L_k^d\leqslant\delta 4^k\lambda^{-k}L_k^d$$

since $a=\max[1, L_1^d, (L_0^d)^{-1}]$. For $0<k<[r]$,

$$\|g^{(k)}\|_\infty\leqslant\delta(4e^2)^k k^{-k}\frac{r^k}{\widetilde{T}_{L^d}(r)}\leqslant\delta(4e^2)^k k^{-k}\sup_{r>0}\frac{r^k}{\widetilde{T}_{L^d}(r)}\leqslant\delta(4e^2)^k L_k^d$$

by (2). Clearly for $k=0$, $\|g^{(k)}\|_\infty\leqslant\delta/a\widetilde{T}_{L^d}(r)\leqslant\delta L_0^d$. If we set $f(t)=g(bt)$ where $0<b<\frac{1}{4e^2}$ then for all $k\geqslant 0$ $\|f^{(k)}\|_\infty\leqslant\delta L_k^d$ so that $f\in B$ and $\|f\|_B\leqslant\delta$. Hence $f\in V_j$ so that

$$|f^{(k)}(0)|=|b^k g^{(k)}(0)|=\delta b^k|[e^{-x}\Lambda_{[r]}(x)]_{x=0}^{(k)}|/2a\,\widetilde{T}_{L^d}(r)\leqslant j^{k+1}M_k^d.$$

But we know (cf. [9], p. 210) that

$$|[e^{-x}\Lambda_{[r]}(x)]_{x=0}^{(k)}|\geqslant\left(\frac{[r]}{ak}\right)^k\geqslant\left(\frac{r}{2ak}\right)^k.$$

Hence for every $r\geqslant 1$

$$\frac{\delta b^k}{2a(2ak)^k}\cdot\frac{r^k}{\widetilde{T}_{L^d}(r)}\leqslant j^{k+1}M_k^d\quad k\geqslant 1$$

so for large k

$$L_k^d=k^{-k}\sup_{r\geqslant 1}\frac{r^k}{\widetilde{T}_{L^d}(r)}\leqslant\frac{2a}{\delta}(2ab^{-1})^k j^{k+1}M_k^d$$

i. e. $(L_k^d)^{1/k}=O[(M_k^d)^{1/k}]$.

(III) For any finite or infinite open interval I, we have by Theorem A (iii) $C^*_{L^0}(I) = C^*_L(I)$ and $C^*_{M^0}(I) = C^*_M(I)$. Suppose that $C^*_{L^0}(I) \subseteq \subseteq C^*_{M^0}(I)$. First suppose that I is a finite open interval. Without loss of generality, we may suppose that $I =]-1, 1[$. We can write $I = \bigcup_{l=1}^{\infty} I_l$, where $I_l = [-a_l, a_l]$ and (a_l) is an increasing sequence tending to 1. Let $F = \{f \in C^\infty(I): \forall I_l,\ \exists A_l: |f^{(n)}(x)| \leqslant A_l L^0_n,\ \forall n > 0,\ \forall x \in I_l,\ A_l = A_l(f)\}$ and let

$$p_l(f) = \sup_{n>0} \max_{x \in I_l} |f^{(n)}(x)| / L^0_n.$$

p_l is a semi-norm on F and F with this family of semi-norms is a Frèchet space. Let $V_{j,l} = \{f \in F: |f^{(n)}(x)| < j^{n+1} M^0_n,\ \forall n > 0,\ \forall x \in I_l\}$. If $f \in F$, $f \in C^*_{M^0}(I)$. Hence for every $x_0 \in I_l$, there exists an open interval $J_{x_0} \subset I$ such that

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant A_{x_0} \lambda^n_{x_0} M^0_n,\ \forall x \in J_{x_0} \text{ and } \forall n \geqslant 0.$$

Applying Borel—Lebesgue theorem, we conclude that there exist constants A_l and λ_l such that

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant A_l \lambda^n_l M^0_n,\ \forall x \in I_l \text{ and } \forall n \geqslant 0.$$

This shows that for each fixed l, there exists a $j = j(f, l)$ such that $f \in V_{j(f,l),l}$. Thus $F = \bigcup_{j,l=1}^{\infty} V_{j,l}$. Clearly $V_{j,l}$'s are closed in F. Hence, by Baire's category theorem, there exist a semi-norm p_{l_1}, a $\delta > 0$ and a V_{j_0, l_0} such that $p_{l_1}(f) \leqslant \delta$ implies that $f \in V_{j_0, l_0}$.

Let

$$z_n(t) = \frac{1}{2}[T_{n-1}(t) + T_n(t)],$$

where T_n denotes the Cebyšev polynomial of degree n. It is known (cf. [9], p. 206) that

$$\frac{e^{-k}}{2} n^k \leqslant |z_n^{(k)}(0)| < n^k\ (n > 1) \tag{4'}$$

and

$$|T_n^{(k)}(x)| \leqslant \frac{3^k n^k}{(1-x^2)^k}\ (0 < k \leqslant n),\ -1 < x < 1. \tag{5}$$

Put for $r \geqslant 1$,

$$f(x) = \frac{\delta}{S_{L^0}(r)} z_{[r]}(bx),$$

where $0 < b < \min\left(\frac{1}{2a_{l_1}}, \frac{1}{4}\right)$ and

$$S_{L^0}(r) = \max_{n<r} \frac{r^n}{L^0_n} \qquad (r > 0).$$

For $n \leqslant [r]$ and $|x| \leqslant a_{l_1}$

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{\delta}{S_{L^0}(r)} \cdot b^n \left|z_{[r]}^{(n)}(bx)\right| \leqslant \frac{\delta}{S_{L^0}(r)} \cdot \frac{3^n b^n r^n}{(1-a_{l_1}^2 b^2)^n} \leqslant \frac{\delta}{S_{L_0}(r)} \cdot r^n$$

the last inequality being true since $3b<(1-a_{l_1}^2 b^2)$. Hence for $n \leqslant r$

$$\max_{x \in I_{l_1}} |f^{(n)}(x)| \leqslant \sup_{n<r} \frac{r^n}{S_{L^0}(r)} = \delta L_n^0.$$

But for $n>[r]$, $f^{(n)} \equiv 0$. Hence $p_{l_1}(f) \leqslant \delta$ so that $f \in V_{j_0, l_0}$ i. e.

$$\frac{\delta b^n}{S_{L_0}(r)} \left|z_{[r]}^{(n)}(bx)\right| \leqslant j_0^{n+1} M_n^0, \ \forall n \geqslant 0 \text{ and } \forall x \in I_{l_0}$$

so that

$$\frac{\delta b^n}{S_{L_0}(r)} \frac{e^{-n}}{2} [r]^n \leqslant \frac{\delta}{S_{L_0}(r)} \left|z_{[r]}^{(n)}(0)\right| \leqslant j_0^{n+1} M_n^0$$

or

$$\frac{r^n}{S_{L_0}(r)} \leqslant \delta^{-1} 2^n e^n b^{-n} j_0^{n+1} M_n^0.$$

Since this holds for r such $[r]>n$, taking the supremum with respect to all $r>n$, we get

$$L_n^0 = \sup_{n<r} \frac{r^n}{S_{L^0}(r)} \leqslant \lambda^n M_n^0,$$

i. e. $(L_n^0)^{1/n} = O\,[(M_n^0)^{1/n}]$.

Next suppose that $I = \mathrm{R}$. We write $\mathrm{R} = \bigcup_{1}^{\infty} I_l$, where $I_l = [-l, l]$.

We repeat the steps of the above proof and conclude that there exist a semi-norm p_{l_1}, a $\delta>0$ and a V_{j_0, l_0} such that if an $f \in F$ is such that $p_{l_1}(f) \leqslant \delta$, then $f \in V_{j_0, l_0}$.

Let

$$f(x) = \frac{\delta x^{[r]}}{l_1^r S_{L_0}(r)}.$$

Then

$$\max_{x \in I_l} |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{\delta r^n l^r}{S_{L^0}(r) \cdot l_1^r}$$

if $n \leqslant [r]$ and $\equiv 0$ otherwise. Hence

$$p_{l_1}(f) = \sup_{n>0} \frac{\max_{x \in I_{l_1}} |f^{(n)}(x)|}{L_n^0} \leqslant \delta \left(\sup_{n<r} \frac{r^n}{L_n^0} \right) \frac{1}{S_{L^0}(r)} \leqslant \delta.$$

Hence, for all $[r] \geqslant n$ and for $n \geqslant 1$

$$\frac{\delta}{l_1^r S_{L^0}(r)} [r]([r]-1) \cdots ([r]-n+1)\, l_1^{[r]-n} \leqslant j^{n+1} M_n^0.$$

or

$$\frac{\delta}{S_{L^0}(r)} 2^{-n} r^n e^{-n} l_1^{[r]-r-n} \leqslant j^{n+1} M_n^0.$$

Thus

$$L_n^0 = \sup_{r>n} \frac{r^n}{S_{L^0}(r)} \leqslant \lambda^{n+1} M_n^0.$$

Let us suppose that I is an open half-line. Without loss of generality, we suppose that $I=]0, \infty[$. We write $I_l=\left[\frac{1}{l}, l\right]$ so that $I=\bigcup I_l$. If we repeat the arguments for $I=R$, we get the result.

(iv) For any closed finite interval or any semi-closed finite or infinite interval I, we have by Theorem A (iv), $C_L^*(I)=C_{L^f}^*(I)$ and $C_M^*(I)=C_{M^f}^*(I)$.

Suppose that $C_{L^f}^*(I)\subseteq C_{M^f}^*(I)$. First let I be a compact interval which we may suppose, without loss of generality, to be $[-a, a]$ with $a>\frac{e}{2}$. In this case we have $C_{L^f}(I)\subseteq C_{M^f}(I)$. Set $B=\{f\in C^\infty(I): \|f^{(n)}\|_\infty\leqslant \leqslant AL_n^f\ \forall n\geqslant 0,\ A=A(f)\}$. For every $f\in B$, define $\|f\|_B=\sup\limits_{n\geqslant 0}\|f^{(n)}\|_\infty/L_n^f$. B is a Banach space with this norm. Eor every integer $j\geqslant 1$, define V_j by setting $V_j=\{f\in B: \|f^{(n)}\|_\infty\leqslant j^{n+1}M_n^f\ \forall n\geqslant 0\}$. V_j's are closed in B and $B=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}V_j$. By Baire's theorem, there exist a $\delta>0$ and a j such that $\|f\|_B\leqslant\delta$ implies that $f\in V_j$.

Put

$$f(x)=\delta\frac{T_{[r]}(a^{-1}x)}{U_{L^f}(r)},$$

where $r\geqslant 1$. Clearly

$$\max_{-a<x<a}|f^{(n)}(x)|=\frac{\delta a^{-n}}{U_{L^f}(r)}\cdot|T_{[r]}^{(n)}(1)|\ \text{for}\ n\leqslant[r]$$

$$=0\qquad\text{for}\ n>[r].$$

But

$$\left(\frac{2}{en}\right)^n[r]^{2n}\leqslant|T_{[r]}^{(n)}(1)|\leqslant\left(\frac{e}{2n}\right)^n[r]^{2n}. \tag{6}$$

Hence

$$\|f\|_B\leqslant\frac{\delta a^{-n}}{U_{L^f}(r)}\left(\frac{e}{2}\right)^n\sup_{n<r}\frac{r^{2n}}{n^nL_n^f}\leqslant\delta$$

since $a>\frac{e}{2}$. But then $f\in V_j$ i. e. for all $r\geqslant n$ and for all $n\geqslant 1$,

$$\left(\frac{2}{en}\right)^n[r]^{2n}\frac{\delta a^{-n}}{U_{L^f}(r)}\leqslant j^{n+1}M_n^f$$

or for some A

$$\frac{r^{2n}}{U_{L^f}(r)}\leqslant A^{n+1}n^nM_n^f.$$

Thus

$$n^nL_n^f=\sup_{r>n}\frac{r^{2n}}{U_{L^f}(r)}\leqslant A^{n+1}n^nM_n^f$$

i. e.

$$(L_n^f)^{1/n}=O[(M_n^f)^{1/n}].$$

Let I be a finite semi-closed interval. We can suppose, without loss of generality that $I=]-a,a]$, where $a>\frac{e}{2}$. Set $B=\{f\in C^\infty(I)$: $\|f^{(n)}\|_\infty\leqslant AL_n^f\ \forall n\geqslant 0,\ A=A(f)\}$. For each $f\in B$ define $\|f\|_B=\sup_{n\geqslant 0}\frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{L_n^f}$. B is a Banach space with this norm. We can write $I=\bigcup_{l}^{\infty} I_l$, where $I_l=\left]-a+\frac{1}{l},a\right]$. For any integer $j\geqslant 1$ define $V_{j,l}$ by setting $V_{j,l}=\{f\in B:\ \max_{x\in I_l}|f^{(n)}(x)|\leqslant j^{n+1}M_n^f\ (n\geqslant 0)\}$. $V_{j,l}$'s are closed in B and $B=\bigcup_{j,l=1}^{\infty}V_{j,l}$. By Baire's category theorem, there exist a $\delta>0$, a „j" and an „l" such that $\|f\|_B\leqslant\delta$ implies that $f\in V_{j,l}$.

Put

$$f(x)=\frac{\delta T_{[r]}(a^{-1}x)}{U_{Lf}(r)},$$

where $r\geqslant 1$. We have

$$\max_{x\in I}|f^{(n)}(x)|=\frac{\delta a^{-n}|T_{[r]}^{(n)}(1)|}{U_{Lf}(r)}\quad\text{for } n\leqslant[r]$$

$$=0\quad\text{for } n>[r].$$

By (6) we conclude that $f\in B$ and that

$$\|f\|_B=\frac{\delta}{U_{Lf}(r)}\sup_{n<r}\frac{a^{-n}|T_{[r]}^{(n)}(1)|}{L_n^f}\leqslant\frac{\delta}{U_{Lf}(r)}\sup_{n<r}\frac{a^{-n}r^{2n}}{n^nL_n^f}\left(\frac{e}{2}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta}{U_{Lf}(r)}\sup_{n<r}\frac{r^{2n}}{n^nL_n^f}=\delta.$$

But then $f\in V_{j,l}$ i. e. for all $r\geqslant n$ and for all $n\geqslant 1$

$$\left(\frac{2}{en}\right)^n[r]^{2n}\frac{\delta a^{-n}}{U_{Lf}(r)}\leqslant j^{n+1}M_n^f$$

or

$$\frac{r^{2n}}{U_{Lf}(r)}\leqslant\delta^{-1}a^n\left(\frac{e}{2}\right)^n2^{2n}j^{n+1}n^nM_n^f$$

or

$$n^nL_n^f=\sup_{r>n}\frac{r^{2n}}{U_{Lf}(r)}\leqslant\lambda^{n+1}n^nM_n^f.$$

Thus

$$(L_n^f)^{1/n}=O[(M_n^f)^{1/n}].$$

Finally, let I be a semi-closed half-line which we may suppose to be $[0,\infty[$. Let $I_l=[0,l]$. Then $I=\bigcup_{l=1}^{\infty}L_l$. Let

$$F=\{f\in C^\infty(I):\forall l\geqslant 1,\ \max_{x\in I_l}|f^{(n)}(x)|\leqslant A_lL_n^f,\ A_l=A_l(f)\}$$

and let

$$p_l(f)=\sup_{n>0}\max_{x\in I_l}|f^{(n)}(x)|/L^f_n.$$

p_l is a semi-norm on F and F with (p_l) as a family of semi-norm is a Fréchet space. Let

$$V_{j,l}=\{f\in F: |f^{(n)}(x)|\leqslant j^{n+1}M^f_n\ (n\geqslant 0),\ x\in I_l\}.$$

If $f\in F$, $f\in C^*_{M^f}(I)$. Hence, for every $x_0\in I_l$, there exists a relatively open interval $J_{x_0}\subset I$ such that

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant A_{x_0}\lambda^n_{x_0}M^f_n\ \forall x\in I_{x_0}\text{ and }\forall n\geqslant 0.$$

Applying Borel—Lebesgue theorem, we conclude that there exist constants A_l and λ_l such that

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant A_l\lambda^n_l M^f_n\ \forall x\in I_l\text{ and }\forall n>0.$$

This shows that for each fixed l, there exists a $j=j(f,l)$ such that $f\in V_{j(f,l),l}$. Thus $F=\bigcup\limits_{j,l=1}^{\infty}V_{j,l}$. Clearly $V_{j,l}$'s are closed in F. Hence, by Baire's category theorem, there is a semi-norm p_{l_1}, a $\delta>0$ and a V_{j_0,l_0} such that $p_{l_1}(f)\leqslant\delta$ implies that $f\in V_{j_0,l_0}$.

Let

$$f(x)=\frac{\delta e^{-arx}\Lambda_{[r]}(arx)}{2U_{Lf}(r)},$$

where $0<a<4^{-1}e^{-2}$. We have

$$\|f^{(n)}\|_\infty\leqslant\frac{\delta a^n r^n 4^n}{U_{Lf}(r)}\leqslant\frac{\delta r^n}{U_{Lf}(r)},\ \text{if } n\geqslant[r]$$

and

$$\|f^{(n)}\|_\infty\leqslant 2\left(\frac{4e^2}{n}\right)^n\delta\frac{[r]^n a^n r^n}{2U_{Lf}(r)}\leqslant$$

$$\leqslant\delta\frac{r^{2n}}{n^n U_{Lf}(r)},\ \text{if } n<[r].$$

Hence

$$p_{l_1}(f)=\sup_{n>0}\max_{x\in I_{l_1}}|f^{(n)}(x)|/L^f_n<$$

$$\leqslant\delta\sup_{n<r}\frac{r^{2n}}{n^n U_{Lf}(r)}/L^f_n=$$

$$=\frac{\delta}{U_{Lf}(r)}\sup_{n<r}\frac{r^{2n}}{n^n L^f_n}=\delta.$$

Therefore, for every $n\geqslant 1$,

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant j_0^{n+1}M^f_n$$

or

$$\delta a^n r^n|[e^{-x}\Lambda_{[r]}(x)]^{(n)}_{x=0}|\frac{1}{2U_{Lf}(r)}\leqslant j_0^{n+1}M^f_n$$

or

$$\delta a^n r^n \left(\frac{r}{2\alpha n}\right)^n \frac{1}{2U_{Lf}(r)} \leqslant j_0^{n+1} M_n^f$$

or

$$\frac{r^{2n}}{U_{Lf}(r)} \leqslant 2 j_0^{n+1} n^n M_n^f \delta^{-1} a^{-n} (2\alpha)^n .$$

or

$$n^n L_n^f = \sup_{n<r} \frac{r^{2n}}{U_{Lf}(r)} \leqslant n^n \lambda^{n+1} M_n^f.$$

Thus

$$(L_n^f)^{1/n} = O\left[(M_n^f)^{1/n}\right].$$

5. We make the folllowing concluding remarks:

(i) If I is a finite closed interval then $C_M(I)^{\cdot} = C_M^{\cdot}(I) = C_{Mf}^{\cdot}(I)$ and hence the problem of inclusion of classes is solved for classes $C_M(I)$.

(ii) If I is a finite open or semi-closed interval then $C_M(I) = C_M(\bar{I}) = C_{Mf}^{\cdot}(\bar{I})$ by an obvious extension of the C^∞-functions belonging to $C_M(I)$. Thus if $I = [a, b[$ and $f \in C_M(I)$, $f^{(n)} \in BV[0, 1]$ for every n. Hence $f^{(n)}(b-0)$ exsist for every $n > 0$ so that we define $f^{(n)}(b) = f^{(n)}(b-0)$ for each $n \geqslant 0$. A similar extension can be made if $I =]a, b[$. Thus the problem of inclusion for classes $C_M(I)$, where I is a finite open or semi-closed interval is also solved.

(iii) In view of the above remarks, Theorem C gives us the solutions of the problems of inclusion for classes $C_M(I)$ and $C_M^{\cdot}(I)$ for *every* type of linear interval.

Départament of Mathematics
Université Laval
Quebec, P.Q., Canada GIK 7P4

Recieved 1.IX.1983

Ջ. Ա. ՍԻԴԻՔԻ. Անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների դասերի համարժեքության մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք J-ն իրական առանցքի վրա գտնվող կամայական միջակայք է, իսկ $M=\{M_n\}$-ը դրական թվերի հաջորդականություն է։ Նշանակենք $C_M(J)$ այն $f \in C^\infty(J)$ ֆունկցիաների դասը, որոնց համար

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant Ak^n M_n \quad \forall n \geqslant 0 \quad \forall x \in J, \quad k = k(f):$$

Հանգունորեն սահմանվում է պայմաններին լոկալ բավարարող ֆունկցիաների $C_M^{\cdot}(J)$ դասը։

Տ. Կառլեմանի [3] կողմից դրվել էր հետևյալ խնդիրը. սեռած միջակայքի դեպքի գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ և M հաջորդականությունների վրա, որոնց դեպքում տեղի կունենա $C_L(J) \subset C_M(J)$ (համապատասխանաբար $C_L^{\cdot}(J) \subset C_M^{\cdot}(J)$) ընդգրկումը։ Միջակայքերի որոշ տարբեր տիպերի համար դրա լուծումը տրվել է Ա. Գորնու [6], Հ. Կարտանի ու Ս. Մանդելբրոյտի [4] և Ս. Ագմոնի [1] կողմից։ $J=(-\infty, +\infty)$ դեպքում Բոմանի և Լ. Հյորմանդերի [2] կողմից տրվել է այս խնդրի պարզ լուծումը՝ հիմնված կատեգորիաների վերաբերյալ Բէրի թեորեմի վրա։

Տվյալ հոդվածը նվիրված է դրված խնդրի լուծմանը միջակայքերի կամայական տիպերի համար $C_M(J)$ և $C_M^{\cdot}(J)$ դասերի դեպքերում։ Առաջարկված մեթոդը, որը նույնպես հիմնված է կատեգորիաների մասին Բէրի թեորեմի վրա, թույլ է տալիս բերել ոչ միայն տվյալ աշխատանքում ստացված, այլև վերոհիշյալ հեղինակների կողմից ստացված արդյունքների պարզ ապացույցներ։

Дж. А. СИДДИКИ. *Об эквивалентности классов бесконечно дифференцируемых функций (резюме)*

Пусть J — произвольный интервал на вещественной оси и $M = \{M_n\}$ — последовательность положительных чисел. Обозначим через $C_M(J)$ класс функций $f \in C^\infty(J)$ таких, что

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant kA^n M_n \ \forall n \geqslant 0, \ \forall x \in J, \quad k = k(f).$$

Аналогично можно ввести классы $\overset{*}{C}_M(J)$, локально удовлетворяющих поставленным условиям.

Т. Карлеманом [3] была поставлена задача: при фиксированном интервале J найти необходимые и достаточные условия на последовательности L и M, при которых имеет место включение $C_L(J) \subset C_M(J)$ (соотв. $\overset{*}{C}_L(J) \subset \overset{*}{C}_M(J)$). Для различных типов интервалов ее решение было дано А. Горным [6], А. Картаном и С. Мандельбройтом [4] и С. Агмоном [1]. В случае $J = (-\infty, +\infty)$ простое решение этой задачи, основанное па применении теоремы Бэра о котегориях, было дано Дж. Боманом и Л. Хёрмандером [2].

Данная статья посвящена решению поставленной задачи для произвольных типов интервалов J и в обеих случаях классов $C_M(J)$ и $\overset{*}{C}_M(J)$. Предложенный при этом метод, также основанный на применении теоремы Бэра о категориях, позволяет дать простые доказательства не только установленных в данной работе, но и известных ранее результатов вышеназванных авторов.

REFERENCES

1. *S. Agmon.* Sur l'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables sur un demi-axe, C. R. Acad. Sc. 230, 1950, 350.
2. *Jan Boman & Lars Hörmander.* Classes of infinitely differentiable functions (mimeographed notes), Stockholm, 1962.
3. *T. Carleman.* Les fonctions quasianalytiques, Gauthier—Villars, Paris, 1926.
4. *H. Cartan & S. Mandelbrojt.* Solution du problème d'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables, Acta Mathematica, 72, 1940, 31—49.
5. *H. Cartan.* Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successivives, Actuallités scientifiques et industrielles no 867, Hermann, Paris, 1940.
6. *A. Gorny.* Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle, Acta Mathematica 71, 1939, 317—358.
7. *S. Mandelbrojt.* Série de Fourier et classes quasinalytiques de fonctions, Gauthier—Villars, Paris, 1935.
8. *S. Mandelbrojt.* Analytic functions and classes of infinitely differentiable functinos, The Rice Institute Pamphlet 29, no 1, Houston, 1942.
9. *S. Mandelbrojt.* Séries adhérentes, régularisation des suites, applicatious, Gauthier—Villars, Paris, 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 1, 1984 Математика

УДК 517.948.32

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, Б. С. РУБИН

ОБ ОПЕРАТОРАХ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

Известная теорема Харди—Литтлвуда [1] для операторов J^α дробного интегрирования утверждает, что если $\varphi \in L_p(a, b)$, $1<p<\infty$, то $J^\alpha \varphi \in L_q(a, b)$, $q = \dfrac{p}{1-\alpha p}$ при $\alpha < \dfrac{1}{p}$ и $J^\alpha \varphi \in H^{\circ}_{\alpha-\frac{1}{p}}$ при $\alpha > \dfrac{1}{p}$. В настоящей работе доказываются весовые аналоги этой теоремы в предположении, что вес $\rho(x)$ имеет вид

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x-a_k|^{\gamma_k}, \quad a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b. \tag{1}$$

Оказывается, что даже в случае веса в одной точке a_k ограничения на показатель γ_k существенно различны в зависимости от того, совпадает ли эта точка с концами или является внутренней его точкой. В случае общего веса и $\alpha > \dfrac{1}{p}$ здесь появляется еще один эффект: именно, если $\alpha - \dfrac{1}{p} = \min\limits_{k>2} \gamma_k$, то $J^\alpha \varphi$ уже не принадлежит пространству $H^{\circ}_{\alpha-\frac{1}{p}}$ с весом, а принадлежит аналогичному пространству с показателем $\alpha - \dfrac{1}{p} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и это по существу.

Отметим, что для весовых гельдеровских пространств ограниченность оператора дробного интегрирования исследовалась в [2].

§ 1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Через $L_p([a, b], \rho)$, $1<p<\infty$, $-\infty<a<b<\infty$, будем обозначать пространство функций f, для которых $\rho f \in L_p(a, b)$ с нормой $\|f\|_{p,\rho} = \|\rho f\|_p = \|\rho f\| L_p(a, b)$. Через $H_\lambda[a, b]$ ($\overset{\circ}{H}_\lambda[a, b]$) обозначим пространство гельдеровских функций на $[a, b]$, для которых $|f(x+h) - f(x)| = O(h^\lambda)(o(h^\lambda))$, $h \to +0$, равномерно по x, с обычной нормой; $H_\lambda([a, b], \rho)$ ($\overset{\circ}{H}_\lambda([a, b], \rho)$) — весовое гельдеровское пространство, состоящее из функций f, таких, что $\rho f \in H_\lambda[a, b]$ (еще и $\lim\limits_{x\to a_k} \rho(x) f(x) = 0$), причем, $\|f\|_{H_\lambda[a,b],\rho} = \|\rho f\|_{H_\lambda[a,b]}$. Наконец, через J^α_{a+}, J^α_{b-} обозначим операторы дробного интегрирования Римана—Лиувилля:

$$(J^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^{1-\alpha}},\quad (J^{\alpha}_{b-}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\frac{\varphi(y)\,dy}{(y-x)^{1-\alpha}} \tag{1.1}$$

и всюду ниже $p'=p(p-1)^{-1}$, а через c обозначены различные константы, встречающиеся в оценках.

Приведем ряд вспомогательных утверждений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 1.1. (о сужении дробных интегралов). *Пусть* $\varphi\in L_p([a,b],\rho)$, *где* $p>1$, $\rho(x)$ *имеет вид* (1), $-\frac{1}{p}<\gamma_k<\frac{1}{p'}$, $k=1,2,\cdots,n$ *и для некоторого индекса* $k=j$ *выполняется неравенство* $\gamma_j>\alpha-\frac{1}{p}$. *Тогда при* $x>a_j$ *справедливо соотношение* $(J^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)=(J^{\alpha}_{a_j+}\psi)(x)$, *где* $\psi\in L_p([a_j,b],\tilde{\rho}_j)$, $\tilde{\rho}_j(x)=\prod\limits_{k=j}^{n}|x-a_k|^{\gamma_k}$, *и имеет вид*

$$\psi(x)=\varphi(x)+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi(x-a_j)^{\alpha}}\int_a^{a_j}\frac{(a_j-t)^{\alpha}\varphi(t)}{x-t}\,dt.$$

Доказательство этого утверждения в случае $\rho(x)\equiv1$ приведено в [3]. В нашем случае оно сохраняется.

Лемма 1.2. *Пусть* $0<\gamma<\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p}<\alpha<1+\frac{1}{p}$. *Тогда*

$$I(t)\equiv\int_0^{\infty}\left(\frac{s^{\gamma}|s^{\alpha-1}-(1+s)^{\alpha-1}|}{|s-t|^{\gamma}}\right)^{p'}ds\leqslant K, \tag{1.2}$$

где K*—константа, не зависящая от* $t\geqslant0$.

Доказательство. Зафиксируем $N>0$ и положим

$$I(t)=\left(\int_0^{N}+\int_N^{\infty}\right)(\cdot)\,ds=I_1(t)+I_2(t).$$

Для $I_1(t)$ имеем

$$I_1(t)\leqslant\int_0^{N}(s+[\alpha])^{(\gamma+\alpha-1)p'}|s-t|^{-\gamma p'}\,ds=I_1(N,t).$$

Если $t<N$, то $I_1(t)\leqslant I_1(N,t)\leqslant I_1(N,N)<\infty$. При $t>N$ и $\gamma+\alpha-1<0$ имеем

$$I_1(t)\leqslant I_1(t,t)+\int_t^{N}(s-t)^{(\alpha-1)p'}\,ds\leqslant cN^{\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)p'}.$$

Аналогично при $t<N$ и $\gamma+\alpha-1>0$ имеем

$$I_1(t)\leqslant(N+1)^{(\gamma+\alpha-1)p'}\int_0^{N}\frac{ds}{|s-t|^{\gamma p'}}\leqslant c(N+1)^{\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)p'}.$$

Переходя к оценке $I_2(t)$ воспользуемся неравенством $|s^{\alpha-1}-(s+1)^{\alpha-1}|\leqslant s^{\alpha-2}$, $s>0$. Тогда

$$I_2(t)\leqslant\int\limits_N^{\infty} s^{(\gamma+\alpha-2)p'}\frac{ds}{|t-s|^{\gamma p'}}=I_2(N, t).$$

Если $t<N$ то, с учетом, что $\alpha<\frac{1}{p}+1$ имеем $I_2(t)\leqslant I_2(N, t)\leqslant\leqslant I_2(N, N)<\infty$. При $t>N$ получаем

$$I_2(t)\leqslant I_2(t, t)+t^{\left(\alpha-1-\frac{1}{p}\right)p'}\int\limits_{\frac{N}{t}}^{1}\xi^{(\gamma+\alpha-2)p'}\frac{d\xi}{(1-\xi)^{\gamma p'}},$$

откуда легко видеть, что $I_2(t)=o(1)$, $t\to\infty$. Лемма доказана.

§ 2. Случай $\alpha>\frac{1}{p}$. Вес на левом конце

В настоящем параграфе рассматривается действие левостороннего оператора J^{α}_{a+} в случае $\frac{1}{p}<\alpha<1+\frac{1}{p}$, когда вес $\rho(x)$ имеет вид $(x-a)^{\gamma}$. Полученная ниже теорема будет применена в § 3 при исследовании общего случая с весом (1).

Теорема 2.1. *Пусть* $\frac{1}{p}<\alpha<\frac{1}{p}+1$, $\gamma<\frac{1}{p'}$, $1<p<\infty$. *Тогда оператор* J^{α}_{a+} *ограничен из* $L_p([a, b], (x-a)^{\gamma})$ *в* $\overset{\circ}{H}{}^{*}_{\alpha-\frac{1}{p}}([a, b], (x-a)^{\gamma})$.

Доказательство достаточно провести для случая $a=0$, $b=1$. Положим $\psi(y)=y^{\gamma}\varphi(y)\in L_p(0,1)$ и обозначим $F(x)=x^{\gamma}(J^{\alpha}_{0+}y^{-\gamma}\psi(y))(x)$. Теорема 2.1 будет доказана, если мы покажем, что $F(x)\in H^{*}_{\alpha-\frac{1}{p}}[0, 1]$. Имеем $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$, где $F_1(x)=(J^{\alpha}_{0+}\psi)\times\times(x)\in H^{*}_{\alpha-\frac{1}{p}}[0, 1]$ (см. [1]), а $F_2(x)=F(x)-(J^{\alpha}_{a+}\psi)(x)$. Пусть $0\leqslant x<<x+h\leqslant 1$. Тогда $F_2(x+h)-F_2(x)=\sum\limits_{k=1}^{3}F_{2k}(x)$, где

$$F_{21}(x)=\int\limits_x^{x+h}\frac{(x+h)^{\gamma}-y^{\gamma}}{y^{\gamma}}\cdot\frac{\psi(y)\,dy}{(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{22}(x)=[(x+h)^{\gamma}-x^{\gamma}]\int\limits_0^{x}\frac{\psi(y)\,dy}{y^{\gamma}(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{23}(x)=\int\limits_0^{x}\frac{x^{\gamma}-y^{\gamma}}{y^{\gamma}}[(x+h-y)^{\alpha-1}-(x-y)^{\alpha-1}]\,\psi(y)\,dy.$$

Пусть вначале $\gamma>0$. Для $F_{21}(x)$ получаем

$$|F_{21}(x)|\leqslant\|\psi\|_p\left(\int\limits_x^{x+h}\left|\frac{(x+h)^\gamma-y^\gamma}{y^\gamma(x+h-y)^{1-\alpha}}\right|^{p'}dy\right)^{1/p'}\leqslant ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p.$$

Оценивая $F_{22}(x)$, найдем

$$|F_{21}(x)|\leqslant\|\psi\|_p\,[(x+h)^\gamma-x^\gamma]\left(\int\limits_0^{x+h}\frac{dy}{y^{\gamma p'}(x+h-y)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{1/p'}=$$

$$=c\|\psi\|_p\,[(x+h)^\gamma-x^\gamma]\,(x+h)^{\alpha-\frac{1}{p}}.$$

Остается учесть, что

$$\sup_{x,\,h}\ h^{\frac{1}{p}-\alpha}\,[(x+h)^\gamma-x^\gamma]\,(x+h)^{\alpha-\frac{1}{p}}\leqslant c_1<\infty.$$

Наконец, для $F_{23}(x)$ имеем

$$|F_{23}(x)|\leqslant\|\psi\|_p\left(\int\limits_0^x\frac{(x-y)^{\gamma p'}}{y^{\gamma p'}}\,|(x-y)^{\alpha-1}-(x+h-y)^{\alpha-1}|^{p'}\,dy\right)^{1/p'}.$$

Произведя замену $x-y=hs$, получаем $|F_{23}(x)|\leqslant h^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p\left(I\left(\frac{x}{h}\right)\right)^{1/p'}$ и остается воспользоваться леммой 1.2. Пусть теперь $\gamma<0$. Тогда

$$|F_{21}(x)|<2\int\limits_x^{x+h}\frac{|\psi(y)|\,dy}{(x+h-y)^{1-\alpha}}\leqslant ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p.$$

Для $F_{22}(x)$ при $|\gamma|\leqslant1$ и $x>h$ имеем

$$|F_{22}(x)|\leqslant\frac{h\,|\gamma|\,\|\psi\|_p}{x\,(x+h)^{|\gamma|}}\left(\int\limits_0^x\frac{dy}{y^{\gamma p'}(x-y)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{1/p'}=$$

$$=c\|\psi\|_p\,h^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\frac{h}{x}\right)^{1+\frac{1}{p}-\alpha}\left(\frac{x}{x+h}\right)^{|\gamma|}\leqslant c\|\psi\|_p\,h^{\alpha-\frac{1}{p}}.$$

Аналогично, при $|\gamma|\geqslant1$

$$|F_{22}(x)|\leqslant\frac{h\,|\gamma|\,\|\psi\|_p}{(x+h)x^{|\gamma|}}\left(\int\limits_0^x\frac{dy}{y^{\gamma p'}(x-y)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{1/p'}\leqslant ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p.$$

Наконец, при $x\leqslant h$ имеем $|F_{22}(x)|\leqslant2|\,(I^\alpha_{0+}\psi)(x)|\leqslant cx^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p<ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p$.

Оценим последний интеграл. Имеем

$$|F_{23}(x)|\leqslant2\|\psi\|_p\left(\int\limits_0^x\left|\frac{1}{(t+h)^{1-\alpha}}-\frac{1}{t^{1-\alpha}}\right|^{p'}dt\right)^{1/p'}.$$

Полагая здесь $t=hy$, получаем $|F_{22}(x)|\leqslant c\|\psi\|_p h^{\alpha-\frac{1}{p}}$. Из полученных оценок, с учетом неравенства $|F(x)|\leqslant cx^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p$ получаем, что

$$\|J_{0+}^{\alpha}\varphi\|_{H_{\alpha-\frac{1}{p}}([0,1],x^{\gamma})}\leqslant c\|\varphi\|_{L_p([0,1],x^{\gamma})}. \tag{2.1}$$

Остается проверить, что $I_{0+}^{\alpha}\varphi\in H^{\circ}_{\alpha-\frac{1}{p}}([0,1],\ x^{\gamma})$. Пусть $\varepsilon>0$, $\psi_\varepsilon(x)\in C[0,1]$, $\operatorname{supp}\psi_\varepsilon\subset(0,1)$ и $\|x^{\gamma}\varphi(x)-\psi_\varepsilon(x)\|_p<\varepsilon$. Тогда $\varphi_\varepsilon(x)=$ $=x^{-\gamma}\psi_\varepsilon(x)\in C(0,1)$ и $\|\varphi-\varphi_\varepsilon\|_{L_p([0,1],x^{\gamma})}<\varepsilon$. Полагая $(\Delta u)(x)=u(x+$ $+h)-u(x)$, с учетом (1.3), получаем

$$\frac{|\Delta(x^{\gamma}J_{0+}^{\alpha}\varphi)|}{h^{\alpha-\frac{1}{p}}}\leqslant\frac{|\Delta(x^{\gamma}J_{0+}^{\alpha}(\varphi-\varphi_\varepsilon))|}{h^{\alpha-\frac{1}{p}}}+\frac{|\Delta(x^{\gamma}J_{0+}^{\alpha}\varphi_\varepsilon)|}{h^{\alpha-\frac{1}{p}}}\leqslant$$

$$\leqslant c\|\varphi-\varphi_\varepsilon\|_{L_p([0,1],x^{\gamma})}+\frac{|\Delta(x^{\gamma}J_{0+}^{\alpha}\varphi_\varepsilon)|}{h^{\alpha-\frac{1}{p}}}\leqslant c\varepsilon+o(1),\ h\to 0.$$

Здесь учтено, что $\varphi_\varepsilon(x)\in L_q([0,1],\ x^{\gamma})$ при любом $q>p$, так что $\Delta(x^{\gamma}J_{0+}^{\alpha}\varphi_\varepsilon)(x)=o(h^{\alpha-\frac{1}{p}})$ при $h\to 0$. Теорема доказана.

§ 3. Случай $\alpha>\frac{1}{p}$. Общий вес

В этом параграфе теорема 2.1 будет обобщена на случай веса вида (1).

