ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԱԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

պատասխանատու քարտուղար՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջը)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված ցիչ քիչ շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չպատվիրել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է հոդվածի աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատուփեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24ա, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
зам. главного редактора
Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

1982 1.14 №3

ԳԻՆԸ 85 Կ.
ЦЕНА 85 К.
Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKIĬ

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 5, 1982 Математика

УДК 517.988

М. Г. КРЕЙН, Ю. Л. ШМУЛЬЯН

УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА, ЯДРА КОТОРЫХ ДОПУСКАЮТ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ ЭКСПОНЕНТЫ (продолжение)*

§ 3. Интегральное представление функций w^{-1} $(w \in (W))$

1. Как известно, R-функции не имеют невещественных нулей. Поэтому их не имеет произвольная функция $w \in (W)$ с $w(0) \geqslant 0$, и, стало быть, для нее $w^{-1}(z)$—голоморфная в $\mathbf{C}_{\pm}$ функция, равная 1 в точке ∞. Найдем ее интегральное представление.

Как отмечено в § 2, $u(z) := -w(z)/z \in (R_0)$. Поэтому—$u^{-1}(z) = z/w(z)$ — R-функция. Из условия $\lim\limits_{z \to \infty}[-u^{-1}(z)/z] = \lim\limits_{z \to \infty} w^{-1}(z) = 1$ вытекает, что ее интегральное представление имеет вид

$$-u^{-1}(z) = z + \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) d\tau(t), \tag{3.1}$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$, τ — неотрицательная мера, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{1+t^2} < \infty.$$

Отсюда

$$w^{-1}(z) = 1 + \frac{\alpha}{z} + \frac{1}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) d\tau(t). \tag{3.2}$$

Этим представлением, где α и τ обладают вышеуказанными свойствами, характеризуется класс всех функций w^{-1} таких, что $w \in (W)$ и $w(0) \geqslant 0$.

Теорема 3.1. *Если* $w \in (W)$, $w(0) > 0$, *то*

$$w^{-1}(z) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(t)}{t-z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{3.3}$$

где $\rho \in (\Sigma)$.

Обратно, если w^{-1} *допускает представление* (3.3) *с указанными свойствами, то* $w \in (W)$, $w(0) > 0$.

Доказательство. Поскольку R-функция— u^{-1} удовлетворяет условию $\lim\limits_{z \to 0}(-u^{-1}(z)/z) = 1/w(0) < \infty$, по теореме 1.1

* Начало см. в № 4 с. г.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\hat{\tau}(t)}{t^2}<\infty,\ a+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)d\hat{\tau}(t)=0,$$

так что

$$-u^{-1}(z)=z+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t}\right)d\hat{\tau}(t)=z\left(1+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\hat{\tau}(t)}{t(t-z)}\right).$$

Положим $\rho(t):=\int_0^t d\hat{\tau}(s)/s$. Тогда $\rho\in(\Sigma)$ и справедливо (3.3).

Обратно, пусть $w^{-1}(z)$ имеет представление (3.3), где $\rho\in(\Sigma)$. Функция

$$\hat{\tau}(t)=\int_0^t u\,d\rho(u)$$

не убывает и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\hat{\tau}(t)}{t^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{t}<\infty.$$

Тогда $w^{-1}(\infty)=1$, $w^{-1}(0)>1$. Легко проверить, что

$$zw^{-1}(z)=z+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{t^2+1}\right)d\hat{\tau}(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{t^2+1},$$

откуда видно, что $z\,w^{-1}(z)\in(R)$. Поэтому $-w(z)/z\in(R)$. Из того, что $\lim_{z\to\infty} w(z)=1$, вытекает, что функция $-w(z)/z\in(R_0)$ и вариация ее спектральной меры равна 1. По теореме 2.2 функция $w\in(W)$, причем $w(0)>0$.

2. Пусть $w\in(W)$, $w(0)=0$, $u(z):=-w(z)/z$ $(\in(R_0))$. Из равенства $w(0)=0$ следует $\lim_{z\to 0}(-zu(z))^{-1}=\infty$, и, значит,

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{d\hat{\tau}(t)}{t^2}=\infty\ (\delta>0).$$

В частности, $\hat{\tau}$ может иметь разрыв в нуле. Этот случай полностью характеризуется нижеследующей теоремой:

Теорема 3.2. *Пусть $w\in(W)$, $w(0)=0$. Для того чтобы мера $\hat{\tau}$ в представлении* (3.2) *имела скачок в нуле, необходимо и достаточно, чтобы $w\in(\hat{W})$.*

Доказательство. Имеем

$$\Delta:=\hat{\tau}(\{0\})=\lim_{z\to 0}\frac{z}{u(z)}=-\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{w(z)}.$$

Поэтому условие $\Delta > 0$ равносильно конечности предела (2.2), т. е. условию $w \in (\widehat{W})$. Теорема доказана.

Заметим, что по теореме 2.3

$$\Delta^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma\,(t)/t^2.$$

Функция $\widehat{\tau}_0(t)$: $= \widehat{\tau}(t) - \Delta\chi_+(t)$ непрерывна в нуле. Равенство (3.2) может быть приведено к виду

$$w^{-1}(z) = 1 + \frac{\alpha}{z} - \frac{\Delta}{z^2} + \frac{1}{z}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\right) d\widehat{\tau}_0(t). \tag{3.4}$$

Предположим, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\widehat{\tau}_0(t)}{t^2} < \infty \quad (\delta > 0).$$

Тогда

$$w^{-1}(z) = 1 + \frac{\alpha}{z} - \frac{\Delta}{z^2} + \frac{1}{z}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{z}{t(t-z)} + \frac{1}{t(t^2+1)}\right) d\widehat{\tau}_0(t) =$$

$$= 1 + \frac{1}{z}\left(\alpha + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\widehat{\tau}_0(t)}{t(t^2+1)}\right) - \frac{\Delta}{z^2} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\widehat{\tau}_0(t)}{t(t-z)}.$$

Мы оставляем открытым вопрос о полной характеристике функций w^{-1} для случая $w \in (W)$, $w(0) = 0$.

3. Пусть $w \in (W)$, $w(0) < 0$, $z_e\,(\in \overline{\mathbf{C}}_+)$ — исключительный нуль функции w (§ 2, п. 3). Полноты ради ниже мы приводим ряд предложений о функции w^{-1}. Из-за недостатка места, а также в связи с тем, что эти предложения в дальнейшем не используются, их доказательства опускаются.

Теорема 3.3. *Для того чтобы функция w, заданная в $\mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-$, обладала тремя свойствами:*

1) $w \in (W)$; 2) $w(0) < 0$; 3) *w имеет нуль $z_e \in \mathbf{C}_+$, необходимо и достаточно, чтобы функция w^{-1} допускала представление*

$$w^{-1}(z) = 1 + \frac{\theta}{z - z_e} + \frac{\bar{\theta}}{z - \bar{z}_e} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\widetilde{\sigma}_e^*(t)}{t - z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0),$$

где $\widetilde{\sigma} \in (\Sigma)$ *и выполнялось условие*

$$1 - 2\operatorname{Re}\frac{\theta}{z_e} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\widetilde{\sigma}(t)}{t} < 0.$$

Теорема 3.4. *Для того чтобы функция w, заданная в $\mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-$ обладала тремя свойствами:*

1) $w \in (W)$; 2) $w(0) < 0$; 3) *w имеет вещественный исключительный нуль z_e первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы функция w^{-1} допускала представление*

$$w^{-1}(z) = 1 + \frac{h}{z - z_e} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0),$$

где $\sigma \in (\Sigma)$, $h \in \mathbf{R}$,

$$1 - \frac{h}{z_e} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t} < 0.$$

§ 4. Экспоненциальное представление функций $w \in (W)$ со свойством $w(0) > 0$

1. Теорема 4.1. *Функция $w(z)$ $(z \in \mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-)$ принадлежит классу (W) и удовлетворяет условию $w(0) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда она представляется в виде*

$$w(z) = \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)\,ds}{s - z}\right), \tag{4.1}$$

где $F(s)$ — измеримая вещественная функция со свойствами:

$$0 \leqslant F(s) \leqslant 1 \text{ при } s \in R_+, \quad -1 \leqslant F(s) \leqslant 0 \text{ при } s \in \mathbf{R}_-, \tag{4.2}$$

$$\int_{|s|>\delta} \left|\frac{F(s)}{s}\right| ds < \infty \quad (\delta > 0). \tag{4.3}$$

Доказательство. Необходимость. Если $w \in (W)$, $w(0) \geqslant 0$, то функция $u(z) := -w(z)/z$ имеет представление (1.6), где $f(s)$ удовлетворяет условиям (1.7). Так как экспоненциальное представление R_0-функции $-1/z$ имеет вид

$$-\frac{1}{z} = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{s - z} - \frac{s}{s^2 + 1}\right)\chi_+(s)\,ds\right),$$

то

$$w(z) = u(z)\Big/\left(-\frac{1}{z}\right) = \exp\left(p + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{s - z} - \frac{s}{s^2 + 1}\right)(f(s) - \chi_+(s))\,ds\right) =$$

$$= \exp\left(p - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{s - z} - \frac{s}{s^2 + 1}\right)F(s)\,ds\right),$$

где $F(s) := \chi_+(s) - f(s)$. Функция $F(s)$ удовлетворяет условиям (4.2) Из условий (1.7) для $f(s)$ вытекает (4.3). Так как $w(\infty) = 1$, то

$$p + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sF(s)}{s^2 + 1}\,ds = 0,$$

причем последний интеграл сходится в силу (4.3). В итоге получаем равенство (4.1). Достаточность следует из обратимости всех рассуждений. Теорема доказана.

Из (4.1) вытекает, что $w(0) = \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)\,ds}{s}\right)$. Так как подынтегральная функция неотрицательна, то

$$\{w(0)=0\} \leftrightarrow \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)\,ds}{s} = +\infty\right\}, \tag{4.4}$$

или же с учетом (4.3)

$$\{w(0)=0\} \leftrightarrow \left\{\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{F(s)\,ds}{s} = +\infty \quad (\delta>0)\right\}. \tag{4.5}$$

2. Вместе с $F(s)$ и функция $F_1(s) := -F(-s)$ удовлетворяет условиям (4.2), (4.3). Поэтому функция $w_1(z) = \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(s)\,ds}{s-z}\right)$ принадлежит классу (W) вместе с w. Легко проверить, что $w_1(z) = w(-z)$. Отсюда вытекает

Теорема 4.2. *Функция $w(z)$ вида (4.1) четна тогда и только тогда, когда $F(s)$ нечетна.*

3. Через $(W^{\pm})$ обозначим класс тех $w \in (W)$, $w(0) \geqslant 0$, для которых функция $F(s)$ в представлении (4.1) равна нулю на $\mathbf{R}_{\mp}$. Функция $w \in (W)$ принадлежит $(W^{\pm})$ тогда и только тогда, когда она голоморфна и положительна на $\mathbf{R}_{\mp}$. Отсюда следует, что функции $w_\sigma \in (W^{\pm})$ характеризуются тем, что в их интегральном представлении (0.9) функция σ постоянна на $\mathbf{R}_{\mp}$. Поэтому общий вид функций $w_{\pm} \in (W^{\pm})$ дается формулами

$$w_{\pm}(z) = 1 \mp \int\limits_{\mathbf{R}_{\pm}} \frac{d\sigma_{\pm}(t)}{t-z} \quad (z \in \operatorname{Ext} \mathbf{R}_{\pm}), \tag{4.6}$$

где $\sigma_{\pm}$ — неубывающие на $\mathbf{R}_{\pm}$ функции, для которых

$$\int\limits_{\mathbf{R}_{\pm}} \frac{d\sigma_{\pm}(t)}{|t|} \leqslant 1. \tag{4.7}$$

Согласно представлениям (4.6) и соотношениям (4.4), (4.5)

$$\{w_{\pm}(0)=0\} \leftrightarrow \left\{\int\limits_{\mathbf{R}_{\pm}} \frac{d\sigma_{\pm}(t)}{|t|} = 1\right\} \leftrightarrow \left\{\int\limits_{\mathbf{R}_{\pm}} \frac{F(s)}{s}\,ds = +\infty\right\} \leftrightarrow \left\{\int\limits_{0}^{\pm\delta} \frac{F(s)\,ds}{s} = \pm\infty;\ \delta>0\right\}.$$

Из (4.6) вытекает, что $\mp w_\pm(x)$ является R-функцией, аналитической на $\mathbf{R}_\mp$. Поэтому $w_+(x)$ убывает на $\mathbf{R}_-$ от 1 до $w_+(0)$, а $w_-(x)$ возрастает на $\mathbf{R}_+$ от $w_-(0)$ до 1. Таким образом

$$w_\pm(0) \leqslant w_\pm(x) < 1 \quad (x \in \mathbf{R}_\mp). \tag{4.8}$$

С другой стороны, по теореме 2.2 $-w_\pm(z)/z \in (R_0)$ и, стало быть $(w_\pm(x)/x)$ убывает на $\mathbf{R}_\mp$. Очевидно, что $\lim\limits_{x \to \mp\infty} (w_\pm(x)/x) = 0$.

Положительные на $\mathbf{R}_\mp$ функции $\mp w_\pm(x)/x$ имеют конечные или бесконечные пределы $l_\pm = l_\pm(w_\pm)$ при $x \to 0\pm$. Эти пределы могут быть конечными лишь в случае $w_\pm(0) = 0$. Нижеследующая лемма 4.3 дает явную формулу для $l_\pm$. Предварительно заметим, что предельный переход может осуществляться не только вдоль полуосей $\mathbf{R}_\mp$, но и в углах $\varepsilon < \arg z < 2\pi - \varepsilon$ и $|\arg z| < \pi - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ соответственно, в связи с чем для обозначения этих пределов будет употребляться символ $\widehat{\lim\limits_{z \to 0}}$.

Лемма 4.3. *Если* $w_\pm \in (\mathcal{W}^\pm)$, $w_\pm(0) = 0$, *то*

$$l_\pm(w_\pm) = \int\limits_{\mathbf{R}_\mp} \frac{d\sigma_+(t)}{t^2} > 0$$

и, таким образом, условие $l_\pm(w_\pm) < \infty$ *равносильно тому, что*

$$\int\limits_{\mathbf{R}_\pm} \frac{d\sigma_\pm(t)}{t} = \pm 1, \quad \int\limits_{\mathbf{R}_\pm} \frac{d\sigma_\pm(t)}{t^2} < \infty. \tag{4.9$\pm$}$$

Доказательство. Имеем $\int\limits_0^\infty d\sigma_+(t)/t = 1$, откуда

$$\frac{w_+(z)}{-z} = \int\limits_0^\infty \frac{d\sigma_+(t)}{t(t-z)}, \quad l_+(w_+) = \widehat{\lim_{z \to 0}} \frac{w_+(z)}{-z} = \int\limits_0^\infty \frac{d\sigma_+(t)}{t^2}.$$

Допустив, что последний интеграл равен нулю, получим, что $\sigma_+(t) = \text{const}$, $w_+(z) \equiv 1$, что противоречит условию.

Аналогично устанавливается второе утверждение.

Выше отмечено, что условие $l_\pm(w_\pm) < \infty$ влечет $w_\pm(0) = 0$. В связи с этим условием писать: $w_\pm(0) = 0$, если $l_\pm(w_\pm) < \infty$.

4. Пусть $w_+ \in (\mathcal{W}^+)$. В области $D_- := \{z : |z| < 1;\ \operatorname{Re} z < 0\}$ эта функция ограничена. С другой стороны, из существования отличного от нуля предела $\widehat{\lim\limits_{z \to 0}} \dfrac{w_+(z)}{z}$, возможно бесконечного, вытекает, что $|w_+(z)/z| > C > 0$ в D_-. Поэтому функция $|\ln w_+(z)| = O\left(\ln \dfrac{1}{|z|}\right)$ при $z \to 0$ в D_-.

Функция $\ln w_+(z)$ голоморфна в левой полуплоскости, непрерывна в замкнутой левой полуплоскости, исключая, быть может, точку 0,

и стремится к нулю при $z \to \infty$ ($\ln 1 = 0$). Учитывая приведенную выше оценку этой функции при $z \to 0$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln w_+(it)}{it-z}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{Re} z > 0, \\ \ln w_+(z) & \text{при } \operatorname{Re} z < 0. \end{cases} \tag{4.10+}$$

Аналогично, для произвольной функции $w_- \in (W^-)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln w_-(it)}{it-z}\,dt = \begin{cases} -\ln w_-(z) & \text{при } \operatorname{Re} z > 0, \\ 0 & \text{при } \operatorname{Re} z < 0. \end{cases} \tag{4.10-}$$

5. Пусть $w_+ \in (W^+)$. Из (4.6) следует, что $-w_+ \in (R)$; кроме того, эта функция голоморфна в $\operatorname{Ext} \mathbf{R}_+$ и отрицательна на $\mathbf{R}_-$. Поэтому w_+^{-1} — R-функция, регулярная и положительная на $\mathbf{R}_-$. Согласно [7] она допускает представление

$$w_+^{-1}(z) = 1 + \int_0^{\infty}\frac{d\rho_+(t)}{t-z} \quad (z \in \operatorname{Ext} \mathbf{R}_+), \tag{4.11}$$

где ρ_+ — неубывающая функция, для которой $\int_0^{\infty}\frac{d\rho_+(t)}{t+1} < \infty$ (здесь учтено, что $w_+(\infty) = 1$). Из (4.11) следует, что

$$w_+^{-1}(0) = 1 + \int_0^{\infty}\frac{d\rho_+(t)}{t}. \tag{4.12}$$

Поэтому

$$\{w_+(0) > 0\} \leftrightarrow \left\{\int_0^{\infty}\frac{d\rho_+(t)}{t} < \infty\right\}. \tag{4.13}$$

Если $m_+ := \rho_+(\{0\})$, то

$$w_+^{-1}(z) = 1 - \frac{m_+}{z} + \int_{0+}^{\infty}\frac{d\rho_+(t)}{t-z}. \tag{4.14}$$

Очевидно, $m_+ = \lim\limits_{z\to 0}(-z/w_+(z)) = l_+(w_+)^{-1}$. Поэтому

$$\{m_+ > 0\} \leftrightarrow \{l_+(w_+) < \infty\} \leftrightarrow \{w_+(0) = 0\} \leftrightarrow \tag{4.15+}$$
$$\leftrightarrow \{\text{условия (4.9+)}\},$$

причем последний интеграл в (4.9+) равен m_+^{-1}.

Отметим еще формулу, легко следующую из (4.14), которая понадобится в гл. II:

$$w_+^{-1}(z) = 1 - \frac{m_+}{z} + z\int_{0+}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{z}\right)\frac{d\rho_+(t)}{t}. \tag{4.16}$$

Если

$$r_1^+ := \int_{0+}^{\infty} \frac{d\rho_+(t)}{t} < \infty, \tag{4.17}$$

то (4.16+) приводится к виду

$$w_+^{-1}(z) = (1 + r_1^+) - \frac{m_+}{z} + z \int_{0+}^{\infty} \frac{d\nu_+(t)}{t - z}, \tag{4.18}$$

где

$$\nu_+(t) = \int_0^t d\rho_+(u)/u$$

— конечная мера на $\mathbf{R}_+$, непрерывная в точке 0.

Заметим, что в силу (4.13)

$$\{w_+(0) > 0\} \leftrightarrow \{m_+ = 0,\ r_1^+ < \infty\}. \tag{4.19}$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для w_-. Приведем лишь окончательные результаты.

Аналогично формулам (4.11), (4.14) и (4.16) имеем

$$w_-^{-1}(z) = 1 - \int_{-\infty}^{0} \frac{d\rho_-(t)}{t - z} = 1 + \frac{m_-}{z} - \int_{-\infty}^{-0} \frac{d\rho_-(t)}{t - z} =$$

$$= 1 + \frac{m_-}{z} - z \int_{-\infty}^{-0} \left(\frac{1}{t - z} + \frac{1}{z}\right) \frac{d\rho_-(t)}{t} \quad (z \in \operatorname{Ext} \mathbf{R}_-), \tag{4.20}$$

где ρ_- — неубывающая функция, для которой

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{d\rho_-(t)}{1 + |t|} < \infty,$$

а $m_- := \rho_-(\{0\})\ (\geqslant 0) = l_-(w_-)^{-1}$.

Аналогично (4.15+)

$$\{m_- > 0\} \leftrightarrow \{l_-(w_-) < \infty\} \leftrightarrow \{w_-(0) \overset{1}{=} 0\} \leftrightarrow \tag{4.15—}$$

$$\leftrightarrow \{\text{условия (4.9—)}\},$$

причем последний интеграл в (4.9—) совпадает с m_-^{-1}.

Наконец, аналогично (4.13) и (4.19)

$$\{w_-(0) > 0\} \leftrightarrow \left\{ \int_{-\infty}^{0} \frac{d\rho_-(t)}{|t|} < \infty \right\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left\{ m_- = 0,\ r_1^- := \int_{-\infty}^{-0} \frac{d\rho_-(t)}{|t|} < \infty \right\}.$$

Если $r_1^- < \infty$, то

$$w_-^{-1}(z) = (1 + r_1^-) + \frac{m_-}{z} + z \int_{-\infty}^{0} \frac{d\nu_-(t)}{t - z}, \tag{4.21}$$

где ν_- — конечная мера на $\mathbf{R}_-$, непрерывная в точке 0, $d\nu_-(t) = d\varphi_-(t)/|t|$.

6. Пусть μ — мера на $\mathbf{R}_+$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(t)}{1+t} < \infty.$$

Положим

$$m_j := \int_0^\infty d\mu(t)/t^j \ (\geqslant 0) \ (j=1, 2, \cdots).$$

Если $\mu(\{0\}) > 0$, то все числа m_j равны ∞. В связи с этим будем предполагать, что $\mu(\{0\}) = 0$. Сходимость интегралов m_j определяется поведением меры μ в окрестности нуля. Поэтому условие $m_k < \infty$ при некотором натуральном k влечет конечность $m_1, m_2, \cdots, m_{k-1}$.

Положим

$$u(z) := \int_0^\infty \frac{d\mu(t)}{t-z} \ (\in (\mathbf{R})).$$

Эта функция положительна на $\mathbf{R}_-$, $u(\infty) = 0$.

Для функций ω_1, ω_2, определенных в некоторой „окрестности" точки 0, $\operatorname{Im} z \neq 0$, будем писать $\omega_1 = \hat{o}(\omega_2)$, если $\lim\limits_{z\to 0} (\omega_1(z)/\omega_2(z)) = 0$.

Приводимая ниже лемма 4.4 легко вытекает из соответствующего предложения о поведении R-функции в точке ∞ (см. [4]).

Лемма 4.4. *Для любого натурального k: $\{m_k < \infty\} \leftrightarrow \{u(z)$ допускает представление*

$$u(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + \hat{o}(z^{k-1})\}.$$

При этом $a_j = m_{j+1}$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$.

Пусть $w_+ \in (W^+)$ допускает представление (4.6), а w_+^{-1} — представление (4.11). В нижеследующей теореме устанавливается помимо прочего связь между существованием конечных моментов

$$s_k^+ := \int_0^\infty \frac{d\sigma_+(t)}{t^k}, \quad r_k^+ = \int_{0+}^\infty \frac{d\varphi_+(t)}{t^k}. \tag{4.22}$$

Теорема 4.5. а) $\{w_+(0) > 0\} \leftrightarrow \{s_1^+ < 1\} \leftrightarrow \left\{\int_0^\infty d\varphi_+(t)/t < \infty\right\} \leftrightarrow \{m_+ = 0, \ r_1^+ < \infty\}$.

При этом $\{s_k^+ < \infty\} \leftrightarrow \{r_k^+ < \infty\}$ $(k \geqslant 2)$. Если положить для удобства

$$\tilde{r}_1^+ := 1 + r_1^+, \ \tilde{r}_j^+ := r_j^+ \quad (2 \leqslant j \leqslant k), \tag{4.23}$$

$$\tilde{s}_1^+ := 1 - s_1^+, \ \tilde{s}_j := -s_j^+ \quad (2 \leqslant j \leqslant k), \tag{4.24}$$

то имеют место рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} &\overset{-}{s}_1^+ \overset{-}{r}_1^+ = 1, \quad \tilde{s}_1^+ \tilde{r}_2^+ + \overset{-}{s}_2^+ \tilde{r}_1^+ = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\tilde{s}_1^+ \overset{-}{r}_k^+ + \tilde{s}_2^+ \tilde{r}_{k-1}^+ + \cdots + \overset{-}{s}_k^+ \overset{-}{r}_1^+ = 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

б)

$$\{w_+(0) \overset{1}{=} 0\} \iff \{s_1^+ = 1,\ s_2^+ < \infty\} \iff \{m_+ > 0\} \iff \left\{\int_0^\infty \frac{d\rho_+(t)}{t} = \infty\right\}.$$

При этом $\{s_k^+ < \infty\} \iff \{r_{k-2}^+ < \infty\}$ $(k \geqslant 3)$. *Если в дополнение к* (4.23) *положить* $\overset{-}{r}_0^+ := -m_+$, *то имеют место рекуррентные соотношения*

$$\begin{aligned} &s_2^+ \tilde{r}_0^+ = -1, \quad s_2^+ \tilde{r}_1^+ + s_3^+ \overset{-}{r}_0^+ = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &s_2^+ \tilde{r}_{k-2}^+ + \cdots + s_k^+ \overset{-}{r}_0^+ = 0, \end{aligned} \tag{4.26}$$

из которых, в частности, вытекает, что

$$m_+ = (s_2^+)^{-1},\ 1 + r_1^+ = s_3^+ (s_2^+)^{-2},\ r_2^+ = (s_2^+ s_4^+ - (s_3^+)^2)(s_2^+)^{-3}. \tag{4.27}$$

Доказательство. Импликации а) вытекают непосредственно из (4.6), (4.13) и (4.19).

Пусть выполняются условия а) и $s_k^+ < \infty$ при некотором $k \geqslant 2$. Имеем в силу леммы 4.4 и равенств (4.24)

$$w_+(z) = (1 - s_1^+) - s_2^+ z - \cdots - s_k^+ z^{k-1} + \hat{o}(z^{k-1}) = \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{s}_{j+1} z^j + \hat{o}(z^{k-1}), \tag{4.28}$$

причем $\overset{-}{s}_1^+ = w_+(0) > 0$. Поэтому

$$w_+^{-1}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + \hat{o}(z^{k-1}), \tag{4.29}$$

откуда $r_k^+ (= a_{k-1}) < \infty$. Заметим, что

$$a_0 = 1 + \int_0^\infty \frac{d\rho_+(t)}{t} = 1 + r_1^+ = \tilde{r}_1^+ = w_+(0)^{-1} = (\overset{-}{s}_1^+)^{-1},$$

$$a_j = r_{j+1}^+ = \overset{-}{r}_{j+1}^+ = \int_0^\infty \frac{d\rho_+(t)}{t^{j+1}} \quad (j = 1, 2, \cdots, k-1).$$

Аналогично доказывается, что $\{r_k^+ < \infty\} \Rightarrow \{s_k^+ < \infty\}$.

Равенства (4.25) выражают соотношения между коэффициентами разложений (4.28) и (4.29).

Все импликации б), кроме последней, отмечались выше (см. (4.15+)), последняя же тривиальна.

Пусть выполняются условия б). Тогда

$$-\frac{w_+(z)}{z}=\int_0^\infty \frac{d\sigma_+(t)}{t(t-z)}.$$

Если $s_k^+<\infty$ при некотором $k\geqslant 3$, то в силу леммы 4.4

$$-\frac{w_+(z)}{z}=s_2^+ + s_3^+ z+\cdots+s_k^+ z^{k-2}+\hat{o}(z^{k-2}), \tag{4.30}$$

причем $s_2^+=\lim\limits_{z\to 0}(-w_+(z)/z)=m_+^{-1}>0$. Тогда

$$-\frac{z}{w_+(z)}=m_+ + b_1 z+\cdots+b_{k-2}z^{k-2}+\hat{o}(z^{k-2}), \tag{4.31}$$

или же

$$w_+^{-1}(z)=-m_+/z-b_1-\cdots-b_{k-2}z^{k-3}+\hat{o}(z^{k-3}).$$

Сравнивая с (4.14), получим

$$-b_1=1+r_1^+=\tilde{r}_1^+,\quad -b_j=r_j^+=\tilde{r}_j^+\quad (j=2,\cdots,k-2) \tag{4.32}$$

и, в частности, $r_{k-2}^+<\infty$. Обратная импликация $[r_{k-2}^+<\infty]\Rightarrow[s_k^+<\infty]$ $(k\geqslant 3)$ доказывается аналогично.

Из (4.31), (4.32) получаем

$$-\frac{z}{w_+(z)}=-\sum_{j=0}^{k-2}\tilde{r}_j^+ z^j+\hat{o}(z^{k-2}). \tag{4.33}$$

Равенства (4.26) выражают соотношения между коэффициентами разложений (4.30) и (4.33).

Утверждения, аналогичные лемме 4.4 и теореме 4.5, можно доказать для меры на полуоси $\mathbf{R}_-$ и соответственно для функции $w_-\in(W_-^-)$ и соответствующих моментов

$$s_k^-=\int_{-\infty}^{0}\frac{d\sigma_-(t)}{|t|^k},\quad r_k^-=\int_{-\infty}^{0-}\frac{d\rho_-(t)}{|t|^k}.$$

Точную формулировку этих утверждений предоставляем читателю.

§ 5. Факторизация функций $w\in(W)$ с $w(0)>0$

1. Имея в виду связь с известной факторизацией преобразования Фурье ядер интегральных операторов Винера—Хопфа (см. гл. II), введем следующее

Определение. Факторизацией функции $w\in(W)$, $w(0)\geqslant 0$ будем называть представление ее в виде

$$w(z)=w_+(z)\,w_-(z)\quad(\operatorname{Im} z\neq 0), \tag{5.1}$$

где $w_+(w_-)$ — голоморфная в $\operatorname{Ext}\mathbf{R}_+$ (в $\operatorname{Ext}\mathbf{R}_-$) функция, имеющая конечный предел $w_+(\infty)$ $(w_-(\infty))$, если $z\to\infty$, оставаясь в левой (в правой) полуплоскости.

Поскольку $w(\infty) = 1$, функции $w_\pm$ можно нормировать условиями $w_\pm(\infty) = 1$.

Факторизацию (5.1) будем называть правильной, если по крайней мере один из множителей $w_\pm$ отличен от нуля в своей полуплоскости, и канонической — если каждый из них отличен от нуля там. Если $w \in (W)$ допускает каноническую факторизацию, то последняя является ее единственной правильной факторизацией.

Очевидно, $\overline{w(\bar{z})} = w(z)$. Поэтому наряду с факторизацией (5.1) функция w допускает также и такую

$$w(z) = \overline{w_+(\bar{z})}\,\overline{w_-(\bar{z})}. \tag{5.2}$$

Если (5.1) — каноническая факторизация, то таковой же является и (5.2). В силу единственности $\overline{w_\pm(\bar{z})} = w_\pm(z)$ и, следовательно, $w_+(z)$ и $w_-(z)$ вещественны в вещественных точках голоморфности, в частности, на $\mathbf{R}_-$ и $\mathbf{R}_+$ соответственно. Учитывая отсутствие нулей $w_\pm(z)$ в соответствующих полуплоскостях и условие нормировки $w_\pm(\infty) = 1$, получаем, что $w_\pm(x) > 0$ при $x \in \mathbf{R}_\mp$.

Теорема 5.1. *Если $w \in (W)$, $w(0) > 0$, то w допускает каноническую факторизацию* (5.1) *с множителями $w_\pm \in (W^\pm)$. Обратно, если $w_\pm \in (W^\pm)$, то функция $w := w_+ w_-$ принадлежит (W) и $w(0) \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $w \in (W)$, $w(0) \geqslant 0$, а (4.1) — экспоненциальное представление функции w. Положим

$$w_\pm(z) := \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)\chi_\pm(s)}{s - z}\,ds\right). \tag{5.3}$$

Функции $F(s)\chi_\pm(s)$ удовлетворяют вместе с $F(s)$ условиям (4.2), (4.3), так что $w_\pm \in (W^\pm)$. Равенство (5.1) очевидно.

Обратно, пусть

$$w_\pm(z) = \exp\left(-\int_{\mathbf{R}_\pm} \frac{F_\pm(s)\,ds}{s - z}\right)$$

— произвольные функции из $(W^\pm)$. Здесь $0 \leqslant \pm F_\pm(s) < 1$ $(s \in \mathbf{R}_\pm)$ и

$$\int_0^\infty \frac{F_+(s)}{s}\,ds < \infty, \qquad \int_{-\infty}^0 \frac{F_-(s)}{s}\,ds < \infty.$$

Полагая $w := w_+ w_-$, будем иметь

$$w(z) = \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)\,ds}{s - z}\right),$$

где $F(s) := F_\pm(s)$ при $s \in \mathbf{R}_\pm$. Легко видеть, что $F(s)$ удовлетворяет условиям (4.2), (4.3) и, стало быть, $w \in (W)$. Из того, что $w_\pm(0) > 0$, следует $w(0) \geqslant 0$. Теорема доказана.

2. Пусть $w \in (\hat{W})$, $w = w_+ w_-$ — каноническая факторизация. Если $w(0) > 0$, то; разумеется, $w_\pm(0) > 0$.

Ниже (п. 3) эти числа вычисляются непосредственно через w (формулы (5.7а, б).

Если $w(0) = 0$, то по крайней мере, одно из чисел $w_\pm(0)$ равно нулю. В связи с этим представляет интерес утверждение, дающее критерий того, что $w_+(0) \overset{1}{=} 0$ и $w_-(0) \overset{1}{=} 0$ одновременно.

Теорема 5.2. *Для того чтобы* $w \in (\hat{W})$ *необходимо и достаточно, чтобы* $w_+(0) \overset{1}{=} 0$, $w_-(0) \overset{1}{=} 0$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{w(z)}{-z^2} = \frac{w_+(z)}{-z} \cdot \frac{w_-(z)}{z}. \tag{5.4}$$

Сомножители в правой части имеют положительные пределы l_+ и l_- соответственно, возможно бесконечные, если $\hat{\lim} z = 0$. Поэтому конечность предела в левой части равносильна конечности чисел l_+ и l_-.

Теорема доказана.

Заметим, что из теоремы 2.3 и из (5.4) вытекает

$$s_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t^2} = l_+ l_-. \tag{5.5}$$

В п. 4 будут установлены явные формулы для $l_\pm$ (формулы (5.10а, б)).

3. Используя равенства (4.10±) нетрудно получить формулы для множителей $w_\pm(z)$ канонической факторизации (5.1), отличные от (5.3), справедливые однако не во всей области определения, а лишь в соответствующих полуплоскостях — левой и правой:

$$\ln w_\pm(z) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln w(it)}{it - z} dt \quad (\operatorname{Re} z \lessgtr 0;\ \ln 1 = 0). \tag{5.6}$$

Пусть, в частности, $w(0) > 0$ и, следовательно, $w_\pm(0) > 0$. Выразим эти числа через w.

Применяя к (5.6) формулы Племеля—Сохоцкого, получим

$$\ln w_\pm(0) = \frac{1}{2} \ln w(0) \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln w(ig)}{y} dy, \tag{5.7а}$$

где последний интеграл понимается в смысле главного значения. Учитывая, что $w(-ig) = \overline{w(ig)}$, будем иметь

$$\ln w_\pm(0) = \frac{1}{2} \ln w(0) \pm \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\arg w(iy)}{y} dy. \tag{5.7б}$$

4. Пусть $w \in (\widehat{W})_1^1$, $w = w_+ w_-$ — каноническая факторизация, так что $w_+(0) = 0$, $w_-(0) = 0$ по теореме 5.2. Выразим числа $l_\pm = l_\pm(w_\pm)$ через функцию w.

Имеем

$$\ln(\mp z) = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|t|\,dt}{it - z} \quad (\operatorname{Re} z \leqslant 0), \tag{5.8}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, $\ln 1 = 0$. Положим $q_\pm(z) := w_\pm(z)/(\mp z)$. Тогда $l_\pm(w_\pm) = q_\pm(\mp 0)$. В силу (5.6)

$$\ln q_\pm(z) = \pm \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln w(it)}{it - z}\,dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|t|}{it - z}\,dt\right) = \tag{5.9}$$

$$= \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(w(it)/t^2)}{it - z}\,dt.$$

На основании теоремы 2.3

$$\lim_{t\to 0} (w(it)/t^2) = \lim_{z\to 0} (-w(z)/z^2) = s_3,$$

так что функция $\ln(w(it)/t^2)$ может быть доопределена по непрерывности при $t = 0$, если приписать ей в этой точке значение $\ln s_3$. Применив формулы Племеля—Сохоцкого к (5.9), получим

$$\ln l_\pm = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(w(it)/t^2)}{t}\,dt + \frac{1}{2}\ln s_3, \tag{5.10a}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Последнюю формулу с учетом равенства $w(-iy) = \overline{w(iy)}$ можно привести к виду

$$\ln l_\pm = \frac{1}{2}\ln s_3 \pm \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\arg w(it)}{t}\,dt. \tag{5.10б}$$

5. Найдем каноническую факторизацию $w_1 = w_{1+} w_{1-}$ функции $w_1(z) := w(-z)$. Имеем с учетом § 4, п. 2

$$w_{1+}(z) = \exp\left(\int_0^{\infty} \frac{F(-s)\,ds}{s - z}\right) = \exp\left(-\int_{-\infty}^{0} \frac{F(s)\,ds}{s + z}\right) = w_-(-z),$$

и аналогично $w_{1-}(z) = w_+(-z)$.

Отсюда вытекает предложение:

Если $w \in (W)$ — четная функция с $w(0) \geqslant 0$, то множители ее канонической факторизации связаны соотношением $w_+(z) = w_-(-z)$.

Отсюда, в частности, следует, что $w_+(0) = w_-(0) = \sqrt{w(0)}$.

Если $w \in (\widehat{W})$, w — четная функция, то $l_+(w_+) = l_-(w_-) = \sqrt{s_3}$.

6. Пусть $w = w_\sigma \in (W)$, $w(0) > 0$, а множители $w_\pm$ факторизации (5.1) имеют представления (4.6). Применив к (5.1) обобщенную формулу обращения Стильтьеса [7], получим соотношения между мерами σ и $\sigma_\pm$:

$$\begin{aligned} -d\sigma(t) &= w_+(t)\, d\sigma_-(t) \quad (t<0), \\ d\sigma(t) &= w_-(t)\, d\sigma_+(t) \quad (t>0). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Подставив найденные отсюда выражения для $d\sigma_\pm(t)$ в (4.6) получим

$$w_+(z) = 1 - \int_0^\infty \frac{w_-^{-1}(t)\, d\sigma(t)}{t-z}, \quad w_-(z) = 1 - \int_{-\infty}^0 \frac{w_+^{-1}(t)\, d\sigma(t)}{t-z}. \tag{5.12}$$

В § 7 (гл. II) будут получены более общие представления. Аналогично, применив обобщенную формулу обращения Стильтьеса к равенству $w^{-1} = w_+^{-1}\, w_-^{-1}$, где w^{-1}, $w_\pm^{-1}$ имеют представления (3.2), (4.11) и (4.20) соответственно, будем иметь

$$\frac{\widehat{d\tau}(t)}{t} = \begin{cases} w_-^{-1}(t)\, d\rho_+(t) & (t>0), \\ -w_+^{-1}(t)\, d\rho_-(t) & (t<0). \end{cases}$$

Кроме того, сравнив главные части при $z \to 0$ в представлениях (3.4), (4.14) и (4.20), получим $\Delta = m_+ m_-$, что, впрочем, равносильно равенству (5.5).

Пусть, в частности, $w(0) > 0$; взяв тогда представление (3.3) функции w^{-1} вместо (3.2), получим

$$d\rho(t) = \begin{cases} w_-^{-1}(t)\, d\rho_+(t) & (t>0), \\ -w_+^{-1}(t)\, d\rho_-(t) & (t<0). \end{cases} \tag{5.13}$$

Отсюда следуют равенства

$$w_+^{-1}(z) = 1 + \int_0^\infty \frac{w_-(t)\, d\rho(t)}{t-z}, \quad w_-^{-1}(z) = 1 + \int_{-\infty}^0 \frac{w_+(t)\, d\rho(t)}{t-z}, \tag{5.14}$$

которые также будут обобщены в § 7 гл. II.

7. Пусть $w = w_\sigma \in (W)$ и $w(0) = 0$, так что

$$u(z) := -w(z)/z = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\sigma(t)}{t(t-z)} \in (R_0).$$

Нас будет интересовать тот случай, когда, кроме того, абсолютно сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{d\sigma(t)}{t^2} := s_2. \tag{5.15}$$

Это условие равносильно существованию конечного предела $\lim\limits_{z\to 0}\widehat{(-w(z)/z)}\,(= s_2)$.

Теорема 5.3. *Пусть $w = w_+ w_-$ — каноническая факторизация функции $w \in (W)$, для которой $w(0) = 0$, и интеграл* (5.15) *абсолютно сходится. Тогда*

1) $$\{w_-(0) > 0\} \leftrightarrow \{s_2 > 0\} \to \{w_+(0) \overset{1}{=} 0\},$$

2) $$\{w_+(0) > 0\} \leftrightarrow \{s_2 < 0\} \to \{w_-(0) \overset{1}{=} 0\},$$

и, следовательно, имеет место также импликация

3) $$\{s_2 = 0\} \leftrightarrow \{w_+(0) = w_-(0) = 0\}.$$

Доказательство. Покажем, что $\{w_-(0) > 0\} \to \{s_2 > 0, w_+(0) = 0\}$. Имеем $w_+(z)/z = w(z)/zw_-(z)$. Если $w_-(0) > 0$, то $l_+(w_+) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{w_+(z)}{-z} = \dfrac{s_2}{w_-(0)} < \infty$, откуда $w_+(0) \overset{1}{=} 0$,

$$s_2 = l_+(w_+)\, w_-(0) > 0. \tag{5.16+}$$

Аналогично доказывается импликация $\{w_+(0) > 0\} \to$

$\{s_2 < 0, w_-(0) \overset{1}{=} 0\}$ и равенство

$$(0 >)\ s_2 = -l_-(w_-)\, w_+(0). \tag{5.16-}$$

Докажем, что $\{s_2 > 0\} \to \{w_-(0) > 0\}$. Пусть $a > 0$. Согласно (5.6) будем иметь при $\operatorname{Re} z > 0$:

$$\ln w_-(z) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|>a} \frac{\ln w(it)}{it - z}\, dt - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\ln \left(\dfrac{w(it)}{-it} \right)}{it - z}\, dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\ln(-it)}{it - z}\, dt.$$

Преобразуем последний интеграл, использовав (5.8):

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\ln(-it)}{it - z}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\ln|t| - \dfrac{\pi i}{2} \operatorname{sign} t}{it - z}\, dt = -\frac{1}{2} \ln z -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|>a} \frac{\ln|t|\, dt}{it - z} - \frac{i}{4} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\operatorname{sign} t}{it - z}\, dt = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|>a} \frac{\ln|t|}{it - z}\, dt - \frac{1}{4} \ln(z^2 + a^2).$$

Поэтому

$$\ln w_-(z) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|>a} \frac{\ln \left(\dfrac{w(it)}{|t|} \right)}{it - z}\, dt - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\ln \left(\dfrac{w(it)}{-it} \right)}{it - z}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{4} \ln(z^2 + a^2).$$

Так как

$$\lim_{t\to 0}\frac{w(it)}{-it}=\lim_{z\to 0}\frac{w(z)}{-z}=s_2>0,$$

то функция $\ln\left(\frac{w(it)}{-it}\right)$ может быть доопределена по непрерывности, при $t=0$, если приписать ей в этой точке значение $\ln s_2$. Применив формулу Племеля—Сохоцкого, получим

$$\ln w_-(0)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|>a}\frac{\ln\left(\frac{w(it)}{|t|}\right)}{t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\ln\left(\frac{w(it)}{-it}\right)}{t}\,dt+$$

$$+\frac{\ln s_2}{2}+\frac{\ln a}{2} \qquad (5.17)$$

и, следовательно, $w_-(0)>0$.

Аналогично доказывается импликация $\{s_2<0\}\to\{w_+(0)>0\}$. Теорема доказана.

Дополним формулы, полученные при доказательстве теоремы 5.3, еще некоторыми, возможно, представляющими известный интерес. Из (5.17) вытекает, что

$$w_-(0)=\sqrt{s_2\,T_+}, \qquad (5.18а)$$

где

$$\ln T_+=\ln a-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|>a}\frac{\ln\left(\frac{w(it)}{|t|}\right)}{t}\,dt-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\ln\left(\frac{w(it)}{-it}\right)}{t}\,dt.$$

Использовав условие $w(-it)=\overline{w(it)}$, получим

$$\ln T_+=\ln a-\frac{2}{\pi}\int\limits_{a}^{\infty}\frac{\arg w(it)}{t}\,dt-\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{a}\frac{\arg w(it)+\frac{\pi}{2}}{t}\,dt.$$

Очевидно, правая часть последнего равенства не зависит от выбора $a>0$.

Отметим формулу, легко следующую из (5.16+):

$$l_+(w_+)=\sqrt{s_2/T_+}. \qquad (5.18б)$$

Аналогично

$$w_+(0)=\sqrt{|s_2|\,T_-},\quad l_-(w_-)=\sqrt{|s_2|/T_-}, \qquad (5.19)$$

где

$$\ln T_-=\ln a+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|>a}\frac{\ln\left(\frac{w(it)}{|t|}\right)}{t}\,dt+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\ln\left(\frac{w(it)}{it}\right)}{t}\,dt=$$

$$= \ln a + \frac{2}{\pi}\int_a^\infty \frac{\arg w(it)}{t}\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\arg w(it) - \frac{\pi}{2}}{t}\,dt.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Интересно отметить, что каждое из условий $\{w_+(0) = 0\}$, $\{w_-(0) = 0\}$ влечет абсолютную сходимость интеграла (5.15) (см. ниже следствие теоремы 5.5).

Замечание 2. Если $w \in (\widehat{W})$, то выполняются условия (2.3). Первое и третье из этих условий обеспечивают абсолютную сходимость интеграла (5.15), а второе означает, что $s_2 = 0$. Таким образом, для $w \in (\widehat{W})$ имеет место ситуация 3) теоремы 5.3, а теорема 5.2 является ее уточнением в этой ситуации.

Замечание 3. Импликации $\{s_2 \gtrless 0\} \to \{w_\mp(0) > 0\}$ можно вывести из упоминавшейся в § 1 теоремы Ароншайна—Донохью [10], если произвести замену z на $-z^{-1}$.

8. При каждом $p \geqslant 1$ положим (ср. (4.22)):

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t^p} := s_{p+}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{|d\sigma(t)|}{|t|^p} := s_{p-}, \tag{5.20}$$

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma_+(t)}{t^p} = s_p^+, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{d\sigma_-(t)}{|t|^p} = s_p^-.$$

Величины $s_{p\pm}$, $s_p^\pm$ принимают неотрицательные, возможно, бесконечные значения. В силу (4.7) $s_1^\pm \leqslant 1$. Из (4.8) вытекает, что

$$w_\mp(0)\, s_p^\pm \leqslant s_{p\pm} \leqslant s_p^\pm. \tag{5.21}$$

Отсюда следует

Лемма 5.4 *Если* $w_+(0) > 0 (w_-(0) > 0)$, *то* s_{p-} *и* s_p^- (s_{p+} *и* s_p^+) *конечны лишь одновременно.*

Теорема 5.5. *При каждом* $p \geqslant 2$:

$$\{s_{p+} < \infty\} \to \{s_{p-1}^+ < \infty\}, \quad \{s_{p-} < \infty\} \to \{s_{p-1}^- < \infty\}. \tag{5.22}$$

Если, кроме того, $w_-(0) = 0$ ($w_+(0) = 0$), *то* s_{p+} *и* s_{p-1}^+ (s_{p-} *и* s_{p-1}^-) *конечны лишь одновременно.*

Доказательство. Из установленных в § 4 п. 2 свойств функций $w_\pm \in (W)$ вытекает, что $w_-(t)/t \geqslant c(\delta) > 0$ на каждом интервале $]0, \delta[\subset \mathbf{R}_+$. В силу (5.11)

$$\int_0^\delta \frac{d\sigma(t)}{t^p} = \int_0^\delta \frac{w_-(t)}{t} \cdot \frac{d\sigma_+(t)}{t^{p-1}} \geqslant c(\delta) \int_0^\delta \frac{d\sigma_+(t)}{t^{p-1}}.$$

Поскольку сходимость интегралов (5.20) определяется поведением соответствующих мер в окрестности нуля, справедлива первая из импликаций (5.22). Вторая доказывается аналогично.

Пусть $w_-(0) \overset{1}{=} 0$, т. е. $(s_2^- =) l_-(w_-) = \lim\limits_{t\to 0+}(w_-(t)/t) < \infty$. Тогда $s_2^- \geqslant w_-(t)/t$ $(t > 0)$ и, стало быть

$$s_{p+} = \int_0^\infty \frac{w_-(t)}{t} \cdot \frac{d\sigma_+(t)}{t^{p-1}} \leqslant s_2^- s_{p-1}^+. \tag{5.23+}$$

В силу (5.22) s_{p+} и s_{p-1}^+ конечны лишь одновременно. Аналогично доказывается, что при $w_+(0) \overset{1}{=} 0$:

$$s_{p-} \leqslant s_2^+ s_{p-1}^-, \tag{5.23−}$$

а s_{p-}, s_{p-1}^- конечны лишь одновременно.

Следствие. *Если* $w_-(0) \overset{1}{=} 0$ *или* $w_+(0) \overset{1}{=} 0$, *то* $s_{2\pm}$ *конечны и, стало быть, интеграл* (5.15) *абсолютно сходится.*

Пусть для определенности $w_-(0) \overset{1}{=} 0$, т. е. $l_- < \infty$. Из леммы 4.3 и из (5.21) следует $s_{2-} \leqslant s_2^- = l_- < \infty$. С другой стороны, учитывая, что $s_1^+ \leqslant 1$, будем иметь из (5.23+) при $p = 2$: $s_{2+} \leqslant l_- < \infty$.

Аналогично доказывается, что равенство $w_+(0) \overset{1}{=} 0$ влечет соотношения $s_{2\pm} \leqslant l_+ < \infty$.

9. Нам осталось мало добавить, чтобы получить итоговое предложение о связи между конечностью моментов $s_{k\pm}$, $s_k^\pm$ и $r_k^\pm$.

Теорема 5.6. *Пусть* $w \in (W)$.

а) $\{w(0) > 0\} \iff \{s_{1+} + s_{1-} < 1\} \iff \{s_1^+ < 1,\ s_1^- < 1\}$

$\iff \{r_1^+ < \infty,\ r_1^- < \infty,\ m_+ = m_- = 0\}$.

При этом

$$\{s_{k+} < \infty\} \iff \{s_k^+ < \infty\} \iff \{r_k^+ < \infty\} \quad (k \geqslant 2),$$

$$\{s_{k-} < \infty\} \iff \{s_k^- < \infty\} \iff \{r_k^- < \infty\} \quad (k \geqslant 2);$$

б+) *в ситуации* 1) *теоремы* 5.3 (*т. е. при* $s_{2-} < s_{2+} < \infty$):

$$m_+ > 0,\ s_1^+ = 1,\ s_2^+ < \infty;\ m_- = 0,\ s_1^- < 1,\ r_1^- < \infty,$$

и имеют место импликации

$$\{s_{k+} < \infty\} \iff \{s_k^+ < \infty\} \iff \{r_{k-2}^+ < \infty\} \quad (k \geqslant 3),$$

$$\{s_{l-} < \infty\} \iff \{s_{l-1}^- < \infty\} \iff \{r_{l-1}^- < \infty\} \quad (l > 3);$$

б−) *в ситуации* 2) *теоремы* 5.3 (*т. е. при* $s_{2+} < s_{2-} < \infty$):

$$m_+ = 0,\ s_1^+ < 1,\ r_1^+ < \infty;\ m_- > 0,\ s_1^- = 1,\ s_2^- < \infty,$$

и имеют место импликации

$$\{s_{k+}<\infty\} \leftrightarrow \{s^+_{k-1}<\infty\} \leftrightarrow \{r^+_{k-1}<\infty\} \quad (k\geqslant 3),$$

$$\{s_{l-}<\infty\} \leftrightarrow \{s^-_{l}<\infty\} \leftrightarrow \{r^-_{l-2}<\infty\} \quad (l>3);$$

в) *при выполнении условий теоремы* 5.2 (*т. е. при* $s_{1+}=s_{2-}<\infty$, $s_{3+}<\infty$, $s_{3-}<\infty$):

$$m_\pm>0,\ s^\pm_1=1,\ s^\pm_2<\infty,$$

и имеют место импликации

$$\{s_{k+}<\infty\} \leftrightarrow \{s^+_{k-1}<\infty\} \leftrightarrow \{r^+_{k-3}<\infty\} \quad (k\geqslant 4),$$

$$\{s_{k-}<\infty\} \leftrightarrow \{s^-_{k-1}<\infty\} \leftrightarrow \{r^-_{k-3}<\infty\} \quad (k\geqslant 4).$$

Доказательство. Утверждения а) следуют из теоремы 4.5а) и леммы 5.4, если учесть, что $\{w(0)>0\} \leftrightarrow \{w_\pm(0)>0\}$.

