ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՒԱՔԵԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՒՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Ռ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

պատասխանատու քարտուղար՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր ֆիզիկա-մաթեմատիկա սահմանում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջը)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված թիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժմանն դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չշրջանվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24ա, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր ֆիզիկա-մաթեմատիկա։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
зам. главного редактора
Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б. Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

1982.17 w 6

ԳԻՆԸ 85 կ
ЦЕНА 85 К

Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKIĬ

exacutive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 6, 1982 Математика

УДК 517.53

N. U. ARAKELIAN and P. M. GAUTHIER

ON TANGENTIAL APPROXIMATION BY HOLOMORPHIC FUNCTIONS

I. Introduction and Statement of Main Results

Let D be a domain of the finite complex plane $\mathbf{C}$ and E a (relatively) closed proper subset of D. *A speed* on E is a positive, continuous, bounded function on E. If α is a speed on E, then E is called *a set of approximation* (in D) *with speed* α, or simply, *a set of* α*-approximation* provided that for each function f continuous on E, holomorphic on its interior E^0, and each constant $\varepsilon > 0$, there is a function g, holomorphic on D, such that

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon\alpha(z), \quad z \in E. \tag{1}$$

In this paper, we consider the problem of describing sets of approximation with speed α. We obtain new results, even for the case when D is a disc or the finite plane.

Both authors express their deep appreciation to the Research Council of Canada and the Queen's-Steklov exchange programme for providing us with the opportunity to work together.

A (relatively) closed set E in D is called a set of *uniform approximation* if E is a set of approximation with speed 1. Clearly, if E is a set of α-approximation, then E is, a fortiori, a set of uniform approximation. Thus, it is natural for us to consider only sets E which are sets of uniform approximation.

The first author has shown [1], that a necessary and sufficient condition in order that E be a set of uniform approximation is that $D^* \setminus E$ be connected and locally connected. Here $D^* = D \cup \{*\}$ denotes the Alexandrov compactification of D, where $*$ denotes the ideal point of D.

Actually, conditions on a set E of uniform approximation to be a set of α-approximation, depend exclusively on α and topological-metric properties of E^0. In this connection we need some notations and definitions.

1) For an arbitrary subset X of the Riemann sphere $\mathbf{C}^*$, we denote by X^0, $\overline{X}$ and ∂X respectively the interior, closure and boundary of X in $\mathbf{C}^*$.

2) Let E be a closed set in a domain D. Denote

$$\widetilde{E} = (\overline{E^0}) \cap D.$$

$\bar{E}$ is closed in D, and it is easy to show, using the well-known Tietze Extension Theorem [2, p. 134], that $\bar{E}$ is a set of uniform approximation in D, if the set E is.

Now let α be a speed on E.

3) We say, that α is *log-superharmonic* if $\log \alpha|E^0$ is superharmonic and has a continuous superharmonic extension on some neighbourhood of the set $\bar{E}$.

4) Consider two extensions of $\alpha|E$ on $\overline{(E^0)}$, $\bar{\alpha}$ and $\underline{\alpha}$, defined for $\zeta \in \partial E^0 \setminus \bar{E}$ by

$$\bar{\alpha}(\zeta) = \overline{\lim_{z \to \zeta}}\ \alpha(z), \quad \underline{\alpha}(\zeta) = \underline{\lim_{z \to \zeta}}\ \alpha(z), \quad z \in E^0.$$

Obviously, $\bar{\alpha}$ and $\underline{\alpha}$ are semicontinuous, non-negative and bounded. With the convention $\log 0 = -\infty$, the functions $\log \bar{\alpha}$ and $\log \underline{\alpha}$ are semicontinuous and upper-bounded.

5) We say, that the speed α is *inner-continuous*, if $\bar{\alpha} = \underline{\alpha}$. In this case, we use the notation α instead of $\bar{\alpha}$ or $\underline{\alpha}$.

6) For $z \in E^0$, we denote by μ_z the harmonic measure on ∂E^0 with respect to E^0. Let $\beta : \partial E^0 \to [-\infty) \cup \mathbf{R}$ be an upper-bounded and measurable function with respect to harmonic measure μ_z. The following condition on β is often used in this paper:

$$\inf_{z \in K \cap E^0} \int_{\partial E^0} \beta d\mu_z > -\infty \tag{2}$$

for each compact $K \subset D$.

Theorem 1A. *Let E be a set of approximation in a domain D with speed α. Then for $\log \bar{\alpha}$ condition* (2) *is satisfied.*

Theorem 1B. *Let D be a finitely connected domain and let E be a set of uniform approximation in D such that $\mathbf{C}^* \setminus E$ has no isolated points. Let α be a log-superharmonic speed on E, such that for $\log \underline{\alpha}$ condition* (2) *is satisfied. Then E is a set of approximation in D with speed α.*

The following consequence from these theorems is our main result.

Theorem 1. *Let D and E be as in Theorem* 1B *and let α be an inner-continuous and* log*-superharmonic speed on E. Then E is a set of approximation in D with speed α, if and only if condition* (2) *for $\log \alpha$ is satisfied.*

Let us say that the boundary of an open set G is a *curve at* ζ if there is a homeomorphism h of some neighbourhood V of ζ onto the unit disc ($|w| < 1$) with $h(\zeta) = 0$ and

$$V \cap \partial G = h^{-1}(\operatorname{Im} w = 0).$$

Theorem 2. *Suppose D, E and α are as in Theorem* 1 *and moreover that $D \cap \partial E^0$ is a curve at each of its points. Then E is a set of approximation with speed α if and only if*

$$\int_{\partial E^0} \log a \, d\mu_z > -\infty \tag{3}$$

for each $z \in E^0$.

Now suppose D is a disc D_R with centre 0 of finite or infinite radius $0 < R \leqslant +\infty$. For $0 < t < R$ and $z \in E^0$, we write

$$\omega(z, t) = \mu_z(\partial E^0 \setminus D_t).$$

Let $v(z) = v(|z|)$ be a function on D_R which depends only on $|z|$. Then, if v is a convex increasing function of $\log|z|$, v is subharmonic on D_R (see Lemma 7). Conversely, if $v(z) = v(|z|)$ is subharmonic, then

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(te^{i\theta}) \, d\theta$$

is a convex increasing function of $\log t$. Thus, if $\alpha(z) = \alpha(|z|)$, then α is a log-superharmonic speed if and only if $-\log \alpha(t)$ is a convex increasing function of $\log t$.

Theorem 3. *Let E be a set of approximation in D_R with asymptotic decreasing speed $\alpha(z) = \alpha(|z|)$. Then $\omega(z, R) = 0$ for each $z \in E^0$ and*

$$\sup_{z \in D_r \cap E^0} \int_0^R \log \alpha(t) \, d\omega(z, t) < \infty \tag{4}$$

for each $0 < r < R$. Conversely, let E be a set of uniform approximation in D_R, with $\omega(z, R) = 0$ for $z \in E^0$ and such that (4) is satisfied for some α, where $-\log \alpha$ is a log-convex function, tending to ∞ on $[0, R)$. Then E is a set of approximation in D_R with speed $\alpha(|z|)$.

A speed α on E is called an *asymptotic speed* if $\alpha(z) \to 0$ as $z \to \partial D$ on E. The set E is called a set of *asymptotic approximation* if E is a set of α-approximation for some asymptotic speed α. Obviously, such a speed α is inner-continuous and $\alpha = 0$ on $\partial D \cap \overline{E}$.

Corollary 1 [3]. *Let D and E be as in Theorem 1. Then, E is a set of asymptotic approximation if and only if*

$$\mu_z(\partial E^0 \setminus D) = 0$$

for each $z \in E^0$.

A set E of uniform approximation in D is called a set of *Carleman approximation* provided E is a set of α-approximation for every speed α.

Corollary 2 [4—5]. *Let D and E be as in Theorem 1. Then, E is a set of Carleman approximation if and only if it satisfies*

Condition C: *For each compact K in D, there is a compact K' in D such that no component of E^0 meets both K and $D \setminus K'$.*

For $E \subset D_R$ and $0 < t < R$, we denote by $t\theta(t)$ the linear measure of $E^0 \cap \partial D_t$, and set

$$\tilde{\theta}(t) = \sup_{t<s} \theta(s).$$

Corollary 3. *Let* $-\log\alpha$ *be a log-convex function on* $[0, R)$ *and let* E *be a set of uniform approximation in* D_R *such that*

$$\int_0^R \log\alpha(t)\, d\bar{\theta}(t) < +\infty. \tag{5}$$

Then E *is a set of approximation with speed* $\alpha(|z|)$, *if* $\bar{\theta}(R-0)=0$.

Corollary 4. *Let* $\alpha(z)=\alpha(|z|)$ *be a speed decreasing to zero on* $\mathbf{C}$ *and let* E *be a set of uniform approximation in* $\mathbf{C}$ *such that for some* $0<k<1$,

$$\int_1^\infty \log\alpha(t)\left\{t\theta(kt)\exp\left[\pi\int_1^{kt}\frac{d\rho}{\rho\theta(\rho)}\right]\right\}^{-1} dt > -\infty. \tag{6}$$

Then, E *is a set of approximation with speed* α.

Corollary 5 [6]. *Let* $\alpha(z)=\alpha(|z|)$ *be a decreasing speed on* $\mathbf{C}$ *satisfying*

$$\int_1^\infty \frac{\log\alpha(t)}{t^{3/2}}\, dt > -\infty. \tag{7}$$

Then, each set of uniform approximaton by entire functions is a set of approximation with speed α. *If the integral* (7) *diverges, then the conclusion fails.*

We shall say that E^0 is *sectorial* in D_R if there are continuous functions θ_1 and θ_2 on $(0, R)$ with

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$$

and

$$E^0 = \{z:\ \theta_1(|z|) < \arg z < \theta_2(|z|)\},$$

for some branch of $\arg z$.

Corollary 6 [6]. *Let* $-\log\alpha$ *be a log-convex function on* $[0, R)$ *and suppose* E *is a set of uniform approximation on* D_R *such that* E^0 *is sectorial and for some* $0 \leqslant t_1 < R$,

$$\int_{t_1}^R \log\alpha(t)\left\{t\theta(t)\exp\left[\pi\int_{t_1}^{t}\frac{d\rho}{\rho\theta(\rho)}\right]\right\}^{-1} dt > -\infty. \tag{8}$$

Then E *is a set of approximation with speed* α, *if* (42) *holds.*

II. Remarks

1. Theorem 1 is no longer true if the complement of $\bar{E}$ is allowed to have infinitely many components (even if they are non-degenerate). We wish to thank A. A. Gonchar for furnishing us with the following example.

The set $E=\bar{E}$, which will be constructed as the complement of certain "champagne bubbles" (see [7]) in the unit disc D_1, has the pro-

perty that $\mu_z(\partial E \setminus D_1) = 0$, for all $z \in E^0$, and so by Lemma 9 below, satisfies (2) for some asymptotic speed α. However, E is also a set of uniqueness, in the sense that if $f(z) \to 0$ as $z \to \partial D_1$, $z \in E$, then $f = 0$, for any f continuous on E and holomorphic on E^0. Clearly, E cannot be a set of asymptotic approximation in the domain D obtained from D_1 by removing the centers of the "champagne bubbles".

To construct E we need the following fact (see [8]). For given $\varepsilon > 0$, $0 \leqslant \varphi' < \varphi'' < 2$, and $0 < r < 1$, there exists a set σ_ε,

$$\sigma_\varepsilon \subset S = \{te^{i\varphi\pi} : t \in (r, 1),\ \varphi \in (\varphi',\ \varphi'')\},$$

where σ_ε is a union of disjoint closed discs accumulating to $\gamma = \overline{S} \setminus D_1$ such that $\Gamma_\varepsilon = \partial\sigma_\varepsilon \cap D_1$ has length less than ε and $\mu_z(\gamma, D_1 \setminus \sigma_\varepsilon) = 0$.

It is easy to see that there exist $\varepsilon_n \searrow 0$ such that

$$\sum_1^\infty \varepsilon_n 2^{n(p+1)} < [\log(p+2)]^p,$$

for arbitrary $p = 0, 1, 2, \cdots$. We construct as above $\sigma_n = \sigma_{\varepsilon_n}$ for $S = S_n$, with $r = 2^{-n}$, $\varphi' = 2^{-n}$ and $\varphi'' = 2^{-n+1}$. Also, set $\Gamma_n = \Gamma_{\varepsilon_n}$ and $\Gamma_0 = \sigma_0 = \varnothing$. Moreover, we denote by σ_{-n}, S_{-n} etc. the reflection of the sets σ_n, S_n etc. with respect to the real axis. We set

$$E = D_1 \setminus \bigcup_{-\infty}^{+\infty} \sigma_n^0.$$

Now let f be continuous on E and holomorphic on E^0 and suppose $f(z) \to 0$ as $z \to \partial D$, $z \in E$. Putting $f(z) = 0$, for $|z| \geqslant 1$, we have

$$f^{(p)}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(t)}{(t-x)^{p+1}}\, dt, \quad x \in [0, 2]$$

for $p = 0, 1, 2, \cdots$. Since, $|t - x| > 2^{-|n|}$ for $t \in \Gamma_n$ and $x \in [0, 2]$, we have

$$|f^{(p)}(x)| \leqslant p! \sum_1^\infty \varepsilon_n 2^{n(p+1)} < [(p+2)\log(p+2)]^p.$$

Now by the well-known Carleman-Denjoy theorem on quasianalytic functions, $f(x) = 0$, for $x \in [0, 1)$, and so $f = 0$. Thus E is a set of uniqueness and the example is complete.

2. If $\mathbf{C}^* \setminus \widetilde{E}$ has an isolated point a, then it may still be possible to approximate with a certain asymptotic speed α near a, however condition (2) is inappropriate in this situation, for it completely ignores the behaviour of α near a, and it certainly is not possible to approximate arbitrarily fast near an isolated point a.

3. In Theorem 1, we assume that $\log\alpha$ is superharmonic on $\widetilde{E}$. In fact, the remark following lemma 5 shows that we may restrict our attention to functions $\log\alpha$ superharmonic on E^0 (and inner-continuous on E).

4. Corollary 1 was first proved for the unit disc [9]. A. Stray [3] extended the result to quite general domains including certain infinitely connected domains.

5. Condition C was introduced in [4] where it was shown to be necessary for Carleman approximation. Nersesian [5] showed that for arbitrary domains, the conidtion is also sufficient.

6. By considering the nature of the prime ends of $D \cap \partial E^0$ it is possible to relax the condition that $D \cap \partial E^0$ be a curve at each of its points, in the statement of Theorem 2.

7. Of course, if E^0 is connected, it is the same to assert that (3) holds at each point of E^0 as to assert that it holds at some point in E^0.

8. In [6], Corollary 6 was proved for the case that $R = +\infty$.

9. The notion of a completely regular point for the Dirichlet problem is not new; the name "completely regular" perhaps is. Brelot [10] has shown that a regular point need not be completely regular.

In Lemma 3 the condition that ∂G be a curve at the point ζ can be relaxed by considering the prime end structure of ∂G. It follows that the hypothesis in Theorem 2 can also be relaxed. However, conditions (2) and (3) are not in general equivalent as the following example shows.

Example: There is a set E of uniform approximation in C and a log-superharmonic function α such that condition (3) holds but condition (2) fails .

Let y_j be a sequence of positive numbers decreasing to zero and choose δ_j so small that the rectangles

$$E_j = \{z = x + iy : |x| \leqslant j,\ |y - y_j| \leqslant \delta_j\}$$

are disjoint. We may construct a continuous positive function α on C which decreases to zero so rapidly that for $z_j = iy_j$

$$H_{E_j^0}(z_j) \leqslant -j, \tag{9}$$

where the left-member denotes the solution of the Dirichlet problem on E_j^0 with boundary values $\log \alpha$. By Lemma 9 below, we may assume that α is log-superharmonic.

Now let

$$S_j = \{z : |x| \leqslant \varepsilon_j,\ y_{j+1} \leqslant y \leqslant y_j\}$$

be a thin rectangle connecting E_j to E_{j+1}, where ε_j will be specified shortly. Set

$$E = \overline{\bigcup_1^\infty (E_j \cup S_j)}.$$

Then E is a set of uniform approximation. We may choose ε_j decreasing to zero so rapidly that

$$\int_{\partial E^0} \log \alpha \, d|\mu_{z_j}| > -\infty, \tag{10}$$

and thus $H_{E^0} = H_{E^0}^{\log \alpha}$ exists and is finite valued. We may further insist that ε_j decrease so rapidly that for each j,

$$H_{E^0}|E_j^0$$

is bounded. Thus, by Lemma 2 below, $H_{E_j^0}$ and H_{E^0} have the same boundary values on $\partial E_j \cap \partial E$. Hence by making the sequence ε_j still smaller, if necessary, we have that for each j

$$|H_{E_j^0}(z_j) - H_{E^0}(z_j)| < 1. \tag{11}$$

From (9) and (11), we have

$$\int_{\partial E^0} \log \alpha \, d\mu_{z_j} \leqslant -j+1. \tag{12}$$

Thus, from (12), (2) fails. But (11) shows that

$$H_{E^0}(z_1) = \int_{\partial E^0} \log \alpha \, d\mu_{z_1} > -\infty,$$

and since E^0 is connected, H_{E^0} is finite for all $z \in E^0$. Hence (3) holds.

10. The problem of asymptotic approximation by *entire* functions was investigated by Carleman, Roth, Lavrentiev—Keldysh, Keldysh, Mergelian, Dzrbashian, Kaplan, and Arakelian. This problem for more general domains with special conditions imposed on the speed α and set E has been considered by Brown—Gauthier, Roth, Nersesian, Scheinberg. The speeds α considered are particular cases of the speeds we consider.

In all of the works just cited, as well as in the present work, α is assumed to be positive on E. If α is allowed to assume the value zero, then the problem becomes not only one of approximation but also of simultaneous interpolation. This question has been considered by Gauthier—Hengartner, Nersesian, Rubel—Venkateswaran, and Sinclair.

III. Preliminary lemmas

In this section, G will denote an open set in $\mathbf{C}^*$ having non-constant positive superharmonic functions. Thus, we may consider the generalized Dirichlet problem on G. Let φ be a function on ∂G. If the generalized solution on G with boundary values φ exists we denote it by H_G^φ, or simply H_G, if φ is clear from context, and in this case, we say that φ is *resolutive* for G. A well known theorem of Brelot states that φ is resolutive if and only if it is integrable with respect to harmonic measure, and in this case

$$H_G^\varphi(z) = \int_{\partial G} \varphi \, d\mu_z. \tag{13}$$

Lemma 1 [11, p. 23]. *Let φ be resolutive for G. Let V be an open set and define*

$$\psi = \begin{cases} \varphi & \text{on } \partial G \cap V, \\ H_G^\varphi & \text{on } \partial V \cap G. \end{cases} \tag{14}$$

Then ψ is resolutive for $V \cap G$ and

$$H^{\psi}_{V \cap G} = H^{\varphi}_{G} | V \cap G. \tag{15}$$

We recall that a boundary point $\zeta \in \partial G$ is called *regular* if

$$\lim_{z \to \zeta} H^{\varphi}_{G}(z) = \varphi(\zeta) \tag{16}$$

for each φ continuous on ∂G.

Lemma 2. *Suppose $\zeta \in \partial G$ is a regular point and φ is resolutive and continuous at ζ. Then* (16) *holds if and only if H^{φ}_{G} is bounded near ζ.*

Proof: Suppose H^{φ}_{G} is bounded in some neighbourhood V of ζ. Let ψ be given by (14). Since regularity is a local property, ζ is also regular for $V \cap G$, and since ψ is bounded and continuons at ζ, it is well-known that

$$\lim_{z \to \zeta} H^{\psi}_{V \cap G}(z) = \psi(\zeta).$$

Thus, (16) follows from Lemma 1.

The converse is trivial.

We shall say that a point $\zeta \in \partial G$ is *completely regular* if (16) holds for each resolutive function φ which is continuous at ζ.

Lemma 3. *Suppose ∂G is a curve at ζ. Then ζ is a completely regular point.*

Proof: Suppose φ is resolutive and continuous at ζ. Since ∂G is a curve at ζ, there is some neighbourhood W of ζ such that $W \cap G$ is homeomorphic to a disc. To show (16) we may assume that $\varphi \geqslant 0$, for if not we may write $\varphi = \varphi^{+} - \varphi^{-}$ and consider φ^{+} and φ^{-} separately.

Since H^{φ}_{G} is non-negative, it follows that $H^{\varphi}_{G} | W \cap G$ has finite asymptotic values at a dense set of points on ∂G near ζ (see [12, Th IV. 14]). Thus, we may construct a neighbourhood V of ζ such that H^{φ}_{G} is bounded on $G \cap \partial V$. Since φ is continuous at ζ, we may also assume that φ is bounded on $\partial G \cap V$. Thus, from Lemma 1, it follows that H^{φ}_{G} is bounbed in $G \cap V$ and from Lemma 2, we have (16). This completes the proof of Lemma 3.

If v is superharmonic on G, then by the Riesz theorem, we may associate a unique non-negative Borel measure ν to v which we call the Riesz measure for v. Without loss of generality, we shall assume that $\infty \notin G$.

Lemma 4. *Suppose v is superharmonic on G and continuous at some point $z_0 \in G$. Let ν be the Riesz measure for v. Then, the logarithmic potential*

$$P(z, A) = \int_{A} \log \frac{1}{|\zeta - z|} \, d\nu(\zeta)$$

is continuous at z_0, where A is any Borel set whose closure is compact in G.

Proof: It is enough to suppose $\overline{A}$ in a sufficiently small open neigbourhood U of z_0 with compact closure in G. Then, by the Riesz

theorem, $P(z, U)$ is continuous at z_0 and finite valued, for $z \in U$. Since, on each component of G, $P(z, A)$ is either superharmonic or identically infinite, it follows that $P(z, A)$ is superharmonic for all $z \in G$, and finite valued since it is dominated by $P(z, U)$. In particular, $P(z, A)$ (and $P(z, U \setminus A)$) is lower semicontinuous. Thus, we have only to show upper semicontinuity at z_0.

$$\overline{\lim_{z \to z_0}} P(z, A) = \overline{\lim_{z \to z_0}} [P(z, U) - P(z, U \setminus A)] =$$

$$= P(z_0, U) - \underline{\lim_{z \to z_0}} P(z, U \setminus A) \leqslant$$

$$\leqslant P(z_0, U) - P(z_0, U \setminus A) = P(z_0, A).$$

Lemma 5. *Let $D = D_R$ for some $0 < R \leqslant +\infty$, and suppose E is (relatively) closed in D and $D^* \setminus E$ is connected and locally connected. Suppose v is superharmonic on E, continuous on E, and harmonic on E^0. Then for each constant $\varepsilon > 0$, there exists a function h, harmonic on E such that*

$$|h(z) - v(z)| < \varepsilon, \quad z \in E.$$

Remark. Recently, Gauthier, Hengartner and Labreche [13] have obtained a more general result in which it is not necessary to assume that v is superharmonic on E (see also [14], [15]). Since their proof is different and not yet available, we present our own.

Proof: Since $D^* \setminus E$ is connected and locally connected, we may construct an exhaustion of D, $D_j \nearrow D$, such that $D^* \setminus (E \cup \overline{D}_j)$ is also connected and locally connected (see [16, Lemma 3]).

By assumption, there is an open set $U \supset E$ such that v is superharmonic on $\overline{U} \cap D$. Set $D_{-1} = D_0 = \varnothing$ and

$$\sigma_j = (D_j \setminus D_{j-1}) \cap U.$$

Since the Riesz measure for v has no mass on E^0, $P(z, \sigma_j)$ is harmonic on $E^0 \cup \overline{D}_{j-2}$. By Lemma 4, $P(z, \sigma_j)$ is continuous on E. Suppose first that $R < \infty$. Then $P(z, \sigma_j)$ is also continuous on $\overline{E} \cup \overline{D}_{j-2}$ and harmonic on the interior of this same set. By the theorem of Keldysh [17] (see also [18]), there is a function h_j, harmonic on $\overline{E} \cup \overline{D}_{j-2}$ with

$$|h_j(z) - P(z, \sigma_j)| < \varepsilon 2^{-j}, \quad z \in \overline{E} \cup \overline{D}_{j-2}. \tag{17}$$

For each j, there is a function v_j, harmonic on $U \cap D_j$ such that for $z \in U \cap D_j$,

$$v(z) = P(z, U \cap D_j) + v_j(z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{j} P(z, \sigma_k) + v_j(z). \tag{18}$$

Now set

$$h(z) = v(z) + \sum_{k=1}^{\infty} [h_k(z) - P(z, \sigma_k)], \tag{19}$$

which by (17) converges on a neighbourhood of E. From (18), we can write

$$h(z)=\sum_{k=1}^{j}h_k(z)+v_j(z)+\sum_{k=j+1}^{\infty}|h_k(z)-P(z,\sigma_k)|,$$

from which it is clear that h is harmonic on E. From (19) and (17), we have

$$|h(z)-v(z)|<\varepsilon,\ z\in E, \tag{20}$$

and the proof is complete in case $R<\infty$.

If $R=\infty$, we choose a point $z_0\in\mathbf{C}\setminus\overline{E}$ and merely replace $P(z,\sigma_j)$ by $P(z,\sigma_j)+\nu(\sigma_j)\log|z-z_0|$ in (17) and (19). Let $\Delta(z_0)$ be a disc centered at z_0 such that $\overline{\Delta}\cap E=\varnothing$. Then, instead of (17) we have

$$|h_j(z)-P(z,\sigma_j)-\nu(\sigma_j)\log|z-z_0||<\varepsilon\cdot 2^{-j}$$

for $z\in(\overline{E}\cap\overline{D}_{j-2})\setminus\Delta$. Again h will be harmonic on E and satisfy (20). This completes the proof of Lemma 5.

Lemma 6 [19, 20]. *Let E be a set of uniform approximation in a domain D and let ω be a continuous, bounded, zero-free function on E, holomorphic on E^0. Then E is a set of approximation with speed $|\omega|$.*

To prove the Lemma it is enough to construct a function φ, holomorphic on D and satisfying

$$0<|\varphi|<|\omega| \text{ on } E, \tag{21}$$

for then, the $|\omega|$ — approximation of the function f follows from the uniform approximation of f/φ on E.

We may assume that $|\omega|<1$ on E. There exists g, holomorphic on D, such that

$$|2/\omega-g|<1 \text{ on } E,$$

and hence

$$|1/g|<|\omega| \text{ on } E. \tag{22}$$

Let $(z_j)_1^N\ (N\leqslant\infty)$ be the zeros of g, $z_j\overline{\in}E$, taken according to their multiplicities. Now construct a function b, holomorphic in D, $0<|b|<1$ on E and $b(z_j)=0$ for each j. Then from (22) it follows that $\varphi=b/g$ satisfies (21).

To construct b, consider a sequence $(E_j)_1^N$ of sets of uniform approximation in D. $z_j\overline{\in}E_j$ and $E_j\supset E$ for each j. If $N<\infty$, we put $E_j=E$. If $N=\infty$, we assume, that

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j=D.$$

Since $E_j\cup\{z_j\}$ is a set of uniform approximation in D, for each j there exists a function b_j, holomorphic in D, $b_j(z_j)=0$, such that

$$|b_j-1|<2^{-j} \text{ on } E_j.$$

The function

$$b=4^{-1}\prod_{j=1}^{N}b_j$$

satisfies to all our conditions.

Notice, that the existence of b may be easily proved by using results on simultaneons approximation and interpolation (see [21]).

Lemma 7. [22, p. 18]. *If φ is a convex increasing function of u and $u = u(z)$ is subharmonic, then $\varphi(u(z))$ is also subharmonic.*

Lemma 8. *Let α be a positive function decreasing to zero on $[0, R)$. Then, there exist functions α_- and α_+ also decreasing to zero, with $0 < \alpha_- < \alpha < R\alpha_+$, and such that $-\log \alpha_-$ and $-\log \alpha_+$ are both log-convex.*

Proof: Set $P = -\log \alpha$. Choose any sequence of points r_j increasing to R. It is easy to construct a piecewise linear convex function P_- with nodes at r_j and with $P_- > P$. Then we put $\alpha_- = \exp(-P_-)$.

To construct α_+, we may assume $R = 1$. We set

$$A = \{z = x + iy : 0 \leqslant x < 1,\ P(x) \leqslant y\}$$

and denote by $\hat{A}$ the closed convex hull of A. Now set for $0 \leqslant x < 1$,

$$P_+(x) = \min\{y : x + iy \in \hat{A}\}.$$

Clearly, P_+ is convex. It is easy to see that $\hat{A}$ does not meet the line $x = 1$, and so P_+ tends to ∞. Finally, we put $\alpha_+ = \exp(-P_+)$.

Lemma 9. *Let E^0 be an open subset of the unit disc D_1 such that $\mu_z(\partial E^0 \setminus D_1) = 0$, for each $z \in E^0$. Then, there exists a log-superharmonic asymptotic speed α on D_1, such that (2) is satisfied for $\log \alpha$.*

Proof: By Lemma 8, it is sufficient to construct a positive function $\alpha(t)$ decreasing to zero as $t \uparrow 1$, and $\log \alpha$ satisfying (2).

Set, for $s < t < 1$

$$W_s(t) = \sup_{\substack{|z| \leqslant s \\ z \in E^0}} \omega(z, t),$$

and $W_s(t) = 0$ if $E^0 \cap D_s = \varnothing$. By Dini's theorem, $W_s(t) \searrow 0$ as $t \nearrow 1$.

Now set $t_0 = 0$ and choose t_1 so close to 1 that $W_0(t_1) < 2^{-1}$. Having chosen $t_0, t_1, \cdots, t_{j-1}$ such that

$$i W_{t_{i-1}}(t_i) < 2^{-i}, \quad i = 0, 1, \cdots, j-1,$$

we may again, by Dini's theorem, choose t_j so near to 1 that

$$j W_{t_{j-1}}(t_j) < 2^{-j}. \tag{23}$$

Thus, by induction, we have a sequence $t_j \nearrow 1$ and satisfying (23).