Теорема 3.1. *Пусть* $\rho(x)$ *имеет вид* (1), *причем* $\gamma_1<\frac{1}{p'}$, $0<\gamma_k<\frac{1}{p'}$, $k=2,3,\cdots,n-1$; $\gamma_n>0$. *Если* $\frac{1}{p}<\alpha<1+\frac{1}{p}$, $1<p<\infty$, то J_{a+}^{α} *ограничен из* $L_p([a,b],\rho)$ *в* $H_\lambda([a,b],\rho)$, *где*

$$\lambda=\begin{cases}\alpha-\frac{1}{p}, & \text{если } \alpha-\frac{1}{p}<\min\limits_{k\geqslant 2}\gamma_k,\\ \min\limits_{k\geqslant 2}\gamma_k, & \text{если } \alpha-\frac{1}{p}>\min\limits_{k\geqslant 2}\gamma_k,\\ \alpha-\frac{1}{p}-\varepsilon, & \text{если } \alpha-\frac{1}{p}=\min\limits_{k\geqslant 2}\gamma_k.\end{cases} \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть, как и в теореме 2.1

$$F(x)=\rho(x)(J_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\rho(x)}{\rho(y)}\cdot\frac{\psi(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}, \tag{3.2}$$

где $\psi=\rho\varphi\in L_p(a, b)$. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $F(x)\in \mathring{H}_\lambda[a, b]$. Прежде всего изучим поведение $F(x)$ в окрестности точек a_k.

Лемма 3.1. *В условиях теоремы* 3.1 $F(a_k)=0$, $k=1, 2,\cdots, n$

Доказательство леммы. При $k=1$ $(a_k=a)$ и $x\to a$ имеем.

$$|F(x)|\leqslant c(x-a)^{\gamma_1}\int\limits_a^x\frac{|\psi(y)|\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}(y-a)^{\gamma_1}}\leqslant c\|\psi\|_p(x-a)^{\alpha-\frac{1}{p}}.$$

Пусть $k>1$. Зафиксируем точки $c_{k-1}\in(a_{k-1}, a_k)$, $k=2, \cdots, n$. Тогда, при $x\in(c_k, a_k)$

$$F(x)=\left(\int\limits_a^{c_{k-1}}+\int\limits_{c_{k-1}}^x\right)\frac{\rho(x)}{\rho(y)}\cdot\frac{|\psi(y)|\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}=J_1+J_2.$$

Отсюда

$$J_1\leqslant c(a_k-x)^{\gamma_k}\|\psi\|_p\left(\int\limits_a^{c_{k-1}}\frac{dy}{(c_{k-1}-y)^{(1-\alpha)p'}\prod\limits_{l<k-1}|y-a_l|^{\gamma_l p'}}\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c(a_k-x)^{\gamma_k}\|\psi\|_p.$$

Аналогично

$$J_2\leqslant c(a_k-x)^{\gamma_k}\|\psi\|_p\left(\int\limits_{c_{k-1}}^x\frac{dy}{(x-y)^{(1-\alpha)p'}(a_k-y)^{\gamma_k p'}}\right)^{1/p'}. \tag{3.3}$$

Отсюда, если $\gamma_k<\alpha-\frac{1}{p}$, то $J_2\leqslant c\|\psi\|_p(a_k-x)^{\gamma_k}$, а если $\gamma_k>\alpha-\frac{1}{p}$, то после замены $y=x-\xi(a_k-x)$ нетрудно получить, что $J_2\leqslant c\|\psi\|_p\times$ $\times(a_k-x)^{\alpha-\frac{1}{p}}$. Наконец, если $\gamma_k=\alpha-\frac{1}{p}$, то при достаточно малом $\varepsilon>0$ имеем

$$J_2\leqslant c(a_k-x)^{\gamma_k-\varepsilon}\|\psi\|_p\left(\int\limits_{c_{k-1}}^x\left(\frac{a_k-y}{x-y}\right)^{(1-\alpha)p'}\frac{dy}{(a_k-y)^{1-\varepsilon p'}}\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c\|\psi\|_p(a_k-x)^{\alpha-\frac{1}{p}-\varepsilon}.$$

Таким образом, $F(a_k-0)=0$, $k=2, 3,\cdots, n$. Аналогично проверяется, что $F(a_k+0)=0$, $k=1, 2, \cdots, n-1$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. В силу теоремы 2.1 ясно, что $F(x)\in H_{\alpha-\frac{1}{p}}[a, c_1]$. Покажем, что $F(x)\in H_\lambda$ на всех отрезках $[a_k, c_k]$, $[c_k, a_{k+1}]$. Имеем $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$, где $F_1(x)=(J^\alpha_{a+}\psi)(x)\in$ $\in H^{\circ}_{\alpha-\frac{1}{p}}[a, b]$, а

$$F_2(x)=\int\limits_a^x \frac{\rho(x)-\rho(y)}{\rho(y)}(x-y)^{\alpha-1}\psi(y)\,dy,$$

так что наше утверждение достаточно проверить для $F_2(x)$.

Имеем $F_2(x+h)-F_2(x)=\sum\limits_{k=1}^{3}F_{2k}(x)$, где

$$F_{21}(x)=\int\limits_x^{x+h}\frac{\rho(x+h)-\rho(y)}{\rho(y)}\cdot\frac{\psi(y)\,dy}{(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{22}(x)=\int\limits_a^x\frac{\rho(x+h)-\rho(x)}{\rho(y)}\cdot\frac{\psi(y)\,dy}{(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{23}(x)=\int\limits_a^x\frac{\rho(x)-\rho(y)}{\rho(y)}[(x+h-y)^{\alpha-1}-(x-y)^{\alpha-1}]\,\psi(y)\,dy.$$

Итак, пусть $k\geqslant 2$, $\gamma_k\leqslant 1$* и $c_{k-1}\leqslant x<x+h\leqslant a_k$. Для $F_{21}(x)$ имеем

$$|F_{21}(x)|\leqslant\|\psi\|_p\left(\int\limits_x^{x+h}\left|\frac{\rho(x+h)-\rho(y)}{\rho(y)(x+h-y)^{1-\alpha}}\right|^{p'}dy\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c\|\psi\|_p\left(\int\limits_x^{x+h}\frac{dy}{(x+h-y)^{(1-\alpha-\gamma_k)p'}(a_k-y)^{\gamma_k p'}}\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c\|\psi\|_p\left(\int\limits_x^{x+h}\frac{dy}{(x+h-y)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{1/p'}=ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p.$$

Оценивая $F_{22}(x)$, найдем

$$|F_{22}(x)|\leqslant ch^{\gamma_k}\|\psi\|_p\left(\int\limits_a^x\frac{dy}{\rho^{p'}(y)(x+h-y)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant ch^{\gamma_k}\|\psi\|_p\left(\int\limits_a^{c_{k-1}}\frac{dy}{\rho^{p'}(y)(c_{k-1}-y)^{(1-\alpha)p'}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{c_{k-1}}^x\frac{dy}{(a_k-y)^{\gamma_k p'}(x-y)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{1/p'}.$$

Поступая так же, как и в (3.3), получаем, что при $\gamma_k<\alpha-\dfrac{1}{p}$ выражение в круглых скобках ограничено и $|F_{22}(x)|\leqslant ch^{\gamma_k}\|\psi\|_p$. Если

---

* При $k=n$ и $\gamma_n>1$ оценки производятся аналогично с помощью формулы Лагранжа.

$\gamma_k > \alpha - \dfrac{1}{p}$ выражение в круглых скобках оценивается величиной $c\,(1+$ $+(a_k-x)^{\left(\alpha-\frac{1}{p}-\gamma_k\right)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c_1\,(1+h^{\left(\alpha-\frac{1}{p'}-\gamma_k\right)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}$ и поэтому $|F_{22}(x)| \leqslant$ $\leqslant c\,h^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p$. Аналогично, при $\alpha-\dfrac{1}{p}=\gamma_k$ получаем $|F_{22}(x)| \leqslant$ $\leqslant c\,h^{\alpha-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon}{p'}}\|\psi\|_p$.

Перейдем к оценке $F_{23}(x)$. Зафиксируем произвольную точку $\delta_{k-1}\in(a_{s-1},\ c_{k-1})$ и представим $F_{23}(x)$ в виде

$$F_{23}(x)=\left(\int\limits_a^{\delta_{k-1}}+\int\limits_{\delta_{k-1}}^{c_{k-1}}+\int\limits_{c_{k-1}}^{x}\right)\frac{\rho(x)-\rho(y)}{\rho(y)}[(x+h-y)^{\alpha-1}-(x-y)^{\alpha-1}]\times$$
$$\times\psi(y)\,dy=A_1(x)+A_2(x)+A_3(x).$$

Поскольку $x\in(c_{k-1},\ a_k)$, очевидно

$$|A_1(x)|\leqslant c\,h\int\limits_a^{\delta_{k-1}}(1+\rho^{-1}(y))\,|\psi(y)|\,dy\leqslant c\,h\,\|\psi\|_p.$$

Для $A_2(x)$ получаем

$$|A_2(x)|\leqslant c\,\|\psi\|_p\left(\int\limits_{\delta_{k-1}}^{c_{k-1}}|(x-y)^{\alpha-1}-(x+h-y)^{\alpha-1}|^{p'}\,dy\right)^{1/p'}\leqslant c h^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p.$$

Наконец

$$|A_3(x)|\leqslant c\,\|\psi\|_p\left(\int\limits_{c_{k-1}}^{x}\left(\frac{x-y}{a_k-y}\right)^{p'\gamma_k}|(x-y)^{\alpha-1}-(x+h-y)^{\alpha-1}|^{p'}\,dy\right)^{1/p'},$$

откуда $|A_3(x)|\leqslant c h^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p$.

Итак, $F(x)\in H_\lambda$ на всех отрезках $[c_{k-1},\ a_k]$ и очевидно выполняется нужная оценка для нормы. Аналогичный результат справедлив для отрезков $[a_k,\ c_k]$. Теорема доказана.

Замечание 1. С помощью рассуждений, примененных в доказательстве теоремы 2.1, легко показать, что при $\alpha-\dfrac{1}{p}<\min\limits_{k>2}\gamma_k$ оператор I^α_{a+} ограничен из $L_p([a,b],\rho)$ в $\overset{\circ}{H}{}^\alpha_\lambda([a,b],\rho)$. Если же $\alpha-\dfrac{1}{p}>$ $>\min\limits_{k>2}\gamma_k$, то это неверно. Действительно, пусть, например, $a=0$, $b=1$, $\rho(x)=x^{\gamma_1}(1-x)^{\gamma_2}$, $\alpha-\dfrac{1}{p}>\gamma_2$, $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,1]$ и $\operatorname{supp}\varphi\subset$ $\subset(0,1)$. Тогда $\Delta\,(x^{\gamma_1}(1-x)^{\gamma_2}I^\alpha_{0+}\varphi)=(1-x-h)^{\gamma_2}\Delta\,(x^{\gamma_1}I^\alpha_{0+}\varphi)+x^{\gamma_1}\times$

$\times (J^{\alpha}_{0+}\varphi)(x)\,\Delta\,((1-x)^{\gamma_n}) = o(h^{\alpha-\frac{1}{p}}) + O(1)\,\Delta\,(1)\,\Delta\,((1-x)^{\gamma_n}) \neq o(h^{\gamma_n})$ равномерно по x из-за второго слагаемого.

Замечание 2. (о неулучшаемости условий по γ_k). При нарушении условий $\gamma_k < \frac{1}{p'}$, $k=1, 2, \cdots, n-1$, интеграл $J^{\alpha}_{0+}\varphi$ может расходиться. Далее, если $\gamma_k < 0$, $k = 2, \cdots, n$, то функция $\rho(x)(J^{\alpha}_{0+}\varphi)(x)$ может оказаться неограниченной в соответствующих точках a_k. Действительно, полагая $\varphi(x) = \rho^{-1}(x)$, имеем при $x \to a_k$

$$\rho(x)(J^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) \geqslant c\,|x-a_k|^{\gamma_k} \int\limits_{a}^{c_{k-1}} \frac{dy}{\rho(y)} \to \infty.$$

Замечание 3. (о неулучшаемости условий теоремы при $\alpha - \frac{1}{p} = \min\limits_{k>2} \gamma_k$). Пусть, например, $a = 0$, $b = 1$, $\rho(x) = (1-x)^{\gamma}$, $\gamma = \alpha - \frac{1}{p}$, $\varphi = \rho^{-1}\psi\cdot\Gamma(\alpha)$, где $\psi(x) = 0$ при $0 < x < 1 - e^{-1}$ и $\psi(x) = (1-x)^{-\frac{1}{p}}|\ln(1-x)|^{-1}$ при $1 - e^{-1} < x < 1$. Тогда при $\alpha \leqslant 1$

$$F(x) = \rho(x)(J^{\alpha}_{0+}\varphi)(x) > (1-x)^{\gamma} \int\limits_{1-e^{-1}}^{x} \frac{dy}{(1-y)\,|\ln(1-y)|} =$$

$$= (1-x)^{\gamma}\ln|\ln(1-x)|.$$

Отсюда, с учетом, что $F(1) = 0$, получаем $|F(x) - F(1)| \geqslant (1-x)^{\gamma}\ln|\ln(1-x)|$, откуда следует, что $J^{\alpha}_{0+}\varphi \notin H_{\alpha-\frac{1}{p}}([0,1], \rho)$.

§ 4. Случай $\alpha < \frac{1}{p}$

Приведем сначала результат для случая веса на левом конце отрезка.

Теорема 4.1. *Пусть $p > 1$, $\gamma < \frac{1}{p'}$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. Тогда оператор J^{α}_{a+} ограничен из $L_p([a, b], (x-a)^{\gamma})$ в $L_q([a, b], (x-a)^{\gamma})$, где $q = p(1-\alpha p)^{-1}$*

При $\alpha < \min\left(\frac{1}{p}, \gamma + \frac{1}{p}\right)$ это утверждение следует из ([1], стр. 581), так что при $\gamma \geqslant 0$ теорема 4.1 верна. Если же $\gamma < 0$, то утверждение теоремы следует из оценки $|(x-a)^{\gamma}(J^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)| \leqslant (J^{\alpha}_{a+}|\varphi_0(y)|)(x) \in L_q$, где $\varphi_0(y) = (y-a)^{\gamma}\varphi(y) \in L_p(a, b)$. Рассмотрим случай общего веса.

Теорема. 4.2. *Пусть вес $\rho(x)$ имеет вид* (1), *где* $1 < p < \frac{1}{\alpha}$,

$\gamma_k < \frac{1}{p'}$, $k=1,\cdots,n-1$. *Тогда оператор* J^{α}_{a+} *ограничен из* $L_p([a, b], \rho)$ *в* $L_q([a, b], \rho_1)$, *где* $q=p(1-\alpha p)^{-1}$, $\rho_1(x)=\prod_{k=1}^{n} |x-a_k|^{\delta_k}$, $\delta_1=\gamma_1$,

$$\delta_k=\begin{cases} \gamma_k \text{ при } \gamma_k > \alpha - \frac{1}{p}, \\ \alpha+\varepsilon-\frac{1}{p} \text{ при } \gamma_k \leqslant \alpha-\frac{1}{p}, \end{cases} \quad k=2, 3, \cdots, n,$$

ε (>0) — *произвольное число.*

Доказательство. Пусть $\rho_k(x)=|x-a_k|^{\delta_k}$. Зафиксируем $c_k \in (a_k, a_{k+1})$, $k=1, 2, \cdots, n-1$, и покажем, что оператор J^{α}_{a+} ограничен из $L_p([a, b], \rho)$ в пространства $L_q([a_k, c_k], \rho_k)$, $k=1, 2, \cdots, n-1$, $L_q([c_k, a_{k+1}], \rho_{k+1})$, $k=2,\cdots, n-1$. При $k=1$ это утверждение вытекает из теоремы 4.1. Пусть $k \geqslant 2$. Тогда при $x \in [c_{k-1}, c_k]$

$$(J^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)=\left(\int_a^{c_{k-1}} + \int_{c_{k-1}}^x\right)\frac{\varphi(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}=J_1+J_2. \tag{4.1}$$

Полагая $\varphi_0(y)=\rho(y)\varphi(y) \in L_p(a, b)$ для первого слагаемого имеем

$$|\rho_k J_1| \leqslant c\,|a_k-x|^{\delta_k}\int_a^{c_{k-1}}\prod_{l=1}^{k-1}|y-a_l|^{-\gamma_l}\frac{|\varphi_0(y)|}{(x-y)^{1-\alpha}}\,dy.$$

Отсюда при $x \in (a_k, c_k)$, $k=2,\cdots, n-1$, следует, что $|\rho_k J_1| \leqslant c\rho_k(x) \times \times \|\varphi_0\|_p \in L_q(a_k, c_k)$. Если $x \in (c_{k-1}, a_k)$, $k=2,\cdots, n$, то выберем точки $c'_{k-1} \in (c_{k-1}, a_k)$ и тогда при $x \in (c_{k-1}, c'_{k-1})$ получаем

$$|\rho_k J_1| \leqslant c\left(\|\varphi_0\|_p + \int_{a_{k-1}}^x \frac{|\varphi_0(y)|\,dy}{(y-a_{k-1})^{\gamma_{k-1}}(x-y)^{1-\alpha}}\right) \in L_q\, c_{k-1}, c'_{k-1}).$$

Если же $x \in (c'_{k-1}, a_k)$, то $|\rho_k J_1| \leqslant c\rho_k(x)\|\varphi_0\|_p \in L_q(c'_{k-1}, a_k)$.

Перейдем к оценке J_2. Рассмотрим два случая.

1°. Пусть $\gamma_k > \alpha - \frac{1}{p}$, $k=2,\cdots, n$. В случае $x \in (c_{k-1}, a_k)$, $k= =2,\cdots, n-1$, применяя соотношение (15′) из [4] имеем

$$|J_2| \leqslant c J^{\alpha}_{c_{k-1}+}(|\varphi_0|\,\rho_k^{-1}) = cJ^{\alpha}_{a_k}\tilde{\varphi}, \text{ где } \tilde{\varphi} \in L_p([c_{k-1}, a_k], \rho_k),$$

откуда в силу аналога теоремы 4.1 для правосторонних интегралов следует, что $J_2 \in L_q([c_{k-1}, a_k], \rho_k)$. Покажем, что $\|\rho_n J_2\|_{L_q(c_{n-1}, b)} \leqslant c\|\varphi_0\|_p$. Если $\gamma_n < \frac{1}{p'}$, рассуждения проводятся так же, как и в предыдущем случае. Если $\gamma_n > \frac{1}{p'}$, то

$$|\rho_k J_2| \leqslant c\,(b-x)^{\frac{1}{p'}-\varepsilon}\,(I^{\alpha}_{c_{n-1}+}(b-y)^{\varepsilon-\frac{1}{p'}}|\varphi_0|)(x)$$

и мы оказываемся в уже рассмотренной ситуации. Далее в случае $x\in(a_k, c_k)$, $k=2,\cdots, n-1$ в силу леммы 1.1 справедливо соотношение $J_2=J^{\alpha}_{a_k+}\psi$, где

$$\psi(x)=\varphi(x)+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi(x-a_k)^{\alpha}}\int\limits_{c_{k-1}}^{a_k}\frac{(a_k-t)^{\alpha}\,\varphi(t)}{x-t}\,dt\in L_p([a_k, c_k], \rho_k).$$

Отсюда вытекает, что $J_2\in L_q([a_k, c_k], \rho_k)$.