Утверждения б+) и б—) вытекают из теоремы 5.3 с учетом леммы 5.4 и теорем 4.5 и 5.5.

Утверждение в) следует из теорем 4.5б) и 5.5.

6. Факторизация функции $w\in(\mathcal{W})$ со свойством $w(0)<0$

1. Если функция $w\in(\mathcal{W})$ и $w(0)<0$, то по теореме 2.4 она имеет так называемый исключительный нуль z_e ($\operatorname{Im} z_e\geqslant 0$), а функция $w_*(z):=z^2w(z)/(z-z_e)(z-\bar z_e)$ принадлежит классу $(\widehat{\mathcal{W}})$ (см. § 2, п. 3). Согласно § 5: $w_*(z)=w_{*+}(z)\,w_{*-}(z)$, где функции $w_{*\pm}$ имеют представления вида (4.6):

$$w_{*\pm}(z)=1\mp\int_{\mathbf{R}_\pm}\frac{d\sigma_{*\pm}(t)}{t-z}, \tag{6.1}$$

где $\sigma_{*\pm}(t)$ — неубывающие функции.

По теореме 5.2 $w_{*\pm}(0)=1$, причем

$$\frac{w_{*\pm}(z)}{\mp z}=\int_{\mathbf{R}_\pm}\frac{d\sigma_{*\pm}(t)}{t(t-z)}. \tag{6.2}$$

Далее, согласно (4.11) и (4.19)

$$w^{-1}_{*+}(z)=1+\int_0^\infty\frac{d\rho_{*+}(t)}{t-z},\quad w^{-1}_{*-}(z)=1-\int_{-\infty}^0\frac{d\rho_{*-}(t)}{t-z}, \tag{6.3}$$

где $\rho_{*\pm}$ — меры на $\mathbf{R}_\pm$, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^\infty\frac{d\rho_{*+}(t)}{1+t}<\infty,\quad \int_{-\infty}^0\frac{d\rho_{*-}(t)}{1\cdot|t|}<\infty \tag{6.4}$$

и имеющие в точке 0 некоторые скачки $m_\pm>0$.

Полученная факторизация для w_* порождает факторизации для w, причем мы будем рассматривать только две их разновидности. Одна из них получается, если положить

$$w_+(z)=\frac{(z-z_e)(z-\bar z_e)}{z}\,w_{*+}(z),\quad w_-(z)=\frac{w_{*-}(z)}{z}, \tag{6.5а}$$

другая — если положить

$$w_+(z)=\frac{w_{*+}(z)}{z},\quad w_-(z)=\frac{(z-z_e)\,(z-\bar z_e)}{z}\,w_{*-}(z). \tag{6.5б}$$

Эти факторизации будем называть соответственно правой и левой.

Для нас существенно, чтобы множители $w_\pm$ были отличны от нуля в своих областях голоморфности. Поэтому при $\operatorname{Im} z_e>0$ могут использоваться обе факторизации. Если же $z_e\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, то при $z_e>0$ применяется правая факторизация, при $z_e<0$ — левая.

Для определенности рассмотрим правую факторизацию, т. е. множители $w_\pm$ будем определять равенствами (6.5а). Применив первое из равенств (6.3), а также легко проверяемое тождество

$$\frac{z}{(z-z_e)(z-\bar z_e)(t-z)}=\frac{z}{|t-z_e|^2(t-z)}+\frac{tz-|z_e|^2}{|t-z|^2(z-z_e)(z-\bar z_e)},$$

получим

$$w_+^{-1}(z)=\frac{z}{(z-z_e)(z-\bar z_e)}\,w_{*+}^{-1}(z)=\frac{z}{(z-z_e)(z-\bar z_e)}\left(1+\int_0^\infty\frac{t\,d\rho_{*+}(t)}{|t-z_e|^2}\right)-$$

$$-\frac{|z_e|^2}{(z-z_e)(z-\bar z_e)}\int_0^\infty\frac{d\rho_{*+}(t)}{|t-z_e|^2(t-z)}+\int_0^\infty\frac{t\,d\rho_{*+}(t)}{|t-z_e|^2(t-z)},$$

или же

$$w_+^{-1}(z)=\frac{az+b}{(z-z_e)(z-\bar z_e)}+\int_0^\infty\frac{t\,d\rho_{*+}(t)}{|t-z_e|^2(t-z)}, \tag{6.6}$$

где

$$a=1+\int_0^\infty\frac{t\,d\rho_{*+}(t)}{|t-z_e|^2},\quad b\in\mathbf{R}.$$

Заметим, что в интеграле в (6.6) и в формуле для a в качестве нижнего предела можно взять $+0$.

2. Для случая $\operatorname{Im} z_e>0$ получим из (6.6).

$$w_+^{-1}(z)=\frac{\beta_+}{z-z_e}+\frac{\bar\beta_+}{z-\bar z_e}+\int_0^\infty\frac{d\mu_+(t)}{t-z}, \tag{6.7}$$

где $\beta_+=[w_+'(z_e)]^{-1}$ — вычет $w_+^{-1}(z)$ в точке $z=z_e$, μ_+ — мера на $\mathbf{R}_+$ $d\mu_+(t)=t(t-z_e)^{-2}d\rho_{*+}(t)$. Мера μ_+ непрерывна в нуле и конечна в силу условия (6.4). Рассматривая поведение $w_+^{-1}(z)$ при $z\to\infty$, получим из (6.6) и (6.7), что $\beta_++\bar\beta_+=a$.

Заметим, что из равенств (6.1), (6.5а) на основании леммы 1.3 можно установить, что

$$\beta_+ = \left(1 - \int_0^\infty \frac{t - \bar{z}_e}{t(t - z_e)}\, d\sigma_{*+}(t)\right)^{-1}.$$

Аналогично, при левой факторизации, когда w_- определяется формулой (6.56), получаем

$$w_-^{-1}(z) = \frac{\beta_-}{z - z_e} + \frac{\bar{\beta}_-}{z - \bar{z}_e} - \int_{-\infty}^0 \frac{d\mu_-(t)}{t - z},$$

где

$$\beta_- = [w_-'(z_e)]^{-1} = \left(1 + \int_{-\infty}^0 \frac{t - \bar{z}_e}{t(t - z_e)}\, d\sigma_{*-}(t)\right)^{-1},$$

μ_- — непрерывная в нуле ограниченная мера на $\mathbf{R}_-$,

$$d\mu_-(t) = |t(t - z)^{-2}|\, d\rho_{*-}(t).$$

Здесь $w_-(z)$ определяется формулой (6.56).

3. Перейдем теперь к случаю $z_e = \bar{z}_e \neq 0$. Для определенности будем считать, что $z_e > 0$. Используя $w_+(z)$ из правой факторизации (см. (6.5а)), будем иметь

$$w_+^{-1}(z) = \frac{z}{(z - z_e)^2}\left(1 + \int_0^\infty \frac{d\rho_{*+}(z)}{t - z}\right).$$

Пусть $\Delta := \rho_{*+}(\{z_e\})$ (> 0), тогда

$$\hat{\rho}_+(t) := \rho_{*+}(t) - \Delta \cdot \chi_+(t - z_e)$$

— непрерывная в точке z_e неотрицательная мера. Имеем

$$w_+^{-1}(z) = \frac{z}{(z - z_e)^2}\left(1 - \frac{\Delta}{z - z_e} + \int_0^\infty \frac{d\hat{\rho}_+(t)}{t - z}\right). \tag{6.8}$$

Использовав тождество

$$\frac{z}{t - z} = \frac{z_e}{t - z_e} + (z - z_e)\frac{t}{(t - z_e)^2} + (z - z_e)^2 \frac{t}{(t - z_e)^2(t - z)},$$

получим

$$z\left(1 + \int_0^\infty \frac{d\rho_{*+}(t)}{t - z}\right) = z + \int_0^\infty \left(\frac{z_e}{t - z_e} + (z - z_e)\frac{t}{(t - z_e)^2} + (z - z_e)^2 \frac{t}{(t - z_e)^2(t - z)}\right) d\rho_{*+}(t),$$

откуда

$$w_+^{-1}(z) = \frac{z}{(z - z_e)^2} + \int_0^\infty \left(\frac{z_e}{(z - z_e)^2} \cdot \frac{1}{t - z} + \frac{1}{z - z_e} \cdot \frac{t}{(t - z_e)^2} + \frac{t}{(t - z_e)^2(t - z)}\right) d\rho_{*+}(t).$$

Аналогично, из (6.8) нетрудно получить

$$w_+^{-1}(z)=\frac{z}{(z-z_e)^2}-\frac{\Delta\cdot z}{(z-z_e)^3}+\int_0^\infty\left[\frac{z_e}{(z-z_e)^2(t-z_e)}+\right.$$

$$\left.+\frac{t}{(z-z_e)(t-z_e)^2}+\frac{t}{(t-z_e)^2(t-z)}\right]d\hat{\rho}_+(t). \qquad (6.9)$$

Последняя формула для $w_+^{-1}(z)$ может быть детализована, если ρ_{*+} имеет ω-правильное поведение в точке z_e, то есть (см. § 1, п. 3)

$$\int_0^\infty\frac{d\hat{\rho}_+(t)}{(t-z_e)^2}<\infty.$$

При выполнении этого условия

$$w_+^{-1}(z)=\frac{1}{z-z_e}+\frac{z_e}{(z-z_e)^2}-\frac{\Delta z_e}{(z-z_e)^3}-\frac{\Delta}{(z-z_e)^2}+$$

$$+\frac{z_e}{(z-z_e)^2}\int_0^\infty\frac{d\hat{\rho}_+(t)}{t-z_e}+\frac{1}{z-z_e}\int_0^\infty\frac{td\hat{\rho}_+(t)}{(t-z_e)^2}+\int_0^\infty\frac{td\hat{\rho}_+(t)}{(t-z_e)^2(t-z)},$$

или же

$$w_+^{-1}(z)=-\frac{a_2}{(z-z_e)^3}+\frac{a_1}{(z-z_e)^2}+\frac{a_0}{z-z_e}+\int_0^\infty\frac{d\nu_+(t)}{t-z}, \qquad (6.10)$$

где

$$\nu_+(t)=\int_0^t\frac{ud\hat{\rho}_+(u)}{(u-z_e)^2}$$

— конечная мера на $\mathbf{R}_+$, непрерывная в точках 0 и z_e,

$$a_0=1+\nu_+(\mathbf{R}_+)\,(\geqslant 1),\quad a_1=-\Delta+z_e\left(1+\int_0^\infty\frac{d\hat{\rho}_+(t)}{t-z_e}\right),$$

$$a_2=\Delta\cdot z_e\,(\geqslant 0). \qquad (6.11)$$

Заметим, что интеграл в (6.10) есть $\hat{o}(1/(z-z_e))$ при $z\to z_e$.

Таким образом, $w_+^{-1}(z)$ имеет в точке z_e полюс не выше третьего порядка, что соответствует результатам § 3.

Нижеследующая теорема дает характеристику случая, когда $w_+^{-1}(z)$ имеет в точке z_e полюс первого порядка.

Теорема 6.1. *Пусть $z_e\,(>0)$ — исключительный нуль функции $w\in(W)$, $w(0)<0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *z_e — нуль первого порядка функции w;*

2) *z_e — квазиправильная точка R-функции w_{*+}^{-1}, и $w_{*+}^{-1}(z_e)=0$*

3) *w_+^{-1} допускает представление* (6.10), *в котором $a_1=a_2=0$ то есть*

$$w_+^{-1}(z) = \frac{a_0}{z - z_\varepsilon} + \int_0^\infty \frac{d\nu_+(t)}{t - z}. \tag{6.12}$$

Доказательство. 1) => 2): Пусть z_ε — исключительный нуль первого порядка функции w, т. е. предел $\lim\limits_{z \to z_\varepsilon} \frac{w(z)}{z - z_\varepsilon} = \lim\limits_{z \to z_\varepsilon} \frac{(z - z_\varepsilon)\, w_*(z)}{z^2}$ существует, конечен и $\neq 0$. Поскольку w_* — голоморфна и $\neq 0$ в точке z_ε, существует и конечен $\lim\limits_{z \to z_\varepsilon} [w_{*+}^{-1}(z)/(z - z_\varepsilon)]$. Применив к R-функции w_{*+}^{-1} теорему 1.1, получим 2). Напомним, что на основании (6.3) утверждение 3) означает

$$\int_0^\infty \frac{d\rho_{*+}(t)}{(t - z_\varepsilon)^2} < \infty, \quad 1 + \int_0^\infty \frac{d\rho_{*+}(t)}{t - z_\varepsilon} = 0.$$

Поскольку вышеприведённые рассуждения обратимы: 2) => 1), (=> 3): из 2) вытекает, что ρ_{*+} имеет ω-правильное поведение в точке z_ε и $\Delta: = \rho_{*+}(\{z_\varepsilon\}) = 0$, так что $\rho_{*+} = \hat{\rho}$.

Поэтому w_+^{-1} допускает представление (6.10).

Далее, $w_{*+}^{-1}(z_\varepsilon) = 0$ означает, что

$$1 + \int_0^\infty \frac{d\rho_{*+}(t)}{t - z_\varepsilon} = 0.$$

Учитывая (6.11), получим, что в (6.10) $a_1 = a_2 = 0$, так что справедливо равенство (6.12). Утверждение 3) доказано.

3) => 2): если $w_+^{-1}(z)$ имеет представление (6.12), то $\frac{w_{*+}^{-1}(z)}{z - z_\varepsilon} = \frac{z - z_\varepsilon}{z} w_+^{-1}(z)$ имеет конечный предел $a_0/z_\varepsilon \neq 0$ при $\lim z = z_\varepsilon$, откуда по теореме 1.1 следует 2).

Теорема доказана.

Заметим, что при условиях теоремы $w_+^{-1}(0) = -m_+/z_\varepsilon^2$, где $m_+ = \rho_{*+}(\{0\}) > 0$.

ГЛАВА II. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ЯДРАМИ, СОСТАВЛЕННЫМИ ИЗ ЭКСПОНЕНТ

§ 7. Теорема о факторизации ядра, составленного из экспонент

1. Пусть на плоскости $\mathbf{C}$ задана мера ω, вообще говоря, комплексная, удовлетворяющая условию

$$N(\omega) = \int_{\mathbf{C}} \frac{|d\omega(\zeta)|}{|\eta|} < \infty \quad (\zeta = \xi + i\eta). \tag{7.1}$$

Введем в рассмотрение функцию $k(t)$ вещественного параметра t, полагая

$$k(t)=\begin{cases}\int\limits_{C_+} e^{it\zeta}\,d\omega(\zeta) & \text{при } t>0,\\ \int\limits_{C_-} e^{it\zeta}\,d\omega(\zeta) & \text{при } t<0.\end{cases} \tag{7.2}$$

Имеем

$$|k(t)|<\int\limits_{C_\pm} e^{-t\eta}\,|d\omega(\zeta)| \quad \text{при} \quad \operatorname{sign} t=\pm 1,$$

откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|k(t)|\,dt\leqslant N(\omega),$$

так что $k\in L_1(\mathbf{R})$. Вычислим преобразование Фурье

$$K(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\,k(t)\,dt \quad (\lambda\in\mathbf{R})$$

функции k. В силу (7.2)

$$K(\lambda)=\int\limits_0^{\infty}e^{i\lambda t}\left(\int\limits_{C_+}e^{it\zeta}d\omega(\zeta)\right)dt+\int\limits_{-\infty}^{0}e^{i\lambda t}\left(\int\limits_{C_-}e^{it\zeta}\,d\omega(\zeta)\right)dt=$$

$$=\int\limits_{C_+}d\omega(\zeta)\int\limits_0^{\infty}e^{it(\zeta+\lambda)}\,dt+\int\limits_{C_-}d\omega(\zeta)\int\limits_{-\infty}^{0}e^{it(\zeta+\lambda)}\,dt.$$

Таким образом

$$K(\lambda)=i\left(\int\limits_{C_+}\frac{d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda}-\int\limits_{C_-}\frac{d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda}\right) \quad (\lambda\in\mathbf{R}). \tag{7.3}$$

Предположим, что

$$1-K(\lambda)\neq 0 \ (\lambda\in\mathbf{R}),\ \operatorname{ind}\,(1-K(\lambda))=0. \tag{7.4}$$

Условия (7.4) заведомо выполняются, если $N(\omega)<1$, так как в этом случае $|K(\lambda)|<1$ $(\lambda\in\mathbf{R})$. При выполнении условий (7.4) функция $1-K(\lambda)$ допускает каноническую факторизацию [8]

$$1-K(\lambda)=\Phi_+(\lambda)\,\Phi_-(\lambda), \tag{7.5}$$

где $\Phi_\pm$ голоморфна в $\mathbf{C}_\pm$, непрерывна в $\overline{\mathbf{C}}_\pm$ и $\neq 0$, а $\Phi_\pm(\infty)=1$. Отсюда уже следует, что функции $\Phi_\pm$ и $\Phi_\pm^{-1}=:\varphi_\pm$ допускают представления

$$\Phi_\pm(\lambda)=1+\int\limits_0^{\infty}e^{\pm i\lambda t}\,\Gamma_\pm(t)\,dt \quad (\lambda\in\mathbf{C}_\pm), \tag{7.6}$$

$$\varphi_\pm(\lambda) = 1 + \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t}\gamma_\pm(t)\,dt \quad (\lambda \in \mathbf{C}_\pm) \tag{7.7}$$

при некоторых $\Gamma_\pm$, $\gamma_\pm \in L_1(\mathbf{R}_+)$.

2. Оказывается, функции $\Phi_\pm(\lambda)$ удовлетворяют системе нелинейных интегральных уравнений

$$\Phi_+(\lambda) = 1 - i\int_{C_+} \frac{\Phi_-(-\zeta)^{-1}\,d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda} \quad (\lambda \in \mathbf{C}_+), \tag{7.8+}$$

$$\Phi_-(\lambda) = 1 + i\int_{C_-} \frac{\Phi_+(-\zeta)^{-1}\,d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda} \quad (\lambda \in \mathbf{C}_-). \tag{7.8-}$$

В самом деле, согласно (7.3) и (7.5) при $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\Phi_+(\lambda) = (1 - K(\lambda))\,\varphi_-(\lambda) = \varphi_-(\lambda) - i\varphi_-(\lambda)\int_{C_+}\frac{d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda} +$$

$$+ i\varphi_-(\lambda)\int_{C_-}\frac{d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda} = \varphi_-(\lambda) - i\int_{C_+}\frac{\varphi_-(-\zeta)}{\zeta+\lambda} -$$

$$- i\int_{C_+}\frac{\varphi_-(\lambda)-\varphi_-(-\zeta)}{\zeta+\lambda}\,d\omega(\zeta) + i\varphi_-(\lambda)\int_{C_-}\frac{d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda},$$

так что

$$\Phi_+(\lambda) + i\int_{C_+}\frac{\varphi_-(-\zeta)\,d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda} = \varphi_-(\lambda) - i\int_{C_+}\frac{\varphi_-(\lambda)-\varphi_-(-\zeta)}{\zeta+\lambda}\,d\omega(\zeta) +$$

$$+ i\varphi_-(\lambda)\int_{C_-}\frac{d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda}. \tag{7.9}$$

Левая часть голоморфна в $\mathbf{C}_+$, правая — в $\mathbf{C}_-$, причем $\Phi_+(\lambda)$ равномерно стремится к 1 при $\lambda \to \infty$ в $\mathbf{C}_+$ [8; 2.3]. Пусть $D_+(r)$ — полукруг радиуса r с центром в нуле, лежащий в $\mathbf{C}_+$. Функция $\varphi_-(\zeta)$ ограничена в $\mathbf{C}_-$, $|\varphi_-(\zeta)| \leqslant M$. Поэтому

$$\left|\int_{C_+}\frac{\varphi_-(-\zeta)\,d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda}\right| \leqslant M\int_{C_+}\frac{|d\omega(\zeta)|}{|\zeta+\lambda|} \leqslant M\int\frac{|d\omega(\zeta)|}{|\zeta+\lambda|} +$$

$$+ M\int_{C_+\setminus D_+(r)}\frac{|d\omega(\zeta)|}{\eta}.$$

Второе слагаемое сколь угодно мало за счет выбора r (на основании (7.1)). Первое же стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \mathbf{C}_+$. Таким образом, левая часть равенства (7.9) стремится к 1 в $\mathbf{C}_+$.

В правой части (7.9) при $\lambda \to \infty$ ($\lambda \in \mathbf{C}_-$) равномерно $\varphi_-(\lambda) \to 1$, а $\left|\int_{C_-}\frac{d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda}\right| \to 0$, что доказывается так же, как выше.

В силу (7.7)

$$\varphi_-(-\zeta)-\varphi_-(\lambda)=\int_0^\infty (e^{i\zeta t}-e^{-i\lambda t})\,\gamma_-(t)\,dt \quad (\lambda\in \mathbf{C}_-,\ \zeta\in\mathbf{C}_+).$$

Так как

$$\frac{e^{i\zeta t}-e^{-i\lambda t}}{\zeta+\lambda}=e^{-i\lambda t}\cdot\int_0^t e^{i(\zeta+\lambda)u}\,du,$$

$$\left|\frac{e^{i\zeta t}-e^{-i\lambda t}}{\zeta+\lambda}\right|\leqslant\int_0^t e^{-\eta u}\,du<\frac{1}{\eta},$$

то

$$\left|\frac{\varphi_-(-\zeta)-\varphi_-(\lambda)}{\zeta+\lambda}\right|\leqslant\frac{c}{\eta},\quad \text{где } c=\int_0^\infty|\gamma_-(t)|\,dt.$$

Поэтому

$$\int_{\mathbf{C}_+\setminus D_+(r)}\frac{\varphi_-(-\zeta)-\varphi_-(\lambda)}{\zeta+\lambda}\,d\omega(\zeta)\leqslant c\int_{\mathbf{C}_+\setminus D_+(r)}\frac{|d\omega(\zeta)|}{\eta}\to 0\quad(r\to\infty).$$

Далее

$$\int_{D_+(r)}\frac{\varphi_-(-\zeta)-\varphi_-(\lambda)}{\zeta+\lambda}\,d\omega(\zeta)$$

равномерно стремится к нулю в $\mathbf{C}_-$ при $|\lambda|\to\infty$. Итак, правая часть равенства (7.9) стремится равномерно к 1 при $|\lambda|\to\infty$ в $\mathbf{C}_-$. Поэтому обе части этого равенства тождественно равны 1 и, следовательно, выполняется равенство (7.8+). Аналогично доказывается равенство (7.8—).

2. Теорема 7.1. *Пусть ω — мера, удовлетворяющая условию* (7.1), *$K(\lambda)$ — функция вещественного параметра λ, определяемая равенством* (7.3), *$\Phi_\pm(\lambda)$ — функции, голоморфные в $\mathbf{C}_\pm$, непрерывные в $\overline{\mathbf{C}}_\pm$ и удовлетворяющие системе* (7.8±). *Тогда имеет место* (7.5), *и, следовательно, функции $\Phi_\pm(\lambda)$ являются множителями канонической факторизации для функции $1-K(\lambda)$.*

Доказательство. При $\lambda\in\mathbf{R}$:

$$(1-\Phi_+(\lambda))(1-\Phi_-(\lambda))=\int_{\mathbf{C}_-}d\omega(\zeta)\int_{\mathbf{C}_+}\frac{\varphi_-(-\zeta)\,\varphi_+(-\zeta')\,d\omega(\zeta')}{(\zeta+\lambda)(\zeta'+\lambda)}=$$

$$=\int_{\mathbf{C}_-}d\omega(\zeta)\int_{\mathbf{C}_+}\left(\frac{1}{\zeta+\lambda}-\frac{1}{\zeta'+\lambda}\right)\frac{\varphi_-(-\zeta)\,\varphi_+(-\zeta')\,d\omega(\zeta')}{\zeta'-\zeta}=$$

$$=\int_{\mathbf{C}_-}\frac{\varphi_-(-\zeta)}{\zeta+\lambda}\,d\omega(\zeta)\int_{\mathbf{C}_+}\frac{\varphi_+(-\zeta')\,d\omega(\zeta')}{\zeta'-\zeta}-$$

$$-\int_{C_+}\frac{\varphi_+(-\zeta')\,d\omega(\zeta')}{\zeta'+\lambda}\int_{C_-}\frac{\varphi_-(-\zeta)\,d\omega(\zeta)}{\zeta'-\zeta}=-i\int_{C_-}\frac{\varphi_-(-\zeta)(\Phi_-(-\zeta)-1)}{\zeta+\lambda}\,d\omega(\zeta)+$$

$$+i\int_{C_\Gamma}\frac{\varphi_+(-\zeta')(\Phi_+(-\zeta')-1)}{\zeta'+\lambda}\,d\omega(\zeta')=$$

$$=-i\int_{C_-}\frac{d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda}+i\int_{C_-}\frac{\varphi_-(-\zeta)\,d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda}+i\int_{C_+}\frac{d\omega(\zeta')}{\zeta'+\lambda}-$$

$$-\int_{C_+}\frac{\varphi_+(-\zeta')\,d\omega(\zeta')}{\zeta'+\lambda}=-K(\lambda)+(1-\Phi_+(\lambda))+(1-\Phi_-(\lambda)),$$

откуда вытекает (7.5).

Следствие 1. *Система* (7.8±) *имеет единственное решение.*

В самом деле, из (7.8±) вытекает, что $\Phi_\pm(\lambda)\neq 0$ при $\lambda\in\overline{\mathbf{C}}_\pm$. Поэтому равенство (7.5) представляет собой каноническую факторизацию функции $1-K(\lambda)$, которая, как известно, определяется единственным образом.

Следствие 2. *При условиях теоремы* $\operatorname{ind}(1-K(\lambda))=0$.

3. Уравнения (7.8±) позволяют получить из (7.6) интегральные представления для функций $\Gamma_\pm$. Сравнивая (7.6) с (7.8+), получаем

$$\int_0^\infty e^{i\lambda t}\Gamma_+(t)\,dt=-i\int_{C_+}\frac{\Phi_-^{-1}(-\zeta)\,d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda}\quad(\lambda\in\mathbf{C}_+).$$

Учитывая, что

$$\frac{i}{\zeta+\lambda}=\int_0^\infty e^{i\lambda t}e^{i\zeta t}\,dt\quad(\zeta,\lambda\in\mathbf{C}_+),$$

находим

$$\int_0^\infty e^{i\lambda t}\Gamma_+(t)\,dt=-\int_0^\infty e^{i\lambda t}\left(\int_{C_+}\Phi_-^{-1}(-\zeta)e^{i\zeta t}\,d\omega(\zeta)\right)dt,$$

откуда

$$\Gamma_+(t)=-\int_{C_+}\Phi_-^{-1}(-\zeta)\,e^{i\zeta t}\,d\omega(\zeta)\quad(t\in\mathbf{R}_+).\tag{7.10+}$$

Аналогично, сравнивая (7.6) и (7.8—), получим

$$\Gamma_-(t)=-\int_{C_-}\Phi_+^{-1}(-\zeta)\,e^{-i\zeta t}\,d\omega(\zeta)\quad(t\in\mathbf{R}_+).\tag{7.10—}$$

4. Как известно [8], факторизация (7.5) позволяет решать неоднородные интегральные уравнения с ядром $k(t-s)$ (см. § 8). Резольвента этого уравнения весьма просто определяется по функциям $\gamma_\pm(t)$ из (7.7). Для выяснения ее структуры оказывается полезным представление $\gamma_\pm$ в виде, аналогичном (7.10±). В следующем параграфе

эти представления будут получены при специальных предположениях о мере ω.

При условиях (7.4) функция $(1-K(\lambda))^{-1}$ представляется в виде

$$(1-K(\lambda))^{-1}=1+K_1(\lambda) \quad (\lambda\in\mathbf{R}), \tag{7.11}$$

где

$$K_1(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}k_1(t)\,dt, \quad k_1\in L_1(\mathbf{R}). \tag{7.12}$$

Каноническая факторизация функции $1+K_1(\lambda)$ имеет, очевидно, вид

$$1+K_1(\lambda)=\varphi_+(\lambda)\,\varphi_-(\lambda) \quad (\lambda\in\mathbf{R}). \tag{7.13}$$

Функция k_1 играет важную роль при решении интегральных уравнений.

Может случиться, что k_1 также допускает представление типа (7.2) с заменой ω на некоторое ω_1 с $N(\omega_1)<\infty$. Тогда все рассуждения п.п. 1—3 будут применимы к функциям $\varphi_\pm$. В частности, будут выполняться аналоги соотношений (7.8$\pm$), а функции $\gamma_\pm$ из (7.7) будут допускать представления

$$\gamma_\pm(t)=-\int_{C_\pm}\varphi_\mp^{-1}(\zeta)\,e^{\pm i\zeta t}\,d\omega_1(\zeta) \quad (t\in\mathbf{R}_+). \tag{7.14$\pm$}$$

Авторы не могут указать общий признак представимости k_1 в виде (7.2). В следующем параграфе будет рассмотрен случай, когда это имеет место.

5. В случае, когда ядро k вида (7.2) — четная функция, меру ω можно без ограничения общности считать четной. В этом случае $K(\lambda)$ — четная функция, а $\Phi_-(\lambda)=\Phi_+(-\lambda)$. Соответственно этому все соотношения упрощаются. В частности, система (7.8$\pm$) сводится к одному уравнению

$$\Phi_+(\lambda)=1-i\int_{C_+}\frac{\Phi_+^{-1}(\zeta)\,d\omega(\zeta)}{\zeta+\lambda} \quad (\lambda\in\mathbf{C}_+). \tag{7.15}$$

Это нелинейное уравнение указано в [9]*. Однако вывод его проиллюстрирован на частном случае, когда носитель меры сосредоточен на мнимой оси. Содержание настоящего параграфа — развитие результатов § 1 из [9].

Впервые нелинейное уравнение вида (7.15) получил В. А. Амбарцумян [1], пользуясь предложенным им принципом инвариантности. Однако в его случае мера ω была сосредоточена на оси и имела плотность специального вида. Рассматривая более сложную задачу переноса лучистой энергии, В. А. Амбарцумян вывел с помощью того же принципа матричное уравнение вида (7.15). Полученные им нелинейные матричные интегральные уравнения играют фундаментальную роль в вопросах переноса лучистой энергии.

---

* По недосмотру там вместо условия (7.1) указано более слабое условие.

В настоящем параграфе указаны чисто аналитические условия, при которых получаются нелинейные интегральные уравнения. Настоящие построения, по крайней мере, в определенной своей части допускают обобщение на матричный случай (ω — матричная мера, k соответственно — матричное ядро).

§ 8. Решение неоднородного интегрального уравнения с ядром $k = k_\sigma$

1. Проблема факторизации тесным образом связана с задачей решения линейного интегрального уравнения

$$\chi(t) - \int_0^\infty k(t-s)\,\chi(s)\,ds = f(t) \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{8.1}$$

транспонированного уравнения

$$\psi(t) - \int_0^\infty k(s-t)\,\psi(s)\,ds = g(t) \quad (0 \leqslant t < \infty) \tag{8.2}$$

и соответствующих однородных уравнений.

В настоящей статье мы будем рассматривать случай, когда $k = k_\sigma$ (см. (0.4)). Очевидно представление (0.4) является частным случаем представления (7.2), рассмотренного в § 7, если предположить, что мера ω неотрицательна, а ее носитель сосредоточен на мнимой оси. Условие (7.1) для ω, обеспечивающее суммируемость k, переходит в условие (0.5) для σ.

В соответствии с (7.3) и (7.10±)

$$K(\lambda) = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{it+\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-i\lambda}, \tag{8.3}$$

$$\Gamma_\pm(t) = \mp \int_{\mathbb{R}_\pm} \Phi_\mp^{-1}(-iu)\, e^{\mp iut}\, d\sigma(u) \quad (t > 0). \tag{8.4}$$

Функция $K(\lambda)$ голоморфна вне мнимой оси. Полагая $i\lambda = z$, получим, что функция принадлежит классу (W), причем $w(0) = 1 - K(0)$.

В гл. I рассматривались три случая для $w(z)$: $w(0) > 0$, < 0 и $= 0$. Соответственно этому мы рассмотрим три случая для $K(\lambda)$: $K(0) < 1$, > 1 и $= 1$. Заметим, что $K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,dt = J_0$.

2. Начнем с простейшего из них: $K(0) < 1$*. В этом случае выполняются условия (7.4) и, следовательно, функция $1 - K(\lambda)$ допускает каноническую факторизацию (7.5), в которой множители $\Phi_\pm(\lambda)$

* Это условие совпадает с отмечавшимся выше условием $N(\omega) < 1$ для рассматриваемого частного случая меры ω.

имеют представления (7.6). Из результатов § 3 п. 1 следует, что функция $1+K_1(\lambda)=(1-K(\lambda))^{-1}=w^{-1}(z)$ допускает представление (3.3) и, следовательно, к функциям $K_1(\lambda)$ и $k_1(t)$ из (7.12) применимы результаты § 7. Используя каноническую факторизацию (7.13) функции $1+K_1(\lambda)$, получим в соответствии с (8.4):

$$\gamma_+(t)=-\int_0^\infty \Phi_-^{-1}(-iu)\,e^{-tu}\,d\rho(u)$$

$$(t>0) \qquad (8.5)$$

$$\gamma_-(t)=\int_{-\infty}^0 \Phi_+^{-1}(-iu)\,e^{tu}\,d\rho(u)$$

где $\rho\in(\sum)$ — функция из представления (3.3) функции w^{-1}. Функция k_1 из (7.12) допускает представление, аналогичное (0.3); $k_1=k_\rho$, из которого следует, что k_1 — вполне монотонна на $\mathbf{R}_+$ и абсолютно монотонна на $\mathbf{R}_-$.

3. Установим связь факторизации (7.5) с факторизацией, полученной в § 5. Функции $w(z)=1-K(-iz)$ допускает факторизацию $w(z)=w_+(z)\,w_-(z)$ с множителями $w_\pm$ определенного типа. Полагая $\Phi_\pm(\lambda)=w_\pm(i\lambda)$, получим каноническую факторизацию (7.5) функции $1-K(\lambda)$. Сопоставляя (4.11) с (7.7), найдем

$$\int_0^\infty e^{i\lambda t}\gamma_+(t)\,dt=\int_0^\infty \frac{d\rho_+(u)}{u-i\lambda} \quad (\lambda\in\mathbf{C}_+).$$

Так как $1/(u-i\lambda)=\int_0^\infty e^{-tu}e^{i\lambda t}\,dt$, то

$$\int_0^\infty e^{i\lambda t}\gamma_+(t)\,dt=\int_0^\infty e^{i\lambda t}\left(\int_0^\infty e^{-tu}\,d\rho_+(u)\right)dt,$$

откуда

$$\gamma_+(t)=\int_0^\infty e^{-tu}\,d\rho_+(u) \quad (t>0). \qquad (8.6+)$$

Аналогично из (4.19) и (4.6) получаем соответственно

$$\gamma_-(t)=\int_{-\infty}^0 e^{tu}\,d\rho_-(u) \quad (t>0), \qquad (8.6-)$$

$$\Gamma_\pm(t)=\int_{\mathbf{R}_\pm} e^{\mp tu}\,d\sigma_\pm(u) \quad (t>0). \qquad (8.7)$$

Таким образом, функции $\gamma_\pm$ и $\Gamma_\pm$ допускают по два представления (8.4) — (8.7), которые переходят друг в друга на основании формул (5.11) и (5.13). Из формул (8.6±), (8.7) вытекает, что γ_+, $-\gamma_-$, а также Γ_+, $-\Gamma_-$ являются вполне монотонными функциями на $\mathbf{R}_+$.

4. Применяя обозначения (5.20), будем иметь для ядра k_0 при любом $\beta > 0$:

$$\int_0^\infty t^\beta k(t)\,dt = \Gamma(\beta+1)\,s_{\beta+1,+}, \quad \int_{-\infty}^0 |t|^\beta k(t)\,dt = \Gamma(\beta+1)\,s_{\beta+1,-}. \tag{8.8}$$

Поэтому при каждом натуральном p абсолютная сходимость интеграла, выражающего J_p, равносильна абсолютной сходимости интеграла, выражающего s_{p+1}. При этом выполняется соотношение (0.6).

Аналогично, из (8.6±) и (8.7) вытекает, что

$$\int_0^\infty \gamma_\pm(t)\,t^\beta\,dt = \Gamma(\beta+1)\,r_\beta^\pm, \quad \int_0^\infty \Gamma_\pm(t)\,t^\beta\,dt = \Gamma(\beta+1)\,s_\beta^\pm.$$

§ 9. Решение однородного интегрального уравнения; случай $K(0) > 1$

1. В настоящем параграфе рассматриваются однородные интегральные уравнения (I ±).

Мы покажем, что в случае $K(0) \geqslant 1$, по крайней мере, одно из этих уравнений имеет нетривиальное решение. Для нахождения решений мы будем систематически пользоваться преобразованием Лапласа (правым и левым).

Пусть функция $\varphi \in L_\infty(R_+)$, $\Phi(z)$ — ее левое преобразование Лапласа, так что функция Φ голоморфна в открытой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$.

Используя (0.4), будем иметь

$$\int_0^\infty k(t-s)\,e^{zt}\,dt = e^{zs}\left(\int_{-s}^\infty k(t)\,e^{zt}\,dt\right) =$$

$$= e^{zs}\left[\int_{-s}^0\left(-\int_{-\infty}^0 e^{-tu}\,d\sigma(u)\right)e^{zt}\,dt + \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-tu}\,d\sigma(u)\right)e^{zt}\,dt\right] =$$

$$= e^{zs}\left[-\int_{-\infty}^0 d\sigma(u)\int_{-s}^0 e^{t(z-u)}\,dt + \int_0^\infty d\sigma(u)\int_0^\infty e^{t(z-u)}\,dt\right] =$$

$$= e^{zs}\left[-\int_{-\infty}^0 \frac{1-e^{-s(z-u)}}{z-u}\,d\sigma(u) + \int_0^\infty \frac{-d\sigma(u)}{z-u}\right] =$$

$$= -\int_{-\infty}^0 \frac{e^{su}-e^{sz}}{u-z}\,d\sigma(u) + e^{zs}\int_0^\infty \frac{d\sigma(u)}{u-z}.$$

Поэтому левое преобразование Лапласа левой части уравнения (I +) дает

$$\Phi(z) - \int_0^\infty \left(\int_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds \right) e^{zt}\,dt = \Phi(z) -$$

$$- \int_0^\infty \varphi(s) \left[- \int_{-\infty}^0 \frac{e^{su} - e^{sz}}{u - z}\,d\sigma(u) + e^{zs} \int_0^\infty \frac{d\sigma(u)}{u - z} \right] ds =$$

$$= \Phi(z) + \int_{-\infty}^0 \frac{\Phi(u) - \Phi(z)}{u - z}\,d\sigma(u) - \Phi(z) \int_0^\infty \frac{d\sigma(u)}{u - z}.$$

Таким образом, если φ — ограниченное решение уравнения $(!+)$, то $\Phi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(z) \left(1 - \int_0^\infty \frac{d\sigma(u)}{u - z} \right) + \int_{-\infty}^0 \frac{\Phi(u) - \Phi(z)}{u - z}\,d\sigma(u) = 0 \quad (\operatorname{Re} z < 0). \tag{9.1}$$

Обратно, если $\varphi\ (\not\equiv 0)$ — ограниченная на $\mathbf{R}_+$ функция и ее левое преобразование Лапласа $\Phi(z)$ удовлетворяет соотношению (9.1), то φ — нетривиальное решение уравнения $(!+)$.

Заметим, что при невещественных z уравнение (9.1) легко может быть приведено к виду

$$\Phi(z)\,w(z) + \int_{-\infty}^0 \frac{\Phi(u)\,d\sigma(u)}{u - z} = 0, \tag{9.2}$$

где $w(z)$ определяется формулой (0.9). Из (9.2) видно, что Φ аналитически продолжается на $\mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-$, а значит, будет голоморфной в области $\operatorname{Ext} \mathbf{R}_-$, проколотой, быть может, в нулях функции w.

2. В настоящем пункте мы рассматриваем случай: $K(0) > 1$, т. е. $w(0) < 0$. В этом случае w имеет исключительный нуль z_e в $\mathbf{C}_+ \setminus \{0\}$ (см. § 2, п. 3).

Теорема 9.1. *Пусть* $w(0) < 0$, z_e — *исключительный нуль функции* w. *Если* $\operatorname{Re} z \geqslant 0\ (\leqslant 0)$, *то уравнение* $(!+)$ (*уравнение* $(!-)$) *имеет нетривиальное решение* $\varphi_+^0\ (\varphi_-^0)$, *и это решение определяется единственным образом в классе* $L_\infty(\mathbf{R}_+)$ *с точностью до постоянного множителя.*

Эта теорема содержит теорему 0.2, приведенную во Введении.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{Re} z_e \geqslant 0$. Рассмотрим правую факторизацию функции w, то есть такую, множители которой определяются равенствами (6.5а). Положим $\Psi_+(z) := w_+^{-1}(z)$; функция Ψ_+ голоморфна на $\operatorname{Ext}[\mathbf{R}_+ \setminus \{z_e, \bar{z}_e\}]$ и, в частности, на $\mathbf{R}_-$. Применив обобщенную формулу обращения Стилтьеса к равенству $\Psi_+(z)\,w(z) = w_-(z)$ и использовав представления (0.9), (6.2), получим

$$\Psi(t)\,d\sigma(t) = -d\sigma_-(t)/t \quad (t < 0).$$

Отсюда на основании (6.2) и (6.5а):

$$w_-(z) = -\int_{-\infty}^{0} \frac{\Psi_+(t)\,d\sigma(t)}{t-z}$$

или же

$$w(z)\,\Psi_+(z) = -\int_{-\infty}^{0} \frac{\Psi_+(t)\,d\sigma(t)}{t-z},$$

$$\Psi_+(z)\left(1-\int_{-\infty}^{0}\frac{d\sigma(t)}{t-z}-\int_{0}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t-z}\right)+\int_{-\infty}^{0}\frac{\Psi_+(t)\,d\sigma(t)}{t-z}=0,$$

то есть

$$\Psi_+(z)\left(1-\int_{0}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t-z}\right)+\int_{-\infty}^{0}\frac{\Psi_+(t)-\Psi(z)}{t-z}\,d\sigma(t)=0.$$

Таким образом, функция Ψ_+ удовлетворяет соотношению (9.1) и, следовательно, уравнение (I+) имеет нетривиальное решение $\varphi_+^0(t)$, левое преобразование Лапласа которого совпадает с $\Psi_+(z)$. Для вычисления $\varphi_+^0(t)$ воспользуемся формулами для $\Psi_+(z) = w_+^{-1}(z)$, полученными в § 6. В случае $\operatorname{Im} z_e \neq 0$, использовав формулу (6.7) для функции w_+^{-1}, получим

$$\varphi_+^0(t) = \beta_+ e^{-z_e t} + \overline{\beta}_+ e^{-\overline{z}_e t} - \int_0^\infty e^{-tu}\,d\mu_+(u),$$

где числа β_+ и мера μ_+ — те же, что в формуле (6.7). Эту формулу нетрудно привести к виду (0.10+), где $\beta_+ = A_+ e^{i\theta_+}$.

Если $z_e \in \mathbf{R}$ и, стало быть, $z_e > 0$, то из (6.9а), (6.9б) нетрудно получить, что

$$\varphi_+^0(t) = e^{-z_e t}(-1+z_e t)+ \int_0^\infty \frac{u(e^{-ut}-e^{-z_e t})+z_e t(u-z_e)e^{-z_e t}}{(u-z_e)^2}\,d\rho_{*+}(u),$$

$$\varphi_+^0(t) = e^{-z_e t}\left(-1+z_e t-\Delta t+\frac{1}{2}z_e\Delta\right)+ \int_0^\infty \frac{u(e^{-ut}-e^{-z_e t})+z_e t(u-z_e)e^{-z_e t}}{(u-z_e)^2}\,d\widehat{\rho}_+(u). \tag{9.3}$$

Если ρ_{*+} имеет ω-правильное поведение в точке z_e, то, как следует из (6.10),

$$\varphi_+^0(t) = e^{-z_e t}(-a_0+a_1 t+a_2 t^2) - \int_0^\infty e^{-tu}\,d\nu_+(u), \tag{9.4}$$

где a_0, a_1, a_2 — те же, что в (6.10) (см. (6.11)). В частности, если z_e — нуль первого порядка функции w, то в (9.4): $a_1 = a_2 = 0$.

Случай $\operatorname{Re} z_e \leqslant 0$ рассматривается аналогично.

2. Докажем единственность решения уравнения (!+) в классе ограниченных функций. Будем для определенности предполагать, что $\operatorname{Re} z_e > 0$. Пусть $\varphi(t)$ ($|\varphi(t)| \leqslant M$, $t \geqslant 0$) — решение уравнения (!+), $\Phi(z)$ — его левое преобразование Лапласа. Функция Φ голоморфна при $\operatorname{Re} z < 0$ и удовлетворяет уравнению (9.2) при $\operatorname{Re} z < 0$. Заметим, что равенством (9.2) функция Φ аналитически продолжается в $\operatorname{Ext} \mathbf{R}_+$, где она может иметь полюсы лишь в точках z_e, $\bar{z}_e$ (при $\operatorname{Im} z_e > 0$). Функция Φ удовлетворяет условиям:

а) $|\Phi(z)| \leqslant M/|\operatorname{Re} z|$ при $\operatorname{Re} z < 0$, а следовательно, $z\Phi(z)$ ограничена в любом секторе $\mathbf{L}_\theta = \{z: |\arg(-z)| < \theta\}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

б) $$\int_{-\infty}^{0} |\Phi(u)|\, d\sigma(u) < \infty.$$

Условие а) очевидно, а б) вытекает из а) с учетом (0.5). Положим $\Psi_-(z) := z\, w_-^{-1}(z)$. Эта функция голоморфна в $\operatorname{Ext} \mathbf{R}_-$ — причем в силу теоремы 5.2 она имеет конечный предел $\Psi_-(0)$ при $z \to 0$ в $\mathbf{L}_0$. Имеем $\Psi_+^{-1}(z)\,\Psi_-^{-1}(z) = w(z)$, откуда, согласно (9.2):

$$\frac{\Phi(z)}{\Psi_+(z)} = -\Psi_-(z) \int_{-\infty}^{0} \frac{\Phi(u)\, d\sigma(u)}{u - z}. \tag{9.5}$$

Левая часть равенства (9.5) голоморфна в $\operatorname{Ext} \mathbf{R}_+$, правая — в $\operatorname{Ext} \mathbf{R}_-$. Следовательно, это равенство определяет функцию $G(z)$, регулярную всюду в $\mathbf{C}$, кроме, быть может, точек 0 и ∞. Покажем, что она регулярна и в этих точках.

В угле $\mathbf{L}_\theta$ функция $w_{*+}(z) \to 1$ при $z \to \infty$ и, стало быть, $z\Psi_+(z) \to 1$. Поэтому $|G(z)| = |z\Phi(z)|/|z\Psi_+(z)| \leqslant M$ при $z \to \infty$, $z \in \mathbf{L}_\theta$. С другой стороны, из б) следует, что $z \int_{-\infty}^{0} \frac{\Phi(u)\, d\sigma(u)}{u - z}$ имеет конечный предел при $z \to \infty$ ($z \overline{\in} \mathbf{L}_\theta$) и, следовательно, $G(z) = -w_{*-}^{-1}(z)\, z \times \int_{-\infty}^{0} \frac{\Phi(u)\, d\sigma(u)}{u - z}$ имеет конечный предел.

Таким образом, $G(z)$ регулярна в точке ∞. Далее, при $z \in \mathbf{L}_\theta$ в силу а) и с учетом леммы 5.1:

$$|zG(z)| = |z\Phi(z)| \cdot \left| \frac{w_{*+}(z)}{z} \right| \cdot |z - z_e| \cdot |z - \bar{z}_e|$$

ограничено при $z \to 0$. Если $z \overline{\in} \mathbf{L}_\theta$, то в силу б) $\lim\limits_{z \to 0} \left(z \int_{-\infty}^{0} \frac{\Phi(u)\, d\sigma(u)}{u - z} \right) = 0$,

так что $zG(z) \to 0$ при $z \to 0$, $z \overline{\in} L_a$. Таким образом, $zG(z)$ регулярна при $z=0$ и имеет там нуль, а следовательно, $G(z)$ регулярна в точке $z=0$. Итак, $G(z) = \text{const}$ и, значит, $\Phi(z) = C\Psi_+(z)$.

3. В случае, когда $\operatorname{Re} z_\varepsilon \neq 0$ решение однородного уравнения (!+) или (!—) может быть получено на основании общих правил решения однородных уравнений (!±), основанных на факторизации, поскольку тогда $w(z) \neq 0$ на мнимой оси [8]. Примем для определенности, что $\operatorname{Re} z_\varepsilon > 0$. Рассмотрим правую факторизацию с множителями $w_\pm$ вида (6.5а). Полагая $\Psi_\pm = w_\pm^{-1}$, будем иметь $w^{-1} = \Psi_+ \Psi_-$. Это представление не является факторизацией в смысле § 7, поскольку $\Psi_+(\infty) = 0$, $\Psi_-(\infty) = \infty$. Если ζ_0 — произвольная точка левой полуплоскости, то правильной факторизацией является представление $w^{-1} = \Phi_+ \Phi_-$, где $\Phi_+(z) = (z-\zeta_0)\Psi_+(z)$ — голоморфная в левой полуплоскости функция, имеющая там единственный нуль ζ_0, $\Phi_-(z) = \Psi_-(z)/(z-\zeta_0)$ — голоморфная и отличная от нуля в правой полуплоскости функция. Отсюда вытекает, что $\operatorname{ind}(1-K(\lambda)) = 1$, а $\Phi_+(z)/(z-\zeta_0) = \Psi_+(z)$ — левое преобразование Лапласа решения уравнения (!+), которое единственно с точностью до постоянного множителя.

Аналогично, если $\operatorname{Re} z < 0$, то $\operatorname{ind}(1-K(\lambda)) = -1$ и уравнение (!—) имеет единственное с точностью до постоянного множителя решение, правое преобразование Лапласа которого определяется множителем правильной факторизации. Заметим, что приведенный метод не дает возможности получить решения однородных уравнений в виде (9.3) и (9.4). В то же время этот метод позволяет утверждать единственность полученного решения не только в классе $L_\infty(\mathbf{R})$, но и в целом ряде других банаховых функциональных пространств.

§ 10. Решение однородного интегрального уравнения; случай $K(0) = 1$

1. Пусть $K(0) = 1$, т. е. $w(0) = 0$. Если $w = w_+ w_-$ — факторизация функции w, полученная в § 5, то, по крайней мере, одно из чисел $w_+(0)$, $w_-(0)$ равно нулю.

Теорема 10.1. *а) Если* $w_-(0) = 0$ ($w_+(0) = 0$), *то уравнение* (!+) (*уравнение* (!—) *имеет решение* φ_+^0 *вида* (0.7+) (φ_-^0 *вида* (0.7—)), *где числа* $m_\pm$, *и меры* $\rho_\pm$ — *те же, что в представлениях* (4.14), (4.19).

б) *Это решение ограничено тогда и только тогда, когда* $w_+(0) > 0$ ($w_-(0) > 0$); *при этом*

$$\varphi_\pm^0(\infty) = w_\pm^{-1}(0). \tag{10.1}$$

Доказательство. а) Пусть $w_-(0) = 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{d\sigma_-(t)}{t} = -1, \quad w_-(z) = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t}\right) d\sigma_-(t) =$$

$$= z \int_{-\infty}^{0} \frac{d\sigma_-(t)}{t(t-z)},$$

откуда, используя (5.11), получаем

$$\frac{w(z)}{zw_+(z)} = -\int_{-\infty}^{0} \frac{d\sigma(t)}{tw_+(t)(t-z)}.$$

Таким образом, функция $\Phi(z) := (zw_+(z))^{-1}$ удовлетворяет соотношению (9.2) и, следовательно, обратное левое преобразование Лапласа — φ_+^0 этой функции является решением уравнения (I +). Использовав формулу (4.14) для $w_+^{-1}(z)$, получим формулу (0.7+) для φ_+^0.

Аналогично устанавливается формула (0.7—) для решения φ_-^0 уравнения (I —).

Утверждение а) доказано.