Now define

$$\alpha(t) = e^{-j}, \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}.$$

Then, setting $A_j = (D_{t_{j+1}} \setminus D_{t_j}) \cap E^0$, we have

$$\int_{\partial E^0} \log \alpha \, d\mu_z = \int_{D_{t_{i+1}} \cap \partial E^0} + \sum_{j=i+1}^{\infty} \int_{A_j}.$$

If $z \in D_{t_i}$, then for $j \geqslant i + 1$,

$$\int_{\lambda_j} > -j\omega(z, t_j) \geqslant -j W_{t_{j-1}}(t_j) > -2^{-j}.$$

Thus $\log \alpha$ satisfies (2) and the proof is complete.

Lemma 10. *If $\alpha(t)$ is decreasing for $0 \leqslant t < R$, and if $\beta(z, t)$ is also decreasing and uniformly bounded for $z \in E^0$, $\beta(z, R-0) \equiv 0$, then for each $0 < r < R$,*

$$\sup_{z \in D_r \cap E^0} \int_0^R \log \alpha(t)\, d\beta(z, t) < +\infty \tag{24}$$

if and only if

$$\inf_{z \in D_r \cap E^0} \int_0^R \beta(z, t)\, d(\log \alpha(t)) > -\infty. \tag{25}$$

Proof:

$$\int_0^R \log \alpha(t)\, d\beta(z, t) = \lim_{T \nearrow R} \int_0^T \log \alpha(t)\, d\beta(z, t) =$$

$$= (\log \alpha(t))\, \beta(z, t) \Big|_0^R - \lim_{T \nearrow R} \int_0^T \beta(z, t)\, d(\log \alpha(t)).$$

The Lemma follows, since $(\log \alpha(t))\, \beta(z, t)$ is upper bounded, independently of z.

IV. Proofs

1. Proof of Theorem 1A. Suppose E is a set of α-approximation in D. Then, for some $\zeta_0 \in D \setminus E$ and for the function $f(z) = (z - \zeta_0)^{-1}$ and $\varepsilon > 0$, consider a function $g = g_\varepsilon$ satisfying (1). Now choose ε_1 and ε_2 positive such that $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$ and $g_{\varepsilon_1} \neq g_{\varepsilon_2}$. Then $\varphi = g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}$ is holomorphic in D and $\varphi \not\equiv 0$. From (1) we have

$$|\varphi| < \alpha \text{ on } E. \tag{26}$$

If $E^0 \neq \varnothing$, then it follows from (26), that

$$\overline{\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in E^0}}} \log |\varphi(z)| \leqslant \log \bar{\alpha}(\zeta), \quad \zeta \in \partial E^0. \tag{27}$$

For each n, the function $\beta_n = n \vee \log \bar{\alpha}$ is bounded semicontinuous on ∂E^0 and therefore resolutive. Since $\log |\varphi|$ is subharmonic on E^0 and by (27) has boundary values $\leqslant \beta_n$, then we have, using (13) and the definition of the generalized solution to the Dirichlet problem, that

$$\log |\varphi(z)| \leqslant \int_{\partial E^0} \beta_n\, d\mu_z, \quad z \in E^0.$$

Letting here $n \to -\infty$, we have

$$\log |\varphi(z)| \leqslant v(z) = \int_{\partial E^0} \log \bar{\alpha}\, d\mu_z, \quad z \in E^0. \tag{28}$$

The integral converges since $\log \alpha$ is upper bounded and since $\nu \not\equiv 0$.

It follows from (28) that there is an exhaustion $K_j \nearrow D$ and sequence $M_j > -\infty$, such that for each j

$$v(z) > M_j, \quad z \in E^0 \cap \partial K_j. \tag{29}$$

From (29) and Lemma 1, it follows that v is bounded on $K_j \cap E$ for each j. This completes the proof of Theorem 1A.

2. Proof of Theorem 1B. Using Tietze's Extension Theorem, we may be sure, that the set $\tilde{E}$ is a set of uniform approximation in D. Using for $\tilde{E}$ Lemma 6 and again Tietze's Theorem, we see, that to prove Theorem 1B, it is enough to construct a function ω, continuous on $\tilde{E}$ and holomorphic on E^0, such that

$$0 < |\omega| < \alpha \text{ on } \tilde{E}. \tag{30}$$

Let $K_1, K_2, \cdots, K_n$ be the complementary components of D, which meet with the closure of $\tilde{E}$. Suppose that for each $j = 1, 2, \cdots, n$ we can construct a neighbourhood V_j of K_j and a function ω_j holomorphic on $D_j = \mathbf{C}^* \setminus K_j$ and satisfying

$$0 < |\omega_j| < \alpha \text{ on } \tilde{E}_j = \tilde{E} \cap \overline{V}_j. \tag{31}$$

Then, for some suitably small constant $\lambda > 0$, we have that

$$\omega = \lambda \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$$

is holomorphic on D and satisfies (30) on $\tilde{E}$. Thus we have only to construct each ω_j, $j = 1, 2, \cdots, n$.

Fix j then. We shall consider two cases depending on whether K_j meets with $\overline{D \setminus E}$ or not. Suppose first that

$$K_j \cap \overline{(D \setminus E)} = \emptyset.$$

Then, there is an open Jordan neighbourhood V_j of K_j such that

$$D_j \cap \overline{V}_j = E^0 \cap \overline{V}_j = \tilde{E} \cap \overline{V}_j = \tilde{E}_j \subset E^0.$$

By the hypothesis of the Theorem, K_j cannot be a singleton. Putting

$$v(z) = \int_{\partial E^0} \log \alpha \, d\mu_z, \quad z \in E^0,$$

we may write

$$v | \tilde{E} = v_1 - v_2,$$

where v_1 is harmonic in D_j and v_2 is harmonic in V_j. Thus, v_2 is bounded on K_j and so for some constant λ,

$$v_1 - \lambda < v \text{ on } \tilde{E}_j.$$

Since v is the greatest harmonic minorant of $\log \alpha$ on E^0, we also have

$$v_1 - \lambda < \log \alpha \text{ on } \tilde{E}_j.$$

Now write $h_j = v_1 - \lambda$ and let $\tilde{h}_j$ be a harmonic conjugate of h_j. Then $\omega_j = \exp(h_j + i\tilde{h}_j)$ is holomorphic on D_j and satisfies (31).

Consider now the second case: that is,

$$K_j \cap (\overline{D \setminus E}) \neq \varnothing.$$

In this case, there exists a neighbourhood V_j of K_j such that $\tilde{E} \cap \bar{V}_j = \bar{E}_j$ is a set of uniform approximation in D_j.

By mapping D_j conformally to D_R for some $0 < R \leqslant +\infty$, it follows from Lemma 5, that there is a function h_j, harmonic on $\bar{E}_j$ with

$$|h_j(z) - v(z)| < 1, \quad z \in \bar{E}_j, \tag{32}$$

where

$$v(z) = \begin{cases} \int_{\partial E^0} \log \alpha \, d\mu_z, & z \in E^0, \\ \log \alpha, & z \in U \setminus E^0, \end{cases} \tag{33}$$

and U is the domain of definition of α. By a result in [16] (see also [15]), there is a function u_j, harmonic on D_j, with

$$|u_j - h_j| < 1, \quad z \in \tilde{E}_j. \tag{34}$$

Now let $\tilde{u}_j$ be a harmonic conjugate of u_j and set

$$\omega_j = \exp(u_j - 2 + i\tilde{u}_j).$$

Then, from (32), (33), and (34), it follows that ω_j satisfies (31).

This completes the proof of Theorem 1B.

3. Proof of Theorem 1. Theorem 1 is an immediate consequence of Theorem 1A and Theorem 1B.

4. Proof of Theorem 2. Suppose the hypotheses of Theorem 2 are satisfied. By (3), $\log \alpha$ is resolutive. Thus, (2) for $\log \alpha$ follows from Lemmas 2 and 3. Hence Theorem 2 follows from Theorem 1.

5. Proof of Theorem 3. Let E be a set of α-asymptotic approximation. Then $\log \alpha = -\infty$ on $\partial E^0 \setminus D$ and so by Theorem 1A, $\omega(z, R) = 0$ for each $z \in E^0$. If α is decreasing, then we have the identity

$$\int_0^R \log \alpha(t) \, d\omega(z, t) = -\int_{\partial E^0} \log \alpha \, d\mu_z$$

for $z \in E^0$, and (4) follows from Theorem 1A.

To show the converse, we remark first, that it follows from the conditions on α, that α is decreasing on some interval $[t_0, R)$. We may assume $t_0 = 0$ and then $\alpha(|z|)$ is a log-superharmonic speed on D_R, satisfying (4). By the above mentioned identity, α satisfies the conditions

of Theorem 1B for $D=D_R$. Since E is a set of uniform approximation in D_R, it follows that $\mathbf{C}^* \setminus \tilde{E}$ is connected. Then from Theorem 1B it follows that E is a set of α-approximation in D_R.

6. Proof of Corollary 1. Suppose E is a set of α-approximation for some asymptotic speed α. Then $\log\alpha = -\infty$ on $\partial E^0 \setminus D$ and by Theorem 1A, for $\log\alpha$ condition (2) is satisfied. This implies that $\mu_z(\partial E^0 \setminus D)) = 0$ for $z \in E^0$.

Conversely, let $\mu_z(\partial E^0 \setminus D) = 0$ for $z \in E^0$. To prove, that E is a set of asymptotic approximation, it is enough by Theorem 1B, to construct an asymptotic log-superharmonic speed α on some neighbourhood of $\bar{E}$, such that for $\log\alpha$ condition (2) is satisfied.

Denote by $K_1, \cdots, K_n$ the complementary components of D, which meet with the closure of $\bar{E}$. We may assume, that no K_j can be a singleton. By conformally mapping $\mathbf{C}^* \setminus K_j$ onto the unit disc D_1, it follows from Lemma 9, that there is a log-superharmonic asymptotic speed α_j on $\mathbf{C}^* \setminus K_j$, such that for $\log\alpha_j$, condition (2) is satisfied. Then obviously the speed

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$$

is asymptotic and log-superharmonic on D, such that condition (2) for $\log\alpha$ satisfied.

7. Proof of Corollary 2. Suppose first that α is a log-superharmonic speed on E. Fix K compact in D and let K' be a compact set associated to K as in Conidtion C. Then, for $z \in K \cap E^0$, $\mu_z(\partial E^0 \setminus K') = 0$ and so

$$\int_{\partial E^0} \log\alpha \, d\mu_z = \int_{K' \cap \partial E^0} \log\alpha \, d\mu_z \geqslant \inf_{K' \cap \partial E^0} \log\alpha > -\infty.$$

Thus, (2) holds for each log-superharmonic speed, and so by Theorem 1, E is a set of α-approximation for each log-superharmonic speed α.

Now if α_0 is an arbitrary speed, then by Lemma 8 and the technique used in Corollary 1, we may construct a log-superharmonic speed α on E with $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$. Since we have already shown that E is a set of α-approximation, it is, all the more, a set of α_0-approximation.

Suppose, conversely, that E fails to satisfy Condition C. Then, for some $K \subset D$ and some sequence $K_j \nearrow D$, there are components E_j^0 of E^0 which meet both K and $D \setminus K_j$. Choose a sequence $z_j \in E_j^0 \cap K$. It is easy to construct a speed α which decreases to zero so rapidly that

$$\int_{\partial E_j^0} \log\alpha \, d\mu_{z_j} < -j, \quad j = 1, 2, \cdots.$$

Hence by Theorem 1A, E is not a set of α-approximation, and so, not a set of Carleman approximation. This completes the proof of Corollary 2.

8. Proof of Corollary 3. From Lemma 10 we have

$$\int_0^R \bar{\theta}(t)\, d(\log \alpha(t)) > -\infty. \tag{35}$$

For $z \in D_r \cap E^0$, $r < t$, it is clear that $\omega(z; t)$ is less than the harmonic measure of $E^0 \cap \partial D_t$ with respect to the open set $E^0 \cap D_t$. This, in turn, is less than the harmonic measure of the same set with respect to D_t. This last quantity is dominated by $\lambda(r)\theta(t)$, for some constant $\lambda(r)$. Thus, $\omega(z, t) \leqslant \lambda(r)\,\bar{\theta}(t)$. Hence,

$$\int_0^R \omega(z, t)\, d(\log \alpha) \geqslant \int_0^r \omega(z, t)\, d(\log \alpha) + \lambda(r) \int_r^R \tilde{\theta}(t)\, d(\log \alpha).$$

Hence from (35) and Lemma 10, (5) is satisfied, and so Corollary 3 follows from Theorem 3.

9. Proof of Corollary 4. First, we shall show that we may assume that $-\log \alpha(t)$ is log-convex. Set $\gamma = (\log c)^{-1}$ for $c > 1$ and denote

$$\log \alpha_c(r) = \gamma \int_1^{cr} \log \alpha(t)\, \frac{dt}{t}.$$

Obviously, $-\log \alpha_c(r)$ is a convex function of $\log r$. Assuming $\alpha < 1$, we have for $r > 1$:

$$\log \alpha_c(r) < \gamma \int_r^{cr} \log \alpha(t)\, \frac{dt}{t} < \log \alpha(r).$$

Integrating by parts, and since $\log \alpha_c$ is upper-bounded, we have that (6) holds for α_c and k', if and only if

$$\int_1^{\infty} \exp\left[-\pi \int_1^{k't} \frac{d\rho}{\rho\theta(\rho)}\right] \log \alpha(ct)\, \frac{dt}{t} > -\infty.$$

Since

$$\frac{dt}{t} \leqslant 2\pi \frac{dt}{t\theta(k't)},$$

the finiteness of the last integral follows trom (6) after the substitution $ct \to t$, if we choose $c > 1$ such that $k' = ck < 1$. Thus, in proving Co-

rollary 4, we may assume, that $-\log \alpha$ is an increasing log-convex function.

We may also assume that E is not a set of Carleman approximation, for otherwise E is trivially a set of α-approximation. Thus, by Corollary 2, there is an r_0, $0<r_0<\infty$, such that for each $t>r_0$ some component of E^0 meets both ∂D_{r_0} and ∂D_t.

Fix $r>r_0$ and suppose $z\in D_r\cap E^0$. Let D be the component of $E^0\cup D_r$ which contains $z=0$. Then D is unbounded. Let Δ_t denote the component of $D\cap D_t$ which contains $z=0$ and let $t\theta(t)$ be its linear measure. Following Tsuji, we define $\theta^*(t)$ as follows. If $\partial D_t\overline{\subset}E^0$, then we put $\theta^*(t)=\theta(t)$ and if $\partial D_t\subset E^0$, we put $\theta^*(t)=\infty$. Since E is a set of uniform approximation, and we may assume that $E\neq \mathbf{C}$, there is some t_0 such that $\theta^*(t)=\theta(t)$ for $t>t_0$. Let $u_t(z)$ be the harmonic measure of $\partial\Delta_t\cap\partial D_t$ with respect to Δ_t. Then, Tsuji has shown [12, p. 116], that if $z\in D_r\cap E^0$ and $r<kt/2$, $0<k<1$, then

$$u_t(z)\leqslant \frac{9}{\sqrt{1-k}}\exp\left[-\pi\int_{2r}^{kt}\frac{d\rho}{\rho\,\theta^*(\rho)}\right].$$

Since $\theta^*(t)=\theta(t)$ for $t>t_0$ and we may choose $2r>kt_0$, we have

$$u_t(z)\leqslant \lambda_r\exp\left[-\pi\int_{t_0}^{kt}\frac{d\rho}{\rho\theta(\rho)}\right] \tag{36}$$

for $t>(2/k)\,r$, where λ_r is some constant. Since $\omega(z,t)=\mu_z(\partial E^0\setminus D_t)$, it is clear that $\omega(z,t)$ is dominated by the harmonic measure of $\partial D\setminus D_t$ with respect to the domain D. This in turn is dominated by $u_t(z)$. Thus, from (36), we have

$$\omega(z,t)\leqslant\lambda_r\exp\left[-\pi\int_{t_0}^{kt}\frac{d\rho}{\rho\theta(\rho)}\right]. \tag{37}$$

From (6) and Lemma 10, we have that

$$\int_1^{\infty}\exp\left[-\pi\int_{t_0}^{kt}\frac{d\rho}{\rho\theta(\rho)}\right]d(\log\alpha)>-\infty. \tag{38}$$

Hence from (38), (37) and Lemma 10, we have (4) and so Corollary 4 follows from Theorem 3.

10. Proof of Corollary 5. Suppose α satisfies (7). There exists a set E_0 of uniform approximation, such that $E\subset E_0$ and for E_0, $|\theta(t)-2\pi|<t^{-1}$, $t\geqslant 1$.

Then conditions (6) and (7) are equivalent, and it follows from Corollary 4, that E_0 is a set of α-approximation. Then so is the set E.

Now let E is a set of α-approximation by entire functions for

some decreasing asymptotic speed $\alpha(|z|)$. Then by Theorem 3, α satisfies (4). Using Lemma 10 (for $\beta := \omega$), we have from (25):

$$\inf_{z \in D_r \cap E^0} \int_0^{\infty} \omega(z, t)\, d(\log \alpha(t)) > -\infty \tag{39}$$

for each $0 < r < \infty$.

Suppose for the set E, that

$$\omega(z, t) > \frac{\lambda_r}{\sqrt{t}} \tag{40}$$

for $z \in D_r \cap E^0$ and $t > cr$, where $0 < r < \infty$, c and λ_r are some constants. It follows from (39) and (40) that

$$\int^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\, d(\log \alpha(t)) > -\infty.$$

Hence α satisfies (7).

It is easy to construct a set E of uniform approximation, satisfying (40). For instance, E is such a set, if

$$E \supset E_0 = \{z : z = x + iy,\ y \leqslant x^2\}.$$

11. Proof of Corollary 6. We shall estimate $\omega(z, t)$ using the Ahlfors distortion theorem.

Fix $z \in D_r \cap E^0$, and suppose $r < t < R$, and t is very close to R. We map E^0 to a strip S_E by the log-function. We then map the strip S_E to the strip $S_\pi = \{X+iY : |Y| < \pi/2\}$ so that $\partial E^0 \setminus D_R$ corresponds to $X = +\infty$. Consider the image L_t of $E^0 \cap \partial D_t$ in S_π and denote by $u_1(t)$ the minimum value of X for points on L_t. Then, by the Ahlfors distortion theorem (see [23, p. 101])

$$u_1(t) > \lambda + \pi \int_{t_1}^{t} \frac{d\rho}{\rho\theta(\rho)}, \tag{41}$$

for some constant λ, provided

$$\int_{t_1}^{R} \frac{dt}{t\theta(t)} = \infty. \tag{42}$$

This last formula is obvious if $R = +\infty$.

From (41), we have that $\omega(z, t)$ is dominated by the harmonic measure of $\partial S_\pi \cap \{X > u_1(t)\}$. This we estimate by mapping S_π to a half-plane H so that $\omega(z, t)$ is dominated by the harmonic measure of $H \cap \{|W| > \exp[u_1(t)]\}$. Since we may assume that the image of z is of module less than $\exp[u_1(t)]$, this in turn is bounded by the harmonic

measure of the half-circle of radius $\exp[u_1(t)]$ with respect to the half-disc. Thus, (see [23, p. 49]), for $z \in D_r \cap E^0$

$$\omega(z, t) \leqslant \lambda_r \exp[-u_1(t)]$$

for some constant λ_r.

Hence, from (41), we have

$$\omega(z, t) \leqslant \lambda_r \exp\left[-\pi \int_{t_1}^{t} \frac{dt}{t\theta(t)}\right].$$

Corollary 6 then follows from Lemma 10 by the same reasoning as was used in the proofs of Corollaries 3, 4, and 5.

Institute of Mathematics
Acad. Sci. of the Armenian SSR

Université de Montréal

Recieved 15.VI.1982

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Գ. Մ. ԳՈՐԾՆ. Հոլոմորֆ ֆունկցիաներով շոշափումային մոտավորության մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք D-ն սիրուշի է $\mathbb{C}^*$-ում և E-ն D-ի հարաբերական փակ, սեփական ենթաբազմության է։ Թող $\alpha > 0$ ֆունկցիան լինի անընդհատ E-ի վրա և սահմանափակ։ Անվանենք E-ն α-մոտավորության բազմություն (D-ում), եթե ամեն մի $\varepsilon > 0$ թվի և կամայական f ֆունկցիայի համար, որն անընդհատ է E-ի վրա և հոլոմորֆ E^c-ում, գոյություն ունի D-ում հոլոմորֆ այնպիսի g ֆունկցիա, որ

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon\alpha(z), \quad z \in E.$$

$\alpha = 1$ դեպքում E-ն կանվանենք հավասարաչափ մոտավորության բազմություն։ Վերջին-ներիս նկարագրությունը տրված է [1]-ում։

Ներկա աշխատանքում հետազոտվում է α-մոտավորության բազմությունների նկա-րագրման խնդիրը։

Հիմնական թեորեմ 1-ում դիտարկված է այն դեպքը, երբ D-ն վերջավոր կապանի է, իսկ E-ն D-ում հավասարաչափ մոտավորության այնպիսի բազմություն է, որ $\mathbb{C}^* \setminus E$-ն չունի մեկուսացված կետեր։

α-ից պահանջվում է, որ նրա նեղացումը E^0-ի վրա ունենա անընդհատ շարունակություն $\overline{(E^0)}$-ի վրա, ընդ որում $\log\alpha$-ն լինի սուպերհարմոնիկ ($\overline{E^0}) \cap D$-ի վրա։ Նշված պայման-ների դեպքում, որպեսզի E-ն լինի α-մոտավորության բազմություն, անհրաժեշտ է ու բա-վարար, որ

$$\inf_{z \in K \cap E^0} \int_{\partial E^0} \log\alpha \, d\mu_z > -\infty$$

ամեն մի $K \subset D$ կոմպակտի համար, որտեղ μ_z-ը ∂E^0-ի հարմոնիկ չափն է E^0-ի նկատմամբ։

Նշված արդյունքը միավորում է չափական և երկրաչափական բնույթի մի շարք հայտնի հայտանիշներ, որոնք վերաբերվում են ամբողջ և անալիտիկ ֆունկցիաներով ասիմպտոտա-կան մոտավորություններին ($\alpha(z) \to 0$, $z \to \partial D$ դեպքում) և բերում է այդ բնույթի նոր հայտանիշների (տես թեորեմներ 2—3-ը և հետևանքներ 1—6-ը)։

Н. У. Аракелян, П. М. Готье. О касательном приближении голоморфными функциями (резюме).

Пусть D — область в $\mathbb{C}^*$ и E — относительно замкнутое собственное подмножество D. Пусть $\alpha > 0$ — непрерывная на E и ограниченная функция. Назовем E *множеством*

α- приближения (в D), если для каждого $\varepsilon > 0$ и произвольной функции f, непрерывной на E и голоморфной в E^0, существует такая голоморфная в D функция g, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon\alpha(z), \quad z \in E.$$

В случае $\alpha = 1$ будем называть E *множеством равномерного приближения*. Описание таких E дано в [1].

В настоящей работе исследуется задача описания множеств α-приближения. В основной теореме 1 рассматривается случай, когда D — конечносвязная область, а E — множество равномерного приближения в D, такое, что $\mathbf{C}^* \setminus E$ не имеет изолированных точек. Относительно α предполагается, что ее сужение на E^0 допускает непрерывное продолжение на $\overline{(E^0)}$, причем $\log \alpha$ — супергармоническая на $\overline{(E^0)} \cap D$. Тогда для того, чтобы E было множеством α-приближения, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{z \in K \cap E^0} \int_{\partial E^0} \log \alpha \, d\mu_z > -\infty$$

для каждого компакта $K \subset D$, где μ_z — гармоническая мера ∂E^0 относительно E^0.

Отмеченный результат объединяет ряд известных метрических и геометрических критериев об асимптотическом приближении целыми и аналитическими функциями (когда $\alpha(z) \to 0$ при $z \to \partial D$) и приводит к новым критериям такого характера (см. теоремы 2—3 и следствия 1—6).

REFERENCES

1. *Н. У. Аракелян.* Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 3, № 4—5, 1968, 273—285.
2. *К. Куратовский.* Топология. Том I, Мир, Москва, 1966.
3. *A. Stray.* On uniform and asymptotic approximation, Math. Ann., 234, 1978, 61—68.
4. *P. Gauthier.* Tangential approximation by entire functions and functions holomorphic in a disc, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 4, № 5, 1969, 319—326.
5. *А. А. Нерсесян.* О множествах Карлемана, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 6, № 6, 1971, 465—471.
6. *Н. У. Аракелян.* Об асимптотическом приближении целыми функциями в бесконечных областях. Мат. сб., 53 (95), № 4, 1961, 515—538.
7. *T. W. Gamelin.* Uniform algebras, Prentice—Hall, Inc., 1969.
8. *А. А. Гончар.* О примерах неединственности аналитических функций, Вестник МГУ, мат., мех., 1, № 1, 1964, 37—43.
9. *L. Brown, P. M. Gauthier, W. Seidel.* Possibility of complex asymptotic approximation on closed sets, Math. Ann. 281, 1975, 1—8.
10. *M. Brelot.* Sur la mesure harmonique et la probleme de Dirichlet, Bull. Sci Math., (2) 69, 1945, 153—156.
11. *C. Constantinescu and A. Cornea.* Ideale Ränder Riemannscher Flcähen, Berlin Springer, 1963.
12. *M. Tsuji.* Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen Co., Tokyo, 1959.
13. *P. M. Gauther, W. Hengartner, M. Labreche.* Une caracterization des ensemles d'approximation harmonique de R^n on d'une surface de Riemann (manuscript).
14. *A. Boivin. P. M. Gauthier and W. Heugartner.* Approximation uniforme par des functions harmoniques avec singularitès, Proc. Rom. Finnish Seminar, 1981 (to appear).
15. *P. M. Gauthier, W. Hengartner.* Approximation qualitative sur des ensembles non-bornès. Sèm. Math. Sup., 1981, Presses Universite de Montrèal (to appear).
16. *P. M. Gauthier, M. Goldstein and W. H. Ow.* Uniform approximation on unbounded sets by harmonic functions with logarithmic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., 261 (1980), 169—183.

17. *М. В. Келдыш.* О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, УМН, ст. сер., 8, (1941), 171—292.

18. *J. Deny.* Systèms totaux de fonctions harmoniques, Ann. Inst. Fourier 1 (1949), 103—113.

19. *Н. У. Аракелян.* Некоторые вопросы теории приближений и теории целых функций, докторская диссертация, 1970.

20. *N. U. Arakelian.* Approximation complexe et proprietes des fonctions analytiques, Actes, Congres intern. Math., 1970, tome 2, 595—600.

21. *P. M. Gauthier, W. Hengartner.* Complex approximation and simultaneous interpolation on closed sets. Can. J. Math., 29, 1977, 701—706.

22. *L. Hörmander.* An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand, London, 1966.

23. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Москва—Ленинград, ГИТТЛ. 1941.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 6, 1982 Математика

УДК 517.988

А. Б. НЕРСЕСЯН

СТРУКТУРА РЕЗОЛЬВЕНТ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введение

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма второго рода

$$(\mathrm{I}-\mathrm{K})\,y = y(x) - \int_D K(x,t)\,y(t)\,dt,\quad x\in D \tag{1}$$

где D — область из R^n (необязательно связная), $dt\ (=dt_1\cdots dt_n)$ — лебегова мера, $K(x,t)$ — комплекснозначная $(N\times N)$-матрица $(N>1$, $(x,t)\in\Omega=D\times D)$, а в качестве y могут фигурировать $(N\times\alpha)$-матрицы $(\alpha\geqslant 1)$. Условия на ядро K и, следовательно, пространство, на котором определен оператор K, пока уточнять не будем. Если существует оператор $\mathrm{I}+\mathrm{R}$ с ядром R, обратный справа к $\mathrm{I}-\mathrm{K}$ $((\mathrm{I}-\mathrm{K})\times$ $\times(\mathrm{I}+\mathrm{R})=\mathrm{I})$, то

$$R(x,t) = K(x,t) + \int_D K(x,s)\,R(s,t)\,ds. \tag{2}$$

Соответственно, при обратимости слева $((\mathrm{I}+\mathrm{R})(\mathrm{I}-\mathrm{K})=\mathrm{I})$

$$R(x,t) = K(x,t) + \int_D R(x,s)\,K(s,t)\,ds. \tag{2'}$$

В дальнейшем будем считать оператор $\mathrm{I}-\mathrm{K}$ обратимым, т. е. предполагать, что существует ядро $R(x,t)$ с соответствующими свойствами, удовлетворяющее интегральным уравнениям (2), (2').

Таким образом, чтобы построить оператор $\mathrm{I}+\mathrm{R}=(\mathrm{I}-\mathrm{K})^{-1}$ надо, вообще говоря, решать уравнение (2) при *любом значении* параметра $t\in D$ (или (2')—при всех $x\in D$). При наличии дополнительной информации о ядре K эта процедура в некоторых случаях значительно упрощается. Так, в случае вырожденного ядра $K(x,t)=\alpha(x)\,\beta(t)$ (α и β — матрицы размеров $(N\times p)$ и $(p\times N)$ соответственно, $p\geqslant 1$) построение резольвентного ядра сводится к чисто алгебраической задаче. Другой пример—это класс разностных ядер, представляющий большой теоретический и практический интерес $(n=1,\ D=(a,b)$, $K=K(x-t))$. Хорошо известно (см., например, [1], § 5), что в случае оператора в полных свертках $(a=-\infty,\ b=+\infty,\ K=K(x-t)$, $K(x)\in L_1(-\infty,+\infty))$ оператор $\mathrm{I}-\mathrm{K}$ ограничен в L_1, а обратный

существует при* $\det(I-\widehat{K}(\xi))\neq 0$ ($\widehat{K}(\xi)$ — преобразование Фурье $K(x)$) и также является оператором свертки ($R=R(x-t)$). В этом случае для восстановления ядра R достаточно решить уравнение (2) при *некотором* зафиксированном значении t ($\in R^1$) (или (2′) — при некотором зафиксированном x).

В случае конечного отрезка $(0, \tau)$ и $K=K(|x-t|)$ В. В. Соболев ([2], 1958) обнаружил следующую замечательную формулу**

$$(\partial_x+\partial_t)\,R(x,t)=R(0,x)\,R(0,t)-R(0,\tau-x)\,R(0,\tau-t). \quad (3)$$

В том же 1958 г. М. Г. Крейн и И. Ц. Гохберг построили общую теорию уравнений (и систем) Винера-Хопфа ($n=1$, $D=(0,+\infty)$, $K=K(x-t)$, $K(x)\in L_1$) при условии нётеровости: $\det(I-\widehat{K}(\xi))\neq 0$, $\xi\in R^1$. В этом случае (см. [3, 4]) оператор $\mathbf{I}-\mathbf{K}$ обратим при условии $\operatorname{ind}\det(I-\widehat{K}(\xi))=0$, а для резольвентного ядра R справедлива формула

$$R(x,t)=R(x-t,0)+R(0,t-x)+\int_0^{\min(t,\,x)} R(x-s,0)\,R(0,t-s)\,ds, \quad (4)$$

где принято $R(x,0)=R(0,x)\equiv 0$ при $x<0$.

