# ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

## ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
## МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.



## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

*Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝*

*1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։*

*Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։*

*2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։*

*Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։*

*3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։*

*Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։*

*4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։*

*5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։*

*Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։*

*6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։*

*7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։*

*8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։*

*9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։*

*10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։*

*11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։*

*Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ «Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա»։*

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском английском французском и немецком языках



## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилии автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой перевёрстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

Գին 85 կ.
ЦЕНА 85 К.

Индекс 77735



## TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 5, 1983 Математика

УДК 519.218

М. Г. АВЕТИСЯН

# ВЕКТОРНЫЕ ГАУССОВСКИЕ ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

1. Введение. Марковские гауссовские случайные поля были рассмотрены еще в работе Розанова [4] (см. также работу Чея [7]). В статье Добрушина [1] был подробно изучен общий класс гиббсовских полей с квадратичным потенциалом, включающий гауссовские гиббсовские поля и в частности марковские гиббсовские поля. Эти исследования были продолжены в статье Кюнша [11]. Во всех цитируемых работах рассматривались случайные поля со скалярными значениями. Цель настоящей статьи — распространить эти результаты на векторный случай. В статье устанавливается, что при некоторых дополнительных условиях стационарное векторное гауссовское случайное поле со значениями в $R^n$ на $\nu$-мерной целочисленной решетке $Z^\nu$ с матрицей спектральных плотностей $f(k)=\{f_{jl}(k)\}$ $j, l=1,\cdots, n$ и вектором средних значений $h=(h_1,\cdots, h_n)$ можно трактовать как гиббсовское поле с парным квадратичным потенциалом

$$U(x_t, x_s)=(U(t-s)\, x_t, x_s)^*, \quad x_t, x_s \in R^n \ t, s \in Z^\nu, \tag{1.1}$$

где матрицы $U(t)$—это коэффициенты Фурье матричной функции $f^{-1}_{(k)}$ и линейно-квадратичным одночастичным потенциалом

$$U(x_t)=\frac{1}{2}(U(0)\, x_t, x_t)+\left(h, \sum_{t\in Z^\nu} U(t)\, x_t\right), \quad x_t \in R^n, \ t\in Z^\nu. \tag{1.2}$$

При этом совокупность всех гиббсовских полей с таким потенциалом совпадает с совокупностью сверток однородного векторного гауссовского поля со спектральной плотностью $f(k)$ и средним значением 0 и случайных полей, все реализации которых $a_t$, $t\in Z^\nu$ удовлетворяют функциональным уравнениям

$$\sum_{t\in Z} U(t-s)\, a_t=-h, \quad s\in Z^\nu. \tag{1.3}$$

2. Векторные случайные поля. Пусть $X=(R^n)^{Z^\nu}$ — пространство вектор-функций $x=(x_t=(x_{1,t}\cdots x_{n,t}))$, $t\in Z^\nu$, определенных на $\nu$-мерной целочисленной решетке $Z^\nu$, со значениями $x_t$ в $n$-мерном векторном пространстве $R^n$. При всех $x\in X$ и $V\in \mathfrak{v}^\nu$, где $\mathfrak{v}^\nu$ — совокупность всех конечных подмножеств множества $Z^\nu$, положим $x_V= =(x_t,\ t\in V)\in (R^n)^V$. Пусть $\Phi\subset X$ — совокупность финитных функций от $t\in Z^\nu$. Положим

---

* Здесь и далее $(b, c)$ — скалярное произведение векторов $b, c\in R^n$.

$$\xi_\varphi(x)=\sum_{t\in Z^\nu}(\varphi(t),\ x_t),\ x\in X,\ \varphi\in\Phi \tag{2.1}$$

и

$$\xi_t(x)=x_t,\ t\in Z^\nu,\ x\in X,$$
$$\xi_{i,t}(x)=x_{i,t},\ t\in Z^\nu,\ i=1,\cdots,n,\ x\in X. \tag{2.2}$$

Пусть множество $\widehat{V}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}\times Z^\nu=\widehat{Z}^\nu$.

Через $\mathrm{B}_{\widehat{V}}$ будем обозначать наименьшую $\sigma$-алгебру подмножеств пространства $X$, относительно которой измеримы все функции $\xi_{i,t}$, $(i,t)\in\widehat{V}$. При $V\subset Z^\nu$ и $\widehat{V}=\{1,\cdots,n\}\times V$, $\sigma$-алгебру $\mathrm{B}_{\widehat{V}}$ будем обозначать просто через $\mathrm{B}_V$. Положим также $\mathrm{B}_{Z^\nu}=\mathrm{B}$.

Распределениями вероятностей (р.в.) случайных полей будем называть вероятностные меры на пространстве $(X,\mathrm{B})$. Будем называть средним значением поля с (р.в.) $P$ линейный функционал

$$A^P(\varphi)=\int_X\xi_\varphi(x)\,P(dx)=\sum_{t\in Z^\nu}(A_t^P,\varphi(t)), \tag{2.3}$$

где $\varphi\in\Phi$ и

$$A_t^P=\int_X\xi_t(x)\,P(dx),\ t\in Z^\nu. \tag{2.4}$$

Предполагая, что средние значения существуют, положим

$$\zeta_\varphi^P(x)=\xi_\varphi(x)-A^P(\varphi),\ \varphi\in\Phi,$$
$$\zeta_t^P(x)=\xi_t(x)-A_t^P,\ t\in Z^\nu. \tag{2.5}$$

Теперь, предполагая существование вторых моментов, введем ковариационный функционал, положив

$$B^P(\varphi_1,\varphi_2)=\int_X\zeta_{\varphi_1}^P(x)\,\zeta_{\varphi_2}^P(x)\,P(dx)=$$

$$=\sum_{t,s\in Z^\nu}(B^P(t,s)\,\varphi_1(t),\ \varphi_2(s)),\ \varphi_1,\ \varphi_2\in\Phi, \tag{2.6}$$

где

$$B^P(t,s)=\{B_{j,l}^P(t,s)\}_{j,l=1,\cdots,n}$$

и

$$B_{jl}^P(t,s)=\int_X\zeta_{j,t}^P(x)\,\zeta_{l,s}^P(x)\,P(dx)\ \ t,\ s\in Z^\nu. \tag{2.7}$$

Случайное поле с р.в. $P$ называется ковариационно-стационарным, если оно имеет конечный ковариационный функционал и

$$B^P(\varphi_1,\varphi_2)=B^P(\varphi_1^s,\ \varphi_2^s),\ \varphi_1,\ \varphi_2\in\Phi,\ s\in Z^\nu, \tag{2.8}$$

где $\varphi_j^s(t)=\varphi_j(t-s)$, $s,\ t\in Z^\nu$, $j=1,\ 2$.

Известно, что (см. [3], § 4.3) для ковариационно-стационарного поля

$$B^P(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_{(-\pi\pi]^\nu} (\tilde{\varphi}_1(k) F^P(dk), \tilde{\tilde{\varphi}}_2(k)), \ \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi, \tag{2.9}$$

где $(-\pi\pi]^\nu = \{k = (k_1, \cdots, k_\nu) \in R^\nu, \ -\pi < k_j \leqslant \pi, \ j = 1, \cdots, \nu\}$ и

$$\tilde{\varphi}_j(k) = \sum_{t \in Z^\nu} \varphi(t) e^{i(k,t)}, \ k \in (-\pi\pi]^\nu, \ j = 1, 2,$$

а $F^P(\cdot)$ — это матричная неотрицательно определенная функция множества, определяемая на $\sigma$-алгебре $\mathbf{B}\{(-\pi\pi]^\nu\}$ борелевских подмножеств множества $(-\pi\pi]^\nu$. Функцию $F^P(\cdot)$ называют спектральной мерой поля с р.в. $P$. Если

$$F^P(A) = \int\limits_A f(k)\, dk, \ A \in \mathbf{B}\{(-\pi\pi]^\nu\}, \tag{2.10}$$

то будем говорить, что поле имеет спектральную плотность $f(k)$, $k \in (-\pi\pi]^\nu$. Любая измеримая функция с неотрицательно определенными значениями такая, что $\int\limits_{(-\pi\pi]^\nu} Sp f(k)\, dk < \infty$, где $Sp f(k)$ — это след матрицы $f(k)$, является спектральной плотностью некоторого поля.

Здесь и далее $P$ — это р.в. с конечным ковариационным функционалом. Будем обозначать через $L_2^{(P)}$ — гильбертово пространство вещественных функций на X, квадратично интегрируемых по мере $P$, и через $L_2^1(P)$ — подпространство пространства $L_2^{(P)}$, являющееся замыканием в $L_2(P)$ системы функций $\zeta_{j,t}^P$, $(j, t) \in \hat{Z}^\nu$. Обозначим через $L$ пространство $\underbrace{L_2^1(P) \oplus \cdots \oplus L_2^1(P)}_{n}$. Пусть $L_2(F)$ — гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $g(k) = (g_1(k), \cdots, g_n(k))$, $k \in (-\pi\pi]^\nu$ таких, что $g(k) = \overline{g(-k)}$ со скалярным произведением, заданным неотрицательно определенной квадратичной формой

$$(g_1(k), g_2(k)) = \int\limits_{(-\pi\pi]^\nu} (g_1(k) F^P(d_k), g_2(k)) \tag{2.11}$$

с естественной факторизацией по классу функций, на которых эта форма обращается в нуль.

П р е д л о ж е н и е 2.1. (см. [2]). Существует единственный изоморфизм пространств $L_2(F)$ и $L_2^1(P)$ такой, что элементу $\zeta_\varphi^P \in L_2^1(P)$ соответствует элемент $\tilde{\varphi} \in L_2(F)$. Образ элемента $g \in L_2(F)$ при этом изоморфизме будем обозначать через $Z_g$. Через $H_{\hat{V}} \subseteq L_2^1(P)$, $\hat{V} \subseteq \hat{Z}^\nu$ будем обозначать замкнутое подпространство, порожденное векторами $\zeta_{j,t}^P$, $(j, t) \in \hat{V}$. Через $d_{j,t,\hat{V}} \in L_2^1(P)$, где $(j, t) \in \hat{V}$ и $\tilde{V}$ — конечное подмножество множества $\widehat{Z}^{\nu}$, будем обозначать проекцию вектора $\zeta^{P}_{j,t}$ на $H_{\widehat{Z}^{\nu}} \setminus \widehat{V}$, а если $\widehat{V} = \{1,\cdots,n\} \times V$, то положим просто

$$d_{j,t,\widehat{V}} \equiv d_{j,t,V},\quad V \in V^{\nu},\quad d_{t,V} = \{d_{j,t,V}\}_{j=1,\cdots,n}.$$

Положим

$$B^{P}_{j,l,V}(t,s) = \int\limits_{X} (\zeta^{P}_{j,t}(x) - d_{j,t,V}(x))(\zeta^{P}_{l,s}(x) - d_{l,s,V}(x))\, P(dx)$$

и

$$B^{P}_{V}(t,s) = \{B^{P}_{j,l,V}(t,s)\}_{j,l=1,\cdots,n}. \tag{2.12}$$

Предложение 2.2 (см. [8], § 2.3, 4.3, 7.12). Пусть $P$ — это р.в. векторного гауссовского случайного поля. Тогда при любом $V \in V^{\nu}$ сужение на $B^{V}$ условного р.в. $P_V(\cdot / x)$ относительно $\sigma$-подалгебры $L_{Z^{\nu} \setminus V}$ имеет характеристическую функцию вида

$$\chi(\lambda_t,\ t \in V / x) = \int\limits_{(R^n)^V} \exp\left(i \sum_{t \in V} (\lambda_t, \xi_t(\widehat{x}_V)\right) P_V(\widehat{x}_V / x) =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{t,s \in V} (B^{P}_{V}(t,s)\lambda_t, \lambda_s) + i \sum_{s \in V} (\lambda_s, d_{s,V}(x) + A^{P}_{s}\right\}, \tag{2.13}$$

т. е. является гауссовским с матрицей ковариации $B^{P}_{V} = \{B^{P}_{j,l,V}(s,t),\ s,t \in V\ j, l = 1,\cdots,n\}$ и вектором средних значений $\{d_{t,V} + A^{P}_{t},\ t \in V\}$.

Векторное случайное поле называется минимальным, если

$$\zeta^{P}_{j,t} \overline{\in} H_{\widehat{Z}^{\nu} \setminus \{(j,t)\}} \tag{2.14}$$

при всех $(j,t) \in \widehat{Z}^{\nu}$.

Предложение 2.3 (см. [2], гл. II). Для того, чтобы векторное ковариационно-стационарное поле со спектральной плотностью $f(k)$ было минимальным необходимо и достаточно, чтобы почти всюду существовала обратная матрица $f^{-1}(k)$ и

$$\int\limits_{(-\pi\pi]^{\nu}} Sp\, f^{-1}(k)\, dk < \infty, \tag{2.15}$$

где $Sp\, f^{-1}(k)$ — след матрицы $f^{-1}(k)$.

При этом

$$\sigma^2_t = B^{P}_{\{t\}}(t,t) = (2\pi)^{2\nu} \left[\int\limits_{(-\pi\pi]^{\nu}} f^{-1}_{(k)}\, dk\right]^{-1} \tag{2.16}$$

и

$$d_{t,\{t\}} = Z_{e^{i(t,k)}[I_n - (2\pi)^{-\nu}\sigma^2 f^{-1}_{(k)}]}. \tag{2.17}$$

Случайное поле с р.в. $P$ называется линейно регулярным, если

$$\bigcap_{\substack{\widehat{V} \subset \widehat{Z}^{\nu} \\ |\widehat{V}| < \infty}} H_{\widehat{Z}^{\nu} \setminus \widehat{V}} = 0, \tag{2.18}$$

где $|\widehat{V}|$ — мощность подмножества $\widehat{V}$ множества $\widehat{Z}^{\nu}$.

Предложение 2.4 (см. [4]). При выполнении условия (2.15) поле с р.в. $P$ линейно регулярно. В соответствии с определением (2.12) для линейно регулярного поля

$$B^P(s, t) = \lim_{V \to \infty} B^P_V(s, t), \ s, t \in Z^{\nu}. \tag{2.19}$$

Говорят, что система векторов $\{\zeta^P_{j,t}, (j, t) \in \widehat{Z}^{\nu}\}$ образует слабый базис в пространстве $L^1_2(P)$, если любой вектор $a \in L^1_2(P)$ единственным образом представим в виде

$$a = \sum_{(j, t) \in \widehat{Z}^{\nu}} c_j(t) \eta^P_{j,t}, \tag{2.20}$$

где $c_j(t)$, $(j, t) \in \widehat{Z}^{\nu}$ — действительные числа, а ряд в (2.20) сходится в слабом смысле в пространстве $L^1_2(P)$. Известно (см. [2], § 2), что при выполнении условия (2.15) система векторов $\{\zeta_{j,t}, (j, t) \in \widehat{Z}^{\nu}\}$ образует слабый базис в пространстве $L^1_2(P)$, при этом если $a = Z_g$, $g(k) = (g_1(k), \cdots, g_n(k))$, то функции $g_j(k)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ интегрируемы по мере Лебега и при этом

$$c_j(t) = (2\pi)^{-\nu} \int_{(-\pi\pi]^{\nu}} g_j(k) e^{i(k,t)} dk. \tag{2.21}$$

3. Гиббсовские поля. Пусть $h \in R^n$, а $U(t)$, $t \in Z^{\nu}$ $n \times n$ — матричная функция такая, что $U(t) = U(-t)$, $t \in Z^{\nu}$ и

$$\sum_{t \in Z^{\nu}} \|U(t)\| < \infty, \tag{3.1}$$

где норма матрицы $U(t) = \{U_{j,l}(t)\}_{j,l=1\cdots n}$ определяется как $\|U(t)\| = \max_{j,l=1\cdots n} |U_{j,l}(t)|$, $t \in Z^{\nu}$. Пусть далее $Y(U) \subset X$ — множество функций $x = (x_t, t \in Z^{\nu})$ таких, что $x_t \in R^n$ и

$$\sum_{t \in Z^{\nu}} \|U(t-s) x_t\| < \infty, \ s \in Z^{\nu}, \tag{3.2}$$

где норма вектора $x_t \in R^n$ определяется, как $\|x_t\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_{j,t}|^2}$. Введем энергию взаимодействия

$$H^{(h, U)}_V(\widehat{x}_V / x) = \sum_{\{s, t\} \subset V} (U(t-s) \widehat{x}_t, \widehat{x}_s) + \frac{1}{2} \sum_{t \in V} (U(0) \widehat{x}_t, \widehat{x}_t) +$$

$$+\left(h, \sum_{s\in V} \hat{x}_s\right)+\left(\sum_{s\in V} \hat{x}_s, \sum_{t\in Z^\nu \setminus V} U(t-s) x_t\right), \tag{3.3}$$

где $\hat{x}_V=(\hat{x}_t, t\in V)\in(R^n)^V$, $x=(x_t, t\in Z^\nu)\in Y(U)$, $V\in V^\nu$ и гиббсовскую плотность

$$P_V^{(h,U)}(\hat{x}_V/x)=\frac{\exp\{-H_V^{(h,U)}(\hat{x}_V/x)\}}{Z_V(x)}, \tag{3.4}$$

где

$$Z_V(x)=\int_{(R^n)^V} \exp\{-H_V^{(h,U)}(\hat{x}_V/x)\, d\hat{x}_V. \tag{3.5}$$

Ясно, что $Z_V(x)>0$ для всех $V\in V^\nu$ и $x\in Y(U)$ тогда и только тогда, если при всех $V\in V^\nu$

$$\sum_{t,s\in V}(U(t-s)Z_t, Z_s)>0,\ Z_s\neq 0,\ Z_s\in C^n,\ s\in V. \tag{3.6}$$

Если положим $q(k)=\sum_{t\in Z^\nu} U(t)e^{i(k,t)}$, то (3.6) можно записать в виде

$$\int_{(-\pi\pi]^\nu}(p(k)q(k), \bar{p}(k)\,dk>0, \tag{3.7}$$

где $p(k)=\sum_{s\in V} z_s e^{i(k,s)}$, $z_s\neq 0$, $s\in V$, $V\in V^\nu$.

Отсюда следует (см. [5], § 5), что матричная функция $q(k)$ имеет почти всюду строго положительно определенные значения. В дальнейшем будем рассматривать только потенциалы, для которых выполнено условие (3.7). Выражение (3.4) перепишем в виде

$$p_V^{(h,U)}(\hat{x}_V/x)=[(2\pi)^{|V|n}\det U_V]^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{t,s\in V}(U(t-s)(x_t-a_t^V(x)),\ x_s-a_s^V(x)\right\}, \tag{3.8}$$

где $\det U_V$ — это детерминант матрицы $U_V=\{U_V(t-s),\ t,s\in V\}$, а $a_t^V(x)$, $t\in V$ определяются из системы линейных уравнений

$$\sum_{t\in V} U(t-s)\,a_t^V(x)+\sum_{t\in Z^\nu\setminus V} U(t-s)\,x_t=-h,\ s\in V. \tag{3.9}$$

Будем называть векторное случайное поле с р.в. $P(h, U)$ — гиббсовским, если

$$P(Y(U))=1, \tag{3.10}$$

при любом $V\in V^\nu$ существует условная плотность $P_V(\cdot/x)$ и для $P$ почти всех $x\in X$ и $P_V(\cdot/x)$ — почти всех $\hat{x}_V\in(R^n)^V$

$$P_V(\hat{x}_V/x)=p_V^{(h,U)}(\hat{x}_V/x). \tag{3.11}$$

Пусть $A(h, U) \subseteq X$ — множество всех функций $a = (a_t, t \in Z^\nu) \in X$ таких, что

$$\sum_{t \in Z^\nu} U(t-s)\, a_t = h, \quad s \in Z^\nu. \tag{3.12}$$

Будем называть сверткой $P = P_1 * P_2$ двух р.в. случайных полей р.в.

$$P(A) = \int_A P_1^a(A)\, P_2(da), \quad A \in \mathbf{B}, \tag{3.13}$$

где $P_1^a(A) = P_1(A - a), A \in \mathbf{B}$.

Положим (см. (3.6))

$$f(k) = (2\pi)^{-\nu} [q(k)]^{-1}. \tag{3.14}$$

Если

$$\int_{(-\pi\pi]^\nu} sp\, [q(k)]^{-1}\, dk < \infty, \tag{3.15}$$

то существует стационарное гауссовское поле с параметрами $(0, f)$ Его р.в. будем обозначать через $P^f$.

Теорема. *Для того, чтобы совокупность $(h, U)$-гиббсовских полей была не пуста необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.15) и множество $A(h, U)$ было не пусто. При этом р.в. $P$ будет $(h, U)$-гиббсовским в том и только том случае, когд.*

$$P = P^f * P^1, \tag{3.16}$$

*где р.в. $P^1$ такое, что*

$$P^1(A(h, U)) = 1. \tag{3.17}$$

Доказательство. Проверим, что при условии (3.15) р.в. $P^f$ является $(0\ U)$-гиббсовским. Из (3.1) следует условие (2.15) и поэтому из предложений 2.2 и 2.3 и формулы (2.20) следует, что существует индуцированная состоянием $P^f$ условная плотность

$$P^f_{\{t\}}(\hat{x}_t / x) = [(2\pi)^\nu \det \sigma^2]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left((\sigma^2)^{-1} (\hat{x}_t - d_{t,\{t\}}), (\hat{x}_t - d_{t\{t\}})\right)\right\}, \tag{3.18}$$

где

$$\sigma^2 = (U(0))^{-1} \tag{3.19}$$

и

$$d_{t,\{t\}}(x) = -\sigma^2 \sum_{s \neq t} U(s-t)\, \xi_t(x), \tag{3.20}$$

где ряд сходится в слабом смысле в пространстве $L$. Так как ряды $\sum_{t \neq s} U(t-s)\, \delta_j\, e^{i(k,t)}$, где $\delta_j = (0 \cdots \underset{j}{1} \cdots 0)$, $j = 1, \cdots, n$ сходятся в пространстве $L_2(F)$, то ряд в (3.20) сходится в сильном смысле. Далее, среднее значение по мере $P^f$

$$E_f \left(\sum_{t \in Z^\nu} \|U(t-s)\| \|\xi_t(x)\|\right) \leqslant K \sum_{t \in Z^\nu} \|U(t-s)\| < \infty \tag{3.21}$$

и поэтому верна (3.10) и формула (3.20) верна в смысле сходимости при почти всех по мере $P^f$ значений $x \in X$. Тогда почти всюду

$$p_{\{t\}}^{(0, U)}(\hat{x}_t/x)=[(2\pi)^n \det \sigma^2]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left((\sigma^2)^{-1} \hat{x}_t-d_{t,\{t\}}(x)), (\hat{x}_t-d_{t,\{t\}}(x))\right)\right\}. \qquad (3.22)$$

Тем самым проверено условие (3.11) при $V=\{t\}$, но отсюда следует его выполнение и при всех $V \in V^\nu$ (ср. [1], предложение 3.2).

Сдвиг $P^{f,a}(\hat{x}_V/x)$ р.в. $P^f$ при условии (3.15) имеет условные плотности вида

$$P_V^{f,a}(\hat{x}_V/x)=P_V^f(\hat{x}_V-a_V/x-a),\ \hat{x}_V \in (R^n)^V\ V \in V^\nu. \qquad (3.23)$$

Из формулы (3.3) следует, что при условии (3.12) разность $H_V^{(h,U)}(\hat{x}_V/x)-H_V^{(h,U)}(\hat{x}_V-a_V/x-a)$ не зависит от $\hat{x}_V$ и поэтому

$$p_V^{(h,U)}(\hat{x}_V/x)=p_V^{(h,U)}(\hat{x}_V-a_V/x-a)\ \hat{x}_V \in (R^n)^V,\ x \in X. \qquad (3.24)$$

Выполнение условия (3.10) для $P^{f,a}$ следует из выполнения этого условия для $P^f$ и из того, что ряд в (3.12) сходится абсолютно.

Тогда из формул (3.23) и (3.24) вытекает, что при условии (3.12) поле с р.в. $P^{f,a}$ является $(h, U)$-гиббсовским. Отсюда следует, что поле с р.в. вида (3.16) это р.в. $(h, U)$-гиббсовских полей.

Покажем теперь, что условие (3.15) необходимо для существования $(h, U)$-гиббсовских полей. Пусть потенциал таков, что интеграл в (3.15) расходится. Обозначим через $b_{j,V}(t)$, $t \in V$, $j=1, \cdots, n$ диагональные элементы матрицы, обратной к матрице $\{U(t-s), s, t \in V\}$, т. е. дисперсии случайных величин $\xi_{j,t}=x_{j,t}$, задаваемых плотностью р.в. (3.8). Положим

$$q^m(k)=\frac{1}{m} \mathrm{I}_n+q(k),\ k \in (-\pi\pi]^\nu,\ m=1, 2, \cdots, \qquad (3.25)$$

где $\mathrm{I}_n$ — это $n \times n$-единичная матрица. Обозначим через $p_V^{(h,U^m)}$ плотность р.в., задаваемую формулой (3.8), в которой коэффициенты $U(t-s)$ заменены на $U^m(t-s)$, где $U^m(t)$, $t \in Z^\nu$ — это коэффициенты Фурье функций $q^m(k)$, $k \in (-\pi\pi]^\nu$, а через $b_{j,V}^m$ — дисперсии случайных величин $x_{j,t}$, задаваемые плотностями р.в. $p_V^{(h,U^m)}$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} b_{j,V}^m(t)=b_{j,V}(t),\ t \in V,\ V \in V^\nu,\ j=1, \cdots, n. \qquad (3.26)$$

Из доказанной части теоремы следует, что

$$b_{j,V}^m(t)=B_V^{P^{f^m}jj}(t, t),$$

где $f^m(k)=\frac{1}{2\pi^\nu}[q^m(k)]^{-1}$, а $f_{jj}^m$ — $j$-ый диагональный элемент матрицы $f^m(k)$, $k \in (-\pi\ \pi]^\nu$.

Из (3.25) следует (см. [9], § 4.12), что

$$f^m_{jj}(k) \leqslant f^{m+1}_{jj}(k),\ k \in (-\pi, \pi]^\nu. \tag{3.28}$$

Тогда (см. [1], лемма 4.2) последовательность $b^m_{j,V}(t)$ монотонно возрастает по $m$ и тогда из (3.26) следует, что

$$b_{j,V}(t) \geqslant b^m_{j,V}(t),\ t \in V,\ V \in V^\nu. \tag{3.29}$$

Для р.в. $P^{f^m}$ из предложения 2.4 вытекает, что

$$\lim_{V\to\infty} b^m_{j,V}(t) = B^{P^{f^m_{jj}}}_{(t,t)} \int\limits_{(-\pi\pi]^\nu} f^m_{jj}(k)\,dk. \tag{3.30}$$

Тогда из (3.26), (3.29) и из того, что интеграл в (3.15) расходится, следует, что для некоторого $j$, $j=1,\cdots,n$

$$\lim_{V\to\infty} b_{j,V}(t) = \infty. \tag{3.31}$$

Пусть теперь $P$ — это некоторое $(h, U)$-гиббсовское р.в. Тогда из формул (3.11) и (3.8) следует, что при любом $V \in V^\nu$, $t \in V$ случайная величина

$$\xi_t(x) = a^V_t(x) + J^V_t(x), \tag{3.32}$$

где $J^V_t(x) = \xi_t(x) - a^V_t(x)$ имеет гауссовское р.в. со средним 0 и ковариационной матрицей $b_V(t)$ и слагаемые в (3.32) независимы. Ясно, что

$$P(|\xi_{j,t}| > (b_{j,V})^{1/2}) \geqslant P(J^V_{j,t} > (b_{j,V}(t))^{1/2}), \tag{3.33}$$

где $\xi_{j,t}$ и $J^V_{j,t}$ — $j$-ые компоненты соответственно $\xi_t$ и $J^V_t$ и левая часть этого неравенства представляет собой константу, не зависящую от $V \in V^\nu$. Но это противоречит тому, что $P(|\xi_{j,t}| > c) \to 0$ при $c \to \infty$. Это противоречие доказывает необходимость условия (3.15).