Докажем б). Положим $h_\pm(t) := \varphi_\pm^0(t) - m_\pm t$, так что

$$h_\pm(t) = 1 \pm \int_{\mathbf{R}_\pm} \frac{1 - e^{\mp ut}}{u}\, d\rho_\pm(u). \tag{10.2}$$

Функции $h_\pm(t)$ не убывают на $\mathbf{R}_+$ и $= o(t)$, а $dh_\pm(t)/dt \to 0$ при $t \to \infty$. Имеем

$$h_\pm(\infty) = 1 + \int_{\mathbf{R}_\pm} \frac{d\rho_\pm(u)}{|u|} = 1 + r_1^\pm. \tag{10.3}$$

Ограниченность функций $h_\pm$ равносильна тому, что $r_1^\pm < \infty$. При выполнении этого условия

$$\varphi_\pm^0(t) = 1 + r_1^\pm + m_\pm t - \int_{\mathbf{R}_\pm} e^{\mp ut}\, d\nu_\pm(t),$$

где $\nu_\pm$ — конечная мера на $\mathbf{R}_\pm$, непрерывная в нуле,

$$d\nu_\pm = d\rho_\pm(u)/|u|.$$

Очевидно, ограниченность $\varphi_\pm^0$ равносильна тому, что $m_\pm = 0$, $r_1^\pm < \infty$. Как отмечено в § 4, п. 4, совокупность последних двух условий равносильна тому, что $w_\pm(0) > 0$. Равенство (10.1) вытекает из (4.12). Теорема доказана.

Напомним в связи с теоремой 10.1 равенства (4.27), позволяющие выразить m_+ и $h_+(\infty) = 1 + r_1^+$ через моменты функции σ_+.

3. Докажем теперь теорему 0.1 сформулированную во Введении. Заметим, что условие абсолютной сходимости интеграла J_1 в этой теореме равносильно абсолютной сходимости интеграла (5.18), причем $J_1 = s_2$.

Из теорем 5.7 и 10.1 вытекает, что при $J_1 > 0\ (< 0)$ уравнение (I —) (уравнение (I +)) имеет ограниченное решение (0.7+) с $m_+ = 0$ ((0.7—) с $m_- = 0$), а при $J_1 = 0$ оба уравнения (I ±) имеют неограниченные решения (0.7±). Пусть $J_1 = 0$, $J_2 < \infty$. Так как $1 = w(0) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(u)/u$, то выполняются условия (2.3), которые озна-

чают, что $w\in(\widetilde{W})$. По теореме 5.2 $w_+(0)=\overset{1}{0}$, $w_-(0)=\overset{1}{0}$, что равносильно соответственно условиям $m_+>0$, $m_->0$ (см. § 4, п. 4). В процессе доказательства теоремы 10.1 было установлено, что ограниченность функций $h_\pm$ равносильна тому, что $r_1^\pm<\infty$. На основании теоремы 5.6 (случай в)) и равенств (8.8) последнее равносильно условию (0.8). Теорема доказана.

В связи с этой теоремой напомним, что при $w\in(\widetilde{W})$: $m_+m_-=\lim\limits_{z\to 0}(-z^2/w(z))=\mathcal{J}_2^{-1}$, а числа $m_\pm$ могут быть вычислены через w с помощью формулы (5.10), если учесть, что $m_\pm=\overline{l_\pm^{-1}(w_\pm)}$.

4. Пусть $\mathcal{J}_1=0$, $\mathcal{J}_2<\infty$ и выполняются оба условия (0.8). Последнее означает абсолютную сходимость интеграла, выражающего $\mathcal{J}_2$. Покажем, что числа $h_+(\infty)=1+r_1^+(<\infty)$ могут быть вычислены через $w(z)$.

Положим (см. (2.6))

$$\xi(s):=\ln\frac{w(is)}{s^2}=\ln\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t^2(t-is)}.$$

Тогда

$$\xi'(s)=i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t^2(t-is)^2}\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t^2(t-is)}\quad\text{и}\quad\lim_{s\to 0}\xi'(s)=i(s_4/s_3).$$

Согласно (5.9)

$$\frac{q_\pm'(z)}{q_\pm(z)}=\pm\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(s)\,ds}{(is-z)^2}=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(s)\,d\left(\frac{1}{is-z}\right),$$

или же после интегрирования по частям

$$\frac{q_\pm'(z)}{q_\pm(z)}=\mp\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi'(s)\,ds}{is-z}.$$

По формулам Племеля--Соходкого

$$\frac{q_\pm'(\mp 0)}{q_\pm(\mp 0)}=\mp\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi'(s)}{s}\,ds-\frac{i}{2}\xi'(0)=\frac{s_4}{2s_3}\mp\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi'(s)\,ds}{s}.$$

С другой стороны, учитывая (4.14), будем иметь

$$-q_+^{-1}(z)=zw_+^{-1}(z)=z-m_++z\int_{+0}^{\infty}\frac{d\rho_+(u)}{u-z},$$

откуда

$$\frac{q_+'(-0)}{q_+^2(-0)}=1+\int_{+0}^{\infty}\frac{d\rho_+(u)}{u}=1+r_1^+=h_+(\infty).$$

Таким образом

$$h_+(\infty)=\left(\frac{s_4}{2s_3}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi'(s)}{s}\,ds\right)\Big/\sqrt{s_3}\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(s)}{s}\,ds\right).$$

Аналогично

$$h_-(\infty) = -\left(\frac{s_4}{2s_3} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi'(s)}{s}\,ds\right)\Big/\sqrt{s_3}\exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(s)}{s}\,ds\right).$$

В случае четного k функция ξ четна и $s_4 = 0$, так что

$$h_+(\infty) = h_-(\infty) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{s_3}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi'(s)}{s}\,ds. \tag{10.4}$$

Эта формула равносильна формуле (0.2), полученной Ф. Спитцером [15] при более общих предположениях относительно ядра k, и может быть сведена к ней с помощью интегрирования по частям. По-видимому Ф. Спитцер не знал о более ранней работе Э. Хопфа [11], в которой формула (10.4) была получена при иных (более жестких) предположениях о ядре $k = k_a$.

Для произвольного четного k_a формула (10.2) была установлена в [9].

5. Пусть выполняются следующие условия из теоремы 0.1: $J_0 = 1$, $J_1 = 0$, $J_3^{\pm} < \infty$ и, следовательно, $h_\pm(\infty) < \infty$. Вычислим

$$S_\pm := \int_0^\infty [h_\pm(\infty) - h_\pm(t)]\,dt.$$

Имеем на основании (10.2), (10.3)

$$h_\pm(\infty) - h_\pm(t) = \int_{R_\pm}\frac{e^{-ut}}{u}\,d\rho_\pm(u),$$

откуда

$$S_\pm = \int_{R_\pm}\left(\int_0^\infty e^{-ut}\,dt\right)\frac{d\rho_\pm(u)}{u} = \int_{R_\pm}\frac{d\rho_\pm(u)}{u^2} = r_2^\pm.$$

Применив теоремы 4.5б) и 5.5, получим утверждение:

$$\{S_+ < \infty\} <-> \{r_2^+ < \infty\} <-> \{s_4^+ < \infty\} <=> \{s_{5+} < \infty\} \tag{10.5}$$
$$<-> \{J_4^+ < \infty\},$$

где

$$J_4^\pm = \int_{R_\pm}|t^4|k(t)\,dt.$$

Импликации (10.5) сохраняют силу, если в них всюду знак „+“ заменить на знак „−“.

Заметим, что согласно (4.27)

$$S_\pm = \frac{s_2^\pm s_4^\pm - (s_3^\pm)^2}{(s_2^+)^3}.$$

В случае четного k эта формула была получена в [5] на основании соответствующих формул из [9] для решения однородного уравнения с четным ядром.

Физико-химический институт АН УССР,
Одесский институт инженеров
морского флота

Поступила 26.IV.1982

Մ. Գ. ԿՐԵՅՆ, ՅՈՒ. Լ. ՇՄՈՒԼՅԱՆ. Վիներ-Հոպֆի հավասարումները, որոնց կորիզները թույլ են տալիս ինտեգրալ ներկայացում էքսպոնենտի միջոցով *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում է

$$\varphi(t)-\int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t)\quad (0\leqslant t<+\infty) \tag{1}$$

ինտեգրալ հավասարում կիսառանցքի վրա, որտեղ $k(\pm t)$ $(0\leqslant t<+\infty)$ *ֆունկցիաները լիովին մոնոտոն են և պատկանում են* $L_1(0,\infty)$:

$$J_0=\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\,dt$$

Համար հնարավոր է երեք դեպք. 1) $J_0<1$, *2)* $J_0=1$, *3)* $J_0>1$:

Առաջին դեպքում (1) հավասարումը մեկնաբանվում է հայտնի մեթոդներով [9]։ Մնացած երկու դեպքերում հիմնականում ուսումնասիրվում է համասեռ հավասարումը $(f(t)\equiv 0)$ *ինչպես նաև նրա տրանսպոնացվածը։ Երրորդ դեպքը ամենաբարդն է, որի ուսումնասիրման համար հարկ եղավ օգտագործել ֆունկցիաների տեսության նոր թեորեմներ։ Այս դեպքում կամ համասեռ հավասարումը, կամ նրա տրանսպոնացվածը, կամ էլ երկու հավասարումները միասին ունեն ոչ-տրիվիալ լուծում։ Ընդ որում, եթե ոչ-տրիվիալ լուծումը որևէ հավասարման համար գոյություն ունի, ապա այն* $L_\infty(0,\infty)$ *դասում որոշվում է հաստատուն բազմապատկիչի ճշտությամբ։*

Այդ լուծումներից յուրաքանչյուրի համար ստացված է բացահայտ արտահայտություն։ Պարզագույն դեպքում որոշակի նորմավորվածությամբ (1) համասեռ հավասարման լուծումը ունի հետևյալ տեսքը

$$\varphi(t)=e^{-at}\cos(\omega t-\theta)-\int_0^\infty e^{-tu}\,d\mu(u),$$

որտեղ a, ω, θ*-ն որոշակի հաստատուններ են, իսկ* μ*-ն զրոյում անընդհատ* R_+*-ում ոչ բացասական վերջավոր չափ է։*

M. G. KREIN, Ju. L. SMUL'AN. *Wiener-Hopf equations, the kernels of which admit an integral representation by exponents* (summary)

The integral equation

$$\varphi(t)-\int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t)\quad (0\leqslant t<\infty), \tag{1}$$

is studied under the following assumptions: the functions $k(\pm t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ are completely monotonic and belong to $L_1(0,\infty)$. Three cases are to be considered: 1) $J_0<1$, 2) $J_0=1$, 3) $J_0>1$, where

$$J_0=\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\,dt.$$

In the first case the equation (1) is treated by the well known methods [9]. In the two remaining cases mainly the homogeneous equation $(f(t)\equiv 0)$ as well as its

transposed equation are studied. The most complicated third case required for its investigation the use of some new theorems of the theory of analytic functions. In this case either the homogeneous equation, or transposed equation or both of them have non-trivial solutions. Besides, if there exists a non-trivial solution of any of these equations it is uniquely defined up to a constant factor in the class $L_\infty(0, \infty)$. For each of these solutions explicit expressions are obtained.

In the simplest case under certain normalization the solution of the homogeneous equation is given by the formula

$$\varphi(t) = e^{-at}\cos(\omega t - \theta) - \int_0^\infty e^{-tu}\, d\mu(u),$$

where a, ω, θ are some constants, μ is a non-negative finite measure on the R_+ continuous at the point zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян.* О рассеянии света атмосферами планет, Научн. труды, I. Ереван, 1960, 206—222.
2. *Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн.* Über Fouriersche Reihen beschränkter summierbaren Funktionen und ein neues Extremum problem, II. Зап. Харьк. матем. об-ва, 1934, т. 4, 10, 3—32.
3. *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1966.
4. *Н. И. Ахиезер.* Классическая проблема моментов, М., ГИФМЛ, 1961.
5. *Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян.* О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера—Хопфа, Препринт, ЕГУ, НИИ ФКС, 79—1, Ереван, 1979.
6. *Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян.* Интегральные уравнения на полупрямой с разностным ядром и нелинейные функциональные уравнения, Матем. сб., 97 (139), № 1, 1975, 35—58.
7. *И. С. Кац, М. Г. Крейн.* R-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя, Дополнение I к книге Ф. Аткинсона «Дискретные и непрерывные граничные задачи», М., «Мир», 1968.
8. *М. Г. Крейн.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. УМН, 13, 5 (83), 1958, 3—120.
9. *М. Г. Крейн.* О нелинейных интегральных уравнениях, играющих роль в теории уравнений Винера—Хопфа, «Математ. исследования», Кишинев, «Штиинца», I, вып. 42, 1976, 47—90; II, вып. 45, 1977, 67—92.
10. *N. Aronszajn, W. F. Donoghue.* On the exponential representation of analytic functions in the upper half-plane with positive imaginary part, J. d'Analys, Math., 5, 1956—57, 321—388.
11. *E. Hopf.* Mathematical problems of radiative equilibrium, Cambridge Tracts № 31, 1934.
12. *M. G. Krein, H. Langer.* Some propositions on analytic matrixfunctions related to the theory of operators in the space Π_χ, Acta Sci. Math., v. 43, 1—2, 1981, 181—205.
13. *H. Langer* Zur Spectraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren; Dissertation Tech. Univ., Dresden, 1960.
14. *D. V. Lindley.* The theory of queues with a single server, Proc. of the Cambridge Philos. Soc., v. 48, 277—289.
15. *F. Spitzer.* The Wiener-Horf equation, whose kernel is the probability density, Duke Math. J., v. 24, 1957, 327—343; v. 27, 1960, 363—372.
16. *D. Widder.* The Laplace transform, Princeton, University Press, 1946.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 5, 1982 Математика

УДК 517.98

С. М. ПОЗИН, Л. А. САХНОВИЧ

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

Введение

Рассмотрим ограниченный оператор S, действующий в пространстве $L^p(0, \omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ и определенный формулой

$$Sf = \frac{d}{dx} \int_0^\omega f(t)\, s(x-t)\, dt, \tag{0.1}$$

где

$$s(x) \in L^q(-\omega, \omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если

$$s(x) = \int_0^x k(t)\, dt, \quad k(t) \in L(-\omega, \omega),$$

то мы получаем важный частный случай операторов вида (0.1):

$$Sf = \int_0^\omega f(t)\, k(x-t)\, dt. \tag{0.2}$$

Новый метод решения уравнения

$$Sf = \varphi \tag{0.3}$$

описан в статьях [1, 2].

При помощи этого метода в данной работе находятся условия ограниченности $f(x)$ и исследуется поведение $f(x)$ у концов интервала „0“ и „ω“. Отдельно рассматривается уравнение со специальной правой частью

$$SB(x, \lambda) = e^{i\lambda x}. \tag{0.4}$$

Уравнение (0.4) играет существенную роль в различных теоретических и прикладных задачах. Так, например, диаграмма рассеяния при дифракции на ленте совпадает с функцией [2, 3]

$$\rho(\lambda, \mu) = \int_0^\omega B(x, \lambda)\, e^{i\mu x}\, dx. \tag{0.5}$$

В статье также вводятся аналоги функций В. А. Амбарцумяна $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, через которые выражается $\rho(\lambda, \mu)$. Полученные результаты

иллюстрируются на примерах, имеющих важное значение в теории упругости [4, 5], гидродинамике [2, 6, 7) и других прикладных задачах.

§ 1. Ограниченность решений

1°. Сформулируем необходимый нам результат из статьи [2]:

Теорема 1.1. Пусть в $L^p(0, \omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ существуют такие функции $N_1(x)$, $N_2(x)$, что

$$SN_1 = s(x), \quad SN_2 = 1. \tag{1.1}$$

Если уравнение

$$Sf = 0 \tag{1.2}$$

имеет в $L^p(0, \omega)$ только тривиальное решение, то уравнение (0.3) при $\varphi \in W_q^{(2)}(0, \omega)$ имеет в $L^p(0, \omega)$ одно и только одно решение $f(x)$, которое можно представить следующим образом:

$$f(x) = P(\varphi) N_1(x) + Q(\varphi) N_2(x) + R(x; \varphi), \tag{1.3}$$

где

$$P(\varphi) = \int_0^{\omega} \varphi'(t) N_2(\omega - t)\, dt, \quad Q(\varphi) = \varphi(\omega) - \int_0^{\omega} \varphi'(t) N_1(\omega - t)\, dt, \tag{1.4}$$

$$R(x, \varphi) = -\int_x^{\omega} \varphi'(x - t + \omega) N_2(t)\, dt - \int_x^{\omega} \int_{\omega - x}^{\omega} \varphi''(x - t + s) [N_2(\omega - s) \times N_1(t) - N_1(\omega - s) N_2(t)]\, ds dt. \tag{1.5}$$

(Через $W_q^{(2)}(0, \omega)$ обозначается класс функции $\varphi(x)$ таких, что $\varphi''(x) \in L^q(0, \omega)$.

2°. Введем еще обозначение

$$\|\varphi\|_p = \left[\int_0^{\omega} |\varphi(x)|^p\, dx \right]^{1/p}.$$

Тогда из (1.5) следует оценка

$$|R(x, \varphi)| \leqslant \|N_2\|_p [\|\varphi'\|_q + 2 \|N_1\|_p \|\varphi''\|_q]. \tag{1.6}$$

Сравнивая (1.3) и (1.6), получаем

$$f(x) = P(\varphi) N_1(x) + Q(\varphi) N_2(x) + O(1). \tag{1.7}$$

Из (1.7) непосредственно вытекает

Теорема 1.2. Пусть выполняются условия теоремы 1.1 и функция $C_1 N_1(x) + C_2 N_2(x)$ ограничена на сегменте $[0, \omega]$ лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Тогда решение $f(x)$ уравнения (0.3) ограничено на сегменте $[0, \omega]$ в том и только в том случае, когда

$$P(\varphi) = 0, \quad Q(\varphi) = 0. \tag{1.8}$$

В ряде прикладных вопросов [5, 6] из физических соображений вытекает требование ограниченности решения $f(x)$. В частности, представляет интерес

Задача А. Пусть правая часть уравнения (0.3) имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + C_1 + C_2 x. \tag{1.9}$$

Требуется так подобрать постоянные C_1 и C_2, чтобы соответствующее решение $f(x)$ было ограниченным на сегменте $[0, \omega]$.

Следствие 1.1. Если выполняются условия теоремы 1.2 и

$$R = \int_0^\infty N_2(t)\,dt \neq 0, \tag{1.10}$$

то задача А имеет одно и только одно решение.

В самом деле, из (1.4), (1.8) и (1.9) выводим:

$$C_2 = -\frac{1}{R}\int_0^\infty \varphi_0'(x)\,N_2(\omega - x)dx,$$

$$C_1 = \int_0^\infty [\varphi_0'(x) + C_2]\,N_1(\omega - x)\,dx - \varphi_0(\omega) - C_2\omega.$$

§ 2. Поведение решений при $x \to 0$ и $x \to \omega$

1°. Дополнительно к условиям теоремы 1.1 в данном параграфе будем предполагать, что

$$N_1(x) = \alpha_1 x^{-\gamma} + \beta_1 (\omega - x)^{-\nu} + O(1) \quad (0 \leqslant x \leqslant \omega), \tag{2.1}$$

$$N_2(x) = \alpha_2 x^{-\gamma} + \beta_2 (\omega - x)^{-\nu} + O(1) \quad (0 \leqslant x \leqslant \omega), \tag{2.2}$$

причем

$$\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0, \quad 0 < \gamma, \ \nu < 1. \tag{2.3}$$

Формула (1.7) принимает теперь вид

$$f(x) = P_1(\varphi)\,x^{-\gamma} + Q_1(\varphi)(\omega - x)^{-\nu} + O(1) \quad (0 \leqslant x \leqslant \omega), \tag{2.4}$$

где

$$P_1(\varphi) = \alpha_1 P(\varphi) + \alpha_2 Q(\varphi), \quad Q_1(\varphi) = \beta_1 P(\varphi) + \beta_2 Q(\varphi). \tag{2.5}$$

В силу (2.4) верна

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.1 *и соотношения* (2.1)—(2.3). *Решение* $f(x)$ *уравнения* (0.3) *является ограниченным на левом конце* $(x = 0)$ *интервала* $(0, \omega)$ *в том и только том случае, когда*

$$P_1(\varphi) = 0. \tag{2.6}$$

В теории движения подводного крыла [6] известен постулат Жуковского—Чаплыгина, согласно которому скорость у задней кромки крыла должна быть конечной. Это условие приводит к следующей задаче.

Задача В. Пусть правая часть уравнения (0.3) имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + C. \tag{2.7}$$

Требуется так подобрать постоянную C, чтобы соответствующее решение $f(x)$ было ограниченным на левом конце ($x = 0$) интервала $(0, \omega)$.

Следствие 2.1. Если выполняются условия теоремы 2.1 и

$$\alpha_2 \neq 0, \tag{2.8}$$

то задача B имеет одно и только одно решение. Действительно, из (1.4), (2.5)—(2.8) вытекает

$$C = -P_1(\varphi_0)/\alpha_2.$$

2°. В ряде работ по астрофизике [8, 9] рассматривались обратимые операторы вида

$$Sf = f(x) + \int_0^\infty f(t)\, k(x-t)\, dt,\ k(x) \in L(-\omega, \omega).$$

В этом случае функция $B(x, \lambda)$, определенная соотношением (0.4), непрерывна на сегменте $[0, \omega]$. Функции В. А. Амбарцумяна [8] вводятся следующим образом:

$$X(\lambda) = B(0, \lambda);\ Y(\lambda) = B(\omega, \lambda). \tag{2.9}$$

Как известно [8, 9], $\rho(\lambda, \mu)$ выражается через $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$.

При условиях (2.1)—(2.2) функции В. А. Амбарцумяна теряют смысл. Далее вводятся аналоги функций В. А. Амбарцумяна, при помощи которых снова удается выразить $\rho(\lambda, \mu)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1 *и соотношения* (2.1)—(2.3). *Тогда существуют пределы*

$$X(\lambda) = \lim_{x \to 0} B(x, \lambda)\, x^{\gamma},\ Y(\lambda) = \lim_{x \to \omega} B(x, \lambda)(\omega - x)^{\gamma}$$

и справедливо равенство

$$\rho(\lambda, \mu) = -i\, e^{i\omega\mu} \frac{X(\lambda)\, Y(-\mu) - X(-\mu)\, Y(\lambda)}{(\lambda + \mu)\, \Delta}. \tag{2.10}$$

Доказательство. При условиях теоремы 1.1 верно равенство [2]

$$\rho(\lambda, \mu) = -ie^{i\omega\mu} \frac{a(\lambda)\, b(-\mu) - b(\lambda)\, a(-\mu)}{\lambda + \mu}, \tag{2.11}$$

где

$$a(\lambda) = i\lambda \int_0^\infty e^{i\lambda t} N_2(\omega - t)\, dt,\ b(\lambda) = e^{i\lambda\omega} - i\lambda \int_0^\infty e^{i\lambda t} N_1(\omega - t)\, dt. \tag{2.12}$$

Из соотношений (1.3), (1.4) и (2.1), (2.2) выводим

$$X(\lambda) = a(\lambda)\, \alpha_1 + b(\lambda)\, \alpha_2,\ Y(\lambda) = a(\lambda)\, \beta_1 + b(\lambda)\, \beta_2. \tag{2.13}$$

Согласно (2.3) из (2.13) получаем

$$a(\lambda)=\frac{1}{\Delta}[\beta_2 X(\lambda)-\alpha_2 Y(\lambda)],\quad b(\lambda)=\frac{1}{\Delta}[-\beta_1 X(\lambda)+\alpha_1 Y(\lambda)]. \tag{2.14}$$

Сопоставляя (2.11) и (2.14), убеждаемся в справедливости доказываемого соотношения (2.10).

§ 3. Примеры

Рассмотрим интегральные уравнения, встречающиеся в прикладных задачах. Для каждого из этих уравнений найдем решения $N_1(x)$ и $N_2(x)$, принадлежащие пространству $L^p(0, \omega)$ $(1<p<2)$ и удовлетворяющие условиям (2.1)—(2.3). Тем самым будет доказано, что утверждения, содержащиеся в §§ 1, 2 верны для рассматриваемых уравнений.

Пример 1. Запишем уравнение

$$Sf\equiv\int_0^\omega f(t)\left[\ln\frac{A}{2|x-t|}+r(x-t)\right]dt=\varphi(x),\quad \varphi\in W_2^{(2)}(0,\omega), \tag{3.1}$$

где $A>0$, $A\neq\frac{\omega}{2}$.

Предположим, что уравнение

$$Sf=0 \tag{3.2}$$

имеет только тривиальное решение и при некотором C выполняется неравенство

$$|r''(x)|\leqslant C\ (-\omega\leqslant x\leqslant\omega). \tag{3.3}$$

Оператор вида (3.1), (3.3) появляется при рассмотрении контактных задач теории упругости в отсутствии сил трения между сжимаемыми телами [4].

Функции $N_1(x)$ и $N_2(x)$, удовлетворяющие уравнениям (1.1) существуют и имеют следующий вид [2]:

$$N_l(x)=\alpha_l x^{-\frac{1}{2}}+\beta_l(\omega-x)^{-\frac{1}{2}}+O(1)\quad (l=1,2). \tag{3.4}$$

Введем оператор S_0 равенством

$$S_0 f=\int_0^\omega f(t)\ln\frac{A}{2|x-t|}\,dt.$$

Через $N_2^0(x)$ и $L_2^0(x)$ обозначим решения следующих уравнений:

$$S_0 N_2^0(x)=1,\quad S_0 L_2^0(x)=X. \tag{3.5}$$

Известно, что [10]

$$N_2^0(x)=\frac{R}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(\omega-x)}},\quad R=\left(\ln\frac{2A}{\omega}\right)^{-1}, \tag{3.6}$$

$$L_2^0(x)=\frac{\omega}{2}N_2^0(x)+\frac{1}{\pi}\frac{x-\frac{\omega}{2}}{\sqrt{x(\omega-x)}}. \tag{3.7}$$

Из (3.1) и (3.5) вытекает:

$$SN_2^0 = \varphi_1, \quad SL_2^0 = \varphi_2, \tag{3.8}$$

где

$$\varphi_1(x) = 1 - \int_0^\omega N_2^0(t)\, r(x-t)\, dt, \quad \varphi_2(x) = X - \int_0^\omega L_2^0(t)\, r(x-t)\, dt. \tag{3.9}$$

Как видно из (3.3) и (3.9) $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in W_q^2(0, \omega)$. Поскольку уравнение (3.2) имеет только тривиальное решение, то по теореме 1.1 уравнения (3.8) имеют единственные решения, которые можно записать так:

$$\begin{cases} N_2^0(x) = P(\varphi_1)\, N_1(x) + Q(\varphi_1)\, N_2(x) + O(1) \\ L_2^0(x) = P(\varphi_2)\, N_1(x) + Q(\varphi_2)\, N_2(x) + O(1). \end{cases} \tag{3.10}$$

Из формул (3.6), (3.7) следует, что любая нетривиальная линейная комбинация $N_2^0(x)$ и $L_2^0(x)$ является неограниченной функцией. Тогда из (3.10) вытекает, что этим же свойством обладает пара функций $N_1(x)$ и $N_2(x)$. Значит, в силу (3.4) получаем

$$\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0.$$

Теперь для функции $B(x, \lambda)$, являющейся решением уравнения (0.4), верны соотношения

$$B(x, \lambda) = \frac{X(\lambda)}{\sqrt{x}} + 0(1) \ (x \to 0); \quad B(x, \lambda) = \frac{Y(\lambda)}{\sqrt{\omega - x}} + O(1) \ (x \to \omega). \tag{3.11}$$

Функции $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$, определенные равенством (3.11), являются аналогами функций В. А. Амбарцумяна (2.9) из § 2. Функция $\rho(\lambda, \mu)$ вычисляется по формуле (2.10). В некоторых частных случаях аналоги функций В. А. Амбарцумяна вводились в работах [2, 11].