Первый результат указанного типа принадлежит, по-видимому, Г. Плачеку, получившему еще в 1945 г. формулу (4) в случае известного в теории переноса излучения ядра $K=E_1|x-t|$ (см. [24], § 6.7).

Результаты подобного типа содержатся и в построенной в 1972—80гг Л. А. Сахновичем теории обращения самых общих операторов с разностным ядром (см. [10]).

В дискретном случае, т. е. когда речь идет об обращении неособой тёплицевой матрицы $T=\|t_{i-j}\|$, $T^{-1}=R=\|r_{ij}\|$, $(i,j=0,1,\cdots,m)$, В. Тренч в 1964 г. предложил следующий весьма эффективный алгоритм (при $r_{00}\neq 0$, $t_k=t_{-k}$, $k=1,2,\cdots,m$)

$$r_{i+1,\,j+1}-r_{i,j}=r_{00}^{-1}\{r_{0,\,i+1}\,r_{0,\,j+1}-r_{0,\,m-i}\,r_{0,\,m-j}\},$$
$$i,j=0,1,2,\cdots,m-1. \quad (5)$$

Нетрудно усмотреть, что формула (5) является дискретным аналогом формулы В. В. Соболева (3).

Соотношения (3)—(5) позволяют восстановить обратный оператор $(\mathbf{I}-\mathbf{K})^{-1}$ (матрицу T^{-1}) по значениям резольвентного ядра (матрицы) на границе области его определения (или на ее части). В дальнейшем формулы (3), (4) были обобщены на случай более общих тёплицевых операторов, а в случае тёплицевых и ганкелевых матриц были получены и некоторые новые алгорифмы обращения (см. [6—9]).

В недавней серии работ Т. Кайлата и М. Морфа с соавторами ([11—13]) введены и изучены новые классы матриц, обобщающих

---

* Через I обозначена единичная матрица.

** Здесь и далее $\partial_x=\partial/\partial x$.

тёплицевы, а в случае оператора (1) на конечном отрезке — симметричные ядра, определяемые уравнением

$$(\partial_x + \partial_t) K(x, t) = d(x) \Lambda d'(t), \quad 0 \leqslant x, t \leqslant \tau < +\infty, \tag{6}$$

где Λ — постоянная $(\alpha \times \alpha)$-матрица, $\alpha \geqslant 1$. d — $(N \times \alpha)$-матрица, d' — транспонированная к ней. Этот подход оказался весьма удачным, так как для восстановления резольвентного ядра (которое тоже, оказывается, удовлетворяет уравнению вида (6)) и в этом случае надо предварительно решить лишь *конечное число* уравнений вида $(I - K)\, y = f$ (f — заданный вектор-столбец, y — искомый). В указанный класс входят многие представляющие большой интерес операторы нетёплицева типа: например, композиции двух тёплицевых или даже ганкелевых операторов (см. ниже пример 5 § 1).

В данной работе вводятся и изучаются более общие интегральные операторы, ядра которых удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям*. Результаты, относящиеся к конкретным классам операторов, допускающим непосредственное описание, выделены в примерах.

§ 1. Интегральный оператор на интервале

1°. Пусть $n = 1$, $D = (a, b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, $\Omega = (a, b) \times (a, b)$. Введем в рассмотрение формально сопряженные операторы L и L^*.

$$Lf = \sum_{k=0}^{m} A_k(x)\, \partial_x^k f, \quad L^* f = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\, \partial_x^k (f A_k(x)), \tag{7}$$

где A_k $(k = 0, 1, \cdots, m)$ и f — $(N \times N)$ матрицы из $C^m(a, b)$.

Теорема 1. *Пусть* $-\infty < a < b < +\infty$, $K \in C^m(\Omega) \cap C^{m-1}(\overline{\Omega})$**,

$$LK \overset{\text{def}}{=} L_x K(x, t) - L_t^* K(x, t) = p(x)\, q(t), \quad (x, t) \in \Omega, \tag{8}$$

где $p(x)$, $q(x)$ — *кусочно-гладкие матрицы размеров* $(N \times \alpha)$ *и* $(\alpha \times N)$ *соответственно* $(\alpha \geqslant 1)$. *Тогда*

$$LR = \left\{ \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} (-1)^{l+j+1}\, \partial_s^{l-j} [R(x, s)\, A_l(s)]\, \partial_s^{j-1} R(s, t) \right\}_{s=a}^{s=b} + P(x)\, Q(t), \tag{8'}$$

---

* В работе [11] утверждается, что предлагаемый авторами подход позволяет допустить в (6) и операторы $(\partial_x + \partial_t)^n$ $(n \geqslant 2)$, однако никаких разъяснений не дано, а сами эти операторы выпадают из схемы, предлагаемой ниже. Там же содержится замечание о ганкелевом ядре $K = K(x + t)$, также оставленное без каких-либо разъяснений, в то время как выясняется (см. ниже, примеры 2, 3 и 5), что в этом случае возникает интересная и, во многих отношениях, новая ситуация.

** Нижний индекс при операторе здесь и далее указывает переменную, по которой он действует.

где матрицы P и Q определяются из уравнений $(I-K_x)P=p(x)$ *и* $(I-K_t^*)Q=q(t)$*.

■ Доказательство. Применим к обеим частям уравнения (2) оператор L_x и воспользуемся соотношением (8)

$$L_x R(x,t)=L_t^{\#}K(x,t)+p(x)\left\{q(t)+\right.$$

$$\left.+\int_a^b q(s)R(s,t)\,ds\right\}+\int_a^b L_x^{\#}K(x,s)R(s,t)\,ds=$$

$$=L_t^{\#}K(x,t)+p(x)\left\{q(t)+\int_a^b q(s)R(s,t)\,ds\right\}+$$

$$+\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\int_a^b \partial_s^l\left(K(x,s)A_l(s)\right)R(s,t)\,ds.$$

Проведя в последних интегралах l-кратное интегрирование по частям, получим, с учетом (2), (2′)

$$L\,R(x,t)=p(x)(I+R_t^*)q(t)+\int_a^b K(x,s)\,LR(s,t)\,ds+$$

$$+\left\{\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}(-1)^{l+j+1}\,\partial_s^{l-j}\left[K(x,s)A_l(s)\right]\partial_s^{j-1}R(s,t)\right\}_{s=a}^{s=b},\qquad(9)$$

откуда, снова воспользовавшись соотношением (2′), придем к формуле (8′). ■

В случае однородного ($p=q\equiv 0$) уравнения первого порядка

$$LK\overset{\text{def}}{=}A_1(x)\,\partial_x K+\partial_t(KA_1(t))+A_0(x)K-KA_0(t)=0\qquad(10)$$

получаем следующее обобщение формулы В. В. Соболева (3) (а также формул И. Ц. Гохберга — А. А. Семенцула — Г. Хайнига [6, 7], см. ниже, замечание 1).

$$LR=R(x,a)A_1(a)R(a,t)-R(x,b)A_1(b)R(b,t).\qquad(10')$$

2°. Остановимся на некоторых частных случаях.

◀ Пример 1. Пусть в (10) $A_0=0$ и A_1 — постоянная диагональная матрица $A_1=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N\}$, $\lambda_i\in R^1$ $(i=1,2,\cdots,N)$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$K(x,t)=\|K_{ij}(\lambda_j x-\lambda_i t)\|,\ i,j=1,2,\cdots,N,\qquad(11)$$

где K_{ij} — заданные комплекснозначные функции одного переменного. Таким образом, лишь диагональные элементы матрицы $K(x,t)$, вооб-

---

* Здесь и далее $(I-K_x^*)y=y(x)-\int_D y(s)K(s,x)\,ds$.

ще говоря, зависят от разности аргументов. Формула (10′) в данном случае имеет очень простой вид и матрица R восстанавливается в явной интегральной форме по своим значениям на границе $\partial\Omega$.

Произведем теперь в компонентах $y_l(x)$ вектор-функции y замену переменной $\xi = \lambda_l x$ (в предположении, что $\lambda_l \neq 0$, $i=1, 2, \cdots, N$). Тогда оператор (1) перейдет в оператор $\mathbf{I} - \mathbf{M}$, действующий на вектор-функции $z(x)$ с компонентами $z_l(x)$ ($z_l : (a_l, b_l) \to \mathbf{C}$, $a_l = a|\lambda_l|^{-1}$, $b_l = b|\lambda_l|^{-1}$, $i=1, 2, \cdots, N$) по формуле

$$[(\mathbf{I} - \mathbf{M})\, z]_l = z_l(x) - \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} M_{lj}(x-t)\, z_j(t)\, dt, \tag{12}$$

где $M_{lj}(x) = |\lambda_l|^{-1} K(\lambda_l \lambda_j x)$. Из этой формулы следует, что оператор (1) с ядром (11), — если хотя бы одно λ_l ($i=1, 2, \cdots, N$) не равно по модулю единице, — не сводится к оператору Фредгольма с разностно-суммарным ядром (см. также ниже, примеры 2, 3, 7).

В случае комплексных значений λ_l соответствующие элементы матрицы (11) можно выразить через аналитическяе функции. Учитывая это обстоительство, можно утверждать, что в данном примере разобран общий случай, когда в (10) $A_0 = 0$, а постоянная матрица A_1 диагонализируема, так как оператор (1), очевидно, определен с точностью до подобных ядер (точнее, всегда можно перейти к ядру $K_1 = C(x)\, K(x, t)\, C^{-1}(t)$, $\det C(x) \neq 0$). С этой точки зрения, следующий пример является частным случаем уже разобранного, однако, он заслуживает отдельного рассмотрения. ▶

◀ Пример 2. (тёплицево-ганкелев оператор, первый способ обращения). Пусть $A_1 = \|a_{ij}\|$, $(i, j=1, 2)$ — блочная матрица размеров $(2p \times 2p)$ $(p \geqslant 1)$ с квадратными блоками $a_{11} = a_{22} = 0$ $a_{12} = a_{21} = I$, $A_0 = 0$, p, $q = 0$. Тогда ядро K имеет вид

$$K(x, t) = \begin{pmatrix} f(x-t) + g(x+t) & \varphi(x-t) + \psi(x+t) \\ \varphi(x-t) - \psi(x+t) & f(x-t) - g(x+t) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Оператор $\mathbf{L}$ в этом случае гиперболический, с характеристиками $x \pm t = \text{const}$, и не представляет труда по формуле (10′) определить значения резольвентного ядра $R(x, t)$ при $(x, t) \in \Omega$ в явном виде.

Остановимся на частном случае $\varphi = \psi \equiv 0$, когда матрица (13) диагональна и поэтому речь идет, по существу, о построении резольвент двух интегральных операторов $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ и $\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{K}}$ с $(p \times p)$-ядрами $K(x, t) = f(x-t) + g(x+t)$ и $\widetilde{K}(x, t) = f(x-t) - g(x+t)$. В этом случае мы приходим к следующему интересному алгорифму обращения оператора с ядром K (назовем его тёплицево-ганкелевым оператором): оператор $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ рассматривается *в паре* со вспомогательным оператором $\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{K}}$ и,—если оба эти оператора обратимы, а R и $\widetilde{R}$ соответственно их резольвентные ядра,— из (10′) получаем

$$(\partial_t \pm \partial_x)(R \pm \widetilde{R}) + [R(x, s)\,\widetilde{R}(s, t) \pm \widetilde{R}(x, s)\,R(s, t)]_{s=a}^{s=b} = 0. \quad (14)$$

Эту систему можно решить несколькими способами, соответственно выбору начальных данных на той или иной стороне квадрата $(a, b) \times (a, b)$. Приведем один из них.

Обозначим $U_\pm = R \pm \widetilde{R}$ и запишем систему (14) в виде $(\partial_t \pm \partial_x)\,U_\pm = F_\pm(x, t)$. Тогда

$$U_+(x, t) = U_+(a + x - t, a) + U_+(a, a + t - x) + \int_a^{\min(x,\,t)} F_+(a + x - s,\ a + t - s)\,ds, \quad (15)$$

$$U_-(x, t) = U_-(b,\ x + t - b) + U_-(x + t - a,\ a) + \int_a^{\min(t,\,a+b-x)} F_-(x + s - a,\ t - s + a)\,ds,$$

где принято $U_+(a-x,\ a) = U_+(a, b+x) = U_-(b, a-x) = U_-(b + x,\ a) \equiv 0$ при $x > 0$. В случае тёплицева оператора $(g(x) \equiv 0)$ приходим к формулам работы [7]. В данном случае, как и в [7], приходим к выводу (подставив в (15) $(x, t) \in \partial\Omega$), что из восьми функций $R(x, s)$, $R(s, t)$, $\widetilde{R}(x, s)$, $\widetilde{R}(s, t)$ $(s = a,\ b)$ только четыре независимы. Отметим следующие два частных случая, когда ядро скалярно $(N = 1)$ и эта зависимость явная (для простоты положим $a = 0$, $b = \tau < +\infty$, $0 \leqslant x \leqslant \tau$)

$$g(x + \tau) = g(\tau - x) \Rightarrow R(x, \tau) = R(0, \tau - x),\ \widetilde{R}(x, \tau) = \widetilde{R}(0, \tau - x), \quad (16)$$

$$g(\tau + x) = -g(\tau - x) \Rightarrow R(x, \tau) = \widetilde{R}(0, \tau - x),\ \widetilde{R}(x, \tau) = R(0, \tau - x).$$

В этих случаях соотношения (14) являются полным аналогом фурмулы В. В. Соболева—И. Ц. Гохберга—А. А. Семенцула [2, 6]. ▶

Рассмотренный тёплицево-ганкелев оператор ранее изучался на неограниченном интервале, в скалярном случае, с точки зрения его нормальной разрешимости (см. [15] и [1], гл. II, §§ 7.5, 26.2). Небезынтересно отметить, что при сведении этого оператора к сингулярному интегральному оператору с карлемановским сдвигом вспомогательный оператор сводится к известному „сопутствующему“ оператору (см. [25], гл. 11).

◀ Пример 3 (тёплицево-ганкелев оператор, второй способ обращения). Поскольку матрица-функция $K(x, t) = f(x - t) + g(x + t)$ удовлетворяет волновому уравнению $(\partial_x^2 - \partial_t^2)\,K = 0$, то по (8′), при $L_x = \partial_x^2$ и $p = q = 0$ приходим к соотношению

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)\,R(x, t) = \{(\partial_s R(x, s))\,R(s, t) - R(x, s)\,\partial_s R(s, t)\}_{s=a}^{s=b}. \quad (17)$$

Это уравнение, как и систему (14), можно решить несколькими способами. Обозначив правую часть (17) через $F(x, t)$ и применив известную формулу Даламбера в треугольнике $0 \leqslant t \leqslant \min(x, b-x)$ (при $a=0$), получим

$$2R(x, t) = R(x-t, 0) + R(x+t, 0) + \int_{x-t}^{x+t} \partial_s R(u, s)|_{s=0}\, du + \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(u, \tau)\, du\, d\tau. \qquad (17')$$

Аналогичные формулы выписываются и в остальных трех треугольниках, составляющих квадрат $(0, b)\times(0, b)$. Учитывая условие совпадения этих формул на диагоналях квадрата, приходим и выводу, что из восьми функций $R(x, s)$, $R(s, t)$, $\partial_s R(x, s)$, $\partial_s R(s, t)$ $(s=0, b)$ лишь четыре независимы (см. также предыдущий пример).

Интересно сопоставить формулу (17′) с формулой (12) работы И. И. Кальмушевского [27], в которой для обращения скалярного теплицево-ганкелева оператора S более общего вида требуется определить значения S^{-1} на пяти функциях. ▶

◀ Пример 4 (оператор с гармоническим ядром). Если в операторе (8) положить $L = A\partial_x^2$, $p=q=0$, где $A=\|a_{ij}\|$ — блочная $(2p\times 2p)$-матрица из примера 2 и, наконец, положить $K=\operatorname{diag}\{K(x, t), \alpha+\beta x+\gamma t-K(x, t)\}$ (α, β, γ — постоянные матрицы), то нетрудно проверить, что уравнение (8) удовлетворяется, если $(\partial_x^2+\partial_t^2)\times K(x, t)=0$, т. е. K — (комплекснозначная) гармоническая функция. В данном случае вспомогательным ядром, по аналогии с примером 2, будет ядро $\bar{K}=\alpha+\beta x+\gamma t-K$. Резольвентные ядра R и $\bar{R}$ (при условии обратимости операторов $\mathbf{I}-\mathbf{K}$ и $\mathbf{I}-\bar{\mathbf{K}}$) определяются из системы

$$(\partial_x^2 \pm \partial_t^2)(R \mp \bar{R}) = \{(\partial_s \bar{R}(x, s))\, R(s, t) - \bar{R}(x, s)\, \partial_s R(s, t) \mp [(\partial_s R(x, s))\, \tilde{R}(s, t) - R(x, s)\, \partial_s \tilde{R}(s, t)]\}_{s=a}^{s=b}. \qquad (18)$$

Таким образом, определив значения ядер $R(x, s)$, $R(s, t)$, $\bar{R}(x, s)$, $\tilde{R}(s, t)$, а также их нормальных производных $\partial_s R(x, s)$, $\partial_s R(s, t)$, $\partial_s \tilde{R}(x, s)$ и $\partial_s \bar{R}(s, t)$ на границе $\partial\Omega$ (т. е. при $s=a$, b), мы затем должны решить одно волновое уравнение и одно уравнение Пуассона. Так же, как и в примерах 2 и 3, на самом деле и здесь только 8 из указанных 16-ти функций независимы. Но, с другой стороны, в данном случае это избыточная информация весьма полезна, так как при решении уравнения Пуассона для функции $R-\bar{R}$ мы можем воспользоваться как самой функцией, так и ее нормальной производной на границе и, следовательно, выписать,— на основе известной формулы Грина,— явное решение.

Другой способ обращения оператора с гармоническим ядром получим, отправляясь от уравнения $LK=(\partial_x^4-\partial_t^4)K=0$ (сравнить с примерами 2 и 3). ▶

◀ Пример 5 (композиция простых ядер). Пусть

$$K_1 = K_1(x + \alpha t),\ K_2 = K_2(\beta x + t)\ (0 \neq \alpha,\ \beta \in R^1;\ K_1,\ K_2 \in C^1).$$

Тогда для ядра K композиции этих операторов $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ справедлива формула

$$(\alpha\partial_x + \beta\partial_t)\,K = K_1(x + \alpha b)\,K_2(\beta b + t) - K_1(x + \alpha a)\,K_2(\beta a + t).$$

Таким образом, при $\alpha = \beta$ оператор $\mathbf{K}$ „почти тёплицев" и удовлетворяет уравнению (6) типа (8), откуда следует формула (8′). Этот подход продемонстрирован в работе [11].

При $\alpha = -\beta$ („почти ганкелево" ядро K) проходит соответствующая модификация примеров 2 и 3. Композиция $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ операторов с гармоническими ядрами ($\Delta K_1 = \Delta K_2 = 0$) является „почти тёплицево—ганкелевым" оператором, поскольку

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)\,K(x, t) = \{(\partial_s K_1(x, s))\,K_2(s, t) - K_1(x, s)\,\partial_s K_2(s, t)\}_{s=a}^{s=b}$$

и, таким образом, здесь проходит схема примеров 2, 3. ▶

Приведенные примеры могут создать впечатление, что уравнение (8) содержит лишь гиперболические и эллиптические операторы. На самом деле оператор $\mathbf{L}$ может принадлежать практически всем известным смешанно-составным типам.

Рассмотрим, например, случай оператора L второго порядка при $\det A_2(x) = 0$ (в отдельных точках или, при $N > 2$, во всей области). Уже в скалярном случае ($N = 1$), если $A_2(x) \geqslant 0$ и обращается в нуль лишь в отдельных точках отрезка $[a, b]$, то (8′) является вырождающимся гиперболическим уравнением и для него надо решить задачу Коши. В случае, когда $A(x)$ меняет знак (также обращаясь в нуль лишь в отдельных точках отрезка $[a, b]$), возникает комбинация задач Коши для вырождающихся гиперболических уравнений (в тех частях квадрата $\Omega = (a, b) \times (a, b)$, где $A_2(x)\,A_2(t) > 0$) и краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений (где $A_2(x) \times A_2(t) < 0$), причем в последнем случае часть границы может быть освобождена от краевых условий.

Общая теория упомянутых задач еще далека от завершения, но в ряде случаев подобные задачи хорошо исследованы (см., например, [19—21]). Добавим также, что в случае, когда $A_2(x)$ действительно и обращается в нуль на отдельных отрезках, в тех прямоугольниках, где $A_2(x)\,A_2(t) \equiv 0$, $A_2^2(x) + A_2^2(t) \neq 0$, могут возникнуть смешанные задачи для параболических уравнений. В случае комплекснозначности коэффициента $A_2(x)$ возникает более богатый набор задач.

Рассмотрим теперь частный случай постоянной, но вырождающейся матрицы A_2.

◀ Пример 6. Пусть $K = \|K_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2)$ — блочная $(2p \times 2p)$-матрица, удовлетворяющая следующему уравнению типа (8):

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x^2 K - \partial_t^2 K \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \partial_x K + \partial_t K \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = 0. \qquad (19)$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\partial_x^2 K_{11} - \partial_t^2 K_{11} = 0 \ (i = 1, 2), \quad \partial_x^2 K_{12} + \partial_t K_{12} = 0, \quad \partial_x K_{21} - \partial_t^2 K_{21} = 0. \tag{19'}$$

Таким образом, компоненты-блоки K_{11} и K_{22} матрицы K тёплицево-ганкелевы, а K_{12} и K_{21} удовлетворяют уравнениям теплопроводности. Для нахождения резольвенты R, имеющей такой же блочный вид $R = \|r_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2)$, надо сначала из уравнений (2) и (2′) найти значения $R(x, s)$, $R(s, t)$, $\partial_s R(x, s)$, $\partial_s R(s, t)$ при $s = a, b$, а затем решить для определения r_{11} и r_{22} по четыре (см. пример 3) задачи Коши для неоднородного волнового уравнения и две смешанные задачи для неоднородного уравнения теплопроводности (для определения r_{12} и r_{21}). ▶

§ 2. Замечания

Теорема 1 и иллюстрирующие ее примеры позволяют сделать вывод, что формула (8′) характеризует структуру резольвентных ядер достаточно широких классов интегральных операторов. Специфика полученных результатов приводит к следующим выводам.

Замечание 1. Формула (8′), вообще говоря, может остаться справедливой и в случае неограниченного интервала (a, b). Как правило, в этом случае в ней надо учитывать лишь конечные значения a или b. В частности, при $a = -\infty$, $b = +\infty$ и $p(x) = q(x) \equiv 0$ ядро K и резольвентное ядро R принадлежат линейному многообразию решений одного и того же уравнения (8) (аналогично уравнению в полных свертках, см. введение).

С другой стороны, класс изучаемых операторов можно расширить за счет рассмотрения обобщенных решений уравнения (8). Можно, наконец, ослабить ограничения и на коэффициенты оператора L. Поскольку уравнение (8), как было указано выше, в общем случае однозначно не классифицируется, каждый отдельный случай требует особого обоснования формулы (8′) (или ее аналога). В качестве метода обобщения формулы (8′) можно принять способ замыкания в соответствующей метрике линейного многообразия решений уравнения (8) (если прямое повторение хода доказательства теоремы 1 не проходит).

Сказанное поясним на примерах § 1. В примере 1 (при $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$) и в примере 2, исходя из представлений (11) и (13) и из интегральной формы соотношения (8′) (см. также (15)) приходим к выводу, что интервал (a, b) можно считать любым, а функции $K_{ij}(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — лишь абсолютно интегрируемыми в областях их естественного определения. Тогда соответствующий оператор ограничен в $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ (так же, как и в некоторых других пространствах, см. [3, 4]) и мы приходим к обобщениям результатов работ [3, 4, 6, 7, 11]. В частности, в случае матричного тёплицево-ганкелева оператора K на полуоси $(0, +\infty)$ с ядром $K = f(x-t) + g(x+t)$ $(0 \leqslant x, t < +\infty)$ при $f \in L_1(-\infty, +\infty)$, $g \in L_1(0, +\infty)$ придем к обобщению формулы (4) Крейна-Гохберга [3, 4], если в (15) положим $a = 0$, $b = +\infty$, $U_-(b, x + t - b) \equiv 0$, $\min(t, a + b - x) = t$ и

$$F_c(x, t) = \widetilde{R}(x, 0)\, R(0, t) \pm R(x, 0)\, \widetilde{R}(0, t). \qquad (20)$$

Другую формулу для определения $R(x, t)$ в этом случае (уже без вспомогательного оператора $\widetilde{K}$) можно выписать на основе формулы (17'), но уже при условии дифференцируемости f и g. Вместе с тем заметим, что в случае гипоэллиптичности оператора L невозможно выйти из класса бесконечно-дифференцируемых ядер (см. пример 4).

Замечание 2. Формула (10) даже в скалярном ($N=1$) случае представляет определенный интерес. Прежде всего отметим, что при $A_1(x) \neq 0$ ($a \leqslant x \leqslant b$) ядра, удовлетворяющие уравнению (10), соответствуют всевозможным операторам $(I-K)\,y$, получаемым из оператора с разностным ядром $K = K(x-t)$ ($A_1(x) \equiv 1$, $A_0(x) \equiv 0$) невырожденной заменой x с одновременной линейной заменой функции y. Однако, если функция $A_1(x)$ меняет знак или $A_0(x)$ имеет сингулярности, соответствующий интегральный оператор K уже, вообще говоря, не сводится к оператору с разностным ядром и в этих случаях формула (10')— новая.

Поясним это на простых частных случаях.

◀ Пример 7. (Оператор Л. Г. Михайлова, см. [1], гл. II, § 5.7). Пусть $a=-1$, $0 < b \leqslant +\infty$, $A_1(x) = xI$, $A_0(x) \equiv 0$. Тогда $K = t^{-1}K(x/t)$ и при $K(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ оператор K ограничен в пространстве функций y, интегрируемых с весом $x^{-1}(y(x)\,x^{-1} \in L(-1, +\infty))$. Экспоненциальная замена переменной сводит уравнение $(I-K)\,y = f$ к системе

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^{\infty} K_1(x-t)\, y_1(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\log b} K_2(x-t)\, y_2(t)\, dt + f_1(x), \\ y_2(x) &= \int_0^{\infty} K_2(x-t)\, y_1(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\log b} K_1(x-t)\, y_2(t)\, dt + f_2(x), \end{aligned} \qquad (21$$

где функция $y_1(x)$ определена на $x \in (0, +\infty)$, а $y_2(x)$ — на $(-\infty, \log b)$, $\log + \infty = +\infty$. Система эта вполне аналогична системе (12) в случае неограниченных интервалов (a_k, b_k) ($k=1, 2$), и соответствующие формулы для резольвентного ядра R сохраняют свою силу (см. замечание 1) и для ядра оператора (21). Система (21) не сводится к системе Винера-Хопфа. ▶

К ганкелевой системе типа (21) придем после той же замены переменной, рассмотрев ядро $K = t^{-1}K(xt)$ ($a=-1$, $b=+\infty$). Для построения резольвентного ядра R, как в примере 2, нужно привлечь вспомогательное ядро $\widetilde{K} = t^{-1}(\text{const} - K(xt))$. Отметим еще одно интересное ядро подобного типа: $K = xK(x^2+t^2)$ ($a=-1$, $b \leqslant +\infty$), $\widetilde{K} = x(\text{const} - K(x^2+t^2))$.

Замечание 3. Специфика уравнений (8), (8') выявляется уже в простейшем частном случае, когда матрицы A_k ($k=0, 1, \cdots, m$) постоянны. Так, при $a=-\infty$, $b=+\infty$ формальное применение пре-

образования Фурье к уравнению (8) приводит к известному матричному уравнению

$$MX + XM^* = S, \quad \xi, \eta \in R^1, \tag{22}$$

где

$$S = \hat{p}(\xi)\hat{q}(\eta), \; X = \hat{K}(\xi, \eta), \; M = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k A_k (i\xi)^k,$$

$$M^* = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k A_k (i\eta)^k.$$

Таким образом, при $N \geqslant 2$ алгебраические свойства матриц A_k $(k = 0, 1, \cdots, m)$ играют решающую роль в описании пространства решений уравнения (8) (см. [28], гл. VIII, § 3). Примеры 1—7 хорошо иллюстрируют эту ситуацию. Однако в этих примерах матрицы M и M^* диагонализируемы и, в связи с этим, интересно рассмотреть простой случай, когда матрицы эти состоят из одной жордановой клетки.

◀ Пример 8. Пусть ядро K удовлетворяет следующему частному случаю уравнения (10) $(K = \|K_{ij}\|, \; i, j = 1, 2)$

$$\mathrm{L}K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x K + \partial_t K \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{23}$$

Не представляет труда выписать общий вид матрицы K, зависящей от четырех произвольных функций. Отметим, ради простоты, только то обстоятельство, что в этот класс входят матрицы вида

$$K(x, t) = \begin{pmatrix} f'(x-t)(t+\alpha) & f''(x-t)(t^2 + (\alpha + \beta)t + \gamma) \\ -f(x-t) & f'(x-t)(\beta - t) \end{pmatrix} \tag{23'}$$

где f — произвольная дважды дифференцируемая функция, $\alpha, \beta, \gamma = \mathrm{const}$. Оператор L в данном случае гиперболический и ядро R восстанавливается по формуле (10′) в явном виде интегрированием по характеристикам $x - t = \mathrm{const}$. ▶

Последний пример показывает, что даже при постоянных матрицах A_0 и A_1 (в 10)) появление клетки в жордановой форме матриц M и M^* (в (22)) может привести к добавлению многочленных множителей к компонентам матрицы K (сравнить с примером 1).