2°. Пусть $\gamma_k\leqslant\alpha-\dfrac{1}{p}$. Если $x\in(c_{k-1}, a_k)$, $k=2,\cdots, n$, то

$$|\rho_k J_2|\leqslant c\rho_k(x)\,(J^{\alpha}_{c_{k-1}+}(a_k-y)^{-\gamma_k}|\varphi_0|)(x)\leqslant$$

$$\leqslant c\,(a_k-x)^{\delta_k-\gamma_k}\left(\int\limits_{c_{k-1}}^{x}\frac{((a_k-y)^{|\gamma_k|}-(a_k-x)^{|\gamma_k|})\,|\varphi_0(y)|}{(a_k-x)^{|\gamma_k|}(x-y)^{1-\alpha}}\,dy+\right.$$

$$\left.+(J^{\alpha}_{c_{k-1}+}|\varphi_0|)(x)\right)=c\left(J_{21}+J_{22}\right).$$

Очевидно $J_{22}\in L_q(c_{k-1}, a_k)$. Оценим J_{21}. При $|\gamma_k|>1$ получаем $J_{21}\leqslant c\rho_k(x)(J^{\alpha+1}_{c_{k-1}+}|\varphi_0|)(x)\leqslant c\,\|\varphi_0\|_p\,\rho_k(x)\in L_q(c_{k-1}, a_k)$. При $|\gamma_k|<1$ воспользуемся неравенством

$$(r+h)^{\lambda}-r^{\lambda}\leqslant\theta r^{\lambda-\frac{\lambda}{\theta}}h^{\frac{\lambda}{\theta}},\ 0<r<r+h,\ 0<\lambda<\theta\leqslant 1.$$

Имеем $J_{21}\leqslant(a_k-x)^{\delta_k+|\gamma_k|\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}(J^{\alpha+\frac{|\gamma_k|}{\theta}}_{c_{k-1}+}|\varphi_0|)(x)\leqslant c\,\|\varphi_0\|_p\,(a_k-x)^{\delta_k+|\gamma_k|\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}\in$ $\in L_q(c_{k-1}, a_k)$, так как при θ достаточно близких к единице $(|\gamma_k|\,(|\gamma_k|+$ $+\varepsilon)^{-1}<\theta<1)$ справедливы неравенства

$$\alpha+\frac{|\gamma_k|}{\theta}>\frac{1}{p},\ \delta_k+|\gamma_k|\left(1-\frac{1}{\theta}\right)>\alpha-\frac{1}{p}.$$

Наконец, если $x\in(a_k, c_k)$, $k=2,\cdots, n-1$, то

$$|\rho_k J_2|\leqslant c\left(\int\limits_{c_{k-1}}^{a_k}+\int\limits_{a_k}^{x}\right)\frac{(x-a_k)^{\delta_k}\,|\varphi_0(y)|}{|y-a_k|^{\gamma_k}\,(x-y)^{1-\alpha}}\,dy=A_1+A_2.$$

При $\gamma_k<\alpha-\dfrac{1}{p}$ имеем $A_1\leqslant c\rho_k(x)(J^{\alpha-\gamma_k}_{c_{k-1}+}|\varphi_0(y)|)(a_k)\leqslant c\,\|\varphi_0\|_p\,\rho_k(x)\in$ $\in L_q(a_k, c_k)$. Если $\gamma_k=\alpha-\dfrac{1}{p}$, то $A_1\leqslant(x-a_k)^{\delta_k-\frac{\varepsilon}{2}}(J^{\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{2}}_{c_{k-1}+}|\varphi_0|)(a_k)\leqslant$

$\leqslant c\,\|\varphi_0\|_p\,(x-a_k)^{\delta_k-\frac{\varepsilon}{2}}\in L_q(a_k, c_k)$. Для A_2 получаем

$$A_2 < c \int_{a_k}^{x} \left(\frac{x-a_k}{y-a_k}\right)^{\gamma_k} \frac{|\varphi_0(y)|}{(x-y)^{1-\alpha}}\, dy \in L_q(a_k, c_k)),$$

в силу теоремы 4.1. Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что если $\gamma_k \leqslant \alpha - \frac{1}{p}$, то в теореме 4.2 нельзя полагать $\delta_k = \gamma_k$. Возьмем, например, $\varphi(x) = \rho^{-1}(x)$. Тогда, при $x \in (c_{k-1}, a_k)$

$$\rho(x)(J^{\alpha}_{a+}\, \rho^{-1})(x) \geqslant c\rho_k(x) \int_a^{c_{k-1}} \frac{\rho^{-1}(y)\, dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \geqslant c\rho_k(x) \overline{\in} L_q(c_{k-1}, a_k)$$

и, следовательно, теорема неверна.

Замечание 2. В случае $\gamma_k \leqslant \alpha - \frac{1}{p}$ для какого-либо $k=2, 3, \cdots, n$ поведение интеграла $J^{\alpha}_{a+}\varphi$ в окрестности точки a_k можно описать точнее:

$$|(J^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)| \leqslant \frac{c}{|x-a_k|^{\varepsilon_0}} + f(x),$$

где $f(x) \in L_q(|x-a_k|^{\gamma_k})$, $\varepsilon_0 = 0$ при $\gamma_k < \alpha - \frac{1}{p}$ и ε_0 как угодно малое положительное число при $\gamma_k = \alpha - \frac{1}{p}$.

Ростовский государственный
университет

Поступила 10.VIII.1981

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆՑ, Բ. Ս. ՌՈՒԲԻՆ. Կոտորակային ինտեգրման օպերատորների մասին կշռով տարածություններում *(ամփոփում)*

Հոդվածում ընդհանրացվում են Հարդի-Լիտլվուդի հայտնի թեորեմները կոտորակային ինտեգրման օպերատորների սահմանափակության վերաբերյալ $L_p(a, b)$-ում $L_p([a, b), \rho)$ կշռային տարածությունների դեպքի համար,

$$1 < p < +\infty,\ \rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x-a_k|^{\gamma_k},\ -\infty < a = a_1 < \cdots < a_n = b < \infty.$$

Դիտարկված են $\alpha > \frac{1}{p}$ և $\alpha < \frac{1}{p}$ դեպքերը: Ուսումնասիրված են α, p և γ_k պարամետրերի վրա դրված սահմանափակումները և ցույց է տրված որ նրանց լավացնել հնարավոր չէ:

N. K. KARAPETIANTS, B. S. RUBIN. *On the fractional integration operators in weight spaces* (summary)

In the paper the well-known Hardy — Littlewood theorems devoted to the boundedness of fractional integration operators in L_p-spaces are generalized for the weight spaces $L_p([a, b], \rho)$, where

$$1 < p < \infty,\ \rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x-a_k|^{\gamma_k},\ -\infty < a = a_1 < \cdots < a_n = b < \infty.$$

The cases $\alpha > \frac{1}{p}$ and $\alpha < \frac{1}{p}$ are considered. The authors investigate the restrictions on the parameters α, p, γ_k and show that they can not be improved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Hardy, J. Littlewood*. Some properties of fractional integrals, I. Math., Z., 27, 1928, 565—606.
2. *Б. С. Рубин*. Дробные интегралы в пространствах Гельдера с весом и операторы типа потенциала, Изв. АН АрмССР, сер. матем., IX, № 4, 1974, 308—324.
3. *Б. С. Рубин*. О пространствах дробных интегралов на прямолинейном контуре, Изв. АН АрмССР, сер. матем., VII, № 5, 1972, 373—386.
4. *С. Г. Самко*. Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования, Диффер. уравн., IV, № 2, 1968, 298—314.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIX, № 1, 1984 Математика

УДК 517.547

В. М. МАРТИРОСЯН

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ М. М. ДЖРБАШЯНА О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБЩИХ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Введение

0.1 (а) В своей работе [1] М. М. Джрбашян заложил основы большого цикла исследований по теории гармонического анализа в собственно комплексной области. Он построил стройный аппарат интегральных преобразований в классах L_2^{ω} на произвольной конечной системе лучей, исходящих из начала координат, ассоциированных с функциями e^z и $E_\rho(z;\mu)$, где

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n/\rho)}\left(\rho>\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}\right)$$

—целая функция типа Миттаг—Леффлера порядка ρ и типа 1. Полученные до 1965 г. результаты в этом направлении были подытожены в его монографии [2].

Эти исследования по гармоническому анализу позволили ему установить результаты завершенного характера о представлении целых функций, квадрат модуля которых интегрируем с весом $|z|^{\omega}$ $(-1<\omega<1)$ по лучам, исходящим из одной точки комплексной плоскости. Был получен ряд теорем о параметрическом представлении широких классов целых функций конечного порядка $\rho>1/2$ и нормального типа $\leqslant\sigma$. Эти теоремы М. М. Джрбашяна явились существенно новыми и глубокими аналогами классической теоремы Винера-Пэли [3] о параметрическом представлении класса $W(\sigma)$ целых функций экспоненциального типа $\leqslant\sigma$ из $L_2(-\infty,+\infty)$.

Чтобы сформулировать установленную им общую теорему, введем необходимые обозначения и определения.

(б) Пусть $\rho>1/2$— произвольное, но фиксированное число, а $[2\rho]$— целая часть числа 2ρ. Будем предполагать, что целое число $\varkappa=\varkappa(\rho)\geqslant 0$ удовлетворяет условию

$$\varkappa\geqslant[2\rho]-1. \tag{0.1}$$

Пусть, далее, совокупность чисел $\{\vartheta_0,\cdots,\vartheta_{\varkappa+1}\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$-\pi<\vartheta_0<\cdots<\vartheta_\varkappa\leqslant\pi<\vartheta_{\varkappa+1}=\vartheta_0+2\pi, \tag{0.2}$$

$$\max_{0<k<\varkappa}\{\vartheta_{k+1}-\vartheta_k\}=\frac{\pi}{\rho}. \tag{0.3}$$

Из этой совокупности чисел образуем последовательность пар

$$\{(\vartheta_0, \vartheta_1), \cdots, (\vartheta_\varkappa, \vartheta_{\varkappa+1})\}. \qquad (0.4)$$

Затем, сохраняя порядок их взаимного следования, выделим из (0.4) все те пары $\{(\vartheta_{r_k}, \vartheta_{r_k+1})\}_0^N$, для которых выполняется равенство

$$\vartheta_{r_k+1} - \vartheta_{r_k} = \frac{\pi}{\rho} \ (k=0, \cdots, N \leqslant \varkappa). \qquad (0.5)$$

При этом, если $N < \varkappa$, то оставшиеся после этого пары из (0.4) обозначим через $(\vartheta_{s_k}, \vartheta_{s_k+1})(k=1, \cdots, q=\varkappa-N)$, опять сохраняя порядок их взаимного следования. Таким образом, для таких пар

$$\vartheta_{s_k+1} - \vartheta_{s_k} < \frac{\pi}{\rho} \ (k=1, \cdots, \varkappa - N). \qquad (0.6)$$

Обозначим еще

$$\theta_k = \frac{1}{2} \{\vartheta_{r_k} + \vartheta_{r_k+1}\} \ (k=0, \cdots, N). \qquad (0.7)$$

С последовательностью $\{\vartheta_0, \cdots, \vartheta_{\varkappa+1}\}$ ассоциируем класс $A_\sigma^\rho(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$ целых функций $f(z)$ порядка ρ $(1/2 \leqslant \rho < +\infty)$ и типа $\leqslant \sigma$ $(0 \leqslant \leqslant \sigma < +\infty)$, таких, что индикатриса

$$h(\varphi; f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r^\rho} \qquad (0.8)$$

удовлетворяет оценкам

$$h(-\theta_k; f) \leqslant \sigma_k \ (0 \leqslant \sigma_k \leqslant \sigma;\ k = 0, \cdots, N). \qquad (0.9)$$

Наконец, обозначим через $W_\sigma^{(\rho)}(\omega; \{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})(-1 < \omega < 1)$ (см. [2], стр. 365) класс тех функций $f(z) \in A_\sigma^{(\rho)}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$, которые удовлетворяют условиям

$$\int_0^{+\infty} |f(te^{-i\theta_k})|^2 t^\omega \, dt < +\infty \ (k=0, \cdots, \varkappa). \qquad (0.10)$$

Следующая общая теорема содержит в себе вышеуказанную теорему Винера—Пэли (см. [4, 1, 5, 2]) в случае, когда $\rho=1$, $\omega=0$ $\vartheta_0=0$, $\vartheta_1=\pi$.

Теорема 0.1 (М. М. Джрбашян [2]) *Класс* $W_\sigma^{(\rho)}(\omega; \{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\}$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *допускающих представление*

$$f(z) = \sum_{k=0}^N \int_0^{\sigma_k} E_\rho(e^{i\theta_k} z\tau^{1/\rho}; \mu)\, \varphi_k(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau, \qquad (0.11)$$

где $\mu = \dfrac{1+\omega+\rho}{2\rho}$ *и* $\varphi_k(\tau) \in L_2(0, \sigma_k)(k=0, \cdots, N)$. *Функции* $\varphi_k(\tau)$ $(k=0, \cdots, N)$ *единственным образом почти всюду определяются из формул*

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi\rho}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi_{r_{k+1}}(-\tau)-e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi_{r_k}(\tau)\right\}=\widetilde{\Phi}_k(\tau)=$$

$$=\begin{cases}\varphi_k(\tau), & \tau\in(0,\sigma_k),\\ 0, & \tau\in(\sigma_k,+\infty),\end{cases}\quad (k=0,\cdots,N), \tag{0.12}$$

где почти всюду на полуоси $(0,+\infty)$

$$\Phi_k(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}f\left(e^{-i\theta_k}t^{1/\rho}\right)t^{\mu-1}\,dt\ (k=0,\cdots,\varkappa). \tag{0.13}$$

(в). При установлении этой теоремы важную роль играют обобщенные преобразования Бореля, общая теория которых развита в гл. VI монографии [2]. Напомним (см. [2], стр. 323—324), что для произвольной целой функции $f(z)$ роста $(\rho;\ \sigma)$ (т. е. порядка $\tilde{\rho}<\rho$, либо порядка $\tilde{\rho}=\rho$ и типа $\tilde{\sigma}\leqslant\sigma$) ее обобщенное преобразование Бореля задается разложением

$$g_{\rho,\mu}(\zeta;\ f)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k(\mu)}{\zeta^{k+1}}\ (\mathrm{Re}\,\mu>0), \tag{0.14}$$

где $b_k(\mu)$ определяются из представления функции $f(z)$ рядом Тейлора, записанного в виде

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k(\mu)}{\Gamma(\mu+k/\rho)}z^k. \tag{0.15}$$

При этом справедливы следующие утверждения (см. [2], стр. 323—324):

1) Если $\tilde{\rho}=\rho$ (тогда, очевидно, $\tilde{\sigma}\leqslant\sigma$), то функция $g_{\rho,\mu}(\zeta;\ f)$ голоморфна в области $|\zeta|>\tilde{\sigma}^{1/\rho}$ и имеет хотя бы одну особую точку на окружности $|\zeta|=\tilde{\sigma}^{1/\rho}$.

2) Если $\tilde{\rho}<\rho$, то функция $g_{\rho,\mu}(\zeta;\ f)$ голоморфна на всей плоскости ζ, кроме точки $\zeta=0$.

(г) Опишем в общих чертах предложенный М. М. Джрбашяном метод установления представления (0.11)—(0.13).

С функцией $f(z)\in W_\sigma^{(\rho)}(\omega;\ \{\theta_k\};\ \{\sigma_k\})$ ассоциируется ее обобщенное преобразование Бореля $g_{\rho,\mu}(\zeta;\ f)$ и доказывается, что все особенности этой функции лежат на системе отрезков $l_k=\{\zeta\colon \mathrm{Arg}\,\zeta=\theta_k,\ 0\leqslant|\zeta|\leqslant\sigma_k^{1/\rho}\}$ $(k=0,\cdots,N)$. Затем строится специальное семейство замкнутых жордановых кривых $\Gamma_\rho(\nu;\ R)$ $(\nu>0,\ R>\sigma)$, содержащих внутри себя систему отрезков $\{l_k\}_0^N$ и при $\nu\to+0$ стягивающихся к этой системе. Далее, на основании общих свойств обобщенного преобразования Бореля функция $f(z)$ представляется в виде

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho(\nu;R)}E_\rho(z\zeta;\ \mu)\,g_{\rho,\mu}(\zeta;\ f)\,d\zeta,\ z\in\mathbb{C}.$$

Наконец, в этой формуле совершается предельный переход при $\nu \to +0$ что приводит к формуле представления (0.11) и к формулам обращения (0.12)—(0.13).

(д) Анализ доказательства теоремы 0.1 показывает, (см. [2], гл. VI), что этот же метод можно применить и доказать формулы представления (0.11)—(0.13) для функций из более общих классов $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$, где $1 < p < 2$, $-1 < \omega < p-1$. Это класс тех функций $f(z) \in A^{(\rho)}_{\sigma}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$, которые вместо (0.10) удовлетворяют условиям

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(te^{-i\vartheta_k})|^p t^{\omega} dt < +\infty \quad (k=0, \cdots, \varkappa). \tag{0.16}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 0.1′. *Каждая функция* $f(z) \in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$ *допускает представление* (0.11), *где* $\mu = \dfrac{1+\omega+(p-1)\rho}{p\rho}$, *а функции* $\varphi_k(\tau) \in L_q(0, \sigma_k)(k=0, \cdots, N)$, $1/p+1/q=1$, *почти всюду определяются из формул* (0.12)—(0.13).

Именно описанным выше методом М. М. Джрбашяном и И. О. Хачатряном были установлены (но не опубликованы) специальные типичные случаи сформулированной теоремы. А. Е. Аветисяном было дано для них другое доказательство (см. [6], теоремы 3.1 и 3.2), опирающееся на использовании интегральных представлений классов $H^{\omega}_p[\Delta]$, аналитических в угловых областях, и свойств обобщенного преобразования Бореля.

Отметим, что теорема 0.1′ содержит в себе установленную независимо М. Планшерелем и Г. Пойа [7] и Р. П. Боасом [8] теорему типа Винера—Пэли для классов целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ из $L_p(-\infty, +\infty)$ $(1 < p \leqslant 2)$.

0.2 (а) В данной работе предлагается новый подход к установлению теоремы 0.1′, основанный на редуцировании задачи представления функций из классов $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$ к исследованию интегралов типа Коши. Кратко это можно описать следующим образом.

Пусть $\rho > 1/2$ (тогда $\varkappa \geqslant 1$) и

$$\Delta_k = \{z: -\vartheta_{k+1} < \operatorname{Arg} z < -\vartheta_k, \ 0 < |z| < +\infty\} \quad (k=0, \cdots, \varkappa)$$

— угловая область раствора $\vartheta_{k+1} - \vartheta_k \leqslant \pi/\rho$, а $\Delta^*_k = \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}_k$ — дополнительная к $\overline{\Delta}_k$ угловая область. Обозначим через $\partial\Delta^*_k$ пробегаемую в положительном направлении границу области Δ^*_k.

Для функции $f(z) \in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$ устанавливается сначала, что почти всюду на объединении системы лучей $\operatorname{Arg}\zeta = -\vartheta_k$ $(k=0, \cdots, \varkappa)$ она представима в виде

$$f(\zeta) = F_0(\zeta) + \cdots + F_{\varkappa}(\zeta), \tag{0.17}$$

где $F_k(\zeta)$ — некасательные граничные значения на $\partial\Delta^*_k$ интеграла типа Коши

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_k^*}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\Delta_k^*\ (k=0,\cdots,\varkappa). \tag{0.18}$$

Затем на основании формулы М. М. Джрбашяна представления ядра Коши (см. [2], стр. 149) и общих свойств обобщенного преобразования Бореля ([2], теорема 6.5) устанавливаются следующие свойства интегралов типа Коши (0.18). Когда $F_k(z)$ соответствует паре вида $(\vartheta_{s_k}, \vartheta_{s_k+1})$, $F_k(z)\equiv 0$; если же $F_k(z)$ соответствует паре вида $(\vartheta_{r_k}, \vartheta_{r_k+1})$, то она представима в виде

$$F_k(z)=\int\limits_0^{\sigma_k}E_\rho\left(e^{i\theta_k}z\tau^{1/\rho};\ \mu\right)\varphi_k(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\ (k=0,\cdots,N), \tag{0.19}$$

где функции $\varphi_k(\tau)\in L_q(0,\sigma_k)(k=0,\cdots,N)$ определяются из формул (0.12)—(0.13) (см. теорему 3.1). Подстановка значений функций $F_k(z)$ в (0.17) приводит к формулам (0.11)—(0.13), когда $\rho>1/2$. Случай $\rho=1/2$ легко сводится к случаю $\rho=1$.

(6) Данная работа состоит из трех параграфов.

§ 1 носит предварительный характер. Здесь приведены некоторые известные результаты о функциях из классов H_p в полуплоскости и из классов $H_p^\omega[\Delta]$, где Δ — угловая область с вершиной в начале координат.

$H_p^\omega[\Delta]$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$ — это класс голоморфных в Δ функций $F(z)$, удовлетворяющих условию

$$\|F;\ \Delta\|_{p,\omega}=\sup_{\Gamma(\varphi)\subset\Delta}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^p\,r^\omega\,dr\right\}^{1/p}<+\infty, \tag{0.20}$$

где $\Gamma(\varphi)$ — это луч $\operatorname{Arg}\zeta=\varphi$.

