ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1963 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀՄԱՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները։

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ «Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր», սերիա Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском английском французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилии автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

ԳԻՆԸ 85 Կ.
ЦЕНА 85 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 4, 1983 Математика

УДК 517.53

В. Х. МУСОЯН

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ

Работа посвящена изучению некоторых экстремальных задач в пространствах полиномов Дирихле и Мюнца.

Пусть $\{e_k\}_1^n$ и $\{\varphi_k\}_1^n$ — биортогональные системы в гильбертовом пространстве H:

$$(e_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Будем говорить, что они порождают друг друга, если элементы одной системы принадлежат линейной оболочке другой системы. Легко заметить, что для любой линейно независимой системы существует единственная порожденная биортогональная система. Следующая теорема устанавливает связь между аппроксимационными задачами и порожденными биортогональными системами.

Теорема. *Пусть $\{e_k\}_1^n$ и $\{\varphi_k\}_1^n$ — произвольные биортогональные системы в гильбертовом пространстве H.*

Для того, чтобы элемент

$$\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\, e_k$$

минимизировал функционал

$$\Phi_x(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|$$

при любом фиксированном $x \in H$ необходимо и достаточно, чтобы эти системы порождали друг друга.

Необходимость. Обозначим через E линейную оболочку системы $\{e_k\}_1^n$, а через M — ортогональное дополнение пространства E. Тогда элемент φ_k можно представить в виде

$$\varphi_k = h_k + g_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

где $h_k \in E$, $g_k \in M$.

В качестве элемента x, фигурирующего в формулировке теоремы, возьмем элемент g_p, $p = 1, 2, \cdots, n$. Так как, по условию теоремы, элемент

$$\sum_{k=1}^{n} (g_p, \varphi_k)\, e_k \tag{1}$$

минимизирует функционал

$$\Phi_{g_p}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \left\| g_p - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|,$$

то элемент (1) представляет собой проекцию g_p на подпространство E, и поскольку $g_p \in M$, то

$$\sum_{k=1}^{n} (g_p, \varphi_k) e_k = 0, \; p = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

Отсюда следует, что все коэффициенты в (2) равны нулю, в частности $(g_p, \varphi_p) = 0$. Так как $(g_p, h_p) = 0$, то $(g_p, \varphi_p) = (g_p, g_p)$. Таким образом, мы получаем $(g_p, g_p) = 0$, $p = 1, 2, \cdots, n$, т. е. $g_p = 0$, или, что то же самое, $\varphi_k = h_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

Достаточность. Мы должны доказать, что для любого фиксированного элемента $x \in H$ элемент

$$\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) e_k$$

минимизирует функционал $\Phi(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Для этого достаточно доказать, что

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) e_k, e_j \right) = 0, \; j = 0, 1, \cdots, n.$$

Имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) e_k, e_j \right) = \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)(e_k, e_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x, (e_j, e_k) \varphi_k) = \left(x, \sum_{k=1}^{n} (e_j, e_k) \varphi_k \right). \tag{3}$$

С другой стороны, векторы φ_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, принадлежат линейной оболочке системы $\{e_k\}_1^n$. Кроме того, биортогональные системы линейно независимы. Поэтому элемент e_j, $j = 1, 2, \cdots, n$, представляет собой линейную комбинацию векторов $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$:

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \varphi_k, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{4}$$

Так как системы $\{e_k\}_1^n$ и $\{\varphi_k\}_1^n$ биортогональны, то $\alpha_{kj} = (e_j, e_k)$, Подставляя полученные значения коэффициентов α_{kj} в (4), получим

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} (e_j, e_k) \varphi_k.$$

Учитывая полученное разложение вектора e_j, равенство (3) можно написать в виде

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) e_k, e_j \right) = (x, e_j).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

В § 1 строятся в явном виде порожденные биортогональные системы для конечных систем Дирихле и Мюнца. Отметим, что для таких систем биортогональные системы в неявном виде впервые были построены Л. Шварцем [1] в случае простых нулей произведения Бляшке и М. М. Джрбашяном [4, 5] — в случае нулей произвольной кратности.

Исходя из построенных биортогональных систем приводятся интегральные представления ортопроекторов на подпространства, порожденные рассматриваемыми системами. Затем, используя полученное интегральное представление ортопроектора, дается конструктивное доказательство одной теоремы Ньюмана [5], относящейся к скорости приближения дифференцируемых функций полиномами Мюнца в пространстве $L_2(0, 1)$.

В § 2, используя построенный аппарат, доказываются экстремальные оценки для полиномов и производных полиномов по рассмотренным в § 1 системам. Последние оценки представляют собой аналоги классических неравенств Маркова, Бернштейна и Шмидта [2].

§ 1. Построение порожденных биортогональных систем

1.1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ — конечная последовательность различных между собой комплексных чисел, лежащих в правой полуплоскости. Рассмотрим конечную систему Дирихле

$$\{e^{-\lambda_k x}\}_{k=1}^{n} \tag{1.1}$$

в пространстве $L_2(0, \infty)$ со скалярным произведением

$$(f; g) = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Чтобы построить в явном виде порожденную системой (1.1) биортогональную систему, нам необходимо разложить произведение Бляшке

$$W(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \overline{\lambda}_k}$$

на простейшие дроби.

Лемма 1. *Имеет место разложение*

$$\frac{W(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{W'(\lambda_m)(\lambda_k + \overline{\lambda}_m)(\lambda + \overline{\lambda}_m)}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Рассмотрим рациональную функцию

$$R(\mu) = \frac{1}{W(\mu)(\mu + \overline{\lambda}_k)(\mu + \overline{\lambda})},$$

где λ зафиксировано и отлично от чисел λ_k, $k = 1, 2, \cdots, n$. Функция $R(\mu)$ всюду регулярна, кроме точек $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, -\overline{\lambda}$, а в этих точках имеет простой полюс. Кроме того,

$$R(\mu) = O(\mu^{-2}), \quad \text{при} \quad \mu \to \infty.$$

Следовательно, сумма вычетов рациональной функции $R(\mu)$ относительно всех ее конечных особенностей $-\bar{\lambda}, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ равна нулю

$$\frac{1}{W(-\bar{\lambda})(-\bar{\lambda}+\bar{\lambda}_k)}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{W'(\lambda_m)(\lambda_m+\bar{\lambda}_k)(\lambda_m+\bar{\lambda})}=0. \tag{1.3}$$

С другой стороны, заметим, что

$$\frac{1}{W(-\bar{\lambda})}=\overline{W(\lambda)}. \tag{1.4}$$

Переходя в (1.3) к сопряженным и учитывая (1.4), получим разложение (1.2).

Введем теперь обозначение

$$J_k(\lambda)=\frac{W(\lambda)}{W'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}. \tag{1.5}$$

Из леммы 1 следует интегральное представление

$$J_k(\lambda)=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\overline{W'(\lambda_k)}}\sum_{m=1}^{n}\frac{e^{-\bar{\lambda}_m x}}{\overline{W'(\lambda_m)}(\bar{\lambda}_m+\lambda_k)}\right]e^{-\lambda x}dx. \tag{1.6}$$

Обозначим

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{\overline{W'(\lambda_k)}}\sum_{m=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_m x}}{W'(\lambda_m)(\lambda_m+\bar{\lambda}_k)},\quad k=1, 2,\cdots, n. \tag{1.7}$$

Так как функции $J_k(\lambda)$ обладают интерполяционными свойствами

$$J_k(\lambda_r)=\begin{cases}1, & k=r\\ 0, & k\neq r\end{cases},$$

то из (1.6) следует

Лемма 2. *Системы функций*

$$\{e^{-\lambda_k x}\}_1^n \text{ и } \{\varphi_k(x)\}_1^n$$

биортогональны в пространстве $L_2(0, \infty)$ и порождают друг друга.

1.2. Рассмотрим теперь более общую систему

$$\{e^{-\lambda_k x}, xe^{-\lambda_k x},\cdots, x^{m_k-1}e^{-\lambda_k x}\}_{k=1}^{p}, \tag{1.8}$$

где $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ — различные между собой комплексные числа, лежащие в правой полуплоскости, а $m_1,\cdots,m_p$ — произвольные натуральные числа.

Введем обозначения

$$W(\lambda)=\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda+\bar{\lambda}_k}\right)^{m_k}, \tag{1.9}$$

$$K(z, t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{-\lambda z}}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{-\zeta t}d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar{\lambda})}\right\}}d\lambda, \tag{1.10}$$

где Γ — замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий все корни функции $W(\lambda)$. Заметим, что в случае простых корней функции $W(\lambda)$, применяя теорему о вычетах, функцию $K(z, t)$ можно представить в виде двойной суммы

$$K(z, t) = \sum_{m, k=1}^{p} \frac{e^{-\lambda_k z} e^{-\overline{\lambda_m t}}}{W'(\lambda_k) \overline{W'(\lambda_m)} (\lambda_k + \overline{\lambda}_m)}. \tag{1.10'}$$

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться следующим свойством интегралов вида (1.10):

$$\overline{K(z, t)} = K(t, z). \tag{1.10''}$$

В случае простых корней функции $W(\lambda)$ это свойство непосредственно следует из (1.10'), а случай кратных корней сводится к этому случаю, поскольку функция $K(z, t)$ непрерывно зависит от корней функции $W(\lambda)$, когда они изменяются внутри контура Г.

Лемма 3. *Для любого полинома Дирихле $P(x)$, образованного по системе* (1.8), *имеет место интегральное представление*

$$P(z) = \int_0^{\infty} K(z, t) P(t)\, dt \quad (z \in C). \tag{1.11}$$

Так как рассматриваемый оператор линеен, то достаточно доказать лемму для одночленов вида

$$P(t) = t^s e^{-\lambda_k t}, \ 0 \leqslant s < m_k.$$

Имеем

$$\int_0^{\infty} K(z, t) t^s e^{-\lambda_k t}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda z}}{W(\lambda)} \left\{ \overline{\frac{s!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{W(\zeta)(\zeta + \overline{\lambda})(\zeta + \overline{\lambda}_k)^{s+1}}} \right\} d\lambda. \tag{1.12}$$

Заметим, что при фиксированном $\lambda \in \Gamma$ рациональная функция

$$R(\zeta) = \frac{1}{W(\zeta)(\zeta + \overline{\lambda})(\zeta + \overline{\lambda}_k)^{s+1}},$$

как функция от ζ, вне контура Г имеет единственный и притом простой полюс в точке $\zeta = -\overline{\lambda}$. Кроме того, при $\zeta \to \infty$, $R(\zeta)$ имеет порядок $O(\zeta^{-2})$.

Следовательно, согласно теореме о вычетах, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\zeta)\, d\zeta = -\operatorname{Res}(R(\zeta), -\overline{\lambda}) = -\frac{1}{W(-\overline{\lambda})(\overline{\lambda}_k - \overline{\lambda})^{s+1}}.$$

Подставляя полученное значение интеграла в (1.12) и учитывая тождество $W(\lambda)\overline{W(-\overline{\lambda})} = 1$, имеем

$$\int_0^{\infty} K(z, t) t^s e^{-\lambda_k t} dt = \frac{-s!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda z}\, d\lambda}{(\lambda_k - \lambda)^{s+1}} = z^s e^{-\lambda_k z}.$$

Лемма доказана.

Приступим теперь к построению порожденной системой (1.8) биортогональной системы. Для этого отметим сперва, что если функции $e_1(x)$, $e_2(x)$, $\cdots$, $e_n(x)$ образуют линейно независимую систему в пространстве $L_2(0, \infty)$, а система $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$, $\varphi_k \in L_2(0, \infty)$ такая, что для функций $e_m(x)$, $m=1, 2, \cdots, n$, имеет место равенство

$$e_m(x) = \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^n e_k(x) \overline{\varphi_k(t)} \right) e_m(t)\, dt, \tag{1.13}$$

то эти системы биортогональны. Поэтому остается представить ядро $K(x, t)$ в виде

$$\sum_{k=1}^n c_k(x) \overline{\varphi_k(t)},$$

где роль системы $\{e_k(x)\}$ выполняет система (1.8). Чтобы найти коэффициенты при $e_k(x)$, функцию $K(x, t)$ представим в виде

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{e^{-\lambda x}}{W(\lambda)} \overline{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{-\zeta t}\, d\zeta}{W(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})} \right\}} d\lambda, \tag{1.14}$$

где c_k — окружность с центром в точке λ_k, не охватывающая корней функции $W(\lambda)$, отличных от λ_k.

Вместо функции $e^{-\lambda x}$, подставив ее разложение

$$e^{-\lambda x} = e^{-\lambda_k x} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} (\lambda - \lambda_k)^j x^j,$$

получим

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{e^{-\lambda_k x}}{W(\lambda)} \sum_{j=0}^{m_k - 1} \frac{(-1)^j}{j!} (\lambda - \lambda_k)^j x^j \overline{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{-\zeta t}}{W(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})} \right\}} d\lambda.$$

Отсюда следует, что коэффициент при $x^s e^{-\lambda_k x}$ будет

$$\overline{\varphi_{ks}(t)} = \frac{(-1)^s}{s!} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s}{W(\lambda)} \overline{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{-\zeta t}\, d\zeta}{W(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})} \right\}} d\lambda. \tag{1.15}$$

Рассуждая так же, как и при выводе формулы (1.15), мы убедимся, что функции $\varphi_{ks}(t)$ принадлежат линейной оболочке системы (1.8).

Таким образом, доказана

Лемма 2*. *Системы функций*

$$\{x^s e^{-\lambda_k x}\} \text{ и } \{\varphi_{ks}(x)\}, \; k = 1, 2, \cdots, p; \; s = 0, 1, \cdots, m_k - 1,$$

биортогональны в пространстве $L_2(0, \infty)$ и порождают друг друга. При этом имеет место равенство

$$\sum_{k, s} x^s e^{-\lambda_k x} \overline{\varphi_{ks}(t)} = K(x, t).$$

Комбинируя эту лемму с доказанной во введении теоремой, получаем следующий результат.

Теорема 1. *В пространстве $L_2(0, \infty)$ ортопроектор P на подпространство, порожденное системой* (1.8), *представляется в виде*

$$(Pf)(x)=\int_0^\infty K(x, t)f(t)\,dt.$$

1.3. Рассмотрим теперь конечную систему Мюнца в пространстве $L_2(0, 1)$:

$$\{x^{\mu_k}\}_{k=1}^n, \quad \operatorname{Re}\mu_k>-\frac{1}{2}, \tag{1.16}$$

где $\mu_1, \cdots, \mu_n$ — различные между собой комплексные числа. Чтобы построить порожденную биортогональную систему, мы воспользуемся следующим фактом:

Взаимно однозначное соответствие между пространствами $L_2(0,1)$ и $L_2(0, \infty)$, задаваемое формулой

$$f(t)=F(e^{-t})\,e^{-t/2}, \tag{1.17}$$

является изоморфизмом этих пространств.

Так как с помощью преобразования (1.17) система функций (1.16) переходит в систему

$$\left\{e^{-\left(\mu_k+\frac{1}{2}\right)t}\right\}_1^n,$$

то согласно лемме 2, для системы (1.16), порожденной биортогональной системой будет система функций

$$\varphi_k(x)=\frac{x^{-1/2}}{W'(\lambda_k)}\sum_{m=1}^n\frac{x^{\lambda_m}}{W'(\lambda_m)(\bar{\lambda}_k+\lambda_m)}, \tag{1.18}$$

где произведение Бляшке $W(\lambda)$ образуется для последовательности $\lambda_k=\mu_k+\frac{1}{2}$, $k=1, 2, \cdots, n$.

В случае кратных корней функции $W(\lambda)$ система (1.16) заменяется системой

$$\left\{x^{\mu_k}, x^{\mu_k}\left(\ln\frac{1}{x}\right), \cdots, x^{\mu_k}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{m_k-1}\right\}_{k=1}^p. \tag{1.19}$$

С помощью преобразования (1.17) эта система переходит в систему

$$\left\{e^{-\left(\mu_k+\frac{1}{2}\right)t}, te^{-\left(\mu_k+\frac{1}{2}\right)t}, \cdots, t^{m_k-1}e^{-\left(\mu_k+\frac{1}{2}\right)t}\right\}_{k=1}^p.$$

Следовательно, согласно лемме 2*, порожденной (1.19) биортогональной системой будет система функций

$$\varphi_{ks}(x)=\frac{(-1)^s}{s!}x^{-1/2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{x^\zeta}{W(\zeta)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W(\lambda)(\bar{\zeta}+\lambda)}\right\}}\,d\zeta.$$

Перефразируем теорему 1 для системы (1.19).

Теорема 1′. *В пространстве $L_2(0, 1)$ ортопроектор P на подпространство, порожденное системой (1.19), представляется в виде*

$$(PF)(x) = \int_0^1 K_1(x, t) F(t)\, dt, \tag{1.20}$$

где

$$K_1(x, t) = (xt)^{-1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{x^\lambda}{W(\lambda)} \overline{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{t^\zeta\, d\zeta}{W(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})} \right\}} d\lambda,$$

$$W(\lambda) = \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{\lambda - \mu_k - \frac{1}{2}}{\lambda + \bar{\mu}_k + \frac{1}{2}} \right)^{m_k},$$

Γ — замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий все корни функции $W(\lambda)$

В качестве приложения теоремы 1′ приведем конструктивное доказательство одной теоремы Ньюмана [3].

Нам понадобится следующая

Лемма 4. *Преобразование Меллина разности $\overline{F(x)} - \overline{(PF)(x)}$ можно представить в виде*

$$\int_0^1 \overline{[F(x) - (PF)(x)]}\, x^{\lambda - \frac{1}{2}} dx = \frac{W(\lambda)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\hat{F}(\zeta)\, d\zeta}{W(\zeta)(\zeta - \lambda)},$$

где

$$\hat{F}(\zeta) = \int_0^1 \overline{F(x)}\, x^{\zeta - \frac{1}{2}} dx,$$

а λ находится внутри контура Γ.

Доказательство. Подставляя выражение $(PF)(x)$ из (1.20) и изменив порядок интегрирования, получим

$$H(\lambda) = \int_0^1 \overline{(PF)(x)}\, x^{\lambda - \frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \overline{F(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{t^{\zeta - \frac{1}{2}} d\zeta}{W(\zeta)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\mu}{W(\mu)(\mu + \bar{\zeta})(\mu + \bar{\lambda})} \right\} dt.$$

Применяя теорему о вычетах, имеем

$$H(\lambda) = \int_0^1 \overline{F(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{t^{\zeta - \frac{1}{2}} d\zeta}{W(\zeta)} \times$$

$$\times \overline{\left\{ - \frac{1}{W(-\bar{\zeta})(-\bar{\zeta} + \bar{\lambda})} - \frac{1}{W(-\bar{\lambda})(-\bar{\lambda} + \bar{\zeta})} \right\}} dt.$$

Изменив в последнем интеграле порядок интегрирования, получим утверждение леммы.

Теорема (Ньюман [3]). *Рассмотрим систему* (1.19) *при условии* $\mu_1=0$. *Если* $F\in L_2(0,1)$ *абсолютно непрерывна и* $\|F'\|\leqslant 1$, *то*

$$\|F-PF\|\leqslant \max_{-\infty<y<\infty}\left|\frac{1}{iy+\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{iy-\mu_k+\frac{1}{2}}{iy+\bar{\mu}_k+\frac{3}{2}}\right)^{m_k}\right|,$$

где PF — *проекция функции* F *на подпространство, порожденное системой* (1.19).

Доказательство. Так как преобразование Меллина

$$\hat{F}(\zeta)=\int_0^1 \overline{F(x)}\,x^{\zeta-\frac{1}{2}}\,dx$$

представляет собой изоморфизм пространств $L_2(0,1)$ и H_2 в правой полуплоскости (см., например, [6], глава I), то имеем

$$d=\|F-PF\|_{L_2}=\left\|\int_0^1\overline{[F(x)-(PF)(x)]}\,x^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dx\right\|_{H_2}.$$

Применяя лемму 4 и учитывая равенство $|W(\lambda)|=1$, при $\operatorname{Re}\lambda=0$, получим

$$d=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\hat{F}(\zeta)\,d\zeta}{W(\zeta)(\zeta-\lambda)}\right\|_{H_2}. \qquad (1.21)$$

С другой стороны, имеем

$$d^2=\int_0^1 F(x)\,\overline{[F(x)-(PF)(x)]}\,dx=\int_0^1 F(x)\,d\int_0^x\overline{[F(t)-(PF)(t)]}\,dt=$$

$$=-\int_0^1 F'(x)\left\{\int_0^x\overline{[F(t)-(PF)(t)]}\,dt\right\}dx\leqslant\left\|\int_0^x\overline{[F(t)-(PF)(t)]}\,dt\right\|_{L_2}=$$

$$=\left\|\int_0^1 x^{\lambda-\frac{1}{2}}\left\{\int_0^x\overline{[F(t)-(PF)(t)]}\,dt\right\}dx\right\|_{H_2}=$$

$$=\left\|\frac{1}{\lambda+\frac{1}{2}}\int_0^1\overline{[F(x)-(PF)(x)]}\,x^{\lambda+\frac{1}{2}}\,dx\right\|_{H_2}.$$

Применяя лемму 4, получим

$$d^2=\left|\frac{W(\lambda+1)}{2\pi i\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{\Gamma}\frac{\widehat{F}(\zeta)\,d\zeta}{W(\zeta)(\zeta-\lambda-1)}\right|_{H_2}\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\lambda=iy}\left|\frac{W(\lambda+1)}{\lambda+\frac{1}{2}}\right|\cdot\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\widehat{F}(\zeta)\,d\zeta}{W(\zeta)(\zeta-\lambda)}\right\|_{H_2}. \qquad (1.22)$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что если $f\in H_2$, то

$$\|f_x(y)\|_{L_2}=\|f(x+iy)\|_{L_2},\quad x>0,$$

— убывающая функция.

Утверждение теоремы следует из (1.21) и (1.22).

§ 2. Экстремальные оценки

В этом параграфе, используя построенный аппарат, мы получим экстремальные оценки для полиномов Дирихле и Мюнца. Сначала докажем вспомогательное предложение.

Лемма 5. *Пусть разложение функции*

$$\frac{1}{W(\lambda)}=\prod_{k=1}^{p}\frac{\lambda+\overline{\lambda}_k}{\lambda-\lambda_k}$$

в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки будет

$$\frac{1}{W(\lambda)}=1+\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2}{\lambda^2}+\frac{a_3}{\lambda^3}+\cdots.$$

Тогда

$$a_1=\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k+\overline{\lambda}_k),$$

$$a_2=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k+\overline{\lambda}_k)\right]^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k^2-\overline{\lambda}_k^2),$$

$$a_3=\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k+\overline{\lambda}_k)\right]^3+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k+\overline{\lambda}_k)\right]\left[\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k^2-\overline{\lambda}_k^2)\right]+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{p}\operatorname{Re}\lambda_k^3.$$

(В этой лемме некоторые из чисел λ_k могут и совпадать).

Для доказательства леммы введем функцию

$$F(\lambda)=\frac{1}{W\left(\frac{1}{\lambda}\right)}=\prod_{k=1}^{p}\frac{1+\overline{\lambda}_k\lambda}{1-\lambda_k\lambda}$$

и найдем первые коэффициенты разложения функции $F(\lambda)$ в ряд Тейлора в окрестности точки нуль.

Имеем

$$F'(\lambda)=F(\lambda)\sum_{k=1}^{p}\frac{1-\lambda\lambda_k}{1+\lambda\bar\lambda_k}\cdot\frac{\bar\lambda_k(1-\lambda_k\lambda)+\lambda_k(1+\bar\lambda_k\lambda)}{(1-\lambda\lambda_k)^2}=$$

$$=F(\lambda)\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k+\bar\lambda_k}{(1-\lambda_k\lambda)(1+\bar\lambda_k\lambda)}\,.$$

Введем обозначение

$$S(\lambda)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k+\bar\lambda_k}{(1-\lambda_k\lambda)(1+\bar\lambda_k\lambda)}\,.$$

Очевидно, справедливы соотношения

$$F'(\lambda)=F(\lambda)\,S(\lambda),$$

$$F''(\lambda)=F(\lambda)[S^2(\lambda)+S'(\lambda)],$$

$$F'''(\lambda)=F(\lambda)[S^3(\lambda)+3\,S(\lambda)\,S'(\lambda)+S''(\lambda)].$$

Следовательно

$$F'(0)=S(0),$$

$$F''(0)=S^2(0)+S'(0),$$

$$F'''(0)=S^3(0)+3\,S(0)\,S'(0)+S''(0). \qquad (2.1)$$

Вычислим $S'(0)$ и $S''(0)$. Для этого заметим, что сумму $S(\lambda)$ можно представить в виде

$$S(\lambda)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{1-\lambda_k\lambda}-\frac{1}{1+\bar\lambda_k\lambda}\right]=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left[(\lambda_k\lambda)^j-(-\bar\lambda_k\lambda)^j\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{p}[\lambda_k^{j+1}-(-\bar\lambda_k)^{j+1}]\right\}\lambda^j.$$

Отсюда получим

$$S(0)=\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k+\bar\lambda_k),\quad S'(0)=\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k^2-\bar\lambda_k^2),$$

$$S''(0)=2\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k^3+\bar\lambda_k^3).$$

Подставляя полученные выражения в (2.1), получим утверждение леммы.

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,\infty)$ обобщенные полиномы Дирихле, образованные по системе (1.8)

$$P(x)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}x^s e^{-\lambda_k x}\,.$$

Семейство этих полиномов будем обозначать через E.

Теорема 2. *Имеют место равенства*

a) $$\max_{P\in E} \frac{|P(z)|}{\|P\|} = \sqrt{K(z, z)},$$

где z — произвольное комплексное число. При этом равенство достигается для полинома

$$P_z(t) = \overline{K(z, t)}.$$

(в) $$\max_{P\in E} \frac{\max\limits_{x<t<\infty} |P(t)|}{\|P\|} = \sqrt{K(x, x)}, \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

где равенство достигается для полинома

$$P_x(t) = \overline{K(x, t)},$$

(с) $$\max_{P\in E} \frac{\max\limits_{0<t<\infty} |P(t)|}{\|P\|} = \sqrt{2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re} \lambda_k},$$

причем равенство достигается для полинома

$$P_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{e^{-\zeta t}}{W(\zeta)}\, d\zeta,$$

где Γ — замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий все корни функции $W(\lambda)$.

Доказательство. По лемме 3 имеем

$$P(z) = \int_0^\infty K(z, t)\, P(t)\, dt, \tag{2.2}$$

причем $\overline{K(z, t)}$ при любом фиксированном z, представляет собой обобщенный полином Дирихле, образованный по системе (1.8). Применяя неравенство Буняковского, получим

$$|P(z)| \leqslant \|K(z, t)\| \cdot \|P\|, \tag{2.3}$$

где при фиксированном z равенство достигается для обобщенного полинома Дирихле $P_z(t) = \overline{K(z, t)}$.

Подставляя этот полином в (2.2), получим

$$\overline{K(z, z)} = \|K(z, t)\|^2,$$

или, что то же самое, $\|K(z, t)\| = \sqrt{K(z, z)}$.

Вводя полученное значение нормы ядра $K(z, t)$ в неравенство (2.3), получим утверждение а).

Для доказательства утверждения в) достаточно заметить, что функция $K(x, x)$ монотонно убывает на вещественной оси. Действительно (см. (1.10))

$$K(x, x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{-(\zeta+\bar{\lambda})x}}{W(\zeta)(\zeta+\bar{\lambda})}d\zeta\right\}},$$

следовательно,

$$(K(x, x))'=-\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{-\lambda x}}{W(\lambda)}d\lambda\right|^2<0.$$

Для доказательства утверждения с) заметим (см. (1.10″)), что

$$K(0, 0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar{\lambda})}\right\}}, \tag{2.4}$$

$$\overline{K(0, t)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{-\zeta t}\,d\zeta}{W(\zeta)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\lambda}{W(\lambda)(\bar{\zeta}+\lambda)}\right\}}.$$

Из утверждения в) и из (2.4) следует, что для доказательства с) достаточно проверить равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar{\lambda})}=1-\overline{W(\lambda)},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\lambda}{W(\lambda)}=2\sum_{k=1}^{p}m_k\operatorname{Re}\lambda_k. \tag{2.5}$$

Первое из этих соотношений непосредственно следует из теоремы о вычетах, а второе—из леммы 5 и теоремы о вычетах.

Теорема 3. *Справедливы следующие соотношения:*

а) $$\max_{P\in E}\frac{|P'(z)|}{\|P\|}=\sqrt{\Phi(z)},$$

где

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda e^{-\lambda z}}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\zeta e^{-\zeta z}\,d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar{\lambda})}\right\}}d\lambda,$$

z — произвольное комплексное число. Причем равенство в точке z достигается для полинома $P(t)=\overline{K_z'(z, t)}$.

в) $$\max_{P\in E}\frac{\max\limits_{x<t<\infty}|P'(t)|}{\|P\|}=\sqrt{\Phi(x)},\quad 0\leqslant x<\infty,$$

где максимум достигается для полинома $P(t)=K_x'(x, t)$.

с) $$\max_{P\in E}\frac{\max\limits_{0<t<\infty}|P'(t)|}{\|P\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(2\sum_{k=1}^{p}m_k\operatorname{Re}\lambda_k\right)^3-2\sum_{k=1}^{p}m_k\operatorname{Re}\lambda_k^3\right\}^{1/2}.$$

При этом максимум достигается для полинома

$$P(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(S-\zeta)\,e^{-\zeta t}}{W(\zeta)}d\zeta,$$

где

$$S=2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k.$$

d)
$$\left\{\frac{4}{3}\left(\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^2-\frac{\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^3}{3\sum m_k \operatorname{Re}\lambda_k}\right\}^{1/2}\leqslant \max_{P\in E}\frac{\|P'\|}{\|P\|}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{2\left(\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^2-\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^2\right\}^{1/2}.$$

(Оценку, подобную оценке d), в случае $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{2}$ установил Шмидт [2]).

Доказательство. В интегральном представлении (1.11) дифференцированием под знаком интеграла получим

$$P'(z)=\int_0^\infty K_z'(z,t)\ P(t)\,dt, \tag{2.6}$$

причем $\overline{K_z'(z,t)}$ при любом фиксированном z представляет собой обобщенный полином Дирихле, образованный по системе (1.8). Применяя неравенство Буняковского, получим

$$|P'(z)|\leqslant\|K_z'(z,t)\|\cdot\|P\|, \tag{2.7}$$

где при фиксированном z равенство достигается для обобщенного полинома Дирихле $P_z(t)=\overline{K_z'(z,t)}$.

Подставляя этот полином в (2.6), получим

$$\Phi(z)=\|K_z'(z,t)\|^2.$$

Подставляя полученное значение нормы в (2.7), получим утверждение а).

Утверждение в) следует из того, что

$$\Phi'(x)=-\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{W(\lambda)}d\lambda\right|<0.$$

Для доказательства утверждения с) нам нужно проверить равенства

$$\Phi(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\zeta d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar\lambda)}\right\}}=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^3-2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^3\right\}, \tag{2.8}$$

$$\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)(\lambda+\bar\zeta)}}=S-\zeta+\frac{\zeta}{W(-\zeta)}. \tag{2.9}$$

Из леммы 5 следует, что в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место разложение

$$\frac{\lambda}{W(\lambda)(\lambda+\overline{\zeta})}=1+\frac{a_1-\overline{\zeta}}{\lambda}+\cdots,$$

где $a_1=S=2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k$. Равенство (2.9) непосредственно следует из этого разложения и из теоремы о вычетах. Подставляя значение интеграла (2.9) в (2.8) и еще раз применяя лемму 5, получим требуемый результат.

В утверждении d) оценка снизу достигается для полинома

$$P(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{-\zeta t}\,d\zeta}{W(\zeta)}.$$

Действительно, имеем

$$\|P\|^2=\int\limits_0^{\infty}P(t)\,\overline{P(t)}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{W(\zeta)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\lambda}{W(\lambda)(\lambda+\overline{\zeta})}\right\}}.$$

Согласно (2.5), получим

$$\|P\|^2=2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k. \tag{2.10}$$

Для производной имеем

$$\|P'\|^2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\zeta d\zeta}{W(\zeta)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)(\lambda+\overline{\zeta})}\right\}}.$$

Согласно (2.8)

$$\|P'\|^2=\frac{1}{3}\left\{\left(2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^3-2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^3\right\}.$$

Разделив полученное выражение на $\|P\|^2$ и учитывая (2.10), получим требуемый результат.

Чтобы установить оценку сверху в утверждении d), перепишем утверждение a) в виде

$$|P'(x)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda e^{-\lambda x}\,d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda e^{-\zeta x}\,d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\overline{\lambda})}\right\}}\|P\|^2.$$

Интегрируя написанное неравенство в промежутке $(0,\infty)$ и изменяя порядок интегрирования, получим

$$\|P'\|^2\leqslant J\,\|P\|^2, \tag{2.10'}$$

где

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\zeta d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\overline{\lambda})^2}\right\}}.$$

Применяя теорему о вычетах, получим

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{-\operatorname{Res}\left(\frac{\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar\lambda)},-\bar\lambda\right)-\operatorname{Res}(\cdot\ ,\infty)\right\}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{-\left(\frac{\zeta}{W(\zeta)}\right)_{\zeta=-\bar\lambda}+1\right\}}.$$

Учитывая тождество

$$\frac{1}{W(\zeta)}=\overline{W(-\bar\zeta)},$$

имеем

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}\overline{(\zeta\,\overline{W(-\bar\zeta)})'_{\zeta=-\bar\lambda}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}\lambda W'(\lambda).$$

Применяя лемму 5, имеем

$$J=a_2-\sum_{k=1}^{p}m_k\lambda_k^2=2\left(\sum_{k=1}^{p}m_k\operatorname{Re}\lambda_k\right)^2-\sum_{k=1}^{p}m_k\operatorname{Re}\lambda_k^2.$$

Подставляя полученное значение интеграла в (2.10′), придем к оценке сверху в утверждении d).

Соответствующие теоремы для систем Мюнца доказываются совершенно аналогично, поэтому мы их приведем без доказательства. В этом случае роль леммы 3 выполняет теорема 1′, так что мы будем пользоваться обозначениями (1.20).

Рассмотрим в пространстве $L_2(0, 1)$ обобщенные полиномы Мюнца, образованные по системе (1.19):

$$P(x)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}\,x^{\mu_k}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^s.$$

Семейство этих полиномов обозначим через E_1.

Теорема 2′. *Имеют место равенства*

a) $$\max_{P\in E_1}\frac{|P(z)|}{\|P\|}=\sqrt{K_1(z, z)},$$

где z — произвольная точка на римановой поверхности логарифмической функции.

в) $$\max_{P\in E_1}\frac{\max\limits_{0<t<x}\sqrt{t}\,|P(t)|}{\|P\|}=\sqrt{x K_1(x, x)},\quad 0<x\leqslant 1.$$

c) $$\max_{P\in E_1}\frac{\max\limits_{0<t<1}\sqrt{t}\,|P(t)|}{\|P\|}=\left\{2\sum_{k=1}^{p}m_k\operatorname{Re}\left(\mu_k+\frac{1}{2}\right)\right\}^{1/2}.$$

Теорема 3′. *Справедливы следующие соотношения:*

a) $$\max_{P\in E_1} \frac{|P'(z)|}{\|P\|} = \sqrt{\Phi_1(z)},$$

где

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^{\lambda-3/2}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}{W(\lambda)} \overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^{\zeta-3/2}\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar\lambda)}\right\}}\, d\lambda,$$

z — произвольная точка на римановой поверхности логарифмической функции.

в) $$\max_{P\in E_1} \frac{\max\limits_{0<t<x} t^{3/2}|P'(t)|}{\|P\|} = \sqrt{x^3\Phi_1(x)},\ 0<x<1.$$

c) $$\max_{P\in E_1} \frac{\max\limits_{0<t<1} t^{3/2}|P'(t)|}{\|P\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^3 - \right.$$

$$\left. -\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^3 - \frac{1}{2}S\left(S-\frac{1}{2}\right)\right\}^{1/2},$$

$$\lambda_k = \mu_k + \frac{1}{2};\ S = 2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k.$$

d) $$\left|\frac{4}{3}\left(\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{\sum\limits_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^3}{\sum\limits_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k} - \sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right|^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{P\in E_1} \frac{\|t P'(t)\|}{\|P\|} \leqslant \left\{2\left(\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^2 - \right.$$

$$\left. -\sum_{k=1}^{p} m_k\left(\operatorname{Re}\lambda_k - \frac{1}{4}\right)\right\}^{1/2},$$

где оценка снизу имеет место для полинома

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{t^{\zeta-1/2}}{W(\zeta)}\, d\zeta.$$

Отметим, что и в последних теоремах можно указать экстремальные полиномы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 19.III.1982

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ. Դիրիխլեի բազմանդամների էքստրեմալ հատկությունները (*ամփոփում*)

Դիրիխլեի և Մյունցի համակարգերի համար կառուցվում են ծնված երկօրթոգոնալ համակարգեր։ Բացահայտվում է նշված համակարգերի կապը մոտարկման խնդիրների հետ։ Բեր-

վում է դիֆերենցելի ֆունկցիաները Մյունցի բազմանդամներով մոտարկման վերաբերյալ Նյումանի թեորեմի մի նոր կոնստրուկտիվ ապացույց։

Այնուհետև, օգտագործելով կառուցված ապարատը ապացուցվում են զանազան գնահատականներ Դիրիխլեի և Մյունցի բազմանդամների ու նրանց ածանցյալների վերաբերյալ։ Վերջինները հանդիսանում են Մարկովի, Բեռնշտայնի և Շմիդտի դասական գնահատականների անալոգները։

V. Kch. MUSOIAN. *Extremal properties of Dirichlet polynomials* (summary)

For finite systems of Dirichlet and Muntz the biorthogonal generated systems are constructed and the connection of mentioned systems with approximation problems is revealed. A constructive proof of Newman's theorem on approximation of differentiable functions by Muntz polynomials is given.

Then, using the constructed apparatus various estimates concerning the Dirichlet and Muntz polynomials and their derivatives are proved. These are the analogues of the classical estimates of Markov, Bernstein and Schmidt.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Schwartz.* Etude des sommes d'exponentielles.— 2e ed., Actual. scient. et industr., № 959, Paris, Hermann, 1959.
2. *E. Schmidt.* Math. Annal 119, 1944, 165—209.
3. *T. Ganelius and D. Newman.* Müntz—Jackson theorems in all L^p spaces with unrestricted exponents, American journal of Math., 98, 1976, 295—309.
4. *М. М. Джрбашян.* Примыкание и единственность рядов типа Дирихле на вещественной оси, Изв. АН Арм. ССР, Математика, 7, № 4, 1972, 258—274.
5. *М. М. Джрбашян.* Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций, Мат. сб. 114 (156), № 1, 1981, 3—84.
6. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 4, 1983 Математика

УДК 517.43

Р. Г. АЙРАПЕТЯН, И. М. ГЕЛЬФАНД, М. И. ГРАЕВ, Г. Р. ОГАНЕСЯН

ТЕОРЕМА ПЛАНШЕРЕЛЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СВЯЗАННОГО С КОМПЛЕКСОМ p-МЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В $\mathbf{CP}^n$ И $\mathbf{C}^n$

В [1, 2] изучалось интегральное преобразование, относящее функциям в аффинном пространстве их интегралы по прямым, пересекающим фиксированную кривую. Задача интегральной геометрии состояла в том, чтобы получить для этого преобразования формулу обращения и формулу Планшереля. Комплекс прямых, пересекающих фиксированную кривую, является одним из самых интересных комплексов прямых. Наша цель—определить комплекс K_C p-мерных плоскостей, заменяющий при $p>1$ комплекс прямых, пересекающих кривую (см. 3, 4, 5]). Для этого обозначим через $G_{p+1, n+1}$ комплексное грассманово многообразие, т. е. множество $(p+1)$-мерных подпространств в $\mathbf{C}^{n+1}$ или, что то же, множество p-мерных плоскостей в n-мерном проективном пространстве $\mathbf{CP}^n$. Зададим p-мерное подмногообразие $C\subset G_{p, n+1}$ (оно заменяет кривую при $p>1$). Определим комплекс $K_C\subset G_{p+1, n+1}$ как множество всех подпространств $h\in G_{p+1, n+1}$, содержащих хотя бы одно подпространство $l\in C$; очевидно, что $\dim K_C=n$

В работе [5] было введено интегральное преобразование J_C, относящее каждой функции $f(x)$ на $\mathbf{CP}^n$ функцию $\varphi(h)$ на K_C: именно, $\varphi(h)$ равно интегралу f по плоскости $h\in K_C$ (точное определение см. в § 1) и для этого преобразования была получена формула обращения

В данной работе, при условии, что C — гармоническое многообразие, получена теорема Планшереля. Сформулируем условие гармоничности (см. [5]). Заметим, что если C — p-мерное подмногообразие в $G_{p, n+1}$, то для почти всех $\eta\in(\mathbf{C}^{n+1})'$ имеется лишь конечное число $\mathrm{Cr}(\eta)$ подпространств $l\in C$, ортогональных η. Мы называем C гармоническим многообразием, если $\mathrm{Cr}(\eta)=\mathrm{const}\neq 0$ для почти всех η. Эту константу мы обозначаем через $\mathrm{Cr}(C)$ и называем числом Крофтона. Число Крофтона является естественным обобщением понятия порядка алгебраической кривой, так как в случае алгебраической кривой C (т. е. при $p=1$) оно равно числу точек пересечения кривой C с гиперплоскостью общего положения*.

П р и м е ч а н и е. В работе разобран случай комплексного пространства, поскольку он является более простым. Случай вещественного пространства будет разобран в другой работе.

---

* Краткое изложение результатов см. в [9].

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

1. Введем пространство F C^∞-функций на $\mathbf{C}^{n+1}\setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности:

$$f(\lambda x)=|\lambda|^{-2p-2} f(x), \ \lambda\in \mathbf{C}\setminus 0. \tag{1.1}$$

Определим интегральное преобразование J функций $f\in F$. Обозначим через E многообразие $(p+1)$-реперов $v=(v_1,\cdots, v_{p+1})$ в $\mathbf{C}^{n+1}$; оно является расслоением над грассмановым многообразием $G_{p+1,\,n+1}$. Пусть $f\in F$, $v=(v_1,\cdots, v_{p+1})\in E$. Положим

$$\sigma(t)=\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1}\, t^k\, dt^1\wedge\cdots\wedge dt^{k-1}\wedge dt^{k+1}\wedge\cdots\wedge dt^{p+1}.$$

Из условия однородности для $f\in F$ следует, что дифференциальная $(p,\,p)$-форма $f(v_1 t^1+\cdots+v_{p+1} t^{p+1})\,\sigma(t)\wedge\overline{\sigma(t)}$ имеет степень однородности 0, а потому она опускается с $\mathbf{C}^{p+1}\setminus 0$ на $\mathbf{CP}^p$. Мы полагаем:

$$(Jf)(v)=\left(\frac{i}{2}\right)^p\int\limits_{\mathbf{CP}^p} f(v_1 t^1+\cdots+v_{p+1} t^{p+1})\,\sigma(t)\wedge\overline{\sigma(t)}. \tag{1.2}$$

Очевидно, что $\varphi=Jf$ — C^∞-функция на E, удовлетворяющая следующему условию однородности:

$$\varphi(vg)=|\det g|^{-2}\,\varphi(v) \text{ для любого } g\in GL(p+1,\,\mathbf{C}). \tag{1.3}$$

В силу этого условия, функция φ фактически зависит только от подпространства $h\in G_{p+1,\,n+1}$, натянутого на репер $v\in E$.

Пусть теперь $K_C\subset G_{p+1,\,n+1}$ — комплекс $(p+1)$-мерных подпространств, построенный по p-мерному подмногообразию $C\subset G_{p,\,n+1}$. Пусть далее E_C — расслоение реперов над K_C, Φ_C — пространство C^∞-функций на E_C, удовлетворяющих условию однородности:

$$\varphi(vg)=|\det g|^{-2}\,\varphi(v) \text{ для любого } g\in GL(p+1,\,\mathbf{C}). \tag{1.4}$$

Определим интегральное преобразование $J_C\colon F\to\Phi_C$, полагая

$$J_C f=Jf|_{E_C}.$$

2. Наша цель—получить теорему Планшереля для преобразования J_C. Для этого нужно как в F так и в Φ_C ввести скалярное произведение. В дальнейшем предполагается, что $2p\leqslant n-1$. Чтобы ввести скалярное произведение в пространстве F, зафиксируем произвольный однородный многочлен $P(\eta)$ от η, $\bar\eta\in(\mathbf{C}^{n+1})'$ бистепени $(k_1,\,k_2)$, где $k_1+k_2=n-1-2p$, и положим

$$\omega(x)=\sum(-1)^{k-1}\, x^k\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{k-1}\wedge dx^{k+1}\wedge\cdots dx^{n+1}.$$

Пусть $f_1,\ f_2\in F$. Тогда из условия однородности для функций f_i ясно, что дифференциальная форма

$$\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f_1(x)\right]\left[\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f_2(x)}\right]\omega(x)\wedge\overline{\omega(x)}$$

имеет степень однородности 0, а поэтому она опускается с $\mathbf{C}^{n+1}\setminus 0$ на CP^n. Положим

$$(f_1, f_2)=\left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{CP^n}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f_1(x)\right]\left[\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f_2(x)}\right]\omega(x)\wedge\overline{\omega(x)}. \quad (1.5)$$

Обозначим через $\overline{F}$ пополнение пространства F по норме $\|f\|=(f, f)^{1/2}$. Введем теперь скалярное произведение в пространстве Φ_C, где C — гармоническое многообразие. Пусть $l\in C$, $v=(v_1,\cdots, v_p)$—произвольный базис в l и $x\in\mathbf{C}^{n+1}\setminus l$; тогда $(v_1,\cdots, v_p, x)\in E_C$. Положим

$$\sigma_v(x)=\frac{1}{(n-p)!}\sum sgn\,(i_1,\cdots, i_{n+1})\,v_1^{i_1}\cdots v_p^{i_p}\,x^{i_{p+1}}\,dx^{i_{p+2}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{n+1}}$$

(суммирование ведется по всем перестановкам индексов $1,\cdots, n+1$),

$$\varkappa_x(\varphi)=\sum\frac{\partial^p\varphi(v_1,\cdots, v_p, x)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_p}}\,dv_1^{i_1}\wedge\cdots\wedge dv_p^{i_p}.$$

Введем для любых $\varphi_1, \varphi_2\in\Phi_C$ следующую дифференциальную форму:

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2)=\left[\sigma_v(x)\wedge P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varkappa_x\varphi_1\right]\wedge\overline{\left[\sigma_v(x)\wedge P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varkappa_x(\varphi_2)\right]}. \quad (1.6)$$

Пусть сначала v_i и $dv_i\,(i=1,\cdots, p)$ фиксированы и $l\in C$—подпространство, натянутое на векторы v_i. Тогда $\Omega(\varphi_1, \varphi_2)$ является дифференциальной $(n-p,\ n-p)$-формой на $\mathbf{C}^{n+1}\setminus l$. Зададим отображение $\mathbf{C}^{n+1}\setminus l\to \mathbf{C}P^n/l$, где $\mathbf{C}P^n/l\cong\mathbf{C}P^{n-p}$ — множество всех подпространств $h\in G_{p+1,n+1}$, содержащих l; именно, отнесем каждой точке $x\in\mathbf{C}^{n+1}\setminus l$ подпространство, натянутое на x и l. Легко проверить, что форма $\Omega(\varphi_1, \varphi_2)$ опускается с $\mathbf{C}^{n+1}\setminus l$ на $\mathbf{C}P^n/l$; таким образом, определен ее интеграл по пространству $\mathbf{C}P^n/l$, являющийся дифференциальной (p, p)-формой на расслоении реперов $\widetilde{C}$ над C. Легко далее проверить, что полученная (p, p)-форма на $\widetilde{C}$ опускается с $\widetilde{C}$ на C. Положим

$$<\varphi_1, \varphi_2>=\frac{1}{(2\pi)^{2p}\,\mathrm{Cr}\,(C)}\left(\frac{i}{2}\right)^n\int\limits_C\ \int\limits_{CP^n/l}\Omega(\varphi_1, \varphi_2). \quad (1.7)$$

Обозначим через $\overline{\Phi}_C$ пополнение пространства Φ_C по норме $\|\varphi\|=$ $=<\varphi, \varphi>^{1/2}$.

Теорема 1. *Пусть $2p\leqslant n-1$, $C\subset G_{p,n+1}$ — гармоническое подмногообразие, J_C — интегральное преобразование, определенное в п. 1. Тогда преобразование J_C изометрично относительно введенных в F и Φ_C скалярных произведений, т. е.*

$$(f_1, f_2)=<J_C f_1, J_C f_2>$$

для любых $f_1, f_2\in F$. Следовательно, оно продолжается до изометрического отображения $\overline{F}\to\overline{\Phi}_C$.

3. Опишем образ пространства $\overline{F}$ при отображении J_C. Пусть $\varphi \in \Phi_C$, $l \in C$, $v = (v_1, \cdots, v_p)$ — произвольный базис в l, а $\eta \in (\mathbf{C}^{n+1})' \setminus 0$ — вектор, ортогональный l. Введем следующую дифференциальную форму на $\mathbf{C}^{n+1} \setminus l$:

$$\varphi (v_1, \cdots, v_p, x)\, \delta^{(n-p-1,\, n-p-1)} (\langle \eta, x \rangle)\, \sigma_v (x) \wedge \overline{\sigma_v (x)},$$

где $\delta^{(n-p-1,\, n-p-1)} (z) = \partial_z^{n-p-1} \partial_{\bar z}^{n-p-1} \delta (z)$, $\delta (z)$ — дельта-функция на $\mathbf{C}$. Легко показать, что эта форма не зависит от выбора базиса v в подпространстве l и что она опускается на проективное пространство $\mathbf{CP}^n/l \cong \mathbf{CP}^{n-p}$ при естественном отображении $\mathbf{C}^{n+1} \setminus l \to \mathbf{CP}^n/l$. Положим

$$\tilde{\varphi}(l, \eta) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-p} \int\limits_{\mathbf{CP}^n/l} \varphi (v_1, \cdots, v_p, x) \times$$

$$\times \delta^{(n-p-1,\, n-p-1)} (\langle \eta, x \rangle)\, \sigma_v (x) \wedge \overline{\sigma_v (x)}. \tag{1.8}$$

Скажем, что функция $\varphi \in \Phi_C$ удовлетворяет условию Кавальери, если для почти каждого $\eta \in (\mathbf{C}^{n+1})' \setminus 0$ $\tilde{\varphi} (l, \eta)$ не зависит от пространства $l \in C$, ортогонального η, т. е.

$$\tilde{\varphi} (l_1, \eta) = \tilde{\varphi} (l_2, \eta) \tag{1.9}$$

для любых подпространств $l_1, l_2 \in C$, ортогональных η (число этих подпространств конечно и равно $\mathrm{Cr}\,(C)$).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда образ пространства $\overline{F}$ при отображении $J_C : \overline{F} \to \overline{\Phi}_C$ есть замыкание пространства функций $\varphi \in \Phi_C$, удовлетворяющих условию Кавальери* (1.9).

Примечание. Необходимость условия (1.9) вытекает из следующего факта. Пусть $\varphi = Jf$, $f \in F$, т. е. функция φ задана на многообразии всех $(p+1)$-реперов в $\mathbf{C}^{n+1}$, тогда интеграл (1.8) определен для любой ортогональной пары $l \in G_{p,\, n+1}$, $\eta \in (\mathbf{C}^{n+1})' \setminus 0$. Легко убедиться, что он равен

$$\int\limits_{\mathbf{CP}^n} f (x)\, \delta^{(n-p-1,\, n-p-1)} (\langle \eta, x \rangle)\, \omega (x) \wedge \overline{\omega (x)},$$

а потому зависит только от η.

4. Введем семейство интегральных преобразований, родственных J_C. Пусть C — p-мерное подмногообразие в $G_{p,\, n+1}$, k_1, k_2 — любые целые числа такие, что $1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant n$ и $2p + 2 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant n + 1$. Обозначим через F^{k_1, k_2} пространство всех C^∞-функций на $\mathbf{C}^{n+1} \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности:

$$f (\lambda x) = \lambda^{-k_1} \bar{\lambda}^{-k_2} f (x), \quad \lambda \in \mathbf{C}^1 \setminus 0. \tag{1.10}$$

Определим интегральное преобразование функций $f \in F^{k_1, k_2}$. Именно, пусть $l \in C$, $v = (v_1, \cdots, v_p)$ — произвольный базис в l и $x \in C^{n+1} \setminus l$. Полагаем

$$(J_C^{k_1, k_2} f)(v, x) = \left(\frac{i}{2}\right)^p \int\limits_{C^p} f(vt + x)\, dt \wedge d\bar{t},$$

где $vt = v_1 t^1 + \cdots + v_p t^p$, $dt = dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^p$.

Из определения следует, что $\varphi = J_C^{k_1, k_2} f$ — C^∞-функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) при фиксированном v функция $\varphi(v, x)$ зависит только от проекции x на фактор-пространство $\mathbf{C}^{n+1}/l$;

2) $\varphi(vg, \lambda x) = |\det g|^{-2} \lambda^{p-k_1} \bar{\lambda}^{p-k_2} \varphi(v, x)$ для любых $g \in GL(p, \mathbf{C})$, $\lambda \in \mathbf{C} \setminus 0$. В силу этих условий, φ зависит фактически только от пары пространств (l, h), где $l \in C$ — подпространство, натянутое на v, а $h \in K_C$ — подпространство, натянутое на l и x. Отметим, что при $k_1 = k_2 = p + 1$ функция φ зависит только от h, а преобразование $J_C^{k_1, k_2}$ совпадает с J_C.

Обозначим через $\Phi_C^{k_1, k_2}$ пространство всех C^∞-функций $\varphi(v, x)$, удовлетворяющих условиям 1, 2. Зафиксируем произвольный однородный многочлен $P(\eta)$ от η, $\bar{\eta} \in (C^{n+1})' \setminus 0$ бистепени (l_1, l_2), где $l_1 + l_2 = n + 1 - k_1 - k_2$, и зададим скалярные произведения в пространствах F^{k_1, k_2} и $\Phi_C^{k_1, k_2}$ формулами (1.5), (1.6), (1.7). Определим, далее, функцию $\tilde{\varphi}(l, \eta)$ формулой (1.8), в которой $\delta^{(n-p-1,\, n-p-1)}$ заменено на $\delta^{(n-k_1,\, n-k_2)}$. При таком определении скалярчых произведений и функции $\tilde{\varphi}(l, \eta)$ теоремы 1 и 2 остаются справедливыми при любых k_1, k_2.

§ 2. Вспомогательные предложения

Пусть F^{k_1, k_2} — пространство C^∞-функций на $\mathbf{C}^{n+1} \setminus 0$, удовлетворяющих условию (1.10). Аналогично определим пространство F'^{k_1, k_2} C^∞-функций на $(\mathbf{C}^{n+1})' \setminus 0$. Будем предполагать, что $1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant n$, $k_1 + k_2 \leqslant n + 1$.

Пусть $f \in F^{k_1, k_2}$ и $\eta \in (\mathbf{C}^{n+1})' \setminus 0$. Тогда дифференциальная форма на $\mathbf{C}^{n+1} \setminus 0$: $f(x)\, \delta^{(n-k_1,\, n-k_2)}(\langle \eta, x \rangle)\, \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)}$ опускается на $\mathbf{CP}^n$ и мы полагаем

$$(Rf)(\eta) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{\mathbf{CP}^n} f(x)\, \delta^{(n-k_1,\, n-k_2)}(\langle \eta, x \rangle)\, \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)}. \qquad (2.1)$$

Назовем функцию $\tilde{f} = Rf$ на $(\mathbf{C}^{n+1})' \setminus 0$ обобщенным преобразованием Радона функции f. Очевидно, что $\tilde{f} \in F'^{n+1-k_1,\, n+1-k_2}$. Таким образом, мы получили отображение

$$R: F^{k_1, k_2} \to F'^{n+1-k_1,\, n+1-k_2}.$$

Введем скалярные произведения в пространствах F^{k_1, k_2} и $F'^{n+1-k_1,\, n+1-k_2}$. Для этого зафиксируем произвольный однородный ненулевой многочлен $P(\eta)$ от η, $\bar{\eta} \in (\mathbf{C}^{n+1})' \setminus 0$ бистепени (l_1, l_2), где $l_1 + l_2 = n + 1 - k_1 - k_2$. Если $f_1, f_2 \in F^{k_1, k_2}$, то дифференциальная форма на $\mathbf{C}^{n+1} \setminus 0$:

$$\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f_1(x)\right]\overline{\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f_2(x)\right]}\,\omega(x)\wedge\overline{\omega(x)}$$

имеет степень однородности 0, а потому она опускается на $\mathbf{C}P^n$. Положим

$$(f_1, f_2)=\left(\frac{i}{2}\right)^n\int\limits_{\mathbf{C}P^n}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f_1(x)\right]\overline{\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f_2(x)\right]}\,\omega(x)\wedge\overline{\omega(x)}.$$

Аналогично, если $\varphi_1, \varphi_2 \in F'^{n+1-k_1,\, n+1-k_2}$, то дифференциальная форма на $(\mathbf{C}^{n+1})'\setminus 0$: $|P(\eta)|^2\,\varphi_1(\eta)\,\overline{\varphi_2(\eta)}\,\omega(\eta)\wedge\overline{\omega(\eta)}$ опускается на $(\mathbf{C}P^n)'$, и мы полагаем

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\pi^{2(1-n)}\left(\frac{i}{2}\right)^n\int\limits_{(\mathbf{C}P^n)'}|P(\eta)|^2\,\varphi_1(\eta)\,\overline{\varphi_2(\eta)}\,\omega(\eta)\wedge\overline{\omega(\eta)}.$$

Обозначим через $\overline{F}^{k_1,k_2}$, $\overline{F}'^{\,n+1-k_1,\, n+1-k_2}$ пополнения пространств F^{k_1,k_2}, $F'^{\,n+1-k_1,\, n+1-k_2}$ по введенным нормам.

Предложение 1. *Отображение $R: F^{k_1,k_2}\to F'^{\,n+1-k_1,\, n+1-k_2}$ изометрично относительно введенных скалярных произведений, т. е.*

$$(f_1, f_2)=(Rf_1, Rf_2), \tag{2.2}$$

поэтому оно продолжается до изометрического отображения гильбертовых пространств $R:\overline{F}^{k_1,k_2}\to\overline{F}'^{\,n+1-k_1,\, n+1-k_2}$. Полученное отображение является изоморфизмом $\overline{F}^{k_1,k_2}$ и $\overline{F}'^{\,n+1-k_1,\, n+1-k_2}$, причем обратное отображение имеет аналогичный вид:

$$(R^{-1}\varphi)(x)=(-1)^{n-1}\pi^{2(1-n)}\left(\frac{i}{2}\right)^n\int\limits_{(\mathbf{C}P^n)'}\varphi(\eta)\times$$
$$\times\,\zeta^{(k_1-1,\,k_2-1)}(\langle\eta, x\rangle)\,\omega(\eta)\wedge\overline{\omega(\eta)}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $k_1+k_2=n+1$. В этом случае скалярные произведения в $\overline{F}^{k_1,k_2}$ и $\overline{F}'^{\,n+1-k_1,\, n+1-k_2}$ задаются, соответственно, формулами

$$(f_1, f_2)=\left(\frac{i}{2}\right)^n\int\limits_{\mathbf{C}P^n}f_1(x)\,\overline{f_2(x)}\,\omega(x)\wedge\overline{\omega(x)},$$

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\pi^{2(1-n)}\left(\frac{i}{2}\right)^n\int\limits_{(\mathbf{C}P^n)'}\varphi_1(\eta)\,\overline{\varphi_2(\eta)}\,\omega(\eta)\wedge\overline{\omega(\eta)}.$$

Наше утверждение в этом случае можно получить как простое следствие из известных теорем об унитарных представлениях группы $SL(n+1, \mathbf{C})$. Именно, зададим в пространствах $\overline{F}^{k_1,k_2}$, $\overline{F}'^{\,n+1-k_1,\, n+1-k_2}$ представления группы $SL(n+1, \mathbf{C})$ по формулам

$$(T_g f)(x)=f(xg),\quad(\hat{T}_g\,\varphi)(\eta)=\varphi(\eta g'^{-1}).$$

Очевидно, что эти представления унитарны, и хорошо известно (см., например, [6]), что они неприводимы и эквивалентны. Очевидно, далее, что R является сплетающим оператором для этих представлений; следовательно, оператор cR при подходящем множителе c задает изоморфизм соответствующих пространств. То, что $c=1$ легко установить, сравнивая (f, f) и (Rf, Rf) для какой-либо функции из F^{k_1, k_2}.

Пусть теперь $k_1+k_2<n+1$ и $f\in F^{k_1, k_2}$. Тогда $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x)\in$ $\in F^{k_1', k_2'}$, где $k_1'+k_2'=n+1$ и $P(\eta)\, Rf=(-1)^{l_1+l_2} R\left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\right)$. Поэтому при $k_1+k_2<n+1$ равенство (2.2) следует непосредственно из уже доказанного. Очевидно далее, что пространства

$$\left\{P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f,\ f\in F^{(k_1, k_2)}\right\},\ \{P(\eta)\, Rf,\ f\in F^{k_1, k_2}\}$$

плотны, соответственно, в $\overline{F}^{k_1', k_2'}$, $\overline{F}'^{\,n+1-k_1',\, n+1-k_2'}$. Отсюда и из уже доказанного для (k_1', k_2') следует, что преобразование Радона $R\colon \overline{F}^{k_1, k_2}\to$ $\to \overline{F}'^{\,n+1-k_1,\, n+1-k_2}$ является изоморфизмом.

Примечание. Тот же результат можно получить и не опираясь на теорию представлений, а именно, свести преобразование R к преобразованию Радона в аффинном пространстве и воспользоваться теоремой Планшереля для последнего преобразования.

Обозначим через Φ пространство всех C^∞-функций на множестве реперов $(v_1, \cdots, v_{p+1})$ в $\mathbf{C}^{n+1}$, удовлетворяющих условию однородности (1.3). Пусть $l\in G_{p, n+1}$, $v=(v_1, \cdots, v_p)$ — фиксированный базис в l. Тогда, если $\varphi\in\Phi$, то в силу условия (1.3), функция $\psi(x)=\varphi(v_1, \cdots$ $\cdots, v_p, x)$ есть функция на $\mathbf{C}^{n+1-p}\setminus 0\cong \mathbf{C}^{n+1}/l\setminus 0$, удовлетворяющая условию однородности $\psi(tx)=|t|^{-2}\psi(x)$. Поэтому к ней можно применить определенное выше обобщенное преобразование Радона; оно задается формулой (1.8):

$$\check{\varphi}(l, \eta)=\left(\frac{i}{2}\right)^{n-p}\int\limits_{CP^n/l}\varphi(v_1, \cdots, v_p, x)\,\delta^{(n-p-1,\, n-p-1)}(\langle x, \eta\rangle)\times$$

$$\times\,\sigma_v(x)\wedge\overline{\sigma_v(x)},\quad \eta\in(\mathbf{C}^{n+1}/l)'=\operatorname{ann} l.$$

Из предложения 1 легко следует

Предложение 2. *Для любых функций φ_1, $\varphi_2\in\Phi$ и любого однородного многочлена Q от η, $\bar\eta$ бистепени (m_1, m_2), где $m_1+m_2=$ $=n-1-p$ имеет место следующее равенство Планшереля*:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n-p}\int\limits_{CP^n/l}\left[Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_1(v, x)\right]\overline{\left[Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_2(v, x)\right]}\,\sigma_v(x)\wedge\overline{\sigma_v(x)}=$$

$$=\pi^{2(p+1-n)}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-p}\int\limits_{CP^{n-p}}|Q(\eta)|^2\,\tilde\varphi_1(l, \eta)\,\overline{\tilde\varphi_2(l, \eta)}\,\mu_v(\eta)\wedge\overline{\mu_v(\eta)},\qquad(2.4)$$

где $\mu_v(\eta)$ — *дифференциальная форма на* $\mathbf{C}^{n+1}/l)' = \operatorname{ann} l$, *определяемая равенством*

$$\omega(\eta) = \langle v_1, d\eta\rangle \wedge \cdots \wedge \langle v_p, d\eta\rangle \wedge \mu_v(\eta).$$

В частности, равенство (2.4), где $l \in C$ справедливо для функций $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_C$.

Предложение 3. *Пусть* $f \in F$, $\varphi = J_C f$ *и* $\tilde{f}$ — *обобщенное преобразование Радона функции* f. *Тогда функция* $\tilde{\varphi}$, *определенная равенством* (1.8), *удовлетворяет соотношению*

$$\tilde{\varphi}(l, \eta) = \tilde{f}(\eta), \tag{2.5}$$

для любого $l \in C$ ($l \subset \operatorname{ann} \eta$).

Доказательство. Мы имеем

$$\varphi(v_1, \cdots, v_p, x) = \left(\frac{i}{2}\right)^p \int\limits_{\mathbf{C}^p} f(v_1 t^1 + \cdots + v_p t^p + x)\, dt \wedge d\bar{t}.$$

Подставив это выражение в формулу (1.8), получаем

$$\tilde{\varphi}(l, \eta) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{\mathbf{CP}^n/l} \int\limits_{\mathbf{C}^p} f(vt + x) \times$$

$$\times \delta^{(n-p-1, n-p-1)}(\langle \eta, x\rangle)\, dt \wedge d\bar{t} \wedge \sigma_v(x) \wedge \overline{\sigma_v(x)}.$$

Но так как $\eta \in \operatorname{ann} l$ последний интеграл равен следующему:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{\mathbf{CP}^n} f(x)\, \delta^{(n-p-1,\, n-p-1)}(\langle \eta, x\rangle)\, \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)} = \tilde{f}(\eta).$$

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

Теорема 2 следует непосредственно из предложения 3. Докажем теорему 1.

Из предложения 1 следует, что для функций $f_1, f_2 \in F$ справедливо равенство:

$$(f_1, f_2) = \pi^{2(1-n)} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{(\mathbf{CP}^n)'} |P(\eta)|^2 \tilde{f}_1(\eta) \overline{\tilde{f}_2(\eta)}\, \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)}\,. \tag{3.1}$$

Обозначим через A многообразие ортогональных пар (l, η), где $\eta \in (\mathbf{CP}^n)'$, $l \in C$ ($l \subset \operatorname{ann} \eta$). Зададим отображения $\pi_1 : A \to (\mathbf{CP}^n)'$ и $\pi_2 : A \to C$, полагая $\pi_1(l, \eta) = \eta$, $\pi_2(l, \eta) = l$. Для почти каждой точки $\eta \in (\mathbf{CP}^n)'$ ее прообраз $\pi^{-1}(\eta) \subset A$ состоит из конечного числа точек, равного $\mathrm{Cr}\,(C)$; иными словами A является N-листным накрытием над $(\mathbf{CP}^n)'$, где $N = \mathrm{Cr}\,(C)$.

Поднимем дифференциальную форму

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n |P(\eta)|^2 \tilde{f}_1(\eta)\, \overline{\tilde{f}_2(\eta)}\, \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)} =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^n |P(\eta)|^2 \tilde{\varphi}_1(l, \eta)\, \overline{\tilde{\varphi}_2(l, \eta)}\, \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)}$$

с $(\mathbf{C}P^n)'$ на A. Так как, в силу условия Кавальери, функции $\tilde{\varphi}_1(l, \eta)$, $\tilde{\varphi}_2(l, \eta)$ постоянны на каждом слое $\pi_1^{-1}(\eta)$ и равны, соответственно, $\tilde{f}_1(\eta)$, $\tilde{f}_2(\eta)$, то получаем

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{(\mathbf{C}P^n)'} |P(\eta)|^2 \tilde{f}_1(\eta)\, \overline{\tilde{f}_2(\eta)}\, \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)} = \frac{1}{\mathrm{Cr}(C)} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_A |P(\eta)|^2 \times$$

$$\times \tilde{\varphi}_1(l, \eta) \cdot \overline{\tilde{\varphi}_2(l, \eta)}\, \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)}\,.$$

Теперь воспользуемся тем, что $\pi_2 : A \to C$ является векторным расслоением, поэтому интеграл по A можно представить как повторный, где интегрирование ведется сначала по слоям, а затем по базе расслоения $A \to C$. Поэтому имеем

$$\frac{1}{\mathrm{Cr}(C)} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{\check{C}} \int\limits_{\mathrm{ann}\, l} |P(\eta)|^2 \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_p \\ j_1, \ldots, j_p}} \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_p} \tilde{\varphi}_1(l, \eta) \cdot \overline{\eta_{j_1} \cdots \eta_{j_p} \tilde{\varphi}_2(l, \eta)} \times$$

$$\times \mu_0(\eta) \wedge \overline{\mu_0(\eta)} \wedge dv_1^{i_1} \wedge \cdots \wedge dv_p^{i_p} \wedge \overline{dv_1^{j_1} \wedge \cdots \wedge dv_p^{j_p}}\,.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться предложением 2.

§ 4. Замечания о преобразовании J в аффинном пространстве

1. Теоремы 1 и 2 нетрудно переформулировать в терминах аффинного пространства. Для этого достаточно заменить функции $f \in F$ их ограничениями на гиперплоскость $x_{n+1} = 1$; тем самым, F реализуется как пространство функций на $\mathbf{C}^n$, а J сводится к преобразованию J_a, относящему функциям на $\mathbf{C}^n$ их интегралы по p-плоскостям в $\mathbf{C}^n$:

$$(J_a f)(v_0, v) = \left(\frac{i}{2}\right)^p \int\limits_{\mathbf{C}^p} f(v_0 + vt)\, dt \wedge d\bar{t}, \tag{4.1}$$

где $v_0 \in \mathbf{C}^n$, $v = (v_1, \cdots, v_p)$ — p-репер в $\mathbf{C}^n$, $vt = v_1 t^1 + \cdots + v_p t^p$, $dt = dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^p$.

Комплекс K_C в аффинном пространстве задается p-мерным многообразием $(p-1)$-мерных плоскостей в $\mathbf{C}^n$; он состоит из всех p-мерных плоскостей, содержащих хотя бы одну плоскость из C. Теоремы 1, 2 нетрудно переформулировать в терминах функций f и Jf.

Рассмотрим пример, разобранный ранее в [1] — комплекс прямых в $\mathbf{C}^3$, пересекающих гиперболу $x^1x^3=1$, $x^2=0$. Этот комплекс возникает в гармоническом анализе на группе $SL(2, \mathbf{C})$. Связанное с K интегральное преобразование J задается формулой

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda)=\frac{i}{2}\int f(\lambda^{-1}+tz_2,\ t,\ \lambda-tz_1)\,dt\wedge d\bar{t}. \tag{4.2}$$

Условие на образ J, полученное в [1] и условие данной работы (условие Кавальери) задаются по разному. Именно, условие из [1] таково:

$$\Phi(\omega_1, \omega_2; \lambda)=\Phi\left(\omega_1,\ \omega_2,\ -\frac{\bar{\omega}_2}{\lambda\,\omega_1}\right), \tag{4.3}$$

где Φ — преобразование Фурье функции φ по переменным z_1, z_2, т. е.

$$\Phi(\omega_1, \omega_2; \lambda)=\left(\frac{i}{2}\right)^2\int\varphi_1(z_1, z_2; \lambda)\, e^{i\,\mathrm{Re}(z_1\bar{\omega}_1+z_2\bar{\omega}_2)}dz_1\wedge d\bar{z}_1\wedge dz_2\wedge d\bar{z}_2. \tag{4.4}$$

Условие же Кавальери имеет вид: для любых η_1, $\eta_2\in\mathbf{C}^2\setminus 0$, $s\in\mathbf{C}$ имеет место равенство

$$\int\varphi(z_1, z_2; \lambda_1)\,\delta^{(1,1)}(\eta_1z_2-\eta_2z_1+s)\,dz_1\wedge dz_2\wedge d\bar{z}_1\wedge d\bar{z}_2=$$

$$=\int\varphi(z_1, z_2; \lambda_2)\,\delta^{(1,1)}(\eta_1z_2-\eta_2z_1+s)\,dz_1\wedge dz_2\wedge d\bar{z}_1\wedge d\bar{z}_2 \tag{4.5}$$

при условии, что $\eta_1\lambda_1^{-1}+\eta_2\lambda_1=\eta_1\lambda_2^{-1}+\eta_2\lambda_2$.

Убедимся непосредственно, что условия (4.3) и (4.5) эквивалентны. Мы имеем

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2\int\limits_{\mathbf{C}^2}\varphi(z_1, z_2; \lambda)\,\delta^{(1,1)}(\eta_1z_2-\eta_2z_1+s)\,dz_1\wedge d\bar{z}_1\wedge dz_2\wedge d\bar{z}_2=$$

$$=\left(\frac{i}{2}\right)^3\int\limits_{\mathbf{C}^3}\varphi(z_1, z_2; \lambda)\,|t|^2 e^{i\,\mathrm{Re}\,t(\eta_1z_2-\eta_2z_1+s)}\,dt\wedge d\bar{t}\wedge dz_1\wedge d\bar{z}_1\wedge dz_2\wedge d\bar{z}_2=$$

$$=\left(\frac{i}{2}\right)\int\limits_{\mathbf{C}}\Phi(-\overline{t\eta_2}, \overline{t\eta_1}; \lambda)\,e^{i\,\mathrm{Re}(ts)}\,|t|^2\,dt\wedge d\bar{t}.$$

Таким образом, условие (4.5) эквивалентно условию

$$\int\Phi(-\overline{t\eta_2}, \overline{t\eta_1}; \lambda_1)\,|t|^2\,e^{i\,\mathrm{Re}(ts)}\,dt\wedge d\bar{t}=\int\Phi(-\overline{t\eta_2}, \overline{t\eta_1}; \lambda_2)\,|t|^2\,e^{i\,\mathrm{Re}(ts)}\,dt\wedge d\bar{t}, \tag{4.6}$$

где $\eta_1\lambda_1^{-1}+\eta_2\lambda_1=\eta_1\lambda_2^{-1}+\eta_2\lambda_2$. В свою очередь, ввиду произвольности s, условие (4.6) эквивалентно условию

$$\Phi(-\overline{t\eta_2}, \overline{t\eta_1}; \lambda_1)=\Phi(-\overline{t\eta_2}, \overline{t\eta_1}; \lambda_2), \tag{4.7}$$

где $\eta_1\lambda_1^{-1}+\eta_2\lambda_1=\eta_1\lambda_2^{-1}+\eta_2\lambda_2$. Очевидно, что полученное условие эквивалентно условию (4.3). В самом деле, достаточно заметить, что равенство $\gamma_{1}\lambda_1^{-1}+\gamma_{2}\lambda_1=\gamma_{i1}\lambda_2^{-1}+\gamma_{i2}\lambda_2$ равносильно соотношению $\lambda_2=-\frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{i2}\lambda_1}$.

Поэтому, полагая в (4.7) $-\overline{t\gamma_{i2}}=\omega_1$, $\overline{t\gamma_{i1}}=\omega_2$, $\lambda_1=\lambda$, получаем равенство (4.3).

Институт прикладной математики
АН СССР,
Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 31.I.1983

Ռ. Գ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ի. Մ. ԳԵԼՖԱՆԴ, Մ. Ի. ԳՐԱԵՎ, Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Պլանշերելի թեորեմը CP^n և C^n տարածություններում p-չափանի հարթությունների կոմպլեքսի հետ կապված ինտեգրալ ձևափոխության համար *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում է ինտեգրալ ձևափոխություն, որը կապված է CP^n տարածությունում p-չափանի հարթությունների կոմպլեքսի հետ. Կոմպլեքս գրասմանի $G_{p,n+1}$ բազմաձևությունում տրված p-չափանի C ենթաբազմության օգնությամբ որոշված է K_C կոմպլեքսը, որը կազմված է այն $h\in G_{p+1,n+1}$ ենթատարածություններից, որոնք պարունակում են գոնե մեկ ենթատարածություն $l\in C$։

Դիցուք J_C – ինտեգրալ ձևափոխություն է, որը ամեն մի f ֆունկցիային CP^n-ի վրա համապատասխանեցնում է $\varphi(h)$ ֆունկցիան K_C-ի վրա, այսինքն՝ $\varphi(h)$ հավասար է f-ի ինտեգրալին $h\in K_C$ հարթությամբ։

Այդ ձևափոխության համար ստացված է Պլանշերելի թեորեմը և պատկերի նկարագրումը։

R. G. AJRAPETIAN, I. M. GELFAND, M. I. GRAEV, G. R. HOVHANNISIAN.
Plancherel theorem for the integral transformation, connected with complexes of p-planes in CP^n and C^n (summary)

In the paper integral transformations connected with complexes of p-planes in CP^n is considered. For a given p-dimensional submanifold $C\subset G_{p,n+1}$ the complex K_C is defined as a submanifold of complex grassman manifold $G_{p+1,n+1}$. K_C consists of the subspaces $h\in G_{p+1,n+1}$ containing no less than one subspace $l\in C$. Let J_C be an integral transformation mapping every function on CP^n to a function $\varphi(h)$ on K_C: $\varphi(h)$ is the integral of the function f over the plane $h\in K_C$. The Plancherel theorem for this transformation is proved and the image of this transformation is described in the case when C is harmonic manifold.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин*. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., «Физматгиз», 1962.
2. *А. А. Кириллов* Об одной задаче И. М. Гельфанда, ДАН СССР, 137, № 2, 1961, 276—277.
3. *С. Г. Гиндикин*. Унитарные представления групп автоморфизмов римановых симметрических пространств нулевой кривизны, Функц. анализ и его прилож., 1, № 1, 1967, 32—37.
4. *И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин*. Нелокальные формулы обращения в вещественной интегральной геометрии, Функц. анализ и его прилож., 11, № 3, 1977, 12—19.
5. *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Р. Рошу*. Нелокальные формулы обращения в задаче интегральной геометрии, связанной с p-мерными плоскостями в вещественном проективном пространстве, Функц. анализ и его прилож., 16, № 3, 1982, 49—51.
6. *И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк*. Унитарные представления классических групп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 36, 1950.
7. *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, З. Я. Шапиро*. Интегральная геометрия на k-мерных плоскостях, Функц. анализ и его прилож., 1, № 1, 1967, 15—31.

8. *Р. Г. Айрапетян, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Г. Р. Оганесян.* Формула Планшереля для интегрального преобразования, связанного с комплексом прямых, пересекающих алгебраическую кривую в C^3 и CP^3. ДАН Арм. ССР, 75, № 1, 1982, 9—15.
9. *Р. Г. Айрапетян, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Г. Р. Оганесян.* Формула Планшереля для интегрального преобразования, связанного с комплексом p-мерных плоскостей в CP^n, ДАН СССР, 268, № 2, 1983, 265—268.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 4, 1983 Математика

УДК 517.53

С. Е. РУКШИН

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КРАТНОСТЯМИ В КОНЕЧНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Результаты работ Л. Карлесона [1], Шапиро и Шилдса [2] об интерполяции значениями аналитических функций классов H^∞ и H^p в круге многократно обобщались в различных направлениях.

Значительные успехи были достигнуты в решении кратных интерполяционных задач. Так, с помощью биортогональных систем М. М. Джрбашяна в работах [3—5] было дано полное и эффективное решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классах H^p в круге и полуплоскости, а Г. М. Айрапетян [6] и В. И. Васюнин [7] показали, что в случае неограниченных кратностей никакая задача интерполяции с идеальным пространством данных неразрешима. Однако, если вместо значений функции и ее производных в качестве данных интерполяции брать ростки аналитических функций, то, как было доказано Н. К. Никольским [8], неограниченные кратности вполне допустимы.