§ 3. Общий случай

1°. Рассмотрим теперь случай многомерного оператора (1), допустив, к тому же, чтобы область D имела несколько компонент связности. Обозначим

$$Lf = \sum_{|\alpha| \leqslant m} A_\alpha(x) D^\alpha f, \; L^* f = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (f A_\alpha(x)), \tag{24}$$

где $D^\alpha = \partial^{\alpha_1}_{x_1} \cdots \partial^{\alpha_n}_{x_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ $(\alpha_i = 0, 1, 2, \cdots; i = 1, 2, \cdots, n)$, а A_α и f $(\in C^m(D))$ $(N \times N)$-матрицы.

Операторы L и L^* выбраны формально сопряженными, поэтому,— при естественных ограничениях на границу ∂D и на функции $f, g \in \in C^m(D) \cap C^{m-1}(\overline{D})$,— справедлива формула Грина-Стокса

$$\int_D \{gLf - (L^{\#} g) f\}\, dx = \int_{\partial D} F_s(f, g)\, d\sigma, \tag{25}$$

где $F_x(f, g) = F(f(x), g(x))$ — соответствующий билинейный оператор $(m-1)$-го порядка на паре (f, g) (билинейная форма от

$\xi = \{D^\varkappa f\}$ и $\eta = \{D^\beta f\}$, $|\varkappa|, |\beta| \leqslant m-1$) и $F_s(f(s), g(s)) =$

$= \lim\limits_{x \to s} F_x(f(x), g(x))$, $x \in D$, $s \in \partial D$, $d\sigma$ — мера на ∂D.

Пусть, далее, ядро $K(x, t)((x, t) \in \Omega = D \times D$, $K \in C^m(D))$ оператора (1) удовлетворяет соотношению

$$LK \overset{\text{def}}{=} L_x K - L_t^{\#} K = \int_\omega p(x, \tau)\, q(\tau, t)\, d\tau, \tag{26}$$

где ω — $\varkappa$-мерное компактное многообразие ($\varkappa \leqslant n-1$, а при $\varkappa = 0$ считается, что ω состоит из конечного числа точек), $d\tau$ — мера на ω, $p(x, \tau)$ $((x, \tau) \in D \times \omega))$ и $q(\tau, t)$ $((\tau, t) \in \omega \times D)$ — комплекснозначные кусочно-непрерывные матрицы размерности $(N \times \alpha)$ и $(\alpha \times N)$ соответственно $(\alpha \geqslant 1)$,

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная (необязательно связная) область из R^n с кусочно-гладкой (на каждой компоненте связности) границей ∂D, а K удовлетворяет в Ω уравнению* (26) *и* $K \in C^{m-1}(\overline{\Omega})$. *Тогда*

$$LR = \int_{\partial D} F_s(R(x, s), R(s, t))\, d\sigma + \int_\omega P(x, \tau)\, Q(\tau, t)\, d\tau, \tag{26'}$$

где P и Q определяются из уравнений $(I - K_x) P(x, \tau) = p(x, \tau)$, $(I - K_t^*) Q(\tau, t) = q(\tau, t)$ $(\tau \in \omega)$.

■Формула (26′) легко выводится применением схемы доказательства теоремы 1 с учетом формулы (25).■

2°. Остановимся на простых иллюстрациях к теореме 2.

Пусть K удовлетворяет уравнению первого порядка

$$LK \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \{A_k(x)\, \partial_{x_k} K + \partial_{t_k}(K A_k(t))\} + A_0(x) K - K A_0(t) = 0. \tag{27}$$

Тогда по (26′)

$$LR = \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D} R(x, s)\, A_k(s)\, R(s, t)\, ds_1 \wedge ds_2 \cdots ds_{k-1} \wedge ds_{k+1} \cdots \wedge ds_n. \tag{27'}$$

В скалярном случае ($N = 1$) ядро K представляется через функцию $(2n-1)$ переменных, а уравнение (27′) позволяет определить R интегрированием по характеристикам, задаваемым системой

$$\frac{dx_i}{A_i(x)} = \frac{dx_j}{A_j(x)} = \frac{dt_k}{A_k(t)} = \frac{dt_p}{A_p(t)} \quad (i, j, k, p = 1, 2, \cdots, n).$$

В одномерном случае ($n = 1$) соотношения (27) — (27′) переходят в обобщение (10) — (10′), когда $D = \bigcup (a_k, b_k)$, $-\infty < a_0 < b_0 < a_1 < \cdots$ $\cdots < a_r < b_r < +\infty$ (см. также ниже, пример 12).

◀ Пример 9. Рассмотрим скалярный двухмерный ($n=2$) случай, когда $A_i(x)=A_i=\text{const}$, $A_1=1$, $A_0=0$ ($i=1, 2$). В этом случае речь идет о ядре $K(x_1, x_2, t_1, t_2)$ вида

$$K=K(x_1-t_1,\ x_2-A_2x_1,\ t_2-A_2x_1). \tag{28}$$

Из (27′) нетрудно в явной форме выразить резольвентное ядро R в Ω через его значения на границе $\partial\Omega$. В результате (см. замечание 1 § 2) приходим к выводу, что достаточно наложить на ядро (28) $K(\xi, \eta, \zeta)$ ограничения типа суммируемости, а область D считать необязательно ограниченной. При $A_1=1$, $A_2=0$, когда $K=K(x_1-t_1, x_2, t_2)$, R определяется интегрированием соотношения

$$(\partial_{x_1}+\partial_{t_1})R(x_1, x_2, t_1, t_2)=\int\limits_{\partial\breve{D}} R(x_1, x_2, s_1, s_2)\ R(s_1, s_2, t_1, t_2)\,ds_2, \tag{28′}$$

являющегося обобщением формулы В. В. Соболева (3) на двухмерный случай.

Операторы последнего типа возникают в теории переноса излучения при общих законах некогерентного рассеяния (см. [26], гл. VIII, § 2). ▶

◀ Пример 10. (Ультрагиперболическое уравнение I). Положим $n=2$, $x=(x_1, x_2)$, $t=(t_1, t_2)$ и

$$LK\overset{\text{def}}{=}(\partial_{x_1}\partial_{x_2}-\partial_{t_1}\partial_{t_2})K(x, t)=0. \tag{29}$$

Тогда по (27′)

$$LR(x, t)=\int\limits_{\partial D}(\partial_{s_1}R(x, s))\,R(s, t)\,ds_1+R(x, s)\,\partial_{s_1}R(s, t)\,ds_2. \tag{29′}$$

В случае $D=R^2$, когда и ядро K, и резольвентное ядро R удовлетворяют одному и тому же уравнению (29), воспользовавшись формулами интегральной геометрии ([14]), получим

$$R(x_1, x_2, t_1, t_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\partial_{x_1}R(0, x_2+(t_1-\tau)u, t_2+x_1u, \tau)\,d\tau\,du. \tag{29″}$$

Эта формула позволяет, аналогично уравнению в полных свертках (см. введение), восстановить резольвентное ядро R, предварительно решив продифференцированное уравнение (2′) при $x_1=0$. ▶

◀ Пример 11. (Ультрагиперболическое уравнение I). Пусть теперь

$$LK\overset{\text{def}}{=}(\partial^2_{x_1}+\partial^2_{x_2}-\partial^2_{t_1}-\partial^2_{t_2})K=0, \tag{30}$$

тогда

$$LR=\int\limits_{\partial\breve{D}}[(\partial_{s_1}R(x, s))\,R(s, t)-R(x, s)\,\partial_{s_1}R(s, t)]\,ds_2+$$

$$+\int\limits_{\partial D}[(\partial_{s_2}R(x, s))\,R(s, t)-R(x, s)\,\partial_{s_2}R(s, t)]\,ds_1. \tag{30′}$$

Несмотря на то, что операторы L в (29) и (30) отличаются лишь линейной заменой переменной, из-за двойственного характера переменных $x=(x_1, x_2)$ и $t=(t_1, t_2)$ (см. (1), (2), (2′)) в данном случае ситуация совершенно иная (сравнить (29′) и (30′)) и неясно, существует ли при $D=R^2$ простой аналог формулы (29″). ▶

Последние два примера приводят к интересным (и, по-видимому не исследованным, кроме упомянутого в примере 2 случая) задачам обращения ультрагиперболического оператора.

3°. В ряде случаев (см. замечание 1 § 2) теорема 2 допускает обобщения, относящиеся к неограниченным областям D или к негладким ядрам K.

В случае, когда область D состоит из нескольких компонент связности, оператор L фактически определяется в каждой из них по-отдельности, но в формуле (26′) фигурируют границы всех компонент вместе. В частности, интересен случай „мозаичного" ядра, когда связная область G разбивается на конечное число областей ($\overline{G}=\cup\overline{D}_i$, $i=1, 2, \cdots, r$), $D_i \cap D_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ и $D=\cup D_l$. В этом случае общая часть границы между соседними областями D_l и D_j фигурирует в (26′) дважды. Такая схема может быть применена практически ко всем известным уравнениям с разностными и суммарными ядрами (см. [1], гл. II). Рассмотрим простейший случай.

◀ Пример 12. („Мозаичное" ядро с разностным аргументом). Пусть $G=(-\infty, +\infty)=\cup[a_k, a_{k+1}]$, $-\infty=a_0<a_1<\cdots$ $\cdots<a_r=+\infty$, $D=\cup(a_k, a_{k+1})$, $k=0, 1, \cdots, r-1$; $\Omega=D\times D$. Рассмотрим матрицы-функции $K_{pq}(x)\in L_1(a_{p-1}-a_q, a_p-a_{q-1})$ и введем в рассмотрение ядро

$$K(x, t)=K_{pq}(x-t) \text{ при } (x, t)\in\Omega_{pq}=(a_{p-1}, a_p)\times(a_{q-1}, a_q). \quad (31)$$

Применив формулу (26′) к одномерному случаю (или же, еще проще повторив ход доказательства теоремы 1), получим ($(x, t)\in\Omega$)

$$(\partial_x+\partial_t)R(x, t)=$$
$$=\sum_{p=1}^{r-1}\{R(x, a_p-0)R(a_p-0, t)-R(x, a_p+0)R(a_p+0, t)\}, \quad (31')$$

где через $R(x, a_p\pm0)$ и $R(a_p\pm0, t)$ $(p=1, 2, \cdots, r-1)$ обозначены соответствующие решения уравнений (2) и (2′) с учетом обозначений (31). Строго говоря, формула (31′) справедлива в $\Omega=\cup\Omega_{pq}$, если функции K_{pq} дифференцируемы, однако в общем случае не представляет труда в каждой из областей Ω_{pq} выразить ядро R по (31′) через его значения на $\partial\Omega=\cup\partial\Omega_{pq}$ (см. замечание 1 § 2).

В случае известного парного уравнения (см. [1], § 5.3) с матричным ядром

$$K(x, t)=\begin{cases}K_1(x-t), & 0\leqslant x<+\infty\\ K_2(x-t), & -\infty<x<0,\end{cases} \quad (32)$$

когда $r=2$, $a_1=0$ и $K(x, +0)=K(x, -0)$

$$(\partial_x+\partial_t)R(x, t)=R(x, 0)Q(t), \quad x\neq0, \quad (32')$$

где функция $Q(t)=R(-0, t)-R(+0, t)$ определяется из уравнения,

$$Q(t) = K_2(-t) - K_1(-t) + \int_0^{\infty} Q(s)\, K_1(s-t)\, ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} Q(s)\, K_2(s-t)\, ds. \qquad (32'')$$

Аналогично упрощается и общая формула (31′) в случае $K(x, a_k+0) = K(x, a_k-0)$ или $K(a_k+0, t) = K(a_k-0, t)$ $(\exists k = 1, 2, \cdots, r-1)$ (см. [1], § 7 и [15, 16]). Отметим также, что операторы (12) и (21) вписываются в данный пример. ▶

Замечание 4. Теоремы 1 и 2 обобщаются на гораздо более общие ситуации. Укажем, например, случай интегро-дифференциально-разностных уравнений (см. [1], § 7 и [10, 15]). Нетрудно видеть также, что в качестве оператора L можно брать интегро-дифференциальный (псевдодифференциальный) оператор на n-мерном многообразии D в m-мерном пространстве $(m > n)$. С другой стороны, схема доказательства теоремы 1 позволяет получить (при $p(x) \equiv q(x) \equiv 0$) формулы типа (8′) и (26′) для обобщенных резольвент односторонне обратимых операторов (см. [2, 3]).

Укажем также на наличие аналогов полученных формул, позволяющих эффективно обращать матрицы соответствующих классов. В частности, это относится к матрице Тёплица—Ганкеля $\|t_{i-j} + h_{i+j}\|$ $(i, j = m, m+1, \cdots, n;\ -\infty \leqslant m < n \leqslant +\infty)$ (см. также [11—13]).

§ 4. Об условиях нормальной разрешимости

Теория уравнений типа свёртки в настоящее время хорошо разработана (см. [1, 3, 4]). В первую очередь, это относится к технике сведения уравнений типа свертки к краевым задачам для аналитических функций, позволяющей выявить условие нётеровости и вычислить индекс в терминах преобразования Фурье.

С другой стороны (см. примеры 1—3, 12), все основные виды уравнений типа свертки укладываются в схему § 1 и для них выписываются формулы, характеризующие структуру резольвент. Возникает естественный вопрос о выявлении условий разрешимости уравнений с более общими операторами §§ 1, 3. Как будет показано ниже, структура этих операторов позволяет в ряде случаев найти условия нётеровости и вычислить индекс.

1°. В работах [11—13] убедительно показано, что ядра вида (6) и их дискретные аналоги позволяют существенно расширить класс операторов, допускающих эффективные рекуррентные алгорифмы обращения. Покажем теперь, что в теоретическом плане операторы этого типа поддаются исследованию применением преобразования Фурье.

◀ Пример 13. (Уравнения с двумя ядрами и парные уравнения). Рассмотрим следующее уравнение, обобщающее известное уравнение типа свертки с двумя ядрами ([1], § 5.2)

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{K})\, y \overset{\text{def}}{=} \lambda y(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)\, y(t)\, dt = f(x), \quad x \in R^1, \tag{34}$$

где λ — комплексный параметр и

$$K(x, t) = \begin{cases} K_1(x-t) + \int_{-\infty}^{0} p_1(x+\tau)\, q_1(\tau+t)\, d\tau, & 0 < t < +\infty \\ K_2(x-t) - \int_{0}^{\infty} p_2(\tau+x)\, q_2(\tau+t)\, d\tau, & -\infty < t \leqslant 0. \end{cases} \tag{34'}$$

При K_1, K_2, p_1, p_2, q_1, $q_2 \in L_1(-\infty, +\infty)$, оператор $\mathbf{K}$ ограничен в L_p $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ (см. [2, 3]). В каждой из полуплоскостей $t > 0$ и $t < 0$ ядро $K(x, t)$ — типа (6).

Как и в примере 12, для построения резольвентного ядра этого оператора применима формула (26′) ($D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $\partial D = \{x = 0\}$; K_1, K_2 — $(N \times N)$-матрицы, p_1, p_2 — матрицы $(N \times \alpha)$ и q_1, q_2 — $(\alpha \times N)$-матрицы, $\alpha \geqslant 1$).

Применение преобразования Фурье к (34) приводит к следующему соотношению:

$$\left[\lambda I - \widehat{K}_1(\xi) - \frac{\pi}{2}\, \widehat{p}_1(\xi)\, \check{q}_1(\xi)\right] y_+(\xi) + \left[\lambda I - \widehat{K}_2(\xi) - \frac{\pi}{2}\, \widehat{p}_2(\xi)\, \check{q}_2(\xi)\right] y_-(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{[p_2(\xi) q_2(\tau)\, y_-(\eta) - p_1(\xi)\, \check{q}_1(\eta)\, y_+(\eta)]}\, \frac{d\eta}{\eta - \xi} = \widehat{f}(\xi), \tag{35}$$

где, как обычно, знаком $\widehat{\ }$ ($\check{\ }$) обозначено прямое (обратное) преобразование Фурье, $\widehat{y}(\xi) = y_+(\xi) + y_-(\xi)$, где $y_+(\xi)$ $(y_-(\xi))$ — одностороннее преобразование Фурье на $(0, +\infty)$ $((-\infty, 0))$ от $y(x)$.

Таким образом, уравнение (34) свелось к своеобразной граничной задаче (для пары аналитических в верхней и нижней полуплоскости функций $y_\pm(\xi)$), содержащей сингулярный интегральный оператор. Стандартным применением известной формулы Племеля-Сохоцкого (см. [1, 3, 4]) придем к следующему условию нётеровости:

$$\det(\lambda I - \widehat{K}_i(\xi) - \pi \widehat{p}_i(\xi)\, \check{q}_i(\xi)) \neq 0 \quad (i = 1, 2). \tag{36}$$

Индекс оператора $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{K}$ вычисляется по формуле*

$$\varkappa = \operatorname{ind} \frac{\det(\lambda I - \widehat{K}_1(\xi) - \pi \widehat{p}_1(\xi)\, \check{q}_1(\xi))}{\det(\lambda I - \widehat{K}_2(\xi) - \pi \widehat{p}_2(\xi)\, \check{q}_2(\xi))}. \tag{36'}$$

* Строго говоря, на $\widehat{K}_i$, $\widehat{p}_i$, $\check{q}_i$ $(i = 1, 2)$ надо наложить условие типа гельдеровости, а при $\lambda = 0$ еще и условие на бесконечности, обеспечивающее осмысленность формулы (36′) (см. [1]).

Интересно отметить, что в случае $p_2 = p_1$, $q_2 = q_1$, $\widehat{K}_2(\xi) = \widehat{K}_1(\xi) + \pi \widetilde{p}_1(\xi)\widetilde{q}_1(\xi)$ (т. е. когда обе строчки в (34′) совпадают), в отличие от уравнения в полных свертках (см. введение), индекс $\varkappa$ не всегда равен нулю. В случае $K_2 = p_2 = q_2 \equiv 0$ имеем аналог уравнения Винера—Хопфа на полуоси $(0, +\infty)$. Ядро $K_1(x, t) = K(t, x)$ соответствует обобщению на случай ядер типа (6) известного парного уравнения ([1], § 5.3) и, разумеется, полученные результаты переносятся на этот случай. ▶

Аналогичные результаты получаются при исследовании операторов с модифицированными на основе неоднородного уравнения (8) ((26)) ядрами из примеров 1—3, 12. По сути дела, в этих случаях теория уравнений типа свертки обобщается без серьезных затруднений, по аналогии с известными результатами (см. [1, 3, 4, 15, 16, 23]).

В случае некоторых бесконечных алгебраических систем, являющихся дискретными аналогами уравнений с ядрами (6) (см. [11—13]), условие разрешимости и индекс выписываются применением теории граничных задач для функций, аналитических внутри и вне единичного круга (см., например, [3]).

2°. В известной книге У. Гренандера и Г. Сегё [17] введено общее понятие тёплицева оператора. В частности, в гл. 7, 8 приведена схема построения тёплицевых интегральных операторов с симметричными ядрами, не являющимися, вообще говоря, разностными.

Оказывается, что в ряде важнейших случаев эти ядра хорошо вписываются в схему § 1. Так, ядро Фурье—Бесселя имеет вид

$$K(x, t) = \sqrt{xt} \int_0^{+\infty} k(s) J_m(xs) J_m(ts)\, s\,ds, \quad \operatorname{Re} m > -\frac{1}{2}, \tag{37}$$

где $k(s)$ — заданная функция, J_m — функция Бесселя. Нетрудно убедиться, что ядро это удовлетворяет следующему однородному уравнению вида (8)

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2) K(x, t) = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)(x^{-2} - t^{-2}) K(x, t) \tag{37′}$$

и, следовательно (см. замечание 1 § 2) для резольвентного ядра выписывается формула типа (8′). В случае уравнения с этим ядром на полуоси $(0, +\infty)$ при условии $1 - k(s) \neq 0$ ядро R также задается формулой (37) с заменой $k(s)$ на $r(s) = k(s)(1 - k(s))^{-1}$ (аналогия с уравнением в полных свертках, см. введение). В случае уравнения на интервале $(0, b)$, $0 < b < +\infty$ (или $(b, +\infty)$) естественно применить преобразование Фурье—Бесселя, связанное очевидным образом с уравнением (37′) (аналогия с уравнением Винера—Хопфа). В некоторых других случаях к операторам из [17] надо применять дискретные преобразования (например, разложения по ортогональным полиномам).

В результате приходим к выводу, что разрешимость уравнений (1) с ядрами (8) ((26)) естественно формулировать в терминах „коэффициентов" разложений по собственным функциям подходящих опера-

торов, определяемых формальным дифференциальным выражением $Lg=\lambda g$ (см. (7), (24)).

Именно так обстоит дело с вопросами разрешимости уравнений с тёплицево-ганкелевыми операторами из примера 2 на отрезке, полуоси и оси (см. [23] и [1], § 7.5 и 26.2) В основе этого подхода лежит то обстоятельство, что оператор L и область $\Omega=D\times D$ (§§ 1, 3) идеально приспособлены к применению метода разделения переменных

§ 5. Некоторые приложения

Компоненты матричных ядер K, изучаемых в §§ 1, 3, удовлетворяют (см. выше, конец § 1) определенным уравнениями в частных производных практически всех известных типов. Построение резольвентного ядра R на основе теоремы 1 сводится к предварительному решению *конечного числа* уравнений вида $(I-K)g=f$ и $(I-K^*)g=f$ с последующим решением соответствующих задач для уравнения (8′), отличающегося от (8) лишь свободным членом. На этом пути представляется эффективным построение конечно-разностных схем на последнем этапе, хотя многие из возникающих задач мало исследованы или не исследованы вообще (см. § 1, а также примеры 10 и 11).

В многомерном случае процедура восстановления резольвентного ядра на основе формулы (26′) также позволяет (см. (2)) сократить количество операций, по крайней мере, на один порядок (см. [11—13]), так как в (26′) размерность параметров интегрирования s и τ не превышает $n-1$.

В уравнениях (1) с ядрами §§ 1, 3, для которых реализован подход § 4, могут быть эффективны приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений или граничных задач для аналитических функций (см. [1, 15, 22, 23]).

Метод введения вспомогательного ядра (см. примеры 2, 4, 7), который, как легко убедиться, проходит для ядер K, удовлетворяющих в общем случае вместо (26) уравнению

$$L_xK(x,\ t)+L_t^*K(x,\ t)=\int_\omega p(x,\ \tau)\,q(\tau,\ t)\,d\tau \qquad (38)$$

может явиться хорошей основой для построения эффективных алгорифмов, ибо позволяет избежать ряда процедур, связанных с дифференцированием (сравнить примеры 2, 3, 4 и замечание 1 § 1). Что же касается дополнительного объема вычислений, связанного с построением резольвентного ядра $\tilde R$ на границе $\partial\Omega$, то можно отметить, что ядро $\tilde K$ выбирается с точностью до определенных конечномерных слагаемых, а это позволяет осуществить оптимальный выбор (например, добиваться оценки $\|\tilde K\|<1$).

Одним из эффективных методов решения интегрального уравнения представляется аппроксимация его ядра $Q(x,\ t)$ ядрами §§ 1, 3. При реализации этого способа естественно поставить задачу о нахождении минимума функционала

$$F(K)=\|Q-K\| \tag{39}$$

в подходящей метрике и в классе ядер K, удовлетворяющих уравнению (8) ((26)). В некоторых случаях задача эта решается точно. Рассмотрим, например, простейший случай аппроксимации разностными ядрами $K=K(x-t)$ в квадрате $[0, \tau]\times[0, \tau]=\Omega$, $0<\tau<+\infty$ в метрике $L_2(\Omega)$. Нетрудно подсчитать, что в этом случае минимум функционала (39) достигается (при $\operatorname{Im} Q(x, t)=0$) на функции

$$K_\tau(x)=\begin{cases}(\tau+x)^{-1}\displaystyle\int_{-x}^{\tau} Q(x+t, t)\,dt, & -\tau\leqslant x\leqslant 0\\ (\tau-x)^{-1}\displaystyle\int_{0}^{\tau-x} Q(x+t, t)\,dt & 0<x\leqslant\tau,\end{cases} \tag{40}$$

а погрешность $F(K_\tau)$ вычисляется по формуле

$$F^2(K_\tau)=\int_{-1}^{0}\left\{\int_{-x}^{\tau}Q^2(x+t, t)\,dt-(\tau+x)^{-1}\left(\int_{-x}^{\tau}Q(x+t, t)\,dt\right)^2\right\}dx+$$

$$+\int_{0}^{1}\left\{\int_{0}^{\tau-x}Q^2(x+t, t)\,dt-(\tau-x)^{-1}\left(\int_{0}^{\tau-x}Q(x+t, t)\,dt\right)^2\right\}dx. \tag{40'}$$

◀ Пример 14. (Оператор В. В. Соболева [18]).

В теории переноса излучения возникает оператор (1) на полуоси $(0, +\infty)$ с ядром $Q(x, t)=K(x-t)\lambda(t)$, где $0\leqslant K(x)=K(-x)\in L_1(0, +\infty)$, $0\leqslant\lambda(x)\leqslant 1$, $\lambda(+\infty)=1$. Ядро это, вообще говоря, в схему § 1 не вкладывается, но его можно с большой точностью аппроксимировать ядрами нужного типа.

Самый простой способ — это замена функции $\lambda(t)$ кусочно-постоянной функцией $\lambda(t)\approx\lambda_k$, $t\in(a_k, a_{k+1})$, $k=1, 2, \cdots, r-1$, $\lambda_{r-1}=1$, где $0=a_1<a_2<\cdots<a_{r-1}<a_r=+\infty$. Построение резольвентного ядра в этом случае сводится к обращению формулы (31′) в том случае, когда в (31) $K_{pq}=K_q(p, q=1, 2, \cdots, r-1)$ и $K_1\equiv 0$, $K_{r-1}=K$.

Рассмотрим теперь ядро $Q_1(x, t)=\sqrt{\lambda(x)\lambda(t)}\,K(x-t)$, эквивалентное ядру Q, но обладающее тем преимуществом, что оно симметрично. Наметим два способа его аппроксимации.

а) Зафиксируем $\tau>0$ и пусть $K(x)\in L_2(0, \tau)$. Вне квадрата $(0, \tau)\times(0, \tau)$ заменим функцию Q_1 разностным ядром $K(x-t)$. В квадрате $[0, \tau]\times[0, \tau]$ аппроксимируем $Q_1(x, t)$ разностным ядром $K_\tau(x-t)$ по формулам (40)—(40′). Функция K_τ симметрична и имеет вид

$$K_\tau(x)=(\tau-x)^{-1}K(x)\int_{0}^{\tau-x}\sqrt{\lambda(t)\lambda(x+t)}\,dt, \quad 0\leqslant x\leqslant\tau. \tag{41}$$

Погрешность $F(K_\tau)$ при этом вычисляется по формуле

$$F^2(K_\tau)=2\int_0^\tau K^2(x)\left\{\int_0^{\tau-x}\lambda(t)\lambda(x+t)\,dt-\right.$$

$$\left.-(\tau-x)^{-1}\left[\int_0^{\tau-x}\sqrt{\lambda(t)\lambda(t+x)}\,dt\right]^2\right\}dx. \qquad (41')$$

Как видим, погрешность эта хорошо реагирует на „отклонение" функции $\lambda(x)$ от постоянной.

Таким образом, в этом случае резольвентное ядро строится по формуле (31′) при $r=3$, $a_1=0$, $a_2=\tau$.

б) Ядро Q_1 удовлетворяет уравнению

$$(\partial_x+\partial_t)\,Q_1(x,\,t)=[\mu'(x)\,\mu(t)+\mu(x)\,\mu'(t)]\,K(x,\,t), \qquad (42)$$

где функция $\mu(x)=\sqrt{\lambda(x)}$ предполагается дифференцируемой. Сравнивая (42) с (6), приходим к выводу, что целесообразно заменить ядро $K(x-t)$ вырожденным

$$K(x-t)\approx\sum_{j=0}^{n}a_jK_j(x)\,\dot{K}_j(t). \qquad (43)$$

Разумеется, эта аппроксимация может быть осуществлена с большой точностью многими способами. Одним из эффективных подходов (и в то же время удобных для ситуации [18]) является применение преобразования Фурье, когда

$$2\pi K(x-t)\approx\sum_{j=-n}^{n}\hat{K}(\varepsilon j)\,e^{i\varepsilon j\,(t-x)}, \qquad (43')$$

где $\hat{K}(\xi)$ — преобразование Фурье от $K(x)$, $\varepsilon>0$ достаточно мало́, а n достаточно велико́.

Использование формулы (43) целесообразно, прежде всего, потому, что в [11] для случая (6) разработана чрезвычайно эффективная рекуррентная процедура для вычисления резольвентного ядра. В данном случае по (43) аппроксимирующее ядро Q_τ определяется из уравнения типа (6)

$$(\partial_x+\partial_t)\,Q_\tau=(\mu'(x)\,\mu(t)+\mu(x)\,\mu'(t))\sum_{j=0}^{n}a_j\,K_j(x)\,K_j(t) \qquad (44)$$

при условии $Q_\tau(x,\,t)=Q_\tau(t,\,x)$, $(x,\,t)\in(0,\,\tau)\times(0,\,\tau)$, $Q_\tau(x,\,0)=$ $=\mu(0)\,\mu(x)\,K(x)$.