Отметим, что классы $H_2^\omega[\Delta]$ были введены М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном и ими были установлены параметрические представления этих классов [9] (см. также [2], гл. VII). Классы $H_p^\omega[\Delta](1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$ были рассмотрены автором в связи с вопросами полноты и базисности некоторых биортогональных систем, описания их замыканий, а также задачи кратной интерполяции в этих классах [10]. А. Е. Аветисяном [6] установлены интегральные представления классов $H_p^\omega[\Delta](1<p\leqslant 2,\ -1<\omega<p-1)$ и даны их приложения к распространению интегральных преобразований М. М. Джрбашяна в классах L_p^ω $(1<p\leqslant 2,\ -1<\omega<p-1)$ на системе лучей.

В § 2 рассматриваются весьма общие классы функций, заданных на множествах M, состоящих из конечного числа лучей и угловых областей с общей вершиной в начале координат. При этом предполагается, что всевозможные попарные пересечения замыканий угловых областей и лучей, компонент множества M, содержат единственную точку $z=0$.

На таком множестве M определяется класс $H_p^\omega[M]$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$. Этот класс состоит из функций $F(z)$, голоморфных

в углах-компонентах множества M, измеримых на его лучах-компонентах и таких, что

$$\|F; M\|_{p,\omega} = \sup_{\Gamma(\varphi)\subset M} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega \, dr \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{0.21}$$

Из определения множества M следует, что $\mathbf{C}\setminus\overline{M}$ состоит из конечного числа угловых областей Δ_k $(k=0, \cdots, \varkappa)$. Угловую область $\mathbf{C}\setminus\overline{\Delta}_k$ обозначим через Δ_k^*. Основной результат параграфа—это теорема 2.2, которая является теоремой типа М. Рисса о проектировании из L_p в H_p (см., напр., [11], стр. 215). В ней устанавливается, что

пространство $H_p^\omega[M]$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$ *является прямой суммой своих замкнутых подпространств* $H_p^\omega[\Delta_k^*]$ $(k=0,\cdots$ $\cdots, \varkappa)$. *При этом для каждой функции* $f(z)\in H_p^\omega[M]$ *ее проекция* $F_k(z)$ *на подпространство* $H_p^\omega[\Delta_k^*]$ $(k=0,\cdots,\varkappa)$ *представима в виде* (0.18).

Отметим, что классы вида $H_2^\omega[M]$ впервые были рассмотрены М. М. Джрбашяном и им были установлены параметрические представления этих классов (см. [2], гл. VII). Интегральные представления классов $H_p^\omega[M]$ $(1<p\leqslant 2,\ -1<\omega<p-1)$ были установлены А. Е. Аветисяном [6].

Заключительный § 3 данной работы посвящен доказательству теоремы 0.1′.

Приношу глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за полезные обсуждения работы и моральную поддержку в период работы над ней.

§ 1. Необходимые сведения о функциях из классов $H_p^\omega[\Delta(\alpha;\vartheta)]$

1.1 (а). Важные приложения классической теоремы М. Рисса о проектировании из L_p в H_p привели к установлению различных ее обобщений. Приведем одно из них, фактически установленное в монографии Е. Титчмарша [12] (стр. 176).

Обозначим через $H_p\equiv H_p[\operatorname{Im} z>0]$ $(0<p<+\infty)$ известный (см., напр., [11], гл. VIII) класс функций F, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и таких, что

$$\|F\|_p = \sup_{0<y<+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^p \, dx \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1.1}$$

Аналогично определяется класс $H_p[\operatorname{Im} z<0]$. Справедлива

Теорема 1.1 (Е. Титчмарш [12]). *Пусть* $f\in L_p(-\infty, +\infty)$, *где* $1<p<+\infty$, *и*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-z}\,dx = \begin{cases} F^{(+)}(z), & \operatorname{Im} z>0, \\ F^{(-)}(z), & \operatorname{Im} z<0. \end{cases}$$

Тогда $F^{(+)} \in H_p[\operatorname{Im} z>0]$ *и* $F^{(-)} \in H_p[\operatorname{Im} z<0]$, *причем*

$$\|F^{(+)}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p, \quad \|F^{(-)}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p,$$

где $A_p \in (0, +\infty)$ *зависит только от* p.

(б) Наряду с классом $H_p = H_p[\operatorname{Im} z>0]$ рассмотрим класс H_p^* $(0<p<+\infty)$ функций F, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и удовлетворяющих условию

$$\|F\|_p^* = \sup_{0<\varphi<\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p \, dr \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1.2}$$

М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном впервые было установлено, что $H_2 = H_2^*$ [9] (см. также [2], гл. VII). В общем случае справедливо следующее утверждение, которое в одну сторону было доказано С. А. Акопяном [13], а в другую—А. М. Седлецким [14].

Теорема 1.2 ([9, 13, 14]). *Для любого* $p \in (0, +\infty)$ *имеют место следующие утверждения*:

1°. $H_p = H_p^*$;

2°. $2^{-1/p}\|F\|_p \leqslant \|F\|_p^* \leqslant \|F\|_p$ $(\forall F \in H_p)$.

1.2 (а) Чтобы определить более общие классы функций введем обозначения. Для значений параметров $1/2 \leqslant \alpha < +\infty$, $-\infty < \vartheta < +\infty$ обозначим через

$$\Delta(\alpha; \vartheta) = \{z: |\operatorname{Arg} z - \vartheta| < \pi/2\alpha, \ 0<|z|<+\infty\},$$

$$\Delta^*(\alpha; \vartheta) = \{z: \pi/2\alpha < |\operatorname{Arg} z - \vartheta| \leqslant \pi, \ 0<|z|<+\infty\}$$

взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Отметим при этом, что при $\alpha = 1/2$ $\Delta(\alpha; \vartheta)$— это плоскость, разрезанная вдоль луча $\Delta^*(1/2; \vartheta) = \{re^{i\vartheta}: r \geqslant 0\}$.

Через $\partial\Delta(\alpha; \vartheta)$ (соответственно $\partial\Delta^*(\alpha; \vartheta)$) будем обозначать границу области $\Delta(\alpha; \vartheta)$ (области $\Delta^*(\alpha; \vartheta)$), пробегаемую в положительном относительно этой области направлении.

Наконец, обозначим через $L_p^\omega(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$, $1<p<+\infty$, $-1<\omega<p-1$, класс измеримых на $\partial\Delta(\alpha; \vartheta)$ функций F, таких, что

$$\|F; \partial\Delta(\alpha; \vartheta)\|_{p,\omega} = \left\{ \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} |F(\zeta)|^p |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1.3}$$

(б) Полагая теперь $1<p<+\infty$, $-1<\omega<p-1$, обозначим через $H_p^\omega[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ класс функций F, голоморфных в области $\Delta(\alpha; \vartheta)$ и удовлетворяющих условию

$$\|F; \Delta(\alpha; \vartheta)\|_{p,\omega} = \sup_{|\varphi-\vartheta|<\frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega \, dr \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1.4}$$

Классы $H_p^\omega[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ являются естественными обобщениями классов H_p (см. теорему 2) и поэтому обладают многими свойствами, присущими им. Приведем формулировки некоторых из них, которые потребуются нам при дальнейшем изложении.

Теорема 1.3 ([2, 10]). *Для любой функции* $F \in H_p^\omega[\Delta(\alpha; \vartheta)]$, *где* $1<p<+\infty$, $-1<\omega<p-1$, *справедливы следующие утверждения*:

1°. *Почти всюду на* $\partial\Delta(\alpha;\vartheta)$ *функция* F *имеет некасательные граничные значения* $F(\zeta)$, *причем* $F(\zeta)\in L_p^{\omega}(\partial\Delta(\alpha;\vartheta))$ *и*

$$\lim_{\varphi\to\vartheta\pm\frac{\pi}{2\alpha}}\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})-F(re^{i(\vartheta\pm\pi/2\alpha)})|^p r^{\omega}\,dr=0;$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}F(z), & z\in\Delta(\alpha;\vartheta);\\ 0, & z\in\Delta^{*}(\alpha;\vartheta);\end{cases}$$

3°. *Для любого* φ_0 $(0<\varphi_0<\pi/2\alpha)$

$$\max_{|\varphi-\vartheta|<\varphi_0}\{|F(re^{i\varphi})|\}=o\left(r^{-\frac{1+\omega}{p}}\right)\ \text{при}\ r\to+0,\ r\to+\infty.$$

В силу утверждения 1° этой теоремы в $H_p^{\omega}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ можно ввести норму также равенством (1.3), где $F(\zeta)$—граничная функция функции $F\in H_p^{\omega}[\Delta(\alpha,\vartheta)]$. Известно [10], что $H_p^{\omega}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ *с нормой* (1.4) (*или с нормой* (1.3)) *является банаховым пространством и справедливы неравенства*

$$2^{-1/p}\|F;\partial\Delta(\alpha;\vartheta)\|_{p,\omega}\leqslant\|F;\Delta(\alpha;\vartheta)\|_{p,\omega}\leqslant\|F;\partial\Delta(\alpha;\vartheta)\|_{p,\omega}. \tag{1.5}$$

§ 2. Теоремы о проектировании

2.1 (а) В этом параграфе будут установлены обобщения теоремы 1.1 Е. Титчмарша. Чтобы сформулировать первое из них, введем обозначения.

Условимся сначала всюду в этом параграфе полагать, что p и ω — произвольные фиксированные параметры, изменяющиеся в пределах

$$1<p<+\infty,\quad -1<\omega<p-1. \tag{2.1}$$

Пусть, далее,

$$\Gamma(\vartheta)=\{\zeta=re^{i\vartheta}:\ 0\leqslant r<+\infty\}\quad(-\infty<\vartheta<+\infty) \tag{2.2}$$

— луч, пробегаемый в направлении возрастания $|\zeta|$.

Обозначим через $L_p^{\omega}(\Gamma(\vartheta))$ класс функций f, измеримых на $\Gamma(\vartheta)$ и удовлетворяющих условию

$$\|f;\Gamma(\vartheta)\|_{p,\omega}=\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\vartheta})|^p r^{\omega}\,dr\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{2.3}$$

Удобно также класс $L_p^{\omega}(\Gamma(0))$ обозначить через $L_p^{\omega}(0,+\infty)$.

Следующее утверждение является одним из обобщений теоремы 1.1.

Лемма 2.1 ([10]). *Если* $f\in L_p^{\omega}(\Gamma(\vartheta))$, *то интеграл типа Коши*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\vartheta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma(\vartheta),\tag{2.4}$$

обладает следующими свойствами:

1°. *F голоморфна в области $\mathbf{C}\setminus\Gamma(\vartheta)$ и справедливо неравенство*

$$\sup_{\vartheta<\varphi<\vartheta+2\pi}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^p\,r^{\omega}\,dr\right\}^{1/p}<A\,\|f;\ \Gamma(\vartheta)\|_{p,\,\omega},\tag{2.5}$$

где $A=A(p,\omega)\in(0,+\infty)$ зависит исключительно от p и от ω;

2°. *Функция F почти всюду на $\Gamma(\vartheta)$ имеет некасательные граничные значения $F^{(-)}(\zeta)$ и $F^{(+)}(\zeta)$ соответственно слева и справа от луча $\Gamma(\vartheta)$, причем $F^{(\pm)}\in L_p^{\omega}(\Gamma(\vartheta))$ и*

$$f(\zeta)=F^{(-)}(\zeta)-F^{(+)}(\zeta)\ \text{ почти всюду на } \Gamma(\vartheta).\tag{2.6}$$

Доказательство этой леммы краткое, и мы считаем нелишним привести его здесь.

Без ограничения общности можем считать $\vartheta=0$.

Итак, пусть $f\in L_p^{\omega}(0,+\infty)$ и

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x-z}\,dx,\ z\in\mathbf{C}\setminus[0,+\infty).\tag{2.4'}$$

Из абсолютной и равномерной сходимости этого интеграла следует голоморфность F в $\mathbf{C}\setminus[0,+\infty)$.

Далее, для каждого $\varphi\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, положив

$$H_\varphi(r;\ r-x)=|r-x|\,[2\pi i\,(x-re^{i\varphi})]^{-1},$$

определим оператор T_φ следующим образом:

$$[T_\varphi g](r)=\int\limits_0^{+\infty}\{H_\varphi(r;r-x)/|r-x|\}\,g(x)\,dx,\ r>0.\tag{2.7}$$

Пусть теперь $g\in L_p(0,+\infty)$. Тогда для интеграла типа Коши

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(x)}{x-z}dx=\begin{cases}G^{(+)}(z), & \operatorname{Im} z>0,\\ G^{(-)}(z), & \operatorname{Im} z<0,\end{cases}$$

на основании теорем 1.1 и 1.2 можем утверждать, что $G^{(+)}(z)\in H_p^{*}$, $G^{(-)}(-z)\in H_p^{*}$, причем

$$\|G^{(+)}(z)\|_p^{*}\leqslant A_p\,\|g\|_{L_p(0,+\infty)},\ \|G^{(-)}\|_p^{*}\leqslant A_p\,\|g\|_{L_p(0,+\infty)}.$$

Легко видеть, что эти неравенства можно записать в виде

$$\sup_{\varphi\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|G(re^{i\varphi})|^p dr\right\}^{1/p}\leqslant A_p\,\|g\|_{L_p(0,+\infty)},$$

и поскольку $[T_\varphi g](r)=G(re^{i\varphi})$, то для любого $\varphi\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$

$$\|T_\varphi g\|_{L_p(0,+\infty)}\leqslant A_p\|g\|_{L_p(0,+\infty)},\quad g\in L_p(0,+\infty).$$

Значит, T_φ — ограниченный оператор в $L_p(0,+\infty)$. Кроме того, $|H_\varphi(r;r-x)|\leqslant 1/2\pi$. Следовательно, в силу одного результата И. Стейна [15], для любой измеримой функции g и для любого $\varphi\in(0,\pi)\cup\cup(\pi,2\pi)$ будем иметь

$$\|[T_\varphi g](r)\,r^{\omega/p}\|_{L_p(0,+\infty)}\leqslant A\,\|g(x)\,x^{\omega/p}\|_{L_p(0,+\infty)},\tag{2.8}$$

причем $A=A(p,\omega)\in(0,+\infty)$ зависит исключительно от p и ω. В частности, для функции $g(x)=f(x)$ ввиду определений (2.4′) и (2.7) функции F и оператора T_φ имеет место равенство $[T_\varphi f](r)\equiv F(re^{i\varphi})$. В этом случае неравенство (2.8) принимает вид

$$\left\{\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^p\,r^\omega\,dr\right\}^{1/p}\leqslant A\,\|f;\Gamma(0)\|_{p,\omega},\quad \varphi\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi).\tag{2.8′}$$

Поскольку отсюда следует $F\in H_p^\omega[\operatorname{Im}z>0]$, то в силу теоремы 1.3 (1°) неравенство (2.8′) верно и при $\varphi=\pi$, то есть утверждение 1° леммы доказано.

Далее, поскольку $F\in H_p^\omega[\operatorname{Im}z>0]$ и $F\in H_p^\omega[\operatorname{Im}z<0]$ (в силу (2.8′)), то из теоремы 1.3 (1°) следует существование у F некасательных граничных значений $F^{(+)}(x)$ и $F^{(-)}(x)$ соответственно сверху и снизу от полуоси $(0,+\infty)$, причем $F^{(\pm)}\in L_p^\omega(0,+\infty)$. Наконец, (2.6) вытекает из известных результатов об интегралах типа Коши (см., напр., [16], стр. 416).

(б) Пусть теперь $\varkappa>1$ и совокупность чисел $\{\vartheta_k\}_0^{\varkappa+1}$ такова, что

$$-\pi<\vartheta_0<\cdots<\vartheta_\varkappa\leqslant\pi<\vartheta_{\varkappa+1}=\vartheta_0+2\pi.$$

С этой совокупностью ассоциируем множество

$$\Gamma=\bigcup_{k=0}^{\varkappa}\Gamma(\vartheta_k),$$

состоящее из совокупности $\varkappa+1$ лучей, исходящих из точки $\zeta=0$. Очевидно, что Γ разбивает плоскость $\mathbb{C}$ на $\varkappa+1$ угловых областей Δ_k $(0\leqslant k\leqslant\varkappa)$ с общей вершиной в начале координат, где

$$\Delta_k=\{z:\ \vartheta_k<\operatorname{Arg}z<\vartheta_{k+1},\ 0<|z|<+\infty\}.$$

Обозначим через $L_p^\omega(\Gamma)$ класс функций f, измеримых на Γ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L_p^\omega(\Gamma)}=\left\{\sum_{k=0}^{\varkappa}\int_0^{+\infty}|f(re^{i\vartheta_k})|^p\,r^\omega\,dr\right\}^{1/p}<+\infty.\tag{2.9}$$

В качестве непосредственного следствия из леммы 1.1 получаем следующую теорему о расщеплении функций из класса $L_p^\omega(\Gamma)$.

Теорема 2.1. *Для каждой функции* $f\in L_p^{\omega}(\Gamma)$ *существует единственный набор функций* $F_k\in H_p^{\omega}[\Delta_k]$ $(0\leqslant k\leqslant \varkappa)$ *таких, что почти всюду*

$$f(\zeta)=F_{k+1}(\zeta)-F_k(\zeta);\ \zeta\in\Gamma(\vartheta_k)(0\leqslant k\leqslant\varkappa),\ F_{\varkappa+1}=F_0. \tag{2.10}$$

При этом

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\Delta_k\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa), \tag{2.11}$$

и справедливы неравенства

$$\|F_k;\ \Delta_k\|_{p,\omega}\leqslant B\|f\|_{L_p^{\omega}(\Gamma)}\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa), \tag{2.12}$$

где $B=B(p,\omega)\in(0,+\infty)$ *зависит исключительно от* p *и* ω.

Доказательство. Равенства (2.10) и неравенства (2.12) вытекают сразу из (2.11) и леммы 1.1. Поэтому нужно доказать только единственность набора функций $F_k\in H_p^{\omega}[\Delta_k]$ $(0\leqslant k\leqslant\varkappa)$, удовлетворяющих (2.10).

Предположим, что набор функций $F_k^*\in H_p^{\omega}[\Delta_k]$ $(0\leqslant k\leqslant\varkappa)$ также удовлетворяет (2.10). В таком случае будем иметь

$$F_k(\zeta)-F_k^*(\zeta)=F_{k+1}(\zeta)-F_{k+1}^*(\zeta),\ \zeta\in\Gamma(\vartheta_k); \tag{2.13}$$
$$(0\leqslant k\leqslant\varkappa),\ F_{\varkappa+1}^*=F_0^*.$$

Определим в $\mathbf{C}\setminus\Gamma$ функцию $G(z)$ следующим образом:

$$G(z)=F_k(z)-F_k^*(z),\ z\in\Delta_k\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa).$$

В силу (2.13) граничные значения G на лучах $\Gamma(\vartheta_k)$ слева и справа совпадают, так что можно считать G заданной на всей плоскости $\mathbf{C}$, причем $G\in H_p^{\omega}[\Delta_k]$ $(0\leqslant k\leqslant\varkappa)$. Следовательно, по теореме 1.3 для всех k $(0\leqslant k\leqslant\varkappa)$ можем написать

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_k}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}G(z),\ z\in\Delta_k;\\ 0,\ z\in\Delta_k^*=\mathbf{C}\setminus\bar{\Delta}_k.\end{cases}$$

Положив $\Gamma(\vartheta_{\varkappa+1})=\Gamma(\vartheta_0)$, отсюда заключаем, что

$$G(z)=\sum_{k=0}^{\varkappa}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_k}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\varkappa}\left\{\int\limits_{\Gamma(\vartheta_k)}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\int\limits_{\Gamma(\vartheta_{k+1})}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}=0,$$

при $z\in\mathbf{C}/\Gamma$, и, следовательно,

$$F_k(z)\equiv F_k^*(z),\ z\in\Delta_k\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa).$$

Теорема доказана.

Отметим, что при $p=2$ утверждение этой теоремы (без формул (2.11) и неравенств (2.12)) было установлено А. Е. Аветисяном [17] на основании теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна.

Отметим также, что в случае $\Gamma=(-\infty, +\infty)$ и $\omega=0$ эта теорема переходит в теорему 1.1 Е. Титчмарша.

2.2 (а) В этом пункте мы будем рассматривать весьма общие классы функций, определенных на множествах комплексной плоскости, состоящих из конечного числа лучей и угловых областей, замыкания которых содержат лишь одну общую точку $z=0$. Чтобы определить эти классы, следуя М. М. Джрбашяну (см. [2], гл. VII), введем необходимые обозначения.

Для любых α $(1/2<\alpha<+\infty)$ и ϑ $(-\infty<\vartheta<+\infty)$ множество точек $\Delta(\alpha;\,\vartheta)$ комплексной плоскости определим следующим образом:

$$\Delta(\alpha;\,\vartheta)=\begin{cases}|\operatorname{Arg} z-\vartheta|<\pi/2\alpha, & \text{при } 1/2<\alpha<+\infty;\\ \operatorname{Arg} z=\vartheta, & \text{при } \alpha=+\infty.\end{cases} \tag{2.14}$$

Всюду в этом пункте будем предполагать, что целое число $\varkappa\geqslant 1$ и совокупности чисел

$$\vartheta=\{\vartheta_k\}_0^{\varkappa+1}\colon -\pi<\vartheta_0<\cdots<\vartheta_\varkappa\leqslant\pi<\vartheta_{\varkappa+1}=\vartheta_0+2\pi, \tag{2.15}$$

$$\alpha=\{\alpha_k\}_0^{\varkappa+1}\colon 1/2<\alpha_k\leqslant+\infty\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa),\ \alpha_{\varkappa+1}=\alpha_0, \tag{2.16}$$

таковы, что всевозможные пересечения $\overline{\Delta}(\alpha_{k_1};\,\vartheta_{k_1})\cap\overline{\Delta}(\alpha_{k_2};\,\vartheta_{k_2})$ $(k_1\neq k_2)$ замкнутых множеств $\overline{\Delta}(\alpha_k;\,\vartheta_k)(0\leqslant k\leqslant\varkappa)$ содержат лишь единственную точку—начало координат. Нетрудно проверить, что это условие эквивалентно следующей цепочке неравенств:

$$\vartheta_{k+1}-\vartheta_k>\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_{k+1}}+\frac{1}{\alpha_k}\right)\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa). \tag{2.17}$$

Очевидно также, что при $1/2<\alpha_k<+\infty$ $\Delta(\alpha_k;\,\vartheta_k)$ является угловой областью раствора π/α_k и луч $\Gamma(\vartheta_k)$ является ее биссектрисой, а если $\alpha_k=+\infty$, то $\Delta(\alpha_k;\,\vartheta_k)$ совпадает с лучом $\Gamma(\vartheta_k)$.

В принятых нами условиях рассмотрим на плоскости $\mathbf{C}$ точечное множество

$$M=M\{\alpha;\,\vartheta\}=\bigcup_{k=0}^{\varkappa}\Delta(\alpha_k;\,\vartheta_k), \tag{2.18}$$

компонентами которого служат лучи, исходящие из начала координат (если среди α_k имеются равные $+\infty$) и угловые области с вершиной в точке $z=0$ (если среди α_k имеются отличные от $+\infty$). Замыкание этого множества

$$\overline{M}=\overline{M}\{\alpha;\,\vartheta\}=\bigcup_{k=0}^{\varkappa}\overline{\Delta}(\alpha_k;\,\vartheta_k) \tag{2.19}$$

состоит из совокупности $\{\overline{\Delta}(\alpha_k;\,\vartheta_k)\}_0^{\varkappa}$ лучей и замкнутых угловых областей, пересечение которых по условию содержит единственную точку—начало координат. Дополнение замкнутого множества $\overline{M}\{\alpha;\,\vartheta\}$, очевидно, состоит из угловых областей вида

$$\Delta_k=\Delta(\rho_k;\ \theta_k)=\left\{z: |\operatorname{Arg} z-\theta_k|<\frac{\pi}{2\rho_k},\ 0<|z|<+\infty\right\}\ (0\leqslant k\leqslant \varkappa), \tag{2.20}$$

$$-\pi<\theta_0<\cdots<\theta_\varkappa\leqslant\pi,\ 1/2<\rho_k<+\infty, \tag{2.21}$$

и, кроме того

$$\sum_{k=0}^{\varkappa}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\rho_k}\right)=2. \tag{2.22}$$

Простой подсчет показывает также, что

$$\begin{aligned}\theta_k&=\frac{1}{2}\left\{\vartheta_k+\vartheta_{k+1}+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)\right\},\\ \frac{\pi}{\rho_k}&=\vartheta_{k+1}-\vartheta_k-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_{k+1}}\right).\end{aligned}\quad (0\leqslant k\leqslant\varkappa) \tag{2.23}$$

Обозначим через $\Delta_k^*\equiv\Delta_k^*(\rho_k;\ \theta_k)$ дополнение к замкнутой угловой области $\overline{\Delta}_k$.

Учитывая эти обозначения и полагая, как и раньше, $1<p<+\infty$, $-1<\omega<p-1$, обозначим через $H_p^\omega[M\{\alpha;\ \vartheta\}]\equiv H_p^\omega[M]$ класс функций F, определенных на множестве $M\{\alpha;\ \vartheta\}$ и удовлетворяющих условиям:

а) если $\alpha_k\neq+\infty$, то F голоморфна в $\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)$ и

$$\sup_{|\varphi-\vartheta_k|<\frac{\pi}{2\alpha_k}}\left\{\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^p r^\omega\,dr\right\}<+\infty;$$

б) если $\alpha_k=+\infty$, то F измерима на луче $\Gamma(\vartheta_k)=\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)$ и

$$\int_0^{+\infty}|F(re^{i\vartheta_k})|^p r^\omega\,dr<+<\infty.$$

В $H_p^\omega[M]$ введем норму равенством

$$\|F;\ M\|_{p,\omega}=\sup_{\Gamma(\varphi)\subset M}\left\{\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^p r^\omega\,dr\right\}^{1/p} \tag{2.24}$$

и заметим, что *с такой нормой $H_p^\omega[M]$ является банаховым пространством.*

Действительно, при $\alpha_k\neq+\infty$ функция F в области $\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)$ принадлежит пространству $H_p^\omega[\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)]$, а при $\alpha_k=+\infty$ — пространству $L_p^\omega(\Gamma(\vartheta_k))$. Из полноты этих пространств и следует полнота $H_p^\omega[M]$.

(б) Убедимся, что $H_p^\omega[\Delta_k^*]\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa)$ *можно рассматривать как замкнутое подпространство пространства $H_p^\omega[M]$.*

В самом деле, каждая функция $F_k\in H_p^\omega[\Delta_k^*]$ полностью определяется своими значениями на $\partial\Delta_k^*$ (см. теорему 1.3). Отсюда и из включений $\partial\Delta_k^*\subset\overline{M}\subset\overline{\Delta_k^*}$ заключаем, что F_k можно восстановить по ее значениям на $\overline{M}$. И поскольку по значениям F_k на M определяются ее значения на $\overline{M}$, то эта функция полностью определяется ее сужением на M. Сформулированное выше утверждение следует из этого замечания и из равенств

$$\|F_k;\ \Delta_k^*\|_{p,\omega}=\|F_k;\ M\|_{p,\omega}\ (0\leqslant k\leqslant \varkappa). \tag{2.25}$$

Эти равенства—следствие включений $\partial\Delta_k^*\subset\overline{M}\subset\overline{\Delta_k^*}$ и одного результата С. А. Акопяна [13].

Следующая теорема представляет собой другое обобщение теоремы 1.1 Е. Титчмарша.

Теорема 2.2. *Пространство $H_p^\omega[M]$ является прямой суммой своих замкнутых подпространств $H_p^\omega[\Delta_k^*]$ $(0\leqslant k\leqslant \varkappa)$. Именно, для каждой функции $F\in H_p^\omega[M]$ существует единственный набор функций $F_k\in H_p^\omega[\Delta_k^*]$ $(0\leqslant k\leqslant \varkappa)$ таких, что*

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\varkappa} F_k(z),\ z\in M, \tag{2.26}$$

и каждая сумма такого вида принадлежит $H_p^\omega[M]$.

При этом функции F_k определяются из формул

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_k^*}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\Delta_k^*\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa), \tag{2.27}$$

и справедливы неравенства

$$\|F;\ M\|_{p,\omega}\leqslant(\varkappa+1)\max_{0\leqslant k\leqslant\varkappa}\{\|F_k;\ \Delta_k^*\|_{p,\omega}\}\leqslant B\|F;\ M\|_{p,\omega}, \tag{2.28}$$

где $B=B(p,\omega)\in(0,+\infty)$ зависит исключительно от p и ω.

Доказательство. Разобьем множество индексов $\{k\}_0^\varkappa$ на два непересекающихся подмножества

$$J_\varkappa=\{k:\ \alpha_k\neq+\infty\},\quad J_\varkappa^*=\{k:\ \alpha_k=+\infty\}.$$

Для каждого $k\in J_\varkappa$ рассмотрим пару интегралов типа Коши

$$\Psi_k^{(\pm)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\vartheta_k\pm\pi/2\alpha_k)}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma\left(\vartheta_k\pm\frac{\pi}{2\alpha_k}\right). \tag{2.29}$$

Поскольку для значений $k\in J_\varkappa$ сужение F на $\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)$ принадлежит $H_p^\omega[\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)]$, то из (2.29), на основании теоремы 1.3, будем иметь

$$\Psi_k^{(-)}(z)-\Psi_k^{(+)}(z)=\begin{cases}F(z), & \text{при } z\in\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k);\\ 0, & \text{при } z\in\Delta^*(\alpha_k;\ \vartheta_k).\end{cases}$$

Следовательно

$$\sum_{k\in J_\varkappa}\{\Psi_k^{(-)}(z)-\Psi_k^{(+)}(z)\}=$$

$$=\begin{cases} F(z), \text{ при } z \in \bigcup_{k\in J_\varkappa} \Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k); \\ 0, \text{ при } z \in \bigcup_{k\in J^*_\varkappa} \Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k) = \bigcup_{k\in J^*_\varkappa} \Gamma(\vartheta_k). \end{cases} \tag{2.30}$$

Далее, для каждого значения $k \in J^*_\varkappa$ рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\vartheta_k)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,\ z \in \mathbf{C}\setminus\Gamma(\vartheta_k). \tag{2.31}$$

По лемме 1.1 Φ_k голоморфна в $\mathbf{C}\setminus\Gamma(\vartheta_k)$ и почти всюду на $\Gamma(\vartheta_k)$ имеет некасательные граничные значения $\Phi_k^{(-)}(\zeta)$ и $\Phi_k^{(+)}(\zeta)$ соответственно слева и справа от луча $\Gamma(\vartheta_k)$. При этом почти всюду на $\Gamma(\vartheta_k)$

$$\Phi_k^{(-)}(\zeta) - \Phi_k^{(+)}(\zeta) = F(\zeta).$$

Следовательно, положив

$$\varphi_k^{(\pm)}(z) = \begin{cases} \Phi_k(z), & z \in \mathbf{C}\setminus\Gamma(\vartheta_k), \\ \Phi_k^{(\pm)}(z), & z \in \Gamma(\vartheta_k), \end{cases}$$

можем написать

$$\sum_{k\in J^*_\varkappa} \{\varphi_k^{(-)}(z) - \varphi_k^{(+)}(z)\} =$$

$$=\begin{cases} F(z), \text{ при } z \in \bigcup_{k\in J^*_\varkappa} \Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k) = \bigcup_{k\in J^*_\varkappa} \Gamma(\vartheta_k), \\ 0, \quad \text{при } z \in \bigcup_{k\in J_\varkappa} \Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k). \end{cases}$$

Отсюда и из (2.30) получаем

$$\sum_{k\in J_\varkappa} \{\Psi_k^{(-)}(z) - \Psi_k^{(+)}(z)\} + \sum_{k\in J^*_\varkappa} \{\varphi_k^{(-)}(z) - \varphi_k^{(+)}(z)\} = F(z),\ z \in M$$

и поскольку $\Gamma(\vartheta_k + \pi/2\alpha_k) \cup \Gamma(\vartheta_{k+1} - \pi/2\alpha_{k+1}) = \partial\Delta_k^*$, то ввиду (2.29) и (2.31) это тождество можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\varkappa} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_k^*} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = F(z),\ z \in M. \tag{2.26$'$}$$

Однако, на каждом луче $\Gamma(\vartheta_k \pm \pi/2\alpha_k)$ функция F или ее граничные значения принадлежат классу $L_p^\omega(\Gamma(\vartheta_k \pm \pi/2\alpha_k))$ (см. 2.24) и теорему 1.3 (1°)), причем нормы на этих лучах не превосходят $\|F;\ M\|_{p,\omega}$. Поэтому, в силу леммы 1.1, при каждом k $(0 \leqslant k \leqslant \varkappa)$ функция $F_k(z)$ из (2.27) принадлежит $H_p^\omega[\Delta_k^*]$ и

$$\|F_k;\ \Delta_k^*\|_{p,\omega} < 2A\,\|F;\ \partial\Delta_k^*\|_{p,\omega} \leqslant 2A\,\|F;\ M\|_{p,\omega}.$$

Отсюда и из (2.26$'$) вытекают формулы представления (2.26)—(2.27) и второе из неравенств (2.28). Первое из этих неравенств следует из (2.25).

Далее, поскольку

$$\bigcap_{k=0}^{\varkappa} \Delta_k^* = \bigcup_{k\in J_\varkappa} \Delta(\alpha_k; \vartheta_k), \quad \bigcap_{k=0}^{\varkappa} \overline{\Delta_k^*} = \overline{M},$$

то функция F, представимая в виде (2.26), голоморфна в областях $\Delta(\alpha_k; \vartheta_k)$, $k\in J_\varkappa$, измерима на лучах $\Gamma(\vartheta_k)$, $k\in J_\varkappa^*$, и, следовательно, ввиду также (2.25) $F\in H_p^\omega[M]$.

Наконец, докажем единственность представления вида (2.26).

Пусть $F_k\in H_p^\omega[\Delta_k^*]$ $(0\leqslant k\leqslant \varkappa)$ и

$$\sum_{k=0}^{\varkappa} F_k(z) = 0, \ z\in M.$$

Тогда, в частности,

$$F_0(\zeta) = -\sum_{k=1}^{\varkappa} F_k(\zeta), \ \zeta\in\partial\Delta_0^*\subset\overline{M}. \tag{2.32}$$

Однако $F_k\in H_p^\omega[\Delta_k^*]$ $(1\leqslant k\leqslant \varkappa)$, и поскольку

$$\Delta_0\subset\bigcap_{k=1}^{\varkappa}\Delta_k^*,$$

то будем также иметь $F_k\in H_p^\omega[\Delta_0]$ $(1\leqslant k\leqslant\varkappa)$, откуда на основании теоремы 1.3 можем написать

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_0^*}\left\{\left[\sum_{k=1}^{\varkappa} F_k(\zeta)\right]/(\zeta-z)\right\}d\zeta=0, \ z\in\Delta_0^*. \tag{2.33}$$

С другой стороны, так как $F_0\in H_p^\omega[\Delta_0^*]$, то по той же теореме 1.3 справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_0^*}\frac{F_0(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = F_0(z), \ z\in\Delta_0^*.$$

Отсюда и из (2.33) в силу (2.32) заключаем, что $F_0(z)\equiv 0$, $z\in\Delta_0^*$.

Аналогично доказывается, что $F_k(z)\equiv 0$, $z\in\Delta_k$ $(1\leqslant k\leqslant\varkappa)$. Теорема доказана.

Отметим, что в специальном случае, когда все $\alpha_k = +\infty$ $(k=0, \ldots, \varkappa)$, и тогда M—это совокупность лучей, доказанная теорема была установлена ранее в работе автора [18].

§ 3. Доказательство теоремы М. М. Джрбашяна

3.1 (а) Докажем сначала следующее утверждение о свойствах обобщенного преобразования Лапласа, которое является распространением на значения параметра $p\in(1, 2]$ леммы 6.2 из монографии [2]. В ее формулировке и при доказательстве мы будем выбирать те ветви функций $(e^{-i\vartheta}\zeta)^{1/\rho}$ и $(e^{-i\vartheta}\zeta)^{\rho}$, которые на луче $\operatorname{Arg}\zeta=\vartheta$ принимают положительные значения.

Лемма 3.1. *Пусть* $1<p\leqslant 2$ *и* $-1<\omega<p-1$. *Если функция* $F(\zeta)\in L_p^{\omega}(\Gamma(-\vartheta))$, *где* $\vartheta\in(-\infty,+\infty)$ *фиксировано, то ее обобщенное преобразование Лапласа*

$$G(\zeta)=\rho\,(e^{-i\vartheta}\zeta)^{\mu\rho}\zeta^{-1}\times$$

$$\times\int_0^{+\infty} e^{-t^{\rho}(e^{-i\vartheta}\zeta)^{\rho}}F(te^{-i\vartheta})\,t^{\mu\rho-1}\,dt,\ \zeta\in\Delta(\rho;\vartheta),\tag{3.1}$$

где

$$\frac{1}{2}\leqslant\rho<+\infty,\ \mu=\frac{1+\omega+(p-1)\rho}{p\rho}\tag{3.2}$$

обладает следующими свойствами:

1°. $G(\zeta)$ *голоморфна в* $\Delta(\rho;\vartheta)$ *и принадлежит классу* $H_q^{\omega(1-q)}\times\times[\Delta(\rho;\vartheta)]$, *где* $1/p+1/q=1$, *причем*

$$(\rho/2\pi)^{1/q}\|G;\Delta(\rho;\vartheta)\|_{q,\omega(1-q)}\leqslant(\rho/\sqrt{2\pi})^{1/p}\|F;\Gamma(-\vartheta)\|_{p,\omega};\tag{3.3}$$

2°. *Почти всюду на границе* $\partial\Delta(\rho;\vartheta)$ *области* $\Delta(\rho;\vartheta)$ *граничные значения функции* G *представимы в виде*

$$G(e^{i(\vartheta\pm\pi/2\rho)}\tau^{1/\rho})=$$

$$=e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu}e^{-i(\vartheta\pm\pi/2\rho)}\tau^{\mu-1/\rho}\,\Phi(\pm\tau),\ \tau\in(0,+\infty),\tag{3.4}$$

причем почти всюду на полуоси $(0,+\infty)$

$$\Phi(\tau)=\frac{d}{d\tau}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}F(t^{1/\rho}e^{-i\vartheta})\,t^{\mu-1}\,dt;\tag{3.5}$$

3°. *Формулы* (3.4)—(3.5) *могут быть записаны также в виде*

$$G(e^{i(\vartheta\pm\pi/2\rho)}r)=\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\rho\,e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu}e^{-i(\vartheta\pm\pi/2\rho)}r^{\mu\rho-1}\times$$

$$\times\int_0^{\sigma}e^{\mp ix^{\rho}r^{\rho}}F(xe^{-i\vartheta})\,x^{\mu\rho-1}\,dx,\tag{3.6}$$

где пределы в среднем берутся по метрике $L_q^{\omega(1-q)}(0,+\infty)$.