Пусть теперь условие (3.15) выполняется.

Предложение 3.1. *Любое регулярное $(h, U)$-гиббсовское поле с р.в. $P$ является гауссовским ковариационно-стационарным полем со спектральной плотностью $f(k)$ и средним значением $a^P_t$ таким, что $(a^P_t,\ t \in Z^\nu) \in A(h, U)$.*

Доказательство. Пусть $\chi_P(\varphi)$ — характеристический функционал этого поля. Для каждого $V \in V^\nu$ и каждого $x \in X$ рассмотрим

$$\chi_{V,x}(\varphi) = \int\limits_{(R^n)^V} \exp\left\{i \sum_{t\in V} (\varphi(t), \hat{x}_t)\right\} P^{(h,U)}_V(\hat{x}_V/x)\,d\hat{x}_V =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{s,t\in V} (b_V(s,t)\varphi(s), \varphi(t)) + i\sum_{t\in V} (\varphi(t), a^V_t(x))\right\}, \varphi \in \Phi,$$

$$x \in X, \tag{3.34}$$

где $B_V = \{b_V(t,s),\ t, s \in V\}$ — матрица обратная к матрице $U_V = \{U(t-s),\ s, t \in V\}$ и $\{a^V_t(x),\ t \in V\}$ — решения уравнения (3.9). Из условия (3.11) (см. [8], 7.4) следует, что при любом $\varphi \in \Phi$ и почти всех по мере $P$ значений $x \in X$

$$\lim_{V \to \infty} \chi_{V,x}(\varphi) = \chi_P(\varphi). \tag{3.35}$$

Из предложения 2.4 имеем

$$\lim_{V \to \infty} b_V(s, t) = B^{P/}(s, t), \; s, t \in Z^\nu. \tag{3.36}$$

Тогда из (3.34) и (3.35) следует, что для почти всех по мере $P$ значений $x \in X$

$$\lim_{V \to \infty} a_t^V = a_t^P, \; t \in Z^\nu, \tag{3.37}$$

где $a_t^P$ — некоторые константы.

Покажем, что $(a_t^P, t \in Z^\nu) \in A(h, U)$. Из условия (3.10) следует, что ряд в (3.2) сходится с вероятностью 1 относительно меры $P$ и так как из такой сходимости гауссовских величин вытекает их сходимость в среднем, то ряды в (3.2) сходятся в среднем по мере $P$. Из формулы (2.1) видно, что ряды в (3.12)) сходятся. Из сходимости ряда (3.2), условия (3.1) и ковариационно-стационарности поля следует, что

$$\sum_{t \in Z^\nu} \|U(t-s)\| \int_X \|\xi_t(x)\| P(dx) \leqslant \sum_{t \in Z^\nu} \|U(t-s)\| \|a_t^P\| +$$

$$+ \sum_{t \in Z^\nu} \|U(t-s)\| \int_X \|\xi_t^P(x)\| P(dx) < \infty. \tag{3.38}$$

Формула (3.8) и условие (3.11) позволяют писать для почти всех $x \in X$

$$a_t^V(x) = E_P(\xi_t / \mathbf{B}_{Z^\nu \setminus V}), \; t \in V, \; V \in V^\nu. \tag{3.39}$$

Тогда (см. [12], разд. 2)

$$\int_X \|a_t^V(x)\| P(dx) \leqslant \int_X \|\xi_t(x)\| P(dx), \; t \in V, \; V \in V^\nu \tag{3.40}$$

и из (3.38) следует, что каждый из рядов

$$\sum_{t \in Z^\nu} U(t-s)\, \widehat{a}_t^V(x), \; s \in Z^\nu,$$

где $\widehat{a}_t^V = a_t^V$, $t \in V$ и $\widehat{a}_t^V = x_t$, $t \in Z^\nu \setminus V$, сходятся в среднем по мере $P$ равномерно относительно $V \to \infty$ в смысле сходимости по мере $P$, при условии (3.37), откуда получим (3.12). Предложение 3.1 доказано.

К завершению доказательства теоремы остается добавить, что любое $(h, U)$-гиббсовское поле может быть получено как взвешенное интегральное среднее регулярных $(h, U)$-гиббсовских полей (см. [10], § 2).

Институт проблем передачи
информации АН СССР

Поступила 15.VII.1982

Մ. Հ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Վեկտորական գաուսյան գիբսյան պատահական դաշտեր *(ամփոփում)*

*Դոբրուշինի հոդվածում [1] տրված է սկալյար գաուսյան պատահական դաշտերի նկարագրությունը գիբսյան պոտենցիալների տերմիններով։ Այս հոդվածում ընդհանրացվում են այդ արդյունքները վեկտորական գաուսյան դաշտերի համար։*

M. H. AVETISYAN. *Vector gaussian gibbsian random fields* (summary)

In the Dobrushin's paper [1] a description of gaussian random fields in terms of gibbsian potentials was given for scalar fields. Here we generallize these results to the case of vector gaussian random fields.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *R. L. Dobrushin*. Gaussian random Fields—Gibbsian point of view, Multicomp random systems, Advance in Probab. and relat. topics, vol. 6, Marcel. Bekker Inc. N. Y., Basel, 1980.
2. *Ю. А. Розанов*. Стационарные случайные процессы, Физматгиз, 1963.
3. *И. И. Гихман. А. В. Скороход*. Теория случайных процессов, «Наука», 1971.
4. *Ю. А. Розанов*. О гауссовских полях с заданными условными распределениями, Теория вер. и её примен., XII, 3, 1967, 165—202.
5. *H. Helson, D. Loudenslager*. Prediction theory and Fourier series in several variables, Acta Math., 99, 3—4, 1958.
6. *А. М. Яглом*. Введение в теорию стационарных случайных функций, УМН, 7 (5), 1952, 3—168.
7. *S. C. Chay. H.* On Qausi-Markov randon Fields, J. of Multiv. Anal., 2, № 1, 1972, 14—76.
8. *Дж. Л. Дуб*. Вероятностные процессы, ИИЛ, 1956.
9. *Р. Беллман*. Введение в теорию матриц, «Наука», 1976.
10. *C. Preston*. Random fields, Lect. Notes Math., № 534. Springer, Berlin, 1976.
11. *H. Kunsch*. Thermodynamics and statistical analysis of Gaussian random fields (препринт).
12. *П. А. Майер*. Вероятность и потенциалы, «Мир», 1973.
13. *А. Зигмунд*. Тригонометрические ряды, «Мир», 1965.
14. *М. Г. Аветисян, Р. Л. Добрушин*. Условие линейной регулярисоти векторных случайных полей (препринт).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 5, 1983 Математика

УДК 517.51

К. С. КАЗАРЯН

# МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ДО БАЗИСОВ В $L^p$, $1<p<\infty$, РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Исследования, касающиеся мультипликативного дополнения неполных ортонормированных систем, берут начало с оригинальной работы Р. Боаса и Г. Полларда [1], которые показали, что из любой полной ортонормированной системы удаляя произвольный конечный набор функций, оставшуюся систему умножением на одну и ту же функцию можно сделать полной в пространстве $L^2$.

Дж. Прайсу и Р. Зинку [2] удалось описать системы функций, которые можно мультипликативно дополнить в $L^2$. Точнее, они доказали, что для того, чтобы система $\{m(x) f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была полной в $L^2[0,1]$ для некоторой ограниченной функции $m(x)>0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое множество $E_\varepsilon$, $|E_\varepsilon|>1-\varepsilon$, на котором система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была бы полной в пространстве $L^2(E_\varepsilon)$.

Бен-Ами Браун [3] показал, что в теореме Р. Боаса и Г. Полларда можно добиться большего: чтобы полученная система не только была замкнутой в $L^p$, $1<p<\infty$, но обладала также тем свойством, что для любой функции из $L^p$ нашелся ряд по полученной системе, который в этом пространстве сходился к взятой функции. Отметим, что можно также дать полное описание систем, которые обладают свойством теоремы Бен-Ами Брауна.

В работах автора [4], [5], [6] были исследованы вопросы о мультипликативной дополняемости неполных систем до базисов в $L^p$, $1\leqslant p<\infty$. Здесь и в дальнейшем будем следовать терминологии монографии С. Качмажа и Г. Штейнгауза [7]. В работе [5] для замкнутых минимальных в $L^p(E)$, $1\leqslant p<\infty$ ($E$ —измеримое множество положительной меры) систем $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ были установлены необходимые и достаточные условия на $M(x)$, чтобы система $\{M(x)\ \varphi_k(x)\}_{k=n}^{\infty}$ $n$ — произвольное натуральное число, были замкнутыми, минимальными в $L^p(E)$. Были полностью описаны все функции $M(x)$, для которых система $\{M(x)\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, где $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система, оставшаяся после удаления из системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ конечного набора функций, является базисом Маркушевича пространства $L^p[0,1]$, $1\leqslant p<\infty$, т. е. замкнута минимальна в $L^p[0,1]$ и сопряженная ей система функций полна относительно $L^p[0,1]$.

В работе [4] было доказано, что для любого натурального $N$ можно найти такую функцию $M(x)$, чтобы система $\{M(x)\ \chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$, где $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, была базисом во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1\leqslant p<\infty$. Полное описание всех таких функций $M$ дано в [6], где доказывается также, что если система $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является базисом пространства $L^p[0,1]$, $1<p<\infty$, то одновременно является безусловными базисом этого пространства.

В работах автора, перечисленных выше, были получены также результаты, касающиеся описания таких замкнутых минимальных систем пространств $L^p$, $1\leqslant p<\infty$, удаляя из которых конечное число функций, оставшуюся систему невозможно умножением на одну и ту же функцию сделать базисом пространства $L^p$. Для приведения этих результатов дадим два определения.

Определение 1. Скажем, что система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на измеримом множестве $E$, $|E|>0$, имеет свойство ($A$) на множестве $F$ ($F\subset E$, $|F|>0$), если существует положительное число $a$ такое, что для любого натурального числа $N_1$ можно найти число $N_2$, для которого

$$\left|\bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k\right|=|F|,\ \text{где}\ E_k=\{x\colon |\varphi_k(x)|\geqslant a\}\cap F.$$

Определение 2. Будем говорить, что на множестве $F$ функция $M$ имеет особенность степени $q$ ($1\leqslant q\leqslant\infty$), если $[M(x)]^{-1}\overline{\in} L^q(F)$.

В работе [4] была доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная равномерно ограниченная ортонормированная система функций, определенных на множестве $E$ положительной меры. Пусть, далее, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет свойство ($A$) на $E$. Тогда для любого натурального числа $N$ и произвольнсй ограниченной функции $M(x)$ система $\{M(x)\varphi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ не является базисом ни в одном из пространств $L^p(E)$, $1<p<\infty$.*

Здесь же заметим, что тригонометрическая система и система Уолша удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Аналог теоремы 1 имеет место и для равномерно ограниченных замкнутых минимальных систем (см. [5], теоремы 3, 3°. 3°°). С помощью построения соответствующего примера было показано также, что эти результаты без требования, чтобы рассматриваемая система имела свойство ($A$) на множестне полной меры, в $L^p$, $1<p<\infty$, не имеет место. Это условие в пространстве $L$ лишнее, так как для любой конечной положительной меры $\mu$ в $L(d\mu)$ не существует ограниченного нормированного базиса (см. [8], [9], [10]).

Аналогичный вопрос для равномерно ограниченных полных ортонормированных систем оставался открытым, т. е. не было известно можно ли доказать теорему 1 для пространств $L^p$, $1<p<\infty$, без требования, чтобы рассматриваемые системы имели свойство ($A$) на множестве полной меры.

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 2. *Существует равномерно ограниченная ортонормированная полная относительно $L[0,1]$ система функций $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, которая обладает тем свойством, что удаляя из нее некоторое конечное число функций, оставшуюся систему можно умножением* *на одну и ту же функцию из $L^\infty[0,1]$ сделать базисом во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1<p<\infty$.*

В связи с теоремой 2 заметим, что согласно теореме 2 работы [5] для системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^\infty$ существует некоторое множество $F\subset[0,1]$ положительной меры такое, что ограниченная функция, существование которой утверждается в теореме 2, не может иметь особенности степени $q$ $(1<q<\infty)$ на $F$, $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Как дополнение к теореме 2 отметим также, что ввиду того, что базисность системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $L_{[0,1]}(\psi dx)$, где $\psi(x)=|M(x)|$, эквивалентна базисности системы $\{M(x)\,\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ в $L[0,1]$, из теоремы 2 работы 8 вытекает следующая

Теорема 3. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — равномерно ограниченная ортонормированная система функций, определенных на отрезке $[0,1]$ и $N$ — любое натуральное число. Тогда для любой интегрируемой функции $M(x)$ система $\{M(x)\,\varphi_n(x)\}_{n=N}^\infty$ не является базисом пространства $L[0,1]$.*

## § 1. Построение и базисность системы $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ в $L^p[0,1]$, $1<p<\infty$

Пример, удовлетворяющий условиям теоремы 2, будет построен с помощью системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и специальных ортогональных матриц $H_k$, возникающих из системы Хаара. Напомним сначала определение системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$:

$$\chi_0^{(0)}(x)\equiv 1 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

$$\chi_k^{(j)}(x)=\begin{cases} 2^{k/2}, & \text{если } \dfrac{2j-2}{2^{k+1}}<x<\dfrac{2j-1}{2^{k+1}} \\ 2^{-k/2}, & \text{если } \dfrac{2j-1}{2^{k+1}}<x<\dfrac{2j-1}{2^{k+1}} \\ 0, & \text{если } x\overline{\in}\left[\dfrac{j-1}{2^k},\dfrac{j}{2^k}\right], \end{cases} \tag{1}$$

где для каждого $k=0,1,\cdots$ индекс $j$ пробегает значения $1,2,\cdots,2^k$. Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — система Хаара, упорядоченная обычным образом: $\chi_0^{(0)}(x)=\chi_1(x)$, а при $n=2^k+j$ $(k=0,1,\cdots;\ j=1,2,\cdots,2^k)$

$$\chi_k^{(j)}(x)=\chi_n(x). \tag{2}$$

Приведем определение ортогональных матриц $H_k$ $(k=1,2,\cdots)$ (см. [11], стр. 156), а также [12], стр. 299). Для любого натурального числа $k$ берем средние точки $x_s^{(k)}=(s+1/2)\,2^{-k}$ интервалов $[s\cdot 2^{-k},(s+1)\,2^{-k}]$ и полагаем

$$H_k=\{h_{ij}^{(k)}=2^{-\frac{k}{2}}\chi_i(x_j^{(k)});\ 1\leqslant i\leqslant 2^k;\ j=0,1,\cdots,2^x-1\}. \tag{3}$$

Отметим одно свойство матриц $H_k$ $(k=1, 2,\cdots)$, которое нам понадобится. Существует положительное число $\beta>0$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{2^k} |h_{ij}^{(k)}|<\beta \quad (1\leqslant j\leqslant 2^k;\ k=1, 2,\cdots). \tag{4}$$

Более подробно со свойствами этих матриц можно познакомиться в монографии А. М. Олевского [13], который независимо ввел и плодотворно применил эти матрицы в теории ортогональных рядов,

Заменой линейного переменного отобразим систему Хаара с отрезка $[0,1]$ соответственно на отрезки $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$, вне которых функции предположим равными нулю. Полученные системы после нормирования соответственно обозначим $\{\bar{\chi}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\bar{\bar{\chi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\bar{\chi}_n(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\ \chi_n\left(\dfrac{x}{2}\right), & \text{при } x\in[0, 1/2]\\ 0, & \text{при } x\in(1/2, 1];\ n=1, 2, 3,\cdots\end{cases} \tag{5}$$

$$\bar{\bar{\chi}}_n(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in[0, 1/2]\\ \sqrt{2}\ \chi_n(2x-1), & \text{при } x\in[1/2, 1],\ n=1, 2,\cdots\end{cases} \tag{6}$$

С помощью матриц $H_k$ преобразуем систему $\{\bar{\bar{\chi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в систему $\{\bar{\bar{\psi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Положим

$$\bar{\bar{\psi}}_n(x)=\bar{\bar{\chi}}_n(x) \quad (n=1, 2),$$

$$\bar{\bar{\psi}}_n(x)=\sum_{j=1}^{2^k} h_{ij}^{(k)}\,\bar{\bar{\chi}}_k^{(j)}(x),\quad n=2^k+i \quad (1\leqslant i\leqslant 2^k,\ k=1, 2,\cdots). \tag{7}$$

Из [6], [7] и [3] вытекает (см. [12], стр. 302), что при $n>2$

$$\bar{\bar{\psi}}_n(x)=\bar{\bar{\chi}}_i(x)\,r_{k+2}(x), \tag{8}$$

где $\bar{\bar{\psi}}(x)$ $(n=3, 4,\cdots)$ определяется равенством (7) и $r_k(x)$ $(k=1, 2,\cdots)$—функции Радемахера. Функции системы $\{\bar{\bar{\psi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сгруппируем в „пачки". В $k$-ую „пачку" $(k=1, 2,\cdots)$ входят функции

$$\bar{\bar{\psi}}_{\nu}^{(k)}(x)=\bar{\bar{\psi}}_n(x),\quad n=2^k+\nu \quad (\nu=1, 2,\cdots, 2^k). \tag{9}$$

Совокупность функций $\{\bar{\chi}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\cup\{\bar{\bar{\psi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая является ортонормированной и полной относительно $L[0,1]$ системой будем специальным образом объединять в группы, а потом в каждой из этих групп соответствующим образом сделаем ортогональное преобразование. Полученные функции объединим в две части. Функции первой части будем обозначать буквой $\xi$, а второй части — буквой $\zeta$. Функции первой части будут сгруппированы в „пачки", которые, в свою очередь,—в „блоки", а последние — в „контейнеры). $n$-ый „контейнер" состоит из $2^n$ $(n=1, 2,\cdots)$ „блоков". Каждая „блок" $n$-го „контейнера" состоит из $2^{2n}$ „пачек", а каждая из этих „пачек" — из $2^s$ функций. $n$-ый „контейнер" первой части строится с помощью функций

$$\overline{\chi}_i^{(n)}(x)\,(1\leqslant i<2^n);\ \overline{\chi}_i^{(n)}(x)\,r_{\nu_n+j+2}(x)\ \ (1\leqslant i\leqslant 2^n;\ 1\leqslant j\leqslant 2^{2n}-1),$$

$$\overline{\psi}_{2^j+1}(x)\ \ (k_n+1\leqslant j\leqslant k_n+2^n\cdot 2^{2n}(2^n-1)=k_{n+1};\ k_1=-1), \tag{10}$$

где $2^{k_n}+1$ — наибольший индекс тех функций $\overline{\psi}_j(x)$, которые были использованы для построения предыдущих $n-1$ „контнйнеров" первой части и для первых $n-1$ „блоков" второй части. Через $\nu_n$ будем обозначать наибольший номер той „пачки" системы $\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, все функции которой были использованы при построении предыдущих $n-1$ „контейнеров" первой части и $n-1$ „блоков" второй части.

Функции второй части сгруппируем в „пачки", которые, в свою очередь, будут сгруппированы в „блоки". Функции $n$-го „блока" второй части будут построены с помощью всех тех функций системы $\{\overline{\psi}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которые находятся в „пачках" с номерами $\nu_n+1,\ \nu_n+2,\cdots$ $\cdots,\ \nu_n+2^{2n}$ и которые не были использовы при построении $n$ „контейнеров первой части и $n-1$ „блоков" второй части, а также с помощью функций $\overline{\psi}_{2^j+1}(x)$ $(k_n+1\leqslant j\leqslant k_{n+1})$, где величина $k_{n+1}$ будет ясна из конкретного построения функций $n$-го „блока" второй части. Полагаем

$$\varphi_i^{(j,n)}(x)=h_{1i}^{(2n)}\overline{\chi}_j^{(n)}(x)+\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu i}^{(2n)}\overline{\chi}_j^{(n)}(x)\,r_{\nu_n+\nu+2}(x)$$

$$(n=1,\ 2,\cdots;\ 1\leqslant i\leqslant 2^{2n};\ 1\leqslant j\leqslant 2^n). \tag{11}$$

Из условий (6), (5), (1) и (4) получаем

$$|\varphi_i^{(j,n)}(x)|\leqslant\beta\cdot 2^{\frac{n+1}{2}}\ \ (n=1,\ 2,\cdots;\ 1\leqslant j\leqslant 2^n;\ 1\leqslant i\leqslant 2^{2n}).$$

Откуда и из условий (3) и (4) следует, что функции

$$\xi_\nu^{(i,j,n)}(x)=h_{1\nu}^{(n)}\varphi_i^{(j,n)}(x)+\sum_{m=2}^{2^n}h_{m\nu}^{(n)}\overline{\psi}_{2^{l(i,j,n,m)}+1}(x) \tag{12}$$

$$(n=1,\ 2,\cdots;\ 1\leqslant j\leqslant 2^n;\ 1\leqslant i<2^{2n};\ 1<\nu\leqslant 2^n),$$

где

$$l(i,\,j,\,n,\,m)=k_n+(j-1)\,2^{2n}\cdot(2^n-1)+(i-1)(2^n-1)+m-1, \tag{13}$$

равномерно огрзничены на отрезке [0, 1]. Ортонормальность построенной системы очевидно следует из ортогональности матриц $H_k$.

Как было отмечено выше функции второй части группируются в „пачки", которые, в свою очередь, — в „блоки". Построим $n$-ый „блок" второй части. Для этого сначала пронумеруем, сохраняя их прежний порядок друг относительно друга, все те функции системы $\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, которые находятся в „пачках" с номерами $\nu_n+1,\ \nu_n+2,\cdots$ $\cdots,\ \nu_n+2^{2n}$ и которые не были использованы во время построения первых $n$ „контейнеров" системы $\{\xi\}$ и $n-1$ „блоков" системы $\{\zeta\}$. Обозначим эти функции через $g_i^{(n)}(x)\,(1\leqslant i\leqslant\mu_n,\ \mu_0=1)$.

Носители функций $g_i^{(n)}(x)$, т. е. наименьшие интервалы, вне которых $g_i^{(n)}(x)$ тождественно равны нулю, обозначим через $\Gamma_i^{(n)}$, $\Gamma_1^{(0)}=$

$=(1/2,\ 1)$. Функции $i$-ой „пачки“ $n$-го „блока“ второй части определим следующим образом:

$$\zeta_{\nu}^{(i,\ n)}(x)=h_{1\nu}^{(P_i(n))}\,g_i^{(n)}(x)+\sum_{m=2}^{|\Gamma_i(n)|^{-1}}\overline{h}_{m\nu}^{(P_i(n))}\psi_{2q_i(n)+m-1}(x), \tag{14}$$

где

$$P_i(n)=\log_2|\Gamma_i^{(n)}|^{-1}\quad \text{и}\quad q_i^{(n)}=l(2^{2n},\ 2^n,\ n,\ 2^n)+\sum_{m=1}^{i-1}|\Gamma_i^{(m)}|^{-1}.$$

Числа $l(i,\ j,\ n,\ m)$ определяются равенством (13).

Из условий (7), (8), (9), (3) и (4) очевидно следует, что система функций

$$\{\zeta_{\nu}^{(i,\ n)}(x)\}\ (1\leqslant\nu\leqslant|\Gamma_i^{(n)}|^{-1};\ 1\leqslant i\leqslant\mu_n;\ n=1,\ 2,\cdots) \tag{15}$$

равномерно ограничена. Из ортогональности матриц $H_k(k=1,\ 2,\cdots)$ получаем, что система (15) ортонормальна. Искомую систему получим соответствующим образом пронумеровав системы $\{\xi\}$ и $\{\zeta\}$ и прибавив несколько первых функций совокупности $\{\overline{\chi}_n\}\cup\{\overline{\overline{\psi}}_n\}$, которые не были использованы во время построения этих систем. Из условия (10) легко видеть, что при построении систем $\{\xi\}$ и $\{\zeta\}$ не были использованы следующие функции: $\overline{\chi}_1(x)$, $\overline{\chi}_2(x)$ и $\overline{\overline{\psi}}_1(x)$. Полагаем

$$\eta_1(x)=\overline{\chi}_1(x),\ \ \eta_2(x)=\overline{\chi}_2(x),\ \ \eta_3(x)=\overline{\overline{\psi}}_1(x), \tag{16}$$

далее

$$\eta_k(x)=\xi_{\nu}^{(i,\ j,\ n)}(x), \tag{17}$$

если

$$k=\sum_{m=0}^{n-1}2^m\cdot 2^{2m}\cdot 2^m+(j-1)\,2^n\cdot 2^{2n}+(i-1)\,2^n+\nu+\sum_{m=1}^{\mu_{n-1}}|\Gamma_m^{(n-1)}|^{-1}; \tag{18}$$

$$\eta_k(x)=\zeta_{\nu}^{(i,\ n)}(x), \tag{19}$$

если

$$k=\sum_{m=0}^{n}2^m\cdot 2^m\cdot 2^{2m}+\sum_{m=1}^{\mu_{n-1}}|\Gamma_m^{(n-1)}|^{-1}+\sum_{m=1}^{i-1}|\Gamma_m^{(n)}|^{-1}+\nu. \tag{20}$$

Система $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированной полной относительно $L\,[0,\ 1]$ системой функций, так как она получена из полной относительно $L\,[0,\ 1]$ ортонормированной совокупности функций $\{\overline{\chi}_n\}\cup\{\overline{\overline{\psi}}_n\}$ путем разделения последней на конечные части и применения в них ортогональных преобразований.

Докажем, что система $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом во всех пространствах $L^p\,[0,\ 1]$, $1<p<\infty$. В данном случае, ввиду того, что $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна, достаточно доказать базисность системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в пространствах $L^p\ [0,\ 1]$ только при $p>2$. Система $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна относительно $L\,[0,\ 1]$ и ортогональна, следовательно, согласно хорошо известной теореме С. Банаха, для доказательства базисности $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^p\,(0,\ 1]$, $p>2$ остается только доказать, что для любого $p>2$ существует абсолютная константа $C_p$ такая, что для всех функций $f\in L^p[0,1]$

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} c_k(f)\,\eta_k\right\|_{L^p[0,1]}\leqslant C_p\|f\|_{L^p[0,1]}\quad(m=1,2,\cdots),\tag{21}$$

где

$$c_k(f)=\int_0^1 f(t)\,\eta_k(t)\,dt.\tag{22}$$

Множество индексов тех функций системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, которые входят в $n$-ый „контейнер" системы $\{\zeta\}$, обозначим $\Omega^{(n)}$, а множество индексов тех функций, которые входят в $n$-ый „блок" системы $\{\zeta\}$, обозначим через $R_n$. Пусть $f$ — произвольная функция из пространства $L^p[0,1]$, $p>2$. Сначала убедимся в том, что существует некоторая положительная константа $D_p$, для которой выполняется неравенство

$$\Big\|\sum_{k\in\bigcup\limits_{l=1}^{m}(\Omega^{(l)}\cup R_l)} c_k(f)\,\eta_k\Big\|_{L^p[0,1]}\leqslant D_p\|f\|_{L^p[0,1]}(m=1,2,\cdots).\tag{23}$$

Для доказательства (23) сначала заметим, что из неравенства Колмогорова—Хинчина (см. [7], стр. 153) и условий (8), (6) выполняется неравенство

$$\left\|\sum_{l=1}^{m} a_l\,\bar{\bar{\psi}}_{2^l+1}\right\|_{L^p[0,1]}\leqslant B_p\Big(\sum_{l=1}^{m} a_l^2\Big)^{1/2}\ (m=1,2,\cdots),$$

для произвольной последовательности чисел $\{a_l\}_{l=1}^{\infty}$ и константы $B_p>0$. Откуда, учитывая, что $p>2$, получаем

$$\left\|\sum_{l=1}^{m}\int_0^1 f(t)\,\bar{\bar{\psi}}_{2^l+1}(t)\,dt\cdot\bar{\bar{\psi}}_{2^l+1}\right\|_{L^p[0,1]}\leqslant B_p\|f\|_{L^p[1/2,1]}\ (m=1,2,\cdots).\tag{24}$$

Функции Лебега для системы $\{\bar{\bar{\psi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничены (см. [12], стр 302), откуда ввиду того, что $\{\bar{\bar{\psi}}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна относительно $L[1/2,1]$, следует, что $\{\bar{\bar{\psi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом во всех пространствах $L^p[1/2,1]$, $1\leqslant p<\infty$ (см. [14]). Из построения системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ (см. (12) — (20)) и из ортогональности матриц $H_k$ очевидно получаем, что для любого $m\,(m=1,2,\cdots)$ сумма

$$\sum_{k\in\bigcup\limits_{l=1}^{m}(\Omega^{(l)}\cup R_l)} c_k(f)\,\eta_k(x)=\Phi_1^{(m)}(x)+\Phi_2^{(m)}(x)+\Phi_3^{(m)}(x),\tag{25}$$

где $\Phi_1^{(m)}(x)$ — $2^{m+1}$-ая частичная сумма разложения функции $f$ по системе $\{\bar{\chi}_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$, $\Phi_2^{(m)}(x)$ — соответствующая частичная сумма разложения функции $f$ по системе $\{\bar{\bar{\psi}}_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$, и $\Phi_3^{(m)}(x)$ — некоторая часть разложения $f$ по системе $\{\bar{\bar{\psi}}_{2^l+1}(x)\}_{l=1}^{\infty}$. Следовательно, из базисности систем соответственно в пространствах $L^p[0,1/2]$ и $L^p[1/2,1]$, а также из условий (24), (25) получаем (23).