Наконец, заметим, что в случае, когда функции $\mu(x)$ и $K_j(x)$ продолжаются в комплексную плоскость (например, как рациональные функции), использование аппроксимации (44) позволяет воспользоваться аппаратом обобщенных функций (см. [1], гл. 8) для решения граничной задачи примера 12 § 4. ▶

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 4.V.1982

Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Որոշ ինտեգրալ օպերատորների ռեզոլվենտաների կառուցվածքը *(ամփոփում)*

Դիտարկվում են Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումներ, որոնց կորիզները բավարարում են որոշակի դիֆերենցիալ հավասարումների։ Ստացվում են բանաձևեր, որոնք թույլ են տալիս վերականգնել ռեզոլվենտային կորիզը, երբ այն հայտնի է տիրույթի եզրի վրա։

Ընդհանրացվում են փաթեթի տիպի հավասարումների տեսության մեջ հայտնի մի շարք արդյունքներ։

A. B. NERSESIAN. *The structure of resolvent of some integral operators* (summary)

The paper deals with the Fredholm integral equations of second kind with the kernels satisfying some differential equations. The formulas which gives an opportunity to reconstruct the resolvent kernel on its value on the boundary are obtained. Particularly, the formulae which are known in the case of difference kernel are generalized at the cases of all main types of the equations of type of convolution.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский.* Уравнения типа свертки, М., «Наука», 1978.
2. *В. В. Соболев.* К теории диффузии излучения, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 11, № 5, 1958, 39—50.
3. *М. Г. Крейн.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, 13, 5 (83), 1958, 3—120.
4. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, 2 (80), 1958, 3—72.
5. *W. Trench.* An algorithm for the inversion of finite Toeplitz matrices, J. Soc. Indust. Appl. Math., 12, 1964, 515—522.
6. *И. Ц. Гохберг, А. А. Семенцул.* Об обращении конечных тёплицевых матриц и их континуальных аналогов, Матем. исслед., Кишинев, 7:2, 1972, 201—223.
7. *И. Ц. Гохберг, Г. Хайниг.* О матричных интегральных операторах на конечном интервале с ядрами, зависящими от разности аргументов, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 20, № 1, 1975, 55—74.
8. *И. Ц. Гохберг, Г. Хайниг.* Обращение конечных тёплицевых матриц, составленных из элементов некоммутативной алгебры, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. 19, № 5, 1974, 623—664.
9. *И. С. Иохвидов.* Ганкелевы и тёплицевы матрицы и формы, М., «Наука», 1974.
10. *Л. А. Сахнович.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке, УМН, 35, 4 (214), 1980, 69—129.
11. *T. Kailath, L. Ljung, M. Morf.* Generalized Krein—Levinson Equations for Efficient Calculation of Fredholm Resolvents of Nondisplacement Kernels, Topics in Functional Anal. Advances in Math. Suppl. Studies, 3, 1978, 169—183.
12. *T. Kailath, A. Vieira, M. Morf.* Inverses of Toeplitz operators, innovations and orthogonal polynomials, SIAM Review, 20, № 1, 1978, 106—119.
13. *T. Kailath, S. Y. Kung, M. Morf.* Displasement ranks of matrix, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), 1, № 5, 1979, 769—773.
14. *F. John.* The Ultrahyperbolic differential equations with four independent variables, Duke Math. J., V. 4, 1938, 300—322.
15. *И. Б. Симоненко.* О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки, Изв. вузов, Математика, № 2, 1959, 213—226.
16. *И. И. Комяк.* Об интегральном уравнении типа свертки с N ядрами, ДАН СССР, 179, № 2, 1968, 279—282.
17. *У. Гренандер, Г. Сеге.* Тёплицевы формы и их приложения, ИИЛ, 1961.

18. *В. В. Соболев.* Проблема Милна для неоднородной атмосферы, ДАН СССР, 239. № 3, 1978, 558—561.
19. *О. А. Олейник.* О гиперболических уравнениях второго порядка, вырождающихся внутри области и на ее границе, УМН, 24, 2 (146), 1969, 229—230.
20. *М. М. Смирнов.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, М., «Наука», 1966.
21. *А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян, Г. Р. Оганесян.* Об одном методе исследования задачи Коши для слабо гиперболических уравнений, Труды Всесоюзной конф., посвящ. 75-летию И. Г. Петровского, МГУ, 1978, 391—395.
22. *Ф. Д. Гахов.* Краевые задачи, М., Физматгиз, 1963.
23. *М. П. Ганин.* Об интегральном уравнении Фредгольма с ядром, зависящим от разности аргументов, Изв. вузов, Математика, 2 (33), 1963, 31—43.
24. *Б. Дэвисон.* Теория переноса нейтронов, М., Атомиздат, 1960.
25. *Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., «Наука», 1977.
26. *В. В. Соболев.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., ГИТТЛ, 1956.
27. *И. И. Кальмушевский.* О решении некоторых интегральных уравнений с ядрами, зависящими от суммы и разности аргументов, Дифф. уравн., 16, № 5, 1980, 941—943.
28. *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц, ГИТТЛ, 1953.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 6, 1982 Математика

УДК 517.98

Т. М. КОШЕЛЕВА

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ m-го ПОРЯДКА В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Постановка задачи

Пусть S—класс бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi^{(k)}(x)(1+|x|^n)\to 0 \text{ при } |x|\to\infty,\ k,\ n=0,\ 1,\cdots. \tag{1}$$

Рассмотрим уравнение m-го порядка

$$L(u)\equiv\frac{d^m u}{dt^m}+p_1(x)\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\cdots+p_m(x)u=0,\quad \varphi\in S, \tag{2}$$

где $u(t,\varphi)$ — искомое решение, которое при фиксированном $t>0$ является линейным непрерывным функционалом в S, а $p_1(x)$, $p_2(x),\cdots$ $\cdots$, $p_m(x)$ — полиномы.

Будем говорить, что функционал $u(t,\varphi)$ принадлежит классу M_j, если для него существует постоянная c, натуральные числа k, n, такие, что имеет место оценка

$$\left|\frac{d^l u(t,\varphi)}{dt^l}\right|\leqslant c(1+t^k)\sup(1+|x|^n)(|\varphi(x)|+|\varphi'(x)|+$$
$$+\cdots+|\varphi^{(j)}(x)|);\ \varphi\in S;\ t\geqslant 0,\ l=0,\ 1,\cdots,\ m-1. \tag{3}$$

Обозначим через M объединение классов M_j, т. е. $M=\bigcup_{j=1}^{\infty}M_j$.

Пусть $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x),\cdots,\lambda_m(x)$ — корни характеристического уравнения

$$\lambda^m+p_1(x)\lambda^{m-1}+\cdots+p_m(x)=0. \tag{4}$$

Предположим, что

$$\operatorname{Re}\lambda_r(x)\leqslant 0,\quad r=1,\ 2,\cdots,\ q, \tag{5}$$

$$\operatorname{Re}\lambda_r(x)>0,\quad r=q+1,\ q+2,\cdots,\ m, \tag{6}$$

при $-\infty<x<\infty$.

Рассмотрим следующую задачу.

Найти решение уравнения (2), принадлежащее классу M_j и удовлетворяющее граничным условиям

$$L_k(u)\equiv\sum_{j=0}^{m-1}Q_{kj}(x)\frac{d^j u(0,\varphi)}{dt^j}=l_k(\varphi),\ \varphi\in S,\ k=0,1,\cdots,\ q-1, \tag{7}$$

где Q_{kj} — полиномы, $l_k(\varphi)$ — линейные непрерывные функционалы из класса M_{r_0}. Связь между j и r_0 будет указана ниже.

В матричной форме условие (7) можно записать в виде

$$Q(x)\,W(\varphi) = l(\varphi), \quad \varphi \in S, \tag{8}$$

где $Q(x)$ — матрица размерности qxm с элементами $Q_{kj}(x)$, а l и W — вектор-столбцы.

$$W(\varphi) = (u(0,\varphi),\ u'(0,\varphi),\cdots,\ u^{(m-1)}(0,\varphi)),$$

$$l(\varphi) = (l_0(\varphi),\ l_1(\varphi),\cdots,\ l_{q-1}(\varphi)).$$

Пусть $\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\cdots,\ \lambda_q(x)$ — корни характеристического уравнения (4), удовлетворяющие условию (5). Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение в классе обычных функций

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1(x)E\right)\cdots\left(\frac{d}{dt} - \lambda_q(x)E\right)\omega(t,\ x) = 0, \tag{9}$$

где x входит как параметр, E — единичный оператор. Пусть $\omega_0(t,x),\cdots$ $\cdots\omega_{q-1}(t,\ x)$ — фундаментальная система решений этого уравнения. Обозначим через $\omega(x)$ матрицу

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_0(0,\ x) & \omega_1(0,\ x) & \cdots & \omega_{q-1}(0,\ x) \\ \dfrac{\partial\omega_0(0,\ x)}{\partial t} & \dfrac{\partial\omega_1(0,\ x)}{\partial t} & \cdots & \dfrac{\partial\omega_{q-1}(0,\ x)}{\partial t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^{m-1}\omega_0(0,\ x)}{\partial t^{m-1}} & \dfrac{\partial\omega_1^{m-1}(0,\ x)}{\partial t^{m-1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{m-1}\omega_{q-1}(0,\ x)}{\partial t^{m-1}} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Если

$$\det Q(x)\,\omega(x) \neq 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{11}$$

то задача (2), (7) в различных классах рассмотрена в работах [1]—[5]. В частности в работе [5] показано, что задача (2), (7) при условии (11) имеет единственное решение в классе M.

В данной работе мы рассмотрим задачу (2), (7) в том случае, когда $\det Q(x)\,\omega(x) \neq 0$ всюду, кроме конечного числа точек $x_1,\ x_2,\cdots$ $\cdots,\ x_n$. В этом случае, как показывают примеры, однородная задач (2), (7) в классе M может иметь бесконечное число линейно независимых решений, а поэтому естественно поставить задачу в классе M_j.

В работе показано, что в этом случае однородная задача (2), (7) в классе M_j имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима, а также указан метод решения этой задачи.

Отметим, что многие краевые задачи для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полуплоскости при помощи преобразования Фурье приводятся к задаче (2), (7) в классе M_j.

§ 2. Однородная задача (2), (7) в классе M_j

Аналогично работе [4] можно показать, что если $\det(Q(x) \times$ $\times\,\omega(x)) \neq 0$ всюду кроме конечного числа точек $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$, то решение однородной задачи (2), (7) есть функционал, сосредоточенный в точках $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$.

Так как кроме этого ищется решение из класса M_j, то оно представимо в виде

$$u(t, \varphi)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{j} c_{ik}(t)\varphi^{(k)}(x_i), \quad \varphi\in S. \tag{12}$$

Пусть $\varphi_{ir}(x)$ — функции из S, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_{ir}^{(r)}(x_i)=1, \ \varphi_{ir}^{(s)}(x_p)=0 \text{ при } i\neq p \text{ или } s\neq r. \tag{13}$$

Подставляя $\varphi_{ir}(x)$ в представление (12), получим, что $c_{ir}(t)=$ $=u(t, \varphi_{ir}(x))$. Следовательно $c_{ir}(t)$ вместе со своими производными до $(m-1)$-го порядка растут не быстрее полинома. Из соотношения (12) получим, что

$$\frac{d^p u(t, \varphi)}{dt^p}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{j} c_{ir}^{(p)}(t)\,\varphi^{(k)}(x_i). \tag{14}$$

Подставляя $u(t, \varphi)$ из (12) в уравнение (2) и имея в виду соотношение (14), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{j} c_{ik}^{(m)}(t)\,\varphi^{(k)}(x_i)+c_{ik}^{(m-1)}(t)\,(p_1(x))^{(k)}_{x=x_i}+\cdots+$$
$$+c_{ik}(t)\,(p_m(x)\,\varphi(x))^{(k)}_{x=x_i}=0. \tag{15}$$

Собирая коэффициенты при $\varphi^{(k)}(x_i)$ и приравнивая их к нулю, для определения $c_{ik}(t)$ при любом фиксированном $i\,(i=1,2,\cdots, n)$, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$c_{ij}^{(m)}(t)+p_1(x_i)\,c_{ij}^{(m-1)}(t)+\cdots+p_m(x_i)\,c_{ij}(t)=0, \tag{16}$$

$$c_{ik}^{(m)}(t)+p_1(x_i)\,c_{ik}^{(m-1)}(t)+\cdots+p_m(x_i)\,c_{ik}(t)+$$
$$+\sum_{\alpha=k+1}^{j}\sum_{\beta=0}^{m-1}\gamma_{ik\alpha\beta}\,c_{i\alpha}^{(\beta)}(t)=0, \quad k=j-1,\ j-2,\cdots, 0, \tag{17}$$

где $\gamma_{ik\alpha\beta}$ — постоянные.

Запишем граничные условия (7) в векторной форме

$$\sum_{p=0}^{m-1} Q_p(x)\,\frac{d^p u(0, \varphi)}{dt^p}=l(\varphi), \tag{18}$$

где

$$Q_p(x)=\begin{vmatrix} Q_{0p}(x)\\ Q_{1p}(x)\\ \vdots\\ Q_{q-1}(x)\end{vmatrix}; \ l=\begin{vmatrix} l_0\\ l_1\\ \vdots\\ l_{q-1}\end{vmatrix}; \ \frac{Q_p(x)\,du^p(0, \varphi)}{dt^p}=\begin{vmatrix} \dfrac{d^p u(0\,Q_{0p}(x)\,\varphi(x))}{dt^p}\\ \dfrac{d^p u(0\,Q_{1p}(x)\,\varphi(x))}{dt^p}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{d^p u(0\,Q_{q-1}(x)\varphi(x))}{dt^p}\end{vmatrix}. \tag{19}$$

Подставляя $u(t, \varphi)$ из (12) в граничные условия (18) при $l\equiv 0$ и имея в виду равенство (14), получим

$$\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{j} c_{lk}^{(p)}(0)\,(Q_p(x)\varphi(x))_{x=x_l}^{(k)}=0. \tag{20}$$

Аналогично рассуждениям, приводящим уравнение (15) к системе (16) и (17) получим, что граничное условие (20) эквивалентно условию вида

$$\sum_{p=0}^{m-1} c_{lj}^{(p)}(0)\,Q_p(x_l)=0, \tag{21}$$

$$\sum_{p=0}^{m-1} c_{lk}^{(p)}(0)\,Q_p(x_l)+\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{\alpha=k+1}^{j}\delta_{lk\alpha p}\,c_{l\alpha}^{(p)}(0)=0,\quad k=0,\,1,\cdots,\,j-1, \tag{22}$$

где $\delta_{lk\alpha p}$ — некоторые постоянные q-мерные векторы, 0 — нулевой вектор размерности q.

Решим уравнения (16) и (17) с граничными условиями (21), (22) в классе функций, которые вместе с производными растут не быстрее полинома. Обозначим через

$$a_l(t)=(c_{l0}(t),\ c_{l1}(t),\cdots,\ c_{lj}(t)) \tag{23}$$

решение системы (16), (17).

Характеристическое уравнение, соответствующее (16), имеет корни $\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\cdots,\ \lambda_m(x)$. Согласно условию (5) $\operatorname{Re}\lambda_r(x_l)\leqslant 0$, $r=1,\,2,\cdots,\,q$ и $\operatorname{Re}\lambda_r(x_l)>0$ при $r=q+1,\ q+2,\cdots,\ l$. Следовательно уравнение (16) имеет q линейно независимых решений [1]. Подставляя это решение в уравнение (17) и поступая аналогично мы получим, что система (16), (17) имеет $(j+1)q$ линейно независимых решений.

Пусть

$$a_{kl}(t)=(c_{kl0}(t),\ c_{kl1}(t),\cdots,\ c_{klj}(t)),\ k=1,\,2,\cdots,\,(j+1)q \tag{24}$$

являются линейно независимыми решениями системы (16), (17) в классе функций, растущих не быстрее полинома, тогда общее решение $a_l(t)$ системы (16), (17) в этом классе дается формулой

$$a_l(t)=\sum_{k=1}^{(j+1)q}\alpha_{kl}\,a_{kl}(t), \tag{25}$$

где α_{kl} — произвольные постоянные.

Подставляя решение $a_l(t)$ в граничные условия (21) и (22) для определения α_{kl} получим систему вида

$$A_l\alpha_l=0\ (i=1,\,2,\cdots,\,n), \tag{26}$$

где $\alpha_l(\alpha_{1,l},\ \alpha_{2,l},\cdots,\ \alpha_{q(j+1),l})$; A_l — некоторая постоянная квадратная матрица порядка $q(j+1)$. Следовательно решение однородной задачи (2), (7) в классе M_j привели к решению алгебраических систем уравнений (26). Из условий $\det(Q(x_l)\,w(x_l))=0$ $(i=1,\,2,\cdots,\,n)$ следует, что $\det A_l=0$. Обозначим через r_l ранг матрицы A_l, решая алгебраическую систему (26) получим, что однородная задача имеет $\sum_{l=1}^{n}[q(j+1)-r_l]$ линейно независимых решений.

§ 3. Решение неоднородной задачи в классе M_j

Пусть $\omega_0(t, x), \cdots, \omega_{q-1}(t, x)$ — фундаментальная система решений уравнения (9) с начальными условиями

$$\frac{\partial^k \omega_i}{dt^k}(0, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq i \\ 1, & \text{если } k = i, \end{cases}$$

$i, k = 0, 1, \cdots, q-1$, а $w(x)$ — матрица, построенная при помощи этой фундаментальной системы согласно (10). В работе [5] показано, что при условии (5) и (6) коэффициенты уравнения (9) аналитичны относительно действительной переменной x и при $|x| \to \infty$ они вместе с производными растут не быстрее полинома. Так как реальные части корней характеристического уравнения, соответствующего уравнению (9), меньше или равны нулю, то фундаментальная система решений $\omega_0(t, x), \cdots, \omega_{q-1}(t, x)$ и их частные производные при $|x| \to \infty$, $t \to \infty$ стремятся не быстрее полинома [1]. Если выполнено условие (11), то легко убедиться, что функционал

$$u(t, \varphi) = \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{q-1} l_k(a_{mk}(x)\, \omega_m(t, x)\, \varphi), \quad \varphi \in S, \tag{27}$$

является решением задачи (2), (7), где a_{mk} — элементы матрицы $(Q(x)\omega(x))^{-1}$.

Пусть $\det(Q(x)\omega(x)) \neq 0$ всюду, кроме конечного числа точек $x_1, x_2, \cdots, x_n$, тогда $\det(Q(x)\omega(x))$ представляется в виде

$$\det(Q(x)\omega(x)) = (x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_n)^{m_n} R(x), \tag{28}$$

где $R(x)$ — аналитическая функция всюду отличная от 0, а $m_1, m_2, \cdots$ $\cdots, m_n$ — некоторые натуральные числа. Обозначим через n_0 и m натуральные числа

$$m_0 = \max(m_1, m_2, \cdots, m_n), \quad n_0 = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

Пусть $l_0(\varphi), \cdots, l_{q-1}(\varphi)$ принадлежат к классу M_{r_0}. Решение задачи будем искать в классе M_j при $j \geqslant r_0 + m_0$.

Рассмотрим следующий функционал

$$u_0(t, \varphi) = \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{q-1} l_k(a_{mk}(x)\, \omega_m(t, x)(\varphi(x) - \alpha(x)\, p(x))), \tag{29}$$

где $\alpha(x) \in C_0^\infty$ (классу финитных функций) и в окрестности точек $x_1, x_2, \cdots, x_n$ равна 1, а $p(x)$ — полином порядка $n_0 - 1$, удовлетворяющий условиям

$$\frac{d^k p(x_l)}{dx^k} = \varphi^{(k)}(x_l), \quad k = 0, 1, \cdots, m_l - 1; \quad l = 1, 2, \cdots n. \tag{30}$$

Полином $p(x)$ определяется единственным образом и имеет вид

$$p(x) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{m_l - 1} \varphi^{(k)}(x_l)\, q_{lk}(x), \tag{31}$$

где $q_{lk}(x)$ вполне определенные полиномы порядка $n_0 - 1$, не зависящие от $\varphi(x)$. Функционал $u_0(t, \varphi)$ определен для $\varphi \in S$ и принадлежит классу $M_{r_0+m_0}$.

Пусть S_0 — класс функций $\varphi(x) \in S$, которые в окрестности точек $x_1, x_2, \cdots, x_n$ равны 0. Легко проверить, что

$$L(u_0(t, \varphi)) = 0, \quad \varphi \in S_0, \tag{32}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} Q_{pk}(x) \frac{d^k u_0(0, \varphi)}{dt^k} - l_p(\varphi) = 0, \ \varphi \in S_0 (p = 0, 1, \cdots, q-1). \tag{33}$$

Отсюда следует, что левые части (32) и (33) есть функционалы, сосредоточенные в точках $x_1, x_2, \cdots, x_n$, кроме того они принадлежат классу $M_{r_0+m_0}$, поэтому они представимы в виде

$$L(u_0(t, \varphi)) = \sum_{k=0}^{r_0+m_0} \sum_{l=1}^{n} a_{lk}(t) \varphi^k(x_l), \quad \varphi \in S, \tag{34}$$

$$L_p u_0 - l_p(\varphi) = \sum_{k=0}^{r_0+m_0} \sum_{l=1}^{n} \beta_{plk} \varphi^{(k)}(x_l), \ \varphi \in S \tag{35}$$

$(p = 0, 1, \cdots, q-1)$,

где $a_{lk}(t)$ — некоторые функции от t, β_{plk} — постоянные.

Пусть $\varphi_{lk}(x)$ — функции из S, удовлетворяющие условию (13). Подставляя $\varphi_{lk}(x)$ в равенства (34) и (35) получим

$$\beta_{plk} = v_p(\varphi_{lk}(x)), \ a_{lk}(t) = L(u_0(t, \varphi_{lk}(x))), \tag{36}$$

где v_p — левая часть равенства (35).

Из (36) следует, что при $t \to +\infty$ $a_{lk}(t)$ растут вместе с производными не быстрее чем полином.

Делаем замену искомого решения:

$$u(t, \varphi) = u_0(t, \varphi) + v(t, \varphi), \tag{37}$$

где $v(t, \varphi)$ — новый искомый функционал из класса M_j. Подставляя (37) в уравнения (2) и граничные условия (7) и имея в виду соотношения (34) и (35) получим, что

$$L(v(t, \varphi)) = -\sum_{k=0}^{r_0+m_0} \sum_{l=1}^{n} a_{lk}(t) \varphi^{(k)}(x_l), \ \varphi \in S, \tag{38}$$

$$L_p(v(t, \varphi)) = -\sum_{k=0}^{r_0+m_0} \sum_{l=1}^{n} \beta_{plk} \varphi^{(k)}(x_l), \ \varphi \in S, \tag{39}$$

$(p = 0, 1, \cdots, q-1)$.

Из (38) и (39), имея в виду условие (28) следует (см. [5]), что $v(t, \varphi) = 0$, когда $\varphi \in S_0$.

То есть $v(t, \varphi)$ является функционалом из класса M_j, сосредоточенным в точках $x_1, x_2, \cdots, x_n$, поэтому он представим в виде

$$v(t,\ \varphi)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{j}c_{lk}(t)\,\varphi^{(k)}(x_l),\quad \varphi\in S. \tag{40}$$

Аналогично однородному случаю, здесь также можно показать, что $c_{lk}(t)$ вместе со своими производными до j порядка при $t\to+\infty$ растут не быстрее полинома.

Подставим $v(t,\ \varphi)$ из соотношения (40) в уравнение (38) и граничные условия (39). Для определения $c_{lk}(t)$ получим следующие уравнения и граничные условия:

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{j}(c_{lk}^{(m)}(t)\,\varphi^{(k)}(x_l)+c_{lk}(t)\,(p_1(x)\varphi(x))^{(k)}+\cdots+$$

$$+c_{lk}(t)\,(p_m(x)\varphi(x))_{x_l}^{(k)})+\sum_{k=0}^{r_0+m_0}\sum_{l=1}^{n}\alpha_{lk}(t)\,\varphi^{(k)}(x_l)=0,\quad \varphi\in S, \tag{41}$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{l}\sum_{j=0}^{m-1}c_{lk}^{(j)}(0)\,(Q_{kj}(x)\,\varphi(x))_{x_l}^{(k)}+\sum_{k=0}^{r_0+m_0}\sum_{l=1}^{n}\beta_{plk}\,\varphi^{(k)}(x_l)=0. \tag{42}$$

Аналогично случаю однородной задачи уравнение (41) с граничным условием (42) приводится к решению неоднородных алгебраических систем

$$A_l\alpha_l=b_l\quad (l=1,\ 2,\cdots,\ n), \tag{43}$$

где матрица A_l и искомый вектор те же самые, что и в уравнении (26), а b_l — постоянные векторы размерности $q(j+1)$, компоненты которых имеют следующий вид:

$$b_{lk}=\sum_{p=0}^{q-1}l_p(\varphi_{plk}(x)), \tag{44}$$

где $\varphi_{plk}(x)$ — вполне определенные функции из класса S.

Покажем, что задача (2), (7) всегда разрешима. Как известно для разрешимости уравнения (43), необходимо и достаточно, чтобы вектор b_l удовлетворял условиям

$$\beta_k\,b_l=0,\ k=1,\ 2,\cdots,\ R_l,\ \text{где}\ R_l=q(j+1)-r_l, \tag{45}$$

$\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_{R_l}$ — полная система линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения

$$\beta_k A_l=0,\ \beta_k=(\beta_{k1},\ \beta_{k2},\cdots,\ \beta_{kq(j+1)}).$$

Согласно (44) условие (45) можно написать в виде

$$\sum_{p=0}^{q-1}l_p(\psi_{plk}(x))=0\quad (k=1,\ 2,\cdots,\ R_l), \tag{46}$$

где ψ_{plk} — некоторые функции из класса S, не зависящие от $l_0,\ l_1,\cdots$ $\cdots,\ l_{q-1}$. Условие (46) будет выполнено, если мы покажем, что $\psi_{plk}(x)\equiv 0$.

Возьмем функционалы

$$l(\varphi)=Q(x)\,\omega(x)\,C(\varphi)\quad (l(\varphi)=(l_0(\varphi),\ l_1(\varphi),\cdots,\ l_{q-1}(\varphi))), \tag{47}$$

где $C(\varphi)=(C_0(\varphi), C_1(\varphi),\cdots, C_{q-1}(\varphi))$ — произвольные функционалы из класса M_{r_0}, $Q(x)$ и $\omega(x)$ — матрицы, рассмотренные ранее. Для вектор-функционала $l(\varphi)$ уравнение (2), (7) имеет решение

$$u(t, \varphi)=\omega_0(t, x)\ C_0(\varphi)+\cdots+\omega_{q-1}(t, x)\ C_{q-1}(\varphi),$$

поэтому функционал $l(\varphi)$ удовлетворяет условию (46). Подставляя $l(\varphi)$ из (47) в (46) получим

$$C_0(f_0(x))+C_1(f_1(x))+\cdots+C_{q-1}(f_{q-1}(x))=0. \qquad (48)$$

где $(f_0(x),\cdots, f_{q-1}(x))=\psi_{1k}(x)\ Q(x)\,\omega(x)$, а

$$\psi_{1k}(x)=(\psi_{01k}(x),\ \psi_{11k}(x),\ \cdots,\ \psi_{q-11k}(x)).$$

Так как $c_0, c_1,\cdots, c_{q-1}$ — произвольные функционалы, то из (48) следует, что $f(x)\equiv 0$, т. е.

$$\psi_{1k}(x)\ Q(x)\,\omega(x)\equiv 0, \qquad (49)$$

но так как $\det(Q(x)\,\omega(x))\neq 0$ всюду, кроме конечного числа точек и $\psi_{1k}(x)\in S$, то $\psi_{1k}(x)\equiv 0$.

Следовательно алгебраическая система (43) также всегда разрешима. Решая ее мы построим все решения неоднородной задачи (2), (7)

Получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Если выполнено условие* (28) *и* $l_0, l_1,\cdots, l_{q-1}\in M_{r_0}$ *то неоднородная задача* (2), (7) *в классе* M_j *при* $j\geqslant r_0+m_0$ *всегда имеет решение.*

Замечание. Если дополнительно требовать, чтобы $\operatorname{Re}\lambda_r(x)>\varepsilon(\varepsilon>0)$ для $r=q+1,\cdots, m$, то в работе [1] доказано, что уравнение (2) с правой частью $f(t, u)$ из класса M_{r_0} имеет частное решение из этого класса. Используя это частное решение можно поставленную задачу для неоднородного уравнения привести к рассмотренной задаче для однородного уравнения.

В заключение выражаю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну, под руководством которого выполнена данная работа.

Курский политехнический институт Поступила 19.XII.1980

Տ. Մ. ԿՈՇԵԼԵՎԱ. Եզրային խնդիր m-րդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար ընդհանրացված ֆունկցիաների դասում *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է

$$L(u)\equiv\frac{d^m u}{dt^m}+p_1(x)\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\cdots+p_m(x)\,u=0$$

հավասարումը հետևյալ եզրային պայմաններով

$$L_k(u)\equiv\sum_{j=0}^{m-1}Q_{kj}(x)\ \frac{d^j u(0, \varphi)}{dt^j}=l_k(\varphi),\ k=0, 1,\cdots, q-1:$$

Աշխատանքում նշվում են պայմաններ $Q_{kj}(x)$ բազմանդամների վրա, որոնց դեպքում համասեռ խնդիրը ունի վերջավոր թվով գծորեն անկախ լուծումներ, իսկ ոչ համասեռ խնդիրը միշտ լուծելի է։ Աշխատանքում տրվում է նշված խնդրի լուծման եղանակը։

T. M. KOSHELEVA. *A boundary problem for ordinary differential equations of m-th order in the class of generalized function* (summary)

We consider the equation

$$L(u) = \frac{d^m u}{dt^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \cdots + p_m(x)u = 0$$

with boundary conditions

$$L_k(u) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} Q_{kj}(x)\frac{d^j u(0, \varphi)}{dt^j} = l_k(\varphi), \quad k = 0, 1, \cdots, q-1.$$

The paper gives conditions on polynoms $Q_{kj}(x)$ under which the homogeneous problem has a finite number of linear independent solutions and the inhomogeneous problem can always be solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Е. Шилов.* Математический анализ. Второй специальный курс, М., «Наука», 1965.
2. *Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов.* О корректных краевых задачах для уравнения в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, 1960, 369—380.
3. *В. П. Паламодов.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, 1960, 381—386.
4. *Г. В. Дикополов.* О краевых задачах для диффеерциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Матем, сб., 59 (101), 1962, 215—228.
5. *А. Л. Павлов.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Матем. сб., 103 (145), № 3 (7), 1977, 367—391.
6. *Л. Хёрмандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 6, 1982 Математика

УДК 517.98

Г. А. КАРАПЕТЯН

ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ И ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЁФА ДЛЯ ОБЩИХ РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 0. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

В настоящей заметке, основываясь на некоторых результатах С. М. Никольского [1], Л. Хёрмандера [2], В. П. Ильина [3], В. П. Михайлова [4], Г. Г. Казаряна [5], [6] и других, мы получаем теоремы типа Лиувилля и типа Фрагмена-Линделёфа в неограниченных областях для общих регулярных и нерегулярных уравнений, аналогичные классическим теоремам указанных типов для гармонических функций.

Для полигармонических уравнений теоремы типа Лиувилля доказаны, например, в книге [7]. Для эллиптических уравнений и систем, при разных предположениях на характер рассматриваемых областей и на гладкость коэффициентов, теоремы типа Лиувилля и типа Фрагмена-Линделёфа доказаны в работах Е. М. Ландиса [8], О. А. Олейник и Е. В. Радкевича [9], [10], О. А. Олейник и Максимовой [11], М. А. Шифрина [12], А. Кавалуччи в [13] получены аналогичные теоремы для семиэллиптических уравнений. В этой работе автор существенно пользуется априорными оценками, доказанными в [7] и [14]. Здесь доказываются теоремы указанных типов для одного класса дифференциальных операторов, который содержит как класс семиэллиптических операторов, так и некоторый подкласс формально гипоэллиптических операторов (см. [15]—[17]). В работе мы в основном следуем методам работ [9]—[11], [13].

Пусть R_n, E_n — n-мерные евклидовы пространства действительных векторов, Z_n^+ — целочисленная решетка, т. е. множество мультииндексов, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, где α_i $(i=1,\cdots,n)$ — целые неотрицательные числа. Пусть $\xi\in R_n$, $x\in E_n$, $\alpha\in Z_n^+$, положим $|\alpha|=\sum\alpha_j$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$, $D_k=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$. Положим также $R_n^{(0)}=\{\xi\in R_n,\ \xi_1\cdots\xi_n\neq 0\}$.

Каждому линейному дифференциальному оператору

$$P(D)=\sum\gamma_\alpha D^\alpha \tag{0.1}$$

сопоставим его характеристический многочлен (или полный символ)

$$P(\xi)=\sum\gamma_\alpha\xi^\alpha \tag{0.2}$$

и положим $(P)=\{\alpha:\ \alpha\in Z_n^+,\ \gamma_\alpha\neq 0\}$.

Определение 0.1. Характеристическим многогранником (х.м.) (или многогранником Ньютона) $\mathbf{N}=\mathbf{N}(P)$ данного многочлена $P(\xi)=\sum \gamma_\alpha \xi^\alpha$ назовем наименьший выпуклый многогранник (в R_n), содержащий все точки $\alpha \in (P)$.

Определение 0.2. (см. [4]). Выпуклый многогранник $\mathbf{N} \subset R_n$ с вершинами в Z_n^+ назовем полным, если $\mathbf{N}$ имеет вершины в начале координат и на каждой оси координат Z_n^+.

Определение 0.3. (см. [5]) $(n-1)$-мерную грань $\mathbf{N}_i^{n-1}$, $i=1,\cdots,M_{n-1}$, выпуклого многогранника $\mathbf{N}$ назовем вполне правильным (в.п.), если внешняя (относительно $\mathbf{N}$) нормаль этой грани имеет только положительные координаты.

Полный многогранник $\mathbf{N}$ назовем вполне правильным (в.п.), если все некоординатные $(n-1)$-мерные грани этого многогранника вполне правильны.

Обозначим через $\mathbf{N}_i^k$, $i=1,\cdots,M_k$, $k=0,\cdots,n-1$, все в.п. грани х.м. $\mathbf{N}$ многочлена $P(\xi)$ и положим

$$P^{i,k}(\xi)=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \tag{0.3}$$

Определение 0.4. (см. [4] или [5]). Грань $\mathbf{N}_i^k$, $1 \leqslant i \leqslant M_k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ х.м. $\mathbf{N}=\mathbf{N}(P)$ многочлена $P(\xi)$ назовем регулярной (невырожденной), если $P^{i,k}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R_n^{(0)}$. Грани, не являющиеся регулярными, будем называть нерегулярными.

Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) с в.п.х.м. $\mathbf{N}$ назовем регулярным, если регулярны все в.п. грани х.м. $\mathbf{N}$. В случае, когда все в.п. грани в.п.х.м. $\mathbf{N}$ многочлена $P(\xi)$ регулярны В. П. Михайловым в [4] доказано, что для некоторой постоянной $C>0$

$$1+|P(\xi)| \geqslant C \sum_{\alpha\in\mathbf{N}} |\xi^\alpha|, \quad \forall \xi \in R_n. \tag{0.4}$$

Из этого неравенства и из результатов работы [18] С. М. Никольского следует гипоэллиптичность многочлена $P(\xi)$.

Пусть в.п. х.м. $\mathbf{N}(P)$ имеет хотя бы одну в.п. нерегулярную грань. При этом мы изучаем тот случай, когда нерегулярна лишь $(n-1)$-мерная грань $\mathbf{N}_{i_0}^{n-1}$. Пусть $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$—внешняя нормаль этой грани, $(\lambda,\alpha)=d_0$—уравнение $n-1$-мерной гиперплоскости, проходящей через эту грань. Тогда (см. [4]) существует число $d_0>0$ такое, что

$$P_0(\xi)=P^{i_0,n-1}=\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

Положим $\sum(P_0)=\{\eta;\ \eta\in R_n^{(0)},\ |\eta|=1,\ P_0(\eta)=0\}$,

$$\sum(\operatorname{grad} P_0)=\{\eta,\ \eta\in\sum(P_0),\ \operatorname{grad} P_0(\eta)=0\},$$

$$d_1=\max\{(\lambda,\alpha),\ \alpha\in\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_{i_0}^{n-1},\ \alpha\in(P)\},$$

$$P_1(\xi)=\sum_{(\lambda,\alpha)=d_1} \gamma_\alpha \xi^\alpha,\quad \mathbf{N}^*=\{\alpha;\ \alpha\in\mathbf{N},\ (\lambda,\alpha)\leqslant d_1\}.$$

Г. Казаряном в работе [19] доказана

Теорема а). Пусть $N_{i_0}^{n-1}$ — единственная в.п. нерегулярная грань в.п. х.м. N многочлена $P(\xi)$ с вещественными коэффициентами γ_α, $\alpha \in N$ и $P_1(\eta) \neq 0$ при $\eta \in \sum(P_0)$.

Для того чтобы многочлен $P(\xi)$ был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:

1) N^* — в.п. многогранник,

2) $d_0 - d_1 < \min\limits_{\mu \in U} (\lambda, \mu)$,

где $U = \bigcup\limits_{\eta \in \sum(P_0)} U(\eta) = \bigcup\limits_{\eta \in \sum(P_0)} \{\mu, \mu \in Z_n^+, D^\lambda P_0(\eta) \neq 0\}$,

3) $P_0(\xi) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ $\forall \xi \in R_n$, $P_1(\eta) > 0$ (<0), $\forall \eta \in \sum(P_0)$,

4) $\forall \eta \in \sum(\operatorname{grad} P_0)$ при $\xi \to \eta$

$$\left|\frac{\partial P_0(\xi)}{\partial \xi_i}\right| = O\left((|P_0(\xi)|)^{1-\frac{\lambda_i}{d_0-d_1}}\right), \quad i = 1, \cdots, n.$$

В работе [6] доказано, что для многочлена $P(\xi)$, удовлетворяющего условиям теоремы а), существует положительная постоянная $C > 0$ такая, что

$$1 + |P(\xi)| \geqslant C \sum_{\alpha \in N^*} |\xi^\alpha|, \quad \forall \xi \in R_n. \tag{0.5}$$

В книге [2] Л. Хёрмандера доказана следующая

Теорема б). Для того чтобы оператор $P(D)$ был гипоэллиптическим необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные постоянные c и C такие, что

$$|P^{(\alpha)}(\xi)| / |P(\xi)| \leqslant C |\xi|^{-|\alpha| c}, \quad \forall \alpha \in Z_n^+,$$

при $\xi \in R_n$, а $|\xi|$ достаточно велик.

Наибольшее из чисел c мы назовем показателем гипоэллиптичности.

Определение 0.5. (см. [2] и [5]). Говорят, что оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) сильнее (мощнее) оператора $Q(D)$ (многочлена $Q(\xi)$) (обозначение $P \prec Q$ $(P \lesssim Q)$), если существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $\xi \in R_n$

$$\bar{Q}(\xi) \leqslant C \tilde{P}(\xi) \quad (|Q(\xi)| \leqslant C(1 + |P(\xi)|),$$

где для многочлена $R(\xi)$ функция Л. Хёрмандера $\bar{R}(\xi)$ определяется так

$$\tilde{R}(\xi) = \Big(\sum_{\alpha > 0} |D^\alpha R(\xi)|^2\Big)^{1/2}.$$

Пусть

$$P(x, D) = \sum_{\alpha \in 2N} \gamma_\alpha(x) D^\alpha. \tag{0.6}$$

Определение 0.6. (см. [2]). Говорят, что оператор $P(x, D)$ (многочлен $P(x, \xi)$) имеет постоянную силу в Ω, если для любых пар точек x, $y \in \Omega$ существует постоянная $C_{x,y} > 0$ такая, что

$$\tilde{P}(x, \xi) / \bar{P}(y, \xi) \leqslant C_{x, y}.$$

Определение 0.7. (см. [5]). Говорят, что оператор $P(x, D)$ имеет постоянную мощность в Ω, если для любых пар точек $x, y \in \Omega$ существуют постоянные $C_1 = C_1(x, y) > 0$, $C_2 = C_2(x, y) > 0$ такие, что

$$C_1 \leqslant (1 + |P(x, \xi)|) / (1 + |P(y, \xi)|) \leqslant C_2, \ \forall \xi \in R_n.$$

Оператор постоянной мощности в Ω имеет постоянную силу в Ω, что легко следует из теоремы 3.3.2 работы [2].

Определение 0.8. (см. [15], [16]). Оператор $P(x, D)$ называется формально гипоэллиптическим в Ω, если многочлен $P(x^0, \xi)$ с постоянными коэффициентами является гипоэллиптическим для каждой точки $x^0 \in \Omega$ и $P(x, D)$ имеет постоянную мощность в Ω.

Формально гипоэллиптические операторы введены Б. Мальгранжем [16] и Л. Хермандером [15] (см. также [17]). Ими доказано, что формально гипоэллиптические операторы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами являются гипоэллиптическими, т. е., что все непрерывные решения уравнения $P(x, D)\, u = f$, $f(x) \in C^\infty(\Omega)$, принадлежат классу $C^\infty(\Omega)$.

Будем говорить, что оператор $P(x, D)$ типа (0.6) регулярный, если существует постоянная $\varkappa > 0$ такая, что для любых точек $x \in E_n$, $\xi \in R_n$

$$1 + |P(x, \xi)| \geqslant \varkappa \sum_{\nu \in 2N} |\xi^\nu|. \tag{0.7}$$

Г. Г. Казаряном в [5] доказан следующий факт: пусть $\mathrm{N}(P, x)$ — в.п.х.м. оператора $P(x, D)$ в точке $x \in \Omega$. Если оператор $P(x, D)$ имеет постоянную силу в Ω, то $\mathrm{N}(x, P)$ не зависит от точки x; $\mathrm{N}(P, x) \equiv \mathrm{N}(P)$, $\forall x \in \Omega$.

Определение 0.9. (см. [4]). Пусть N — полный многогранник, точка $\alpha \in \mathrm{N}$ называется главной точкой многогранника N, если α лежит хотя бы на одной в.п. грани х.м. N. Обозначим множество главных точек множества N через $\partial' \mathrm{N}$ и положим $\mathrm{N}^{(0)} = \mathrm{N} \setminus \partial' \mathrm{N}$.

Обозначим через $W_p^{\mathrm{N}}(\Omega)$, $A^{\mathrm{N}}(\Omega)$ пространства функций с конечными нормами, соответственно

$$\|u\|_{\mathrm{N}} = \sum_{\alpha \in \mathrm{N}} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{0.8}$$

$$\|u\|_P = \|P^{l_0, n-1}(D)\, u\|_{L_1(\Omega)} + \sum_{\alpha \in \mathrm{N}^0} \|D^\alpha u\|_{L_1(\Omega)}, \tag{0.9}$$

и пусть $\mathring{W}_p^{\mathrm{N}}(\Omega)$, $\mathring{A}^{\mathrm{N}}(\Omega)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме (0.8) и (0.9) соответственно.

Пусть E — множество мультииндексов многогранника N и Λ — скелет множества E (см. [1]), Λ_Φ — система граничных функций (соответствующая функции $\Phi(x)$), приведенная в работе [1].

Обозначим через $\mathring{\bar{W}}_p^{\mathrm{N}}(\Omega) = \{f;\, f \in W_p^{\mathrm{N}}(\Omega),\ \Lambda_f = 0\}$. Для функции $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ рассмотрим уравнение вида

$$P(x, D)\, u = f, \tag{0.10}$$

где коэффициенты оператора $P(x, D)$ типа (0.6) принадлежат $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Решение уравнения (0.10) из класса $\mathfrak{M}(\Omega) = \mathring{W}_p^N(\Omega) \cap C^{2N}(\Omega) \cap C^\lambda(\bar{\Omega})$ называется классическим решением уравнения (0.10) с нулевыми начальными условиями Дирихле.

Для нерегулярного оператора типа

$$P(D) = \sum_{\alpha, \beta \in N} a_{\alpha, \beta} D^{\alpha+\beta} \tag{0.11}$$

рассмотрим уравнение

$$P(D)\, u = f. \tag{0.12}$$

Обозначим (см. [20]) через $B(\Omega) = \mathring{A}^N(\Omega) \cap C^{2N}(\Omega) \cap C^V(\Omega)$, где V обозначает множество мультииндексов таких, что если $D^\nu u|_{\partial\Omega} = 0$ при всех $\nu \in V$, то функцию u можно продолжить на все пространство E_n так, чтобы для продолженной функции $\tilde{u} \in A^N(E_n)$.

Решение уравнения (0.12) из класса $B(\Omega)$ называется классическим решением уравнения (0.12) с нулевыми начальными условиями Дирихле.

Пусть $0 < r < \infty$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\bar{x} \in E_n$. Положим

$$I_r(\bar{x}) = \{x \in E_n, |x_j - \bar{x}_j| < r, 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

$$I_{k, r}^{\pm}(\bar{x}) = \{x \in I_r(\bar{x}), 0 \leqslant \pm (x_k - \bar{x}_k)\},$$

$$I_{k, r}'(\bar{x}) = \{x \in I_r(\bar{x}), x_k = \bar{x}_k\}.$$

Для набора мультииндексов $E = \{\alpha^j\}_1^N$ и числа p, $1 < p < \infty$ обозначим через $L_p^E(\Omega)$ пространство функций с конечной нормой

$$\|u\|_{L_p^E(\Omega)} = \sum_{j=1}^N \|D^{\alpha^j} u\|_{L_p(\Omega)}.$$

§ 1. Неравенства между нормами частных производных функций многих переменных

Теорема В. П. Ильина (см. [3], т. 2.5). Пусть область Ω удовлетворяет условию куба и $\beta^j \in Z_n^+$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$, $\mu_i > 0$ и $(\mu, \beta^j) = F > 0$, $j = 1, \cdots, n$, $E = (\beta^0, \cdots, \beta^n)$. Тогда, если для $\nu \in Z_n^+$

1) $\beta_i^0 \leqslant \nu_i$, $i = 1, \cdots, n$,

2) $\beta_j^i \leqslant \nu_i$, $i \neq j$, $\beta_j^j > \nu_j$, $i, j = 1, \cdots, n$,

3) $F_1 = (\mu, \nu) < F$,

то существует число $h_0 > 0$ и постоянные C_1, $C_2 > 0$ такие, что для всех $f \in L_p^E(\Omega)$ и h, $0 < h < h_0$ справедливо неравенство

$$\|D^\nu f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C_1 h^{-\delta} \|D^{\beta^0} f\|_{L_p(\Omega)} + C_2 h^{\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} \|D^{\beta^j} f\|_{L_p(\Omega)}, \tag{1.1}$$

где $\delta = F_1 - (\mu, \beta^0)$, $\varepsilon = F - F_1$.

Из теоремы В. П. Ильина непосредственно вытекает

Следствие. Пусть $2\mathbf{N}$—в.п. многогранник с вершинами $e^k \in Z_n^+$, $k = 0,1,\cdots, N$ и $E = \{e^k\}_0^N$, тогда для всех функций $f \in L_p^E(\Omega)$ и для любого $\nu \in 2\mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\|D^\nu f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{N} \|D^{e^i} f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_p(\Omega)} \right). \tag{1.2}$$

Положим $A = \{e^k\}_1^N$ и обозначим через $\mathbf{A}$ множество всевозможных комбинаций из n элементов множества A; $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_{C_N^n})$.

Пусть $\bar{\mu}^j$ — единичная внешняя (относительно $\mathbf{N}$) нормаль гиперплоскости, проведенная через все точки множества $\mathbf{A}_j$. Тогда $(\alpha, \bar{\mu}^j) = \Phi_j$ для всех $\alpha \in \mathbf{A}_j$ $(j = 1, \cdots, C_N^n)$.

Пусть $\mathbf{B}_j$—набор таких мультииндексов, для которых справедливо неравенство (1.1), где в правой части участвует набор $\mathbf{A}_j \cup \{0\}$. В этом случае будем говорить, что точки $\mathbf{B}_j$ оцениваются через набор $\mathbf{A}_j$.

Пусть сначала

$$\bigcup_{j=1}^{C_N^n} \mathbf{B}_j = \mathbf{N}^{(0)} \cap Z_n^+ \tag{1.3}$$

и $\beta^j \in \mathbf{B}_j$. Тогда $\tilde{\Phi}_j = (\bar{\mu}^j, \beta^j) < \Phi_j$ и по теореме В. П. Ильина существует постоянная $C > 0$ такая, что для достаточно малых $h > 0$ имеет место неравенство

$$\|D^{\beta^j} u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C \left(h^{\Phi_j - \tilde{\Phi}} \sum_{\alpha \in \mathbf{A}_j} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} + h^{\tilde{\Phi}_j} \|u\|_{L_p(\Omega)} \right) \tag{1.4}$$

$$(j = 1, \cdots, C_N^n).$$

Заменой вектора $\tilde{\mu}^j$ вектором $\mu^j = \Phi_1 \cdots \Phi_{j-1} \Phi_{j+1} \cdots \Phi_{C_N^n} \tilde{\mu}$ уравнение $(n-1)$-мерной гиперплоскости, содержащей множество $\mathbf{A}_j$, можно записать в виде

$$(\mu^j, \alpha) = F = \prod_{k=1}^{C_N^n} \Phi_k \quad (j = 1, \cdots, C_N^n), \quad (\mu^j, \beta^j) = F_j < F.$$

Тогда неравенство (1.4) запишется так

$$\|D^{\beta^j} u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C \left(h^{F - F_j} \sum_{\alpha \in \mathbf{A}_j} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} + h^{-F_j} \|u\|_{L_p(\Omega)} \right). \tag{1.5}$$

Так как вместе с вектором $\tilde{\mu}^j$ внешней нормалью к гиперплоскости, проходящей через точки набора $\mathbf{A}_j$, является также и вектор

$K \cdot \bar{\mu}^j$, где K — любое положительное число, то не умаляя общности, можно считать, что

1) $F - |\alpha| > 0$, $\forall \alpha \in 2\mathbf{N}$,

1) $$F - \max_{\beta \in 2\mathbf{N}^{(0)}} |\beta| \geqslant \max_{\alpha \in 2\mathbf{N}^{(0)}} d_\alpha = \max_{\alpha \in 2\mathbf{N}^{(0)},\ 1 < j < H_\alpha} \max \{(\mu^k j, \alpha)\}, \tag{1.6}$$

где H_α — число тех множеств A_j, через которые оценивается мультииндекс α. Тогда из (1.5) и из теоремы В. П. Ильина следует

$$\sum_{\alpha \in 2\mathbf{N}} h^{d_\alpha} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C \left(h^F \sum_{j=1}^{N} \|D^{e^j} u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\Omega)} \right). \tag{1.7}$$

Если же условие (1.3) нарушается, то неравенство (1.7) получается аналогично, с учетом неглавных мультииндексов многогранника $2\mathbf{N}$ и с многократным применением теоремы В. П. Ильина и следствия этой теоремы.

Таким образом, теорему В. П. Ильина можно перефразировать так:

Теорема 1.1. *Пусть* $\{e^j\}_0^N$*—вершины в.п. многогранника* $2\mathbf{N}$ *и* $E = \{e^0, \cdots, e^N\}$. *Тогда существует постоянная* $C > 0$ *и число* $h_0 > 0$ *такие, что для любого* h, $0 < h < h_0$ *и для любой функции* $f \in L_p^E(\Omega)$ *справедливо неравенство* (1.7), *где числа* d_α $(\alpha \in 2\mathbf{N})$ *и* F *удовлетворяют условиям* (1.6).

§ 2. Оценки шаудеровского типа для регулярных операторов

Пусть область Ω удовлетворяет условию: существует множество $\Gamma \subset \partial\Omega$ и число R_3, $0 < R_3 \leqslant 1$ такие, что $\partial\Omega / \Gamma$ ограничено и для любой точки $x \in \Gamma$ найдется число k, $1 \leqslant k \leqslant n$ такое, что $I^+_{k, R_3}(\bar{x}) \cap \partial\Omega = I_{k, R_3}(\bar{x})$.

Легко убедиться (см. [13]), что из этого условия на Ω следует, что или а) $I^+_{k, R_3}(\bar{x}) \cap \Omega = \varnothing$, $I^-_{k, R_3}(\bar{x}) \subset \bar{\Omega}$, или

б) $I^-_{k, R_3}(\bar{x}) \cap \Omega = \varnothing$, $I^+_{k, R_3}(\bar{x}) \subset \Omega$.

Это, в свою очередь, означает, что или $I^+_{k, R_3}(\bar{x}) = \bar{\Omega} \cap I_{R_3}(\bar{x})$ или $I^-_{k, R_3}(\bar{x}) = \bar{\Omega} \cap I_{R_3}(\bar{x})$.

Из наложенных ограничений на Ω следует существование ограниченной области $\Omega_1 \subset \Omega$ такой, что для любой точки $x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1$, или существует точка $\bar{x} \in \Omega$, такая, что $x \in I_{R_3}(\bar{x})$, или существует точка $\bar{x} \in \partial\Omega$ такая, что $x \in I^+_{k, R_3}(\bar{x})$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Из результатов работ [5], [6] Г. Г. Казаряна (при $p = 2$ см. также [4] и [21]), следует

Теорема в). *Пусть* $2\mathbf{N} \equiv 2\mathbf{N}(P, x)$ *в.п. х.м. регулярного оператора постоянной силы* $P(x, D)$ *типа* (0.6) *с коэффициентами*

$\gamma_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$ *и* $\Omega' \subset\subset \Omega$. *Тогда существует постоянная* $C = C(\Omega') > 0$ *такая, что для всех функций* $u \in C_0^\infty(\Omega')$ *и* p, $1 < p < \infty$

$$\sum_{\alpha \in 2N} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega')} \leqslant C\left(\|P(x, D)\, u\|_{L_p(\Omega')} + \|u\|_{L_p(\Omega')}\right). \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $P(x, D)$ — *регулярный оператор постоянной силы типа* (0.6) *с коэффициентами* $\gamma_\alpha(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. *Тогда существуют постоянные* $C_1 > 0$ *и* $R_1 > 0$ *такие, что для любого решения* $u(x)$ *уравнения* $P(x, D)\, u = f$ *в* $I_{R_1}(\bar{x}) \subset \Omega$ *и для любого числа* R, $0 < R \leqslant R_1$, *имеет место неравенство*

$$\sum_{\alpha \in 2N} \sup_{0<r<R} (R-r)^{d_\alpha} \|D^\alpha u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \{\sup_{0<r<R} (R-r)^F \|f\|_{L_p(I_r(\bar{x}))} + \|u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}\}. \tag{2.2}$$

Для доказательства этой теоремы установим следующее вспомогательное предложение.

Лемма 2.1. *Пусть рассматривается оператор постоянной силы* (0.6), *для которого выполняется условие* (0.7). *Тогда для любого* $\alpha \in 2N$ *и любого* R, $0 < R < R_1$ *существует постоянная* $C > 0$ *такая, что для всех функций* $u(x) \in C^\infty(\Omega)$

$$(R-r)^{d_\alpha} \|D^\alpha u\|_{L_p(I_{r'}(\bar{x}))} \leqslant C\{(R-r)^F \|P(x, D)\, u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))} +$$

$$+ \sum_{\alpha \in 2N^{(0)}} (R-r)^{d_\alpha} \|D^\alpha u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}\}, \tag{2.3}$$

где $0 < r < R$, $I_{r'}(\bar{x}) = \{x \in I_R(\bar{x}), \rho(x, \partial I_R(\bar{x})) > 2(R-r)\}$.

Доказательство леммы 2.1. Заметим, что $I_r(\bar{x}) = \{x \in I_R(\bar{x}), \rho(x, \partial I_R(\bar{x})) > R - r\}$. Пусть $\varphi_r(x) \in C_0^\infty(I_r(\bar{x}))$ функция такая, что $\varphi_r(x) \equiv 1$ на $I_{r'}(\bar{x})$ и $|\varphi_r^{(\alpha)}(x)| \leqslant C_\alpha (R-r)^{-|\alpha|}$, $\forall \alpha \in Z_n^+$ (существование такой функции см., например, в книге [2]).

Если $\alpha \in 2N^{(0)}$, то неравенство (2.3) очевидно. Пусть $\alpha \in \partial' 2N$, тогда $d_\alpha = F$ и из теоремы в) имеем

$$(R-r)^F \|D^\alpha u\|_{L_p(I_{r'}(\bar{x}))} \leqslant (R-r)^F \|D^\alpha (u\varphi)\|_{L_p(I_r(\bar{x}))} \leqslant$$

$$\leqslant C\{(R-r)^F \|P(x, D)(u\varphi)\|_{L_p(I_r(\bar{x}))} + \|u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}\} \leqslant$$

$$\leqslant C\{(R-r)^F \|P(x, D)\, u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))} + \|u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))} +$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha \in 2N \\ \alpha \neq 0}} (R-r)^{F-|\alpha|} \sum_{\beta \in 2N^{(0)}} \|D^\beta u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}\} \leqslant$$

$$\leqslant C\{(R-r)^F \|P(x, D)\, u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))} +$$

$$+ \sum_{\alpha \in 2N^{(0)}} (R-r)^{d_\alpha} \|D^\alpha u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}\}.$$

На последнем шаге мы воспользовались неравенством (1.6). Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Сперва докажем следующее равенство:

$$2^{d_\alpha}\sup_{\frac{R}{2}<r<R}(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(I_{r'}(\bar{x}))}=\sup_{0<r<R}(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))},\quad(2.4)$$

где $r'=R-2(R-r)$.

Имеем

$$\sup_{0<r<R}(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}=\sup_{0<R-2(R-r)<R}(R-(R-2(R-r))^{d_\alpha}\times$$

$$\times\|D^\alpha u\|_{L_p(I_{R-2(R-r)}(\bar{x}))}=2^{d_\alpha}\sup_{\frac{R}{2}<r<R}(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(I_{r'}(\bar{x}))},$$

что и доказывает равенство (2.4).

Из неравенств (1.7) и (2.3) для любого r, $\frac{R}{2}<r<R$ и для любого $\alpha\in 2\mathbf{N}$ имеем

$$(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(I_{r'}(\bar{x}))}\leqslant C\{(R-r)^F\|P(x,D)u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}+$$

$$+\varepsilon\sum_{l=1}^{N}(R-r)^F\|D^{\alpha^l}u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}+C(\varepsilon)\|u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}\}.$$

Учитывая равенство (2.4), из последнего неравенства получим

$$\sup_{\frac{R}{2}<r<R}(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(I_{r'}(\bar{x}))}=2^{-d_\alpha}\sup_{0<r<R}(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}\leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\sup_{0<r<R}(R-r)^F\|P(x,D)u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon\sum_{l=1}^{N}\sup_{0<r<R}(R-r)^F\|D^{\alpha^l}u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}+C(\varepsilon)\|u\|_{L_p(I_R(\bar{x}))}\right\}.\quad(2.5)$$

Выберем теперь $\varepsilon>0$ так, чтобы $\varepsilon C2^F<\frac{1}{2}$ и перенесем член с ε в правую часть неравенства (2.5), имеем

$$\sum_{\alpha\in 2\mathbf{N}}\sup_{0<r<R}(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\{\sup_{0<r<R}(R-r)^F\|f\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}+\|u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))}\},$$

где $C_1=\max\{C2^F,\ C2^F C(\varepsilon)\}$.

Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Пусть удовлетворяются условия теоремы* 2.1, *и пусть* $u(x)$ *является решением уравнения* (0.10) *в* $\Gamma^{\pm}_{k,R_2}(\bar{x})$, *при* $\bar{x}\in\Gamma$, *удовлетворяющее нулевым условиям Дирихле на той части границы* $\partial\Omega$, *которая содержится в* $\Gamma^{\pm}_{k,R_2}(\bar{x})$. *Тогда существуют постоянные* $C_2>0$, $R_2>0$, *такие, что для любого* R, $0<R\leqslant R_2$

$$\sum_{\alpha\in 2N}\sup_{0<r<R}(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(I^{\pm}_{k,r}(\bar{x}))}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\{\sup_{0<r<R}(R-r)^F\|f\|_{L_p(I^{\pm}_{k,r}(\bar{x}))}+\|u\|_{L_p(I^{\pm}_{k,R}(\bar{x}))}\}. \tag{2.6}$$

Сформулированная теорема является непосредственным следствием следующей леммы, доказательство которой аналогично доказательству леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть оператор $P(x, D)$ и функция $u(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Тогда существует постоянная $C>0$ такая, что для любого мультииндекса $\alpha\in 2\mathrm{N}$, любых чисел R и r, $0<R\leqslant R_2$, $\frac{R}{2}<r<R$, справедливо неравенство*

$$(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(I^{\pm}_{k,R-2(R-r)}(\bar{x}))}\leqslant$$

$$\leqslant C\{(R-r)^F\|P(x, D)\,u\|_{L_p(I^{\pm}_{k,r}(\bar{x}))}+$$

$$+\sum_{\alpha\in 2N(0)}(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(I^{\pm}_{k,r}(\bar{x}))}\}. \tag{2.7}$$

§ 3. Оценки шаудеровского типа для нерегулярных операторов

Если показатель гипоэллиптичности $P(D)$ равен единице то (см. [22]) оператор $P(D)$ является эллиптическим, и так как все нижесформулированные результаты известны для эллиптических операторов (см. [7], [8], [9]), мы будем предполагать, что $c<1$.

Теорема 3.1. *Пусть оператор $P(D)$ типа (0.11) удовлетворяет условиям теоремы а), и пусть $I_{R_2}(\bar{x})\subset\Omega$. Тогда существуют постоянные $C_1>0$, $R_1>0$ такие, что при $0<r<R<R_1$ для всех функций $u\in W_2^{2N}(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\alpha>0}(R-r)^{\frac{F-|\alpha|}{c}}\|P^{(\alpha)}(D)\,u\|_{L_2(I_{r'}(\bar{x}))}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\{(R-r)^F\|P(D)\,u\|_{L_2(I_r(\bar{x}))}+\|u\|_{L_2(I_r(\bar{x}))}\}, \tag{3.1}$$

где c — показатель гипоэллиптичности оператора $P(D)$, $r'=R-2(R-r)$.

Доказательство базируется на следующем предложении.

Лемма 3.1. *Пусть $P(D)$ — гипоэллиптический оператор и $F\geqslant m=\operatorname{ord}P(\xi)$. Тогда существует постоянная $C>0$ такая, что для любого $\varepsilon>0$*

$$\sum_{\alpha>0}\varepsilon^{\frac{F-|\alpha|}{c}}|P^{(\alpha)}(\xi)|\leqslant C(\varepsilon^F|P(\xi)|+1). \tag{3.2}$$

Доказательство леммы 3.1. Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное число и $|\xi|>\varepsilon^{-\frac{1}{c}}$. Тогда из условия гипоэллиптичности следует, что $|P^{(\alpha)}(\xi)|\leqslant C|\xi|^{(\alpha)}|P(\xi)|$, а при $|\xi|<\varepsilon^{-\frac{1}{c}}$, $|P^{(\alpha)}(\xi)|\leqslant C|\xi|^{-|\alpha|+m}$.

Следовательно

$$|P^{(\alpha)}(\xi)| \leqslant C\{\varepsilon^{|\alpha|}|P(\xi)| + \varepsilon^{-\frac{m+|\alpha|}{c}}\}, \quad \forall \xi \in R_n. \tag{3.3}$$

Умножая обе части неравенства (3.3) на $\varepsilon^{\frac{F-|\alpha|}{c}}$ и учитывая, что

$$\frac{F-|\alpha|}{c} + |\alpha| > F, \quad \frac{F-|\alpha|}{c} - \frac{m-|\alpha|}{c} > 0,$$

получим неравенство (3.2). Лемма 3.1 доказана.

Пусть $p \geqslant \frac{1}{c}$ — целое число, $\varepsilon > 0$,

$$F > (m + 2cpm^2 + (n+1)\,cpm)/(1-c). \tag{3.4}$$

Введем функции типа Хёрмандера—Пекконена (см. [2], [23])

$$\bar{P}_k(\xi, \varepsilon) = \Big(\sum_{\alpha>0} \varepsilon^{\frac{2(F-|\alpha|)}{c}} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2\Big)^{\frac{k}{2pm}}, \quad k=1, \cdots, pm. \tag{3.5}$$

Свойства функции $\bar{P}_k(\xi, \varepsilon)$:

1) $\bar{P}_k(\xi, \varepsilon) = \bar{P}_1(\xi, \varepsilon)\,\bar{P}_{k-1}(\xi, \varepsilon)$, (3.6)

2) $\bar{P}_k(\xi, \varepsilon) \leqslant C\{\varepsilon^{\frac{kF}{pm}}|P(\xi)| + 1\}$, (3.7)

3) $|\bar{P}_1(\xi, \varepsilon)|\,|P^{(\alpha)}(\xi)| \leqslant C\varepsilon^{\frac{F}{pm}+n+1+2m}(|P(\xi)|+1), \ \forall \alpha, \ \alpha \neq 0.$ (3.8)

Пусть $\eta_k(x) \in C_0^\infty(I_r(\bar{x}))$, $k=1, \cdots, pm$ такие, что

1) $0 \leqslant \eta_k(x) \leqslant 1, \ \forall x \in I_r(\bar{x})$,

2) $\eta_{k-1}(x) \equiv 1, \ \forall x \in \operatorname{supp} \eta_k(x)$,

3) $\eta_{mp}(x) \equiv 1$ на $I_{r'}(\bar{x})$,

4) $\max |D^\alpha \eta_k(x)| < C_\alpha (R-r)^{-|\alpha|}$.

Обозначим $u_k = u\eta_k$, $u_k^{(\alpha)} = uD^\alpha \eta_k$, $P(D)u = f$, $\eta_k P((D)u = f_k$. Для любой функции $\psi(x) \in C^\infty(\Omega)$ рассмотрим выражение

$$(P(D)^*(\eta_k \psi), u) = (\eta_k P(D)^* \psi, u) + \sum_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha \eta_k P^{(\alpha)}(D)^* \psi, u) =$$

$$= (P(D)^* \psi, u_k) + \sum_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha!}(P^{(\alpha)}(D)^* \psi, u_k^{(\alpha)}).$$

Отсюда при $\psi(x) = e^{-i(x,\xi)}$ имеем

$$|P(\xi)|\,|\widehat{u_k}(\xi)| \leqslant |\widehat{f_k}(\xi)| + \sum_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha!}\,|P^{(\alpha)}(\xi)|\,|\widehat{u_k^{(\alpha)}}(\xi)|.$$

Умножая обе части этого неравенства на $\varepsilon^{\frac{kF}{pm}} |\widetilde{P}_k(\xi, \varepsilon)|$ и добавляя к обеим частям выражение $\varepsilon^{\frac{kF}{pm}} |\widehat{u_k}(\xi)| |\widetilde{P}_k(\xi, \varepsilon)|$, получим

$$|\widehat{u_k}(\xi)| |\widetilde{P}_k(\xi, \varepsilon)| \leqslant \frac{\varepsilon^{\frac{kF}{pm}} |\widehat{f_k}(\xi)| |\widetilde{P}_k(\xi, \varepsilon)|}{\varepsilon^{\frac{kF}{pm}} (|P(\xi)|+1)} +$$

$$+ \sum_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha!} \frac{\varepsilon^{\frac{kF}{pm}} |\widetilde{P}_k(\xi, \varepsilon)| |P^{(\alpha)}(\xi)| |\widehat{u_k^{(\alpha)}}(\xi)|}{\varepsilon^{\frac{kF}{pm}} (|P(\xi)|+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{\frac{kF}{pm}} |\widehat{f_k}(\xi)| + \varepsilon^{\frac{F}{pm}+n+1+m} |\widehat{u_k}(\xi)| |\widetilde{P}_{k-1}(\xi, \varepsilon)| +$$

$$+ \sum_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha!} \varepsilon^{\frac{F}{pm}+n+1+2m} |\widetilde{P}_{k-1}(\varepsilon, \xi)| |\widehat{u_k^{(\alpha)}}(\xi)|.$$

Из этого соотношения, в свою очередь, следует

$$\int_{R_n} |\widehat{u_k}(\xi)|^2 |\widetilde{P}_k(\xi, \varepsilon)|^2 d\xi \leqslant C \left(\varepsilon^{\frac{2kF}{pm}} \int_{R_n} |\widehat{f_k}(\xi)|^2 d\xi + \right.$$

$$+ \sum_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha!} \varepsilon^{2\left(\frac{F}{pm}+(n+1)+2m\right)} \int_{R_n} |\widetilde{P}_{k-1}(\xi, \varepsilon)|^2 |\widehat{u_k^{(\alpha)}}(\xi)|^2 d\xi +$$

$$\left. + \varepsilon^{2\left(\frac{F}{pm}+n+1+m\right)} \int_{R_n} |\widetilde{P}_{k-1}(\xi, \varepsilon)|^2 |\widehat{u_k}(\xi)|^2 d\xi \right). \tag{3.9}$$

Оценим члены в правой части неравенства (3.9) по отдельности

$$\int_{R_n} |\widehat{f_k}(\xi)|^2 d\xi = \int_{R_n} |\eta_k \widehat{P(D)\, u}|^2 d\xi \leqslant \int_{I_{r(x)}} |P(D)\, u|^2 dx. \tag{3.10}$$

Так как $u_k^{(\alpha)} = uD^\alpha \eta_k$ и $\eta_{k-1} \equiv 1$ на supp η_k, то $u_k^{(\alpha)} = u_{k-1} D^\alpha \eta_k$ и $\widehat{u_k^{(\alpha)}} = \widehat{u_{k-1}} * \widehat{D^\alpha \eta_k}$. Из теоремы Пели-Винера следует, что для любого N

$$|\widehat{D^\alpha \eta_k}(\xi)| \leqslant C (R-r)^{-(N+|\alpha|)} (1+|\xi|)^{-N}.$$

Отсюда и из того факта, что $\widetilde{P}_k(\xi, \varepsilon)$ $(k = 1, \cdots, mp)$, весовые функции (см. [2]), т. е.

$$|\widetilde{P}_k(x+z, \varepsilon)| \leqslant (1+C|z|)^{k/p} \widetilde{P}_k(x, \varepsilon),$$

получим

$$\int\limits_{\widetilde{R}_n} |\widetilde{P}_{k-1}(\xi, R-r)|^2 |\widehat{u}_k^{(\alpha)}(\xi)|^2 \, d\xi = \int\limits_{R_n} \Big[\int\limits_{R_n} |\widetilde{P}_{k-1}(\xi, R-r)| \, |\widehat{u}_{k-1}(\xi - x)| \times$$

$$\times |D^\alpha \widehat{\eta}_k(x)| \, dx \Big]^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{\widetilde{R}_n} \Big[\int\limits_{R_n} |\widetilde{P}_{k-1}(\xi - x, R-r)| \, |\widehat{u}_{k-1}(\xi - x)| \, (1+|x|)^{k/p} \, |D^\alpha \widehat{\eta}_k(x)| \, dx \Big]^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{\widetilde{R}_n} \Big[\int\limits_{R_n} |\widetilde{P}_{k-1}(\xi, R-r)| \, (1+|x-\xi|)^{k/p} \, |\widehat{u}_{k-1}(\xi)| \, |D^\alpha \widehat{\eta}_k(x-\xi)| \, dx \Big]^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{\widetilde{R}_n} \Big[\int\limits_{R_n} |\widetilde{P}_{k-1}(\xi, R-r)|^2 \, |\widehat{u}_{k-1}(\xi)|^2 \, d\xi \times$$

$$\times \int\limits_{R_n} (1+|\xi|)^{2\left(-N-1+\frac{k}{p}\right)} d\xi \int\limits_{R_n} (1+|x|)^{2\left(-N+\frac{k}{p}\right)} dx \cdot (R-r)^{-(N+|\alpha|)}.$$

Взяв $N = n+1+m$, получим

$$\int\limits_{R_n} |\widetilde{P}_{k-1}(\xi, R-r)|^2 |\widehat{u}_k^{(\alpha)}(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant C (R-r)^{-(n+1+2m)} \times$$

$$\times \int\limits_{R_n} |\widetilde{P}_{k-1}(\xi, R-r)|^2 \, |\widehat{u}_{k-1}(\xi)|^2 \, d\xi. \tag{3.11}$$

Из неравенств (3.9), (3.10) и (3.11) следует

$$\int\limits_{R_n} |\widehat{u}_k(\xi)|^2 |\widetilde{P}_k(\xi, R-r)|^2 \, d\xi \leqslant C \Big\{ (R-r)^{\frac{2kF}{pm}} \int\limits_{R_n} |\widehat{f}_k(\xi)|^2 \, d\xi +$$

$$+ (R-r)^{2F/pm} \int\limits_{R_n} |\widehat{u}_{k-1}(\xi)|^2 \, |\widehat{P}_{k-1}(\xi, R-r)|^2 \, d\xi \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant C \{ (R-r)^{2Fk/pm} \|P(D) u\|^2_{L_2(I_r(\overline{x}))} + \|u\|^2_{L_2(I_r(\overline{x}))} \}. \tag{3.12}$$

Преобразуем выражение

$$\|\widetilde{P}_{mp}(\xi, R-r) \, \widehat{u}_{mp}(\xi)\|_{L_2(R_n)} =$$

$$= \sum_{\alpha>0} \int\limits_{R_n} (R-r)^{2(F-|\alpha|)/c} |P^{(\alpha)}(\widehat{D}) \, u_{mp}|^2 \, dx)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \Big(\sum_{\alpha>0} (R-r)^{2(F-|\alpha|)/c} \int\limits_{I_r(\overline{x})} |P^{(\alpha)}(\widehat{D}) \, u_{mp}|^2 \, dx \Big)^{1/2} >$$

$$\geqslant \left(\sum_{\alpha>0} (R-r)^{2(F-|\alpha|)/\varepsilon} \int\limits_{I_{r'}(\bar{x})} |P^{(\alpha)}(D)\,u|^2\,dx\right)^{1/2}. \qquad (3.1$$

Сопоставляя неравенство (3.12) при $k = pm$ с неравенством (3.13 получим утверждение теоремы 3.1.

С помощью теоремы 3.1, как и в § 2, можно доказать следующий факт.

Теорема 3.2. *Пусть оператор $P(D)$ удовлетворяет условиям теоремы а), и пусть $I_{R_1}(\bar{x}) \subset \Omega$. Тогда существуют постоянные $C_1 > 0$, $R_1 > 0$ такие, что при $0 < R < R_1$ и для всех функций $u \in W_2^{2N}(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\alpha>0} \sup_{0<r<R} (R-r)^{(F-|\alpha|)/\varepsilon} \|P^{(\alpha)}(D)\,u\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \{\sup_{0<r<R} (R-r)^F \|P(D)\,u\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} + \|u\|_{L_2(I_r(\bar{x}))}\}. \qquad (3.1$$

Теорема 3.3. *Если оператор* (0.11) *удовлетворяет условиям теоремы* а), *то существует постоянная C_1 и число R_1, такие что при $0 < R < R_1$ и для любой функции $u \in A^N(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\sup_{0<r<R} (R-r)^F \|P^{l_0, n-1}(D)\,u\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} + \sum_{\alpha\in N^*} \sup_{0<r<R} (R-r)^{d_\alpha} \|D^\alpha u\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \{\sup_{0<r<R} (R-r)^{cF} \|P(D)\,u\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} + \|u\|_{L_2(I_R(\bar{x}))}\}. \qquad (3.15$$

Доказательство. Из теорем 3 и 4 работы [5] следует, что если $P^{l_0, n-1}(D) \prec P(D)$, то при $0 < r < R < R_1$ и для всех $\varphi(x) \in C_0^\infty(I_r(\bar{x}))$ справедливо неравенство

$$(R-r)^F \|P^{l_0, n-1}(D)\,\varphi\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} + \sum_{\alpha\in N^*} (R-r)^{d_\alpha} \|D^\alpha \varphi\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} \leqslant$$

$$< C \{(R-r)^F \|P(D)\,\varphi\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} + \|\varphi\|_{L_2(I_r(\bar{x}))}\}. \qquad (3.16)$$

Пусть $\psi(x) \in C_0^\infty(I_r(\bar{x}))$, $\psi(x) \equiv 1$ при $x \in I_{r'}(\bar{x}))$, $|D^\alpha \psi| \leqslant C_\alpha (R-r)^{-|\alpha|}$, $\forall \alpha \in Z_n^+$. Тогда

$$(R-r)^F \|P^{l_0, n-1}(D)\,u\|_{L_2(I_{r'}(\bar{x}))} + \sum_{\alpha\in N^*} (R-r)^{d_\alpha} \|D^\alpha u\|_{L_2(I_{r'}(\bar{x}))} \leqslant$$

$$\leqslant (R-r)^F \|P^{l_0, n-1}(D)(u\psi)\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} + \sum_{\alpha\in N^*} (R-r)^{d_\alpha} \|D^\alpha (u\psi)\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} \leqslant$$

$$\leqslant C \{(R-r)^F \|P(D)\,u\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} +$$

$$+ \sum_{\alpha>0} (R-r)^{F-|\alpha|} \|P^{(\alpha)}(D)\,u\|_{L_2(I_r(\bar{x}))} + \|u\|_{L_2(I_r(\bar{x}))}\}$$

и доказательство завершается аналогично теореме 2.1 с учетом неравенства (3.14).

Теоремы, дающие оценки вплоть до границы, доказываются аналогично теоремам 3.1 и 3.3, с учетом теоремы 8 работы [23].

Теорема 3.4. *Пусть $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и оператор* (0.11) *удовлетворяет условиям теоремы* а), *и пусть $\bar{x} \in \Gamma$, $I_{k;R_1}^{\pm}(\bar{x}) \in \bar{\Omega}$. Тогда су-*

ществуют постоянные $C_2>0$, $R_2>0$ *такие, что при* $0<R<R_2$ *и для любого решения уравнения* (0.12) *с нулевым начальным условием Дирихле на той части границы* $\partial\Omega$, *которая содержится в* $I^{\pm}_{k,R_2}(\bar{x})$, *справедливо неравенство*

$$\sum_{\alpha\geqslant 0}\sup_{0<r<R}(R-r)^{(F-|\alpha|/c)}\|P^{(\alpha)}(D)\,u\|_{L_2(I^{\pm}_{k,r}(\bar{x}))}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\left[\sup_{0<r<R}(R-r)^F\|P(D)\,u\|_{L_2(I^{\pm}_{k,r}(\bar{x}))}+\|u\|_{L_2(I^{\pm}_{k,R}(\bar{x}))}\right]. \qquad (3.17)$$

С помощью теоремы 3.4 доказывается

Теорема 3.5. *Пусть удовлетворяются условия теоремы* 3.4. *Тогда*

$$\sup_{0<r<R}(R-r)^F\|P^{l_0,\,n-1}(D)\,u\|_{L_2(I^{\pm}_{k,r}(\bar{x}))}+\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\sup_{0<r<R}(R-r)^{d_\alpha}\times$$

$$\times\|D^\alpha u\|_{L_2(I^{\pm}_{k,r}(\bar{x}))}\leqslant C_2\left[\sup_{0<r<R}(R-r)^{cF}\|f\|_{L_2(I^{\pm}_{k,r}(\bar{x}))}+\|u\|_{L_2(I^{\pm}_{k,R}(\bar{x}))}\right].$$

§ 4. Априорные оценки

Положим $C_0=\max\{C_1, C_2\}$, $R_0=\min\{R_1, R_2, R_3\}$, $H=\dfrac{\mu_1^0 R_0}{2eC_0^{\frac{1}{\mu_1^0}}}$,

$$\Omega_r(\bar{x})=\begin{cases} I_r(\bar{x}), & \text{при } I_r(\bar{x})\subset\Omega \\ I^{\pm}_{k,r}(\bar{x}), & \text{при } \bar{x}\in\Gamma, \end{cases}$$

$$N_{d_\alpha,R}(D^\alpha u)=\sup_{0<r<R}(R-r)^{d_\alpha}\|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega_r(\bar{x}))}. \qquad (4.1)$$

Тогда для любой точки $x\in\Omega$ (кроме, быть может, ограниченного множества $\Omega_1\subset\Omega$) существует точка $\bar{x}\in\bar{\Omega}$ такая, что $x\in\Omega_{R_0}(\bar{x})$.

Лемма 4.1. *Пусть* $u(x)$ — *решение уравнения* (0.10) *из класса* $\mathfrak{M}(\Omega)$, *где коэффициенты оператора* (0.6) *не зависят от* x_1.

Пусть оператор $P(x, D)$ *и функция* $f(x)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1. *Тогда для любого числа* δ, *для любого целого числа* $\sigma\geqslant 0$ *и для любого* R, $0<R<R_0$ *такого, что* $0<R-\delta\sigma<R<R_0$, *справедливо неравенство*

$$\delta^{\mu_1^0\sigma}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}N_{d_\alpha,\,R-\sigma\delta}(D^\alpha D_1^\sigma u)\leqslant$$

$$\leqslant C_0\left\{\sum_{j=0}^{\sigma}\delta^{j\mu_1^0}\,C_0^{\sigma-j}N_{F,\,R-j\delta}(D_1^j f)+C_0^\sigma N_{0,R}(u)\right\}, \qquad (4.2)$$

где $\mu_1^0=d_{1,0,\ldots,0}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant H_{1,0,\ldots,0}}\{\mu_1^k\}$.

Доказательство. При $\sigma=0$ неравенство (4.2) превращается в уже доказанные неравенства (2.2) или (2.6). Мы будем вести доказательство методом математической индукции по σ. Пусть неравенство (4.2) верно для $\sigma=l$. Докажем неравенство (4.2) для $\sigma=l+1$

В неравенстве (4.2) для $\sigma = l$ заменим R на $R-\delta$ и u—на $D_1 u$. Эта замена законна, так как вследствие того, что коэффициенты $\gamma_\alpha(x)$ не зависят от x_1 и функция $u(x)$ является решением уравнения $P(x, D)\, u = f$, очевидно следует, что функция $D_1 u(x)$ является решением уравнения $P(x, D) D_1 u = D_1 f$, а неравенство (4.2) выполняется для любого R, $0 < R < R_0$ и, в частности, для числа $R-\delta$, $0 < R-\delta < R_0$.

После такой замены из неравенства (4.2) в случае $\sigma = l$ получим

$$\delta^{l\mu_1^0} \sum_{\alpha \in 2N} N_{d_\alpha, R-(l+1)\delta}(D^\alpha D_1^{l+1} u) \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \left\{ \sum_{j=0}^{l} \delta^{j\mu_1^0} C_0^{l-j} N_{F, R-(j+1)\delta}(D_1^{j+1} f) + C_0^l N_{0, R-\delta}(D_1 u) \right\}. \quad (4.3)$$

Умножим неравенство (4.3) на $\delta^{\mu_1^0}$ и оценим последний член полученного выражения.

Пусть сначала а) $\Omega_r(\bar{x}) = I_r(\bar{x})$. Тогда

$$\delta^{\mu_1^0} C_0^l N_{0, R-\delta}(D_1 u) = C_0^l \delta^{\mu_1^0} \|D_1 u\|_{L_p(I_{R-\delta}(x))} \leqslant$$

$$\leqslant C_0^l \sup_{0<r<R} (R-r)^{\mu_1^0} \|D_1 u\|_{L_p(I_r(\bar{x}))} \leqslant$$

$$\leqslant C_0^{l+1} \{ \sup_{0<r<R} (R-r)^F \|f\|_{L_p(I_r(\bar{x}))} + \|u\|_{L_p(I_R(\bar{x}))} \}.$$

Последнее неравенство получим, применив теорему 2.1 (см. неравенство (2.2)).

В случае б) $\Omega_r(\bar{x}) = I^{\pm}_{k, r}(\bar{x})$ из неравенства (2.6) аналогично получим

$$C_0^l \delta^{\mu_1^0} \|D_1 u\|_{L_p(I^{\pm}_{k, R-\delta}(\bar{x}))} \leqslant C_0^l \sup_{0<r<R} (R-r)^{\mu_1^0} \|D_1 u\|_{L_p(I^{\pm}_{k, r}(\bar{x}))} \leqslant$$

$$\leqslant C_0^{l+1} \{ \sup_{0<r<R} (R-r)^F \|f\|_{L_p(I^{\pm}_{k, r}(\bar{x}))} + \|u\|_{L_p(I^{\pm}_{k, R}(\bar{x}))} \}.$$

Объединив эти два случая, окончательно получим

$$\delta^{\mu_1^0} C_0^l N_{0, R-\delta}(D_1 u) \leqslant C_0^{l+1} \{ N_{F, R}(f) + N_{0, R}(u) \}.$$

Тогда неравенство (4.3) примет вид

$$\delta^{(l+1)\mu_1^0} \sum_{\alpha \in 2N} N_{d_\alpha, R-(l+1)\delta}(D^\alpha D_1^{l+1} u) \leqslant C_0 \left\{ \sum_{j=0}^{l} \delta^{(j+1)\mu_1^0} C_0^{l-j} \times \right.$$

$$\left. \times N_{F, R-(j+1)\delta}(D_1^{j+1} f) + C_0^{l+1} N_{F, R}(f) + C_0^{l+1} N_{0, R}(u) \right\}. \quad (4.4)$$

Сравнивая полученное соотношение с неравенством (4.2), убеждаемся что первая часть (4.4) получается из левой части (4.2) с заменой l на $l+1$. Заменив в (4.4) j на $j+1$, получим неравенство (4.2) для $\sigma = l+1$ и, тем самым, доказательство леммы 4.1 завершается.

Лемма 4.2. Если функции u, f и оператор $P(x, D)$ удовлетворяют условиям леммы 4.1 и для некоторого комплексного числа λ, $D_1 u(x) = \lambda u(x)$, то существует постоянная $C_1 > 1$, зависящая только от μ_1^0 такая, что для любого R, $0 < R < R_0$

$$\sum_{\alpha \in 2\mathbb{N}} N_{d_\alpha, \frac{R}{2}}(D^\alpha u) \leqslant C_0 \{C_1 N_{F,R}(f) + \exp\left[\frac{1}{2}\mu_1^0 e - \frac{\mu_1^0 R}{2e}\left(\frac{\lambda}{C_0}\right)^{\frac{1}{\mu_1^0}}\right] N_{0,R}(u)\}. \quad (4.5)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2 работы [13].

Лемма 4.3. Если $F = \frac{1}{p}\max_l \sum_j^n \mu_j^l > 0$ и $u(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4.2, то существует постоянная $K > 0$, зависящая от p, R_0, n, μ_1^0, $\times$ такая, что

$$\sup_{\Omega_{R_0/4}(\bar{x})} |u(x)| \leqslant K \{\sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} |f(x)| + \exp\left[-H^{\frac{1}{\mu_1^0}}\right] \sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} |u(x)|\}. \quad (4.6)$$

Доказательство. Из условия леммы и из теоремы 2.5 работы [3] следует, что

$$\sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} |u(x)| \leqslant C \sum_{\alpha \in 2\mathbb{N}} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega_{R_0}(\bar{x}))}. \quad (4.7)$$

Положим в неравенстве (4.5) $R = R_0$ и учитывая, что

$$\frac{R_0}{4}\|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega_{R_0/4}(\bar{x}))} \leqslant N_{d_\alpha, \frac{R_0}{2}}(D^\alpha u),$$

получим

$$\sum_{\alpha \in 2\mathbb{N}} (R_0/4)^{d_\alpha} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega_{R_0/4}(\bar{x}))} \leqslant \sum_{\alpha \in 2\mathbb{N}} N_{d_\alpha, R_0/2}(D^\alpha u) \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \left\{ C_1 N_{F,R_0}(f) + \exp\left[\frac{1}{2}\mu_1^0 e - \frac{\mu_1^0 R_0}{2e}\left(\frac{|\lambda|}{C_0}\right)^{\frac{1}{\mu_1^0}}\right] N_{0,R_0}(u) \right\}. \quad (4.8)$$

Из очевидных соотношений

$$N_{F,R_0}(f) \leqslant A \sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} |f(x)|,$$

$$N_{0,R_0}(f) \leqslant B \sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} |u(x)|$$

и из неравенств (4.7), (4.8) имеем

$$\sup_{\Omega_{R_0/4}(\bar{x})} |u(x)| \leqslant K \{\sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} |f(x)| + \exp\left[-H|\lambda|^{\frac{1}{\mu_1^0}}\right] \sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} |u(x)|\},$$

где $K = \max\left\{ C_0 C_1 A (4/R_0)^F, (4/R_0)^F C_0 B \exp\left[\frac{1}{2}\mu_1^0 e\right]\right\}$.

Лемма 4.3 доказана.

§ 5. Теоремы типа Лиувилля и типа Фрагмена-Линделефа для регулярных операторов

Рассмотрим оператор

$$P_\lambda(x, D) = \sum_{(\alpha_0, \alpha)\in 2N} a_{\alpha_0\alpha}(x)\,\lambda^{\alpha_0} D^\alpha, \tag{5.1}$$

где λ — произвольный комплексный параметр, $(\alpha_0, \alpha) \in Z^+_{n+1}$ и $N(x,P) = N(P)$ — вполне правильный многогранник в R_{n+1}, $a_{\alpha_0\alpha}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Допустим, что оператор $P_\lambda(x, D)$ удовлетворяет условию: существует положительная постоянная $\varkappa$ такая, что для любой точки $x \in \Omega$ и для всех $\xi \in R_{n+1}$

$$1 + \Big|\sum_{(\alpha_0, \alpha)\in 2N} a_{\alpha_0\alpha}(x)\,\xi_0^{\alpha_0}\xi^\alpha\Big| \geqslant \varkappa \sum_{(\alpha_0, \alpha)\in 2N} |\xi_0^{\alpha_0}\xi^\alpha|, \tag{5.2}$$

где Ω — неограниченная область, удовлетворяющая условиям § 2.

Положим $D_0 = -i\dfrac{\partial}{\partial x_0}$ и рассмотрим оператор

$$\overline{P}(x, D_0, D_1, \cdots, D_n) = \sum_{(\alpha_0, \alpha)\in 2N} a_{\alpha_0\alpha}(x)\, D_0^{\alpha_0} D^\alpha. \tag{5.3}$$

Тогда из условия (5.2) следует, что оператор (5.3) регулярен в $\bar{\Omega} = E_1 \times \Omega$.

Для данной функции $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ рассмотрим решение $U_\lambda(x)$ уравнения

$$P_\lambda(x, D)\, u = f,\ x \in \Omega \tag{5.4}$$

из класса $\mathfrak{M}(\Omega)$.

Положим

$$\tilde{u}_\lambda(x_0, x) = u_\lambda(x) \exp[i\lambda x_0],\ \tilde{f}_\lambda(x_0, x) = f(x) \exp[i\lambda x_0].$$

Тогда функция $\tilde{u}_\lambda(x_0, x)$ будет решением уравнения

$$\overline{P}(x, D_0, D)\,\tilde{u}_\lambda(x_0, x) = \tilde{f}_\lambda(x_0, x) \text{ при } (x_0, x) \in \bar{\Omega} \text{ из класса } \mathfrak{M}(\bar{\Omega}).$$

Так как $D_0\tilde{u}_\lambda = \lambda\tilde{u}_\lambda$ и коэффициенты оператора $\overline{P}(x, D_0, D)$ не зависят от x_0, то для оператора $\overline{P}(x, D_0, D)$ можно применить результаты § 4.

Для произвольного положительного числа r обозначим

$$\bar{\Omega}_r(0, \bar{x}) = \{(x_0, x) \in E \times \Omega_r(\bar{x}),\ |x_0| < r\}.$$

Учитывая очевидное равенство

$$\sup_{\bar{\Omega}_r(0, \bar{x})} |\exp[i\lambda x_0]\, u(x)| = \exp[r\,|\operatorname{Im}\lambda|] \sup_{\Omega_r(\bar{x})} |u(x)|,$$

можно неравенство (4.6) переписать так:

$$\sup_{\bar{\Omega}_{R_0/4}(0,\bar{x})} (\exp[i\lambda x_0]\, u(x)| = \exp\left[\frac{R_0}{4}\operatorname{Im}\lambda|\right] \sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} |u(x)| \leqslant$$

$$\leqslant K\left\{\sup_{\tilde{\Omega}_{R_0}(0,\bar{x})} |\exp[i\lambda x_0] f(x)| + \exp\left[-H|\lambda|^{\frac{1}{\mu_1^0}}\right] \sup_{\tilde{\Omega}_{R_0}(0,\bar{x})} |\exp[i\lambda x_0]|\,|u(x)| =\right.$$

$$= K\exp[R_0\,|\operatorname{Im}\lambda|]\left\{\sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} |f(x)| + \exp\left[-H|\lambda|^{\frac{1}{\mu_1^0}}\right] \sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} |u(x)|\right\}.$$

Тогда

$$\sup_{\Omega_{R_0/4}(\bar{x})} |u(x)| \leqslant K\exp\left[\frac{3}{4}R_0|\operatorname{Im}\lambda|\right] \sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} f(x)| +$$

$$+\exp\left[-H|\lambda|^{\frac{1}{\mu_1^0}}\right] \sup_{\Omega_{R_0}(\bar{x})} |u(x)|\}. \tag{5.5}$$

В дальнейшем, для простоты записи, в обозначениях функции $u_\lambda(x)$ мы опустим индекс λ.

Пусть число $\delta > 0$ и функция $f(x)$ удовлетворяют условиям

$$\ln K + \frac{3}{4} R_0|Im\,\lambda| + \delta\, R_0 < H|\lambda|^{\frac{1}{\mu_1^0}}, \tag{5.6}$$

$$|f(x)| \leqslant A\exp[b\,\|x\|^\beta],\ x \in \Omega, \tag{5.7}$$

где $A > 0$, $0 \leqslant b < \delta$, $0 \leqslant \beta < 1$, $\|x\| = \max_j |x_j|$.

Теорема 5.1. *Если число δ и функция f удовлетворяют условиям* (5.6), (5.7) *и $u(x)$ — решение уравнения* (5.4) *из класса* $\mathfrak{M}(\Omega)$, *удовлетворяющее условию*

$$|u(x)| \leqslant C\exp[\delta\,\|x\|],\ \forall x \in \Omega, \tag{5.8}$$

то существуют постоянные $B_1 \geqslant 0$, $B_2 \geqslant 0$ такие, что для всех точек $x \in \Omega$

$$|u(x)| \leqslant B_1 + B_2 A\exp[b\,\|x\|^\beta]. \tag{5.9}$$

Доказательство. Из наложенных на Ω условий следует (см. [13]) существование числа $t_0 \geqslant 0$ такого, что для любой точки $x \in \Omega$, $\|x\| \geqslant t_0 + \frac{R_0}{4} = t_1$ найдется точка $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ такая, что $x \in \Omega_{R_0}(\bar{x})$.

Пусть $\xi \in \bar{\Omega}$, $\|\xi\| \geqslant t_1$ и $t > 0$. Если $\|\bar{x} - \xi\| \leqslant t$ и $\|\bar{x}\| \geqslant t_1$, то для любой точки $y \in \Omega_{R_0}(\bar{x})$ имеем: $\|y - \xi\| \leqslant R_0 + t$, $t_1 - R_0 \leqslant \|y\| \leqslant \|\xi\| + R_0 + t$. Далее для любой точки $\bar{x} \in \Omega$ такой, что $\|\bar{x}\| > t_1$, $\|\bar{x} - \xi\| \leqslant t$

$$\sup_{y \in \Omega_{R_0}(\bar{x})} |u(y)| \leqslant \sup_{\substack{\|y-\xi\| < R_0 + t \\ \|y\| > t_1}} |u(y)| + \sup_{\|y\| < t_1} |u(y)|. \tag{5.10}$$

Из неравенства (5.7) следует, что

$$\sup_{x\in\Omega_{R_0}(\bar{x})}|f(x)|\leqslant\sup_{\|x-\xi\|<R_0+t}|f(x)|\leqslant CA\exp\left[b\|\xi\|^{\beta}+bt^{\beta}\right], \tag{5.11}$$

где постоянная $C>0$ не зависит от ξ и t. Обозначим

$$M_{\xi}(t)=\sup_{\substack{\|x\|\geqslant t_1\\ \|x-\xi\|<t}}|u(x)|,$$

$$L=K\exp\left[\frac{3}{4}R_0|Im\,\lambda|-H|\lambda|^{\frac{1}{\mu_0-\mu_1}}\right].$$

Так как множество $\omega=\{x;\ \|x-\xi\|\leqslant t,\ \|x\|\geqslant t_1\}$ компактно, то его можно покрыть конечным числом множеств вида $\Omega_{R_0/4}(\bar{x})$:

$$\omega\subset\bigcup_{l=1}^{m}\Omega_{R_0/4}(\bar{x}_l).$$

Тогда из определения функции $M_{\xi}(t)$ следует, что

$$M_{\xi}(t)\leqslant\max_{1\leqslant l\leqslant m}\{\sup_{x\in\Omega_{R_0/4}(\bar{x}_l)}|u(x)|\}.$$

Из неравенств (5.5), (5.10) и (5.11) для любого i, $1\leqslant i\leqslant m$ имеем

$$\sup_{x\in\Omega_{R_0/4}(\bar{x}_i)}|u(x)|<K\exp\left[\frac{3}{4}R_0|\mathrm{Im}\,\lambda|\right]\sup_{x\in\Omega_{R_0}(\bar{x}_i)}|f(x)|+$$

$$+\exp\left[-H|\lambda|^{\frac{1}{\mu_0-\mu_1}}\right]\sup_{x\in\Omega_{R_0}(\bar{x}_i)}|u(x)|\leqslant C_1\ A\exp\left[b\|\xi\|^{\beta}+bt^{\beta}\right]+$$

$$+L\sup_{\|y\|<t_1}|u(y)|+L\sup_{\substack{\|y-\xi\|<R_0+t\\ \|y\|>t_1}}|u(y)|\leqslant C_1\ A\exp\left[b\|\xi\|^{\beta}+bt^{\beta}\right]+$$

$$+C_2L+LM_{\xi}(t+R_0).$$

Итак мы получили для всех $t>0$ и для всех ξ, $\|\xi\|>t_1$

$$M_{\xi}(t)<LC_2+C_1\ A\exp\left[b\|\xi\|^{\beta}+bt^{\beta}\right]+LM_{\xi}(t+R_0). \tag{5.12}$$

Применив неравенство (5.12) к функции $M_{\xi}(t+R_0)$ после σ шагов придем к формуле

$$M_{\xi}(t)\leqslant C_1\cdot A\exp\left[b\|\xi\|^{\beta}\right]\sum_{j=0}^{\sigma-1}L^j\exp\left[b(t+R_0j)^{\beta}\right]+$$

$$+C_2\sum_{j=0}^{\sigma}L^j+L^{\sigma}M_{\xi}(t+R_0\sigma).$$

Учитывая неравенство (5.8), отсюда получим

$$M_{\xi}(t)<C_1\ A\exp\left[b\|\xi\|^{\beta}+bt^{\beta}\right]\sum_{j=0}^{\sigma-1}L^j\exp\left[b(R_0j)^{\beta}\right]+$$

$$+C_2\frac{L-L^{\sigma+1}}{1-L}+C\exp\left[\delta\left(|\xi|+t\right)\right]L^{\sigma}\exp\left(R_0\delta\sigma\right). \tag{5.13}$$

Так как из неравенства (5.6) следует, что

$$\ln\left(L\exp\left(R_0\delta\right)\right)=\ln K+\frac{3}{4}R_0|\operatorname{Im}\lambda|-H|\lambda|^{\frac{\mu}{\mu-1}}+R_0\delta<0,$$

то $L\exp\left(R_0\delta\right)<1$, $\left(L\exp\left(R_0\delta\right)\right)^{\sigma}\to 0$, $L^{\sigma}\to 0$ при $\sigma\to\infty$. Так как, с другой стороны, $b\leqslant\delta$, $\beta<1$, то $(b\,R_0\,j)^{\beta}\leqslant R_0\delta j$. Следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}L^j\exp b\,(R_0\,j)^{\beta}=S$. Переходя в неравенстве (5.13) к пределу при $\sigma\to\infty$, получим, что

$$M_{\xi}(t)\leqslant\frac{C_2\,L}{1-L}+C_1\;A\;S\exp\left[b\,|\xi|^{\beta}+bt^{\beta}\right]. \tag{5.14}$$

Так как равенство (5.14) верно для всех $t\geqslant 0$, то из этого неравенства при $t=0$ получим

$$M_{\xi}(0)=|u(\xi)|=\frac{C_2L}{1-L}+C_1\;AS\exp\left[b\,|\xi|^{\beta}\right].$$

Ограниченность функции $u(\xi)$ при $|\xi|\leqslant t_1$ и полученное неравенство доказывают теорему 5.1.

Следствие. *Если выполняются условия теоремы* 5.1, *где* $u(x)$ — *решение однородной задачи, то* $u\equiv 0$.

§ 6. Теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделефа для нерегулярных уравнений

Рассмотрим оператор

$$P_{\lambda}(D)=\sum_{\substack{(\alpha_0,\,\alpha)\in N\\(\beta_0,\,\beta)\in N}}a_{\alpha_0\alpha,\,\beta_0\beta}\,\lambda^{\alpha_0+\beta_0}\,D^{\alpha+\beta}, \tag{6.1}$$

где λ — произвольный комплексный параметр, $(\alpha_0,\,\alpha)$, $(\beta_0,\,\beta)\in Z^{+}_{n+1}$ и $\mathbf{N}(P)$ — вполне правильный многогранник в R_{n+1}. Пусть $\mathbf{N}^{n}_{l_0}$ — единственная нерегулярная грань в.п. х.м. $\mathbf{N}$. Допустим, что оператор $P_{\lambda}(D)$ можно записать в виде

$$P_{\lambda}(D)=\sum_{\substack{(\alpha_0,\,\alpha)\in N^{n}_{l_0}\\(\beta_0,\,\beta)\in N^{n}_{l_0}}}a_{\alpha_0\alpha,\,\beta_0\beta}\,\lambda^{\alpha_0+\beta_0}\,D^{\alpha+\beta}+\sum_{(\alpha_0+\beta_0,\,\alpha+\beta)\in 2N}a_{\alpha_0\alpha,\,\beta_0\beta}\,\lambda^{\alpha_0+\beta_0}D^{\alpha+\beta},$$

и пусть выполняется следующее условие: существует положительная постоянная $\varkappa$ такая, что для всех $(\xi_0,\,\xi)\in R_{n+1}$

$$1+\sum_{\substack{(\alpha_0,\,\alpha)\in N\\(\beta_0,\,\beta)\in N}}a_{\alpha_0\alpha,\,\beta_0\beta}\,\xi_0^{\alpha_0+\beta_0}\,\xi^{\alpha+\beta}|\geqslant\varkappa\sum_{\substack{(\alpha_0,\,\alpha)\in N^{*}\\(\beta_0,\,\beta)\in N^{*}}}|\xi_0^{\alpha_0+\beta_0}\,\xi^{\alpha+\beta}|, \tag{6.2}$$

где Ω — неограниченная область, удовлетворяющая условиям § 2.

Положим $D_0 = -i\dfrac{\partial}{\partial x_0}$ и рассмотрим оператор

$$\overline{P}(D_0, D) = \sum_{\substack{(\alpha_0,\alpha)\in N \\ (\beta_0,\beta)\in N}} a_{\alpha_0\alpha,\beta_0\beta} D_0^{\alpha_0+\beta_0} D^{\alpha+\beta}. \tag{6.3}$$

Тогда очевидно, что х.м. $N(\overline{P})$ оператора $\overline{P}(D)$ имеет одну нерегулярную грань, притом размерности n. Обозначим эту грань через $N_{l_0}^n$.

Пусть $f(x)\in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $u_\lambda(x)\equiv u(x)\in B(\Omega)$ — решение уравнения

$$P_\lambda(D)\,u(x) = f(x). \tag{6.4}$$

Тогда $\overline{u}_\lambda$ будет решением уравнения

$$\overline{P}(D_0, D)\,\overline{u}_\lambda = \overline{f}_\lambda \tag{6.5}$$

из класса $B(\overline{\Omega})$.

Так как $D_0\,\overline{u}_\lambda = \lambda\,\overline{u}_\lambda$, то используя шаудеровские оценки для нерегулярных операторов (см. § 3), можно доказать аналоги лемм 4.1 и 4.2 при $p=2$ для многогранника N^*. И если

$$F - \frac{1}{2}\max_t \sum_{j=1}^n \mu_j^{*l} > 0, \tag{6.6}$$

где μ^{*l} — внешние нормали для многогранника N^*, то можно доказать и аналог леммы 4.3 при $p=2$.

Допустим, что выполняется условие (6.6). Тогда из аналога леммы 4.3 имеем

$$\sup_{\Omega_{R_0}/4(\overline{x})} |u(x)| \leqslant K \exp\left[\frac{3}{4} R_0 |\operatorname{Im}\lambda|\right] \{\sup_{\Omega_{R_0}(\overline{x})} |f(x)| +$$

$$+ \exp\left[-H|\lambda|^{\frac{1}{\mu_0^1}}\right] \sup_{\Omega_{R_0}(\overline{x})} |u(x)|\}. \tag{6.7}$$

Пусть число $\delta > 0$ и функция $f(x)$ удовлетворяют условиям (5.6), (5.7). Тогда справедлива следующая

Теорема 6.1. *Пусть число δ и функция $f(x)$ удовлетворяют условиям* (5.6), (5.7) *и $u(x)$—решение уравнения* (6.4) *из класса $B(\Omega)$, удовлетворяющее условию* (5.8).

Тогда существуют постоянные $B_1 > 0$, $B_2 \geqslant 0$ такие, что для всех $x\in\Omega$ выполняется неравенство (5.9)

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.1.

Следствие. *Если выполняется условие* 5.1, *где $u(x)$—решение однородной задачи, то $u(x)\equiv 0$.*

Ереванский государственный университет

Поступила 10.II.1981
и 8.VI.1982

Գ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Լիուվիլի և Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի տիպի թեորեմներ ընդհանուր ռեգուլյար և ոչ ռեգուլյար հավասարումների համար *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են ռեգուլյար և ոչ ռեգուլյար գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնք պարունակում են ինչպես կիսաէլիպտիկ հավասարումների ընտանիքն, այնպես էլ ճնշական հիպոէլիպտիկ հավասարումների ենթաընտանիքը։ Ռեգուլյար և ոչ ռեգուլյար հավասարումների լուծումների համար ստացվում են շաուդերի տիպի գնահատականներ W_p^{2N}-ում։ Նշված գնահատականներն ընդհանրացնում են W_p^{2m}-ում հայտնի Շաուդերի գնահատականները էլիպտիկ և կիսաէլիպտիկ հավասարումների համար (տես. (7), (14), ինչպես նաև C_0^{α}-ում շաուդերի տիպի գնահատականները ռեգուլյար և ոչ ռեգուլյար հավասարումների համար (տես. [5], [6])։

Կիրառելով այդ գնահատականներն ապացուցվում են Լիուվիլի և Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի տիպի թեորեմներ պարամետրական ռեգուլյար և ոչ ռեգուլյար հավասարումների լուծումների համար։

G. A. KARAPETIAN. *Theorems of Liuville and Fragmen-Lindeliof type for regular and non-regular equations* (summary)

The article considers regular and non-regular linear differential equations in particular quasielliptic equations, and hypoelliptic equations. For the solutions estimates of Shauder type in are obtained. These estimates are used in the proofs of the theorems of Liuville and of Fragmen-Lindeliof types for regular and non-regular parametric eqiations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. М. Никольский.* Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных, Мат. сб., 61 (103), № 2, 1963, 224—252.
2. *Л. Хёрмандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.
3. *В. П. Ильин.* О неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных. Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стелжова, 84, 1965, 144—173.
4. *В. П. Михайлов.* О поведении на бескоонечности одного класса многочленов, Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 91, 1967, 59—80.
5. *Г. Г. Казарян.* Операторы постоянной силы с оценкой снизу через производные и формально гипоэллиптические операторы, Analysis Mat., т. 3, Fasc 4, 1977 263—289.
6. *Г. Г. Казарян.* Оценка дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы, Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 140, 1976, 130—161.
7. *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИИЛ, 1962.
8. *Е. М. Ландис.* О поведении решений эллиптического уравнения высокого порядка в неограниченных областях, Тр. ММО, 31, 1974, 35—59.
9. *О. А. Олейник, Е. В. Радкевич.* Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена—Линделефа для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений, Мат. сб., 95 (137), 1 (9), 1974, 130—146.
10. *О. А. Олейник, Е. В. Радкевич.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений, УМН, 33, вып. 5 (203), 1978, 7—76.
11. *О. А. Олейник, Н. О. Максимова.* О поведении решений неоднородных эллиптических систем в неограниченных областях, Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 3, 1977, 117—137.
12. *М. А. Шифрин.* Теоремы лиувилевского типа для эллиптических уравнений высокого порядка, Тр. ММО, 33, 1975, 263—278.
13. *A. Cavallucci,* Teoremi di tipo Liouville e di tipo Phragmen-Lindelöf per le soluzioni di certe eguazioni quasiellitiche, Ann. Mat. puva ed. appl. III, 1976, 69—82.
14. *A. Cavallucci.* Sulla regolazita della soluzioni della equazioni quasiellitich non lineari, Rend di Mat.. (3—4) I, 1968, 1—41.

15. *L. Hörmander.* On the interior regularity of the solutions of partial differential equations, Comm Pure Appl. Math., 11, 1958, 197—218.
16. *B. Malgrange.* Sure une classe d'operators differentiels, hypoellipticity, Bull. Soc. Mat, France, 58, 1957, 283—306.
17. *J. Peetre.* A proof of the hypoellipticity of formaly hypoeliptic differential operators, Comm. Pure. Apl. Mat., 14, 1967, 737—747.
18. *С. М. Никольский.* Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения, ДАН СССР, 146, № 4, 1962, 767—769.
19. *Г. Г. Казарян.* Сравнение мощности операторов и их гипоэллиптичность, Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 150 (179), 143—159.
20. *Г. Г. Казарян.* Первая краевая задача для общего нерегулярного уравнения с постоянными коэффициентами, ДАН СССР, 251, № 1, 1980, 22—24.
21. *Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин.* Об одном классе гипоэллиптических полиномов, Мат. сб., 75 (117), № 3, 1968, 400—416.
22. *В. Н. Маркарян, Г. Г. Казарян.* О функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических уравнений, Мат. сб., 115 (157), № 4 (8), 1981, 614—631.
23. *E. Pehkonen.* Ein hypoelliptisches Dirichlet problem, Comm. Phys. Mat., 48, № 3, 1978, 131—143.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ա Ր Թ Յ Ո Ւ Ն

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1982 թ., XVII, №№ 1—6

Ն. Հ. Առաքելյան, Պ. Մ. Խոյան. *Հոլոմորֆ ֆունկցիաներով շոշափումային մոտավորության մասին* 6, 421

Ա. Ե. Ավետիսյան. *Ֆունկցիաների դասեր կոմպլեքս տիրույթում և նրանց ինտեգրալ ներկայացումները* 1, 3

Ա. Հ. Բաբայան. *Վիներ-Հոպֆի հավասարման հատուկ դեպք* 5, 387

Լ. Կ. Բաբաջանյանց, Ֆ. Ռ. Մնոյան. *Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների հոլոմորֆ լուծումների գնահատումը* 2, 85

Մ. Դ. Խավթյան. *Մի ոչ գծային հիպերբոլական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի մասին* 5, 405

Է. Կ. Դիլաքյան. *Մ. Մ. Ջրբաշյանի ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսության մի կիրառության մասին* 2, 140

Մ. Զ. Իվեյրին. *Անալիտիկ ֆունկցիաների մոտարկումը բազմակապ տիրույթներում* 1, 43

Ա. Ս. Զիլբերգլեյտ, Յու. Ի. Կոպիլևիչ. *Բազմանդամային օպերատորային փնջի մասին* 2, 131

Ի. Գ. Խաչատրյան. *Սովորական սինդուլյար դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների ուսումնասիրությունը* 3, 159

Գ. Ա. Կարապետյան. *Լիուվիլի և Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի տիպի թեորեմները ընդհանուր ռեգուլյար և ոչ ռեգուլյար հավասարումների համար* 6, 473

Տ. Մ. Կոշելևա. *Եզրային խնդիր ու-բդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար ընդհանրացված ֆունկցիաների դասում* 6, 463

Մ. Գ. Կրեյն, Յու. Լ. Շմուլյան. *Վիներ-Հոպֆի հավասարումները, որոնց կորիզները թույլ են տալիս ներկայացում էքսպոնենտի միջոցով* . . . . 4—5, 397

Տ. Ն. Հարությունյան. *Որոշ դասի դիֆերենցիալ օպերատորների սպեկտրի մասին* 3, 201

Ֆ. Հ. Մամիկոնյան, Հ. Ռ. Ներսիսյան. *Որոշ ինտեգրալ անհավասարությունները շրջելու մասին* 1, 62

Վ. Ն. Մարգարյան. *Որոշ դասի հավասարումների լուծումների տարածության ֆունկցիոնալ չափողականությունը* 3, 182

Վ. Մ. Մարտիրոսյան. *Ճառագայթների համակարգի վրա Միտագ-Լեֆլերի տիպի սիստեմների փակության, մինիմալության ու բազիսության մասին* 2, 117

Ի. Մ. Մենեռբյան. *Ռիմանի թվային շարքերի տեղափոխելիության վերաբերյալ թեորեմի ընդհանրացման մասին* 2, 106

Գ. Վ. Միքայելյան. *Ֆուրյեի տրված α-կործակիցներով շրջանում անալիտիկ ֆունկցիայի գոյության մասին* 2, 92

Լ. Վ. Միքայելյան. *Տյոպլիցյան դետերմինանտների մասին Գ. Գ. Սեգյոյի թեորեմների մատրիցային կոնտինուալ անալոգները* 4, 239

Մ. Ա. Մկրտչյան, Ա. Պ. Յուժակով. *Նյուտոնի բազմանիստ և n-փոփոխականի ոացիոնալ ֆունկցիայի Լորանի շարքերը* 2, 99

Հ. Ռ. Ներսիսյան. *Ինտեգրալ օպերատորների ռեզոլվենտների կառուցվածքը* . . 6, 441

Ս. Մ. Պոզին, Է. Ա. Սախնովիչ. *Տարբերության կորիգով հավասարման լուծումների վարքի մասին* 5, 376

Մ Մ. Ջրբաշյան, Վ. Մ. Մարտիրոսյան. *α-քվազիանալիտիկ դասերի տեսության շուրջը* 4, 264

Ի. Ա. Ջվարշեիշվիլի. *Բիգլանում անալիտիկ ֆունկցիաների մի դասի եզրային հատկությունների մասին* 4, 221

Ս. Գ. Ռուբանովիչ. *Որոշ սինդուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմների մասին* 1, 32

Ա. Ա. Վաղարշակյան. *Էլիպտական տիպի հավասարումների լուծումների միակության մասին* 3, 214

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия «Математика» за 1982 г. XVII, №№ 1—6

А. Е. Аветисян. Классы функций в комплексной области и их интегральные представления 1, 3

Н. У. Аракелян, П. М. Готье. О касательном приближении голоморфными функциями 6, 421

Т. Н. Арутюнян. О спектре одного класса дифференциальных операторов . . 3, 201

Л. К. Бабаджанянц, П. Б. Мгоян. Оценка голоморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений 4, 83

А. О. Бабаян. Особый случай уравнения Винера—Хопфа 5, 387

А. А. Вагаршакян. О единственности решений уравнений эллиптического типа . 3, 214

М. Д. Давтян. О задаче Дирихле для некоторого нелинейного гиперболического уравнения 5, 405

М. З. Двейрин. О приближении аналитических функций в многосвязных областях 1, 48

И. А. Джваршейшвили. О граничных свойствах одного класса аналитических функций в бицилиндре 3, 221

М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян. К теории α-квазианалитических классов 4, 264

Э. К. Диланян. Об одном приложении теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна 2, 140

А. С. Зильберглейт, Ю. И. Копилевич. О спектре полиномиального операторного пучка 2, 134

Г. А. Карапетян. Теорема типа Лиувилля и типа Фрагмена-Линделефа для общих регулярных уравнений 6, 473

Т. М. Кошелева. Граничная задача для обыкновенных дифференциальных уравнений m-го порядка в классе обобщенных функций 6, 465

М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян. Уравнения Винера—Хопфа, ядра которых допускают представление через экспоненты . . . . . 4—5, 307

Ф. О. Мамиконян, А. Б. Нерсесян. Об обращении некоторых интегральных неравенств 1, 62

В. Н. Маркарян. Функциональная размерность пространств решений некоторых классов гипоэллиптических уравнений 3, 182

В. М. Мартиросян. О замыкании, минимальности и базисности систем функций типа Миттаг—Леффлера на системе лучей 2, 117

Р. М. Меграбян. Об одном обобщении теоремы Римана о безусловной сходимости числовых рядов 2, 106

Г. В. Микаелян. О существовании аналитической в круге функции с заданными α-коэффициентами Фурье 2, 92

Л. В. Микаелян. Матричные континуальные аналоги теорем Г. Сегё о теплицевых детерминантах 4, 239

М. А. Мкртчян, А. П. Южаков. Многогранник Ньютона и ряды Лорана рациональной функции n-переменных 2, 99

А. Б. Нерсесян. Структура резольвент некоторых интегральных операторов . 6, 441

С. М. Позин, Л. А. Сахнович. О поведении решений уравнения с разностным ядром 5, 376

С. Г. Рубанович. О некоторых системах сингулярных интегральных уравнений 1, 32

И. Г. Хачатрян. Изучение решений обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения 3, 159

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR seria "Mathematika", 1982, vol. XVII, №№ 1—6

N. U. Arakelian and P. M. Gauthier. On tangential approximation by holomorphic functions 6, 421

A. E. Avetissian. Classes of functions in the complex domain and their integral representations 1, 3

L. K. Babadzanianz, P. B. Mgojan. Estimation of the golomorphic solutions of ordinary differential equations 2, 83

A. O. Babayan. Degenerative case of Wiener—Hopf equation 5, 387

M. D. Davtyan. On the Dirichlet problem for a nonlinear hyperbolic equation 5, 405

E. K. Dilanian. An application of the M. M. Djrbashian integral transformations theory 2, 140

M. M. Djrbashian, V. M. Martirosian. On the theory of α-quasianalytic classes 4, 264

M. Z. Dveirin. Analytic rational appoximation in a finite connected region . . 1 48

T. N. Harutiunian. On the spectrum of a class of differential operators . . 3, 201

I. A. Jvarsheishvili. On boundary properties of a class of analytic functions in bicylinder 3, 221

G. A. Karapetian Theorems of Liuville and Fragmen—Lindeliof type for regular and non-regular equations 6, 473

I. G. Khachatrian. Investigation of solutions of an ordinary singular differential equation 3, 159

Yu. I. Kopilevich, A. S. Silbergleit. On the spectrum of polynomial operator pencil 2, 134

T. M. Kosheleva. A boundary problem for ordinary differential equations of m-order in the class of generalized function 6, 463

M. G. Krein, Ju. L. Smul'an. Wiener—Hopf equations the kernels of which admit an integral representation by exponents . . . . . 4—5, 307

F. O. Mamikonian, A. B. Nersesian. On inversion of some integral inequalities 1, 62

V. N. Markarian. Functional dimension of the space of solutions of some classes hypoelliptic equations 3, 182

V. M. Martirosian. On the closure, minimality and basisness of systems of Mittag-Leffler type on a system of rays 2, 117

R. M. Mehrabian. On a generalization of Rieman's theorem about unconditional convergence of number series 2, 106

G. V. Mikaelian. Existence of a function analytic in the disk having prescribed α-Fourier coefficients 2, 92

L. V. Mikaelian. The matrix continual analogues of Szege's theorems on Teoplitz determinants 4, 239

M. A. Mkrtchian, A. P. Juzakov. The Newton polytope and the Laurent series of rational functions of n variables 2, 99

A. B. Hersesian. The structure of resolvent of some integral operators . . . 6, 441

S. M. Pozin, L. A. Sakhnovich. On solution behaviour of the equation with difference nucleus 5, 376

S. G. Rubanovich. On some systems of singular integral equations 1, 32

A. A. Vagarshakian. On uniqueness of the solution of the equations of elliptic type 3, 214

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ն. Հ. Առաքելյան, Պ. Մ. Գոթյե. *Հոլոմորֆ ֆունկցիաներով շոշափումային մոտավորության մասին* 421
Հ. Բ. Ներսեսյան. *Ինտեգրալ օպերատորների ռեզոլվենտների կառուցվածքը* . . 441
Տ. Մ. Կոշելևա. *Եզրային խնդրի m-րդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար ընդհանրացված ֆունկցիաների դասում* 463
Գ. Ա. Կարապետյան. *Լիուվիլի և ֆրագմեն-Լինդելյոֆի տիպի թեորեմներ ընդհանուր ռեգուլյար և ոչ ռեգուլյար հավասարումների համար* 473

СОДЕРЖАНИЕ

Н. У. Аракелян, П. М. Готье. О касательном приближении голоморфными функциями 421
А. Б. Нерсесян. Структура резольвент некоторых интегральных операторов . . 441
Т. М. Кошелева. Граничная задача для обыкновенных дифференциальных уравнений m-го порядка в классе обобщенных функций 463
Г. А. Карапетян. Теорема типа Лиувилля и типа Фрагмена-Линделефа для общих регулярных уравнений 473

CONTENTS

N. U. Arakelian and P. M. Gauthier. On tangential approximation by holomorphic functions 421
A. B. Nersesian. The structure of resolvent of some integral operators 441
T. M. Kosheleva. A boundary problem for ordinary differential equations of m order in the class of generalized function 463
G. A. Karapetian. Theorems of Liuville and Fragmen—Lindeliof type for regular and non-regular equations 473