Пример 2. Запишем уравнение Т. Карлемана [10]

$$S_0 f \equiv \int_0^\omega f(t)\, |x-t|^{-h}\, dt = \varphi(x), \quad 0 < h < 1, \quad \varphi \in W_q^{(2)}. \tag{3.12}$$

Известно [10], что функции $N_2^0(x)$ и $L_2^0(x)$, удовлетворяющие уравнениям

$$S_0 N_2^0 = 1, \quad S_0 L_2^0 = X, \tag{3.13}$$

имеют следующий вид:

$$N_2^0(x) = \frac{1}{\pi} \cos\frac{\pi h}{2} [x(\omega - x)]^{\frac{h-1}{2}}, \tag{3.14}$$

$$L_2^0(x) = \left(\frac{\omega}{2} + \frac{x - \frac{\omega}{2}}{h}\right) N_2^0(x). \tag{3.15}$$

Через T_0 обозначим оператор, являющийся правым обратным к S_0. В работах [2, 12], исследуя оператор T_0 в форме [1], было доказано, что при $f'(x) \in L^p(0, \omega)$ $\left(\frac{2}{1+h} < p \leqslant 2\right)$

$$S_0 T_0 f = f \tag{3.16}$$

и имеет место следующая оценка:

$$|T_0 f| \leqslant \text{const } [x(\omega - x)]^{\frac{h-1}{2}}. \tag{3.17}$$

Пусть $f'(x) \in L^{p_1}(0, \omega)$, где $\frac{2}{1+h} < P_1 < \min\left[\frac{1}{h}, 2\right]$. Тогда функция

$$\frac{d}{dx} S_0 f = f(0)\, x^{-h} - f(\omega)(\omega - x)^{-h} + \int_0^\omega f'(t)\, |x-t|^{-h}\, dt$$

принадлежит $L^{p_1}(0, \omega)$. Отсюда и из (3.16) выводим, что если $f'(x) \in L^{p_1}(0, \omega)$ и уравнение $S_0 f = 0$ имеет только тривиальное решение, то

$$T_0 S_0 f = f. \tag{3.18}$$

Рассмотрим теперь возмущенное уравнение Т. Карлемана:

$$Sf \equiv \int_0^\omega f(t)\, [|x-t|^{-h} + r(x-t)]\, dt = \varphi(x),\ 0 < h < 1,\ \varphi \in W_p^{(2)}(0, \omega). \tag{3.19}$$

Предположим, что уравнение

$$Sf = 0 \tag{3.20}$$

имеет в $L^p(0, \omega)$ только тривиальное решение и при некотором C выполняется неравенство

$$|r''(x)| \leqslant C\ (-\omega \leqslant x \leqslant \omega)). \tag{3.21}$$

К уравнению (3.19), (3.21) приводит рассмотрение контактной задачи нелинейной теории ползучести [13].

Методом регуляризации [2] легко доказывается, что если уравнение (3.20) имеет только тривиальное решение и $\varphi'(x) \in L^{p_1}(0, \omega)$, $\frac{2}{1+h} < P_1 < \min\left[\frac{1}{h}, 2\right]$, то уравнение (3.19), (3.21) имеет в $L^{p_1}(0, \omega)$ одно и только одно решение и существуют функции $N_1(x), N_2(x) \in L^{p_1}(a, \omega)$, удовлетворяющие уравнениям

$$SN_1 = \int_0^x [|t|^{-h} + r(t)]\, dt,\ SN_2 = 1. \tag{3.22}$$

Из (3.12), (3.19) и (3.22) имеем

$$S_0 N_1 = g_1,\ S_0 N_2 = g_2, \tag{3.23}$$

где

$$g_1=\int_0^x [|t|^{-h}+r(t)]\,dt-\int_0^\omega N_1(t)\,r(x-t)\,dt,\quad g_2=1-\int_0^\omega N_2(t)\,r(x-t)\,dt.$$

Поскольку $g_1'(x)$, $g_2'(x)\in L^{p_1}(0,\omega)$, то применяя оператор T_0 к левым и правым частям равенств (3.23) и учитывая (3.17), получим

$$N_l=\alpha_l x^{\frac{h-1}{2}}+\beta_l(\omega-x)^{\frac{h-1}{2}}+O(1)\quad (l=1,2).$$

Тот факт, что

$$\Delta=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$$

доказывается так же как и в примере 1.

Пример 3. В контактных задачах теории упругости при наличии сил трения возникает оператор [4]

$$Sf=\int_0^x f(t)\,dt+\mu\int_0^\omega f(t)\ln\frac{1}{|x-t|}\,dt. \tag{3.24}$$

Оператор S может быть представлен в форме (0.1), если положить

$$s(x)=\mu\int_0^x \ln\frac{1}{u}\,du+x\ (x>0),\quad s(x)=\mu\int_0^x \ln\frac{1}{|u|}\,du\ (x<0). \tag{3.25}$$

Введем обозначение

$$\lambda=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\pi\mu}\left(-\frac{1}{2}<\lambda<\frac{1}{2}\right). \tag{3.26}$$

Используя представление оператора $T=S^{-1}$ [4], легко показать, что функции $N_2(x)$ и $L_2(x)$, удовлетворяющие уравнениям

$$SN_2=1 \text{ и } SL_2=X,$$

имеют следующий вид:

$$N_2(x)=\frac{C_0}{X^{\frac{1}{2}+\lambda}(\omega-x)^{\frac{1}{2}-\lambda}},\quad L_2(x)=\frac{C_1+C_2X}{X^{\frac{1}{2}+\lambda}(\omega-x)^{\frac{1}{2}-\lambda}}, \tag{3.27}$$

где

$$C_0=\frac{\cos\pi\lambda}{\pi\mu D_1},\quad D_1=\ln\frac{1}{\omega}+\psi(1)+\psi\left(\frac{1}{2}-\lambda\right), \tag{3.28}$$

$$C_1=-\frac{\omega\cos\pi\lambda}{\pi\mu}\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\frac{D_2}{D_1},\quad D_2=\ln\frac{1}{\omega}+\psi(2)-\psi\left(\frac{3}{2}-\lambda\right), \tag{3.29}$$

$$C_2=\frac{\cos\pi\lambda}{\pi\mu},\quad \psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \tag{3.30}$$

Мы предполагаем ω таким, что $D_1\neq 0$.

Из (3.27) имеем

$$R=\int_0^{\omega} N_2(t)\,dt=\frac{1}{\mu D_1}\neq 0. \tag{3.31}$$

Как показано в работе [2], функция $N_1(x)$ может быть определена по формуле

$$N_1(x)=\frac{1}{R}\left[L_2(x)-\frac{\omega}{2}N_2(x)+\int_x^{\omega} N_2(t)\,dt\right]. \tag{3.32}$$

Из (3.27) и (3.32) выводим

$$N_l=a_l x^{-\frac{1}{2}-\lambda}+\beta_l(\omega-x)^{-\frac{1}{2}+\lambda}+O(1)\ (l=1,2), \tag{3.33}$$

где

$$a_1=\frac{\omega^{\lambda}}{R\sqrt{\omega}}\left(C_1-\frac{\omega}{2}C_0\right),\quad \beta_1=\frac{\omega^{-\lambda}}{R\sqrt{\omega}}\left(C_1+\omega C_2-\frac{\omega}{2}C_0\right), \tag{3.34}$$

$$a_2=\frac{\omega^{\lambda}C_0}{\sqrt{\omega}},\quad \beta_2=\frac{\omega^{-\lambda}C_0}{\sqrt{\omega}}. \tag{3.35}$$

Из (2.3), (3.31), (3.34) и (3.35) вытекает

$$\Delta=-\frac{C_0C_2}{R}=-\frac{\cos^2\pi\lambda}{\pi^2\mu}\neq 0. \tag{3.36}$$

Пример 4. При рассмотрении контактной задачи теории ползучести с учетом сил трения [14] и в теории случайных процессов [15] большую роль играет оператор вида

$$Sf=\int_0^{\omega} f(t)\,\frac{a_2+a_1\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\mu}}\,dt,\ 0<\mu<1,\ a_2>a_1\geqslant 0. \tag{3.37}$$

Решение $N_2(x)$ уравнения $SN_2=1$ имеет вид [14]:

$$N_2(x)=Dx^{-\rho}(\omega-x)^{\rho-\mu}\ (0<\rho<\mu<1), \tag{3.38}$$

где

$$D=\frac{H}{\pi},\quad \rho=\frac{1}{\pi}\arcsin(a_1+a_2)H, \tag{3.39}$$

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin\pi\mu}{\sqrt{a_1^2(1-\cos\pi\mu)+a_2^2(1+\cos\mu\pi)}}. \tag{3.40}$$

Используя этот результат можно показать, что функция $L_2(x)$, удовлетворяющая уравнению $SL_2=x$, равна

$$L_2(x)=\left(\omega\frac{\rho-\mu}{1-\mu}+\frac{x}{1-\mu}\right)N_2(x). \tag{3.41}$$

Обозначив через $B(\rho,\mu)$ бета-функцию, запишем:

$$R = \int_0^\infty N_2(t)\,dt = D\omega^{1-\mu} B(1-\rho, 1+\rho-\mu) \neq 0. \qquad (3.42)$$

Из (3.38) и (3.41), учитывая соотношение (3.32) между функциями $N_1(x)$, $N_2(x)$ и $L_2(x)$, получим

$$N_l(x) = \alpha_l x^{-\rho} + \beta_l(\omega - x)^{\rho-\mu} + O(1), \ (l = 1, 2), \qquad (3.43)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{R} D\omega^{1+\rho-\mu}\left(\frac{\rho-\mu}{1-\mu} - \frac{1}{2}\right), \ \beta_1 = \frac{1}{R} D\omega^{1-\rho}\left(\frac{1+\rho-\mu}{1-\mu} - \frac{1}{2}\right), \qquad (3.44)$$

$$\alpha_2 = D\omega^{\rho-\mu}, \ \beta_2 = D\omega^{-\rho}. \qquad (3.45)$$

Из формул (2.3), (3.42), (3.44) и (3.45) следует:

$$\Delta = -\frac{D}{(1-\mu) B(1-\rho, 1+\rho-\mu)} \neq 0.$$

Одесский филиал Киевского
проектно-конструкторского бюро АСУ

Поступила 27.III.1981

Ս. Մ. ՊՈԶԻՆ, Լ. Ա. ՍԱԽՆՈՎԻՉ. Տարբերական կորիզով հավասարման լուծումների վարքի մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում են

$$Sf = \frac{d}{dx}\int_0^\infty f(t)\, s(x-t)\, dt = \varphi(x)$$

տեսքի հավասարումներ, որտեղ S օպերատորը սահմանափակ է և գործում է $L^p(0, \omega)$ $(1 < p < 2)$ տարածության մեջ։ Գտնվում են այն պայմանները, որոնց դեպքում $f(x)$ լուծումը լինում է սահմանափակ և հետազոտվում է $f(x)$-ի վարքը $(0, \omega)$ ինտերվալի ծայրակետերի մոտ։ Առանձին դիտարկվում է $\varphi(x) = e^{i\lambda x}$ հատուկ աջ մասով հավասարումը և մտցվում են Վ. Հ. Համբարձումյանի ֆունկցիաների անալոգները։

Ստացված արդյունքները լուսաբանվում և նշգրտվում են առաձգականության տեսության, հիդրոդինամիկայի, պատահական պրոցեսների տեսության մեջ և ուրիշ կիրառական խնդիրներում կարևոր նշանակություն ունեցող օրինակների վրա։

S. M. POZIN, L. A. SAKHNOVICH. *On solution bihaviour of the equation with difference nucleus* (summary)

The equation of the form of

$$Sf = \frac{d}{dx}\int_0^\infty f(t)\, s(x-t)\, dt = \varphi(x),$$

are considered, where the operator S is bounded and acts in the space $L^p(0, \omega)$ $(1 < p < 2)$. The conditions for having bounded solutions $f(x)$ are found and solution's behaviour at the ends of the interval $(0, \omega)$ is considered. The equations with $\varphi(x) = e^{i\lambda x}$ is considered separately and V. H. Hambartsumian's functions analagues are considered.

The results are illustrated and made precise on the examples of importance in the theory of elasticity, hydromechanics, in the theory of random processes and in other applied problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Сахнович.* Об интегральном уравнении с ядром, зависящим от разности аргументов, Математические исследования, Кишинев, 8—2, 1973, 138—146.
2. *Л. А. Сахнович.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке, УМН, 35:4, 1980, 64—129.
3. *H. Hönt, A. W. Maue, K. Westpfahl.* Theorie der beugung, Berlin, Springer—Verlag, 1961. (русский перевод: Х. Хенл, А. Мауе, К. Вестпфаль, Теория дифракции, М., „Мир", 1964).
4. *И. Я. Штаерман.* Контактная задача теории упругости, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. *И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко.* Неклассические смешанные задачи теории упругости, М., «Наука», 1974.
6. *М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев.* О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости, Труды конференции по теории волнового сопротивления, ЦАГИ, 1937.
7. *Л. А. Сахнович.* Об уравнении обтекания подводного крыла, Тезисы докладов (Крыловские чтения), 1980, 136—138.
8. *В. А. Амбарцумян.* Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
9. *В. В. Соболев.* Рассеяние света в атмосферах планет, М., «Наука», 1972.
10. *T. Carleman.* Zur Theorie der linearen Integraleichungen, Math. Z., 9, 1921, 196—217.
11. *Ю. Н. Лебедев.* Аналоги функций Амбарцумяна для задачи дифракции на полосе, Радиотехника и электроника, 24:8, 1979, 1663—1665.
12. *С. М. Позин.* Об одном специальном уравнении первого рода, Украинский математический журнал, 28:4, 1976, 551—554.
13. *Н. Х. Арутюнян.* Плоская контактная задача теории ползучести, Прикладная математика и механика, XXIII, вып. 5, 1959, 901—924.
14. *Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения, Прикладная математика и механика, XXVII, вып. 5, 1963, 813—820.
15. *M. Kac.* On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. Sec. Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., Berkeley 1951, 189—215. (Русский перевод: Кац М. О некоторых связях теории вероятности с дифференциальными и интегральными уравнениями, Периодический сборник переводов иностранных статей, Математика, т. I, № 2, 1957, 95—124).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 5, 1982 Математика

УДК 517.98

А. О. БАБАЯН

ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА

§ 1. Введение. Формулировка результатов

В этой работе исследуется уравнение

$$\varphi(t) - \int_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds = f(t),\ t \geqslant 0. \qquad (1)$$

Здесь $k \in L^1(-\infty, \infty)$, $f \in L^p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, φ ищется из того же класса $L^p(0, \infty)$, которому принадлежит f. В случае, когда символ уравнения

$$1 - K(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{it\lambda}\, dt$$

отличен от нуля на всей вещественной оси, полное исследование (1) было дано М. Г. Крейном в [1]. В работах [2—5] рассматривается случай, когда символ имеет вырождение степенного вида в некоторых точках, то есть когда символ допускает представление:

$$1 - K(\lambda) = \prod_{k,j} \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + i}\right)^{\sigma_k} \left(\frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - i}\right)^{\eta_j} H(\lambda).$$

Здесь λ_k, λ_j — действительные числа, $\operatorname{Re} \sigma_k > 0$, $\operatorname{Re} \eta_j > 0$, $H(\lambda) \neq 0$ при всех действителеных λ. В работе М. И. Хайкина [6] рассматривался более общий случай, а именно, когда $\ln(1 - K(\lambda))$ локально интегрируем на вещественной оси. При дополнительных предположениях, что $\operatorname{mes} E(\lambda) < \lambda^\alpha$, где $E(\lambda) = \{t : |1 - K(t)| < \lambda\}$, $\alpha > 0$ и что $\arg(1 - K(\lambda))$ ограничен, доказывается возможность факторизации символа в классе S (класс медленно растущих распределений) и на этой основе решается однородное уравнение

$$\varphi(t) - \int_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds = 0,\ t > 0. \qquad (2)$$

В настоящей работе методом, отличным от метода работы [5], исследуется не только однородное, но и неоднородное уравнение в случае, когда символ допускает следующее представление:

$$1 - K(\lambda) = \theta(\lambda)(1 - H(\lambda)). \qquad (3)$$

Здесь $H(\lambda)$ — образ Фурье функции $h \in L^1(-\infty, \infty)$, $1 - H(\lambda) \neq 0$ для всех λ, а $\theta(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\theta(\lambda)=1,\ |\lambda|>2\varepsilon;\ \theta(\lambda)=\begin{cases} a\left|\dfrac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\alpha_1}, & 0>\lambda>-\varepsilon \\ b\left|\dfrac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\alpha_2}, & 0<\lambda<\varepsilon, \end{cases} \tag{4}$$

где a и b — постоянные, $a\neq 0$, $b\neq 0$. Кроме того предполагается, что $\theta(\lambda)$ не обращается в нуль нигде, кроме точки нуль, и что $\theta(\lambda)$ бесконечно дифференцируема везде, кроме точки нуль. Кроме того предполагается, что $\alpha_1-\alpha_2$ — действительное число (хотя α_1 и α_2, вообще говоря, комплексные числа, такие, что $\operatorname{Re}\alpha_1>0$, $\operatorname{Re}\alpha_2>0$). В дальнейшем не умаляя общности, можно предположить, что $\alpha_1-\alpha_2>0$.

В параграфе 2 будет доказано, что при этих условиях символ может быть представлен в виде

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\alpha_+}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{-\alpha_-}\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}, \tag{5}$$

где

$$\psi(\lambda)=\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda+i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2-\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right], \tag{6}$$

$$\operatorname{Re}\alpha_+>0,\ 0<\operatorname{Re}\alpha_-<1,\ \beta=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{4\pi i},\ \Phi^{\pm}(\lambda)\neq 0$$

для всех $\lambda\in\overline{D^{\pm}}$ ($D^+=\{z\in\mathbf{C}:\operatorname{Im}z>0\}$, $D^-=\{z\in\mathbf{C}:\operatorname{Im}z<0\}$), γ — целое число. Под $[\lambda/(\lambda+i)]^{\alpha_+}$, $[\lambda/(\lambda-i)]^{-\alpha_-}$ понимаются те ветви этих функций, которые аналитически продолжимы соответственно в D^+ и D^-. Пусть теперь

$$g_1(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\alpha_+}\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda+i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right], \tag{7}$$

$$g_2(\lambda)=\frac{1}{\Phi_0^-(\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\alpha_-}\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Тогда результаты, полученные в настоящей работе, могут быть сформулированы так:

1. Случай $1<p<\infty$. Предполагается, что преобразование Фурье правой части (1) допускает представление

$$F(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{m}G(\lambda)+F_1^-(\lambda), \tag{9}$$

где $G(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $g(t)\in L^1\cap L^p$, а $F_1^-(\lambda)$ — образ Фурье функции из L^1, и, кроме того, $F_1^-(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в D^-; $m=\left[\operatorname{Re}\alpha_+ + i\beta\pi+\dfrac{1}{p}\right]$, где $[\cdot]$ означает целую часть числа. Такому условию удовлетворяют, в частности, функции, имеющие некоторую скорость убывания на бесконечности, а именно

$$\int_0^{\infty} t^k |f(t)|\, dt < \infty, \quad k = 0, 1, \cdots, m+1.$$

Теорема 1. *Уравнение* (1) *с правой частью, допускающей представление* (9), *имеет решение, принадлежащее* $L^p(0, \infty)$ *при* $m + \gamma > 0$ *тогда и только тогда, когда выполнены* $m + \gamma$ *условий*

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-t} \psi_1(t)\, dt = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, m + \gamma - 1, \tag{10}$$

где $\psi_1(t)$ — *прообраз Фурье функции* $g_2(\lambda)\, G(\lambda)$. *Однородное уравнение не имеет нетривиальных решений.*

Теорема 2. *При* $m + \gamma = 0$ *существует и единственное решение уравнения* (1) *в классе* L^p *при правой части, допускающей представление* (9). *Это решение определяется как прообраз Фурье функции*

$$\Phi^+(\lambda) = g_1^{-1}(\lambda) \left(\frac{\lambda}{\lambda + i}\right)^m \Phi_0^+(\lambda)\, \pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)]. \tag{11}$$

Теорема 3. *При* $m + \gamma < 0$ *уравнение* (1) *при правой части, допускающей представление* (9), *всегда разрешимо, и однородное уравнение имеет* $|m + \gamma|$ *линейно независимых решений.*

Общее решение определяется как прообраз Фурье функции

$$\Phi^+(\lambda) = g_1^{-1}(\lambda) \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{-\gamma} \Phi_0^+(\lambda) \left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^m \times$$

$$\times \left[\pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)] + \sum_{j=0}^{-\gamma-m-1} \frac{c_j \lambda^j}{(\lambda - i)^{-\gamma-m}}\right]. \tag{12}$$

Здесь c_j — *произвольные постоянные.*

2. Случай $p = 1$. При $\alpha_+ + i\beta\pi \neq [\operatorname{Re} \alpha_+ + i\beta\pi]$ остаются справедливыми теоремы 1, 2, 3. При $\alpha_+ + i\beta\pi = [\operatorname{Re} \alpha_+ + i\beta\pi]$ достаточно требовать, чтобы преобразование Фурье правой части (1) допускало представление

$$F(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^{m-1} G(\lambda) + F_1^-(\lambda). \tag{13}$$

На $G(\lambda)$ и $F_1^-(\lambda)$ налагаются те же ограничения, что и в представлении (9). Тогда теоремы 1, 2, 3 будут верны при замене m на $m - 1$ и подстановке $G(\lambda)$ из представления (13).

3. Случай $p = \infty$. При $\operatorname{Re} \alpha_+ + i\beta\pi \neq [\operatorname{Re} \alpha_+ + i\beta\pi]$ остаются справедливыми теоремы 1, 2, 3. В случае, когда $\operatorname{Re} \alpha_+ + i\beta\pi = [\operatorname{Re} \alpha_+ + i\beta\pi]$ достаточно требовать, чтобы преобразование Фурье правой части (1) допускало представление (13). Тогда теоремы 1, 2, 3 будут выполнены при замене m на $m - 1$ и подстановке $G(\lambda)$ из (13).

§ 2. Вспомогательные предложения

Множество функций, имеющих вид

$$c+\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{it\cdot}\,dt,\ h\in L^1(-\infty,\infty) \tag{14}$$

будем обозначать R. Класс функций вида (14), когда $h(x)=0$ п.в. при $x<0$, обозначим R^+, а класс функций вида (14) с $h(x)=0$ п.в. при $x>0$ обозначим R^-. Свойства этих классов описаны в [1]. Обозначим через R_p, R_p^+, R_p^- классы преобразований Фурье функций, принадлежащих соответственно $L^p(-\infty,\infty)$, $L^p(0,\infty)$, $L^p(-\infty,0)$(где $L^p(0,\infty)$—класс функций из $L^p(-\infty,\infty)$, обращающихся в нуль на $(-\infty,0)$. Аналогично определяется $L^p(-\infty,0)$). Класс R_p при некоторых p состоит вообще говоря из обобщенных функций, действующих на S (пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций) таким образом:

$$(\hat{f},\psi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\hat{\psi}(t)\,dt \text{ при } \psi\in S.$$

Здесь $\hat{f}$ -- преобразование Фурье функции f. Если функция $h\in L^1(-\infty,\infty)$, то $\hat{h}\hat{f}$ будет обозначать следующую обобщенную функцию:

$$(\hat{h}\hat{f},\ \psi)=\int_{-\infty}^{\infty}(h*f)(t)\,\hat{\psi}(t)\,dt,\ \psi\in S. \tag{15}$$

Из этого определения ясно, что R_p инвариантен относительно умножения на функции из R (умножение понимается в смысле (15)). Аналогично R_p^+ (R_p^-) инвариантно относительно умножения на функции из R^+ (R^-). Операторы π^+ и π^-, переводящие R_p в R_p^+ и R_p^- соответственно, определим следующим образом:

$$\pi^+[\hat{f}]=\widehat{\chi f},\ \pi^-[\hat{f}]=\widehat{(1-\chi)f},$$

где $\chi(t)$ — функция Хевисайда.

При доказательстве теорем 1, 2, 3 будет использовано другое представление $1-K(\lambda)$.

Лемма 1. *При условиях, наложенных на символ уравнения* (1) *в* § 1, *символ допускает представление* (5).

Доказательство. Прежде всего, используя тот факт, что

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}},\ \lambda=\bar{\lambda}$$

(под $[\lambda/(\lambda+i)]^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}$, $[\lambda/(\lambda-i)]^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}$ понимаются те ветви этих функций, которые аналитически продолжимы соответственно в полуплоскости $D^+ = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $D^- = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$). Функцию $1 - K(\lambda)$ можно представить в виде

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\theta_1(\lambda)(1-H(\lambda)).$$

Здесь $\theta_1(\lambda)$ имеет в окрестности нуля следующий вид:

$$\theta_1(\lambda)=\begin{cases} a\left|\dfrac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}, & -\varepsilon<\lambda<0 \\ b\left|\dfrac{\lambda}{\lambda-i}\right|^{-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}, & 0<\lambda<\varepsilon. \end{cases}$$

Для того чтобы уничтожить этот разрыв в нуле введем функцию (6). Эта функция в окрестности нуля допускает такие оценки:

$$\psi(\lambda) \sim \exp[\beta\pi^2 - 2\pi i\beta \log|\lambda/(\lambda+i)|], \quad \lambda \to +0,$$
$$\psi(\lambda) \sim \exp[-\beta\pi^2 + 2\pi i\beta \log|\lambda/(\lambda+i)|], \quad \lambda \to -0.$$

Следовательно, если β определить из соотношения

$$2\pi i\beta = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2},$$

то функция

$$\eta(\lambda) = \psi^{-1}(\lambda)\,\theta_1(\lambda)\,(1-H(\lambda))$$

нигде не обращается в нуль, а в точке 0 имеет разрыв первого рода. Значит можно подобрать такое δ, чтобы

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{-\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\delta}\eta(\lambda)$$

была непрерывна в нуле. Для этого можно определить δ из соотношения

$$-\beta\pi^2+\frac{1}{2}\log\frac{b}{a}=-i\delta\pi$$

или

$$\delta = -i\beta\pi + \frac{i}{2\pi}\log\frac{b}{a},$$

Окончательно получим, что функция

$$g(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{-\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\delta}\eta(\lambda)$$

не обращается в нуль на $[-\infty, \infty]$ и непрерывна. Кроме того из вида функций $\theta_1(\lambda)$ и $\psi^{-1}(\lambda)$ можно заключить, что $g(\lambda) \in R$. Следовательно символ можно записать так:

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{-\delta}(c+H_0(\lambda)).$$

Здесь $H_0(\lambda)\in R_1$ и $c+H_0(\lambda)\neq 0$ для всех действительных λ. В силу этих свойств функция $c+H_0(\lambda)$ допускает факторизацию (см. [1]):

$$c+H_0(\lambda)=\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}.$$

В этой формуле $\Phi_0^+(\lambda)\in R^+$, $\Phi_0^-(\lambda)\in R^-$, $\Phi_0^+(z)\neq 0$ при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, $\Phi_0^-(z)\neq 0$ при $\operatorname{Im} z\leqslant 0$, $\varkappa$ — целое число, равное индексу функции $c+H_0(\lambda)$. В силу этого соотношения символ можно представить так:

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta}\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)},\qquad(5^*)$$

откуда и получается представление (5). При этом

$$\alpha_+=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\delta+\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta\right)\right]+1;\ \alpha_-=\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta\right)\right]+$$

$$+1-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\delta;\ \gamma=\varkappa-\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta\right)\right]-1.$$

Доказательство закончено.

Кроме того понадобится также одно свойство преобразований Фурье-Лапласа функций из $L^p(0,\infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Обозначим следующую дугу через Γ_ξ:

$$\Gamma_\xi=\{x+ix^2:\ 0\leqslant x\leqslant\xi\},\ \xi>0,$$
$$\Gamma_\xi=\{x+ix^2:\ \xi\leqslant x\leqslant 0\},\ \xi<0.\qquad(16)$$

Лемма 2. *Пусть*

$$\Phi^+(\lambda)=\int_0^\infty\varphi(t)\,e^{i\lambda t}\,dt,\ \operatorname{Im}\lambda>0.$$

Если $\varphi\in L^p(0,\infty)$ *при* $1<p<\infty$, *а* Γ_ξ *определяется формулами* (16), *то справедливы следующие оценки*:

$$|\Phi^+(\lambda)-c|=o(1),\ \lambda\to 0\ \textit{при}\ p=1,\qquad(17)$$

$$\left|\int_{\Gamma_\xi}\Phi^+(\lambda)\,d\lambda\right|=o(1)\,|\xi|^{\frac{1}{p}},\ \xi\to 0\ \textit{при}\ 1<p<\infty,\qquad(18)$$

$$\left|\int_{\Gamma_\xi}\Phi^+(\lambda)\,d\lambda\right|\leqslant c_0\|\varphi\|_-,\ \xi\to 0\ \textit{при}\ p=\infty.\qquad(19)$$

Здесь $c = \int_0^\infty \varphi(t)\,dt$, c_0 — *некоторая постоянная, не зависящая от* φ.

Доказательство. Оценка (17) очевидна, так как при $\varphi \in L^1(0, \infty)$ $\Phi^+(\lambda)$ непрерывна в замкнутой верхней полуплоскости D^+. Пусть $1 < p \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Имеем

$$\left|\int_{\Gamma_\xi} \Phi^+(\lambda)\,d\lambda\right| = \left|\int_0^\infty \varphi(t)\left(\int_{\Gamma_\xi} e^{i\lambda t}\,d\lambda\right)dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^\infty \varphi(t)\,\frac{e^{t(\xi+i\xi^2)\,t} - 1}{it}\,dt\right| \leqslant \|\varphi\|_p \left(\int_0^\infty \frac{|e^{t(\xi+i\xi^2)\,t} - 1|^q}{|t|^q}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c_0 \|\varphi\|_p |\xi|^{\frac{1}{p}}. \quad (20)$$

Здесь c_0 — абсолютная постоянная, а $\|\varphi\|_p$ — норма φ в $L^p(0, \infty)$. Это доказывает утверждение леммы в случае $p = \infty$. При $1 < p < \infty$ эту оценку можно уточнить. Действительно, (18) справедлива для функций $\varphi \in L^1(0, \infty)$, а так как такие функции образуют плотное подмножество в $L^p(0, \infty)$ при $1 < p < \infty$ в силу (20) получим, что оценка справедлива для всех функций из $L^p(0, \infty)$. Доказательство закончено.

§ 3. Доказательство теорем 1, 2, 3.

Наиболее существенную часть доказательства составляет следующее предложение.

Лемма 3. *Уравнение* (1) *в* $L^p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *при* $\gamma > 0$ *эквивалентно следующему уравнению*:

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^\gamma \frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = \pi^+ [g_2(\lambda) F(\lambda)]. \quad (21)$$

Здесь $F(\lambda)$ — *образ Фурье функции* f, *а решение* $\Phi^+(\lambda)$ *ищется в классе* R_p^+.

При $\gamma < 0$ *уравнение* (1) *эквивалентно такому уравнению*:

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^\gamma \frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = \pi^+ [g_2(\lambda) F(\lambda)] + \sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\zeta_{-k-\gamma}}{(\lambda - i)^k}. \quad (22)$$

Здесь $\sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\zeta_{-k-\gamma}}{(\lambda - i)^k}$ — *главная часть разложения Лорана функции*

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^\gamma \frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}.$$

Доказательство. Уравнение (1) можно записать в виде

$$\varphi(t) - \int_0^\infty k(t - s)\,\varphi(s)\,ds = b(t) + f(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Здесь φ и f доопределяются на $(-\infty, 0)$ равными нулю, а $b(t)$ определяется следующим образом:

$$b(t) = \begin{cases} 0, & t \geqslant 0 \\ -\int_0^{\infty} k(t-s)\,\varphi(s)\,ds, & t < 0. \end{cases}$$

Перейдем к преобразованиям Фурье:

$$(1 - K(\lambda))\,\Phi^+(\lambda) = \Phi^-(\lambda) + F(\lambda). \tag{23}$$

Здесь $\Phi^+(\lambda)$ — образ Фурье $\varphi(t)$, $\Phi^-(\lambda)$, $F(\lambda)$ — образы Фурье $b(t)$ и $f(t)$ соответственно. Учитывая представление (5) уравнение (23) примет вид:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\alpha_+}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{-\alpha_-}\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}\,\Phi^+(\lambda) = \Phi^-(\lambda) + F(\lambda).$$

Так как $g_2(\lambda) \in R^-$ (g_2 определяется из (8)), то можно умножить обе части уравнения на эту функцию. Тогда получим

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = g_2(\lambda)\,\Phi^-(\lambda) + g_2(\lambda)\,F(\lambda) \tag{24}$$

(g_1 определяется из (7)). Так как $g_2(\lambda)F(\lambda) \in R_p$, то эта функция единственным образом представима в виде суммы функции из R_p^+ и функции из R_p^-:

$$g_2(\lambda)F(\lambda) = \pi^+[g_2(\lambda)F(\lambda)] + \pi^-[g_2(\lambda)F(\lambda)].$$

Учитывая это равенство, уравнение (24) преобразуем в следующее уравнение:

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = g_2(\lambda)\,\Phi^-(\lambda) + \pi^+[g_2(\lambda)F(\lambda)] + \pi^-[g_2(\lambda)F(\lambda)].$$

Предположим сначала, что $\gamma \geqslant 0$. Перепишем уравнение (24) таким образом:

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} - \pi^+[g_2(\lambda)F(\lambda)] = g_2(\lambda)\,\Phi^-(\lambda) + \pi^-[g_2(\lambda)F(\lambda)]. \tag{25}$$

Так как $g_1(\lambda)$, $\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}$, $[\Phi_0^+(\lambda)]^{-1}$ принадлежат R^+, а $\Phi^+(\lambda) \in R_p^+$, то первый член разности в левой части (25) принадлежит R_p^+. В силу определения оператора π^+ функция $\pi^+[g_2(\lambda)F(\lambda)]$ также принадлежит R_p^+. Следовательно, левая часть (25) принадлежит R_p^+. Аналогично правая часть (25) принадлежит R_p^-. Отсюда сразу следует, что обе части должны равняться нулю, в частности

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = \pi^+[g_2(\lambda)F(\lambda)].$$

Таким образом, если φ удовлетворяет (1), то $\Phi^+(\lambda)$ удовлетворяет (21). Допустим теперь, что $\Phi^+(\lambda)$ удовлетворяет (21) и $\varphi \in L^p(0, \infty)$ — прообраз Фурье функции $\Phi^+(\lambda)$. Докажем, что φ — решение уравнения (1). Предположим, что это не так.

Тогда для некоторой функции $g(t) \in L^p(0, \infty)$ спреведливо:

$$\varphi(t) - \int_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds = g(t),\ t>0$$

(так как $\varphi \in L^p(0, \infty)$ и $k(t) \in L^1(-\infty, \infty)$). Принимая это уравнение за исходное после тех же рассуждений, с помощью которых перешли от (1) к (21), получим

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\tau}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = \pi^+[g_2(\lambda)\,G(\lambda)] \tag{26}$$

($G(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $g(t)$).

Но так как $\Phi^+(\lambda)$ удовлетворяет также и (21), то имеем

$$\pi^+[g_2(\lambda)(F(\lambda) - G(\lambda))] = 0$$

или

$$g_2(\lambda)(F(\lambda) - G(\lambda)) = R^-(\lambda), \tag{27}$$

где $R^-(\lambda) \in R_p^-$. Так как $g_2(\lambda)$ имеет вид (8), где β — чисто мнимое число, то существует целое число n такое, что функция

$$\psi(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^n [g_2(\lambda)]^{-1}$$

принадлежит R^-. После умножения равенства (27) на эту функцию получим

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^n (F(\lambda) - G(\lambda)) = \psi(\lambda)\,R^-(\lambda).$$

Правая часть этого равенства принадлежит R_p^-. Рассмотрим левую часть. Так как $F(\lambda) - G(\lambda)$ аналитически продолжима в D^+, то функция

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^n (F(\lambda) - G(\lambda))$$

может иметь в точке i полюс порядка не выше n. Пусть $\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(\lambda-i)^k}$ — главная часть разложения Лорана в точке i этой функции. Тогда функция

$$B(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^n (F(\lambda) - G(\lambda)) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(\lambda-i)^k}$$

аналитически продолжима в D^+. Кроме того $B(\lambda) \in R_p^-$, следовательно $B(\lambda) \equiv 0$ или

$$\lambda^n (F(\lambda) - G(\lambda)) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \lambda^j. \tag{28}$$

Так как $F(\lambda) - G(\lambda) \in R_p^+$, то при $1 \leqslant p < \infty$ из (28) следует, что $F(\lambda) \equiv G(\lambda)$. Следовательно, $f(t) = g(t)$ п.в. и φ является решением уравнения (1). Осталось рассмотреть случай $p = \infty$. В этом случае из (28) следует, что

$$G(\lambda) = F(\lambda) + \frac{c}{\lambda},$$

где c — некоторая постоянная, или в прообразах Фурье

$$g(t) = f(t) + c\,\theta(t).$$

Здесь

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Таким образом, надо доказать, что уравнение (1) с правой частью, равной $c\theta(t)$, не имеет решения в $L^\infty(0, \infty)$. Предположим противное, пусть φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(t) - \int_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds = c\,\theta(t),\ t > 0. \tag{29}$$

Перейдем к уравнению (21)

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^\gamma \frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = \pi^+ [g_2(\lambda)\, c\, \widehat{\theta}(\lambda)].$$

Но так как $g_2(\lambda) = 0$ при $\lambda = 0$, то

$$\pi^+ [g_2(\lambda)\, c\, \widehat{\theta}(\lambda)] = 0,$$

то есть $\Phi^+(\lambda) = 0$ ($\Phi^+(\lambda)$ ищется в классе R_-^+). Следовательно, (29) не имеет решения из $L^\infty(0, \infty)$.

Итак, доказано, что при $\gamma > 0$ все решения уравнения (1) в пространствах $L^p(0, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$ являются прообразами Фурье решений уравнения (21), принадлежащих R_p^+, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Аналогично доказывается, что (1) и (22) эквивалентны при $\gamma < 0$. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теорем 1, 2, 3.

1. Рассмотрим сначала уравнение (1) в пространствах $L^p(0, \infty)$, $1 < p < \infty$. В силу леммы 3 уравнение (1) можно свести к уравнению (21) при $\gamma > 0$ или к уравнению (22) при $\gamma < 0$.

а). Пусть $\gamma > 0$. Исследуем уравнение (21).

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^\gamma \frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = \pi^+ [g_2(\lambda)\, F(\lambda)].$$

Сначала преобразуем это уравнение. Так как $\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^\gamma$ и $\Phi^+(\lambda)$ принадлежат R, то можно умножить обе части уравнения на эти функции. Тогда получим

$$g_1(\lambda)\,\Phi^+(\lambda) = \Phi_0^+(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\gamma}\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]. \tag{30}$$

Теперь выясним, каким условиям должна удовлетворять функция $f \in L^p(0, \infty)$, чтобы это уравнение имело решение. Прежде всего, так как левая часть (30) аналитически продолжима в D^+, то и

$$\Phi_0^+(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\gamma}\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]$$

должна быть аналитична в D^+. А это означает, что функция $\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]$ должна иметь нуль порядка не ниже γ в точке i, так как $[(\lambda-i)/(\lambda+i)]^{-\gamma}$ имеет в этой точке полюс порядка γ, а $\Phi_0^+(\lambda)$ не обращается в нуль для всех $\lambda \in D^+$. То есть, если ψ — прообраз Фурье функции $g_2(\lambda)\,F(\lambda)$, то для разрешимости уравнения (30) необходимо выполнение следующих условий:

$$\int_0^\infty t^k e^{-t}\,\psi(t)\,dt = 0,\ k = 0, 1, \cdots, \gamma-1. \tag{31}$$

Кроме того, для разрешимости (30) в R_p^+ необходимо выполнение еще некоторых условий, так как наличие сомножителя $g_1(\lambda)$ в левой части (30) накладывает некоторые ограничения на поведение функции $\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]$ в окрестности нуля.

Функция $g_1(\lambda)$ имеет следующий порядок убывания при $\lambda \in \Gamma_\xi$, $\lambda| \to 0$ (Γ_ξ определено в (16))

$$g_1(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_+},\ \lambda = x + ix^2,\ x \to +0, \tag{32}$$

$$g_1(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_+}\exp[i\beta\pi\ \log\ |\lambda|] = |\lambda|^{\alpha_+ + i\beta\pi},\ \lambda = x + ix^2,\ x \to -0.$$

Таким образом, в силу (18) и (32) для левой части (30) справедлива следующая оценка:

$$\left|\int_{\Gamma_\xi} g_1(\zeta)\,\Phi^+(\zeta)\,d\zeta\right| = o(1)\,|\xi|^{\alpha_+ + i\beta\pi + \frac{1}{p}},\ \xi \to -0.$$

Следовательно, эта же оценка должна выполняться и для правой части (30):

$$\left|\int_{\Gamma_\xi} \pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]\,d\lambda\right| = o(1)\,|\xi|^{\alpha_+ + i\beta\pi + \frac{1}{p}},\ \xi \to -0. \tag{33}$$

Оценка (33) необходима, чтобы решение (21) существовало, но в более узком классе функций, преобразования Фурье которых допускают представление (9), она будет также и достаточной.

Посмотрим какой вид для таких функций примет функция $\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]$:

$$\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)] = \pi^+\left[g_2(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m G(\lambda) + g_2(\lambda)\,F_1^-(\lambda)\right] =$$

$$= \pi^+ \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m g_2(\lambda)\, G(\lambda) \right]$$

(равенство справедливо, так как $g_2(\lambda) \in R^-$). Далее

$$\pi^+ \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m g_2(\lambda)\, G(\lambda) \right] = \pi^+ \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m \left[\pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)] + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \pi^- [g_2(\lambda)\, G(\lambda)] \right] \right] = \pi^+ \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m \pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)] \right].$$

Пусть c_k — значение k-ой производной функции $\{\lambda^m \pi^+ [g_2(\lambda) \times \times G(\lambda)]\}$ в точке i. Рассмотрим функцию

$$E(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m \pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)] - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda - i)^k}. \qquad (34)$$

Так как $\sum_{k=1}^{m} \frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda - i)^k}$ — главная часть разложения Лорана функции $\left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m \pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)]$ в точке i, то функция (34) аналитична в D^+. Кроме того, так как по предположению $G(\lambda) \in R_1 \cap R_p$, то и функция (34) принадлежит тем же классам. Следовательно, по теореме Пэли-Винера

$$E(\lambda) = \pi^+ [E(\lambda)] = \pi^+ \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m \pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)] \right].$$

Окончательно

$$\pi^+ [g_2(\lambda)\, F(\lambda)] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m \pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)] - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda - i)^k}. \qquad (35)$$

Условие (33) в этом случае принимает вид:

$$\left| \int_{\Gamma_\xi} \left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m \pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)]\, d\lambda - \int_{\Gamma_\xi} \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda - i)^k}\, d\lambda \right| =$$

$$= o(1)\, |\xi|^{\alpha_+ + i\beta\pi + \frac{1}{p}}, \quad \xi \to -0.$$

Вспоминая, что $m = \left[\operatorname{Re} \alpha_+ + i\beta\pi + \frac{1}{p} \right]$, выводим

$$\left| \int_{\Gamma_\xi} \left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^m \pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)]\, d\lambda \right| = o(1)\, |\xi|^{\alpha_+ + i\beta\pi + \frac{1}{p}}, \quad \xi \to -0. \qquad (36)$$

Следовательно, для того, чтобы выполнялось (33), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\left| \int_{\Gamma_\xi} \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda - i)^k}\, d\lambda \right| = o(1)\, |\xi|^{\alpha_+ + i\beta\pi + \frac{1}{p}}, \quad \xi \to -0.$$

Выполнение этого условия возможно только при $c_k = 0$, $k = 0, 1, \cdots$ $\cdots, m-1$; то есть для того, чтобы (33) выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы сама функция $\pi^+ [g_2(\lambda) G(\lambda)]$ и первые $m-1$ ее производные обращались в нуль в точке i. Если $\psi_1(t)$ — прообраз Фурье функции $g_2(\lambda) G(\lambda)$, эти условия запишутся так:

$$\int_0^\infty t^k e^{-t} \psi_1(t)\, dt = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, m-1. \tag{37}$$

Можно объединить эти условия с (31). Действительно, учитывая (37) представление (35) примет вид

$$\pi^+ [g_2(\lambda) F(\lambda)] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^m \pi^+ [g_2(\lambda) G(\lambda)] \tag{38}$$

и, следовательно, условия (31) имеют вид

$$\int_0^\infty t^k e^{-t} \psi_1(t)\, dt = 0, \quad k = m, \cdots, \quad m + \gamma - 1.$$

Таким образом, для того, чтобы уравнение (21) было разрешимо в R_p^+, $1 < p < \infty$, когда $F(\lambda)$ допускает представление (9), необходимо выполнение $m + \gamma$ условий (10).

Эти условия будут также и достаточными. Действительно, если (10) выполнены, то справедлива формула (38) и, следовательно, функция

$$\Phi^+(\lambda) = \Phi_0^+(\lambda) \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{-\gamma} g_1^{-1}(\lambda) \left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^m \pi [g_2(\lambda) G(\lambda)]$$

является решением (21). Кроме того, так как $m = \left[\operatorname{Re} \varkappa_+ + i\beta\pi + \frac{1}{p} \right]$, то $\Phi^+(\lambda) \in R_p^+$. В случае $\gamma > 0$ теорема 1 доказана.

б). Пусть теперь $\gamma < 0$. Рассмотрим уравнение (22);

$$g_1(\lambda) \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\gamma} \frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = \pi^+ [g_2(\lambda) F(\lambda)] + \sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\zeta_{-k-\gamma}}{(\lambda - i)^k}.$$

Так же, как и при $\gamma \geqslant 0$, правая часть должна удовлетворять условию (33) для того, чтобы решение (22) в R_p^+ существовало:

$$\left| \int_{\Gamma_\xi} \left[\pi^+ [g_2(\lambda) F(\lambda)] + \sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\zeta_{-k-\gamma}}{(\lambda - i)^k} \right] d\lambda \right| = o(1) \, |\xi|^{\alpha_+ + i\beta\varkappa + \frac{1}{p}}, \quad \xi \to -0. \tag{39}$$

Для $F(\lambda)$, допускающих представление (9), справедлива формула (35), следовательно, учитывая (36), условие (39) примет вид

$$\left| \int_{\Gamma_\xi} \left[\sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\zeta_{-k-\gamma}}{(\lambda - i)^k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda - i)^k} \right] d\lambda \right| =$$

$$= o(1) \, |\xi|^{\alpha_+ + i\beta\varkappa + \frac{1}{p}}, \quad \xi \to -0. \tag{40}$$

Пусть сначала $m \geqslant -\gamma + 1$. В этом случае для выполнения (40) необходимо и достаточно, чтобы

$$\zeta_{-\gamma-k} = \frac{c_{m-k}}{(m-k)!}, \quad k = 1, \cdots, -\gamma, \tag{41}$$

$$c_{m-k} = 0, \quad k = -\gamma + 1, \cdots, m. \tag{42}$$

Тогда решение (22) запишется так:

$$\Phi^+(\lambda) = g_1^{-1}(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{-\gamma} \Phi_0^+(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^m \pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)]. \tag{43}$$

При выполнении условий (42) формула (43) определит решение (22) в R_p^+, причем можно проверить, что для этой $\Phi^+(\lambda)$ (41) также выполняются. Следовательно (42) необходимы и достаточны, чтобы решение (22) в R_p^+ существовало. Если ψ_1—прообраз Фурье функции $g_2(\lambda) \times$ $\times G(\lambda)$, то условия (42) имеют вид (10). Теорема 1 доказана.

Пусть теперь $m = -\gamma$. В этом случае условие (40) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\zeta_{m-k} = \frac{c_{m-k}}{(m-k)!}, \quad k = 1, \cdots, m. \tag{44}$$

Но формула (43), которая в этом случае примет вид (11), определяет функцию $\Phi^+(\lambda)$, которая удовлетворяет условиям (44) и является решением (22) в R_p^+. Теорема 2 доказана.

Теперь рассмотрим последний случай $m < -\gamma$.

Для выполнения условий (40) в этом случае необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\left\{\sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\zeta_{-\gamma-k}}{(\lambda - i)^k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{m-k}}{(m-k)!(\lambda - i)^k}\right\}$$

имела следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\zeta_{-\gamma-k}}{(\lambda - i)^k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{m-k}}{(m-k)!(\lambda - i)^k} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^m \frac{P_{-\gamma-m-1}(\lambda)}{(\lambda - i)^{-\gamma-m}}.$$

Здесь $P_{-\gamma-m-1}(\lambda)$ — полином степени $-\gamma - m - 1$. Из этого следует, что уравнение (22) в R_p^+ всегда разрешимо и однородное уравнение имеет $-\gamma - m$ линейно независимых решений. Общее решение определяется по формуле (12). Теорема 3 доказана.

2. В случае, когда уравнение (1) решается в пространстве $L^1(0, \infty)$ или $L^\infty(0, \infty)$ в силу леммы 2 условия (33) при $\gamma \geqslant 0$ и (3) при $\gamma < 0$ следует заменить на

$$\left| \frac{1}{|x|^{\varepsilon_+ + i\beta_+}} \pi^+ [g_2(x + ix^2)\, F(x + ix^2)] - c \right| = o(1), \quad x \to -0 \tag{45}$$

при $\gamma \geqslant 0$

$$\left| \frac{1}{|x|^{\alpha+\beta}} \left[\pi^+ [g_2(x+ix^2) F(x+ix^2)] + \sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\zeta_{-\gamma-k}}{(x+ix^2-i)^k} \right] - \right.$$

$$\left. - c \right| = o(1), \quad x \to -0, \tag{46}$$

при $\gamma < 0$ в случае $L^1(0, \infty)$; и

$$\left| \int_{\Gamma_\xi} \pi^+ [g_2(\lambda) G(\lambda)] \, d\lambda \right| \leqslant M \cdot |\xi|^{\alpha+\beta}, \quad \xi \to -0, \tag{47}$$

при $\gamma \geqslant 0$,

$$\left| \int_{\Gamma_\xi} \left[\pi^+ [g_2(\lambda) F(\lambda)] + \sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\zeta_{-\gamma-k}}{(\lambda-i)^k} \right] d\lambda \right| \leqslant M \cdot |\xi|^{\alpha+\beta}, \quad \xi \to -0, \tag{48}$$

при $\gamma < 0$ в случае $L^\infty(0, \infty)$. Все остальные рассуждения вполне аналогичны рассуждениям пункта 1.

§ 4. Случай симметрического ядра

Рассмотрим случай, когда ядро уравнения (1) симметрическое: $k(t) = \overline{k}(-t)$. В этом случае символ уравнения $1 - K(\lambda)$ — действительная функция. При этом условии факторизацию (5) можно уточнить. Рассмотрим представление символа (5*):

$$1 - K(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\delta} \left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-\delta} \psi(\lambda) \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa} \frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}.$$

Здесь $\psi(\lambda)$ — функция (6), $\delta = -i\beta\pi + \frac{i}{2\pi} \log [b/a]$, $i\beta\pi = \frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)$, a, b, α_1 и α_2 определяются из представления (4). Так как $1 - K(\lambda)$ — действительная функция, то $\alpha_1 = \overline{\alpha}_1$, $\alpha_2 = \overline{\alpha}_2$.

Перейдем к комплексно сопряженной функции

$$1 - K(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-i\beta\pi-\frac{i}{2\pi}\overline{\log [b/a]}} \left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+i\beta\pi+\frac{i}{2\pi}\overline{\log [b/a]}} \times$$

$$\times \psi(\lambda) \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\varkappa} \frac{\Phi_1^-(\lambda)}{\Phi_1^+(\lambda)}. \tag{49}$$

Здесь $\Phi_1^\pm(\lambda) = \overline{[\Phi_0^\mp(\lambda)]}^{-1}$, $\Phi_1^\pm(\lambda)$ аналитически продолжимы в $D^\pm$ и не обращаются в этих областях в нуль. Равенство (49) можно переписать в виде

$$1 - K(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-i\beta\pi+\frac{i}{2\pi}\overline{\log [b/a]}} \left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+i\beta\pi-\frac{i}{2\pi}\overline{\log [b/a]}} \times$$

$$\times \psi(\lambda) \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\varkappa} \frac{\Phi_1^-(\lambda)}{\Phi_1^+(\lambda)} \tag{50}$$

(были использованы соотношения:

$$\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda+i}-i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]=\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda+i}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{-2\pi i\beta}e^{-\beta\pi^2},$$

$$\exp\left[-\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-i}-i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]=\exp\left[-\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-i}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{2\pi i\beta}e^{\beta\pi^2}.$$

Для действительной функции $1-K(\lambda)$ представления (5*) и (50) должны совпадать. Следовательно, $(b/a)>0$ и $\varkappa=0$. Окончательно представление (5*) примет вид

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-\delta}\psi(\lambda)\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}, \tag{51}$$

причем $\operatorname{Re}\delta=-i\beta\pi$. Факторизация символа типа (5) имеет вид

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\delta+k}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-\delta-k}\psi(\lambda)\times$$

$$\times\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-k}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}, \tag{52}$$

где

$$k=\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+i\beta\pi\right]+1.$$

Следовательно, полученные результаты в данном случае примут следующий вид:

1. Пусть $1<p<\infty$ или $p=1,\ \infty$ и $\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)\right]\neq\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)$.

Предполагается, что $m=\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{p}\right]+k$.

Теорема 1′. *Уравнение* (1) *с правой частью, допускающей представление* (9), *имеет решение принадлежащее* $L^p(0,\infty)$, *при* $\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{p}\right]>0$ *тогда и только тогда, когда выполнены* $\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{p}\right]$ *условий*

$$\int_0^\infty t^k e^{-t}\psi_1(t)\,dt=0,\ k=0,\ 1,\cdots,\ \left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\frac{1}{p}\right]-1,$$

где $\psi_1(t)$ — *прообраз Фурье функции* $g_2(\lambda)G(\lambda)$. *Однородное уравнение не имеет нетривиальных решений.*

Теорема 2′. *При* $\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{p}\right]=0$ *существует единственное решение уравнения* (1) *в классе* $L^p(0,\infty)$ *при правой части, допускающей представление* (9). *Это решение определяется, как прообраз Фурье функции*

$$\Phi^+(\lambda)=g_1^{-1}(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^m \Psi_0^+(\lambda)\,\pi^+[g_2(\lambda)\,G(\lambda)].$$

2. Пусть $p=1$, $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)=\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)\right]$. Теорема 1′ останется в силе при замене m на $m-1$ и $\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\frac{1}{p}\right]$ — на $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)$.

3. Пусть $p=\infty$, $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)=\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)\right]$. Теоремы 1′ и 2′ останутся в силе при замене m на $m-1$ и $\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\frac{1}{p}\right]$ — на $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-1$.

Случай, когда $\alpha_1+\alpha_2=0$ не рассматриваем, так как в этом случае символ не вырождается (см. [1]).

Пример.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(t)-\int_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds=ce^{-\delta t},\quad t>0, \tag{53}$$

где $\delta>0$

$$k(t)=(1-e^{-it})\frac{1}{t^2}-\frac{6}{t^4}+\left(\frac{6}{t^4}-\frac{6i}{t^3}-\frac{3}{t^2}\right)e^{it}.$$

Тогда

$$1-K(\lambda)=\begin{cases}\lambda, & 0<\lambda\leqslant 1\\ -\lambda^3, & -1\leqslant\lambda\leqslant 0\end{cases},\quad 1-K(\lambda)=1,\ |\lambda|>1.$$

Найдем решения этого уравнения, принадлежащие $L^\infty(0,\infty)$. Так как $\alpha_1=3$, $\alpha_2=1$, то $i\beta\pi=\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{1}{2}$ и

$$m-1=\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+i\beta\pi\right]=2.$$

Для функции $F(\lambda)$ — преобразования Фурье функции $ce^{-\delta t}$, справедливо представление (9):

$$F(\lambda)=\frac{c}{\lambda+i\delta}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2\frac{c_1}{\lambda+i\delta}+\frac{c_2}{\lambda-i}+\frac{c_3}{(\lambda-i)^2},$$

где

$$c_1=c\left(1+\frac{3}{\delta^2}\right),\quad c_2=-\frac{3c}{\delta^2},\quad c_3=\frac{ic}{\delta}\left(\frac{3}{\delta}-1\right),$$

следовательно

$$\pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)] = \frac{g_2(-\delta i)\, c_1}{\lambda + i\delta}.$$

В данном случае $\frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2) = 1$, следовательно, в силу 3, уравнение (53) имеет в $L^-(0, \infty)$ единственное решение, которое определяется как прообраз Фурье функции

$$\Phi^+(\lambda) = g_1^{-1}(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda + i}\right)^2 \Phi_0^+(\lambda)\, \frac{g_2(-\delta i)\, c_1}{\lambda + \delta i}.$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 31.VIII.1981

Ա. Հ. ԲԱԲԱՅԱՆ. Վիներ–Հոպֆի հավասարման հատուկ դեպք *(ամփոփում)*

Աշխատանքում հետազոտված է Վիներ-Հոպֆի ինտեգրալ հավասարումը $L_p(0, \infty)$ $1 < p < \infty$ *ցուցիչով։*

Հավասարման $1 - K(\lambda)$ *սիմվոլը, ըերքի շրջակայքում ունի հետևյալ գնահատականները՝*

$$1 - K(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_1}, \quad \lambda \to -0$$

$$1 - K(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_2}, \quad \lambda \to +0$$

որտեղ $\alpha_1 - \alpha_2$ *իրական թիվ է։*

Գտնված են համասեռ հավասարման բոլոր լուծումները և նույնպես լուծման պայմանները ոչ համասեռ հավասարման համար, այդ մասի վրա որոշ սահմանափակումների դեպքում։

A. O. BABAYAN. *Degenerative case of Wiener—Hopf equation* (summary)

The paper investigates the Wiener—Hopf equation in $L^p(0, \infty)$, $1 < p < \infty$ classes. It is assumed that the $1 - K(\lambda)$ symbol of the equation admits the following behaviour at zero;

$$1 - K(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_1}, \quad \lambda \to -0,$$

$$1 - K(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_2}, \quad \lambda \to +0,$$

where $\alpha_1 - \alpha_2$ is the real number. Conditions making the non-homogeneous equation solvable and all solutions of homogeneous integral equation have been found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН 13, вып. 5, 1958, 3—120.
2. *Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский.* Особые интегральные уравнения типа свертки, Изв. АН СССР, сер. матем., 20, № 1, 1956, 3—52.
3. *Н. Е. Товмасян.* Особый случай интегрального уравнения Винера—Хопфа, Сибирский матем. журнал, XIX, № 4, 1978, 902—922.
4. *Н. К. Карапетянц.* Интегральные уравнения Винера—Хопфа с символом, имеющим нуль дробного порядка, Дифф. уравнения, т. XIII, № 8, 1977, 1471—1479.
5. *З. Прёсдорф.* Некоторые классы сингулярных уравнений, М., 1972.
6. *М. И. Хайкин.* Однородное уравнение Винера—Хопфа в классе функций умеренного роста, Изв. вузов, матем., 8, 1978, 91—103.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 5, 1982 Математика

УДК 517.983

М. [illegible]АВТЯН

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРОГО НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

§ 1. Постановка задачи. Необходимые пространства

На поверхности цилиндра $Q=[0,\ T]\times S^1$, где $S^1=\{z=e^{ix},\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi\}$ — единичная окружность, рассматривается задача Дирихле для нелинейного гиперболического уравнения

$$A(u)\equiv \Box^2 u+|u|^{p-2}u=h(t,\ x); \tag{1}$$

$$u(0,\ x)=u'(0,\ x)=0, \tag{2}$$

$$u(T,\ x)=u'(T,\ x)=0. \tag{3}$$

Здесь $u\equiv u(t,\ x): Q\to \mathbf{R}^1$ — искомая функция, $\Box\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ — волновой оператор, $p>1$ — произвольное число.

В настоящей работе методом компактности для нелинейных уравнений (см. [1], [2] и др.) доказывается корректность задачи Дирихле для нелинейного гиперболического уравнения вида (1). Отметим, что в случае линейных гиперболических уравнений с двойными характеристиками корректность задачи Дирихле была установлена в работах [3], [4] методом эллиптической регуляризации.

Как известно, рассмотрение задачи (1)—(3) на поверхности цилиндра эквивалентно рассмотрению этой же задачи в прямоугольнике $Q=[0,\ T]\times[0,\ 2\pi]$ с дополнительным условием периодичности по x. В дальнейшем удобно рассматривать исходную задачу именно в этой форме.

Введем необходимые пространства решений $u(t,\ x)$ и правой части $h(t,\ x)$ и дадим определение обобщенного решения.

Обозначим через $\overset{\circ}{H}(Q)$ пространство, полученное замыканием гладких функций $u(t,\ x)$, удовлетворяющих условиям (2), (3) и периодических по x с периодом 2π, по норме

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{H}(Q)}=\|\Box u\|^2_{L_2(Q)}+\|u\|^2_{L_p(Q)}. \tag{4}$$

Очевидно, $\overset{\circ}{H}(Q)$ — банахово пространство (при $p=2$ — гильбертово пространство).

Отметим, что функции $u(t,\ x)\in\overset{\circ}{H}(Q)$ имеют следы $u(t,\ x)$ и $u'(t,\ x)$ при любом $t\in[0,\ T]$ и удовлетворяют условиям (2), (3). Это вытекает из известной оценки решений задачи Коши для волнового уравнения:

$$\max_{t\in[0,\,T]}\left(\|u_t'(t,\,x)\|^2_{L_2(0,\,2\pi)}+\|u_x'(t,\,x)\|^2_{L_2(0,\,2\pi)}\right)\leqslant c\,\|\Box\, u\|^2_{L_2(Q)},$$

$c>0$ — некоторая постоянная.

Пространство $\overset{\circ}{H}(Q)$ есть пространство обобщенных решений задачи (1)—(3).

Определение 1. Функция $u(t,\,x)\in\overset{\circ}{H}(Q)$ называется обобщенным решением задачи (1)—(3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint\limits_Q \Box\, u\,\Box v dQ+\iint\limits_Q |u|^{p-2}uv dQ=\iint\limits_Q hv dQ, \tag{5}$$

где $v(t,\,x)\in\overset{\circ}{H}(Q)$ — произвольная функция.

Правая часть $h(t,\,x)$ будет выбираться из пространства $L_{p'}(Q)$, где $p'=\dfrac{p}{p-1}$.

§ Основная теорема

Целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Для любого* $h(t,\,x)\in L_{p'}(Q)$ *задача Дирихле* (1)—(3) *имеет единственное решение* $u(t,\,x)\in\overset{\circ}{H}(Q)$.

Доказательство. Пусть $v_1(t,\,x)$, $v_2(t,\,x)$, $\cdots$ — полная система функций в $\overset{\circ}{H}(Q)$. Приближенное решение $u_n(t,\,x)$ ищется в виде

$$u_n(t,\,x)=\sum_{j=1}^{n} c_j v_j(t,\,x),$$

где неизвестные постоянные c_1, c_2, $\cdots$, c_n определяются из системы (нелинейных) уравнений

$$\langle Au_n,\,v_j\rangle\equiv\iint\limits_Q\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right]\left[\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2}\right]dxdt+$$

$$+\iint\limits_Q |u_n|^{p-2}u_n v_j dxdt=\iint\limits_Q hv_j\,dxdt,\ j=1,\,2,\cdots,\,n. \tag{6}$$

Для доказательства разрешимости системы (6) относительно c_1, c_2, $\cdots$ $\cdots$, c_n нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\vec{P}(\vec{C})\equiv(P_1(\vec{C}),\cdots,P_n(\vec{C}))$ *— непрерывное отображение* $\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$. *Пусть далее на сфере* $S_R=\{\vec{C}:|\vec{C}|=R\}$ ($R>0$ — *некоторое число*) *выполнено „условие острого угла“*

$$(\vec{P}(\vec{C}),\,\vec{C})>0.$$

Тогда существует по крайней мере одна точка $\vec{C}$, $|\vec{C}| \leqslant R$, *такая, что*

$$\vec{P}(\vec{C}) = 0.$$

Лемма 1 известна и ее доказательство мы не приводим. Его можно найти, например, в [1], [2].

Лемма 2. *Имеет место следующее равенство:*

$$\langle Au_n, u_n \rangle = \|\Box u_n\|^2_{L_2(Q)} + \|u_n\|^p_{L_p(Q)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\langle Au_n, v_j \rangle = \iint_Q \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} \right] dxdt +$$

$$+ \iint_Q |u_n|^{p-2} u_n \, v_j \, dxdt, \; j = 1, 2, \cdots, n. \tag{7}$$

Умножая (7) на C_j и суммируя по j от 1 до n, получаем

$$\langle Au_n, u_n \rangle = \iint_Q \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right|^2 dxdt + \iint_Q |u_n|^p \, dxdt =$$

$$= \|\Box u_n\|^2_{L_2(Q)} + \|u_n\|^p_{L_p(Q)}.$$

Из приведенных лемм вытекает разрешимость системы (6) относительно $c_1, c_2, \cdots, c_n$. Действительно, обозначим через

$$P_j(c_1, c_2, \cdots, c_n) \equiv \iint_Q \Box u_n \, \Box v_j \, dxdt +$$

$$+ \iint_Q |u_n|^{p-2} u_n \, v_j \, dxdt - \iint_Q h \, v_j \, dxdt,$$

$$j = 1, 2, \cdots, n$$

и покажем, что векторное поле

$$\vec{P}(\vec{C}) \equiv |P_1(\vec{C}), P_2(\vec{C}), \cdots, P_n(\vec{C})|,$$

удовлетворяет условию леммы 1, т. е. при $|\vec{C}| \gg 1$: $(\vec{P}(\vec{C}), \vec{C}) \geqslant 0$. Имеем

$$(\vec{P}(\vec{C}), \vec{C}) \equiv \langle Au_n, u_n \rangle - \iint_Q h u_n \, dxdt \equiv$$

$$\equiv \iint_Q |\Box u_n|^2 \, dxdt + \iint_Q |u_n|^p \, dxdt - \iint_Q h u_n \, dxdt.$$

Так как $h(t, x) \in L_{p'}(Q)$, то применяя неравенство Юнга, получаем

$$\left|\iint_Q hu_n\,dxdt\right| \leqslant \varepsilon \iint_Q |u_n|^p\,dxdt + c(\varepsilon)\iint_Q |h|^{p'}\,dxdt, \tag{8}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная.

Таким образом

$$(\vec{P}(\vec{C}), \vec{C}) \geqslant \iint_Q |\Box u_n|^2\,dxdt + \iint_Q |u_n|^p\,dxdt -$$

$$-\varepsilon\iint_Q |u_n|^p\,dxdt - c(\varepsilon)\iint_Q |h|^{p'}dxdt =$$

$$= \iint_Q |\Box u_n|^2\,dxdt + (1-\varepsilon)\iint_Q |u_n|^p\,dxdt - c(\varepsilon)\iint_Q |h|^{p'}\,dxdt \equiv$$

$$\equiv \|\Box u_n\|^2_{L_2(Q)} + (1-\varepsilon)\|u_n\|^p_{L_p(Q)} - c(\varepsilon)\|h\|^{p'}_{L_{p'}(Q)}.$$

Итак, при некотором фиксированном $\varepsilon < 1$ получаем, что

$$(\vec{P}(\vec{C}), \vec{C}) \geqslant 0, \tag{9}$$

если норма $\|\Box u_n\|_{L_2(Q)} + \|u_n\|_{L_p(Q)}$ достаточно велика. Поскольку в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, это означает, что неравенство (9) выполнено и при $|\vec{C}| = R$, где $R > 0$ достаточно велико.

Таким образом, разрешимость системы (6) установлена и последовательность приближенных решений $u_n(t, x)$ найдена.

Получим для $u_n(t, x)$ априорную оценку. Докажем, что для всех $n = 1, 2, \cdots$ справедливо неравенство

$$\|\Box u_n\|^2_{L_2(Q)} + \|u_n\|^p_{L_p(Q)} \leqslant c, \tag{10}$$

где $c = c(h)$ не зависит от n.

Действительно, из системы уравнений (6) имеем

$$\iint_Q \Box u_n \Box u_n\,dxdt + \iint_Q |u_n|^p\,dxdt = \iint_Q h\,u_n\,dxdt.$$

Отсюда, применяя неравенство (8), получаем, что

$$\iint_Q |\Box u_n|^2\,dxdt + (1-\varepsilon)\iint_Q |u_n|^p\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant c(\varepsilon)\iint_Q |h|^{p'}\,dxdt.$$

При $0 < \varepsilon < 1$ фиксированном это означает справедливость неравенства (10).

Из оценки (10) и слабой компактности ограниченных множеств в рефлексивном банаховом пространстве вытекает, что существует под-

последовательность (обозначим ее по-прежнему u_n) такая, что $u_n(t, x)$ сходится в $L_p(Q)$ к некоторой функции $u(t, x)$ слабо, а $\Box u_n(t, x)$ слабо сходится в $L_2(Q)$ к функции $w(t, x)$. Учитывая, что $\Box$ — замкнутый оператор, имеем $w(t, x) \equiv \Box u(t, x)$. Таким образом,

$$u_n(t, x) \to u(t, x),$$

$$\Box u_n(t, x) \to \Box u(t, x),$$

$n \to \infty$, слабо, по крайней мере в $L_2(Q)$.

Однако, ввиду нелинейности рассматриваемой задачи, полученной слабой сходимости недостаточно для перехода к пределу при $n \to \infty$ в приближенных уравнениях (6). Покажем, что из оценки (10) следует, что $u_n(t, x) \to u(t, x)$, $n \to \infty$, сильно в $L_2(Q)$. Для этого воспользуемся известной оценкой решений задачи Коши для строго гиперболического уравнения и, в частности, волнового уравнения. Именно, если $u(t, x)$ — решение задачи Коши

$$\Box u = f(t, x)$$

(при условии периодичности по x), то имеет место неравенство

$$\max_{t \in [0, T]} \int_0^{2\pi} \left[\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|^2 \right] dx \leqslant k \| \Box u \|^2_{L_2(Q)}, \tag{11}$$

где $k > 0$ — некоторая постоянная.

Так как в силу (10) для приближенных решений $u_n(t, x)$ имеем $\| \Box u_n \|_{L_2(Q)} \leqslant c$, то получаем оценку

$$\max_{t \in [0, T]} \int_0^{2\pi} \left[\left| \frac{\partial u_n(t, x)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_n(t, x)}{\partial x} \right|^2 \right] dx +$$

$$+ \iint_Q |u_n(t, x)|^p \, dxdt \leqslant c(h).$$

Отсюда, в частности, получаем оценку

$$\| u_n \|_{W_2^1(Q)} + \| u_n \|_{L_p(Q)} \leqslant c,$$

где $c > 0$ не зависит от $n = 1, 2, \cdots$.

Из этой оценки и из компактности вложения $W_2^1(Q) \subset L_2(Q)$ следует, что подпоследовательность сходится к $u(t, x)$ сильно в $L_2(Q)$.

Покажем, что найденная функция $u(t, x)$ есть искомое решение. Для этого зафиксируем в (6) индекс j и устремим $n \to \infty$. Последовательно имеем

$$\iint_Q \Box u_n \Box v_j \, dxdt \to \iint_Q \Box u \Box v_j \, dxdt,$$

ибо $\Box u_n \to \Box u$, $n \to \infty$, слабо в $L_2(Q)$.

Так как $u_n(t, x) \to a(t, x)$, $n \to \infty$, сильно в $L_2(Q)$, то существует подпоследовательность (не станем менять обозначений и обозначим ее опять через $u_n(t, x)$) такая, что

$$u_n(t, x) \to u(t, x), \quad n \to \infty, \text{ почти всюду в } Q.$$

Покажем, что

$$\iint_Q |u_n|^{p-2} u_n v_j \, dxdt \to \iint_Q |u|^{p-2} u v_j \, dxdt, \quad n \to \infty.$$

Как известно (теорема Д. Витали, см., например, [5], с. 149), достаточным условием возможности предельного перехода под знаком интеграла является свойство равностепенной абсолютной непрерывности семейства интегралов.

В нашем случае надо установить равностепенную абсолютную непрерывность семейства интегралов

$$\iint_Q |u_n|^{p-2} u_n v_j \, dxdt. \tag{12}$$

Действительно, хорошо известно (следствие теоремы Ш.—Ж. Валле-Пуссена, см., например, [5], с. 152), что если семейство функций $f(t, x)$ образует ограниченное множество в $L_p(Q)$, то интегралы $\iint_Q |f(t, x)|^q \, dxdt$ равностепенно абсолютно непрерывны для любого $q < p$.

Так как для приближенных решений $u_n(t, x)$ имеем

$$\iint_Q |u_n(t, x)|^p \, dxdt \leqslant c,$$

то отсюда следует, что при любой фиксированной функции $v_j(t, x)$ (базисные функции $v_j(t, x)$ можно считать гладкими) интегралы (12) равностепенно абсолютно непрерывны.

По теореме Д. Витали получаем, что

$$\iint_Q |u_n|^{p-2} u_n v_j \, dxdt \to \iint_Q |u|^{p-2} u v_j \, dxdt, \quad n \to \infty.$$

В итоге полученных рассуждений из (6) следует, что для любой базисной функции $v_j(t, x)$ в пределе имеем

$$\iint_Q \square u_n \square v_j \, dxdt + \iint_Q |u|^{p-2} u v_j \, dxdt = \iint_Q h v_j \, dxdt,$$

$$j = 1, 2, \cdots.$$

Так как система $\{v_j(t, x)\}$ есть полная система в $\overset{\circ}{H}(Q)$, то $u(t, x)$ удовлетворяет тождеству

$$\iint_Q \square u \square v \, dQ + \iint_Q |u|^{p-2} u v \, dQ = \iint_Q h v \, dQ,$$

$\forall v \in \overset{\circ}{H}(Q)$, то есть найденная функция удовлетворяет исходному уравнению в смысле обобщенных функций.

Далее, из оценки (10) и неравенства (11) вытекает, что предельная функция $u(t, x)$ удовлетворяет всем граничным условиям (2), (3).

Итак, существование решения задачи (1) — (3) установлено.

Единственность. Пусть $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ — два обобщенных решения задачи (1) — (3) с конечным интегралом

$$\iint_Q |\square u_i|^2 \, dx dt + \iint_Q |u_i|^p \, dx dt, \quad i = 1, 2. \tag{13}$$

По определению обобщенного решения функции $u_i(t, x)$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\iint_Q \square u_i \square v dx dt + \iint_Q |u_i|^{p-2} u_i v \, dx dt = \iint_Q h v \, dx \, dt, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

где $v(t, x) \in \overset{\circ}{H}(Q)$ — произвольная функция.

Вычитая в (14) одно равенство из другого, получаем, что для любой функции $v(t, x) \in \overset{\circ}{H}(Q)$ имеем

$$\iint_Q \square (u_1 - u_2) \square v \, dx \, dt + \iint_Q [|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2] v \, dx dt = 0.$$

Положим в этом тождестве $v(t, x) \equiv u_1(t, x) - u_2(t, x)$. Тогда получим, что

$$\iint_Q |\square (u_1 - u_2)|^2 \, dx dt + \iint_Q [|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2] (u_1 - u_2) \, dx dt = 0. \tag{15}$$

Нетрудно вычислить, что

$$\iint_Q [|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2] (u_1 - u_2) \, dx dt \geqslant$$

$$\geqslant a_0 \iint_Q |u_1 - u_2|^p \, dx dt,$$

где $a_0 > 0$ — некоторая постоянная.

Следовательно, из (15) получаем, что

$$\iint_Q |\square (u_1 - u_2)|^2 \, dx dt + a_0 \iint_Q |u_1 - u_2|^p \, dx dt \leqslant 0.$$

Из последнего неравенства следует, что $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$.

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что совершенно аналогично может быть рассмотрена более общая задача

$$\Box^2 u + f(u) = h(t, x),$$

где $f(u)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция. Кроме того, тем же методом можно изучить нелинейные краевые задачи для гиперболических уравнений высших порядков с двойными характеристиками. Этому вопросу будет посвящена другая работа.

Армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 22.I.1982

Մ. Դ. ԴԱՎԹՅԱՆ. Մի ոչ գծային հիպերբոլական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը բազմապատիկ բնութագրիչներով ոչ ոչ գծային հիպերբոլական հավասարումների մի դասի համար։ Դրված խնդրի համար կոմպակտության մեթոդով հաստատվում է լուծելիությունը։

M. D. DABTYAN. *On the Dirichlet problem for a nonlinear hyperbolic equation* (summary)

The paper considers the Dirichlet problem for a class of nonlinear hyperbolic equations with multiple characteristics. The existence and uniqueness of the solution is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. А. Дубинский.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения, ВИНИТИ, Итоги науки и техники, т. 9, 1976, 5—130.
2. *Ж. Л. Лионс.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., «Мир», 1972.
3. *М. Д. Дабтян.* Общие краевые задачи для некоторых классов гиперболических уравнений высших порядков с двойными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», IX, № 4, 1974, 269—284.
4. *М. Д. Дабтян.* Теорема существования и единственности решения краевой задачи безмоментной теории оболочек для оболочки отрицательной кривизны, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIII, № 2, 1978. 151—157.
5. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М., «Наука», 1974.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Գ. Կրեյն, Յու. Լ. Շմուլյան. *Վիներ-Հոպֆի հավասարումները, որոնց կորիզները թույլ են տալիս ինտեգրալ ներկայացում էքսպոնենտի միջոցով* . . . 335
Ս. Մ. Պոզին, Լ. Ա. Սախնովիչ. *Տարբերական կորիզով հավասարման լուծումների վարքի մասին* 376
վարքի մասին 387
Մ. Դ. Դավթյան. *Մի ոչ գծային հիպերբոլական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի մասին* 405

СОДЕРЖАНИЕ

М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян. Уравнения Винера—Хопфа, ядра которых допускают представление через экспоненты 335
С. М. Позин, Л. А. Сахнович. О поведении решений уравнения с разностным ядром 376
А. О. Бабаян. Особый случай уравнения Винера—Хопфа 387
М. Д. Давтян. О задаче Дирихле для некоторого нелинейного гиперболического уравнения 405

CONTENTS

M. G. Krein, Ju. L. Smul'an. Wiener—Hopf equations, the kernels of which admit an integral representation by exponents 335
S. M. Pozin, L. A. Sakhnovich. On solution behaviour of the equation with difference nucleus 376
A. O. Babayn. Degenerative case of Wiener—Hopf equation 387
M. D. Davtyan. On the Dirichlet problem for a nonlinear hyperbolic equation 405