Для произвольного натурального числа $n=1, 2, \cdots$ оценим колебание разложения функции $f$ по системе $\{\xi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ в $n$-ом „контейнере". Множество тех функций системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, которые входят в $j$-ый „блок" $n$-го „контейнера" системы $\{\xi\}$ обозначим $\Omega_j^{(n)}$, $(1 \leqslant j \leqslant 2^n)$. Покажем, что существует некоторая абсолютная константа $D'_p$, для которой

$$\Big\| \sum_{k \in \bigcup_{j=1}^{s} \Omega_j^{(n)}} c_k(f)\, \eta_k \Big\|_{L^p[0,1]} \leqslant D'_p \|f\|_{L^p[0,1]} \quad (1 \leqslant s \leqslant 2^n). \tag{26}$$

Из условий (11), (12) и из ортогональности матриц $H_k$ очевидно имеем

$$\sum_{k \in \bigcup_{j=1}^{s} \Omega_j^{(n)}} c_k(f)\, \eta_k(x) = \sum_{j=1}^{s} \int_0^1 f(t)\, \overline{\chi}_j^{(n)}(t)\, dt \cdot \overline{\chi}_j^{(n)}(x) +$$

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_0^1 f(t)\, \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(x)\, r_{\nu_n+\nu+2}(x) + F_s^{(n)}(x), \tag{27}$$

где $F_s^{(n)}(x)$ — некоторый отрезок ортогонального разложения функции $f$ по системе $\{\psi_{2^i+1}(x)\}_{i=1}^{\infty}$. Из неравенства (24) очевидно имеем

$$\|F_s^{(n)}\|_{L^p[0,1]} \leqslant 2B_p \|f\|_{L^p[0,1]} \quad (1 \leqslant s \leqslant 2^n). \tag{28}$$

Из базисности системы Хаара в $L^p[0,1]$ и из (5) очевидно следует существование абсолютной константы $K_p > 0$, для которой

$$\Big\| \sum_{j=1}^{s} \int_0^1 f(t)\, \overline{\chi}_j^{(n)}(t)\, dt \cdot \overline{\chi}_j^{(n)}(x) \Big\|_{L^p[0,1]} \leqslant K_p \|f\|_{L^p[0,1]} \tag{29}$$

Из условий (1), (2), (6), используя неравенства Колмогорова — Хинчина, Бесселя и Гельдера, для любого $s$, $1 \leqslant s \leqslant 2^n$, получаем

$$\int_0^1 \Big| \sum_{j=1}^{s} \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_0^1 f(t)\, \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(x)\, r_{\nu_n+\nu+2}(x) \Big|^p dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \int_{\overline{\Delta}_j^{(n)}} \Big| \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_{\overline{\Delta}_j^{(n)}} f(t)\, \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(x)\, r_{\nu_n+\nu+2}(x) \Big|^p dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} 2^{\frac{p-2}{2}(n+1)} \int_{\overline{\Delta}_j^{(n)}} \Big| \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_{\overline{\Delta}_j^{(n)}} f(t)\, \overline{\overline{\chi}}_i^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot r_{\nu_n+\nu+2}(x) \Big|^p \cdot 2^{n+1}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_p \sum_{j=1}^{s} 2^{\frac{p-2}{2}(n+1)} \Big( \int_{\overline{\Delta}_j^{(n)}} |f(t)|^2 dt \Big)^{p/2} \leqslant C_p \sum_{j=1}^{s} \int_{\overline{\Delta}_j^{(n)}} |f(t)|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant C_p \int_{1/2}^1 |f(t)|^p\, dt. \tag{30}$$

Здесь и в дальнейшем через $\overline{\overline{\Delta}}_j^{(n)}$, $\overline{\Delta}_j^{(n)}$ обозначаем носители функций $\overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}$, $\overline{\chi}_j^{(n)}$. Отсюда и из условий (27), (28), (29) сразу следует неравенство (26). Теперь докажем, что существует абсолютная константа, для которой при всех $n=1, 2,\cdots$ и $1 \leqslant j \leqslant 2^n$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\| \sum_{l=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{2^n} \int_0^1 f(t)\, \xi_\nu^{(l,j,n)}(t)\, dt \cdot \xi_\nu^{(l,j,n)} \right\|_{L^p[0,1]} \leqslant K_p \|f\|_{L^p[0,1]} \quad (1 \leqslant m \leqslant 2^{2n}). \quad (31)$$

Из ортогональности матриц $H_k$ и из условий (11), (12) имеем

$$\sum_{l=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{2^n} \int_0^1 f(t)\, \xi_\nu^{(l,j,n)}(t)\, dt \cdot \xi_\nu^{(l,j,n)}(x) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \int_0^1 f(t)\, \varphi_l^{(j,n)}(t)\, dt \cdot \varphi_l^{(j,n)}(x) + F_{j,m}^{(n)}(x), \quad (32)$$

где $F_{j,m}^{(n)}(x)$ — некоторый отрезок разложения функции $f$ по системе $\{\psi_{2^l+1}(x)\}_{l=1}^{\infty}$. Как и выше из неравенства (24) имеем

$$\|F_{j,m}^{(n)}\|_{L^p[0,1]} \leqslant 2B_p \|f\|_{L^p[0,1]}. \quad (33)$$

Из условий (11) и (3) для $1 \leqslant m \leqslant 2^{2n}$ получаем

$$\left\| \sum_{l=1}^{m} \int_0^1 f(t)\, \varphi_l^{(j,n)}(t)\, dt \cdot \varphi_l^{(j,n)} \right\|_{L^p[0,1/2]}^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \left\| \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2^n} \int_0^{1/2} f(t)\, \overline{\chi}_j^{(n)}(t)\, dt \cdot \frac{1}{2^n} \overline{\chi}_j^{(n)} \right\|_{L^p[0,1/2]}^p +$$

$$+ 2^p \left\| \sum_{l=1}^{m} \int_{1/2}^1 f(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu l}^{(2n)} \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \frac{1}{2^n} \overline{\chi}_j^{(n)} \right\|_{L^p[0,1/2]} \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \left(\frac{m}{2^{2n}}\right)^p \cdot 2^{\frac{n+1}{2}p} \cdot \left(2^{\frac{n+1}{2}\left(\frac{p}{p-1}-1\right)}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{1/2} |f(t)|^p\, dt +$$

$$+ 2^p \left\| \int_{1/2}^1 f(t) \sum_{l=1}^{m} \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu l}^{(2n)} \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \frac{1}{2^n} \overline{\chi}_j^{(n)} \right\|_{L^p[0,1/2]}^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \left(\frac{m}{2^{2n}}\right)^p \int_0^{1/2} |f(t)|^p\, dt + \frac{2^p \cdot 2^{\frac{p(n+1)}{2}}}{2^{n+1} \cdot 2^{pn}} \left| \int_{1/2}^1 f(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t) \sum_{l=1}^{m} h_{\nu l}^{(2n)}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \left(\frac{m}{2^{2n}}\right)^p \int_0^{1/2} |f(t)|^p\, dt +$$

$$+ 2^{\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}} \cdot 2^{-n\frac{p+2}{2}} \left| \int_{1/2}^{1} f(t) \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} r_{\nu_n+\nu+2}(t) \sum_{l=1}^{m} h_{\nu l}^{(2n)} dt \right|. \quad (34)$$

Из определения матриц $H_k$ легко видеть, что для произвольного $1 \leqslant m \leqslant 2^{2n}$ сумма

$$\sum_{l=1}^{m} h_{\mu_k l}^{(2n)} \neq 0$$

только для $2n-1$ штук чисел $\mu_k$ $(2^{k-1}+1 \leqslant \mu_k < 2^{k+1})$, $k=1, 2, \cdots$ $\cdots, 2n-1$, а для остальных $\nu$ $(\nu \neq \mu_k)$

$$\sum_{l=1}^{m} h_{\nu l}^{(2n)} = 0.$$

Следовательно

$$\left| \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} r_{\nu_n+\nu+2}(x) \sum_{l=1}^{m} h_{\nu l}^{(2n)} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{2n-1} 2^{-\frac{2n+1-k}{2}} \cdot 2^{2n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{2n-1} 2^{n-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \leqslant 2^{n+1}. \quad (35)$$

Отсюда

$$\left| \int_{1/2}^{1} f(t) \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} r_{\nu_n+\nu+2}(t) \sum_{l=1}^{m} h_{\nu l}^{(2n)} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{n+1} \left[2^{\frac{n+1}{2}q} \cdot 2^{-(n+1)}\right]^{1/q} \left[ \int_{1/2}^{1} |f(t)|^p \, dt \right]^{1/p} =$$

$$= 2^{(n+1)(1/2+1/p)} \left[ \int_{1/2}^{1} |f(t)|^p \, dt \right]^{1/p}.$$

Отсюда и из (34) сразу получаем

$$\left\| \sum_{l=1}^{m} \int_{0}^{1} f(t) \varphi_l^{(j,n)}(t) \, dt \cdot \varphi_l^{(j,n)} \right\|_{L^p[0,1/2]}^{p} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2(p+1)} \int_{0}^{1/2} |f(t)|^p \, dt \quad (1 \leqslant m \leqslant 2^{2n}). \quad (36)$$

Оценивая норму интересующего нас выражения на отрезке $[1/2, 1]$, для $1 \leqslant m \leqslant 2^{2n}$ получаем

$$\left\| \sum_{l=1}^{m} \int_{0}^{1} f(t) \varphi_l^{(j,n)}(t) \, dt \cdot \varphi_l^{(j,n)} \right\|_{L^p[1/2,1]}^{p} \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \left\| \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2^n} \int_{0}^{1/2} f(t) \overline{\chi}_j^{(n)}(t) \, dt \cdot \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu l}^{(2n)} \overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(x) \, r_{\nu_n+\nu+2}(x) \right\|_{L^p[1/2,1]}^{p} +$$

$$+2^{p}\left|\sum_{l=1}^{m}\int_{1/2}^{1}f(t)\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}\overline{\overline{\chi}}_{j}^{(n)}(t)\,r_{\nu_n+\nu+2}(t)\,dt\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}\overline{\overline{\chi}}_{j}^{(n)}(x)\,r_{\nu_n+\nu+2}(x)\right\|_{L^p\,(1/2,\,1)}. \tag{37}$$

Используя неравенство (35), получим

$$\left\|\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{2^n}\int_{0}^{1/2}f(t)\,\overline{\chi}_j^{(n)}(t)\,dt\cdot\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}\overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(x)\,h_{\nu l}^{(2n)}\,r_{\nu_n+\nu+2}(x)\right\|_{L^p\,[1/2,\,1]}^{p}=$$

$$=\frac{1}{2^{np}}\left|\int_0^{1/2}f(t)\,\overline{\chi}_j^{(n)}(t)\,dt\right|^p\left\|\overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(x)\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}r_{\nu_n+\nu+2}(t)\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}\right\|_{L^p\,[1/2,\,1]}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{np}}\left(2^{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{p}{p-1}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{p-1}\cdot 2^{(n+1)\,p}\cdot 2^{\frac{n+1}{2}\,p}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\int_0^{1/2}|f(t)|^p\,dt=$$

$$=2^p\int_0^{1/2}|f(t)|^p\,dt. \tag{38}$$

Обозначим через $T_j^{(n)}$ линейное отображение интервала $\overline{\overline{\Delta}}_j^{(n)}$ на (0, 1). Из неравенства Колмогорова—Хинчина путем несложных преобразований получим

$$\left\|\sum_{l=1}^{m}\int_{1/2}^{1}f(t)\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}\overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t)\,r_{\nu_n+\nu+2}(t)\,dt\cdot\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}\overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}\,r_{\nu_n+\nu+2}\right\|_{L^p\,(1/2,1)}^{p}=$$

$$=2^{\frac{p}{2}(n+1)}\left\|\sum_{l=1}^{m}\int_{1/2}^{1}f(t)\,\overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t)\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}\,r_{\nu_n+\nu+2}(t)\,dt\cdot\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}r_{\nu_n+\nu+2}\right\|_{L^p\left[\overline{\overline{\Delta}}_j^{(n)}\right]}^{p}=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\,2^{\frac{p}{2}(n+1)}\left\|\sum_{l=1}^{m}\int_{1/2}^{1}f(t)\,\overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t)\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}\,r_{\nu_n+\nu+2}(t)\,dt\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}\,r_{\nu_n+\nu+2}\,(T_j^{(n)}x)\right\|_{L^p[0,\,1]}^{p}\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}\,2^{\frac{p}{2}(n+1)}\,C_p\times$$

$$\times\left\|\sum_{l=0}^{m}\int_{1/2}^{1}f(t)\,\overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t)\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}\,r_{\nu_n+\nu+2}(t)\,dt\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}r_{\nu_n+\nu+2}\,(T_j^{(n)}x)\right\|_{L^2\,[0,1]}^{p}=$$

$$=\frac{2^{(n+1)\frac{p}{2}}}{2^{n+1}}\cdot 2^{\frac{p}{2}(n+1)}\,C_p\left|\sum_{l=1}^{m}\int_{1/2}^{1}f(t)\,\overline{\overline{\chi}}_j^{(n)}(t)\sum_{\nu=2}^{2^{2n}}h_{\nu l}^{(2n)}r_{\nu_n+\nu+2}(t)\,dt\times\right.$$

$$\times \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu l}^{(2n)} r_{\nu_n+\nu+2} \Big|_{L^p\left(\bar{\Delta}_j^{(m)}\right)}^{p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{(n+1)\frac{p}{2}}}{2^{n+1}} C_p \left\| \sum_{l=1}^{m} \int_{1/2}^{1} f(t) \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu l}^{(2n)} r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \varphi_l^{(j,n)} \right\|_{L^p[0,1]}^{p} =$$

$$= \frac{2^{(n+1)\frac{p}{2}}}{2^{n+1}} C_p \left[ \sum_{l=1}^{2^{2n}} \left( \int_{1/2}^{1} f(t) \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu l}^{(2n)} r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \right)^2 \right]^{p/2}. \qquad (39)$$

Из ортогональности матриц $H_k$ и из ортонормированности функций $\{\bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(x)\, r_{\nu_n+\nu+2}(x)\}_{\nu=2}^{2^{2n}}$ очевидно имеем

$$\sum_{l=1}^{2^{2n}} \int_{1/2}^{1} f(t) \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(x)\, r_{\nu_n+\nu+2}(x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_{1/2}^{1} f(t) \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(x)\, r_{\nu_n+\nu+2}(x),$$

откуда следует, что

$$\sum_{l=1}^{2^{2n}} \left( \int_{1/2}^{1} f(t) \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu l}^{(2n)} r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \right)^2 =$$

$$= \left\| \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_{1/2}^{1} f(t) \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}\, r_{\nu_n+\nu+2} \right\|_{L^2\left[\bar{\Delta}_j^{(n)}\right]}^{2}.$$

Отсюда и из условий (39), (30) получим

$$\left\| \sum_{l=1}^{m} \int_{1/2}^{1} f(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu l}^{(2n)} \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu l}^{(2n)} \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)} r_{\nu_n+\nu+2} \right\|_{L^p(1/2,1)}^{p} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(n+1)\left(\frac{p}{2}-1\right)} C_p \left\| \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_{1/2}^{1} f(t) \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)} r_{\nu_n+\nu+2} \right\|_{L^2\left(\bar{\Delta}_j^{(n)}\right)}^{p} \leqslant$$

$$\leqslant C_p \left\| \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_{1/2}^{1} f(t) \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)}(t)\, r_{\nu_n+\nu+2}(t)\, dt \cdot \bar{\bar{\chi}}_j^{(n)} r_{\nu_n+\nu+2} \right\|_{L^p\left[\bar{\Delta}_j^{(n)}\right]}^{p} \leqslant$$

$$\leqslant C_p \int_{1/2}^{1} |f(t)|^p\, dt. \qquad (40)$$

Из условий (37), (38) и (40) следует

$$\left\| \sum_{l=1}^{m} \int_{0}^{1} f(t)\, \varphi_l^{(j,n)}(t)\, dt \cdot \varphi_l^{(j,n)} \right\|_{L^p(1/2,1)}^{p} \leqslant C_p \int_{1/2}^{1} |f(t)|^p\, dt. \qquad (41)$$

Неравенство (31) сразу следует из условий (32), (33), (36) и (41). Из (12) и (14) с помощью неравенства Колмогорова—Хинчина и определения матриц $H_k$, как и выше, для любых $n=1, 2,\cdots; 1\leqslant j\leqslant 2^n, 1\leqslant \leqslant i\leqslant 2^{2n}$ получаем

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{m} \int_0^1 f(t)\, \xi_\nu^{(i,j,n)}(t)\, dt\, \xi_\nu^{(i,j,n)} \right\|_{L^p(0,1)} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(0,1)} \quad (1\leqslant m\leqslant 2^n) \tag{42}$$

и для $n=1, 2,\cdots; 1\leqslant i<\mu_n$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{m} \int_0^1 f(t)\, \xi_\nu^{(i,n)}(t)\, dt\cdot \zeta_\nu^{(i,n)} \right|_{L^p(0,1)} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(0,1)} \quad (1\leqslant m\leqslant |\Gamma_i^{(n)}|^{-1}). \tag{43}$$

Из неравенств (23), (26), (31), (42), (43) и из условий (17)—(20) сразу следует (21). Таким образом, базисность системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в пространствах $L^p(0,1)$, $1<p<\infty$, доказана.

## § 2. Доказательство теоремы 2

Покажем, что для системы $\{\eta_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ можно найти ограниченную функцию $M(x)$ такую, что $\{M(x)\,\eta_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ являлась бы базисом во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1<p<\infty$. Для этого сначала приведем формулировку теоремы 4 работы [4], которую мы существенно используем для доказательства теоремы 2 настоящей работы.

Теорема А. Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара. Тогда система $\{M(x)\,\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$, где

$$M(x)=2^{-n}, \text{ при } x\in(1/2^{n+1}, 1/2^n)\ (n=1, 2,\cdots)$$

является базисом во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1<p<\infty$.

Из леммы 1 и условия (3.11) работы [4] имеем также, что сопряженная к $\{M(x)\,\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ система $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ определяется равенством

$$\psi_n(x)=\begin{cases} [M(x)]^{-1}\,[\chi_n(x)-2^{k/2}], & \text{если } n=2^k+1,\ k=0, 1, 2,\cdots \\ \chi_n(x)\,[M(x)]^{-1}, & \text{если } n\neq 2^k+1,\ k=0,1,\cdots. \end{cases}$$

В качестве искомой функции $M(x)$ возьмем функцию $M$ из теоремы А. Сначала убедимся, что система $\{M(x)\,\eta_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ замкнута и минимальна во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1<p<\infty$. Для этого проверим выполнение условий теоремы 1 работы [4]. Очевидно, что $\eta_1(x)[M(x)]^{-1}$ не интегрируема на $[0,1]$, следовательно не принадлежит ни одному из пространств $L^q[0,1]$, $1<q<\infty$. Из определения функции $M(x)$ и условий (11), (12), (14), (16)—(20) легко видеть, что функции $\theta_k(x)$ $(1\leqslant k<\infty)$, которые определяются следующим условием:

$$\theta_k(x)=\begin{cases} \left[\eta_k(x)-\dfrac{1}{2^n}\eta_1(x)\right][M(x)]^{-1}, & \text{если } k\in\Omega_1^{(n)},\ n=1,2,\cdots \\ \eta_k(x)\,[M(x)]^{-1}, & \text{если } k\notin\Omega_1^{(n)},\ n=1,2,\cdots \end{cases} \tag{44}$$

ограничены. Условия теоремы 1 работы [4] выполняются. Таким образом, замкнутость и минимальность системы $\{M(x)\eta_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ в пространствах $L^p[0,1]$, $1<p<\infty$, доказана.

Докажем, что существует такая абсолютная константа $B_p>0$, зависящая только от параметра $p$, для которой, если $f\in L^p[0,1]$

$$\left\|\sum_{k=2}^{N} a_k M\eta_k\right\|_{L^p(0,1)} \leqslant B_p \|f\|_{L^p(0,1)}, \tag{45}$$

где

$$a_k=\int_0^1 f(t)\,\theta_k(t)\,dt.$$

Так как $M(x)=1$ при $x\in(1/2,1)$, то из построения системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ легко вывести, что при $n=1,2,\cdots;\ 1\leqslant j\leqslant 2^n$

$$\sum_{k\in\Omega_j^{(n)}} a_k M(x)\,\eta_k(x)\equiv\sum_{k\in\Omega_j^{(n)}} c_k\,\eta_k(x),\ \text{при}\ x\in(1/2,1],$$

где коэффициенты $c_k$ определяются условием (22). Отсюда учитывая, что $a_k M(x)\,\eta_k(x)\equiv c_k\,\eta_k(x)$, для тех чисел $k$, которые определяются условием (20), и при $x\in[0,1/2)$

$$\sum_{k\in\Omega_j^{(n)}} a_k M(x)\,\eta_k(x)=$$

$$=\int_0^{1/2} f(t)\,[\bar{\chi}_n^{(1)}(t)-2^{n/2}\bar{\chi}_1(t)][M(t)]^{-1}\,dt\cdot M(x)\,\bar{\chi}_n^{(1)}(x), \tag{46}$$

$$\sum_{k\in\Omega_j^{(n)}} a_k M(x)\,\eta_k(x)=\int_0^{1/2} f(t)\,\bar{\chi}_j^{(n)}(t)\,[M(t)]^{-1}\,dt\cdot M(x)\,\bar{\chi}_n^{(j)}(x). \tag{47}$$

Из определения системы функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, сопряженной к $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$, теоремы A, базисности системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^p[0,1]$ и из условий (11), (12) настоящей работы получаем, что для доказательства неравенетва (45) остается только оценить нормы в $L^p[0,1]$ следующих выражений:

$$\sum_{\nu=1}^{m}\int_0^1 f(t)\left[\xi_\nu^{(i,1,n)}(t)-\frac{1}{2^n}\bar{\chi}_1(x)\right][M(t)]^{-1}\,dt\cdot M(x)\,\xi_\nu^{(i,1,n)}(x), \tag{48}$$

$$\sum_{\nu=1}^{m}\int_0^1 f(t)\,\xi_\nu^{(i,j,n)}(t)\,[M(t)]^{-1}\,dt\cdot M(x)\,\xi_\nu^{(i,j,n)}(x) \tag{49}$$

$$(n=1,2,\cdots;\ 2\leqslant j\leqslant 2^n,\ 1\leqslant i\leqslant 2^{2n};\ 1\leqslant m\leqslant 2^n).$$

Как и выше легко убедиться, что отрезки ортогонального и биортогонального разложений некоторой функции $f\in L^p[0,1]$ соответственно по системам $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{M(x)\,\eta_k\}_{k=2}^{\infty}$, состоящие в первом случае из функций некоторого „блока" системы $\{\xi\}$, а во-втором — из тех же функций, умноженных на $M(x)$, совпадают на интервале $(1/2, 1]$. Из (46), (47) очевидно также, что при $x\in[0, 1/2]$

$$\sum_{\nu=1}^{2^n}\int_0^1 f(t)\left[\xi_\nu^{(l,1,n)}(t)-\frac{1}{2^n}\bar{\chi}_1(t)\right][M(t)]^{-1}\,dt\cdot M(x)\,\xi_\nu^{(l,1,n)}(x)=$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\int_0^{1/2} f(t)\,[\bar{\chi}_n^{(1)}(t)-2^{n/2}\,\bar{\chi}_1(t)]\,[M(t)]^{-1}\,dt\cdot M(x)\,\bar{\chi}_n^{(1)}(x),$$

$$\sum_{\nu=1}^{2^n}\int_0^1 f(t)\,\xi_\nu^{(l,j,n)}(t)\,[M(t)]^{-1}\,dt\cdot M(x)\,\xi_\nu^{(l,j,n)}(x)=$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\int_0^{1/2} f(t)\,\bar{\chi}_n^{(j)}(t)[M(t)]^{-1}\,dt\cdot M(x)\,\bar{\chi}_n^{(j)}(x)$$

$$(n=1, 2,\cdots;\ 2\leqslant j\leqslant 2^n;\ 1\leqslant i\leqslant 2^{2n}).$$

Таким образом, имеют место следующие неравенства:

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{2^n}\int_0^1 f(t)\left[\xi_\nu^{(l,1,n)}(t)-\frac{1}{2^n}\bar{\chi}_1(x)\right][M(t)]^{-1}\,dt\cdot M\,\xi_\nu^{(l,1,n)}\right\|_{L^p(0,1)}\leqslant$$

$$\leqslant B_p\|f\|_{L^p(0,1)}, \tag{50}$$

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{2^n}\int_0^1 f(t)\,\xi_\nu^{(l,j,n)}(t)\,[M(t)]^{-1}\cdot M\,\xi_\nu^{(l,j,n)}\right\|_{L^p(0,1)}\leqslant B_p\|f\|_{L^p(0,1)}.$$

Выражения (48) и (49) оцениваются идентично, поэтому нужные рассуждения проведем только для (48). Из базисности системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^p(0,1)$, базисности системы $\{M(x)\,\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ в $L^p(0, 1/2)$ (см. теорему 4 работы [4]), ввиду того, что функции системы $\{\bar{\chi}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ принимают значение нуль на $(1/2, 1)$ и функция $M(x)$ на этом интервале равна единице, очевидно, что достаточно оценить сумму

$$\sum_{\nu=1}^{m}\int_0^{1/2} f(t)\left[\xi_\nu^{(l,1,n)}(t)-\frac{1}{2^n}\bar{\chi}_1(t)\right][M(t)]^{-1}\,dt\cdot M(x)\,\xi_\nu^{(l,1,n)}(x)$$

в $L^p(1/2, 1)$ и сумму

$$\sum_{\nu=1}^{m}\int_{1/2}^{1} f(t)\left[\xi_\nu^{(l,1,n)}(t)-\frac{1}{2^n}\bar{\chi}_1(t)\right][M(t)]^{-1}\,dt\cdot M(x)\,\xi_\nu^{(l,1,n)}(x)$$

в $L^p(0, 1/2)$. Из (11), (12) и (3) получаем

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{m} \int_{0}^{1/2} f(t) \left[ \xi_{\nu}^{(l,1,n)}(t) - \frac{1}{2^n} \bar{\gamma}_1(t) \right] [M(t)]^{-1} dt \cdot M \xi_{\nu}^{(l,1,n)} \right\|_{L^p(1/2,1)} =$$

$$= \left\| \int_{0}^{1/2} f(t) \left[ \xi_{\nu}^{(l,1,n)}(t) - \frac{1}{2^n} \bar{\gamma}_1(t) \right] [M(t)]^{-1} dt \cdot \sum_{\nu=1}^{m} M \xi_{\nu}^{(l,1,n)} \right\|_{L^p(1/2,1)} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \left\| \int_{0}^{1/2} f(t) \, [2^{-\frac{n}{2}} \bar{\gamma}_n^{(1)}(t) - \bar{\gamma}_1(t)] [M(t)]^{-1} dt \cdot \sum_{\nu=1}^{m} \xi_{\nu}^{(l,1,n)} \right\|_{L^p(1/2,1)} \leqslant$$

$$\leqslant C_p \|f\|_{L^p(1/2,1)}.$$

Выражение (52) в $L^p(0, 1/2)$ оценивается подобным образом. Таким образом, неравенство (45) доказано. Тем самым доказательство теоремы 2 завершено.

Замечание 1. Используя известные результаты о мультипликативном дополнении до базисов в $L^p(0,1)$ подсистем системы Хаара (см. [5], [6]), подобным образом как и выше можно доказать, что удаляя из системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ конечный набор функций, линейно независимых на отрезке [0, 1/2], оставшуюся систему функций можно умножением на ограниченную функцию превратить в базис пространства $L^p(0,1)$, $1<p<\infty$.

Замечание 2. Удаляя из системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ конечный набор функций, которые на отрезке [0, 1/2] являются линейно зависимыми, можно показать, что оставшуюся систему функций невозможно умножением на какую-либо функцию превратить в базис пространства $L^p(0, 1)$, $1<p<\infty$. Это делается с помощью таких же рассуждений, что и в доказательстве теоремы 1 (см. [4]). В данном случае нужно использовать конструктивные особенности системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Замечание 3. Из двух предыдущих замечаний следует, что система $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ обладает также следующим свойством:

из нее можно удалить некоторый конечный набор функций таким образом, чтобы оставшуюся систему функций было невозможно умножением на какую-либо функцию превратить в базис пространства $L^p(0,1)$ для какого-нибудь $p$, $1<p<\infty$, в том случае, когда удалив из системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ любую функцию из выбранного набора (может еще некоторые их комбинации) оставшуюся систему можно умножением на ограниченную функцию превратить в базис пространства $L^p(0,1)$, $1<p<\infty$.

В заключение отметим, что рассмотренный вопрос давольно тесно взаимосвязан с вопросом существования почти всюду расходящегося ряда Фурье по полной равномерно ограниченной ортонормированной системе (см. [15]). На первый взгляд между этими вопросами нет ничего общего, но дело в том, что оба эти вопроса зависят от поведения рядов Фурье $\delta$-функций. Некоторым подтверждением вышесказанного может служить тот факт, что в основу примера построенного автором равномерно ограниченной ортонормированной системы, все ряды Фурье по которой сходятся на фиксированном множестве положительной меры (см. [16]), лежит та же идея, которая положена в основу примера, построенного в настоящей работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.VII.1982

Կ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. *Հավասարաչափ սահմանափակ օրթոնորմավորված սիստեմների մուլտիպլիկատիվ լրացումը մինչև բազիսներ $L^p$-ում, $1 \leqslant p < +\infty$* (*ամփոփում*)

*Հեղինակի նախորդ աշխատանքներում ([4], [5], [6]) ուսումնասիրվել է ոչ լրիվ օրթոնորմավորված սիստեմների մինչև $L^p$-ում, $1 \leqslant p < \infty$, բազիսներ մուլտիպլիկատիվ լրացման հարցը։*

*Մասնավորապես ապացուցվել է (տես [4], [5]), որ եթե լրիվ օրթոնորմավորված սիստեմը հավասարաչափ սահմանափակ է և բավարարում է (A) պայմանին, ապա այդ սիստեմից ցանկացած վերջավոր թվով ֆունկցիաներ հեռացնելուց հետո մնացած համակարգը հնարավոր չէ մուլտիպլիկատիվ եղանակով դարձնել $L^p$-ի բազիս ցանկացած $p (1 < p < \infty)$-ի համար։ Այդ պայմաններին բավարարում են այնպիսի սիստեմներ ինչպիսին են եռանկյունաչափական սիստեմը, Ուոլշի սիստեմը և այլն։*

*Ներկա աշխատանքում կառուցված է լրիվ հավասարաչափ օրթոնորմավորված սիստեմի օրինակը, որից վերջավոր թվով ֆունկցիան հեռացնելուց հետո, մնացած համակարգը կարելի է միևնույն սահմանափակ ֆունկցիայով բազմապատկելով դարձնել բազիս բոլոր $L_p, 1 < p < \infty$ տարածություններում։ Որտեղից հետևում է, որ [4]-ում ապացուցված թեորեմը վերջնական բնույթ ունի։*

K. S. KAZARIAN. *Multiplicative completion of bounded orthogonal systems to bases in the spaces* $L^p$, $1 < p < \infty$ (summary)

The problem of multiplicative conplition of incomplete orthonormal systems to basis in the spaces $L^p$, $1 < p < \infty$ was considered in the previous articles of the author ([4], [5], [6]).

It was proved (see [4], [5]), that if a complete bounded orthonormal system satisfies the condition (A), then after deleting any finite number of functions from that systemit is impossible to multiplicatively complete the remaining set of functions to a basis in any space $L^p$, $1 < p < \infty$. The trigonometric system and the Walsh system satisfies to these conditions.

In this work an example of bounded complete orthogonal system is constructed for which it is possible to get a basis in every space $L^p$ [0, 1], $1 < p < \infty$, deleting from it a finite number of functions and multiplying the remaining set by a bounded function. This example shows that in a sense the theorem proved in [4] is final.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *R. P. Boas, H. Pollard.* The multiplicative Completion of sets of functions, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 1948, 518—522.
2. *J. J. Price, R. E. Zink.* On sets of functions that can be multiplicatively completed, Ann. of Math., (2), 82, 1965, 139—145.
3. *Ben-Ami Braun.* On the multiplicative completion of certain basic sequences in $L^p$, $1 < p < \infty$ Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1975.
4. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в $L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, Annal., Math., 4, № 1, 1978, 37—52.
5. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении некоторых систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 13, № 4, 1978, 315—351.
6. *K. S. Kazarian.* On bases and uncoditional bases in the $L^p(d\mu)$, $1 < p < \infty$ spaces, Studia Math., 71, № 3, 1981, 227—249.

7. *С. Качмаж и Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., Гостехиздат, 1958.
8. *К. С. Казарян.* Логарифмический рост средних арифметических от сумм функций Лебега ограниченных биортогональных систем, ДАН Арм.ССР, 69, 1979, 140—145.
9. *А. С. Кранцберг.* О системах сходимости в $C$ и базисности в $L^1$, Мат. заметки. т. 26, № 2, 1979.
10. *S. Kwapien, S. J. Szarek.* An estimation of the Lebesque functions of biorthogonal systems with an application to the non-existence of some bases in $C$ and L., Stud. Math., 66, № 2, 1979, 185—200.
11. *У. Гренандер и Г. Тегё.* Теплицевы формы и их приложения, М., ИЛ, 1961.
12. *А. М. Олевский.* Об одной ортонормальной системе и ее применениях, Мат. сб., 71. 113, № 3, 1966, 297—336.
13. *A. M. Olevskii.* Fourier series with respect to general orthonormal systems, Springer—Verlag, 1975.
14. *П. Л. Ульянов.* Некоторые вопросы теории ортогональных и биортогональных рядов, Изв. АН Аз.ССР, сер. матем., 30, 1965, 3—13.
15. *С. В. Бочкарев.* Метод усреднений в теории ортогональных рядов и некоторые вопросы теории базисов, Тр. МИАН, М., «Наука», 1978, 3—87.
16. *К. С. Казарян.* О некоторых вопросах теории ортогональных рядов, Мат. сб.. 119 (161), № 2 (10), 1982, 278—294.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 5, 1983 Математика

УКД 517.957

С. Г. РУБАНОВИЧ

# О ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $G$ — ограниченная область в $R^n$ с границей $\Gamma \in C^1$. В настоящей статье будет изучена краевая задача в $G\times[0, T]$ для линейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x, t) = F(t, u), \tag{0.1}$$

$$\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n} + u|_\Gamma = 0, \tag{0.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{0.3}$$

где $F(t, u)$ и $\alpha(x)$ — непрерывные функции, $\alpha(x)\geqslant 0$ на $\Gamma$; $L$ — эллиптический оператор:

$$Lu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \tag{0.4}$$

причем для всех $x\in G$ и $(\xi_1, \cdots, \xi_n)\in R^n$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant k\sum_{j=1}^n \xi_j^2;\ k = \text{const} > 0,$$

коэффициенты $a_{ij}(x)\in C^1(G)$; $b_j(x)\in C(G)$; $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали. Всегда будем предполагать, что $F(t, 0)\geqslant 0$ при $0\leqslant t<\infty$.

Нас интересует такое наибольшее значение $T_0$, что в цилиндре $G\times[0, T]$ существует классическое решение задачи (0.1)—(0.3). В параграфе 2 методом, названным „метод квазилинеаризации", строятся верхнее и нижнее решения задачи (0.1)—(0.3), благодаря чему удается найти достаточно точные оценки сверху и снизу для $T_0$. Построенные верхнее и нижнее решения во многих случаях отличаются настолько мало, что их можно считать решением задачи (0.1)—(0.3). § 1 посвящен сравнению решений задачи с различными функциями $F(t, u)$ и $u_0(x)$, откуда следует единственность решения даже в том случае, когда $F(t, u)$ не удовлетворяет по $u$ условию Липшица. В § 4 выясняются условия устойчивости решения задачи (0.1)—(0.3), когда $T_0=\infty$, относительно возмущения $u_0(x)$ и $F(t, u)$, при условии, что первоначальная функция $F(t, u)$ вогнута относительно $u$. Эти условия оказались совпадающими с условиями разрешимости задачи (0.1) — (0.3) в окрестности (в пространстве $C$) функций $u_0(x)$ и $F(t, u)$ (см. т. 3.3 и следствие 3.4), которые легко записываются в явном виде благодаря результатам § 2. § 3 посвящен случаю, когда $F(t, u) = F(u)$; $T_0 = \infty$, и изучаются условия стабилизации решения $u(x, t)$ при $t \to \infty$ к решению эллиптической задачи в $G$:

$$Lv + F(v) = 0; \ \alpha(x)\frac{\partial v}{\partial n} + v|_\Gamma = 0. \tag{0.5}$$

Условия стабилизации наиболее хорошо выглядят в случае вогнутой функции $F(u)$. Тогда они совпадают с условиями разрешимости задачи (0.1) — (0.3) в окрестности (в пространстве $C$) функций $F(u)$ и $u_0$ и легко проверяются с помощью результатов § 2. При этом, стабилизация происходит с показательной скоростью и получены явные оценки скорости стабилизации.

§ 5 посвящен получению оценок линейных задач, используемых в „методе квазилинеаризации" (см. дальше введение).

Задача такого рода возникла перед автором при изучении процесса теплового пробоя конденсаторов. Настоящая статья содержит математическое обоснование методов, применявшихся в работах [1, 2]. Все рассмотренные вопросы изучались многими авторами [см. [3, 6] и цитированную там литературу). Предлагаемый подход к каждому из них отличается от применявшихся ранее и дает, конкретно для задачи (0.1) — (0.3), более точные результаты.

В дальнейшем удобно будет пользоваться терминологией линейных полугрупп [7]. Обозначим через $U(t)$, $t \geqslant 0$ полугруппу операторов краевой задачи в $G \times [0, \infty)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0; \ \alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n} + u|_\Gamma = 0 \tag{0.6}$$

(т. е. $U(t)\,u_0(x) = u(x, t)$, где $u(x, t)$ удовлетворяет (0.6) и (0.3)) Известно, что оператор $U(t)$ положителен (сохраняет конус положительных функций). Поэтому

$$\|U(t)\|_C = \max_{x \in G} u(x, t) \leqslant M_\lambda e^{-\lambda t}, \tag{0.7}$$

где $u(x, t)$ есть решение (0.6) с

$$u(x, 0) = 1; \tag{0.8}$$

$\lambda$ — любое число из интервала $0 < \lambda \leqslant \lambda_1$, где $\lambda_1$ — первое собственное число краевой задачи

$$L\varphi + \lambda\varphi = 0; \ \alpha(x)\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varphi|_\Gamma = 0, \tag{0.9}$$

$M_\lambda$ — постоянная, которая будет часто фигурировать в формулировках результатов. Если известна $M_{\lambda_1}$, то с помощью теоремы о трех прямых [8, стр. 560] нетрудно получить

$$M_\lambda = M_{\lambda_1}^{\lambda/\lambda_1}. \tag{0.10}$$

В § 5 для $L = \Delta$ (оператор Лапласа) для сферически симмет-ных задач в $n$-мерном шаре $G$ получено равенство

$$M_{\lambda_1} = \max\left[\varphi_1(x)\int_G \varphi_1(y)\,dy\ \Big|\Big(\int_G \varphi_1^2(y)\,dy = 1\Big)\right]. \qquad (0.11)$$

где $\varphi_1$ — первая собственная функция краевой задачи (0.9). Так функция в квадратных скобках является пределом $e^{\lambda_1 t}u(x, t)$ $t\to\infty$, то (0.11) есть наименьшая константа $M_{\lambda_1}$. Формула (0.11) ко распространяется на произведения шаров. Из физических соображений можно предположить, что такая оценка будет и в общем случ Однако, доказать это автору не удалось. В случае задачи Дирих найдена (не наименьшая) константа $M_{\lambda_1}$.

В терминах полугрупп решение уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = f(x, t) - kw\ (k = \text{const}) \qquad (0.1$$

с краевыми условиями (0.2)—(0.3) примет вид [7, стр. 159]:

$$w(x, t) = e^{-kt}U(t)u_0(x) + \int_0^t U(t-\tau)e^{k(\tau-t)}f(x, \tau)\,d\tau. \qquad (0.1$$

Для нелинейных уравнений мы будем использовать следующи известные результаты [3]. Пусть существует в $G\times[0, T]$ функци $v(x, t)\geqslant 0$ (верхнее решение), такая, что

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Lv \geqslant F(t, v), \qquad (0.14)$$

$$\alpha(x)\frac{\partial v}{\partial n} + v|_\Gamma \geqslant 0,\ v(x, 0) \geqslant u_0(x) \geqslant 0 \qquad (0.15)$$

и существует число $k$ такое, что $F(t, u) + ku$ при каждом $t\in[0, T]$ не убывает по $u$ при $0\leqslant u\leqslant \max v(x, t)$. Тогда в цилиндре $G\times[0, T]$ существует неотрицательное решение $u(x, t)\leqslant v(x, t)$ задачи (0.1)—(0.3), которое является пределом неубывающей последовательности функций:

$$v_0(x, t) = 0,\ v_{j+1}(x, t) = e^{-kt}U(t)u_0(x) +$$
$$+\int_0^t e^{-k(t-\tau)}U(t-\tau)[F(\tau, v_j(x, \tau)) + kv_j(x, \tau)]\,d\tau. \qquad (0.16)$$

## § 1. Сравнение решений

Обозначим через $\operatorname{int} G$ внутренность области $G$ и пусть функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ непрерывны в замкнутом цилиндре $G\times[0, T]$ и обладают там производными по $x$, а в цилиндре $\operatorname{int} G\times[0, T]$ обладают вторыми производными по $x$, производными по $t$ и удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu \leqslant \Phi(x, t, u, \nabla u) \left(\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Lv \geqslant \Phi(x, t, v, \nabla v), \tag{1.2}$$

где $\Phi(x, t, u, \xi)$ — некоторая функция ($\xi \in R^n$), и пусть

$$\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n} + g(x, t, u)|_\Gamma \leqslant \alpha(x)\frac{\partial v}{\partial n} + g(x, t, v)|_\Gamma. \tag{1.3}$$

Следующая теорема 1.1 отвечает на вопрос, когда можно сказать, что $u(x, t) \leqslant v(x, t)$ при условии, что $u(x, 0) \leqslant v(x, 0)$. Новым в ней, по-видимому, является лишь то, что мы накладываем менее ограничительное условие на функции $\Phi$ и $g$, чем дифференцируемость (и даже условие Липшица) по $u$. Идеи, лежащие в основе ее доказательства появлялись в различной форме у многих авторов.

Л е м м а 1.1. *Пусть существует константа* $k \geqslant 0$, *такая, что для каждого* $x \in G$ *и* $t \in [0, T]$ *имеет место оценка:*

$$F(x, t, \mu_1, \xi) - F(x, t, \mu_2, \xi) > k(\mu_1 - \mu_2) \tag{1.4}$$

*при условии, что* $\mu_1 < \mu_2$;

$$\min_{x \in G} v(x, t) \leqslant \mu_j \leqslant \max_{x \in G} u(x, t), \ j = 1, 2, \tag{1.5}$$

$$|\xi| \leqslant \max(|\nabla u(x, t)|, |\nabla v(x, t)|)$$

*и еще — оценка:*

$$|F(x, t, \mu, \xi^{(1)}) - F(x, t, \mu, \xi^{(2)})| \leqslant k|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|,$$

*при условии, что* $\mu$ *лежит на интервале* (1.4), *а* $\xi^{(1)}$ *и* $\xi^{(2)}$ *удовлетворяют оценке* (1.5). *Пусть, также, при каждом* $x \in \Gamma$ *и* $t \in [0,$ … *функция* $g(x, t, \mu) + k\alpha(x)\mu$ *строго возрастает по* $\mu$ *на интервале* (1.4). *Тогда в условиях, указанных в начале параграфа, и* … $t) \leqslant v(x, t)$, *если только* $u(x, 0) \leqslant v(x, 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим на $G$ гладкую функцию $w(x)$ … такую, что

$$w(x) \geqslant 1; \ \frac{\partial w}{\partial n} - kw|_\Gamma = 0.$$

Через $M$ обозначим число, оценивающее функции:

$$(w(x))^{-1}|Lw(x)| \leqslant M; \ (w(x))^{-1}|\nabla w(x)| \leqslant M.$$

Сделаем замену переменной

$$u = e^{(kM+k+M)t} w(x) p(x, t); \ v = e^{(kM+k+M)t} w(x) q(x, t).$$

Тогда неравенства (1.1) и (1.2) перепишутся в виде:

$$w\left(\frac{\partial p}{\partial t} - Lp\right) \leqslant e^{-(kM+k+M)t}\left[\Phi(x, t, u, \nabla u) - \frac{Lw}{w}u - (kM+k+M)u - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right],$$

$$w\left(\frac{\partial q}{\partial t}-Lq\right)\geqslant e^{-(kM+k+M)t}\left|\Phi(x,t,v,\nabla v)-\frac{Lw}{w}v-\right.$$
$$\left.-(kM+k+M)v-2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial q}{\partial x_i}\right|. \tag{1.8}$$

Если утверждение леммы неверно, то существует точка $(x_0, t_0)$, где $t_0>0$, отрицательного минимума функции $q-p$. Если $x_0\in \operatorname{int} G$, то в точке $(x_0, t_0)$ будет $\frac{\partial}{\partial t}(q-p)\leqslant 0$ и $\nabla p=\nabla q$. Так как в этой точке $v<u$, то

$$\Phi(x,t,v,\nabla v)-\Phi(x,t,u,\nabla u)>-k|\nabla(v-u)|+k(v-u).$$

Нетрудно видеть, что

$$|\nabla(v-u)|\leqslant(w(x_0))^{-1}|\nabla w(x_0)|(u-v)\leqslant M(u-v),$$

после чего нетрудно заключить, что в точке $(x_0, t_0)$ правая часть (1.7) меньше, чем правая часть (1.8), т. е. в этой точке $L(q-p)<0$, что невозможно в точке минимума.

Пусть теперь $x_0\in\Gamma$. Согласно (1.6) имеем

$$aw\frac{\partial p}{\partial n}+g(x,t,u)+k\alpha u\leqslant \alpha w\frac{\partial q}{\partial n}+g(x,t,v)+k\alpha v.$$

В точке минимума $\frac{\partial}{\partial n}(q-p)\leqslant 0$, но так как $v<u$, то $g(x,t,u)+k\alpha u>$ $>g(x,t,v)+k\alpha v$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие 1.2. Пусть для каждого интервала $a\leqslant\mu\leqslant b$ существует число $k=k(a,b)$ такое, что при каждом $t\in[0,T]$ функция $F(t,\mu)-k\mu$ монотонно убывает по $\mu\in[a,b]$. Тогда решение задачи (0.1)—(0.3), если существует, то единственно.

Пример. Задача $\frac{du}{dt}=\sqrt{u}$, $u(0)=0$ не удовлетворяет условиям следствия 1.2. Ее решениями будут $u_1=0$, $u_2=\frac{t^2}{4}$.

## § 2. Метод квазилинеаризации

1°. Существование решения. В конце введения указан[о], что если существует число $k$, такое, что функция $F(t,u)+ku$ [не] убывает по $u$, то для доказательства существования решения дост[а]точно построить верхнее решение $v(x,t)$, удовлетворяющее условия[м] (0.14), (0.15). Будем искать $v(x,t)$ как решение линейного уравн[е]ния в $G\times[0,T]$

$$\frac{\partial v}{\partial t}-Lv=c(t)v+d(t) \tag{2.}$$

с краевыми условиями (0.2), (0.3). Коэффициенты $c(t)$ и $d(t)$ подб[и]раются так, чтобы при каждом $t$

$$c(t)\,\mu + d(t) \geqslant F(t, \mu), \tag{2.2}$$

где $\mu$ принимает все значения функции $v(x, t)$ (при каждом фиксированном $t$) в области $G$.

Теорема 2.1 (метод квазилинеаризации). *Каждой паре неотрицательных чисел $t$ и $\mu$ сопоставим числа $c(t, \mu)$ и $d(t, \mu)$ так, чтобы*

$$F(t, u) \leqslant c(t, \mu)\, u + d(t, \mu) \text{ при } 0 \leqslant u \leqslant M_\lambda\, \mu,$$

*и чтобы число $c(t, \mu)\,\mu + d(t, \mu)$ было минимальным. Тогда, если на интервале $[0, T]$ существует ограниченное решение обыкновенного дифференциального уравнения*

$$\frac{d\mu}{dt} = (c(t, \mu) - \lambda)\,\mu + d(t, \mu), \tag{2.3}$$

$$\mu(0) = \mu_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{M_\lambda} \sup_{0<t<\infty} e^{\lambda t} \|U(t)\, u_0\|_C, \tag{2.4}$$

*то в цилиндре $G \times [0, T]$ существует решение задачи (0.1)—(0.3), причем, $u(x, t) \leqslant M_\lambda\, \mu(t)$. Более того, если в (2.1) положить $c(t) = c(t, \mu)$, $d(t) = d(t, \mu)$, то решение $v(x, t)$ ограничивает сверху решение $u(x, t)$ задачи (0.1)—(0.3).*

Доказательство. Легко проверить (с использованием представления (0.13) решения уравнения (0.12)), что решение задачи (2.1), (0.2), (0.3) представляется в виде

$$v(x, t) = \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t c(z)\, dz\right) U(t-\tau)\, d(\tau)\, d\tau + \\ + \exp\left(\int_0^t c(z)\, dz\right) U(t)\, u_0. \tag{2.5}$$

Очевидно, $d(t, \mu) \geqslant F(t, 0) \geqslant 0$, и в силу (0.7) и (2.4)

$$0 \leqslant v(x, t) \leqslant M_\lambda \left[ \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t (c(z) - \lambda)\, dz\right) d(\tau)\, d\tau + \\ + \mu_0 \exp\left(\int_0^t (c(z) - \lambda)\, dz\right)\right] \overset{\mathrm{df}}{=} M_\lambda\, \mu(t).$$

Функция $\mu(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\mu}{dt} = (c(t) - \lambda)\,\mu(t) + d(t), \quad \mu(0) = \mu_0.$$

Выбор коэффициентов $c(t)$ и $d(t)$, указанный в формулировке теоремы, обеспечивает минимальность $\mu(t)$ при условии, что неравенство (2.2) выполнено при $0 \leqslant \mu \leqslant M_\lambda\, \mu(t)$. Так как $0 \leqslant v(x, t) \leqslant M_\lambda\, \mu(t)$, то $v(x, t)$ есть верхнее решение.

Итак, если существует число $k$, такое, что $F(t, u)+ku$ не убывает по $u$, то теорема доказана. Пусть $F(t, u)$ произвольна. Тогда можно построить неубывающую последовательность функций $F_j(t, u) \to F(t, u)$, $j \to \infty$ при $0 < t \leqslant T$ и $0 \leqslant u \leqslant M$, $\max\limits_{0<t<T} \mu(t)$, таких, что $F_j(t, 0) \geqslant 0$ и $F_j(t, u)$ удовлетворяет условию Липшица по $u$ равномерно по $t \in [0, T]$. Согласно доказанному выше в $G \times [0, T]$ существуют функции $u_j(x, t)$, удовлетворяющие (0.1)—(0.3) с заменной $F$ на $F_j$ и ограниченные сверху верхним решением $v(x, t)$, $j = 1, 2, \cdots$.

Лемма 1.1. показывает, что последовательность $u_j$ не убывает. Стандартным образом получаем, что функция $u(x, t) = \lim u_j(x, t)$ есть решение задачи (0.1)—(0.3). Теорема 2.1 доказана.

2°. Несуществование решения. Мы построим функцию $w(x, t)$, ограничивающую решение задачи (0.1)—(0.3) снизу. Эту функцию будем искать в виде решения уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = \alpha(t)\, w + \beta(t) \tag{2.6}$$

с краевыми условиями (0.2)—(0.3). Коэффициенты $\alpha$ и $\beta$ подбираются так, чтобы при каждом $t \in [0\,T]$ и при всех значениях $\mu$ функции $w(x, t)$ (при фиксированном $t$) выполнялось неравенство:

$$\alpha(t)\,\mu + \beta(t) \leqslant F(t, \mu). \tag{2.7}$$

Теорема 2.2. *Каждой тройке чисел* $t \geqslant 0$; $\mu > \nu \geqslant 0$ (*не исключается, что* $\mu = \infty$) *сопоставим числа* $\alpha(t, \mu, \nu)$ *и* $\beta(t, \mu, \nu)$ *так, чтобы*

$$F(t, u) \geqslant \alpha(t, \mu, \nu)\, u + \beta(t, \mu, \nu) \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant u \leqslant \mu$$

*и чтобы число* $\alpha(t, \mu, \nu)\,\nu + \beta(t, \mu, \nu)$ *было наибольшим. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} \dfrac{d\nu}{dt} = (\alpha(t, \mu, \nu) - \lambda_1)\,\nu + \beta(t, \mu, \nu) \\ \dfrac{d\mu}{dt} = (\alpha(t, \mu, \nu) - \lambda_1)\,\mu + \beta_1(t, \mu, \nu), \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\nu(0) = \nu_0 \overset{\text{df}}{=} \int\limits_G u_0(x)\, \varphi_1(x)\, dx; \quad \mu(0) = \mu_0 \overset{\text{df}}{=} \sup_{t>0} e^{\lambda_1 t} \| U(t)\, u_0 \|_C, \tag{2.9}$$

*где* $\lambda_1$ *есть первое собственное число краевой задачи* (0.9), $\varphi_1$ — *первая собственная функция, нормированная условием:*

$$\int\limits_G \varphi_1(x)\, dx = 1,$$

$$\beta_1(t, \mu, \nu) = \begin{cases} \beta(t, \mu, \nu), & \text{если } \beta(t, \mu, \nu) < 0 \\ M_\lambda\, \beta(t, \mu, \nu), & \text{если } \beta(t, \mu, \nu) \geqslant 0. \end{cases}$$

*Тогда если на интервале* $[0, T]$ *не существует решения* $\mu(t)$, $\nu(t)$ *системы* (2.8)—(2.9) *с ограниченной функцией* $\nu(t)$ (*обращение* $\mu$ *в* $\infty$

*при $t \geqslant t_0$ значения не имеет), то в цилиндре $G\times[0, T]$ не существует ограниченного решения задачи (0.1)—(0.3). Более того, если в (2.6) положить $\alpha(t) = \alpha(t, \mu(t), \nu(t))$, $\beta(t) = \beta(t, \mu(t), \nu(t))$, то решение $w(x, t)$ задачи (2.6), (0.2), (0.3) ограничивает снизу решение задачи (0.1)—(0.3).*

Доказательство. Так как в (2.6) функция $\beta(t)$ может быть и отрицательной, то для оценки максимума решения $w$ не годятся рассуждения теоремы 2.1. Однако это решение оценивается сверху решением $\bar{w}(x, t)$ краевой задачи:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - L\bar{w} = \alpha(t)\,\bar{w} + \bar{\beta}(t) \tag{2.10}$$

с краевыми условиями (0.1) — (0.3), где при $\beta(t) \geqslant 0$ функции $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ совпадают с $\alpha$ и $\beta$ соответственно, а для значений $t$, в которых $\beta(t)>0$, полагается $\bar{\beta}(t)=0$ и $\bar{\alpha}(t)$ ищется из условия:

$$\bar{\alpha}(t)\,u \geqslant \alpha(t)\,u + \beta(t), \text{ при } 0 \leqslant u \leqslant \max_{x\in G} \bar{w}(x, t). \tag{2.11}$$

Рассуждая как в теореме 2.1, находим, что $\bar{w}(x, t) \leqslant \mu(t)$, где $\mu(t)$ есть решение уравнения

$$\frac{d\mu}{dt} = \bar{\alpha}(t)\,\mu + M_{\lambda_1}\bar{\beta}(t) - \lambda_1\mu,\ \mu(0) = \mu_0,$$

а $\mu_0$ определено в (2.9). Ясно, что условие (2.11) будет удовлетворено, если $\bar{\alpha}(t)\,\mu(t) = \alpha(t)\,\mu(t) + \beta(t)$, при $\beta(t) < 0$, что и объясняет появление второго уравнения в системе (2.8). Первому уравнению этой системы удовлетворяет функция

$$\nu(t) = \int_G w(x, t)\,\varphi_1(x)\,dx.$$

Коэффициенты $\alpha$ и $\beta$ в условии теоремы подбираются так, чтобы $\nu(t)$ была наибольшей. Теорема 2.2 доказана.

## § 3. Стабилизация на бесконечности

Теорема 3.1. *Пусть в (0.3) $u_0(x) = 0$, а в (0.1) $F(t, u) = F(u)$. Тогда для существования ограниченного в $G\times[0, \infty)$ решения $u(x, t)$ задачи (0.1) – (0.3) необходимо и достаточно, чтобы существовало неотрицательное решение эллиптической краевой задачи в $G$:*

$$Lv + F(v) = 0,\ \alpha(x)\frac{\partial v}{\partial n} + v|_\Gamma = 0. \tag{3.1}$$

*При этом существует минимальное решение $v(x) \geqslant 0$ задачи (3.1) и минимальное решение $\underline{u}(x, t)$ задачи (0.1)—(0.3), которое не убывает по $t$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \underline{u}(x, t) = v(x)$ равномерно по $x \in G$.*

Доказательство. Пусть существует неотрицательное решение $v(x)$ задачи (3.1). Тогда функция $\bar{u}(x, t) = v(x)$ является решением задачи (0.1)—(0.2) с начальным условием $\bar{u}(x, 0)=v(x)$. Так как $u_0(x)=0 \leqslant v(x)$, то $\bar{u}$ есть верхнее решение задачи (0.1)—(0.3), и $\underline{u}(x, t)$ строится как в доказательстве теоремы 2.1.

Обратно, пусть в $G \times [0, \infty)$ существует решение $u(x, t) \leqslant c < < \infty$ задачи (0.1)—(0.3) с $u_0 = 0$ и $F(t, u) = F(u)$. Предположим вначале, что существует число $k$ такое, что $F(u) + ku$ не убывает при $0 \leqslant u \leqslant c$. Тогда можно считать, что решение $\underline{u}(x, t)$ строится с помощью последовательных приближений (0.16). Предположим, что в этой последовательности для некоторого $j \geqslant 0$ функция $v_j(x, t)$ не убывает по $t$ и равномерно по $x \in G$ стремится к своему пределу $w_j(x)$ при $t \to \infty$ (это имеет место при $j = 0$). Докажем, что то же самое имеет место и для $v_{j+1}(x, t)$. Действительно, так как $F(u) + ku$ не убывает и оператор $U(t)$ положителен, то при $\Delta t > 0$

$$v_{j+1}(x, t+\Delta t) = \int_0^t U(t-\tau)\, e^{-k(t-\tau)} [F(v_j(x, \tau+\Delta t)) +$$

$$+ k v_j(x, \tau+\Delta t)]\, d\tau + \int_0^{\Delta t} U(t+\Delta t-\tau)\, e^{-k(t+\Delta t-\tau)} \times$$

$$\times [F(v_j(x, \tau)) + k v_j(x, \tau)]\, d\tau \geqslant v_{j+1}(x, \tau),$$

что доказывает неубывание по $t$. Далее

$$v_{j+1}(x, t) = \int_0^{t/2} U(t-\tau)\, e^{-k(t-\tau)} [F(v_j(x, \tau)) + k v_{j+1}(x, \tau)]\, dt +$$

$$+ \int_{t/2}^{t} U(t-\tau)\, e^{-k(t-\tau)} [F(v_j(x, \tau)) + k v_j(x, \tau)]\, d\tau. \tag{3.2}$$

Так как $v_j(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant c$, то функция $F(v_j(x, t)) + k v_j(x, t)$ равномерно ограничена по $x, t, j$. Поэтому благодаря оценке (0.7), заключаем, что первое слагаемое в правой части (3.2) равномерно по $x \in G$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Второе слагаемое переписывается в виде:

$$\int_0^{t/2} U(\tau)\, e^{-k\tau} [F(v_j(x, t-\tau)) + k v_j(x, t-\tau)]\, d\tau$$

и в силу предположения индукции равномерно по $x \in G$ стремится к

$$w_{j+1}(x) = \int_0^{\infty} U(\tau)\, e^{-k\tau} [F(w_j(x)) + k w_j(x)]\, d\tau$$

при $t \to \infty$, что и требовалось. Последовательность $w_0, w_1, \cdots$, не убывает по $j$ и ограничена сверху (числом $c$). Поэтому существует предел $v(x) = \lim_{j \to \infty} w_j(x)$. Так как

$$L w_{j+1} - k w_{j+1} + F(w_j) + k w_j = 0,$$

то последовательность $L w_j$ ограничена, откуда нетрудно заключить, что $w_j(x) \to v(x)$ при $j \to \infty$ равномерно по $x \in G$ и $v(x)$ удовлетворяет краевой задаче (3.1). После этого проверка сходимости $u(x, t) \to v(x)$ при $t \to \infty$ не представляет труда. В случае произвольной $F(u)$ к приведенным выше рассуждениям следует добавить рассуждение конца доказательства теоремы 2.1. Теорема 3.1 доказана.

Замечание. Из теоремы 3.1 сразу следует, что равномерная стабилизация к $v(x)$ будет иметь место при $0 \leqslant u_0(x) \leqslant v(x)$.

В случае, когда $F(u)$ вогнута, условия стабилизации описываются более явно и стабилизация происходит с показательной скоростью.

Теорема 3.3. *Пусть в* (0.1) $F(t, u) = F(u)$ *и существует производная* $F'(u)$, *неубывающая по* $u$. *Пусть в* $G \times [0, \infty)$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$ *существует решение* $w(x, t)$ *краевой задачи*

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = F(w) + \varepsilon w, \tag{3.3}$$

$$\alpha(x) \frac{\partial w}{\partial n} + w|_\Gamma = 0, \quad w(x, 0) = w_0(x), \tag{3.4}$$

*где* $w_0(x) = \delta = \text{const} > 0$. *Предположим также, что* $w(x, t) \leqslant N < \infty$. *Тогда для любого числа* $c$ $(0 \leqslant c < \delta)$, *как только начальная функция* $u_0(x) \leqslant c$, *решение* $u(x, t)$ *задачи* (0.1) — (0.3) *удовлетворяет неравенству*

$$-N \frac{F(0)}{\varepsilon\delta} e^{-\varepsilon t} \leqslant u(x, t) - v(x) \leqslant -N e^{-\varepsilon t} \ln\left(1 - \frac{c}{\delta}\right), \tag{3.5}$$

*где* $v(x)$ *есть наименьшее неотрицательное решение задачи* (3.1

Доказательство. Обозначим через $u(x, t, c)$ решение задачи (0.1)—(0.3) с $u_0(x) \equiv c$, а через $w(x, t, c)$ — решение задачи (3.3)-(3.4) с $w_0(x) = c$. При $c < \delta$ эти функции существуют и ограничены сверху числом $N$, так как во всех случаях $w(x, t)$ является верхним решением. При помощи стандартных рассуждений доказывается, что эти функции дифференцируемы по параметру $c$ и что производн

$$v(x, t, c) = \frac{\partial u}{\partial c} \text{ и } z(x, t, c) = \frac{\partial w}{\partial c} \text{ удовлетворяют условиям:}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Lv = F'(u(x, t, c))\, v; \ \alpha(x) \frac{\partial v}{\partial n} + v|_\Gamma = 0; \ v(x, 0, c) = 1,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - Lz = [F'(w(x, t, c)) + \varepsilon]\, z; \ \alpha(x) \dfrac{\partial z}{\partial n} + z|_\Gamma = 0 \\ z(x, 0, c) = 1. \end{cases}$$

Из леммы 1.1 следует, что функция $w(x, t, c)$ не убывает по $c$. тывая, что $F'(w)$ тоже не убывает по $w$ и применяя к (3.7) л 1.1, находим, что $z$ не убывает по $c$. Значит, для удовлетворени равенства $w(x, t, c) \leqslant N$ при $0 \leqslant c \leqslant \delta$ необходимо, чтобы $z =$

$\leqslant \dfrac{N}{\delta - c}$. С другой стороны, функция $v_\varepsilon \overset{\text{df}}{=} e^{\varepsilon t} v(x, t, c)$, где $v$ есть решение задачи (3.6), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - Lv_\varepsilon = [F'(u(x, t, c)) + \varepsilon]\, v_\varepsilon .$$

Так как $u \leqslant w$, то из леммы 1.1. следует, что $v_\varepsilon(x, t, c) \leqslant z(x, t, c) \leqslant \dfrac{N}{\delta - c}$. Отсюда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial c}(x, t, c) \leqslant \frac{N}{\delta - c} e^{-\varepsilon t}. \tag{3.8}$$

Интегрируя эту оценку по $c$ и учитывая, что в силу теоремы 3.1 $u(x, t, 0) \leqslant v(x)$, получаем верхнюю оценку (3.5) для $u(x, t, c)$. Нижнюю оценку вначале проверим для $u(x, t, 0)$. Заметим, что функция $v_0(x, t) = \dfrac{1}{F(0)} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t, 0)$ является решением краевой задачи (3.6) и в силу оценки (3.8)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t, 0) = F(0) \frac{\partial}{\partial c} u(x, t, 0) \leqslant F(0) \frac{N}{\delta} e^{-\varepsilon t},$$

откуда следует нижняя оценка (3.5) для $u(x, t, 0)$. Если $u_0(x) \leqslant c$ произвольна, то $u(x, t, 0) \leqslant u(x, t) \leqslant u(x, t, c)$, что завершает доказательство теоремы 3.3.

Следствие 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы 3.3 и дополнительно в* $G \times [0, \infty)$ *существует решение* $\zeta(x, t) \leqslant N_1 < \infty$ *уравнения*

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - L\zeta = F(\zeta) + \varepsilon_1 \zeta,$$

*удовлетворяющее условиям* (3.4) *с* $w_0 = \psi(x)$, *где* $\psi(x) > 0$; $\varepsilon_1 > 0$. *Тогда из условия* $u_0(x) \leqslant c\psi(x)$, *где* $0 \leqslant c < 1$, *следует*

$$-N \frac{F(0)}{\varepsilon\delta} e^{-\varepsilon t} \leqslant u(x, t) - v(x) \leqslant -N_1 e^{-\varepsilon t} \ln(1 - c).$$

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 3.3.

Следствие 3.5. Пусть $F(t, u) = F(u)$ и $F'(u)$ не убывает. Пусть прямая $z = ky$ $(k \leqslant \lambda)$ пересекает кривую $z = F(y) + (M_\lambda - 1) \times F(0)$ в точках $y_0$ и $y_1$ $(y_0 \leqslant y_1)$. Если для некоторых чисел $\alpha, \beta \in [0, 1]$

$$|u_0(x)| \leqslant \beta y_1 \left(\alpha M_\lambda^{-1} + (1 - \alpha)\, \varphi_1(x) \left(\max_{x \in G} \varphi_1(x)\right)^{-1}\right)$$

то в $G \times [0, \infty)$ существует решение $u(x, t) \leqslant y_1$ задачи (0.1)—(0.3) и

$$-M_\lambda e^{(k-\lambda)t} \frac{F(0)}{\lambda - k} \leqslant u(x, t) - v(x) \leqslant -y_1 e^{(k-\lambda)t} \ln(1 - \beta).$$

Доказательство. Достаточно в следствии 3.4 положить

$$\psi(x) = y_1 (\alpha M_\lambda^{-1} + (1-\alpha)\, \varphi_1(x) (\max_{x \in G} \varphi_1(x))^{-1}),$$

а для доказательства разрешимости использовать теорему 2.1, где с учетом вогнутости функции $F(u)$ следует положить

$$c(t, \mu) = \frac{F(M_\lambda \mu) - F(0)}{M_\lambda \mu}, \quad d(t, \mu) = F(0).$$

## § 4. Устойчивость

Теорема 4.1 посвящена возмущению $u_0(x)$, а теорема 4.2 — возмущению функции $F(t, u)$ (причем условие вогнутости накладывается лишь на первоначальную функцию $F(t, u)$).

**Теорема 4.1.** *Пусть в* (0.1) $\frac{\partial}{\partial u} F(t, u)$ *существует и не убывает по* $u$. *Пусть заданы функции* $\psi_1(x) \geqslant 0$ *и* $\psi_2(x) \geqslant 0$. *Обозначим через* $u_j(x, t)$ *решение задачи* (0.1)—(0.3) *с* $u_0(x) = \psi_j(x)$, $j = 1, 2$ *и предположим, что в* $G \times [0, \infty)$ *существует решение* $w(x, t) \leqslant N < \infty$ *краевой задачи:*

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = F(t, w) + \varepsilon w, \tag{4.1}$$

$$\alpha(x) \frac{\partial w}{\partial n} + w|_\Gamma = 0; \quad w(x, 0) = w_0(x), \tag{4.2}$$

*где* $w_0(x) = \psi_1(x) + \delta$, *а* $\varepsilon \geqslant 0$ *и* $\delta > 0$ — *некоторые числа. Тогда из оценки* $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant \delta_1 < \delta$ *следует оценка:*

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant N e^{-\varepsilon t} \ln\left(1 - \frac{\delta_1}{\delta}\right).$$

**Доказательство.** Обозначим

$$\psi^+(x) = \max(\psi_1(x), \psi_2(x)), \quad \psi^-(x) = \min(\psi_1(x), \psi_2(x)),$$

и пусть $u^+(x, t)$ есть решение задачи (0.1)—(0.3) с $u_0(x) = \psi^+(x)$, а $u^-(x, t)$ есть решение задачи (0.1)—(0.3) с $u_0(x) = \psi^-(x)$. Тогда

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant u^+(x, t) - u^-(x, t).$$

Пусть $u(x, t, c)$ есть решение задачи (0.1)—(0.3) с $u_0(x) = \psi^-(x) + c$, а $w(x, t, c)$ есть решение задачи (4.1)—(4.2) с $w_0(x) = \psi^-(x) + c$ $(0 \leqslant c \leqslant \delta)$. Рассуждая точно так же как в доказательстве теоремы 3.3, находим

$$u(x, t, \delta_1) - u(x, t, 0) \leqslant N e^{-\varepsilon t} \ln\left(1 - \frac{\delta_1}{\delta}\right).$$

Остается заметить, что $u^-(x, t) = u(x, t, 0)$, а $u^+(x, t) \leqslant u(x, t, \delta_1)$. Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.1 показывает, что при $\varepsilon = 0$ решение $u(x, t)$ устойчиво относительно возмущения начальной функции, а при $\varepsilon > 0$ даже ассимптотически устойчиво.

Теорема 4.2 *Пусть функции $f_1(t, u)$ и $f_2(t, u)$ непрерывны; $f_1(t, 0) \geqslant 0$, $f_2(t, 0) \geqslant 0$ и существует производная $\frac{\partial f_1}{\partial u}$, не убывающая по $u$. Предположим, что в $G\times[0, \infty)$ существует решение $v(x, t)$ задачи (0.1)—(0.3) с $F(t, u)=f_1(t, u)+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ и $v(x, t)<N<\infty$. Обозначим через $u_j(x, t)$ решение задачи (0.1)—(0.3) с $F(t, u)=f_j(t, u)$, $j=1, 2$. Тогда если $|f_1(t, u)-f_2(t, u)|<\varepsilon_1<\varepsilon$ при $0\leqslant u\leqslant N$, то*

$$|u_1(x, t)-u_2(x, t)|\leqslant -N\ln(1-\varepsilon_1/\varepsilon). \tag{4.3}$$

Доказательство. Обозначим через $u(x, t, c)$ решение задачи (0.1)—(0.3) с $F(t, u)=f_1(t, u)+c$. Так же как в теореме 4.1 находим

$$u_2(x, t)-u_1(x, t)\leqslant u(x, t, \varepsilon_1)-u(x, t, 0)\leqslant -N\ln\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right).$$

С другой стороны, существует функция $f_3(t, u)$ с неубывающей по $u$ производной $\partial f_3/\partial u$, такая, что $f_3(t, 0)\geqslant 0$ и

$$f_1(t, u)-\varepsilon_1\leqslant f_3(t_0, u)\leqslant \min(f_1(t, u), f_2(t, u))$$

(следует иметь в виду, что по условию $(f_1-f_2)<\varepsilon$). Обозначим через $u_3(x, t)$ решение задачи (0.1)—(0.3) с $F(t_0, u)=f_3(t, u)$. Заменяя в приведенных выше рассуждениях $f_1$ на $f_3$, находим

$$u_1(x, t)-u_3(x, t)\leqslant -N\ln(1-\varepsilon_1/\varepsilon).$$

Остается заметить, что $u_2\geqslant u_3$. Теорема 4.2 доказана.

Замечание. Условия теорем 4.1 и 4.2 приводятся к явному виду тем же способом, как это сделано в следствии 3.5.

## § 5. Оценка линейной полугруппы

Наша задача—найти константу $M_\lambda$ из (0.10). Это мы сделаем в случае, когда $L=\Delta$ (оператор Лапласа). Рассмотрение сферически симметричного случая основано на лемме 5.1 о положительных мерах. Определение пространства $S'$ и положительных мер можно найти в книге [9].

Лемма 5.1. *Пусть на оси $-\infty<t<\infty$ задана действительная обобщенная функция $\varphi(t)\in S'$ и известно, что преобразование Фурье $\tilde{\varphi}(z)$ есть мероморфная функция на комплексной плоскости с полюсами в точках $i\lambda_1, i\lambda_2, \cdots$, где $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ — действительные числа, причем в этой последовательности каждый полюс повторяется столько раз, какова его кратность. Предположим, что $\sum\lambda_j^{-2}<\infty$, функция $\tilde{\varphi}(z)$ не имеет нулей и $1/\tilde{\varphi}(z)$ — целая функция порядка 1 (см. [10]). Тогда один из функционалов $\varphi(t)$ или $-\varphi(t)$ является положительной мерой.*

Доказательство. Согласно теореме Вейерштрасса [10, стр. 272]

$$\frac{1}{\tilde{\varphi}(z)} = e^{H(z)} \prod_{j=1}^{\infty} \left( \frac{z}{i\lambda_j} \right) \exp(z/i\lambda_j).$$

Из теоремы Адамара [10, стр. 282] имеем $H(z) = \alpha z + \beta$. Так как функционал $\varphi(t)$ действителен, то при действительных $z$ будет $\tilde{\varphi}(-z) = \overline{\varphi(z)}$. Отсюда следует $-\alpha z + \beta = \bar{\alpha} z + \bar{\beta} + 2m\pi i$, где $m$ — целое. Значит, $\alpha = ia$, $\beta = b + \pi i m$, где $a$ и $b$ действительны. Прообраз Фурье функции $\frac{\lambda_j}{\lambda_j + iz} \exp(iz/\lambda_j)$ легко вычисляется и является неотрицательной функцией класса $L_1(-\infty, \infty)$ при всех действительных $\lambda_j$. Обозначим эти функции через $\varphi_j(t)$, $j = 1, \cdots$. Существует свертка функций $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$, где $N < \infty$. Очевидно, эта свертка неотрицательна и является прообразом Фурье функции

$$\zeta_N(z) = \prod_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{\lambda_j + iz} \exp(iz/\lambda_j).$$

Согласно теореме Бохнера [11], функция $\zeta_N$ положительно определена, а значит и предел при $N \to \infty$ положительно определен. Применяя опять теорему Бохнера, заключаем, что прообраз Фурье функции $\zeta(z) = \lim_{N \to \infty} \zeta_N$ является положительной мерой. При умножении на $e^{-iaz}$ прообраз Фурье сдвигается на $a$, а сдвиг не выводит из класса положительных мер. Лемма 5.1 доказана.

Теорема 5.2. *Пусть область $G$ есть $n$-мерный шар $\{x \in R^n: |x| \leqslant \rho\}$ и $L = \Delta$, $\alpha(x) = \alpha > 0$. Тогда решение задачи (0.6), (0.8) обладает следующими свойствами.*

1. *Функция $u(x, t)$ не возрастает по $t$.*

2. *При каждом фиксированном значении $t$ функция $u(x, t)$ принимает максимальное значение $\mu(t)$ в центре шара.*

3. *Функция $e^{\lambda_1 t} \mu(t)$ не убывает по $t$, и*

$$e^{\lambda_1 t} \mu(t) \leqslant \max_{x \in G} \varphi_1(x) \int_G \varphi_1(y)\, dy \left( \int_G \varphi_1^2(y)\, dy = 1 \right). \tag{5.1}$$

Доказательство. Докажем свойство 1. Выберем неубывающую последовательность гладких выпуклых функций $\psi_j(r)$, $j = 1, 2, \cdots$, невозрастающих по $r$, таких, что $\lim_{j \to \infty} \psi_j(r) = 1$ $\psi_j'(0) = 0$,

$$\alpha \psi_j'(r) + \psi_j(r)|_{r=\rho} = 0. \tag{5.2}$$

Тогда последовательность $u_j(x, t)$ решений граничных задач (0.6) с условием $u_j(x, 0) = \psi_j(|x|)$ не убывает по $j$ и потому стремится к $u(x, t)$ при $j \to \infty$. Благодаря условию (5.2), функция $\omega_j(x, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial u_j}{\partial u}$ непрерывна на $\bar{G}$ и удовлетворяет краевой задаче (0.6) с начальным условием $\omega_j(x, 0) = \Delta \psi_j(|x|)$. Так как $\Delta \psi_j(|x|) \leqslant 0$, то по принципу максимума $\omega_j \leqslant 0$, откуда и следует свойство 1.

Докажем свойство 2. В предположении противного существует значение $t=t_0$ такое, что функция $u(x, t)$, принимает максимальное значение в точке $x_0$, где $|x_0|=r>0$. В силу сферической симметрии, это максимальное значение принимается на сфере $|x|=r$ и значит, внутри этой сферы существует точка $x_1$ локального минимума. Согласно свойству 1, $\Delta u(x, t_0)=\partial u/dt \geqslant 0$, что в силу эллиптического принципа максимума невозможно в окрестности точки $x_1$.

Докажем свойство 3. Оценка (5.1) была бы доказана, если бы было установлено неубывание $e^{\lambda_1 t}\mu(t)$. С этой целью применим преобразование Фурье по $t$, а все функции, определенные при $t\geqslant 0$ будем считать равными нулю при $t<0$. Пусть $\tilde{u}(x, z)$ есть преобразование Фурье по $t$ функции $u(x, t)$. Она является решением граничной задачи в $G$;

$$-1-iz\tilde{u}(x, z)=\Delta\tilde{u};\quad \alpha\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}+\tilde{u}\Big|_\Gamma=0. \tag{5.3}$$

Решением этой задачи будет

$$\tilde{u}(x, z)=c\,|x|^{1-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{iz}\,|x|)-\frac{1}{iz}, \tag{5.4}$$

где $J_\nu$ — функция Бесселя, а

$$c=\frac{\rho^{n/2-1}}{iz\left(\gamma J_{n/2-1}(\sqrt{iz}\,\rho)+\alpha\sqrt{iz}\,J'_{n/2-1}(\sqrt{iz}\,\rho)\right)},\quad \gamma=1+\left(1-\frac{n}{2}\right)\rho^{-1}.$$

Полагая в (5.4) $|x|=0$ и используя разложение [12, стр. 12, формула (2)] функции $J_\nu(z)$ в ряд, находим

$$\tilde{\mu}(z)=\frac{1}{iz}\left(\frac{(\sqrt{iz}\,\rho)^{n/2-1}\,\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)}{\gamma J_{n/2-1}(\sqrt{iz}\,\rho)+\alpha\sqrt{iz}\,J'_{n/2-1}(\sqrt{iz}\,\rho)}-1\right), \tag{5.5}$$

где $\tilde{\mu}(z)$ есть преобразование Фурье функции $\mu(t)$. Нам нужно показать, что $\frac{d}{dt}e^{\lambda_1 t}\mu(t)\geqslant 0$ при $t>0$. Образом Фурье этой функции будет

$$-iz\frac{(\sqrt{iz+\lambda_1}\,\rho)^{n/2-1}\,\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)}{(iz+\lambda_1)(\gamma J_{n/2-1}(\sqrt{iz+\lambda_1}\,\rho)+\alpha\sqrt{iz+\lambda_1}\,J'_{n/2-1}(\sqrt{iz+\lambda_1}\,\rho)}-$$

$$-\frac{iz}{iz+\lambda_1}. \tag{5.6}$$

Прообраз Фурье функции $\frac{iz}{iz+\lambda_1}$ обращается в нуль при $t>0$, а первое слагаемое нигде не обращается в нуль (в том числе и в точке $z=0$, так как в точке $z=-i\lambda_1$ должен быть полюс функции $\tilde{\mu}(z)$).

Все полюса первого слагаемого в (5.6) находятся на мнимой оси в точках $i\gamma_1, i\gamma_2, \ldots$. Это следует из известных фактов о нулях функции $AJ_\nu + Bz J'_\nu(z)$ [12, стр. 71], а из ассимптотики нулей той же функции [13] видно, что $\sum \gamma_i^{-1} < \infty$. Известно также, что функция $z^{-\nu} J_\nu(z)$ является целой функцией порядка 1. Итак, первое слагаемое в (5.6) удовлетворяет условиям леммы 5.1, откуда и следует постоянство знака $(e^{\lambda_1 t}\mu(t))'$. При $t=0$ этот знак положительный, и потому $e^{\lambda_1 t}\mu(t)$ не убывает. Теорема 5.2 доказана.

Замечание 5.3. Можно было бы попытаться доказать теорему 5.2, пользуясь разложением $u(x, t)$ по собственным функциям задачи (0.9). При $n=1$, 3 и $\alpha=0$ это несложно. В остальных случаях исследование полученного ряда наталкивается на значительные трудности.

Следствие 5.4. *Пусть пространство $R^n$ представляется в виде прямого произведения $R^n = R^{n_1} \times \cdots \times R^{n_m}$, а область $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$, где $G_j$ — шар пространства $R^{n_j}$ с границей $\Gamma_j$, $j=1,\ldots,m$. Обозначим*

$$\Gamma_j^0 = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_{j-1} \times \Gamma_j \times G_{j+1} \times \cdots \times G_m.$$

*Очевидно, $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j^0$. Пусть в $G$ задана краевая задача* (0.6), (0.8), *где $\alpha(x)|_{\Gamma_j^0} = \alpha_j = \mathrm{const} \geqslant 0$. Тогда выполнена оценка* 5.1.

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из теоремы 5.2, если учесть, что $u(x, t) = u_1(x^{(1)}, t) \times \cdots \times u_m(x^{(m)}, t)$, где $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$, $x^{(j)} \in G_j$, а $u_j$ есть решение задачи (0.6), (0.8) в $G_j \times [0, \infty)$ с $\alpha(x) = \alpha_j$.

Для более сложных областей лишь в случае задачи Дирихли удается оценить константу $M_{\lambda_1}$.

Теорема 5.5. *Пусть функция $u(x, t)$ является решением в $G \times [0, \infty)$ граничной задачи* (0,6), (0.8) *с $\alpha(x) = 0$. Пусть $V$ — объём области $G$, а $\alpha_\nu$ — первый нуль функции $J_\nu(x)$. Обозначим*

$$\gamma = \max\left(1,\ V\lambda_1^{n/2}/\Omega\,\alpha_{n/2-1}^n\right), \tag{5.7}$$

*где $\Omega$ — объем единичного $n$-мерного шара. Тогда*

$$u(x, t) \leqslant \gamma\, \frac{\alpha_{n/2-1}^{n/2}}{J_{n/2}(\alpha_{n/2-1})\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, e^{-\lambda_1 t}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Будем считать, что при $x \overline{\in} G$ функция $u(x, t) = 0$. Выберем произвольную точку $x_0 \in G$ и обозначим

$$v(r, t) = \frac{1}{\Omega r^n} \int\limits_{|x-x_0|<r} u(x, t)\,dx.$$

Тогда $v(0, t) = u(x_0, t)$. Обозначим

$$G_r = \{x \in G : |x - x_0| \leqslant r\},\ \ \Gamma_r = \{x \in \Gamma : |x - x_0| \leqslant r\},$$

$$S_r = \{x \in G : |x - x_0| = r\}.$$

Имеет место равенство

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\Omega r^n} \int_{G_r} \Delta u dx = \frac{1}{\Omega r^n} \int_{S_r \cup \Gamma_r} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

С другой стороны, нетрудно вычислить

$$\frac{\partial}{\partial r} r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r} r^n v(r, t) = \frac{1}{\Omega r^{n-1}} \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Так как $u(x, t) > 0$ и $u\Big|_{\Gamma} = 0$, то $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_r} \leq 0$. Поэтому

$$\frac{\partial v}{\partial t} \leq \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r} r^n v(r, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{n+1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}. \tag{5.9}$$

Из разложения $u(x, t)$ по собственным функциям задачи (0.9) следует

$$v(r, t) \leq \frac{1}{\Omega r^n} \int_G u dx \leq \frac{1}{\Omega_r^n} V e^{-\lambda_1 t}. \tag{5.10}$$

И наконец

$$v(r, 0) \leq 1. \tag{5.11}$$

Правая часть (5.9) является $n+2$-мерным сферически симметричным лапласианом. Поэтому, для любого $\rho > 0$ выполнено неравенство $v(r, t) < w(r, t)$ при $0 \leq r \leq \rho$, где $w(r, t)$ есть решение задачи (5.9)—(5.11) с неравенствами, заменёнными на равенства. Выберем $\rho = \lambda_1^{-1/2} \alpha_{n/2-1}$. Имеем: $e^{\lambda_1 t} w(r, t) \leq w_1(r, t) + \gamma$, где $w_1$ есть решение граничной задачи:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{n+1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} + \lambda_1 w_1 + \lambda_1 \gamma; \quad w_1(\rho, t) = w_1(r, 0) = 0.$$

Из теоремы 3.1 заключаем, что $w_1$ не убывает по $t$. Значит

$$e^{\lambda_1 t} w(r, t) \leq \lim_{t \to \infty} w_1(r, t) + \gamma \overset{\text{df}}{=} k(r),$$

где

$$\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + \frac{n+1}{r} \frac{\partial k}{\partial r} + \lambda_1 k = 0, \quad k(\rho) = \gamma.$$

Отсюда и следует оценка (5.8).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 23.III.19

Ս. Գ. ՌՈՒԲԱՆՈՎԻՉ. Ոչ գծային պարաբոլական հավասարումների լուծումների վարքի ժամանակահատվածի մասին (*ամփոփում*)

*Հոդվածում դիտարկվում է (01)—(03) եզրային խնդիրը քվազիգծային պարաբոլական հավասարման համար։ Ստացված են լուծման գոյության ժամանակի համար երկկողմանի գնահատականները և ցույց է տրված վերին և ներքին լուծման կառուցման մի եղանակ։ Ուսումնասիրված են լուծման ստաբիլիզացման և նրա կայունության հարցերը։ Ստացված են որոշ գնահատականներ ջերմահաղորդականության հավասարման հետ կապված գծային խնդիրի համար։*

S. G. RUBANOVICH. *On the existence time of solutions of some nonlinear parabolic equations* (summary)

In this paper the boundary value problem for the quasilinear equation of parabolic tipe is considered. The two side estimates for the existence time of solutions are obtained and some uppor and lower solutions are constructed. The questions of stability and stabiliration of solutions are discussed. Also some new estimates are obtained for the semigroups of heat equation.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Г. Рубанович, Ю. С. Чатынян.* Рассчет напряжения теплового пробоя силовых конденсаторов прямоугольной формы, «Электричество», № 1, 1978.
2. *С. Г. Рубанович, Ю. С. Чатынян.* О протекании во времени теплового пробоя конденсатора, «Электричество», № 6, 1979, 66—68.
3. *C. V. Pao.* Assimptotic behavior and Nonexistens of Clobal Solutions for a class of Nonlinear Boundary value problems of parabolic tipe, J. of math. analysis and appl., 65, 1978, 616—637.
4. *И. Каметака, О. А. Олейник.* Об ассимптотических свойствах и необходимых условиях существования решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка, Матем. сб., 107 (149), 1978, 572—600.
5. *Г. И. Зеленяк.* О качественных свойствах решений квазилинейных смешанных задач для уравнений параболического типа, Матем. сб., 104 (146), 1977, 486—510.
6. *В. П. Политюков.* К теории верхних и нижних решений и разрешимости квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений, Матем. сб., 107 (149), 1978, 218—226.
7. *С. Г. Крейн.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., Изд. «Наука», 1967.
8. *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц.* Линейные операторы. Общая теория, ИИЛ, 1962.
9. *В. С. Владимиров.* Обобщенные функции в математической физике, М., изд. «Наука», 1976.
10. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, т. 2, М., изд. «Наука», 1968.
11. *С. Бохнер.* Лекции об интеграле Фурье, Физматгиз, 1962.
12. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, Функции параболичекого цилиндра, ортогональные многочлены, М., изд. «Наука», 1966.
13. *C. N. Moore.* Trans. Amer. Math. Soc., 32, 1930, 408—416.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 5, 1983 Математика

УДК 517.968

В. Б. ДЫБИН, Г. В. ДОДОХОВА

# КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА НА ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ В СЛУЧАЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РАЗРЫВОВ У ЕЁ КОЭФФИЦИЕНТА

На простом гладком замкнутом контуре $\Gamma$, содержащем внутри себя начало координат, в пространстве суммируемых функций $L_p(\Gamma, \rho)$, $1 < p < \infty$, рассматривается краевая задача

$$\varphi^+(t) + a(t)\varphi^-(t) = f(t), \ t \in \Gamma, \tag{1}$$

где

$$a(t) = \tilde{a}(t) \prod_{m=1}^{n} \exp\left|\sigma_m \frac{t+t_m}{t-t_m}\right|, \tag{2}$$

$t_m \in \Gamma$, $\sigma_m \in \mathbf{C}$, функция $\tilde{a}(t) \in L_\infty(\Gamma)$ отделена от нуля и допускает обобщенную факторизацию в $L_p(\Gamma, \rho)$. В класс изучаемых операторов попадают операторы вида (1), у которых функция $a(t)$ имеет конечное число почти-периодических разрывов [1], [2].

К настоящему моменту для оператора $A$, порождаемого левой частью равенства (1), И. Ц. Гохбергом, А. А. Семенцулом, С. М. Грудским и одним из авторов в работах [1]—[5] построена теория односторонней обратимости в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ и описаны подпространства $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$. Основная особенность изучаемого оператора состоит в том, что точки $t_m$ являются точками „завихрения", обеспечивающими бесконечность приращения аргумента функции $a(t)$ при обходе контура $\Gamma$. В том случае, когда это приращение для каждой точки $t_m$ неотрицательно и бесконечно хотя бы для одной из них, оператор $A$ обратим справа, а $\dim \operatorname{Ker} A = \infty$. Если же приращение аргумента для каждой точки $t_m$ неположительно и бесконечно хотя бы для одной из них, оператор $A$ обратим слева и $\dim \operatorname{Coker} A = \infty$.

Сначала в продолжение указанных выше исследований в случае обратимости оператора $A$ справа мы строим базис в подпространстве $\operatorname{Ker} A$, используя при этом специальные изометрические преобразования хорошо известной ортогональной системы.

Если $\Gamma$ — окружность, то построенный базис является ортогональным в том смысле, что базисные функции порождают в сопряженном пространстве набор функционалов, биортогональный исходной системе. Отправляясь от последнего результата, мы предлагаем следующую корректную постановку задачи для уравнения (1) в случае, когда все точки $t_m$ лежат на окружности, целиком лежащей либо внутри, либо снаружи кривой Г. Если оператор $A$ обратим справа, то единственное решение уравнения (1), непрерывно зависящее от исходных данных, выделяется требованием, чтобы оно на заданном бесконечном наборе функционалов из пространства $[L_p(\Gamma, \rho)]^*$ принимало определенные значения, составляющие элемент пространства $l_p(\delta)$ последовательностей, суммируемых в степени $p$ с некоторым степенным весом $\delta$. Если же оператор $A$ обратим слева, то существование и единственность решения уравнения (1), непрерывно зависящего от свободного члена, обеспечивается аддитивным введением в правую часть уравнения специальной бесконечной системы потенциалов.

Впервые такой подход был реализован нами в работе [6], где задача (1) рассмотрена на прямой, а функция $a(t)$ имеет единственный почти-периодический разрыв на $\infty$. Ниже мы опираемся на результаты этой работы.

Отметим, что проводимые здесь исследования тесно связаны с вопросами построения базисов в пространствах $H^p$ или некоторых их подпространствах. В связи с этим обратим внимание на цикл исследований М. М. Джрбашяна и его учеников (см., напр., [7], [8], [14]), а также обзорную работу Н. К. Никольского, Б. С. Павлова и С. В. Хрущева [9], посвященные этим вопросам.

Заметим, что символами ◀ и ▶ мы обозначаем соответственно начало и конец доказательства.

## § 1. Построение базиса в Ker $A$

Пусть $\Gamma_0$ — единичная окружность $|t|=1$. Через $L_p(\Gamma_0, \rho)$ обозначим пространство измеримых на $\Gamma_0$ функций, суммируемых в степени $p$, $1<p<\infty$, с весом $\rho(t)=\prod\limits_{m=1}^{n}|t-t_m|^{\beta_m}$, $t_m\in\Gamma_0$, $-1<\beta_m<p-1$.

Через $L_p(R, \rho_m)$, $m\in\overline{1, n}$ (здесь $\overline{1, n}\overset{\mathrm{def}}{=}\{1,\cdots, n\}$) будем обозначать банахово пространство измеримых функций, суммируемых на вещественной оси $R$ в степени $p$ с весом

$$\rho_m(x)=|x+i|^{\beta}\prod_{k=1,\,k\neq m}^{n}|x-x_k|^{\beta_k},\ x_k\in R, -1<\beta+\sum_{k=1,\,k\neq m}^{n}\beta_k<p-1.$$

Проекторы $P^{\pm}$ в пространстве $L_p(R, \rho_m)$ вводим обычным способом через сингулярный оператор Коши—Лебега $S$, $P^{\pm}=\dfrac{1}{2}(I\pm S)$.

Подпространства $L_p^{\pm}(R, \rho_m)$ определяются соответственно как полные образы $\operatorname{Im}P^{\pm}$ этих проекторов. Аналогичный смысл имеют обозначения $P^{\pm}_{\Gamma_0}$, $L_p^{\pm}(\Gamma_0, \rho)$, а в дальнейшем и $P^{\pm}_{\Gamma}$, $L_p^{\pm}(\Gamma, \rho)$. Введём также в рассмотрение пространство $l_p(\delta_m)$ двусторонних последовательностей $\{\varphi_{km}\}_{k\in Z}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k\in Z}|\varphi_{km}|^p\delta_{km}<\infty,\ \text{где}\ \delta_{km}=(|k|+1)^{\beta+\sum\limits_{l=1,\,l\neq m}^{n}\beta_l},\ \delta_m=\{\delta_{km}\}_{k\in Z}.$$

Пусть $a_m(t)=\exp\left(\sigma_m \dfrac{t+t_m}{t-t_m}\right)$, $\sigma_m \in R$, $\sigma_m>0$. Известно (см. [2]), что в этом случае оператор $A_m=P^+_{\Gamma_0}+a_m(t)P^-_{\Gamma_0}$ обратим справа, а $\dim \operatorname{Ker} A_m=\infty$. Нижеследующее предложение дает описание подпространства $\operatorname{Ker} A_m$.

Предложение 1. *Для того, чтобы функция $\varphi(t)\in \operatorname{Ker} A_m$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала следующее представление:*

$$\varphi(t)=(1-a_m(t))\sum_{k\in Z}\alpha_{km}\, e_{km}(t), \tag{3}$$

*где $\{\alpha_{km}\}_{k\in Z}\in l_p(\delta_m)$, а система функций $\{e_{km}(t)\}$ образует базис в подпространстве $P^-_{\Gamma_0}(\operatorname{Ker} A_m)$ и имеет следующий вид:*

$$e_{km}(t)=(2\pi k+i\sigma_m)\sqrt{\frac{\sigma_m}{\pi}}\;\frac{\exp\left(-\sigma_m\dfrac{t+t_m}{t-t_m}\right)-1}{t-\mu_{km}}, \tag{4}$$

$$\mu_{km}=t_m\,\frac{2\pi k-i\sigma_m}{2\pi k+i\sigma_m}.$$

*Разложение* (3) *единственно.*

◀Введем следующее обозначение:

$$c_m=2^{\frac{\beta_m-p+1}{p}}\cdot\prod_{k=1,\,k\neq m}^{n}|t_m-t_k|^{\frac{\beta_k}{p}}$$

и положим $\beta=p-2-\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k$. Оператор $B_m$, определенный равенством

$$(B_m\Phi)(t)=\frac{1}{c_m(t-t_m)}\,\Phi\left(-i\frac{t+t_m}{t-t_m}\right),$$

осуществляет линейную изометрию пространства $L_p(R,\rho_m)$ на пространство $L_p(\Gamma_0,\rho)$ ([10], стр. 35). Обратный ему оператор имеет вид

$$(B_m^{-1}\varphi)(x)=-\frac{2t_m\, ic_m}{x+i}\;\varphi\left(t_m\frac{x-i}{x+i}\right).$$

Так как $S=B_m^{-1}S_{\Gamma_0}B_m$, то $L_p^{\pm}(R,\rho_m)=B_m^{-1}(L_p^{\pm}(\Gamma_0,\rho))$.

Рассмотрим оператор $A=P^+ +\exp(i\sigma_m x)P^-$, действующий в пространстве $L_p(R,\rho_m)$ и подобный оператору $A_{\Gamma_0}$, $A=B_m^{-1}A_{\Gamma_0}B_m$. В данном случае оператор $A$ обратим справа. Из [6] следует, что произвольный элемент $\Phi(x)\in\operatorname{Ker} A$ имеет вид

$$\Phi(x)=(1-\exp(i\sigma_m x))\sum_{k\in Z}\alpha_{km}\,E_{km}(x), \tag{5}$$

где $\{\alpha_{km}\}_{k\in Z}\in l_p(\delta_m)$, а система функций

$$E_{km}(x)=\frac{c_m}{\sqrt{\pi\sigma_m}}\,\frac{1-\exp(-i\sigma_m x)}{x-2\pi k\sigma_m^{-1}},\ k\in Z,$$

образует базис в подпространстве $P^-(\operatorname{Ker} A)$. Очевидно, что $\operatorname{Ker} A_{\Gamma_0}=B_m(\operatorname{Ker} A)$. Так как, кроме того, $B_m(E_{km}(x))=e_{km}(t)$, то представление (3) следует из представления (5).▶

Переходя к общему случаю, потребуем, чтобы функция $\theta_\Gamma(t)$ аргумента направляющего вектора внешней нормали к кривой $\Gamma$ в точке $t$, $0\leqslant\theta_\Gamma(t)<2\pi$, удовлетворяла условию Липшица в точках $t_m\in\Gamma$, $m\in\overline{1,n}$. В пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ рассмотрим оператор $A_\Gamma=P_\Gamma^+ + a(t)P_\Gamma^-$, где $a(t)$ имеет вид (2) с $\bar{a}(t)=t^\varkappa$, $\varkappa\in Z$ и подчиняется требованиям

$$\arg(\sigma_m t_m)=\theta_\Gamma(t_m),\ m\in\overline{1,n}. \tag{6}$$

Здесь и ниже, не снижая общности рассуждений, мы полагаем, что узлы веса $\rho(t)$ совпадают с разрывами функции $a(t)$.

В данном случае операторы $A_m$, $m\in\overline{1,n}$, с ними и оператор $A_\Gamma$ обратимы справа, [4], [5]. Покажем, что процедура описания подпространства $\operatorname{Ker} A_\Gamma$ сводится к описанию подпространства $\operatorname{Ker} A_m$.

Предложение 2. *Пусть выполнены условия (6). Тогда при* $\varkappa\geqslant 0$

$$P_\Gamma^-(\operatorname{Ker} A_\Gamma)=P_\Gamma^-\Big(\operatorname{Ker}\sum_{m=0}^{n}A_m\Big),\ \text{где}\ A_0=P_\Gamma^+ + t^\varkappa P_\Gamma^-.$$

*При* $\varkappa<0$

$$P_\Gamma^-(\operatorname{Ker} A_\Gamma)=t^{-\varkappa}P_\Gamma^-\Big(\operatorname{Ker}\prod_{m=1}^{n}A_m\Big),$$

*т. е.* $\varphi^-(t)\in P_\Gamma^-(\operatorname{Ker} A_\Gamma)$ *в том и только в том случае, если* $\varphi^-(t)=t^{-\varkappa}\psi^-(t)$, *где* $\psi^-(t)\in P_\Gamma^-\Big(\operatorname{Ker}\prod\limits_{m=1}^{n}A_m\Big)$ *и*

$$\int_\Gamma t^k\psi^-(t)\,dt=0,\ k\in\overline{1,|\varkappa|}. \tag{7}$$

◀ Пусть $\varkappa\geqslant 0$. Тогда при $a_0(t)=t^\varkappa$

$$\prod_{m=0}^{n}A_m=\prod_{m=0}^{n}(P_\Gamma^+ + a_m(t)P_\Gamma^-)=A_\Gamma+P_\Gamma^+B,$$

где $B$ — некоторый линейный оператор в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Если $\varphi(t)\in\operatorname{Ker}\prod\limits_{m=0}^{n}A_m$, то $A_\Gamma\varphi=-P_\Gamma^+B\varphi$ или $\varphi=\psi-A_\Gamma^{-1}P_\Gamma^+B\varphi=\psi-P_\Gamma^+B\varphi$, где $\psi\in\operatorname{Ker} A_\Gamma$. Откуда $P_\Gamma^-\varphi=P_\Gamma^-\psi\in P_\Gamma^-(\operatorname{Ker} A_\Gamma)$. Обратно, если $\psi\in\operatorname{Ker} A_\Gamma$, то $\prod\limits_{m=0}^{n}A_m\psi=P_\Gamma^+B\varphi$ и аналогичные рассуждения показывают, что $P_\Gamma^-\psi\in P_\Gamma^-\Big(\operatorname{Ker}\prod\limits_{m=0}^{n}A_m\Big)$.

Пусть теперь $\varkappa < 0$. Рассмотрим однородное уравнение $A_\Gamma \varphi = (P_\Gamma^+ + a(t)\ P_\Gamma^-)\varphi = 0$. Переходя к новому обозначению $t^\varkappa P_\Gamma^- \varphi = P_\Gamma^- \psi$, мы сводим задачу к предыдущему случаю и получаем, что $t^\varkappa P_\Gamma^- (\operatorname{Ker} A_\Gamma) = P_\Gamma^- \left(\operatorname{Ker} \prod_{m=1}^{n} A_m\right)$. Откуда вытекает справедливость второй части нашего утверждения. При этом условия (7) обеспечивают у функций из подпространства $P_\Gamma^- \left(\operatorname{Ker} \prod_{m=1}^{n} A_m\right)$ на $\infty$ нуль по крайней мере порядка $|\varkappa| + 1$. ▶

Следствием предложения 2 являются формулы, позволяющие сводить описание подпространства $\operatorname{Ker} A_\Gamma$ к уже рассмотренному случаю:

$$P_\Gamma^- (\operatorname{Ker} A_\Gamma) = P_\Gamma^- (\operatorname{Ker} A_0) + P_\Gamma^- (A_0^{-1} \operatorname{Ker} A_1) + \cdots$$
$$\cdots + P_\Gamma^- (A_0^{-1} A_1^{-1} \cdots A_{n-1}^{-1} \operatorname{Ker} A_n),\ \varkappa \geqslant 0, \tag{8}$$
$$P_\Gamma^- (\operatorname{Ker} A_\Gamma) = t^{-\varkappa} [P_\Gamma^- \operatorname{Ker} A_1) + P_\Gamma^- (A_1^{-1} \operatorname{Ker} A_2) + \cdots$$
$$\cdots + P_\Gamma^- (A_1^{-1} \cdots A_{n-1}^{-1} \operatorname{Ker} A_n)],\ \varkappa < 0. \tag{9}$$

Обратимся к основному результату настоящего параграфа, предварительно указав на некоторые новые обозначения: $\alpha_m = \theta_\Gamma(t_m)$, $\zeta_m = \exp(i\alpha_m)$; $b_m = t_m - \zeta_m$; $M_1 = \overline{1, \varkappa} \times \{0\}$; $M_2 = Z \times \overline{1, n}$; $M = M_1 \cup M_2$; $\tilde{\delta}_{km} = (|k| + 1)^{p-2-\beta_m}$, $\tilde{\delta}_m = \{\tilde{\delta}_{km}\}_{k \in Z}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (6). *Тогда при* $\varkappa \geqslant 0$ *подпространство* $\operatorname{Ker} A_\Gamma$ *состоит из тех и только тех функций* $\varphi(t)$, *которые имеют вид*

$$\varphi(t) = (1 - a(t)) \sum_{s \in M} \alpha_s e_s(t),$$

*где*

$$e_s(t) = \begin{cases} t^{-k}, & s = (k, 0) \in M_1; \\ t^{-\varkappa} a_1^{-1}(t) \cdots a_{m-1}^{-1}(t)\, e_{km}(t - \delta_m), & s = (k, m) \in M_2, \end{cases} \tag{10}$$

$e_{km}(t)$ *имеют вид* (4) *с заменой* $\sigma_m$ *на* $|\sigma_m t_m|$, $\{\alpha_{(k, m)}\}_{k \in Z} \in l_p(\tilde{\delta}_m)$, $m \in \overline{1, n}$, $\alpha_s$, $s \in M_1$ — *произвольные комплексные числа.*

*При* $\varkappa < 0$ *подпространство* $\operatorname{Ker} A_\Gamma$ *состоит из тех и только тех функций* $\varphi(t)$, *которые представимы в виде*

$$\varphi(t) = (1 - a(t)) \sum_{s \in M_2} \alpha_s e_s(t),$$

*где* $e_s(t)$ *определяется равенством* (10), $\{\alpha_{(k, m)}\}_{k \in Z} \in l_p(\tilde{\delta}_m)$, $m \in \overline{1, n}$ *и выполнены условия ортогональности*

$$\sum_{s \in M_2} \alpha_s \int_\Gamma t^{\varkappa + j} e_s(t)\, dt = 0,\ j \in \overline{1, |\varkappa|}. \tag{11}$$

*В обоих случаях разложение функции* $\varphi(t)$ *в ряд единственно.*

◀ Через $\Gamma_m$ обозначим окружность единичного радиуса с центром в точке $b_m$, имеющую в точке $t_m$ общую касательную с кривой Г. Из [4], [5] следует, что $\operatorname{Ker} A_m = \operatorname{Ker} A_{\Gamma_m}$, где оператор $A_{\Gamma_m} = P^+_{\Gamma_m} + a_m(t) P^-_{\Gamma_m}$ рассматривается в пространстве $L_p(\Gamma_m, \tilde{\rho}_m)$, $\tilde{\rho}_m(t) = |t - t_m|^{\theta_m}$. Введем оператор $(V\varphi)(\zeta) := \varphi(\zeta + b_m)$, осуществляющий линейное изометрическое отображение пространства $L_p(\Gamma_m, \tilde{\rho}_m)$ на пространство $L_p(\Gamma_0, \rho_0)$, $\rho_0(\zeta) = |\zeta + b_m - t_m|^{\theta_m}$, и коммутирующий с оператором $S$, $VS_{\Gamma_m} = S_{\Gamma_0} V$. Так как

$$(Va_m)(\zeta) = \exp\left(\sigma_m \frac{\zeta + b_m + t_m}{\zeta + b_m - t_m}\right) = \exp\left(\sigma_m + \frac{2|\sigma_m t_m| \zeta_m}{\zeta - \zeta_m}\right) =$$

$$= \exp(\sigma_m - |\sigma_m t_m|) \exp\left(|\sigma_m t_m| \frac{\zeta + \zeta_m}{\zeta - \zeta_m}\right),$$

то оператор $A_{\Gamma_m}$ подобен оператору $A_{\Gamma_0} = P^+_{\Gamma_0} + \exp\left(\omega_m \frac{\zeta + \zeta_m}{\zeta - \zeta_m}\right) P^-_{\Gamma_0}$,

где $\omega_m = |\sigma_m t_m|$, $A_{\Gamma_0} = (c_m V) A_{\Gamma_m} (c_m V)^{-1}$, $c_m = \exp(\sigma_m - |\sigma_m t_m|)$. Воспользовавшись предложением 1, получаем, что $\operatorname{Ker} A_m = \operatorname{Ker} A_{\Gamma_m} = (cV)^{-1} \operatorname{Ker} A_{\Gamma_0}$ состоит из тех и только тех функций $\varphi(t)$, которые допускают представление

$$\varphi(t) = (1 - a_m(t)) \sum_{k \in Z} \alpha_{km} e_{km}(t - b_m),$$

где $e_{km}(t)$ имеет вид (4) с заменой $\sigma_m$ на $|\sigma_m t_m|$, $\{\alpha_{km}\}_{k \in Z} \in l_p(\tilde{\delta}_m)$.

Если теперь $\varkappa \geqslant 0$, то (см. [4], [5]) $\varphi(t) \in \operatorname{Ker} A_\Gamma$ в том и только том случае, когда $\varphi(t) = (1 - a(t)) \psi^-(t)$, где $\psi^-(t) \in P^-_\Gamma(\operatorname{Ker} A_\Gamma)$ и определяется по формуле (8) с учётом того, что $P^-_\Gamma(\operatorname{Ker} A_0) = \{t^{-1}, t^{-2}, \cdots, t^{-\varkappa}\}$. При $\varkappa < 0$ для описания подпространства $\operatorname{Ker} A_\Gamma$ нужно воспользоваться формулой (9). Условия (11) при этом являются следствием условий ортогональности (7). Единственность разложения функции $\varphi(t)$ в ряд следует из базисности системы функций (4). ▶

## § 2. Корректная задача для модельного оператора

Здесь мы продемонстрируем существо нашего подхода на простейшей модели—операторе $A_m$. Прежде всего покажем ортогональность функциональной последовательности (4) в смысле, указанном во введении. Отправляясь от общего вида линейного функционала в пространстве $L_p(\Gamma_0, \rho)$ (см. [10], стр. 38), получим

$$\int_{\Gamma_0} e_{km}(t) \overline{e_{jm}(t)} \, |dt| = \frac{\sigma_m}{\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{\left|\exp\left(-\sigma_m \frac{t + t_m}{t - t_m}\right) - 1\right|^2 |dt|}{(2\pi k + i\sigma_m)(t - \mu_{km})(2\pi j - i\sigma_m)(\bar{t} - \bar{\mu}_{jm})} =$$

$$= \frac{2\sigma_m}{\pi} \int\limits_R \frac{|\exp(-i\sigma_m x)-1|^2\,dx}{2i\sigma_m (x-2\pi k\sigma_m^{-1})(-2i\sigma_m)(x-2\pi j\sigma_m^{-1})} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_m} \int\limits_{-\sigma_m}^{0} (-i) \exp(-2\pi k\sigma_m^{-1} it)\, i \exp(2\pi j \sigma_m^{-1} it)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sigma_m} \int\limits_{-\sigma_m}^{0} \exp(2\pi\sigma_m^{-1}(j-k)\, it)\, dt = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k=j; \\ 0, & k\neq j. \end{cases}$$

Здесь на втором шаге мы провели замену переменных $t = t_m \frac{x-i}{x+i}$, а на третьем шаге, учитывая, что $E_{km}(x) \in L_2(R)$, воспользовались хорошо известным свойством преобразования Фурье.

Пусть $\sigma_m > 0$. Тогда уравнение $A_m \varphi = f$ разрешимо при любой правой части $f \in L_p(\Gamma_0, \rho)$ и его решение, зависящее от произвольной последовательности $\{a_{km}\}_{k\in Z}$ пространства $l_p(\delta_m)$, имеет вид

$$\varphi(t) = (1 - a_m(t)) \sum_{k\in Z} a_{km} e_{km}(t) + (P^+_{\Gamma_0} f)(t) + a_m^{-1}(t)(P^-_{\Gamma_0} f)(t). \qquad (12)$$

Однако решение, принимающее на наборе функционалов $\{e_{km}\}_{k\in Z}$ заданные значения $\varphi_{km}$, порождающие последовательность из пространства $l_p(\delta_m)$, единственно и имеет вид (12), где следует положить $a_{km} = \varphi_{km}$. Действительно, так как

$$\overline{e_{km}}(t) = \sqrt{\frac{\sigma_m}{\pi}}\, \frac{1}{2\pi k - i\sigma_m}\, \frac{\exp\left(\sigma_m \frac{t+t_m}{t-t_m}\right) - 1}{t - \overline{\mu}_{km}} \in L_p^+(\Gamma_0, \rho), \quad \text{то}$$

$$\int\limits_{\Gamma_0} \varphi(t)\, \overline{e_{km}(t)}\, |dt| = \int\limits_{\Gamma_0} (P^-_{\Gamma_0} \varphi)(t)\, \overline{e_{km}(t)}\, |dt| = \varphi_{km} +$$

$$+ \text{const} \int\limits_{\Gamma_0} \exp\left(-\sigma_m \frac{t+t_m}{t-t_m}\right) (P^-_{\Gamma_0} f)(t)\, \frac{\exp\left(\sigma_m \frac{t+t_m}{t-t_m}\right) - 1}{1 - t\,\overline{\mu}_{km}}\, t\, |dt| = \varphi_{km},$$

так как последний интеграл равен нулю по теореме Коши. Кроме того, ввиду изометричности оператора $B_m$, имеем

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma_0,\rho)} \leqslant \text{const}\left(\left\|\sum_{k\in Z} \varphi_{km} e_{km}\right\|_{L_p(\Gamma_0,\rho)} + \|f\|_{L_p(\Gamma_0,\rho)}\right) =$$

$$= \text{const}\left(\left\|\sum_{k\in Z} \varphi_{km} E_{km}\right\|_{L_p(R,\rho_m)} + \|f\|_{L_p(\Gamma_0,\rho)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\left(\|\{\varphi_{km}\}\|_{l_p(\delta_m)} + \|f\|_{L_p(\Gamma_0,\rho)}\right).$$

Здесь на последнем шаге мы воспользовались оценкой, полученной нами в [6].

Тем самым доказано такое утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $a_m(t)=\exp\left(\sigma_m \dfrac{t+t_m}{t-t_m}\right)$, $\sigma_m>0$. *Следующая задача для уравнения* (1)

$$\begin{cases} (A_m\varphi)(t)=f(t), \\ \int\limits_{\Gamma_0} \varphi(t)\overline{e_{km}(t)}\,|dt|=\varphi_{km},\ k\in Z, \end{cases}$$

*имеет в пространстве* $L_p(\Gamma_0,\rho)$ *единственное решение*

$$\varphi(t)=(1-a_m(t))\sum_{k\in Z}\varphi_{km}e_{km}(t)+(P^+_{\Gamma_0}f)(t)+a_m^{-1}(t)(P^-_{\Gamma_0}f)(t),$$

*непрерывно зависящее от произвольных исходных данных* $f(t)\in\in L_p(\Gamma_0,\rho)$ *и* $\{\varphi_{km}\}_{k\in Z}\in l_p(\delta_m)$.

Пусть теперь $\sigma_m<0$. Тогда оператор $A_m$ обратим слева и $A_m^{-1}=P^+_{\Gamma_0}+a_m^{-1}(t)P^-_{\Gamma_0}$. Хорошо известно ([10], стр. 62), что для разрешимости уравнения $A_m\varphi=y$ в этом случае необходимо и достаточно, чтобы $y=A_mA_m^{-1}y$. Но тогда уравнение $A_m\varphi=f-(I-A_mA_m^{-1})f$ разрешимо при любой правой части $f\in L_p(\Gamma_0,\rho)$. Множество функций $\{(I-A_mA_m^{-1})f\}_{f\in L_p(\Gamma_0,\rho)}$ составляет подпространство $\operatorname{Ker}A_m^{-1}$ и поэтому по теореме 1

$$(I-A_mA_m^{-1})f=(1-a_m^{-1}(t))\sum_{k\in Z}\beta_{km}e_{km}(t),$$

где $\{\beta_{km}\}_{k\in Z}\in l_p(\delta_m)$, а $e_{km}(t)$ имеет вид (4) с заменой $\sigma_m$ на $-\sigma_m$. Кроме того, из последнего равенства следует, что

$$\beta_{km}=\int\limits_{\Gamma_0} a_m(t)P^+_{\Gamma_0}[a_m^{-1}(t)(P^-_{\Gamma_0}f)(t)]\overline{e_{km}(t)}|dt|, \tag{13}$$

а

$$\left\|\sum_{k\in Z}\beta_{km}e_{km}(t)\right\|=\|(I-A_mA_m^{-1})f\|\leqslant \mathrm{const}\,\|f\|.$$

Поэтому мы получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $a_m(t)\exp\left(\sigma_m\dfrac{t+t_m}{t-t_m}\right)$, $\sigma_m<0$. *Для любой функции* $f(t)\in L_p(\Gamma_0,\rho)$ *существует единственная последовательность* $\{\beta_{km}\}_{k\in Z}\in l_p(\delta_m)$ *такая, что уравнение*

$$(A_m\varphi)(t)=f(t)+(a_m^{-1}(t)-1)\sum_{k\in Z}\beta_{km}e_{km}(t)$$

*имеет единственное решение* $\varphi(t)\in L_p(\Gamma_0,\rho)$, *непрерывно зависящее от* $f$. *При этом*

$$\varphi(t)=[(P^+_{\Gamma_0}+a_m^{-1}(t)P^-_{\Gamma_0})f](t),$$

*а последовательность* $\{\beta_{km}\}_{k\in Z}$ *определяется по формуле* (13).

## § 3. Общий случай

Решающим моментом при постановке корректной задачи для модельного оператора явилась ортогональность системы функций (4). В общем случае система функций (10) этим свойством не обладает, а процедура процесса Шмидта для получения ортогонального базиса неоправдано громоздка. Однако, в случае, когда $\Gamma$ есть окружность $\Gamma_b$ (радиуса $\nu$ с центром в точке $b$), мы можем построить ортогональную систему, эквивалентную системе (10), не прибегая к процессу ортогонализации.

Теорема 4. *Пусть* $\varkappa > 0$. *Следующие функции*

$$e_s(t) = \begin{cases} (2\pi\nu)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{t-b}{\nu}\right)^{-k}, & s=(k,\ 0)\in M_1, \\ \nu^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{t-b}{\nu}\right)^{-\varkappa}\sum\limits_{r=1}^{m-1} d_r\,[a_r(t)]^{-1}\, e_{km}\left(\dfrac{t-b}{\nu}\right), & s=(k,\ m)\in M_2, \end{cases} \tag{14}$$

*образуют ортонормированную систему в пространстве* $L_p(\Gamma, \rho)$. *При этом* $d_r = \exp\left(\sigma_r - \left|\dfrac{\sigma_r\, t_r}{\nu}\right|\right)$.

◀ Ниже при вычислении интегралов мы систематически применяем замену переменной $t = \nu\zeta + b$ и теорему Коши. При $k\in\overline{1,\ \varkappa}$

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{t-b}{\nu}\right)^{-k}\overline{\left(\frac{t-b}{\nu}\right)^{-\varkappa-1}\prod_{r=1}^{m}d_r\,[a_r(t)]^{-1}\,e_{jm}\left(\frac{t-b}{\nu}\right)}\,|dt| =$$

$$= \mathrm{const}\int\limits_{\Gamma_0}\zeta^{\varkappa-k}\,\overline{\prod_{r=1}^{m-1}d_r\left[d_r\exp\left(\left|\frac{\sigma_r - t_r}{\nu}\right|\frac{\zeta+\zeta_r}{\zeta-\zeta_r}\right)\right]^{-1}}\;\overline{e_{jm}(\zeta)}\,|d\zeta| =$$

$$= \mathrm{const}\int\limits_{\Gamma_0}\zeta^{\varkappa-k}\sum_{r=1}^{m-1}\exp\left(\left|\frac{\sigma_r\, t_r}{\nu}\right|\frac{\zeta+\zeta_r}{\zeta-\zeta_r}\right)\frac{\exp\left(\left|\dfrac{\sigma_m t_m}{\nu}\right|\dfrac{\zeta+\zeta_m}{\zeta-\zeta_m}\right)-1}{1-\zeta\,\bar{\mu}_{jm}}\,d\zeta = 0.$$

Если $m > q$, то

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{t-b}{\nu}\right)^{-\varkappa}\prod_{r=1}^{m-1}d_r\,[a_r(t)]^{-1}\,e_{jm}\left(\frac{t-b}{\nu}\right)\overline{\left(\frac{t-b}{\nu}\right)^{-\varkappa}\sum_{r=1}^{q-1}d_r[a_r(t)]^{-1}e_{kq}\left(\frac{t-b}{\nu}\right)}\times$$

$$\times|dt| = \mathrm{const}\int\limits_{\Gamma_0}\sum_{r=q}^{m-1}\exp\left(-\left|\frac{\sigma_r t_r}{\nu}\right|\frac{\zeta+\zeta_r}{\zeta-\zeta_r}\right)e_{jm}(\zeta)\frac{\exp\left(\dfrac{\sigma_r t_r}{\nu}\left|\dfrac{\zeta+\zeta_q}{\zeta-\zeta_q}\right.\right)-1}{1-\zeta\mu_{kq}}\,d\zeta = 0$$

так же как и в случае $m < q$. Если же $m = q$, но $j \neq k$, то равенство нулю соответствующего интеграла доказывается так же как и в предыдущем параграфе. Наконец, в случае $m = q$ и $k = j$ получаем, что

$$\frac{1}{\nu}\int\limits_{\Gamma}\left|\left(\frac{t-b}{\nu}\right)^{-k}\right|\sum_{r=1}^{m-1}d_r\,[a_r(t)]^{-1}\,e_{km}\left(\frac{t-b}{\nu}\right)\Bigg|^2|dt| =$$

$$= \int_{\Gamma_0} \left| \sum_{r=1}^{m-1} d_r \left[ d_r \exp\left( \left| \frac{\sigma_r t_r}{\nu} \right| \frac{\zeta+\zeta_r}{\zeta-\zeta_r} \right) \right]^{-1} e_{km}(\zeta) \right|^2 |d\zeta| =$$

$$= \int_{\Gamma_0} |e_{km}(\zeta)|^2 |d\zeta| = 1. \blacktriangleright$$

Рассмотрим оператор $A_\Gamma = P_\Gamma^+ + a(t) P_\Gamma^-$, где $a(t)$ имеет вид (2). По условию

$$a(t) = \bar{a}^+(t) \tilde{a}^-(t) \left( \frac{t-b}{\nu} \right)^{\varkappa} \sum_{m=1}^{n} a_m(t),$$

$$\bar{a}^+ \in L_p^+(\Gamma, \rho),\ [\bar{a}^+]^{-1} \in L_q^+(\Gamma, \rho^{1-q}),$$

$$\bar{a}^- \in L_q(\Gamma, \rho^{1-q}),\ [\tilde{a}^-]^{-1} \in L_p^-(\Gamma, \rho),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$[\bar{a}^+]^{-1} P_\Gamma^+ [\tilde{a}^-]^{-1}$ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (6). *Тогда при* $\varkappa \geqslant 0$ *следующая задача для уравнения* (1)

$$\begin{cases} (A_\Gamma \varphi)(t) = f(t), \\ \int_\Gamma (P_\Gamma^- \varphi)(t) \overline{g_s(t)} |dt| = \varphi_s, \quad s \in M = M_1 \cup M_2 \end{cases}$$

*имеет в пространстве* $L_p(\Gamma, \rho)$ *единственное решение*

$$\varphi(t) = (1 - a(t)) [\bar{a}^-(t)]^{-1} \sum_{s \in M} \varphi_s e_s(t) +$$

$$+ \bar{a}^+(t) (P_\Gamma^+ + [a(t)]^{-1} P_\Gamma^-) ([\tilde{a}^+(t)]^{-1} f(t)), \qquad (15)$$

*непрерывно зависящее от произвольных исходных данных* $f \in L_p(\Gamma, \rho)$,

$$\{\varphi_s\}_{s \in M_1} \leqslant \mathbf{C}^{\varkappa},\ \{\varphi_{(k,m)}\}_{k \in Z} \in l_p(\delta_m),\ m \in \overline{1, n}.$$

*Если* $\varkappa < 0$, *то следующая задача для уравнения* (1)

$$\begin{cases} (A_\Gamma \varphi)(t) = f(t), \\ \int_\Gamma (P_\Gamma^- \varphi)(t) \overline{g_s(t)} |dt| = \varphi_s, \quad s \in M_2 \end{cases}$$

*имеет единственное решение вида* (15), *где суммирование следует проводить не по множеству* $M$, *а по множеству* $M_2$. *Это решение непрерывно зависит от* $f \in L_p(\Gamma, \rho)$ *и* $\{\varphi_{(k,m)}\}_{k \in Z} \in l_p(\delta_m)$, $m \in \overline{1, n}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\sum_{s \in M_2} \varphi_s \frac{d^r}{dz^r} \left[ e_s\left( \frac{1}{z} \right) \right] \Bigg|_{z=0} = - \frac{d^r}{dz^r} \left[ \left( \frac{t-b}{\nu} \right)^{\varkappa} \frac{\tilde{a}^+}{a} \left( P_\Gamma^- \frac{1}{\bar{a}^+} f \right) \right] \left( \frac{1}{z} \right) \Bigg|_{z=0}, \qquad (16)$$

*В обоих случаях* $g_s(t) = \overline{\bar{a}^-(t) e_s(t)}$, *где* $e_s(t)$ *имеет вид* (14).

◀ Если $\varkappa > 0$, то согласно теореме 1 общее решение уравнения (1) имеет вид (15), где вместо $\varphi_s$ следует поставить произвольные постоянные $c_s$, определяемые условиями этой теоремы. При этом вместо системы функций (10) в качестве $e_s(t)$ мы можем взять эквивалентную ей систему функций (14). В этом случае

$$(P_\Gamma^- \varphi)(t) = \frac{1}{\tilde{a}^-(t)} \sum_{s\in M} c_s e_s(t) + \frac{\tilde{a}^+(t)}{a(t)} \left( P_\Gamma^- \left[ \frac{1}{\tilde{a}^+} f \right] \right)(t). \tag{17}$$

Поэтому

$$\int_\Gamma (P_\Gamma^- \varphi)(t) \overline{g_s(t)} |dt| = c_s + \int_\Gamma \frac{\tilde{a}^+(t)}{a(t)} \left( P_\Gamma^- \left[ \frac{1}{\tilde{a}^+} f \right] \right)(t) \overline{e_s(t)} |dt| = c_s,$$

что и обеспечивает корректную постановку задачи для оператора $A_\Gamma$. Непрерывная зависимость решения от исходных данных доказывается также как и в предыдущем параграфе.

При $\varkappa < 0$ составляющая общего решения $P_\Gamma^- \varphi$ также имеет вид (17), где суммирование необходимо проводить не по множеству $M_1$, а по множеству $M_2$, а коэффициенты $c_s$ должны удовлетворять условиям (16). Как и в предыдущем случае $\int_\Gamma (P_\Gamma^- \varphi)(t) \overline{g_s(t)} |dt| = c_s$, что и обеспечивает единственность решения задачи. ▶

Теорема 6. *Пусть* $|\arg(t_m \vartheta_m) - \theta_\Gamma(t_m)| = \pi$, $m \in \overline{1, n}$. *Для любой функции* $f(t) \in L_p(\Gamma, \rho)$ *существует единственная последовательность* $\{\beta_s\}_{s\in M}$ *такая, что уравнение*

$$(A_\Gamma \varphi)(t) = f(t) + (a^{-1}(t) - 1)\, \tilde{a}^-(t) \sum_{s\in M} \beta_s e_s(t)$$

*имеет единственное решение* $\varphi(t) \in L_p(\Gamma, \rho)$ *вида*

$$\varphi(t) = [(P_\Gamma^+ + a^{-1}(t) P_\Gamma^-) f](t),$$

*непрерывно зависящее от* $f(t)$.

*При этом* $e_s(t)$ *имеет вид* (14) *с заменой* $\vartheta_m$ *на* $-\vartheta_m$; *если*

$\varkappa < 0$, *то* $M = M_1 \cup M_2$, $\{\beta_s\}_{s\in M_1} \in \mathbb{C}^\varkappa$, $\{\beta_{km}\}_{k\in Z} \in l_p(\delta_m)$,

$m \in \overline{1, n}$; *если* $\varkappa \geq 0$, *то* $M = M_2$, $\{\beta_{(k, m)}\}_{k\in Z} \in l_p(\delta_m)$, $m \in \overline{1, n}$.

*Во всех случаях*

$$\beta_s = \int_\Gamma P_\Gamma^- [a(t) P_\Gamma^+ a^{-1}(t) P_\Gamma^- f](t) \overline{g_s(t)} |dt|,$$

*где* $g_s(t) = \overline{[\tilde{a}^-(t)]^{-1}}\, e_s(t)$.

◀ По существу мы должны повторить доказательство теоремы 3. Заметим только, что в условиях теоремы оператор $A_\Gamma$ обратим слева, а оператор $A_\Gamma^{-1}$ удовлетворяет условиям теоремы 5. Поэтому условие $\varphi \in \operatorname{Ker} A_\Gamma^{-1}$ равносильно равенству

$$\varphi=(I-A_\Gamma A_\Gamma^{-1})f=(a(t)-1)P_\Gamma^-[a^{-1}(t)\ P_\Gamma^-\ f](t)=$$
$$=(1-a^{-1}(t))\,\tilde{a}^-(t)\sum_{s\in M}\overset{0}{\beta}_s e_s(t),$$

откуда и следует все дальнейшие рассуждения. ▶

Наконец, рассмотрим еще один случай, более общий по отношению к тому, который изучен в теоремах 5 и 6.

Пусть контур $\Gamma$ таков, что все точки $t_m$, $m\in\overline{1,n}$, лежат на окружности $\Gamma_b$, которая, в свою очередь, целиком содержится в области $\bar{D}^+(\bar{D}^-)$, ограниченной кривой $\Gamma$ и находящейся от последней слева (справа) при обходе $\Gamma$ против движения часовой стрелки. Тогда ограничение функции $P_\Gamma^+\varphi\ (P_\Gamma^-\varphi)$ на окружность $\Gamma_b$ удовлетворяет условию $P_\Gamma^+\varphi|_{\Gamma_b}\in L_p^+(\Gamma_b,\rho)\,(P_\Gamma^-\varphi|_{\Gamma_b}\in L_p^-(\Gamma_b,\rho)$ и поэтому верны соответствующие модификации теорем 5 и 6. Приведем их лишь в случае $\Gamma_b\subset\bar{D}^-$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (6). *Тогда при* $\varkappa\geqslant0$ *следующая задача для уравнения* (1)

$$\begin{cases}(A_\Gamma\varphi)(t)=f(t), & t\in\Gamma,\\ \displaystyle\int_{\Gamma_b}(P_\Gamma^-\varphi)(\zeta)\,\overline{g_s(\zeta)}\,|d\zeta|=\varphi_s, & s\in\dot{M}=M_1\cup M_2\end{cases}\tag{18}$$

*имеет в пространстве* $L_p(\Gamma,\rho)$ *единственное решение вида* (15), *непрерывно зависящее от произвольных исходных данных* $f\in L_p(\Gamma,\rho)$,

$$\{\varphi_s\}_{s\in M_1}\in\mathbf{C}^\varkappa,\ \{\varphi_{(k,m)}\}_{k\in Z}\in l_p(\delta_m),\ m\in\overline{1,n}.$$

*Если* $\varkappa<0$, *то задача* (18), *где* $M=M_2$ *имеет единственное решение вида* (15), *где следует положить* $M=M_2$. *Это решение непрерывно зависит от* $f(t)\in L_p(\Gamma,\rho)$ *и* $\{\varphi_{(k,m)}\}_{k\in Z}\in l_p(\delta_m)$, $m\in\overline{1,n}$, *удовлетворяющих условиям* (16).

*В обоих случаях* $g_s(\zeta)=\tilde{a}^-(\zeta)\,e_s(\zeta)$, *где* $e_s(\zeta)$ *имеет вид* (14).

◀ При $\varkappa\geqslant0$ равенство (7) можно рассматривать не на контуре $\Gamma$, а на контуре $\Gamma_b\subset\bar{D}^-$. При этом по теореме Э. Гордадзе [11], $\|P_\Gamma^-\varphi|_{\Gamma_b}\|_{L_p(\Gamma_b,\rho)}\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p(\Gamma,\rho)}$. После этого следует повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 5. ▶

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 6. *Для любой функции* $f(t)\in L_p(\Gamma,\rho)$ *существует единственная последовательность* $\{\beta_s\}_{s\in M}$ *такая, что уравнение*

$$(A_\Gamma\varphi)(t)=f(t)+(a^{-1}(t)-1)\,\tilde{a}^-(t)\sum_{s\in M}\beta_s e_s(t)$$

*имеет единственное решение* $\varphi(t)\in L_p(\Gamma,\rho)$ *вида*

$$\varphi(t)=[(P_\Gamma^++a^{-1}(t)P_\Gamma^-)f](t).$$

*Функции $e_s(t)$ и постоянные $\beta_s$ удовлетворяют условиям теоре-ремы 6. При этом $\beta_s$ определяется формулой*

$$\beta_s = \int_{\Gamma_b} P_\Gamma^- [a(t) P_\Gamma^+ [a^{-1}(t) P_\Gamma^- f]](\zeta) \overline{g_s(\zeta)} |d\zeta|,$$

*где* $g_s(\zeta) = \overline{[\widetilde{a}^-(\zeta)]^{-1}} e_s(\zeta)$.

Отметим, что случай одного почти-периодического разрыва у функции $a(t)$ содержится в теоремах 7 и 8, так как условие, наложенное выше на кривую $\Gamma$ в точках $t_m$ обеспечивает существование подходящей окружности $\Gamma_b$ (см. [5], предложение 1). Кроме того, результаты § 3 позволяют ставить корректную задачу для дискретного уравнения Винера—Хопфа двойственного по Фурье к уравнению (1), (2).

В заключение заметим, что в работах М. М. Джрбашяна [12] и Г. М. Айрапетяна [13] изложен достаточно общий подход к проблеме базисов и биортогональных систем на замкнутых спрямляемых жордановых кривых, который, по-видимому, позволяет ставить аналогичную корректную задачу в случае более общем, чем рассмотренный в данной работе. К этому вопросу мы вернемся в другом месте.

Ростовский государственный университет

Поступила 4.II.1982

Վ. Բ. ԴԻԲԻՆ, Գ. Վ. ԴՈԴՈԽՈՎԱ. Փակ կոնտուրի վրա Ռիմանի խնդրի կոռեկտ դրվածքը նրա գործակցի համարյա պարբերական խզումների դեպքում *(ամփոփում)*

*Դիտարկված դեպքում ստանդարտ դրվածքով Ռիմանի խնդիրը ունի կամ անվերջչափանի կորիզ, կամ անվերջչափանի կոկորիզ։*

*Ներկա հոդվածում պարունակվում է խնդրի կոռեկտ դրվածքը $L_p(\Gamma, \rho)$ տարածությունում, $\Gamma$-ն ողորկ փակ կոնտուր է։ Այդ դրվածքը ապահովում է խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը, ինչպես նաև նրա անընդհատորեն կախվածությունը սկզբնական պայմաններից։*

V. B. DYBIN, G. V. DODOHOVA. *Correct version of the Riemann problem on a closed curve for the case, where its coefficient has the almost periodic ruptures* (summary)

For this case the Riemann problem posed in the standard way has either the infinite-dimensional kernel or the infinite-dimensional cokernel.

The present paper contains the correct version of the Riemann problem in the space $L_p(\Gamma, \rho)$, where $\Gamma$ is a smooth closed curve. Here the unigue solution of the problem always exists and depends continuosly on the initial data.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Ц. Гохберг, А. А. Семенцул.* Теплицевы матрицы, составленные из коэффициентов Фурье функций с разрывами почти-периодического типа, Математические исследования, Кишинев, 5, вып. 4, 1970, 63—83.
2. *А. А. Семенцул.* О сингулярных интегральных уравнениях с коэффициентами, имеющими разрывы почти-периодического типа. Математические исследования, Кишинев, 6, 3 (21), 1971, 94—114.
3. *В. Б. Дыбин.* О сингулярном интегральном операторе на вещественной оси с почти-периодическими коэффициентами, сб. «Теория функций, диф. уравнения и их приложения», Элиста, 1976, 98—108.

4. *С. М. Грудский, В. Б. Дыбин.* Краевая задача Римана с разрывами почти-периодического типа у ее коэффициента. ДАН СССР, 237, № 1, 1977, 21—24.
5. *С. М. Грудский, В. Б. Дыбин.* Краевая задача Римана в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ с почти-периодическими разрывами у ее коэффициента. Математические исследования, Кишинев, вып. 54, 1980, 36—49
6. *В. Б. Дыбин, Г. В. Додохова.* Корректная постановка краевой задачи Римана на прямой с почти-периодическим разрывом коэффициента, Деп. ВИНИТИ, 3.4.81, № 1497—81, с. 44.
7. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системе рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 2, № 1, 1967, 3—51.
8. *Г. М. Айрапетян.* О базисе из рациональных функций в подпространствах классов Харди $H^p$ $(1<p<\infty)$, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 8, № 6, 1973, 429—450.
9. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, С. В. Хрущёв.* Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер, I—IV, Препринт ЛОМИ, Р-10-80, Ленинград, 1980.
10. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* Введение в теорию сингулярных интегральных операторов, Кишинев, «Штиинца», 1973.
11. *Э. Г. Гордадзе.* О сингулярных интегралах на негладких линиях. Тр. симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа, т. 2, Тбилиси, «Мецниереба», 1974, 74—85.
12. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 8, № 5, 1973, 384—409.
13. *Г. М. Айрапетян.* О базисе рациональных функций в подпространствах классов $E_p$ $(1<p<\infty)$, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», т. 9, № 3, 1974, 171—184.
14. *С. Г. Рафаэлян.* О базисности некоторых систем целых функций, ДАН Арм.ССР, 7, № 4, 1980, 198—204.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 5, 1983 Математика

УДК 517.984.5

И. Г. ХАЧАТРЯН

# ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА ВСЕЙ ОСИ

Пусть $L$— максимальный дифференциальный оператор в $L^2(-\infty, \infty)$ (см. [1], стр. 192), порожденный дифференциальным выражением

$$l[y] = \frac{1}{i^n} y^{(n)} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{i^{2k}} [p_{2k} y^{(k)}]^{(k)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{1}{2 i^{2k+1}} \{[p_{2k+1} y^{(k)}]^{(k+1)} + [p_{2k+1} y^{(k+1)}]^{(k)}\}, \tag{1}$$

где $n > 2$, $m = \left[\frac{n}{2}\right]$, $m_1 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, а $p_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n-2)$

— вещественные суммируемые на всей оси $(-\infty, \infty)$ функции.

*Оператор $L$ является самосопряженным.*

В настоящей работе исследуются спектр и разложение по собственным функциям оператора $L$, а затем при дополнительных ограничениях на коэффициенты $p_k(x)$ рассматривается вариант обратной задачи рассеяния. Решение этой задачи основывается на аналоге интегрального уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко (см. [2], [3]).

На перспективность обратных задач рассеяния для дифференциальных операторов вида (1) в связи с решением нелинейных эволюционных уравнений указал Л. Д. Фаддеев [4], стр. 155 (см. в связи с этим также [5]).

Попытка решить обратную задачу рассеяния для оператора третьего порядка в другой постановке предпринята в работе [6]. Для дифференциальных операторов произвольного четного порядка некоторый вариант обратной задачи рассеяния на полуоси рассмотрен автором в работах [7], [8].

1. Исследование спектра. Равенство Парсеваля. Суммируемость коэффициентов $p_k(x)$ на оси $(-\infty, \infty)$ всюду в дальнейшем предполагается выполненной.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1°. *Непрерывный спектр оператора $L$ при $n=2m+1$ совпадает с осью $(-\infty, \infty)$, а при $n=2m$ — с полуосью $[0, \infty)$. Точечный спектр ограничен и не имеет отличной от нуля точки сгущения. При $n=2m+1$ кратность отличных от нуля собственных значений не превосходит $m$. При $n=2m$ кратность отрицательных* *собственных значений не превосходит $m$, а кратность положительных собственных значений не превосходит $m-1$.*

2°. *Если выполняется одно из следующих двух условий:*

$$\int_{-\infty}^{0} |p_k(x)|\,dx + \int_{0}^{\infty} (1+x)^{n-1-k} |p_k(x)|\,dx < \infty,\ k=0, 1, \cdots, n-2,$$

$$\int_{-\infty}^{0} (1-x)^{n-1-k} |p_k(x)|\,dx + \int_{0}^{\infty} |p_k(x)|\,dx < \infty,\ k=0, 1, \cdots, n-2,$$

*то нуль не является собственным значением оператора $L$.*

3°. *Если выполняется условие*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{n-1-k} |p_k(x)|\,dx < \infty,\ k=0,\ 1, \cdots, n-2,$$

*то при четном $n$ число отрицательных собственных значений оператора $L$ конечно, а в случаях $n=3$ и $n=4$ конечно число всех собственных значений. Кроме того, в общем случае для последовательности $\{\mu_k\}$ собственных значений, пронумерованных в порядке невозрастания модулей, сходится ряд*

$$\sum_k \sqrt{|\mu_k|} < \infty.$$

Обозначим через $T$ множество всех чисел $\lambda$ таких, что числа $\lambda^n$ являются собственными значениями оператора $L$ и, кроме того, при нечетном $n$ $\operatorname{Im}\lambda = 0$, а при четном $n$ $\lambda > 0$ или $\arg\lambda = -\pi/n$.

При нечетном $n$ для каждого вещественного значения $\lambda$ ($\lambda \overline{\in} T$, $\lambda \neq 0$) уравнение

$$l[y] = \lambda^n y \tag{2}$$

имеет с точностью до постоянного множителя одно ограниченное на всей оси решение $u(x, \lambda) \not\equiv 0$. Для такого решения при $x \to \pm\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$u(x, \lambda) = A_0^{\pm}(\lambda) e^{i\lambda x} + o(1),$$

причем $|A_0^+(\lambda)| = |A_0^-(\lambda)| \neq 0$. Если $A_0^+(\lambda) \equiv 1$ или $A_0^-(\lambda) \equiv 1$, то решение $u(x, \lambda)$ непрерывно по $\lambda$ и по непрерывности определяется также для значений $\lambda \in T$ ($\lambda \neq 0$), кроме того, при каждом фиксированном $x$ по переменной $\lambda$ аналитически продолжается с полуосей $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ до мероморфной в секторах $|\arg\lambda| \geqslant \pi - \dfrac{\pi}{2n}$ и $|\arg\lambda| \leqslant \dfrac{\pi}{2n}$ функции. Однако в дальнейшем важно, чтобы функции $A_0^{\pm}(\lambda)$ были измеримыми на вещественной оси и

$$|A_0^{\pm}(\lambda)| = 1, \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{3}$$

В случае $n = 2m$ при каждом $\lambda > 0$ ($\lambda \overline{\in} T$) уравнение (2) имеет два линейно независимых ограниченных на всей оси решения $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$. Для таких решений при $x \to \pm\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$u_\nu(x, \lambda) = B_{0\nu}^{\pm}(\lambda) e^{i\lambda x} + B_{m\nu}^{\pm}(\lambda) e^{-i\lambda x} + o(1),\ \nu = 1,\ 2,$$

где числа $B_{0\nu}^{\pm}(\lambda)$ и $B_{m\nu}^{\pm}(\lambda)$ связаны соотношениями

$$|B_{0\nu}^{+}|^2+|B_{m\nu}^{-}|^2=|B_{m\nu}^{+}|^2+|B_{0\nu}^{-}|^2,\quad \nu=1,\ 2,$$

$$B_{01}^{+}\,\overline{B}_{02}^{+}+B_{m1}^{-}\,\overline{B}_{m2}^{-}=B_{m1}^{+}\,\overline{B}_{m2}^{+}+B_{01}^{-}\,\overline{B}_{02}^{-}.$$

Кроме того, определители матриц

$$\begin{Vmatrix} B_{01}^{+} & B_{m1}^{-} \\ B_{02}^{+} & B_{m2}^{-} \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} B_{m1}^{+} & B_{01}^{-} \\ B_{m2}^{+} & B_{02}^{-} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

отличны от нуля и равны по модулю.

Отметим, что если $p_{2k+1}(x)\equiv 0$ $(k=0,\ 1,\cdots,\ m-2)$, то имеет место также соотношение

$$B_{01}^{+}\,B_{m2}^{-}+B_{m1}^{-}\,B_{02}^{+}=B_{m1}^{+}\,B_{02}^{-}+B_{01}^{-}\,B_{m2}^{+}.$$

Впредь будем предполагать, что матрицы (4) унитарны. Очевидно, что в силу указанных выше соотношений такой выбор решений $u_1(x,\lambda)$ и $u_2(x,\lambda)$ всегда возможен. При этом одну из матриц (4) можно задавать произвольно, а по ней вторая матрица и решения $u_\nu(x,\lambda)$ определятся однозначно. Отметим, что если одна из матриц (4) тождественно равна единичной матрице, то соответствующие решения $u_1(x,\lambda)$ и $u_2(x,\lambda)$ непрерывны по $\lambda$ и по непрерывности определяются также для значений $\lambda\in T$ $(\lambda>0)$. Однако в дальнейшем важны лишь унитарность матриц (4) и измеримость их элементов на полуоси $\lambda>0$. При четном $n$ функцию $u(x,\lambda)$ определим по формуле

$$u(x,\lambda)=\begin{cases} u_1(x,\lambda), & \lambda>0, \\ u_2(x,-\lambda), & \lambda<0. \end{cases}$$

Таким образом, всюду в дальнейшем будем предполагать, что для ограниченного на всей оси решения $u(x,\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty,\ \lambda\neq 0)$ уравнения (2) при нечетном $n$ выполняется равенство (3), а при четном $n$ унитарны матрицы (4).

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1°. *Пусть $f(x)\in L^2(-\infty,\ \infty)$, тогда интеграл*

$$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{u}(x,\lambda)\,dx,\quad -\infty<\lambda<\infty, \tag{5}$$

*сходится в смысле метрики в $L^2(-\infty,\ \infty)$, и имеет место равенство Парсеваля*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\,d\lambda+\sum_k\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\varphi}_k(x)\,dx\right|^2, \tag{6}$$

*где $\{\varphi_k(x)\}$ — ортонормированная система всех собственных функций оператора $L$.*

2°. *Пусть $Q$ — ортогональное дополнение линейной оболочки всех собственных функций оператора $L$, $L'$ — часть оператора $L$ в $Q$, а $\Lambda$ — оператор умножения на $\lambda^n$ в $L^2(-\infty,\ \infty)$. Тогда $L'$ есть абсолютно непрерывная часть оператора $L$, кроме того, формулы (5) и*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\,u(x,\lambda)\,d\lambda,\quad -\infty<x<\infty,$$

*устанавливают взаимно обратные изометрические отображения* $Q$ *на* $L^2(-\infty,\infty)$ *и* $L^2(-\infty,\infty)$ *на* $Q$ *соответственно, переводящие друг в друга операторы* $L'$ *и* $\Lambda$.

Теоремы 1 и 2 можно доказать, используя известные формулы обращения, связанные с оператором $L$ (см. [1], стр. 251, 280; [9], стр. 289, 306; [10], стр. 216, 217). При этом нужно учесть, что для всех $\lambda\neq 0$ уравнение (2) имеет решения $y^+(x,\lambda)$ и $y^-(x,\lambda)$, обладающие асимптотикой (см. [1], стр. 320)

$$y^{\pm}(x,\lambda)=e^{i\lambda x}[1+o(1)],\quad x\to\pm\infty.$$

При доказательстве теоремы 1 используется также метод расщепления (см. [1], [11]).

2. Треугольное преобразование. Предположим теперь, что коэффициенты $p_k(x)$ в (1) при некотором вещественном $a$ аналитически продолжаются с полуоси $(a,\infty)$ в сектор

$$\Omega^+=\left\{z;\ |\arg(z-a)|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right\}\tag{7}$$

и удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{a}|p_k(x)|\,dx+\int_{a}^{\infty}(1+|x|)^{n-1-k}\,[\sup_{\operatorname{Re}z=x}|p_k(z)|]\,dx<\infty,\tag{8}$$
$$k=0,1,\cdots,n-2.$$

Тогда при всех $\lambda$ из полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ уравнение (2) имеет решение $y^+(x,\lambda)$, которое представляется на полуоси $[a,\infty)$ в виде (см. [12])

$$y^+(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+\int_{x}^{\infty}e^{i\lambda t}K^+(x,t)\,dt,\quad a\leqslant x<\infty,\tag{9}$$

где ядро $K^+(x,t)\,(a\leqslant x\leqslant t<\infty)$ не зависит от $\lambda$ и удовлетворяет неравенству

$$|K^+(x,t)|\leqslant h^+\left(\frac{x+t}{2}\right)\tag{10}$$

с некоторой невозрастающей суммируемой на полуоси $[a,\infty)$ функцией $h^+(x)$. Имеет место также формула

$$e^{i\lambda x}=y^+(x,\lambda)+\int_{x}^{\infty}y^+(t,\lambda)\,H^+(x,t)\,dt,\quad a\leqslant x<\infty,\tag{11}$$

причем ядро $H^+(x,t)\,(a\leqslant x\leqslant t<\infty)$ удовлетворяет неравенству, аналогичному (10).

Треугольное представление (9) имеет в дальнейшем принципиальное значение. На примере покажем, что в указанных выше достаточных условиях существования треугольного преобразования (9) раствор сектора голоморфности (7) найден точно. Рассмотрим уравнение

$$y^{(4)}+p(x)\,y=\lambda^4 y, \quad -\infty<x<\infty, \tag{12}$$

где

$$p(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+1}}>0, \quad -\infty<x<\infty.$$

Очевидно, что для уравнения (12) выполняются указанные выше условия в секторе $|\arg z|<\pi/4$. Поэтому уравнение (12) имеет решение $y^+(x, \lambda)$, представимое при всех $\operatorname{Im}\lambda>0$ и $x>0$ в виде (9). Однако можно доказать, что при каждом $x<0$

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}|y^+(x, \lambda)|=\infty.$$

Следовательно, при $x<0$ представление (9) не имеет места, хотя функция $p(z)$ при любом $a<0$ голоморфна в секторе

$$|\arg(z-a)|<\arg\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}-a\right).$$

3. Данные рассеяния. Будем предполагать, что коэффициенты $p_k(x)$ в (1) голоморфны в секторе (7) и удовлетворяют условиям (8), а $y^+(x, \lambda)$ — решение (9) уравнения (2).

Обозначим через $\Phi(x, t; \lambda)$ ядро интегрального оператора, являющегося ортопроектором на собственное подпространство оператора $L$, соответствующее собственному значению $\lambda^n$. Заметим, что, согласно теореме 1, при условиях (8) $0\overline{\in}T$.

Пусть $M$ — непрерывный спектр оператора $L$ без точки $\lambda=0$.

Введем также обозначения

$$\omega_k=\exp\left(\frac{2\pi ki}{n}\right),$$

$$\beta_{k,\lambda}=\begin{cases}\omega_k & \text{при } \lambda>0 \text{ или } \arg\lambda=-\dfrac{\pi}{n},\\ \overline{\omega}_k & \text{при } \lambda<0,\end{cases} \tag{13}$$

$$k=0, 1, \cdots, n-1.$$

В случае $n=2m+1$ ядро $\Phi(x, t; \lambda)$ и ограниченное решение $u(x, \lambda)$ уравнения (2) представляются в виде

$$\Phi(x, t; \lambda)=\sum_{k,j=1}^{m}N_{kj}^+(\lambda)\,y^+(x, \lambda\beta_{k,\lambda})\,\overline{y}^+(t, \lambda\beta_{j,\lambda}); \ \lambda\in T, \tag{14}$$

$$u(x, \lambda)=\sum_{k=0}^{m}A_k^+(\lambda)\,y^+(x, \lambda\beta_{k,\lambda}), \ \lambda\in M.$$

Обозначим

$$S_{kj}^+(\lambda)=A_k^+(\lambda)\,\overline{A}_j^+(\lambda), \ k, j=0, 1, \cdots, m.$$

В силу (3) имеют место равенства

$$S_{00}^{+}(\lambda)=1,\ S_{kj}^{+}(\lambda)=S_{k0}^{+}(\lambda)\,\overline{S}_{j0}^{+}(\lambda). \tag{15}$$

Очевидно, что функции $S_{kj}^{+}(\lambda)$ не зависят от выбора решения $u(x,\lambda)$ для которого выполняется (3). При этом, если $A_0^{+}(\lambda)\equiv 1$, то все функции $A_k^{+}(\lambda)$, а следовательно, и $S_{kj}^{+}(\lambda)$ непрерывны на полуосях $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, кроме того, функции $A_k^{+}(\lambda)$ аналитически продолжаются до мероморфных в секторах

$$\pi-\frac{\pi}{2n}\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi \quad \text{и} \quad 0\leqslant\arg\lambda\leqslant\frac{\pi}{2n}$$

функций.

В случае $n=2m$ при каждом $\lambda\in T$ ядро $\Phi(x, t; \lambda)$ представляется в виде (14), причем $N_{km}^{+}(\lambda)=N_{mk}^{+}(\lambda)=0$ $(k=1, 2,\cdots, m)$ при $\lambda>0$, а ограниченные решения $u_1(x,\lambda)$ и $u_2(x,\lambda)$ уравнения (2) представляются в виде

$$u_\nu(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{m}B_{k\nu}^{+}(\lambda)\,y^{+}(x,\lambda\omega_k),\ \lambda\in M,\ \nu=1, 2.$$

В этом случае функции $S_{kj}^{+}(\lambda)$ определим по формулам

$$S_{kj}^{+}(\lambda)=B_{k1}^{+}(\lambda)\,\overline{B}_{j1}^{+}(\lambda)+B_{k2}^{+}(\lambda)\,\overline{B}_{j2}^{+}(\lambda),\ k,\ j=0, 1,\cdots, m.$$

Учитывая унитарность матриц (4), нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$S_{00}^{+}(\lambda)=S_{mm}^{+}(\lambda)=1,$$

$$S_{kj}^{+}=S_{km}^{+}\,\overline{S}_{jm}^{+}+(S_{k0}^{+}-\overline{S}_{0m}^{+}\,S_{km}^{+})\,(\overline{S}_{j0}^{+}-S_{0m}^{+}\,\overline{S}_{jm}^{+})\,(1-|S_{0m}^{+}|^2)^{-1}, \tag{16}$$

причем равенство $|S_{0m}^{+}(\lambda)|=1$ может выполняться лишь для некоторых значений $\lambda$, не имеющих отличной от нуля точки сгущения. Отметим, что функции $S_{kj}^{+}(\lambda)$ не зависят от выбора решений $u_1(x,\lambda)$ и $u_2(x,\lambda)$, для которых матрицы (4) унитарны. При этом, если одна из матриц (4) тождественно равна единичной матрице, то все функции $B_{k\nu}^{+}(\lambda)$, а следовательно, и $S_{kj}^{+}(\lambda)$ непрерывны на полуоси $\lambda>0$.

Введем эрмитовы неотрицательные матрицы

$$N^{+}(\lambda)=\|N_{kj}^{+}(\lambda)\|_{k,\,j=1}^{m},\quad \lambda\in T,$$

$$S^{+}(\lambda)=\|S_{kj}^{+}(\lambda)\|_{k,\,j=0}^{m},\quad \lambda\in M,$$

где $m=\left[\frac{n}{2}\right]$. Ранг матрицы $N^{+}(\lambda)$ совпадает с кратностью собственного значения $\lambda^n$, а для каждого $\lambda\in M$ $S^{+}(\lambda)$ есть матрица ранга 1 при $n$ нечетном и ранга 2 при $n$ четном.

Отметим, что матрицы $N^{+}(\lambda)$ и $S^{+}(\lambda)$ можно ввести также, не используя явно функцию (9), а опираясь непосредственно на спектральную функцию (разложения единицы) $E_\mu$ $(-\infty<\mu<\infty)$ оператора

$L$. Это делается таким же образом, как аналогичные матрицы вводятся в работе [8].

Рассмотрим набор данных

$$\{T,\ N^+(\lambda)\ (\lambda\in T),\ S^+(\lambda)\ (\lambda\in M)\},\tag{17}$$

которые условимся называть правыми данными рассеяния оператора $L$.

4. Обратная задача рассеяния. Линейное интегральное уравнение для ядра треугольного преобразования. Рассмотрим обратную задачу рассеяния, состоящую в восстановлении оператора $L$ (т. е. коэффициентов $p_k(x)$ в (1)) по набору данных (17).

Отметим, что в силу равенств (15) и (16) в рассматриваемой задаче для определения $n-1$ вещественных функций $p_k(x)$ $(k=0, 1,\cdots, n-2)$ на оси $(-\infty, \infty)$ при $n=2m+1$ задаются $\frac{n-1}{2}$ комплекснозначных функций $S^+_{k0}(\lambda)$ $(k=1, 2,\cdots, m)$ на оси $(-\infty, \infty)$, а при $n=2m$ задаются $n-1$ комплекснозначных функций $S^+_{0m}(\lambda)$, $S^+_{km}(\lambda)$, $S^+_{k0}(\lambda)$ $(k=1, 2,\cdots, m-1)$ на полуоси $(0, \infty)$.

Заметим еще, что если $n=2m+1$ и $p_{2k}(x)\equiv 0$ $(k=0, 1,\cdots,m-1)$, то $S^+_{kj}(\lambda)=S^+_{jk}(-\lambda)$ $(k, j=0, 1,\cdots, m)$, а если $n=2m$ и $p_{2k+1}(x)\equiv 0$ $(k=0,1,\cdots, m-2)$, то $S^+_{kj}(\lambda)=S^+_{m-j,\,m-k}(\lambda)$ $(k, j=0, 1,\cdots, m)$. Поэтому в указанных частных случаях также сохраняется согласование между числом задаваемых и числом определяемых функций.

Рассматриваемая задача при $n=2$ совпадает с хорошо известной обратной задачей рассеяния для оператора Штурма—Лиувилля.

Для решения поставленной задачи введем функцию

$$\widetilde{F}^+(x, t)=\int\limits_M\int\limits_a^x\int\limits_a^t\sum_{k,j=0}^m S^+_{kj}(\lambda)\,e^{i\lambda(\xi\vartheta_{k,\lambda}-\eta\overline{\vartheta}_{j,\lambda})}\,d\eta\,d\xi\,d\lambda+$$

$$+\sum_{\lambda\in T}\int\limits_a^x\int\limits_a^t\sum_{k,j=1}^m N^+_{kj}(\lambda)\,e^{i\xi\lambda\vartheta_{k,\lambda}-i\eta\overline{\lambda}\overline{\vartheta}_{j,\lambda}}\,d\eta\,d\xi,$$

где $a<x,\ t<\infty$, а числа $\vartheta_{k,\lambda}$ определяются по формулам (13).

Теорема 3. *Существует непрерывная производная*

$$F^+(x, t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}[\widetilde{F}^+(x, t)-\min\{x, t\}],\quad a<x,\ t<\infty,$$

*причем* $F^+(x, t)=\overline{F}^+(t, x)$. *Кроме того, имеют место равенства*

$$\overset{+}{F}(x, t)=H^+(x, t)+\int\limits_t^\infty H^+(x, \xi)\,\overline{H}^+(t, \xi)\,d\xi,\quad a<x\leqslant t,\tag{18}$$

$$F^+(x, t)+K^+(x, t)+\int\limits_x^\infty K^+(x, \xi)\,F^+(\xi, t)\,d\xi=0,\quad a<x\leqslant t.\tag{19}$$

*При этом для каждого фиксированного значения* $x > a$ *ядро* $K^+(x, t)$ *как функция от* $t$ *является единственным решением интегрального уравнения* (19) *в классе* $L^1(x, \infty)$.

Соотношения (18) и (19) выводятся при помощи равенства Парсеваля (6) и формул (9), (11) подобно тому, как это делается в случае $n=2$ (см. [3]).

Теорема 4. *Коэффициенты* $p_k(x)$, *голоморфные в секторе* (7) *и удовлетворяющие условиям* (8), *по данным* (17) *определяются на полуоси* $(a, \infty)$ *однозначно. Следовательно, если функции* $p_k(x)$ *дополнительно голоморфны в некоторой области, содержащей полуось* $(-\infty, a]$, *то они по данным* (17) *определяются однозначно на всей оси* $(-\infty, \infty)$.

Это непосредственно следует из теоремы 3, так как функции $p_k(x)$ по ядру $K^+(x, t)$ определяются на полуоси $(a, \infty)$ однозначно (см. [12]).

Если вместо условий (8) потребовать, чтобы функции $p_k(x)$ были голоморфными в секторе

$$\Omega^- = \left\{ z;\ |\arg(z-a)| > \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} \right\}$$

и удовлетворяли условиям

$$\int_{-\infty}^{a} (1+|x|)^{n-1-k} \{\sup_{\mathrm{Re}\, z = x} |p_k(z)|\}\, dx + \int_{a}^{\infty} |p_k(x)|\, dx < \infty, \tag{20}$$

$$k = 0, 1, \cdots, n-2,$$

то при всех $\lambda$ из полуплоскости $\mathrm{Im}\,\lambda \leqslant 0$ уравнение (2) имеет решение $y^-(x, \lambda)$, представимое на полуоси $(-\infty, a]$ в виде

$$y^-(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} e^{i\lambda t} K^-(x, t)\, dt, \quad -\infty < x \leqslant a.$$

Поэтому при условиях (20) возникают левые данные рассеяния

$$\{T,\ N^-(\lambda)\ \ (\lambda \in T),\ S^-(\lambda)\ (\lambda \in M)\},$$

и аналогичные результаты справедливы относительно этих данных.

В заключение автор приносит глубокую благодарность В. Б. Лидскому за полезные обсуждения результатов.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.III.1982

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Ամբողջ առանցքի վրա բարձր կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների համար մի հակադարձ խնդրի մասին *(ամփոփում)*

*Դիտարկվում է* $L^2(-\infty, \infty)$ *տարածությունում* $n \geq 3$ *կարգի և ամբողջ առանցքի վրա հանրագումարելի գործակիցներով ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ* L *օպերատորը։ Հետազոտվում*

է 1. օպերատորի սպեկտրը և վերլուծությունը ըստ L-ի սեփական ֆունկցիաների: Այնուհետև L օպերատորի գործակիցների վրա լրացուցիչ պայմանների դեպքում դրվում և լուծվում է մի հակադարձ խնդիր, որը նման է ցրման տեսության հակադարձ խնդրին:

## I. G. KHACHATRIAN. *On an inverse problem for differential operators of higher order on the whole axes* (summary)

In the space $L^2(-\infty, \infty)$ a self-adjoint differential operator $L$ of order $n \geqslant 3$ with integrable coefficients is considered. We investigate the spectrum of the operator $L$ and expansion by eigenfunctions of that operator. Futher, under additional conditions on coefficients we pose and solve an inverse problem which is analogous with the inverse problem of scattering theory.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Наймарк.* Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
2. *И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР, серия матем., 15, № 4, 1951, 309—360.
3. *В. А. Марченко.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения, Киев, «Наукова думка», 1977.
4. *Л. Д. Фаддеев.* Обратная задача квантовой теории рассеяния, Итоги науки и техники, серия Современные проблемы математики, М., «ВИНИТИ», 1974, т. 3, 93—180.
5. *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния, Функц. анализ и его прилож., 8, № 3, 1974, 43—53.
6. *D. J. Kaup.* On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$, Stud. Appl. Math., 62, № 3, 1980, 189—216.
7. *И. Г. Хачатрян.* Об одной обратной задаче, ДАН АрмССР, 70, № 3, 1980, 160—166.
8. *И. Г. Хачатрян.* О некоторых обратных задачах для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси, Функц. анализ и его прилож. 17, № 1, 1983 40—52.
9. *Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «ИЛ», 1958.
10. *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян.* Введение в спектральную теорию, М., «Наука», 1970.
11. *И. М. Глазман.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., «Физматгиз», 1963.
12. *И. Г. Хачатрян.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений, Изв. АН АрмССР, серия матем., 14, № 6, 1979, 424—445.

# ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ



# СОДЕРЖАНИЕ



# CONTENTS