Доказательство. Произведя под знаком интеграла (3.1) замену переменной $t^{\rho}=\tau$, получим

$$G(\zeta)=(e^{-i\vartheta}\zeta)^{\mu\rho}\zeta^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-\tau(e^{-i\vartheta}\zeta)^{\rho}}F(\tau^{1/\rho}e^{-i\vartheta})\,\tau^{\mu-1}\,d\tau.\tag{3.7}$$

Следовательно, вводя новую переменную $w=(e^{-i\vartheta}\zeta)^{\rho}$, $\zeta\in\Delta(\rho;\vartheta)$ (тогда $\mathrm{Re}\,w>0$) и функции

$$g(w)=e^{i\vartheta}w^{1/\rho-\mu}\,G(e^{i\vartheta}w^{1/\rho}),\ \mathrm{Re}\,w>0,\tag{3.8}$$

$$f(\tau)=F(\tau^{1/\rho}e^{-i\vartheta})\,\tau^{\mu-1},\ \tau\in(0,+\infty), \tag{3.9}$$

можем написать

$$g(w)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau w} f(\tau)\,d\tau,\ \mathrm{Re}\, w>0. \tag{3.10}$$

При этом выбираются главные ветви функций $w^{1/\rho-\mu}$ и $w^{1/\rho}$. Отметим еще, что ввиду (3.9)

$$\left\{\int\limits_0^{+\infty} |f(\tau)|^p\,d\tau\right\}^{1/p}=\left\{\rho\int\limits_0^{+\infty} |F(te^{-i\vartheta})|^p\,t^{\omega}\,dt\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{3.11}$$

Подставляя в формулу (3.10) $w=x+iy$ и записав ее в виде

$$g(x+iy)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-i\tau y}e^{-\tau x} f(\tau)\,d\tau,\ x>0, \tag{3.12}$$

на основании теоремы Е. Титчмарша о преобразовании Фурье в классах L_p (см. [12], стр. 128), получим

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x+iy)|^q\,dy\right\}^{1/q}\leqslant\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau x}\,|f(\tau)|^p\,d\tau\right\}^{1/p},\ x>0.$$

Отсюда, в силу (3.11)

$$\sup_{0<x<+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x+iy)|^q\,dy\right\}^{1/q}\leqslant\left\{\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} |F(te^{-i\vartheta})|^p\,t^{\omega}\,dt\right\}^{1/p}, \tag{3.13}$$

а это означает, что в полуплоскости $\mathrm{Re}\, w>0$ $g\in H_q$. Значит почти всюду на мнимой оси функция g имеет некасательные граничные значения $g(it)\in L_q(-\infty,+\infty)$, причем

$$\lim_{x\to+0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x+it)-g(it)|^q\,dt=0$$

(см., напр., [11], гл. VIII). Следовательно

$$\lim_{x\to+0}\int\limits_0^{y} g(x+it)\,dt=\int\limits_0^{y} g(it)\,dt,\ y\in(-\infty,+\infty). \tag{3.14}$$

С другой стороны, при каждом фиксированном $y\in(-\infty,+\infty)$ и при всех $x>0$, ввиду (3.11),

$$\left|\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}\,e^{-x\tau} f(\tau)\right|\leqslant\left|\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}\,f(\tau)\right|\in L_1(0,+\infty),$$

и на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{x\to+0}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}e^{-\tau x}f(\tau)\,d\tau=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}f(\tau)\,d\tau, \tag{3.15}$$
$$y\in(-\infty,+\infty).$$

Однако, ввиду (3.12) при любом $x>0$ справедлива также формула

$$\int_0^y g(x+it)\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}e^{-\tau x}f(\tau)\,d\tau,\ y\in(-\infty,+\infty).$$

Переходя здесь к пределу при $x\to+0$ и учитывая (3.14) и (3.15), получим формулу

$$\int_0^y g(it)\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}f(\tau)\,d\tau,\ y\in(-\infty,+\infty),$$

и, следовательно, почти всюду

$$g(iy)=\frac{d}{dy}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}f(\tau)\,d\tau,\ y\in(-\infty,+\infty). \tag{3.16}$$

Возвратимся теперь к функции G. Отметим сначала, что ввиду соотношения (3.8) и голоморфности $g(w)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} w>0$ вытекает голоморфность функции $G(\zeta)$ в $\Delta(\rho;\vartheta)$.

Далее, в силу неравенств

$$\sup_{|\alpha|<\pi/2}\left\{\int_0^{+\infty}|g(re^{i\alpha})|^q\,dr\right\}^{1/q}\leqslant\sup_{0<x<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+iy)|^q\,dy\right\}^{1/q}$$

(см. теорему 1.2) и (3.13) будем иметь также неравенство

$$\sup_{|\alpha|<\pi/2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}|g(re^{i\alpha})|^q\,dr\right\}^{1/q}\leqslant\left(\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/p}\|F;\Gamma(-\vartheta)\|_{p,\omega}.$$

Из этой оценки и из соотношения (3.8) следует, что

$$\sup_{|\varphi-\vartheta|<\frac{\pi}{2\rho}}\left\{\frac{\rho}{2\pi}\int_0^{+\infty}|G(\tau e^{i\varphi})|^q\,\tau^{\omega(1-q)}\,d\tau\right\}^{1/q}\leqslant\left(\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/p}\|F;\Gamma(-\vartheta)\|_{p,\omega},$$

и утверждение 1° теоремы доказано. Чтобы доказать утверждение 2°, заметим, что опять же в силу соотношения (3.8) для почти всех $\tau\in(0,+\infty)$

$$g(\pm i\tau)=e^{i\vartheta\pm i\frac{\pi}{2\rho}(1-\mu\rho)}\,\tau^{1/\rho-\mu}\,G\left(e^{i(\vartheta\pm\pi/2\rho)}\tau^{1/\rho}\right).$$

Поэтому согласно (3.16) для почти всех $\tau\in(0,+\infty)$

$$e^{i\vartheta\pm\frac{\pi}{2\rho}(1-\mu\rho)}\,\tau^{1/\rho-\mu}\,G\left(e^{i(\vartheta\pm\pi/2\rho)}\tau^{1/\rho}\right)=\frac{d}{d\tau}\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mp it\tau}-1}{\mp it}f(t)\,dt.$$

На основании (3.9), заменив здесь $f(t)$ на $F(t^{1/\rho}e^{-i\theta})t^{\mu-1}$, придем к формулам (3.4)—(3.5).

Наконец, докажем утверждение 3°. Производя замены переменных $r=\tau^{1/\rho}$ и $x=t^{1/\rho}$, с учетом формул (3.4) и (3.5) получим

$$\int_0^{+\infty}\Big|G\left(e^{i(\theta\pm\pi/2\rho)}r\right)-$$

$$-\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu}e^{-i\left(\theta\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)}r^{\mu\rho-1}\int_0^{\sigma}e^{\mp ix^\rho r^\rho}F(xe^{-i\theta})x^{\mu\rho-1}dx\Big|^q r^{\omega(1-q)}dr=$$

$$=\frac{1}{\rho}\int_0^{+\infty}\Big|\Phi(\pm\tau)-\int_0^{\sigma^\rho}e^{\mp i\tau t}F(t^{1/\rho}e^{-i\theta})t^{\mu-1}dt\Big|^q d\tau,$$

Отсюда и следует (3.6), так как в силу (3.9) и (3.16) и процитированной выше теоремы Е. Титчмарша ([12], стр. 128), последний интеграл стремится к нулю при $\sigma\to+\infty$.

(б) Докажем следующую лемму, которая является распространением на значения параметра $p\in(1, 2]$ леммы 7.5 из монографии [2].

Лемма 3.2. *Пусть* $1/2<\rho<+\infty$, $1<p\leqslant 2$ *и* $-1<\omega<p-1$. *Тогда при каждом фиксированном* $z\in\Delta^*(\rho;\,-\theta)$

$$(xe^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}-z)^{-1}=\underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \rho e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu}e^{-i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\times$$

$$\times x^{\mu\rho-1}\int_0^a e^{\mp ix^\rho r^\rho}E_\rho(e^{i\theta}zr;\,\mu)\,r^{\mu\rho-1}dr, \tag{3.17}$$

где $\mu=\dfrac{1+\omega+(p-1)\rho}{p\rho}$, *а пределы в среднем берутся по метрике пространства* $L_q^{\omega(1-q)}(0,+\infty)$, $1/p+1/q=1$.

Доказательство. Справедливо следующее важное представление ядра Коши, вытекающее из общей формулы М. М. Джрбашяна ([2], стр. 149)

$$\frac{1}{\zeta-z}=(e^{i\theta}\zeta)^{\mu\rho}\zeta^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-t(e^{i\theta}\zeta)^\rho}E_\rho(e^{i\theta}zt^{1/\rho};\,\mu)\,t^{\mu-1}dt, \tag{3.18}$$

которое после замены переменной $t=r^\rho$ можно записать в виде

$$\frac{1}{\zeta-z}=\rho(e^{i\theta}\zeta)^{\mu\rho}\zeta^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-(e^{i\theta}\zeta)^\rho r^\rho}E_\rho(e^{i\theta}zr;\,\mu)\,r^{\mu\rho-1}dr, \tag{3.18'}$$

$$\zeta\in\Delta(\rho;\,-\theta),\quad z\in\Delta^*(\rho;\,-\theta).$$

С другой стороны, из асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\,\mu)$ следует, что

$$|E_\rho(e^{i\theta}zr;\ \mu)| \leqslant M(z)/(1+|z|\,r);\quad z\in\Delta^*(\rho;\ -\theta),\quad r>0, \tag{3.19}$$

где $M(z)\in(0,+\infty)$ не зависит от r (см. [2], стр. 136). Следовательно, $E_\rho(e^{i\theta}zr;\ \mu)$ как функция от r принадлежит классу $L_p^\omega(0,+\infty)$. Отсюда и из (3.18′) на основании леммы 3.1 и формул (3.6) получаем (3.17). Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть $f(z)$ — целая функция роста $(\rho;\ \sigma)$, где $1/2<\rho<+\infty$ и $0\leqslant\sigma<+\infty$. Пусть, далее, при некотором $\theta\in(-\infty,+\infty)$ на границе $\partial\Delta^*(\rho;\ -\theta)$ области $\Delta^*(\rho;\ -\theta)$ функция $f(z)$ принадлежит классу $L_p^\omega(\partial\Delta^*(\rho;\ -\theta))$, где $1<p\leqslant 2$ и $-1<\omega<p-1$. Тогда для интеграла типа Коши*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta^*(\rho;\ -\theta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in\Delta^*(\rho;\ -\theta), \tag{3.20}$$

справедливы следующие утверждения:

1°. *Если порядок $\tilde\rho$ функции $f(z)$ равен ρ, а в точке $-\theta$ ее индикатриса $h(-\theta;\ f)\leqslant\tilde\sigma$ $(0\leqslant\tilde\sigma\leqslant\sigma)$, то $F(z)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость до целой функци роста $(\rho;\ \tilde\sigma)$ и допускает представление*

$$F(z)=\int\limits_0^{\tilde\sigma}E_\rho(e^{i\theta}z\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\varphi(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau, \tag{3.21}$$

где $\mu=\dfrac{1+\omega+(p-1)\rho}{p\rho}$ *и* $\varphi(\tau)\in L_q(0,\tilde\sigma)\ (1/p+1/q=1)$. *Функция* $\varphi(\tau)$ *единственным образом почти всюду определяется из формул*

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi}\,\rho}\left[e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi^{(-)}(-\tau)-e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi^{(+)}(\tau)\right]=\begin{cases}\varphi(\tau), & \tau\in(0,\tilde\sigma),\\ 0, & \tau\in(\tilde\sigma,+\infty),\end{cases} \tag{3.22}$$

где почти всюду на полуоси $(0,+\infty)$

$$\Phi^{(\pm)}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}f\left(t^{1/\rho}e^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\right)t^{\mu\rho-1}\,dt; \tag{3.22′}$$

2°. *Если порядок $\tilde\rho$ функции $f(z)$ меньше ρ, то $F(z)\equiv 0$.*

Доказательство. Образуем функции

$$G^{(\pm)}(\zeta)=\rho\left(e^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\zeta\right)^{\mu\rho}\zeta^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^\rho(e^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\zeta)^\rho}f\left(te^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\right)t^{\mu\rho-1}\,dt, \tag{3.23}$$

принадлежащие в силу леммы 3.1 классам $H_q^{\omega(1-q)}[\Delta(\rho;\ \theta-\pi/2\rho)]$ и $H_q^{\omega(1-q)}[\Delta(\rho;\ \theta+\pi/2\rho)]$ соответственно, и заметим, что луч $\operatorname{Arg}\zeta=\theta$

является пересечением границ угловых областей $\Delta(\rho;\ \theta-\pi/2\rho)$ и $\Delta(\rho;\ \theta+\pi/2\rho)$. По той же лемме 3.1 на этом луче $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$ имеют граничные функции $G^{(\pm)}(re^{i\theta})\in L_q^{\omega(1-q)}(0,+\infty)$, причем

$$e^{i\theta}G^{(\pm)}(e^{i\theta}\tau^{1/\rho})\,\tau^{1/\rho-\mu}=e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu}\,\Phi_1^{(\pm)}(\pm\tau),\ \tau\in(0,+\infty),\tag{3.24}$$

где почти всюду на полуоси $(0,+\infty)$

$$\Phi_1^{(\pm)}(\tau)=\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}\,f\left(t^{1/\rho}e^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\right)t^{\mu-1}\,dt.\tag{3.25}$$

Более того, формулы (3.24)—(3.25) могут быть записаны также в виде

$$e^{i\theta}G^{(\pm)}(re^{i\theta})=\underset{A\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \rho\,e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu}\,r^{\mu\rho-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^A e^{\mp ix^\rho r^\rho}f\left(xe^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\right)x^{\mu\rho-1}\,dx,\tag{3.26}$$

где пределы в среднем берутся по метрике пространства $L_q^{\omega(1-q)}(0,+\infty)$.

С другой стороны, в силу теоремы 6.5 из монографии [2] и определения (3.23) функций $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$, они в угловых областях $\Delta(\rho;\ \theta-\pi/2\rho)$ и $\Delta(\rho;\ \theta+\pi/2\rho)$ соответственно совпадают с обобщенным преобразованием Бореля $g_{\rho,\mu}(\zeta;f)$ функции $f(z)$. По той же теореме 6.5 из [2], если порядок $\tilde{\rho}$ функции $f(z)$ равен ρ и $h(-\theta;f)\leqslant\tilde{\sigma}$, то $g_{\rho,\mu}(\zeta;f)$ голоморфна на луче $re^{i\theta}$: $r>\tilde{\sigma}^{1/\rho}$; а если $\tilde{\rho}<\rho$, то $g_{\rho,\mu}(\zeta;f)$ голоморфна во всей плоскости, за исключением точки $\zeta=0$.

Из сказанного заключаем, что

$$G^{(+)}(re^{i\theta})-G^{(-)}(re^{i\theta})=\begin{cases}0,\ r\in(\tilde{\sigma}^{1/\rho},+\infty), & \text{при}\ \tilde{\rho}=\rho;\\ 0,\ r\in(0,+\infty), & \text{при}\ \tilde{\rho}<\rho.\end{cases}\tag{3.27}$$

Положим теперь

$$J^{(\pm)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}E_\rho(e^{i\theta}zr;\mu)\,e^{i\theta}G^{(\pm)}(re^{i\theta})\,dr\tag{3.28}$$

и отметим, что в силу оценки (3.19) и принадлежности $G^{(\pm)}(re^{i\theta})\in L_q^{\omega(1-q)}(0,+\infty)$ эти интегралы абсолютно сходятся при $z\in\Delta^*(\rho;-\theta)$.

Следовательно, для таких z

$$J^{(\pm)}(z)=\lim_{a\to+\infty}J_a^{(\pm)}(z),\tag{3.29}$$

где

$$J_a^{(\pm)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^a E_\rho(e^{i\theta}zr;\mu)\,e^{i\theta}G^{(\pm)}(re^{i\theta})\,dr.\tag{3.30}$$

Но поскольку при $z \in \Delta^* (\rho; -\theta)$ фиксированном $E_\rho (e^{i\theta} zr; \mu) \in L_\rho^\infty (0, +\infty)$, то в силу (3.26) и (3.30), можем написать

$$J_a^{(\pm)}(z) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^a E_\rho (e^{i\theta} zr; \mu) \times$$

$$\times \left\{ \rho e^{\pm i \frac{\pi}{2}\mu} r^{\mu\rho - 1} \int_0^A e^{\mp i x^\rho r^\rho} f(xe^{i(-\theta \pm \pi/2\rho)}) x^{\mu\rho - 1} dx \right\} dr =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^A f(xe^{i(-\theta \pm \pi/2\rho)}) e^{i(-\theta \pm \pi/2\rho)} \times$$

$$\times \left\{ \rho e^{\pm i \frac{\pi}{2}\mu} e^{-i(-\theta \pm \pi/2\rho)} x^{\mu\rho - 1} \int_0^a e^{\mp i x^\rho r^\rho} E_\rho (e^{i\theta} zr; \mu) r^{\mu\rho - 1} dr \right\} dx,$$

причем перемена порядков интегрирования допустима на основании теоремы Фубини. В пределе при $A \to +\infty$ с учетом (3.29) получим

$$J^{(\pm)}(z) = \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} f(xe^{i(-\theta \pm \pi/2\rho)}) e^{i(-\theta \pm \pi/2\rho)} \times$$

$$\times \left\{ \rho e^{\pm i \frac{\pi}{2}\mu} e^{-i(-\theta \pm \pi/2\rho)} x^{\mu\rho - 1} \int_0^a e^{\mp i x^\rho r^\rho} E_\rho (e^{i\theta} zr; \mu) r^{\mu\rho - 1} dr \right\} dx.$$

Наконец, поскольку по условию теоремы $f(xe^{i(-\theta \pm \pi/2\rho)}) \in L_\rho^\infty (0, +\infty)$, то в силу леммы 3.2 в последнем равенстве можно перейти к пределу. Придем к формулам

$$J^{(\pm)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(xe^{i(-\theta \pm \pi/2\rho)})}{x \exp[i(-\theta \pm \pi/2\rho)] - z} \, dxe^{i(-\theta \pm \pi/2\rho)}.$$

Следовательно, ввиду определения (3.20) функции $F(z)$ можем написать

$$F(z) = J^{(+)}(z) - J^{(-)}(z), \quad z \in \Delta^* (\rho; -\theta).$$

Отсюда на основании (3.27) и (3.28) получаем утверждение 2° теоремы.

С другой стороны, при $\tilde{\rho} = \rho$, опять в силу (3.27) и (3.28), можем написать

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\tilde{\sigma}^{1/\rho}} E_\rho (e^{i\theta} zr; \mu) e^{i\theta} \{G^{(+)}(re^{i\theta}) - G^{(-)}(re^{i\theta})\} dr. \qquad (3.21')$$

Произведя под знаком интеграла замену переменной $r^\rho = \tau$ и обозначив

$$\varphi(\tau)=\frac{1}{2\pi\rho i}e^{i\theta}\left[G^{(+)}(\tau^{1/\rho}e^{i\theta})-G^{(-)}(\tau^{1/\rho}e^{i\theta})\right]\tau^{1/\rho-\mu},$$

придем к представлению (3.21) (пока в области $\Delta^*(\rho;\ -\theta)$) и в силу (3.24)—(3.25), а также (3.27)—к формулам обращения (3.22)—(3.22′).

Далее, из очевидной оценки

$$\left|\int_0^{\tilde\sigma}E_\rho(e^{i\theta}z\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\varphi(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\right|\leqslant CE_\rho(|z|\,\tilde\sigma^{1/\rho};\ \mu)$$

и из того факта, что $E_\rho(z\,\tilde\sigma^{1/\rho};\ \mu)$—целая функция порядка ρ и типа $\tilde\sigma$ (см. [2], стр. 321), заключаем, что интеграл, стоящий в правой части представления (3.21), является целой функцией роста $(\rho;\ \tilde\sigma)$. Следовательно, функция $F(z)$, представимая в области $\Delta^*(\rho;\ -\theta)$ формулой (3.21), аналитически продолжается на всю плоскость до целой функции роста $(\rho;\ \tilde\sigma)$.

Наконец, чтобы доказать единственность функции $\varphi(\tau)$ и этим завершить доказательство теоремы, предположим, что $\varphi(\tau)\in L_q(0,\ \tilde\sigma)$ и

$$\int_0^{\tilde\sigma}E_\rho(e^{i\theta}z\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\varphi(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\equiv 0.$$

Тогда, в частности, при $z=xe^{i(\theta+\pi)}$ будем иметь

$$\int_0^{\tilde\sigma}E_\rho(-x\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\varphi(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau=0,\ x>0.$$

Производя здесь замену переменной $\tau=r^\rho$ и положив

$$\Psi(r)=\begin{cases}\varphi(r^\rho)\,r^{\mu\rho-1}, & r\in(0,\ \tilde\sigma^{1/\rho}),\\ 0,\ r\in(\tilde\sigma^{1/\rho},\ +\infty),\end{cases}$$

можем написать

$$\int_0^{+\infty}E_\rho(-xr;\ \mu)\,\Psi(r)\,dr=0,\ x>0,$$

причем $\Psi(r)\in L_q^{\omega(1-q)}(0,\ +\infty)$, так как $\varphi(\tau)\in L_q(0,\ \tilde\sigma)$. Отсюда, воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{R+r}=\rho R^{\mu\rho-1}\int_0^{+\infty}e^{-R^\rho x^\rho}E_\rho(-xr;\ \mu)\,x^{\mu\rho-1}\,dx\ (R>0,\ r>0),$$

которая вытекает из (3.18′) при $\zeta=Re^{-i\theta}$ и $z=re^{i(-\theta+\pi)}$, и на основании теоремы Фубини, меняя порядки интегрирования, получим

$$\int_0^{+\infty}\frac{\Psi(r)}{R+r}dr=\rho R^{\mu\rho-1}\int_0^{+\infty}\Psi(r)\int_0^{+\infty}e^{-R^\rho x^\rho}E_\rho(-xr;\mu)\,x^{\mu\rho-1}\,dxdr=$$

$$=\rho R^{\mu\rho-1}\int_0^{+\infty}e^{-R^\rho x^\rho}x^{\mu\rho-1}\int_0^{+\infty}E_\rho(-xr;\mu)\,\Psi(r)\,drdx=0,\ R>0.$$

Таким образом, функция

$$G(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{\Psi(r)}{r-w}\,dr,\ w\in\mathbf{C}\setminus[0,+\infty),$$

голоморфная в области $\mathbf{C}\setminus[0,+\infty)$, обращается в нуль на отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$ и, следовательно, $G(w)\equiv 0$. Отсюда, на основании леммы 2.1, заключаем, что $\Psi(r)$, а вместе с ней и $\varphi(\tau)$, эквивалентны нулю. Теорема доказана.

Отметим, не останавливаясь однако на доказательстве, что если в представлении (3.21) функция $\varphi(\tau)$ не эквивалентна нулю, то порядок функции $F(z)$ будет равен ρ.

3.2. Перейдем к установлению теоремы 0.1′, придерживаясь приведенных во введении определений и обозначений. При этом случаи $\rho>1/2$ и $\rho=1/2$ рассмотрим отдельно.

Пусть $1/2<\rho<+\infty$. Тогда ввиду (0.1) $\varkappa\geq 1$.

Пусть $f\in W^{\rho,\infty}_{\rho,\sigma}(\{\vartheta_k\};\{\sigma_k\})$. Полагая $\bar{a}_k=+\infty$ и $\tilde{\vartheta}_k=-\vartheta_k$ $(k=0,\cdots,\varkappa)$, на основании условий (0.16) можем утверждать, что $f\in H^*_\rho[M]$, где $M=M\{\bar{a};\tilde{\vartheta}\}$—это совокупность лучей $\Gamma(\tilde{\vartheta}_k)=\Gamma(-\vartheta_k)$ $(k=0,\cdots,\varkappa)$, исходящих из начала координат. Следовательно, по теореме 2.2 функция f на множестве M представима в виде

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\varkappa}F_k(z),\ z\in M, \tag{3.31}$$

где

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_k^*}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\Delta_k^*\ (k=0,\cdots,\varkappa).$$

При этом $\Delta_k^*=\mathbf{C}\setminus\bar{\Delta}_k$ и

$$\Delta_k=\{z:\ -\vartheta_{k+1}<\operatorname{Arg}z<-\vartheta_k,\ 0<|z|<+\infty\}\ (k=0,\cdots,\varkappa).$$

Если компонента F_k соответствует паре вида $(\vartheta_{s_k};\ \vartheta_{s_k+1})$, то в силу условия (0.6) раствор соответствующей угловой области Δ_k равен $\vartheta_{s_k+1}-\vartheta_{s_k}=\pi/\rho_{s_k}<\pi/\rho$, тогда как порядок функции f равен $\rho<\rho_{s_k}$. Следовательно, по теореме 3.1 (2°), такая компонента $F_k(z)\equiv 0$.

Если же компонента F_k соответствует паре вида $(\vartheta_{r_k};\ \vartheta_{r_k+1})$, то раствор соответствующего угла Δ_k равен $\vartheta_{r_k+1}-\vartheta_{r_k}=\pi/\rho$. Следовательно, учитывая еще (0.9) и применив теорему 3.1 (1°), получим, что такая компонента представима в виде

$$F_k(z) = \int_0^{\sigma_k} E_\rho(e^{i\theta_k} z\tau^{1/\rho}; \mu)\, \varphi_k(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau$$

и является целой функцией роста $(\rho;\ \sigma_k)$. При этом функция $\varphi_k(\tau)$ принадлежит классу $L_q(0,\ \sigma_k)$ и определяется из формул (0.12)—(0.13).

Учитывая сказанное и подставляя полученные выражения для компонент в (3.31), получим, что представление (0.11) справедливо на множестве M. И поскольку в обеих частях этой формулы стоят целые функции, то она справедлива на всей комплексной плоскости.

Таким образом, в случае $\rho > 1/2$ теорема 0.1′ доказана. В частности, когда $\rho=1$, $\varkappa=1$, $\vartheta_0=0$, $\vartheta_1=\pi$ и $\sigma_0=\sigma_1$, получим следующее утверждение.

Пусть $F(z)$—целая функция порядка $\rho=1$ и нормального типа, удовлетворяющая условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^p |x|^{\omega_0}\, dx < +\infty \quad (1 < p \leqslant 2,\ -1 < \omega_0 < p-1), \tag{3.32}$$

$$\overline{\lim_{|y|\to+\infty}} \frac{\log|F(iy)|}{|y|} \leqslant \sigma_0. \tag{3.33}$$

Тогда функция $F(z)$ представима в виде

$$F(z) = \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} E_1(iz\tau;\ \mu_0)\, \varphi_0(\tau)\, |\tau|^{\mu_0-1}\, d\tau, \tag{3.34}$$

где $\mu_0 = \dfrac{\omega_0+p}{p}$ *и функция* $\varphi_0(\tau) \in L_q(0,\ \sigma_0)(1/p+1/q=1)$ *почти всюду определяется из формул*

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tau x}-1}{-ix} F(x)\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x}|x|\right)^{\mu_0-1} dx = \begin{cases} \varphi_0(\tau), & \tau\in(0,\ \sigma_0), \\ 0, & \tau\in(\sigma_0,\ +\infty); \end{cases} \\ \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tau x}-1}{-ix} F(-x)\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x}|x|\right)^{\mu_0-1} dx = \begin{cases} \varphi_0(-\tau), & \tau\in(0,\ \sigma_0), \\ 0, & \tau\in(\sigma_0,\ +\infty). \end{cases}\end{gathered} \tag{3.35}$$

Перейдем к доказательству теоремы 0.1′ в случае $\rho=1/2$.

Пусть $\rho=1/2$ *и* $\varkappa=0$. При этом без ограничения общности можем полагать $\vartheta_0=0$.

Итак, пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho=1/2$ и нормального типа, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|^p t^{\omega}\, dt < +\infty, \quad \overline{\lim_{t\to-\infty}} \frac{\log|f(t)|}{t} \leqslant \sigma_0. \tag{3.36}$$

Нужно доказать, что функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=\int_0^{\sigma_0} E_{1/2}(-z\tau^2;\ \mu)\,\varphi(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau, \tag{3.37}$$

где $\mu=\dfrac{2\omega+p+1}{p}$ и $\varphi(\tau)\in L_q(0,\sigma_0)$ почти всюду определяется из формулы

$$\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-it\tau}-1}{-it}f(t^2)\,(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} t}|t|)^{\mu-1}\,dt=\begin{cases}\varphi(\tau), & \tau\in(0,\sigma_0),\\ 0, & \tau\in(\sigma_0,+\infty)\end{cases} \tag{3.38}$$

(в рассматриваемом нами случае эта формула тождественна формулам (0.12) — (0.13)).

Рассмотрим отдельно три случая: 1) $-1<\omega<\frac{p}{2}-1$, 2) $\frac{p}{2}-1<\omega<p-1$, 3) $\omega=\frac{p}{2}-1$.

1-й случай $-1<\omega<\frac{p}{2}-1$. Вводя функцию $F(z)=f(z^2)$, без труда убеждаемся, что $F(z)$—целая функция порядка $\rho=1$ и нормального типа, удовлетворяющая условиям (3.32) и (3.33), где $\omega_0=2\omega+1$ (тогда $-1<\omega_0<p-1$, ввиду наложенных на ω условий $-1<\omega<\frac{p}{2}-1$). Следовательно, F представима в виде (3.34), причем нетрудно подсчитать, что $\mu_0=\mu$. Кроме того, ввиду четности функции $F(z)$, из (3.35) следует, что тогда $\varphi_0(\tau)$—также четная функция. Поэтому представление (3.34) можно переписать в виде

$$F(z)=\int_0^{\sigma_0}[E_1(iz\tau;\ \mu)+E_1(-iz\tau;\ \mu)]\,\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau. \tag{3.39}$$

Воспользовавшись формулой

$$2E_{1/2}(w^2;\ \mu)=E_1(w;\ \mu)+E_1(-w;\ \mu)$$

(см. [2], стр. 356, формулу (3.49)) и обозначив $\varphi(\tau)=2\varphi_0(\tau)$, с учетом тождества $F(z)=f(z^2)$ и (3.39), получим для $f(z)$ формулу представления (3.37). Формула (3.38) вытекает из первой из формул (3.35) после замены $F(x)$ на $f(x^2)$ и $2\varphi_0(\tau)$ на $\varphi(\tau)$.

2-й случай $\frac{p}{2}-1<\omega<p-1$. В этом случае вводим функцию $F(z)=zf(z^2)$ и опять убеждаемся, что $F(z)$— целая функция порядка $\rho=1$ и нормального типа. При этом $F(z)$ удовлетворяет условиям (3.32) и (3.33) с $\omega_0=2\omega-p+1$ (тогда $-1<\omega_0<p-1$ в силу условий $\frac{p}{2}-1<\omega<p-1$). Следовательно, $F(z)$ представима в виде (3.34), причем легко подсчитать, что $\mu_0=\mu-1$. Кроме того, из нечет-

ности функции $F(z)$ и формулы (3.35) следует, что $\varphi_0(\tau)$—нечетная функция. Поэтому (3.34) можно записать следующим образом:

$$F(z)=\int_0^{\sigma_0}\{E_1(iz\tau;\ \mu-1)-E_1(-iz\tau;\ \mu-1)\}\ \varphi_0(\tau)\ \tau^{\mu-2}\,d\tau.$$

Отсюда с учетом формулы

$$2wE_{1/2}(w^2;\ \mu+1)=E_1(w;\ \mu)-E_1(-w;\ \mu)$$

(см. [2], стр. 356, формулу (3.49)), обозначив $\varphi(\tau)=2i\varphi_0(\tau)$, получим

$$zf(z^2)=z\int_0^{\sigma_0}E_{1/2}(-z^2\tau^2;\ \mu)\ \varphi(\tau)\ \tau^{\mu-1}\,d\tau,$$

что, очевидно, эквивалентно формуле (3.37). Формула (3.38) следует из первой из формул (3.35), если в ней заменить $F(x)$ на $xf(x^2)$, μ_0 на $\mu-1$ и $2i\varphi_0(\tau)$ на $\varphi(\tau)$.

3-й случай $\omega=\frac{p}{2}-1$. Выберем $\omega_1\in\left(-\frac{1}{2},\frac{p}{2}-1\right)$ и положим $\mu_\omega=\mu=\frac{2\omega+1+p}{p}$, $\omega\in\left[\omega_1,\ \frac{p}{2}-1\right]$ (тогда $\mu_\omega>1$).

Нетрудно видеть, что при $\omega_1\leqslant\omega<\frac{p}{2}-1$ функция $f(z)$ удовлетворяет условиям (3.36), и ввиду уже доказанного для нее справедливы формулы (3.37)—(3.38) с $\mu=\mu_\omega$, $\omega_1\leqslant\omega<\frac{p}{2}-1$.

Положив для значений $\tau\in(0,\ \infty)$

$$\varphi_\omega(\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}f(t^2)\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}t}|t|\right)^{\mu_\omega-1}dt,\tag{3.40}$$

покажем, что

$$\lim_{\omega\to\frac{p}{2}-1}\int_0^{+\infty}|\varphi_\omega(\tau)-\varphi_{\frac{p}{2}-1}(\tau)|^q\,d\tau=0.\tag{3.41}$$

С этой целью введем функцию

$$\Psi(t)=\begin{cases}|f(t^2)|\,|t|^{\mu_{\omega_1}-1}, & \text{при } |t|\leqslant1,\\ |f(t^2)|\,|t|^{\mu_{p/2-1}}\ \text{при}\ |t|>1,\end{cases}$$

и заметим, что $\Psi(t)\in L_p(-\infty,+\infty)$, причем при $\omega\in\left[\omega_1,\ \frac{p}{2}-1\right]$

$$\left|f(t^2)\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}t}|t|\right)^{\mu_\omega-1}\right|\leqslant\Psi(t),\ t\in(-\infty,+\infty).$$

Отсюда на основании теоремы Лебега (см., напр., [19], стр. 168) следует, что

$$\lim_{\omega\to\frac{p}{2}-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t^2)\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} t}|t|\right)^{\mu_\omega-1}-f(t^2)\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} t}|t|\right)^{\mu_{p/2-1}-1}\right|^p dt=0. \quad (3.42)$$

Из этого предельного равечства и из теоремы Е. Титчмарша ([12], стр. 128) вытекает (3.41).

С другой стороны, из самого определения функции $E_{1/2}(z;\mu)$ и асимптотических свойств гамма-функции следует, что $E_{1/2}(z;\mu)$ непрерывна по обеим переменным $z\in C$ и $\mu\in(-\infty,+\infty)$. Следовательно, при любом фиксированном $z\in C$ функция $E_{1/2}(-z\tau^2;\mu_\omega)\,\tau^{\mu_\omega-1}$ непрерывна и ограничена при $\tau\in[0,\sigma_0]$ и $\omega\in\left[\omega_1;\frac{p}{2}-1\right]$. Учитывая это и (3.41), можем в (3.37)—(3.38) перейти к пределу. Следовательно, эти формулы верны и при $\omega=\frac{p}{2}-1$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 0.1′, осталось показать, что если $f(z)$—целая функция порядка $\rho=1/2$ и нормального типа, то она не может более, чем для одного значения ϑ удовлетворять условию (0.10). Предположим противное, что для значений $-\pi<\vartheta_0<\vartheta_1<\pi$

$$\int\limits_0^{+\infty}|f(te^{-i\vartheta_k})|^p\,t^\omega\,dt<+\infty \quad (k=0,1). \quad (3.43)$$

Тогда, рассматривая опять при $-1<\omega<\frac{p}{2}-1$ $(\omega_0=2\omega+1)$ функцию $F(z)=f(z^2)$, придем к выводу, что $F(z)$— целая функция порядка $\rho=1$ и нормального типа, удовлетворяющая условиям

$$\int\limits_0^{+\infty}|F(xe^{-i\tilde{\vartheta}_k})|^p\,x^{\omega_0}\,dx<+\infty \quad (k=0,1,2,3),$$

где $\tilde{\vartheta}_0=\frac{\vartheta_0}{2}$, $\tilde{\vartheta}_1=\frac{\vartheta_0}{2}+\pi$, $\tilde{\vartheta}_2=\frac{\vartheta_1}{2}$, $\tilde{\vartheta}_3=\frac{\vartheta_1}{2}+\pi$. Однако лучи $\Gamma(-\tilde{\vartheta}_k)$ $(k=0,1,2,3)$ делят плоскость на четыре угла раствора, меньшего π. Следовательно, $F(z)\equiv 0$, поскольку, выражаясь приведеными во введении терминами, пары вида $(\vartheta_{r_k};\ \vartheta_{r_k+1})$ для функции $F(z)$ отсутствуют. Значит, в этом случае $f(z)\equiv 0$. Если же $\frac{p}{2}-1\leqslant\omega<p-1$, то при любом $\tilde{\omega}\in\left(-1,\frac{p}{2}-1\right)$ функция $f(z)$ вместе с условиями (3.43) будет удовлетворять этим условиям, с заменой ω на $\tilde{\omega}$. Тогда опять, в силу доказанного, $f(z)\equiv 0$. Полученное противоречие показывает, что $f(z)$ не может удовлетворять условиям вида (3.43).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 17.III.1983

Վ. Մ. Մարտիրոսյան. Վերջավոր կարգի ամբողջ ֆունկցիաների ընդհանուր դասերի պարամետրական ներկայացման Մ. Մ. Ջրբաշյանի թեորեմի նոր ապացույց *(ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանի [1, 2, 4, 5] կողմից տրվել են կամայական վերջավոր $\rho > 1/2$ կարգի, նորմալ $< \sigma$ տիպի և $z = 0$ կետից դուրս եկող ճառագայթների Γ համակարգի վրա մոդուլի քառակուսով ու $|z|^{\omega}$ $(-1 < \omega < 1)$ կշռով ինտեգրելի ամբողջ ֆունկցիաների դասերի պարամետրական ներկայացումները։ Դրանք հանդիսանում են էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների վերաբերյալ Վիներ-Պելիի դասական թեորեմի էական ընդհանրացումներ։ Նշված արդյունքները ստանալու Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից առաջարկված մեթոդը թույլ է տալիս ստանալ նաև այնպիսի ամբողջ ֆունկցիաների ավելի ընդհանուր դասերի ինտեգրալային ներկայացումները, որոնց մոդուլի p $(1 < p < 2)$ աստիճանը ինտեգրելի է $|z|^{\omega}$ $(-1 < \omega < p-1)$ կշռով Γ համակարգի վրա։

Ներկա աշխատանքում առաջարկվում է այդպիսի դասերի ինտեգրալային ներկայացումները ստանալու նոր մոտեցում, որը կայանում է խնդիրը Կոշիի տիպի ինտեգրալների ուսումնասիրությանը հանգեցնելուն։

V. M. MARTIROSIAN. *A new proof of the M. M. Djrbashian theorem on the parametric representation for general classes of entire functions of finite order* (summary)

Parametric representations for general classes of entire functions of arbitrary finite order $\rho > 1/2$ and normal type $\leqslant \sigma$, the squares of modulus for which are integrable with the weight $|z|^{\omega}$ $(-1 < \omega < 1)$ on the system Γ of rays, from the origin, were found by M. M. Djrbashian [1, 2, 4, 5]. These results essentially generalize the Wiener—Paley classical theorem about entire functions of exponential type. The method of M. M. Djrbashian also yields integral representations for more general classes of entire functions for which the power p $(1 < p \leqslant 2)$ of modulus is integrable on Γ with the weight $|z|^{\omega}$ $(-1 < \omega < p-1)$.

The article offers a new approach to integral representations of such classes, based on reduction of the problem to Cauchy type integrals.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, ДАН СССР, 95, 1954, 1133—1136; Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 1955, 133—180.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
3. *R. Paley, N. Wiener.* Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934; *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964.
4. *М. М. Джрбашян.* Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, ДАН СССР, 85, 1952, 29—32; В более полной форме см. Матем. сб., 33 (75), № 3, 1953, 485—530.
5. *М. М. Джрбашян.* О представлении некоторых классов целых и квазицелых функций, ДАН СССР, 19, 1964, 9—12.
6. *А. Е. Аветисян.* Классы функций в комплексной области и их интегральные представления, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVII, № 1, 1982, 3—31.
7. *M. Plancherel, G. Pölya.* Functions enttières et integrales de Fourier multiples, Comentarii Mathematici Helvetici, 9, 1936—37, 224—248; 10, 1937—38, 110—163.
8. *R. P. Boas.* Representations for entire funtions of exponential type, Annals of Mathematics, 39, № 2, 1938, 269—286.
9. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем.ж., 1, № 3, 1960, 383—426.

10. *В. М. Мартиросян*. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
11. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., ИИЛ, 1963.
12. *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
13. *С. А. Акопян*. Теорема о двух постоянных для функций класса H_p, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», II, № 2, 1967, 123—127.
14. *А. М. Седлецкий*. Эквивалентное определение пространств H_p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сб., 96 (138), № 1, 1975, 75—82.
15. *E. M. Stein*. Note on singular integrals, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1957, 250—254.
16. *Г. М. Голузин*. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., «Наука», 1966.
17. *А. Е. Аветисян*. К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна, ДАН Арм.ССР, 65, № 5, 1977, 266—270; Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 376—388.
18. *В. М. Мартиросян*. О замыкании, минимальности и базисности систем простейших рациональных дробей на системе лучей, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XV, № 4, 1980, 276—291.
19. *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц*. Линейные операторы. Общая теория, М., ИИЛ, 1962.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS