ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀՄԱՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ «Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
зам. главного редактора
Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилии автора, название место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

Գին 85 կ.
ЦЕНА 85 К.

Индекс 77735

411ս Յ

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKII

exacutive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 3, 1983 Математика

УДК 517.53

С. Г. РАФАЕЛЯН

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И БАЗИСНОСТЬ В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Введение

1. Первоначально в работе [1], а затем в монографии [2] М. М. Джрбашяном была построена теория гармонического анализа в комплексной области, а именно на системе лучей, исходящих из точки $z=0$. Эта теория явилась глубоким аналогом классической теоремы Фурье-Планшереля, послужила основой для установления общих результатов типа известных теорем Винера—Пэли для целых функций произвольного конечного порядка и нормального типа. На этом пути были получены параметрические представления общих классов целых функций $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$.

Данная работа посвящена решению кратной интерполяционной задачи и построению базисов в классах $W^{p,\omega}_{\sigma}$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<<p-1,\ \sigma>0)$ функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant\sigma$, для которых

$$\|f\|^p_{W^{p,\omega}_{\sigma}}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,|x|^{\omega}\,dx<+\infty.$$

Пусть, далее, $\{z_k\}_0^\infty$ — данная последовательность комплексных чисел и $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$. Требуется, во-первых, описать класс всех последовательностей $\{c_k\}_0^\infty$, для которых обеспечено существование функций $f\in W^{p,\omega}$, удовлетворяющих условиям $f^{(s_k-1)}(z_k)=c_k$ $(k\geqslant 0)$, и, во-вторых, построить аппарат для представления решений такой интерполяционной задачи.

Такая задача в классах $W^{p,0}_{\sigma}\equiv W^{p}_{\sigma}$ была поставлена и решена Б. Я. Левиным [3] (см. также [4]) в случае отсутствия кратностей (т. е. $s_k=1$, $k\geqslant 0$). В случае же кратных корней в работе Б. Я. Левина [5] была установлена теорема о разложимости функций класса $W^{2,0}_{\sigma}$ по подпоследовательностям их разложений в ряд Эрмита (см. также [6]). В этих работах [3, 4] в качестве узлов интерполяции $\{z_k\}_0^\infty$ брались нули целой функции типа синуса. Целая функция $S(z)$ экспоненциального типа называется функцией типа синуса, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) Все нули функции $S(z)$ простые и лежат в некоторой горизонтальной полосе $|y|<h$ $(z=x+iy)$.

2) При некотором фиксированном значении y_0 справедливо неравенство:

$$0 < m \leqslant |S(x+iy_0)| \leqslant M < +\infty.$$

3) Типы функций $S(z)$ в верхней и нижней полуплоскостях равны.

Класс функций типа синуса был введен Б. Я. Левиным [3, 5], в частности, в связи с вопросами интерполяции в классах целых функций и при изучении базисов Рисса в $L_2(a, b)$. Его основная теорема об интерполяции следующая.

Теорема 3. Пусть $S(z)$ — функция типа синуса и $\{z_k\}_0^\infty$ — ее нули. Тогда:

1°. Для любой последовательности $\{c_k\} \in l^p$ $(p>1)$ интерполяционный ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{S(z)}{S'(z_k)(z-z_k)}$$

сходится равномерно на любом компакте в комплексной плоскости.

2°. Сходится также по норме пространства $L^p(-\infty, \infty)$ и дает линейное топологическое отображение всего пространства l^p на все пространства W_σ^p целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, интегрируемых в p-ой степени на вещественной оси.

3°. Кроме того, $f(z_k) = c_k$ $(k \geqslant 0)$ и справедливы неравенства

$$\|f\|_{W_\sigma^p} \asymp \|\{c_k\}\|_{l^p}^*.$$

2. В данной работе решается интерполяционная задача в классах целых функций $W_\sigma^{p,\omega}$, при этом в качестве узлов интерполяции рассматриваются нули целых функций из класса более общего, чем класс функций типа синуса. Строится также аппарат для эффективного построения решений такой задачи.

§ 1 посвящен изучению ряда свойств классов $W_\sigma^{p,\omega}$. Отметим, что в совместной с М. М. Джрбашяном статье автора [7] (см. также [8]) отмеченные выше результаты Б. Я. Левина были распространены на весовые пространства $W_\sigma^{p,\omega}$ с узлами в нулях $\sin \sigma z$. Поскольку в указанной статье были намечены лишь краткие доказательства свойств пространства $W_\sigma^{p,\omega}$, автор счел нужным изложить здесь их полностью с несколько более общими формулировками.

В § 2 вводятся и изучаются специальные классы целых функций $S_\varkappa$. Целая функция $S(z)$ экспоненциального типа σ $(0<\sigma<\infty)$ называется функцией из класса $S_\varkappa$ $(-\infty < \varkappa < \infty)$, если

$$0 < c < |S(z)\, z^{-\varkappa}|\, e^{-\sigma|\operatorname{Im} z|} < C < +\infty \quad (|\operatorname{Im} z| > K),$$

где c, C, K — некоторые положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от $S(z)$ и $\inf\limits_{z_k \neq z_j} |z_k - z_j| > 0$ $(\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность нулей функции $S(z)$).

---

* Символ $\asymp$ означает, что отношение величин, стоящих в правой и левой частях, заключено между двумя положительными постоянными, зависящими только от функции f.

Отметим, что если $\varkappa = 0$ и нули $S(z)$ простые, то $S(z)$ — целая функция типа синуса. Иначе говоря, класс функций типа синуса—это подкласс тех функций из S_0, которые не имеют кратных нулей.

Перечислим некоторые свойства функций из класса $S_\varkappa$, которые установлены в § 2.

Пусть $S(z) \in S_\varkappa$ *и* $\{z_k\}_0^\infty$ — *последовательнсcть ее корней, а* $s_j \geqslant 1$ *и* $p_j \geqslant 1$ $(j \geqslant 0)$ — *кратности появления числа* z_j *соответственно на отрезке* $\{z_k\}_0^j$ *и во всей последовательности* $\{z_k\}_0^\infty$. *Тогда:*

1) *Вне* δ*-окрестности корней, т. е. на множестве* $\bigcap_k \{z; |z - z_k| \geqslant \delta\}$ *имеет место*

$$|S(z)| \asymp (1+|z|)^\varkappa e^{\sigma|y|};$$

2) *Справедливо неравенство*

$$|S^{(p_k)}(z_k)| \geqslant c(1+|z_k|)^\varkappa, \quad k \geqslant 0,$$

где $c > 0$ *не зависит от* k;

3) *При любом* $a > 1$ *ряд* $\sum_k (1+|z_k|)^{-a}$ *сходится;*

4) *Для любой функции* $f(z) \in W_\sigma^{p,\omega}$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^\varkappa < c\, \|f\|^p_{W_\sigma^{p,\omega}},$$

где $c > 0$ *не зависит от* f.

Отметим, что в специальном случае, когда $\varkappa = 0$, $s_k = 1$, все эти утверждения были установлены Б. Я. Левиным [3].

§ 3 посвящен вопросам интерполяции в классах $W_\sigma^{p,\omega}$. Здесь сначала строится система целых функций экспоненциального типа $\{\Omega_k(z)\}_0^\infty$, обладающая следующими интерполяционными свойствами:

$$\Omega_k^{(s_j-1)}(z_j) = \delta_{k,j} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j, \end{cases} \quad (k, j > 0),$$

где $\{z_j\}_0^\infty$ — последовательность нулей целой функции $S(z) \in S_\varkappa$. При построении этой системы функций мы используем метод биортогонализации М. М. Джрбашяна (см. [9]).

С применением этих систем в § 3 получена следующая общая (теорема 3.4).

Теорема. *Пусть* $\{z_k\}_0^\infty$ — *нули функции* $S(z) \in S_\varkappa$, *где* $-1 < \varkappa + p\omega < p - 1$. *Тогда ряд*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Omega_k(z)$$

дает линейное топологическое отображение всего пространства $l_\varkappa^{p,\omega}$ *на все пространство* $W_\sigma^{p,\omega}$, *причем*

$$\|f\|_{W_\sigma^{p,\omega}} \asymp \|\{c_k\}\|_{l_\varkappa^{p,\omega}},$$

где $l^{p,\omega}_{\varkappa}$ *определяется как множество последовательностей* $\{c_k\}_0^{\infty}$, *для которых* $\sum\limits_0^{\infty} |c_k|^p (1+|z_k|)^{\varkappa} < +\infty$, где $\{z_k\}_0^{\infty}$ — нули функции $S(z) \in S_{\varkappa}$.

В качестве следствия из этой теоремы получена следующая теорема единственности:

Если $f(z) \in W^{p,\omega}_{\sigma}$, $\{z_k\}_0^{\infty}$ — нули функции $S(z) \in S_{\varkappa}$. $-1 < \omega + p\varkappa < p-1$ и $f^{(s_k-1)}(z_k) = 0$, $k \geqslant 0$, то $f(z) \equiv 0$.

Уместно сравнить теорему 3.4 с приведенной выше теоремой Б. Я. Левина в специальных случаях, когда $\omega = 0$ $\varkappa \neq 0$ и когда $\omega \neq 0$, $\varkappa = 0$.

1) При $\omega = 0$ и $\varkappa \neq 0$ теорема 3.4 дает теорему интерполяции и базисности в классе Винера—Пэли $W^p_{\varkappa}$ с узлами интерполяции, более общими, чем нули функции типа синуса.

2) Когда $\omega \neq 0$, $\varkappa = 0$, из теоремы 3.4, в частности, следуют результаты об интерполяции и базисности с узлами в нулях функции типа синуса, но уже в весовых классах $W^{p,\omega}_{\sigma}$.

Приношу глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство.

§ 1. Целые функции экспоненциального типа класса $W^{p,\omega}_{\sigma}$

a) Пусть $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, $0 < \sigma < +\infty$. Обозначим через $W^{p,\omega}_{\sigma}$ пространство целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ с нормой

$$\|f\|_{p,\omega} \equiv \|f\|_{W^{p,\omega}_{\sigma}} = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, |x|^{\omega} \, dx \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1.1}$$

Классы функций $W^{2,\omega}_{\sigma}$ (и более общие классы) впервые были введены М. М. Джрбашяном и им были установлены параметрические представления этих классов.

Обозначим, далее, через $H^{p,\omega}_{+}$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \omega < p-1)$ класс функций $F(z)$, аналитических в верхней полуплоскости и удовлетворяющих условию

$$\|F\|_{p,\omega} \equiv \|F\|_{H^{p,\omega}_{+}} = \sup_{y>0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p \, |x|^{\omega} \, dx \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1.2}$$

Аналогично определяется класс $H^{p,\omega}_{-}$ в нижней полуплоскости.

С классом функций $W^{p,\omega}_{\sigma}$ рассмотрим также класс $W^{p,\omega}_{\sigma}[\gamma]$ — класс целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ с нормой

$$\|f\|_{p,\omega,\gamma} = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, |x+i\gamma|^{\omega} \, dx \right\}^{1/p} < +\infty \tag{1.3}$$

где $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, $-\infty < \gamma < +\infty$.

Заметим, что: $W^{p,\omega}_{\sigma}[0] \equiv W^{p,\omega}_{\sigma}$ и $\|f\|_{p,\omega,0} = \|f\|_{p,\omega}$.

Лемма 1.1. *Если* $f(z) \in W^{p,\omega}_{\sigma}[\gamma]$, $(0 \leqslant \gamma < +\infty)$, *то соответственно*

$$1^\circ. \qquad \varphi^{\pm}(z) = e^{\pm i\sigma z}(z + i\gamma)^{\omega/p} f(z) \in H^p_+, \tag{1.4}$$

$$2^\circ. \qquad \|f(x \pm i\gamma)\|_{p,\omega,\gamma} \leqslant e^{\sigma\gamma}\|f\|_{p,\omega}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g^{\pm}(z) = (z + i\gamma)^{\omega/p} f(z),$$

которая аналитична в верхней полуплоскости и имеет там рост не выше, чем $(1, \sigma)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g^{\pm}(x)|^p\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p |x + i\gamma|^{\omega}\, dx < +\infty.$$

Отсюда следует (см. [10], с. 35), что соответствено $g^{\pm}(z)\, e^{\pm i\sigma z} \in H^p_{\pm}$, и неравенство (1.4) доказано. Неравенство (1.5) вытекает из (1.4).

Лемма 1.2. *Пусть* $f(z) \in W^{p,\omega}_{\sigma}[\gamma]$. *Тогда для любого* $z \in \mathbb{C}$ *справедливы неравенства*

$$|f(z)| \leqslant c\, \|f\|_{p,\omega\gamma}\, e^{\sigma|y|}(1 + |z|)^{-\frac{\omega}{p}}\,(1 + |y|)^{-\frac{1}{p}}, \tag{1.6}$$

где $c > 0$*—постоянная и* $z = x + iy$.

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что

$$\varphi(z) = f(z - (i\gamma + 1))\, e^{i\sigma z}(z + i\gamma)^{\omega/p} \in H^p_+$$

и, следовательно по формуле Коши (см. [12]) имеем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt, \operatorname{Im} z = y > 0.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера, можем написать

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^p\, dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + y^2)^{q/2}}\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant c_1 \|\varphi\|_{H^p_+} \cdot y^{-\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

Учитывая, что

$$\|\varphi\|_{H^p_+} = \|f(x - i(\gamma + 1))(x + i\gamma)^{\omega/p}\|_{L^p} \leqslant c_2 \|f\|_{p,\omega,\gamma},$$

из (1.7) получим

$$|f(z - i(\gamma + 1))|\, e^{i\sigma z}\, |(z + i\gamma)^{\frac{\omega}{p}}| \leqslant c_3 \|f\|_{p,\omega,\gamma}\, |y|^{-\frac{1}{p}}.$$

Отсюда после замены $z - i(\gamma + 1)$ на z получим (1.6).

Теорема 1.1. *Пространство* $W^{p,\omega}_{\sigma}[\gamma]$ *является банаховым пространством с нормой* (1.3).

Доказательство. Пусть $\{f_n(z)\}$ — фундаментальная последовательность из класса $W_\sigma^{p,\omega}[\gamma]$, т. е.

$$\|f_k - f_j\|_{p,\omega,\gamma} \to 0, \quad k, j \to \infty.$$

Пусть $K \subset C$ — любой компакт. Согласно неравенствам (1.6) имеем

$$|f_k(z) - f_j(z)| \leqslant c\,\|f_k - f_j\|_{p,\omega,\gamma}\,(1+|z|)^{-\frac{\omega}{p}}\, e^{\sigma|y|}\,(1+|y|)^{-\frac{1}{p}}.$$

Отсюда следует, что последовательность функций $\{f_k(z)\}$ равномерно сходится на K.

Поэтому предельная функция $f(z)$ является целой функцией и, очевидно, $f(x) \in L^p(-\infty, \infty)$.

Из оценки (1.6) также следует, что функция $f(z)$ имеет порядок $\rho = 1$ и тип $\leqslant \sigma$, т. е. $f(z) \in W_\sigma^{p,\omega}[\gamma]$.

Лемма 1.3. *Пусть $f(z)$ — функция из класса $W_\sigma^{p,\omega}$. Тогда при любом* $\gamma \in (-\infty, \infty)$

1°. $$\|f\|_{p,\omega,\gamma} \asymp \|f\|_{p,\omega}. \tag{1.8}$$

2.° $$\|f(z + i\gamma)\|_{p,\omega} \asymp \|f\|_{p,\omega}. \tag{1.9}$$

Доказательство. 1°. Определим оператор T на $W_\sigma^{p,\omega}$, положив $Tf = f \in W_\sigma^{p,\omega}[\gamma]$. Ясно что оператор T отображает все $W_\sigma^{p,\omega}$ на $W_\sigma^{p,\omega}[\gamma]$, т. е. имеется обратный оператор T^{-1} такой, что при $f \in W_\sigma^{p,\omega}[\gamma]$, $T^{-1}f = f \in W_\sigma^{p,\omega}$.

Разберем отдельно два случая:

1) если $\omega \geqslant 0$, то $|x|^\omega \leqslant |x + i\gamma|^\omega$, и очевидно

$$\|f\|_{p,\omega} \leqslant \|f\|_{p,\omega,\gamma} = \|Tf\|_{p,\omega,\gamma}, \tag{1.10}$$

т. е. оператор T^{-1} ограничен. По теореме Банаха об обратном операторе ограничен и оператор T, т. е.

$$\|Tf\|_{p,\omega,\gamma} = \|f\|_{p,\omega,\gamma} \leqslant A_1 \|f\|_{p,\omega}. \tag{1.11}$$

Из (1.10) и (1.11) следует (1.8) в случае $\omega \geqslant 0$.

2) Если $-1 < \omega < 0$, то $|x + i\gamma|^\omega \leqslant |x|^\omega$ и поэтому для любого $f \in W_\sigma^{p,\omega}$

$$\|Tf\|_{p,\omega,\gamma} = \|f\|_{p,\omega,\gamma} \leqslant \|f\|_{p,\omega}, \tag{1.12}$$

т. е. оператор T ограничен. Поэтому обратный оператор T^{-1} также ограничен и следовательно

$$\|T^{-1}f\|_{p,\omega} = \|f\|_{p,\omega} \leqslant A_2 \|f\|_{p,\omega,\gamma}, \quad \forall f \in W_\sigma^{p,\omega}. \tag{1.13}$$

Из (1.12), (1.13) вытекает (1.8), в случае $-1 < \omega < 0$ и (1.8) доказана.

2°. Теперь докажем соотношение (1.9).

Если $f(z) \in W_\sigma^{p,\omega}$, то по лемме 1.1 $f(z)e^{i\sigma z} \in H_+^{p,\omega}$ и в силу (1.8) мы получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, |e^{i\sigma x}|\, |x|^{\omega}\, dx \geqslant B_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+i\gamma)|^p\, |e^{i\sigma(x+i\gamma)}| \times$$

$$\times |x+i\gamma|^{\omega}\, dx \geqslant e^{-p\sigma y} B_2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+i\gamma)|^p\, |x|^{\omega}\, dx =$$

$$= B_2\, e^{-p\sigma\gamma} \|f(z+i\gamma)\|_{p,\,\omega},$$

т. е.

$$\|f(z+i\gamma)\|_{p,\,\omega} \leqslant C_1 \|f\|_{p,\,\omega}. \qquad (1\ .14$$

Отсюда следует, что для любого $\gamma \in (-\infty, \infty)$, $f(z+i\gamma) \in W_{\sigma}^{p,\,\omega}$. С другой стороны

$$\|f(z+i\gamma)\, e^{-i\sigma z}\|_{H^{p,\,\omega}} = \|f(x+i\gamma)\|_{L^{p,\,\omega}} \geqslant \|f\|_{p,\,\omega}.$$

Значит

$$\|f\|_{p,\,\omega} < c_2 \|f(z+i\gamma)\|_{p,\,\omega}.$$

Отсюда и из (1.14) следует утверждение (1.9).

б) Пусть $\{z_j\}_0^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, лежащих в полосе $A < \operatorname{Im} z < B$ $(-\infty < A < B < +\infty)$. Для произвольного целого $k > 0$ обозначим через $s_k \geqslant 1$ кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$, а через $p_k \geqslant 1$ — кратность появления числа z_k во всей последовательности $\{z_j\}_0^{\infty}$. Очевидно, что $1 \leqslant s_k \leqslant p_k \leqslant +\infty$ $(0 \leqslant k < +\infty)$.

Для дальнейшего изложения введем еще один класс функций. Обозначим через $H^{p,\,\omega}(a, b)$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \omega < p-1,\ -\infty < a < b < +\infty)$ класс функций $f(z)$, голоморфных в области $a < \operatorname{Im} z < b$ и таких, что

$$\|f\|_{H^{p,\,\omega}_{(a,\,b)}} \equiv \sup_{a<y<b} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p\, |x|^{\omega}\, dx \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Докажем следующую общую теорему, которая играет важную роль при решении задачи интерполяции в классах целых функций $W_{\sigma}^{p,\,\omega}$

Теорема 1.2. *Пусть $\{z_k\}_0^{\infty}$ — последовательность точек, удовлетворяющих условиям:*

1) $a + \delta_1 < \operatorname{Im} z_k < b - \delta_1$, $\left(-\infty < a < b < +\infty,\ 0 < \delta_1 < \frac{1}{2}(b-a)\right)$,

2) $\inf\limits_{z_k \neq z_j} |z_k - z_j| = \delta_2 > 0$.

3) $\sup\limits_{k \geqslant 0} p_k = P < +\infty$.

Тогда для любой функции $f(z) \in H^{p,\,\omega}(a, b)$ справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^{\omega} \leqslant A_{\omega} \|f\|_{H^{p,\omega}_{(a,b)}}, \tag{1.15}$$

где постоянные A_{ω} *не зависят от* $f(z)$.

Доказательство. Воспользуемся одним приемом, применявшимся по другому поводу еще М. Планшерелем и Г. Пойя [11]. Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, рассмотрим замкнутые кружки $R_{\delta,k} = \left\{z; |z - z_k| \leqslant \frac{\delta}{2}\right\} \times$ $\times (0 < k < +\infty)$, которые очевидно, не пересекаются. Из интегральной формулы Коши следует, что для $0 < r < \frac{\delta}{2}$

$$|f^{(s_k-1)}(z_k)| \leqslant \frac{(s_k-1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_k + re^{i\vartheta})| \, r^{-(s_k-1)} \, d\vartheta.$$

Отсюда легко выводится формула

$$\frac{1}{s_k+1}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{s_k+1} f^{(s_k-1)}(z_k) = \frac{(s_k-1)!}{2\pi} \int_0^{\delta/2} \int_0^{2\pi} f(z_k + re^{i\vartheta}) \, e^{-i\vartheta(s_k-1)} r dr d\vartheta,$$

из которой следует неравенство

$$|f^{(s_k-1)}(z_k)| \leqslant M_{\delta,p} \iint_{R_{\delta,k}} |f(\zeta)| \, d\sigma(\zeta), \tag{1.16}$$

где $M_{\delta,p}$ не зависит от f и $d\sigma(\zeta)$ — плоская мера Лебега.

Воспользовавшись неравенством Гёльдера, из (1.16) получим

$$|f^{(s_k-1)}(z_k)| \leqslant M_{\delta,p} \left\{ \iint_{R_{\delta,k}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\omega} \, d\sigma(\zeta) \right\}^{1/p} \times$$

$$\times \left\{ \iint_{R_{\delta,k}} |\zeta|^{-\frac{q}{p}\omega} \, d\sigma(\zeta) \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.17}$$

Второй интеграл правой части (1.17) оценивается следующим образом:

$$\iint_{R_{\delta,k}} |\zeta|^{-\frac{q}{p}\omega} \, d\sigma(\zeta) = \iint_{|\zeta|<\delta/2} |z_k + \zeta|^{-\frac{q}{p}\omega} \, d\sigma(\zeta) =$$

$$= |z_k|^{-\frac{q}{p}\omega} \iint_{|\zeta|<\delta/2} \left|1 + \frac{\zeta}{z_k}\right|^{-\frac{q}{p}\omega} d\sigma(\zeta) \leqslant N_{\delta} |z_k|^{-\frac{q}{p}\omega}, \quad z_k \neq 0.$$

Теперь неравенства (1.17) можем переписать так:

$$|z_k|^{\omega} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p \leqslant Q_{\delta} \iint_{R_{\delta,k}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\omega} \, d\sigma(\zeta), \tag{1.18}$$

где $Q_{\delta} = M_{\delta,p} \cdot N_{\delta}$.

Заметим, что $R_{\delta,k} \cap R_{\delta,j} = \varnothing$ при $z_k \neq z_j$ и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} R_{\delta,k} \subset \{z;\ a+\delta < \operatorname{Im} z < b-\delta\} \equiv \Pi_{a,b}^{(\delta)}.$$

Отсюда и из (1.18) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^\omega \leqslant Q_\delta \sum_{k=0}^{\infty} \iint\limits_{R_{\delta,k}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^\omega \, d\sigma(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant Q_\delta \iint\limits_{\Pi_{a,b}^{(\delta)}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^\omega \, d\sigma(\zeta) \leqslant A_\omega \|f\|_{H^{p,\omega}_{(a,b)}}.$$

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

Следствие 2.1. Пусть последовательность точек $\{z_k\}_0^\infty$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2 при $a=0$ и $b<+\infty$. Тогда для любой функции $f(z) \in H_+^{p,\omega}$ справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^\omega \leqslant A_\omega \|f\|^p_{H_+^{p,\omega}}. \tag{1.19}$$

Теорема 1.3. *Пусть $f(z) \in W_\sigma^{p,\omega}$ и $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность комплексных чисел, лежащих в некоторой полосе $A < \operatorname{Im} z < B$, $\inf\limits_{z_k \neq z_j} |z_k - z_j| > 0$ и $\sup\limits_k p_k < +\infty$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^\omega \leqslant c \|f\|_{p,\omega}. \tag{1.20}$$

Доказательство. Пусть $f(z) \in W_\sigma^{p,\omega}$ и $h = \sup\limits_k |\operatorname{Im} z_k| + 1$. Так как оператор сдвига инвариантен в пространстве $W_\sigma^{p,\omega}$ (см. лемму 1.3), то можем утверждать, что одновременно $f(z-ih) \in W_\sigma^{p,\omega}$ и $\varphi(z) = f(z-ih)\, e^{i\sigma z} \in H_+^{p,\omega}$.

Поскольку $f(z) = \varphi(z+ih)\, e^{-i\sigma(z+ih)}$, то

$$f^{(s_k-1)}(z_k) = e^{\sigma h} \frac{d^{s_k-1}}{dz^{s_k-1}} [\varphi(z+ih)\, e^{-i\sigma z}]_{z=z_k} =$$

$$= e^{\sigma h} \sum_{j=0}^{s_k-1} C^j_{s_k-1} \varphi^{(j)}(z_k+ih) (-i\sigma)^{s_k-1-j} e^{-i\sigma z_k}. \tag{1.21}$$

Так как $\sup\limits_k p_k = P < +\infty$ и $|\operatorname{Im} z_k| \leqslant h$, из (1.21) имеем

$$|f^{(s_k-1)}(z_k)|^p < M_{\sigma,h} \sum_{j=0}^{p-1} |\varphi^{(j)}(z_k+ih)|^p, \tag{1.22}$$

где $M_{\sigma,h} > 0$ не зависит от φ.

Согласно следствию 2.1 справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi^{(j)}(z_k+ih)|^p (1+|z_k|)^\omega \leqslant c_1 \|\varphi\|^p_{H_+^{p,\omega}}. \tag{1.23}$$

Теперь из (1.22) и (1.23) окончательно получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^{\omega} \leqslant c_2 \|\varphi\|^p_{H^{p,\omega}_+} =$$

$$= c_2 \|f(z-ih)\|^p_{p,\omega} \leqslant c_3 \|f\|^p_{p,\omega},$$

где $c_3 = c_3(P, \sigma, h, p) > 0$ не зависит от f. Теорема доказана.

Отметим, что в случае, когда $s_k = 1$ и $\omega = 0$, утверждение теоремы 1.3 было установлено в работе [3] Б. Я. Левина.

в) Обозначим через $l^{p,\omega}_{\{z_k\}} \equiv l^{p,\omega}$ $(1 < p < +\infty, \ -1 < \omega < p-1)$ класс всех последовательностей $\{c_k\}_0^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\|\{c_k\}\|_{l^{p,\omega}} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p (1+|z_k|)^{\omega}\right\}^{1/p} < +\infty, \tag{1.24}$$

где $\{z_k\} = \Lambda$ — заданная последовательность комплексных чисел.

Легко показать, что $l^{p,\omega}$ с нормой (1.24) является банаховым пространством.

Пусть $f(z) \in W^{p,\omega}_{\sigma}$ и последовательность $\{z_k\}_0^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3.

Определим оператор T на $W^{p,\omega}_{\sigma}$ следующим образом:

$$Tf = \{f^{(s_k-1)}(z_k)\}_0^{\infty}. \tag{1.25}$$

Теорема 1.3 показывает, что оператор T отображает $W^{p,\omega}_{\sigma}$ в $l^{p,\omega}$, причем T линеен и ограничен:

$$\|Tf\|_{l^{p,\omega}} \leqslant C\|f\|_{p,\omega}. \tag{1.26}$$

§ 2. Класс целых функций $S_{\varkappa}$

В этом параграфе вводится и изучается специальный класс $S_{\varkappa}$ функций, являющийся естественным обобщением класса функций типа синуса.

Определение. Классом $S_{\varkappa}$ $(-\infty < \varkappa < +\infty)$ назовем множество всех функций $S(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, таких, что при некоторых положительных константах c, C и K (зависящих от функции $S(z)$) выполняется неравенство

$$0 < c < |S(z)\, z^{-\varkappa}|\, e^{-\sigma|\mathrm{Im}\, z|} < C < +\infty \tag{2.1}$$

при $|\mathrm{Im}\, z| > K$ и $\inf\limits_{z_k \neq z_j} |z_k - z_j| > 0$, где $\{z_k\}_0^{\infty}$ — последовательность нулей функции $S(z)$.

Заметим, что неравенство (2.1) будет выполняться для всех z, $|\mathrm{Im}\, z| > K$, если только:

а) $$|S(x+iK)| \asymp (1+|x|)^{\varkappa}, \tag{2.1'}$$

б) все нули функции $S(z)$ лежат в полосе $|\mathrm{Im}\, z| < K$.

Это утверждение легко доказывается с помощью теоремы Фрагмена—Линделёфа.

Если $\varkappa=0$, то S_0 совпадает с классом функций типа синуса.

Примеры: 1) Пусть $0<\mu_1, \mu_2<2$: $c_1, c_2\in(-\infty, \infty)$ и обозначим

$$e(z, \mu_1, \mu_2, c_1, c_2)\equiv e(z)=c_1E_1(i\sigma z;\ \mu_1)+c_2E_1(-i\sigma z;\ \mu_2), \tag{2.2}$$

где

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}$$

— целая функция типа Миттаг—Леффлера порядка ρ и типа $\sigma=1$.

Покажем, что существует $\varkappa=\varkappa(\mu_1, \mu_2)$ такая, что $e(z)\in S_\varkappa$. Как хорошо известно (см. [2], с. 133—134), функция $E_1(i\sigma z;\ \mu)$ ($\sigma>0$, $-\infty<\mu<+\infty$) имеет следующую асимптотику:

а) если $\left|\arg z+\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\alpha\left(\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi\right)$, то

$$E_1(i\sigma z;\ \mu)=(i\sigma z)^{1-\mu}e^{i\sigma z}+O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{2.3}$$

б) если $\left|\arg z+\frac{\pi}{2}\right|>\alpha$, то

$$E_1(i\sigma z;\ \mu)=O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{2.4}$$

Пользуясь формулами (2.3), (2.4) легко доказать, что $|e(z)|\to+\infty$ при $|\operatorname{Im} z|\to+\infty$. Отсюда вытекает, что нули функции $e(z)$ лежат в некоторой полосе $|\operatorname{Im} z|\leqslant b<+\infty$. Кроме того, если $h>b$, то

$$|e(x+ih)|\asymp(1+|x|)^\varkappa,$$

где $\varkappa=\max(1-\mu_1, 1-\mu_2)$. Значит функция $e(z)$ обладает свойствами а) и б), т. е. $e(z)\in S_\varkappa$.

2) Пусть $\alpha(t)$ — функция ограниченной вариации со скачками в точках $x=-\sigma$ и $x=\sigma$. Составим функцию

$$F(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}E_1(izt;\ \mu)\,d\alpha(t) \tag{2.5}$$

и покажем, что $E(z)\in S_{1-\mu}$.

Функцию $F(z)$ представим в виде

$$F(z)=\int_0^{\sigma}E_1(izt;\ \mu)\,d\alpha(t)+\int_0^{\sigma}E_1(-izt;\ \mu)\,d\alpha(-t). \tag{2.6}$$

Отсюда и из асимптотических формул (2.3), (2.4) вытекает, что $|F(z)|\to+\infty$, при $|\operatorname{Im} z|\to+\infty$. А это значит, что все нули функции $F(z)$ лежат в некоторой горизонтальной полосе. Кроме того, легко доказать неравенства

$$|F(x+ih)|\asymp(1+|x|)^{1-\mu},\ \text{при}\ |h|\geqslant K_0. \tag{2.7}$$

Отсюда заключаем, что $F(z)\in S_{1-\mu}$.

б) Приведем некоторые свойства функций $S(z)$ из класса $S_\varkappa$, которые нам нужны для решения интерполяционной задачи в классах $W_\sigma^{p,\varkappa}$.

Лемма 2.1. *Пусть* $S(z)\in S_\varkappa$ *и* $Z=\{z_k\}_0^\infty$ *— последовательность ее корней, расположенная в порядке неубывания модулей. Тогда для любого* $\delta>0$ *существуют такие* $m(\delta)>0$ *и* $M(\delta)>0$, *что вне* δ*-окрестности* Z_δ *множества корней, т. е. на множестве* $\bigcap_k \{z:$ $:|z-z_k|\geqslant\delta\}$, *имеют место неравенства*

$$m(\delta)(1+|z|)^\varkappa e^{\sigma|y|}\leqslant|S(z)|\leqslant M(\delta)(1+|z|)^\varkappa e^{\sigma|y|}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть корни функции $S(z)$ лежат в полосе $\{|\operatorname{Im} z|<h\}=H_h$. Выбирая главную ветвь $z^{-\varkappa}$, рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=[z-i(h+1)]^{-\varkappa}S(z),\ z\in H_h. \tag{2.9}$$

Из определения класса $S_\varkappa$ следует, что функция $\varphi(z)$ ограничена при $|\operatorname{Im} z|=h$. Применяя принцип Фрагмена—Линделёфа к $\varphi(z)$ в полосе H_h будем иметь, что $\sup\limits_{z\in H_h}|\varphi(z)|<+\infty$.

Применяя теперь метод работы [3] (лемма 1) получим, что

$$|\varphi(z)|\asymp e^{\sigma|y|},\ z\overline{\in} Z_\delta.$$

Отсюда и из (2.9) вытекает (2.8).

Лемма 2.2. *Пусть* $S(z)\in S_\varkappa$ *и* p_k *— кратность появления* z_k *во всей последовательности* $\{z_n\}_0^\infty$. *Тогда*

$$|S^{(p_k)}(z_k)|\geqslant c(1+|z_k|)^\varkappa, \tag{2.10}$$

где $c>0$ *не зависит от* k.

Доказательство, Так как z_k является p_k-кратным корнем функции $S(z)$, то очевидно, что функция

$$\frac{(z-z_k)^{p_k}}{S(z)}=\varphi(z)$$

регулярна и отлична от нуля в некоторой окрестности $|z-z_k|\geqslant\delta$ точки $z=z_k$.

Пользуясь формулой Коши, получим

$$\frac{p_k!}{S^{(p_k)}(z_k)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_k|=\delta}\frac{(\zeta-z_k)^{p_k-1}}{S(\zeta)}\,d\zeta.$$

Отсюда и из (2.8) вытекает оценка

$$\frac{p_k!}{|S^{(p_k)}(z_k)|}=\frac{1}{2\pi}\delta^{p_k-1}\int\limits_{|\zeta-z_k|=\delta}\frac{d\zeta}{|S(\zeta)|}\leqslant$$

$$\leqslant c\frac{\delta}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+(z_k+\delta e^{i\theta})^\varkappa}\leqslant c_1(1+|z_k|)^{-\varkappa}.$$

и, следовательно,

$$|S^{(p_k)}(z_k)| \geqslant c\,(1+|z_k|)^{\varkappa}.$$

Лемма 2.3. *Пусть $S(z)\in S_\varkappa$ и $\{z_k\}_0^\infty$ — ее нули. Тогда для любой функции $f(z)\in W_\alpha^{p,\infty}$ существует константа c, не зависящая от f, такая, что*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p\,(1+|z_k|)^{\alpha} \leqslant c\,\|f\|_{p,\infty}^p. \tag{2.11}$$

Доказательство. Из определения класса $S_\varkappa$ следует, что последовательность $\{z_k\}_0^\infty$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3 и неравенства (2.11) следуют из (1.20).

Приведем формулировку еще одной леммы, являющийся частным случаем известной теоремы Адамара.

Лемма 2.4. *Пусть $S(z)\in S_\varkappa$ и $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность ее корней. Тогда при любом $\alpha>1$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1+|z_k|)^{-\alpha}$ сходится.*

§ 3. Теоремы интерполяции

а) Пусть функция $S(z)\in S_\varkappa$ и $Z=\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность ее корней. Обозначим через $s_k\geqslant 1$ и p_k кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$ и во всей последовательности $\{z_j\}_0^\infty$ соответственно. Очевидно, что функция

$$\tau_k(z)=\frac{(z-z_k)^{p_k}}{S(z)}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

регулярна и отлична от нуля в некоторой окрестности точки $z=z_k$.

Введем в рассмотрение полиномы

$$q_k(z)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(z_k)\,(z-z_k)^{\nu}\quad (k=0,1,2,\cdots), \tag{3.1}$$

где $a_\nu(z_k)=\dfrac{1}{\nu!}\,\tau_k^{(\nu)}(z_k)$, а также функции

$$\Omega_k(z)=\frac{S(z)\,q_k(z)}{(s_k-1)!\,(z-\lambda_k)^{p_k-s_k+1}}=$$

$$=\frac{S(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(z_k)}{(z-z_k)^{p_k-s_k-\nu+1}}. \tag{3.2}$$

Так как функция $S(z)$ целая и в точке $z=z_k$ имеет нуль кратности p_k, то $\Omega_k(z)$ также целая функция.

В частном случае, когда все нули $S(z)$ простые, то $s_k=p_k=1$, $q_k(z)=\dfrac{1}{S'(z_k)}$ и из (3.2) следует, что

$$\Omega_k(z)=\frac{S(z)}{S'(z_k)(z-z_k)}. \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. *Функции системы* $\{\Omega_k(z)\}_0^\infty$ *удовлетворяют следующим интерполяционным данным:*

$$\Omega_k^{(s_k-1)}(z_n) = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & k \neq n \\ 0, & k = n \end{cases} \quad (k, n \geqslant 0). \tag{3.4}$$

Эта лемма доказывается так же, как лемма из [8].

Лемма 3,2. *Пусть* $S(z) \in S_\varkappa$ *и* $p\varkappa + \omega < p - 1$.

Тогда

$$\Omega_k(z) \in W_\sigma^{p,\omega}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из определения (3.2) следует, что $\Omega_k(z)$ является целой функцией экспоненциального типа $\leqslant \sigma$. С другой стороны, из леммы 2.1 вытекает оценка

$$|S(x)| \leqslant c\,(1+|x|)^\varkappa. \tag{3.6}$$

Так как $q_k(x)$ — полином степени $p_k - s_k$, то

$$\frac{q_k(x)}{(s_k-1)!\,|x-z_k|^{p_k-s_k+1}} = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to +\infty. \tag{3.6'}$$

. В силу (3.6) и (3,6′), из (3.2) получим

$$|\Omega_k(x)| \leqslant c_1\,(1+|x|)^{\varkappa-1}.$$

Следовательно, существует не зависящая от $x \in (-\infty, +\infty)$ постоянная $c_2 > 0$ такая, что

$$|x|^\omega\,|\Omega \quad (x)| \leqslant c_2\,(1+|x|)^{p(\varkappa-1)}\,|x|^\omega.$$

Отсюда следует, что в условиях леммы, $\omega > -1$, $p\varkappa + \omega < p - 1$, будем иметь

$$\|\Omega_k(z)\|_{p,\omega} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\Omega_k(x)|^p\,|x|^\omega\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c_2^{1/p}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^{p\varkappa-p}\,|x|^\omega\,dx\right\}^{1/p} < +\infty,$$

т. е. $\Omega_k(z) \in W_\sigma^{p,\omega}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$.

Лемма 3.3. *Для коэффициентов разложения* (3.1) *справедливы оценки*

$$|a_\nu(z_k)| \leqslant c\,(1+|z_k|)^{-\varkappa}, \tag{3.7}$$

где $A > 0$ *не зависит от* ν *и* k.

Доказательство. По формуле Коши для коэффициентов $a_\nu(z_k)$ имеем

$$a_\nu(z_k) = \frac{1}{\nu!}\,|\tau_k^{(\nu)}(\lambda_k)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_k|=\delta}(\zeta-z_k)^{p_k-\nu-1}\,\frac{d\zeta}{S(\zeta)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^{p_k-\nu-1}}{2\pi}\int_{|\zeta-z_k|=\delta}\frac{|d\zeta|}{|S(\zeta)|} \leqslant \delta^{p_k-\nu}\,(1+|z_k|)^{-\varkappa}.$$

Положив $M_{\cdot} = \max_k 2^{p_k-\cdot}$, получим (3.7).

б) Рассмотрим ряды по функциям системы (3.3), иначе говоря, ряды вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Omega_k(z), \tag{3.8}$$

где $\{c_k\}_0^\infty$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Нас интересует вопрос: когда ряд (3.8) определяет функцию из класса $W_\sigma^{p,\omega}$?

Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность нулей $S(z) \in S_\varkappa$. Обозначим через $l_\varkappa^{p,\omega}$ $(1<p<\infty, \ -1<\omega<p-1)$ класс последовательностей комплексных чисел $\{c_k\}_0^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\|\{c_k\}\|_{l_\varkappa^{p,\omega}} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p (1+|z_k|)^\omega\right\}^{1/p} < +\infty. \tag{3.9}$$

Очевидно, что $l_\varkappa^{p,\omega}$ с нормой (3.9) является банаховым пространством.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть $\{c_k\}_0^\infty \in l_\varkappa^{p,\omega}$ и $p\varkappa + \omega > -1$. Тогда ряд (3.8) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте комплексной плоскости и определяет целую функцию $f(z)$, причем*

$$f^{(s_k-1)}(z_k) = c_k \quad (k=0, 1, 2, \cdots). \tag{3.10}$$

Доказательство. Пусть K — компакт в комплексной плоскости, не содержащий нулей z_k функции $S(z)$. Для остаточного члена ряда (3.8) имеем:

$$|\Phi_{n,m}(z)| = \left|\sum_{k=n}^{m} c_k \Omega_k(z)\right| \leqslant B_1 \sum c_k \frac{|q_k(z)|}{|z-z_k|^{p_k-s_k+1}}, \tag{3.11}$$

Из определения (3.1) полинома $q_k(z)$ и из леммы 3.3 следует:

$$|q_k(z)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(z_k)|\, |z-z_k|^\nu \leqslant$$

$$\leqslant B_2 (1+|z_k|)^{-\varkappa} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |z-z_k|^\nu < B_3 (1+|z_k|)^{p_k-s_k-\varkappa} \tag{3.12}$$

при $z \in K$.

В силу (3.12) для (3.11) имеем

$$|\Phi_{n,m}(z)| \leqslant B_4 \sum_{n}^{m} c_k (1+|z_k|)^{-\varkappa+1} \leqslant$$

$$\leqslant B_4 \left\{\sum_{n=k}^{m} |c_k|^p (1+|z_k|)^\omega\right\}^{1/p} \left\{\sum (1+|z_k|)^{q\left(-1-\varkappa-\frac{\omega}{p}\right)}\right\}^{1/q}. \tag{3.13}$$

ԳԻՏԱԿԱՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Но ввиду условия $p\varkappa+\omega>-1$, справедливо неравенство $q\left(-1-\varkappa-\frac{\omega}{p}\right)-1$ и из леммы 2.4 следует, что вторая сумма правой части (3.13) является отрезком сходящегося ряда и следовательно

$$|\Phi(z)|\leqslant B_5\left\{\sum_n^m |c_k|^p(1+|z_k|)^\omega\right\}^{1/p}=B_5\left\|\left\{c_k\right\}_n^m\right\|_{l_\varkappa^{p,\omega}}, \tag{3.14}$$

а это означает, что ряд (3.8) равномерно сходится на K. Применив принцип максимума к отрезкам ряда (3.8), мы получим, что этот ряд равномерно сходится в каждой ограниченной области и, следовательно, представляет целую функцию. Интерполяционные свойства (3.10) непосредственно вытекают из леммы (3.1).

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 3.2. *Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность всех нулей функции $S(z)\in S_\varkappa$ и $\omega+p\varkappa\in(-1,\ p-1)$. Тогда*

1°. *Для любого элемента $\{c_k\}\in l_\varkappa^{p,\omega}$ ряд*

$$f(z)=\sum_{k=0}^\infty c_k\Omega_k(z) \tag{3.15}$$

сходится по норме пространства $W_\sigma^{p,\omega}$ и определяет функцию $f(z)$ из класса $W_\sigma^{p,\omega}$, удовлетворяющую интерполяционным условиям (3.10).

2°. *Кроме того, будем иметь*

$$\|f\|_{p,\omega}\asymp\|\{c_k\}\|_{l_\varkappa^{p,\omega}}. \tag{3.16}$$

Доказательство. В силу условия $\omega+\varkappa p<p-1$ из леммы 3.2 следует, что отрезок ряда (3.15) $\Phi_{n,m}(z)$ принадлежит пространству $W_\sigma^{p,\omega}$. Положим $h=\max\limits_k(|\mathrm{Im}\,z_k|+1)$, в силу неравенства (1.5) получим

$$\|\Phi_{n,m}(z)\|_{p,\omega}\leqslant D_1\|\Phi_{n,m}(z+ih)\|_{p,\omega}. \tag{3.17}$$

Подставив значение $\Omega_k(z)$ из (2.2) в $\Phi_{n,m}(z+ih)$ и пользуясь неравенствами (2.1′), из (3.17) получим

$$\|\Phi_{n,m}\|_{p,\omega}^p\leqslant D_2\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_{n,m}(x+iy)|^p\,|x|^{\omega+p\varkappa}\,dx, \tag{3.18}$$

где

$$\varphi_{n,m}(z)=\frac{\Phi_{n,m}(z)}{S(z)}=\sum_n^m\frac{c_k\,q_k(z)}{(s_k-1)!\,(z-z_k)^{p_k-s_k+1}}. \tag{3.19}$$

Поскольку все полюсы рациональной функции $\varphi_{n,m}(z+ih)$ расположены в нижней полуплоскости и $q_k(z)$ — полином степени p_k-s_k, то $\varphi_{n,m}(z+ih)\in H_+^{p,\omega_1}$ $(\omega_1=\omega+p\varkappa)$ и величина, стоящая в левой части неравенства (3.18), оценивается H_+^{p,ω_1}-нормой функции $\varphi_{n,m}(z+ih)$.

Для вычисления этой нормы воспользуемся известным фактом, что пространство, сопряженное к H_-^{p,ω_1} — это пространство H_-^{q,ω_2}, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и $\omega_2=-\frac{q}{p}\omega_1$ (см., например, [12]). При этом линейный функционал в пространстве H_+^{p,ω_1} имеет вид

$$l(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\psi(x)\,dx,$$

где $\varphi(z)\in H_+^{p,\omega_1}$, $\psi(z)$—функция из H_-^{q,ω_2}, единственным образом определяемая по l и $\|\psi\|_{H_-^{q,\omega_2}}\leqslant B\|l\|$, где $B>0$ не зависит от l.

Следовательно, по принципу двойственности будем иметь

$$\|\varphi_{n,m}(x+ih)\|_{H_+^{p,\omega_1}}=\sup_{\|l\|<1}\{|l(\varphi_{n,m})|\}\leqslant$$

$$\leqslant\sup\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n,m}(x+ih)\,\psi(x)\,dx\right|,\ \|\psi(x)\|_{H_-^{q,\omega_2}}\leqslant 1\right\}, \tag{3.20}$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и $\omega_2=-\frac{q}{p}\omega$.

Вычислив интеграл в правой части (3.20) с помощью теории вычетов, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n,m}(x+ih)\,\psi(x)\,dx=2\pi i\sum_{n}^{m}\frac{(p_k-s_k+1)!}{(s_k-1)!}c_k\times \tag{3.21}$$

$$\times\frac{d^{p_k-s_k}}{dz^{p_k-s_k}}(q_k(z+ih)\,\psi(z)]_{z=z_k-ih},$$

Из определения (3.1) функции $q_k(z)$ и из леммы 3.3 следует

$$|q_k^{(j)}(z+ih)|=\left|\sum_{\nu=j}^{p_k-s_k}a_\nu(z_k)(z-z_k)^{\nu-j}\frac{(\nu-j+1)!}{(\nu-1)!}\right|\leqslant$$

$$\leqslant D_3\sum_{\nu=j}^{p_k-s_k}(1+|z_k|)^{-\varkappa}|z-z_k|^{\nu-j}\frac{(\nu-j+1)!}{(\nu-1)!}.$$

Отсюда непосредственно вытекает оценка

$$|q_k^{(j)}(z+ih)|_{z=z_k+ih}\leqslant D_4(1+|z_k|)^{-\varkappa}, \tag{3.22}$$

где

$$D_4=D_3\sum_{\nu=1}^{p_k-s_k}h^\nu\frac{(\nu-j+1)!}{(\nu-1)!}.$$

Из (3.22) имеем

$$\left|\frac{d^{p_k-s_k}}{dz^{p_k-s_k}}[q_k(z+ih)\,\psi(z)]_{z=z_k-ih}\right|=$$

$$=\left|\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} C^{\nu}_{p_k-s_k}\,[q_k(z+ih)]^{(\nu)}_{z=z_k-ih}\,[\psi(z)]^{(p_k-s_k-\nu)}_{z=z_k-ih}\right|\leqslant$$

$$\leqslant D_4(1+|z_k|)^{-\varkappa}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} C^{\nu}_{p_k-s_k}\,|[\psi(z_k-ih)]^{(p_k-s_k-\nu)}|\leqslant$$

$$\leqslant D_5(1+|z_k|)^{-\varkappa}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|\psi^{(\nu)}(z_k-ih)|. \tag{3.23}$$

Теперь с помощью (3.23) и (3.21) получим оценку

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n,m}(x+ih)\,\psi(x)\,dx\right|\leqslant D_6\sum_{n}^{m}|c_k|\,(1+|z_k|)^{-\varkappa}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|\psi^{(\nu)}(z_k-ih)|.$$

По неравенству Гёльдера, отсюда имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n,m}(x+ih)\,\psi(x)\,dx\right|\leqslant D_6\left\{\sum_{n}^{m}|c_k|^p\,(1+|z_k|)^{\omega}\right\}^{1/p}\times$$

$$\times\left\{\sum_{n}^{m}\left(\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|\psi^{(\nu)}(z_k-ih)|\right)^{q}(1+|z_k|)^{-q\left(\varkappa+\frac{\omega}{p}\right)}\right\}^{1/p}. \tag{3.24}$$

Так как $\psi(z)\in H_{-}^{q,\,\omega_1}\left(\omega_2=-\dfrac{q}{p}\,\omega_1=-q\left(\varkappa+\dfrac{\omega}{p}\right)\right)$, то согласно следствию из теоремы 1.2 справедливо неравенство

$$\sum_{n}^{m}\left(\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|\psi^{(\nu)}(z_k-ih)|\right)^{q}(1+z_k|)^{-q\left(\varkappa+\frac{\omega}{p}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant D_7\sum_{\nu=0}^{p}\sum_{k=n}^{m}|\psi^{(\nu)}(z_k-ih)|^q(1+|z_k|)^{-q\left(\varkappa+\frac{\omega}{p}\right)}\leqslant D_8\|\psi\|^{q}_{H_{-}^{q,\,\omega_1}}.$$

Отсюда и из (3.24) получим

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n,m}(x+ih)\,\psi(x)\,dx\right|\leqslant D_9\|\{c_k\}_n^m\|_{l_{\varkappa}^{p,\,\omega}}\,\|\psi\|_{H_{-}^{q,\,\omega_1}}. \tag{3.25}$$

Наконец, по (3.19), (3.20) и (3.25) для функции $\Phi_{n,m}(z)$ имеем

$$\|\Phi_{n,m}\|_{p,\omega}\leqslant D_8\|\{c_k\}_n^m\|_{l_{\varkappa}^{p,\,\omega}}\ (n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{3.26}$$

Так как $\{c_k\}\in l_{\varkappa}^{p,\,\omega}$, то $\|\Phi_{n,m}\|\rightrightarrows 0$, при $n,\ m\to+\infty$. Значит ряд (3.15) сходится по норме $W_{\sigma}^{p,\,\omega}$ и, таким образом, $f(z)\in W_{\sigma}^{p,\,\omega}$.

Из неравенства (3.26) следует также, что

$$\|f\|_{p,\omega}\leqslant A_1\|\{c_k\}\|_{l_{\varkappa}^{p,\,\omega}}.$$

Обратное неравенство вытекает из леммы 2.3. Теорема доказана.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 3.3. *Каждая целая функция $f(z)\in W_\sigma^{p,\omega}$ разлагается в ряд*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(s_k-1)}(z_k)\,\Omega_k(z), \tag{3.27}$$

где $\{z_k\}_0^\infty$ — нули целой функции $S(z)\in S_\varkappa$ и $\omega+p\varkappa\in(-1,\ p-1)$.

Доказательство. Пусть $f(z)\in W_\sigma^{p,\omega}$. Сначала заметим, что по лемме 2.3 и по теореме 3.1 будем иметь сходимость ряда (3.27), а по теореме 3.2 сумма этого ряда принадлежит классу $W_\sigma^{p,\omega}$.

Функция

$$\varphi(z)=f(z)-\sum_{k=0}^{\infty}f^{(s_k-1)}(z_k)\,\Omega_k(z) \tag{3.28}$$

очевидно, принадлежит пространству $W_\sigma^{p,\omega}$ и так как $\Omega_k^{(s_k-1)}(z_j)=\delta_{k,j}$, то $\varphi^{(s_k-1)}(z_k)=0\ (k\geqslant 0)$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(z)=\frac{\varphi(z)}{S(z)}, \tag{3.29}$$

которая, очевидно, вновь будет целой.

Ввиду неравенств (1.6) леммы 1.2 и определения класса $S_\varkappa$ функция $\psi(z)$ при $|\operatorname{Im} z|>h$ оценивается так:

$$|\psi(z)|\leqslant c\|\varphi\|_{p,\omega}(1+|z|)^{-\frac{\omega}{p}-\varkappa}(1+|y|)^{-\frac{1}{p}}.$$

Отсюда видно, что при $|\operatorname{Im} z|\geqslant h$ функция $|\psi(z)|$ ограничена. Ограниченность функции $|\psi(z)|$ в полосе $|\operatorname{Im} z|<h$ вытекает из теоремы Фрагмена—Линделёфа. Значит целая функция $\psi(z)\equiv a_0=\text{const}$. Далее, из условий теоремы $\omega\in(-1,\ p-1)$ и $\omega+p\varkappa\in(-1,\ p-1)$ вытекает, что $\varkappa\in(-1,\ 1)$ и, следовательно, $S(z)\overline{\in}\ W_\sigma^{p,\omega}$. А это значит, что $\varphi(z)=\psi(z)\equiv 0$ и, тем самым, разложение (3.27) доказано.

Из этой теоремы вытекает

Следствие. Если $f(z)\in W_\sigma^{p,\omega}$ $(1<p<\infty,\ -1<\omega<p-1)$, $\{z_k\}_0^\infty$ — нули функции $S(z)\in S_\varkappa$, $\omega+p\varkappa\in(-1,\ p-1)$ и $f^{(s_k-1)}(z_k)=0$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$, то $f(z)\equiv 0$.

Объединив результаты теорем 3.2 и 3.3, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3.4. *Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ — нули функции $S(z)\in S_\varkappa$, где $\varkappa+p\omega\in(-1,\ p-1)$. Тогда ряд* (3.15) *осуществляет линейное топологическое отображение всего пространства $l_\varkappa^{p,\omega}$ на пространство $W_\sigma^{p,\omega}$, причем справедливы неравенства*

$$\|f\|_{p,\omega}\asymp\|(c_k)\|_{l_\varkappa^{p,\omega}}.$$

Отметим, что в специальном случае, когда $\omega=0$ и $\varkappa=0$ отсюда следует известная теорема Б. Я. Левина, приведенная нами во введении статьи.

В другом специальном случае, когда

$$S(z)=E_1(iz;\ \mu)-E_1(-iz;\ \mu)\quad(-1<\mu<2),$$

теорема 3.4 была анонсирована в статье автора [8].

Ереванский государственный университет

Поступила 2.VI.1982

Ս. Գ. ՌԱՖԱԵԼՅԱՆ: Էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների որոշ կշռային դասերում ինտերպոլյացիան և բազիսությունը *(ամփոփում)*

Հետևելով Մ. Մ. Ջրբաշյանին, նշանակենք $W^{p,\,\omega}_{\sigma}$*-ով* ($1<p<+\infty$, $-1<\omega<p-1$, $\sigma>0$. *այն բոլոր էքսպոնենցիալ* $\leq\sigma$ *տիպի ամբողջ ֆունկցիաների դասը, որոնց համար*

$$\|f\|_{p,\,\omega}\equiv\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{p}\,|x|^{\omega}\,dx\right\}^{1/p}<+\infty.$$

Այս աշխատանքը վերաբերվում է $W^{p,\,\omega}_{\sigma}$ *դասերում բազմակի ինտերպոլյացիայի խնդիրներին և բազիսների կառուցմանը։*

S. G. RAFAELIAN. *Interpolation and basisness in some weighted classes of entire functions of exponential type* (summary)

In the present paper a problem of multiple interpolation is solved and some basises in M. M. Djrbashian classes $W^{p,\,\omega}_{\sigma}$ of entire functions of exponential type are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, ДАН СССР, 85, № 7, 1952, 29—32. Матем. сб., 33, (75), № 3, 1953, 485—530.
2. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
3. *Б. Я. Левин*. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа, Сб. «Математическая физика и функциональный анализ», ФНИНТ АН УССР, вып. 1, 1969, 136—146.
4. *Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский*. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент, Изв. АН СССР, сер. матем., 39, № 3, 1975, 657—702.
5. *Б. Я. Левин*. О базисах показательных функций в L_2 $(-\pi;\ \pi)$. Записки физ.-мат. фак-та Харьковского гос. ун-та и Харьковск. матем. об-ва, 27, сер. 4, 1961, 39—48.
6. *В. Д. Головин*. О биортогональных разложениях в L_2 по линейным комбинациям показательных функций, Зап. м.-м. фака ХГУ и Харьк. матем. об-ва (сер. 4), т. XXX, 1964.
7. *М. М. Джрбашян* и *С. Г. Рафаелян*. О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L^2, ДАН Арм. ССР, т. 73, № 1, 1981.
8. *С. Г. Рафаелян*. О базисности некоторых систем целых функций, ДАН Арм.ССР, 70, № 4, 1980.
9. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., VIII, № 1, 1973, 384—409.
10. *Б. Я. Левин*. Целые функции, М., МГУ, 1971.
11. Plancherel et Polya. Fonctiions entieres et integrales de Fourier Multiples, Comm. 9ct, 10, 1912.
12. *В. М. Мартиросян*. Замыкание и базисность некоторых биортоганальных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIII, № 5—6, 1978, 490—531.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 3, 1983 Математика

УДК 517.547

Л. Б. ГОЛИНСКИЙ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МАТРИЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ НЕВАНЛИННЫ—ПИКА

В конце 60-х годов В. П. Потапов предложил единый подход к рассмотрению некоторых классических задач анализа, опирающийся на созданную им теорию J-растягивающих аналитических матриц-функций (см. [1]). Одной из наиболее известных задач такого рода является проблема Неванлинны—Пика в классе Шура голоморфных в круге $|z|<1$ сжимающих $m \times m$ матриц-функций, которая состоит в отыскании функций $f(z) \in S_0^{(m)}$, принимающих в заданных точках $z_1, \cdots, z_n$ заданные значения $w_1, \cdots, w_n$. Хорошо известен критерий разрешимости проблемы в терминах интерполяционных данных z_i, w_i, $1 \leqslant i \leqslant n$: положительная определенность матрицы

$$A_n = \left\{ \frac{I - w_i w_k^*}{1 - z_i \bar{z}_k} \right\}_{i, k=1}^{n} \geqslant 0. \tag{1}$$

В случае, когда блок-матрица A_n к тому же невырождена, множество решений задачи бесконечно и параметризуется посредством дробно-линейного преобразования

$$f(z) = (a_{11}(z)\, s(z) + a_{12}(z))\, (a_{21}(z)\, s(z) + a_{22}(z))^{-1}, \tag{2}$$

матрица коэффициентов которого — так называемая резольвентная матрица — определяется по интерполяционным данным, а параметр $s(z)$ — произвольная функция класса Шура. Одним из существенных достижений В. П. Потапова и И. В. Ковалишиной (см. [2]) явилась формула для резольвентной матрицы:

$$R_n(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{bmatrix} = I + (1-z) \left[\frac{\begin{bmatrix} I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1 - \bar{z}_1 z} \cdots \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_n^* \end{bmatrix}}{1 - \bar{z}_n z} \right] \times$$

$$\times A_n^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{[-I,\ w_1]}{1 - z_1} \\ \vdots \\ \dfrac{[-I,\ w_n]}{1 - z_n} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Методы этих авторов существенно используют положительную определенность матрицы A_n.

Проблему Неванлинны—Пика в более общем скалярном классе мероморфных в круге $|z|<1$ функций рассмотрел впервые Н. И. Ахиезер [3]. Функции этого класса характеризуются представлением $f(z)=s(z)B^{-1}(z)$, где $|s(z)|<1$, а $B(z)$ — конечное произведение Бляшке. Позднее эта задача исследовалась В. М. Адамяном, Д. З. Аровым и М. Г. Крейном в [4].

В связи с теорией характеристических функций изометрических операторов в пространствах $\Pi_\varkappa$ М. Г. Крейном и Г. Лангером [5] был введен класс $S_\varkappa^{(m)}$ матриц — и даже оператор-функций.

Определение. *Мероморфная в круге* $|z|<1$ *матрица-функция* $f(z)$ *принадлежит классу* $S_\varkappa^{(m)}$, $\varkappa$ — *целое неотрицательное число, если каковы бы ни были натуральное* p *и точки голоморфности* $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ *функции* $f(z)$, *эрмитова блок-матрица*

$$\left\{\frac{I-f^*(\zeta_i)f(\zeta_k)}{1-\bar{\zeta}_i\zeta_k}\right\}_{i,k=1}^p$$

имеет не более $\varkappa$ *отрицательных собственных значений отрицательных квадратов.* Очевидно $S_0^{(m)}$ есть обычный класс Шура. В § 3 *настоящей работы рассмотрена проблема Неванлинны—Пика в классе* $S_\varkappa^{(m)}$ *и показано, что в случае невырожденности матрицы* $A_\varkappa$ (1) *множество ее решений бесконечно и задается посредством дробно-линейного преобразования* (2) *с резольвентной матрицей* (3). На параметр $s(z)$ в случае $\varkappa>0$ накладываются некоторые ограничения. В § 1 приведено новое теоретико-функциональное доказательство теоремы Крейна—Лангера о представлении функций класса $S_\varkappa^{(m)}$. В § 2 выводится основное неравенство, *которое является аналогом неравенства Шварца—Пика в классе* $S_\varkappa^{(m)}$. *Результаты* §§ 1, 2 *применяются в* § 3.

§ 1. Представление функций класса $S_\varkappa^{(m)}$

1°. Пусть X — некоторое множество. Матричнозначная функция $K(x, y)$, определенная на декартовом произведении $X\times X$ и такая, что $K(x, y)=K^*(y, x)$, называется матричным ядром. Говорят, что ядро $K(x, y)$ имеет не более $\varkappa$ отрицательных квадратов на X, если для любого натурального p и любых точек $x_1, \cdots, x_p$ из X эрмитова (блок-) матрица $\{K(x_i, x_k)\}_{i,k=1}^p$ имеет не более $\varkappa$ отрицательных собственных значений. В случае $\varkappa=0$ ядро $K(x,y)$ называется положительно-определенным. Ядра $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ называются эквивалентными ($K_1(x, y)\sim K_2(x, y)$), если существует обратимая матрица-функция $Q(x)$ на X такая, что $K_2(x, y)=Q^*(x)K_1(x, y)Q(y)$. Если число отрицательных квадратов ядра $K(x, y)$ не превосходит $\varkappa$, то это же верно и для любого эквивалентного ему ядра. Пусть, наконец, ядра $K_i(x, y)$ имеют не более $\varkappa_i$ отрицательных квадратов, $i=1, 2, \cdots, n$. Тогда в силу известных минимаксимальных свойств собственных значений ядро

$K(x, y)=\sum_{l=1}^{n} K_l(x, y)$ имеет не более $\varkappa=\sum_{l=1}^{n}\varkappa_l$ отрицательных квадратов.

Принадлежность функции $f(z)$ классу $S_{\varkappa}^{(m)}$ означает таким образом, что ядро

$$K_f(\zeta, z)=\frac{I-f^*(\zeta)f(z)}{1-\overline{\zeta}z}$$

имеет не более $\varkappa$ отрицательных квадратов на множестве точек голоморфности функции $f(z)$.

Отметим важное свойство классов $S_{\varkappa}^{(m)}$: если $f_i(z)\in S_{\varkappa_i}$ $1\leqslant i\leqslant n$, то произведение $f(z)=f_1(z)\cdots f_n(z)$ принадлежит $S_{\varkappa}$, $\varkappa=\sum_{l=1}^{n}\varkappa_l$. В самом деле

$$K_f(\zeta, z)=f_n^*(\zeta)\cdots f_2^*(\zeta)K_{f_1}(\zeta, z)f_2(z)\cdots f_n(z)+\cdots+$$
$$+f_n^*(\zeta)K_{f_{n-1}}(\zeta, z)f_n(z)+K_{f_n}(\zeta, z)$$

и число отрицательных квадратов ядра $f_n^*(\zeta)\cdots f_{l+1}^*(\zeta)K_{f_l}(\zeta, z)f_{l+1}(z)\cdots$ $\cdots f_n(z)$ не превосходит $\varkappa_l$.

Для построения функций класса $S_{\varkappa}^{(m)}$ введем конечное произведение Бляшке—Потапова

$$B(z)=\overset{\curvearrowright}{\prod_{k=1}^{n}}B_{\lambda_k}(z)=\overset{\curvearrowright}{\prod_{k=1}^{n}}\left\{I-\left(1-\frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\frac{\lambda_k-z}{1-\overline{\lambda}_k z}\right)P_k\right\}, \tag{1.1}$$

где $|\lambda_k|<1$, $P_k=P_k^*=P_k^2$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ — ортопроектор в m-мерном унитарном пространстве. Назовем порядком произведения (1.1) число $\operatorname{ord} B=\sum_{k=1}^{n}\dim P_k$. Непосредственно вычисляются

$$B^{-1}(z)=\overset{\curvearrowleft}{\prod_{k=1}^{n}}B_{\lambda_k}^{-1}(z)=\overset{\curvearrowleft}{\prod_{k=1}^{n}}\left\{I-\left(1-\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|}\frac{1-\overline{\lambda}_k z}{\lambda_k-z}\right)P_k\right\}$$

и

$$K_{B_{\lambda_k}^{-1}}(\zeta, z)=-\frac{(1-|\lambda_k|^2)P_k}{(\lambda_k-z)(\overline{\lambda}_k-\overline{\zeta})},$$

откуда следует, что ядро $K_{B_{\lambda_k}^{-1}}(\zeta, z)$ имеет не более $\dim P_k$ отрицательных квадратов. Если $s(z)\in S_0^{(m)}$ и

$$f(z)=s(z)B^{-1}(z), \tag{1.2}$$

то ядро $K_f(\zeta, z)$ имеет не более $\varkappa=\operatorname{ord} B$ отрицательных квадратов. Мы покажем здесь, что, наоборот, каждая функция класса $S_{\varkappa}^{(m)}$ допускает представление (1.2) с произведением Бляшке—Потапова $B(z)$ порядка $\varkappa$.

2°. Пусть $\delta(z)$ — голоморфная в замкнутом единичном круге $m\times m$ матрица-функция. Число нулей ее детерминанта внутри круга обозначим $N[\delta(z)]$.

Лемма 1. *Пусть*

$$A_i(z)=\begin{bmatrix} \alpha_i(z) & \beta_i(z) \\ \gamma_i(z) & \delta_i(z) \end{bmatrix},\ i=1,2$$

— голоморфные в замкнутом единичном круге $2m\times 2m$ матрицы-функции, J-унитарные на окружности:

$$A_i^*(\zeta)JA_i(\zeta)-J=A_i(\zeta)JA_i^*(\zeta)-J=0,\ J=\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},\ I\equiv I_m. \quad (1.3)$$

Если

$$A(z)=\begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix}=A_1(z)A_2(z),$$

то

$$N[\delta(z)]=N[\delta_1(z)]+N[\delta_2(z)]. \quad (1.4)$$

Доказательство. Из (1.3) немедленно следует, что

$$\delta_1(\zeta)\delta_1^*(\zeta)-\gamma_1(\zeta)\gamma_1^*(\zeta)=I,\ \delta_2^*(\zeta)\delta_2(\zeta)-\beta_2^*(\zeta)\beta_2(\zeta)=I. \quad (1.5$$

Поэтому матрицы $\delta_i(z)$ невырождены и $\delta_i^{-1}(z)$ голоморфны в некотором кольце $r\leqslant|z|<1$, $r<1$, $i=1, 2$. Далее

$$I-\delta_1^{-1}(\zeta)\gamma_1(\zeta)\gamma_1^*(\zeta)\delta_1^{-1*}(\zeta)=\delta_1^{-1}(\zeta)\delta_1^{-1*}(\zeta),$$

$$I-\delta_2^{*-1}(\zeta)\beta_2^*(\zeta)\beta_2(\zeta)\delta_2^{-1}(\zeta)=\delta_2^{*-1}(\zeta)\delta_2^{-1}(\zeta)$$

и если $\|\cdot\|$ обозначает, как обычно, операторную норму матрицы, то

$$\|\delta_1^{-1}(\zeta)\gamma_1(\zeta)\|^2\leqslant 1-\|\delta_1(\zeta)\|^{-2}<1-h_1,\ \|\beta_2(\zeta)\delta_2^{-1}(\zeta)\|^2<1-\|\delta_2(\zeta)\|^2<1-h_2. \quad (1.6)$$

Поскольку

$$\delta(z)=\delta_1(z)\delta_2(z)+\gamma_1(z)\beta_2(z)=\delta_1(z)\{\delta_2(z)+\delta_1^{-1}(z)\gamma_1(z)\beta_2(z)\}$$

и

$$\|\delta_1^{-1}(\zeta)\gamma_1(\zeta)\beta_2(\zeta)\delta_2^{-1}(\zeta)\|\leqslant\sqrt{(1-h_1)(1-h_2)}<1-h_3,\ h_3>0,$$

то на основании матричного аналога теоремы Руше (см. [6])

$$N[\delta(z)]=N[\delta_1(z)]+N[\delta_2(z)],$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть*

$$A(z)=\begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix}$$

— голоморфная в замкнутом единичном круге и J-унитарная на единичной окружности $2m\times 2m$ матрица-функция, и $s(z)$ — произвольная функция класса $S_0^{(m)}$. Тогда $\det[\gamma(z)\delta(z)+\delta(z)]\neq 0$, *и следовательно, имеет смысл дробно-линейное преобразование*

$$A(z)<s(z)>\overset{\text{def}}{=}(\alpha(z)s(z)+\beta(z))(\gamma(z)s(z)+\delta(z))^{-1}=f(z),$$

являющееся мероморфной матрицей-функцией в круге $|z|<1$. *При этом*

$$f(z)=\tilde{s}(z)\,\tilde{B}^{-1}(z),$$

где $\tilde{s}(z)\in S_0^{(m)}$, $\tilde{B}(z)$ — *конечное произведение Бляшке—Потапова и* $\operatorname{ord} B=N[\delta(z)]$.

Доказательство. Как показано в лемме 1 (см. (1.5)— (1.6),

$$\|\delta^{-1}(\zeta)\,\gamma(z)\|^2<1-h,\ \ h>0,\ \ |\zeta|=1, \tag{1.7}$$

откуда следует, что в некотором кольце $\rho_1\leqslant|z|<1$

$$\|\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)\|^2\leqslant\|\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\|^2<1-\frac{h}{2}\cdot$$

Если λ — собственное значение матрицы $\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)$, отвечающее собственному вектору e, то

$$|\lambda|^2=\|\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)\,e\|^2\leqslant\|\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)\|^2<1-\frac{h}{2}\cdot$$

т. е. при $\rho_1\leqslant|z|<1$ спектр матрицы $\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)$ лежит в круге $|z|<\left(1-\dfrac{h}{2}\right)^{1/2}$. Поэтому

$$|\det[\gamma(z)\,s(z)+\delta(z)]|=|\det\delta(z)|\,|\det[I+\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)]|\geqslant c>0 \tag{1.8}$$

в некотором кольце $\rho_2\leqslant|z|<1$. Отсюда уже следует первое утверждение леммы.

Так как $\|s(z)\|\leqslant1$, то при любом $0<\rho<1$ к функции $\gamma(z)\,s(\rho z)+\delta(z)$ в силу (1.7) применима уже упоминавшаяся теорема Руше, на основании которой

$$N[\gamma(z)\,s(\rho z)+\delta(z)]=N[\delta(z)].$$

Устремляя ρ к единице и используя известную теорему Гурвица (см) [7], стр. 428), получим

$$N[\gamma(z)\,s(z)+\delta(z)]=N[\delta(z)]. \tag{1.9}$$

Ограниченная аналитическая функция $\chi(z)=\det[\gamma(z)\,s(z)+\delta(z)]$ допускает каноническую факторизацию (см. [8], стр. 100, 103)

$$\chi(z)=b(z)\,\sigma(z)\,F(z),$$

где $b(z)$ — произведение Бляшке, $\sigma(z)$ — сингулярная функция, $F(z)$ — ограниченная внешняя функция. Комбинируя неравенство (1.8) с известным свойством сингулярных функций (см. [8], стр. 111), получаем, что $\sigma(z)\equiv1$. Учитывая (1.9), имеем

$$\chi(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\,\frac{\lambda_k-z}{1-\bar{\lambda}_k z}\,F(z),\ \ n=N[\delta(z)]. \tag{1.10}$$

Теорема о мультипликативном представлении ограниченных аналитических матриц-функций (см. [9]) вместе с равенством (1.10) позволяет заключить, что

$$\gamma(z)\, s(z) + \delta(z) = \widetilde{B}(z)\, \Theta(z),$$

где $\widetilde{B}(z)$ — произведение Бляшке—Потапова порядка n, $\Theta(z)$ — ограниченная внешняя матрица-функция. Следовательно,

$$f(z) = (\alpha(z)\, s(z) + \beta(z))\, \Theta^{-1}(z)\, \widetilde{B}^{-1}(z),$$

$$f(z)\, \widetilde{B}(z) = (\alpha(z)\, s(z) + \beta(z))\, \Theta^{-1}(z). \tag{1.11}$$

Из определения $f(z)$ и J-унитарности матрицы $A(\zeta)$ уже следует, что $\|f(\zeta)\| \leqslant 1$, и значит

$$\|f(\zeta)\, \widetilde{B}(\zeta)\| = \|(\alpha(\zeta)\, s(\zeta) + \beta(\zeta))\, \Theta^{-1}(\zeta)\| \leqslant 1, \ |\zeta| = 1.$$

Функция $(\alpha(z)\, s(z) + \beta(z))\, \Theta^{-1}(z)$ принадлежит классу D, в котором справедлив принцип максимума (см. [10]). Таким образом $\|f(z)\, \widetilde{B}(z)\| \leqslant 1$, что завершает доказательство леммы.

Обозначим $\nu(M)$ число отрицательных собственных значений эрмитовой матрицы M.

Лемма 3. *Пусть эрмитова матрица M разбита на блоки*

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & c \end{bmatrix},$$

где a и c — квадратные матрицы (возможно, различных порядков), и c невырождена. Тогда

$$\nu(M) = \nu(c) + \nu(a - bc^{-1} b^*). \tag{1.12}$$

Доказательство. Приведем матрицу M треугольным преобразованием к блочно-диагональному виду

$$M = \begin{bmatrix} I & bc^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - bc^{-1} b^* & O \\ O & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ c^{-1} b^* & I \end{bmatrix}.$$

Соотношение (1.12) теперь очевидно.

Теорема (М. Г. Крейн — Лангер). *Матрица-функция $f(z)$ класса $S_{\varkappa}^{(m)}$ допускает представление*

$$f(z) = s(z)\, B^{-1}(z), \tag{1.13}$$

где $s(z)$ — сжимающая аналитическая матрица-функция, $B(z)$ — произведение Бляшке—Потапова порядка $\varkappa$.

Доказательство. Если $f(z)$ не принадлежит $S_0^{(m)}$, то найдется точка $z_0 \neq 0$ такая, что

$$\nu([I - w_0^* w_0]) = \nu_0 > 0, \quad w_0 = f(z_0).$$

Допустим, что

$$\det [I - w_0^* w_0] \neq 0. \tag{1.14}$$

Тогда $\det[I - w_0 w_0^*] \neq 0$ и можно построить так называемый двучленный множитель, параметризованный z_0 и w_0:

$$g_0(z) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(z) & \alpha_{12}(z) \\ \alpha_{21}(z) & \alpha_{22}(z) \end{bmatrix} = I_{2m} + (1 + b_0(z)) P_0, \ I_{2m} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_m \end{bmatrix}, \ I_m \equiv I,$$

$$b_0(z) = \frac{1 - \bar{z}_0}{1 - z_0} \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} I \\ w_0^* \end{bmatrix} (I - w_0 w_0^*)^{-1} [-I, w_0], \tag{1.15}$$

$$P_0^2 = -P_0, \ P_0 J = J P_0^*.$$

Непосредственно вычисляется его J-форма

$$g_0(z) J g_0^*(\zeta) - J = (1 - \bar{\zeta} z) \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar{z}_0 z)(1 - z_0 \bar{\zeta})} P_0 J,$$

откуда видно, что матрица $g_0(\zeta)$ J-унитарна на единичной окружности. Для $g_0^{-1}(z)$ имеем

$$g_0^{-1}(z) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(z) & \beta_{12}(z) \\ \beta_{21}(z) & \beta_{22}(z) \end{bmatrix} = I_{2m} + (1 + b_0^{-1}(z)) P_0. \tag{1.16}$$

Нас будет интересовать функция

$$s_0(z) = g_0^{-1}(z) \langle f(z) \rangle = (\beta_{11}(z)(f) z + \beta_{12}(z))(\beta_{21}(z) f(z) + \beta_{22}(z))^{-1}. \tag{1.17}$$

Используя легко проверяемые равенства

$$w_0 (I - w_0 w_0^*)^{-1} = (I - w_0^* w_0)^{-1} w_0^*, \ I + w_0^* (I - w_0 w_0^*)^{-1} w_0 = (I - w_0^* w_0)^{-1} \tag{1.18}$$

и выражение (1.16) для $g_0^{-1}(z)$, убеждаемся в том, что

$$\beta_{21}(z) f_1(z) + \beta_{22}(z) = (I - w_0^* w_0)^{-1} [I + b_0^1(z) w_0^* w - (1 + b_0^{-1}(z)) w_0^* f(z)].$$

Таким образом, предположение

$$\det[I + b_0^{-1}(z) w_0^* w_0 - (1 + b_0^{-1}(z)) w_0^* f(z)] \neq 0 \tag{1.19}$$

обеспечивает существование дробно-линейного преобразования (1.17).

Вычислим ядро $K_{s_0}(\zeta, z)$, считая, что обратные матрицы существуют. Обозначая

$$g_0^{-1*}(\zeta) J g_0^{-1}(z) =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_{21}^*(\zeta)\beta_{21}(z) - \beta_{11}^*(\zeta)\beta_{11}(z) & \beta_{21}^*(\zeta)\beta_{22}(z) - \beta_{11}^*(\zeta)\beta_{12}(z) \\ \beta_{22}^*(\zeta)\beta_{21}(z) - \beta_{12}^*(\zeta)\beta_{11}(z) & \beta_{22}^*(\zeta)\beta_{21}(\zeta) - \beta_{12}^*(\zeta)\beta_{12}(z) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_{11}(\zeta, z) & \gamma_{12}(\zeta, z) \\ \gamma_{21}(\zeta, z) & \gamma_{22}(\zeta, z) \end{bmatrix},$$

получим

$$K_{s_0}(\zeta, z) = (1 - \bar{\zeta} z)^{-1} (f^*(\zeta) \beta_{21}^*(\zeta) + \beta_{22}^*(\zeta))^{-1} [f^*(\zeta) \gamma_{11}(\zeta, z) f(z) + f^*(\zeta) \gamma_{12}(\zeta, z) + \gamma_{21}(\zeta, z) f(z) + \gamma_{22}(\zeta, z)] \times (\beta_{21}(z) f(z) + \beta_{22}(z))^{-1}.$$

Дальнейшие преобразования используют выражение для J-формы $g_0^{-1}(z)$:

$$g_0^{-1*}(\zeta)\,J\,g_0^{-1}(z)-J=(1-\bar\zeta z)\,\frac{1-|z_0|^2}{(\bar\zeta-\bar z_0)(z-z_0)}\begin{bmatrix}-I\\ w_0^*\end{bmatrix}(I-w_0w_0^*)^{-1}[-I,\,w_0],$$

откуда

$$K_{s_0}(\zeta, z)=(1-\bar\zeta z)^{-1}(f^*(\zeta)\beta_{21}^*(\zeta)+\beta_{22}^*(\zeta))^{-1}\Big\{I-f^*(\zeta)f(z)-$$
$$-\frac{(1-\bar\zeta z)(1-|z_0|^2)}{(\bar\zeta-\bar z_0)(z-z_0)}\cdot(f^*(\zeta)-w_0^*)(I-w_0w_0^*)^{-1}(f(z)-w_0)\Big\}\times$$
$$\times(\beta_{12}(z)f(z)+\beta_{22}(z))^{-1}. \tag{1.20}$$

Учитывая, что $(1-\bar\zeta z)(1-|z_0|^2)(\bar\zeta-\bar z_0)^{-1}(z-z_0)^{-1}=\overline{b_0^{-1}(\zeta)}\,b_0^{-1}(z)-$ -1 и используя (1.18), получим

$$-K_{s_0}(\zeta, z)=(1-\bar\zeta z)^{-1}\,\overline{b_0^{-1}(\zeta)}(f^*(\zeta)\beta_{21}^*(\zeta)+\beta_{22}^*(\zeta))^{-1}\{I-f^*(\zeta)f(z)-$$
$$-(1-\overline{b_0(\zeta)}\,b_0(z))(I-f^*(\zeta)w_0)(I-w_0^*w_0)^{-1}(I-w_0^*f(z))\}\times$$
$$\times(\beta_{21}(z)f(z)+\beta_{22}(z))^{-1}\,b_0^{-1}(z)$$

и значит

$$K_{s_0}(\zeta, z)\sim\left(\frac{I-f^*(\zeta)f(z)}{1-\bar\zeta z}-\frac{I-f^*(\zeta)w_0}{1-z_0\bar\zeta}\left(\frac{I-w_0^*w_0}{1-|z_0|^2}\right)^{-1}\frac{I-w_0^*f(z)}{1-\bar z_0 z}\right).$$

Применяя лемму 3 к матрице

$$M=\left\{\frac{I-f^*(z_i)f(z_k)}{1-\bar z_i z_k}\right\}_{i,k=1}^{n},$$

где $z_1,\cdots,z_n$ — точки голоморфности $f(z)$, а $z_{n+1}=z_0$, убеждаемся, что $s_0(z)$ принадлежит $S^{(m)}_{\varkappa-\nu_0}$. Итак

$$f(z)=g_0(z)\langle s_0(z)\rangle,\quad s_0(z)\in S^{(m)}_{\varkappa-\nu_0}. \tag{1.21}$$

Имея в виду применение леммы 2, вычислим $N[\alpha_{22}(z)]$. Из (1.15) следует, что

$$\alpha_{22}(z)=I+(1+b_0^{-1}(z))\,w_0^*(1-w_0w_0^*)^{-1}w_0=$$
$$=(I-w_0^*w)^{-1}(I+b_0(z)\,w_0^*w_0),$$
$$\det\alpha_{22}(z)=\det(I-w_0^*w_0)^{-1}\det(I+b_0(z)\,w_0^*w_0).$$

Если $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{\nu_0}<0<\lambda_{\nu_0+1}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m\leqslant 1$ — собственные значения матрицы $I-w_0^*w_0$, то

$$\det[I+b_0(z)\,w_0^*w_0]=\prod_{l=1}^{m}(1+(1-\lambda_l)\,b_0(z))$$

и

$$N[\alpha_{22}(z)]=\nu. \tag{1.22}$$

Рассуждение завершается индукцией по $\varkappa$. Если $\varkappa=1$, то $\nu_0=1$ и справедливость теоремы следует из (1.21), (1.22) и леммы 2. Пусть утверждение справедливо при всех $p<\varkappa$. Тогда из (1.21)

$$s_0(z) = s(z) B^{-1}(z) = g(z) < s(z) >, \; g(z) = \begin{bmatrix} I & O \\ O & B(z) \end{bmatrix},$$

$$s(z) \in S_0^{(m)}, \; \text{ord}\, B = \varkappa - \nu_0$$

и значит

$$f(z) = g_0(z)\, g(z) < s(z) >.$$

Остается применить леммы 1 и 2 с учетом (1.22).

Для того чтобы избавиться от предположений (1.14) и (1.19) воспользуемся простым алгебраическим фактом: если U — $m \times m$ матрица, то $\det(I + \varepsilon U) \neq 0$ для всех ε за исключением лишь конечного множества. Допустим теперь, что одно из предложений нарушается. Введем функцию $f_\varepsilon(z) = \varepsilon f(z)$, $\varepsilon < 1$. Она также принадлежит $S_\varkappa^{(m)}$, поскольку $K_{f_\varepsilon}(\zeta, z) = K_f(\zeta, z) + (1-\varepsilon^2)(1 - \bar{\zeta} z)^{-1} f^*(\zeta) f(z)$ и ядро $(1 - \bar{\zeta} z)^{-1} I$ положительно-определено. При ε близких к 1, $\varepsilon \neq 1$ условия (1.14) и (1.19) заведомо выполнены, т. е. $f_\varepsilon(z)$ допускает представление (1.13). В силу компактности семейства функций (1.13) утверждение справедливо и для $f(z)$. Теорема полностью доказана.

Учитывая сказанное в п. 1 мы заключаем, что принадлежность матрицы-функции классу $S_\varkappa^{(m)}$ характеризуется представлением (1.13). В работе [5] это утверждение доказано для оператор-функций.

§ 2. Неравенство Шварца—Пика в классе $S_\varkappa^{(m)}$

Пусть $f(z) = s(z) B^{-1}(z)$ — функция класса $S_\varkappa^{(m)}$. Предполагая, что

$$\det\, s(z) \not\equiv 0 \tag{2.1}$$

(или, что то же, $\det f(z) \not\equiv 0$) введем ее „продолжение по симметрии" в область $\{|z| > 1\}$ (которое будем обозначать тем же символом) по формуле

$$f(z) = s^{*-1}(\bar{z}^{-1}) B^{-1}(z), \; |z| > 1. \tag{2.2}$$

Полученная таким образом функция $f(z)$ мероморфна в области $\mathbf{C} \setminus \{|z| = 1\}$. Поскольку $B^*(\bar{z}^{-1}) = B^{-1}(z)$, то

$$f(z) = f^{*-1}(\bar{z}^{-1}). \tag{2.3}$$

Как известно, функция $s(z)$ класса $S_0^{(m)}$, продолженная по симметрии на внешность круга, удовлетворяет неравенству Шварца—Пика в каждой из двух эквивалентных форм:

$$\left\{\frac{I - s(\zeta_i)\, s^*(\zeta_k)}{1 - \zeta_i \bar{\zeta}_k}\right\}_{i,k=1}^{p} \geqslant 0, \quad \left\{\frac{I - s^*(\zeta_i)\, s(\zeta_k)}{1 - \bar{\zeta}_i \zeta_k}\right\}_{i,k=1}^{p} \geqslant 0,$$

где p — натуральное число, $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ — точки голоморфности $s(z)$ такие, что $1 - \zeta_i \bar{\zeta}_k \neq 0$; $i, k = 1, 2, \cdots, p$. Иначе говоря, на этом множестве точек ядро $K_s(\zeta, z)$ положительно-определено. Поэтому, если $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ — точки голоморфности $f(z)$ и $1 - \bar{\zeta}_i \zeta_k \neq 0$, то

$$\nu\left(\left[K_f(\zeta_i, \zeta_k)\right]_{i,k=1}^{p}\right) \leqslant \varkappa.$$

Запишем это условие для $p+q$ точек $\zeta_1, \cdots, \zeta_p; \overline{\zeta}_{p+1}^{-1}, \cdots, \overline{\zeta}_{p+q}^{-1}$, считая $|\zeta_i| < 1$, $i=1, \cdots, p+q$. и $\zeta_i \neq 0$, $i=p+1, \cdots, p+q$,

$$\nu(M_1) \leqslant \varkappa,$$

$$M_1 = \left[\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{I-f^*(\zeta_i) f(\zeta_k)}{1-\overline{\zeta}\zeta_k}\right\}_{i,k=1}^{p} & \left\{\dfrac{I-f^*(\zeta_i) f(\overline{\zeta}_{p+l}^{-1})}{1-\overline{\zeta}_i \overline{\zeta}_{p+k}^{-1}}\right\}_{\substack{i=1,\cdots,p \\ k=1,\cdots,q}} \\ \hline * & \left\{\dfrac{I-f^*(\overline{\zeta}_{p+i}^{-1}) f(\overline{\zeta}_{p+k}^{-1})}{1-\zeta_{p+i}^{-1}\overline{\zeta}_{p+k}^{-1}}\right\}_{i,k=1}^{q} \end{array}\right].$$

Умножая матрицу M_1 слева на $\begin{bmatrix} I & O \\ O & T \end{bmatrix}$ и справа на $\begin{bmatrix} I & O \\ O & T^* \end{bmatrix}$, $T = \mathrm{Diag}\left[\dfrac{f(z_{p+1})}{z_{p+1}}, \cdots, \dfrac{f(z_{p+q})}{z_{p+q}}\right]$ — диагональная блок-матрица (число отрицательных собственных значений при этом не увеличится) и учитывая свойство симметрии (2.3), получим

$$\nu(M) \leqslant \varkappa, \tag{2.4}$$

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{I-f^*(\zeta_i f)(\zeta_k)}{1-\overline{\zeta}_i\zeta_k}\right\}_{i,k=1}^{p} & \left\{\dfrac{f^*(\zeta_i)-f^*(\zeta_{p+k})}{\overline{\zeta}_i-\overline{\zeta}_{p+k}}\right\}_{\substack{i=1,\cdots,p \\ k=1,\cdots,q}} \\ \hline * & \left\{\dfrac{I-f(\zeta_{p+i}) f^*(\zeta_{p+k})}{1-\zeta_{p+i}\overline{\zeta}_{p+k}}\right\}_{i,k=1}^{q} \end{array}\right]. \tag{2.5}$$

Ограничение $\zeta_i \neq 0$, $i=p+1, \cdots, p+q$ снимается предельным переходом в неравенстве (2.4). Если нарушается условие (2.1), то рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(z) = s_\varepsilon(z) B^{-1}(z), \; s_\varepsilon(z) = (s(z) - \varepsilon I)(I - \varepsilon s(z))^{-1}, \; 0 < \varepsilon < 1,$$

принадлежащую $S_\varkappa^{(m)}$, поскольку $s_\varepsilon(z)$ принадлежит $S_0^{(m)}$, для которой (2.1) заведомо выполнено при достаточно малых ε. Остается теперь перейти к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ в неравенстве (2.4). Итак, (2.4) справедливо для любой функции $f(z)$ класса $S_\varkappa^{(m)}$ и любых ее точек голоморфности $\zeta_1, \cdots, \zeta_{p+q}$ в единичном круге. Назовем его неравенством Шварца—Пика в классе $S_\varkappa^{(m)}$. Важным следствием неравенства (2.4) является тот факт, что условия

$$\nu\left(\left\{\frac{I-f^*(\zeta_i) f(\zeta_k)}{1-\overline{\zeta}_i\zeta_k}\right\}_{i,k=1}^{p}\right) \leqslant \varkappa, \quad \nu\left(\left\{\frac{I-f(\zeta_i) f^*(\zeta_k)}{1-\zeta_i\overline{\zeta}_k}\right\}_{i,k=k}^{p}\right) \leqslant \varkappa \tag{2.6}$$

эквивалентны.

§ 3. Проблема Неванлинны—Пика в классе $S_{\varkappa}^{(m)}$

Пусть заданы точки $z_1, \cdots, z_n$ $(|z_i| < 1, 1 \leqslant i \leqslant n)$ — узлы интерполяции, и $m \times m$-матрицы $w_1, \cdots, w_n$ — значения интерполяции. Проблема Неванлинны—Пика (Н.—П.) состоит в описании множества функций $f(z)$ из $S_{\varkappa}^{(m)}$, голоморфных в узлах интерполяции и таких, что

$$f(z_i) = w_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.1}$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Если информационный блок*

$$A_n = \left\{ \frac{I - w_i w_k^*}{1 - z_i \bar{z}_k} \right\}_{i, k=1}^n \tag{3.2}$$

невырожден и $\nu(A_n) = \nu$, *то проблема Н.—П. в классе* $S_{\nu+r}^{(m)}$, $r > 0$, *имеет бесконечное множество решений, которое параметризуется дробно-линейным преобразованием*

$$f(z) = (a_{11}(z)\,\varepsilon(z) + a_{12}(z))\,(a_{21}(z)\,\varepsilon(z) + a_{22}(z))^{-1}. \tag{3.3}$$

Резольвентная матрица $R_n(z)$ (3) *преобразования* (3.3)—*голоморфная в замкнутом единичном круге* $2m \times 2m$ *матрица-функция, j-унитарная на окружности, и*

$$\nu\left(\left\{ \frac{R_n(\zeta_i)\, J\, R_n^*(\zeta_k) - J}{1 - \zeta_i \bar{\zeta}_k} \right\}_{i, k=1}^p \right) \leqslant \nu, \quad J = \begin{bmatrix} -I & O \\ O & I \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

для любых точек $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ *единичного круга. Параметр дробно-линейного преобразования* (3.3) $\varepsilon(z)$—*функция класса* $S_r^{(m)}$ *такая, что*

$$\det\,[a_{21}(z_i)\,\varepsilon(z_i) + a_{22}(z_i)] \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.5}$$

Доказательству теоремы предпошлем следующее утверждение

Лемма 4. *Если*

$$R_n(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{bmatrix}$$

— *резольвентная матрица* (3), *то*

$$\nu(a_{22}(z)) = \nu(A_n) = \nu. \tag{3.6}$$

Доказательство. Покажем, что при некотором предположении матрица $R_n(z)$ допускает факторизацию $R_n(z) = R_{n-1}(z)\, g_n(z)$, где $R_{n-1}(z)$ — матрица того же вида (3), параметризованная z_i, w_i, $i = 1, 2, \cdots, n-1$, а $g_n(z)$ — двучленный множитель вида (1.15). В самом деле, допустим, что

$$\det A_{n-1} \neq 0, \quad A_{n-1} = \left\{ \frac{I - w_i w_k^*}{1 - z_i \bar{z}_k} \right\}_{i, k=1}^n. \tag{3.7}$$

Тогда можно построить матрицы $R_{n-1}(z)$ и $g_n(z) = R_{n-1}^{-1}(z)\, R_n(z)$. Учитывая, что

$$R_n^{-1}(z) = \begin{bmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) \\ b_{21}(z) & b_{22}(z) \end{bmatrix} = I - (1-z)\, G_n\{A_n^{-1};\ z\} \tag{3.8}$$

(аналогичное выражение имеет место и для $R_{n-1}^{-1}(z)$), получим

$$g_n(z) = I - (1-z)\, G_{n-1}\{A_{n-1}^{-1};\ z\} - (1-z)^2\, G_{n-1}\{A_{n-1}^{-1};\ z\}\, G_n\{A_n^{-1};\ z\}$$

где

$$G_k\{A_k^{-1};\ z\} = \left[\frac{\begin{bmatrix} I \\ \cdot \\ w_1 \end{bmatrix}}{1-\bar z_1} \cdots \frac{\begin{bmatrix} I \\ \cdot \\ w_k \end{bmatrix}}{1-\bar z_k}\right] A_k^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{[-I,\ w_1]}{z-z_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{[-I,\ w_k]}{z-z_k} \end{bmatrix}.$$

Информационные блоки A_n и A_{n-1} связаны соотношениями

$$A_n = \begin{bmatrix} I & O \\ B_{n-1}^{*} A_{n-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & O \\ O & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} A_{n-1}^{-1} B_{n-1} \\ O & I \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

$$d_n = \frac{I - w_n w_n^{*}}{1 - z_n \bar z_n} - B_{n-1}^{*} A_{n-1}^{-1} B_{n-1}, \quad B_{n-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{I - w_1 w_n^{*}}{1 - z_1 \bar z_n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{I - w_{n-1} w_n^{*}}{1 - z_{n-1} \bar z_n} \end{bmatrix},$$

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} + D_n, \quad D_n = \begin{bmatrix} -A_{n-1}^{-1} B_{n-1} \\ I \end{bmatrix} d_n^{-1} \left[-B_{n-1}^{*} A_{n-1},\ I\right] \tag{3.10}$$

(d_n невырождена в силу (3.9) и невырожденности A_n). Из последнего равенства имеем

$$G_{n-1}\{A_{n-1}^{-1};\ z\} = G_n\{A_n^{-1} - D_n;\ z\}.$$

Непосредственно проверяется следующее тождество:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{[-I,\ w_1]}{z-z_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{[-I,\ w_n]}{z-z_n} \end{bmatrix} \left[\frac{\begin{bmatrix} I \\ w_1^{*} \end{bmatrix}}{1-\bar z_1 z} \cdots \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_n^{*} \end{bmatrix}}{1-\bar z_n z}\right] = X_1 (Z A_n Z^{*} - A_n) X_2 =$$

$$= -\frac{1}{z} A_n X_2 - X_1 A_n + \frac{1}{z} A_n,$$

$$X_1 = \mathrm{Diag}\left[\frac{I}{z-z_1}, \cdots, \frac{I}{z-z_n}\right], \quad X_2 = \mathrm{Diag}\left[\frac{I}{1-\bar z_1 z}, \cdots, \frac{I}{1-\bar z_n z}\right],$$

$$Z = \mathrm{Diag}\,[z_1 I, \cdots, z_n I]$$

— диагональные блок-матрицы порядка nm. Ряд тождественных преобразований приводит к следующему выражению для $g_n(z)$:

$$g_n(z)=I+\frac{(1-z)(1-\bar z_n)}{1-\bar z_n z}\left[\frac{\begin{bmatrix} I \\ \cdot \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_1}\cdots\frac{\begin{bmatrix} I \\ \cdot \\ w_n^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_n}\right]D_n\begin{bmatrix}\dfrac{[-I, w_1]}{1-z_1}\\ \vdots \\ \dfrac{[-I, w_n]}{1-z_n}\end{bmatrix}$$

или, обозначая

$$u=\left[\frac{I}{1-z_1}\cdots\frac{I}{1-z_n}\right]\begin{bmatrix}-A_{n-1}^{-1}B_{n-1}\\ I\end{bmatrix},\ v=\left[\frac{w_1^*}{1-\bar z_1}\cdots\frac{w_n^*}{1-\bar z_n}\right]\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\dfrac{-A_{n-1}^{-1}B_{n-1}}{I}\end{bmatrix},\quad U_n=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}d_{n-1}^{-1}[-u^*, v^*],$$

окончательно получим

$$g_n(z)=I+\frac{(1-z)(1-\bar z_n)}{1-\bar z_n z}U_n.$$

Используя (3.9), нетрудно убедиться, что

$$u^*u-v^*v=\mu_n d_n,\quad \mu_n=|1-z_n|^{-2}(1-|z_n|^2). \tag{3.11}$$

Отсюда сразу же следует, что $U_n^2=-\mu_n U_n$, и если положить $P_n=$ $=\mu_n^{-1}U_n$, то $P_n^2=-P_n$. Таким образом

$$g_n(z)=I+\frac{(1-z)(1-|z_n|^2)}{(1-\bar z z_n)(1-z_n)}P_n,\ P_n^2=-P_n,\ P_nJ=JP_n^*.$$

Далее, в силу (3.11) u — неособенная матрица и $I-u^{*-1}v^*uu^{-1}=$ $=\mu_n u^{*-1}d_n u^{-1}$. Обозначая $w_0=u^{*-1}v^*$, получим

$$P_n=\begin{bmatrix}I\\ \cdot\\ w_0\end{bmatrix}\mu_n^{-1}ud_n^{-1}u^*[-I, w_0]=\begin{bmatrix}I\\ \cdot\\ w_0\end{bmatrix}(I-w_0w_0^*)^{-1}[-I, w_0].$$

Следовательно, $g_n(z)$ — двучленный множитель вида (1.15). Заметим, что $\nu(I-w_0w_0^*)=\nu(d_n)$ и, как следует из равенства (3.9)

$$\nu(A_n)=\nu(A_{n-1})+\nu(d_n). \tag{3.12}$$

Доказательство леммы завершим индукцией по n. При $n=1$ утверждение доказано выше (см. равенство (1.22)). Если утверждение верно для матрицы-функции $R_{n-1}(z)$, то используя факторизацию, лемму 1 и равенство (3.12), получим (3.6). От предположения (3.7) избавляемся путем введения малых „возмущений“ $w_i(t)$, $1\leqslant i\leqslant n$, таких, что $w_i(0)=w_i$, $1\leqslant i\leqslant n-1$ и при $t\neq 0$ $\det A_k\neq 0$, $k=n-1, n$. Справедливость (3.6) теперь следует из теоремы Гурвица. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Из вида резольвентной матрицы (3) следует, что $R_n(z)$ — рациональная матрица-функция, имеющая не более n полюсов в множестве точек $\bar z_1^{-1}, \dots, \bar z_n^{-1}$, и поэтому голоморфная в замкнутом единичном круге. Выражение для J-формы

$$g_n(z)\, J\, g_n^*(\zeta) - J = (1-\bar{\zeta} z)\left[\left[\frac{I}{w_1^*}\right] \cdots \frac{}{1-\bar{z}_1 z}\right] A_n^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{[I,\ w_1]}{1-z_1\bar{\zeta}} \\ \vdots \\ \dfrac{[I,\ w_n]}{1-z_n\bar{\zeta}} \end{bmatrix}$$

влечет J-унитарность $g_n(z)$ на окружности и свойство (3.4).

Отметим прежде всего, что при условии $\nu(A_n) = \nu$ проблема Н.—П. может иметь решение в классах $S_{\nu+r}^{(m)}$, $r \geqslant 0$. Пусть $f(z)$ принадлежит $S_{\nu+r}^{(m)}$. В силу представления (1.13) $|f(z)|$ ограничена в окрестности точки $|z|=1$. Поскольку матрица-функция

$$R_n^{-1}(z) = \begin{vmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) \\ b_{21}(z) & b_{22}(z) \end{vmatrix}$$

имеет вид (3.3), то нетрудно убедиться, что $\lim\limits_{|z|\to 1-0} [b_{21}(z) f(z) + b_{22}(z)] = I$ и значит $\det[b_{21}(z) f(z) + b_{22}(z)] \neq 0$. Таким образом, имеет смысл дробнолинейное преобразование

$$\varepsilon(z) = (b_{11}(z) f(z) + b_{12}(z))(b_{21}(z) f(z) + b_{22}(z))^{-1} \tag{3.13}$$

и определяет мероморфную матрицу-функцию в единичном круге. Предположим теперь, что $f(z)$ решает проблему Н.—П. Используя выражение для J-формы $R_n^{-1}(z)$

$$R_n^{-1*}(\zeta)\, J\, R_n^{-1}(z) - J = (\bar{\zeta} z - 1)\left[\frac{\begin{bmatrix} -I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} \ \vdots\ \frac{\begin{bmatrix} -I \\ w_n^* \end{bmatrix}}{\bar{\zeta} - \bar{z}_n}\right] A_n^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{[-I,\ w_1]}{z - z_1} \\ \vdots \\ \dfrac{[-I,\ w_n]}{z - z_n} \end{bmatrix},$$

получим (ср. с равенством (1.20))

$$\left\{\frac{I - \varepsilon^*(\zeta_i)\varepsilon(\zeta_k)}{1 - \bar{\zeta}_i \zeta_k}\right\}_{i,k=1}^{p} = \left\{(f^*(\zeta_i)\, b_{21}^*(\zeta_i) + b_{22}^*(\zeta_i))^{-1} \left\{\frac{I - f^*(\zeta_i) f(\zeta_k)}{1 - \bar{\zeta}_i \zeta_k} - \right.\right.$$

$$- \left[\frac{f^*(\zeta_i) - w_1^*}{\bar{\zeta}_i - \bar{z}_1} \cdots \frac{f^*(\zeta_i) - w_n^*}{\bar{\zeta}_i - \bar{z}_n}\right] A_n^{-1} \left.\begin{bmatrix} \dfrac{f(\zeta_k) - w_1}{\zeta_k - z_1} \\ \vdots \\ \dfrac{f(\zeta_k) - w_n}{\zeta_k - z_n} \end{bmatrix}\right\} \times$$

$$\left.\times (b_{21}(\zeta_k) f(\zeta_k) + b_{22}(\zeta_k))^{-1}\right\}_{i,k=1}^{p},$$

где множество $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ точек единичного круга не пересекается с множеством узлов интерполяции и матрицы $b_{21}(\zeta_i) f(\zeta_i) + b_{22}(\zeta_i)$ невырождены, $i = 1, 2, \cdots, p$. Следовательно

$$\nu\left(\left\{\frac{I-\varepsilon^*(\zeta_l)\,\varepsilon(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_l\zeta_k}\right\}_{l,k=1}^{p}\right)=\nu\left(\left\{\frac{I-f^*(\zeta_l)\,f(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_l\zeta_k}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[\frac{f^*(\zeta_l)-w_1^*}{\bar\zeta_l-\bar z_1}\cdots\frac{f^*(\zeta_l)-w_n^*}{\bar\zeta_l-\bar z_n}\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{f(\zeta_k)-w_1}{\zeta_k-z_1}\\ \vdots\\ \dfrac{f(\zeta_k)-w_n}{\zeta_k-z_n}\end{bmatrix}\right\}_{l,k=1}^{p}\right).$$

Применяя лемму 3 к блок-матрице M (2.5), в которой $q=n$, $\zeta_{p+i}=z_i$, $f(\zeta_{p+i})=w_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, получим

$$\nu\left(\left\{\frac{I-\varepsilon^*(\zeta_l)\,\varepsilon(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_l\zeta_k}\right\}_{l,k=1}^{p}\right)\leqslant r,$$

причем это неравенство предельным переходом распространяется на все точки голоморфности $\varepsilon(z)$. Таким образом, всякое решение проблемы Н.—П. $f(z)$ класса $S_{\nu+r}^{(m)}$ имеет вид (3.3) с параметром $\varepsilon(z)$ из $S_r^{(m)}$.

Обратно, пусть в (3.3) $\varepsilon(z)$ принадлежит $S_r^{(m)}$, $r\geqslant 0$. Обозначим

$$u(z)=a_{11}(z)\,\varepsilon(z)+a_{12}(z),\quad v(z)=a_{21}(z)\,\varepsilon(z)+a_{22}(z)$$

и, стало быть, $f(z)=u(z)\,v^{-1}(z)$. Пусть E — множество точек круга, в которых $\det v(z)\neq 0$. Тогда для любых $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_p$ из E

$$\left\{\frac{I-f^*(\zeta_l)\,f(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_l\zeta_k}\right\}_{l,k=1}^{p}=\left\{v^{-1*}(\zeta_l)\frac{I-\varepsilon^*(\zeta_l)\,\varepsilon(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_l\zeta_k}v^{-1}(\zeta_k)+\right.$$

$$\left.+v^{-1*}(\zeta_l)[\varepsilon^*(\zeta_l),\,I]\frac{R_n^*(\zeta_l)\,JR_n(\zeta_k)-J}{1-\bar\zeta_l\zeta_k}\begin{bmatrix}\varepsilon(\zeta_k)\\ I\end{bmatrix}v^{-1}(\zeta_k)\right\}_{l,k=1}^{p}. \tag{3.14}$$

Рассмотрим стандартное преобразование

$$X(z)=(QR_n(z)+P)(PR_n(z)+Q)^{-1}=(R_n(z)\,P-Q)(-R_n(z)Q+P),$$

$$P=\begin{bmatrix}O&O\\O&I\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}I&O\\O&O\end{bmatrix},\ P+Q=I_{2m},\ P-Q=J\ (I\equiv I_m), \tag{3.15}$$

существование которого следует из (3) и (3.15). Поскольку

$$I-X(\zeta_l)\,X^*(\zeta_k)=(R_n(\zeta_l)\,P-Q)^{-1}\{R_n(\zeta_l)\,JR_n^*(\zeta_k)-J\}(PR_n^*(\zeta_k)-Q)^{-1},$$

$$I-X^*(\zeta_l)\,X(\zeta_k)=(R_n^*(\zeta_l)\,P+Q)^{-1}\{R_n^*(\zeta_l)\,JR_n(\zeta_k)-J\}(PR_n(\zeta_k)+Q)^{-1},$$

то в силу эквивалентности условий (2.6) и свойства (3.4) резольвентной матрицы $R_n(z)$

$$\nu\left(\left\{\frac{R_n^*(\lambda_l)\,JR_n(\lambda_k)-J}{1-\bar\lambda_l\lambda_k}\right\}_{l,k=1}^{p}\right)<\nu.$$

Из (3.14) заключаем, что $f(z)$ принадлежит $S_{\nu+r}^{(m)}$, т. е. дробно-линейное преобразование (3.3) переводит $S_r^{(m)}$ в $S_{\nu+r}^{(m)}$.

Проверка интерполяционных условий (3.1) представляет собой непосредственный подсчет. Пусть $A_n^{-1}=\|u_{ik}\|_{i,k=1}^n$. Тогда из равенства $A_n A_n^{-1}=I$ и вида A_n (3.2) следует

$$\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix}u_{11}\\ \vdots\\ u_{n1}\end{bmatrix}-w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix}u_{11}\\ \vdots\\ u_{n1}\end{bmatrix}=I,$$

$$\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix}u_{1i}\\ \vdots\\ u_{ni}\end{bmatrix}-w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix}u_{1i}\\ \vdots\\ u_{ni}\end{bmatrix}=0,$$
$$i=2,\cdots,n$$

1. $$a_{11}(z_1)=I+(1-z_1)\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\frac{-I}{1-z_1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{-I}{1-z_n}\end{bmatrix}=$$

$$=I-\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix}u_{11}\\ \vdots\\ u_{n1}\end{bmatrix}+\sum_{i=2}^n\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix}u_{1i}\\ \vdots\\ u_{ni}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\left(-\frac{1-z_1}{1-z_i}\right)=-w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1-z_1}{1-z_1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{1-z_1}{1-z_n}\end{bmatrix},$$

2. $$a_{12}(z_1)=(1-z_1)\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\frac{w_1}{1-z_1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{w_n}{1-z_n}\end{bmatrix}=$$

$$=\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix}u_{11}\\ \vdots\\ u_{n1}\end{bmatrix}w_1+\sum_{i=2}^n\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\times$$

$$\times\begin{bmatrix}u_{1i}\\ \vdots\\ u_{ni}\end{bmatrix}\frac{w_i(1-z_1)}{1-z_i}=w_1+w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\frac{w_1(1-z_1)}{1-z_1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{w_n(1-z_1)}{1-z_n}\end{bmatrix},$$

$$3.\quad a_{21}(z) = -\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1-z_1}{1-z_1}I\\ \vdots\\ \frac{1-z_1}{1-z_n}I\end{bmatrix},$$

$$4.\quad a_{22}(z) = I+\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\frac{w_1(1-z_1)}{1-z_1}\\ \vdots\\ \frac{w_n(1-z_1)}{1-z_n}\end{bmatrix}.$$

Из полученных соотношений видно, что

$$a_{11}(z_1) = w_1 a_{21}(z_1),\ a_{12}(z_1) = w_1 a_{22}(z_1).$$

Если теперь $\varepsilon(z)$ таково, что $\det[a_{21}(z_1)\varepsilon(z_1)+a_{22}(z_1)] \neq 0$, то

$$f(z_1) = (a_{11}(z)\varepsilon(z_1)+a_{12}(z_1))(a_{21}(z_1)\varepsilon(z_1)+a_{22}(z_1))^{-1} = w_1.$$

Аналогично, используя (3.5), проверяются остальные интерполяционн ые условия (3.1).

Нам остается исследовать особые значения параметра $\varepsilon(z)$, при которых нарушается хотя бы одно из условий (3.5), Соответствующая функция $f(z)$ (3.3) имеет при этом особенность в некоторых узлах интерполяции. Тем не менее не исключена возможность того, что на самом деле особенности устранимы и $f(z_i) = w_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажем, что это невозможно.

П усть $f_0(z)$ (3.3) отвечает значению параметра $\varepsilon(z) = \varepsilon_0(z)$ класса $S_0^{(m)}$ и, скажем

$$\det(a_{21}(z_1)\varepsilon_0(z_1)+a_{22}(z_1)) = 0. \tag{3.16}$$

Используя теорему Руше и лемму 4, нетрудно убедиться в том, что

$$N[a_{21}(z)\varepsilon_0(z)+a_{22}(z)] = \nu. \tag{3.17}$$

Поскольку $f_0(z)$ принадлежит $S_\nu^{(m)}$, то по теореме Крейна—Лангера $f_0(z) = s(z)B^{-1}(z)$; $s(z)$ — из $S_0^{(m)}$ и $\operatorname{ord} B = \nu$. Если при этом $f_0(z)$ голоморфна в точках z_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то из (3.16) и (3.17) следует, что $f(z) = s_0(z)B_0^{-1}(z)$, $s_0(z) \in S_0^{(m)}$ и $\operatorname{ord} B_0 < \nu$. Но тогда $f(z) \in S_\varkappa^{(m)}$ с некоторым $\varkappa < \nu$, что противоречит условиям

$$f(z_i) = w_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n;\quad \nu\{A_n\} = \nu.$$

Случай $\varepsilon_0(z) \in S_r^{(m)}$, $r > 0$ получается индукцией по r. Следовательно, при описании совокупности всех решений проблемы Н.—П. параметры $\varepsilon(z)$, для которых нарушается хотя бы одно из условий (3.5), следует исключить. Теорема полностью доказана.

Отметим в заключение, что иной подход к проблеме Неванлинны—Пика и ряду других интерполяционных проблем в индефинитных классах $S_{\nu+r}$ при $r=0$ предложен в [11] А. А. Нудельманом.

Автор выражает благодарность В. Э. Кацнельсону за внимание к работе.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР

Поступила 25.I.1982

Լ. Բ. ԳՈԼԻՆՍԿԻ. Նևանլինա-Պիկի մատրիցային խնդրի մի ընդհանրացման մասին: *(ամփոփում)*

Թող $S_{\varkappa}^{(m)}$*-ը լինի* D *միավոր շրջանում մերոմորֆ այն* $f(z)$ $-m\times m$ *մատրից-ֆունկցիաների դասը, որոնց համար*

$$\left\{\frac{I-f(\zeta_l)f^*(\zeta_k)}{1-\zeta_l\bar{\zeta}_k}\right\}_{l,\,k=1}^{p},\quad p=1,\,2,\cdots$$

Հերմիտյան մատրիցները, որտեղ $\zeta_1,\cdots,\zeta_p$ $f(z)$ *ֆունկցիայի կամայական հոլոմորֆության կետեր են* D*-ից, ունի ոչ ավել քան* $\varkappa$ *բացասական սեփական արժեքներ: Եթե* $z_1,\cdots,z_n$*-ը միավոր շրջանի կետեր են,* $w_1,\cdots,w_n$*-ը մատրիցներ են և*

$$A_n=\left\{\frac{I-w_l w_k^*}{1-z_l\bar{z}_k}\right\}_{l,\,k=1}^{n}$$

Հերմիտյան մատրիցը ունի ν *բացասական սեփական արժեքներ և չվերասերված է, ապա Նևանլինա-Պիկի խնդրի* $f(z_l)=w_l$ $l=1,\,2,\cdots,n)$ *լուծումների բազմությունը* $S_{\varkappa}^{(m)}$ *դասերում,* $\varkappa>\nu$*, նկարագրվում է հետևյալ կոտորակագծային ձևափոխությամբ*

$$f(z)=(a_{11}(z)\,s(z)+a_{12}(z))\,(a_{21}(z)\,s(z)+a_{22}(z))^{-1},$$

որի գործակիցների մատրիցան որոշվում է ինտերպոլյացիոն տվյալների օգնությամբ, իսկ $s(z$ *պարամետրը պատկանում է* $S_{\varkappa-\nu}^{(m)}$ *դասին: Այս արդյունքն ընդհանրացնում է Վ. Պ. Պոտապովին և Ի. Վ. Կովալիշինային պատկանող արդյունքը, որը վերաբերվում է Նևանլինա-Պիկի կլասիկ խնդրին* $(\nu=\varkappa=0)$:

L. B. GOLINSKY. *On a generalization of the matrix Nevanlinna—Pick problem* (summary)

Let $S_{\varkappa}^{(m)}$ be the class of meromorphic in the unit disk D matrix—functions $f(z)$ such that Hermitian matrix

$$\left\{\frac{I-f(\zeta_l)f^*(\zeta_k)}{1-\bar{\zeta}_l\zeta_k}\right\}_{l,\,k=1}^{p},\quad p=1,\,2,\cdots$$

has not more than $\varkappa$ negative eigenvalues. Here $\zeta_1,\cdots,\zeta_p$ are any points in D, in which $f(z)$ is analytic. If $z_1,\cdots,z_n$ are some distinct points in D, $w_1,\cdots,w_n$—$m\times m$ matrices and the Hermitian matrix

$$A_n=\left\{\frac{I-w_l w_k^*}{1-z_l\bar{z}_k}\right\}_{l,\,k=1}^{n}$$

is nonsingular and has ν negative eigenvalues, then all solutions of the Nevanlinna—Pick problem $f(z_l)=w_l$, $l=1,\cdots,n$ in $S_{\varkappa}^{(m)}$ with $\varkappa>\nu$ are given by

$$f(z)=(a_{11}(z)\,s(z)+a_{12}(z))\,(a_{21}(z)\,s(z)+a_{22}(z))^{-1}.$$

This result generalizes the analogous result for the classical Nevanlinna—Pick problem $(\nu=\varkappa=0)$ due to V. P. Potapov and I. V. Kovalischina.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Потапов.* Мультипликативная структура *J*-нерастягивающих матриц-функций, Труды ММО, 4, 1955, 125—236.
2. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны—Пика, ДАН Арм.ССР, 59, № 1, 1974, 17—22.
3. *Н. И. Ахиезер.* Об одной минимум-проблеме теории функций и числе корней алгебраического уравнения, которые лежат внутри единичного круга, Изв. АН СССР, сер. матем., 9, 1931, 1169—1189.
4. *В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн.* Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура—Такаги, Мат. сб., 86 (128), 1, 1971, 34—75.
5. *M. G. Krein, H. Langer.* Uber die verallgemeinerten Resolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators, Colloquia mathematica Soc. Janos Bolyai, 5, Hilbert space operators, Tihany (Hungary), 1970, 353—399.
6. *И. Ц. Гохберг, Е. И. Сигал.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше, Мат. сб., 84 (126), 4, 1971, 607—629.
7. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, Изд. «Наука», М., т. I. 1967, 486 с.
8. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
9. *Ю. П. Гинзбург.* О факторизации аналитических матриц-функций, ДАН СССР, 159, № 3, 1964, 489—492.
10. *Д. З. Аров.* Реализация матриц-функций по Дарлингтону, Изв. АН СССР, сер. матем., 37, № 6, 1973, 1299—1331.
11. *А. А. Нудельман.* Об одном обобщении классических интерполяционных задач, ДАН СССР, 256, № 4, 1981, 790—793.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 3, 1983 Математика

УДК 519.218.5

Р.В. АМБАРЦУМЯН, Г. С. СУКИАСЯН

О ВНУТРЕННЕМ ОПИСАНИИ ПРОЦЕССОВ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ, НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ШАРОВ

Настоящая работа состоит из двух частей, которые принадлежат соответственно первому и второму автору. Поскольку результаты этих частей тесно взаимосвязаны, то публикация их в одной статье, вероятно, естественна.

§ 1. Непересекающиеся, невзаимодействующие шары на прямой

Случайные процессы шаров единичного радиуса вполне описываются случайными точечными процессами, образованными их центрами. Распределение случайного точечного процесса в R^n будем обозначать через P. Будем предполагать, что

а) P инвариантно относительно группы всех параллельных сдвигов пространства R^n,

б) P имеет конечную интенсивность, (т. е.)

$$E_P N(D) = \lambda |D|, \ \lambda < \infty,$$

где $N(D)$ — случайное число точек процесса, попадающих в область $D \subset R^n$, $|\cdot|$—мера Лебега.

При выполнении условий а), б) существует т.н. распределение Пальма, соответствующее данному P. Напомним, что значение распределения Пальма для достаточно широкого класса событий B можно вычислить как предел условной вероятности

$$\Pi(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(B \cap A_\varepsilon)}{P(A_\varepsilon)}, \tag{1.1}$$

где A_ε — событие, состоящее в том, что в шар радиуса ε с центром в начале координат попадает ровно одна точка процесса.

Под внутренним описанием семейства точечных процессов мы понимаем его описание с помощью некоторого соотношения, связывающего P и Π. Известным примером внутреннего описания семейства точечных процессов является соотношение

$$\Pi = P * \Delta, \tag{1.2}$$

где Δ — распределение точечного процесса с вероятностью 1, имеющего единственную точку в начале координат, звездой обозначена операция композиции, соответствующая наложению независимых точечных процессов. Класс распределений, удовлетворяющих соотношению (1.2) совпадает с семейством однородных пуассоновских точечных полей в R^n, [1].

Дадим определение процессов непересекающихся, невзаимодействующих шаров единичного диаметра (ПННШЕД).

Через m будем обозначать реализации процесса центров. Пусть $D \subset R^n$ — некоторая область, D^c — ее дополнение. Через $P(\cdot \mid m \cap D^c)$ обозначим условное распределение процесса центров в D (т. е. множества $m \cap D$), при условии, что часть реализации, лежащая вне D (т. е. множество $m \cap D^c$) фиксированы.

Говорим, что P есть ПННШЕД, если $P(\cdot \mid m \cap D^c)$ при всякой D совпадает с соответствующим условным распределением пуассоновского процесса, управляемого мерой σL_D, где $\sigma > 0$, L_D — сужение меры Лебега на D. Существование ПННШЕД показано в [2].

Перейдем к вопросу о внутреннем описании ПННШЕД. Через P_0 обозначим условное распределение процесса центров при условии, что имеет место событие

$A =$ {в шар радиуса 1 и центром в 0 не попадает центров процесса}, т. е.

$$P_0(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Теорема 1.1. *Если P описывает ПННШЕД, то*

$$\Pi = P_0 * \Delta. \tag{1.3}$$

Естественно поставить вопрос: исчерпываются ли решения (1.3) классом ПННШЕД?

В многомерном случае ответ на этот вопрос пока отсутствует. Ниже мы покажем, что в одномерном случае, при некоторых условиях гладкости, соотношению (1.3) удовлетворяют только стационарные рекуррентные процессы, с плотностью распределения расстояния между соседними центрами, равной

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(x-1)}, & \text{если } x > 1, \\ 0, & \text{если } x < 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Эти процессы суть ПННШЕД. То, что они удовлетворяют (1.3), легко показать независимо от общей теоремы 1.1. Достаточно проверить, что в процессе P_0 длины интервалов $(1, C_1)$ и $(C_{-1}, -1)$ независимы и каждый имеет α-показательное распределение (C_1 и C_{-1} — ближайшие к началу координат центры справа и слева). Поэтому задача сводится к демонстрации единственности (с точностью до выбора α в (1.4)).

Рассмотрим функции

$p_0(x) = P$ {на интервале $(0, x)$ отсутствуют центры},

$\pi_0(x) = \Pi$ {на интервале $(0, x)$ отсутствуют центры}.

Предположим, что $\pi_0(x)$ непрерывна. Тогда имеют место соотношения Пальма [3]

$$\frac{dp_0(x)}{dx} = -\lambda\pi_0(x). \tag{1.5}$$

Согласно (1.3) имеем

$$\pi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 1, \\ \dfrac{p_0(x+1)}{p_0(2)}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Поэтому при $x > 2$

$$\pi_0(x) = -\frac{p_0(2)}{\lambda}\frac{d}{dx}\pi_0(x-1). \tag{1.6}$$

Это соотношение позволяет определить $\pi_0(x)$ при всех $x > 2$, если $\pi_0(x)$ как-то задано на (1.2). Но $\pi_0(x)$ на (1.2) не может быть произвольной, так как для $x \in (1.2)$ и всякого целого $k > 0$

$$\pi_0(x+k) = \left(-\frac{p_0(2)}{\lambda}\right)^k \frac{d^k}{(dx)^k}\pi_0(x).$$

Поскольку $\pi_0(x)$ должна оставаться неотрицательной, заключаем, что $\pi_0(x)$ оказывается абсолютно монотонной функцией на $(1, \infty)$. Поэтому существует мера μ на $(0, \infty)$ такая, что

$$\pi_0(x) = \int e^{-\alpha(x-1)}\,\mu(d\alpha),$$

Из (1.6) заключаем, что для любого интервала $I \subset (0, \infty)$

$$\int_I \alpha e^{\alpha}\,\mu(d\alpha) = \frac{\lambda}{p_0(2)}\int_I \mu(d\alpha). \tag{1.7}$$

Поскольку уравнение $\alpha e^{\alpha} = \mathrm{const}$ имеет только одно решение, из (1.7) заключаем (рассматривая малые интервалы I), что μ сосредоточена на решении уравнения

$$\alpha e^{\alpha} = \lambda / p_0(2).$$

Итак

$$\pi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ e^{-\alpha(x-1)}, & \text{если } x > 1, \end{cases} \tag{1.8}$$

откуда следует (1.4).

На самом деле $\alpha > 0$ можно выбрать произвольно, а параметры λ и $p_0(2)$ определить из соотношений

$$\lambda^{-1} = \int_0^\infty \pi_0(u)\,du = 1 + \alpha^{-1}, \tag{1.9}$$

$$p_0(x) = 1 - \lambda\int_0^x \pi_0(u)\,du.$$

Следующий шаг состоит в вычислении вероятностей вида

$$p_{k,l,\cdots}(x, y, \cdots) = P\{N(I_1) = k,\ N(I_2) = l,\ \cdots\},$$

где x, $y, \cdots$ — длины интервалов I_1, $I_2, \cdots$, расположенных как указано на рис. 1.

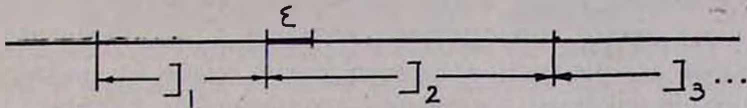

Рис. 1.

Можно показать, что совокупность этих вероятностей вполне определяет P, даже если ограничиться теми из них, для которых индексы k, $l, \cdots$ принимают только значения 0 или 1. Не нарушая общности можно считать, что в последовательности k, $l, \cdots$ никакие два соседних индекса не равны нулю.

Рассмотрим случай двух интервалов, $k=0$, $l=1$. Выделим малый интервал длины ε на левом конце I_2 (рис. 1). Можно считать, что 0 лежит в центре интервала ε. Имеем

$$p_{0,1}(x, y) = p_{0,1}(x+\varepsilon,\ y-\varepsilon) + p_{0,1,0}(x,\ \varepsilon,\ y-\varepsilon).$$

Отсюда, используя (1.1) и $P(A_\varepsilon) = \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)$, находим

$$-\frac{\partial}{\partial x} p_{0,1}(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} p_{0,1}(x, y) = \lambda \Pi\{N(I_1)=0,\ N(I_2)=0\}. \qquad (1.10)$$

В силу (1.3) правая часть может быть выражена через уже известную функцию $p_0(x)$. Так как $p_{0,1}(x, 0) \equiv 0$, то соотношение (1.10) вполне определяет $p_{0,1}(x, y)$. В общем случае аналогичный прием применим на общей границе любых двух интервалов. Для $p_{k,l,\cdots}(x, y, \cdots)$ получаем соотношение, аналогичное (1.10), причем правая часть может быть заменена на $p_{k',l',\cdots}(x', y', \cdots)$, где в последовательности k', $l', \cdots$ число единиц меньше, чем в последовательности k, $l, \cdots$. Таким образом, полное доказательство нашего предложения получается по индукции относительно числа единиц в последовательности k, $l, \cdots$.

§ 2. Дискретные процессы непересекающихся невзаимодействующих шаров

Соотношение (1.3) имеет смысл для точечных процессов и в более общих пространствах, в частности в различных дискретных аналогах пространства R^n. В настоящей заметке задача (1.3) рассматривается на дискретной прямой Z (одномерная целочисленная решетка) и на дискретной окружности Z_m. Показано, что в пространстве Z решениям (1.3) являются только рекуррентные процессы с геометрическим расспределением длины интервала между краями шаров. В случае дискретной окружности решение (1.3) сводится к решению системы линейных уравнений. Показано, что решения последней аппроксимируют, при $m \to \infty$, решения для Z.

Отметим, что если в случае процессов в R^1 решение доставляется теоремой Бернштейна об абсолютно монотонных функциях, то в рассматриваемом нами дискретном случае эффективным оказывается применение аппарата цепных дробей.

1. Некоторые сведения из комбинаторного анализа. Прежде, чем рассмотреть уравнение (1.3) в дискретных пространствах, приведем некоторые результаты комбинаторного анализа, которые в дальнейшем будут неоднократно использоваться. Из k знаков плюс и $n-k$ знаков минус можно составить C^k_{n-k+1} различных последовательностей, в каждой из которых нигде рядом не окажутся два знака плюс. Рассмотрим следующую производящую функцию:

$$F_n(t) = \sum_{k>0} C^k_{n-k+1} t^k, \quad n=0, 1, 2, \cdots.$$

Отметим, что числа $F_n(1)$ известны в комбинмторике как числа Фибоначчи. Условимся, что $F_{-1}(t)=1$. Имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$F_{n+1}(t) = F_n(t) + tF_{n-1}(t), \tag{2.1}$$

$$F_n(t) = F_{n-k}(t)\cdot F_{k-1}(t) + t\cdot F_{n-k-1}(t)\cdot F_{k-2}(t), \quad k=1, 2, \cdots, n. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Для всякого $t>0$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n(t)}{F_{n+1}(t)} = \frac{-1+\sqrt{1+4t}}{2t}.$$

Доказательство. Обозначим $R_n(t) = \dfrac{F_n(t)}{F_{n+1}(t)}$. В силу (2.1) имеем

$$R_n(t) = \frac{F_n(t)}{F_n(t)+tF_{n-1}(t)} = \frac{1}{1+tR_{n-1}(t)}. \tag{2.3}$$

Отсюда следует разложение $R_n(t)$ в цепную дробь:

$$R_n(t) = \cfrac{1}{1+\cfrac{t}{1+\cfrac{t}{1+\cdots\cfrac{t}{1+t}}}}.$$

Из теории цепных дробей [4] известно, что такая дробь сходится при всех $t>0$. Следовательно, в (2.3) можно перейти к пределу при $n\to\infty$. Получим

$$R(t) = \frac{1}{1+t\,R(t)},$$

где $R(t) = \lim_{n\to\infty} R_n(t)$. Положительным корнем полученного квадратного уравнения . вляется

$$R(t) = \frac{-1+\sqrt{1+4t}}{2t}.$$

Лемма 2.1 доказана.

2. Дискретная прямая. На одномерной целочисленной решетке Z рассмотрим случайный точечный процесс M без кратных точек. Распределение P процесса M предполагаем инвариантным относитель-

но группы сдвигов решетки Z. Обозначим через $\begin{pmatrix} x_1, \cdots, x_n \\ I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix}$ событие, состоящее в том, что одновременно в каждой из точек $x_k \in Z$, $k=1, 2, \cdots, n$ имеется (если $I_k=1$) или отсутствует (если $I_k=0$) точка процесса M. Распределением Пальма Π дискретного точечного процесса M называется условное распределение $\Pi(\cdot) = P(\cdot/\binom{0}{1})$.

Наша цель—решить уравнение

$$\Pi = P_A, \tag{1.3'}$$

где P_A — условное распределение процесса M при условии $A = \begin{pmatrix} -1, 0, 1 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$.

Так же, как и в непрерывном случае, можно показать, что для однородных дискретных точечных процессов имеет место формула Пальма:

$$\begin{cases} P\begin{pmatrix} x, x_1, \cdots, x_n \\ 1, I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix} = \lambda\Pi\begin{pmatrix} x_1 - x, \cdots, x_n - x \\ I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix}, \ n=1, 2, \cdots \\ P\begin{pmatrix} x, x_1, \cdots, x_n \\ 0\ I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix} = -\lambda\Pi\begin{pmatrix} x_1 - x, \cdots, x_n - x \\ I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} x_1, \cdots, x_n \\ I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\lambda = P\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ есть интенсивность процесса M.

Рассмотрим события $A_n = \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ 0, 0, \cdots, 0 \end{pmatrix}$, $n=1, 2, \cdots$. Для вероятностей $p_n = P(A_n)$ формула Пальма (2.4) имеет вид

$$p_n = -\lambda\Pi(A_{n-1}) + p_{n-1}, \ n=2, 3, \cdots.$$

Отметим, что $p_1 = 1-\lambda$ и $p_3 = P(A)$. Равенство (1.3′) для A_n принимает вид

$$\Pi(A_n) = \frac{P(A_n \cap A)}{P(A)} = \frac{p_{n+2}}{p_3}, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{2.5}$$

Следовательно

$$p_{n+1} = \frac{p_3}{\lambda}(p_{n-1} - p_n), \ n=2, 3, \cdots. \tag{2.6}$$

Заметим, что подставляя в (2.6) $n=2$, получается $p_2 = 1 - 2\lambda$. Таким образом, мы получили бесконечную систему линейных уравнений, решения которой зависят от двух параметров $\nu = \dfrac{\lambda}{p_3}$ и p_3. Мы покажем, что семейство положительных решений системы (2.6) является однопараметрическим. Из вида системы (2.6) заключаем, что ее общее решение следует искать в виде

$$p_n = B_n(\nu)\, p_2 + C_n(\nu)\, p_3, \ n = 4, 5, \cdots. \tag{2.7}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что

$$B_n(\nu) = (-1)^n \nu^{3-n} F_{n-5}(\nu);$$

$$C_n(\nu) = (-1)^{n+1} \nu^{3-n} F_{n-4}(\nu), \quad n = 4, 5, \cdots,$$

где $F_n(\nu)$ — производящие функции, введенные в п. 1.

В терминах $F_n(\nu)$ уравнение (2.7) принимает вид

$$p_n = (-1)^n \nu^{3-n} [p_2 \cdot F_{n-5}(\nu) - p_3 \cdot F_{n-4}(\nu)]. \tag{2.8}$$

В силу (2.8) положительные решения системы (2.6) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$p_2 \cdot F_{2n-1}(\nu) > p_3 F_{2n}(\nu),$$
$$p_2 \cdot F_{2n}(\nu) < p_3 F_{2n+1}(\nu).$$

Следовательно

$$p_2 \frac{F_{2n}(\nu)}{F_{2n+1}(\nu)} < p_3 < p_2 \frac{F_{2n-1}(\nu)}{F_{2n}(\nu)}. \tag{2.9}$$

Из леммы 2.1 и неравенств (2.9) вытекает

$$p_3 = (1-2\lambda) \cdot \frac{-1+\sqrt{1+4\nu}}{2\nu}.$$

Подставляя $\nu = \frac{\lambda}{p_3}$, находим

$$p_3 = \frac{(1-2\lambda)^2}{1-\lambda}.$$

Вернемся к уравнению (2.6). Зная выражения для p_2 и p_3, методом индукции получаем

$$p_n = (1-\lambda) \left(\frac{1-2\lambda}{1-\lambda}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2.10}$$

Отметим, что требование $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$ естественно, так как при $\lambda = \frac{1}{2}$ с вероятностью 1 центры шаров располагаются через точку, т. е. имеет место наиболее плотная упаковка непересекающимися шарами единичного радиуса.

Зная вероятности p_n, $n = 1, 2, \cdots$ по формулам (1.3′) и (2.4) можно вычислить вероятности событий вида $\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ I_1, I_2, \cdots, I_n \end{pmatrix}$, $I_k = 0$ либо 1. Комбинируя последние можно найти вероятности общих событий $\begin{pmatrix} x_1, \cdots, x_n \\ i_1, \cdots, i_n \end{pmatrix}$. Таким образом, совокупность вероятностей p_n, $n = 1, 2, \cdots$, вполне определяет распределение P. Следовательно, уравнение (1.3′) имеет единственное решение (с точностью до выбора λ).

Рассмотрим случайный процесс открытых непересекающихся шаров единичного радиуса, центры которых образуют рекуррентный точечный процесс; расстояние η между центрами пусть имеет следующее распределение:

$$P(\eta > n) = \left(\frac{1-2\lambda}{1-\lambda}\right)^{n-1}, \ n = 1, 2, \cdots, \tag{2.11}$$

т. е. $\eta - 1$ имеет геометрическое распределение. Нетрудно убедиться, что такой процесс удовлетворяет уравнению (1.3′). На основании доказанной выше единственности приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.1. *Для случайных процессов, заданных на одномерной целочисленной решетке Z, решениями уравнения* (1.3′) *являются только рекуррентные процессы, у которых длина интервала между точками процесса имеет распределение* (2.11).

3. Дискретная окружность. Множество Z_m состоит из m равноотстоящих точек на окружности, занумерованных в циклическом порядке. Рассмотрим на Z_m случайный точечный процесс M_m, распределение $P^{(m)}$ которого инвариантно относительно группы вращений решетки Z_m. Повторяя обозначения и рассуждения п. 2, получим конечную систему линейных уравнений:

$$p_{n+1}^{(m)} = \frac{p_3^{(m)}}{\lambda} (p_{n-1}^{(m)} - p_n^{(m)}), \ n = 2, 3, \cdots, m-1, \tag{2.6′}$$

$$p_m^{(m)} = \frac{p_3^{(m)}}{\lambda} (p_{m-1}^{(m)} - p_m^{(m)}).$$

Представим (2.6′) в ином виде:

$$p_{n-1}^{(m)} = p_n^{(m)} + \nu p_{n+1}^{(m)}, \ n = 2, 3, \cdots, m-1, \tag{2.6″}$$

$$p_{m-1}^{(m)} = (1+\nu)\, p_m^{(m)},$$

где $\nu = \lambda / p_3^{(m)}$. Сравнивая (2.6″) и (2.1), приходим к следующему соотношению:

$$p_{m-n}^{(m)} = F_n(\nu)\, p_m^{(m)}, \ n = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{2.12}$$

где $F_n(\nu)$ — многочлены, введенные в п.1. Из (2.12) находим

$$p_1^{(m)} = 1 - \lambda = F_{m-1}(\nu)\, p_m^{(m)},$$

$$p_n^{(m)} = (1-\lambda) \frac{F_{m-n}(\nu)}{F_{m-1}(\nu)}, \ n = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.13}$$

С помощью равенств (2.2), (2.3) и (2.13) разложим $p_n^{(m)}$ в цепную дробь:

$$p_n^{(m)} = \cfrac{1-\lambda}{F_{n-2}(\nu) + \cfrac{\nu F_{n-3}(\nu)}{1 + \cfrac{\nu}{1 + \cfrac{\nu}{1 + \cdots \cfrac{\nu}{1+\nu}}}}}. \tag{2.14}$$

В п. 2 было показано, что p_2 разлагается в бесконечную цепную дробь вида (2.14). Методом индукции, используя рекуррентные соотношения (2.1) и (2.6), получаем для всех $n > 2$

$$p_n = \cfrac{1-\lambda}{F_{n-2}(\nu) + \nu F_{n-3}(\nu)\cfrac{}{1+\cfrac{\nu}{1+\cfrac{\nu}{1+\cdots}}}} \qquad (2.15)$$

Теорема 2.2. *Пусть распределения P и $P^{(m)}$ случайных точечных процессов в пространствах Z и Z_m удовлетворяют уравнению* (1.3′). *Тогда вероятности p_n можно представить в виде бесконечных цепных дробей* (2.15), *для которых кинонческими подходящими дробями являются вероятности $p_n^{(m)}$*.

Следствие. Для любых n и λ, $0 \leqslant \lambda < \frac{1}{2}$ имеет место

$$\lim_{m\to\infty} p_n^{(m)} = p_n.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 2.IV.1982

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Հ. Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ. Չհատվող, չփոխառնչվող գնդերի պրոցեսների ներքին նկարագրման մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում առաջարկված է միավոր տրամագծով չհատվող, չփոխառնչվող գնդերի պրոցեսների ներքին մի նկարագրում՝ $\Pi = P_A$ *(*) հավասարման միջոցով։ Այստեղ Π-ն գնդերի կենտրոնների պրոցեսի Պալմի բաշխումն է, PA -ն այդ պրոցեսների պայմանական բաշխումն է A պայմանով։*

A-ն պահանջում է, որ 1 շառավիղով և O կենտրոնով փակ գնդի մեջ ուրիշ կենտրոններ չլինեն։ (*) հավասարումը դիտարկվում է R^1*-ի, մեկչափանի Z կավարի և* Z_m *դիսկրետ շրջանագծի վրա։ Ցույց է տրված, որ* R^1*-ի դեպքում (*)-ի լուծումները միայն ռեկուրենտ, ցուցչային բաշխումով նկարագրվող պրոցեսներն են։ Z տարածությունում (*)-ի լուծումները միայն երկրաչափական բաշխումով ռեկուրենտ պրոցեսներն են։ Ցույց է տրված, որ* Z_m*-ի համար լուծումները մոտարկում են լուծումները Z տարածության համար։*

R. V. AMBARTZUMIAN, H. S. SUKIASIAN. *On inner description of processes of nonintersecting, noninteracting balls* (summary)

The paper suggests an inner description of processes of nonintersecting, noninteracting unit diameter balls by means of the relation

$$\Pi = P_A\ (\ *).$$

Here Π is the Palm distribution of the point process M formed by ball centres; PA is the conditional distribution of the process M provided no points of the process lie within the closed unit ball centred at 0. Equation (*) is considered on the one-dimensional lattice z, in R^1 and on the discrete circle Z_m. It is shown that in the case of R^1 only recurrent processes described by exponential distribution are the solutions of (*). In the space Z only recurrent processes with geometric distribution are solutions of (*). In the space Z_m the solutions of (*) approximate as $m \to \infty$ the solutions for Z.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. V. Ambartzumian*. Palm distributions and superpositions of independent point processes in R^n. Stochastic Point Processes, Ed. P. Lewis, J. Wiley & Sons, 1972.

2. *Р. Л. Добрушин.* Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов, Функц. анализ, 2, вып. 4, 1968, 44—57.
3. *А. Я. Хинчин.* Работы по математической теории массового обслуживания, М., Физматгиз, 1963.
4. *А. Я. Хинчин.* Цепные дроби, М., «Наука», 1978.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 3, 1983 Математика

УДК 517.53

Г. В. МИКАЕЛЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТИПА БЛЯШКЕ—НЕВАНЛИННЫ МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

Введение

1°. Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|<1)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<+\infty$$

и

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{|z_k|}{z_k}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\quad(|z|<1)$$

—произведение Бляшке с нулями на $\{z_k\}_1^\infty$.

Как известно, функция $B(z)$ удовлетворяет следующему предельному соотношению:

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\log|B(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta=0.$$

А. Зигмундом была поставлена такая задача: какой должна быть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$, чтобы интегралы

$$I(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\log|B(re^{i\vartheta})|]^2\,d\vartheta$$

были ограничены при $r\to 1-0$.

Л. А. Рубел и Г. Р. Маклейн решили эту задачу в работе [1] методом рядов Фурье (см. [2], [3]).

Ими доказано, например, что для ограниченности функции $I(r)$ достаточно, чтобы считающая функция $n(r)$ последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяла условию

$$n(r)=O\left(\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right)\quad\text{при}\quad r\to 1-0,$$

и что это условие также необходимо в специальном случае, когда $\{z_k\}_1^\infty$ лежит на конечном числе лучей, выходящих из начала координат.

В работе автора [5] была решена аналогичная задача для произведений $B_\alpha(z)$ Бляшке — М. М. Джрбашяна (см. [4], гл. IX). Эти произведения равномерно и абсолютно сходятся в круге $\{z: |z|<1\}$ при условии сходимости

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (-1<\alpha<+\infty)$$

и совпадают с произведением Бляшке $B(z)$ в специальном случае $\alpha=0$.

2°. Пусть теперь последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^{\infty}$ лежит в полуплоскости $G^{(+)}=\{z: \operatorname{Im} z>0\}$ и удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_k}{|z_k|^2} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{1}{\bar{z}_k} < +\infty.$$

Тогда бесконечное произведение типа Бляшке, введенное Р. Неванлинной

$$\mathrm{B}(z)=\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-z/z_k}{1-z/\bar{z}_k} \quad (z \in G^{(+)})$$

сходится в полуплоскости $G^{(+)}$, определяя там аналитическую функцию $\mathrm{B}(z)$ с нулями на последовательности точек $\{z_k\}_1^{\infty}$, с соответствующими кратностями.

Заметим, что при отображении $w=z^{-1}$ $(w_k=z_k^{-1})$, переводящем верхнюю полуплоскость в нижнюю: $G^{(-)}=\{w: \operatorname{Im} w<0\}$, вместо $\mathrm{B}(z)$ мы должны рассматривать произведение

$$\pi_0(w)=\prod_{k=1}^{\infty} \frac{w-w_k}{w-\bar{w}_k} \quad (w \in G^{(-)}) \tag{1}$$

с нулями $\{w_k\}_1^{\infty} \subset G^{(-)}$. Для сходимости этого произведения, очевидно, достаточно выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k| < +\infty. \tag{2}$$

А. М. Джрбашян в работе [6] построил бесконечное произведение $\pi_\alpha(w)$ типа Бляшке—Р. Неванлинны, которое сходится в нижней полуплоскости $G^{(-)}$, когда последовательность его нулей $\{w_k\}_1^{\infty} \equiv \{u_k + iv_k\}_1^{\infty}$ $(v_k<0)$ взамен (2) удовлетворяет условию вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty \quad (-1<\alpha<+\infty). \tag{3}$$

Функция $\pi_\alpha(w)$ совпадает с $\pi_0(w)$ при $\alpha=0$.

Эти произведения имеют следующий вид:

$$\pi_\alpha(w)=\prod_{k=1}^{\infty} b_\alpha(w; w_k), \tag{4}$$

где

$$b_\alpha(w; w_k)=\exp\left\{-\int_0^{|v_k|} \left\{ \frac{1}{[\tau+i(w-w_k)]^{1+\alpha}} + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{[i(w-\bar{w}_k)-\tau]^{1+\alpha}}\Big\}\tau^{\alpha}\,d\tau\Big\}\quad(-1<\alpha<+\infty). \tag{5}$$

Ряд важных свойств функции $\pi_\alpha(w)$ описывается посредством оператора интегро-дифференцирования $W^{-\alpha}$ того же порядка α $(-1<\alpha<+\infty)$ в смысле Г. Вейля.

Пусть $f(w)\equiv f(u+iv)$ — произвольная функция, определенная почти всюду в области $\{w\colon \operatorname{Im} w<0\}$. Оператор $W^{-\alpha}$ формально определяется таким образом:

$$W^{-\alpha}f(u+iv)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{v}(v-t)^{\alpha-1}f(u+it)\,dt\ (0<\alpha<+\infty), \tag{6}$$

$$W^{0}f(u+iv)\equiv f(u+iv), \tag{7}$$

$$W^{-\alpha}f(u+iv)\equiv W^{-(1+\alpha)}\frac{\partial}{\partial v}f(u+iv)(-1<\alpha<0), \tag{8}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма функция Эйлера.

Нам понадобятся следующие результаты, установленные в работе А. М. Джрбашяна [6] и в его кандидатской диссертация [7].

1. При любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ функция $W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(w)|$ непрерывна в полуплоскости с проколами $G^{(-)}\setminus\{w_k\}_1^{\infty}$.

2. При любых α $(-1<\alpha<+\infty)$ и $w\,\bar{\in}\,[w_k, \bar{w}_k]$ справедливо представление

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\,w_k)|=\operatorname{Re}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{-|v_k|}^{|v_k|}\frac{(|v_k|-|\tau|)^{\alpha}}{\tau-i(w-u_k)}\,d\tau. \tag{9}$$

3. При любых α $(0\leqslant\alpha<+\infty)$ и $w\in G^{(-)}$

а) $$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\,w_k)|<0, \tag{10}$$

б) $$W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(w)|<0. \tag{11}$$

4. При любых α $(-1<\alpha<+\infty)$ и v $(-\infty<v<0)$

а) $$\lim_{u\to\infty}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv;\,w_k)|=0, \tag{12}$$

б) $$\lim_{u\to\infty}W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)|=0. \tag{13}$$

5. При любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ справедлива оценка

$$\sup_{-\infty<v<0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv;\,w_k)||\,du\leqslant\frac{4\pi}{\Gamma(2+\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|^{1+\alpha}. \tag{14}$$

6. При любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{v\to-0}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)||\,du=0. \tag{15}$$

3°. В § 1 настоящей статьи установлены формулы для преобразования Фурье функции $W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)|$ $(-\infty<u<+\infty)$ при любом v $(-\infty<v<0)$ (теорема 1).

В § 2 решается задача об ограниченности функции

$$I_\alpha(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}[W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)|]^2\,du$$

при $v\to-0$.

Сначала приводится представление функции $I_\alpha(v)$ через преобразования Фурье функции $W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)|$ $(-\infty<u<+\infty)$ (теорема 2). Затем, в теореме 3 найдено простое достаточное условие ограниченности $I_\alpha(v)$ при $v\to-0$. А в теореме 4 установлено, что это условие также необходимо в специальном случае, когда последовательность $\{w_k\}_1^\infty$ лежит на конечном числе вертикальных полупрямых в нижней полуплоскости.

В заключение выражаю благодарность М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство.

§ 1. Об одном преобразовании Фурье

Положив $w_k=u_k+iv_k$, вычислим значение интеграла Фурье

$$\Omega_k^{(\alpha)}(x,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv;\ w_k)|\,du \tag{1.1}$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<v<0,\ -1<\alpha<+\infty).$$

В силу представления (9) имеем

$$\Omega_k^{(\alpha)}(x,v)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-|v_k|}^{|v_k|}(|v_k|-|\tau|)^\alpha\,d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\tau+v)\,e^{-ixu}}{(\tau+v)^2+(u-u_k)^2}\,du.$$

Отсюда в силу формулы (см. [8], стр. 323, № 8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixu}}{u^2+a^2}\,du=\frac{\pi}{|a|}\,e^{-|ax|}\quad(a\neq0),$$

получим

$$\Omega_k^{(\alpha)}(x,v)=\frac{\pi\,e^{-iu_kx}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-|v_k|}^{|v_k|}(|v_k|-|\tau|)^\alpha\,e^{-|x(\tau+v)|}\operatorname{sign}(\tau+v)\,d\tau. \tag{1.2}$$

Теперь в силу формулы (1.2), оценки (14) и теоремы Фубини справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть последовательность точек* $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha} < +\infty \tag{1.3}$$

при некотором α $(-1 < \alpha < +\infty)$. *Тогда для любого* v $(-\infty < v < 0)$ *преобразование Фурье*

$$\Omega_\alpha (x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha (u + iv)| \, du \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{1.4}$$

существует и определяется по формуле

$$\Omega_\alpha (x, v) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-iu_k x} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \operatorname{sign} (\tau + v) \, d\tau. \tag{1.5}$$

Отметим два следствия из этой теоремы.

Следствие 1. *Пусть выполнено условие* (1.3) *при* $\alpha = 0$. *Тогда для любого* v $(-\infty < v < 0)$ *справедливы формулы*

$$\Omega_0 (x, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log |\pi_0 (u + iv)| \, du =$$

$$= \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{e^{|x| v}}{|x|} \sum_{v_k > v} e^{-iu_k x} \operatorname{sh} (|x| v_k) + \right. \tag{1.6}$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sh} (|x| v)}{|x|} \sum_{v_k < v} e^{-iu_k x + |x| v_k} + \frac{e^{2|x| v} - 1}{2|x|} \sum_{v_k = v} e^{-iu_k x} \right\} (x \neq 0),$$

$$\Omega_0 (0, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\pi_0 (u + iv)| \, du = \sqrt{2\pi} \left\{ \sum_{v_k > v} v_k + v \sum_{v_k < v} 1 \right\}. \tag{1.7}$$

Формулы (1.6) и (1.7) следуют из формул (1.4) и (1.5), если положить в них $\alpha = 0$.

Следствие 2. *Пусть при некотором* α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *выполнено условие* (1.3). *Тогда для любого* v $(-\infty < v < 0)$

$$\Omega_\alpha (0, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha (u + iv)| \, du =$$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(2+\alpha)} \left\{ \sum_{v_k > v} |v_k|^{1+\alpha} + \sum_{v_k < v} \left[|v_k|^{1+\alpha} - (|v_k| - |v|)^{1+\alpha} \right] \right. . \tag{1.8}$$

Формула (1.8) следует из формул (1.4) и (1.5), если положить в них $x = 0$.

§ 2. О росте произведения $\pi_\alpha(w)$

2.1. Пусть последовательность $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию (1.3).

Теорема 2.1°. *Если* $-\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$, *то для всех* v $(-\infty < v < 0)$

$$W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha(u+iv)| \in L_2(-\infty, +\infty),$$

и справедливо равенство

$$I_\alpha(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} [W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha(u+iv)|]^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega_\alpha(x, v)|^2 dx. \tag{2.1}$$

2°. *Если* $-1 < \alpha \leqslant -\frac{1}{2}$, *то для* $v \overline{\in} \{v_k\}_1^\infty$ $(-\infty < v < 0)$

$$W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha(u+iv)| \in L_2(-\infty, +\infty)$$

и выполняется равенство (2.1).

Доказательство. Так как ограниченные функции из класса $L_1(-\infty, +\infty)$ принадлежат классу $L_2(-\infty, +\infty)$ и для них справедливо равенство Парсеваля (см. [4], теорема 1.12), то для любого значения параметра α $(-1 < \alpha < +\infty)$ при $v \overline{\in} \{v_k\}_1^\infty$ функция $W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha(u+iv)|$ $(-\infty < u < +\infty)$ принадлежит классу $L_2(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет равенству (2.1).

Пусть $-\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$. Тогда, если $v = v_n$ при некотором n, то обозначая через p_n кратность появления точки v_n в последовательности $\{v_k\}_1^\infty$, будем иметь

$$I_\alpha(v_n) \leqslant 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{k=1}^{p_n} \int_{-|v_n|}^{|v_n|} \frac{(|v_n| - |\tau|)^\alpha (\tau + v_n)}{(\tau + v_n)^2 + (u - u_k)^2} d\tau \right]^2 du +$$

$$+ 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{v_k \neq v_n} W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u + iv_n)| \right|^2 du.$$

Второй интеграл в полученном неравенстве конечен по предыдущему случаю. Докажем конечность первого интеграла. Обозначим его через $J_1(\alpha)$. По неравенству Шварца

$$J_1(\alpha) \leqslant \frac{p_n}{\Gamma^2(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{p_n} \left[\int_{-|v_n|}^{|v_n|} \frac{(|v_n| - |\tau|)^\alpha (\tau + v_n)}{(\tau + v_n)^2 + (u - u_k)^2} d\tau \right]^2 du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2p_n^2}{\Gamma^2(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{|v_n|} \frac{(|v_n| - |\tau|)^{1+\alpha}}{(|v_n| - |\tau|)^2 + u^2} d\tau \right]^2 du +$$

$$+\frac{2p_n^2}{\Gamma^2(1+\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigg[\int\limits_{-|v_n|}^{0}\frac{(|v_n|-|\tau|)^\alpha(|v_n|+|\tau|)}{(|v_n|+|\tau|)^2+u^2}\,d\tau\Bigg]^2du.$$

Очевидно, что последний интеграл в полученном неравенстве конечен. Теперь конечность $J_1(\alpha)$ для $-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty$ будет доказана, если заметить, что при $-\frac{1}{2}<\beta<\alpha<+\infty$

$$J_2(\alpha)\equiv\int\limits_0^\infty\Bigg[\int\limits_0^{|v_n|}\frac{\tau^{1+\alpha}}{\tau^2+u^2}\,d\tau\Bigg]^2du\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^\infty\Bigg[\int\limits_0^{|v_n|}\tau^{2\beta}\,d\tau\Bigg]\Bigg[\int\limits_0^{|v_n|}\frac{\tau^{2(1+\alpha-\beta)}}{(\tau^2+u^2)^2}\,d\tau\Bigg]du=\frac{\pi\,|v_n|^{2\alpha+1}}{8\,(2\beta+1)(\alpha-\beta)}.$$

Таким обарзом, для любого значения параметра $\alpha\left(-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty\right)$ при любом $v\,(-\infty<v<0)$ функция $W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)|$ $(-\infty<u<+\infty)$ принадлежит классам $L_1\,(-\infty+\infty)$ и $L_2\,(-\infty+\infty)$. Следовательно, по теореме Планшереля равенство (2.1) справедливо для всех $v\,(-\infty<v<0)$ и $\alpha\left(-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty\right)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Функция* $\log|\pi_0(u+iv)|$ *принадлежит классу* $L_2(-\infty,+\infty)$ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\log|\pi_0(u+iv)|]^2\,du=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Omega_0(x,v)|^2\,dx\quad(-\infty<v<0).$$

Замечание. *Функция* $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv_k;\,w_k)|$ $(-\infty<u<+\infty)$ *при* $-1<\alpha\leqslant-\frac{1}{2}$ *не принадлежит классу* $L_2(-\infty,+\infty)$.

В самом деле, интеграл $J_2(\alpha)$ и, следовательно, $J_1(\alpha)$ расходится при $-1<\alpha\leqslant-\frac{1}{2}$:

$$J_2(\alpha)=\int\limits_0^\infty u^{2\alpha}\Bigg[\int\limits_0^{\frac{|v_n|}{u}}\frac{\tau^{1+\alpha}}{1+\tau^2}\,d\tau\Bigg]^2du\geqslant$$

$$\geqslant\Bigg[\int\limits_0^{|v_n|}\frac{\tau^{1+\alpha}}{1+\tau^2}\,d\tau\Bigg]^2\int\limits_0^1u^{2\alpha}\,du.$$

2.2. Пусть выполняется условие (1.3). Для $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < v < 0$ и $-1 < \alpha < +\infty$ введем следующие обозначения:

$$K_\alpha(x, v) \equiv -\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{v_k < v} \left\{ e^{-iu_k x} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \operatorname{sign}(\tau+v)\, d\tau \right\}, \tag{2.2}$$

$$L_\alpha(x, v) \equiv \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{|x| v}}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{v_k > v} \left\{ e^{-iu_k x} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{|x|\tau}\, d\tau \right\}. \tag{2.3}$$

В силу формулы (1.5) имеем

$$\Omega_\alpha(x, v) \equiv -[K_\alpha(x, v) + L_\alpha(x, v)]. \tag{2.4}$$

Далее, для любого v $(-\infty < v < 0)$ обозначим через $G_v^{(-)} \subset G^{(-)}$ полуплоскость $G_v^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w \leqslant v\}$. При условии (1.3) в каждой полуплоскости $G_v^{(-)}$ лежит лишь конечное число — $n(v)$ точек $w_k \in G_v^{(-)}$, причем $n(v) \equiv 0$, когда $v \leqslant v_0 < 0$.

Теорема 3. *Если*

$$n(v) = O\left(|v|^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right), \text{ при } v \to -0, \tag{2.5}$$

то функция $I_\alpha(v)$ ограничена при $v \to -0$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

Доказательство. Заметим сначала, что условие (2.5) обеспечивает выполнение условия (1.3). В самом деле, если (2.5) выполнено, то при $v \to -0$

$$\sum_{v_k > v} |v_k|^{1+\alpha} = \int_v^0 (-t)^{1+\alpha}\, dn(t) = -(-v)^{1+\alpha} n(v) +$$

$$+ (1+\alpha) \int_v^0 (-t)^\alpha n(t)\, dt \leqslant c\, |v|^{1/2},$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от v.

Доказательство теоремы основано на оценках функций $K_\alpha(x, v)$ и $L_\alpha(x, v)$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

Сначала установим оценку для функции $K_\alpha(x, v)$ $(x \neq 0)$.

$$|K_\alpha(x, v)| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{v} \left| \int_t^{-t} (-t - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \operatorname{sign}(\tau+v)\, d\tau \right| dn(t) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{v} \left| e^{|x|(v-t)} \int_{v-t}^{-t} \tau^\alpha e^{-|x|\tau}\, d\tau + e^{|x|(v+t)} \int_0^{-t} \tau^\alpha e^{|x|\tau}\, d\tau - \right.$$

$$\left. - e^{|x|(t-v)} \int_0^{v-t} \tau^\alpha e^{|x|\tau}\, d\tau \right| dn(t). \tag{2.6}$$

Выражение, стоящее под знаком модуля, неотрицательно при всех α $(-1<\alpha<+\infty)$. Действительно, в случае $0\leqslant\alpha<+\infty$ это следует из неравенств

$$e^{|x|(v-t)}\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{-|x|\tau}\,d\tau+e^{|x|(v+t)}\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{|x|\tau}\,d\tau\geqslant$$

$$\geqslant(v-t)^{\alpha}\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|}\geqslant[e^{|x|(t-v)}-e^{|x|(t+v)}]\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{v-t}\tau^{\alpha}e^{|x|\tau}\,d\tau\quad(x\neq 0).$$

А в случае $-1<\alpha<0$ — это следует из того факта, что выражение, стоящее под знаком модуля, монотонно возрастающая функция от t и стремится к нулю, когда $t\to-\infty$.

Далее, из (2.6) получаем

$$|K_{\alpha}(x,v)|\leqslant\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{v}\Bigg[e^{|x|(v-t)}\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{-|x|\tau}\,d\tau+$$

$$+e^{|x|(v+t)}\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{|x|\tau}\,d\tau\Bigg|\,dn(t).$$

Отсюда в силу следующих неравенств, справедливых для $0\leqslant\alpha<+\infty$

$$\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{-|x|\tau}\,d\tau\leqslant(-t)^{\alpha}\frac{e^{|x|(t-v)}-e^{|x|t}}{|x|},$$

$$\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{|x|\tau}\,d\tau\leqslant(-t)^{\alpha}\frac{e^{-|x|t}-e^{|x|(v-t)}}{|x|},$$

$$(x\neq 0)$$

получим

$$|K_{\alpha}(x,v)|\leqslant\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)}\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|}\int\limits_{-\infty}^{v}(-t)^{\alpha}\,dn(t)=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)}\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|}\Bigg[(-v)^{\alpha}n(v)+\alpha\int\limits_{-\infty}^{v}(-t)^{\alpha}n(t)\,dt\Bigg]$$

$$(x\neq 0).$$

Следовательно, в силу условия (2.5) справедлива оценка

$$|K_{\alpha}(x,v)|\leqslant c\,\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|\sqrt{|v|}}\quad(x\neq 0,\ v_0<v<0),\tag{2.7}$$

где $c>0$ — постоянная, не зависящая от v и x.

Теперь установим оценку для функции $L_\sigma(x, v)$ $(x \neq 0)$:

$$|L_\sigma(x, v)| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{|x| v}}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_a^0 \left[\int_t^{-t} (-t-|\tau|)^\alpha e^{|x|\tau} d\tau \right] dn(t) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{|x| v}}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_v^0 \left[e^{-|x| t} \int_0^{-t} \tau^\alpha e^{-|x|\tau} d\tau + e^{|x| t} \int_0^{-t} \tau^\alpha e^{|x|\tau} d\tau \right] dn(t).$$

Применив дважды интегрирование по частям в последнем интеграле с учетом условия (2.5), получим

$$|L_\alpha(x, v)| \leqslant c e^{|x| v} \left\{ |v|^{-\frac{1}{2}-\alpha} \left[e^{-|x| v} \int_0^{-v} \tau^\alpha e^{-|x|\tau} d\tau + \right.\right.$$

$$\left. + e^{|x| v} \int_0^{-v} \tau^\alpha e^{|x|\tau} d\tau \right] + \int_v^0 (-t)^{-\frac{3}{2}-\alpha} \left[e^{-|x| t} \int_0^{-t} \tau^\alpha e^{-|x|\tau} d\tau + \right.$$

$$\left.\left. + e^{|x| t} \int_0^{-t} \tau^\alpha e^{|x|\tau} d\tau \right] \right\} (v_0 < v < 0), \tag{2.8}$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от v и x.

Используя очевидные неравенства

$$\int_0^{-y} \tau^\alpha e^{-|x|\tau} d\tau < (-y)^\alpha \frac{1 - e^{|x| y}}{|x|},$$

$$\int_0^{-y} \tau^\alpha e^{|x|\tau} d\tau < (-y)^\alpha \frac{e^{-|x| y} - 1}{|x|}$$

$$(0 \leqslant \alpha < +\infty, \ -\infty < y < 0, \ x \neq 0),$$

из (2.8) будем иметь

$$|L_\sigma(x, v)| < c\, \frac{1 - e^{2|x| v}}{|x| \sqrt{|v|}} +$$

$$+ \frac{c}{2} \frac{e^{|x| v}}{|x|} \int_v^0 \frac{e^{-|x| t} - e^{|x| t}}{(-t)^{3/2}} dt \ (x \neq 0, \ v_0 < v < 0). \tag{2.9}$$

Так как дробь $\frac{\operatorname{sh}(-y)}{-y}$ $(-\infty < y < 0)$ является убывающей функцией от y, то

$$\frac{e^{|x| v}}{|x|} \int_v^0 \frac{e^{-|x| t} - e^{|x| t}}{(-t)^{3/2}} dt =$$

$$=2e^{|x|v}\int\limits_v^0 \frac{\operatorname{sh}(-|x|\,t)}{(-|x|\,t)}(-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2e^{|x|v}\frac{\operatorname{sh}(-|x|v)}{|x|\,|v|}\int\limits_v^0 (-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2\,\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|\sqrt{|v|}}\quad (x\neq 0).$$

Отсюда и из (2.9) следует оценка

$$|L_\alpha(x, v)| \leqslant 2c\,\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|\sqrt{|v|}}\quad (v_0 < v < 0). \tag{2.10}$$

Теперь в силу (2.7) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K_\alpha(x, v)|^2\,dx \leqslant 2c^2|v|^{-1}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1-e^{2xv}}{x}\right)^2 dx = \tag{2.11}$$

$$=2c^2\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1-e^{-2x}}{x}\right)^2 dx = 8\,c^2\log 2\ (v_0 < v < 0,\ 0\leqslant\alpha < +\infty)$$

(по поводу последнего интеграла см., например, [8], стр. 348, № 17, с $p\to +0$).

Наконец в силу (2.10) будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |L_\alpha(x, v)|^2\,dx \leqslant 32\,c^2\log 2\ (v_0 < v < 0,\ 0\leqslant\alpha < +\infty). \tag{2.12}$$

Из неравенства

$$I_\alpha(v) \leqslant 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K_\alpha(x, v)|^2\,dx + 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |L_\alpha(x, v)|^2\,dx, \tag{2.13}$$

по (2.11) и (2.12) следует утверждение теоремы.

2.3. Убедимся теперь, что при особом расположении точек w_k в нижней полуплоскости, условие (2.5) необходимо для ограниченности функции $I_\alpha(v)$ $\left(-\frac{1}{2} < \alpha < +\infty\right)$ при $v\to -0$. А именно, справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть последовательность* $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + i v_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ *удовлетворяет условию* (1.3) *и функция* $I_\alpha(v)$ $\left(-\frac{1}{2} < \alpha < +\infty\right)$ *при* $v\to -0$ *ограничена. Тогда*

1°. *При* $0\leqslant\alpha < +\infty$, *если последовательность* $\{w_k\}_1^\infty$ *лежит на конечном числе полупрямых* — $\{w_k\}_1^\infty \subset \bigcup\limits_{m=1}^{N} \{w = u_m + ih\colon -\infty < h < 0\}$, *то выполняется условие* (2.5).

2°. *При* $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, *если последовательность* $\{w_k\}_1^\infty$ *лежит на одной полупрямой* — $\{w_k\}_1^\infty \subset \{w = u_0 + ih: -\infty < h < 0\}$, *то выполняется условие* (2.5).

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Без ограничения общности можно считать, что точки w_k лежат лишь на одной полупрямой, так как в силу (10) при $0 \leqslant \alpha < +\infty$

$$I_\alpha(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\sum_{m=1}^{N} \sum_{u_k = u'_m} W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u + iv;\ w_k)| \Big]^2 du \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\sum_{u_k = u'_m} W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u + iv;\ w_k)| \Big]^2 du,$$

и

$$n(v) = n_1(v) + \cdots + n_N(v) \quad (-\infty < v < 0),$$

где $n_m(v)$ $(m = 1, 2, \cdots, N)$ означает число точек w_k на полупрямой $\{w = u'_m + ih: -\infty < h < v\}$.

Далее заметив, что в силу формул (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) и неотрицательности функций $K_\alpha(x, v)$ и $L_\alpha(x, v)$ при $u_k = 0$, $k = 1, 2, \cdots$

$$I_\alpha(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[|K_\alpha(x, v)| + |L_\alpha(x, v)| \Big]^2 dx, \tag{2.14}$$

оценим снизу функцию $L_\alpha(x, v)$ $\left(-\frac{1}{2} < \alpha < +\infty\right)$.

Справедливы соотношения

$$|L_\alpha(x, v)| = \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{|x| v}}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{v_k > v} \Big[e^{-|x| v_k} \int_0^{-v_k} \tau^\alpha e^{-|x| \tau} d\tau +$$

$$+ e^{|x| v_k} \int_0^{-v_k} \tau^\alpha e^{|x| \tau} d\tau \Big] \geqslant \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{|x| v}}{2\Gamma(2+\alpha)} \sum_{v_k > v} (-v_k)^{1+\alpha}.$$

Следовательно, ввиду равенства (2.14)

$$I_\alpha(v) \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |L_\alpha(x, v)|^2 dx \geqslant \frac{\pi |v|^{-1}}{2\Gamma^2(2+\alpha)} \Big[\sum_{v_k > v} (-v_k)^{1+\alpha} \Big]^2.$$

Таким образом, при $v \to -0$ имеем

$$\int_v^0 (-t)^{1+\alpha} dn(t) < c \sqrt{|v|} \left(-\frac{1}{2} < \alpha < +\infty\right). \tag{2.15}$$

Отсюда вытекает, что при $v_0 < v < v' < 0$

$$c\sqrt{|v|} > \int\limits_{v}^{v'} (-t)^{1+\alpha}\, dn(t) = (-v')^{1+\alpha} n(v') -$$

$$-(-v)^{1+\alpha}\, n(v) + (1+\alpha) \int\limits_{v}^{v'} (-t)^{\alpha}\, n(t)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant (-v')^{1+\alpha}\, [n(v') - n(v)]. \tag{2.16}$$

Вводя обозначение $\varphi(v) = n(v)\,|v|^{1/2+\alpha}$ и положив $v' = \frac{v}{2}$, из (2.16) будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{1}{2^{1+\alpha}}\,\varphi(v) < c \quad (v_0 < v < 0). \tag{2.17}$$

Убедимся, что $\limsup\limits_{v \to -0} \varphi(v) < +\infty$. Действительно, в противном случае для некоторой последовательности чисел v_n, $v_n \to -0$, $\varphi(v_n) \geqslant \varphi(v)$ при всех $v \leqslant v_n$ и $\varphi(v_n) \to +\infty$. Но это приводит нас к противоречию, так как в силу (2.17)

$$c > \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2^{1+\alpha}}\right)\varphi(v_n) + \frac{1}{2^{1+\alpha}}\,[\varphi(v_n) - \varphi(2v_n)] >$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2^{1+\alpha}}\right)\varphi(v_n).$$

Этим доказаны утверждения 1° и 2° теоремы.

Следствие. *Для любого значения параметра* α $\left(-\frac{1}{2} < \alpha < +\infty\right)$ *существуют сходящиеся произведения* (4), *для которых функция* $I_\alpha(v)$ $(-\infty < v < 0)$ *при* $v \to -0$ *не ограничена.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 14.IV.1982
и 15.XI.1982

Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Բլյաշկե-Նևանլիննի տիպի արտադրյալների աճի հետազոտումը Ֆուրյեի ձևափոխությունների միջոցով *(ամփոփում)*

Ենթադրենք $\{w_k\}_1^{\infty}$ $(\operatorname{Im} w_k < 0)$ *հաջորդականությունը բավարարում է*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty$$

պայմանին α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *պարամետրի տվյալ արժեքի համար։* *Հոդվածում ուսումնասիրվում է հետևյալ ֆունկցիաների*

$$I_\alpha(v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha(u+iv)| \right]^2 du \quad (-\infty < v < 0)$$

վարքը, երբ $v \to -0$, որտեղ $\pi_\alpha(w)$-ն Բլյաշկե-Նևանլիննի տիպի արտադրյալ է վերին կիսահարթության համար $\{w_k\}_1^\infty$ զրոներով, որը մտցված է Ա. Մ. Ջրբաշյանի կողմից նրա [6] աշխատանքում, իսկ $W^{-\alpha}$-ն Վեյլի օպերատորն է։

Բերվում են արդյունքներ $I_\alpha(v)$ ֆունկցիայի սահմանափակության մասին, երբ $v \to -0$, որոնցից, մասնավորապես, հետևում է այնպիսի $\pi_\alpha(w)$ ֆունկցիաների գոյությունը, որոնց համար $I_\alpha(v)$-ն սահմանափակ չէ, երբ $v \to -0$.

G. V. MIKAELIAN. *Investigation of growth of Blaschke—Nevanlinna type products by the method of Fourier transforms* (summary)

Let $\{w_k\}_1^\infty$ ($\operatorname{Im} w_k < 0$) be a sequence of complex numbers such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty,$$

where $\alpha \in (-1, +\infty)$ is a given number. We investigate (as $v \to 0$) the behaviour of the functions

$$I_\alpha(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha(u+iv)| \right|^2 du \quad (-\infty < v < 0).$$

Here $\pi_\alpha(w)$ is a Blaschke—Nevanlinna type product introduced by A. M. Jrbashian in [6] for the upper half-plane with zeros in $\{w_k\}_1^\infty$, and $W^{-\alpha}$ is the Weyl operator. In the case $v \to -0$ some results on the boundedness of the function $I_\alpha(v)$ are given, yielding the existence of functions $\pi_\alpha(w)$ with unbounded $I_\alpha(v)$ when $v \to -0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. R. Maclane*, B. *A. Rubel*. On the growth of Blaschke product, Canadian J. of Math., XXI, № 3, 1969, 595—601.
2. *L. A. Rubel*. A Fourier series method for entire functions, Duke Math. J. 30, 1963, 437—442.
3. *L. A. Rubel*, *B. A. Taylor*. A Fourier series method for meromorphic and entire functions, Bull. Soc. Math. France, 96, 1968, 53—96.
4. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
5. *Г. В. Микаелян*. О росте произведений Бляшке—Джрбашяна, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVI, № 6, 1981, 478—497.
6. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.
7. *А. М. Джрбашян*. Факторизация, параметрические представления и граничные свойства некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, канд. дисс., Харьков, 1983.
8. *А. П. Прудников*, *Ю. А. Брычков*, *О. И. Маричев*. Интегралы и ряды, М., «Наука», 1981.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 3, 1983 Математика

УДК 517.51

П. ОСВАЛЬД

О СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ СРЕДНИМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ В МЕТРИКЕ L_p $(0<p<1)$

Введение

Пусть $L_p \equiv L_p(a, b)$ — класс всех измеримых на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L_p(a,b)} = \left\{ \int_a^b |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} < \infty.$$

В интересующем нас случае $0<p<1$ класс L_p является квазибанаховым пространством с квазинормой $\|\cdot\|_p$. А. А. Талалян [1] установил следующий принципиальный результат о возможности представления функций ортогональными рядами в L_p.

Теорема А. *Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k\geq 1}$ — полная ортонормированная система. Тогда для любой функции $f(x) \in L_p$, $0<p<1$, существует ряд $\sum\limits_{k\geq 1} a_k \varphi_k(x)$, для которого*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \varphi_k \right\|_p = o(1), \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Этот ряд неединственен, ибо существует нетривиальный ряд $\sum\limits_{k\geq 1} b_k \varphi_k(x)$, являющийся нуль-рядом в L_p для всех $0<p<1$:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k \right\|_p = o(1), \quad n \to \infty \quad \left(\sum_{k\geq 1} b_k^2 > 0 \right). \tag{2}$$

В [2] для частного случая системы Хаара исследовался вопрос о возможной скорости приближения в (1) в зависимости от гладкости представляемой функции $f(x)$. Сформулируем основной результат работы [2]. Через $\{\chi_k(x)\}_{k\geq 1}$ обозначим систему Хаара, а через

$$\omega(t, f)_p = \sup_{0<h<t} \left\{ \int_0^{1-h} |f(x) - f(x+h)|^p \, dx \right\}^{1/p}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

модуль непрерывности функции $f(x) \in L_p(0,1)$.

Теорема В. *Пусть $f(x) \in L_p(0, 1)$, $0<p<1$. Тогда существует ряд $\sum\limits_{k\geq 1} a_k \cdot \chi_k(x)$, для которого справедлива оценка*

$$\left\| f-\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k \right\|_p \leqslant C_p \cdot n^{-1/p+1} \left\{ \int\limits_{(n+1)^{-1}}^{1} \frac{\omega(t, f)_p^p}{t^{2-p}} dt \right\}^{1/p}, \quad n \geqslant 1. \tag{3}$$

Если дополнительно выполняется условие

$$\int\limits_0^1 \omega(t, f)_p^p \cdot t^{p-2} \, dt < \infty, \tag{4}$$

то функция $f(x) \in L_1(0, 1)$ *и для ее ряда Фурье—Хаара* $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_k(f) \times$ $\times \chi_k(x)$ *имеет место более сильная оценка*

$$\left\| f-\sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cdot \chi_k \right\|_p \leqslant C_p \cdot n^{-1/p+1} \left\{ \int\limits_0^{(n-1)^{-1}} \frac{\omega(t, f)_p^p}{t^{2-p}} dt \right\}^{1/p}, \quad n \geqslant 1. \tag{5}$$

Как показано в [2], оценки (3) и (5) позволяют во многих случаях получить точную информацию о возможной скорости приближения при представлении рядами Хаара в L_p, $0 < p < 1$. Аналогичные вопросы рассматривались также для неортонормированной системы Фабера—Шаудера в L_p, $0 < p < \infty$.

Что касается других конкретных полных ортонормированых систем, то нам неизвестны усиления теоремы А в указанном направлении. В частности, не исследована скорость представления функций из $L_p(0, 2\pi)$, $0 < p < 1$, тригонометрическими рядами (см. замечания в конце работы). В данной работе модификацией подхода из [2] получены некоторые результаты о скорости суммируемости тригонометрических рядов

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l \cdot e^{ilx}, \quad b_{-l} = \bar{b}_l, \quad l \geqslant 0, \tag{6}$$

средними Фейера $\sigma_n(x) = \sum\limits_{l=-n}^{n} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l \, e^{ilx}$ и средними Валле Пуссена $v_n(x) = 2\sigma_{2n}(x) - \sigma_n(x)$, $n \geqslant 1$, к функциям из $L_p(0, 2\pi)$, $\frac{1}{2} < p < 1$. Основным утверждением является следующий аналог теоремы В.

Пусть

$$\omega_m^*(t, f)_p = \sup_{0 < h < t} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} |\Delta_h^m f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

— периодический модуль непрерывности порядка $m \geqslant 1$.

Теорема. *Пусть* $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $\frac{1}{2} < p < 1$. *Тогда существует тригонометрический ряд* (6), *который суммируется к* $f(x)$ *методом Валле Пуссена со скоростью*

$$\|f - v_n\|_p \leqslant C_{p,m} \cdot n^{-1/p+1} \left\{ \int\limits_{n^{-1}}^{\pi} \frac{\omega_m^*(t, f)_p^p}{t^{2-p}} dt \right\}^{1/p}, \quad n \geqslant 1. \tag{7}$$

Если же выполнено условие

$$\int\limits_0^{\pi} \omega_m^* (t, f)_p^p \cdot t^{p-2}\, dt < \infty, \tag{8}$$

то, как известно, $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$ *и средние Валле Пуссена* $v_n f(x)$ *ряда Фурье этой функции удовлетворяют оценке*

$$\|f - v_n f\|_p \leqslant C_{p, m} \cdot n^{-1/p+1} \left\{ \int\limits_0^{n^{-1}} \frac{\omega_m^* (t, f)_p}{t^{2-p}}\, dt \right\}^{1/p}, \ n \geqslant 1. \tag{9}$$

Дальнейший план работы таков. Сначала приводится в основном известный вспомогательный материал из теории приближения в классах L_p, $0 < p < 1$. Затем доказывается теорема, сформулированная выше, приводится также ряд примыкающих результатов. В замечаниях в конце работы обсуждаются некоторые открытые проблемы.

Автору приятно поблагодарить член-корреспондента АН Арм.ССР А. А. Талаляна и его коллег за полезные обсуждения во время его пребывания в г. Ереване.

§ 1. Вспомогательные сведения

Всюду в этой работе через C, $C_p, \cdots$ обозначены положительные постоянные, зависящие только от указанных параметров и, вообще говоря, различные в разных местах изложения. Все функции считаются измеримыми и 2π-периодическими.

Пусть $0 < p < 1$ и $f(x)$, $g(x) \in L_p$. Без дальнейшего упоминания мы будем пользоваться неравенством

$$\|f + g\|_p^p \leqslant \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$$

и следующими простыми свойствами модулей непрерывности (см. [3], [4] при $m = 1$, [5] при $m > 1$)

$$\omega_m^* (t, f + g)_p^p \leqslant \omega_m^* (t, f)_p^p + \omega_m^* (t, g)_p^p,$$

$$0 \leqslant \omega_m^* (\tau, f)_p \leqslant \omega_m^* (t, f)_p,$$

$$t^{-m+1-1/p} \cdot \omega_m^* (t, f)_p \leqslant C_{m, p}\ \tau^{-m+1-1/p} \cdot \omega_m^* (\tau, f)_p,$$

где $0 < \tau < t \leqslant \pi$. Кроме того, из прямых и обратных теорем для приближения тригонометрическими полиномами [3], [4], [6] вытекает при $1 \leqslant k < m$ неравенство типа Маршо

$$\omega_k^* (\tau, f)_p \leqslant C_{m, p} \cdot \tau^{-k} \left\{ \omega_m^* (\pi, f)_p^p + \int\limits_{\tau}^{\pi} t^{-kp-1}\, \omega_m^* (t, f)_p^p\, dt \right\}^{1/p}. \tag{10}$$

Введем классы Липшица

$$\mathrm{Lip}^* (s, p, m) = \{ f(x) \in L_p (0, 2\pi) \colon \omega_m^* (t, f)_p = O(t^{-s}), \ t \to 0 \}.$$

В силу указанных свойств модулей непрерывности естественно рассмотреть только случай $0 < s \leqslant m + 1/p - 1$. Кроме того, при $0 < s < k < m$ имеем $\mathrm{Lip}^*(s, p, k) = \mathrm{Lip}^*(s, p, m)$. В дальнейшем в случае $m=1$ индекс m в обозначениях опускаем.

Всюду ниже пусть $T_n(x) = \sum_{l=-n}^{n} b_l \cdot e^{ilx}$ — произвольный тригонометрический полином порядка $\leqslant n$ ($b_{-l} = \bar{b}_l$, $l = 0, \cdots, n$, $n \geqslant 0$). Следующее утверждение доказано Э. А. Стороженко [7] и В. И. Ивановым.

Лемма 1. *При $m \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\omega_m^*(t, T_n)_p \leqslant C_p \cdot (nt)^m \cdot \omega_m^*(\pi/n, T_n)_p, \; 0 \leqslant t \leqslant \pi/n, \; n \geqslant 1, \; 0 < p < 1.$$

Приведем набросок доказательства. В [3], лемма 3.1, установлено, что

$$\|\Delta_h^1 T_n\|_p \leqslant C_p \cdot h \|T_n'\|_p, \; 0 \leqslant h \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

Для получения обратной оценки используем представление

$$T_n'(x) = h^{-1} \cdot \Delta_h^1 T_n(x) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot T_n^{(k)}(x) \cdot h^{k-1}, \; x \in [0, 2\pi), \; h > 0,$$

вытекающее из разложения Тейлора для $T_n(x+h)$, и применим неравенство типа Бернштейна (см. [3], [4]):

$$\|T_n'\|_p^p \leqslant h^{-p} \|\Delta_h^1 T_n\|_p^p + \left(\sum_{k=2}^{\infty} (k!)^{-p} (C_p nh)^{(k-1)p} \right) \cdot \|T_n'\|_p^p.$$

Следовательно

$$h \|T_n'\|_p \leqslant 2 \cdot \|\Delta_h^1 T_n\|_p, \; 0 < h \leqslant C_p \cdot n^{-1}$$

и индукцией устанавливается, что

$$C_{p,m}' \cdot h^m \|T_n^{(m)}\|_p < \|\Delta_h^m T_n\|_p \leqslant C_{p,m} h^m \|T_n^{(m)}\|_p, \; 0 < h \leqslant C_p \cdot n^{-1}.$$

Отсюда уже непосредственно вытекает утверждение леммы.

Ниже часто применяется неравенство типа Никольского

$$\|T_n\|_1 \leqslant C_p \cdot (n+1)^{1/p-1} \cdot \|T_n\|_p, \; 0 < p < 1, \; n \geqslant 0, \tag{11}$$

которое может быть доказано по схеме, изложенной в [8] для вывода подобных неравенств. Нам понадобится также другое неравенство в разных метриках, вытекающее из результатов Э. А. Стороженко [9] (см. также [10], [2]).

Лемма 2. *Если* $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $0 < p < 1$, *при некотором* $m \geqslant 1$ *удовлетворяет условию* (8), *то* $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$ *и справедлива оценка* $(0 < b - a \leqslant 2\pi)$

$$\left(\int_a^b |f(x)| \, dx \right)^p \leqslant C_{m,p} \left\{ (b-a)^{p-1} \int_a^b |f(x)|^p dx + \int_0^{\frac{b-a}{m}} \frac{\int_a^{b-mh} |\Delta_h^m f(x)|^p \, dx}{h^{2-p}} \, dh \right\}. \tag{12}$$

Лемма 3. *Для любой функции* $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $0 < p < 1$, *имеем*

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |T_n(x) \cdot f((2n+1)x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \leqslant C_p \cdot \|T_n\|_p \cdot \|f\|_p, \quad n > 0.$$

Доказательство. Используем одно неравенство, вытекающее из интегральных представлений для тригонометрических полиномов (см. [11], лемма 2):

$$|T_n(x)| \leqslant C_+ \cdot (n+1)^{-2r} \cdot \int_0^{2\pi} |T_n(t)| \cdot |D_n(x-t)|^{2r+1} \, dt, \quad r = 1, 2, \cdots,$$

где $D_n(t) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \cdot \left(2 \cdot \sin\frac{t}{2}\right)^{-1}$ — ядро Дирихле. Применяя неравенство типа Никольского (11), получим

$$|T_n(x)|^p \leqslant C_{r,p} (n+1)^{-(2r+1)p+1} \int_0^{2\pi} |T_n(t)|^p \, |D_n(x-t)|^{(2r+1)p} \, dt.$$

Отсюда

$$\|T_n(x) \cdot f((2n+1)x)\|_p^p = \int_0^{2\pi(2n+1)^{-1}} |f((2n+1)x)|^p \cdot \sum_{j=1}^{2n+1} \left| T_n\left(x + \frac{2\pi j}{2n+1}\right) \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{r,p} \cdot (n+1)^{-(2r+1)p+1} \cdot \int_0^{2\pi(2n+1)^{-1}} |f((2n+1)x)|^p \times$$

$$\times \left(\int_0^{2\pi} |T_n(t)|^p \left\{ \sum_{j=1}^{2n+1} \left| D_n\left(x - t + \frac{2\pi j}{2n+1}\right) \right|^p \right\} dt \right) dx.$$

Если выбрать $r = r(p)$ так, чтобы выполнялось $(2r+1)p > 1$, то в силу свойств ядра $D_n(t)$ имеем

$$\left\{ \sum_{j=1}^{2n+1} \cdots \right\} \leqslant C_p \cdot (n+1)^{(2r+1)p} \cdot \sum_{j \geqslant 1} j^{-(2r+1)p} \leqslant C_p (n+1)^{(2r+1)p}, \quad n \geqslant 0.$$

Следовательно

$$\|T_n(x) \cdot f((2n+1)x)\|_p^p \leqslant C_p \cdot (n+1) \int_0^{2\pi(2n+1)^{-1}} |f((2n+1)x)|^p \, dx \cdot \|T_n\|_p^p,$$

что и доказывает утверждение леммы 3.

В дальнейшем через $E_n(f)_p$ обозначим наилучшие приближения и через $T_n^*(x)$ — соответствующие тригонометрические полиномы наилучшего приближения функции $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, т. е.

$$E_n(f)_p=\inf_{T_n(x)}\|f-T_n\|_p=\|f-T_n^*\|_p,\ n\geqslant 0.$$

Справедливо следующее неравенство типа Джексона (см. [3], [4], при $m=1$, [6], при $m>1$).

Лемма 4. *Пусть $f(x)\in L_p(0,2\pi)$, $0<p<1$, $m\geqslant 1$. Тогда*

$$E_n(f)_p\leqslant C_{m,p}\,\omega_m^*\left(\frac{1}{n+1},f\right)_p,\ n\geqslant 0.$$

Отметим, что большинство приведенных фактов является аналогом хорошо известных утверждений для случая $1\leqslant p<\infty$ (см. [8]).

Остановимся еще на некоторых свойствах средних Фейера. Если $f(x)\in L_1(0,2\pi)$, то средние Фейера ряда Фурье этой функции обозначим через $\sigma_n f(x)$, $n\geqslant 1$. Как известно

$$\sigma_n f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x-t)\cdot K_n(t)\,dt,\ K_n(t)=\frac{1}{2n}\left(\frac{\sin\dfrac{nt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\right)^2.$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\|K_n\|_p\leqslant C_p\cdot n^{1-1/p},\ n>1,\ \ \frac{1}{2}<p<1. \tag{13}$$

Справедлива также

Лемма 5. *Пусть $\dfrac{1}{2}<p<1$, $n\geqslant 1$. Тогда*

$$\|\sigma_n T_k\|_p\leqslant C_p\cdot\|T_k\|_p,\ k\leqslant n$$

и для любого (комплексного) полинома $P_k(x)=\sum\limits_{l=0}^{k}b_l\cdot e^{ilx}$ имеем

$$\|\sigma_n P_k\|_p\leqslant C_p\cdot\|P_k\|_p,\ k\geqslant 0.$$

Второе неравенство доказано еще Харди и Литтльвудом [12] (для произвольных функций из класса H_p, см. также [13]), а первое можно получить из [11] и [13]:

$$\|\sigma_n T_k\|_p^p\leqslant\pi^{-p}\int_0^{2\pi}\|T_k(x-\cdot)\cdot K_n(\cdot)\|_p^p\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_p(n+k)^{1-p}\cdot\|T_k\|_p^p\cdot\|K_n\|_p^p\leqslant C_p\cdot\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1-p}\|T_k\|_p^p.$$

§ 2 Доказательство основных утверждений

Установим сначала

Предложение 1. *Пусть задан тригонометрический полином*

$$T_k(x)=\sum_{l=-k}^{k}a_l\,e^{ilx},\ a_{-l}=\bar{a}_l,\ l=0,\cdots,k,\ k\geqslant 0.$$

Тогда при $\frac{1}{2} < p < 1$ *средние Фейера* $\sigma_n(x)$ *ряда* (6), *определяемого соотношением*

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l\, e^{ilx} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i(2k+1)jx} \cdot T_k(x),$$

удовлетворяют оценке

$$\|\sigma_n\|_p \leqslant C_p\,(r+1)^{-1/p+1}\,\|T_k\|_p,\quad r = \left[\frac{n-k}{2k+1}\right],\quad n > k. \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим тригонометрический полином

$$T_{(r)}(x) = \sum_{j=-r}^{r}\left(1 - \frac{(2k+1)\cdot|j| + k}{n}\right) e^{i(2k+1)jx} \cdot T_k(x).$$

В силу леммы 3 имеем

$$\|T_{(r)}\|_p \leqslant C_p \cdot \|T_k\|_p \cdot \left\| \sum_{j=-r}^{r}\left(1 - \frac{(2k+1)\,|j| + k}{n}\right) e^{ijx} \right\|_p.$$

Но согласно известному тождеству

$$\sum_{j=-r}^{r} a_{|j|} \cdot e^{ijx} = \sum_{m=0}^{r} (m+1)\cdot \Delta^2 a_m \cdot K_{m+1}(x),\quad \Delta^2 a_m = a_m - 2a_{m+1} + a_{m+2},$$

для второго множителя получим (ср. (13) и определение числа r)

$$\left\| \sum_{j=-r}^{r}\left(1 - \frac{(2k+1)\cdot|j| + k}{n}\right) e^{ijx} \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant (r+1)^p \left(\frac{2k+1}{n}\right)^p \left(\|K_r\|_p^p + \|K_{r+1}\|_p^p\right) \leqslant C_p \cdot (r+1)^{p-1}.$$

Итак

$$\|T_{(r)}\|_p \leqslant C_p\,\|T_k\|_p \cdot (r+1)^{-1/p+1},\quad r = \left[\frac{n-k}{2k+1}\right],\quad n > k. \tag{15}$$

Сейчас рассмотрим разность

$$\sum_{l=-n}^{n}\left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l\, e^{ilx} - T_{(r)}(x) = \sum_{l=-k}^{k} \frac{k-|l|}{n}\, a_l\, e^{ilx} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} e^{i(2k+1)jx} \sum_{l=-k}^{k} \frac{k-l}{n}\, a_l\, e^{ilx} + \sum_{j=-1}^{-r} e^{i(2k+1)jx} \sum_{l=-k}^{k} \frac{k+l}{n}\, a_l\, e^{ilx} +$$

$$+ e^{i(2k+1)(r+1)x}\left(\sum_{l=-k}^{n-(2k+1)(r+1)}\left(1 - \frac{(2k+1)(r+1)+l}{n}\right) a_l\, e^{ilx}\right) +$$

$$+ e^{-i(2k+1)(r+1)x}\left(\sum_{l=(2k+1)(r+1)-n}^{k}\left(1 - \frac{(2k+1)(r+1)-l}{n}\right) a_l\, e^{ilx}\right) =$$

$$= I_0(x) + I_1(x) + I_1^*(x) + I_2(x) + I_2^*(x).$$

Так как $I_0(x) = \frac{k}{n}\,\sigma_k\,T_k(x)$, то из леммы 5 следует

$$\|I_0\|_p = \frac{k}{n}\,\|\sigma_k\,T_k\|_p \leqslant C_p\cdot(r+1)^{-1}\cdot\|T_k\|_p.$$

Далее, для $I_1(x)$ сначала можно использовать лемму 3, а затем применить лемму 5 для (комплексного) полинома $P_{2k}(x) = \sum_{l=0}^{2k} a_{l-k}\,e^{ilx}$, что с учетом равенств

$$\sum_{l=-k}^{k} \frac{k-l}{n}\,a_l\,e^{ilx} = e^{-ikx}\cdot\frac{2k}{n}\,\sigma_{2k}\,P_{2k}(x) \text{ и } \|P_{2k}\|_p = \|T_k\|_p$$

дает

$$\|I_1\|_p \leqslant C_p\cdot\left\|\frac{1-e^{irx}}{1-e^{ix}}\,e^{ix}\right\|_p\cdot\left\|\sum_{l=-k}^{k}\frac{k-l}{n}\,a_l\,e^{ilx}\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant C_p\cdot\frac{k}{n}\cdot\|\sigma_{2k}\,P_{2k}\|_p \leqslant C_p\,(r+1)^{-1}\,\|T_k\|_p.$$

Аналогично оценивается слагаемое $I_1^*(x)$. Наконец, если $k_1 \equiv n+k-(2k+1)(r+1) \leqslant 0$, то слагаемого $I_2(x)$ на самом деле нет (т. е. $I_2(x)=0$), а в случае $k_1 = 1,\cdots,2k-1$ (ср. определение числа r) можно написать

$$I_2(x) = e^{i\,((2k+1)(r+1)-k)\,x}\cdot\frac{k_1}{n}\,\sigma_{k_1}\,P_{2k}(x),$$

откуда согласно лемме 5 получим $\|I_2\|_p \leqslant C_p\,(r+1)^{-1}\,\|T_k\|_p$.

Аналогично рассматривается $I_2^*(x)$. Следовательно, доказано

$$\|\sigma_n - T_{(r)}\|_p \leqslant C_p\,(r+1)^{-1}\cdot\|T_k\|_p,\ r = \left[\frac{n-k}{2k+1}\right],\ n>k. \tag{16}$$

Соотношения (15), (16), справедливые при $\frac{1}{2}<p<1$, вместе дают искомую оценку (14). Предложение 1 установлено.

Замечание 1. Следует отметить работу В. А. Юдина и В. И. Ивавова [14], в которой доказывается существование последовательности тригонометрических полиномов

$$T_n(x) = \sum_{l=-n}^{n} c_l^{(n)}\,e^{ilx},\ c_0^{(n)}=1,\ n\geqslant 0,$$

причем

$$\|T_n\|_p = O(n^{-1/p+1}),\ n\to\infty,\ 0<p<1. \tag{17}$$

Оценку (17) нельзя усилить (см. [14]). В самом деле, имеем

$$1 = |c_0^{(n)}| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} T_n(x)\,dx\right| \leqslant C_p\,(n+1)^{-1+1/p}\cdot\|T_n\|_p$$

согласно (11), откуда $n^{-1/p+1} = O(\|T_n\|_p)$, $n \to \infty$, $0 < p < 1$. Неравенство (14) является своего рода модификацией (17) при $\frac{1}{2} < p < 1$ (дополнительно зафиксирована некоторая информация о коэффициентах с номерами l, $|l| \leqslant k$). Из сказанного следует также, что (14) по порядку усилено быть не может.

Предложение 2. *Пусть $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $\frac{1}{2} < p < 1$. Тогда существует ряд* (6), *для средних Фейера которого выполнено*

$$\|f - \sigma_n\|_p \leqslant C_p \cdot n^{-1/p+1} \left\{ \int_{n^{-1}}^{\pi} \frac{\omega^*(t, f)_p^p}{t^{2-p}} dt \right\}^{1/p}, \quad n \geqslant 1. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $T_n^*(x)$, $n \geqslant 0$, — тригонометрические полиномы наилучшего приближения для $f(x)$. К тригонометрическим полиномам $T_{2^k}(x) = T_{2^k}^*(x) - T_{2^{k-1}}^*(x)$, $k \geqslant 0$*, применим предложение 1 и построим соответствующие ряды $\sum b_l^{(k)} e^{ilx}$. Тогда искомым рядом, удовлетворяющим (18), будет

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l e^{ilx} \equiv T_0^*(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|l| > 2^k} b_l^{(k)} e^{ilx} \right).$$

В самом деле, пусть $2^{k_0} \leqslant n < 2^{k_0+1}$, тогда

$$f(x) - \sigma_n(x) = f(x) - T_{2^{k_0}}^*(x) + \sum_{k=0}^{k_0} T_{2^k}(x) + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{2^k < |l| < n} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l^{(k)} e^{ilx} = f(x) - T_{2^{k_0}}^*(x) + \sum_{k=0}^{k_0} \Bigg(T_{2^k}(x) -$$

$$- \sum_{|l| < 2^k} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l^{(k)} e^{ilx} \Bigg) + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{|l| < n} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l^{(k)} e^{ilx}.$$

По построению имеем $\|f - T_{2^{k_0}}^*\|_p^p = E_{2^{k_0}}(f)_p^p$, а согласно (14)

$$\left\| \sum_{|l| < n} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l^{(k)} e^{ilx} \right\|_p^p < C_p \left(\left[\frac{n - 2^k}{2^{k+1}+1} \right] + 1 \right)^{p-1} \cdot \|T_{2^k}\|_p^p <$$

$$\leqslant C_p \cdot 2^{-(k-k_0)(p-1)} \{ E_{2^k}(f)_p^p + E_{2^{k-1}}(f)_p^p \} \leqslant C_p \, 2^{-(k-k_0)(p-1)} \cdot E_{2^{k-1}}(f)_p^p,$$

$$k = 0, \cdots, k_0.$$

Кроме того, с помощью леммы 5 получим для $k = 0, \cdots, k_0$

$$\left\| T_{2^k}(x) - \sum_{|l| < 2^k} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l^{(k)} e^{ilx} \right\|_p^p = \left(\frac{2^k}{n} \| T_{2^k} - \sigma_{2^k} T_{2^k} \|_p \right)^p \leqslant$$

$$\leqslant C_p \cdot 2^{(k-k_0)p} E_{2^{k-1}}(f)_p^p.$$

---

* Здесь положено $T^{2^{-1}}(x) \equiv T_0^*(x)$, $E^{2^{-1}}(f)_p \equiv E_0(f)_p$.

Собирая вместе все эти соотношения, имеем $(1/2<p<1)$

$$\|f-\sigma_n\|_p^p \leqslant C_p \left\{ E_{2^{k_0}}(f)_p^p + 2^{-k_0(1-p)} \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k(1-p)} E_{2^k-1}(f)_p^p \right\},$$

$$2^{k_0} \leqslant n < 2^{k_0+1}, \tag{19}$$

откуда с использованием леммы 4 непосредственно вытекает оценка (18). Предложение 2 доказано.

Замечание 2. Если $f(x) \neq \text{const}$, т. е. $\omega^*(t, f)_p \not\equiv 0$, то ряд, удовлетворяющий (18), неединственен (можно, например, добавить любой ряд, построенный в предложении 1). Как видно из доказательства соотношение (18) справедливо также с заменой $\omega^*(t, f)_p$ на модули непрерывности произвольного порядка $m>1$ (хотя это только кажущееся усиление, ср. (10)).

Перейдем к доказательству теоремы, сформулированной во введении. Первая ее часть содержится в предложении 2 (см. также замечание 2). Установим вторую часть. Пусть для $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $1/2 < p < 1$ выполнено свойство (8). Тогда в силу леммы 2 $f(x) \in L_1(0,2\pi)$. При фиксированном $n \geqslant 1$ обозначим $\Delta_k = \left(\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n}\right)$, $k=1,\cdots,n$; и оценим

$$|\sigma_n f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (|f(x+t)| + |f(x-t)|)\, K_n(t)\, dt \leqslant C\cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2} \int_{\Delta_k} (|f(x+t)| +$$

$$+ |f(x-t)|)\, dt.$$

В силу неравенства в разных метриках (12) имеем дальше

$$\|\sigma_n f\|_p^p \leqslant C_p \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^p}{k^{2p}} \left\{ \left(\int_{\Delta_k} |f(x+t)|\, dt \right)^p + \left(\int_{\Delta_k} |f(x-t)|\, dt \right)^p \right\} dx \leqslant$$

$$\leqslant C_p \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^{2p}} \int_{\Delta_k} (|f(x+t)|^p + |f(x-t)|^p)\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{n^p}{k^{2p}} \int_0^{\pi/nm} h^{p-2} \left(\int_{\Delta_k} (|\dot{\Delta}_h^m f(x+t)|^p + |\dot{\Delta}_h^m f(x-t)|^p)\, dt \right) dh \right\} dx.$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\|\sigma_n f\|_p^p \leqslant C_p \left\{ n \|f\|_p^p \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{-2p} \int_{\Delta_k} dt + \right.$$

$$\left. + n^p \int_0^{\pi/nm} \frac{\dot{\omega}_m(h, f)_p^p}{h^{2-p}} dh \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{-2p} \int_{\Delta_k} dt \right\} \leqslant$$

$$< C_p\left\{\|f\|_p^p + n^{p-1}\cdot\int\limits_0^{n^{-1}} t^{p-2}\,\omega_m^*(t, f)_p^p\,dt\right\},\ n\geqslant 1,\ \frac{1}{2}<p<1.$$

Благодаря определению средних Валле Пуссена в виде $v_nf(x)=2\sigma_{2n}f(x)-\sigma_nf(x)$, такая же оценка верна и для $v_nf(x)$, $n\geqslant 1$. Если соответствующее неравенство применить к $f(x)-T_n^*(x)$ вместо $f(x)$, то получим

$$\|f-v_nf\|_p^p\leqslant\|f-T_n^*\|_p^p+\|v_n(f-T_n^*)\|_p^p\leqslant$$

$$\leqslant C_p\left\{E_n(f)_p^p+n^{p-1}\int\limits_0^{n^{-1}} t^{p-2}\,\omega_m^*(t, f-T_n^*)_p^p\,dt\right\}.$$

Дальше используется неравенство $\omega_m^*(t, f-T_n^*)_p^p\leqslant\omega_m^*(t, f)_p^p+\omega_m^*(t, T_n^*)_p^p$, а лемма 1 дает

$$n^{p-1}\int\limits_0^{n^{-1}} t^{p-2}\,\omega_m^*(t, T_n^*)_p^p\,dt\leqslant C_p n^{(m+1)p-1}\,\omega_m^*\left(\frac{1}{n}, T_m^*\right)_p^p t^{(m+1)p-2}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C_p\,\omega_m^*\left(\frac{1}{n}, T_n^*\right)_p^p\leqslant C_p\left\{E_n(f)_p^p+\omega_m^*\left(\frac{1}{n}, f\right)_p^p\right\}.$$

Если это подставить в полученное выше выражение и учесть лемму 4, то после несложных преобразований придем к искомой оценке (9), что и требовалось доказать.

Следствием доказанной теоремы является

Предложение 3. *Пусть* $\frac{1}{2}<p<1$, $m\geqslant 1$, $0<s\leqslant m+1/p-1$. *Тогда для любой функции* $f(x)\in \mathrm{Lip}^*(s, p, m)$ *существует ряд* (6), *средние Валле Пуссена которого удовлетворяют*

$$\|f-v_n\|_p=\begin{cases}O(n^{-s}), & s\neq 1/p-1,\\ O(n^{-s}(\ln n)^{1/p}), & s=1/p-1,\end{cases}\quad n\to\infty. \tag{20}$$

В исключительном случае $s=1/p-1$ *указанную в* (20) *оценку нельзя заменить на* $o(n^{-s}\ln n)$, $n\to\infty$.

Доказательство. При $s\leqslant 1/p-1$ (20) следует из (7), при $s>1/p-1$ — из (9). Очевидно также, что порядок в (20) при $s\neq 1/p-1$ улучшен быть не может.

Осталось привести пример функции $f(x)\in\mathrm{Lip}^*(1/p-1, p, m)$, для которой

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\|f-v_n\|}{n^{-1/p+1}\cdot\ln n}>0 \tag{21}$$

для любого ряда (6). Примером может служить функция

$$f(x)=\begin{cases}4^{-k}, & x\in I_k\equiv(4^{-k}, 2\cdot 4^{-k}),\ k>1\\ 0, & x\in(-\pi, \pi]\setminus\bigcup\limits_{k>1} I_k,\end{cases}$$

использованная в аналогичных целях уже в [2]. Там фактически установлено, что $f(x) \in \mathrm{Lip}^* (1/p - 1, p)$. Но в случае $1/2 < p < 1$ имеем $0 < 1/p - 1 < 1$ и поэтому $\mathrm{Lip}^* (1/p - 1, p) = \mathrm{Lip}^* (1/p - 1, p, m)$, $m > 1$.

Далее поступаем так. Введем обобщенные ядра Джексона

$$D_{n,r}(t) = \frac{C_{n,r}}{n^{r-1}} \left(\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^r, \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_{n,r}(t)\, dt = \pi, \ n \geq 1, \ r \geq 1.$$

Тогда

$$T_{n,r}\, g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, D_{n,r}(x - t)\, dt, \quad n \geqslant 1, \ g(x) \in L_1(0, 2\pi),$$

является тригонометрическим полиномом порядка $\leqslant n \cdot r$. Используя явный вид ядер $D_{n,r}(t)$, легко убедиться в справедливости оценки

$$|g_\delta(x) - T_{n,r}\, g_\delta(x)| \leqslant C_r \min\{1, (n\,||x| - \delta|)^{1-r}\}, \quad x \in (-\pi, \pi], \tag{22}$$

где

$$g_\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\delta, \delta) \\ 0, & x \in (-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi], \ \delta \geqslant \frac{1}{n}, \ n \geqslant 1, \ r > 1. \end{cases}$$

Для функции $f_m(x) = \sum_{k=1}^{m} 4^k g_{2\cdot 4^{-k-1}} \left(x - \frac{3}{2} 4^{-k} \right)$ (являющейся „усеченной“ функцией $f(x)$), согласно (22) имеем

$$|f_m(x) - T_{4^{m+1}, r} f_m(x)| \leqslant C_r \sum_{k=1}^{m} 4^k \cdot \min\left\{1, \left(4^m \left||x - \frac{3}{2} 4^{-k}| - \frac{1}{2} 4^{-k}\right|\right)^{1-r}\right\}$$

(в силу ограничения $0 < |x| \leqslant \pi$ в (22) это неравенство вытекает простым сложением оценок (22) только при $-\pi + 1/2 \leqslant x \leqslant \pi$, но для остальных $x \in (-\pi, \pi]$ оно тоже справедливо). Непосредственный подсчет суммы в правой части приведет к оценке

$$|f_m(x) - T_{4^{m+1}, r} f_m(x)| \leqslant$$

$$\leqslant C_r \begin{cases} \min\{4^m, 4^{m(2-r)} |x|^{1-r}\}, & x \in (-\pi, 3\cdot 4^{-m}] \cup \left(\frac{3}{4}, \pi\right] \\ 4^{m(2-r)} \cdot 4^{k(r-1)} + 4^k \cdot \min\left\{1, \left(4^m \left|\left|x - \frac{3}{2} 4^{-k}\right| - \frac{1}{2} 4^{-k}\right|\right)^{1-r}\right\}, \\ \qquad x \in (3 \cdot 4^{-k-1}, 3 \cdot 4^{-k}], \quad k = 1, \cdots, m-1. \end{cases}$$

Фиксируя сейчас $r \geqslant 3$, отсюда извлекаем

$$\|f_m - T_{4^{m+1}, r} f_m\|_p^p \leqslant C_p 4^{m(p-1)}, \quad m > 1, \ \frac{1}{2} < p \leqslant 1. \tag{23}$$

Пусть, от противного, (21) не выполнено для какого-то ряда (6). Для краткости через $S_0 g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx$ обозначим среднее значение функции $g(x) \in L_1(0, 2\pi)$. Тогда при $4^{-m} \leqslant n \leqslant 4^{-m+1}$ получим

$$\|f-b_0\|_p^p=\|f-S_0 v_n\|_p^p>\|f_m-S_0 f_m\|_p^p-$$
$$-\|f-f_m\|_p^p-\|S_0(f_m-T_{4m+1,r}f_m)\|_p^p-\|S_0(T_{4m+1,r}f_m-v_n)\|_p^p.$$

Но по построению имеем $S_0 f_m=(2\pi)^{-1}\cdot m$, следовательно

$$\|f_m-S_0 f_m\|_p^p\geqslant C_p\cdot m^p,\ m>1.$$

Очевидно также, что $\|f-f_m\|_p^p\leqslant C_p\cdot 4^{m(p-1)}$, $m>1$. Далее, согласно (23) при $p=1$ имеем

$$\|S_0(f_m-T_{4m+1,r}f_m)\|_p^p\leqslant C_p\cdot\|f_m-T_{4m+1,r}f_m\|_1^p\leqslant C_p,\ m>1$$

и, наконец, из неравенства (11) и из (23) при $\frac{1}{2}<p<1$ выводим

$$\|S_0(T_{4m+1,r}f_m-v_n)\|_p^p\leqslant C_p\|T_{4m+1,r}f_m-v_n\|_1^p\leqslant C_p\,4^{m(1-p)}\|T_{4m+1,r}f_m-$$
$$-v_n\|_p^p\leqslant C_p\,4^{m(1-p)}\{\|T_{4m+1,r}f_m-f_m\|_p^p+\|f_m-f\|_p^p+\|f-v_n\|_p^p\}\leqslant$$
$$\leqslant C_p\{1+4^{m(1-p)}\|f-v_n\|_p^p\}.$$

В итоге имеем

$$\infty>\|f-b_0\|_p^p\geqslant C_p\,m^p-C_p'\cdot(1+4^{m(1-p)}\|f-v_n\|_p^p)\geqslant$$
$$\geqslant C_p(\log n)^p-C_p'(1+n^{1-p}\|f-v_n\|_p^p),\ n\geqslant 1,$$

что противоречит факту невыполнения (21) при $n\to\infty$. Предложение 3 полностью доказано.

Замечание 3. В случае $1\leqslant p<\infty$ ряд Фурье функции $f(x)\in L_p(0,2\pi)$ удовлетворяет соотношению

$$\|f-v_n f\|_p\leqslant C\cdot E_n(f)_p\leqslant C_m\cdot\omega_m\left(\frac{1}{n},f\right)_p,\ n\geqslant 1.$$

Указанный пример показывает, что в случае $p<1$ может, вообще говоря, не существовать ни одного ряда (6), для которого средние $v_n(x)$ удовлетворяют аналогичному соотношению.

§ 3. Дальнейшие замечания и открытые проблемы

Замечание 4. Приведенные утверждения дают нам некоторые указания о том, в каком направлении желательно продолжить изучение затронутых вопросов. Например, было бы интересно, найти методы суммирования, для которых верен аналог теоремы B для всех $0<p<1$. Вероятными кандидатами, на наш взгляд, являются обобщенные средние Валле Пуссена

$$v_n^\varphi(x)=\sum_{l=-2n}^{2n}\varphi\left(\frac{|l|}{n}\right)b_l e^{ilx},\quad n>1,$$

где $\varphi(t)\in C^\infty(0,\infty)$ обладает свойствами $\varphi(t)=1$ при $0\leqslant t\leqslant 1$ и $\varphi(t)=0$ при $2\leqslant t<\infty$. Более тонким вопросом является уточнение уже известных результатов (например, в исключительном случае $s=1/p-1$).

Замечание 5. Насколько нам известно, не найдены оценки скорости сходимости в L_p, $0<p<1$, для тригонометрических рядов, усиливающие теорему А. В частности, до сих пор не указана ни одна конкретная последовательность чисел $\lambda_0>\lambda_1>\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$, для которой существовал бы тригонометрический нуль-ряд (6) $\left(\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}|b_l|^2>0\right)$, удовлетворяющий

$$\|S_n\|_p=O(\lambda_n),\ n\to\infty,\ S_n(x)=\sum_{l=-n}^{n}b_l e^{ilx},\ 0<p<1. \tag{24}$$

Здесь заранее можно требовать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2=\infty$. В самом деле, если выполнено (24), то

$$|b_n|\leqslant C_p\cdot\|S_n-S_{n-1}\|_p\leqslant C_p\{\lambda_{n-1}+\lambda_n\}\leqslant C_p\lambda_{n-1},\ n\geqslant1.$$

Но если бы $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2<\infty$, то и $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^2<\infty$ и ряд был бы рядом Фурье, откуда в силу (24) $b_n=0$, $|n|\geqslant0$. Кроме того, из результатов [14] (см. замечание 1) вытекает с необходимостью $n^{-1/p+1}=O(\lambda_n)$, $n\to\infty$.

Аналогичный вопрос не рассматривался также в случае системы Уолша.

Замечание 6. Применяя метод доказательства второй части теоремы, можно получить такое утверждение:

Пусть для $f(x)\in L_p(0,2\pi)$, $0<p<1$, *выполнено* (8) *при некотором* $m\geqslant1$. *Тогда* $f(x)\in L_1(0,2\pi)$ *и для частичных сумм* $S_n f(x)$ *ее ряда Фурье справедливо*

$$\|f-S_n f\|_p\leqslant C_p\left\{\int_0^{(n+1)^{-1}}t^{p-2}\cdot\omega_m^*(t,f)_p^p\,dt\right\}^{1/p},\ n\geqslant0.$$

Отметим неусиливаемое следствие для классов Липшица: *если*

$$0<p<1,\ 1/p-1<s\leqslant1/p \text{ и } f(x)\in\mathrm{Lip}^*(s,p), \text{ то}$$
$$\|f-S_n f\|_p=O(n^{-s+1/p-1}),\ n\to\infty,$$

причем ни при одном значении параметров нельзя заменить O на o одновременно для всего класса.

Замечание 7. В связи с теоремой B возникает такая задача. Как известно [2], если для $f(x)\in L_p(0,1)$, $0<p<1$, существует ряд Хаара $\sum\limits_{k\geqslant1}a_k\chi_k(x)$, удовлетворяющий

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_k\right\|_p=o(n^{-1/p+1}),\ n\to\infty, \tag{25}$$

то этот ряд единственен. Спрашивается, каковы свойства функций $f(x)$, для которых выполнено (25), и как устроен соответствующий ряд?. Вторая часть теоремы B дает достаточное условие выполнения (25). Правдоподобно, что для $f(x)\in L_p(0, 1)$, $0<p<1$, наличие свойства (25) влечет за собой, во-первых, $f(x)\in L_1(0, 1)$ и, во-вторых, совпадение соответствующего ряда с рядом Фурье—Хаара этой функции. Заметим, что первая часть этой гипотезы представляет собой нетривиальную теорему вложения из L_p, $0<p<1$, в L_1.

Аналогичные вопросы можно рассмотреть для других систем, в частности, в связи с вышедоказанной теоремой.

Технический университет
г. Дрезден, ГДР

Поступила 21.VI.1982

Պ. ՕՍՎԱԼԴ. Եռանկյունաչափական շարքերի Վալլե-Պուսսենի միջիններով L_p($0<p<1$) մետրիկայով մոտարկման արագության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են L_p, $0<0<1$ դասի ֆունկցիաների եռանկյունաչափական բազմանդամներով մոտարկման հնարավոր արագությունների գնահատականները։ Դիտարկվող հարցերը սերտորեն կապված են Ա. Ա. Թալալյանի՝ $L_p(0<p<1)$ դասի ֆունկցիաների շարքերով ներկայացման մասին աշխատանքի հետ։ Մասնավորապես, մենք ստանում ենք $1/2<p<1$ դեպքում Վալլե-Պուսենի (և Ֆեյերի) միջիններով մոտարկման գնահատականներ, որոնք մոտ են հնարավոր լավագույն գնահատականներին։ Դրված են որոշ բաց հարցեր։

P. OSWALD. *On the degree of approximation by Vallee Poussin means of trigonometric series in the L_p-metric* ($0<p<1$) (summary)

The paper deals with estimates for the possible rate of approximation by trigonometric series representing functions in the L_p-metric, where $p<1$. The questions considered are closely related to earlier work of A. A. Talaljan on the representation of functions belonging to L_p ($0<p<1$)by series. In particular, we obtain stimates tor the approximation by Vallee Poussin (and Fejer) means of trigonometric series in the case $1/2<p<1$, which are near to the best possible ones. Some open problems are stated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Талалян*. Представление функций классов L_p, $0<p<1$, ортогональными рядами, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 21, 1970, 1—9.
2. *P. Oswald*. L_p-approximation durch Reihen nach Haar—Orthogonalsystem und dem Faber—Schauder—System, Journ. Approx. Theory, 33, 1, 1981, 1—27.
3. *Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд*. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0<p<1$, Мат. сборник 98 (142), 3, 1975 395—415.
4. *В. И. Иванов*. Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L^p, для $0<p<1$, Мат. заметки, 18, 5, 1975, 641—658.
5. *T. V. Radoslavova*. Decrease orders of the L^p— moduli of continuity ($0<p<\infty$) Analysis Math., 5, 3, 1979, 219—234.
6. *Э. А. Стороженко, П. Освальд*. Теорема Джексона в пространствах $L^p(R^k)$, $0<p<1$, Сиб. мат. журнал, 19, 4, 1978, 888—901.
7. *Э. А. Стороженко*. Приближение функций и теоремы вложения в пространствах H^p и L^p, Докт. диссерт., Тбилиси, 1979.
8. *А. Ф. Тиман*. Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
9. *Э. А. Стороженко*. Теоремы вложения и наилучшие приближения, Мат. сборник 97 (139), 2, 1975, 230—241.

10. *П. Освальд.* Приближение сплайнами в метрике L_p, $0 < p < 1$, Math. Nachrichten, 94, 1980, 68—96.
11. *П. Освальд.* Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов в метрике L_p, $0 < p < 1$, Изв. вузов, Математика, 7, 1976, 65—75.
12. *G. H. Hardy, J. E. Littlewood.* Theorems concerning Cesaro means of power series, Proc. Lond. Math. Soc., 36, 7, 1934, 516—531.
13. *Э. А. Стороженко.* Приближение функций класса H^p, $0 < p \leqslant 1$, Мат. сборник 105 (149), 4, 1978, 601—621.
14. *В. И. Иванов, В. А. Юдин.* О тригонометрической системе в L_p, $0 < p < 1$, Мат. заметки, 28, 6, 1980, 859—868.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS