

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԴԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵՆՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՆԱԼԱՆՈՎ
Ա. Ա. ՔԱԼԱՆՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄՐԱՋՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀՄԱՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման րաջառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն պրամբենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներթևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղափոխվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, դրբերի համար նշվում է՝ հեղինակը, զրբի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված դրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Նրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (սրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձևագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24րդ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН

зам. главного редактора

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Н. У. АРАКЕЛЯН

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН

А. А. ТАЛАЛЯН

Р. А. ШАХБАГЯН

зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редакционной коллегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название места издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, Барекамутян, 24-6, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. U. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKI

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.
2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.
3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.
4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.
5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.
6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.
7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.
8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.
9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.
10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.
11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.53

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, А. Э. ЕРЁМЕНКО, И. В. ОСТРОВСКИЙ

О СУММЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА

Хорошо известно, что класс целых функций вполне регулярного роста (в.р.р.) в смысле Левина—Пфлюгера не замкнут относительно сложения. Пусть f_1, f_2 —функции в.р.р. относительно одного и того же уточненного порядка $\rho(r)$. При исследовании целых эрмитово-позитивных функций [1] возник вопрос о множестве значений $a \in \mathbb{C}$, при которых целая функция

$$f_1 - af_2 \quad (1)$$

будет в.р.р. относительно $\rho(r)$. Этот вопрос представляет самостоятельный интерес и будет подробно рассмотрен в настоящей работе. Используемые сведения по теории целых функций в.р.р. содержатся в гл. II—III книги [2], а сведения по теории мероморфных функций— в гл. I—IV книги [3]. Обозначим через $E(f_1, f_2)$ множество таких $a \in \mathbb{C}$, при которых целая функция (1) не будет в.р.р. В [1] было отмечено, что множество $E(f_1, f_2)$ имеет нулевую емкость; получим более точную его характеристику.

Множество $E \subset \mathbb{C}$ назовем H -множеством, если

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\omega} E_{\nu}, \quad \omega \leq \infty, \quad (2)$$

причем E_{ν} обладают таким свойством: для каждого ν существует $k_{\nu} > 0$ и последовательность $(a_p^{(\nu)})_{p=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ такие, что каждая точка $a \in E_{\nu}$ покрывается бесконечным числом кругов

$$\{a : |a - a_p^{(\nu)}| < \exp(-\exp(pk_{\nu}))\} = C(\nu, p).$$

Хилленгрэн [4] доказал, что множество $E_{\nu}(g)$ конечных валироновских исключительных значений мероморфной функции g конечного порядка является H -множеством.

Теорема 1. $E(f_1, f_2)$ является H -множеством.

Доказательство. Ввиду цитированного результата [4] достаточно показать, что

$$E(f_1, f_2) \subset E_{\nu}(f_1/f_2). \quad (3)$$

Положим $f_a = f_1 - af_2$, $F = f_1/f_2$. Не уменьшая общности, считаем, что первый отличный от 0 тейлоровский коэффициент функции f_2 равен 1. Обозначим через $N_{12}(r)$ неваалиновскую считающую функцию общих нулей (с учетом порядка) функций f_1 и f_2 , то есть учитывающую нули $|f_1| + |f_2|$. Легко видеть, что

$$N(r, a, F) = N(r, 0, f_a) - N_{12}(r). \quad (4)$$

С другой стороны, согласно [3], с. 28 имеем

$$T(r, F) = T_0(r, f_1, f_2) - N_{12}(r), \quad (5)$$

где

$$T_0(r, f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max \{ \log |f_1(re^{i\theta})|, \log |f_2(re^{i\theta})| \} d\theta.$$

Из неравенства Иенсена следует, что $N(r, 0, f_a) \leq T_0(r, f_1, f_2) + \text{const}$. Отсюда и из [4], [5] получаем для валироновского дефекта

$$\Delta(a, F) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a, F)}{T(r, F)} \geq 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, 0, f_a)}{T_0(r, f_1, f_2)}. \quad (6)$$

Рассуждая аналогично [3], с. 60, получаем соотношение

$$T_0(r, f_1, f_2) = \frac{r^{\rho(r)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\theta) d\theta + o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где $H(\theta) = \max |h(\theta, f_1), h(\theta, f_2)|$, $h(\theta, f)$ — индикатор целой функции f относительно $\rho(r)$. Согласно одному результату Б. Я. Левина ([2], с. 225), f_a не является целой функцией в.р.р. относительно $\rho(r)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta, f_a) d\theta > \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, 0, f_a)}{r^{\rho(r)}} = \eta(a) \geq 0.$$

Но $h(\theta, f_a) \leq H(\theta)$. Поэтому если f_a не является целой функцией в.р.р., то

$$\eta(a) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\theta) d\theta. \quad (8)$$

Из (6), (7), (8) следует, что

$$\Delta(a, F) \geq 1 - \eta(a) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\theta) d\theta \right\}^{-1} > 0,$$

что доказывает (3) и теорему 1.

Оказывается, что теорема 1 дает близкую к точной характеристику множества $E(f_1, f_2)$.

Теорема 2. Пусть E является H -множеством, причем если $\omega = \infty$, множества E_v в (2) замкнуты. Существуют целые функции f_1, f_2 в.р.р. относительно $\rho(r) \equiv 1$, такие, что $E \subset E(f_1, f_2)$.

Доказательство. Построение нужных нам функций разобьем на несколько этапов.

1°. Пусть (n_j) — возрастающая последовательность, состоящая из натуральных чисел вида $2^q \cdot m$, $1 < q < \infty$, $2^q \leq m \leq 2^{q+2} - 1$. Рассмотрим целую функцию

$$f_2(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{n_j}}{n_j!}.$$

Покажем, что функция f_2 имеет в.р.р. Очевидно, что

$$M(r, f_2) = f_2(r) < \exp r, \quad r > 0. \quad (9)$$

Пусть $n_j \leq r < n_{j+1}$. Если $n_j = 2^{q_j} m_j$, то $r \geq n_j \geq r - 2^{q_j} \geq r - \sqrt{r}$. Поэтому

$$M(r, f_2) > \frac{r^{n_j}}{n_j!} \geq \frac{n_j^{n_j}}{n_j!} > e^{n_j} > e^{r - \sqrt{r}}.$$

Вместе с (9) это дает $\ln f_2(r) = (1 + o(1)) r$, $r \rightarrow \infty$, т. е. f_2 имеет в.р.р. на положительном луче.

Пусть теперь $q \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq s \leq 2^q - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} f_2(r \exp(2\pi i s 2^{-q})) &= \sum_{n_j < 2^{2q}} \frac{r^{n_j} \exp(2\pi i s n_j 2^{-q})}{n_j!} + \\ &+ \sum_{n_j > 2^{2q}} \frac{r^{n_j} \exp(2\pi i s n_j 2^{-q})}{n_j!} = O(r^{2^{2q}}) + \sum_{n_j > 2^{2q}} \frac{r^{n_j}}{r_j!} = \\ &= O(r^{2^{2q}}) + f_2(r), \quad r \rightarrow \infty; \\ |\log |f_2(r \exp(2\pi i s 2^{-q}))|| &\sim \log f_2(r) \sim r, \\ &r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, лучи в.р.р. образуют всюду плотное множество. Поскольку множество лучей в.р.р. замкнуто, [2], с 186, то f_2 имеет в.р.р. и $h(\theta, f_2) \equiv 1$.

2°. Построим теперь функцию f_1 вида

$$f_1(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{n_j}}{n_j!} z^{n_j},$$

где последовательность (b_{n_j}) будет определяться множеством E . Предположим сначала, что в (2) $\omega = \infty$, и согласно условию теоремы 2 множества E , замкнуты. Не уменьшая общности можно считать, что $0 \notin E$ и что для всех $v \in \mathbb{N}$

$$\emptyset \neq E_v \subset \left\{ a : 2/v < |a| < 3v, \left| \arg a - \frac{\pi}{8} (v-1) \right| \leq \frac{\pi}{8} \right\}.$$

Далее, можно считать, что

$$\frac{1}{v} < |a_p^{(v)}| < 4v, \left| \arg a_p^{(v)} - \frac{\pi}{8} (v-1) \right| \leq \frac{\pi}{4}. \quad (11)$$

Для каждого E , и $s \in [1, \infty)$ обозначим через $P(s, v)$ наименьшее натуральное $P \geq s + 1$ такое, что

$$E \subset \bigcup_{j=[s]+1}^P C(v, j).$$

Существование P следует из леммы Гейне—Бореля.

Обозначим через $(\psi(n))$ последовательность

$$(1, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, \dots).$$

Пусть (k_i) — последовательность, отвечающая множеству E по определению H -множества.

Положим $m_1 = P(4k_1^{-1}, 1)$. Предположим, что уже выбраны $m_1, \dots, m_l$. Пусть $s_l = \frac{1}{2} (k_{\psi(l)} m_1 + \dots + k_{\psi(l)} m_l)$. Выберем m_{l+1} так, чтобы

$$m_{l+1} \geq P(4s_l / k_{\psi(l+1)}, \psi(l+1)), \quad (12)$$

и, следовательно

$$m_{l+1} k_{\psi(l+1)} \geq 4. \quad (13)$$

Определим теперь последовательность (b_j) следующим образом: Положим

$$N(l, p) = \exp \left(s_l + \frac{1}{2} k_{\psi(l+1)} (p-1) \right).$$

Если

$$N(l, p) < j \leq N(l, p+1), \text{ то } b_j = a_j^{(\psi(l+1))}, \quad 1 \leq p \leq m_{l+1}.$$

Имеем в силу (13) и определений

$$\psi(l+1) \leq l \leq \frac{1}{2} s_l < s_l \leq \exp s_l \leq j.$$

Поэтому из (11) следует, что

$$1/j < |b_j| < 4j. \quad (14)$$

3°. Покажем, что функция f_1 имеет в.р.р.

Прежде всего с помощью (14) получаем оценку сверху при $r > 0$

$$|f_1(r)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|b_{n_j}|}{n_j} r^{n_j} \leq 4r \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \leq 4re^r. \quad (15)$$

Для получения оценки снизу предположим, что $\exp s_l \leq r \leq \exp s_{l+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \sum_{n_j < \exp s_{l-1}} \frac{b_{n_j}}{n_j} r^{n_j} + \sum_{\exp s_{l-1} < n_j < \exp s_{l+2}} \frac{b_{n_j}}{n_j} r^{n_j} + \\ &+ \sum_{n_j > \exp s_{l+2}} \frac{b_{n_j}}{n_j} r^{n_j} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Далее, в силу (14)

$$|I_3| \leq 4r \sum_{j = [\exp s_{l+2}]}^{\infty} \frac{r^j}{j!} \leq 8r \frac{r^{[\exp s_{l+2}]}}{[\exp s_{l+2}]!},$$

поскольку с учетом (13)

$$\frac{r}{j} \leq \frac{\exp s_{l+1}}{\exp s_{l+2} - 1} = \frac{1 + o(1)}{\exp \left(\frac{1}{2} k_{\psi(l+2)} m_{l+2} \right)} \leq$$

$$\leq \frac{1+o(1)}{e^2} < \frac{1}{2}, \quad l \rightarrow \infty,$$

для достаточно больших r . Но

$$\frac{r^{[\exp s_{l+2}]}}{[\exp s_{l+2}]!} \leq \left(\frac{er}{[\exp s_{l+2}]} \right)^{[\exp s_{l+2}]} \leq 1.$$

Поэтому

$$|I_2| \leq 8r. \quad (16)$$

Если $j \leq \exp s_{l-1}$, то

$$\frac{r}{j} \geq \frac{\exp s_l}{\exp s_{l-1}} = \exp \left(\frac{1}{2} m_l k_{\psi(l)} \right) \geq e^2 > 2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq 4r \sum_{j=0}^{[\exp s_{l-1}]} \frac{r^j}{j!} \leq 8r \frac{r^{[\exp s_{l-1}]}}{([\exp s_{l-1}])!} \leq 8r \left(\frac{re}{[\exp s_{l-1}]} \right)^{[\exp s_{l-1}]} \leq \\ &\leq 8r \max \left\{ \left(\frac{re}{x} \right)^x : 0 \leq x \leq \frac{r}{e^2} \right\} = 8r \exp(3e^{-2}r). \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим теперь, что множество

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} \{a_p^{(\psi(l-1))}, a_p^{(\psi(l))}, a_p^{(\psi(l+1))}\}$$

в силу (11) при любом l лежит в некотором угле с вершиной в 0 и раствором $3\pi/4$. Далее, в каждом интервале $[\exp s_m, \exp s_{m+1}]$ при достаточно большом m содержатся члены последовательности (n_j) поскольку $n_{j+1} \sim n_j$, а $\exp s_{j+1} > e^2 \exp s_j$. Поэтому с помощью (14) получаем

$$|I_2| \geq \sin \frac{\pi}{8} \sum_{\exp s_{l-1} < n_j < \exp s_{l+2}} \frac{r^{n_j}}{n_j! n_j} \geq \sin \frac{\pi}{8} \frac{r^{n_q}}{n_q! n_q},$$

где q таково, что $n_q \leq r < n_{q+1}$, следовательно, как в 1° , $r > n_q > r - \sqrt{r}$, поэтому

$$\frac{r^{n_q}}{n_q! n_q} \geq (1+o(1)) \frac{e^{n_q}}{\sqrt{2\pi n_q^3}} = e^{(1+o(1))r},$$

$$|I_2| \geq \exp(1+o(1))r, \quad r \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Из (15), (16), (17), (18) следует, что $|f_1(r)| = \exp\{(1+o(1))r\}$, $r \rightarrow \infty$, таким образом, f_1 имеет в.р.р. на положительном луче. Повторяя выкладку (10) для f_1 вместо f , получим, что f_1 является целой функцией в.р.р.

4°. Покажем теперь, что линейная комбинация $f_1 - af_2$ не имеет в.р.р. при $a \in E$. Пусть $a \in E$. Существует бесконечная последовательность натуральных чисел l , такая, что $\psi(l+1) = \nu$. Всюду далее число ν фиксировано и l выбирается из указанной последовательности. Для каждого l в силу (12) существует такое p , что

$$4s_l/k_{\psi(l;+1)} \leq p \leq ml+1 \quad (19)$$

и $|a - a_p^{(\nu)}| < \exp(-e^{k_p})$. Поскольку $s_l \rightarrow \infty$, множество таких p неограничено.

Положим

$$r = \exp\left(s_l + \frac{1}{2} k_p \left(p - \frac{1}{2}\right)\right) = N(l, p) \exp(k_p/4). \quad (20)$$

Из (19), (20) следует, что $\log r < s_l + \frac{1}{2} k_p$, $p \leq \frac{3}{4} k_p$, то есть

$$|a - a_p^{(\nu)}| \leq \exp(-r^{4/3}). \quad (21)$$

При $|z| = r$ имеем, учитывая, что $b_j = a_p^{(\nu)}$ при $[N(l, p)] + 1 \leq j \leq [N(l, p+1)]$

$$\begin{aligned} |f_1(z) - af_2(z)| &\leq \sum_{j=1}^{[N(l, p)]} |b_j - a_p^{(\nu)}| \frac{r^j}{j!} + \\ &+ \sum_{j=[N(l, p+1)]+1}^{\infty} |b_j - a_p^{(\nu)}| \frac{r^j}{j!} + |a - a_p^{(\nu)}| |f_2(z)| = U_1 + U_2 + U_3. \end{aligned} \quad (22)$$

При $j \geq [N(l, p+1)] + 1$ имеем

$$\frac{r}{j} \leq \frac{N(l, p) \exp(k_p/4)}{[N(l, p+1)] + 1} \leq \frac{N(l, p) \exp(k_p/4)}{N(l, p+1)} = \exp(-k_p/4), \quad (23)$$

а при $j \leq N(l, p) -$

$$\frac{r}{j} > \frac{N(l, p) \exp(k_p/4)}{[N(l, p)]} \geq \exp(k_p/4). \quad (24)$$

Будем обозначать через A положительные постоянные, зависящие только от ν , вообще говоря, разные. Используя неравенство

$$|b_j - a_p^{(\nu)}| < Aj, \quad (25)$$

получим ($N = N(l, p)$)

$$\begin{aligned} |U_1| &\leq Ar \sum_{j=0}^{[N]} \frac{r^j}{j} \leq \frac{Ar}{1 - \exp(-k_p/4)} \frac{r^N}{[N]!} \leq \\ &\leq Ar \exp\{(1 + k_p/4)[N]\} \leq Ar \exp((1 + k_p/4)e^{-k_p/4}r). \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично из (25), (23) следует ($N_1 = N(l, p+1)$)

$$\begin{aligned} |U_2| &\leq Ar \sum_{j=[N_1]}^{\infty} \frac{r^j}{j!} \leq Ar \frac{r^{[N_1]}}{[N_1]!} \leq Ar \frac{N^{[N_1]} e^{[N_1]}}{\exp((k_p/4)[N_1])[N_1]^{[N_1]}} \leq \\ &\leq Ar \exp((1 - k_p/4)[N_1]) \leq Ar \exp((1 - k_p/4)e^{k_p/4}r). \end{aligned} \quad (27)$$

Далее, в силу (21)

$$|U_3| = |a - a_p^{(\nu)}| |f_2(z)| \leq \exp(-r^{4/3}) e^r = o(1), \quad (28)$$

$r \rightarrow \infty$.

Учитывая неравенство $(1-x)e^x < (1+x)e^{-x} < 1$, $x > 0$, из (26), (27), (28) получаем

$$|f_1(z) - af_2(z)| = O(\exp\{(1+k/4)e^{-k/4}r\}),$$

$$r \rightarrow \infty,$$

то есть

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f_1 - af_2)}{r} \leq \frac{1+k/4}{\exp(k/4)} < 1. \quad (29)$$

Не уменьшая общности можно считать, что E состоит по крайней мере из двух точек. Тогда существует подпоследовательность $(a_p^{(v)})$ такая, что $|a - a_p^{(v)}| > \delta > 0$. Будем теперь считать, что числа p взяты из этой подпоследовательности, и определим r и $N(l, p)$ формулой (20). Соотношения (22), (26), (27) сохраняют силу, и мы получаем

$$|f_1(r) - af_2(r)| > O\left(\exp \frac{1+k/4}{\exp(k/4)} r\right) + \delta \exp\{(1+o(1))r\}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Из (29), (30) следует, что $f_1 - af_2$ не является функцией в.р.р.

Остановимся теперь кратко на случае, когда в (2) $\omega < \infty$. В этом случае требование замкнутости множеств E излишне. Прежде всего, можно считать, что $\omega = 1$, так как каждая точка ζ из $\bigcup_{v=1}^{\omega} E$ покрывается бесконечным числом кругов

$$C(p) = \{a : |a - a_p| < \exp(-\exp(pk))\},$$

где $k = \omega^{-1} \min\{k_v : 1 \leq v \leq \omega\}$, (a_p) — последовательность $(a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(\omega)}, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(\omega)}, \dots)$. Как и раньше, не уменьшая общности будем считать, что $0 \notin E$. Учитывая, что каждая точка $a \in E$ является точкой сгущения для последовательности (a_p) , нетрудно убедиться, что последовательность кругов можно выбрать так, что

$$\exp\left(-\frac{1}{2}pk\right) < |a_p| < 4 \exp\left(\frac{1}{2}pk\right) = 4S_p, \quad |\arg a_{p+1} - \arg a_p| \leq \frac{\pi}{4}$$

для всех $p \in \mathbb{N}$. Теперь полагаем $b_j = a_p$ при $S_p < j \leq S_{p+1}$ и, как раньше, определяем функции f_2 и f_1 . Тогда для b_j выполняется (14). Далее рассуждения проводим, как выше, заменяя всюду $\exp S_l$ на S_l . Тогда вместо (16) получим $|I_3| \leq 4(1 - S_1^{-1})r$, вместо (17) — $|I_1| \leq 4(1 - S_1^{-1}) \exp\left\{\left(\frac{k}{2} + 1\right)e^{-k/2}r\right\}$, а (18) и вывод о том, что f_1 имеет в.р.р., останутся без изменений. Для $a \in E$ возьмем последовательность значений $p = p_n \rightarrow \infty$, такую, что $|a - a_p| < \exp(-e^{kp})$ и $r = e^{k/4} S_p$. Заменяя $a_p^{(v)}$ на a_p , k_v на k и $N(l, p)$, $N(l, p+1)$ в (23) на S_p , S_{p+1} , получим оценки (21), (23)–(30).

Теорема доказана.

Замечание 1. Из (18) следует, что $h(\theta, f_1 - af_2) = 1$ (см. 1°). Таким образом, $f_1 - af_2$ не имеет в.р.р. ни на одном луче, если $a \in E$.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 2 мы (так же, как и Хилленгрэн [4]) использовали идею примера Ж. Валирона ([3], с. 154—157) целой функции с несчетным множеством валироновских исключительных значений. В примере Валирона использовалась функция

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{j!} z^j, \text{ где } b_0 = b_1 = b_2 = \frac{3}{4}, b_j = a_p$$

при $N_{p-1} < j < N_p$, $p \in \mathbb{N}$, $N_0 = 2$, $N_p = N_{p-1}^3$, (a_p) — последовательность точек из $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, такая, что $|a_p - a_{p-1}| > \eta > 0$, $p \in \mathbb{N}$. По-

строенная нами функция f_1 во многом схожа с функцией φ . Однако, как будет сейчас показано, в отличие от f_1 функция φ не имеет в.р.р.

Используем такой факт, доказательство которого нам сообщил М. Н. Шеремета: если

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!}, \text{ то } \log |P_n(-n)| \sim n, n \rightarrow \infty.$$

Действительно

$$P_n(-n) = e^{-n} + (-1)^n \frac{e^{-n}}{n!} \int_0^n e^t t^n dt,$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-n}}{n!} \int_0^n e^t t^n dt &> \frac{e^{-n}}{n!} \int_{n(1-\varepsilon)}^n e^t t^n dt \geq \\ &\geq \frac{e^{-n\varepsilon}}{n!} (1-\varepsilon)^n n^n n\varepsilon \geq e^{(1-\varepsilon)n} (2\pi n)^{-\frac{1}{2}} (1-\varepsilon)^n n\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1, \end{aligned}$$

откуда следует нужное соотношение.

Имеет место тождество

$$\begin{aligned} \varphi(-N_p) &= (a_p - a_{p+1}) P_{N_p}(-N_p) + a_{p+1} e^{-N_p} + \\ &+ \sum_{j=N_{p+1}+1}^{\infty} \frac{b_j - a_{p+1}}{j!} (-N_p)^j + \sum_{j=0}^{N_{p-1}} \frac{b_j - a_p}{j!} (-N_p)^j. \end{aligned}$$

Первая сумма не превосходит по модулю $\sum_{j=0}^{\infty} (N_p e / (N_{p+1} + 1))^j \leq \leq 2$ при $p > 1$, а вторая — величины $N_p^{N_p-1} e = \exp \{N_p^{1/3} \ln N_p + 1\}$. Следовательно, $\log |\varphi(-N_p)| \sim N_p$, и $h(\pi, \varphi) = 1$. При $N_{p-1}^{5/4} \leq r \leq N_p^{1/2}$ имеем

$$\varphi(-r) = a_p e^{-r} + \sum_{j=0}^{N_{p-1}} \frac{b_j - a_p}{j!} (-r)^j + \sum_{j=N_{p+1}}^{\infty} \frac{b_j - a_p}{j!} (-r)^j.$$

Но

$$\sum_{j=0}^{N_{p-1}} \frac{r^j}{j!} \leq \exp \{r^{4/5} \log r + 1\},$$

$$\sum_{j=N_p+1}^{\infty} \frac{r^j}{j!} \leq \sum_{j=N_p+1}^{\infty} \left(\frac{re}{j}\right)^j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{N_p} e}{N_p+1}\right)^j \leq 2.$$

Повтому при $N_{p-1}^{5/4} \leq r \leq N_p^{1/2}$ выполняется $\log |\varphi(-r)| \leq r^{4/5} \log r + O(1) = o(r)$, $r \rightarrow \infty$. Следовательно, на отрицательном луче φ не имеет в.р.р.

Легко видеть, что H -множество E в теореме 2 можно выбрать имеющим мощность континуума. Естественно возникает вопрос о возможной мощности множества $E(f_1, 1)$, который сводится к вопросу о мощности множества $E_V(f_1)$ для целых функций в.р.р.

Ум Ки-Чжул [5] доказал, что для целых функций в.р.р. конечного порядка ρ число неванлинновских исключительных значений конечно и не превосходит 2ρ (см. также [6], [7]), в то время, как Н. У. Аракелян показал [8], [3], стр. 172, что целая функция порядка ρ , $1/2 < \rho < \infty$, может иметь счетное множество неванлинновских исключительных значений. Таким образом, требование в.р.р. целой функции уменьшает возможную мощность множества ее неванлинновских исключительных значений. Из следующей теоремы видно, что требование в.р.р. не влечет ограничений на мощность множества исключительных значений в смысле Валирона.

Теорема 3. При любом уточненном порядке $\rho(r) \rightarrow \rho > 1/2$ существует целая функция F в.р.р. относительно $\rho(r)$, такая, что множество $E_V(F)$ имеет мощность континуума.

Требование $\rho > 1/2$ естественно, так как при $\rho \leq 1/2$ индикатор целой функции положителен (кроме, возможно, одной точки в случае $\rho = 1/2$) и целая функция в.р.р. не может иметь валироновских исключительных значений.

Доказательство теоремы 3 существенно использует следующую лемму, которая может представлять самостоятельный интерес для теории ограниченных аналитических функций.

Лемма. Пусть $0 < \alpha < 1$. Существует множество E мощности континуума и ограниченная аналитическая в $\{z: \operatorname{Re} z > 0\} \setminus [0]$ функция G , такая, что для любого $a \in E$ найдется последовательность $r_k \rightarrow \infty$ со свойством

$$|G(z) - a| = O(\exp(-r_k^\alpha)), \quad |z| = r_k, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Доказательство леммы. Пусть $\alpha < \beta < 1$. Положим $\varphi(z) = 1 - \exp(-z^\beta)$, где $z^\beta > 0$ при $z > 0$. Очевидно, что

$$|\varphi(z)| \leq A |z|^\beta, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2\beta}. \quad (31)$$

Обозначим $\beta_1 = \cos(\pi\beta/2)$,

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{\beta} x^{-\beta \cdot (\beta-\alpha)^{-1} \beta_1 - \beta \cdot (\beta-\alpha)^{-1}}\right\}, \quad x > 0.$$

Функция $x\psi(x)$ убывает на некотором промежутке $(0, x_0)$. Выберем x_0 настолько малым, чтобы выполнялось

$$x\psi(x) > 2^{1/\beta}, \quad 0 < x \leq x_0. \quad (32)$$

Положим $\tau_1 = x_0$, $\tau_{k+1} = 1/\psi(\tau_k)$. Тогда $\tau_{k+1}/\tau_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и в силу (32)

$$\tau_{k+1}/\tau_k < 2^{-1/\beta}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (33)$$

Пусть теперь $\rho_k = \tau_k - \beta(\beta-1)^{-1} \beta_1 - (\beta-1)^{-1}$. Так как в силу (33) $\tau_k < x_0 2^{-(k-1)/\beta}$, $k \geq 1$, то $\rho_k > A \cdot 2^{k/(\beta-1)}$, следовательно

$$k = O(\log \rho_k), \quad k \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Пусть (c_k) — последовательность комплексных чисел такая, что

$$|c_k| \leq 1, \quad \left| \sum_{j=1}^k c_j \right| \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (35)$$

В силу (31) и (33) ряд

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi(\tau_k z) \quad (36)$$

сходится равномерно на компактах в $\left\{ z: |\arg z| < \frac{\pi}{2\beta} \right\}$. Если $\rho_k \leq |z| \leq \rho_{k+1}$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, то в силу (31)

$$\begin{aligned} \left| G(z) - \sum_{j=1}^k c_j \right| &\leq \sum_{j=1}^k |c_j| |\varphi(\tau_j z) - 1| + |c_{k+1} \varphi(\tau_{k+1} z)| + \\ &+ \sum_{j=k+2}^{\infty} |c_j \varphi(\tau_j z)| \leq \sum_{j=1}^k \exp(-(\tau_j |z|^\beta) \beta_1) + 2 + \\ &+ A |z|^\beta \sum_{j=k+2}^{\infty} \tau_j^\beta = \sigma_{1k} + 2 + \sigma_{2k}. \end{aligned} \quad (37)$$

Используя (33), (34), получим ($k \rightarrow \infty$)

$$\sigma_{1k} \leq k \exp(-(\tau_k \rho_k)^\beta \beta_1) = k \exp(-\rho_k^\beta) = O\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \rho_k^\beta\right)\right), \quad (38)$$

$$\sigma_{2k} \leq A \rho_{k+1}^\beta \tau_{k+2}^\beta = A \rho_{k+1}^\beta (\psi(\tau_{k+1}))^{-\beta} = A \rho_{k+1}^\beta \exp(-\rho_{k+1}^\beta) \rightarrow 0. \quad (39)$$

Из (35), (37), (38), (39) следует, что функция G ограничена при $\operatorname{Re} z \geq 0$.

При $|z| = \rho_k$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ оценки уточняются так:

$$\begin{aligned} \left| G(z) - \sum_{j=1}^k c_j \right| &\leq \sigma_{1k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} |c_j \varphi(\tau_j z)| \leq \\ &\leq \sigma_{1k} + A \rho_k^\beta \sum_{j=k+1}^{\infty} \tau_j^\beta \leq \sigma_{1k} + A \rho_k^\beta \tau_{k+1}^\beta = \\ &= \sigma_{1k} + A \rho_k^\beta \exp(-\rho_k^\beta) = O\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \rho_k^\beta\right)\right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (40)$$

Конкретизируем теперь выбор последовательности (c_k) в (36). Положим $R_n = 2^{-n} \exp(-\rho^{2^{n+1}})$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть (B_j) — последовательность всех конечномерных векторов с компонентами из множества $[0, 1]$, такая, что n -мерные векторы следуют за $(n-1)$ -мерными, а векторы одинаковой размерности упорядочены произвольно. Если $B_j = (\varepsilon_{j1}, \varepsilon_{j2}, \dots, \varepsilon_{jm_j})$, где $m_j = \min \{n \in \mathbb{N} : 2^{n+1} - 2 \geq j\}$, то полагаем

$$a_j = \sum_{k=1}^{m_j} R_k \varepsilon_{jk}, \quad c_1 = a_1; \quad c_k = a_k - a_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Из (40) следует, что при $|z| = \rho_k$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ выполняется

$$|G(z) - a_k| = O\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \rho_k^2\right)\right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Пусть E — множество чисел вида

$$a = \sum_{v=1}^{\infty} R_v \varepsilon_v, \quad \varepsilon_v \in [0, 1], \quad (42)$$

оно имеет мощность континуума. Для любого $a \in E$ последовательность частичных сумм ряда (42) есть подпоследовательность (a_{j_n}) последовательности (a_j) , причем $j \leq 2^{n+1}$.

Поэтому

$$|a - a_{j_n}| \leq \sum_{v=j_n+1}^{\infty} R_v \leq 2R_n \leq \exp(-\rho_{j_n}^2).$$

Отсюда и из (41) следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3. Для простоты будем считать, что $\rho(r) \equiv \rho$. Пусть сначала $\rho \neq 1$. Положим $\alpha = \rho/(\rho+1)$, тогда $1/2 < \alpha < 1$. Применяя лемму, получим функцию G . Поскольку функция G ограничена при $\operatorname{Re} z \geq 0$, то по одному следствию из теоремы М. В. Келдыша ([3], с. 182, лемма 5.2) найдется целая функция G_1 нормального типа (обозначим величину типа через σ) порядка α , для которой в достаточно малом угле $|z: \arg z| \leq \theta_0$ равномерно по $\arg z$ выполняется

$$|G_1(z) - G(z)| = O(\exp(-|z|^\alpha)), \quad z \rightarrow \infty.$$

Пусть G_2 — целая функция в.р.р. относительно $\rho(r) \equiv \alpha$, индикатор $h(\theta)$ которой отрицателен при $|\theta| < \theta_0/3$, положителен при $\theta_0/3 < |\theta| \leq \pi$, причем $h(\theta) > \sigma$ при $2\theta_0/3 < |\theta| \leq \pi$. Функция $F_1 = G_1 + G_2 + 4$ является целой функцией в.р.р., причем $E \subset E_V(F_1)$. Поэтому функция $F(z) = F_1(z^{|\rho|+1})$ — искомая.

Если $\rho = 1$, применяем лемму при $\alpha = 1/2$. Затем вместо функции G рассматриваем функцию $G(z^2)$, ограниченную при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$. Функции G_1, G_2 выбираются так же, как в предыдущем случае: роль α играет число 1.

Ա. Ա. ԳՈՂԴԲԵՐԳ, Ա. Է. ԵՐԵՄԵՆԿՈ, Ի. Վ. ՕՍՏՐՈՎՍԿԻ. Լիովին ռեգուլյար աճի ամբողջ ֆունկցիաների գումարի մասին (ամփոփում)

Դիցուք f_1, f_2 -ը լիովին ռեգուլյար աճի ամբողջ ֆունկցիաներ են: Ուսումնասիրվում է $\alpha \in \mathbb{C}$ արժեքների բազմության կառուցվածքը, որոնց դեպքում $f_1 + \alpha f_2$ ամբողջ ֆունկցիան չաճի լիովին ռեգուլյար աճ: Կառուցվում է ռեգուլյար աճի ամբողջ ֆունկցիայի օրինակ, որի σ . Վալիրոնի իմաստով բացառիկ արժեքների բազմությունը հաշվելի է:

A. A. GOLDBERG, A. E. EREMENKO, I. V. OSTROVSKII. *On the sum of the entire functions of the perfectly regular growth (summary)*

Let f_1, f_2 be entire functions of perfectly regular growth. The structure of the set of the values $\alpha \in \mathbb{C}$ such that $f_1 + \alpha f_2$ is not of the perfectly regular growth is considered. An example of the entire function of the perfectly regular growth with non-enumerable set of Valiron exceptional values is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. О росте целых эрмитово-положительных функций конечного порядка, ДАН УССР, сер. А, № 4, 1981, 6—9.
2. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
3. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.
4. A. Hyllengren. Valiron deficient values for meromorphic functions in the plane, Acta math., 124, 1970, 1—8.
5. Oum Ki-Choul. Bounds for the number of deficient values of entire functions whose zeros have angular densities, Pacif. J. Math., 29, № 1, 1969, 187—202.
6. А. А. Гольдберг. О дефектах целых функций вполне регулярного роста, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, «Вища школа», 1971, вып. 14, 88—101.
7. Ю. П. Лапенко. Об оценке суммы дефектов целых функций вполне регулярного роста, ДАН СССР, 239, № 4, 1978, 785—788.
8. Н. У. Аракелян. Целые функции конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений, ДАН СССР, 170, № 2, 1966, 999—1002.

УДК 517.53

Ф. А. ШАМОЯН

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ, РАСТУЩИХ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

1°. Пусть U — единичный круг на комплексной плоскости. Следуя М. М. Джрбашяну (см. [1], [2]) обозначим через A_α^* , ($\alpha > -1$) класс аналитических в круге функций f , для которых

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^\alpha \ln^+ |f(re^{i\varphi})| r dr d\varphi < +\infty. \quad (0.1)$$

В работах [1], [2] им была установлена каноническая факторизация классов A_α^* . На этом пути был открыт новый класс функций $\pi_\alpha(z, z_k)$, аналитических в круге U , с нулями в точках произвольной последовательности $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ ($|z_k| \leq |z_{k+1}| < 1$), удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \quad (0.2)$$

Эти функции при условии (0.2) определялись следующим образом:

$$\pi_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp(-U_\alpha(z, z_k)),$$

где

$$U_\alpha(z, \zeta) = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} dt - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \times \\ \times \int_0^{|\zeta|^2} (1-t)^{\alpha+1} t^{k-1} dt, \quad z, \zeta \in U.$$

Как было отмечено в указанных работах, при целых α , $\alpha = p$ произведение π_p принимает следующий простой вид:

$$\pi_p(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1-|z_k|^2}{1-z_k z}\right) \exp \left\{ \sum_{m=1}^p \frac{1}{m} \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-z_k z} \right)^m \right\}. \quad (0.3)$$

В работе [3] автором было доказано, что при условии $\beta > \alpha$ и (0.2) произведение М. М. Джрбашяна $\pi_\beta(z, z_k)$ принадлежит классу A_α^* и, тем самым, вместе с результатами работы [2] получена полная характеристика нулей классов A_α^* ($\alpha > -1$)*.

* Отметим, что частный случай этого результата был первооткрыт в работе [4].

В первом параграфе настоящей статьи, используя произведения М. М. Джрбашяна, мы получим характеристику нулей более общих классов функций (теорема 1).

2°. Чтобы привести основной результат второго параграфа, предварительно введем следующие обозначения. Пусть $\lambda(x) > 0$ — монотонно растущий вес на полуоси $(0, +\infty)$ и пусть $H(U)$ — множество всех голоморфных функций в U . С функцией λ свяжем класс голоморфных функций X_λ^∞

$$X_\lambda^\infty = \left\{ f \in H(U) : \ln |f(z)| \leq A_f \lambda \left(\frac{B_f}{1-|z|} \right), z \in U \right\}, \quad (0.4)$$

где A_f и B_f — абсолютные постоянные, зависящие только от f .

В том случае, когда λ имеет конечный степенной порядок больше единицы, в работе [3] была получена полная характеристика нулей функции из класса X_λ^∞ . Из этой характеристики следует, что нули этих классов существенно зависят от их расположения по аргументам. Используя эту характеристику легко, например, построить последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ и функцию $f \in X_\lambda^\infty$, $f(z) \neq 0$, $f(z_k) = 0$, $k=1, 2, \dots$, в то же время любая функция из класса X_λ^∞ , которая обращается в нуль на последовательности $\{|z_k|\}_1^\infty$, тождественно равна нулю. Результаты второго параграфа показывают, что когда λ имеет бесконечный порядок роста, аналогичное явление отсутствует. Чисто в терминах $\{|z_k|\}_1^\infty$ дается полная характеристика нулей функции из класса X_λ^∞ . Кроме того, во втором параграфе получены новые свойства нулей функции из класса X_λ^∞ , когда λ имеет конечный степенной порядок роста.

§ 1. Нули функций из класса A_ω^*

Пусть $\omega(r) > 0$ — монотонная функция из класса $C^1[0,1)$, такая, что

$$\int_0^1 \omega(t) dt < +\infty, \sup_{r_0 < r < 1} \left| \frac{(1-r)\omega'(r)}{\omega(r)} \right| < q_\omega < +\infty, \quad (1.1)$$

где $r_0 \in (0, 1)$. При этом, в случае, когда ω монотонно растет, будем предполагать, что $0 < q_\omega < 1$.

По аналогии с классом A_α^* ($\alpha > -1$) определим класс A_ω^* следующим образом:

$$A = \left\{ f \in H(U) : \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi \omega(r) \ln^+ |f(re^{i\varphi})| r dr d\varphi < +\infty \right\}.$$

Если $f \in H(U)$, то через Z_f будем обозначать множество всех нулей функции f в U .

Теорема 1. Пусть ω — монотонная функция, удовлетворяющая условию (1.1). $Z = \{Z_f\}$ — последовательность точек из еди-

ничного круга. Тогда для того, чтобы последовательность Z была представима в виде $Z = Z_f$ при некотором $f \in A_\omega^*$, $f \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^2 \omega(|z_k|) < +\infty. \quad (1.2)$$

Если последний ряд сходится, то при $\alpha > q_\omega$ произведение М. М. Джрбашяна $\pi_\alpha(z, z_k)$ принадлежит классу A_ω^* .

Доказательству теоремы предположим следующую простую лемму.

Лемма 1. Пусть ω — монотонная функция, удовлетворяющая условию (1.1) Тогда справедливы следующие оценки:

$$\omega(\rho) \leq 2^{q_\omega} \omega\left(\frac{1+\rho}{2}\right), \quad r_0 < \rho < 1, \quad (1.3)$$

$$(1-\rho)^2 \omega(\rho) \leq 2^{q_\omega+3} \int_{\rho}^1 \int_t^1 \omega(u) du dt, \quad r_0 < \rho < 1, \quad (1.4)$$

где q_ω и r_0 — положительные числа из (1.1).

Доказательство. Если ω монотонно растет, то неравенство (1.3) очевидно. Предположим, что ω — убывающая функция, тогда из условия (1.1) имеем

$$-\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \frac{q_\omega}{1-t}, \quad t \in (r_0, 1). \quad (1.5)$$

Проинтегрируем указанное неравенство по интервалу $\left(\rho, \frac{1+\rho}{2}\right)$, получаем

$$\ln \left(\frac{\omega(\rho)}{\omega\left(\frac{1+\rho}{2}\right)} \right) \leq q_\omega \ln 2,$$

т. е.

$$\omega(\rho) \leq 2^{q_\omega} \omega\left(\frac{1+\rho}{2}\right).$$

Неравенство (1.3) доказано. Для установления (1.4) заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^1 \int_t^1 \omega(u) du dt &\geq \int_{\rho}^1 \int_t^{\frac{1+\rho}{2}} \omega(u) du dt \geq \\ &\geq \omega\left(\frac{1+\rho}{2}\right) \int_{\rho}^1 \left(\frac{1+\rho}{2} - t\right) dt = \frac{(1-\rho)^2}{8} \omega\left(\frac{1+\rho}{2}\right) \end{aligned}$$

в случае, когда ω убывает.

Отсюда, применяя неравенство (1.3), получим неравенство (1.4). Если же ω растет, то неравенство (1.4) очевидно. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Тот факт, что нули каждой нетривиальной функции из класса A_ω^* удовлетворяют условию (1.2), непосредственно следует из неравенства Иенсена и леммы 1. Дока-

жем, что если $|z_k|^\alpha$ ($|z_k| \leq |z_{k+1}| < 1$) удовлетворяет условию (1.2), то при $\alpha > q_\omega$ произведение М. М. Джрбашяна $\pi_\alpha(z, z_k)$ принадлежит классу A_ω^+ . Используя (1.1) докажем, что если ряд (1.2) сходится, то при $\alpha > q_\omega$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \quad (1.6)$$

В самом деле, если ω растет, то сходимость этого ряда очевидна. Предположим, что $\omega \downarrow 0$, тогда проинтегрировав неравенство (1.5) по интервалу (r_0, ρ) , где $r_0 < \rho < 1$, получим

$$\ln \left(\frac{\omega(r_0)}{\omega(\rho)} \right) \leq q_\omega \ln \left(\frac{1-r_0}{1-\rho} \right),$$

т. е.

$$(1-\rho)^{q_\omega} \leq \frac{(1-r_0)^{q_\omega}}{\omega(r_0)} \omega(\rho).$$

Следовательно, из сходимости ряда (1.2) следует (1.6). Продолжим доказательство теоремы. По лемме 1.2 из [3] имеет место оценка:

$$\ln |\pi_\alpha(z, z_k)| \leq \text{const} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{1 - \overline{|z_k|^2}}{1 - \overline{z_k} z} \right|^{\alpha+2}. \quad (1.7)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\rho) \ln^+ |\pi_\alpha(\rho e^{i\varphi})| \rho d\rho d\varphi \leq \\ & \leq \text{const} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega(\rho) (1 - |z_k|^2)^{\alpha+2}}{1 - \overline{z_k} \rho e^{i\varphi}} \rho d\rho d\varphi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Теперь оценим интеграл

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{|1 - \overline{z_k} \rho e^{i\varphi}|^{\alpha+2}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{|1 - |z_k| \rho e^{i\varphi}|^{\alpha+2/2}}.$$

Ясно, что

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\left[(1 - |z_k| \rho)^2 + 4 |z_k| \rho \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]^{\alpha+2/2}},$$

т. е.

$$\begin{aligned} J &= \int_{|z_k| < (1 - |z_k| \rho)} \frac{d\varphi}{\left[(1 - |z_k| \rho)^2 + 4 |z_k| \rho \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]^{\alpha+2/2}} + \\ &+ \int_{|z_k| > (1 - |z_k| \rho)} () d\varphi \stackrel{\text{def}}{=} J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Сначала заметим, что

$$J_1 \leq \frac{1}{(1 - |z_k| \rho)^{\alpha+1}}.$$

Займемся теперь оценкой интеграла J_2 . Будем предполагать, что $|z_k|, \rho \geq \frac{1}{2}$. Поскольку $|\sin \varphi| \geq \frac{2}{\pi} |\varphi|$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, то

$$J_2 \leq \int_{1-|z_k|\rho}^{\pi} \frac{2\pi^{\alpha+2} d\varphi}{(\varphi)^{\alpha+2}} = \frac{2\pi^{\alpha+2}}{\alpha+1} \left(\frac{1}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} - \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \right).$$

Следовательно

$$J \leq \left(\frac{2\pi^{\alpha+2}}{\alpha+1} + 1 \right) \frac{1}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}}.$$

Для доказательства теоремы остается оценить интеграл

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\omega(\rho) d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} = \int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho) d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} + \\ &+ \int_{|z_k|}^1 \frac{\omega(\rho) d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Сначала предположим, что ω монотонно возрастает, тогда

$$I_1 = \int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho) d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} \leq \frac{\omega(|z_k|)}{\alpha(1-|z_k|)^{\alpha}}. \quad (1.9)$$

Для оценки I_2 заметим, что

$$I_2 \leq \frac{1}{(1-|z_k|)^{\alpha+1}} \int_{|z_k|}^1 \omega(t) dt. \quad (1.10)$$

Принтегрировав последний интеграл по частям, получим

$$\int_{|z_k|}^1 \omega(\rho) d\rho = \omega(|z_k|)(1-|z_k|) + \int_{|z_k|}^1 \omega'(\rho)(1-\rho) d\rho.$$

Отсюда, ввиду условия (1.1), можем написать

$$\int_{|z_k|}^1 \omega(\rho) d\rho \leq \omega(|z_k|)(1-|z_k|) + q_{\omega} \int_{|z_k|}^1 \omega(\rho) d\rho$$

и поэтому

$$\int_{|z_k|}^1 \omega(\rho) d\rho \leq \frac{(1-|z_k|)\omega(|z_k|)}{(1-q_{\omega})}. \quad (1.11)$$

Объединяя оценки (1.9) — (1.11), приходим к неравенству

$$\int_0^1 \frac{\omega(\rho) d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} \leq \frac{\omega(|z_k|)}{(1-|z_k|)^{\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-q_{\omega}} \right). \quad (1.12)$$

Теперь оценим интеграл I в предположении, что ω монотонно убывает. В этом случае легко видеть, что

$$I_2 \leq \frac{\omega(|z_k|)}{(1-|z_k|)^{\alpha}}$$

и в то же время

$$I_1 = \int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho) d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} \leq \int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho) d\rho}{(1-\rho)^{\alpha+1}}.$$

Принтегрировав интеграл справа по частям, получим

$$\int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho) d\rho}{(1-\rho)^{\alpha+1}} = \frac{\omega(|z_k|)}{\alpha(1-|z_k|)^{\alpha}} - \frac{\omega(0)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \int_0^{|z_k|} \frac{\omega'(\rho) d\rho}{(1-\rho)^{\alpha}},$$

и таким образом

$$\int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho)}{(1-\rho)^{\alpha+1}} \left(1 + \frac{\omega'(\rho)(1-\rho)}{\alpha\omega(\rho)} \right) d\rho \leq \frac{1}{\alpha} \frac{\omega(|z_k|)}{(1-|z_k|)^{\alpha}}.$$

Используя оценку (1.1) и условие $\alpha > q_{\omega}$, получаем неравенство

$$1 + \frac{(1-\rho)\omega'(\rho)}{\alpha\omega(\rho)} \geq 1 - \frac{q_{\omega}}{\alpha}$$

и поэтому

$$\int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho) d\rho}{(1-\rho)^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{\alpha-q_{\omega}} \frac{\omega(|z_k|)}{(1-|z_k|)^{\alpha}}. \quad (1.13)$$

Комбинируя оценки (1.12), (1.13), окончательно получим

$$I \leq C(q_{\omega}, \alpha) \frac{\omega(|z_k|)}{(1-|z_k|)^{\alpha}}.$$

Следовательно, если учесть также (1.8), можем написать

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\rho) \ln^+ |\pi_2(\rho e^{i\varphi})| \rho d\rho d\varphi \leq C(q_{\omega}, \alpha) \sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha} \omega(|z_k|) < +\infty.$$

Теорема полностью доказана.

§ 2. О нулях голоморфных функций с мажорантой бесконечного порядка роста

Пусть λ — монотонно растущий вес на полуоси $(0, +\infty)$, $\lambda(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$, $\lambda \in C^1(0, +\infty)$. Положим

$$\omega(x) = \frac{(x\lambda'x)}{\lambda(x)}, \quad \varphi(x) = \ln \lambda(x).$$

Будем предполагать, что $\lambda(x) \equiv 1$, $x \in [0, 1]$. В статье [3] при следующих предположениях

$$1 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \omega(x) < +\infty \quad (2.1)$$

была получена полная характеристика нулей функций класса X_1^∞ . Здесь мы будем предполагать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x) = +\infty. \quad (2.2)$$

При этом выполняется еще условие

$$\overline{\lim}_{A \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega(x)}{\omega(Ax)} = 0. \quad (2.3)$$

Теорема 2. Пусть ω удовлетворяет условиям (2.2), (2.3), и пусть $Z = \{z_k\}_1^\infty$ совпадает с множеством нулей некоторой функции $f \in X_1^\infty$, $f \not\equiv 0$, тогда существует положительное число $C = C(j)$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp \left\{ -\varphi \left(\frac{C}{1 - |z_k|} \right) \right\} < +\infty. \quad (2.4)$$

И обратно, если $Z = \{z_k\}_1^\infty$ — последовательность точек единичного круга, для которого ряд (2.4) сходится при некотором $C > 0$, то можно построить функцию $f \in X_1^\infty$, $f \not\equiv 0$ так, что $Z_f = Z$.

Доказательству теоремы предположим следующие леммы.

Лемма 2. Пусть ω удовлетворяет условиям (2.3), тогда для любого положительного числа A существует число $B = B(A)$ такое, что

$$A \int_1^x \frac{\omega(t)}{t} dt \leq \int_1^{Bx} \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad x \in (1, +\infty).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда по условию (2.3) существуют положительные числа $B_0 = B_0(\varepsilon)$, $x_0 = x_0(\varepsilon)$ такие, что

$$\frac{\omega(x)}{\omega(Bx)} < \varepsilon$$

как только $B > B_0$, $x > x_0$. Подбирая B_0 таким образом, чтобы

$$\frac{\omega(x_0)}{\omega(B_0)} < \varepsilon,$$

получаем

$$\frac{\omega(x)}{\omega(Bx)} \leq \frac{\omega(x)}{\omega(B_0)} < \frac{\omega(x_0)}{\omega(B_0)} < \varepsilon, \quad \text{при } 1 < x \leq x_0, B > B_0.$$

Следовательно, $\frac{\omega(t)}{t} < \varepsilon \frac{\omega(Bt)}{t}$, при всех $t \geq 1$. Проинтегрировав указанное неравенство по интервалу $(1, x)$, получим

$$\int_1^x \frac{\omega(t)}{t} dt \leq \varepsilon \int_1^x \frac{\omega(Bt)}{t} dt.$$

Теперь во втором интеграле произведя замену переменной $Bt = u$, приходим к неравенству

$$\int_1^x \frac{\omega(t)}{t} dt \leq \varepsilon \int_B^{Bx} \frac{\omega(u)}{u} du \leq \varepsilon \int_1^{Bx} \frac{\omega(u)}{u} du.$$

Остается здесь положить $\varepsilon = A^{-1}$, и лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $m(\zeta, z) = \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \bar{\zeta}z|}$, $|\zeta| = \rho$, $|z| = r \geq \frac{1}{2}$, и пусть $\rho \geq \frac{r+5}{6}$, тогда $m(\zeta, z) < \frac{1}{2}$.

Доказательство. Поскольку

$$m(\zeta, z) \leq \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho r} = \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho + \rho(1 - r)} \leq \frac{2}{1 + \frac{1}{2} \frac{1 - r}{1 - \rho}}, \quad (2.5)$$

то в условиях леммы имеем $1 - \rho \leq \frac{1 - r}{6}$, $\frac{1 - \rho}{1 - r} \leq \frac{1}{6}$.

Поэтому по неравенству (2.5) $m(\zeta, z) \leq \frac{1}{2}$ и лемма доказана.

Доказательство теоремы. Сначала докажем, что если $f \in X_1^\infty$, $f \neq 0$ и $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, то выполняется (2.4).

Ради удобства будем предполагать, что

$$\log |f(z)| \leq \exp \left\{ \varphi \left(\frac{1}{1 - |z|} \right) \right\}, \quad z \in U, \quad f(0) = 1.$$

Тогда из неравенства Иенсена непосредственно следует

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt \leq \exp \left\{ \varphi \left(\frac{1}{1 - r} \right) \right\}, \quad 0 < r < 1, \quad (2.6)$$

где $n(t)$ — число нулей функции f в круге $|z| < t$. Отсюда для $n(r)$ получаем следующую оценку:

$$n\left(\frac{3r-1}{2}\right) \frac{(1-r)}{2} < \int_{\frac{3r-1}{2}}^r \frac{n(t)}{t} dt \leq \exp \left\{ \varphi \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\}, \quad \frac{1}{2} < r < 1,$$

откуда вытекает, что

$$n(\rho) \leq \frac{\exp \left\{ \varphi \left(\frac{3}{2(1-\rho)} \right) \right\}}{1 - \rho}, \quad \frac{1}{4} < \rho < 1.$$

Пусть $C > 2$ — фиксированное число, тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp \left\{ -C\varphi \left(\frac{3}{2(1-|z_k|)} \right) \right\} = \int_0^1 \exp \left\{ -\varphi \left(\frac{3}{2(1-t)} \right) \right\} d\pi(t) = I.$$

Принтегрировав указанный интеграл по частям, получим

$$I = \exp \left\{ -C\varphi \left(\frac{3}{2(1-t)} \right) \right\} \pi(t) \Big|_0^1 + \\ + \frac{3}{2} C \int_0^1 \pi(t) \exp \left\{ -C\varphi \left(\frac{3}{2(1-t)} \right) \right\} \varphi' \left(\frac{3}{2(1-t)} \right) \frac{dt}{(1-t)^2}.$$

Следовательно, если учесть также (2.6), можем написать неравенство

$$I \leq \frac{3}{2} C \int_0^1 \exp \left\{ -(C-1)\varphi \left(\frac{3}{2(1-t)} \right) \right\} \frac{\varphi' \left(\frac{3}{2(1-t)} \right)}{(1-t)^2} dt.$$

Но поскольку $\omega(t)$ возрастает, то $\varphi(t) \geq \ln t$, $t \geq 1$, и поэтому

$$I \leq 3C \int_0^1 \exp \left\{ -(C-2)\varphi \left(\frac{3}{2(1-t)} \right) \right\} \frac{\varphi' \left(\frac{3}{2(1-t)} \right)}{(1-t)^2} dt = \\ = -\frac{2C}{(C-2)} \exp \left\{ -(C-2)\varphi \left(\frac{3}{2(1-t)} \right) \right\} \Big|_0^1 = \\ = \frac{2C}{C-2} \exp \left((2-C)\varphi \left(\frac{3}{2} \right) \right),$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp \left\{ -C\varphi \left(\frac{3}{2(1-|z_k|)} \right) \right\} < +\infty$$

для любого $C > 2$.

Поэтому на основании леммы 2 заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp \left\{ -\varphi \left(\frac{B}{1-|z_k|} \right) \right\}$$

для некоторого $B = B(C) > 0$.

Первая часть теоремы доказана. Докажем обратное утверждение.

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность из единичного круга $|z_k| < |z_{k+1}| < 1$, $k = 1, 2, \dots$, для которого ряд (2.4) сходится. Для простоты будем предполагать, что $C = 1$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp \left\{ -\varphi \left(\frac{1}{1-|z_k|} \right) \right\} < +\infty. \quad (2.7)$$

Построим функцию $f \in X_{\lambda}^{\infty}$ такую, что $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $f(z) \neq 0$, $z \neq z_k$. Подберем натуральные числа p_k , $k = 1, 2, \dots$ таким образом, чтобы

$$(1 - |z_k|)^{p_k} \leq \exp \left\{ -\varphi \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right) \right\}, \quad k=1, 2, \dots$$

В качестве p_k выберем, например

$$p_k = \left\lfloor \frac{\varphi \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right)}{\lg 2} \right\rfloor. \quad (2.8)$$

По аналогии с произведением (0.3), положим

$$A_{p_k}(z, \zeta) = \left(1 - \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right) \exp \left\{ \sum_{m=1}^{p_k} \frac{1}{m} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right)^m \right\}, \quad \zeta, z \in U.$$

Тогда легко видеть, что бесконечное произведение

$$\pi(z, z_k, p_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_{p_k}(z, z_k), \quad z \in U$$

равномерно сходится внутри U .

Докажем, что $\pi \in X_h^{\infty}$. Используя известную оценку (см. [5]) для фактора $A_{p_k}(z, \zeta)$, получим

$$\ln |A_{p_k}(z, \zeta)| \leq \left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right|^{p_k+1}$$

и, следовательно, для π имеем

$$\ln |\pi(z, z_k, p_k)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right|^{p_k+1}, \quad z \in U. \quad (2.9)$$

Оценим последнюю сумму. Пусть

$$m_k(z) = \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \bar{z}_k z|}, \quad z \in U.$$

Тогда

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right|^{p_k+1} = \sum_{m_k(z) < \frac{1}{2}} \left(\quad \right) + \sum_{m_k(z) > \frac{1}{2}} \left(\quad \right) \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2,$$

причем

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{m_k < \frac{1}{2}} \left| \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right|^{p_k+1} \leq \sum_{m_k < \frac{1}{2}} \exp(-(p_k+1) \ln 2) \leq \\ &\leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \exp \left\{ -\varphi \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right) \right\} < +\infty, \end{aligned} \quad (2.10)$$

в силу (2.7).

Теперь оценим вторую сумму

$$I_2 = \sum_{m_k > \frac{1}{2}} \left| \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right|^{p_k+1} = \sum_{m_k > \frac{1}{2}} \exp \left\{ (p_k+1) \ln \left| \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right| \right\}.$$

Заметим, что

$$\frac{1 - |z_k|^2}{|1 - z_k z|} \leq \frac{1 - |z_k|^2}{1 - |z_k|} = 1 + |z_k| \leq 2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2 \sum_{m_k > \frac{1}{2}} \exp \{p_k \ln 2\} \leq 2 \sum_{m_k > \frac{1}{2}} \exp \left\{ \varphi \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right) \right\} < \\ &\leq 2 \sup_{k: m_k(z) > \frac{1}{2}} \left\{ \exp \left(2 \varphi \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right) \right) \right\} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \exp \left\{ - \varphi \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right) \right\} \leq \\ &\leq \text{const} \exp \left\{ 2 \varphi \left(\frac{6}{1 - |z|} \right) \right\} \end{aligned}$$

(здесь мы учли лемму 3). Теперь, используя лемму 2, будем иметь

$$I_2 \leq \text{const} \exp \left\{ \varphi \left(\frac{B}{1 - |z|} \right) \right\}, \quad z \in B$$

при некотором $B > 0$ и теорема доказана.

Пусть $\pi(z, z_k, p_k)$ — произведение, построенное в теореме 2. Используя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2, легко установить

Следствие 1. Пусть λ удовлетворяет условиям теоремы 2 и $f \in X_\lambda^\infty$, $Z_f = \{z_k\}_1^\infty$, тогда f допускает представление

$$f(z) = \pi(z, z_k, p_k) \exp \{g(z)\}, \quad z \in U,$$

где функции $\pi(z, z_k, p_k)$, $\exp \{\pm g(z)\}$ принадлежат классу X_λ^∞ .

Как уже отмечалось выше, в работе [3] получена характеристика нулей функции из класса X_λ^∞ при условии (2.1). А именно, доказана следующая теорема.

Пусть

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^k} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \frac{\pi l}{2^k} \leq \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\},$$

$$k = 1, 2, \dots, l = -2^k, \dots, 2^k - 1.$$

Теорема А. Пусть $Z = \{z_k\}_1^\infty$ — последовательность точек из единичного круга, $n_{k,l}$ — число точек $\{z_k\}$ в прямоугольнике $\Delta_{k,l}$, тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $Z = Z_f$ для некоторого $f \in X_\lambda^\infty$, $f \neq 0$,
- 2) $n_{k,l} \leq \text{const } \lambda(2^k)$, $k = 1, 2, \dots$, $l = -2^k, \dots, 2^k - 1$. (2.11)

Исходя из этой теоремы установим следующий результат.

Пусть $\psi(x) > 0$ — монотонно убывающая функция на полуоси $(0, +\infty)$, причем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$, $\lambda(x)$ — мажоранта, для которой выполняются условия (2.1).

Теорема 3. Пусть ψ и λ удовлетворяют вышеуказанным условиям. Тогда следующие два утверждения равносильны:

$$1) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \psi \left(\frac{1}{1-|z_k|} \right) < +\infty$$

для произвольного $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} = Z_f$, $f \in X_1^{\infty}$;

$$2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \lambda(x) dx < +\infty.$$

Доказательство. Сначала докажем импликацию $1) \rightarrow 2)$. Пусть f — функция из X_1^{∞} , $Z_f = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $n_{k,l} = [\lambda(2^k)]$, $k = 1, 2, \dots$, $l = -2^k, \dots, 2^k - 1$. При этом будем предполагать, что $z_k \in \Delta_{k,l} \Rightarrow z_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, причем z_k является нулем кратности $[\lambda(2^k)]$.

Существование такой функции следует из теоремы А. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \psi \left(\frac{1}{1-|z_k|} \right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \left\{ \psi \left(\frac{1}{1-|z_m|} \right) \right\}_{z_m \in \Delta_{k,l}} = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} [\lambda(2^k)] \psi(2^k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k [\lambda(2^k)] \psi(2^k) \end{aligned}$$

и таким образом

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \lambda(2^k) \psi(2^k) < +\infty.$$

Следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \lambda(x) dx < +\infty. \quad (2.12)$$

Теперь докажем обратное утверждение. Пусть интеграл (2.12) сходится, тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \lambda(2^{k-1}) \psi(2^k) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \lambda(x) dx.$$

Теперь заметим, что в условиях теоремы

$$\lambda(2^k) \leq 2^{\beta} \lambda(2^{k-1}), \text{ где } \beta = \sup \left\{ \frac{x \lambda'(x)}{\lambda(x)} \right\}. \quad (2.13)$$

В самом деле, поскольку $\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} < \frac{\beta}{x}$, то интегрируя указанное неравенство по интервалу $(2^{k-1}, 2^k)$, получим

$$\ln \left(\frac{\lambda(2^k)}{\lambda(2^{k-1})} \right) \leq \beta \ln 2,$$

т. е. $\lambda(2^k) \leq 2^{\beta} \lambda(2^{k-1})$ и неравенство (2.13) доказано.

Отсюда вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \lambda(2^k) \psi(2^k) < +\infty. \quad (2.14)$$

Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы А. Тогда учитывая (2.14), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \psi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \left\{ \psi\left(\frac{1}{1-|z_m|}\right) \right\}_{z_m \in A_k, l} \leq \\ &\leq \text{const} \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \lambda(2^k) \psi(2^k) < +\infty \end{aligned}$$

и теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 2.II.1982

Յ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Շրջանում ածալիտիկ և միջև եզրը անդ ֆունկցիաների զերոների մասին (ամփոփում)

Դիցուք $\omega(r) > 0$ -ը մոնոտոն ֆունկցիա է $L^1(0,1)$ դասից, իսկ A_ω^* -ն շրջանում ածալիտիկ այն f ֆունկցիաների դասն է, որոնց համար

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \omega(r) \ln^+ |f(re^{i\varphi})| r dr d\varphi < +\infty:$$

Հողվածում ω -ի վրա որոշ սահմանափակումների դեպքում տրվում է A_ω^* դասի դեֆինիցիան և լրիվ խարակտերիստիկան:

F. A. SHAMOYAN. On of zeros functions analytical in the disc and growing near its circumference (summary)

Let $\omega(r) > 0$ be a monotonous function from $L^1(0,1)$, and let A_ω^* be the class of holomorphic in the unit disc functions for which

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \omega(r) \ln^+ |f(re^{i\varphi})| r dr d\varphi < +\infty.$$

Under some restrictions of ω the a complete characterization of the function belonging to A_ω^* is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм. ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Ин-та математики и механики АН Арм. ССР, вып. 2, 1948, 3—55.
3. Ф. А. Шамоян. Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного порядка, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 13, №№ 5—6, 1978, 405—422.
4. Heller Andrei. The zeros of functions in Nevanlinna's area class, Israel, J. Math., 34, № 1—2, 1979, 1—11.
5. L. Branges. Hilbert spaces of entire functions, Prentice—Hall, Engewood, Cliffs, N. Y., 1968.

УДК 519.2

С. Р. МАЛХАЗЯН

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖЕНИИ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В n -мерном пространстве дана динамическая система

$$\dot{x}(t) = b(x(t)), \quad x(0) = 0, \quad (1)$$

у которой векторное поле $b(x) = (b^1(x), \dots, b^n(x))$, $x \in R^n$ всюду ограничено, удовлетворяет условию Липшица:

$$|b(x_1) - b(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|, \quad \sup |b(x)| \leq L < \infty.$$

Мы будем предполагать, что для поля $b(x)$ выполняется условие 0): существуют константы $r > 0$, $\alpha > 0$ такие, что для всех x , имеющих длину r (под длиной элемента x подразумеваем $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$), $(b(x), x) \leq$

$\leq -\alpha r$. Рассмотрим случайный процесс $\tilde{x}^{\epsilon}(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{x}}^{\epsilon}(t) = b(\tilde{x}^{\epsilon}(t)) + \epsilon \tilde{\zeta}(\tilde{x}^{\epsilon}(t)), \quad \tilde{x}^{\epsilon}(0) = 0, \quad (2)$$

где $\tilde{\zeta}(x)$, $x \in R^n$ — гауссовское случайное поле, определенное на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ с нулевым средним и корреляционной матрицей $\bar{B}(x, y) = (M \tilde{\zeta}^i(x) \cdot \tilde{\zeta}^j(y))_{i,j=1}^n$, элементы у которой достаточно гладкие функции переменных x, y , причем вне некоторой ограниченной области D , содержащей начальную точку, матрица $\bar{B}(x, y)$ равна нулевой, $\epsilon > 0$ — малый параметр. Из этих условий вытекает, что с вероятностью единица существует решение системы (2) на любом конечном отрезке $[0, T]$. Случайный процесс $\tilde{x}^{\epsilon}(t)$ рассматриваем как результат малых случайных возмущений динамической системы (1). Нас интересует, какова асимптотика решения $\tilde{x}^{\epsilon}(t)$ системы (2) на конечном отрезке времени $[0, T]$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Приведем предварительно некоторые соображения, не заботясь пока о математической строгости. Пусть для $\tilde{x}^{\epsilon}(t)$ каким-либо способом можно получить разложение по степеням ϵ :

$$\tilde{x}^{\epsilon}(t) = \tilde{x}_0(t) + \epsilon \tilde{x}_1(t) + \dots + \epsilon^m \tilde{x}_m(t) + \dots$$

Подставим это выражение для $\bar{x}^1(t)$ в систему (2) и разложим в правой части $b(\bar{x}^1(t))$ и $\bar{\zeta}(\bar{x}^1(t))$ формально в ряды по степеням ε . Приравнявая коэффициенты при равных степенях ε , получим систему уравнений, которым должны удовлетворять $\bar{x}_0(t)$, $\bar{x}_1(t)$, $\dots$.

Выкладки здесь и в дальнейшем приводятся для одномерного процесса $\bar{x}^1(t)$ лишь для удобства записей и обозначений. Пусть функция $X(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^m x_m + \dots)$ от ε при фиксированных $x_0, x_1, \dots, x_m$ может быть разложена в ряд

$$X(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^m x_m + \dots) = X(x_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi[X(x); x_0, x_1, \dots, x_m] \varepsilon^m,$$

где

$$\Phi[X(x), x_0, x_1, \dots, x_m] = \sum_{l_1+l_2+\dots+l_r=m} x_{l_1} x_{l_2} \dots x_{l_r} \left\{ \frac{\partial^r X(y)}{\partial y^r} \right\}_{y=x_0}, \quad m \geq 1.$$

Для удобства записи положим $X(x_0) = \Phi[X(x); x_0]$.

Действуя в соответствии с вышеизложенным планом, разлагаем обе части (2) по степеням ε :

$$\begin{aligned} & \bar{x}_0(t) + \varepsilon \bar{x}_1(t) + \dots + \varepsilon^k \bar{x}_k(t) + \dots = b(x_0(t)) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k [\Phi[b(x); \bar{x}_0(t), \bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_k(t)] + \Phi[\bar{\zeta}(x); \bar{x}_0(t), \dots, \bar{x}_{k-1}(t)]]. \end{aligned}$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε слева и справа, получим дифференциальные уравнения

$$\dot{\bar{x}}_0(t) = b(\bar{x}_0(t)),$$

$$\dot{\bar{x}}_k(t) = \Phi[b(x); \bar{x}_0(t), \dots, \bar{x}_k(t)] + \Phi[\bar{\zeta}(x); \bar{x}_0(t), \dots, \bar{x}_{k-1}(t)], \quad (3)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

При заданных начальных условиях $\bar{x}_k(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots$, достаточно гладких функциях $b(x)$, $\bar{\zeta}(x)$ эти уравнения однозначно определяют функции $\bar{x}_0(t)$, $\bar{x}_1(t)$, $\dots$, $\bar{x}_k(t)$, $\dots$. Решая первое уравнение системы (3), которое совпадает с (1), определим нулевое приближение. Если $\bar{x}_0(t)$ известно то второе уравнение в (3) превращается в линейное уравнение относительно $\bar{x}_1(t)$. Вообще если функции $\bar{x}_0(t)$, $\dots$, $\bar{x}_{k-1}(t)$ найдены, то уравнение для $\bar{x}_k(t)$ является линейным неоднородным уравнением с коэффициентами, зависящими от t . Сперва сформулируем и докажем в виде леммы утверждение об асимптотике решения уравнения (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в частном случае, когда поле $\bar{\zeta}(x)$ не случайное, а детерминированное.

Лемма 1. Предположим, что функции $b(x)$, $\tilde{\zeta}(x)$ имеют ограниченные непрерывные производные до $m+1$ -го порядка включительно. Тогда для решения $\tilde{x}^*(t)$, $t \in [0, T]$ уравнения (2) имеет место разложение

$$\tilde{x}^*(t) = \tilde{x}_0(t) + \varepsilon \tilde{x}_1(t) + \dots + \varepsilon^m \tilde{x}_m(t) + \varepsilon^{m+1} \tilde{R}_{m+1}^*(t), \quad (4)$$

где функции $\tilde{x}_i(t)$, $i=1, \dots, m$ определяются из системы (3), а

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{R}_{m+1}^*(t)| < C < \infty. \quad (5)$$

Доказательство. По существу нам надо получить неравенство (5), если $\tilde{R}_{m+1}^*(t)$ определить равенством (4), где $\tilde{x}^*(t)$ — решение системы (2), а $\tilde{x}_k(t)$, $0 \leq k \leq m$ определяются из (3). Таким образом, функция

$$\varepsilon^{m+1} \tilde{R}_{m+1}^*(t) = \tilde{x}^*(t) - \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \tilde{x}_i(t)$$

удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \varepsilon^{m+1} \tilde{R}_{m+1}^*(t) = & b(\tilde{x}^*(t)) + \varepsilon \tilde{\zeta}(\tilde{x}^*(t)) - \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \Phi[b(x); \tilde{x}_0(t), \dots \\ & \dots, \tilde{x}_k(t)] - \varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k \Phi[\tilde{\zeta}(x); \tilde{x}_0(t), \dots, \tilde{x}_k(t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Правую часть (6) запишем в следующем виде:

$$\varepsilon^{m+1} \tilde{R}_{m+1}^*(t) = I_1^*(t) + I_2^*(t) + I_3^*(t) + I_4^*(t), \quad (7)$$

где

$$I_1^*(t) = b(\tilde{x}^*(t)) - b\left(\sum_{i=0}^m \varepsilon^i \tilde{x}_i(t)\right),$$

$$I_2^*(t) = \varepsilon \left[\tilde{\zeta}(\tilde{x}^*(t)) - \tilde{\zeta}\left(\sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon^i \tilde{x}_i(t)\right) \right],$$

$$I_3^*(t) = b\left(\sum_{i=0}^m \varepsilon^i \tilde{x}_i(t)\right) - \sum_{i=0}^m \Phi[b(x); \tilde{x}_0(t), \dots, \tilde{x}_i(t)] \varepsilon^i,$$

$$I_4^*(t) = \varepsilon \left[\tilde{\zeta}\left(\tilde{x}_0(t) + \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon^i \tilde{x}_i(t)\right) - \sum_{i=0}^{m-1} \Phi[\tilde{\zeta}(x); \tilde{x}_0(t), \dots, \tilde{x}_i(t)] \varepsilon^i \right].$$

Оценим каждую из величин $I_j^*(t)$, $j=1, \dots, 4$.

$$\begin{aligned} *) \left| b(\tilde{x}^*(t)) - b\left(\sum_{i=0}^m \varepsilon^i \tilde{x}_i(t)\right) \right| & \leq K \left| \tilde{x}^*(t) - \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \tilde{x}_i(t) \right| = \\ & = K \varepsilon^{m+1} |\tilde{R}_{m+1}^*(t)|, \end{aligned}$$

где K — некоторая константа, ограничивающая $\max_x |b'(x)|$, $b'(x)$ — производная функции $b(x)$.

$$\begin{aligned} & **) |I_2^*(t)| \leq \varepsilon^{m+1} \left| \zeta' \left(\bar{x}^*(t) + \theta \left(\bar{x}^*(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k \bar{x}_k(t) \right) \right) \right| \times \\ & \times |\varepsilon \bar{R}_{m+1}^*(t) + \bar{x}_m(t)| \leq \varepsilon^{m+1} \max_x |\zeta'(x)| [\varepsilon_0 |\bar{R}_{m+1}^*(t)| + |\bar{x}_m(t)|], \end{aligned}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — константа, ограничивающая параметр ε . И в силу ограниченности функции $\zeta'(x)$ получим, что

$$|I_2^*(t)| \leq N_1 |\bar{R}_{m+1}^*(t)| + N |\bar{x}_m(t)| \varepsilon^{m+1}, \quad 0 < N < \infty, \quad N_1 = N \varepsilon_0.$$

Оценку для $|\bar{x}_m(t)|$ получаем из следующей леммы.

Лемма 2. Существуют константы $C_i < \infty$ такие, что

$$|\bar{x}_i(t)| \leq C_i \text{ при всех } t \in [0, T].$$

Доказательство проводится по индукции с использованием системы (3), а также неравенства Гронуола-Беллмана.

На основании леммы 2 имеем, что

$$|I_2^*(t)| \leq N_1 |\bar{R}_{m+1}^*(t)| + \varepsilon^{m+1} C, \quad \max_{0 \leq t \leq m} C_i \leq C < \infty.$$

$$***) \text{ В разложении Тейлора для } b \left(\sum_{l=0}^m \varepsilon^l \bar{x}_l(t) \right) \text{ вблизи точки } \bar{x}_0(t)$$

коэффициенты при ε^i равны $\Phi[b(x); \bar{x}_0(t), \dots, \bar{x}_i(t)]$ вплоть до $i \leq m$

$$\begin{aligned} & b(\bar{x}_0(t) + \varepsilon \bar{x}_1(t) + \dots + \varepsilon^m \bar{x}_m(t)) - \sum_{k=0}^{m-1} \Phi[b(x); \bar{x}_0(t), \dots, \bar{x}_k(t)] \varepsilon^k = \\ & = \varepsilon^m \Phi[b(x); \bar{x}_0(t) + \theta \bar{x}_1(t) + \dots + \theta^m \bar{x}_m(t), \bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t)], \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta \leq \varepsilon$ для любых $\bar{x}_0(t), \dots, \bar{x}_m(t)$.

Но

$$|\Phi[b(x); \bar{x}_0(t), \bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t)]| \leq K'' \max_{1 \leq j \leq m} \{|\bar{x}_j(t)|^{m+1}\}.$$

Из последнего неравенства, используя лемму 2, получим, что

$$|I_3^*(t)| \leq \varepsilon^{m+1} K_3.$$

****) Проводя те же рассуждения, как в ***) , получим, что существует такая константа $K_4 > 0$, что

$$|I_4^*(t)| \leq K_4 \varepsilon^{m+1}.$$

Если проинтегрировать (7) от 0 до t и учесть, что $\bar{R}_{m+1}^*(0) = 0$, а также оценки для $I_j^*(t)$, $j=1, \dots, 4$, то получим

$$\varepsilon^{m+1} |\tilde{R}_{m+1}^*(t)| \leq L_0 \int_0^t |\tilde{R}_{m+1}^*(s)| ds + K_0 \varepsilon^{m+1},$$

где $0 < L_0 < \infty$, $0 < K_0 < \infty$. Отсюда следует, что

$$\varepsilon^{m+1} |\tilde{R}_{m+1}^*(t)| \leq \varepsilon^{m+1} K_0 e^{L_0 t}.$$

Таким образом

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{R}_{m+1}^*(t)| \leq K_0 e^{L_0 T}.$$

Лемма доказана.

Из доказательства видно, что в условиях леммы 1 достаточно предположить, что функция $\tilde{\zeta}(x)$ непрерывна и ограничена вместе с производными лишь до m -го порядка включительно.

Легко проверить, что все формулы и доказательства сохраняются и в n -мерном случае, $n > 1$. Лишь формула для $\Phi[X(y); x_0, \dots, x_m]$ заменится на следующую:

$$\Phi[X(y); x_0, x_1, \dots, x_m] = \sum \frac{x_{i_1}^{r_1} \dots x_{i_r}^{r_r}}{r!} \left\{ \frac{\partial X(y)}{\partial y^{i_1} \partial y^{i_2} \dots \partial y^{i_r}} \right\}_{y=x_0},$$

где

$$x_j \in R^n, j = 0, 1, \dots, m$$

и суммирование производится по $i_1 + i_2 + \dots + i_r = m$, $i_k \geq 1$, $k = 1, 2, \dots, r$; $1 \leq k \leq r \leq m$.

Пусть W_2^l — пространство функций в D , которое получается из пространства бесконечно дифференцируемых функций в D путем пополнения его по норме

$$\|f(x)\|_{W_2^l} = \left(\sum_{|p| \leq l} \int_D |u^{(p)}(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где

$$p = (p_1, \dots, p_n), p_l \geq 0, |p| = \sum_{i=1}^n p_i, u^{(p)}(x) = \frac{\partial^{|p|} u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}.$$

Пространство W_2^l является гильбертовым пространством. Если корреляционная функция $\bar{B}(x, y)$ гауссовского поля $\tilde{\zeta}(x)$, $x \in D \subset R^n$ имеет непрерывные производные до порядка $2l$ включительно, то реализации $\tilde{\zeta}(x)$, как известно [2], принадлежат W_2^l . Пусть m — мультииндекс $(m_1, \dots, m_n)$, m_i — неотрицательные целые числа. Если $|m| \leq l - \frac{n}{2}$, то для всех $x \in D$ выполняется неравенство вложения

$$\left| \frac{\partial^{|m|} u(x)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \right| \leq K(D) \|u\|_{W_2^l}. \quad ([4]).$$

Используя это замечание на основании леммы 1 получим, что верна

Теорема 1. *Предположим, что функция $b(x)$ имеет ограниченные непрерывные производные до $m+1$ -го порядка включительно, а корреляционная функция $\bar{B}(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $2l$ включительно, где $l > \left[\frac{n}{2} \right] + m$. Тогда*

для случайного процесса $\bar{x}^(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющего уравнению (2), при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место разложение*

$$\bar{x}^*(t) = \bar{x}_0(t) + \varepsilon \bar{x}_1(t) + \dots + \varepsilon^m \bar{x}_m(t) + \varepsilon^{m+1} \bar{R}_{m+1}^*(t), \quad (4')$$

где функции $\bar{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются из системы (3), а

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{R}_{m+1}^*(t)| \leq C(\omega), \quad P\{C(\omega) < \infty\} = 1. \quad (5')$$

Доказательство по существу ничем не отличается от приведенного доказательства леммы 1.

Рассмотрим гауссовское поле $\zeta(x)$, $x \in R^n$, с нулевым средним, у которого корреляционная матрица $B(x, y)$ хотя достаточно гладкая, но вообще неограниченная. Какова асимптотика решений $x^*(t)$ системы

$$x^*(t) = b(x^*(t)) + \varepsilon \zeta(x^*(t)), \quad x^*(0) = 0 \quad (2')$$

на конечном отрезке $[0, T]$, когда параметр $\varepsilon \rightarrow 0$? Нам понадобится лемма. Прежде чем ее сформулируем, введем обозначения.

Пусть τ^* — момент первого выхода траектории $x^*(s)$, рассматриваемой на отрезке $[0, T]$, из шара U_r радиуса r с центром в начальной точке. Рассмотрим случайную величину $x^*(t) = \max_{0 \leq s \leq t} |x^*(s)|$.

Лемма 3. *При $\varepsilon \rightarrow 0$ с вероятностью, стремящейся к единице, значения случайной величины $x^*(t)$ принадлежат шару U_r .*

Доказательство. Очевидно, при любом $t \geq 0$ имеет место включение

$$\begin{aligned} \{\omega : x^*(t) > r\} &\subseteq \\ &\subseteq \{\omega : b(x^*(\tau^*)), x^*(\tau^*) + \varepsilon(\zeta(x^*(\tau^*)), x^*(\tau^*)) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Но поскольку

$$(b(x^*(\tau^*)), x^*(\tau^*)) < -ar, \quad r = |x^*(\tau^*)|,$$

то

$$\begin{aligned} \{\omega : b(x^*(\tau^*)), x^*(\tau^*) + \varepsilon(\zeta(x^*(\tau^*)), x^*(\tau^*)) \geq 0\} &\subseteq \\ &\subseteq \{\omega : \varepsilon \max_{|x| < r} |\zeta(x)| \geq a\}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$P\{x^*(t) > r\} \leq P\{\max_{|x| < r} |\zeta(x)| \geq a/\varepsilon\}.$$

Правая часть последнего неравенства для любых заданных констант $r > 0$, $a > 0$ может быть сделана сколь угодно малой, если $\varepsilon < \varepsilon_0(a, r)$, что следует из свойства функции распределения непрерывной случайной величины $\max_{|x| < r} |\zeta(x)|$. Лемма доказана.

Выберем $\delta > 0$ столь малое, чтобы при всех x , удовлетворяющих требованию $\rho(x, S_r) \leq \delta$, для векторного поля $b(x)$ соблюдалось условие 0), где S_r — сфера в R^n радиуса r с центром в начальной точке. В силу непрерывности $b(x)$ такое δ найдется. В частности, условие 0) соблюдается внутри кольца $U_{r+\delta} \setminus U_r$. Пусть $\zeta^*(x) = \zeta(x) \chi(x)$, здесь $\chi(x)$ равняется единице для $x \in U_r$ и нулю для $x \notin U_{r+\delta}$, а на множестве $U_{r+\delta} \setminus U_r$ положим $\chi(x)$ равной некоторой неотрицательно определенной функции из класса бесконечно дифференцируемых функций. Очевидно, $\zeta^*(x)$, $x \in R^n$ является гауссовским случайным полем, его корреляционная функция $B^*(x, y) = B(x, y) \chi(x) \chi(y)$. Таким образом, случайное гауссовское поле $\zeta^*(x)$ с вероятностью единица совпадает на множестве U_r с гауссовским полем $\zeta(x)$, а вне множества $U_{r+\delta}$ оно равно нулю. Выборочные функции случайного процесса $x^*(t)$, который получается в результате возмущения динамической системы (1) гауссовским полем $\varepsilon \zeta^*(x)$, можно разложить по малому параметру ε на любом конечном интервале времени согласно теореме 1. Некоторое представление об асимптотике $x^*(t)$ — решения уравнения (2'), дает следующая

Теорема 2. *Предположим, что функция $b(x)$ имеет ограниченные непрерывные производные до $m+1$ -го порядка включительно, а корреляционная функция $B(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по переменным x, y до порядка $2l$ включительно, где $l > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + m$. С вероятностью, стремящейся к единице при $\varepsilon \rightarrow 0$, решение $x^*(t)$ уравнения (2'), рассматриваемое на конечном отрезке времени, можно разложить по малому параметру с точностью до величин порядка ε^{m+1}*

$$x^*(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^m x_m(t) + \varepsilon^{m+1} R_{m+1}^*(t),$$

где функции $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются из системы

$$x_0(t) = b(x_0(t)),$$

$$x_k(t) = \Phi[b(x); x_0(t), \dots, x_k(t)] + \Phi[\zeta(x); x_0(t), \dots, x_{k-1}(t)]$$

$$x_k(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |R_{m+1}^*(t)| < C(\omega)\right\} = 1, \text{ где } P\{C(\omega) < \infty\} = 1. \quad (8)$$

Доказательство. Для любого положительного числа σ в силу леммы 3 имеем, что

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |x^*(t) - x^*(t)| > \sigma\right\} = P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |x^*(t) - x^*(t)| > \sigma; \max_{0 \leq t \leq T} |x^*(t)| > 0\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\max_{0 \leq t \leq T} |x^*(t)| > r\right\} \rightarrow 0, \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (5') следует (8), и поскольку для $x^*(t)$ верна теорема 1, то теорема 2 доказана.

Таким образом, если функции $B(x, y)$, $b(x)$ достаточно гладкие, то при малых ε можно вычислить $x^*(t)$ с любой наперед заданной

точностью для подавляющего множества траекторий случайного процесса $x^*(t)$. Нулевое приближение $x_0(t)$ — это траектория системы (1). Начиная с первого, все приближения — случайные процессы. Отметим, что функция $x_1(t)$ находится из уравнения

$$\dot{x}_1(t) = B_1(x_0(t)) x_1(t) + \zeta(x_0(t)), \quad x_1(0) = 0,$$

где $B_1(x, y) = \left(\frac{\partial b^i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$ — квадратная матрица. Отсюда следует заключение, что $x_1(t)$ получается из гауссовского процесса $\zeta(x_0(t))$ с помощью линейного преобразования и следовательно, процесс $x_0(t)$ тоже является гауссовским. Запишем в одномерном случае решение уравнения для $x_1(t)$

$$x_1(t) = \int_0^t \zeta(x_0(s)) \left(e^{\int_s^t b'(x_0(u)) du} \right) ds.$$

Пользуясь разложением для $x^*(t)$ можно получить разложение по степеням параметра ε для гладких функционалов от $x^*(t)$.

Если $\varphi(t)$ — непрерывная функция на отрезке $[0, T]$ со значениями в R^n , то гауссовский случайный процесс $\zeta(\varphi(t))$, $t \in [0, T]$ имеет нулевое среднее и корреляционную матрицу $B_\varphi(s, t) \equiv B(\varphi(s), \varphi(t))$. Из предположений о корреляционной функции поля $\zeta(x)$ следует, что отображение

$$B_\varphi f(t) = \int_0^T B_\varphi(s, t) f(s) ds$$

определяет в гильбертовом пространстве $L_{[0, T]}^2$ функций на $[0, T]$ со значениями в R^n самосопряженный линейный оператор, который является неотрицательно определенным, вполне непрерывным оператором с конечным следом [3]. Обозначим $B_\varphi^{1/2}$ симметричный неотрицательный квадратный корень из оператора B_φ . Оператор $B_\varphi^{1/2}$ также является интегральным оператором с интегрируемым в квадрате ядром. Вместе с операторами $B_\varphi, B_\varphi^{1/2}$ рассмотрим операторы $B_\varphi^{-1}, B_\varphi^{-1/2}$. Чтобы сделать их однозначными, условимся выбирать в качестве $B_\varphi^{-1} f_1, B_\varphi^{-1/2} f_2$ такие функции ψ_1, ψ_2 соответственно, что $B_\varphi \psi_1 = f_1, B_\varphi^{1/2} \psi_2 = f_2$ и ψ_1, ψ_2 ортогональны нулевому подпространству оператора B_φ . На элементах пространства $L_{[0, T]}^2$ задаем функционал $S(\varphi) = \int_0^T |B_\varphi^{-1/2} (\dot{\varphi}(t) - b(\varphi(t)))|^2 dt$. Если $\dot{\varphi}(t) - b(\varphi(t))$ не принадлежит

множеству значений оператора $B_\varphi^{1/2}$, то считаем $S(\varphi) = \infty$. Ясно, что для любой дифференцируемой функции $\varphi(t)$ из пространства $C_{[0, T]}$ непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в R^n , если $\dot{\varphi}(t) - b(\varphi(t)) \in L_{[0, T]}^2$, функционал $S(\varphi)$ определен.

Чтобы изучить асимптотику вероятностей больших (порядка 1) уклонений при $\varepsilon \rightarrow 0$ для семейства случайных процессов $x^\varepsilon(t)$, следуя идеям Вентцеля и Фрейдлина [1], удобно определить сперва функционал действия [см. определение в той же книге] для этого семейства. Определенный выше функционал $S(\varphi)$, как мы покажем, является нормированным функционалом действия для семейства процессов $x^\varepsilon(t)$ с нормирующим множителем $(2\varepsilon^2)^{-1}$.

Предположим, что гауссовское поле $\zeta(x)$, $x \in R^n$ допускает интегральное представление: $\zeta(x) = \int_0^1 G(x, s) d\omega(s)$, где $\omega(s)$, $0 \leq s \leq 1$ —

некоторый n -мерный винеровский процесс, $G(x, s)$ — неслучайная матричная функция, гладкая по x . Далее предположим, что

$$G(x, 0) = G(x, 1) = 0, \int_{R^n} \int_0^1 \left| \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \right| dx ds < \infty,$$

$$\left(\left| \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \right| \right) = \left(\sum_{i, k=1}^n \left| \frac{\partial G_{ik}(x, s)}{\partial s} \right|^2 \right)^{1/2},$$

$G_{ik}(x, s)$ — элементы матрицы $G(x, s)$, существует константа $L_1 > 0$ такая, что

$$\left| \frac{\partial G(x_1, s)}{\partial s} - \frac{\partial G(x_2, s)}{\partial s} \right| \leq L_1 |x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in R^n$$

равномерно по $s \in [0, 1]$.

Интегрируя по частям стохастический интеграл $\int_0^1 G(x, s) d\omega(s)$,

получим для гауссовского поля $\zeta(x)$ представление в виде линейного преобразования от траекторий винеровского процесса:

$$\zeta(x) = - \int_0^1 \omega(s) \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} ds.$$

Обозначим это преобразование G . Из сделанных относительно функции $G(x, s)$ предположений следует, что преобразование G непрерывно отображает пространство $C_{[0, 1]}$ в пространство C_{R^n} непрерывных функций, определенных на R^n со значениями в R^n . Преобразование, ставящее в соответствие каждой функции $\varphi(s)$ из пространства $C_{[0, 1]}$

функцию $-\int_0^1 \varphi(s) \frac{\partial G(f(u), s)}{\partial s} ds$, где $f(u)$ — фиксированная функция

из $C_{[0, T]}$, мы обозначим G_f . G_f непрерывно отображает $C_{[0, 1]}$ в $C_{[0, T]}$. Пусть $\omega(s)$, $0 \leq s \leq 1$ — непрерывная модификация винеровского процесса со значениями в R^n .

Рассмотрим в $C_{[0, 1]}$ оператор $G_1: \psi(t) \rightarrow f$, где $f = f(t)$ — решение уравнения

$$f(t) = \int_0^t b(f(u)) du - \int_0^t \int_0^1 \psi(s) \frac{\partial G(f(u), s)}{\partial s} duds, \quad t \in [0, T], \quad f(0) = 0. \quad (9)$$

При условиях, которым удовлетворяют функции $b(x)$, $G(x, s)$, решение уравнения (9) существует и единственно для любой непрерывной функции $\psi(s)$, в частности, почти для всех траекторий $w(s)$ винеровского процесса. Оператор G_1 имеет обратный

$$G_1^{-1} f = G_f^{-1} (b(f(u)) - \dot{f}(u)).$$

Лемма 4. Оператор G_1 в $C_{[0,1]}$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\sup_{0 < t < T} |G_1 \psi_1 - G_1 \psi_2| \leq e^{L_1 T} \sup_{0 < s < 1} |\psi_1(s) - \psi_2(s)|, \quad \psi_1(s), \psi_2(s) \in C_{[0,1]}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} G_1 \psi_1 - G_1 \psi_2 &= \int_0^t (b(f_1(u)) - b(f_2(u))) du + \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \left[\psi_2(s) \frac{\partial G(f_2(u), s)}{\partial s} - \psi_1(s) \frac{\partial G(f_1(u), s)}{\partial s} \right] duds, \\ |f_1(t) - f_2(t)| &= |G_1 \psi_1 - G_1 \psi_2| \leq L \int_0^t |f_1(u) - f_2(u)| du + \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \left| \psi_2(s) \frac{\partial G(f_2(u), s)}{\partial s} - \psi_1(s) \frac{\partial G(f_1(u), s)}{\partial s} \right| duds. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} |f_1(t) - f_2(t)| &\leq L \int_0^t |f_1(u) - f_2(u)| du + \int_0^T \int_0^1 |\psi_2(s) - \psi_1(s)| \times \\ &\times \left| \frac{\partial G(f_2(u), s)}{\partial s} \right| duds + \max_{0 < s < 1} |\psi_1(s)| \int_0^t L_1 |f_1(u) - f_2(u)| du \leq \max_{0 < s < 1} |\psi_2'(s) - \\ &- \psi_1(s)| \int_0^t \int_0^1 \left| \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \right| dx ds + (L + L_1 \max_{0 < s < 1} |\psi_1(s)|) \cdot \int_0^t |f_1(u) - f_2(u)| du \end{aligned}$$

при всех $t \in [0, T]$.

На основании уже не раз применяемого неравенства Гронуола-Беллмана получим, что

$$|f_1(t) - f_2(t)| = |G_1\psi_1 - G_1\psi_2| \leq \int_{R^n} \int_0^1 \left| \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \right| dx ds \times \\ \times \exp \{ (L_0 + L_1 \max_{0 \leq s < 1} |\psi_1(s)|) T \} \cdot \max_{0 \leq s < 1} |\psi_2(s) - \psi_1(s)|.$$

Лемма доказана.

Из теоремы 3.1. гл. 3 [1] и леммы 4 вытекает утверждение, формулируемое ниже.

Теорема 3. Функционал $\frac{1}{2\varepsilon^2} S(\varphi)$ является функционалом действия для семейства случайных процессов $x^\varepsilon(t)$, удовлетворяющих уравнению (2'), в пространстве $C_{[0, T]}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Работа выполнялась под руководством А. Д. Вентцеля и М. И. Фрейдлина, которым автор приносит глубокую благодарность.

Армянский научно-исследовательский
институт энергетики

Поступила 24.VII.1981

Ս. Ռ. ՄԱԼԽԱԶՅԱՆ. Մի դիֆերենցիալ հավասարման լուծումն փոքր պարամետրի վերլուծման (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է $x^\varepsilon(t)$ պատահական պրոցեսի, որն առաջացել է դինամիկական համակարգի գառայան դաշտերի փոքր գրգռումների հետևանքով, վերցվածքային ֆունկցիաների. առիմպոտոտիկան, երբ $\varepsilon \rightarrow 0$, ինչպես նաև գտնված է այդ պրոցեսների ընտանիքի ազդման ֆունկցիոնալը:

S. R. MALKHAZIAN. On the decomposition by a small parameter of the solution of a differential equation (summary)

In this paper asymptotics of selective functions of a random field $x^\varepsilon(t)$ when $\varepsilon \rightarrow 0$ is discussed, the field being obtained as a result of perturbation of a dynamic system by small Gaussian fields. Besides, the functional of action for this class is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., «Наука», 1979.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов, М., «Наука», 1965.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Теория случайных процессов, т. 1, М., «Наука», 1971.
4. О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики, М., «Наука», 1973.

УДК 517.98

Р. А. АЛИХАНИЯ

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ С ДАННЫМИ ИЗ L_1 ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть Γ — конечная система попарно непересекающихся гладких замкнутых кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ на плоскости, делящая ее на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^- , содержащую бесконечно удаленную точку. Конечные области, ограниченные кривыми Γ_m обозначим через $D_m^+ : D^+ = \bigcup_{m=1}^n D_m^+$. Положительным направлением на Γ (Γ_m) будем считать то, которое оставляет область D^+ (D_m^+) слева. Не ограничивая общности будем считать, что начало координат лежит в области D^+ .

В области D^- рассмотрим правильно эллиптическое уравнение

$$a u_{xx} + a_1 u_{xy} + a_2 u_{yy} = 0, \quad (1)$$

где a_0, a_1, a_2 — заданные комплексные числа, а $u(z)$ — искомая комплекснозначная функция. Без ограничения общности предположим, что $\lambda_1 = i$ является корнем характеристического уравнения $a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 = 0$. Для второго корня $\text{Im } \lambda_2 < 0$.

В работе для уравнения (1) исследуется задача Дирихле с данными из L_1 в области D^- .

Внешняя задача Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в функциональных пространствах Соболева, в гёльдеровских классах функций и в L_p ($1 < p < \infty$) при различных предположениях относительно коэффициентов, решения и области, рассматривалась многими авторами [1—7].

Задача Дирихле с данными из L_1 для эллиптических уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами рассмотрена в работах [8—12]. В [10] получены теоремы существования и единственности решения обобщенной задачи Дирихле в ограниченной области для равномерно эллиптического уравнения. Дано представление решения (через функцию Грина) в виде главной части, которая выписывается в явном виде, и гладкого остатка, являющегося классическим решением соответствующей краевой задачи. В [11, 12] доказана однозначная разрешимость в L_1 задачи Дирихле для эллиптических систем второго порядка с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих условию Лопатинского, в области $|z| > 1$ и в полуплоскости $y > 0$.

В работах [13, 14] доказана фредгольмовость задачи Дирихле для слабо связанных эллиптических уравнений с постоянными вещественными коэффициентами в области $|z| < 1$.

Ниже будет доказано существование и единственность решения задачи Дирихле в L_1 для уравнения (1) в области D^- . Выписывая общее решение уравнения (1) через произвольные аналитические функции комплексного переменного [15] и используя интегральное представление для аналитической функции, полученное в [16], задача Дирихле для уравнения (1) редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма, разрешимость которого следует из единственности задачи.

1°. Пусть $f \in C_0(\Gamma)$. Найдем ограниченное в области D^- решение $u(z)$ уравнения (1), принадлежащее классу $C^2(D^-) \cap C_*(D^- + \Gamma)$ и удовлетворяющее краевому условию

$$u(t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (2)$$

Как известно, если решение $u(z)$ уравнения (1) ограничено на бесконечности, то [3]

$$|u_x| \leq \frac{\text{const}}{|z|^2}, \quad |u_y| \leq \frac{\text{const}}{|z|^2}.$$

При этих условиях в [3] показано, что однородная задача Дирихле для уравнения (1) имеет только нулевое решение, из чего следует единственность задачи (1), (2).

Решение $u(z)$ задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(z) = \varphi(z) + \psi(\bar{z} + \mu z) + \sum_{m=1}^n c_m \ln(z - a_m) + \sum_{m=1}^n c_m \ln[\overline{z - a_m} + \mu(z - a_m)] + c_0, \quad (3)$$

где $\varphi(z)$, $\psi(\bar{z} + \mu z) \in C_*(D^- + \Gamma)$ — исчезающие на бесконечности произвольные аналитические функции от своих аргументов при $z \in D^-$, $c_0, c_1, \dots, c_n$ — произвольные постоянные, удовлетворяющие условию

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0, \quad (4)$$

a_m — фиксированные точки из области D_m^+ , а $\mu = \frac{i + \lambda_2}{i - \lambda_2}$, $|\mu| < 1$.

Легко установить, что если в (3) $u(z) \equiv 0$, то $\varphi(z) \equiv 0$, $\psi(z) \equiv 0$, $c_m = 0$ ($m = 0, 1, \dots, n$).

Функция $\psi(\bar{z} + \mu z)$, входящая в (3), допускает следующее интегральное представление ([16]):

$$\psi(\beta(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\gamma(t) \Psi(t) d\beta(t)}{\beta(t) - \beta(z)}, \quad z \in D^-, \quad (5)$$

где $\beta(z) = \bar{z} + \mu z$ — обратный сдвиг, $\gamma(t) = \prod_{m=1}^n (t - a_m)$, $a_m \in D_m^+$, $\Psi(z) \in C_*(D^+ + \Gamma)$ — аналитическая функция в D^+ , причем плотность $\Psi(t)$ однозначно определяется функцией $\psi(\beta(z))$.

Подставляя выражение (5) для $\psi(\beta(z))$ в (3) и переходя к пределу при $z \rightarrow t_0 \in \Gamma (z \in D^-)$, в силу (2) и формул Сохоцкого—Племеля [17], получим уравнение

$$f(t_0) = \varphi(t_0) + \frac{1}{2} \gamma(t_0) \Psi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\gamma(t) \Psi(t) d\beta(t)}{\beta(t) - \beta(t_0)} + \\ + \sum_{m=1}^n c_m \ln(t_0 - a_m) [\overline{t_0 - a_m} + \mu(t_0 - a_m)] + c_0. \quad (6)$$

Поскольку $\gamma(t) \Psi(t)$ есть граничное значение функции, аналитической в D^+ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\gamma(t) \Psi(t) dt}{t - t_0} = \frac{1}{2} \gamma(t_0) \Psi(t_0), \quad t_0 \in \Gamma. \quad (7)$$

Пользуясь соотношением (7), уравнение (6) преобразуем к виду

$$\varphi(t_0) + \gamma(t_0) \Psi(t_0) = g(t_0), \quad (8)$$

где

$$g(t_0) = f(t_0) - \int_{\Gamma} k(t_0, t) \gamma(t) \Psi(t) dt - \\ - \sum_{m=1}^n c_m \ln(t_0 - a_m) [\overline{t_0 - a_m} + \mu(t_0 - a_m)] + c_0, \\ k(t_0, t) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{\beta'(t)}{\beta(t) - \beta(t_0)} - \frac{1}{t - t_0} \right]. \quad (9)$$

Так как $\beta'(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, то $k(t_0, t)$ имеет вид

$$k(t_0, t) = \frac{k_1(t_0, t)}{(t - t_0)^{1-\mu}}, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (10)$$

где $k_1(t_0, t)$ на Γ по переменным t и t_0 удовлетворяет условию Гёльдера.

Перепишем уравнение (8) в виде

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = g(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \quad (11)$$

где $\Phi(z)$ — исчезающая на бесконечности кусочно-аналитическая функция с линией скачков Γ , определяемая соотношениями

$$\Phi(z) = \gamma(z) \Psi(z) \text{ при } z \in D^+, \quad \Phi(z) = -\varphi(z) \text{ при } z \in D^-.$$

Граничная задача (11) есть известная задача сопряжения, единственное решение которой дается формулой [17]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t_0) dt_0}{t_0 - z}. \quad (12)$$

Подставляя в (12) $z = a_m \in D_m^+$ и учитывая, что $\Phi(a_m) = 0$, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t_0) dt_0}{t_0 - a_m} = 0 \quad (m=1, \dots, n). \quad (13)$$

Введем банахово пространство B вектор-функций $\tilde{\Phi} = (\Phi(z), c_0, \dots, c_n)$ с нормой

$$\|\tilde{\Phi}\| = \max \left(\max_{t \in \Gamma} |\Phi(t)|, \max_{0 \leq m \leq n} |c_m| \right),$$

где $\Phi(z)$ — кусочно-аналитическая функция с линией скачков Γ , а $c_0, c_1, \dots, c_n$ — постоянные. Тогда систему уравнений (4), (12), (13) относительно $\Phi(z), c_0, \dots, c_n$ в пространстве B можно записать в виде уравнения

$$\tilde{\Phi} = K(\tilde{\Phi}) + \tilde{f}, \quad (14)$$

в котором K — вполне непрерывный оператор в B , явное выражение которого нетрудно выписать, а $\tilde{f}$ — $(n+1)$ -мерный вектор из пространства B , зависящий от граничного условия.

Уравнение (14) является уравнением Фредгольма, разрешимость которого следует из единственности задачи (1), (2). Решая уравнение (14) и найденные выражения для $\Phi(z)$ и $\psi(\beta(z))$ подставляя в (3), получим, что решение $u(z)$ задачи (1), (2) имеет вид

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F^+(t) d\beta(t)}{\beta(t) - \beta(z)} + \int_{\Gamma} k_0(t, z) f(t) dt, \quad (15)$$

где $F^+(t)$ — граничное значение интеграла типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t_0) dt_0}{t_0 - z} \quad (16)$$

при $z \rightarrow t \in \Gamma$ ($z \in D^+$), а $k_0(t, z)$ — ограниченная функция.

Таким образом, доказано существование и единственность решения задачи Дирихле для уравнения (1) в бесконечной многосвязной области в случае, когда граничная функция принадлежит $C_2(\Gamma)$ и указан метод построения решения.

2°. Пусть теперь граничная функция $f(t)$ в условии (2) принадлежит $L_1(\Gamma)$. Для простоты рассмотрим случай, когда Γ — гладкая замкнутая кривая, разбивающая плоскость на связанные компоненты: D^+ , содержащую начало координат и D^- , содержащую бесконечно удаленную точку. Пусть функция $z = \omega(t)$ взаимнооднозначно отображает кольцо $1 \leq |t| \leq 1 + \varepsilon$ на некоторую замкнутую двусвязную область, принадлежащую $D^- + \Gamma$, причем окружность $|t|=1$ отображается на Γ с сохранением ориентации. Предполагается, что якобиан отображения отличен от нуля.

При $f \in L_1(\Gamma)$ граничное условие (2) понимается в следующем смысле: для любой отображающей функции $\omega(t)$, удовлетворяющей вышеуказанным свойствам, имеет место равенство

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r > 1}} \int_{|t|=1} |u(\omega(rt)) - f(\omega(t))| ds = 0. \quad (17)$$

Условие (17) можно записать также в виде

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r > 1}} \int |u(\omega(r\omega_{-1}(z))) - f(z)| ds = 0, \quad (18)$$

где $\omega_{-1}(z)$ — функция, обратная к $\omega(t)$.

Известно [18], что если $f \in C_\alpha(\Gamma)$, то регулярное в области D и непрерывное в $D + \Gamma$ решение уравнения

$$\Delta u + au_x + bu_y + cu = 0$$

принадлежит классу $C_\alpha(D + \Gamma)$. Методами, изложенными в [18], можно доказать, что эта теорема справедлива и в случае задачи (1), (2) при $f \in C_\alpha(\Gamma)$, то есть если $f \equiv 0$ и граничное условие понимается в смысле (17), то решение принадлежит классу $C_\alpha(D^- + \Gamma)$. Тогда $u(z)$ будет принимать граничное значение в классическом смысле и следовательно, на основании изложенного в пункте 1, $u(z) \equiv 0$. Таким образом, и в этом случае единственно решение задачи (1), (2).

Покажем теперь существование решения задачи (1), (2) при $f \in L_1(\Gamma)$. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. Пусть $f \in C_\alpha(\Gamma)$, $\beta(t)$ — изменяющий ориентацию гомеоморфизм Γ на l , $\beta(t) \in C_\alpha^1(\Gamma)$, $\beta'(t) \neq 0$ на Γ . Положим

$$J(f, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F^+(t) - f(t)}{\beta(t) - \zeta} d\beta(t), \quad (19)$$

где $F^+(t)$ определяется из (16).

Имеет место оценка

$$|J(f, \zeta)| \leq C \int_{\Gamma} |f(t)| ds, \quad \zeta \in G^-,$$

где G^- — бесконечная область с границей l , а C — постоянная, не зависящая от f и ζ .

Доказательство. Согласно формуле Сохоцкого-Племеля

$$F^+(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t_0) dt_0}{t_0 - t}, \quad t \in \Gamma, \quad (20)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Пусть $\alpha(\tau)$ — функция, обратная к $\beta(t)$. Заменяя в (20) t_0 на $\alpha(\tau_0)$ и t на $\alpha(\tau)$, $\tau, \tau_0 \in l$, получим

$$\begin{aligned} F^+(\alpha(\tau)) &= \frac{1}{2} f(\alpha(\tau)) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\alpha(\tau_0)) \alpha'(\tau_0) d\tau_0}{\alpha(\tau_0) - \alpha(\tau)} = \\ &= -\Phi^-(\tau) - \int_{\Gamma} k(\tau_0, \tau) f(\alpha(\tau_0)) d\tau_0, \end{aligned} \quad (21)$$

где интегрирование по l (как и по Γ) ведется в положительном направлении, $k(\tau_0, \tau)$ определяется формулой (9), а

$$\Phi^-(\tau) = -\frac{1}{2} f(\alpha(\tau)) + \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\alpha(\tau_0)) d\tau_0}{\tau_0 - \tau} = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \tau \\ \zeta \in G^-}} \int_l \frac{f(\alpha(\tau_0)) d\tau_0}{\tau_0 - \zeta}.$$

По формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\Phi^-(\tau) d\tau}{\tau - \zeta} = -\Phi(\zeta) \equiv -\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\alpha(\tau_0)) d\tau_0}{\tau_0 - \zeta}, \quad \zeta \in G^-. \quad (22)$$

Делая в (19) замену $\tau = \beta(t)$, получим

$$J(f, \zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{F^+(\alpha(\tau)) d\tau}{\tau - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\alpha(\tau)) d\tau}{\tau - \zeta}. \quad (23)$$

Подставляя выражение для $F^+(\alpha(\tau))$ из (21) в (23) и имея в виду (22), будем иметь

$$\begin{aligned} J(f, \zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_l \left\{ \int_l \frac{k(\tau_0, \tau) f(\alpha(\tau_0))}{\tau - \zeta} d\tau_0 \right\} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_l f(\alpha(\tau_0)) \left\{ \int_l \frac{k(\tau_0, \tau)}{\tau - \zeta} d\tau \right\} d\tau_0 = \int_l k_0(\tau_0, \zeta) f(\alpha(\tau_0)) d\tau_0. \end{aligned}$$

Согласно неравенству (10) ядро $k_0(\tau_0, \zeta)$ ограничено для произвольного $\zeta \in (G^- + l)$ и $\tau_0 \in l$. Следовательно

$$|J(f, \zeta)| \leq \max |k_0(\tau_0, \zeta)| \int_l |f(\alpha(\tau_0))| ds = C \int_\Gamma |f(t)| ds.$$

Лемма 2. Пусть $f \in C_*(\Gamma)$, $\beta(z) \in C_*(D^+ + \Gamma)$ взаимнооднозначно отображает D^- на некоторую область и якобиан отображения отличен от нуля. Положим

$$\begin{aligned} K(t, z) &= \frac{\beta'(t)}{\beta(t) - \beta(z)} - \frac{1}{t - z}, \quad \beta'(t) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\beta(\tau) - \beta(t)}{\tau - t}, \\ T(f, z) &= \int_\Gamma K(t, z) f(t) dt, \quad z \in D^-. \end{aligned} \quad (24)$$

Справедлива следующая оценка

$$\int_{|\zeta|=1} |T(f, \omega(r\zeta))| ds \leq C \int_{|\zeta|=1} |f(\omega(\zeta))| ds, \quad 1 < r \leq 1 + \varepsilon,$$

где $\omega(t)$ — отображающая функция, определенная в начале пункта 2°, а C не зависит от f и r .

Доказательство. Сделав замену в (24) $t = \omega(\tau)$, $z = \omega(r\zeta)$, получим

$$T(f, \omega(r\zeta)) = \int_{|\tau|=1} \left(\frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau) - \gamma(r\zeta)} - \frac{1}{\tau - r\zeta} \right) f(\omega(\tau)) d\tau =$$

$$- \int_{|\tau|=1} \left(\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau) - \omega(r\zeta)} - \frac{1}{\tau - r\zeta} \right) f(\omega(\tau)) d\tau, \quad (25)$$

где $\gamma(\tau) = \beta(\omega(\tau))$, $\gamma(t) \in C^1_*(\Gamma)$, $\gamma'(\tau) \neq 0$

Оценим ядро полученных интегралов

$$\begin{aligned} \omega'(\tau)(\tau - r\zeta) - \omega(\tau) + \omega(r\zeta) &= \omega'(\tau)(\zeta - r\zeta) + \omega(r\zeta) - \\ &- \omega(\zeta) + \int_{\zeta}^{\tau} [\omega'(\sigma) - \omega'(\tau)] d\sigma. \end{aligned}$$

Так как $\omega(\tau) \in C^1_*$, то $|\omega(r\zeta) - \omega(\zeta)| \leq A_1 |r - 1|$,

$$|\omega'(\sigma) - \omega'(\tau)| \leq A_2 |\sigma - \tau|^\mu, \quad 0 < \mu \leq 1.$$

По теореме об оценке модуля криволинейного интеграла имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\zeta}^{\tau} [\omega'(\sigma) - \omega'(\tau)] d\sigma \right| &\leq A_3 |\zeta - \tau|^{\mu+1} = \\ &= A_3 |\tau - r\zeta + r\zeta - \zeta|^{\mu+1} \leq A_3 (|\tau - r\zeta| + |r\zeta - \zeta|)^{\mu+1} \leq \\ &\leq A_4 (|\tau - r\zeta|^{\mu+1} + |r - 1|^{\mu+1}). \end{aligned}$$

Следовательно

$$|\omega'(\tau)(\tau - r\zeta) - \omega(\tau) + \omega(r\zeta)| \leq c_1 |r - 1| + c_2 |r - r\zeta|^{\mu+1}.$$

Таким образом

$$\left| \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau) - \omega(r\zeta)} - \frac{1}{\tau - r\zeta} \right| \leq \frac{c_1 |r - 1|}{|\tau - r\zeta|^2} + \frac{c_2}{|\tau - r\zeta|^{1-\mu}}. \quad (26)$$

Аналогичной оценке удовлетворяет и другое ядро. Проинтегрировав обе части равенства (25) по окружности $|\zeta|=1$ и учитывая неравенство (26), получим

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta|=1} |T(f, \omega(r\zeta))| ds &\leq \int_{|\tau|=1} |f(\omega(\tau))| \times \\ &\times \left\{ \int_{|\zeta|=1} \left[\frac{c'_1 |r - 1|}{|\tau - r\zeta|^2} + \frac{c'_2}{|\tau - r\zeta|^{1-\mu}} \right] ds_\zeta \right\} ds_\tau. \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках является ограниченной величиной. Действительно, первый из интегралов есть интеграл Пуассона, а второй ограничен, так как подынтегральное выражение имеет особенность меньше единицы. Лемма доказана.

Преобразуем формулу (15) к виду

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\beta'(t)}{\beta(t) - \beta(z)} - \frac{1}{t - z} \right) f(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F^+(t) - f(t)}{\beta(t) - \beta(z)} d\beta(t) + \int_{\Gamma} \lambda_0(t, z) f(t) dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя значение $F^+(t)$ из (20) в (15) и меняя порядок интегрирования во втором слагаемом, $u(z)$ можно представить также в виде

$$u(z) = \int_{\Gamma} K(t, z) f(t) dt, \quad z \in D^-, \quad (28)$$

где $k(t, z)$ бесконечно дифференцируема по x и y ($z = x + iy$), непрерывна по t и удовлетворяет оценке

$$|K(t, z)| \leq \frac{C}{|z - z'|}.$$

Используя леммы 1 и 2 и выражение (27) для решения $u(z)$ задачи (1), (2) при $f \in C_\alpha(\Gamma)$ получим, что

$$\int_{|\zeta|=1} |u(\omega(r\zeta))| ds \leq C \int_{|\zeta|=1} |f(\omega(\zeta))| ds, \quad 1 < r \leq 1 + \varepsilon. \quad (29)$$

Пусть $f \in L_1(\Gamma)$. Покажем, что функция $u(z)$, определяемая формулой (28), является решением задачи (1), (2). Ясно, что $u(z)$ можно записать в виде (3), поэтому она удовлетворяет уравнению (1). Так как C_α всюду плотно в L_1 , то неравенство (29) имеет место и для $f \in L_1(\Gamma)$, т. е. оператор (28) удовлетворяет оценке (29) при $f \in L_1(\Gamma)$. Выберем некоторую последовательность функций $\{f_n\}$ из $C_\alpha(\Gamma)$, сходящихся к f в смысле L_1 . Поскольку $f_n \in C_\alpha(\Gamma)$, то для нее задача (1), (2) имеет единственное решение, которое обозначим через $u_n(z)$. Функция $u_n(z)$ будет выражаться формулой (28) при $f = f_n$. Убедимся, что $u(z)$, заданная формулой (28), удовлетворяет граничному условию (17)

$$\begin{aligned} u(\omega(r\zeta)) - f(\omega(\zeta)) &= u(\omega(r\zeta)) - u_n(\omega(r\zeta)) + u_n(\omega(r\zeta)) - \\ &\quad - f_n(\omega(\zeta)) + f_n(\omega(\zeta)) - f(\omega(\zeta)). \end{aligned} \quad (30)$$

Из (29) следует, что

$$\int_{|\zeta|=1} |u(\omega(r\zeta)) - u_n(\omega(r\zeta))| ds \leq C \int_{|\zeta|=1} |f(\omega(\zeta)) - f_n(\omega(\zeta))| ds. \quad (31)$$

Так как функция $u_n(z)$ является решением задачи (1), (2) при $f_n \in C_\alpha(\Gamma)$, то, как было показано, она будет удовлетворять граничному условию (17), т. е.

$$\int_{|\zeta|=1} |u_n(\omega(r\zeta)) - f_n(\omega(\zeta))| ds \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 1. \quad (32)$$

Имея в виду (31) и (32) из равенства (30) получим, что

$$\int_{|\zeta|=1} |u(\omega(r\zeta)) - f(\omega(\zeta))| ds \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Следовательно, формула (28) выражает решение задачи (1), (2) при $f \in L_1(\Gamma)$.

Все сказанное в пункте 2° остается справедливым, если сохранить все предположения из пункта 1° относительно контура Γ .

Таким образом, задача Дирихле для уравнения (1) в бесконечной многосвязной области, когда граничные условия принадлежат классу L_1 , имеет, и при том единственное решение.

Аналогично доказывается существование и единственность решения рассмотренных задач в конечной $(n+1)$ -связной области.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Н. Е. Товмасьян за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 6.II.1981

Ռ. Ա. ԱԼԻԽԱՆԻԱՆ. Դիրիխլի արտաքին խնդիրը L_1 -ում երկրորդ կարգի էլիպտիկան տիպի հավասարման համար (ամփոփում)

Հոդվածում հաստատուն կոմպլեքս գործակիցներով երկրորդ կարգի կանոնավոր էլիպտիկան տիպի հավասարման համար ապացուցված է Դիրիխլի արտաքին խնդրի լուծման գոյության ու միակությունը հարթ բազմակապ տիրույթում, երբ եզրային արժեքները պատկանում են L_1 -ին, իսկ եզրային պայմանը հասկացվում է L_1 -ի իմաստով:

R. A. AL'KHANIAN. *The exterior Dirichlet problem with L_1 data for second elliptic equations (summary)*

In this paper the exterior Dirichlet problem with L_1 data for the second order elliptic equation with complex coefficients is investigated. An existence and uniqueness theorem in planar multiplyconnected domain is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Азмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений в частных производных вблизи границы при общих граничных условиях, ИИЛ, М., 1962.
2. С. Мизохата. Теория уравнений с частными производными, «Мир», М., 1977.
3. Н. Е. Товмасьян. Об одном методе решения краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сб., 89, № 4, 1972.
4. Н. И. Кочетов. Об одном методе решения внешних краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка, Журн. выч. мат. и мат. физ., 15, № 3, 1975.
5. Т. В. Бурчуладзе. Некоторые линейные эллиптические краевые задачи в пространстве L_p , Тр. Груз. политехн. ин-та, 176, № 3, 1975.
6. Т. С. Соболева. Краевые задачи для эллиптического уравнения второго порядка в неограниченных областях, Сиб. мат. ж., 19, № 5, 1978.
7. Campi Stefano. On the exterior Dirichlet problem for linear elliptic equation in the plane. Ann. mat. pura appl., 119, 1979.
8. Miranda Mario. Dirichlet problem with L_1 data for the non-homogeneous minimal surface equation, Indiana Univ. Math. J., 24, № 3, 1974.
9. Т. В. Лоссиевская. О поведении вблизи границы функции Грина задач Дирихле и Неймана для эллиптического уравнения второго порядка, Диф. уравн., 9, № 6, 1973.
10. Т. В. Лоссиевская. О разрешимости обобщенных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка, Диф. уравн., 9, № 7, 1973.

11. Э. П. Меликсетян. Задача Дирихле для эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка в некоторых классах в области $|z| > 1$, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 15, № 5, 1980.
12. Э. П. Меликсетян. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в классе суммируемых функций, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 14, № 6, 1979.
13. Е. В. Золотарева. Задача Дирихле для одного класса эллиптических систем, ДАН СССР, 132, № 4, 1960.
14. Е. В. Золотарева. Необходимое и достаточное условие фредгольмовости задачи Дирихле для некоторого класса эллиптических систем, ДАН СССР, 145, № 4, 1962.
15. А. В. Бицадзе. Красивые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, «Наука», М., 1966.
16. N. E. Tadmor. Integral representations of holomorphic functions by holomorphic densities and their applications, 798, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New-York, 1979.
17. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», М., 1968.
18. И. Н. Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, М., 1948.

УДК 517.983

Р. А. ШАХБАГЯН

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье обобщаются результаты работ [1], [2] на случай уравнений высокого порядка и общих краевых условий.

1°. Пусть $H=l_2$. Обозначим через H_1 гильбертово пространство последовательностей $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ с конечной нормой

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_l^2 \sigma_l^{-2} \right)^{1/2},$$

где $\{\sigma_l\}_{l=1}^{\infty}$ — заданная последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum \sigma_l^{-2} < +\infty$.

H_1^+ — полупространство: $H_1^+ = \{x \in H_1, x_1 > 0\}$.

В полупространстве H_1^+ рассматривается оператор с символом $P(x, A(x, \xi, \lambda))$ вида

$$P(x, A(x, \xi, \lambda)) = \sum_{k=0}^m a_k(x) [A(x, \xi, \lambda)]^k, \quad (1)$$

$$x \in H_1^+, \xi \in H,$$

где

$$A(x, \xi, \lambda) = (A_1(x) \xi, \xi) + \lambda,$$

$$(A_1(x) \xi, \xi) = \xi_1^2 + \sum_{l,k=2}^{\infty} a_{lk}(x) \xi_l \xi_k.$$

Матрица $[a_{lk}]$ предполагается симметрической, а функции $a_{lk} \in C^{(\infty)}(H_1^+)$, λ — комплексный параметр, принадлежащий $C_+ = \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Коэффициенты $a_k(x)$ оператора $\hat{P}$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми и ограниченными на H_1^+ . Коэффициент при старшем члене $a_m(x) \neq 0$, при $x \in H_1^+$.

Основное условие, налагаемое на оператор $\hat{P}$ — это условие его эллиптичности, а именно, требуется, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\gamma^{-1} \|x\|^2 \leq \xi_1^2 + \sum_{i,k=2}^m a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \leq \gamma \|x\|^2, \quad \forall x \in H_1^+, \xi \in H \quad (2)$$

с некоторой постоянной $\gamma > 0$, не зависящей от ξ (символом $\|x\|^2$ обозначена $\left(\sum_{k=1}^m \xi_k^2\right)^{1/2}$).

На гиперплоскости $x_1 > 0$ зададим операторы N_j с символами

$$N_j(B(x', \xi, \lambda)) = [B(x', \xi, \lambda)]^{n_j}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где

$$B(x', \xi, \lambda) = \xi_1 + \sum_{k=2}^m b_k(x') \xi_k + \lambda, \quad (4)$$

$$x' \in H_1' = \{x' = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots), \sum x_k^2 \sigma_k^{-2} < +\infty\},$$

$$b = (b_2(x'), \dots, b_n(x'), \dots) \in H \text{ для } \forall x' \in H_1'.$$

Коэффициенты $b_k(x')$ бесконечно дифференцируемы на H_1' , а порядки операторов N_j : $\text{ord } N_j \leq 2m$.

2°. В связи с изучением краевой задачи в полупространстве, а также свойств операторов, порожденных символами P и N_j , введем в рассмотрение классы символов и соответствующие функциональные пространства. Напомним кратко их определения (подробнее см. в [1], [4]).

Определение класса $\Sigma_{\lambda, \mu}^s$. Пусть $A_0(\xi, \lambda)$ — заданный фиксированный символ, удовлетворяющий условию эллиптичности (2).

Обозначим через $Q(x, \xi, \lambda)$ бесконечно дифференцируемую функцию, заданную на $H_1(x) \times \{H(\xi) \setminus 0\} \times C_+(\lambda)$.

Пусть, далее, $Q(x, \xi^N, \lambda) = Q(x, P^N \xi, \lambda)$ — ограничение $Q(x, \xi, \lambda)$ на $H_1(x) \times \{H^N \setminus 0\} \times C_+$.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} G(x, z^N, \lambda) &= F_{\xi^N \rightarrow z^N}^{-1} Q(x, \xi^N, \lambda) = \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int_{H^N} e^{i(z^N, \xi^N)} Q(x, \xi^N, \lambda) d\xi^N. \end{aligned}$$

Определим норму

$$\|f\|_{L_1(H_2^N)} = \int_{R^{N_1}} f(z^{N_1}) dz^{N_1},$$

где $L_1(H_2^N)$ — пространство, образованное вообще говоря обобщенными функциями следующего вида: $f(z^N) = f(z^{N_1}) \times \delta(z^{N_2})$, $z^{N_2} = (0, \dots, z_{N_1+1}, \dots, z_N)$, $z^N = z^{N_1} + z^{N_2}$, $N_1 + N_2 = N$, $f \in L_1(R^{N_1})$, $\delta(z^{N_2})$ — δ -функция.

Предположим, далее, что ядро $G_N(x, z^N, \lambda)$, отвечающее символу $Q(x, \xi^N, \lambda)$, принадлежит пространству $L_1(H_2^N)$.

Положим

$$1. \quad \|Q(x, \xi, \lambda)\|_0 = \sup_N \|G^N(x, z^N, \lambda)\|_{L_1(H_x^N)}$$

и

$$2. \quad \|Q(x, \xi, \lambda)\|_0^{(q)} = \sup_{\alpha, \beta} \|A_0^{-\alpha + |\beta|/2}(\xi, \lambda) D_x^\alpha \partial_\xi^\beta Q(x, \xi, \lambda)\|_0,$$

где $\sup$ берется по всевозможным α, β : $|\alpha| \leq \alpha_0, |\beta| \leq \beta_0, \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha > 0$.

Обозначим

$$\|Q(x, \xi, \lambda)\|_{s, R}^{(q)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \sup_{\substack{\|x\|_1 \leq R \\ \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha}} \|D_x^\alpha Q(x, \xi, \lambda)\|_0^{(q)}.$$

Символ $Q(x, \xi, \lambda)$ принадлежит, по определению, классу $\Sigma_{A, s}^{q, s}$, если $\forall \alpha_0, \beta_0, a$ выполняются следующие условия:

$$3. \quad \|Q(x, \xi, \lambda)\|_{s, \infty}^{(q)} < +\infty, \|Q(x^N, \xi, \lambda)\|_{s, \infty}^{(q)} < +\infty, \forall N,$$

$$4. \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|Q(x, \xi, \lambda) - Q(x^N, \xi, \lambda)\|_{s, R}^{(q)} = 0, \forall R, 0 < R < +\infty.$$

Топология вводится следующим образом: последовательность $\{Q_k(x, \xi, \lambda)\}_{k=1}^\infty, Q_k \in \Sigma_{A, s}^{q, s}$ сходится к нулю, если

$$\sup_k \|Q_k(x, \xi, \lambda)\|_{s, \infty}^{(q)} < +\infty,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_k(x, \xi, \lambda)\|_{s, R}^{(q)} = 0, \forall R, 0 < R < +\infty.$$

Определение класса $\Sigma_{A, s}^{q, s}(\xi', \lambda)$. Символ $S(x, \xi') \in \Sigma_{A, s}^{q, s}$, ($\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots)$), если выполнены условия 3 и 4, преобразование Фурье берется по $(\xi')^{N-1} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$, а под знаком нормы в условии 2 стоит дифференцирование по ξ' .

Пространства $CL^s(H_1)$ и $CL^s(H_1^+)$. Функция $f \in CL^s(H_1)$, если $f \in C^s$ и существует последовательность бесконечно дифференцируемых цилиндрических функций $\{f_n\}$ такая, что

$$a) \sup \|f_n\|_{s, \infty} \leq M < +\infty \quad (M - \text{постоянная}),$$

$$б) \quad \|f_n - f\|_{s, R} \rightarrow 0 \quad \forall R > 0,$$

где введены обозначения

$$\|f\|_{s, R} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha f\|_{0, R}, \quad 0 < R \leq +\infty,$$

II

$$\|f\|_{0, R} = \sup_{\|x\|_1 \leq R} |f(x)|, \quad 0 < R \leq +\infty.$$

И, наконец, будем считать, что $f \in CL^s(H_1^+)$, если она является сужением на H_1^+ функции пространства $CL^s(H_1)$.

3°. Обозначим через $P_0(x, \xi, \lambda)$ главную часть символа P , то есть

$$P_0(x, \xi, \lambda) = a_m(x) [A(x, \xi, \lambda)]^m, \quad (5)$$

$$P_1(x, \xi, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x) [A(x, \xi, \lambda)]^j. \quad (6)$$

Не ограничивая общность можно считать, что $a_m(x) \equiv 1$.

Операторы $\hat{P}$ и $\hat{N}_j$ подчиним следующему алгебраическому условию:

$$\det \left[N_j \left(B \left(x', -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda \right) \omega_k(x, x_1, \xi', \lambda) \right) \right]_{|x_1=0} \neq 0 \quad (7)$$

$$\forall x' \in H_1', \|\xi'\| + |\lambda| \neq 0,$$

$$\begin{aligned} N_j \left(B \left(x', -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda \right) \right) &= F_{\xi_1 - x_1}^{-1} N_j(B(x', \xi_1, \xi', \lambda)), \\ \omega_k(x, x_1, \xi', \lambda) &= x_1^{k-1} e^{-S(x, \xi', \lambda) x_1} \\ k &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (8)$$

— базис в пространстве устойчивых решений уравнения

$$P_0 \left(x, -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda \right) v = 0, \quad (9)$$

$$a \quad S(x, \xi', \lambda) = \left(\sum_{j, k \geq 2} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k + \lambda \right)^{1/2}.$$

Условие (7) является бесконечномерным аналогом условия Лопатинского.

По аналогии с конечномерным случаем введем в рассмотрение так называемый „канонический“ базис $\Omega_k(x, x_1, \xi', \lambda)$ в пространстве устойчивых решений уравнения (9), определяемый следующими граничными условиями:

$$N_j \left(B \left(x', -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda \right) \right) \Omega_k(x, x_1, \xi', \lambda) \Big|_{|x_1=0} = \delta_{jk}, \quad (10)$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Тогда, очевидно, решение v уравнения (9), удовлетворяющее граничным условиям

$$N_j \left(B \left(x', -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda \right) \right) v \Big|_{|x_1=0} = h_j \quad (11)$$

с произвольными правыми частями h_j , представляется в виде

$$v = \sum_{j=1}^m \Omega_j h_{j1}. \quad (12)$$

Как доказано в [2], теорема 1, оператор $\hat{P}$ допускает замыкание в $CL^0(H_1^+)$.

Предложение 1. Операторы $\hat{N}_j$ ($j=1, 2, \dots, m$) допускают замыкание в пространстве $CL^0(H_1)$.

Доказательство. Покажем, что символы $N_j(B) \in \sum_{A, \epsilon}^{m_j+1, s}$. Действительно, при достаточно больших $|\xi|$ имеет место неравенство

$$|A_0^{-q+|\xi|/2}(\xi, \lambda) D_x^\alpha \partial_\xi^\beta N_j(B(x', \xi, \lambda))| \leq C |\xi|^{-q+m_j},$$

где $C > 0$ — постоянная, откуда следует, что нормы

$$\|N_j(B(x', \xi, \lambda))\|_0^{(q)} = \sup_{\alpha, \beta} \|A_0^{-q+|\xi|/2}(\xi, \lambda) D_x^\alpha \partial_\xi^\beta N_j(B)\|_0 < +\infty,$$

а также конечны нормы $\|N_j(B(x', \xi, \lambda))\|_{s, R}^{(q)}$ для любого $0 < R < +\infty$ и целого $s \geq 0$, если положить $q = m_j + \epsilon$. Но тогда, в силу теоремы 6.1 работы [5], при $s > m_j + 2 + \epsilon$, операторы $\hat{N}_j$ допускают замыкание в пространстве $CL^0(H_1)$. Этим завершается доказательство предложения.

Рассмотрим краевую задачу

$$\hat{P}u(x) = f(x), \quad x \in H_1^+, \quad (13)$$

$$\hat{N}_j u|_{x_j=0} = g_j(x'), \quad x' \in H_1, \quad j = \overline{1, m}. \quad (14)$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ оператор, действующий следующим образом:

$$\mathfrak{M}u = \{\hat{P}u(x), x \in H_1^+, \hat{N}_1 u|_{x_1=0}, \dots, N_m u|_{x_m=0}\},$$

а через $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{M}}$ — область определения его замыкания.

Пусть $u \in \mathfrak{Q}_{\mathfrak{M}}$, $f \in CL^0(H_1^+)$, $g_j \in CL^0(H_1)$, $j = \overline{1, m}$. Левый и правый регуляризатор задачи (13), (14) по аналогии с конечномерным случаем будем искать в виде (см. [3])

$$\hat{R}(f_1, g_1, \dots, g_m) = P^+ \left\{ \hat{P}_0^{-1} f + \sum_{j=1}^m \hat{Q}_j [g_j(x') - \hat{N}_j u_0|_{x_j=0}] \right\}, \quad (15)$$

где P^+ — оператор сужения функции, заданной на H_1 , на полупространство H_1^+ , $lf \in CL^0(H_1)$ — гладкое продолжение f на H_1 , $u_0 = \hat{P}_0^{-1} lf$.

Лемма 1. Оператор $P^+ P_0^{-1} \circ l$ отображает пространство $CL^{2m}(H_1^+)$ в $CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{Q}_{\hat{P}}$, где $\mathfrak{Q}_{\hat{P}}$ — область определения замыкания оператора $\hat{P}$.

Доказательство. В идейном отношении рассуждения аналогичны доказательству, проведенному в лемме 1 работы [2].

Установим вначале, что оператор $P^+ P_0^{-1}$ отображает пространство $CL^{2m}(H_1^+)$ в себя. Действительно, пусть последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\varphi_n \in C_0(H_1)$ сходится в $CL^{2m}(H_1)$ к функции φ . Введем обозначение

$$\varphi_N(x^N) = P^+ \left\{ (2\pi)^{-n/2} \int_{H^n} e^{i(\xi^n, x^n)} P_0^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda) \tilde{\varphi}_n(\xi^n) d\xi^n, \quad N \geq n. \right.$$

Очевидно, последовательность $\psi_N \in C^\infty(H_1^+)$ и, следовательно $CL^{2m}(H_1^+)$. Рассмотрим производную $D^a \psi_N \forall a, a = (a_1, \dots, a_k), 1 \leq k \leq N$. Имеем

$$D^a \psi_N = D^a P^+ \hat{P}_0^{-1} \varphi_n = P^+ \hat{P}_0^{-1} (D^a \varphi_n) + P^+ (D^a \hat{P}_0^{-1} (x^N, \xi^n, \lambda) \varphi_n). \quad (16)$$

Символ $\hat{P}_0^{-1}$ очевидно принадлежит классу $\Sigma_{A_0}^{-2m+1, s}$ ($s > 0, s$ — любое), откуда в силу определения класса $\Sigma_{A_0}^{q, s}$ (условие 4) имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|a| \leq s} \|D^a (\hat{P}_0^{-1} (x, \xi^n, \lambda) - \hat{P}_0^{-1} (x^N, \xi^n, \lambda))\|_0 = 0. \quad (17)$$

Отсюда следует существование предела

$$\psi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N(x^N) \text{ в } CL^0(H_1^+).$$

Далее, из сходимости последовательности $\{\varphi_n\}$ в пространстве $CL^{2m}(H_1)$, а также воспользовавшись (17), получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|P^+ \hat{P}_0^{-1} (x^N, \xi^n, \lambda) D^a \varphi_n - P^+ \hat{P}_0^{-1} (x, \xi^n, \lambda) D^a \varphi_n\|_{C(S_R^+)} = 0$$

и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|P^+ D^a \hat{P}_0^{-1} (x^N, \xi^n, \lambda) \varphi_n - P^+ D^a \hat{P}_0^{-1} (x, \xi^n, \lambda) \varphi_n\|_{C(S_R^+)} = 0$$

$$(S_R^+ = \{x \in H_1, x_1 > 0, \|x\|_H < R\}).$$

В силу (16) имеем

$$\|D^a \psi_N - D^a \psi\|_{C(S_R^+)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \forall R > 0, \forall a, |a| \leq 2m,$$

а отсюда выводим, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N = \psi$ в смысле сходимости в пространстве $CL^{2m}(H_1^+)$.

Нам надлежит далее совершить в CL^{2m} предельный переход по n (заметим, что функция ψ зависит от n).

Это возможно сделать, поскольку $\hat{P}_0^{-1} \in \Sigma_{A_0}^{-2m+1, s}$, а в представлении (16) — заменить x^N на x . Таким образом, доказано, что $P^+ \hat{P}_0^{-1} : CL^{2m}(H_1) \rightarrow CL^{2m}(H_1^+)$.

Воспользовавшись, наконец, тем, что оператор продолжения l отображает пространство $CL^{2m}(H_1^+)$ в $CL^{2m}(H_1)$, и что $\psi \equiv \psi^{(n)} \in \mathfrak{Q}_{\hat{P}}$,

$\psi^{(n)} \rightarrow P^+ \hat{P}_0^{-1} (x, \xi, \lambda)$ в $CL^{2m}(H_1^+)$, получим

$$P^+ \hat{P}_0^{-1} \circ l : CL^{2m}(H_1^+) \rightarrow CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{Q}_{\hat{P}},$$

чем и завершается доказательство леммы.

Замечание. Можно доказать, что оператор $P^+ \hat{P}_0^{-1} \circ l$ не зависит от оператора продолжения.

Рассмотрим теперь операторы

$$P^+ \mathcal{Q}_j [g_j(x') - \hat{N}_j u_0|_{x_1=0}], \quad j = \overline{1, m},$$

входящие в выражение для регуляризатора $\hat{R}$ задачи (13), (14).

Лемма 2. Пусть $n_j > m - 1$, тогда операторы $P^+ \hat{\mathcal{Q}}_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) непрерывным образом отображают пространство $CL^0(H_1)$ в $CL^0(H_1^+)$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n((x')^{n-1})\}_{n=2}^\infty$, $\varphi_n \in C_\Phi(H_1)$ — сходящаяся последовательность в $CL^0(H_1)$. Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_N^j(x^N) &= P^+ \hat{\mathcal{Q}}_j \varphi_n = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} P^+ \int_{H^{n-1}} e^{i((x')^{n-1}, (\xi')^{n-1})} \times \\ &\times \mathcal{Q}_j(x^N, x_1, (\xi')^{n-1}, \lambda) \tilde{\varphi}_n((\xi')^{n-1}) d(\xi')^{n-1} \equiv \hat{G}_N^j \varphi_n. \end{aligned} \quad (18)$$

Символы операторов $\hat{\mathcal{Q}}_j$ имеют следующий вид:

$$\mathcal{Q}_j(x, x_1, \xi', \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(j)}(x', \xi', \lambda) x_1^k e^{-S x_1}, \quad (19)$$

где коэффициенты $c_k^{(j)}$ определяются из условия (10).

Несложно убедиться в том, что $c_k^{(j)}$, $k = 0, m-1$ имеют порядок по ξ' степени $m - n_j - 1$. Иными словами, справедлива оценка

$$|c_k^{(j)}(x', \xi', \lambda)| \leq K(\|\xi'\| + |\lambda|)^{m-n_j-1}, \quad (20)$$

K — константа.

Далее, поскольку $\operatorname{Re} S > 0$, то при $x_1 > 0$, в силу (20), имеем, что $\mathcal{Q}_j \in \Sigma_{A, (\xi', \lambda)}^{m-n_j-1+s}$ ($s > 0$ — любое, $s > 0$).

Рассмотрим ядра операторов $\hat{G}_N^j$:

$$\begin{aligned} G_N^j(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda) &= P^+ (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_{H^{n-1}} e^{i((x')^{n-1}, (\xi')^{n-1})} \times \\ &\times \mathcal{Q}_j(x^N, x_1, (\xi')^{n-1}, \lambda) d(\xi')^{n-1}. \end{aligned}$$

В силу условия леммы они принадлежат пространству $L_1(H^{n-1})$. Иными словами

$$\|G_N^j\|_{L_1(H^{n-1})} \leq K < +\infty, \quad (21)$$

при $\forall N$, n и любом фиксированном $x^N \in H_+^N = \{x^N \in H^N, x_1 > 0\}$. Действительно, обозначив

$$\|\mathcal{Q}_j(x^N, x_1, \xi', \lambda)\|_0^{\text{def}} = \sup_{n=1} \|G_N^j\|_{L_1(H^{n-1})}, \quad (22)$$

имеем

$$\|G_N^j(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda)\|_{L_1(H^{n-1})} \leq \|\mathcal{Q}_j\|_0. \quad (23)$$

Представим $\Omega_j(x^N, \xi', \lambda)$ в следующем виде:

$$\Omega_j(x^N, x_1, \xi', \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} S^{-r}((x')^{N-1}, \xi', \lambda) c_k^{(j)}(x')^{N-1}, \xi', \lambda) S^r x_1^k e^{-Sx_1},$$

где $r_j = m - n_j - 1 + \varepsilon$, $r > \max_{1 \leq j \leq m} r_j$. Тогда

$$\begin{aligned} \|S^{-r} c_k^{(j)}\|_0' &= \|S^{-r}((x')^{N-1}, \xi', \lambda) A_0'^{r/2}(\xi', \lambda) A_0^{-r/2} c_k^{(j)}(x')^{N-1}, \xi', \lambda)\|_0' \leq \\ &\leq \|S^{-r} A_0'^{r/2}\|_0' \|A_0^{-r/2} c_k^{(j)}\|_0'. \end{aligned} \quad (24)$$

В силу оценки (20) символы $c_k^{(j)} \in \sum_{\lambda_0(\xi', \lambda)}^{r_j, s}$, $k = \overline{0, m-1}$, откуда следует, что существует постоянная $M_j^{(1)}$ такая, что

$$\|A_0^{-r/2}(\xi', \lambda) c_k^{(j)}((x')^{N-1}, \xi', \lambda)\| \leq M_j^{(1)}, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (25)$$

Используя теперь лемму 3.3 работы [4], при $r > r_j$ имеем

$$\|S^{-r}((x')^{N-1}, \xi', \lambda) A_0'^{r/2}(\xi', \lambda)\|_0' \leq M_j^{(2)}. \quad (26)$$

Таким образом, из оценок (24)–(26) получаем

$$\|S^{-r} c_k^{(j)}\|_0' \leq M_j^{(1)} \cdot M_j^{(2)}, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (27)$$

Обратимся к оценке символов $x_1^k S^r e^{-Sx_1}$. Как показано в работе [4] имеет место оценка

$$\|S^r e^{-Sx_1}\|_0' \leq \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} e^{-a \sqrt{t} x_1} t^{-1+\frac{r}{2}} dt \leq M < +\infty,$$

где $a > 0$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Из этой оценки получаем

$$\begin{aligned} \|S^r x_1^k e^{-Sx_1}\|_0' &\leq \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} e^{-a \sqrt{t} x_1} x_1^k t^{-1+\frac{r}{2}} dt \leq M_1 < +\infty, \\ k &= \overline{0, m-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из неравенств (27), (28) вытекает, что

$$\|\Omega_j(x^N, x_1, \xi', \lambda)\|_0' \leq K,$$

откуда с учетом (22) получаем оценку (21).

Для доказательства сходимости последовательности ψ_N^j , кроме (21) нам надо установить также следующее:

$$a) \quad \sup_{k \geq 2} \int_{H^{n-1}} |z_k^2 G_N^j(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda)| d(z')^{n-1} \leq K < +\infty \quad (29)$$

$\forall N$, n и при любом фиксированном $x^N \in H_1^N$,

$$b) \quad \sup_{\substack{H_1^+ \\ |z_k| < R}} \|G_N^j(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda) - G_{N+k}^j(x^{N+k}, x_1, (z')^{n-1}, \lambda)\|_{L_1(H^{n-1})} \rightarrow 0 \quad (30)$$

при $N \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$,

Сходимость интегралов (29) вытекает из того, что производные символов $\mathcal{Q}_j$ второго порядка по переменным ξ_i ($i = 2, 3, \dots$): $\frac{\partial^2 \mathcal{Q}_j}{\partial \xi_i^2} \in \epsilon' \Sigma_{A_0}^{0,0}(\xi', \lambda)$.

Действительно, из представления (19) выводим, что если дифференцирование падает на символы $c_k^{(j)}(x^N, \xi', \lambda)$, то ввиду того, что их порядок не превосходит $m - n_j - 1 < 0$,

$$\frac{\partial^a c_k^{(j)}}{\partial x_l^a} \in \epsilon' \Sigma_{A_0}^{0,0}(\xi', \lambda), \quad a = 1, 2, \dots, i = 2, 3, \dots,$$

а при дифференцировании экспоненты появляются члены вида $S^a e^{-Sx_1}$, которые оцениваются аналогично (28).

Таким образом, оценка (29) доказывается, с учетом сделанного замечания, точно так же, как и (21). Выполнение условия в) для ядер G'_N является непосредственным следствием принадлежности символов $\mathcal{Q}_j$ классу $\epsilon' \Sigma_{A_0}^{r,s}(\xi', \lambda)$ (см. условие 4 определения класса $\epsilon' \Sigma_{A_0}^{r,s}(\xi', \lambda)$).

Из (21) и (29) (см. [5]) следует существование $\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N^l(x^N)$ в смысле сходимости в $CL^0(H_1^+)$. Обозначим этот предел $\psi_n^l(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N(x^N)$ (предел зависит от n). Для завершения доказательства леммы нам остается совершить предельный переход по n в $CL^0(H_1^+)$, а это обеспечивается тем, что символы $\mathcal{Q}_j(x, x_1, \xi', \lambda) \in \epsilon' \Sigma_{A_0}^{r,s}(\xi', \lambda)$.

Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 вытекает, что операторы $P^+ \widehat{P}_0^{-1} \circ I$ и $P^+ \widehat{\mathcal{Q}}_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) порождаются счетно-аддитивными мерами, определенными на H_1^+ и H_1 соответственно. Иными словами справедливы следующие предложения.

Предложение 2. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ существует счетно-аддитивная мера $\mu(x, dz, \lambda)$, заданная на H_1 такая, что имеет место представление

$$P^+ \widehat{P}_0^{-1} \circ I f(x) = P^+ \int_{H_1} I f(x - z) \mu(x, dz, \lambda)$$

для любого $f \in CL^0(H_1^+)$.

Это утверждение является следствием теоремы 3.3 работы [5], надо лишь заметить, что символ $P_0^{-1}(x, \xi, \lambda) \in \Sigma_{A_0}^{-2m+s, s}(\xi, \lambda) \subset \Sigma_{A_0}^{0,0}(\xi, \lambda)$.

Предложение 3. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ и $j = 1, 2, \dots, m$ существуют счетно-аддитивные меры $\mu_j(x, x_1, dz', \lambda)$, заданные на H_1 такие, что имеют место представления

$$P^+ \widehat{\mathcal{Q}}_j g(x') = P^+ \int_{H_1} g(x' - z') \mu_j(x, x_1, dz', \lambda). \quad (31)$$

Справедливость утверждения леммы вытекает из оценок (21), (29) и условия (30), обеспечивающих, в силу упомянутой выше теоремы, существование мер μ_j и представление (31).

4°. В этом пункте будет доказано, что оператор $\hat{R}$, задаваемый формулой (15), является двусторонним регуляризатором задачи (13), (14), а именно справедлива

Теорема 1. Пусть операторы $\hat{P}$ и $\hat{N}_j$ ($j=1, 2, \dots, m$) с символами (1) и (3), соответственно, удовлетворяют условиям (2) и (7). Тогда при достаточно больших $|\operatorname{Re} \lambda|$ оператор $\hat{R}$, задаваемый формулой (15), является двусторонним регуляризатором задачи (13), (14), т. е. имеют место представления

$$\mathfrak{M} \circ \hat{R} = E + \hat{T}_1, \quad \text{где} \quad \|\hat{T}_1\|_{C(H_1^+)} < 1, \quad (32)$$

$$\hat{R} \circ \mathfrak{M} = E + \hat{T}_2, \quad \text{где} \quad \|\hat{T}_2\|_{C(H_1^+)} < 1, \quad (33)$$

операторы $\hat{T}_1, \hat{T}_2$ отображают $\mathcal{Q}_{\mathfrak{M}}$ в себя.

Доказательство этого утверждения опирается на следующие теоремы работы [4].

Теорема А. ([4], теорема 1.2). Пусть симбол $P(x, \xi') \in \Sigma_{A_0}^{p, s}(\xi', \lambda)$, тогда символы

$$Q(x, \xi, \lambda) = \frac{P(x, \xi')}{(\xi_1 + iS(x, \xi', \lambda))^s S'(x, \xi', \lambda)} \quad (34)$$

принадлежат классу $\Sigma_{A_0}^{q, s}$, где $q = p - k - l - \varepsilon$, $k \in Z$, $\varepsilon > 0$ — произвольное число. При этом справедлива оценка

$$\|A_0(\xi', \lambda)^{-q/2} Q(x, \xi, \lambda)\|_0 \leq M |\operatorname{Re} \lambda|^{-\varepsilon/2}, \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon, \quad \operatorname{Re} \lambda > a > 0. \quad (35)$$

Теорема В. ([4], теорема 2.3). Пусть символы $Q_i(x, \xi, \lambda)$, $i=1, 2$, принадлежат классам $\Sigma_{A_0}^{p_i, s}$, где s достаточно велико. Тогда

оператор $\hat{Q} = \hat{Q}_1 \circ \hat{Q}_2$ порождается символом $Q(x, \xi, \lambda)$, принадлежащим $\Sigma_{A_0}^{p, s}$, где $p = p_1 + p_2$, при этом имеет место разложение

$$Q(x, \xi, \lambda) \subset \sum_{|\alpha| < r} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} Q_1(x, \xi, \lambda) D_x^{\alpha} Q_2(x, \xi, \lambda) + Q_3(x, \xi, \lambda) \quad (36)$$

и $Q_3 \in \Sigma_{A_0}^{p_3, s}$ для любого $p_3 > p_1 + p_2 - r$.

Замечание. Теорема остается справедливой и в том случае, когда $Q_1 = S^{p_1}$, $Q_2 \in \Sigma_{A_0}^{p_2, s}(\xi', \lambda)$, а также при $Q_1 \in \Sigma_{A_0}^{p_1, s}$, $Q_2 = (\xi_1^2 + S^2)^{p_2}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть вначале $f \in CL^{2m}(H_1^+)$.

Тогда в силу леммы 1 $P + \hat{P}_0^{-1} f \in CL^{2m}(H_1^+)$. Применим к оператору $P + \hat{P}_0^{-1}$ слева дифференциальный оператор $\hat{P}_0$. Воспользовавшись формулой композиции псевдодифференциальных операторов с символами, принадлежащими классам $\Sigma_{A_0}^{p, s}$ (теорема В), получим

$$\hat{P}_0 \circ P^+ \hat{P}_0^{-1} = P^+ \left(E + \sum_{l=1}^{2m} \hat{C}_{-l} \right), \quad (37)$$

где символы C_{-l} операторов $\hat{C}_{-l}$ имеют вид

$$C_{-l}(x, \xi, \lambda) = \sum_{|z|=l} \frac{1}{a!} \partial_{\xi}^z P_0(x, \xi, \lambda) D_x^z P_0^{-1}(x, \xi, \lambda) \quad (38)$$

(сумма в (37) конечна, поскольку оператор $\hat{P}_0$ — дифференциальный). Символы C_{-l} имеют порядок по ξ , равный $-l$.

Легко видеть, что символы $\partial_{\xi}^z P_0(x, \xi, \lambda)$ и $D_x^z P_0^{-1}(x, \xi, \lambda)$, входящие в представление (38), принадлежат, соответственно, классам $\sum_{A_i}^{2m-l+1, s}$ и $\sum_{A_i}^{-2m+1, s}$, откуда выводим, что символ $C_{-l} \in \sum_{A_i}^{-l+1, s}$ ($i = \overline{1, 2m}$). Заметим далее, что символы C_{-l} представимы в виде суммы произведений символов вида (34), откуда в силу теоремы А получим оценку

$$\|C_{-l}(x, \xi, \lambda)\|_0 \leq M |\operatorname{Re} \lambda|^{-\frac{l}{2}+s}, \quad i = \overline{1, 2m}, \quad (39)$$

где $M > 0$ — некоторая константа, не зависящая от λ .

Рассмотрим теперь оператор $\hat{P}_1 \circ P^+ \hat{P}_0^{-1}$. Символ оператора $\hat{P}_1$ задается формулой (6), в силу чего имеем

$$\hat{P}_1 \circ P^+ \hat{P}_0^{-1} = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{P}_j \circ P^+ \hat{P}_0^{-1},$$

где $\hat{P}_j$ — операторы, порожденные символами $a_j(x) A^j(x, \xi, \lambda)$. В соответствии с формулой композиции (36) будем иметь

$$\hat{P}_j \circ P^+ \hat{P}_0^{-1} = a_j(x) \hat{A}^j \circ P^+ \hat{P}_0^{-1} = a_j(x) \circ \sum_{l=1}^{2j} P^+ \hat{C}_l^{(j)},$$

где символы операторов $C_l^{(j)}$ определяются следующим образом:

$$C_l^{(j)}(x, \xi, \lambda) = \sum_{|z|=l} \frac{1}{a!} \partial_{\xi}^z A^j(x, \xi, \lambda) D_x^z P_0^{-1}(x, \xi, \lambda) \quad (39')$$

и имеют порядок по ξ , равный $2(j-m) - l$. Так как и выше имеем, что символы $C_l^{(j)} \in \sum_{A_i}^{2(j-m)-l+1, s}$ ($i = \overline{1, 2j}$, $j = \overline{0, m-1}$) и вновь применяя теорему А получим

$$\|C_l^{(j)}(x, \xi, \lambda)\|_0 \leq M_1 |\operatorname{Re} \lambda|^{j-m-\frac{l}{2}+s}. \quad (40)$$

Обратимся к рассмотрению композиции операторов $\hat{P}_0 \circ P^+ \hat{Q}_j$, $j = \overline{1, m}$. Предположим, как и выше, что вначале $g_j \in CL^k(H_1^+)$. Тогда, повторяя по существу рассуждения леммы 2, можно убедиться в том, что $P^+ \hat{Q}_j g_j \notin CL^k(H_1^+)$. Действительно, для этого необходимо продифференцировать нужное число раз функции $\psi_N^j(x^N)$, задаваемые выраже-

нием (18) и для соответствующих ядер проверить выполнение условий, аналогичных (21) и (29).

Как было показано выше символы $\mathcal{Q}_j(x, x_1, \xi', \lambda) \in \sum_{\lambda_2(\xi', \lambda)}^{m-n_j-1+\varepsilon}$ при $x_1 > 0$, а символ $P_0 = (\xi^2 + S^2)^m$.

Рассмотрим композицию операторов $\left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + S^2\right)^m \circ P^+ \mathcal{Q}_j$, $j = \overline{1, m}$, где $\left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + S^2\right)^m = F_{\xi_1 \rightarrow x_1}^{-1} P_0(x, \xi, \lambda)$, а символ оператора $\widehat{\mathcal{Q}}_j$ имеет вид (19):

$$\mathcal{Q}_j(x, x_1, \xi', \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(j)}(x', \xi', \lambda) x_1^k e^{-S(x, \xi', \lambda) x_1}.$$

Эта композиция представляет собой конечную сумму операторов вида $\widehat{S}^{2l} \circ P^+ \widehat{\mathcal{Q}}_j$ ($l \leq m$), где

$$\mathcal{Q}'_j(x, x_1, \xi', \lambda) = t'_j(x', \xi', \lambda) \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^q x_1^p S^r e^{-Sx_1}.$$

При дифференцировании по переменной x_1 возникают также слагаемые, содержащие сомножители вида $(i\xi_1)^l$. Заметим, что $(i\xi_1)^l F_\varphi = -\mathcal{L} \left(\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^l}\right)$ и поэтому достаточно рассмотреть операторы с символами вида $\mathcal{Q}'_j$.

Пусть $t_j(x, \xi', \lambda) = t'_j(x', \xi', \lambda) \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^q$, тогда

$$\mathcal{Q}'_j(x, x_1, \xi', \lambda) = t_j(x, \xi', \lambda) x_1^p S^r e^{-Sx_1}. \quad (41)$$

Легко видеть, что $t_j \in \sum_{\lambda_2}^{r_j}$ ($r_j = m + q - n_j - 1 + \varepsilon$). В силу формулы композиции (36) имеем

$$S^{2l} \circ P^+ \widehat{\mathcal{Q}}_j = \sum_{i=1}^{2l} \widehat{d}_{i,j},$$

где символы операторов $\widehat{d}_{i,j}$ имеют вид

$$d_{i,j}(x, x_1, \xi', \lambda) = \sum_{|a|=i} \frac{1}{a!} \partial_{\xi_1}^{2l} S^{2l}(x, \xi', \lambda) D_x^a \mathcal{Q}'_j(x, x_1, \xi', \lambda). \quad (42)$$

Оценим вначале символы $\mathcal{Q}'_j$. С этой целью возьмем произвольное $r_0 > r_j$. Имеем, как и выше, $\|S^{-r_0} t_j\|_0' \leq M_1$,

$$\|\mathcal{Q}'_j\|_0' \leq M_2 x_1^p \|e^{-Sx_1} S^{r_0+r} \|_0' \|S^{-r_0} t_j\|_0' \leq M_3 x_1^p \|S^{r_0+r} e^{-Sx_1}\|_0'. \quad (43)$$

Воспользовавшись теперь оценкой (1.14) работы [4], получим

$$\|S^{r_0+r} e^{-Sx_1}\|_0' \leq M_4 \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} e^{-a \sqrt{t} x_1} t^{-1} |t|^{(r+r_0)/2} dt \quad (a > 0).$$

Принтегрируем теперь неравенство (43) по x_1 . Из последней оценки, а также того, что $\mathcal{Q}'_j \equiv 0$, при $x_1 < 0$, получим

$$\begin{aligned}
\|\Omega_j'(x, x_1, \xi', \lambda)\|_0 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \|\Omega_j'(x, x_1, \xi', \lambda)\|_0 dx_1 \leq \\
&\leq M_5 \int_0^{\infty} x_1^p \left\{ \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} e^{-a \sqrt{t} x_1} t^{-1} |t|^{r+r_0/2} dt \right\} dx_1 = \\
&= M_5 \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} |t|^{\frac{r+r_0}{2}-1} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a \sqrt{t} x_1} x_1^p dx_1 \right\} dt \leq \\
&\leq M_6 \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} t^{\frac{r+r_0}{2}-1-p_1} dt \leq M_7 |\operatorname{Re} \lambda|^{-\varepsilon},
\end{aligned} \tag{44}$$

где p_1 выбрано настолько большим, чтобы $p_1 > \frac{r+r_0}{2}$, а $\varepsilon = p_1 - \frac{r+r_0}{2}$.

Заметим, далее, что при дифференцировании символов $S^{2l}(x, \xi', \lambda)$ по ξ' и $\Omega_j'(x, x_1, \xi', \lambda)$, $t_j(x, \xi', \lambda)$ по x' возникает сумма символов, аналогичных (41), с той лишь разницей, что в их выражения входят производные вида $\partial_{x_i}^2 S$, $D_{x_i}^3 S$ и $D_{x_i}^1 t_j$. Легко видеть, что их оценку можно провести по существу повторяя рассуждения, проведенные при выводе неравенства (44) для Ω_j' . Таким образом, имеем

$$\|d_{l,j}(x, x_1, \xi', \lambda)\|_0 \leq M_8 |\operatorname{Re} \lambda|^{-\varepsilon}. \tag{45}$$

Отсюда выводим, что операторы $\widehat{S}^{2l} \circ P^+ \widehat{\Omega}_j'$ представляют собой сумму операторов, для символов которых справедлива оценка (45).

Совершенно аналогично доказываются такие же оценки для композиции операторов $\widehat{P}_k \circ P^+ \widehat{\Omega}_j(k, j = \overline{1, m})$, где $F_{\xi_1 \rightarrow x_1}^{-1} P_k(x, \xi, \lambda) = a_k(x) \left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + S^2 \right)^k$.

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть композиции операторов $\widehat{N}_k \circ P^+ \widehat{P}_0^{-1}|_{x_1=0}$ и $\widehat{N}_k \circ P^+ \widehat{\Omega}_j|_{x_1=0}$.

Символ N_k имеет вид (3):

$$N_k(x', \xi, \lambda) = N_k(B(x', \xi, \lambda)) = \left(\xi_1 + \sum_{k=2}^n b_k(x') \xi_k + \lambda \right)^{n_k}.$$

Отсюда выводим, что он принадлежит классу $\sum_{\lambda_0}^{n_k + \varepsilon, s}$, где по условию $n_k < 2m$ ($k = \overline{1, m}$). Применяя формулу композиции к операторам $\widehat{N}_k \circ P^+ \widehat{P}_0^{-1}$, получаем

$$\widehat{N}_k \circ P^+ \widehat{P}_0^{-1} = \sum_{l=1}^{n_k} P^+ \widehat{\gamma}_1^{(k)},$$

где символы

$$\gamma_i^{(k)}(x, \xi, \lambda) = \sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha N_k(x', \xi, \lambda) D_x^\alpha P_0^{-1}(x, \xi, \lambda). \quad (46)$$

Повторяя рассуждения, приведенные при выводе оценки (40), получим

$$\|\gamma_i^{(k)}(x, \xi, \lambda)\|_0 \leq M |\operatorname{Re} \lambda|^{\frac{n_k - i}{2} - m + 1} \quad (i \geq 1). \quad (47)$$

Оценки для операторов $\tilde{N}_k \circ P^+ \tilde{Q}_j$ проводятся аналогично оценке оператора $\tilde{P}_0 \circ P^+ \tilde{Q}_j$. Действительно

$$F_{\xi_1 \rightarrow x_1} N_k(x', \xi, \lambda) = \left(-i \frac{d}{dx_1} + b_0(x', \xi', \lambda) \right)^{n_k},$$

$$\text{где } b_0(x', \xi', \lambda) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k(x') \xi_k + \lambda.$$

Отсюда вытекает как и выше, что задача сводится к оценке оператора вида $\tilde{b}_0^i \circ P^+ \tilde{Q}_j'$, где $\tilde{Q}_j'$ задается формулой (41). Разлагая символ оператора $\tilde{b}_0^i \circ P^+ \tilde{Q}_j'$ по формуле композиции и проводя аналогичные рассуждения, придем к неравенству (45) для слагаемых разложения символа.

Поскольку константы, входящие в оценки вида (47) не зависят от x_1 , они остаются справедливыми и при предельном переходе на „гиперплоскость“ $x_1 = 0$.

Резюмируя полученные результаты, имеем, что

$$\tilde{P} \circ P^+ \tilde{R} = E + \tilde{T}_1, \quad (48)$$

где символ оператора $\tilde{T}_1$ складывается из символов вида (38), (39'), (41), для которых справедливы оценки (39), (40), (45), в силу которых при достаточно больших $|\operatorname{Re} \lambda|$ имеем $\|\tilde{T}_1\|_{C(H_1^+)} < 1$.

Аналогично, при любом $k=1, 2, \dots, m$

$$\tilde{N}_k \circ P^+ \tilde{R}|_{x_1=0} = E + \tilde{T}_1, \quad (49)$$

и символ оператора $\tilde{T}_1$ представляет собой сумму операторов с символами вида (46), для которых справедливы неравенства типа (47), откуда вытекает, что для оператора $\tilde{T}_1$ справедлива оценка $\|\tilde{T}_1\|_{C(H_1^+)} < 1$ при достаточно больших $|\operatorname{Re} \lambda|$.

Из (48) и (49) следует представление (32) и оценка для оператора $\tilde{T}_1$.

Таким образом, установили, что оператор $\tilde{R}$ является правым регуляризатором для оператора $\tilde{\mathcal{R}}$.

Совершенно аналогично можно доказать, что $\bar{R}$ является левым регуляризатором для оператора $\mathfrak{M}$.

Освободимся теперь от условий гладкости на функции $f(x)$ и $g_j(x')$, наложенных в начале доказательства теоремы.

Пусть f и g_j — произвольные функции, принадлежащие, соответственно, пространствам $CL^0(H_1^+)$ и $CL^0(H_1')$. Выберем последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{g_n^{(j)}\}_{n=1}^\infty$, сходящиеся, соответственно, к f в $CL^0(H_1^+)$ и g_j — в $CL^0(H_1')$, $j = 1, m$. Для каждого n имеем

$$\|\hat{T}_1[f, g_1, \dots, g_m]\|_{C(H_1^+)} \leq M |\operatorname{Re} \lambda|^{-\sigma} \left\{ \|f_n\|_{C(H_1^+)} + \sum_{j=1}^m \|g_n^{(j)}\|_{C(H_1')} \right\} (\sigma > 0).$$

Совершая теперь предельный переход в этих неравенствах, приходим к оценке для произвольных f и g_j .

Теорема доказана.

Следствие. При достаточно больших $|\operatorname{Re} \lambda|$ оператор $\mathfrak{M}$ гомеоморфно отображает пространство $\mathfrak{U}_{\mathfrak{M}}$ на пространство $CL(H_1^+) \times \prod_{j=1}^m CL^0(H_1')$.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 30.VII.1982:

Ռ. Լ. ՇԱԽԲԱԴՅԱՆ. Ընդհանուր եզրային խնդիր անվերջ թվով անկախ փոփոխականներով բարձր կարգի էլիպտական երկայնական երկայնական երկայնական (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում ընդհանրացվում են հեղինակի [1], [2] աշխատանքների արդյունքները անվերջ թվով անկախ փոփոխականներով պարամետրից կախված բարձր կարգի էլիպտական հավասարումների և ընդհանուր եզրային խնդիրների դեպքի համար:

Ենթադրելով, որ սահմանային օպերատորները բավարարում են որոշակի հանրահաշվական պայմանի կառուցվում է դիտարկվող խնդրի պարամետրիքային և ապացուցվում է նրա լուծման գոյության և միակության թեորեմ համապատասխան ֆունկցիոնալ տարածություններում:

R. L. SHAKHBAGIAN. General boundary problem for high order equations of elliptic type with infinite number of independent variables (summary)

In this paper the results of the author's papers [1], [2] are generalized to the case of high order elliptic equations with parameter, infinite number of independent variables and general boundary conditions.

Under assumption that boundary operators satisfy some algebraic condition, the parametrix of the problem is constructed and existence and uniqueness of the solution in appropriate functional spaces is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Шахбалян. Эллиптическая задача с параметром для уравнений второго порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 252—261.
2. Р. Л. Шахбалян. Задача Дирихле в полупространстве для эллиптических операторов высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVI, № 2, 1981, 150—166.

3. М. С. Агранович, М. И. Вишик. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, XIX; вып. 3 (117), 1964, 53—161.
4. М. И. Вишик, А. В. Марченко. Краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений второго порядка на бесконечномерных многообразиях с краем, Матем. сб., 90, № 3, 1973, 331—371.
5. П. М. Блехер, М. И. Вишик. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях, Матем. сб., 86, № 3, 1971, 446—494.

УДК 517. 53

Э. К. ДИЛАНЯН

ДВА СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ О ДВУХ ПОСТОЯННЫХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА H_p

1°. (а). Первоначально в работе [1], а затем в своей монографии [2] М. М. Джрбашяном впервые была построена завершенная теория гармонического анализа в собственно комплексной плоскости, а именно, на конечной системе лучей, исходящих из начала координат. Эта теория является существенным обобщением теории Фурье—Плланшереля и получила многочисленные и важные приложения в различных областях теории функций (см., напр. [2], [3], и т. д.). В частности, в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [3] были введены широкие классы аналитических в угловых областях функций и получены параметрические представления этих классов, что явилось существенным обобщением теоремы Винера—Пэли о представлении класса H_2 в полуплоскости.

Как известно (см., напр., [4]) класс $H_p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) в полуплоскости $G^+ = \{z; \operatorname{Re} z > 0\}$ определяется как множество функций $f(z)$, голоморфных при $\operatorname{Re} z > 0$ и таких, что

$$\|f\|_{H_p(G^+)} = \sup_{0 < x < +\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (1)$$

Известно также [4], что каждая функция $f(z) \in H_p(G^+)$ почти всюду на мнимой оси имеет угловые граничные значения $f(iy) \in (L_p(-\infty; +\infty))$, причем

$$f|_{H_p(G^+)} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(iy)|^p dy \right\}^{1/p}.$$

(6). М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [3] впервые были введены классы $H_p^*(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости G^+ и таких, что

$$\|f\|_{H_p^*(G^+)} = \sup_{|r| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (2)$$

Ими же впервые было установлено, что $H_2(G^+) \equiv H_2^*(G^+)$. Отметим, что немного позже этот факт был передоказан К. ван Винтером [5]. Отметим также, что из совпадения классов $H_1 \equiv H_1^*$ легко следует

включение $H_p(G^+) \subset H_p^*(G^+)$. Это включение непосредственно вытекает также из следующей теоремы С. А. Акопяна [6] о двух постоянных для функций класса H_p .

Теорема А. Если $f(z) \in H_p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) и $f(z) \neq 0$, то*

$$\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr < \left(\int_0^{+\infty} |f(iy)|^p dy \right)^{\frac{1}{2} + \frac{p}{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} |f(-iy)|^p dy \right)^{\frac{1}{2} - \frac{p}{\pi}},$$

$$\left(|\varphi| < \frac{\pi}{2} \right). \quad (3)$$

В дальнейшем А. М. Седлецким было установлено, что обратное включение $H_p(G^+) \supset H_p^*(G^+)$ справедливо также при $p \neq 2$ [7].

Таким образом, $H_p(G^+) \equiv H_p^*(G^+)$ ($0 < p < +\infty$).

В данной работе доказывается усиление одного известного неравенства Л. Фейера и Ф. Рисса для функций класса H_p в круге [8], а также один аналог теоремы Харди [4]. Отправным пунктом для этого служит факт о совпадении пространства $H_p(G^+)$ и $H_p^*(G^+)$ и теорема А о двух постоянных.

2°. Обозначим через $H_p(D)$ ($0 < p < +\infty$) класс функций $f(z)$, аналитичных в круге $D = \{z; |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_p(D)} = \sup_{0 < r < 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (4)$$

Известно, (см. напр., [4]), что любая функция $f(z)$ из класса $H_p(D)$ ($0 < p < +\infty$) почти всюду на окружности $|z|=1$ имеет угловые граничные значения $f(e^{i\varphi}) \in L_p(-\pi, \pi)$, причем

$$\|f\|_{H_p(D)} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\varphi})|^p d\varphi \right\}^{1/p}.$$

В работе Л. Фейера и Ф. Рисса [8] было установлено следующее утверждение.

Теорема В. Если $f(z) \in H_p(D)$ ($0 < p < +\infty$), то интеграл от $|f(x)|^p$ вдоль сегмента $-1 \leq x \leq 1$ сходится и

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\varphi})|^p d\varphi. \quad (5)$$

Постоянная $1/2$ является наилучшей возможной.

Из этой теоремы вытекает следующее интересное

Следствие. Если единичный круг $|z| < 1$ конформно отображается на внутренность спрямляемой замкнутой жордановой

* В работе С. А. Акопяна [6] в (3) вместо знака $<$ стоит знак $\leq$. Однако небольшой анализ рассуждений С. А. Акопяна показывает, что если $f(z) \neq 0$, то имеет место (3).

кривой C , то длина образа произвольного диаметра не превосходит половины длины кривой C .

Мы докажем следующее усиление теоремы В.

Теорема 1. Если $f(z) \in H_p(D)$, $(0 < p < +\infty)$ и $f(z) \neq 0$, то

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx < \sqrt{\int_0^\pi |f(e^{i\nu})|^p d\nu \cdot \int_{-\pi}^0 |f(e^{i\nu})|^p d\nu}, \quad (6)$$

причем это неравенство усилить нельзя.

Следствие 1. Если $f(z) \in H_p(D)$ $(0 < p < +\infty)$ и $f(z) \neq 0$, то

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx < \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |f(e^{i\nu})|^p d\nu. \quad (7)$$

Иначе говоря, для отличных от тождественного нуля функций в (5) имеет место строгое неравенство.

Следствие 2. Если единичный круг $|z| < 1$ конформно отображается на внутренность спрямляемой замкнутой жордановой кривой C , то длина образа произвольного диаметра меньше половины длины этой кривой.

Следствие 3. Если единичный круг $|z| < 1$ конформно отображается на внутренность спрямляемой жордановой кривой C , то длина образа произвольного диаметра меньше среднего геометрического длин дуг, на которые разбивается кривая C образами концов этого диаметра.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(z) \neq 0$ — любая функция из класса $H_p(D)$ $(0 < p < +\infty)$. Рассмотрим функцию $g(w) = f\left(\frac{w-1}{w+1}\right)$, $\operatorname{Re} w > 0$. Известно [8], что в этом случае функция

$$g(w)(1+w)^{-\frac{2}{p}} \in H_p(G^+).$$

Из теоремы А (при $\varphi=0$) следует, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{|g(x)|^p}{(1+x)^2} dx < \sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{|g(iy)|^p}{1+y^2} dy \cdot \int_{-\infty}^0 \frac{|g(iy)|^p}{1+y^2} dy}. \quad (8)$$

После замены переменной $x = \frac{y-1}{y+1}$ для левой части неравенства (7) получим

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx = \int_0^{+\infty} \left| f\left(\frac{y-1}{y+1}\right) \right|^p \frac{2}{(1+y)^2} dy = 2 \int_0^{+\infty} \frac{|g(y)|^p}{(1+y)^2} dy. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx < 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{|g(iy)|^p}{1+y^2} dy \cdot \int_{-\infty}^0 \frac{|g(iy)|^p}{1+y^2} dy}. \quad (10)$$

В правой части неравенства (10) сделаем замену переменной $iy = \frac{1+e^{i\psi}}{1-e^{i\psi}}$. После этого имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |f(x)|^p dx &\leq 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{|g(iy)|^p}{1+y^2} dy \cdot \int_{-\infty}^0 \frac{|g(iy)|^p}{1+y^2} dy} = \\ &= \sqrt{\int_{-\pi}^0 |f(e^{i\psi})|^p d\psi \cdot \int_0^{\pi} |f(e^{i\psi})|^p d\psi}, \end{aligned}$$

т. е. получим (6). Наконец, так как в (5) константа $1/2$ является наилучшей возможной, то в (6) константа 1 также является наилучшей возможной. Теорема доказана.

3°. Известна следующая теорема Харди (см., напр., [4], стр. 9).

Теорема С. Если $f(z)$ аналитична в $D = \{z; |z| < 1\}$ и

$$M_p(f; r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\psi})|^p d\psi \right\}^{1/p}, \quad 0 < p < +\infty,$$

то

1°. $M_p(f; r)$ — неубывающая функция от r ;

2°. $\log M_p(f; r)$ — выпуклая функция от $\log r$.

Мы хотим получить аналог этой теоремы.

Пусть $f(z) \in H_p(G^+)$. Обозначим

$$M_f(\varphi) = \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \quad \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Из теоремы А очевидно следует, что $M_f(\varphi)$ конечна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Следующая теорема является аналогом теоремы С.

Теорема 2. Пусть $f(z) \in H_p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) и $f(z) \not\equiv 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $M_f(\varphi)$ непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$,

2. $\log M_f(\varphi)$ — строго выпуклая функция на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

Доказательство. Отправным пунктом для доказательства этой теоремы также является теорема А. Докажем непрерывность $M_f(\varphi)$. Рассмотрим сначала случай $p=2$. Пусть $F(z) \in H_2(G^+)$. Тогда (см. [2], стр. 444, следствие 2)

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 dr \right\} < +\infty.$$

Следовательно (см. [2], стр. 414, теорема 7.5 (1^а)),

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi}) - F(re^{\pm i \frac{\pi}{2}})|^2 dr = 0.$$

Пусть теперь $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$. Очевидно, что отображением

$$z = (we^{-i \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}})^{\frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1}} \quad (\varphi_1 < \arg w < \varphi_2)$$

задается конформный изоморфизм между угловой областью

$$\Delta(\varphi_1; \varphi_2) = \{w; \varphi_1 < \arg w < \varphi_2, 0 < |w| < +\infty\}$$

и полуплоскостью $\operatorname{Re} z > 0$. Обратное отображение имеет вид

$$w = e^{\frac{i \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}}{z^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}}}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

(При этом для вещественного z рассматривается та ветвь функции z^a , которая на полуоси $(0; +\infty)$ принимает положительные значения).

Если $f(z) \in H_2(G^+)$, то она аналитична в области $\Delta(\varphi_1; \varphi_2) \subset G^+$. Значит функция

$$F(z) = f(e^{\frac{i \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}}{z^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}}}) z^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1 - \pi}{2\pi}}, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (11)$$

аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Более того

$$\begin{aligned} \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 dr &= \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |f(e^{\frac{i \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}}{e^{\frac{i \varphi (\varphi_2 - \varphi_1)}{\pi}}}{r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}}})|^2 r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1 - \pi}{\pi}} dr = \\ &= \sup_{\varphi_1 < \varphi < \varphi_2} \int_0^{+\infty} |f(e^{i\varphi} r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}})|^2 \cdot r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} - 1} dr = \sup_{\varphi_1 < \varphi < \varphi_2} \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 dr \leq \\ &\leq \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 dr. \end{aligned}$$

Поскольку $f(z) \in H_2(G^+) \equiv H_2^*(G^+)$, то

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 dr < +\infty. \quad (12)$$

Следовательно, $F(z) \in H_2(G^+)$, откуда $F(z) \in H_2^*(G^+)$. Отсюда и из (11) имеем

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_1 + 0} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi}) - f(re^{i(\varphi_1 + 0)})|^2 dr = 0,$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_1 - 0} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi}) - f(re^{i(\varphi_1 - 0)})|^2 dr = 0.$$

Таким образом, окончательно получаем, что если $f(z) \in H_2(G^+)$, то

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi}) - f(re^{i\varphi})|^2 dr = 0 \quad \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad (13)$$

Пусть теперь $f(z) \in H_p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$). Тогда справедлива факторизация (см. [4])

$$f(z) = B(z) g(z), \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

где $B(z)$ — произведения Бляшке нулей функции $f(z)$, а $g(z)$ не имеет нулей и $g(z) \in H_2(G^+)$. Очевидно, что $[g(z)]^{p/2} \in H_2(G^+)$. Следовательно

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi} \int_0^{+\infty} |[g(re^{i\varphi})]^{p/2} - [g(re^{i\varphi})]^{p/2}|^2 dr = 0 \quad \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Значит в некоторой окрестности $|\varphi - \varphi| < \delta$ точки φ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) имеют место условия:

$$1. \lim_{\substack{\text{mes } E \rightarrow 0 \\ E}} \int_E |g(re^{i\varphi})|^p dr = 0 \text{ равномерно по } \varphi \text{ } (|\varphi - \varphi| < \delta),$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists E_\varepsilon, \text{ mes } E_\varepsilon < +\infty, \text{ так что}$$

$$\int_{(0, +\infty) \setminus E_\varepsilon} |g(re^{i\varphi})|^p dr < \varepsilon, \quad |\varphi - \varphi| < \delta.$$

Так как $|B(z)| \leq 1$ и $f(z) = B(z) g(z)$, то имеем также:

$$1. \lim_{\substack{\text{mes } E \rightarrow 0 \\ E}} \int_E |f(re^{i\varphi})|^p dr = 0 \text{ равномерно по } \varphi \text{ } (|\varphi - \varphi| < \delta),$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists E_\varepsilon, \text{ mes } E_\varepsilon < +\infty, \text{ так что}$$

$$\int_{(0, +\infty) \setminus E_\varepsilon} |f(re^{i\varphi})|^p dr < \varepsilon \quad (|\varphi - \varphi| < \delta).$$

Отсюда на основании теоремы Витали о предельном переходе под знаком интеграла заключаем, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr = \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \quad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Это и означает непрерывность $M_f(\varphi)$ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$). Пусть $f(z) \in H_p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) и $f(z) \not\equiv 0$. Докажем строгую выпуклость функции

$\log M_f(\varphi) \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \right)$. Так как $f(z) \in H_p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$), то она аналитична в области $\Delta(\varphi_1; \varphi_2) \subset G^+$. Из условия $H_p^*(G^+) \equiv H_p(G^+)$ следует, что $f(z)$ удовлетворяет условию (1). Значит функция

$$F(z) = f\left(e^{i \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} z^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}}\right) z^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1 - \pi}{\pi}}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

будет из $H_p(G^+)$. Действительно, аналитичность $F(z)$ в G^+ очевидна. Более того

$$\begin{aligned} \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p dr &= \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |f(e^{i \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} e^{i \frac{\varphi(\varphi_2 - \varphi_1)}{\pi}} r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}})|^p r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} - 1} dr = \\ &= \sup_{\varphi_1 < \varphi < \varphi_2} \int_0^{+\infty} |f(e^{i\varphi} r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}})|^p r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} - 1} dr = \\ &= \sup_{\varphi_1 < \varphi < \varphi_2} \left(\frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right) \leq \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr. \end{aligned}$$

Из теоремы А следует, что

$$\int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p dr < \left(\int_0^{+\infty} |F(re^{i \frac{\pi}{2}})|^p dr \right)^{\frac{1}{2} + \frac{\varphi}{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} |F(re^{-i \frac{\pi}{2}})|^p dr \right)^{\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi}} \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \right). \quad (14)$$

Для правой части этого неравенства после замены переменной получаем

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{+\infty} |F(re^{i \frac{\pi}{2}})|^p dr \right)^{\frac{1}{2} + \frac{\varphi}{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} |F(re^{-i \frac{\pi}{2}})|^p dr \right)^{\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi}} = \\ &= \left(\int_0^{+\infty} |f(r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}} e^{i\varphi_1})|^p r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} - 1} dr \right)^{\frac{1}{2} + \frac{\varphi}{\pi}} \times \\ &\times \left(\int_0^{+\infty} |f(r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}} e^{i\varphi_2})|^p r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} - 1} dr \right)^{\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi}} = \\ &= \left(\frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_1})|^p dr \right)^{\frac{1}{2} + \frac{\varphi}{\pi}} \left(\frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_2})|^p dr \right)^{\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi}} = \\ &= \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \left(\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_1})|^p dr \right)^{\frac{1}{2} + \frac{\varphi}{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_2})|^p dr \right)^{\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi}}. \end{aligned} \quad (15)$$

В частности, для случая $\varphi = 0$ из (14) и (15) имеем

$$\int_0^{+\infty} |F(r)|^p dr < \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \sqrt{\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_1})|^p dr \cdot \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_2})|^p dr} . \quad (16)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |F(r)|^p dr &= \int_0^{+\infty} |f(e^{\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}})|^p r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} - 1} dr = \\ &= \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}})|^p dr. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что для любых $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{+\infty} |f(re^{i\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}})|^p dr < \sqrt{\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_1})|^p dr \cdot \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_2})|^p dr}.$$

Таким образом, получаем что $\log M_f(\varphi)$ — строго выпуклая функция на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Теорема 2 полностью доказана.

Армянский сельскохозяйственный
институт

Поступила 7.IX.1981

Է. Կ. ԴԻԼԱՆԻԱՆ. Երկու հետևանք H_p դասի ֆունկցիաների համար երկու հաստատուն-ների մասին բերեմից (ամփոփում)

Ս. Հ. Հակոբյանի H_p դասի ֆունկցիաների համար երկու հաստատունների մասին թեորեմից որպես հետևանք ստացվել է Լ. Ֆեյերի և Ֆ. Ռիսսի մի կարևոր անհավասարության ուժեղացումը, որը հնարավորություն է տալիս զննատելու H_p դասի ֆունկցիայի ինտեգրալը շրջանի տրամագծով այդ ֆունկցիայի եզրային արժեքների ինտեգրալով կիսաշրջանագծերի վրա: Ստացվել է նաև Հարդիի մի թեորեմի անալոգը:

E. C. DILANIAN. Two corollaries of the theorem about two constants for functions of H_p class (summary)

As a corollary of the theorem of S. H. Hacobian about two constants for functions of class H_p a stronger version of an important inequality of L. Fejer and F. Riesz is obtained. Also a version of a theorem of Hardy is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье), Изв. АН СССР, сер. матем., 18, 1954, 427—448.
2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.

3. М. М. Джрбалян и А. Е. Аветисян. Интегральное представление некоторых классов, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сибирский матем. журнал 1, № 3, 1960, 383—426.
4. L. Duren. Theory of H_p spaces, Academic Press, New York and London, 1970.
5. Glasine van Winter. Fredholm equations on a Hilbert spaces of analitic functions, Transactions of the AMS, 162, December, 1971, 103—139.
6. С. А. Акопян. Теорема о двух постоянных для функций класса H_p , Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 2, № 2, 1967.
7. А. М. Седлецкий. Эквивалентное определение пространств H_p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сб., 96 (138), № 1, 1975.
8. L. Fejer and Riesz. Über einige funktionentheoretische Ungleichungen, Math. Z., 11, 1921.
9. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1975.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ա. Ա. Գոլդբերգ, Ա. Է. Երեմենկո, Ի. Վ. Օստրովսկի. Լիովին ռեգուլյար աճի ամբողջ ֆունկցիաների գումարի մասին	3
Ֆ. Ա. Շամոյան. Շրջանում անալիտիկ և մինչև եզրը աճող ֆունկցիաների զերոների մասին	15
Ս. Ռ. Մալխազյան. Մի դիֆերենցիալ հավասարման լուծումն ըստ փոքր պարամետրի վերլուծման	29
Ռ. Ա. Ալիխանյան. Դիրիխլեի արտաքին խնդիրը L_1 -ում երկրորդ կարգի էլիպտական տիպի հավասարման համար	39
Ռ. Լ. Շաքխադյան. Ընդհանուր եզրային խնդիր անվերջ թվով անկախ փոփոխականներով բարձր կարգի էլիպտական տիպի հավասարումների համար	49
Է. Կ. Դիլանյան. Երկու հետևանք H_p դասի ֆունկցիաների համար երկու հաստատունների մասին թեորեմից	65

СОДЕРЖАНИЕ

А. А. Гольдберг, А. Э. Еременко, И. В. Островский. О сумме целых функций вполне регулярного роста	3
Ф. А. Шамоян. О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы	15
С. Р. Малхазян. К вопросу о разложении по малому параметру решения одного дифференциального уравнения	28
Р. А. Алиханян. Внешняя задача Дирихле с данными из L_1 для эллиптического уравнения второго порядка	39
Р. Л. Шахбалян. Общая красная задача для уравнения эллиптического типа высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных	49
Э. К. Диланян. Два следствия из теоремы о двух постоянных для функций класса H_p	65

CONTENTS

A. A. Goldberg, A. E. Eremenko, I. V. Ostrovskii. On the sum of the entire functions of perfectly regular growth	3
F. A. Shamotan. On zeros of functions analytical in the disc and growing near its circumference	15
S. R. Malkhazian. On the decomposition by a small parameter of the solution of a differential equation	28
R. A. Alikhantian. The exterior Dirichlet problem with L_1 data for second order elliptic equations	39
R. L. Shakhbalyan. General boundary problem for high order equations of elliptic type with infinite number of independent variables	49
E. C. Dilantian. Two corollaries of the theorem about two constants for functions of H_p class	65