Структура же интерполяционных множеств в многосвязных областях сравнительно мало изучена. Л. Карлесон и П. Бьерлинг [9] сформулировали в терминах функции Грина необходимое и достаточное условие для разрешимости интерполяции с простыми узлами в классе H^∞ в конечносвязной области, а Стаут [10] доказал, что интерполяционная в конечносвязной области последовательность разбивается на несколько интерполяционных последовательностей, сгущающихся к различным граничным компонентам области.

Настоящая работа посвящена обобщению некоторых результатов о кратной интерполяции на случай конечносвязных областей.

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность Н. А. Широкову за постановку задач и внимание к работе.

2. Пусть D — конечносвязная область комплексной плоскости, ограниченная кривыми $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$; D_m — односвязная область, ограниченная Γ_m и содержащая D; $H^\infty(D)$ — класс Харди ограниченных аналитических в D функций; $S = \{z_p, k_p\}$ — последовательность точек области D, снабженных кратностями $k_p \geqslant 1$; $S = S_1 \cup \cdots \cup S_n$ — произвольное разбиение S на подпоследовательности $S_m = \{z_{mp}, k_{mp}\}$, имеющие точки сгущения только на соответствующем контуре Γ_m; $g_D(z, t)$ — функция Грина области D с полюсом в точке t.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны:*

1°. *Для любого ограниченного по норме набора функций* $\{f_p\}$ *и в* $H^\infty(D)$ *существует функция* $f \in H^\infty(D)$ *такая, что*

$$f^{(k)}(z_p) = f_p^{(k)}(z_p) \quad (p > 1,\ 0 < k < k_p).$$

2°. *Для любой последовательности* $\{\lambda_p\}$ *из* l^∞ *существует функция* $f \in H^\infty(\mathrm{D})$ *такая, что*

$$f(z_p) = \lambda_p,\ f^{(k)}(z_p) = 0 \quad (p > 1,\ 1 \leqslant k < k_p).$$

3°. *Существует постоянная* $M < +\infty$ *и семейство функций* $\{f_p\}$ *из* $H^\infty(\mathrm{D})$ *такие, что* $\|f_p\|_\infty \leqslant M$,

$$f_p(z_q) = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases},\ f_p^{(k)}(z_q) = 0 \quad (p,\ q \geqslant 1,\ 1 \leqslant k < k_p).$$

4°. *Существует постоянная* $C < +\infty$ *такая, что при любом* $z \in \mathrm{D}$

$$\sum_{p > 1} k_p\, g_{\mathrm{D}}(z,\ z_p) \leqslant C + \sup_{p > 1} k_p\, g_{\mathrm{D}}(z,\ z_p).$$

5°. *При любом* m *для произвольного ограниченного по норме набора функций* $\{f_p\}$ *из* $H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *существует функция* $f \in H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *такая, что*

$$f^{(k)}(z_{mp}) = f_p^{(k)}(z_{mp}) \quad (p > 1,\ 0 \leqslant k < k_{mp}).$$

6°. *При любом* m *для произвольной последовательности* $\{\lambda_p\}$ *из* l^∞ *существует функция* $f \in H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *такая, что*

$$f(z_{mp}) = \lambda_p,\ f^{(k)}(z_{mp}) = 0 \quad (p > 1,\ 1 \leqslant k < k_{mp}).$$

7°. *При любом* m *существует постоянная* $C_m < +\infty$, *такая, что при всех* $z \in \mathrm{D}_m$

$$\sum_{p > 1} k_{mp}\, g_{\mathrm{D}_m}(z,\ z_{mp}) \leqslant C_m + \sup_{p > 1} k_{mp}\, g_{\mathrm{D}_m}(z,\ z_{mp}).$$

Доказательство. Равносильность условий 5°, 6° и 7° следует из результатов В. И. Васюнина [11] и Н. К. Никольского [8] для единичного круга и конформной инвариантности функции Грина. Дальнейшее доказательство проведем по схеме $1° \Rightarrow 2° \Rightarrow 3° \Rightarrow 7° \Rightarrow 4° \Rightarrow 7° \Rightarrow 1°$.

Импликация $1° \Rightarrow 2°$ очевидна.

$2° \Rightarrow 3°$. Рассмотрим банахово пространство

$$H_S^\infty(\mathrm{D}) = \{f \in H^\infty(\mathrm{D}) : f^{(k)}(z_p) = 0 \ (p \geqslant 1,\ 1 \leqslant k < k_p)\}$$

и линейный оператор R, сопоставляющий функции $f \in H_S^\infty(\mathrm{D})$ последовательность $\{f(z_p)\}$. Ясно, что $\|R\| \leqslant 1$ и в силу условия 2° R отображает $H_S^\infty(\mathrm{D})$ на всё l^∞. Тогда R индуцирует ограниченный взаимнооднозначный оператор R', отображающий $H_S^\infty(\mathrm{D})/\mathrm{Ker}\, R$ на l^∞, и по следствию из теоремы об открытом отображении (см. [12]) R' имеет ограниченный обратный. Отсюда следует, что существует постоянная $M < +\infty$ такая, что для любой последовательности $\lambda = \{\lambda_p\}$ из l^∞ существует функция $f \in H_S^\infty(\mathrm{D})$, для которой $f(z_p) = \lambda_p$ при всех $p \geqslant 1$ и $\|f\|_\infty \leqslant M \|\lambda\|_\infty$. В частности, для каждого $p \geqslant 1$ найдется функция $f_p \in H_S^\infty(\mathrm{D})$ такая, что $\|f_p\|_\infty \leqslant M$.

$$f_p(z_q)=\begin{cases}1, & p=q\\ 0, & p\neq q\end{cases}\quad (p,\ q\geqslant 1).$$

3° ⟹ 7°. При каждом m построим контур γ_m, гомотопный Γ_m, так, чтобы подпоследовательность S_m лежала в двусвязной области K_m, ограниченной γ_m и Γ_m, а подпоследовательность S_l, при $l\neq m$ — вне ее. Рассмотрим конформное отображение φ_m области D_m на единичный круг. Пусть $\zeta_{mp}=\varphi_m(z_{mp})$,

$$b_{mp}(\zeta)=\left(\frac{|\zeta_{mp}|}{\zeta_{mp}}\cdot\frac{\zeta_{mp}-\zeta}{1-\zeta\bar{\zeta}_{mp}}\right)^{k_{mp}},\quad B_{mp}(\zeta)=\prod_{\substack{q\geqslant 1\\ q\neq p}} b_{mq}(\zeta),$$

$$B_m(\zeta)=B_{mp}(\zeta)\,b_{mp}(\zeta),\quad \overset{*}{b}_{mp}(z)=b_{mp}(\varphi_m(z)),$$

$$\overset{*}{B}_{mp}(z)=B_{mp}(\varphi_m(z)),\quad \overset{*}{B}_m(z)=B_m(\varphi_m(z)).$$

Рассмотрим семейство функций $f_{mp}\in H^\infty_S(D)$ таких, что

$$\|f_{mp}\|_\infty\leqslant M,\quad f_{mp}(z_{lq})=\begin{cases}1, & m=l,\ p=q\\ 0, & m\neq l \text{ или } p\neq q.\end{cases}$$

Оно существует, так как выполнено условие 3°.

Ясно, что в $H^\infty(K_m)$ $\overset{*}{B}_{mp}$ делит f_{mp}, а $\overset{*}{b}_{mp}$ делит $f_{mp}-1$. Из того, что все нули $\overset{*}{B}_m$ лежат в области K_m, следует, что

$$\varepsilon_m=\inf_{z\in\gamma_m}|\overset{*}{B}_m(z)|>0,$$

откуда

$$|f_{mp}(z)-1|=\frac{|f_{mp}(z)-1|}{|\overset{*}{b}_{mp}(z)|}\,|\overset{*}{b}_{mp}(z)|\leqslant\left\|\frac{f_{mp}-1}{\overset{*}{b}_{mp}}\right\|_{H^\infty(K_m)}\cdot|\overset{*}{b}_{mp}(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M+1}{\varepsilon_m}\,|\overset{*}{b}_{mp}(z)| \text{ при } z\in K_m.$$

Пусть

$$\Delta_{mp}=\left\{z\in D_m:\ |\overset{*}{b}_{mp}(z)|\leqslant\frac{\varepsilon_m}{2(M+1)}\right\}.$$

Ввиду того, что согласно принципу максимума $|\overset{*}{B}_m|>\varepsilon_m$ внутри γ_m, Δ_{mp} лежит в области K_m. Из предыдущей оценки при $z\in\Delta_{mp}$ получим, что

$$|f_{mp}(z)-1|\leqslant\frac{M+1}{\varepsilon_m}\cdot\frac{\varepsilon_m}{2(M+1)}=\frac{1}{2},$$

откуда $|f_{mp}(z)|\geqslant\frac{1}{2}$ при $z\in\Delta_{mp}$.

Следовательно

$$|\overset{*}{B}_{mp}(z)|=\left|\frac{f_{mp}(z)}{\overset{*}{B}_{mp}(z)}\right|^{-1}\cdot|f_{mp}(z)|\geqslant\frac{1}{2}\left\|\frac{f_{mp}}{\overset{*}{B}_{mp}}\right\|_{H^\infty(K_m)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{M}{\varepsilon_m}\right)^{-1}=\frac{\varepsilon_m}{2M} \text{ при } z\in\Delta_{mp}.$$

Это неравенство влечет, в частности, что $\Delta_{mp} \cap \Delta_{mq} = \varnothing$ при $p \neq q$. Действительно, если $z \in \Delta_{mp} \cap \Delta_{mq}$, то

$$|B^*_{mp}(z)| < |b^*_{mq}(z)| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{2(M+1)} < \frac{\varepsilon_m}{2M},$$

что противоречит неравенству $|B^*_{mp}(z)| \geqslant \frac{\varepsilon_m}{2M}$.

Из дизъюнктности Δ_{mp} следует, очевидно, что при $z \in \Delta_{mp}$

$$\inf_{q>1} |b^*_{mq}(z)| = |b_{mp}(z)|.$$

Окончательно, при $z \in \Delta_{mp}$ имеем

$$|B^*_m(z)| = |B^*_{mp}(z)| \cdot |b^*_{mp}(z)| > \frac{\varepsilon_m}{2M} \inf_{q>1} |b^*_{mq}(z)|.$$

Вне $\bigcup\limits_{p>1} \Delta_{mp}$ по принципу максимума

$$|B^*_m(z)| > \inf_{\substack{z \in \partial\Delta_{mp} \\ p>1}} |B^*_{mp}(z)\, b^*_{mp}(z)| > \frac{\varepsilon_m^2}{4M(M+1)} > \frac{\varepsilon_m^2}{4M(M+1)} \inf_{q>1} |b^*_{mq}(z)|.$$

Логарифмируя полученное неравенство и учитывая, что

$$k_{mp}\, g_{D_m}(z, z_{mp}) = -\log \frac{4M(M+1)}{\varepsilon_m^2},$$

получим, что S_m удовлетворяет условию 7° с $C_m = \log \frac{4M(M+1)}{\varepsilon_m^2}$.

7° -> 4°. Пусть

$$A = \sup_{\substack{z \in \bigcup \gamma_m \\ n>m>1}} \sum_{n>m>1} \sum_{p>1} k_{mp}\, g_{D_m}(z, z_{mp}).$$

Из неравенств 7° следует, что S_m удовлетворяет условию Бляшке. Отсюда по теореме Гарнака, имеем, что $A < +\infty$.

Если z не принадлежит ни одной из областей K_m, то, согласно принципу максимума, учитывая, что $g_D(z, t) < g_{D_m}(z, t)$, имеем

$$\sum_{p>1} k_p\, g_D(z, z_p) = \sum_{n>m>1} \sum_{p>1} k_{mp}\, g_D(z, z_{mp}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n>m>1} \sum_{p>1} k_{mp}\, g_{D_m}(z, z_{mp}) < A \leqslant A + \sup_{p>1} k_p\, g_D(z, z_p).$$

Пусть теперь $z \in K_{m_0}$ при некотором m_0. Предположим, что $\sup\limits_{p>1} k_{m_0 p}\, g_{D_{m_0}}(z, z_{m_0 p})$ реализуется при некотором p_0. Из неравенства условия 7° следует, что

$$\sum_{\substack{p>1 \\ p \neq p_0}} k_{m_0 p}\, g_{D_{m_0}}(z, z_{m_0 p}) \leqslant C_{m_0}.$$

Тогда

$$\sum_{p>1} k_p\, g_D(z, z_p) = \sum_{n>m>1} \sum_{p>1} k_{mp}\, g_D(z, z_{mp}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{n>m>1\\ m\neq m_0}} \sum_{p>1} k_{mp}\, g_{D_m}(z, z_{mp}) + \sum_{\substack{p>1\\ p\neq p_0}} k_{m_0 p}\, g_{D_{m_0}}(z, z_{m_0 p}) + k_{m_0 p_0} g_D(z, z_{m_0 p_0}) \leqslant$$

$$\leqslant A + C_{m_0} + k_{m_0 p_0} g_D(z, z_{m_0 p_0}) < A + C_{m_0} + \sup_{p>1} k_p\, g_D(z, z_p).$$

Отсюда S удовлетворяет условию 4° при $C = A + \max\limits_{1<m<n} C_m$.

4°->7°. Доказательство вполне аналогично предыдущему пункту, если заметить, что есть двусторонняя оценка

$$1 \leqslant \frac{g_{D_m}(z, z_{mp})}{g_D(z, z_{mp})} \leqslant \lambda < +\infty,\ z \in K_m.$$

В случае, когда D_m есть круг, а K_m — круговое кольцо, оценка следует непосредственно из формул для функции Грина круга и кругового кольца (см., например, [13]). Случай произвольной области легко сводится к рассмотренному случаю с помощью конформного отображения.

7° -> 1°. Пусть S_m удовлетворяет условию 7°, а N — натуральное число. Расщепим каждый узел интерполяции z_{mp} кратности k_{mp} в k_{mp} простых узлов $z^{(N)}_{mp1}, \cdots, z^{(N)}_{mpk_{mp}}$ столь близких к z_{mp}, что $|z^{(N)}_{mpr} - z_{mp}| < \frac{1}{N}$ при $1 \leqslant r \leqslant k_{mp}$ и для $z \in D_m$

$$\sum_{p>1} \sum_{1<r<k_{mp}} g_{D_m}(z, z^{(N)}_{mpr}) \leqslant 2C_m + \sup_{p>1} \sum_{1<r<k_{mp}} g_{D_{mp}}(z, z^{(N)}_{mpr}).$$

Положим $\Omega_{mp} = \{z \in D_m\colon \sum\limits_{1<r<k_{mp}} g_{D_m}(z, z^{(N)}_{mpr}) > 2C_m\}$.

Из предыдущего неравенства следует, что $\Omega_{mp} \cap \Omega_{mq} = \varnothing$ при $p \neq q$, и следовательно, применима теорема Карлесона об интерполяции внутри линий уровня, доказанная в работе [4], то есть для любого семейства функций $\omega_p \in H^\infty(\Omega_{mp})$, $p > 1$, такого что $\delta = \sup\limits_{p>1} \|\omega_p\|_{H^\infty(\Omega_{mp})} < +\infty$ найдется функция $\omega \in H^\infty(D_m)$, удовлетворяющая условиям

$$\omega(z^{(N)}_{mpr}) = \omega_p(z^{(N)}_{mpr})\ (p > 1,\ 1 \leqslant r \leqslant k_{mp})$$

и $\|\omega\|_{H^\infty(\Omega_{mp})} \leqslant \delta L e^{MC_m}$, где L и M — числовые константы.

Заметим, что если S_m удовлетворяет этому условию 7° с константой C_m, то S_m удовлетворяет этому условию с любой константой, большей C_m. Увеличивая, если требуется, C_m, мы можем считать все области Ω_{mp} лежащими в K_m. Тогда все нули функций $B^*_l(z)$, определенных в доказательстве импликации 3° -> 7°, лежат вне K_m при всех $l \neq m$. Отсюда следует, что функция $\omega_{mp}(z) = (\prod\limits_{\substack{1<l<n\\ l\neq m}} B^*_l(z))^{-1}$ принадлежит $H^\infty(K_m)$ и тем более $\omega_{mp} \in H^\infty(\Omega_{mp})$ при всех p.

Применив упомянутую теорему Карлесона к определенным таким образом функциям ω_{mp}, получим функцию $h_{m,N} \in H^\infty(D_m)$ такую, что

$$h_{m,N}(z^{(N)}_{mpr}) = (\prod_{\substack{1<l<n\\ l\neq m}} B^*_l(z^{(N)}_{mpr}))^{-1},\ (p > 1,\ 1 \leqslant r \leqslant k_{mp}).$$

Тогда функция $G_{m,N} = h_{m,N} \prod_{l \neq m} B_l^{*}$ принимает в точках $z_{mpr}^{(N)}$ значение 1 при всех p и r, а в точках z_{lp} при $l \neq m$ обращается в нуль кратности k_{lp}.

Проделав такую процедуру при всех достаточно больших N, мы получим ограниченное по норме семейство функций $G_{m,N}$. Выберем из него сходящуюся внутри D_m подпоследовательность и обозначим ее предел посредством G_m. Легко проверить, что

$$G_m(z_{mp}) = 1,\ G_m^{(k)}(z_{mp}) = 0\ (p \geqslant 1,\ 1 \leqslant k < k_{mp}),$$

$$G_m^{(k)}(z_{lp}) = 0\ (l \neq m,\ p \geqslant 1,\ 0 \leqslant k < k_{lp})$$

ввиду того, что дополнительные узлы интерполяции $z_{mpr}^{(N)}$ стягиваются к z_{mp} при $N \to \infty$.

Теперь, задавшись ограниченным по норме семейством функций f_{mp} из $H^\infty(D)$, построим функцию $f \in H^\infty(D)$ такую, что

$$f^{(k)}(z_{mp}) = f_{mp}^{(k)}(z_{mp})\ (1 \leqslant m \leqslant n,\ p \geqslant 1,\ 0 \leqslant k < k_{mp}).$$

Для этого, прежде всего, заметим, что вместо ограниченного по норме семейства f_{mp} из $H^\infty(D)$ воспользовавшись той же теоремой Карлесона можно рассматривать ограниченное по норме семейство функций $\dot{f}_{mp}$ из $H^\infty(D_m)$ таких, что

$$f_{mp}^{(k)}(z_{mp}) = (\dot{f}_{mp})^{(k)}(z_{mp})\ (1 \leqslant m \leqslant n,\ p \geqslant 1,\ 0 \leqslant k < k_{mp}).$$

Для него, согласно интерполяционной теореме Н. К. Никольского, найдутся функции $F_m \in H^\infty(D_m)$, $1 \leqslant m \leqslant n$ такие, что

$$F_m^{(k)}(z_{mp}) = (\dot{f}_{mp})^{(k)}(z_{mp})\ (p \geqslant 1,\ 0 \leqslant k < k_{mp}).$$

Как легко проверить непосредственным дифференцированием, функция $f = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} F_m G_m$ является искомой.

Теорема доказана полностью.

На самом деле мы доказали даже чуть больше, чем требовалось в условии теоремы: функции f_{mp}, ростки которых мы интерполируем, можно было считать заданными не во всей области D, а лишь в некоторой окрестности Ω_{mp} точки z_{mp}.

3. Аналогичная теорема верна, если ростки одной и той же функции f_p интерполировать не в одной точке z_p кратности k_p, а на серии точек.

Пусть теперь S — последовательность серий σ_p, а каждая серия σ_p состоит из конечного или счетного множества точек $z \in \sigma_p$ кратности $k(z)$. Пусть S_m — последовательность серий $\sigma_{mp} = \sigma_p \cap K_m$, где K_m — область, ограниченная Γ_m и произвольной лежащей в D кривой γ_m, гомотопной Γ_m.

Теорема 2. *Следующие утверждения равносильны*:

1°. *Для произвольного ограниченного по норме набора функций* $\{f_p\}$ *из* $H^\infty(D)$ *существует функция* $f \in H^\infty(D)$ *такая, что*

$$f^{(k)}(z)=f_p^{(k)}(z),\ z\in\sigma_p\ (p\geqslant 1,\ 0\leqslant k<k(z)).$$

2°. *Для любой последовательности* $\{\lambda_p\}\in l^\infty$ *существует функция* $f\in H^\infty(\mathrm{D})$ *такая, что*

$$f(z)=\lambda_p,\ f^{(k)}(z)=0,\ z\in\sigma_p\ (p\geqslant 1,\ 1\leqslant k<k(z)).$$

3°. *Существует постоянная* $M<+\infty$ *и семейство функций* $\{f_p\}$ *из* $H^\infty(\mathrm{D})$ *такие, что* $\|f_p\|_\infty\leqslant M$,

$$f_p(z)=\begin{cases}1, & z\in\sigma_q\\ 0, & z\in\sigma_q\end{cases}(q\neq p);\ f_p^{(k)}(z)=0,\ z\in\sigma_p\ (p\geqslant 1,\ 1\leqslant k<k(z)).$$

4°. *Существует* $C<+\infty$ *такое, что при любом* $\zeta\in\mathrm{D}$

$$\sum_{p\geqslant 1}\sum_{z\in\sigma_p}k(z)\,g_{\mathrm{D}}(\zeta,z)\leqslant C+\sup_{p\geqslant 1}\sum_{z\in\sigma_p}k(z)\,g_{\mathrm{D}}(\zeta,z).$$

5°. *При любом* m *для произвольного ограниченного по норме набора функций* $\{f_p\}$ *из* $H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *существует* $f\in H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *такая, что*

$$f^{(k)}(z)=f_p^{(k)}(z),\ z\in\sigma_{mp}\ (p\geqslant 1,\ 0\leqslant k<k(z)).$$

6°. *При любом* m *для произвольной последовательности* $\{\lambda_p\}\in l^\infty$ *существует* $f\in H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *такая, что*

$$f(z)=\lambda_p,\ f^{(k)}(z)=0,\ z\in\sigma_p\ (p\geqslant 1,\ 1\leqslant k<k(z)).$$

7°. *При любом* m *существует* $C_m<+\infty$ *такая, что при всех* $\zeta\in\mathrm{D}_m$

$$\sum_{p\geqslant 1}\sum_{z\in\sigma_{mp}}k(z)\,g_{\mathrm{D}_m}(\zeta,z)\leqslant C_m+\sup_{p\geqslant 1}\sum_{z\in\sigma_{mp}}k(z)\,g_{\mathrm{D}_m}(\zeta,z).$$

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Наконец, стоит отметить, что используя тот же метод, можно перенести на случай конечносвязных областей интерполяционные теоремы с ограниченными кратностями, используя классическое условие Карлесона $\sup\limits_{p\geqslant 1}\sum\limits_{q\neq p}g_{\mathrm{D}}(z_p,z_q)<+\infty$.

Соответственно переносятся на случай конечносвязных областей и теоремы об интерполяции в классах H^p.

Ленинградский государственный
педагогический институт
им. А. И. Герцена

Поступила 24.VII.1981

Ս. Ե. ՌՈՒԿՇԻՆ. Անսահմանափակ պատիկություններով ինտերպոլյացիան կոմպլեքս հարթության վերջավոր կապանի տիրույթներում *(ամփոփում)*

Հոդվածում ստացված են արդյունքներ կոմպլեքս հարթության վերջավորկապանի տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիաների ծիլերի բազմապատիկ ինտերպոլյացիայի վերաբերյալ, ուսումնասիրված է ինտերպոլյացիոն բազմությունների կառուցվածքը։

S. E. ROOKSHIN. *Interpolation with unbounded multiplicities in finitely connected domains of complex plane* (summary)

Some results on the multiple interpolations of germs of analytic functions in finitely connected domains are stated. The structure of the interpolating sequence is analyzed in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Carleson*. An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 80, № 4, 1958, 921—930.
2. *H. Shapiro, A. Shields*. On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, № 3, 1961, 513—532.
3. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
4. *Г. М. Айрапетян*. Кратная интерполяция и базисность некоторых биорготогональных систем рациональных функций в классах H_p Харди, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 262—277.
5. *М. М. Джрбашян*. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., 43, № 6, 1978, 1322—1384.
6. *Г. М. Айрапетян*. О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., X, № 2, 1975, 133—152.
7. *В. И. Васюнин*. Базисы из рациональных функций и кратная интерполяция, Зап. научн. семин. ЛОМИ, 56, 1976, 174—176.
8. *Н. К. Никольский*. Базисы из инвариантных подпространств и операторная интерполяция, Труды МИАН, CXXX, 1978, 50—123.
9. *L. Carleson, P. Beurling*. Research on interpolation problems, Uppsala Univ., 1962.
10. *E. L. Stout*. Two theorems concerning functions holomorphic on multiply connected domains, Bull. Amer. Math. Soc., 69, № 4, 1963, 527—530.
11. *В. И. Васюнин*. Безусловно сходящиеся спектральные разложения и задачи интерполяции, Труды МИАН, CXXX, 1978, 5—49.
12. *У. Рудин*. Функциональный анализ, «Мир», М., 1975.
13. *Н. И. Ахиезер*. Элементы теории эллиптических функций, «Наука», М., 1970.
14. *L. Carleson*. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, Ann. Math., 76, № 3, 1962, 547—559.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 4, 1983 Математика

УДК 517.51

М. Ж. ГРИГОРЯН

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ФУРЬЕ—УОЛША СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Д. Е. Меньшовым доказаны следующие теоремы (см. [1], [2]).

Теорема 1. (Д. Е. Меньшов). *Пусть $f(x)$ — измеримая функция конечная почти всюду на $[0,2\pi]$. Какого бы ни было $\varepsilon>0$ можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E, $|E|^*>2\pi-\varepsilon$ и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.*

Теорема 2. (Д. Е. Меньшов). *Пусть $f(x)$ — любая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция и $Q\subset[0, 2\pi]$ — любое совершенное нигде не плотное множество.*

Тогда можно найти такую суммируемую функцию $g(x)$, что $g(x)=f(x)$ на Q и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду.

Р. И. Осипов [3] и А. М. Зубаки [4] доказали справедливость теорем 1 и 2 для системы Уолша.

Более сильный результат получил Прайс [5]:

Пусть заданы две последовательности натуральных чисел $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$; $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, которые удовлетворяют условиям

$$p_1<q_1<\cdots<p_k<q_k<\cdots;\ \lim_{k\to\infty}\frac{q_k}{p_k}=+\infty.$$

Тогда для любой измеримой функции $f(x)$ и любого $\varepsilon>0$ существует такая функция $g(x)$, что

a) $|\{x\in[0,1]: f(x)\neq g(x)\}|<\varepsilon$,

в) *ряд Фурье—Уолша функции $g(x)$ равномерно сходится на $[0, 1]$,*

c) $a_k(g)=0$, *при* $q_l<k\leqslant p_{l+1}$: $l=1, 2,\cdots$ (*где* $a_k(g)$ — *коэффициенты Фурье функции $g(x)$ по системе Уолша*).

Аналогичная теорема для систем типа (χ)* установлена Ф. Г. Арутюняном [6].

В наших дальнейших рассуждениях будем считать что возрастающая подпоследовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$; $\lim\limits_{k\to\infty}(N_{2k}-N_{2k-1})=+\infty$ фиксирована, и рассмотрим подсистему

---

* Через $|E|$ обозначена мера Лебега множества E.

** Определение систем (χ) см. в работе [7].

$$\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}=\{W_m(x);\ m=N_{2k-1},\cdots,N_{2k};\ k=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{k\to\infty}(N_{2k}-N_{2k-1})=\infty\}, \qquad (1)$$

(где $\{W_m(x)\}$ — система Уолша—Пэли).

Доказывается следующая

Теорема. *Пусть даны: подсистема* (1), *положительное число* $\varepsilon>0$. *Тогда существует измеримое множество* E_ε; $|E_\varepsilon|>1-\varepsilon$ *со свойством: для любой функции* $f(x)\in L$ *можно найти такую функцию* $g(x)\in L[0,1]$, *что* $g(x)=f(x)$ *на* E_ε *и ряд Фурье функции* $g(x)$ *по системе* (1) *сходится к ней почти всюду.*

Здесь же отметим, что а) подсистема (1) является системой представления функций класса $S_{[0,1]}$; ($S_{[0,1]}$ — класс почти везде конечных измеримых функций), сходящимися почти всюду рядами $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\ W_{n_k}(x)$ (см. [6]),

б) подсистема (1) является системой представления функций класса $L^p[0,1]$, $0<p<1$, сходящимися в той же метрике рядами $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\ W_{n_k}(x)$ (см. [8]).

§ 2. Доказательства основных лемм

Сначала приведем определение системы Уолша-Пэли $\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (см. [9])

$$W_0(x)\equiv 1;\ W_n(x)=\prod_{s=1}^{k}r_{m_s}(x),\ n=\sum_{s=1}^{k}2^{m_s};\ m_s>m_{s+1}, \qquad (2)$$

где $\{r_k(x)\}$ — система Радемахера

$$r_0(x)=\begin{cases}1; & x\in[0,\ 1/2]\\ -1; & x\in(1/2,\ 1]\end{cases}$$

$$r_0(x+1)=r_0(x);\ r_k(x)=r_0(2^k\cdot x)\ \ k=1,2,\cdots.$$

Введем некоторые обозначения. Разобьем сегмент [0,1] на 2^m равных частей и обозначим эти отрезки через $\Delta_m^{(i)}$, $i\leqslant 2^m$. Положим

$$S_n(x,f)=\sum_{k=1}^{n}a_k\ W_k(x),\ \text{где}\ a_k(f)=\int_0^1 f(x)\cdot W_k(x)\,dx \qquad (3)$$

и

$$\delta_k(x,f)=S_{2^{k+1}}(x,f)-S_{2^k}(x,f). \qquad (4)$$

Мы будем пользоваться следующими свойствами системы $\{W_k(x)\}$ (см. [10] и [11])

$$S_n(x,f)\cdot W_n(x)=\delta_{m_1}(x,\ W_n\cdot f)+\cdots\delta_{m_k}(x;\ W_m f), \qquad (5)$$

$$\text{если}\ n=2^{m_1}+\cdots+2^{m_k},\ m_1>m_2>\cdots),$$

$$S_{2^k}(x, f) = \frac{1}{|\Delta_k^{(i)}|} \int\limits_{\Delta_k^{(i)}} f(t)\,dt, \text{ при } x \in \Delta_k^{(i)};\ i \leqslant 2^k. \tag{6}$$

Учитывая соотношения (4)—(6) для $\delta > 0$, $f(x) \equiv 0$, $x \overline{\in} \Delta_k^{(i)}$, получим

$$|S_n(x, f)| < \frac{2}{\delta} \int\limits_{\Delta_{k_1}^{(i)}} |f(x)|\,dx;\ x \overline{\in} \left[\frac{i-1}{2^{k_1}} - \delta; \frac{i}{2^{k_1}} + \delta\right] \tag{7}$$

$$(n = 1, 2, \cdots;\ k = 1, 2, \cdots,\ 1 \leqslant i \leqslant 2^k);\ f(x) \in L.$$

Лемма 1. *Пусть даны: интервал* $\Delta = [\alpha, \beta] \equiv \Delta_m^{(i)}$, *действительные числа* $\gamma \neq 0$, $\delta > 0$, *натуральные числа* $l > 1$, $\{p_k\}_{k=1}^{\nu}$, $p_1 > 2^m$, $p_k > 3\,p_{k-1}$, $k = 1, 2, \cdots, \nu$. *Тогда существуют измеримое множество* G *и полином* $\sum\limits_{k=1}^{m_0} a_k W_k(x)$ *по системе Уолша такие, что*

1. $$\sum_{k=1}^{m_0} a_k W_k(x) \equiv 2^{\nu} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_\nu}(x),\ x \in [0,1],$$

2. $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k W_k(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} 2^l \cdot |\gamma|, \text{ при } x \in G \\ 2 \cdot \delta^{-1} \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|, \text{ при } x \overline{\in} [\alpha - \delta, \beta + \delta] \end{cases},\ n = 1, 2, \cdots,$$

3. $$\Delta'_\nu \subset G \subseteq [0,1];\ |G| > |\Delta|\,(1 - 2^{-l}),\ G \equiv \Delta \text{ при } \nu \leqslant l,$$

если $\nu > l$, *то множество* G *зависит только от чисел* $p_1 < \cdots \cdots < p_l$ *и не зависит от* $p_{l+1}, \cdots, p_\nu$.

Доказательство. Положим

$$g(x) = 2^{\nu} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_\nu}(x), \tag{8}$$

$$a_k = \int\limits_0^1 g(x) W_k(x)\,dx,\ m_k = [\log_2 p_k],\ k = 1, \cdots, \nu. \tag{9}$$

Ясно, что начиная с некоторого номера m_0, $a_k \equiv 0$, $k > m_0$, следовательно

$$S_{m_0}(x, g) = \sum_{k=1}^{m_0} a_k W_k(x) \equiv 2^{\nu} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_\nu}(x). \tag{10}$$

Так как $|\Delta'_\nu| = 2^{-\nu} \cdot |\Delta|$, из (8) будем иметь

$$\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx = \gamma \cdot |\Delta| = \gamma \cdot 2^{-m}.$$

Отсюда и из (7) вытекает

---

* $\Delta'_\nu = \Delta_1^- \cap \cdots \cap \Delta_\nu^-$, где $\Delta_k^- = \{x \in \Delta,\ W_{p_k}(x) = -1\}$ и $\chi_{\Delta'_\nu}(x)$ — характеристическая функция множества Δ'_ν.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k W_k(x) \right| < \frac{2|\gamma||\Delta|}{\delta}, \quad x \in [\alpha - \delta, \beta + \delta]; \; n = 1, 2, \cdots.$$

Пусть $\Delta'_\nu = \sum_{s=1}^{2^q} \Delta_{m_\nu}^{(l_s)}$ и $\{\Delta_N^{(j_s)}\}_{s=1}^{2^q}$ — интервалы, которые удовлетворяют условиям

$$\Delta_N^{(j_s)} \supset \Delta_{m_\nu}^{(l_s)}, \; s = 1, 2, \cdots, 2^q, \tag{11}$$

где

$$N = q + m + l. \tag{12}$$

Положим

$$G = \Delta \setminus \sum_{s=1}^{2^q} \Delta_N^{(j_s)}. \tag{13}$$

Ясно, что

$$\Delta'_\nu \subset G \subset \Delta, \; |G| > |\Delta| \cdot [1 - 2^q \cdot 2^{-q-l}] = 2^{-m} [1 - 2^{-l}]. \tag{14}$$

Докажем, что на множестве G частичные суммы $S_n(x, g)$ удовлетворяют условию 2. леммы. Для этого нам нужно оценить частичные суммы вида $S_{2^k}(x, W_n g)$.

Из определения функции $g(x)$ следует, что

если $g(x) \not\equiv 0$ на $\Delta_{m_s}^{(l)}$, то $\int\limits_{\Delta_{m_s}^{(l)}} g(t)\,dt = \int\limits_{\Delta_{m_s-1}^{(j)}} g(t)\,dt$, где $\Delta_{m_s-1}^{(j)} \supset \Delta_{m_s}^{(l)}$.
$$\tag{15}$$

Отсюда и из (8) вытекает, что при $m_{s-1} \leqslant k < m_s$ выполнено одно из следующих условий:

$$\frac{1}{|\Delta_k^{(l)}|} \int\limits_{\Delta_k^{(l)}} g(t)\,dt = 2^{s-1} \cdot \gamma \tag{16}$$

или

$$\int\limits_{\Delta_k^{(l)}} g(t)\,dt = 0,$$

следовательно, ввиду того, что

$$W_n(x + j \cdot 2^{-k}) = W_n(x),$$

$$\text{при } x \in \Delta_k^{(l)}, \; j = 1, 2, \cdots \tag{17}$$

или

$$W_n(x + j \cdot 2^{-k}) = -W_n(x),$$

имеем

$$\left| \frac{1}{\Delta_k^{(l)}} \right| \left| \int\limits_{\Delta_k^{(l)}} g(t) \cdot W_n(t)\,dt \right| = 2^{s-1} \cdot |\gamma| \tag{18}$$

или

$$\int\limits_{\Delta_k^{(l)}} g(t)\, W_n(t)\,dt = 0,$$

и если удовлетворяется второе равенство при $g(x)\not\equiv 0$ на $\Delta_k^{(i)}$, то для всех $k' \leqslant k$ и $i \leqslant 2^{k'}$

$$\int\limits_{\Delta_{k'}^{(i)}} g(t)\, W_n(t)\, dt = 0. \tag{19}$$

Пусть i_0 и k_0 — наименьшие из тех чисел i, k, для которых

$$\left|\int\limits_{\Delta_k^{(i)}} g(t)\, W_n(t)\, dt\right| > 0.$$

Из условий (6), (8), (17) и из выбора i_0 и k_0 имеем

a) $\left|\int\limits_{\Delta_{k_0}^{(i)}} W_n(x)\, g(x)\, dx\right| = \left|\int\limits_{\Delta_{k_0}^{(i_0)}} W_n(x)\, g(x)\, dx\right| > 0$, если $g(x)\not\equiv 0$ на $\Delta_{k_0}^{(i)}$,

в) $S_{2^{k_2}}(x, W_n g) = S_{2^{k_1}}(x, W_n g)$, $x \in \Delta_{k_1}^{(i)}$, $k_2 > k_1 > k_0$,

$$(m_s > k_2 > k_1 \geqslant m_{s-1})$$

c) $S_{2^{k_1}}(x, W_n g) \equiv 0$, при $x \in [0, 1]$, для $k < k_0$.

Учитывая соотношения (5), (18), в) c), при $n = 2^{s_1} + \cdots + 2^{s_p}$ получим

$$|S_n(x, g)| = \left|\sum_{j=1}^{p} \delta_{s_j}(x, W_n g)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s_j < k_0 - 1} |S_{2^{s_j+1}}(x, W_n g) - S_{2^{s_j}}(x, W_n g)| + |S_{2^{k_0}}(x, W_n g) -$$

$$- S_{2^{k_0-1}}(x, W_n g)| +$$

$$+ \sum_{s_j \in \{m_k - 1\}_{k=1}^{\nu}} |S_{2^{s_j+1}}(x, W_n g) - S_{2^{s_j}}(x, W_n g)| + \sum_{k=1}^{\nu} |\delta_{m_k - 1}(x, W_n g)| =$$

$$= 0 + 0 + |\delta_{k_0}(x, W_n g)| + \sum_{s_j < N} |\delta_{s_j}(x, W_n g)| + \sum_{s_j > N} |\delta_{s_j}(x, W_n g)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{l} 2^{j-1} |\gamma| + \sum_{s_j > N} |\delta_{s_j}(x, W_n g)|. \tag{20}$$

Ввиду того, что при $k \geqslant N$ интервалы $\Delta_k^{(i)}$ либо лежат на G либо на $\Delta \setminus G$ (см. (12), (13)), то из условий (4), (6), (8) будем иметь

$$\delta_k(x, W_n g) = 0 \text{ для } x \in G,$$

следовательно, учитывая (20), получим

$$|S_n(x, g)| < 2^l |\gamma|, \text{ при } x \in G,\ n = 1, 2, \cdots.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть даны: интервал* $\Delta = [\alpha, \beta] \equiv \Delta_m^{(i)}$, *числа* $\gamma \neq 0$, k_0, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $l > 2$. *Тогда существуют множества* G *и* E *и полином по системе* (1) *вида*

$$\sum_{k=k_0}^{q_0} c_k W_{n_k}(x),$$

которые удовлетворяют условиям

1) $$\sum_{k=1}^{q} c_k W_{n_k}(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{при } x \in E \\ 0, & \text{вне } [\alpha, \beta], \end{cases}$$

2) $$\int_{\alpha}^{\beta} \left| \sum_{k=k_0}^{q_0} c_k W_{n_k}(x) \right| dx \leqslant |\gamma| \cdot |\Delta|,$$

3) $$\left| \sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x) \right| \leqslant \begin{cases} 2^{l+1} \cdot |\gamma|, & x \in G \\ \dfrac{2|\gamma| |\Delta|}{\delta}, & x \overline{\in} [\alpha - \delta, \beta + \delta] \end{cases}, \quad k_0 \leqslant s \leqslant q_0,$$

4) $$G \subset E \subset [\alpha, \beta], \ |G| > |\Delta| (1 - 2^{-l}), \ |E| > (1 - \varepsilon) |\Delta|.$$

Доказательство. Возьмем натуральное число ν_0 настолько большим, чтобы

$$2^{-\nu_0} < \min \{\varepsilon, 2^{-l}\}. \tag{21}$$

Коэффициенты Фурье—Уолша функции $\gamma \cdot \chi_\Delta(x)$ обозначим через a_k. Очевидно, что существует натуральное число m_0 такое, что $a_k = 0$ при $k > m_0$, следовательно

$$S_n(x, \gamma \chi_\Delta(x)) = \sum_{k=1}^{n} a_k W_k(x) \equiv \gamma \cdot \chi_\Delta(x), \ n > m_0. \tag{22}$$

Легко видеть, что (см. (4)—(6))

$$S_n(x, \gamma \cdot \chi_\Delta(x)) < 4 |\gamma| \text{ для всех } n, \text{ и } x \in [0,1]. \tag{23}$$

Из определения системы Уолша и из того, что $\lim\limits_{k \to \infty} (N_{2k} - N_{2k-1}) = +\infty$ следует существование натуральных чисел m_1, k_1, для которых имеют место соотношения

$$W_{m_1}(x) \cdot W_k(x) = W_{m_1+k}(x), \ n_{k_0} < N_{2k_1-1} < m_1 + k \leqslant N_{2k_1}, \ k \leqslant m_0. \tag{24}$$

Определим действительные числа $\{b_j\}_{j=N_{2k_1-1}}^{N_{2k_1}}$ следующим образом;

$$b_j = \begin{cases} a_k, & \text{если } j = m_1 + k, \ k = 1, \cdots, m_0 \\ 0, & \text{при } j \overline{\in} [m_1, m_1 + m_0]. \end{cases} \tag{25}$$

Из (22), (23) имеем

$$W_{m_1}(x) \cdot \sum_{k=1}^{m_0} a_k W_k(x) \equiv \sum_{j=N_{2k_1-1}}^{N_{2k_1}} b_j W_j(x) = \gamma \cdot \chi_{\Delta_l^+}(x) - \gamma \chi_{\Delta_l^-}(x), \tag{26}$$

$$\left|\sum_{j=N_{2k_i-1}}^{s} b_j W_j(x)\right| < 4|\gamma|, \quad N_{2k_i-1} < s \leqslant N_{2k_i} \tag{27}$$

где

$$\Delta_1^+ = \{x \in \Delta, \ W_{m_1}(x) = +1\}; \ \Delta_1^- = \{x; \ W_{m_1}(x) = -1\}.$$

Предположим, что определены числа $m_1 < \cdots < m_\nu$; $\nu < \nu_0$, полиномы

$$\sum_{j=N_{2k_i}-1}^{N_{2k_i}} b_j W_j(x), \ i = 1, \cdots, \nu$$

и множества G_j, Δ_j^+, Δ_j^-, $j \leqslant \nu$, для которых справедливы

$$\sum_{j=N_{2k_i}-1}^{N_{2k_i}} b_j W_j(x) = 2^{i-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_i'}(x) \cdot W_{m_i}(x), \ i < \nu, \tag{28}$$

$$\left|\sum_{j=N_{2k_i}-1}^{s} b_j \cdot W_j(x)\right| \leqslant \begin{cases} 2^{i-1} \cdot |\gamma|, \ x \in G_i \\ \dfrac{2|\gamma|\,|\Delta|}{\delta}, x \overline{\in} [\alpha-\delta, \beta+\delta]) \end{cases} N_{2k_i-1} < s \leqslant N_{2k_i}, \tag{29}$$

$$G_i \equiv [0,1], \text{ при } i \leqslant l, \ G_i \equiv G_l, \text{ при } i > l, \tag{30}$$

где

$$\Delta_i' = \Delta_1^- \cap \cdots \cap \Delta_i^-, \ |\Delta_i'| = 2^{-i}|\Delta|. \tag{31}$$

Согласно лемме 1 определяются измеримое множество G_ν и полином $\sum_{k=1}^{s_\nu} a_k^{(\nu)} W_k(x)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{s_\nu} a_k^{(\nu)} W_k(x) = 2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_\nu}(x), \ x \in [0,1], \tag{32}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{s} a_k^{(\nu)} \cdot W_k(x)\right| \leqslant \begin{cases} 2^l \cdot |\gamma|, \ x \in G_\nu \\ \dfrac{2|\gamma|\,|\Delta|}{\delta}, \ x \overline{\in} [\alpha-\delta, \beta+\delta], \end{cases} 1 < s \leqslant S_\nu, \tag{33}$$

$$G_\nu \equiv G_l, \text{ при } \nu > l, \ |G_\nu| > |\Delta|(1 - 2^{-l}). \tag{34}$$

Существуют натуральные числа $m_\nu > 3m_{\nu-1}$, $k_\nu > k_{\nu-1}$ и действительные числа $\{b_j\}_{j=N_{2k_\nu}-1}^{N_{2k_\nu}}$ такие, что

$$W_{m_\nu}(x) \cdot \sum_{k=1}^{s_\nu} a_k^{(\nu)} W_k(x) \equiv \sum_{j=N_{2k_\nu}-1}^{N_{2k_\nu}} b_j W_j(x); \ b_j = \begin{cases} a_k^{(\nu)}; \ j = m_\nu + k \\ 0 \ j \overline{\in} [m_\nu, m_\nu + s_\nu]. \end{cases}$$

Отсюда и из условий (32), (33) вытекает

$$\sum_{j=N_{2k_\nu}-1}^{N_{2k_\nu}} b_j W_j(x) = 2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot W_{m_\nu}(x) \cdot \chi_{\Delta'_{\nu-1}}(x), \tag{35}$$

$$\left|\sum_{j=N_{2k_\nu}-1}^{s} b_j W_j(x)\right| < \begin{cases} 2^l\cdot|\gamma|; \text{ при } x\in G \\ \dfrac{2|\gamma||\Delta|}{\delta}; \ x\bar{\in}[\alpha-\delta,\ \beta+\delta] \end{cases},\quad N_{2k_\nu-1} < s \leqslant N_{2k_\nu}. \tag{36}$$

Положим

$$\Delta_\nu^- = \{x\in\Delta,\ W_{m_\nu} = -1\},\ \Delta_\nu^+ = \{x\in\Delta,\ W_{m_\nu}(x) = +1\},\ \Delta_\nu' = \Delta_{\nu-1}'\cap\Delta_\nu^-. \tag{37}$$

Из условия $m_\nu > 3m_{\nu-1}$ вытекает, что на интервалах постоянства функции $W_{m_{\nu-1}}(x)$ множества Δ_ν^+, Δ_ν^- имеют одинаковые порции, следовательно

$$\Delta_\nu' = 2^{-\nu}|\Delta|. \tag{38}$$

Таким образом, будут определены полиномы

$$\sum_{j=N_{2k_\nu}-1}^{N_{2k_\nu}} b_j W_j(x),\ \nu=1,\ 2,\cdots,\nu_0,$$

числа $m_1,\cdots,m_{\nu_0}$, $m_\nu > 3m_{\nu-1}$, множества $\{G_\nu\}_{\nu=1}^{\nu_0}$ и $\{\Delta_\nu'\}_{\nu=1}^{\nu_0}$, такие, что для каждого ν, $1\leqslant\nu<\nu_0$ удовлетворяются условия (34)—(38).

Очевидно, что для каждого ν имеет место равенство

$$\gamma\cdot\chi_\Delta(x) = \sum_{l=1}^{\nu} 2^{l-1}\gamma\cdot W_{m_l}(x)\,\chi_{\Delta_{l-1}'}(x) + 2^\nu\cdot\gamma\cdot\chi_{\Delta_\nu'}(x). \tag{39}$$

Покажем, что множества $E = \Delta\setminus\Delta_{\nu_0}'$; $G = G_l$ и полином

$$\sum_{k=k_0}^{q_0} c_k W_{n_k}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0}\ \sum_{j=N_{2k_\nu}-1}^{N_{2k_\nu}} b_j W_j(x)\ (q_0 = N_{2k_{\nu_0}}) \tag{40}$$

удовлетворяют условиям леммы 2.

В самом деле, из условий (21), (32), (39) и (40) получим

$$\sum_{k=1}^{q_0} c_k W_{n_k}(x) = \begin{cases} \gamma, \text{ при } x\in E \\ 0, \text{ вне } \Delta. \end{cases}$$

Из (35), (39) и (40) следует

$$\sum_{k=1}^{q_0} c_k W_{n_k}(x) = \gamma\cdot\chi_\Delta(x) - 2^{\nu_0}\gamma\cdot\chi_{\Delta_{\nu_0}'}(x).$$

Отсюда, поскольку $|\Delta_{\nu_0}'| = 2^{-\nu_0}|\Delta|$ (см. (38)) вытекает

$$\int_\alpha^\beta\left|\sum_{k=1}^{q_0} c_k W_{n_k}(x)\right|dx \leqslant \int_\alpha^\beta |\gamma\cdot\chi_\Delta(x)|dx + \int_\alpha^\beta |2^{\nu_0}\cdot\gamma\cdot\chi_{\Delta_{\nu_0}'}(x)|\,dx \leqslant 2|\gamma||\Delta|,$$

т. е. условия 1) и 2) леммы 2 выполнены.

Теперь проверим выполнение условия 3) леммы 2. Пусть $1\leqslant s\leqslant$ $\leqslant q_0$, тогда для некоторых ν', s', $1\leqslant\nu'\leqslant\nu_0$, $N_{2k_{\nu'}-1}\leqslant s'\leqslant N_{2k_{\nu'}}$ имеем

$$\sum_{k=k_0}^{s'} c_k W_{n_k}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu'-1} \sum_{j=N_{2k_\nu}-1}^{N_{2k_\nu}} b_j W_j(x) + \sum_{j=N_{2k_{\nu'}}-1}^{s'} b_j W_j(x). \quad (41)$$

Учитывая условия (35), (36), (39) и (41) при $x \in G$, получим

$$\left| \sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x) \right| = \left| \gamma \cdot \chi_\Delta(x) - 2^{\nu'-1} \gamma \cdot \chi_{\Delta'_{\nu'-1}}(x) + \sum_{j=N_{2k_{\nu'}}-1}^{s'} b_j W_j(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\gamma| + 2^{\nu'-1} |\gamma| \cdot \chi_{\Delta'_{\nu'-1}}(x) + 2^l |\gamma|.$$

Отсюда, ввиду того, что $\Delta'_\nu \subset \Delta \setminus G$, если $\nu > l$, при $x \in G$ будем иметь

$$\left| \sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x) \right| < 2^{l+1} \cdot |\gamma|.$$

Из (35), (36), (41) вытекает

$$\left| \sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x) \right| < 2^{\delta-1} |\gamma| \cdot |\Delta|.$$

В силу (21), (34), (38) имеем

$|G| > |\Delta|(1-2^{-l})$, $|E| > |\Delta|(1-\varepsilon)$ (так как $G \equiv G_l$, $E = \Delta \setminus \Delta'_{\nu_0}$).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть даны: ступенчатая функция* $f(x) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \cdot \chi_{\Delta_k}(x)$ $\left(\textit{где } \Delta_k \textit{ имеют вид } \Delta_m^{(l)} \textit{ и } \int_0^1 |f| < 4^{-1}\right)$, *числа* $k_0 > 2$, $\varepsilon > 0$. *Тогда существуют множества* G, E *и полином по системе* (1) *вида* $\sum_{l=k_0}^{q} c_l W_{n_l}(x)$, *которые удовлетворяют условиям*

1. $$\sum_{k=k_0}^{q} c_k W_{n_k}(x) = f(x), \text{ при } x \in E,$$

2. $$\int_0^1 \left| \sum_{k=k_0}^{q} c_k W_{n_k}(x) \right| dx \leqslant 2 \int_0^1 |f(x)|\, dx,$$

3. $$\left| \sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x) \right| < \left[\int_0^1 |f(x)|\, dx \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot |f(x)| + \sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx},$$

$$(x \in G; \quad k_0 < s \leqslant q),$$

4. $$|G| > 1 - \sqrt{\int_0^1 |f(x)|\, dx}, \quad |E| > 1 - \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть

$$\Delta_k=[b_k;\ b_{k+1}],\ \delta_k=\frac{1}{2}\Big[\int_0^1|f(x)|\,dx\Big]^{-1/2}\int_{\Delta_k}|f(x)|\,dx,\ k=1,\cdots,p, \tag{42}$$

$$l=2-\log_2\sqrt{\int_0^1|f(x)|\,dx}. \tag{43}$$

Положим

$$F=[0,1]\setminus\sum_{k=2}^{p}[b_k-\delta_k;\ b_k+\delta_{k+1}]. \tag{44}$$

Последовательным применением леммы 2 можно определить множества $G_k\subset E_k\subset\Delta_k$ и полиномы

$$\sum_{l=s_j}^{m_j}a_l W_{n_l}(x),\ 1\leqslant j\leqslant p,\ s_1=k_0,\ s_j<m_j, \tag{45}$$

$$s_{j+1}=1+m_j,$$

которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{l=s_k}^{m_k}a_l W_{n_l}(x)=\begin{cases}\gamma_k, & \text{при } x\in E_k\\ 0, & \text{вне } \Delta_k\end{cases},\ k=1,\cdots,\ p, \tag{46}$$

$$\int_0^1\Big|\sum_{l=s_k}^{m_k}a_l W_{n_l}(x)\Big|\,dx\leqslant 2\,|\gamma_k|\,|\Delta_k|, \tag{47}$$

$$\Big|\sum_{l=s_k}^{s}a_l W_{n_l}(x)\Big|\leqslant\begin{cases}2^l\cdot|\gamma_k|, & \text{при } x\in G_k\\ 2\cdot\delta_k^{-1}\cdot|\gamma_k|\cdot|\Delta_k|, & x\bar{\in}[b_k-\delta_k,\ b_{k+1}+\delta_k],\end{cases} \tag{48}$$

$$(s_k\leqslant s\leqslant m_k)$$

$$|G_k|>|\Delta_k|(1-2^{-l}),\ |E_k|>(1-\varepsilon)|\Delta_k|. \tag{49}$$

Положим

$$\sum_{k=k_0}^{q}c_k W_{n_k}(x)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=s_j}^{m_j}a_l W_{n_l}(x),\ q=m_p, \tag{50}$$

$$G'=\sum_{k=1}^{p}G_k;\ E=\sum_{k=1}^{p}E_k,\ F\cap G'=G. \tag{51}$$

Легко видеть, что полином (50) удовлетворяет условиям 1. и 2. леммы 3 (см. (46), (47) (51)). Из (44), (42), (49) и (51) следует

$$|G|>1-\sqrt{\int_0^1|f(x)|\,dx},\ |E|>1-\varepsilon. \tag{52}$$

Теперь проверим выполнение условия 3 леммы 3. Если $k_0<s\leqslant q$, то для некоторого j_0, $1<j_0\leqslant p$ имеем

$$\sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x) = \sum_{j=1}^{j_0-1} \sum_{l=s_j}^{m_j} a_l W_{n_l}(x) + \sum_{l=s_{j_0}}^{s} a_l W_{n_l}(x). \tag{53}$$

Ввиду того, что $G \subset E$ из условий (48), (46), (51), (53) при $x \in G$ получим

$$\left|\sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x)\right| = \left|\sum_{j=1}^{j_0-1} \gamma_j \cdot \chi_{\Delta_j}(x) + \sum_{l=s_{j_0}}^{s} a_l W_{n_l}(x)\right| <$$

$$< \sum_{j=1}^{j_0-1} |\gamma_j| \chi_{\Delta_j}(x) + 2^l \cdot |\gamma_{j_0}| \cdot \chi_{\Delta_{j_0}}(x) + 2\delta_{j_0}^{-1} \cdot |\gamma_{j_0}| \cdot |\Delta_{j_0}| \cdot \chi_{\Delta_{j_0}^c}(x)^*. \tag{54}$$

Учитывая соотношения (42), (43), (54), будем иметь

$$\left|\sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x)\right| \leqslant \left[\int_0^1 |f(x)|\, dx\right]^{-1/2} \cdot |f(x)| + \sqrt{\int_0^1 |f(x)|\, dx}, \quad x \in G.$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы

Рассмотрим множество $[\gamma, \Delta]$, зависящее от друх параметров, где γ — пробегает множество всех рациональных чисел, а Δ — пробегает множество всех интервалов типа $\Delta_k^{(i)}$. Перенумеровав множество всех ступенчатых функций

$$f(x) = \sum_{j=1}^{v} \gamma_j \chi_{\Delta_j}(x), \text{ где } (\gamma_j, \Delta_j) \in [\gamma, \Delta],$$

мы можем представить его в виде последовательности

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x), \cdots. \tag{55}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число и $\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — подсистема Уолша вида (1).

Нетрудно видеть, что путем последовательного применения леммы 3 можно определить последовательности множеств $\{G_s\}_{s=1}^{\infty} \cdot \{E_s\}_{s=1}^{\infty}$ и полиномов

$$\sum_{k=m_s+1}^{m_{s+1}} c_k W_{n_k}(x), \quad s = 1, 2, \cdots,$$

которые обладают следующими свойствами

$$\sum_{k=m_s+1}^{m_{s+1}} c_k W_{n_k}(x) = f_s(x), \quad \text{при} \quad x \in E_s, \ s = 1, 2, \cdots, \tag{56}$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=m_s+1}^{m_{s+1}} c_k W_{n_k}(x)\right| dx < 2 \int_0^1 |f_s(x)|\, dx, \tag{57}$$

---

* $\Delta_{j_0}^c = [0, 1] \setminus [b_{j_0} - \delta_{j_0}; b_{j_0} + \delta_{j_0}]$.

$$\left|\sum_{k=m_s+1}^{m} c_k W_{n_k}(x)\right| < 4\left[\int_0^1 |f_s(x)|dx\right]^{-1/2} \cdot |f_s(x)| + \left[\int_0^1 |f_s(x)|\, dx\right]^{1/2} \quad (58)$$

$$(\text{при } x \in G_s,\ m_s < m \leqslant m_{s+1})$$

$$|G_s| > 1 - \left[\int_0^1 |f_s(x)|\, dx\right]^{1/2},\ |E_s| > 1 - \varepsilon\cdot 2^{-s},\ G_s \subset E_s. \quad (59)$$

Положим

$$E = \bigcap_{s=1}^{\infty} E_s. \quad (60)$$

Очевидно, что

$$|E| > 1 - \varepsilon. \quad (61)$$

Покажем, что множество E удовлетворяет требованиям теоремы. В самом деле, пусть $f(x) \in L\,[0,1]$. Легко видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ из последовательности (55) такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} f_{k_s}(x) \overset{\text{п. в.}}{=} f(x), \quad (62)$$

$$\int_0^1 |f_{k_s}(x)|\, dx < 2^{-4s},\ s \geqslant 2, \cdots. \quad (63)$$

Отсюда и из условий (56), (57) вытекает, что функция

$$F(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\sum_{k=m_{k_s}+1}^{m_{k_s}+1} c_l W_{n_l}(x)\right] = \sum_{l=1}^{\infty} b_l W_{n_l}(x) \quad (64)$$

суммируема и равна $f(x)$ на E после изменения на множестве нулевой меры. Покажем, что ряд Фурье функции $F(x)$ по системе (1) сходится к ней почти всюду. Обозначая через

$$\Omega_s = \{x \in [0,1],\ |f_{k_s}(x)| < 2^{-3s}\},\ s=2,\ 3,\cdots, \quad (65)$$

будем иметь (см. 63))

$$2^{-4s} \geqslant \int_{C\Omega_s} |f_{k_s}(x)|\, dx > 2^{-3s}\,|C\Omega_s|,$$

следовательно

$$|\Omega_s| > 1 - 2^{-s}. \quad (66)$$

Положим

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{s=n} [\Omega_s \cap G_{k_s}]. \quad (67)$$

Отсюда и из того, что $|G_{k_s} \cap \Omega_s| > 1 - 2^{-s}$ (см. (59), (63), (66)) вытекает, что $|\Omega| = 1$.

Пусть $x \in \Omega$, тогда существует натуральное число s_0 такое, что $x \in \Omega_s \cap G_{k_s}$ при $s \geqslant s_0$.

Учитывая соотношения (58), (63), (66), будем иметь

$$\left| \sum_{i=m_{k_s}+1}^{m} c_i W_{n_i}(x) \right| < 4 \left[\int_0^1 |f_{k_s}(x)|\, dx \right]^{-1/2} \cdot |f_{k_s}(x)| +$$

$$+ \left[\int_0^1 |f_{k_s}(x)|\, dx \right]^{1/2} \leqslant 4\,(2^{-4s})^{-1/2} \cdot 2^{-3s} + 2^{-2s} < 2^{-s+1} \to 0.$$

Отсюда и из условия (64) следует, что

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} c_i W_{m_i}(x) = F(x) \text{ п. в.}$$

Очевидно, что ряд (64) есть ряд Фурье функции $F(x)$ по системе $\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема доказана.

Замечание. Можно установить существование функции $f_0(x) \in L[0,1]$, ряд Фурье которой по системе (1) расходится почти всюду.

Отметим, что существование функции $g_0(x) \in L$, ряд Фурье которой по системе Уолша $\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится почти всюду, доказал Е. М. Стейн [11].

Ереванский государственный
университет

Поступила 13.IV.1982

Մ. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ Ինտեգրելի ֆունկցիաների Ֆուրյե-Ուոլշի շարքերի զուգամիտության մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը. $\forall \{N_k\}_{k=1}^{\infty}$; $\lim_{k\to\infty} (N_{2k} - N_{2k-1}) = +\infty$ *հաջորդականության և* ε *դրական թվի համար* $\exists\, G_\varepsilon \subset [0, 1]$ *չափելի բազմություն այնպիսին, որ*

1) $|G_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$

2) $\forall f(x) \in L\,[0, 1]$ $\exists g(x) \in L$, $g(x) = f(x)$, $x \in G_\varepsilon$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը ըստ*

$$\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{W_m(x) : m = N_{2k-1}, \cdots, N_{2k} ; k = 1, 2, \cdots\}$$

համակարգի զուգամիտում իրեն համարյա ամենուրեք։

M. G. GRIGORIAN *On a. e. convergence of Fourier—Walsh series of integrable functions* (summary)

Let $\varepsilon > 0$ and $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a subsequence of natural numbers such that

$$\lim_{k \to \infty} (N_{2k} - N_{2k-1}) = +\infty.$$

It is proved that there exists a measurable set $E_\varepsilon \subset [0, 1]$ with the property: for every $f(x) \in L$ there is $g(x) \in L\,[0, 1]$ such that $g(x) = f(x)$, $x \in E_\varepsilon$ and the Fourier series of $g(x)$ with respect to Walsh system $\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{W_m(x);\, m = N_{2k-1} \cdots N_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ converges to $g(x)$ a. e.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Е. Меньшов.* Sur la representation des fonctions mesurabls par des series trigonometrivues, M. C., 9 (51), 1941.
2. *Д. Е. Меньшов.* О рядах Фурье от суммируемых функций, ТММО, 1, 1952.
3. *Р. И. Осипов.* О сходимости рядов по системе Уолша, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 1, № 4, 1966.
4. *А. М. Зубаки.* О теоремах «исправления» Меньшова для одного класса мультипликативных ортонормированных систем функций, Изв. высш. учеб. зав., Матем., 1969, № 12, 1969.
5. *J. J. Price.* Walsch series and adjustment of fonctions on small sets, III. J. Math., 13, № 1, 1969.
6. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление функций кратными рядами, ДАН Арм. ССР, 64, № 2, 1977.
7. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами, Мат. сб., 90 (132), № 4, 1973.
8. *М. Ж. Григорян.* О сходимости ортогональных рядов в метриках L^p, $p > 1$. Кандидатская диссертация, Институт математики АН Арм. ССР, 1980.
9. *R. Peley.* A remarkable systems of ortogonal functions, Proc. London Math. Soc., 34, 1932.
10. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.
11. *E. M. Stein.* On limits of sequences of operators, Ann. Math., 74, № 1, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 4, 1983 Математика

УДК 517.986

Д. И. ГУРЕВИЧ

ОПЕРАТОРЫ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА НА ГРУППАХ ЛИ

Понятие операторов обобщенного сдвига (сокращенно о. о. с.) явилось результатом аксиоматизации свойств оператора обычного сдвига на группе. Обязано это понятие своим происхождением Ж. Дельсарту [1], которому принадлежат и первые результаты по теории о. о. с. Дальнейшее существенное развитие эта теория получила в работах Б. М. Левитана (см., например, [2]—[5]). Уже в этих работах наметилось два естественных подхода к построению теории о.о.с.: глобальный и инфинитезимальный. С точки зрения первого подхода содержательной является задача обобщения на случай о. о. с. глобальных конструкций, заимствованных из теории групп (теория представлений, существование мер Хаара, гармонический анализ и др.). Некоторые аспекты теории представлений о. о. с. в топологических локально выпуклых пространствах рассматривались в работе Г. Л. Литвинова [6]. Обзор части результатов глобальной проблематики теории о. о. с. (фигурирующих в исследованиях зарубежных математиков под названием гипергрупп) содержится в статье К. Росса [7].

Центральное место в теории о. о. с. с инфинитезимальной точки зрения занимает проблема построения о. о. с. по его инфинитезимальному оператору в случае одного переменного или по множеству его инфинитезимальных операторов первого или более высокого порядка в случае нескольких переменных. Эта задача в одномерном случае рассматривалась, в частности, в статьях [8], [9]. В случае многих переменных полностью решена задача восстановления о. о. с. по инфинитезимальным операторам второго порядка в ситуации, когда последние операторы образуют алгебру Ли. Локальное решение этой задачи дано Б. М. Левитаном, глобальное построение осуществлено в работе [10].

В настоящей статье мы предлагаем глобальную конструкцию нового класса о. о. с., называемых нами операторами типа Дельсарта и действующих в пространствах функций на группах Ли. Следует отметить, что формальные аналогии некоторых частных случаев операторов типа Дельсарта рассматривались в работах В. П. Маслова и его учеников (см. [11]). В § 4 мы изучаем структуру коммутационных соотношений между инфинитезимальными операторами (генераторами) операторов типа Дельсарта. Оказывается, что для первых генераторов эти соотношения имеют вид $p(X, X) = l(X)$, где $p(X, X)$ — билинейная, а $l(X)$ — линейная комбинации от данных генераторов. Примером может служить оператор типа Дельсарта, действующий на группе SU (2, C), первые генераторы которого удовлетворяют соотношениям

$$X^2 - Y^2 = Z,\ YZ + ZY = -X,\ ZX + XZ = Y.$$

В последнем параграфе мы реализуем попытку аксиоматического описания алгебраического объекта, соответствующего оператору Дельсарта и порожденного его первыми генераторами.

Автор благодарит И. Л. Кантора, Г. Л. Литвинова и Г. Б. Шпиза за полезные обсуждения.

§ 1. Предварительные сведения. Определения

Пусть Ω — произвольное n-мерное гладкое действительное многообразие. Обозначим через $C^\infty(\Omega)$ пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Ω, наделенное стандартной локально выпуклой топологией равномерной сходимости на компактах функций вместе со всеми производными. Говорят, что в пространстве $C^\infty(\Omega)$ действует оператор обобщенного сдвига (сокращенно о. о. с.), если каждому $s \in \Omega$ сопоставлен линейный оператор R^s, действующий в $C^\infty(\Omega)$, такой, что выполнены условия: 1) соответствие $f(t) \to \varphi(s, t) = R^s f(t)$ определяет непрерывное отображение $C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega \times \Omega)$; 2) выделен такой элемент $s_0 \in \Omega$, называемый нейтральным, что оператор R^{s_0} тождественный; 3) $R^r_s R^s f(t) = R^s_t R^r f(t)$ для всех $f \in C^\infty(\Omega)$, t, s, $r \in \Omega$ (индекс внизу указывает на переменную, по которой действует соответствующий оператор).

Если имеется два о. о. с. ${}_1R^s$ и ${}_2R^s$, действующие в пространствах $C^\infty(\Omega_1)$ и $C^\infty(\Omega_2)$ соответственно, то морфизмом о. о. с. ${}_1R^s$ в о. о. с. ${}_2R^s$ назовем непрерывный оператор $F: C^\infty(\Omega_1) \to C^\infty(\Omega_2)$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\Omega_1) & \xrightarrow{F} & C^\infty(\Omega_2) \\ \downarrow {}_1R^s & & \downarrow {}_2R^s \\ C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_1) & \xrightarrow{F \hat{\times} F} & C^\infty(\Omega_2 \times \Omega_2) \end{array}$$

коммутативна и $Ff({}_2s_0) = f({}_1s_0)$, где ${}_1s_0 \in \Omega_1$ и ${}_2s_0 \in \Omega_2$ — соответствующие нейтральные элементы. Морфизм F назовем изоморфизмом, если F — изоморфизм $C^\infty(\Omega_1)$ и $C^\infty(\Omega_2)$ в категории локально выпуклых пространств.

Мы будем рассматривать также n-мерные комплексно-аналитические многообразия Ω, снабженные пространствами $H(\Omega)$ голоморфных функций с локально выпуклой топологией покомпактной сходимости. В пространствах $H(\Omega)$ аналогичным образом могут быть определены понятия о. о. с. и морфизма (изоморфизма) двух о. о. с. Пространства, сопряженные к пространствам $C^\infty(\Omega)(H(\Omega))$ мы будем обозначать через $D(\Omega)(A(\Omega))$.

Мы будем придерживаться следующих обозначений: $(\alpha = \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ — мультииндекс, а $D^\alpha_s = D^{\alpha_1}_{s_1} \cdots D^{\alpha_n}_{s_n}$, где D_{s_i} — производная по i-той переменной в локальной системе координат многообразия Ω. Правым инфинитезимальным оператором (генератором) порядка $|\alpha| =$

$=\alpha_1+\dots+\alpha_n$ от о. о. с. R^s, действующего на Ω, называется оператор $R_\alpha f(t)=D_s^\alpha R^s f(t)|_{s_0}$.

Известно (см. [5], это можно также непосредственно вывести из определения о. о. с.), что все генераторы R_α данного о.о.с. в следующем смысле перестановочны с действием оператора R^s: $R_{\alpha,s} R^s f(t)=$ $=R^s R_{\alpha,t} f(t)$. Отсюда сразу вытекает

Предложение 1.1. 1) *Если* $R_\alpha|_{s_0}=\sum\limits_\beta a_\beta D^\beta|_{s_0}$ *(все суммы в этом предложении конечны), то или* $R_\alpha|_{s_0}=D^\alpha|_s$, *или генераторы линейно зависимы;* 2) *если генераторы линейно независимы, то соотношение* $\sum\limits_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} R_\alpha R_\beta=\sum\limits_\gamma c_\gamma R_\gamma$ *эквивалентно своему ограничению в точку* s_0.

Доказательство. В самом деле, если генераторы оператора R^s удовлетворяют первому соотношению, то

$$R_\alpha= R^s R_\alpha|_{s_0}=R_{\alpha,s} R^s|_{s_0}=\sum_\beta a_\beta D_s^\beta R^s|_{s_0}=\sum_\beta a_\beta R_\beta,$$

что доказывает первое утверждение. Второе утверждение аналогичным образом выводится из первого.

Рассмотрим n-мерную действительную (комплексную) группу Ли G с алгеброй Ли g. Группу G мы на протяжении всей статьи будем предполагать связной и односвязной, не оговаривая этого каждый раз. При указанном условии полугруппа эндоморфизмов End G группы G изоморфна полугруппе эндоморфизмов End g алгебры g и является алгебраическим подмногообразием полугруппы End R^n (End C^n). Мы будем рассматривать такие и только такие полугруппы Γ эндоморфизмов группы G, которые являются замкнутыми гладкими аналитическими подмногообразиями многообразия End G.

Пусть фиксированы группа Ли G и полугруппа Γ ее эндоморфизмов. Скажем, что о. о. с. R^s, действующий в пространстве $C^\infty(G)(H(G))$, является оператором типа Дельсарта, если нейтральный элемент s_0 совпадает с единицей e группы G и если оператор R^s определен в соответствии с формулой

$$R^s f(t)=\langle f(tA\cdot sB),\ \mu_{A,B}\rangle,\quad \mu\in D(\Gamma\times\Gamma)(A(\Gamma\times\Gamma)). \qquad (1.1)$$

Под tA мы понимаем результат действия эндоморфизма $A\in\Gamma$ на точку $t\in G$, а скобка $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает операцию спаривания элементов двух сопряженных пространств.

Примеры. 1. Оператор группового сдвига $R^s f(t)=f(t\cdot s)$ является очевидным образом оператором типа Дельсарта. В этом случае функционал $\mu_{A,B}$ просто совпадает с δ-функцией, сосредоточенной в единице полугруппы $\Gamma\times\Gamma$ при любой полугруппе эндоморфизмов Γ группы G.

2. Оператор Дельсарта определяется (см. [5]) так: $R^s f(t)=$ $=\langle f(t\cdot sB),\ \mu_B\rangle$, где $f\in C^\infty(G)(H(G))$, Γ — компактная группа автоморфизмов группы G, а μ_B — мера Хаара на Γ, нормированная условием равенства единице меры всей Γ. Понятие оператора типа Дельсарта является естественным обобщением последней конструкции.

В категории всех операторов типа Дельсарта, действующих на фиксированной группе Ли G по форме (1.1), мы определим морфизмы как такие морфизмы в категории всех о.о.с. на G, которые имеют вид $Ff(t) = \langle f(tA), \nu_A \rangle$, где $\nu_A \in D(\Gamma)(A(\Gamma))$.

На произвольной фиксированной полугруппе Г рассмотрим линейное (топологическое локально выпуклое) пространство функций Ф. Мы будем говорить, что в пространстве Ф (или просто на полугруппе Г) задана алгебраическая структура, если в Ф определено ассоциативное (а в топологическом случае и непрерывное по совокупности аргументов) умножение $\Phi \ni f, g \to f \circ g \in \Phi$, инвариантное относительно правого сдвига на полугруппе Г и если, кроме того, функция, равная тождественной единице на Г, является правой единицей при этом умножении: $f \circ 1 = f$. Категорию подобных алгебраических структур мы будем обозначать через $\mathbf{A}(\Phi)$. В качестве морфизмов в этой категории мы будем рассматривать такие морфизмы в категории (топологических) алгебр с правой единицей, которые перестановочны с действием правого сдвига на полугруппе Г.

§ 2. Основная теорема

Пусть имеется действительная (комплексная) группа Ли G и полугруппа Г ее эндоморфизмов, и пусть в пространстве $\Phi = C^\infty(\Gamma)(H(\Gamma))$ фиксирована алгебраическая структура $B \in \mathbf{A}(\Phi)$. Определим на пространстве $\Phi \hat{\times} \Phi$ функционал $\mu_{A,B}$, действующий на произведении элементов $f(A)\,g(B)$, $f, g \in \Phi$ по формуле

$$\langle f(A)\,g(B), \mu_{A,B} \rangle = f \circ g\,(E), \tag{2.1}$$

где E — единица полугруппы Г. Посредством функционала $\mu_{A,B}$ зададим в соответствии с формулой (1.1) оператор в пространстве $C^\infty(G)(H(G))$.

Теорема основная. 1) *Определенный таким образом оператор есть о.о.с. типа Дельсарта и, следовательно, при фиксированных G и Г имеется отображение, ставящее в соответствие алгебре $B \in \mathbf{A}(\Phi)$ оператор типа Дельсарта, который мы будем обозначать через ${}_BR^s$.*

2) *Указанное отображение является контравариантным функтором: каждому морфизму (изоморфизму) $B_1 \to B_2$ в категории $\mathbf{A}(\Phi)$ оно ставит в соответствие морфизм (изоморфизм) ${}_{B_1}R^s \leftarrow {}_{B_2}R^s$ в категории операторов типа Дельсарта.*

Доказательство. Посредством функционала $\mu_{A,B}$, определенного выше, закон умножения в алгебре B может быть записан в следующем виде:

$$f \circ g\,(C) = \langle f(AC)\,g(BC), \mu_{A,B} \rangle. \tag{2.2}$$

Тогда условие ассоциативности умножения в алгебре B принимает форму

$$(f\circ(g\circ h))(M)=\langle f(AM)\,g(CBM)\,h(DBM),\ \mu_{C,D}\,\mu_{A,B}\rangle=$$

$$=((f\circ g)\circ h)(M)=\langle f(CAM)\,g(DAM)\,h(BM),\ \mu_{A,B}\,\mu_{C,D}\rangle f,\ g,\ h\in B. \tag{2.3}$$

Ограничив последнее равенство в единицу полугруппы Г, получим, что

$$\langle f(A)\,g(CB)\,h(DB),\ \mu_{C,D}\,\mu_{A,B}\rangle=\langle f(CA)\,g(DA)\ h(B)\,\mu_{A,B}\,\mu_{C,D}\rangle. \tag{2.4}$$

Заметим, что из-за инвариантности умножения в B относительно правого сдвига на полугруппе Г равенство (2.4) эквивалентно (2.3).

Раскрывая содержание аксиомы 3 для о.о.с. применительно к оператору типа Дельсарта $_BR^s$, определенному в пространстве $C^\infty(G)$ $(H(G))$, получим, что

$$R^r_s\,R^s\,f(t)=\langle f(tA\cdot sCB\cdot rDB),\ \mu_{A,B}\,\mu_{C,D}\rangle=$$

$$=R^s_t\,R^r\,f(t)=\langle tCA\cdot s\,DA\cdot rB),\ \mu_{A,B}\,\mu_{C,D}\rangle. \tag{2.5}$$

Последнее соотношение вытекает из равенства (2.4).

Легко видеть, что аксиома 2 из определения о.о.с. эквивалентна для оператора типа Дельсарта условию на единичную функцию в алгебре B. Тем самым установлено соответствие между алгебрами $B\in$ $\in A(\Phi)$ и операторами типа Дельсарта. Осталось установить соответствие между морфизмами. Пусть имеется морфизм $F\colon B_1\to B_2$ Рассмотрим функционал ν, определенный на пространстве Φ соотношением $\langle f,\ \nu\rangle=(Ff)(E)$. Тогда, используя перестановочность морфизма F с операцией правого сдвига на Г, действие морфизма F на элементы пространства Φ можно представить в виде $Ff(C)=\langle f(AC),\ \nu_A\rangle$. Определив морфизм $_{B_1}R^s\leftarrow {_{B_1}R^s}$ следующим образом: $\langle f(tA),\ \nu_A\rangle\leftarrow f$, мы удовлетворим всем требуемым условиям. Теорема доказана.

Отметим, что если функция $f=1$ является двусторонней единицей в алгебре B, то единица e группы B является двусторонним нейтральным элементом: $R^s f(t)|_{t=e}=f(s)$.

З а м е ч а н и е. Все предыдущие конструкции и утверждения естественным образом переносятся на случай локальных и формальных групп Ли и супермногообразий. Кроме того, основная теорема допускает следующее обобщение. Пусть на гладком действительном (комплексном) многообразии Ω задан о.о.с. R^s и имеется полугруппа Г (являющаяся многообразием) его эндоморфизмов. Пусть $\mu_{A,B}$— некоторый функционал на пространстве $\Phi=C^\infty(\Gamma\times\Gamma)(H(\Gamma\times\Gamma))$ такой, что определен оператор

$$_1R^s f(t)=\langle R^s f(t)A_t\,\widehat{\times}\,B_s,\ \mu_{A,B}\rangle.$$

Тогда, если бинарная операция (2.1) наделяет пространство Φ структурой алгебры $B\in A(\Phi)$, то последний оператор является о.о.с.

§ 3. Примеры

1. Оператору группового сдвига соответствует при любой полугруппе эндоморфизмов Γ алгебра B функций на Γ с обычным поточечным умножением.

2. Оператор Дельсарта, фигурировавший в примере 2 из § 1, получается описанным в теореме способом из алгебры $B \in \mathbf{A}(\Phi)$, $\Phi = C^{\infty}(\Gamma)(H(\Gamma))$, в которой умножение задается формулой $f \circ g(C) = f(C) < g(BC), \mu_B >$, где μ_B — мера Хаара на компактной группе автоморфизмов группы G такая, что $<1, \mu_B> = 1$.

3. Пусть $G = R^1$, $\Gamma = \{E, 0\}$, где E — тождественный, а 0 — нулевой эндоморфизм. Положим $\chi_0(E) = \chi_0(0) = 1$, $\chi_1(E) = -\chi_1(0) = 1$. В двумерном пространстве функций на Γ определим структуру алгебры $B \in \mathbf{A}(\Phi)$ с двусторонней единицей χ_0, положив $\chi_1 \circ \chi_1 = a\chi_0 + b\chi_1$ где $a - b = 1$. При $a = 0$, $b = 1$ соответствующий оператпр типа Дельсарта имеет вид

$$R^s f(t) = \frac{1}{2}(f(t+s) + f(t) + f(s) - f(0)).$$

4. Пусть теперь Γ — группа: $\Gamma = \{E, A, B, AB = BA\}$, причем $A^2 = B^2 = E$. Пространство Φ функций на Γ в этом случае порождается базисом из характеров $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ группы Γ. Здесь у нас $\chi_0 = 1$, $\chi_3 = \chi_1\chi_2$, а характеры χ_1 и χ_2 таковы, что $\chi_1(A) = \chi(B) = -1$. $\chi_1(B) = \chi_2(A) = 1$. Нетрудно описать с точностью до изоморфизма все алгебраические структуры, которые могут быть определены в пространстве Φ. Если в алгебре B отсутствуют делители нуля, то она изоморфна или алгебре B_1 с обычным умножением функций на Γ или алгебре B_2, в которой является двусторонней единицей и имеют место соотношения

$$\chi_1 \circ \chi_1 = \chi_2 \circ \chi_2 = \chi_0, \ \chi_1 \circ \chi_2 = -\chi_2 \circ \chi_1 = \chi_3.$$

Среди алгебраических структур в Φ с делителями нуля укажем в качестве иллюстрации только на две. Умножение по типу примера 2 приводит нас к алгебре B_3 со следующей таблицей умножения: $\chi_i \circ \chi_j = \chi_i \delta_j^0$, где δ_j^0 — символ Кронекера. В алгебре B_4 с двусторонней единицей закон умножения зададим следующим образом: $\chi_1 \circ \chi_1 = \chi_2 \circ \chi_2 = 0$, $k\chi_1 \circ \chi_2 = l\chi_2 \circ \chi_1 = \chi_3$, $kl \neq 0$.

Рассмотрим группу $G = SU(2, R)$. Пусть A и B — два автоморфизма группы G, которые в ее алгебре g с базисом X, Y, Z таким, что $[X, Y] = Z$, $[Y, Z] = X$, $[Z, X] = Y$, индуцируют соответственно автоморфизмы $(X, Y, Z) \to (-X, Y, -Z)$ и $(X, Y, Z) \to (X, -Y, -Z)$. Группа $\Gamma = \{E, A, B, AB\}$ как раз такова, как рассмотренная выше. Опишем, какие операторы типа Дельсарта соответствуют по основной теореме алгебраическим структурам B_2 и B_4 (случай алгебр B_1 и B_3 охвачен примерами 1 и 2):

$${}_{B_2}R^s f(t) = \frac{1}{2}(f(t \cdot s) + f(tB \cdot s) + f(t \cdot sA) - f(tB \cdot sA)),$$

$$_{B_i}R^s f(t) = ({}_0P_t + {}_0P_s - {}_0P_t\,{}_0P_s + k\,{}_1P_t\,{}_2P_s + l\,{}_2P_t\,{}_1P_s)\, f(t\cdot s),$$

где ${}_iP_t = \frac{1}{4}\sum_{C\in\Gamma} f(tC)\,\chi_i(C)$. Непосредственным вычислением проверяется, что первые инфинитезимальные операторы этих о.о.с. удовлетворяют соотношениям $XY + YX = -Z$, $YZ + ZY = X$, $ZX + XZ = Y$ в первом случае и $kXY - lYX = klZ$, $YZ = ZY = ZX = XZ = X^2 = Y^2 = Z^2 = 0$—во втором.

5. Пусть фиксирована действительная (комплексная) n-мерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и имеется разбиение пространства этой алгебры в прямую сумму подпространств $V_1, \cdots, V_m$, задающее градуировку алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в том смысле, что для любых i и j существует $k = k(i, j) = k(j, i)$ такое, что $[V_i, V_j] \subseteq v_k$. Выберем в алгебре $\mathfrak{g}$ базис $X_1, \cdots, X_n$, согласованный с заданным разбиением: первые $\dim V_1$ векторов этого базиса принадлежат V_1, следующие $\dim V_2$ векторов принадлежат V_2 и т. д.

Пусть каждому подпространству V_i (и тем самым каждому вектору из него) поставлен в соответствие некоторый автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$. Автоморфизм, отвечающий вектору $X \in \mathfrak{g}$, будем обозначать через M_X (или M_i, если $X = X_i$). Предположим, что для любых i и j существует $l = l(i, j)$ такое, что $V_i M_j^* \subseteq V_l$, где M_j^* — автоморфизм, сопряженный к M_j, и что выполнено условие

$$M_i M_{X_j M_i^*} = M_j M_{X_i M_j^*} = M_{[X_i, X_j]}.$$

Рассмотрим матричные функции $a_j^i(A)$, $A \in \Gamma$ представления полугруппы $\Gamma = \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ в выбранном базисе: $X_j A = \sum_i X_i\, a_j^i(A)$. Определим умножение в алгебре $B \in \mathrm{A}(\Phi)$, $\Phi = C^\infty(\Gamma)(H(\Gamma))$ между матричной функцией $a_j^i(A)$ и произвольной функцией из Φ на основе следующего соотношения: $a_j^i(A)\, p(A) = a_j^i(A) \circ p(M_i A)$, из которого вытекает равенство

$$a_j^i(A) \circ a_l^k(M_i A) = a_l^k(A) \circ a_j^i(M_k A). \tag{3.1}$$

В соответствии с указанным определением моном любой степени от матричных элементов с обычным умножением можно по индукции представить в виде полинома от тех же образующих с умножением $\circ$ и наоборот. Например,

$$a_j^i(A)\, a_l^k(A)\, a_n^m(A) = a_j^i(A) \circ a_l^k(M_i A)\, a_n^m(M_i A) =$$
$$= a_j^i(A) \circ a_l^k(M_i A) \circ a_n^m(M_i M_{X_k M_i^*} A).$$

Теперь легко определить произведение $p(A) \circ q(A)$ любых двух полиномов от матричных функций, представив сначала p и q (достаточно только p) в виде полиномов с умножением $\circ$, а затем преобразовав результат к полиному с обычным умножением. Доказательство ассоциативности сформулированного умножения сводится фактически к проверке того факта, что домножив справа равенство (3.1) на произвольный полином, мы не нарушим его справедливости. Эта проверка, также как и доказательство того, что определенная операция не нарушает тождественных соотношений, которым удовлетворяют матричные функции на полугруппе $\Gamma = \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$, оставляется читателю.

Теперь заметим, что пространство P_Γ полиномов от матричных функций плотно в Ф, и, если это возможно, продолжим указанный закон умножения по непрерывности на все Ф. Для осуществимости этой операции достаточно (но не необходимо), чтобы автоморфизмы $M_1, \cdots, M_n$ были ортогональны (унитарны).

Сформулированная структура на $\mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ изоморфно (поскольку $\mathrm{End}\,\mathfrak{g} \cong \mathrm{End}\,G$) переносится на полугруппу $\mathrm{End}\,G$, где G — связная односвязная группа Ли с алгеброй $\mathfrak{g}$.

Отметим, что функция $f \equiv 1$ в построенной алгебре B является двусторонней единицей. Отметим также один важный частный случай описанной выше структуры, когда для любых i и j $l(i, j) = i$, т.е. $V_i M_j \subseteq V_i$. В этом случае все автоморфизмы M_i коммутируют между собой.

6. Рассмотрим один частный случай предыдущего примера. Пусть $G = \mathbb{C}^3$. Положим $(X, Y, Z)\, M_1 = (Y, X, aZ)$, $(X, Y, Z)\, M_2 = (Y, X, bZ)$, $M_3 = E$, $|a| = |b| = 1$. Условия предыдущего примера выполнены тогда и только тогда, когда $a^2 = b^2$. Коммутационные соотношения для первых генераторов соответствующего оператора типа Дельсарта (см. ниже формулы (4.6)), выглядят так:

$$X^2 - Y^2 = 0,\ aXZ - ZX = 0,\ bYZ - ZY = 0.$$

Заметим, что при $a = b$ можно, а при $a = -b$ нельзя посредством замены базиса осуществить „диагонализацию" этой системы соотношений, т. е. все ее уравнения привести к виду $X_i X_j - \sigma_{i,j} X_j X_i = 0$.

§ 4. Соотношения для генераторов операторов типа Дельсарта

В предыдущем параграфе нами были в конкретном примере вычислены соотношения для первых генераторов оператора типа Дельсарта. В настоящем параграфе мы рассмотрим, каким соотношениям, аналогичным коммутационным формулам Ли, удовлетворяют генераторы о.о.с. типа Дельсарта в общем случае.

Пусть опять фиксированы группа Ли G и полугруппа Γ ее эндоморфизмов. Будем обозначать через R_α и $\widetilde{R}_\alpha$ соответственно генераторы оператора правого сдвига на группе G и оператора типа Дельсарта (1.1). Вычисляя от последнего оператора производную D^α по s и полагая $s = e$, будем иметь

$$\widetilde{R}_\beta f(t) = \left\langle \sum_\sigma R_\sigma\, a^\sigma_\beta(B)\, f(t, A),\ \mu_{A,B} \right\rangle,$$

где $a^\sigma_\beta(B)$ — матричные элементы представления полупруппы Γ в базисе R_β.

Предположим, что генераторы $\bar{R}_\alpha$ линейно независимы. В этом случае согласно предложению 1.1 $\widetilde{R}_\alpha|_e^\cdot = R_\alpha|_e = D^\alpha|_e$ и следовательно,

$$\widetilde{R}_\alpha \widetilde{R}_\beta f|_e = \sum_{\gamma, \sigma} < (D^\gamma a_\alpha^\gamma (A))(R_\sigma a_\beta^\sigma (B)) f(t), \mu_{A,B} >|_e =$$

$$= \sum_{\gamma, \sigma} D^\gamma R_\sigma < a_\alpha^\gamma (A) a_\beta^\sigma (B), \mu_{A,B} > f|_e = \sum_{\gamma, \sigma} D^\gamma R_\sigma (a_\alpha^\gamma \circ a_\beta^\sigma)(E) f|_e =$$

$$= \sum_{\gamma, \sigma} R_\gamma R_\sigma (a_\alpha^\gamma \circ a_\beta^\sigma)(E) f|_e. \qquad (4.1)$$

Допустим теперь, что генераторы оператора типа Дельсарта (1.1) удовлетворяют некоторому соотношению вида

$$\sum_{\alpha, \beta} b^{\alpha, \beta} \widetilde{R}_\alpha \widetilde{R}_\beta = \sum_\gamma c^\gamma \widetilde{R}_\gamma. \qquad (4.2)$$

Как следствие получаем, что для генераторов R_α оператора сдвига справедливо следующее равенство:

$$\sum_{\alpha, \beta} b^{\alpha, \beta} \sum_{\gamma, \sigma} R_\gamma R_\sigma (a_\alpha^\gamma \circ a_\beta^\sigma)(E) f|_e = \sum_\gamma c^\gamma R_\gamma|_e.$$

Заметим, что исходя из предложения 1.1, в последней формуле мы можем убрать ограничение $t = e$. Таким образом мы получаем соотношение для генераторов R_γ. Сказанное позволяет нам сформулировать следующий порядок действий в целях определения соотношений для генераторов $\bar{R}_\sigma$.

Теорема. 4.1. *Предположим, что генераторы $\bar{R}_\alpha$ оператора типа Дельсарта* (1.1) *линейно независимы. Рассмотрим формальное равенство*

$$\widetilde{R}_\alpha = \sum_\beta R_\beta a_\alpha^\beta (A), \qquad (4.3)$$

предполагающее, что генераторы $\widetilde{R}_\alpha$ выражаются линейным образом через генераторы R_α с коэффициентами из алгебры $B \in \mathbf{A}(\Phi)$, где $\Phi = C^\infty(\Gamma)(H(\Gamma))$. Тогда из любого соотношения вида (4.2) *для генераторов $\bar{R}_\alpha$ можно получить соответствующее соотношение для генераторов R_α, подставив в* (4.2) *выражения* (4.3), *перемножив коэффициенты в соответствии с законом умножения в алгебре B и ограничив полученные коэффициенты в единицу полугруппы* Г. *Если равенства* (4.1) *можно обратить, т. е. если можно выразить значения $R_\alpha R_\beta|_e$ через $\widetilde{R}_\alpha \widetilde{R}_\beta|_e$, то аналогичным образом можно перейти от соотношений для генераторов R_α к соотношениям для генераторов $\widetilde{R}_\alpha$.*

Рассмотрим в алгебре B произведение $a_\beta^\alpha \circ a_\delta^\gamma$ матричных элементов представлений, действующих соответственно в пространствах, натянутых на базисы R_α, $|\alpha| = m$ и R_γ, $|\gamma| = m$. Поскольку умножение в алгебре B инвариантно относительно правого сдвига на полугруппе Г, то существует такая матрица $(d^{\mu\nu}_{\beta\delta})$, что

$$a^\alpha_\beta \circ a^\gamma_\delta = d^{\alpha\gamma}_{\mu\nu}\, a^\mu_\beta\, a^\nu_\delta,\ |\mu| = |\beta| = m,\ |\nu| = |\delta| = n. \qquad (4.4)$$

Здесь и в дальнейшем мы придерживаемся тензорной формы записи, опуская знак суммирования по одинаковым индексам, стоящим вверху и внизу.

В согласии с теоремой 4.1 переход от соотношений вида (4.2) для генераторов оператора типа Дельсарта (если они независимы) к соотношениям для генераторов правого сдвига на группе Ли следует производить исходя из равенства

$$\widetilde{R}_\beta\, \widetilde{R}_\delta = R_\alpha R_\gamma\, a^\alpha_\beta \circ a^\gamma_\delta\,(E) = R_\alpha\, R_\gamma\, d^{\alpha\gamma}_{\mu\nu}\, a^\mu_\beta\, a^\nu_\delta\,(E) = R_\alpha R_\gamma\, d^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}.$$

В частности, для первых генераторов оператора типа Дельсарта, которые мы для простоты будем обозначать также $\widetilde{X}_i\,(\widetilde{X}_i f = D_{s_i} R^s f|_{s=e})$, это равенство принимает вид $\widetilde{X}_i\, \widetilde{X}_j = d^{ke}_{ij}\, X_k X_e$.

Если матрица (d^{ke}_{ij}) обратима, то коммутационные соотношения для первых генераторов операторов правого сдвига на группе G, или что то же самое, соотношения для образующих алгебры Ли $\mathfrak{g}$, записанные в ее обертывающей алгебре, приводят нас в согласии с теоремой 4.1 к следующим соотношениям для первых генераторов оператора типа Дельсарта:

$$d^{-1ij}_{ke}\, \widetilde{X}_i\, \widetilde{X}_j - d^{-1pq}_{ik}\, \widetilde{X}_p\, \widetilde{X}_q = c^m_{kl}\, \widetilde{X}_m, \qquad (4.5)$$

где (d^{-1ij}_{kl}) — матрица обратная к (d^{kl}_{ij}), а c^m_{ke} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе $x_1, \cdots, x_n$.

В частном случае оператора типа Дельсарта, отвечающего алгебраической конструкции, описанной в примере 5 предыдущего параграфа, последнее соотношение принимает вид

$$\widetilde{X}_i\,(\widetilde{X}_j M_i) - X_j(\widetilde{X}_i M_j) = c^m_{ij}\, \widetilde{X}_m. \qquad (4.6)$$

Легко указать явный вид первых генераторов $\widetilde{X}_i$ этого оператора типа Дельсарта: на функцию $f\,(t)$, заданную на группе G, генератор $\widetilde{X}_i$ действует следующим образом: $(\widetilde{X}_i f)(t) = (X_i f)(tM_i)$, где под M_i уже понимается соответствующий автоморфизм группы G.

Разумеется, все сказанное справедливо, если на пространство Ф (см. пример 5 § 3) продолжается структура, определенная на плотном подпространстве $P_Г$. Правда, и в противном случае можно аналогичным образом определить о.о.с., действующий в пространстве формальных рядов (так сказать, „формальный оператор типа Дельсарта“). Для первых генераторов этого оператора останутся справедливыми коммутационные соотношения (4.6) и утверждение о явном виде.

Вместе с тем, часто бывает возможно, изменив закон умножения, построенный в примере 5 предыдущего параграфа, получить другую, изоморфную исходной, алгебраическую структуру на P_{Γ}, уже продолжаемую на все пространство Φ и такую, что первые генераторы соответствующего оператора типа Дельсарта удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям (4.6).

§ 5. Обобщенные алгебры Ли

Про оператор типа Дельсарта мы будем говорить, что у него невырождена система первых генераторов, если эти генераторы независимы и все матрицы $(d_{\beta\delta}^{\mu\nu})$ из формул (4.4), участвующие в умножении матричных элементов в соответствующей алгебре B обратимы при $|\beta|=|\mu|=1$. В этом случае по индукции легко доказывается, что вообще все матрицы $(d_{\beta\delta}^{\mu\nu})$ обратимы и что генератор любого порядка исходного оператора Дельсарта представим в виде многочлена от операторов первого порядка.

Систему коммутационных соотношений (4.5) для первых генераторов X_l (в их обозначениях мы опускаем тильду) можно умножением на матрицу (d_{ij}^{kl}) привести к виду

$$X_i\, X_j - h_{ij}^{kl} X_k X_l = [X_i\,,\, X_j], \tag{5.1}$$

где $h_{ij}^{kl} = d_{ij}^{pq}\, d_{qp}^{-1kl}$, а $[X_i\,,\, X_j]$ — некоторые линейные комбинации от X_m.

Рассмотрим тензор $H = (h_{ij}^{kl})$. Очевидно, что он удовлетворяет условию 1) $H^2 = E$, т. е. $h_{ij}^{pq}\, h_{pq}^{kl} = \delta_{ij}^{kl}$. Докажем, что для этого тензора выполнено также условие 2) $h_{ij}^{kl}\, h_{lm}^{pq}\, h_{kp}^{st} = h_{jm}^{uv}\, h_{iu}^{sr}\, h_{rv}^{tq}$.

Для этого наряду с алгеброй B рассмотрим алгебру B^* с сопряженным законом умножения

$$a_\beta^\alpha * a_\delta^\gamma = d_{\beta\delta}^{\mu\nu}\, a_\mu^\alpha\, a_\nu^\gamma \tag{5.2}$$

(это умножение может быть выражено через исходное умножение посредством операции сопряжения: $f * g = (f^* \circ g^*)^*$).

Алгебра B^* ассоциативна, поскольку ассоциативна алгебра B. Воспользовавшись коммутативностью обычного умножения, из (5.2) получаем, что

$$a_\beta^\alpha * a_\delta^\gamma = d_{\beta\delta}^{\mu\nu}\, d_{\nu\mu}^{-1\sigma\rho}\, a_\sigma^\gamma * a_\rho^\alpha. \tag{5.3}$$

Заметим, что матрица $(d_{\beta\delta}^{\mu\nu}\, (d_{\nu\mu}^{-1\sigma\rho})$ при $|\beta| = |\mu| = |\delta| = |\nu| = |\sigma| = |\rho| = 1$ совпадает с тензором H. Теперь условие 2) для тензора H непосредственно вытекает из того факта, что если три сомножителя $a_i^\alpha \circ a_j^\gamma \circ a_m^\varphi$ прокоммутировать по формулам (5.3) так, чтобы α и φ поменялись местами, то результат не будет зависеть от порядка выполнения операций коммутирования.

Положим $p_{ij} = X_i\, X_j - h_{ij}^{kl} X_k X_l$. Явно проверяется, что для p_{ij} справедливы соотношения $p_{ij} = - h_{ij}^{kl}\, p_{kl}$ и

$$p_{ij} X_k - h^{qr}_{lu} h^{uv}_{jk} X_q p_{rv} + h^{st}_{ij} h^{mn}_{tk} (p_{sm} X_n - h^{qr}_{su} h^{uv}_{mn} X_q p_{rv}) +$$
$$+ h^{sm}_{it} h^{tn}_{jk} (p_{sm} X_n - h^{qr}_{su} h^{uv}_{mn} X_q p_{rv})).$$

Отсюда получаем, что правые части равенств (5.1) для первых генераторов оператора типа Дельсарта с невырожденной системой первых генераторов удовлетворяют условиям

a) $[X_i, X_j] = -h^{kl}_{ij} [X_k, X_l]$ („кососимметричность"),

в) $[[X_i, X_j], X_k] + h^{st}_{ij} h^{mn}_{tk} [[X_s, X_m], X_n] + h^{sm}_{it} h^{tn}_{jk} [[X_s, X_m], X_n]] = 0$

(условие Якоби),

$c^p_{ij} h^{kl}_{pq} = h^{sm}_{jq} h^{kl}_{is} c^l_{tm}$, где c^p_{ij} таковы, что $[X_i, X_j] = c^p_{ij} X_p$.

Заметим, что условие Якоби может быть переписано в другой, более наглядной, форме:

$$[[X_i, X_j], X_k] = [X_i, [X_j, X_k]] + h^{lm}_{ij} [X_l, [X_m, X_k]].$$

Определение. Пусть задан произвольный тензор $H = (h^{kl}_{ij})$ размерности $n^2 \times n^2$ с коэффициентами из поля k (у нас $k = \mathrm{R}$ или $k = \mathrm{C}$), удовлетворяющий указанным условиям 1) и 2). Алгебру над полем k мы назовем обобщенной алгеброй Ли, если умножение в алгебре $X_i, X_j \to [X_i, X_j]$ удовлетворяет условиям а), в), с).

Приведенное определение включает в себя конечномерные градуированные алгебры Ли в смысле М. В. Мосоловой [11] (в том числе и супералгебры Ли), для которых тензор H в некотором базисе имеет вид

$$h^{lm}_{ij} = a_{ij} \delta^{ml}_{ij}, \quad a_{ij} \in k, \ a_{ij} \neq 0.$$

С тензором H естественным образом связаны два проектора $P_0 = \frac{1}{2}(E + H)$ и $P_1 = \frac{1}{2}(E - H)$, действующие в векторном пространстве k^{n^2}. Заметим, что для алгебр Ли $\dim \ker p_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, а для супералгебр Ли $\dim \ker p_1 < \frac{n(n+1)}{2}$. Если $\dim \ker p_1 = n^2$, то $H = E$ и соответствующая обобщенная алгебра Ли коммутативна, т. е. для любых i и j $[X_i, X_j] = 0$. Если же $\dim \ker p_1 = 0$, то $H = -E$ и соответствпющая алгебра Ли также коммутативна.

На обобщенные алгебры Ли переносятся многие элементы теории обычных алгебр Ли. В частности каждой обобщенной алгебре Ли можно поставить в соответствие „обобщенную (в общем случае формальную) группу Ли". Мы здесь ограничиваемся рассмотрением обобщенных алгебр Ли, отвечающих операторам типа Дельсарта с невырожденной системой первых генераторов.

Необходимое условие, выделяющее последние алгебры из множества всех обобщенных алгебр Ли состоит в том, что тензор H, отвечающий алгебре, которая соответствует оператору типа Дельсарта, эквивалентен тензору $'H = ('h^{kl}_{ij} = \delta^{lk}_{ij})$, отвечающему обычной алгебре.

В самом деле, тензор H в данном случае представим в виде $h_{ij}^{kl}=d_{ij}^{pq}\times$ $\times\, d_{qp}^{-1kl}=d_{ij}^{pq}\,\sigma_{pq}^{st}\,d_{ts}^{-1kl}$. Отметим, что указанное условие эквивалентно равенству $\dim\ker p_1=\frac{n(n+1)}{2}$.

Гипотеза. Это условие является и достаточным, т. е., если тензоры H обобщенной алгебры Ли и обычной алгебры Ли эквивалентны, другими словами, если у них одинакова кратность единицы (или минус единицы) как собственного числа, то существует (хотя бы формальный) оператор типа Дельсарта, первые генераторы которого порождают обобщенную алгебру Ли, совпадающую с исходной.

Институт Африки АН СССР Поступила 4.VIII.1981

Դ. Ի. ԳՈՒՐԵՎԻՉ. Ընդհանրացված տեղաշարժի օպերատորները Լիի խմբերի վրա. *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում է ընդհանրացված տեղաշարժի օպերատորների (հիպերխմբերի) մի նոր դաս և ուսումնասիրվում է համապատասխան հանրահաշվական օբյեկտների կառուցվածքը։

D. I. GUREVICH. *Generalized translation operators on Lie groups* (summary)

The paper deals with a new class of generalized translation operators (on hypergroups) and with appropriately defined "algebraic objects".

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Delsarte*. Sur une extension de la formule de Taylor, Journ. Math. pures et appl., 17, 1938, 213—230.
2. *Б. М. Левитан*. Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, УМН, 4, № 1, 1949, 3—111.
3. *Б. М. Левитан*. Теоремы Ли для операторов обобщенного сдвига, ДАН СССР, 123, № 1, 1958, 32—35.
4. *Б. М. Левитан*. Обратные теоремы Ли для операторов обобщенного сдвига, ДАН СССР, 23, № 2, 1958, 243—245.
5. *Б. М. Левитан*. Теория операторов обобщенного сдвига, «Наука», М., 1973.
6. *Г. Л. Литвинов*. Об операторах обобщенного сдвига и их представлениях, Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, вып. XVIII, 1977, 345—371.
7. *K. A. Ross*. Hypergroups and centers of measure algebras, Symposia Math. Inst. Naz. Alta Mat., XXII, 1977, 189—203.
8. *В. М. Бухштабер*. Двузначные формальные группы, Изв. АН СССР, сер. матем., 39, № 5, 1975, 1044—1064.
9. *Д. И. Гуревич*. Операторы обобщенного сдвига с правым инфинитезимальным оператором Штурма—Лиувилля, Матем. заметки, 25, № 3, 1979, 393—408.
10. *Р. Я. Грабовская, В. И. Кононенко, В. Б. Осипов*. Об одном семействе операторов обобщенного сдвига, Изв. АН СССР, сер. матем., 41, № 4, 1977, 912—936.
11. *М. В. Мосолова*. О функциях от некоммутирующих операторов, порождающих градуированную алгебру Ли, Матем. заметки, 29, № 1, 1981, 35—44.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 4, 1983 Математика

УДК 519.6

Б. Н. ПШЕНИЧНЫЙ, Р. А. ХАЧАТРЯН

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

В этой работе строятся необходимые условия экстремума для задач с негладким ограничением типа равенства. Локальные свойства функций описываются верхней выпуклой аппроксимацвий, определение которой дается ниже. Для данной функции верхняя выпуклая аппроксимация определяется неоднозначно. Но чем полнее описан класс верхних выпуклых аппроксимаций, тем содержательнее оказываются необходимые условия экстремума.

§ 1. Определения и обозначения

Рассмотрение ведется в конечномерном пространстве X, элементы которого обозначаются x, y и т. п. X^* — пространство непрерывных линейных функционалов с элементами x^*, y^* и т. п. $< x^*, x>$ — значение функционяла x^* на элементе x. Con M, lin M, dim M, cl M, ri$M$, FrM—соответственно коническая оболочка, несущее подпространство, размерность, замыкание, относительная внутренность, относительная граница выпуклого множества $M\subset X$. Пусть A и B—две точки пространства X. Тогда $\underline{AB}$ — прямая, проходящая через точки A и B $\overline{AB}$ — луч, исходящий из точки A и проходящий через точку B:

$[A; B]$— отрезок, соединяющий точки A и B.

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая может принимать как конечные значения, так и значения $+\infty$, $-\infty$. Множество точек, в которых значение $f(x)$ конечно, обозначается через dom f;

$$\mathrm{dom}\, f=\{x\in X/|f(x)|<+\infty\}.$$

Определение 1. Пусть $x\in \mathrm{dom}\, f$. Тогда для $\bar{x}\neq 0$

$$F(x, \bar{x})=\lim_{\lambda\downarrow 0}\sup_{\bar{y}\to\bar{x}}\frac{f(x+\lambda\bar{y})-f(x)}{\lambda}.$$

Определение 2. Функция f в точке $x\in\mathrm{dom}\, f$ допускает верхнюю выпуклую аппроксимацию (в дальнейшем в.в.а), если

а) $h(x, \bar{x})\geqslant F(x, \bar{x})$,

в) $h(x, \bar{x})$ как функция $\bar{x}$ выпукла, положительно однородна и замкнута.

Определение 3. Если $h(x, \bar{x})$ есть в.в.а. для f в точке x, то множество $\partial h(x, 0)=\{x^*\in X^*/h(x, \bar{x})\geqslant<x^*, \bar{x}>, \bar{x}\in X\}$ называется субдифференциалом функции f в точке x и обозначается $\partial f(x)$.

Важно отметить, что в.в.а. и субдифференциал определяются неоднозначно. В этом есть свои положительные стороны, которые будут более ясны из дальнейшего изложения. Легко доказываются следующие леммы.

Лемма 1. *Если $h(x, \bar{x})$ есть в.в.а. для f в точке x, то существует функция $r(\bar{x})$ такая, что*

$$f(x+\bar{x}) \leqslant f(x) + h(x, \bar{x}) + r(\bar{x}),$$

$\lim\limits_{\bar{x}\to 0} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} = 0$, *где $\|\cdot\|$ — евклидова норма пространства X.*

Положим $f^+(x) \equiv f(x)$, $f^-(x) \equiv -f(x)$. Величины, относящиеся к f^+ и f^-, будем обозначать соответствующим индексом „+" или „−".

Лемма 2. *Если $h^+(x_0, \bar{x})$, $h^-(x_0, \bar{x})$ — в.в.а. для f^+ и f^- в точке x_0, то*

$$h^+(x_0, \bar{x}) + h^-(x_0, \bar{x}) \geqslant 0, \ \bar{x} \in X.$$

Лемма 3. *Пусть $K = \{\bar{x} / h^+(x_0, \bar{x}) \leqslant 0, \ h^-(x_0, \bar{x}) \leqslant 0\}$. Тогда* $K^* = -\operatorname{cl}\{\operatorname{con} \partial f^+(x_0) + \operatorname{con} \partial f^-(x_0)\}$.

В дальнейшем при получении необходимых условий экстремума используем следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. Пусть x_0 — точка минимума функции $f(x)$ на множестве M, $K_M(x_0)$ — конус касательных направлений к множеству M в точке x_0. Пусть $h(x_0, x)$ есть в.в.а. для функции f в точке x_0. Тогда, если $\operatorname{ri}\operatorname{dom} h(x_0, \cdot) \cap K_M(x_0) \neq \varnothing$, то

$$\partial f(x_0) \cap K^*_M(x_0) \neq \varnothing.$$

§ 2. Основная теорема о локальном шатре

Пусть теперь $f(x)$ — некоторая функция, обращающаяся в нуль в точке x_0. Нас будет интересовать построение конуса касательных направлений к множеству $M = \{x / f(x) = f(x_0) = 0\}$ в точке x_0.

Теорема 2. *Пусть h^+ и h^- — в.в.а. для f^+ и f^- в точке x_0 и выполняются следующие условия:*

а) *существует вектор $W \in X$ такой, что*

$$h^+(x_0, W) < 0, \ h^-(x_0, -W) < 0,$$

б) *$h^+(x, W)$ — полунепрерывна сверху по x в точке x_0.*

в) *f — непрерывна в некоторой окрестности точки x_0.*

Тогда выпуклый конус $K = \{\bar{x} / h^+(x_0, \bar{x}) \leqslant 0, \ h^-(x_0, \bar{x}) \leqslant 0\}$ является локальным шатром [1] к множеству M в точке x_0.

Доказательство. Так как предполагается, что X конечномерно, то согласно лемме 2 имеем

$$f^+(x_0 + x) \leqslant h^+(x_0, \bar{x}) + r^+(\bar{x})$$

для некоторой функции $r^+(\bar{x})$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{\bar{x}\to 0} \frac{r^+(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} = 0. \text{ Положим } p^+(\lambda) = \sup\{r^+(\bar{x}) / \|\bar{x}\| \leqslant \lambda\}.$$

Ясно, что $p^+(\lambda)$ монотонно не убывает и $p^+(\lambda)/\lambda \to 0$ при $\lambda \downarrow 0$ и $r^+(\bar{x}) \leqslant p^+(\|\bar{x}\|)$. Поэтому для $\bar{x} \in K$, $\gamma > 0$ получаем

$$f^+(x_0 + \bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| W) \leqslant h^+(x_0, \bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| W) +$$

$$+ p^+(\|\bar{x}\| + \gamma \|\bar{x}\| \cdot \|W\|) < h^+(x_0, \bar{x}) + \gamma \|\bar{x}\| h^+(x_0, W) +$$

$$+ p^+(\|\bar{x}\|(1 + \gamma \|W\|)) = \|\bar{x}\| \left[\gamma h^+(x_0, W) + \frac{p^+((1 + \gamma \|W\|)\|\bar{x}\|)}{\|\bar{x}\|} \right].$$

Выберем теперь δ_γ^+ настолько малым, чтобы выражение, выделенное в квадратных скобках, было меньше, чем

$$1/2\, \gamma\, h^+(x_0, W) \text{ при } \|\bar{x}\| \leqslant \delta_\gamma^+. \text{ Тогда}$$

$$f^+(x_0 + \bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| W) \leqslant 1/2\, \gamma\, h^+(x_0, W) \|\bar{x}\| < 0.$$

Аналогично, нетрудно получить оценку

$$f^-(x_0 + \bar{x} - \gamma \|\bar{x}\| W) \leqslant \|\bar{x}\|\, 1/2\, \gamma h^-(x_0, -W) < 0$$

при $\|\bar{x}\| \leqslant \delta_\gamma^-$.

Из этих двух оценок следует, что

$$f(x_0 + \bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| W) < 0,$$

$$f(x_0 + \bar{x} - \gamma \|\bar{x}\| W) > 0$$

при $\|\bar{x}\| < \delta_\gamma = \min\{\delta_\gamma^-, \delta_\gamma^+\}$.

Рассмотрим теперь функцию $q(\omega) = f(x_0 + \bar{x} + \omega \|\bar{x}\| W)$. Имеем $q(\gamma) < 0$, $q(-\gamma) > 0$. Так как $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0, то при достаточно малых $\bar{x}$ непрерывна будет и функция $q(\omega)$. Поскольку $q(\omega)$ на отрезке $[-\gamma, +\gamma]$ меняет знак, то в некоторой точке $\omega(\bar{x}) \in [-\gamma, +\gamma]$ она обращается в нуль. Итак, для некоторого $\gamma > 0$ существует $\delta_\gamma > 0$ такое, что

$$f(x_0 + \bar{x} + \|\bar{x}\| W(\bar{x})\, w) = 0, \ |\omega(\bar{x})| \leqslant \gamma \ \ \|\bar{x}\| \leqslant \delta_\gamma.$$

Заметим теперь, что

$$\limsup_{\Delta \downarrow 0} \frac{q(\omega + \Delta) - q(\omega)}{\Delta} = \limsup_{\Delta \downarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + \bar{x} + (\omega + \Delta)\|\bar{x}\| W)}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - \frac{f(x_0 + \bar{x} + \omega \|\bar{x}\| W}{\Delta} \right] \leqslant \|\bar{x}\| h^+(x_0 + \bar{x} + \omega \|\bar{x}\| W, W).$$

Поэтому в силу полунепрерывности сверху функции $h^+(x, W)$ по x в точке x_0 и условия $h^+(x_0, W) < 0$, имеем

$$\limsup_{\Delta \downarrow 0} \frac{q(\omega + \Delta) - q(\omega)}{\Delta} < 0.$$

при достаточно малых $\bar{x}$.

Отсюда следует, что $q(\omega)$ монотонно убывает и, следовательно, на отрезке $[-\gamma, +\gamma]$ имеет единственный корень. Поэтому функция $\omega(\bar{x})$ для достаточно малых $\bar{x}$ определяется однозначно. Из $|\omega(\bar{x})| \leqslant \gamma$ и $\|\bar{x}\| \leqslant \delta_\gamma$ следует, что $\omega(\bar{x}) \to 0$ при $\bar{x} \to 0$. Покажем теперь, что в некоторой окресности нуля $\omega(\bar{x})$ непрерывна. Допустим противное. Так как $\omega(x)$ ограничена в некоторой окрестности нуля, то существует вектор $\bar{x}_0$ и две последовательности $\{\bar{x}_i\}$, $\{\bar{y}_i\}$ такие, что $\omega(\bar{x}_i) \to \bar{\omega}$, $\omega(\bar{y}_i) \to \underline{\omega}$ и $\bar{\omega} \neq \underline{\omega}$. Но из непрерывности $f(x)$ в окрестности точки x_0 и в силу монотонности вытекает

$$f(x_0 + \bar{x}_0 + \bar{\omega}\|\bar{x}_0\| W) = 0,$$

$$f(x_0 + \bar{x}_0 + \underline{\omega}\|\bar{x}_0\| W) = 0,$$

$$|\bar{\omega}| \leqslant \gamma, \ |\underline{\omega}| \leqslant \gamma.$$

Но $\bar{\omega} = \underline{\omega}(x_0)$ в силу однозначности $\omega(\bar{x})$.

Таким образом, показано, что в малой окрестности нуля и при $\bar{x} \in K$ функция непрерывна по $\bar{x}$ и $\omega(\bar{x}) \to 0$,

$$f(x_0 + \bar{x} + \omega(\bar{x})\|\bar{x}\| W) = 0.$$

Пусть $\Pi(\bar{x})$ есть проекция точки $\bar{x} \in X$ на множество K. Так как K замкнуто и $0 \in K$, то $\Pi(\bar{x}) \in K$ и $\|\Pi(\bar{x})\| \leqslant \|\bar{x}\|$.

Положим $\psi(\bar{x}) = \bar{x} + \omega(\Pi(\bar{x}))\|\bar{x}\| W$.

Тогда $\psi(\bar{x})$ — непрерывная функция, определенная в окрестности нуля и такая, что

$$f(x_0 + \psi(\bar{x})) = 0, \ \bar{x} \in K, \text{ т. е.}$$

$$x_0 + \psi(\bar{x}) \in M, \quad \text{при} \quad \bar{x} \in \varepsilon S_1(0) \cap K \text{ и } \lim_{x \to 0} \frac{\|\psi(\bar{x}) - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = 0,$$

где ε — достаточно малое положительное число, $S_1(0)$ — единичный шар с центром в начале координат. Это и означает, что K есть локальный шатер к M в точке x_0. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, при соответствующих предположениях, непосредственно следует, что множество $K = \{\bar{x}/h^+(x^0, \bar{x}) \leqslant 0, \ h^-(x_0, \bar{x}) \leqslant 0\}$ является конусом касательных направлений в точке x_0 к множеству $M = \{x/f(x) = 0\}$.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ — конечная непрерывная выпуклая функция на X. $0 \bar{\in} \partial f(x_0)$, $x_0 \in M = \{x | f(x) = 0\}$. Пусть $\mathrm{Fr}^0\, \partial f(x_0)$ — множество таких граничных точек из $\partial f(x_0)$, через которые можно провести опорную гиперплоскость, проходящую через нуль. Тогда для $x^* \in \partial f(x_0)$*

$$K_M(x^*, x_0) = \{\bar{x} | f'(x_0, \bar{x}) = 0, \ \langle -x^*, \bar{x} \rangle = 0\} \neq \{0\}$$

только тогда, когда $x^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f(x_0)$.

Из-за простоты доказательство теоремы не приводим. Поскольку любая функция вида $h^-(x_0, \bar{x}) = \langle -x^*, \bar{x} \rangle$, $x^* \in \partial f(x_0)$ есть в.в.а. для вогнутой функции $f^- \equiv -f$ в точке x_0, то из доказанных теорем 2, 3 следует, что для произвольного $x^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f(x_0)$ конус

$$K_M(x_0, x^*) = \{\bar{x} \mid f'(x_0, \bar{x}) = 0, \langle -x^*, \bar{x} \rangle = 0\}$$

есть локальный шатер к множеству $M = \{x \mid f(x) = f(x_0) = 0\}$ в точке x_0. Итак, в этом случае касательный конус определен неоднозначно.

Теорема 4. *Пусть* $f(x)$ *выпукла на* X.

$$0 \overline{\in} \partial f(x_0) - x_0 \in X. \text{ Если } \dim \operatorname{con} \partial f(x_0) \geqslant 2,$$

то

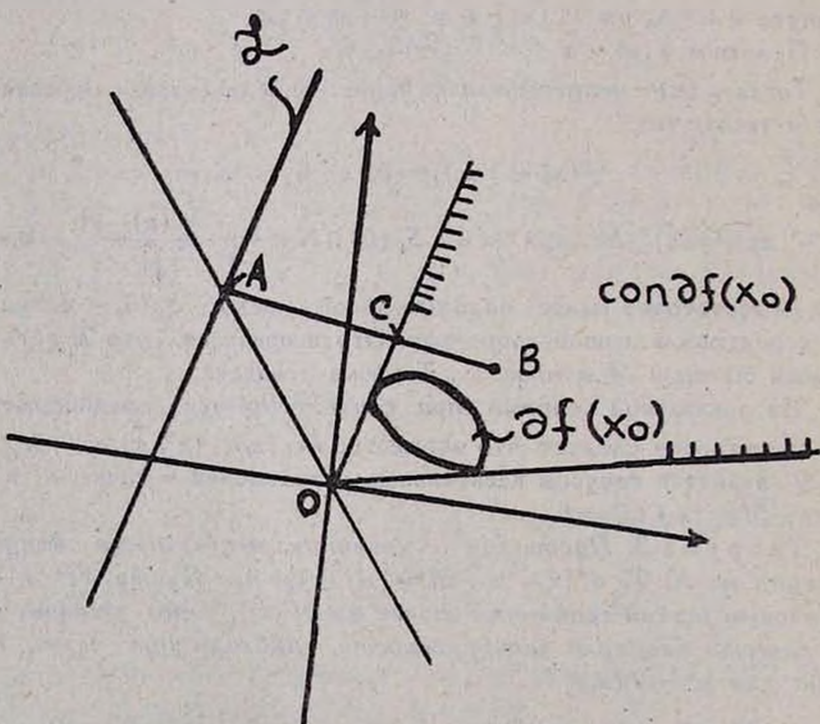
$$\bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0 \partial f(x_0)} \mathrm{cl}\,[\operatorname{con} \partial f(x_0) - \operatorname{con} x^*] = \operatorname{con} \partial f(x_0).$$

Доказательство. Заметим, что если $\dim \operatorname{con} \partial f(x_0) = 1$, то утверждение теоремы не имеет места. В частности, когда $f(x)$ дифференцируема, то утверждение теоремы неверно.

Так как $0 \in \operatorname{con} x^*$, то $\operatorname{con} \partial f(x_0) \subset \operatorname{con} \partial f(x_0) - \operatorname{con} x^*$ для произвольного $x^* \in X^*$. Отсюда

$$\operatorname{con} \partial f(x_0 \subset \bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0 \partial f(x_0)} \mathrm{cl}\,[\operatorname{con} \partial f(x_0) - \operatorname{con} x^*].$$

Покажем обратное включение. Пусть $A \overline{\in} \operatorname{con} \partial f(x_0)$. Нужно доказать, что $A \overline{\in} \operatorname{con} \partial f(x_0) - \operatorname{con} x^*$ для некоторого $x^* \in \mathrm{Fr}^0 \partial f(x_0)$. Если $A \overline{\in} \operatorname{lin} \partial f(x_0)$, то $A \overline{\in} \operatorname{con} \partial f(x_0) - \operatorname{con} x^*$ для произвольного $x^* \in \partial f(x_0)$. Остается рассмотреть случай $A \in \operatorname{lin} \partial f(x_0)$. Так как размерность конуса $\operatorname{con} \partial f(x_0)$ не меньше двух, то в относительной внутренности ко-



нуса существует точка B, не лежащая на прямой AO, где O— начало координат (рис.). Отметим, что прямая AO может пересекаться с относительной внутренностью конуса $\operatorname{con} \partial f(x_0)$. Так как луч $\overline{AB}$ целиком не принадлежит конусу (ибо $A \overline{\in} \operatorname{con} \partial f(x_0)$), то он содержит относительную граничную точку C конуса $\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$. В силу того, что $\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$ замкнут и $A \neq B$, то $A \neq C$ и $C \neq O$. Через точку A проведем прямую L, параллельную OC. Покажем, что прямая L не пересекается с конусом $\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$. Действительно, допустим, что на прямой L имеется точка $D \in \mathrm{con}\,\partial f(x_0)$. Все точки O, A, B, C, D лежат в одной двумерной плоскости, причем точки A и B лежат в этой плоскости по разные стороны прямой OC. Так как AD параллельно OC, то A и D лежат по одну сторону прямой OC, следовательно точки D и B лежат по разные стороны прямой, т. е. отрезок $[D; B]$ пересекает прямую OC в некоторой точке E. Так как $D \in \mathrm{con}\,\partial f(x_0)$ и $B \in \mathrm{ricon}\,\partial f(x_0)$, то $E \in \mathrm{ricon}\,\partial f(x_0)$. Значит все точки луча $\overline{OE}$, кроме O, являются относительно внутренними точками конуса $\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$. Так как C принадлежит прямой OE и не является внутренней, то она не принадлежит лучу $\overline{OE}$. Это значит, что она принадлежит противоположному лучу, исходящему из O. Но тогда O есть относительно внутреняя точка конуса $\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$. Это — противоречие. Таким образом, доказали, что существует вектор $C \in \mathrm{Fr}\,\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$ такой, что

$$A + \lambda C \bar{\in} \mathrm{con}\,\partial f(x_0), \ \forall \lambda \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что существует вектор $x^* \in \mathrm{Fr}^0\,\partial f(x_0)$ такой, что

$$A \bar{\in} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\,\partial f(x_0) - \mathrm{con}\,x^*].$$

Тем более

$$A \bar{\in} \bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0\,\partial f(x_0)} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\,\partial f(x_0) - \mathrm{con}\,x^*].$$

Таким образом

$$\bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0 \in \partial f(x_0)} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\,\partial f(x_0) - \mathrm{con}\,x^*] \subset \mathrm{con}\,\partial f(x_0).$$

Теорема доказана.

§ 3. Необходимые условия экстремума

Теорема 5. *Пусть x_0 — точка минимума функции $f_0(x)$ при ограничении $f_1(x)=0$, где $f_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, а $f_1(x)$ — выпукла на X. Пусть $0 \bar{\in} \partial f_1(x_0)$. Тогда, если*

$$\dim \mathrm{con}\,\partial f_1(x_0) = 1, \ \textit{то} \ 0 \in f_0'(x_0) + \mathrm{lin}\,\partial f_1(x_0),$$

если $\dim \mathrm{con}\,\partial f_1(x_0) \geqslant 2$, *то* $0 \in f_0'(x_0) + \mathrm{con}\,\partial f_1(x_0)$.

Доказательство. Легко проверить, что выполняются все предположения теоремы 2. Так что для любого $x^* \in \mathrm{Fr}^0\,\partial f_1(x_0)$ множество $K_M(x^*, x_0) = \{\bar{x} \in X / f_1'(x_0, \bar{x}) = 0, \langle -x^*, \bar{x} \rangle = 0\}$ является конусом касательных направлений к множеству $M = \{x \in X / f_1(x) = 0\}$ в точке x_0.

Согласно лемме 3

$$K_M^*(x^*, x_0) = -\mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\,\partial f_1(x_0) - \mathrm{con}\,x^*].$$

Тогда на основании теоремы 1

$$\{f_0'(x_0)\} \cap K_M^*(x^*, x_0) \neq \varnothing, \ \forall x^* \in \mathrm{Fr}^0\,\partial f_1(x_0).$$

Отсюда

$$0 \in f_0(x_0) + \bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0)} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) - \mathrm{con}\, x^*].$$

Если $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) = 1$, то для любого $x^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0)$

$$\mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) - \mathrm{con}\, x^* = \mathrm{lin}\, \partial f_1(x_0).$$

Итак, получено первое утверждение теоремы.

Если $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) > 2$, то согласно теореме 4

$$\bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0)} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) - \mathrm{con}\, x^*] = \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0).$$

Таким образом, выполнено и второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполнены все предположения теоремы 5. Тогда если $f_0(x)$ — выпукла и $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) \geqslant 2$, то точка x_0 будет и точкой минимума функции $f_0(x)$ при ограничении $f_1(x) \leqslant 0$.

Доказательство. Если $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) \geqslant 2$, согласно теореме существует число $\lambda \geqslant 0$ такое, что

$$0 \in f_0(x_0) + \lambda \partial f_1(x_0).$$

Отсюда следует, что выпуклая функция $f_0(x) + \lambda f_1(x)$ принимает свое минимальное значение на X в точке x_0, т. е.

$$f_0(x_0) + \lambda f_1(x_0) \leqslant f_0(x) + \lambda f_1(x), \ \forall x \in X.$$

Отсюда, если x такой, что $f_1(x) \leqslant 0$, то $f_0(x_0) \leqslant f_0(x)$.

Теорема 6. *Пусть x_0 — точка максимума функции $f_0(x)$ при ограничении $f_1(x) = 0$, где $f_0(x)$, $f_1(x)$ — выпуклые функции на X. Пусть $0 \overline{\in} \partial f_1(x_0)$. Тогда, если* $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) = 1$, *то*

$$\partial f_0(x_0) \subset \mathrm{lin}\, \partial f_1(x_0),$$

если $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) > 2$, *то*

$$\partial f_0(x_0) \subset \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0).$$

Доказательство. Задача эквивалентна минимизации $-f_0(x)$ при ограничении $f_1(x) = 0$.

Известно, что любая функция вида $h_0(x_0, \bar{x}) = \langle -x^*, \bar{x} \rangle$,

$$x^* \in \partial f_0(x_0)$$

есть в.в.а. для $-f_0(x)$ в точке x_0, а $\{-x^*\}$, $x^* \in \partial f_0(x_0)$ есть субдифференциал f в x_0. С другой стороны, для любого $y^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0)$ конус

$$K_M(y^*, x_0) = \{\bar{x} \in X / f_1'(x_0, \bar{x}_0) = 0, \langle -y^*, \bar{x} \rangle = 0\}$$

является конусом касательных направлений к множеству $M = \{x \in X / f_1(x) = 0\}$ в точке x_0. Так что, согласно теореме 1

$$\{-x^*\} \cap K_M^*(x_0, y^*) \neq \varnothing,$$

$$\forall x^* \in \partial f_0(x_0), \ \forall y^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0).$$

Фиксируем $x^* \in \partial f_0(x_0)$, тогда

$$x^* \in \bigcap_{y^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0)} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) - \mathrm{con}\, y^*].$$

Отсюда, если $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1 (x_0)=1$, то $x^* \in \mathrm{lin}\, \partial f_1 (x_0)$.
Так как x^* — произвольная точка из $\partial f_0 (x_0)$, то

$$\partial f_0 (x_0) \subset \mathrm{lin}\, \partial f_1 (x_0).$$

Если $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1 (x_0) > 2$, то согласно теореме 4

$$\bigcap_{y^* \in \mathrm{Fr}^*\, \partial f_1 (x_0)} \mathrm{cl}\, [\mathrm{con}\, \partial f_1 (x_0) - \mathrm{con}\, y^*] = \mathrm{con}\, \partial f_1 (x_0).$$

Итак, для произвольного $x^* \in \partial f_0 (x_0)$, $x^* \in \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0)$. Отсюда $\partial f_0 (x_0) \subset$ $\subset \mathrm{con}\, \partial f_1 (x_0)$.

Теорема доказана.

Институт кибернетики
АН Украинской ССР

Поступила 6.X.1981

Բ. Ն. ՊՇԵՆԻՉՆԻ, Ռ. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Ոչ ողորկ ֆունկցիաների համար էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանների մասին *(ամփոփում)*

Այս աշխատանքում ստացվել են էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններ մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրների համար, որոնցում սահմանափակումները տրված են ոչ ողորկ ֆունկցիաներով։

B. N. PSHENICHNY, R. A. KHACHATRIAN. *On necessary conditions of extremum for nonsmooth functions* (summary)

In the paper necessary conditions of extremum for the problems of mathematical programming with nonstraints of equality type are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Н. Пшеничный.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи, М., «Наука», 1980.
2. *В. Г. Болтянский.* Метод шатров в теории экстремальных задач, УМН, 33, № 6, 1975, 3—55.
3. *F. H. Clarke.* A new approach to lagrange multipliers, Mathematics of operations research, Vol. 1, № 2, 1976, 165—174.
4. *Р. Рокафеллар.* Выпуклый анализ, М., «Мир», 1973.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS