ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

պատասխանատու քարտուղար՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չշրջանցել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար երանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24ր, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
зам. главного редактора
Р. В. АМБАРЦУМЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН
зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

1982 T. 17 №4

ԳԻՆԸ 85 Կ.
ЦЕНА 85 К.

Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKIĬ

exacutive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutlan St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 4, 1982 Математика

УДК 517.984

Л. В. МИКАЕЛЯН

МАТРИЧНЫЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМ Г. СЕГЁ О ТЕПЛИЦЕВЫХ ДЕТЕРМИНАНТАХ

1°. Пусть

$$D_n(f) = \det \|c_{\nu-\mu}\|_{\nu,\mu=0}^{n}$$

— детерминант теплицевой матрицы образованной коэффициентами Фурье произвольной неотрицательной функции $f(t) \in L_1(0, 2\pi)$. Г. Сегё в работе [1] доказал, что справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln f(t)\,dt\right\} := G(f) \ (\geqslant 0).$$

В этой же работе он показал, что при $G(f) > 0$ последовательность

$$\left\{\frac{D_n(f)}{[G(f)]^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

— неубывающая. Спустя почти 40 лет Г. Сегё [2] нашел достаточное условие для конечности предела этого отношения и показал, что при выполнении этого условия

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n(f)}{[G(f)]^{n+1}} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k|h_k|^2\right\},$$

где h_k — коэффициенты Фурье функции $\ln f(t)$.

Уточнением и обобщением этих результатов Г. Сегё занимались многие математики: А. Н. Колмогоров, М. Г. Крейн, М. Кац, И. Хиршман, А. Девинатц, Дж. Бакстер, Я. Л. Геронимус и другие (см., например, обзорную статью И. Хиршмана [3]). Окончательный результат для неотрицательной функции получен в [4].

В работах Б. Дьиреша, Н. Бауерса, Г. Уидома (см. [5]) был рассмотрен вопрос об асимптотике детерминантов блочно-теплицевых матриц, порожденных коэффициентами Фурье матрицы-функции $\varphi(t)$.

М. Кац в работе [6] впервые установил существование континуальных аналогов приведенных результатов Г. Сегё, а именно, показал, что если

$$D_r(\lambda, K) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\int_0^r \cdots \int_0^r \det \|K(t_\nu - t_\mu)\|_{\nu,\mu=1}^{k}\, dt_1 \cdots dt_k$$

является детерминантом Фредгольма интегрального уравнения

$$f(t)+\lambda\int_0^r K(t-s)f(s)\,ds=g(t), \tag{1}$$

то при определенных условиях на ядро $K(t)$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\frac{D_r(\lambda, K)}{\exp\left\{\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln(1+\lambda\hat{K}(t))\,dt\right\}}=$$

$$=\exp\left\{\int_0^\infty x\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\ln(1+\lambda\hat{K}(t))\,dt\right|^2 dx\right\},$$

где $\hat{K}(t)$ — преобразование Фурье ядра $K(t)$.

Дальнейшие результаты в этом направлениии получены Н. И. Ахиезером [7], И. Хиршманом [3], В. Н. Солевым [8] и другими. В недавних работах Г. Уидома были получены далеко идущие обобщения этих результатов (см., например, [9]).

В работах автора [10], [11] рассматривался вопрос об асимптотическом поведении детерминантов Фредгольма усеченного интегрального оператора Винера—Хопфа [1] с матричным ядром. Тем самым, рассматривались матричные аналоги исследований М. Каца, Н. И. Ахиезера, И. Хиршмана и др. с одной стороны, и континуальные аналоги результатов Б. Дьиреша, Н. Бауерса и Г. Уидома—с другой.

В настоящей статье уточняются результаты работ [10], [11] и выявляется роль интеграла энтропии, введенного в работе Г. Дима и И. Ц. Гохберга [12], в континуальных аналогах теорем Г. Сегё, а также рассматривается асимптотическое распределение собственных значений усеченных операторов Венера-Хопфа.

2°. Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(t)+\lambda\int_0^r K(t,s)f(s)\,ds=g(t)\ (0\leqslant t\leqslant r), \tag{2}$$

где

$$K(t,s)=\|k_{ij}(t,s)\|_{i,j=1}^n$$

— непрерывная $n\times n$ — матрица-функция, определенная в квадрате $[0, R]\times[0, R]$; $f(t)=\{f_j(t)\}_{j=1}^n$ и $g(t)=\{g_j(t)\}_{j=1}^n$ — искомая и заданная n-мерная вектор-функции.

При помощи известной процедуры, предложенной Фредгольмом, мы можем векторное уравнение (2) свести к скалярному уравнению

$$F(t)+\lambda\int_0^{nr}K_r(t,s)F(s)\,ds=G(t)\quad(0\leqslant t\leqslant nr). \tag{3}$$

Связь функций $F(t)$, $G(t)$, $K_r(t, s)$ с исходными осуществляется формулами:

$$F(t) = f_i(t-(i-1)r),$$
$$G(t) = g_i(t-(i-1)r),$$
$$K_r(t, s) = k_{ij}(t-(i-1)r,\ \ s-(j-1)r),$$

если $(i-1)r \leqslant t < ir$, $(j-1)r \leqslant s < jr$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

Ясно, что спектры уравнений (2) и (3) совпадают. Поэтому естественно назвать детерминантом Фредгольма векторного уравнения (2) функцию

$$D_r(\lambda, K) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^{nr} \cdots \int_0^{nr} K_r \begin{pmatrix} s_1, \cdots, s_k \\ s_1, \cdots, s_k \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_k, \qquad (4)$$

где

$$K_r \begin{pmatrix} s_1, \cdots, s_k \\ s_1, \cdots, s_k \end{pmatrix} = \det \| K_r(s_i, s_j) \|_{i, j=1}^{k}$$

— символ Фредгольма.

Как известно [13], $D_r(\lambda, K)$ — целая функция от λ, и ее логарифмическая производная по λ является мероморфной функцией, которая при достаточно малых по модулю λ представима в виде ряда

$$\frac{D_r'(\lambda, K)}{D_r(\lambda, K)} = \sum_{p=1}^{\infty} (-\lambda)^{p-1} \int_0^{nr} \cdots \int_0^{nr} K_r(s_1, s_2) K_r(s_2, s_3) \cdots K_r(s_p, s_1)\, ds_1 \cdots ds_p$$

Учитывая связь между функцией $K_r(t, s)$ и элементами матрицы-функции $K(t, s) = \| k_{ij}(t, s) \|_{i, j=1}^{n}$, коэффициент при $(-\lambda)^{p-1}$ может быть переписан следующим образом:

$$\int_0^{nr} \cdots \int_0^{nr} K_r(s_1, s_2) \cdots K_r(s_p, s_1)\, ds_1 \cdots ds_p =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_p = 1}^{n} \int_{(i_1-1)r}^{i_1 r} \cdots \int_{(i_p-1)r}^{i_p r} K_r(s_1, s_2) \cdots K_r(s_p, s_1)\, ds_1 \cdots ds_p =$$

$$= \int_0^r \cdots \int_0^r \sum_{i_1, \cdots, i_p = 1}^{n} k_{i_1 i_2}(s_1, s_2) \cdots k_{i_p i_1}(s_p, s_1)\, ds_1 \cdots ds_p =$$

$$= \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} [K(s_1, s_2) \cdots K(s_p, s_1)]\, ds_1 \cdots ds_p.$$

Следовательно

$$\frac{D_r'(\lambda, K)}{D_r(\lambda, K)} = \sum_{p=1}^{\infty} (-\lambda)^{p-1} \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} [K(s_1, s_2) \cdots K(s_p, s_1)]\, ds_1 \cdots ds_p. \qquad (5)$$

Обозначим через $\Gamma_r(t, s, \lambda)$ ядро резольвенты векторного уравнения (2). Известно, что $\Gamma_r(t, s, \lambda)$ при фиксированных r, t, s является мероморфной матрицей-функцией от λ и для достаточно малых по модулю λ разлагается в степенной ряд

$$\Gamma_r(t, s, \lambda) = K(t, s) + \sum_{p=1}^{\infty} (-\lambda)^p \int_0^r \cdots \int_0^r K(t, s_1) K(s_1, s_2) \cdots$$

$$\cdots K(s_p, s_1)\, ds_1 \cdots ds_p. \tag{6}$$

Лемма 1. *Функция $D_r(\lambda, K)$ дифференцируема по r, ее производная по r является целой функцией от λ, и если $D_r(\lambda, K) \neq 0$, то имеет место формула*

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(\lambda, K) = \lambda \operatorname{sp} \Gamma_r(r, r, \lambda). \tag{7}$$

Доказательство. Из формулы (5) следует, что

$$\ln D_r(\lambda, K) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} |K(s_1, s_2) \cdots K(s_p, s_1)|\, ds_1 \cdots ds_p.$$

Этот ряд сходится равномерно по r при $r \in [0, R]$, $|\lambda| < 1/MR$, где $|k_{ij}(t, s)| \leqslant M$, $0 \leqslant t, s \leqslant R$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, а $k_{ij}(t, s)$ — элементы матрицы-функции $K(t, s)$.

Нетрудно видеть, что при таких λ этот ряд можно почленно дифференцировать относительно r. В самом деле, ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \frac{d}{dr} \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} [K(s_1, s_2) \cdots K(s_p, s_1)]\, ds_1 \cdots ds_p =$$

$$= \lambda \operatorname{sp} \{K(r, r) + \sum_{p=2}^{\infty} (-\lambda)^{p-1} \int_0^r \cdots$$

$$\cdots \int_0^r K(r, s_1)\, K(s_1, s_2) \cdots K(s_{p-1}, r)\, ds_1 \cdots ds_{p-1}\}$$

сходится равномерно по r при $r \in [0, R]$. Поэтому в силу (6) получим

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(\lambda, K) = \lambda \operatorname{sp} \Gamma_r(r, r, \lambda)$$

при $|\lambda| < 1/MR$.

Покажем, что $D_r(\lambda, K)$ имеет производную по r, являющуюся также целой функцией от λ. Из (4) ясно, что

$$D_r(\lambda, K) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r) \frac{\lambda^k}{k!}, \tag{8}$$

где

$$a_k(r)=\int_0^{kr}\cdots\int_0^{kr}\det\|K_r(t_\mu,\ t_\nu)\|_{\mu,\nu=1}^{k}\,dt_1\cdots dt_k=$$

$$=\int_0^{r}\cdots\int_0^{r}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}\det\|k_{i_\mu i_\nu}(t_\mu,\ t_\nu)\|_{\mu,\nu=1}^{k}\,dt_1\cdots dt_k.$$

Следовательно

$$a_k'(r)=\sum_{p=1}^{k}\int_0^{r}\cdots\int_0^{r}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}\det\|k_{i_\mu i_\nu}(t_\mu,\ t_\nu)\|_{\mu,\nu=1}^{k}\Big|_{t_p=r}dt_1\cdots$$

$$\cdots dt_{p-1}\,dt_{p+1}\cdots dt_k.$$

Используя неравенство Адамара для $a_k'(r)$, получаем оценку

$$|a_k'(r)|\leqslant M^k k^{k/2+1} r^{k-1} n^k \quad (k=1,\ 2,\cdots).$$

После дифференцирования ряда (8) по r для коэффициента при λ^k получаем оценку

$$\left|\frac{a_k'(r)}{k!}\right|\leqslant\frac{(Mnr)^k}{r}\cdot\frac{k^{k/2+1}}{k!}.$$

Отсюда следует, что $d/dr\,D_r(\lambda,\ K)$ существует и является целой функцией от λ при любом фиксированном r.

Но при $|\lambda|<1/MR$ мы доказали справедливость формулы (7), поэтому при таких λ

$$\frac{d}{dr}\,D_r(\lambda,\ K)=\lambda D_r(\lambda,\ K)\,\mathrm{sp}\,\Gamma_r(r,\ r,\ \lambda).$$

Так как в обеих частях последнего равенства стоят целые функции от λ, то оно верно при любых λ. Лемма доказана.

Отметим, что при $n=1$ мы получаем результат, полученный впервые Н. И. Ахиезером в [7].

3°. В дальнейшем, если через B обозначено некоторое банахово пространство, то через $B^{(n)}$ обозначается множество всех n-мерных векторов с координатами из B, а через $B^{(n\times n)}$ — множество всех матриц порядка $n\times n$ с элементами из B. Норма элемента $B^{(n)}$ ($B^{(n\times n)}$) определяется, например, равной сумме норм компонент (всех элементов). При этом нетрудно видеть, что $B^{(n)}$ и $B^{(n\times n)}$ превращаются в банаховы пространства. Обозначим также через $L_p=L_p(-\infty,\ \infty)$ $L_{p+}=L_p(0,\ \infty)$ и через $C[a,\ b]$ — пространство непрерывных на $[a,\ b]$ функций.

Пусть $K(t)$ — непрерывная матрица-функция из $L_1^{(n\times n)}$. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$f(t)+\int_0^{r}K(t-s)\,f(s)\,ds=g(t)\ (0\leqslant t\leqslant r),\qquad(9)$$

где $f(t)\in C^{(n)}[0,\ r]$ и $g(t)\in C^{(n)}[0,\ r]$.

Детерминант Фредгольма этого уравнения определим по формуле (4), принимая в ней $\lambda=1$ и $K(t, s)=K(t-s)$. Обозначим этот детерминант через $D_r(K)$.

Из теории Фредгольма следует, что если $D_r(K)\neq 0$, то интегральное уравнение (9) имеет единственное решение при любой $g(t)\in C^{(n)}[0, r]$, а соответствующее ему однородное уравнение—только тривиальное решение.

Наряду с уравнением (9) рассмотрим еще уравнение, порожденное ядром $K(-t)$, т. е. уравнение

$$f(t)+\int_0^r K(s-t)\,f(s)\,ds=g(t)\ (0\leqslant t\leqslant r). \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что если $D_r(K)\neq 0$, то уравнение (10) также имеет единственное решение при любой $g(t)\in C^{(n)}[0, r]$. В самом деле, однородные уравнения, соответствующие уравнениям (9) и (10), одновременно имеют тривиальные решения. Это следует из того, что если $f(t)$ — решение (9) при $g(t)\equiv 0$, $f(r-t)$ будет решением (10) при $g(t)\equiv 0$ и обратно.

Если $D_r(K)\neq 0$, то обозначим через $\Gamma_r^+(t, s)(\Gamma_r^-(t, s))$ ядро резольвенты уравнения (9) (10). Как известно, они удовлетворяют уравнениям

$$\Gamma_r^+(t, s)+\int_0^r K(t-u)\,\Gamma_r^+(u, s)\,du=K(t-s), \tag{11}$$

$$\Gamma_r^-(t, s)+\int_0^r K(u-t)\,\Gamma_r^-(u, s)\,du=K(s-t). \tag{12}$$

Из (11) и (12) нетрудно получить, что

$$\Gamma_r^+(t, s)=\Gamma_r^-(r-t, r-s). \tag{13}$$

Пусть $K(t)\in L_1^{(n\times n)}$. Обозначим через

$$\hat{K}(\lambda)=I_n+\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,K(t)\,dt\ (-\infty<\lambda<\infty),$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Очевидно, что матрица-функция $\hat{K}(\lambda)$ принадлежит матричному аналогу алгебры Винера $R^{(n\times n)}$. Алгебра Винера R состоит из функций $\hat{f}(\lambda)$, допускающих представление

$$\hat{f}(\lambda)=\hat{f}(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\lambda}\,dt, \tag{14}$$

где $\hat{f}(\infty)$ — некоторая постоянная, а $f(t) \in L_1$. Подалгебра $R_+(R_-)$ алгебры R определяется следующим образом: $\hat{f}(\lambda) \in R_+(R_-)$, если в представлении (14) $f(t) = 0$ при $t < 0$ ($t > 0$).

Известно, что всякая неособенная матрица-функция $F(\lambda)$ из алгебры $R^{(n\times n)}$ допускает представление

$$F(\lambda) = F_+(\lambda) D(\lambda) F_-(\lambda) \quad (F(\lambda) = \tilde{F}_-(\lambda) \tilde{D}(\lambda) \tilde{F}_+(\lambda)),$$

называемое левой (правой) стандартной факторизацией. Здесь $F_\pm^{\pm 1}(\lambda) \in R_\pm^{(n\times n)}$ ($\tilde{F}_\pm^{\pm 1}(\lambda) \in R_\pm^{(n\times n)}$)($A^{-1}$—обратная матрица матрицы A), а матрица-функция $D(\lambda)$ ($\tilde{D}(\lambda)$)— диагональная вида

$$\left\| \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\varkappa_j} \delta_{jk} \right\|_{j,\,k=1}^{n} \left(\left\| \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\tilde{\varkappa}_j} \delta_{jk} \right\|_{j,\,k=1}^{n} \right),$$

где $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n$ ($\tilde{\varkappa}_1 \geqslant \tilde{\varkappa}_2 \geqslant \cdots \geqslant \tilde{\varkappa}_n$) — некоторые целые числа, называемые левыми (правыми) частными индексами.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующей теоремой из книги [15].

Теорема Г—Ф. Пусть $K(t) \in L_1^{(n\times n)}$ и

а) $\det \hat{K}(\lambda) \neq 0$ $(-\infty < \lambda < \infty)$,

б) левые и правые индексы матрицы-функции $\hat{K}(\lambda)$ равны нулю. Тогда уравнение

$$f(t) + \int_0^r K(t-s) f(s)\, ds = g(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant r),$$

начиная с некоторого r имеет единственное решение $f_r(t) \in L_p^{(n)}(0, r)$, и вектор-функции

$$\tilde{f}_r(t) = \begin{cases} f_r(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant r \\ 0 & \text{при } t > r \end{cases}$$

сходятся при $r \to \infty$ по норме пространства $L_{p+}^{(n)}$ к решению уравнения

$$f(t) + \int_0^\infty K(t-s) f(s)\, ds = g(t)$$

какова бы ни была вектор-функция $g(t) \in L_{p+}^{(n)}$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

Теорема 2. *Пусть непрерывная матрица-функция $K(t)$ из $L_1^{(n\times n)} \cap L_2^{(n\times n)}$ удовлетворяет условиям:*

а) $\det \hat{K}(\lambda) \neq 0 (-\infty < \lambda < \infty)$,

б) *левые и правые индексы матрицы-функции* $\hat{K}(\lambda)$ *равны нулю. Тогда имеет место формула*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\lambda|}{T}\right) \ln \det \hat{K}(\lambda)\, d\lambda.$$

Доказательство. В условиях теоремы применима теорема Г—Ф. В силу которой, начиная, с некоторого $r \geqslant R_0$ $D_r(K) \neq 0$. Для таких r, согласно лемме 1, имеем

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(K) = \operatorname{sp} \Gamma_r^+(r, r).$$

Учитывая формулу (13), получим

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(K) = \operatorname{sp} \Gamma_r^-(0, 0). \tag{14}$$

Нетрудно доказать (см. [10], стр. 280), что

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{sp} \Gamma_r^-(0, 0) = \operatorname{sp} \Gamma(0), \tag{15}$$

где $\Gamma(t)$ является решением уравнения

$$\Gamma(t) + \int_0^\infty K(u - t)\, \Gamma(u)\, du = K(-t).$$

Из (14) и (15) немедленно следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \operatorname{sp} \Gamma(0).$$

Вычислим $\operatorname{sp} \Gamma(0)$.

В силу условий а) и б) имеем (см. [14])

$$\hat{K}(-\lambda) = \hat{K}_-(\lambda)\, [I_n - \hat{\Gamma}(\lambda)]^{-1},$$

где $\hat{K}_-^{\pm 1}(\lambda) \in R_-^{(n\times n)}$, а

$$I_n - \hat{\Gamma}(\lambda) = I_n - \int_0^\infty \Gamma(t)\, e^{i\lambda t}\, dt.$$

Следовательно

$$\det \hat{K}(-\lambda) = \det \hat{K}_-(\lambda)\, [\det (I_n - \hat{\Gamma}(\lambda))]^{-1}. \tag{16}$$

Очевидно, что

$$\det \hat{K}(-\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{0} k(t)\, e^{i\lambda t}\, dt, \tag{17}$$

где $k(t) \in L_1$, и так как $K(t)$ — непрерывная матрица-функция, то в представлении (17) можно считать, что $k(t)$ также непрерывна.

Очевидно также, что

$$\det [I_n - \hat{\Gamma}(\lambda)] \in R_+ \text{ и } \det \hat{K}_-(\lambda) \in R_-.$$

Допустим, что

$$\det [I_n - \hat{\Gamma}(\lambda)] = 1 - \int_0^\infty \gamma(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

где $\gamma(t) \in L_{1+}$ и непрерывна.

По теореме Винера–Леви (см. [16])

$$\ln \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, l(t)\, dt, \tag{18}$$

где $l(t) \in L_1$.

Поскольку $K(t) \in L_2$, то $k(t) \in L_2$, и, следовательно, правая часть (18) также из L_2 то есть $l(t) \in L_2$.

Из (17) имеем

$$k(t) = l(t) + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} l(t - s_1 - \cdots - s_{p-1})\, l(s_1) \cdots l(s_{p-1}) \times$$

$$\times\, ds_1 \cdots ds_{p-1}.$$

Ряд в правой части этого равенства представляет непрерывную функцию от t, так как он сходится равномерно и все члены являются непрерывными функциями, как свертки двух и более функций из L_2. Учитывая непрерывность функции $k(t)$, получаем, что в представлении (18) $l(t)$ можно выбрать непрерывной.

Из (16) и (18) после несложных вычислений получим, что

$$1 - \int_0^\infty \gamma(t)\, e^{i\lambda t}\, dt = \exp\left\{ - \int_0^\infty e^{i\lambda t}\, l(t)\, dt \right\},$$

откуда следует, что $\gamma(0) = l(0)$.

По известной теореме об обращении преобразования Фурье (см. [16], стр. 134), имеем

$$l(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\lambda|}{T}\right) \ln \det \hat{K}(\lambda)\, d\lambda.$$

Применяя те же рассуждения, что и в работе [10], получаем, что $\gamma(0) = \operatorname{sp} \Gamma(0)$. Теорема доказана.

4°. В этом пункте мы освободимся от условия непрерывности матрицы-функции $K(t)$. Дальнейшие построения настоящего пункта являются матричными аналогами конструкций И. Хиршмана [3].

Предположим, что $K(t) \in L_1^{(n \times n)} \cap L_2^{(n \times n)}$ и существуют следующие пределы:

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h K(t)\,dt := K(+0),\quad \lim_{h\to+0} h^{-1}\int_{-h}^0 K(t)\,dt := K(-0). \tag{19}$$

Впервые эти условия в скалярном случае ($n=1$) встречаются в работах И. Хиршмана (см., например, [3]).

Из формулы (5), если предположить, что $K(t, s)=K(t-s)$ и $K(t)$ непрерывная, можно получить, что

$$D_r(\lambda, K)=\exp\left\{\lambda r\,\mathrm{sp}\,K(0)-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^r\int_0^r \mathrm{sp}\,[K(s_1-s_2)K(s_2-s_1)\,ds_1ds_2+\cdots\right\}. \tag{20}$$

Из условия $K(t)\in L_2^{(n\times n)}$ следует, что существуют все интегралы в правой части равенства (20). Если предположить, что матрица-функция $K(t)$ вместо непрерывности удовлетворяет условиям (19), то под $D_r(K)$ мы понимаем $D_r(1, K)$, определенной по формуле (20) с

$$K(0)=1/2\,[K(+0)+K(-0)].$$

Рассмотрим матрицы-функции

$$E_r^+(t, s)=\Gamma_r^+(t, s)-K(t-s), \tag{21}$$

$$E_r^-(t, s)=\Gamma_r^-(t, s)-K(s-t). \tag{22}$$

Из формул (11) и (12) непосредственно следует, что матрицы-функции $E_r^+(t, s)$ и $E_r^-(t, s)$ удовлетворяют уравнениям

$$E_r^+(t, s)+\int_0^r K(t-u)E_r^+(u, s)\,du=-\int_0^r K(t-u)K(u-s)\,du, \tag{23}$$

$$E_r^-(t, s)+\int_0^r K(u-t)E_r^-(u, s)\,du=-\int_0^r K(u-t)K(s-u)\,du, \tag{24}$$

Из уравнений (23) и (24) следует, что матрицы-функции $E_r^+(t, s)$ и $E_r^-(t, s)$ непрерывны относительно r, t, s $(0\leqslant t,\ s\leqslant r)$, так как непрерывны правые части этих уравнений.

Можно доказать, что если

1) $K_p(t)\in L_2^{(n\times n)}(-r, r)$,

2) $\lim\limits_{p\to\infty}\int\limits_{-r}^{r}|K_p(t)-K(t)|^2dt=0$,

3) $\lim\limits_{p\to\infty}K_p(0)=K(0)$,

то

$$\lim_{p\to\infty} D_r(K_p)=D_r(K),\quad \lim_{p\to\infty} E_r^{\pm}(p, t, s)=E_r^{\pm}(t, s),$$

где $E_r^{\pm}(p, t, s)$ — матрица-функция, определенная уравнением (23) посредством ядра $K_p(t)$.

Из формул (21) и (22), из непрерывности $E_r^+(t, s)$, $E_r^-(t, s)$, а также из условий (19) следует, что можно определить следующие матрицы:

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \Gamma_r^-(0, t)\,dt := \Gamma_r^-(0, +0),\quad \lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \Gamma_r^-(t, 0)\,dt := \Gamma_r^-(+0, 0).$$

Обозначим через $\delta(r)$ матрицу

$$\delta(r) = \frac{1}{2}[\Gamma_r^-(0, +0) + \Gamma_r^-(+0, 0)].$$

Пусть

$$K_p(t) = p/2\int_{-1/p}^{1/p} K(t+\tau)\,d\tau.$$

Ясно, что $K_p(t)$ — непрерывная матрица-функция от t $(-\infty < t < \infty)$ и принадлежит $L_2^{(n\times n)}$. Можно доказать, что

$$\lim_{p\to\infty}\int_{-r}^{r} |K_p(t) - K(t)|^2\,dt = 0$$

при любом $r > 0$. Из условий, наложенных на матрицу-функцию $K(t)$, следует, что

$$\lim_{p\to\infty} K_p(0) = K(0).$$

Для ядра $K_p(t)$ определим, как выше $D_r(K_p)$, $\Gamma_r^{\pm}(p, t, s)$, $\delta_p(r)$, $E_r^{\pm}(p, t, s)$.

Докажем, что $\lim_{p\to\infty} \delta_p(r) = \delta(r)$.

В самом деле

$$\delta_p(r) = \Gamma_r^-(p, 0, 0) = K_p(0) + E_r^-(p, 0, 0),$$

так как в этом случае матрица-функция $\Gamma_r^-(p, t, s)$ непрерывна.

При $p\to\infty$ нетрудно доказать, что

$$E_r^-(p, 0, 0) \to E_r^-(0, 0) \text{ и } K_p(0) \to K(0),$$

поэтому

$$\lim_{p\to\infty} \delta_p(r) = K(0) + E_r(0, 0),$$

С другой стороны

$$\delta(r) = \frac{1}{2}\lim_{h\to+0}\left[h^{-1}\int_0^h K(t)\,dt + h^{-1}\int_0^h E_r^-(0, t)\,dt\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{h\to+0}\left[h^{-1}\int_0^h K(-t)\,dt + h^{-1}\int_0^h E_r^-(t, 0)\,dt\right] = K(0) + E_r^-(0, 0)$$

и значит $\lim_{p\to\infty} \delta_p(r) = \delta(r)$.

Лемма 3. *Если матрица-функция* $K(t) \in L_1^{(n\times n)} \cap L_2^{(n\times n)}$ *удовлетворяет условиям а) и б) теорем* 2 *и условию* (19), *то начиная с некоторого* R $(r_1 > r_0 > R)$ *имеет место формула*

$$\ln D_{r_1}(K) - \ln D_{r_0}(K) = \int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sp} \delta(r)\, dr. \tag{25}$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что существует такое R, что $D_r(K) \neq 0$ при $r > R$. С другой стороны, так как $D_r(K_p) \to D_r(K)$ при $p \to \infty$ равномерно по r при $r \in [r_0, r_1]$ $(r_1 > r_0 > R)$, то очевидно, что существует такое P, что при $p > P$ $D_r(K_p) \neq 0$. По лемме 1 имеем, что

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(K_p) = \operatorname{sp} \Gamma_r^-(p,\ 0, 0) = \operatorname{sp} \delta_p(r).$$

Отсюда следует, что

$$\ln D_{r_1}(K_p) - \ln D_{r_0}(K_p) = \int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sp} \delta_p(r)\, dr.$$

При $p \to \infty$ получаем утверждение леммы 3.

Теорема 4. *Пусть матрица-функция* $K(t) \in L_1^{(n\times n)} \cap L_2^{(n\times n)}$ *удовлетворяет условиям*:

а) $\det \hat{K}(\lambda) \neq 0$ $(-\infty < \lambda < \infty)$;

б) *левые и правые индексы матрицы-функции* $\hat{K}(\lambda)$ *равны нулю*;

б) *существуют конечные пределы*

$$\lim_{h \to +0} h^{-1} \int_0^h K(t)\, dt, \quad \lim_{h \to +0} h^{-1} \int_{-h}^0 K(t)\, dt.$$

Тогда имеет место формула

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln \det \hat{K}(\lambda)\, d\lambda. \tag{26}$$

Доказательство. Из формулы (25) следует, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_{r_0}^{r} \operatorname{sp} \delta(r)\, dr.$$

Докажем, что функция $\operatorname{sp} \delta(r)$ имеет предел при $r \to \infty$, тогда из последнего равенства получаем, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \lim_{r \to \infty} \operatorname{sp} \delta(r).$$

Из уравнений для ядра резольвенты $\Gamma_r^-(t, s)$ непосредственно получаем

$$\Gamma_r^-(t, 0) + \int_0^r K(s - t)\, \Gamma_r^-(s, 0)\, ds = K(-t) \quad (0 \leqslant t \leqslant r), \tag{27}$$

$$\Gamma_r^-(0, t)+\int_0^r \Gamma_r^-(0, s)\, K(t-s)\, ds = K(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant r). \tag{28}$$

Из условий а) и б) следует, что матрица-функция

$$[\hat{K}_1(\lambda)]^{-1} = \left(I_n + \int_{-\infty}^{\infty} K(-t)\, e^{i\lambda t}\, dt \right)^{-1}$$

допускает левую каноническую факторизацию

$$[\hat{K}_1(\lambda)]^{-1} = [I_n - \hat{\Gamma}_+(\lambda)]\,[I_n - \hat{\Gamma}_-(\lambda)], \tag{29}$$

при этом, как известно (см. [14]).

$$\hat{\Gamma}_+(\lambda) = \int_0^{\infty} \Gamma^-(t, 0)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

$$\hat{\Gamma}_-(\lambda) = \int_0^{\infty} \Gamma^-(0, t)\, e^{-i\lambda t}\, dt,$$

где $\Gamma^-(t, s)$ — ядро резольвенты уравнения

$$f(t) + \int_0^{\infty} K(s-t)\, f(s)\, ds = g(t) \quad (0 \leqslant t < \infty).$$

Следовательно, матрицы-функции $\Gamma^-(t, 0)$ и $\Gamma^-(0, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Gamma^-(t, 0) + \int_0^{\infty} K(s-t)\, \Gamma^-(s, 0)\, ds = K(-t) \quad (0 \leqslant t < \infty),$$

$$\Gamma^-(0, t) + \int_0^{\infty} \Gamma^-(0, s)\, K(t-s)\, ds = K(t) \quad (0 \leqslant t < \infty).$$

Из этих уравнений и (27), (28) получаем

$$\Gamma^-(t, 0) - \Gamma_r^-(t, 0) + \int_0^{\infty} K(s-t)[\Gamma^-(s, 0) - \Gamma_r^-(s, 0)]\, ds = 0, \tag{30}$$

$$\Gamma^-(0, t) - \Gamma_r^-(0, t) + \int_0^{\infty} [\Gamma^-(0, s) - \Gamma_r^-(0, s)]\, K(t-s)\, ds = 0. \tag{31}$$

Из равенства (30) следует, что

$$h^{-1}\int_0^h \Gamma^-(t, 0)\, dt - h^{-1}\int_0^h \Gamma_r^-(t, 0)\, dt = h^{-1}\int_0^h dt \int_0^{\infty} K(s-t)[\Gamma_r^-(s-0) -$$

$$-\Gamma^-(s,0)]\,ds = h^{-1}\int_0^h dt\int_0^\infty [K(s-t)-K(s)][\Gamma_r^-(s,0)-\Gamma^-(s,0)]\,ds +$$

$$+\int_0^\infty K(s)\,[\Gamma_r^-(s,0)-\Gamma^-(s,0)]\,ds = J_1 + J_2.$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $h\to 0$. Это следует из того, что $\Gamma_r^-(t,0)$ и $\Gamma^-(t,0)$ принадлежат $L_{2+}^{(n\times n)}$ и из оценок

$$|J_1|\leqslant\Big(\int_0^\infty|\Gamma_r^-(s,0)-\Gamma^-(s,0)|^2\,ds\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty\Big|h^{-1}\int_0^h[K(s-t)-K(s)]\,dt\Big|^2\,ds\Big)^{1/2},$$

$$\int_0^\infty\Big|h^{-1}\int_0^h[K(s-t)-K(s)]\Big|^2 ds \leqslant \int_0^h\int_0^\infty|K(s-t)-K(s)|^2\,ds dt.$$

Значит существует предел

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \Gamma^-(t,0)\,dt,$$

который мы обозначим через $\Gamma^-(+0,0)$. Из вышесказанного следует, что верно равенство

$$\Gamma^-(+0,0)-\Gamma_r^-(+0,0)=\int_0^\infty K(s)[\Gamma_r^-(s,0)-\Gamma^-(s,0)]\,ds. \qquad (32)$$

На основании теоремы Г—Ф получаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^\infty|\Gamma_r^-(s,0)-\Gamma^-(s,0)|^2\,ds=0$$

и поэтому, если к (32) применить неравенство Коши-Буняковского, то получим

$$\lim_{r\to\infty}\Gamma_r^-(+0,0)=\Gamma^-(+0,0).$$

Аналогично, исходя из равенства (31), можно получить, что существует предел

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h\Gamma^-(0,t)\,dt:=\Gamma^-(0,+0),$$

и имеет место равенство

$$\lim_{r\to\infty}\Gamma_r^-(0,+0)=\Gamma^-(0,+0).$$

Таким образом, $\operatorname{sp}\delta(r)$ имеет предел при $r\to\infty$, и

$$\lim_{r\to\infty}\operatorname{sp}\delta(r)=\frac{1}{2}\,[\operatorname{sp}\Gamma^-(+0,0)+\operatorname{sp}\Gamma^-(0,+0)].$$

Из факторизации (29) имеем

$$[\det \hat{K}(-\lambda)]^{-1} = \det [I_n - \hat{\Gamma}_+(\lambda)] \det [I_n - \hat{\Gamma}_-(\lambda)].$$

Пусть

$$\hat{F}_+(\lambda) = \det [I_n - \hat{\Gamma}_+(\lambda)] = 1 - \int_0^\infty \gamma_+(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

тогда если $\Gamma^-(t, 0) = \|\gamma_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n$, то раскрыв детерминант, получим

$$\gamma_+(t) = \mathrm{sp}\, \Gamma^-(t, 0) + \sum f_j(t),$$

где $f_j(t)$ является сверткой двух или более функций $\gamma_{ij}(t)$. Поэтому $f_j(t)$ непрерывна и $f_j(0) = 0$.

Это значит, что

$$\lim_{h\to+0} h^{-1} \int_0^h \gamma_+(t)\, dt := \gamma_+(+0) = \lim_{h\to+0} h^{-1} \int_0^h \mathrm{sp}\, \Gamma^-(t, 0)\, dt =$$

$$= \mathrm{sp}\, \Gamma^-(+0, 0). \tag{33}$$

Аналогично, если

$$\hat{F}_-(\lambda) = \det [I_n - \hat{\Gamma}_-(\lambda)] = 1 - \int_0^\infty \gamma_-(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt,$$

то

$$\lim_{h\to+0} h^{-1} \int_0^h \gamma_-(t)\, dt := \gamma_-(+0) = \mathrm{sp}\, \Gamma^-(0, +0).$$

Значит

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{sp}\, \delta(r) = \frac{1}{2} [\gamma_+(+0) + \gamma_-(+0)].$$

Вычислим $\gamma_+(+0)$. Для этого покажем, что для $\hat{F}_+(\lambda)$ верна сле дующая асимптотическая формула:

$$\hat{F}_+(\lambda) = 1 + \frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda} + o(1) \min \{1, |\lambda|\, \nu^{-2}\} \tag{34}$$

при $|\lambda| \to \infty$ и $\nu = \mathrm{Im}\, \lambda \geqslant 0$. В самом деле, исходя из определения $\hat{F}_+(\lambda)$ имеем

$$\hat{F}_+(\lambda) - 1 - \frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda} = - \int_0^\infty \gamma_+(t)\, e^{i\lambda t}\, dt - \frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda}.$$

В силу теоремы Римана-Лебега о интеграле Фурье правая часть этого равенства будет $o(1)$ при $|\lambda| \to \infty$ и $\mathrm{Im}\, \lambda \geqslant 0$. Значит, для доказательства формулы (34) достаточно показать, что

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \left(\int_0^\infty \gamma_+(t)\, e^{i\lambda t} dt + \frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda} \right) \frac{\nu^2}{|\lambda|} = 0. \tag{35}$$

при $\mathrm{Im}\, \lambda > 1$ и $\nu \to \infty$.

ՀՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Рассмотрим функцию $\gamma_1(t) = \gamma_+(t) - \gamma_+(+0)\,e^{-t}$. В силу (33)

$$\lim_{h \to +0} h^{-1} \int_0^h \gamma_1(t)\,dt = 0.$$

Легко проверить, что

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \left(\int_0^\infty \gamma_+(+0)\,e^{-t} e^{i\lambda t}\,dt + \frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda} \right) \frac{\nu^2}{|\lambda|} = 0$$

при $\operatorname{Im}\lambda > -1$. Поэтому для доказательства (35) достаточно показать, что

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{\nu^2}{|\lambda|} \int_0^\infty \gamma_1(t)\,e^{i\lambda t}\,dt = 0. \tag{36}$$

Положим

$$g(t) = \int_0^t \gamma_1(\tau)\,d\tau.$$

Тогда $g(t)$ — непрерывная функция и существует конечный предел

$$g(\infty) = \int_0^\infty \gamma_1(\tau)\,d\tau \quad (\gamma_1(\tau) \in L_{1+}),$$

кроме этого

$$\lim_{t \to +0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \to \infty} tg\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to +0} t^{-1} \int_0^t \gamma_1(\tau)\,d\tau = 0.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty \gamma_1(t)\,e^{i\lambda t}\,dt = \int_0^\infty e^{i\lambda t}\,dg(t) = -i\lambda \int_0^\infty g(t)\,e^{i\lambda t}\,dt.$$

Подставляя это значение в левую часть (36) и полагая $\operatorname{Im}\lambda = \nu$, получаем

$$\left| \frac{\nu^2}{i|\lambda|} \int_0^\infty \gamma_1(t)\,e^{i\lambda t}\,dt \right| \leqslant \nu^2 \int_0^\infty |g(t)| e^{-\nu t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\nu}{t}\, g\left(\frac{t}{\nu}\right) \Big| te^{-t}\,dt.$$

В силу вышесказанного семейство функций $g_\nu(t) = \left| \frac{\nu}{t}\, g\left(\frac{t}{\nu}\right) \right| (\nu > 0)$ ограниченно, и поэтому, по теореме Лебега, последний интеграл стремится к нулю при $\nu \to \infty$. Формула (34) доказана.

Из формулы (34) следует, что

$$\ln \hat{F}_+(\lambda) = \frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda} + o(1) \min\{1,\ |\lambda|\nu^{-2}\} \tag{37}$$

при $\lambda \to \infty$ и $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$

Мы знаем, что $\ln \hat{F}_+(\lambda)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости, поэтому если взять контур интегрирования, состоящий из отрезка $[-T, T]$ вещественной оси и полуокружности C_T в верхней полуплоскости с центром в начале координат и радиуса T, то по теореме Коши, применяя (37), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln \hat{F}_+(\lambda)\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi}\int_{C_T}\left(1-\frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln \hat{F}_+(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-e^{2i\varphi})^2\frac{\gamma_+(+0)}{iT\,e^{i\varphi}}\,Ti\,e^{i\varphi}\,d\varphi +$$

$$+\frac{o(1)}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-e^{2i\varphi})^2\min\{1,\ T^{-1}\sin^{-2}\varphi\}\,iTe^{i\varphi}\,d\varphi = -\frac{1}{2}J_1 + \frac{o(1)}{2\pi}J_2.$$

Очевидно, что $J_1 = \gamma_+(+0)$. Докажем, что J_2 ограничено

$$|J_2| \leqslant \int_0^{\pi}|1-e^{2i\varphi}|^2\min\{1,\ T^{-1}\sin^{-2}\varphi\}\,Td\varphi =$$

$$\int_{\sin\varphi<\frac{1}{\sqrt{T}}} T\sin^2\varphi\,d\varphi + \int_{\sin\varphi>\frac{1}{\sqrt{T}}}\sin^2\varphi\,T^{-1}\sin^{-2}\varphi\,Td\varphi < \pi.$$

Значит, мы доказали, что

$$\frac{1}{2}\gamma_+(+0) = -\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln \hat{F}_+(\lambda)\,d\lambda.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{1}{2}\gamma_-(+0) = -\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln \hat{F}_-(\lambda)\,d\lambda.$$

Следовательно

$$\lim_{r\to\infty}\operatorname{sp}\delta(r) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln\det \hat{K}(\lambda)\,d\lambda.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 4 в скалярном случае следует

Теорема 4′. *Пусть функция* $K(t)\in L_1\cap L_2$ *удовлетворяет условиям*

а) $$\hat{K}(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty}K(t)\,e^{i\lambda t}\,dt \neq 0 \quad (-\infty<\lambda<\infty),$$

б) $$\operatorname{ind} \hat{K}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}[\arg \hat{K}(\lambda)]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

в) *существуют конечные пределы*

$$\lim_{h \to +0} h^{-1} \int_0^h K(t)\, dt, \quad \lim_{h \to +0} h^{-1} \int_{-h}^0 K(t)\, dt.$$

Тогда имеет место формула

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln \hat{K}(\lambda)\, d\lambda.$$

Отметим, что теорема 4, даже в скалярном случае (теорема 4′), насколько нам известно, новая.

Замечание 1. Условие б) в теоремах 2 и 4 заведомо выполняется, если вещественная или мнимая часть матрицы-функции $\hat{K}(\lambda)$ положительно (отрицательно) определенная на всей оси (см. [14], теорема 8.1). В частности, если ядро $K(t)$ удовлетворяет условию $K(t) = K^*(-t)$ и матрица-функция

$$\hat{K}(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, e^{i\lambda t}\, dt$$

—неособенная при всех $\lambda\ (-\infty < \lambda < \infty)$, то она $\hat{K}(\lambda)$ положительно определена на всей оси и, следовательно, (см. [14], теорема 8.2), допускает факторизацию

$$\hat{K}(\lambda) = \hat{K}_+(\lambda)\, \hat{K}_+^*(\lambda).$$

Замечание 2. Если в теоремах 2 и 4 дополнительно предположить, что $\ln \det K(\lambda) \in L_1$, то утверждения этих теорем примут вид

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \det \hat{K}(\lambda)\, d\lambda.$$

Нетрудно показать, что это условие выполняется, если

$$\hat{K}_0(\lambda) = \hat{K}(\lambda) - I_n \in L_1^{(n \times n)}.$$

Замечание 3. В работе [12] для матрицы-функции

$$\hat{K}(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, e^{i\lambda t}\, dt$$

введен интеграл энтропии

$$E(\hat{K}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \det \frac{\hat{K}(\lambda)}{\varepsilon^2 \lambda^2 + 1}\, d\lambda,$$

если он существует.

Покажем, что правая часть формулы (26), при условиях теоремы 4, не что иное, как интеграл энтропии. В самом деле, если выполнены условия теоремы 4, то

$$[\det \hat{K}(-\lambda)]^{-1} = \left(1 - \int_0^\infty \gamma_+(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\right)\left(1 - \int_0^\infty \gamma_-(t) e^{-i\lambda t}\, dt\right),$$

где $\gamma_+(t)$ и $\gamma_-(t)$ имеют тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 4.

При доказательстве теоремы 4 было показано, что существуют пределы

$$\gamma_+(+0) = \lim_{h\to+0} h^{-1} \int_0^h \gamma_+(t)\, dt, \quad \gamma_-(+0) = \lim_{h\to+0} h^{-1} \int_0^h \gamma_-(t)\, dt,$$

и верна формула

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2}[\gamma_+(+0) + \gamma_-(+0)].$$

С другой стороны, из формулы (37) при $R > 1/\varepsilon$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\ln \hat{F}_+(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}\, d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{C_R} \frac{\ln \hat{F}_+(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}\, d\lambda = i \operatorname*{Res}_{\lambda = 1/\varepsilon i} \frac{\ln \hat{F}_+(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}.$$

Из формулы (37) следует, что при $R \to \infty$ второй интеграл стремится к нулю, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \hat{F}_+(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}\, d\lambda = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\ln \hat{F}_+(1/\varepsilon i)}{2\varepsilon} = -\frac{1}{2}\gamma_+(+0).$$

Аналогично

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \hat{F}_-(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}\, d\lambda = -\frac{1}{2}\gamma_-(+0).$$

Следовательно, мы показали, что в условиях теоремы 4 справедлива формула

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\det \hat{K}(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}\, d\lambda = E(\hat{K}).$$

Надо отметить, что интеграл энтропии и ранее полученное значение этого предела получаются при различных методах суммирования одного и того же интеграла.

5°. В работе автора [11], существенно используя методы работы Г. Уидома [5], доказана теорема 2, которая является матричным континуальным аналогом уточненной теоремы Г. Сегё. Доказанная выше теорема 4 позволяет уточнить теорему 2 из работы [1], а именно, справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть*

$$\hat{K}(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, e^{i\lambda t}\, dt \in \mathbf{K}^{(n\times n)}$$

удовлетворяет условиям:

а) $\det \hat{K}(\lambda) \neq 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty)$,

б) $\operatorname{ind} \det \hat{K}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}[\arg \det \hat{K}(\lambda)]_{-\infty}^{\infty} = 0$,

в) $K(t) \in L_2^{(n\times n)}$ *и существуют конечные пределы*

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h K(t)\,dt, \quad \lim_{h\to+0} h^{-1}\int_{-h}^{0} K(t)\,dt.$$

Тогда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \frac{D_r(K)}{\exp\{r\,E(\hat{K})\}} = \det[T(\hat{K})\,T(\hat{K}^{-1})]. \tag{38}$$

Здесь через $\mathbf{K}^{(n\times n)}$ обозначена алгебра матриц-функций

$$\hat{F}(\lambda) = \hat{F}(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{i\lambda t}\, dt$$

с нормой

$$\|\hat{F}\| = |\hat{F}(\infty)| + \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|\, dt + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |t|\,|F(t)|^2\, dt\right)^{1/2},$$

которая является матричным аналогом алгебры, введенной в работе [18] М. Г. Крейном, а

$$[T(\hat{K})f](t) = f(t) + \int_0^{\infty} K(t-s)\, f(s)\, ds.$$

Как известно (см. [11]), при условии $\hat{K}(\lambda) \in \mathbf{K}^{(n\times n)}$ оператор $T(\hat{K}) \times$ $\times\, T(\hat{K}^{-1}) - I$ (I — единичный оператор) является ядерным оператором в $L_{2+}^{(n)}$, и поэтому ясен смысл правой части (38).

В том частном случае, когда $K_0(\lambda) = \hat{K}(\lambda) - I_n \in L_1^{(n\times n)}$, теорема 5 была доказана в работе Г. Дима [19], стр. 90).

Пусть матрица-функция

$$\hat{K}_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, e^{i\lambda t}\, dt \in \mathbf{K}^{(n\times n)}.$$

Определим операторы

$$[T(\hat{K}_0)f](t) = \int_0^{\infty} K(t-s)\, f(s)\, ds,$$

$$(P_r f)(t)=\begin{cases} f(t) & \text{при } t\in[0,\ r] \\ 0 & \text{при } t\in(r,\ \infty). \end{cases}$$

Предположим, что $\hat{K}_0(\lambda)\in L_1^{(n\times n)}$, тогда, как показал Г. Дим (см. [18]), операторы $T_r(\hat{K}_0)=P_r\,T\,(\hat{K}_0)\,P_r$ ядерные при всех r $(0<r<\infty)$ в пространстве $L_{2+}^{(n)}$. Поэтому (см. [19], стр. 201) детерминант Фредгольма интегрального оператора $I+T_r(\hat{K}_0)$ совпадает с величиной $\prod\limits_{j=1}^{\infty}(1+\lambda_j(r))$, где $\lambda_j(r)$ — собственные значения оператора $T_r(\hat{K}_0)$.

Заметим, что из условия $\hat{K}_0(\lambda)\in L_1^{(n\times n)}$ следует, что матрица-функция $K(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ равномерно непрерывна и, следовательно, $K(t)\in L_2^{(n\times n)}$. Если предположить еще, что $\det(I_n+\hat{K}_0(\lambda))\neq 0$ и левые и правые индексы матрицы-функции $I_n+\hat{K}_0(\lambda)$ равны нулю, то все условия теоремы 5 выполняются, а ее утверждение в этом случае можно записать в следующем виде:

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\ln(1+\lambda_j(r))-\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\det[I_n+\hat{K}_0(\lambda)]\,d\lambda\right\}=$$

$$=\ln\det[T(I_n+\hat{K}_0)\,T((I_n+\hat{K}_0)^{-1})].$$

Эта формула дает асимптотику для сумм значений функции $\ln(1+z)$ в точках $\lambda_j(r)$. В этом пункте мы покажем, что из этой формулы следует справедливость подобных формул для других, подходящим образом выбранных функций.

Обозначим через $\sigma[T(\hat{K}_0)]$ и $\sigma[T(\hat{K}_0')]$ спектры операторов $T(\hat{K}_0)$ и $T(\hat{K}_0')$ соответственно, где $\hat{K}_0'(\lambda)=K_0(-\lambda)$. Пусть

$$M(\hat{K}_0)=\{0\}\cup\sigma[T(\hat{K}_0)]\cup\sigma[T(\hat{K}_0')].$$

Если $z\notin M(\hat{K}_0)$, то можно показать (см. доказательство теоремы 6), что имеет смысл следующая величина:

$$L(z)=\ln\det[T(I_n-1/z\hat{K}_0)\,T((I_n-1/z\,\hat{K}_0)^{-1})].$$

Теорема 6. *Пусть матрица-функция*

$$\hat{K}_0(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\in\mathbf{K}^{(n\times n)}\cap L_1^{(n\times n)},$$

и $F(z)$ — любая локально аналитическая функция на множестве $M(\hat{K}_0)$, причем $F(0)=0$. Тогда операторы $T_r(\hat{K}_0)$ $(0<r<\infty)$ ядерные и справедлива формула

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}F(\lambda_j(r))-\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}F(\hat{K}_0(\lambda))\,d\lambda\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(z)\frac{d}{dz}L(z)\,dz,$$

где $\{\lambda_j(r)\}_{j=1}^{\infty}$ *— собственные значения оператора* $T_r(\hat{K}_0)$, *а* Γ *— контур, содержащий* $M(\hat{K}_0)$ *и проходящий через область аналитичности функции* $F(z)$.

Доказательство. Если $z\overline{\in}M(\hat{K}_0)$, то операторы

$$I-1/z\,T(\hat{K}_0),\quad I-1/zT(\hat{K}_0')$$

обратимы, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что матрица-функция $I_n-1/z\,\hat{K}_0(\lambda)$ допускает левую и правую факторизацию без индексов (см. [15], стр. 284), откуда следует обратимость этой матрицы-функции в алгебре $\mathbf{K}^{(n\times n)}$. Значит $\sigma(\hat{K}_0)\subset M(\hat{K}_0)$, где $\sigma(\hat{K}_0)$ — спектр $\hat{K}_0(\lambda)$ как элемент алгебры $\mathbf{K}^{(n\times n)}$.

Применяя теорему Г—Ф, нетрудно видеть, что спектры операторов $T_r(\hat{K}_0)$ и $T_r(\hat{K}_0')$ содержатся в любой окрестности $M(\hat{K}_0)$, начиная с $r\geqslant R_0$ (R_0 зависит от этой окрестности).

Так как $M(\hat{K}_0)$ — компакт, то существует открытое множество G, содержащее $M(\hat{K}_0)$, где $F(z)$ аналитична. Выберем в G контур Γ (вообще говоря, несвязный), так, чтобы внутри Γ содержался компакт $M(\hat{K}_0)$. В силу вышесказанного, Γ будет содержать $\sigma(\hat{K}_0)$ и спектры операторов $T_r(\hat{K}_0)$, начиная с некоторого $r\geqslant R_0$. Поэтому мы можем определить функцию $F(\hat{K}_0)$ от элемента $\hat{K}_0(\lambda)$ алгебры $\mathbf{K}^{(n\times n)}$ и функцию $F(T_r)$ от оператора $T_r(\hat{K}_0)$ по формулам:

$$F(\hat{K}_0)(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(z)(zI_n-\hat{K}_0(\lambda))^{-1}\,dz,$$

$$F(T_r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(z)(zI-T_r)^{-1}\,dz.$$

Отметим, что из ядерности $T_r(\hat{K}_0)$ и условия $F(0)=0$ следует (см. [19], стр. 209) ядерность оператора $F(T_r)$. Его собственными значениями будут числа $F(\lambda_j(r))$. Значит ряд $\sum F(\lambda_j(r))$ сходится абсолютно.

Предположим, что $z\overline{\in}M(\hat{K}_0)$, тогда, как следует из вышесказанного, матрица-функция $I_n-1/z\,\hat{K}_0(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5 и поэтому справедлива формула:

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\lambda_j(r)}{z}\right)-\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}\ln(I_n-1/z\,\hat{K}_0(\lambda))\,d\lambda\right\}=L(z).\quad(39)$$

Во втором члене левой части применена формула (см. [19], стр. 208)

$$\ln\det(I-A)=\operatorname{sp}\ln(I-A).$$

Пусть Γ — выбранный нами контур. Тогда, если $z\in\Gamma$, то $z\overline{\in}M(\hat{K}_0)$ и кроме этого, очевидно, что множество матриц-функций

$$I_n-1/z\,\hat{K}_0(\lambda)\ (z\in\Gamma)$$

является компактным в $K^{(n\times n)}$. В этом случае можно доказать, что сходимость в (39) равномерна относительно z при $z\in\Gamma$.

Если учесть еще, что выражение, стоящее под знаком предела и превая часть в (39) аналитичны по z, то ясно, что равенство (39) можно дифференцировать, т. е. имеет место формула

$$\lim_{r\to\infty}\frac{d}{dz}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\lambda_j(r)}{z}\right)-\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}\ln\left(I_n-1/z\,\hat{K}_0(\lambda)\right)d\lambda\right\}=\frac{d}{dz}L(z). \tag{40}$$

Учитывая, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(1-\frac{\lambda_j(r)}{z}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j(r)}{z\,(z-\lambda_j(r))}$$

и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dz}\operatorname{sp}\ln\left(I_n-\frac{1}{z}\hat{K}_0(\lambda)\right)d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}\left[\frac{K_0(\lambda)}{z}(zI_n-K_0(\lambda))^{-1}\right]d\lambda$$

(как известно (см. [19], стр. 208) справедлива формула

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sp}\ln(I-A(z))=-\operatorname{sp}\left[(I-A(z))^{-1}\frac{dA(z)}{dz}\right]\Big)$$

сходятся абсолютно, то (40) после умножения на $1/2\pi i\,F(z)$ примет следующий вид:

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{F(z)}{z-\lambda_j(r)}-\frac{F(z)}{z}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}\left[\frac{1}{2\pi i}(F(z)(zI_n-\hat{K}_0(\lambda))^{-1}-\frac{F(z)}{z}I_n\right]d\lambda\right\}=\frac{1}{2\pi i}F(z)\frac{d}{dz}L(z).$$

В силу равномерности по z $(z\in\Gamma)$ это соотношение можно интегрировать по контуру Γ относительно z.

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\int_{\Gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{F(z)}{z-\lambda_j(r)}-\frac{F(z)}{z}\right)dz-\right.$$

$$\left.-\frac{r}{2\pi}\int_{\Gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}\left[\frac{1}{2\pi i}(F(z)(zI_n-\hat{K}_0(\lambda))^{-1}-\frac{F(z)}{z}I_n\right]d\lambda dz\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(z)\frac{d}{dz}L(z)\,dz.$$

В силу условия $F(0)=0$ получим, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left(\frac{F(z)}{z-\lambda_j(r)}-\frac{F(z)}{z}\right)dz=\sum_{j=1}^{\infty}F(\lambda_j(r))$$

и поэтому абсолютно сходится. По той же причине $(F(0)=0)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left(F(z)(zI_n-K_0(\lambda))^{-1}-\frac{F(z)}{z}I_n\right)dzd\lambda=$$

$$=\operatorname{sp}\int_{-\infty}^{\infty}F(\hat{K}_0(\lambda))\,d\lambda.$$

Докажем, что последний интеграл абсолютно сходится. Так как $0\in\mathcal{M}(\hat{K}_0)$ и $F(0)=0$, то $F(z)$ разлагается в степенной ряд

$$F(z)=\sum a_k z^k$$

радиуса сходимости $q>0$. Выберем A так, чтобы $|\hat{K}_0(\lambda)|<q_1\ (q_1<q)$ при $|\lambda|>A$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\hat{K}_0(\lambda))|\,d\lambda\leqslant\int_{|\lambda|<A}|F(\hat{K}_0(\lambda))|d\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\,q_1^{k-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{K}_0(\lambda)|\,d\lambda<\infty.$$

Теорема доказана.

В заключение приношу благодарность профессору М. Г. Крейну за постановку задачи и за обсуждения результатов. Благодарю также профессора В. М. Адамяна за обсуждения результатов.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.X.1981 и
26.V.1982

Լ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Տյոպլիցյան դետերմինանտների մասին Գ. Սեգյոյի թեորեմների մատրիցային կոնտինուալ անալոգները *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է $K(t)$ մատրիցային կորիզով

$$(T_r f)(t)=f(t)+\int_0^r K(t-s)f(s)\,ds$$

օպերատորի $D_r(K)$ Ֆրեդհոլմի դետերմինանտի ասիմպտոտիկ վարքը, երբ $r\to\infty$: Ստացված արդյունքները հանդիսանում են տյոպլիցյան ֆորմերի դետերմինանտների ասիմպտոտիկայի վերաբերյալ Գ. Սեգյոյի արդյունքների մատրիցային կոնտինուալ անալոգները։

Ուսումնասիրված է նաև

$$(\tilde{T}_r f)(t)=\int_0^r K(t-s)f(s)\,ds$$

օպերատորների սեփական արժեքների ասիմպտոտիկ բաշխումը, երբ $r\to\infty$։

L. V. MIKAIELIAN. *The matrix continual analogues of Szego's theorems on Teoplitz determinants* (summary)

In the paper the asymptotic behaviour for $r \to \infty$ of Fredholm determinant $D_r(K)$ of integral operator

$$(T_r f)(t) = f(t) + \int_0^r K(t-s) f(s)\, ds$$

with matrix kernel $K(t)$ is obtained. The results are the matrix continual analogues of well-khnown theorems of G. Szego on asymptotic behaviour of determinants of Teoplitz forms. The asymptotic distribution of eigenvalues of the operators

$$(\bar{T}_r f)(t) = \int_0^r K(t-s) f(s)\, ds$$

for $r \to \infty$ are also discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Szego.* Ein Grenzwertsatz über Toeplitzschen Determinanten einer reelen positiven Funktion, Math. Ann., 76, 1915, 490—503.
2. *G. Szego.* On certain Hermitian forms associated with the Forier seris of a positive function, In: Festsschrift Marcel Riasz. Lund., 1952, 228—238.
3. *J. J. Yr. Hirschman.* Recenr developments in the theory of finite Toeplits operators, In: Advances in Probability & Related Topics, Dekker, New York, 1971, v. 1.
4. *Б. Л. Голинский, И. А. Ибрагимов.* О предельной теореме Г. Сегё, Изв. АН СССР, серия матем., 35, вып. 2, 1971, 408—427.
5. *H. Widom.* Asymptotic Behavior of Block—Toeplitz Matrices and Determinants II, Advances in Math., 21, 1976, 1—29.
6. *M. Kac.* Toeplitz Matrices, Translation kernels and a ralated problem in probability theory. Duke Math. Jour., 21, 1954, 501—509.
7. *Н. И. Ахиезер.* Континуальный аналог некоторых теорем о теплицевых матрицах, Укр. мат. жур., 16, № 4, 19664, 445—462.
8. *В. Н. Солев.* О континуальном аналоге одной теоремы Г. Сегё, Записки научн. семинаров ЛОМИ, 39, 1974, 104—109.
9. *H. Widom.* Spectral Asymptotics of hypersurfaces, Intergal Equations and Operator Theory. v. 1/3, 1978, 415—443.
10. *Л. В. Микаелян.* О многомерном континуальном аналоге одной теоремы Г. Сегё, Изв. АН АрмССР, «Математика», XI, № 3, 1976, 275—286.
11. *Л. В. Микаелян.* Асимптотическое поведение детерминантов Фредгольма усеченных интегральных операторов с матричными ядрами, зависящими от разности аргументов, ДАН Арм.ССР, 68, № 3, 1979, 137—145.
12. *H. Dym, J. Gohberg.* On an extension problem, generalized Fourier analysis, and an entropy formula, Integral Equations and Operator Theory, v. 3-2, 1980, 143—215.
13. *Э. Гурса.* Курс математического анализа, т. 3, часть 2, М.—Л.: ГТТИ, 1934.
14. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, № 2, 1958, 66—172.
15. *И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., «Наука», 1973.
16. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации, М., Гостехиздат, 1947.
17. *М. Г. Крейн.* О некоторых новых банаховых алгебрах и теоремы типа Винера—Леви для интегралов и рядов Фурье, Мат. исследования, 1, № 1, 1966.
18. *H. Dym.* Trace Formulas for Blocks of Teoplits—Like Operators, Jour. of Functional Analysis, 31, 1976, 69—100.
19. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука». 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 4, 1982 Математика

УДК 517.51

М. М. ДЖРБАШЯН, В. М. МАРТИРОСЯН

К ТЕОРИИ α-КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССОВ

§ 0. Введение и предварительные сведения

0.1. После того, как А. Данжуа [1] открыл некоторые достаточные и, наряду с тем, также необходимые условия квазианалитичности, Т. Карлеман [2] дал исчерпывающее решение проблемы Ж. Адамара [3] для класса $C\{[0, +\infty); M_n\}$. Это класс ограниченных и бесконечно-дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant A_\varphi B_\varphi^n M_n \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{0.1}$$

где $A_\varphi > 0$ и $B_\varphi > 0$ — постоянные, зависящие, вообще говоря, только от функции φ, а $\{M_n\}_1^\infty$ — произвольная последовательность положительных чисел.

Как известно, для случая полуоси $[0, +\infty)$ проблема заключалась в следующем:

Какими должны быть последовательности $\{M_n\}_1^\infty$, чтобы соответствующие классы $C\{[0, +\infty); M_n\}$ были квазианалитическими, т. е. чтобы для любой функции $\varphi(x) \in C\{[0, +\infty); M_n\}$ из условий

$$L_n \varphi \equiv \varphi^{(n)}(0) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{0.2}$$

следовало тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$?

Впоследствии А. Островский [4] дал эквивалентное условию Т. Карлемана более простое условие квазианалитичности класса $C\{[0, +\infty); M_n\}$. В его формулировке теорема Данжуа—Карлемана гласит.

Теорема А. *Для квазианалитичности класса $C\{[0, +\infty); M_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = +\infty, \tag{0.3}$$

где

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n}. \tag{0.4}$$

Отметим, что до 1968 г., т. е. в течение четырех десятков лет, ни в одной работе о квазианалитических классах, в том числе и в целой серии работ С. Мандельбройта, подытоженных в его известной

монографии [5], не содержалось даже попытки выйти из рамок классической квазианалитичности, поскольку в них всегда условие

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = +\infty$$

предполагалось безусловно выполненным.

0.2 (а). Согласно теореме А Данжуа—Карлемана при условии

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr < +\infty \tag{0.5}$$

класс функций $C\{[0, +\infty); M_n\}$ будет заведомо неквазианалитическим. А именно, как хорошо известно, при условии (0.5) существуют нетривиальные функции $\varphi(x)$ из класса $C\{[0, +\infty); M_n\}$ и, более того, как легко можно показать [6], удовлетворяющие условиям вида

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n e^{-\nu x};\ x \in [0, +\infty)(\nu > 0;\ n = 1, 2, \cdots),$$

для которых $\varphi^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

В связи с этим естественно возник следующий вопрос [7]:

Если класс $C\{[0, +\infty); M_n\}$ — неквазианалитический, то какие данные вместо последовательности значений $\varphi^{(n)}(0)(n = 0, 1, 2, \cdots)$ определяют функции этого класса единственным образом?

(б) Именно в связи с этим вопросом первым из авторов данной статьи, по существу, была поставлена следующая общая проблема [7], сводящаяся при $\gamma = 1$ к отмеченной выше классической проблеме, полностью решенной Данжуа и Карлеманом.

Пусть $\{M_n\}_0^\infty$ — произвольная последовательность положительных чисел и $T(r) = \sup\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{r^n}{M_n}$. Для заданного значения параметра γ $(0 < \gamma < +\infty)$ какими должны быть подклассы $C_\gamma\{M_n\} \subset C\{[0, +\infty); M_n\}$ и простейшие функционалы $\{L_n^\gamma \varphi\}_0^\infty$, чтобы лишь при

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = +\infty \tag{0.6}$$

для любой функции $\varphi(x) \in C_\gamma\{M_n\}$ из равенств

$$L_n^\gamma \varphi = 0\ (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{0.7}$$

следовало тождество

$$\varphi(x) \equiv 0,\ x \in [0, +\infty).$$

При этом для достижения решения этой проблемы оказалось целесообразным ввести новый параметр α посредством соотношения

$$\gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\ (-1 < \alpha < 1). \tag{0.8}$$

Следует заметить, что тогда:

1) если $0 < \alpha < 1$, то $0 < \gamma \leqslant 1$;

2) если $-1<\alpha<0$, то $1<\gamma<+\infty$.

На пути решения проблемы (0.6)—(0.7) был введен класс $C_\alpha^{(-)}$ $(-1<\alpha<1)$ бесконечно-дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+x^{|\alpha|\,m})\,|\varphi^{(n)}(x)|| < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots), \tag{0.9}$$

и его подклассы $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\} \subset C_\alpha^{(-)}$ тех функций $\varphi(x) \in C_\alpha^{(-)}$, для которых

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+|\alpha|\,x^2)|\,\varphi^{(n)}(x)|| \leqslant A_\varphi B_\varphi^n M_n \tag{0.10}$$

$$(n=1, 2, \cdots).$$

Метод, открытый в исследовании [7] для решения поставленной общей проблемы, естественным образом привел к раскрытию явного вида простейших функционалов единственности сначала в случае $0\leqslant\alpha<1$.

Затем этот же метод позволил А. А. Китбаляну [8] получить вид соответствующих функционалов и в случае $-1<\alpha<0$.

Для значений параметра $0\leqslant\alpha<1$ (*т. е. при* $0<\gamma\leqslant 1$) *эти функционалы имеют вид**

$$L_n^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(n)}(t)\, t^{\alpha n-1}\, dt \quad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{0.11}$$

Для значений же $-1<\alpha<0$ (*т. е. при* $1<\gamma<+\infty$) *вид надлежащих функционалов таков*:

$$L_n^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(2n)}(t)\, t^{(1+\alpha)\,n-1}\, dt \quad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{0.12}$$

Полное решение общей проблемы (0.6)—(0.7) для принципиально важнейшего случая, когда $0<\alpha<1$ (т. е. при $0<\gamma<1$), т. е. именно *для случая неквазианалитических классов функций*, было дано в 1968 г. в исследовании [7]. При этом соответствующие классы единственности были названы *α-квазианалитическими*.

Для случая же $-1<\alpha<0$ (т. е. при $1<\gamma<+\infty$) (*а в этом случае функции рассматриваемых классов оказались целыми*) решение проблемы (0.6)—(0.7) содержится в работе [8], в которой развитый уже в исследовании [7] метод естественным образом был распространен и на этот случай.

Общая теорема для всех α $(-1<\alpha<1)$ гласит.

Теорема Б. *Для того, чтобы класс* $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1<\alpha<1)$ *был α-квазианалитическим, т. е. чтобы для любой функции* $\varphi(x) \in C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ *из условий*

$$L_n^\alpha \varphi = 0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{0.13}$$

* В [7] было показано, что при $n=0$ или $\alpha=0$ естественно полагать $L_0^\alpha \varphi = \varphi(0)$ и $L_n^0 \varphi = L_n \varphi = \varphi^{(n)}(0)$ $(n>0)$ соответственно.

следовало тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty. \tag{0.14}$$

При установлении этой теоремы в исследовании [7] (аналогично в работе [8]) проблема решалась сначала для других классов $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1)$, определяемых посредством интегро-дифференциальных операторов дробного порядка, а затем уже совершался переход к решению проблемы для классов $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$. Для формулировки соответствующего результата и надлежащих пояснений приведем некоторые известные определения и факты, которые нужны нам и при дальнейшем изложении.

0.3 (а). Пусть $f(x) \in L(0, l)$ $(0 < l < +\infty)$ — произвольная функция. Тогда при данном α $(0 < \alpha < +\infty)$ функцию

$$D_0^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad x \in (0, l), \tag{0.15}$$

принято называть *интегралом от* $f(x)$ *порядка* α *в смысле Римана—Лиувилля с началом в точке* $x = 0$.

Известно, что при данном α $(0 < \alpha < 1)$ функция $D_0^{-\alpha} f(x)$ определена почти всюду на $(0, l)$ и вновь принадлежит классу $L(0, l)$, а при $1 \leqslant \alpha < +\infty$ эта функция, очевидно, абсолютно-непрерывна на $[0, l]$.

Известно также, что во всех точках Лебега $x \in (0, l)$ функции $f(x)$

$$\lim_{\alpha \to +0} D_0^{-\alpha} f(x) = f(x),$$

поэтому естественно интеграл нулевого порядка отождествить с самой функцией $f(x)$ и положить

$$[D_0^{-\alpha} f(x)]_{\alpha=0} \equiv f(x), \quad x \in [0, l]. \tag{0.15'}$$

Предположим теперь, что функция $f(x) \in L(0, l)$ такова, что при данном α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ интеграл Римана—Лиувилля $D_0^{-(1-\alpha)} f(x)$ почти всюду на $(0, l)$ обладает производной, причем не обязательно суммируемой. Тогда функцию

$$D_0^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} \equiv \frac{d}{dx} D_0^{-(1-\alpha)} f(x) \tag{0.16}$$

называют *производной порядка* α *от* $f(x)$ *с началом в точке* $x = 0$.

Отметим при этом, что ввиду (0.15') будем иметь

$$D_0^1 f(x) = f'(x). \tag{0.16'}$$

Таким образом, операторы $D_0^{-\alpha} f(x)$ определены для любого значения параметра α $(-1 \leqslant \alpha < +\infty)$.

Приведем еще две формулы, которыми воспользуемся в следующем параграфе: при $-1<\gamma<+\infty$ и $0<\alpha<+\infty$

$$D_0^{-\alpha}\left\{\frac{x^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}\right\}\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1+\gamma)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}t^\gamma\,dt=$$

$$=\frac{x^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)},\quad x\in(0,+\infty);\tag{0.17}$$

$$D_l^{-\alpha}\left\{\frac{(l-x)^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}\right\}\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\gamma)}\int_x^l(t-x)^{\alpha-1}(l-t)^\gamma\,dt=$$

$$=\frac{(l-x)^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)},\quad x\in(0,l).\tag{0.18}$$

Отметим, что эти и более подробные сведения о свойствах операторов Римана—Лиувилля приведены в гл. IX монографии [9].

(б) Известно, что функции вида

$$x^{\mu-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ \mu)\quad(\rho>0,\ \mu>0),$$

где

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\Gamma\left(\mu+\frac{n}{\rho}\right)}\tag{0.19}$$

— целая функция типа Миттаг—Леффлера порядка ρ и типа 1, а λ — произвольный, вообще говоря, комплексный параметр, являются решениями задач типа задачи Коши для специальных дифференциальных операторов дробного порядка.

В частности, полагая, что $-1<\alpha<1$ и обозначая

$$\frac{1}{\rho}=(1-\alpha)\quad\left(\frac{1}{2}<\rho<+\infty\right),\tag{0.20}$$

для функции

$$\mathrm{E}_\rho(x;\lambda)=E_\rho\left(\lambda x^{\frac{1}{\rho}};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{\frac{1}{\rho}-1}\tag{0.21}$$

можно утверждать следующее:

1°. *Функция* $\mathrm{E}_\rho(x,\lambda)$ *является решением следующей задачи типа Коши на полуоси* $[0,+\infty)$:

$$D_0^{1/\rho}y(x)-\lambda y(x)=0,\tag{0.22}$$

$$D_0^{-\alpha}y(x)|_{x=0}=1.\tag{0.23}$$

При этом в случае $0\leqslant\alpha<1$ $(1\leqslant\rho<+\infty)$

$$D_0^{1/\rho}y(x)=\frac{d}{dx}D_0^{-\alpha}y(x),\tag{0.24}$$

а в случае $-1<\alpha<0\left(\frac{1}{2}<\rho<1\right)$—

$$D_0^{1/\rho} y(x) = \frac{d}{dx} D_0^{-(1+\varepsilon)} \frac{d}{dx} y(x). \tag{0.25}$$

То обстоятельство, что посредством функций типа Миттаг—Леффлера могут быть представлены решения задач типа Коши для гораздо более общих интегро-дифференциальных операторов дробного порядка, впервые было установлено в работах [10, 11]. Что касается приведенной выше менее общей задачи типа Коши (0.22) — (0.23), то при надлежащих значениях параметра $-1 < \alpha < 1$ она была приведена в работе [7], а затем в [8].

(в) Известно, что функции вида

$$e_\rho(x; \lambda) = e^{-\lambda^\rho x} \left(|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2\rho}, \ \frac{1}{2} < \rho < +\infty \right)$$

также являются решениями задач типа задачи Коши, но уже для дифференциальных операторов дробного порядка в смысле Вейля.

Напомним, что если функция $\varphi(x)$ определена и измерима на полуоси $(0, +\infty)$, то, в предположении их существования, почти всюду на полуоси $(0, +\infty)$ можно ввести в рассмотрение функции

$$D_\infty^{-\alpha} \varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \quad (0 < \alpha < +\infty) \tag{0.26}$$

и

$$D_\infty^{\alpha} \varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D_\infty^{-(1-\alpha)} \varphi(x) \quad (0 < \alpha \leqslant 1). \tag{0.27}$$

Функции эти принято называть, соответственно, *интегралом и производной от* $\varphi(x)$ *по Вейлю порядка* α.

Простейшее условие, обеспечивающее существование интеграла $D_\infty^{-\alpha} \varphi(x)$ $(0 < \alpha < +\infty)$ заключается в следующем:

Если $x^\alpha \varphi(x) \in L_1(0, +\infty)$, *то интеграл* $D_\infty^{-\alpha} \varphi(x)$ *существует почти всюду на* $(0, +\infty)$ *и принадлежит* $L_1(0, +\infty)$.

Если не только $\varphi(x) \in L_1(0, +\infty)$, но и $x^\alpha \varphi(x) \in L_1(0, +\infty)$ при некотором $\alpha > 0$, то можно доказать, что во всех точках Лебега $x \in (0, +\infty)$ функции $\varphi(x)$

$$\lim_{\alpha \to +0} D_\infty^{-\alpha} \varphi(x) = \varphi(x).$$

Поэтому и в случае интегралов $D_\infty^{-\alpha} \varphi(x)$ естественно положить

$$[D_\infty^{-\alpha} \varphi(x)]_{\alpha=0} = \varphi(x). \tag{0.26'}$$

Отсюда, в силу (0.27), будем иметь

$$D_\infty^1 \varphi(x) = \varphi'(x), \tag{0.28}$$

т. е. оператор D_∞^1 совпадает с оператором обычного дифференцирования.

По поводу отмеченных выше свойств операторов Вейля см., напр., [7].

Имея ввиду эти определения, можно утверждать следующее:

2°. *Функция*

$$e_\rho(x;\ \lambda) = e^{-\lambda^\rho x}\left(|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2\rho},\ \frac{1}{2} < \rho < +\infty\right) \tag{0.29}$$

является решением следующей задачи типа Коши:

$$D_\infty^{1/\rho} y(x) + \lambda y(x) = 0,\ y(0) = 1. \tag{0.30}$$

При этом, с учетом обозначения (0.20), операторы $D_\infty^{1/\rho}$ определяются следующим образом:

$$D_\infty^{1/\rho} y(x) = \frac{d}{dx} D_\infty^{-\alpha} y(x)\ (0 \leqslant \alpha < 1), \tag{0.31}$$

$$D_\infty^{1/\rho} y(x) = -\frac{d}{dx} D_\infty^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dx} y(x)\ (-1 < \alpha < 0), \tag{0.32}$$

см., напр., [12], [7], а также [8]).

(в) Метод решения проблемы α-квазианалитичности (0.6)—(0.7), развитый в исследовании [7], а затем примененный также в [8], существенно опирается на сформулированные выше решения задач типа Коши (0.22)—(0.23) и (0.30).

На основании самого вида задачи (0.30)—(0.31) для значений параметра $0 \leqslant \alpha < 1$ $(1 \leqslant \rho < +\infty)$ в работе [7] в основу были положены следующие формулы для определения операторов последовательного дифференцирования $D_\infty^{n/\rho}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ дробного порядка:

$$D_\infty^0 \varphi(x) = \varphi(x),\ D_\infty^{1/\rho} \varphi(x) = \frac{d}{dx} D_\infty^{-\alpha} \varphi(x),$$

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = D_\infty^{1/\rho} D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x)\ (n = 2, 3, \cdots). \tag{0.33}$$

Для значений параметра $-1 < \alpha < 0\left(\frac{1}{2} < \rho < 1\right)$, по аналогии со сказанным выше, на основании самого вида соответствующей задачи типа Коши (0.30), (0.32) естественно было операторы последовательного дифференцирования $D_\infty^{n/\rho}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ дробного порядка определить уже по формулам:

$$D_\infty^0 \varphi(x) = \varphi(x),\ D_\infty^{1/\rho} \varphi(x) = -\frac{d}{dx} D_\infty^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \varphi(x),$$

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = D_\infty^{1/\rho} D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x)\ (n = 2, 3, \cdots) \tag{0.34}$$

(см. [8]). При этом как в (0.33), так и в (0.34) положено $\frac{1}{\rho} = 1 - \alpha$.

Именно использование этих операторов и привело к раскрытию явного вида функционалов единственности (0.11) и (0.12), поскольку ввиду определений (0.34) операторов $D_\infty^{n/\rho}$

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(0) = L_n^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(n)}(t)\, t^{\alpha n - 1}\, dt\ (0 \leqslant \alpha < 1,\ n \geqslant 0), \tag{0.11'}$$

$$D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(0)=L_n^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_0^{+\infty}\varphi^{(2n)}(t)\,t^{(1+\alpha)n-1}\,dt\quad(-1<\alpha<0,\ n\geqslant 0).$$

(0.12′)

(г) Как уже отмечалось, в работах [7, 8] критерий α-квазианалитичности устанавливался сначала в классах $C_{\alpha}^{*}\{[0,+\infty);\ M_n\}\subset C_{\alpha}^{(-)}$ $(-1<\alpha<1)$. При любом α $(-1<\alpha<1)$ этот класс определялся как множество функций $\varphi(x)\in C_{\alpha}^{(-)}$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<x<+\infty}|D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)|\leqslant A_{\varphi}\cdot B_{\varphi}^{n}M_n\ (n=1,2,\cdots).\tag{0.35}$$

Общая теорема, дающая критерий α-квазианалитичности классов $C_{\alpha}^{*}\{[0,+\infty);\ M_n\}$, может быть сформулирована следующим образом.

Теорема В. *Для того, чтобы класс* $C_{\alpha}^{*}\{[0,\infty);\ M_n\}$ $(-1<\alpha<1)$ *был* α*-квазианалитическим, т. е. чтобы для любой функции* $\varphi(x)\in C_{\alpha}^{*}\{[0,+\infty);\ M_n\}$ *из равенств*

$$L_n^{\alpha}\varphi=0\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{0.36}$$

следовало тождество $\varphi(x)\equiv 0$, $x\in[0,+\infty)$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty.\tag{0.37}$$

Отметим, что 0-квазианалитические классы $C_0\{[0,+\infty);\ M_n\}$ и $C_0^{*}\{[0,+\infty);\ M_n\}$ совпадают с классическими квазианалитическими классами $C\{[0,+\infty);\ M_n\}$, и при $\alpha=0$ справедливы также равенства

$$L_n^{0}\varphi=L_n\varphi=\varphi^{(n)}(0)\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{0.38}$$

Поэтому как теорема Б, так и теорема В содержат в себе классическую теорему А Данжуа—Карлемана в качестве специального случая, когда $\alpha=0$.

0.4. Для решения проблемы α-квазианалитичности (т. е. проблемы (0.6) — (0.7)) в исследовании [7] был предложен метод, основанный на применении развитой первым автором данной статьи теории интегральных преобразований с ядрами типа Миттаг—Леффлера, подытоженной в его монографии [9], с одновременным привлечением операторов интегродифференцирования дробного порядка.

Этот метод позволил, как и в классическом случае, свести проблему α-квазианалитичности к известной проблеме Ватсона о максимальной скорости убывания ограниченной аналитической функции в круге (или в полуплоскости), но уже для угловой области определенного раствора, и существенно опирается также на наличие отличной от нуля аналитической функции, предельно быстро убывающей в этом угле. Речь идет о следующей хорошо известной теореме (см. [7], где приведены подробные литературные указания).

Теорема Г. 1°. *Пусть функция $F(z)$ аналитична внутри и непрерывна в замкнутой области $\overline{\Delta(\gamma; 0)}$ (кроме, быть может, точки ∞), где*

$$\Delta(\gamma; 0) = \left\{ z: |\arg z| < \frac{\pi}{2\gamma},\ 0 < |z| < +\infty \right\} \left(\frac{1}{2} < \gamma < +\infty \right), \quad (0.39)$$

и удовлетворяет там неравенству

$$|F(re^{i\varphi})| \leqslant Ae^{-p(r)} \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\gamma},\ 0 \leqslant r < +\infty \right), \quad (0.40)$$

где $A > 0$ — некоторая постоянная, $p(r)$ — неотрицательная функция, определенная на полуоси $[0, +\infty)$. Если при этом

$$\int_1^{+\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = +\infty, \quad (0.41)$$

то $F(z) \equiv 0$;

2°. Пусть $p(r) \geqslant 0$ — неотрицательная функция, определенная на полуоси $[0, +\infty)$ и удовлетворяющая условию

$$\int_1^{+\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr < +\infty, \quad (0.42)$$

где $\frac{1}{2} < \gamma < +\infty$.

Тогда существует функция $F(z) \not\equiv 0$, аналитическая внутри и непрерывная в замкнутом угле $\overline{\Delta(\gamma; 0)}$ и удовлетворяющая неравенству (0.40).

0.5. (а) Из самого определения функционалов единственности (0.11) и (0.12) очевидно, что для их существования и конечности вовсе не обязательно накладывать на функции $\varphi(x)$ из соответствующих классов ограничения (0.9). Естественно было ожидать, что утверждения теорем Б и В справедливы не только в классах $C_a^{(\infty)}$, но и в классах функций, удовлетворяющих минимальным ограничениям, обеспечивающим существование этих функционалов.

Именно, обозначим через $\widetilde{C}_a^{(\cdot)}$ $(-1 < \alpha < 1,\ \alpha \neq 0)$ класс ограниченных и бесконечно-дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$\int_0^{+\infty} |\varphi^{(n)}(t)|\, t^{\alpha n - 1}\, dt < \infty \ (n = 1, 2, \cdots), \text{ при } 0 < \alpha < 1; \quad (0.43)$$

$$\int_0^{+\infty} |\varphi^{(2n)}(t)|\, t^{(1+\alpha)n-1}\, dt < +\infty \ (n = 1, 2, \cdots), \text{ при } -1 < \alpha < 0. \quad (0.44)$$

Для функций этих классов также можно определить операторы последовательного дифференцирования порядков n/ρ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

С этой целью отметим, что для функций $\varphi(x) \in C_a^{(-)} (-1 < \alpha < 1)$ справедливы формулы

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = D_\infty^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots; \ 0 \leqslant \alpha < 1), \tag{0.45}$$

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = D_\infty^{-(1+\alpha) n} \varphi^{(2n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots; \ -1 < \alpha < 0), \tag{0.46}$$

(формула (0.45) установлена в [7] лемме 6, а (0.46) — в [8], лемме 1.3).

Поэтому для функций $\varphi(x) \in \tilde{C}_a^{(-)}$ $(-1 < \alpha < 1)$ естественно определить операторы последовательного дифференцирования следующим образом.

Для значений $0 \leqslant \alpha < 1$ *положим*

$$\tilde{D}_\infty^0 \varphi(x) = \varphi(x),$$

$$\tilde{D}_\infty^{1/\rho} \varphi(x) = D_\infty^{-\alpha} \varphi'(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} \varphi'(t)\, dt, \tag{0.47}$$

$$\tilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = D_\infty^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n - 1} \varphi^{(n)}(t)\, dt \ (n = 1, 2, \cdots).$$

При этом заметим, что согласно (0.47) при $\alpha = 0$ $\tilde{D}_-^n \varphi(x) = \varphi^{(n)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, и поэтому класс $\tilde{C}_0^{(\infty)}$ естественно отождествля с классом $C_0^{(\infty)}$ ограниченных бесконечно-дифференцируемых на по уоси $[0, +\infty)$ функций.

Для значений же $-1 < \alpha < 0$ *положим*

$$\tilde{D}_\infty^0 \varphi(x) = \varphi(x),$$

$$\tilde{D}_\infty^{1/\rho} \varphi(x) = D_-^{(1+\alpha)} \varphi''(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)-1} \varphi''(t)\, dt, \tag{0.48}$$

$$\tilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = D_\infty^{-(1+\alpha) n} \varphi^{(2n)}(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha) n)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha) n - 1} \varphi^{(2n)}(t)\, dt \ (n = 1, 2, \cdots),$$

$\left(\text{как и раньше, } \frac{1}{\rho} = 1 - \alpha\right)$.

Отметим, что из условий (0.43) и (0.44), очевидно, вытекает *существование и конечность функций* $\tilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ *на всей полуоси* $[0, +\infty)$.

0.6 (а). Как отмечалось выше, *в основных теоремах* Б и В *проблема* α*-квазианалитичности принципиально была полностью решена.*

Цель данной статьи — показать, что без какого-либо изменения всего метода решения проблемы в целом, предложенного в ис-

следовании [7], *и лишь путем эквивалентных переопределений операторов интегродифференцирования дробного порядка* $D_{\infty}^{\alpha|\rho}$ *можно предельно расширить ранее введенные классы допустимых функций* $C_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$ *и* $C_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$ *с тем, чтобы они были непосредственно ассоциированы с определениями простейших функционалов единственности* (0.11) *и* (0.12).

На этом пути приходится лишь несколько видоизменять и переДоказывать некоторые из лемм, содержащихся в работах [7, 8], и дополнительно воспользоваться только частным случаем следующей известной теоремы (см. [5], стр. 217).

Теорема Д. *Пусть* $\varphi(x)$ — n *раз дифференцируемая функция на* $[0, +\infty)$ *и*

$$m_k = \sup_{0<x<+\infty} |\varphi^{(k)}(x)| \quad (0 \leqslant k \leqslant n). \tag{0.49}$$

Тогда

$$m_k \leqslant \left(\frac{8en}{k}\right)^k m_0^{1-\frac{k}{n}} m_n^{\frac{k}{n}} \quad (1 \leqslant k < n). \tag{0.50}$$

С целью формулировки соответствующих результатов приведем следующие определения:

1) $\bar{C}_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1)$ — *это класс тех функций* $\varphi(x) \in \bar{C}_{\alpha}^{(\infty)}$, *которые удовлетворяют условиям*

$$\sup_{0<x<+\infty} |\bar{D}_{\infty}^{\alpha|\rho}\varphi(x)| \leqslant A_{\varphi} B_{\varphi}^{n} M_n \quad (n = 1, 2, \cdots); \tag{0.51}$$

2) $\bar{C}_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1)$ — *это класс тех функций* $\varphi(x) \in \bar{C}_{\alpha}^{(\infty)}$, *которые удовлетворяют условиям*

$$\sup_{0<x<+\infty} |\varphi^{(n)}(x)| < A_{\varphi} B_{\varphi}^{n} M_n \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{0.52}$$

где постоянные $A_{\varphi} > 0$ и $B_{\varphi} > 0$ зависят, вообще говоря, от функции φ.

В следующих теоремах содержится исчерпывающее решение проблемы α-квазианалитичности для этих классов.

Теорема 1. *Для того, чтобы класс* $\tilde{C}_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1)$ *был* α-*квазианалитическим, т. е. чтобы для любой функции* $\varphi(x) \in \tilde{C}_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$ *из условий*

$$L_n^{\alpha}\varphi = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{0.53}$$

следовало тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty. \tag{0.54}$$

Теорема 2. *Для того, чтобы класс* $\tilde{C}_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1)$ *был* α-*квазианалитическим, т. е. чтобы для любой функции* $\varphi(x) \in \tilde{C}_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$ *из условий*

$$L_n^{\alpha}\varphi = 0 \ (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots) \tag{0.55}$$

следовало тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty. \tag{0.56}$$

(б) В § 1 приводятся формулировки и полные доказательства тех лемм из [7], а также [8], которые нуждались в видоизменениях, в связи с переходом от классов $C_{\alpha}^{(\infty)}$ $(-1<\alpha<1)$ к более широким классам $\widetilde{C}_{\alpha}^{(\infty)}$ $(-1<\alpha<1)$. Однако, несмотря на небольшие по существу видоизменения соответствующих формулировок, в результате такого перехода доказательства этих лемм (1′, 1″, 2′, 2″) значительно удлинились.

Но отметим, что при этом нам не понадобилось привлечения иных средств анализа, чем неоднократное кропотливое применение формулы интегрирования по частям, предельных переходов и установление сходимости тех или иных несобственных интегралов.

В заключительном § 2 мы лишь намечаем схемы доказательств теорем 1 и 2, поскольку их полное изложение явилось бы буквальным повторением всего предложенного в [7] метода и его изложения.

Однако лишь по мере необходимости нами указываются те частные места из первоначального изложения метода, где взамен прежних лемм следует опираться на их видоизмененные варианты из § 1.

§ 1. Доказательство видоизмененных лемм

1.1 (а) Пусть опять параметр $\rho\left(\frac{1}{2}<\rho<+\infty\right)$ определяется по параметру $\alpha\,(-1<\alpha<1)$ равенством

$$\frac{1}{\rho} = 1-\alpha. \tag{1.1}$$

Для значений параметра $0<\alpha<1$ в лемме 6 исследования [7] были установлены важные свойства операторов последовательного дифференцирования $D_{\infty}^{n/\rho}$ $(n \geqslant 0)$ дробного порядка, которые были определены на функциях $\varphi(x)$ из класса $C_{\alpha}^{(\infty)}$ по формулам (0.33). Для функций из класса $C_{\alpha}^{(\infty)}$ в той же лемме, в частности, была установлена справедливость равенств (0.45), из которых, очевидно, следует, что при любом $n \geqslant 0$ оператор $D_{\infty}^{n/\rho}$ на классе $C_{\alpha}^{(\infty)}$ совпадает с оператором $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}$, определенным по формулам (0.47).

Покажем, что если для функций из более широкого класса $\widetilde{C}_{\alpha}^{(\infty)} \supset C_{\alpha}^{(\infty)}$ положить в основу определение (0.47) операторов

$\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}$ $(n \geqslant 0)$, то отмеченная лемма 6 остается в силе в следующей формулировке.

Лемма 1′. *Пусть* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_{\alpha}^{(\infty)}$ $(0 < \alpha < 1)$. *Тогда справедливы утверждения:*

1°. *Если* $\alpha n - 1 \geqslant 0$, *то функция* $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)$ *непрерывна и ограничена на полуоси* $[0, +\infty)$, *причем*

$$\lim_{x \to +\infty} \widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) = 0; \tag{1.2}$$

2°. *Если* $\alpha(1-\alpha)n - 3 \geqslant 0$, *то функция* $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)$ *принадлежит одновременно классам* $L_1(0, +\infty)$ *и* $L_2(0, +\infty)$;

3°. *Справедливы формулы*

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^k D_{\infty}^{-(\alpha n - k)} \varphi^{(n-k)}(x); \; x \in (0, +\infty)$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots, \; k = 0, 1, \cdots, [\alpha n]), \tag{1.3}$$

где $[\alpha n]$ *означает целую часть числа* αn.

Доказательство. 1°. Введем вспомогательную функцию, полагая для каждого $x \in [0, +\infty)$

$$G_n(t; x) = \begin{cases} (t-x)^{\alpha n - 1}, & x \leqslant t < +\infty, \\ 0, & 0 \leqslant t < x, \end{cases}$$

и заметим, что согласно (0.47) можем написать

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} G_n(t; x) \varphi^{(n)}(t)\, dt, \; x \in [0, +\infty). \tag{1.4}$$

При $\alpha n - 1 > 0$ функция $G_n(t; x)$ непрерывна по обеим переменным $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, +\infty)$, причем

$$G_n(t; x) \leqslant \begin{cases} t^{\alpha n - 1}, & x \leqslant t < +\infty, \\ 0, & 0 \leqslant t < x, \end{cases} \quad x \in [0, +\infty). \tag{1.5}$$

Следовательно, в силу условий (0.43) интеграл (1.4) сходится абсолютно и равномерно на полуоси $0 \leqslant x < +\infty$ и определяет непрерывную на этой полуоси функцию $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)$.

С другой стороны, поскольку из (1.4) и (1.5) следует оценка

$$|\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_x^{+\infty} |\varphi^{(n)}(t)|\, t^{\alpha n - 1}\, dt, \; x \in [0, +\infty),$$

то как ограниченность функции $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)$ на полуоси $[0, +\infty)$, так и предельное равенство (1.2) вытекают из условий (0.43).

Утверждение 2° удобно доказывать с использованием формул (1.3), поэтому сначала докажем утверждение 3°.

При $n = 0$ справедливость формул (1.3) очевидна ввиду (0.26′) и (0.47).

Полагая $n \geqslant 1$, отметим сначала, что поскольку $\alpha n - k \leqslant \alpha (n-k)$ $(k = 0, 1, \cdots, [\alpha n])$, то

$$|\varphi^{(n-k)}(t)|\, t^{\alpha n-k-1} \leqslant |\varphi^{(n-k)}(t)|\, t^{\alpha(n-k)-1}, \quad 1 \leqslant t < +\infty,$$

и поэтому, в силу неравенств $n - k \geqslant 1$ $(n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant [\alpha n])$ и условий (0.43)

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(n-k)}(t)|\, t^{\alpha n-k-1}\, dt < +\infty \quad (n \geqslant 1;\ k = 0, 1, \cdots, [\alpha n]). \tag{1.6}$$

Отсюда, в частности, будем иметь

$$\liminf_{t \to +\infty} |\varphi^{(n-k)}(t)|\, t^{\alpha n-k} = 0 \quad (n \geqslant 1;\ k = 0, 1, \cdots, [\alpha n]). \tag{1.7}$$

Проведем теперь рассуждения по индукции.

При $k = 0$ формулы (1.3), очевидно, совпадают с самим определением (0.47) оператора $\widetilde{D}_\infty^{\alpha/p}$.

Предположим, что эти формулы верны при $k = p$ $(0 \leqslant p \leqslant [\alpha n] - 2)$, т. е.

$$\widetilde{D}_\infty^{\alpha/p} \varphi(x) = \frac{(-1)^p}{\Gamma(\alpha n - p)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n-p-1} \varphi^{(n-p)}(t)\, dt, \quad x \in (0, +\infty), \tag{1.8}$$

заметив при этом, что в силу (1.6) этот интеграл абсолютно сходится, и докажем, что формулы (1.3) будут верны и при $k = p + 1$.

На основании (1.7) выберем последовательность $a_j \uparrow +\infty$ такую, что

$$\lim_{j \to +\infty} a_j^{\alpha n-p-1} |\varphi^{(n-p-1)}(a_j)| = 0. \tag{1.9}$$

Далее, учитывая (1.8) и производя интегрирование по частям, получим

$$\widetilde{D}_\infty^{\alpha/p} \varphi(x) = \frac{(-1)^p}{\Gamma(\alpha n - p)} \lim_{j \to +\infty} \int_x^{a_j} (t-x)^{\alpha n-p-1}\, d\varphi^{(n-p-1)}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^p}{\Gamma(\alpha n - p)} \lim_{j \to +\infty} \left\{ (t-x)^{\alpha n-p-1} \varphi^{(n-p-1)}(t) \Big|_x^{a_j} - \right.$$

$$\left. - (\alpha n - p - 1) \int_x^{a_j} (t-x)^{\alpha n-p-2} \varphi^{(n-p-1)}(t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{p+1}}{\Gamma(\alpha n - p - 1)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n-p-2} \varphi^{(n-p-1)}(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{p+1} D_\infty^{-(\alpha n-(p+1))} \varphi^{(n-(p+1))}(x), \quad x \in (0, +\infty), \tag{1.10}$$

т. е. формулы (1.3) при $k = p + 1$. При этом в силу (1.6) последний интеграл абсолютно сходится, а проинтегрированный член исчезает ввиду (1.9) и неравенства $\alpha n - p - 1 \geqslant 1$.

Таким образом, формулы (1.3) справедливы для значений $n \geqslant 1$ и $k = 0, 1, \cdots, [\alpha n]-1$. В частности, при $k = [\alpha n] - 1$ будем иметь

$$\widetilde{D}_{\infty}^{\alpha_n/\rho}\varphi(x) = \frac{(-1)^{[\alpha n]-1}}{\Gamma(\alpha n - [\alpha n]+1)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n - [\alpha n]}\, \varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)\, dt, \qquad (1.11)$$

причем, как уже убедились, этот интеграл при любом $x \in (0, +\infty)$ абсолютно сходится.

Чтобы доказать (1.3) при $k = [\alpha n]$, разберем отдельно два случая: 1) $\alpha n \neq [\alpha n]$; 2) $\alpha n = [\alpha n]$.

В обоих случаях, опять на основании (1.7), выберем последовательность $a_j \uparrow +\infty$, для которой

$$\lim_{j \to +\infty} a_j^{\alpha n - [\alpha n]} \left|\varphi^{(n-[\alpha n])}(a_j)\right| = 0. \qquad (1.9')$$

В случае $\alpha n \neq [\alpha n]$, как и выше, в силу (1.11), получим

$$\widetilde{D}_{\infty}^{\alpha_n/\rho}\varphi(x) = \frac{(-1)^{[\alpha n]-1}}{\Gamma(\alpha n - [\alpha n]+1)} \lim_{j \to +\infty} \int_x^{a_j} (t-x)^{\alpha n - [\alpha n]}\, d\varphi^{(n-[\alpha n])}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^{[\alpha n]-1}}{\Gamma(\alpha n - [\alpha n]+1)} \lim_{j \to +\infty} \left\{ (t-x)^{\alpha n - [\alpha n]}\, \varphi^{(n-[\alpha n])}(t)\Big|_x^{a_j} - \right.$$

$$\left. - (\alpha n - [\alpha n]) \int_x^{a_j} (t-x)^{\alpha n - [\alpha n] - 1}\, \varphi^{(n-[\alpha n])}(t)\, dt \right\} =$$

$$\frac{(-1)^{[\alpha n]}}{\Gamma(\alpha n - [\alpha n])} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n - [\alpha n] - 1}\, \varphi^{(n-[\alpha n])}(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{[\alpha n]} D_{\infty}^{-(\alpha n - [\alpha n])}\, \varphi^{(n-[\alpha n])}(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

Пусть, наконец, $\alpha n = [\alpha n]$. Опять, в силу (1.11) и (1.9′), можем написать

$$\widetilde{D}_{\infty}^{\alpha_n/\rho}\varphi(x) = (-1)^{[\alpha n]-1} \lim_{j \to +\infty} \int_x^{a_j} \varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{[\alpha n]-1} \lim_{j \to +\infty} \left\{ \varphi^{(n-[\alpha n])}(a_j) - \varphi^{(n-[\alpha n])}(x) \right\} =$$

$$= (-1)^{[\alpha n]} \varphi^{(n-[\alpha n])}(x) = (-1)^{[\alpha n]} D_{\infty}^{-(\alpha n - [\alpha n])}\, \varphi^{(n-[\alpha n])}(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

причем последнее равенство написано на основании (0.26′).

Этим завершается доказательство утверждения 3°.

Докажем, наконец, утверждение 2°.

При нашем условии $\alpha(1-\alpha)n - 3 \geqslant 0$ будем иметь

$$\gamma_n \equiv [\alpha n](1-\alpha) - 2 + \alpha \geqslant 0. \qquad (1.12)$$

Далее, воспользовавшись формулой (1.3) при $k = [\alpha n] - 1$, можем написать

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x),\, x^{\gamma_n}\,dx = \int_0^{+\infty} |D_\infty^{-(\alpha n-[\alpha n]+1)}\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(x)|\, x^{\gamma_n}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)} \int_0^{+\infty} x^{\gamma_n} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n-[\alpha n]} |\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)|\,dt\,dx.$$

Отсюда, на основании теоремы Фубини поменяв порядки интегрирования и пользуясь формулой (0.17), получим

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, x^{\gamma_n} dx <$$

$$< \frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)| \int_0^t (t-x)^{\alpha n-[\alpha n]} x^{\gamma_n}\,dx\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\gamma_n)}{\Gamma(2+\gamma_n+\alpha n-[\alpha n])} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)|\, t^{1+\gamma_n+\alpha n-[\alpha n]}\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\gamma_n)}{\Gamma(2+\gamma_n+\alpha n-[\alpha n])} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)|\, t^{(n-[\alpha n]+1)\alpha-1} dt < +\infty,$$

причем равенство $1+\gamma_n+\alpha n-[\alpha n] = (n-[\alpha n]+1)\alpha-1$ следует из (1.12), а конечность последнего интеграла обеспечена условиями (0.43).

Таким образом

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, x^{\gamma_n}\,dx < +\infty,$$

и поскольку $\gamma_n > 0$, а $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)$ в силу утверждения 1° леммы непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$, то

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\,dx < \int_0^1 |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\,dx + \int_1^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, x^{\gamma_n}\,dx < +\infty,$$

то есть $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \in L_1(0, +\infty)$. Отсюда, воспользовавшись утверждением 1° леммы, легко можно убедиться и в том, что $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \in L_2(0, +\infty)$. Лемма доказана.

Следствие. *Если* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_a^{(\infty)}$ $(0 < \alpha < 1)$ *и при некотором* $n > \dfrac{1}{\alpha(1-\alpha)}$

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \equiv 0,\ x \in (0, +\infty), \tag{1.13}$$

то

$$\varphi(x) \equiv \text{const},\ x \in (0, +\infty). \tag{1.14}$$

Доказательство. Разберем отдельно два случая: 1) $\alpha n \neq [\alpha n]$; 2) $\alpha n = [\alpha n]$.

Пусть $\alpha n \neq [\alpha n]$.

Так как при условии $n > \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$ $\alpha(n-[\alpha n])-1 > 0$, то ввиду (0.43)

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(n-[\alpha n])}(t)|\,dt \leqslant \int_1^{+\infty} |\varphi^{(n-[\alpha n])}(t)|\, t^{\alpha(n-[\alpha n])-1}\,dt < +\infty. \tag{1.15}$$

Следовательно, при условии (1.13), воспользовавшись формулами (1.3) (при $k=[\alpha n]$) и (0.18), будем иметь

$$0 = \int_x^{+\infty} (t_2-x)^{-(\alpha n-[\alpha n])} \widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(t_2)\,dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])} \int_x^{+\infty} (t_2-x)^{-(\alpha n-[\alpha n])} \int_{t_2}^{+\infty} (t_1-t_2)^{\alpha n-[\alpha n]-1} \varphi^{(n-[\alpha n])}(t_1)\,dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])} \int_x^{+\infty} \varphi^{(n-[\alpha n])}(t_1) \int_x^{t_1} (t_2-x)^{-(\alpha n-[\alpha n])} (t_1-t_2)^{\alpha n-[\alpha n]-1} dt_2 dt_1 =$$

$$= \Gamma(1-\alpha n+[\alpha n]) \int_x^{+\infty} \varphi^{(n-[\alpha n])}(t_1)\,dt_1,\quad x \in (0,+\infty),$$

причем в силу (1.15) перемена порядков интегрирования допустима. Отсюда уже ясно, что при любых a и b $(0 < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \varphi^{(n-[\alpha n])}(x)\,dx = 0$$

и, следовательно, $\varphi^{(n-[\alpha n])}(x) \equiv 0$, $x \in (0,+\infty)$.

Если же $\alpha n = [\alpha n]$, то на основании (1.13) и формул (1.3) (при $k=[\alpha n]$) опять получим, что $\varphi^{(n-[\alpha n])}(x) \equiv 0$, $x \in (0,+\infty)$.

Очевидно, что тогда

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-[\alpha n]-1} x^{n-[\alpha n]-1},\quad x \in (0,+\infty).$$

Однако $a_1 = \cdots = a_{n-[\alpha n]-1} = 0$, так как в противном случае функция $\varphi(x)$ не может быть ограниченной, откуда и следует (1.14).

Аналог леммы 6 из исследования [7] в том случае, когда $-1 < \alpha < 0$ и операторы последовательного дифференцирования дробного порядка $D_\infty^{n/\rho}$ на функциях класса $C_\alpha^{(-)}$ определены по формулам (0.34), содержится в работе [8] (стр. 214, лемма 1.3).

Покажем, что если для функций из более широкого класса $\overline{C}_\alpha^{(-)} \supset \supset C_\alpha^{(-)}$ $(-1 < \alpha < 0)$ положить в основу определение (0.48) опера-

торов $\widetilde{D}_{\infty}^{n/p}$ $(n \geqslant 0)$, то в этом случае также отмеченная лемма остается в силе в следующей формулировке.

Лемма 1″. *Пусть* $\varphi(x) \in \overline{C}_{+}^{(\infty)}$ $(-1 < \alpha < 0)$. *Тогда справедливы утверждения*:

1°. *Если* $(1+\alpha)\, n - 1 \geqslant 0$, *то функция* $\widetilde{D}_{\infty}^{n/p} \varphi(x)$ *непрерывна и ограничена на полуоси* $[0, +\infty)$, *причем*

$$\lim_{x \to +\infty} \widetilde{D}_{\infty}^{n/p} \varphi(x) = 0; \tag{1.2′}$$

2°. *Если* $(1+\alpha)\, n - 4 \geqslant 0$, *то функция* $\widetilde{D}_{\infty}^{n/p} \varphi(x)$ *принадлежит одновременно классам* $L_1(0, +\infty)$ *и* $L_2(0, +\infty)$;

3°. *Справедливы формулы*

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/p} \varphi(x) = (-1)^k D_{\infty}^{-((1+\alpha)n-k)} \varphi^{(2n-k)}(x); \; x \in (0, +\infty) \tag{1.3′}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots; \; k = 0, 1, \cdots, [(1+\alpha)\, n]),$$

где $[(1+\alpha)\, n]$ *означает целую часть числа* $(1+\alpha)\, n$.

Доказательство. 1°. Путем введения вспомогательной функции

$$G_n(t; x) = \begin{cases} (t-x)^{(1+\alpha)n-1}, & x \leqslant t < +\infty, \\ 0, & 0 \leqslant t < x, \end{cases} \quad x \in [0, +\infty),$$

это утверждение доказывается точно так же, как и соответствующее утверждение леммы 1′, только вместо формул (0.47) и условий (0.43), естественно, надо воспользоваться формулами (0.48) и условиями (0.44).

Докажем утверждение 3°.

Отметим сначала, что в силу условий (0.44) при каждом $n \geqslant 1$ существует последовательность $a_j \uparrow +\infty$, для которой

$$\lim_{j \to +\infty} a_j^{(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(a_j) = 0. \tag{1.16}$$

С учетом (1.16) и (0.44) при любом $n \geqslant 2$ можем написать

$$\int_1^{+\infty} t^{(1+\alpha)(n-1)-1} \varphi^{(2n-2)}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha)(n-1)} \lim_{j \to +\infty} \int_1^{a_j} \varphi^{(2n-2)}(t)\, dt^{(1+\alpha)(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha)(n-1)} \lim_{j \to +\infty} \left\{ t^{(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2n-2)}(t) \Big|_1^{a_j} - \right.$$

$$\left. - \int_1^{a_j} t^{(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2n-1)}(t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha)(n-1)} \lim_{j \to +\infty} \left\{ -\varphi^{(2n-2)}(1) - \int_1^{a_j} t^{(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2n-1)}(t)\, dt \right\}.$$

Отсюда вытекает существование и конечность предела

$$\lim_{j\to+\infty}\int_1^{a_j} t^{(1+\alpha)(n-1)}\varphi^{(2n-1)}(t)\,dt, \tag{1.17}$$

значение которого легко определяется из предыдущих равенств.

Рассмотрим теперь два возможных случая.

1) Существует $t_0>0$ такое, что при $t\geqslant t_0$ функция $\varphi^{(2n-1)}(t)$ сохраняет знак.

Тогда из существования предела (1.17) вытекает, что

$$\int_1^{+\infty} t^{(1+\alpha)(n-1)}|\varphi^{(2n-1)}(t)|\,dt<+\infty,$$

и, следовательно, существование последовательности $b_j\uparrow+\infty$, такой, что

$$\lim_{j\to+\infty} b_j^{(1+\alpha)(n-1)+1}\varphi^{(2n-1)}(b_j)=0.$$

2) Функция $\varphi^{(2n-1)}(t)$ при $t\to+\infty$ бесконечное число раз меняет знак.

Очевидно, что в этом случае существует последовательность $b_j\uparrow+\infty$, для которой

$$\varphi^{(2n-1)}(b_j)=0\quad(j\geqslant 1).$$

Из сказанного заключаем, что при любом $n\geqslant 2$ существует последовательность $b_j\uparrow+\infty$, для которой

$$\lim_{j\to+\infty} b_j^{(1+\alpha)(n-1)+1}\varphi^{(2n-1)}(b_j)=0. \tag{1.18}$$

С учетом этого равенства, при $(1+\alpha)n-1\geqslant 0$ можем написать

$$|\varphi^{(2n-1)}(t)|=\lim_{j\to+\infty}|\varphi^{(2n-1)}(b_j)-\varphi^{(2n-1)}(t)|\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{j\to+\infty}\int_t^{b_j}|\varphi^{(2n)}(x)|\,dx=\int_t^{+\infty}|\varphi^{(2n)}(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{t^{(1+\alpha)n-1}}\int_t^{+\infty}|\varphi^{(2n)}(x)|x^{(1+\alpha)n-1}\,dx,$$

откуда на основании (0.44) получаем

$$\lim_{t\to+\infty} t^{(1+\alpha)n-1}\varphi^{(2n-1)}(t)=0\quad((1+\alpha)n-1>0). \tag{1.19}$$

Перейдем теперь к доказательству формул (1.3′).

Отметим сначала, что в силу условия $-1<\alpha<0$ для значений $n=0,1$ будем иметь $[(1+\alpha)n]=0$, поэтому для $n=0,1$ в формуле (1.3′) индекс k может принимать только значение 0.

Таким образом, справедливость формул (1.3′) для значений $n=0,1$ непосредственно вытекает из самого определения (0.48) операторов $\overline{D}_\infty^{n/\rho}$.

Поэтому дальше мы можем полагать, что $n \geqslant 2$.

Будем проводить рассуждения по индукции.

При $k=0$ формулы (1.3′) очевидны ввиду (0.48).

Предположим, что эти формулы верны при $k=2p$ $(0 \leqslant 2p \leqslant [(1+\alpha)\,n]-2)$, т. е.

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/p}\varphi(x) = \frac{(-1)^{2p}}{\Gamma((1+\alpha)\,n-2p)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)\,n-2p-1}\,\varphi^{(2n-2p)}(t)\,dt, \quad (1.20)$$

$$x \in (0, +\infty),$$

и докажем, что формулы (1.3′) будут верны и при $k=2p+1$.

Отметим при этом, что поскольку $1 \leqslant (1+\alpha)\,n-2p-1 \leqslant (1+\alpha)\,(n-p)-1$, то из условий (0.44) вытекает абсолютная сходимость интеграла (1.20) при любом $x>0$.

С учетом (1.20), производя интегрирование по частям, получим

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/p}\varphi(x) = \frac{(-1)^{2p}}{\Gamma((1+\alpha)\,n-2p)} \lim_{A\to+\infty} \int_x^A (t-x)^{(1+\alpha)\,n-2p-1}\,d\varphi^{(2n-2p-1)}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^{2p}}{\Gamma((1+\alpha)\,n-2p)} \lim_{A\to+\infty} \left\{ (t-x)^{(1+\alpha)\,n-2p-1}\,\varphi^{(2n-2p-1)}(t) \Big|_x^A - \right.$$

$$\left. -((1+\alpha)\,n-2p-1) \int_x^A (t-x)^{(1+\alpha)\,n-2p-2}\,\varphi^{(2n-2p-1)}(t)\,dt \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{2p+1}}{\Gamma((1+\alpha)\,n-2p-1)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)\,n-2p-2}\,\varphi^{(2n-2p-1)}(t)\,dt =$$

$$= (-1)^{2p+1}\,D_{\infty}^{-((1+\alpha)\,n-(2p+1))}\,\varphi^{(2n-(2p+1))}(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

т. е. мы пришли к формулам (1.3′) для $k=2p+1$.

При этом, очевидно, последний интеграл сходится (хотя, быть может, и неабсолютно), а проинтегрированный член исчезает, так как $(1+\alpha)\,n-2p-1 \geqslant 1$ и, кроме того, в силу неравенства $(1+\alpha)\,n-2p-1 \leqslant (1+\alpha)\,(n-p)-1$ и (1.19)

$$\lim_{t\to+\infty} t^{(1+\alpha)\,n-2p-1}\,\varphi^{(2n-2p-1)}(t) = 0.$$

Из доказанного, в частности, следует справедливость формул (1.3′) при $k=1$.

Предположим теперь, что эти формулы справедливы при $k=2p-1$ $(1 \leqslant 2p-1 \leqslant [(1+\alpha)\,n]-2)$, т. е.

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/p}\varphi(x) = \frac{(-1)^{2p-1}}{\Gamma((1+\alpha)\,n-2p+1)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)\,n-2p}\,\varphi^{(2n-2p+1)}(t)\,dt, \quad (1.21)$$

$$x \in (0, +\infty),$$

и докажем, что тогда они будут верны и при $k=2p$.

Действительно, учитывая (1.21) и производя интегрирование по частям, получим

$$\widetilde{D}_{\infty}^{\alpha/\rho}\varphi(x)=\frac{(-1)^{2p-1}}{\Gamma((1+\alpha)n-2p+1)}\lim_{j\to+\infty}\int_x^{a_j}(t-x)^{(1+\alpha)n-2p}\,d\varphi^{(2n-2p)}(t)=$$

$$=\frac{(-1)^{2p-1}}{\Gamma((1+\alpha)n-2p+1)}\lim_{j\to+\infty}\left\{(t-x)^{(1+\alpha)n-2p}\,\varphi^{(2n-2p)}(t)\Big|_x^{a_j}-\right.$$

$$\left.-((1+\alpha)n-2p)\int_x^{a_j}(t-x)^{(1+\alpha)n-2p-1}\varphi^{(2n-2p)}(t)\,dt\right|=$$

$$=\frac{(-1)^{2p}}{\Gamma((1+\alpha)n-2p)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-2p-1}\varphi^{(2n-2p)}(t)\,dt=$$

$$=(-1)^{2p}D_{\infty}^{-((1+\alpha)n-2p)}\varphi^{(2n-2p)}(x),\quad x\in(0,+\infty),$$

т. е. мы вновь пришли к формулам (1.3′). но уже для $k=2p$.

При этом последний интеграл абсолютно сходится в силу неравенств $2\leqslant(1+\alpha)n-2p-1\leqslant(1+\alpha)(n-p)-1$ и условий (0.44), а проинтегрированный член исчезает ввиду тех же неравенств в силу (1.16).

Поскольку для $k=0$ и $k=1$ справедливость формул (1.3′) уже установлена, то на основании уже доказанных индуктивных переходов можем последовательно утверждать справедливость формул (1.3′) для всех значений $k=0,\ 1,\cdots,\ [(1+\alpha)n]-1$.

В частности, при $k=[(1+\alpha)n]-1$ будем иметь:

$$\widetilde{D}_{\infty}^{\alpha/\rho}\varphi(x)=$$

$$=\frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]+1)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]}\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n]+1)}(t)\,dt.\tag{1.22}$$

$$x\in(0,+\infty).$$

Чтобы доказать (1.3′) при $k=[(1+\alpha)n]$, разберем отдельно два случая.

1) Пусть $[(1+\alpha)n]=(1+\alpha)n$.

Отметим, сначала, что в силу неравенства $2n-[(1+\alpha)n]\geqslant 2$ и ввиду (1.16) и (1.18) можно подобрать последовательность $t_j\uparrow+\infty$, для которой

$$\lim_{j\to+\infty}\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_j)=0.$$

Отсюда на основании (1.22) получим

$$\widetilde{D}_{\infty}^{\alpha/\rho}\varphi(x)=(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}\lim_{j\to+\infty}\int_x^{t_j}\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n]+1)}(t)\,dt=$$

$$= (-1)^{[(1+\alpha)n]-1} \lim_{j \to +\infty} \{\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_j) - \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x)\} =$$

$$= (-1)^{[(1+\alpha)n]} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x) =$$

$$= (-1)^{[(1+\alpha)n]} D_{\infty}^{-((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

2) Пусть $[(1+\alpha)n] \neq (1+\alpha)n$. Тогда $(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n] > 0$.

Отметим еще, что поскольку для формул (1.3′) случай $k=0$ уже разобран, то будем полагать $[(1+\alpha)n] > 1$.

Предположим сначала, что $2n - [(1+\alpha)n] + 1$ — четное число.

Заметив, что тогда $2n - [(1+\alpha)n]$ — нечетно, причем

$$\frac{2n - [(1+\alpha)n] + 1}{2}(1+\alpha) - 1 \geqslant (1+\alpha)n - [(1+\alpha)n],$$

в силу (1.19) будем иметь

$$\lim_{A \to +\infty} A^{(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n]} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(A) = 0.$$

С учетом этого равенства из (1.22) интегрированием по частям получим

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) = \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}}{\Gamma((1+\alpha)n - [(1+\alpha)n] + 1)} \times$$

$$\times \lim_{A \to +\infty} \int_x^A (t-x)^{(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n]} d\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}}{\Gamma((1+\alpha)n - [(1+\alpha)n] + 1)} \times$$

$$\times \lim_{A \to +\infty} \left\{ (t-x)^{(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n]} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t) \Big|_x^A - \right.$$

$$\left. - ((1+\alpha)n - [(1+\alpha)n]) \int_x^A (t-x)^{(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n] - 1} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]}}{\Gamma((1+\alpha)n - [(1+\alpha)n])} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n] - 1} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{[(1+\alpha)n]} D_{\infty}^{-((1+\alpha)n - [(1+\alpha)n])} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

причем очевидно, что последний интеграл сходится.

Предположим теперь, что $2n - [(1+\alpha)n] + 1$ — нечетное число.

Нетрудно проверить, что тогда для четного числа $2n - [(1+\alpha)n]$ справедливо неравенство

$$\frac{2n - [(1+\alpha)n]}{2}(1+\alpha) \geqslant (1+\alpha)n - [(1+\alpha)n],$$

и поэтому в силу условий (0.44) имеем

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)|\, t^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]-1}\, dt < +\infty. \tag{1.23}$$

Отсюда, в частности, вытекает существование последовательности $t_j \uparrow +\infty$, для которой

$$\lim_{j\to+\infty} t_j^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_j) = 0.$$

Пользуясь этим равенством, в силу (1.22) получим

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]+1)} \times$$

$$\times \lim_{j\to+\infty}\int_x^{t_j} (t-x)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]}\, d\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]+1)} \times$$

$$\times \lim_{j\to+\infty}\left\{(t-x)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)\Big|_x^{t_j} - \right.$$

$$\left. - ((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])\int_x^{t_j} (t-x)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]-1}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)\, dt\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]}}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])}\int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]-1}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{[(1+\alpha)n]}\, D_\infty^{-((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x),$$

$$x \in (0, +\infty),$$

причем в силу (1.23) последний интеграл абсолютно сходится.

Этим доказательство формул (1.3′) полностью завершено.

Докажем утверждение 2° леммы.

Сначала заметим, что в силу условия $(1+\alpha)n - 4 > 0$ будем иметь $2 < [(1+\alpha)n]$. Следовательно, воспользовавшись формулами (1.3′) и (0.17), можем написать

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, x^{-\alpha}\, dx = \int_0^{+\infty} |D_\infty^{-((1+\alpha)n-2)}\, \varphi^{(2n-2)}(x)|\, x^{-\alpha}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n-2)}\int_0^{+\infty} x^{-\alpha}\int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)n-3}\, |\varphi^{(2n-2)}(t)|\, dt dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n-2)}\int_0^{+\infty} |\varphi^{(2n-2)}(t)| \int_0^t (t-x)^{(1+\alpha)n-3}\, x^{-\alpha}\, dx\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(-1-\alpha+(1+\alpha)n)} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(2n-2)}(t)|\, t^{(1+\alpha)n-2-\alpha}\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(-1-\alpha+(1+\alpha)n)} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(2n-2)}(t)|\, t^{(1+\alpha)(n-1)-1}\, dt < +\infty,$$

причем сходимость последнего интеграла вытекает из условий (0.44), а перемена порядков интегрирования допустима на основании теоремы Фубини.

Далее, поскольку $\widetilde{D}_\infty^{n/p}\varphi(x)$ при $(1+\alpha)n-4>0$ непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$ и $-\alpha>0$, то

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/p}\varphi(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 |\widetilde{D}_\infty^{n/p}\varphi(x)|\, dx + \int_1^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/p}\varphi(x)|\, x^{-\alpha}\, dx < +\infty,$$

т. е. $\widetilde{D}_\infty^{n/p}\varphi(x) \in L_1(0, +\infty)$. Наконец, отсюда и из утверждения 1° леммы следует также принадлежность $\widetilde{D}_\infty^{n/p}\varphi(x) \in L_2(0, +\infty)$, и лемма доказана.

Следствие. *Если* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_2^{(\infty)}$ $(-1<\alpha<0)$ *и при некотором* $n > \dfrac{4}{1+\alpha}$

$$\widetilde{D}_\infty^{n/p}\varphi(x) \equiv 0,\ x \in (0, +\infty), \tag{1.13'}$$

то

$$\varphi(x) \equiv \text{const},\ x \in (0, +\infty). \tag{1.14'}$$

Доказательство. Отметим сначала, что в силу (1.19) при $(1+\alpha)n-1>0$

$$|\varphi^{(2n-1)}(t)| \leqslant Ct^{1-(1+\alpha)n},\ 1 \leqslant t < +\infty,$$

где $C>0$ — некоторая постоянная. Поэтому

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(2n-1)}(t)|\, dt \leqslant C \int_1^{+\infty} t^{1-(1+\alpha)n}\, dt < +\infty, \text{ при } (1+\alpha)n-2>0. \tag{1.24}$$

С другой стороны, в силу условий (0.44)

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(2n)}(t)|\, dt \leqslant \int_1^{+\infty} |\varphi^{(2n)}(t)|\, t^{(1+\alpha)n-1}\, dt < +\infty, \text{ при } (1+\alpha)n-1 \geqslant 0. \tag{1.25}$$

На основании (1.24) и (1.25) заключаем, что

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(p)}(t)|\, dt < +\infty,\ p \geqslant \frac{4}{1+\alpha}, \tag{1.26}$$

и, в частности,

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)|\,dt < +\infty,\ n \geqslant \frac{4}{1+\alpha}, \tag{1.26'}$$

так как $2n-[(1+\alpha)n] \geqslant n$.

Чтобы доказать (1.14'), вновь разберем два случая:

1) $(1+\alpha)n \neq [(1+\alpha)n]$; 2) $(1+\alpha)n = [(1+\alpha)n]$.

Пусть $(1+\alpha)n \neq [(1+\alpha)n]$.

Воспользовавшись формулами (1.3') (при $k=[(1+\alpha)n]$) и (0.18), в силу (1.13') будем иметь:

$$0 = \int_x^{+\infty} (t_2-x)^{([(1+\alpha)n]-[(1+\alpha)n])}\,\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\,\varphi(t_2)\,dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])} \int_x^{+\infty} (t_2-x)^{-(1+\alpha)n+[(1+\alpha)n]} \times$$

$$\times \int_{t_2}^{+\infty} (t_1-t_2)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]-1}\,\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_1)\,dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])} \int_x^{+\infty} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_1) \times$$

$$\times \int_x^{t_1} (t_2-x)^{-(1+\alpha)n+[(1+\alpha)n]} (t_1-t_2)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]-1}\,dt_2 dt_1 =$$

$$= \Gamma([(1+\alpha)n]-(1+\alpha)n+1) \int_x^{+\infty} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_1)\,dt_1,\ x \in (0,+\infty),$$

причем в силу (1.26') перемена порядков интегрирования допустима. Отсюда ясно, что при любых a и b $(0<a<b<+\infty)$

$$\int_a^b \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x)\,dx = 0,$$

и, следовательно, $\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x) \equiv 0$, $x \in (0,+\infty)$.

Если же $(1+\alpha)n = [(1+\alpha)n]$, то на основании (1.13') и формул (1.3') (при $k=[(1+\alpha)n]$) опять получим, что $\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x) \equiv 0$, $x \in (0,+\infty)$.

Очевидно, что тогда

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n-[(1+\alpha)n]-1} x^{2n-[(1+\alpha)n]-1},\ x \in (0,+\infty).$$

Однако $a_1 = \cdots = a_{2n-[(1+\alpha)n]-1} = 0$, так как в противном случае $\varphi(x)$ не может быть ограниченной, откуда и следует (1.14').

1.2 (а) В лемме 7 исследования [7] были установлены другие важные свойства операторов последовательного дифференцирования дробного порядка $D_{\infty}^{n/\rho}$ $(n \geqslant 0)$, определенных на функциях класса $C_{\alpha}^{(-)}$ $(0 < \alpha < 1)$ по формулам (0.33).

Покажем, что если для функций из класса $\widetilde{C}_{\alpha}^{(-)} \supset C_{\alpha}^{(-)}$ $(0 < \alpha < 1)$ положить в основу определения (0.47) операторов $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}$ $(n \geqslant 0)$, то отмеченная лемма 7 остается в силе в следующей формулировке.

Лемма 2'. 1°. *Если* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_{\alpha}^{(-)}$ $(0 < \alpha < 1)$ *и* $n \geqslant \dfrac{3}{\alpha}$, *то операторы* $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)$ *могут быть определены также посредством соотношений*

$$\widetilde{D}_{\infty}^{\frac{n+1}{\rho}} \varphi(x) = D_{\infty}^{-\alpha} \left\{ \frac{d}{dx} \widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right\}, \quad x \in (0, +\infty); \tag{1.27}$$

2°. *Если* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_{\alpha}^{(-)}(0 < \alpha < 1)$ *и* $n > \dfrac{3}{\alpha}$, *то*

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{d}{dx} \widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right| dx < +\infty. \tag{1.28}$$

Доказательство. 1°. Если $[a, b]$ — произвольный отрезок $0 < a < b < +\infty$), то

$$(t-x)^{\alpha n-2} |\varphi^{(n)}(t)| \leqslant t^{\alpha n-1} |\varphi^{(n)}(t)|; \quad t \geqslant b+1, \quad x \in [a, b], \tag{1.29}$$

так как ввиду условия $n \geqslant \dfrac{3}{\alpha}$, очевидно, $\alpha n - 2 \geqslant 1$. Следовательно

$$\frac{d}{dx} \int_{b+1}^{+\infty} (t-x)^{\alpha n-1} \varphi^{(n)}(t)\, dt = -(\alpha n - 1) \times$$

$$\times \int_{b+1}^{+\infty} (t-x)^{\alpha n-2} \varphi^{(n)}(t)\, dt, \quad x \in [a, b], \tag{1.30}$$

поскольку полученный после дифференцирования интеграл равномерно сходится по $x \in [a, b]$ в силу (1.29) и основных условий (0.43).

С другой стороны, поскольку из того же неравенства $\alpha n - 2 \geqslant 1$) следует непрерывность функции

$$\frac{d}{dx} \{(t-x)^{\alpha n-1} \varphi^{(n)}(t)\} = -(\alpha n - 1)(t-x)^{\alpha n-2} \varphi^{(n)}(t)$$

по обеим переменным t и x $(a \leqslant t \leqslant b+1, \ a \leqslant x \leqslant b)$, то в силу известной теоремы

$$\frac{d}{dx} \int_x^{b+1} (t-x)^{\alpha n-1} \varphi^{(n)}(t)\, dt = -(\alpha n - 1) \int_x^{b+1} (t-x)^{\alpha n-2} \varphi^{(n)}(t)\, dt,$$

$$x \in [a, b].$$

Отсюда и из (1.30) получим для любого $x \in (0, +\infty)$

$$\frac{d}{dx}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n)}(t)\,dt = -(\alpha n-1)\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-2}\varphi^{(n)}(t)\,dt,$$

так как отрезок $[a, b] \subset (0, +\infty)$ был произвольным. Следовательно, ввиду определения (0.47) операторов $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}$ будем иметь

$$\frac{d}{dx}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = -\frac{\alpha n-1}{\Gamma(\alpha n)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-2}\varphi^{(n)}(t)\,dt,\ x\in(0,+\infty). \tag{1.31}$$

Отметим теперь, что поскольку в силу основного условия (0.43)

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{\alpha n}|\varphi^{(n)}(t)| = 0,$$

то, переходя, как и при доказательстве леммы 1′, к последовательностям $a_j \uparrow +\infty$, легко можно убедиться в справедливости неравенств

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leqslant \int_t^{+\infty}|\varphi^{(n+1)}(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{t^{\alpha(n+1)-1}}\int_t^{+\infty}|\varphi^{(n+1)}(x)|\,x^{\alpha(n+1)-1}\,dx.$$

Отсюда, в силу того же условия (0.43), следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} t^{(n+1)\alpha-1}\varphi^{(n)}(t) = 0. \tag{1.32}$$

Далее, воспользовавшись формулой (1.31) и производя интегрирование по частям, получим

$$\frac{d}{dx}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int_x^{+\infty}\varphi^{(n)}(t)\,d(t-x)^{\alpha n-1} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\left\{(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n)}(t)\Big|_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt,\ x\in(0,+\infty),$$

причем проинтегрированный член исчезает в силу (1.32) и неравенства $\alpha n-1 \geqslant 2$. Отсюда на основании формулы (0.18) и определения (0.47) можем написать

$$D_\infty^{-\alpha}\left\{\frac{d}{dx}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{+\infty}(t_2-x)^{\alpha-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int_{t_2}^{+\infty}(t_1-t_2)^{\alpha n-1}\varphi^{(n+1)}(t_1)\,dt_1\right\}dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha n)} \int_x^{\infty} \varphi^{(n+1)}(t_1) \int_x^{t_1} (t_2 - x)^{\alpha-1} (t_1 - t_2)^{\alpha n - 1} dt_2 dt_1 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha(n+1))} \int_x^{+\infty} (t_1 - x)^{\alpha(n+1)-1} \varphi^{(n+1)}(t_1)\, dt_1 =$$

$$= \bar{D}_{\infty}^{\frac{n+1}{\rho}} \varphi(x),\ x \in (0, +\infty),$$

причем перемена порядка интегрирования законна, так как из условий (0.43) следует абсолютная сходимость написанных интегралов.

Утверждение 1° доказано.

2°. В силу (1.31) и (0.43) получим

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{d}{dx} \tilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right| dx \leqslant \frac{\alpha n - 1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} (t - x)^{\alpha n - 2} |\varphi^{(n)}(t)|\, dt dx =$$

$$= \frac{\alpha n - 1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n)}(t)| \int_0^t (t - x)^{\alpha n - 2} dx dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n)}(t)|\, t^{\alpha n - 1} dt < +\infty.$$

Этим утверждение 2°, а вместе с ним и лемма, доказаны.

(б) Аналог леммы 7 из [7] для того случая, когда $-1 < \alpha < 0$ и операторы последовательного дифференцирования дробного порядка $D_{\infty}^{n/\rho}(n > 0)$ на функциях класса $C_{\alpha}^{(\infty)}$ определены по формулам (0.34), опять содержится в работе [8] (стр. 220), лемма 1.4).

Покажем, что если для функций из класса $\bar{C}_{\alpha}^{(\infty)}(-1 < \alpha < 0)$ положить в основу определения (0.48) операторов $\bar{D}_{\infty}^{n/\rho}(n > 0)$, то в этом случае эта лемма также остается в силе, но в такой формулировке.

Лемма 2′. 1°. *Если* $\varphi(x) \in \bar{C}_{\alpha}^{(\infty)}(-1 < \alpha < 0)$ *и* $n \geqslant \frac{4}{1+\alpha}$, *то операторы* $\bar{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)$ *могут быть определены также посредством соотношений*

$$\bar{D}_{\infty}^{\frac{n+1}{\rho}} \varphi(x) = \frac{d}{dx} D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \left\{ \frac{d}{dx} \bar{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right\},\ x \in (0, +\infty); \qquad (1.27')$$

2°. *Если* $\varphi(x) \in \bar{C}_{\alpha}^{(\infty)}(-1 < \alpha < 0)$ *и* $n \geqslant \frac{4}{1+\alpha}$, *то*

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{d}{dx} \tilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right| dx < +\infty. \qquad (1.28')$$

Доказательство. 1°. Заметив, что при $n \geqslant \frac{4}{1+\alpha}$ имеем $(1+\alpha)n-2 \geqslant 2$, точно так же, как и при доказательстве соотношения (1.31), можем убедиться в том, что интеграл

$$\bar{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_{x}^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-1}\varphi^{(2n)}(t)\,dt,\ x\in(0,+\infty),$$

в силу условий (0.44) можно продифференцировать по параметру x.

В результате получим формулу

$$\frac{d}{dx}\bar{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)=-\frac{(1+\alpha)n-1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_{x}^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-2}\varphi^{(2n)}(t)\,dt,\ x\in(0,+\infty), \tag{1.33}$$

причем интеграл справа в силу тех же условий (0.44) абсолютно сходится. Воспользовавшись этой формулой и (0.18), можем написать

$$D_{\infty}^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dx}\bar{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)\right\}=-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{x}^{+\infty}(t_2-x)^{(1+\alpha)-1}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n-1)}\int_{t_2}^{+\infty}(t_1-t_2)^{(1+\alpha)n-2}\varphi^{(2n)}(t_1)\,dt_1\right\}dt_2=-\int_{x}^{+\infty}\varphi^{(2n)}(t_1)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma((1+\alpha)n-1)}\int_{x}^{t_1}(t_2-x)^{(1+\alpha)-1}(t_1-t_2)^{(1+\alpha)n-2}\,dt_2\right\}dt_1=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1)-1)}\int_{x}^{+\infty}(t_1-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2}\varphi^{(2n)}(t_1)\,dt_1, \tag{1.34}$$

$$x\in(0,+\infty).$$

Перемена порядка интегрирования допустима, так как в силу условий (0.44) и неравенств $0\leqslant(1+\alpha)(n+1)-2\leqslant(1+\alpha)n-1$

$$\int_{x}^{+\infty}(t_1-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2}|\varphi^{(2n)}(t_1)|\,dt_1<+\infty,\ x\in(0,+\infty).$$

Отсюда следует также, что для любого $x\in(0,+\infty)$ существует последовательность $a_j\uparrow+\infty$, для которой

$$\lim_{j\to+\infty}(a_j-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2}\varphi^{(2n)}(a_j)=0. \tag{1.35}$$

Опять точно так же, как и при доказательстве соотношения (1.31), можем убедиться в том, что интеграл (1.34) в силу условий (0.44) и неравенств $1\leqslant(1+\alpha)(n+1)-3\leqslant(1+\alpha)n-1$ можно продифференцировать по параметру x.

В результате получим формулу

$$\frac{d}{dx} D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \left\{ \frac{d}{dx} \widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right\} =$$

$$= \frac{(1+\alpha)(n+1)-2}{\Gamma((1+\alpha)(n+1)-1)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-3} \varphi^{(2n)}(t)\, dt, \; x \in (0, +\infty), \quad (1.36)$$

причем интеграл справа в силу (0.44) абсолютно сходится.

Отметим еще, что поскольку $(1+\alpha)(n+1)-1 \geqslant 3$, из (1.19) следует

$$\lim_{t \to +\infty} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-1} \varphi^{(2n+1)}(t) = 0, \; x \in (0, +\infty).$$

Воспользовавшись этим соотношением и соотношением (1.35), на основании (1.36) получим следующий ряд равенств:

$$\frac{d}{dx} D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \left\{ \frac{d}{dx} \widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1)-1)} \lim_{j \to +\infty} \int_x^{a_j} \varphi^{(2n)}(t)\, d(t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1)-1)} \lim_{j \to +\infty} \left\{ (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2} \varphi^{(2n)}(t) \Big|_x^{a_j} - \right.$$

$$\left. - \int_x^{a_j} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2} \varphi^{(2n+1)}(t)\, dt \right\} =$$

$$= - \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1)-1)} \lim_{j \to +\infty} \int_x^{a_j} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2} \varphi^{(2n+1)}(t)\, dt =$$

$$= - \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1))} \lim_{j \to +\infty} \int_x^{a_j} \varphi^{(2n+1)}(t)\, d(t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-1} =$$

$$= - \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1))} \lim_{j \to +\infty} \left\{ (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-1} \varphi^{(2n+1)}(t) \Big|_x^{a_j} - \right.$$

$$\left. - \int_x^{a_j} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-1} \varphi^{(2n+2)}(t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1))} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-1} \varphi^{(2n+2)}(t)\, dt =$$

$$= \widetilde{D}_{\infty}^{\frac{n+1}{\rho}} \varphi(x), \; x \in (0, +\infty),$$

т. е. формулу (1.27′).

2°. Из (1.33) на основании теоремы Фубини и условий (0.44) следуют оценки

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{d}{dx}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)\right|dx\leqslant\frac{(1+\alpha)n-1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-2}|\varphi^{(2n)}(t)|\,dtdx=$$

$$=\frac{(1+\alpha)n-1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_0^{+\infty}|\varphi^{(2n)}(t)|\int_0^t(t-x)^{(1+\alpha)n-2}\,dxdt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_0^{+\infty}|\varphi^{(2n)}(t)|\,t^{(1+\alpha)n-1}\,dt<+\infty,$$

и утверждение 2°, а вместе с ним и лемма доказаны.

Следствие. *Если* $\varphi(x)\in\widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}$ $(-1<\alpha<0)$ *и* $n>\dfrac{4}{1+\alpha}$, *то справедливы равенства*

$$\lim_{x\to+0}x^{-\alpha}D_\infty^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dx}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{-1}D_\infty^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dx}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)\right\}=0. \tag{1.37}$$

Доказательство. Положив

$$\psi_n(x)=D_\infty^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dx}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)\right\},\quad x\in(0,+\infty), \tag{1.38}$$

на основании формулы (1.27′) заключаем, что

$$\psi_n'(x)=\widetilde{D}_\infty^{\frac{n+1}{\rho}}\varphi(x),\quad x\in(0,+\infty).$$

Следовательно, по лемме 1″ (1°)

$$\sup_{0<x<+\infty}|\psi_n'(x)|=C_n<+\infty,$$

и значит

$$|\psi_n(x)-\psi_n(1)|\leqslant\int_1^x|\psi_n'(t)|\,dt\leqslant C_n|x-1|,\quad x\in(0,+\infty).$$

Так как $-1<\alpha<0$, то отсюда и еще из (1.34) и (0.44)

$$\lim_{x\to+0}x^{-\alpha}\psi_n(x)=\lim_{x\to+\infty}x^{-1}\psi_n(x)=0,$$

что, ввиду обозначения (1.38), совпадает с требуемыми соотношениями (1.37).

§ 2. Теоремы 1 и 2

Наметим доказательства теорем 1 и 2, сформулированных в конце введения статьи.

Но поскольку все основные моменты необходимых при этом рассуждений полностью совпадают с доказательствами теорем В и Б, соответственно, то нами будут отмечены только те частные места этих доказательств, в которых следует ввести небольшие видоизменения, связанные лишь с применением видоизмененных лемм из [7], [8], приведенных в § 1.

Сначала же отметим, что в случае, когда значение параметра $\alpha = 0$ $(\rho = 1)$, как теоремы Б, В, так и теоремы 1, 2 и методы их доказательств непосредственно сводятся к классическому.

Теорема 1. Необходимость условия (0.54) вовсе не нуждается в доказательстве, так как она непосредственно следует из соответствующей части теоремы В, ввиду очевидного включения

$$C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\} \subset \widetilde{C}_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\} \quad (-1 < \alpha < 1).$$

Дополнительно отметим, что в отличие от соответствующей части доказательства из работы [8], в случае $-1 < \alpha < 0$ $\left(\frac{1}{\rho} = 1 - \alpha\right)$ существование аналитической в области

$$D_\rho(\nu) = \left\{\zeta : \operatorname{Re}\zeta^\rho > \nu,\ |\operatorname{Arg}\zeta| < \frac{\pi}{2\rho}\right\},\ \nu > 0,$$

функции $F(\zeta)$, предельно быстро убывающей в ее замыкании $\overline{D_\rho(\nu)}$, можно установить непосредственно, опираясь лишь на теорему Г и на одну теорему С. Е. Варшавского [13] о конформных отображениях полосообразных областей. По поводу компактной формулировки надлежащей для данного случая теоремы см., напр., [14], стр. 381.

Перейдем теперь к достаточности.

Надо показать, что при условии (0.54) каждая функция $\varphi(x) \in \widetilde{C}_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1, \alpha \neq 0)$, удовлетворяющая условиям (0.53)

$$L_n^\alpha \varphi = \widetilde{D}_-^{n/\rho} \varphi(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.1}$$

равна тождественно нулю: $\varphi(x) \equiv 0$ на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Полагая сначала

$$N(\alpha) = \left[\frac{4}{|\alpha|(1 - |\alpha|)}\right] + 1 \quad (-1 < \alpha < 1,\ \alpha \neq 0), \tag{2.2}$$

отметим, что при значениях индекса $n \geqslant N(\alpha)$ все утверждения лемм и следствий § 1 будут справедливы.

В частности при $n > N(\alpha)$ функции $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x)$ согласно леммам 1′ и 1″ непрерывны и ограничены на полуоси $[0, +\infty)$ и одновременно принадлежат обоим классам $L_1(0, +\infty)$ и $L_2(0, +\infty)$.

Следуя формуле (3.40) исследования [7], полученной в процессе доказательства одной из основных теорем (теоремы 3), для значения $n = N(\alpha)$ введем в рассмотрение преобразование

$$\widetilde{\Phi}_\rho(z) = \frac{(-1)^n}{z^n} \int_0^{+\infty} E_\rho\left(zt^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho}-1} \widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(t)\, dt, \quad z \in \Delta_\rho^*, \tag{2.3}$$

где

$$\Delta_\rho^* = \left\{ z: \frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| \leqslant \pi,\ 0 < |z| < +\infty \right\} \left(\frac{1}{\rho} = 1 - \alpha \right).$$

Согласно лемме 4 из [7], доказательство которой остается в силе для всех $\frac{1}{2} < \rho < +\infty$, функция $\widetilde{\Phi}_\rho(z)$ аналитична в угловой области Δ_ρ^* и непрерывна в ее замыкании $\overline{\Delta_\rho^*}$, кроме, быть может, точек 0 и ∞.

Далее, как и в формуле (3.42) исследования [7], положим

$$\mathbf{E}_\rho(t; z) = E_\rho\left(zt^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho}-1} \left(\frac{1}{2} < \rho < +\infty \right).$$

Напомним, что, как уже отмечалось во введений, эта функция удовлетворяет уравнению вида

$$D_0^{1/\rho} \mathbf{E}_\rho(t; z) = z \mathbf{E}_\rho(t; z).$$

Пользуясь этой формулой и дословно повторяя те же рассуждения, что и в [7] в случае $0 < \alpha < 1$ (стр. 225—226), а в случае $-1 < \alpha < 0$ — аналогичные рассуждения из [8] (стр. 235—236), получим, что для функции $\widetilde{\Phi}_\rho(z)$ будут справедливы формулы (2.3) при всех $n \geqslant N(\alpha)$. Нужно только в соответствующих местах вместо $D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)$ писать $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x)$, а вместо лемм 6 и 7 из [7] воспользоваться леммами 1′ и 2′ из § 1 и, аналогично, вместо лемм 1.3, 1.4 и соотношений (1.20) из [8] — леммами 1″, 2″ и соотношениями (1.37) из § 1 соответственно.

Далее, продолжая повторять те же рассуждения, что и в [7] (стр. 226), получим при $0 < \alpha < 1$ $(1 < \rho < +\infty)$

$$|\widetilde{\Phi}_\rho(z)| \leqslant C A_\varphi |z|^{\rho-1} \frac{M_n}{\left(\frac{|z|}{B_\varphi}\right)^n};\ z \in \overline{\Delta_\rho^*(-1)},\ n \geqslant N(\alpha), \tag{2.4}$$

и точно так же, [8] (стр. 236), при $-1 < \alpha < 0 \left(\frac{1}{2} < \rho < 1 \right)$

$$|\widetilde{\Phi}_\rho(z)| \leqslant C A_\varphi |z|^{\rho-\frac{1}{2}} \frac{M_n}{\left(\frac{|z|}{B_\varphi}\right)^n};\ z \in \overline{\Delta_\rho^*(-1)},\ n \geqslant N(\alpha), \tag{2.4′}$$

где $\Delta_\rho^*(-1)$ — область, полученная путем сдвига влево на единицу угловой области Δ_ρ^*:

$$\Delta_\rho^*(-1) = \left\{ z: \frac{\pi}{2\rho} < |\arg(z+1)| \leqslant \pi,\ 0 < |z+1| < +\infty \right\}.$$

Следовательно, положив

$$T_{N(\alpha)}(r) = \sup_{n > N(\alpha)} \frac{r^n}{M_n},$$

из (2.4) и (2.4′) получим следующую оценку, аналогичную оценке (3.52) из работы [7]

$$|\bar{\Phi}_\rho(z)| < A_1 \frac{|z|^{\rho - \frac{1}{2}}}{T_{N(\alpha)}\left(\frac{|z|}{B_\varphi}\right)};\ z \in \overline{\Delta_\rho^*(-1)}\ (-1 < \alpha < 1,\ \alpha \neq 0).$$

После этого опять дословно повторяются рассуждения из работы [7] (стр. 226—228), с заменой лишь $T(r)$ на $T_{N(\alpha)}(r)$, и устанавливается, что $\bar{\Phi}_\rho(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\rho^*$, откуда, в свою очередь, следует

$$\tilde{D}_\infty^{\frac{N(\alpha)}{\rho}} \varphi(x) \equiv 0,\ x \in (0, +\infty). \tag{2.5}$$

При этом нужно только заметить, что в силу общих свойств функции $T(r)$ (см., напр., [6], а также [7], стр. 216—217) легко убедиться в том, что для достаточно больших $r \geqslant r_0(N(\alpha))$ функция $T(r)$ совпадает с $T_{N(\alpha)}(r)$ и, следовательно, условие (0.54) эквивалентно условию

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T_{N(\alpha)}(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty. \tag{2.6}$$

Наконец, из (2.5) на основании следствий из лемм 1′ и 1″ и условия $\varphi(0) = 0$, окончательно получим, что $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$.

Теорема 2. Останавливаться на необходимости условия (0.56) этой теоремы опять не нужно, так как она непосредственно следует из соответствующей части теоремы Б, ввиду очевидного включения

$$C_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\} \subset \tilde{C}_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\}\ (-1 < \alpha < 1).$$

Перейдем к достаточности.

Докажем, что при условии (0.56) теоремы класс $\tilde{C}_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1,\ \alpha \neq 0)$ будет α-квазианалитическим, т. е. любая функция $\varphi(x)$ из этого класса, для которой $L_n^\alpha \varphi = \tilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, тождественно равна нулю на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Положив

$$\sup_{0 < x < +\infty} |\varphi^{(n)}(x)| = m_n\ (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.7}$$

заметим, что ввиду условий (0.52) будут выполняться неравенства

$$m_n \leqslant A_\varphi B_\varphi^n M_n\ (n = 1, 2, \cdots). \tag{2.8}$$

Отметим также, что если

$$\inf_{n>1} \{nm_n^{1/n}\} = 0, \tag{2.9}$$

то тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$ вытекает сразу из условия $\varphi(0) = 0$ на основании теоремы Д.

Действительно, ввиду оценок (0.50) можем написать

$$\sup_{0<x<+\infty} |\varphi'(x)| = m_1 \leqslant (8en)\, m_0^{1-\frac{1}{n}}\, m_n^{1/n} \quad (n \geqslant 2),$$

откуда в силу (2.9) следует тождество $\varphi'(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$. И поскольку $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$.

Поэтому нам необходимо рассмотреть только случай, когда

$$\inf_{n>1} \{nm_n^{1/n}\} = C > 0. \tag{2.10}$$

Как и при доказательстве одной из основных теорем исследования [7] (теоремы 4), покажем, что из условий (0.52) следуют оценки

$$\sup_{0<x<+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant A_1 B_1^n M_{n-[\alpha n]} \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.11}$$

где $A_1 > 0$ и $B_1 > 0$ — подходящим образом выбранные постоянные.

В случае $0 < \alpha < 1$ формулы (1.3) леммы 1′ при $k = [\alpha n]$ принимают вид

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^{[\alpha n]} D_\infty^{-(\alpha n - [\alpha n])}\, \varphi^{(n-[\alpha n])}(x); \tag{2.12}$$
$$x \in (0, +\infty) (n = 1, 2, \cdots),\ 0 < \alpha < 1.$$

В случае же $-1 < \alpha < 0$ аналогичные формулы (1.3′) леммы 1″ при $k = [(1+\alpha)\, n]$ сводятся к следующим соотношениям:

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^{[(1+\alpha)\, n]} D_\infty^{-((1+\alpha)\, n - [(1+\alpha)\, n])}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)\, n])}(x);$$
$$x \in (0, +\infty)\ (n = 1, 2, \cdots),\ -1 < \alpha < 0.$$

При этом в силу равенства $[(1+\alpha)\, n] = n + [\alpha n]$ эти соотношения можно записать также в виде

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^{[(1+\alpha)\, n]} D_\infty^{-(\alpha n - [\alpha n])}\, \varphi^{(n-[\alpha n])}(x); \tag{2.12′}$$
$$x \in (0, +\infty)\ (n = 1, 2, \cdots),\ -1 < \alpha < 0).$$

Следовательно, вводя обозначение

$$n(\alpha) = \begin{cases} [\alpha n], & \text{при } 0 < \alpha < 1, \\ [(1+\alpha)\, n], & \text{при } -1 < \alpha < 0, \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

формулы (2.12) и (2.12′) можем записать для всех α $(-1 < \alpha < 1,\ \alpha \neq 0)$ в объединенном виде

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^{n(\alpha)} D_\infty^{-(\alpha n - [\alpha n])}\, \varphi^{(n-[\alpha n])}(x), \tag{2.13}$$
$$x \in (0, +\infty)\ (n = 1, 2, \cdots),$$

причем, если $\alpha n = [\alpha n]$, то

$$\widetilde{D}_{-}^{\alpha/\rho}\varphi(x)=(-1)^{n(\alpha)}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x),\quad x\in(0,+\infty). \tag{2.14}$$

Если же $\alpha n\neq[\alpha n]$, то опять на основании формул (2.13) будем иметь

$$\widetilde{D}_{-}^{\alpha/\rho}\varphi(x)=\frac{(-1)^{n(\alpha)}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\int_{x}^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(t)\,dt,$$

$$x\in(0,+\infty).$$

Отсюда путем замены переменной $t-x$ на t и интегрированием по частям последовательно получим

$$\widetilde{D}_{-}^{\alpha/\rho}\varphi(x)=\frac{(-1)^{n(\alpha)}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\int_{0}^{+\infty}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x+t)\,dt=$$

$$=\frac{(-1)^{n(\alpha)}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\left\{\int_{0}^{1}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x+t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{1}^{+\infty}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\,d\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+t)\right\}=$$

$$=\frac{(-1)^{n(\alpha)}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\left\{\int_{0}^{1}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x+t)\,dt+\right.$$

$$+t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+t)\Big|_{1}^{+\infty}-$$

$$\left.-(\alpha n-[\alpha n]-1)\int_{1}^{+\infty}t^{\alpha n-[\alpha n]-2}\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+t)\,dt\right\}.$$

Так как функция $\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(t)$ на полуоси $[0,+\infty)$ равномерно ограничена и $\alpha n-[\alpha n]-1<0$, то

$$\lim_{t\to+\infty}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+t)=0,$$

и, следовательно

$$\widetilde{D}_{-}^{\alpha/\rho}\varphi(x)=\frac{(-1)^{n(\alpha)}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\left\{\int_{0}^{1}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x+t)\,dt-\right.$$

$$-\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+1)-$$

$$\left.-(\alpha n-[\alpha n]-1)\int_{1}^{+\infty}t^{\alpha n-[\alpha n]-2}\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+t)\,dt\right\},$$

$$x\in(0,+\infty).$$

Отсюда, воспользовавшись обозначениями (2.7), получим следующие оценки:

$$\left|\widetilde{D}_{-}^{\alpha_n/\rho}\varphi(x)\right| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\left\{m_{n-[\alpha n]}\int_0^1 t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\,dt+\right.$$

$$\left.+\ m_{n-[\alpha n]-1}+m_{n-[\alpha n]-1}\,|\alpha n-[\alpha n]-1|\int_1^{+\infty} t^{\alpha n-[\alpha n]-2}\,dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\left\{\frac{m_{n-[\alpha n]}}{\alpha n-[\alpha n]}+2m_{n-[\alpha n]-1}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)}\,\{m_{n-[\alpha n]}+m_{n-[\alpha n]-1}\}.$$

Значит

$$\left|\widetilde{D}_{-}^{\alpha_n/\rho}\varphi(x)\right| \leqslant \frac{2}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)}\,\{m_{n-[\alpha n]}+m_{n-[\alpha n]-1}\};\qquad (2.15)$$

$$x\in[0,+\infty)(n=1,2,\cdots).$$

Отметим при этом, что если $n\geqslant 1$, то $n-[\alpha n]-1\geqslant 0$, так что из (2.15), в частности, вытекают неравенства

$$\sup_{0<x<+\infty}|\widetilde{D}_{-}^{\alpha_n/\rho}\varphi(x)|<+\infty\ (n=1,2,\cdots).\qquad (2.16)$$

С другой стороны, воспользовавшись теоремой $\mathcal{A}$ в частном случае, когда $k=n-1$ $(n\geqslant 2)$, будем иметь

$$m_{n-1}\leqslant\left(\frac{8en}{n-1}\right)^{n-1}m_0^{1/n}\,m_n^{1-\frac{1}{n}}\leqslant e\,(8e)^{n-1}\,m_0^{1/n}\,m_n^{1-\frac{1}{n}}\leqslant$$

$$\leqslant C_0\,(8e)^n\,m_n^{1-\frac{1}{n}}=C_0\,n\,(8e)^n\,m_n\,(nm_n^{1/n})^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\,(16\,e)^n\,m_n\,(nm_n^{1/n})^{-1}.$$

Воспользовавшись еще условием (2.10), получим неравенство

$$m_{n-1}\leqslant C_2^n\,m_n\ (n=2,3,\cdots),\qquad (2.17)$$

где $C_2>1$ — некоторая постоянная, не зависящая от n.

Если $n\geqslant\dfrac{2}{1-\alpha}$, то $n-[\alpha n]\geqslant 2$, и из (2.17) получим

$$m_{n-[\alpha n]-1}\leqslant C_2^{n-[\alpha n]}\,m_{n-[\alpha n]},\ n\geqslant\frac{2}{1-\alpha}.\qquad (2.18)$$

Подставив эти оценки в (2.15) и учитывая (2.8), приходим к неравенствам

$$|\widetilde{D}_{-}^{\alpha_n/\rho}\varphi(x)|\leqslant\frac{2}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)}\,\{A_\varphi B_\varphi^{n-[\alpha n]}M_{n-[\alpha n]}+$$

$$+A_\varphi(C_2B_\varphi)^{n-[\alpha n]}M_{n-[\alpha n]}\},\ n\geqslant\frac{2}{1-\alpha},$$

и, следовательно, к оценкам вида

$$\sup_{0<x<+\infty} |\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\varphi(x)| \leqslant A_2 B_2^n M_{n-[\alpha n]}, \quad n \geqslant \frac{2}{1-\alpha}. \tag{2.19}$$

При этом нужно учесть, что $1 \leqslant \alpha n - [\alpha n] + 1 \leqslant 2$ и функция $\Gamma(x)$ непрерывна и положительна при $x \in [1, 2]$.

Если же $1 \leqslant n < \dfrac{2}{1-\alpha}$, то из (2.16), очевидно, следует существование постоянных $A_3 > 0$ и $B_3 > 0$ таких, что

$$\sup_{0<x<+\infty} |\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\varphi(x)| \leqslant A_3 B_3^n M_{n-[\alpha n]}, \quad 1 \leqslant n < \frac{2}{1-\alpha}.$$

Отсюда и из (2.19) окончательно приходим к требуемым оценкам (2.11), когда $\alpha n \neq [\alpha n]$. Когда же $\alpha n = [\alpha n]$, оценки (2.11) вытекают из формул (2.14) на основании неравенств (2.8).

Далее, как и в [7] (стр. 233), положим

$$M_n^* = M_{n-[\alpha n]} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

После этого, для случая $0 < \alpha < 1$, дословно повторяя все рассуждения и выкладки из [7] (стр. 233—234), получим, что $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$. Нужно только в конце ссылаться не на теорему 3 из [7], а на теорему 1 из введения данной статьи.

Предположим теперь, что $-1 < \alpha < 0$. В силу (2.15) и (2.18) справедливы оценки

$$\sup_{0<x<+\infty} |\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\varphi(x)| \leqslant A_4 B_4^n m_{n-[\alpha n]} \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.20}$$

где $A_4 > 0$ и $B_4 > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от n.

Заметим теперь, что в силу условия $-1 < \alpha < 0$ последовательность $\{n - [\alpha n]\}_1^\infty$ пробегает весь натуральный ряд, за исключением определенной возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_k\}_1^\infty$, $p_1 = 1$. При этом последовательность $\{p_k\}_1^\infty$ такова, что

$$p_k - 1 \in \{n - [\alpha n]\}_1^\infty, \quad k > 2. \tag{2.21}$$

Следовательно, в силу (2.17), будем иметь

$$\frac{r^{p_k}}{m_{p_k}} \leqslant \frac{(rC_2)^{p_k}}{m_{p_k-1}} \leqslant (rC_2) \sup_{n>1} \frac{(rC_2)^{n-[\alpha n]}}{m_{n-[\alpha n]}} \quad (r \geqslant 1, \ k \geqslant 2).$$

Очевидно также, что при любом $k > 1$

$$\frac{r^{k-[\alpha k]}}{m_{k-[\alpha k]}} \leqslant (rC_2) \sup_{n>1} \frac{(rC_2)^{n-[\alpha n]}}{m_{n-[\alpha n]}} \quad (k \geqslant 1).$$

Положив

$$T_1(r) = \sup_{n>2} \frac{r^n}{m_n}, \quad T_2(r) = \sup_{n>1} \frac{r^{n-[\alpha n]}}{m_{n-[\alpha n]}}$$

и заметив, что $\{p_k\}_2^\infty \cup \{n - [\alpha n]\}_1^\infty = \{n\}_2^\infty$, на основании полученных оценок заключаем, что

$$T_1(r) \leqslant (rC_2)\, T_2(rC_2) \quad (r \geqslant 1). \tag{2.20'}$$

С другой стороны, ввиду оценок (2.8) и тождества

$$T(r)=\sup_{n\geqslant 2}\frac{r^n}{M_n}\quad (r\geqslant r_0>1)$$

имеет место также неравенство

$$T(r)\leqslant A_\varphi\, T_1(rB_\varphi)\quad (r>r_0).$$

Отсюда и из (2.20′) получим

$$T(r)\leqslant Ar\ T_2(Br)\quad (r\geqslant r_1), \tag{2.21′}$$

где $A>0$ и $B>0$ — некоторые постоянные, не зависящие от r.

Теперь заметим, что в силу (2.21′) из условия (0.56) следует и условие

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln T_2(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty. \tag{2.22}$$

Положив, наконец

$$M_n^*=m_{n-[\alpha n]}\quad (n=1,\ 2,\cdots)$$

и опять дословно повторяя все рассуждения и выкладки после формулы (3.71) из [7] (стр. 233—234), получим, что в этом случае также $\varphi(x)\equiv 0$, $x\in[0,\ +\infty)$. При этом нужно только в соответствующих местах вместо $T(r)$ и $M_{n-[\alpha n]}$ писать $T_2(r)$ и $m_{n-[\alpha n]}$ соответственно, и в конце ссылаться не на теорему 3 из [7], а на теорему 1 из введения данной статьи.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 3.VII.1982

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. α-Ֆվագիաեալիտիկ դասերի տեսության շուրջը *(ամփոփում)*

Անալիտիկության հասկացության հետագա ընդլայնման ու ընդհանրացման զարգացումը կապված է ժ. Հադամարի և է. Բորելի անվան հետ։

Դիցուք $C\{[0,+\infty);\ M_n\}$-ը $[0,+\infty)$ կիսաառանցքի վրա այն անվերջ դիֆերենցելի և սահմանափակ $\varphi(x)$ ֆունկցիաների բազմությունն է, որոնք բավարարում են հետևյալ տեսքի անհավասարություններին՝

$$\sup_{0<x<+\infty}|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant AB^n M_n\ (n=1,\ 2,\cdots), \tag{1}$$

որտեղ $A=A_\varphi>0$ և $B=B_\varphi>0$ հաստատունները կախված են, ընդհանրապես ասած, φ ֆունկցիայից։

Հադամարի կողմից 1912 թ. առաջադրված պրոբլեմը, օրինակ $[0,+\infty)$ կիսաառանցքի համար, ձևակերպվում է հետևյալ կերպ՝

Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն $\{M_n\}_1^\infty$ հաջորդականության անդամները, որպեսզի յուրաքանչյուր $\varphi(x)\in C\{[0,+\infty);\ M_n\}$ ֆունկցիայի համար

$$\varphi^{(n)}(0)=0\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

հավասարություններից հետևի

$$\varphi(x)\equiv 0,\quad x\in[0,+\infty),$$

նույնությունը։

Նմանատիպ դասերը, որոնք մասնավորաբար պարունակում են անալիտիկ ֆունկցիաները, անվանվեցին ֆվազիանալիտիկ:

Ինչպես հայտնի է, այդ պրոբլեմի լուծումը առաջինը տվեց Ա. Դանժուան (1921), իսկ հետագայում վերջնական տեսքով S. Կառլեմանը (1926):

Դանժուա-Կառլեմանի թեորեմը Ա. Օստրովսկու (1930) ձևակերպմամբ պնդում է հետևյալը:

Որպեսզի $C\{[0,+\infty); M_n\}$ դասը լինի ֆվազիանալիտիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr = +\infty, \quad \text{որտեղ} \quad T(r) = \sup_{n>1} \frac{r^n}{M_n}: \tag{2}$$

Այս թեորեմի կապակցությամբ տվյալ հոդվածի առաջին հեղինակի մոտ ժամանակին ծագեց մի հարց, որը բերեց ըստ էության հետևյալ ընդհանուր պրոբլեմի դրմանը [7]:

Դիցուք $\{M_n\}_1^\infty$-ը դրական թվերի կամայական հաջորդականություն է և $T(r) = \sup_{n>1} \frac{r^n}{M_n}$: $\gamma\,(0<\gamma<+\infty)$ պարամետրի տրված արժեքի համար ինչպիսին պետք է լինեն $C_\gamma\{M_n\} \subset C\{[0,+\infty); M_n\}$ ենթադասերը և $\{L_n^\gamma \varphi\}_0^\infty$ պարզագույն ֆունկցիոնալները, որպեսզի միայն

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma}}\,dr = +\infty \tag{3}$$

պայմանի դեպքում յուրաքանչյուր $\varphi(x) \in C_\gamma\{M_n\}$ ֆունկցիայի համար $L_n^\gamma \varphi = 0\ (n=0,1,2,\cdots)$ նույնությունները:

$\gamma = 1$ արժեքի դեպքում այս պրոբլեմը հանգում է նշված քվազիանալիտիկության պրոբլեմին, որի լիակատար լուծումը տրվել էր Դանժուայի և Կառլեմանի կողմից:

Տվյալ հոդվածի առաջին հեղինակի [7] հետազոտությունում զարգացվեց մի մեթոդ, որը թույլ տվեց տալ դրված պրոբլեմի լիակատար լուծումը սկզբունքորեն կարևորագույն դեպքում, երբ $0<\gamma<1$, ինչպես նաև $1<\gamma<+\infty$ դեպքում, որն ավելի ուշ հանդիպացավ [8] հոդվածի ուսումնասիրման: Նշենք, որ երբ $0<\gamma<1$, համապատասխան միակության դասերը էապես լայն են քվազիանալիտիկ դասերից, իսկ $1<\gamma<+\infty$ դեպքում պարզվեց, որ դիտարկվող դասերի ֆունկցիաները ամբողջ են:

Կիրառված եղանակը թույլ տվեց հայտնագործել միակության բնական և դրա հետ միասին պարզագույն ֆունկցիոնալների բացահայտ տեսքը:

Ավելի հարմար $\alpha = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\ (-1<\alpha<1)$ պարամետրի ներմուծմամբ այդ ֆունկցիոնալները գրվում են հետևյալ տեսքերով՝

$$L_n^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(n)}(t)\, t^{\alpha n-1}\,dt\ (n=0,\ 1,\ 2,\cdots),\ \text{երբ}\ 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{4}$$

$$L_n^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(2n)}(t)\, t^{(1+\alpha)n-1}\,dt\ (n=0,1,2,\cdots),\ \text{երբ}\ (-1<\alpha<0) \tag{4'}$$

Դրված պրոբլեմի լուծման մեթոդը բավականաչափ բարդ էր, և որպեսզի այն ավելի չբարդացվի, դիտարկվող դասերի վրա դրվում էին հետևյալ տեսքի ամենևին ոչ սկզբունքային սահմանափակումները

$$\sup_{0<x<+\infty} \{(1+x^{|\alpha|m})|\varphi^{(n)}(x)|\} < +\infty\ \ (n, m = 0, 1, 2, \cdots), \tag{5}$$

որոնք թույլ տվեցին պարզեցնել մի շարք լեմմաների ապացույցները և կրճատել [7], իսկ հետագայում նաև [8] հոդվածների առանց այն էլ ստվար ծավալները:

(5) պայմանների առկայությամբ ստացված արդյունքների ձևակերպումները բերված են Б և В թեորեմներում (§ 0):

Տվյալ հոդվածում ցույց է տրվում, որ պրոբլեմի ամբողջական լուծման [7] հետազոտությունում զարգացված մեթոդի առանց որևէ փոփոխության, և միայն այնտեղ ներմուծված հաջորդական կոտորակային ածանցման օպերատորների, ինչպես նաև մի շարք լեմմաների վերաձևակերպումների շնորհիվ (§ 1) կարելի է հրաժարվել (5) պայմաններից, փոխարինելով դրանք (4) և (4′)-ում գրած ինտեգրալների բացարձակ զուգամիտության ավելի թույլ և միանգամայն բնական պայմաններով:

Համապատասխան արդյունքների ձևակերպումները պարունակվում են 1 և 2 թեորեմներում (§ 0):

M. M. DJRBASHIAN, V. M. MARTIROSIAN. *On the theory of α-quasianalytic classes* (summary)

The idea of futher generalization and extension of the notion of analyticity is due to J. Hadamard and E. Borel.

Let $C\{[0, +\infty); M_n\}$ be the set of infinitely differentiable bounded functions $\varphi(x)$ on $[0, +\infty)$ satisfying the inequalities

$$\sup_{0<x<+\infty} |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n \ (n \geqslant 1), \tag{1}$$

where the constants $A = A_\varphi > 0$ and $B = B_\varphi > 0$ depend, in general, on the function φ.

The problem poses by Hadamard in 1912, say, for the half-axes $[0, +\infty)$ is formulated as follows:

What conditions must satisfy the number of the sequence $\{M_n\}_1^\infty$ in order that for every function $\varphi(x) \in C\{[0, +\infty); M_n\}$ from the identities $\varphi^{(n)}(0) = 0 (n = 0, 1, 2, \cdots)$ should follow that

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad x \in [0, +\infty)?$$

Such classes containing in particular analytic functions have been called *quasianalytic.*

It is well-known that this problem was first solved by A. Danjoy (1921) and then in the final form by T. Carleman (1926).

The Danjoy—Carleman theorem as formulated by A. Ostrowski (1930) reads as follows:

The class $C\{[0, +\infty); M_n\}$ is quasianalytic if and only if

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = +\infty, \text{ where } T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n}. \tag{2}$$

This theorem has formely induced one author of this paper (M. M. Djrbashian) to pinpoint the essence of the essence of the following general problem [7]:

Let $\{M_n\}_1^\infty$ be an arbitrary sequence of positive numbers and $T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n}$. For a given parameter $\gamma\ (0 < \gamma < +\infty)$ what will be the subclasses $C_\gamma\{M_n\} \subset C\{[0, +\infty); M_n\}$ and the simplest functional $\{L_n^\gamma \varphi\}_0^\infty$ so that only when

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = +\infty \tag{3}$$

for any function $\varphi \in C_\gamma\{M_n\}$ the equalities $L_n^\gamma \varphi = 0$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ yield the identity $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$?

For $\gamma = 1$ this problem is reduced to the classical problem of quasianalyticity completely solved by Danjoy and Carleman.

In the research [7] the first author of the present paper developed a method permtting to solve the problem in the crucial case $0 < \gamma < 1$ as well as in the case $1 < \gamma < +\infty$ which was the subject of the paper [8]. It's worth to note that when $0 < \gamma < 1$ the corresponding classes of uniqueness are essentially larger than the quasianalytic classes and it turns out that in the case $1 < \gamma < +\infty$ the classes under consideration are the classes of entire functions.

The developed method permitted to find the natural and *simplest* functionals of uniqueness.

After introduction of more convenient parameter $\alpha = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} (-1 < \alpha < 1)$ these functionals have the form

$$L_n^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(n)}(t)\, t^{\alpha n - 1}\, dt \; (n = 0, 1, 2, \cdots) \text{ for } 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{4}$$

$$L_n^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(2n)}(t)\, t^{(1+\alpha)n - 1}\, dt \; (n = 0, 1, 2, \cdots) \text{ for } -1 < \alpha < 0. \tag{4'}$$

The method of solution of the problem was very complicated and in order to avoid more complications the author poses some restrictions of not principal kind. The test functions were taken from the class of the functions satisfying conditions

$$\sup_{0 < x < +\infty} \{(1 + x^{|\alpha| m}) |\varphi^{(n)}(x)|\} < +\infty \quad (n,\ m = 0,\ 1,\ 2, \cdots) \tag{5}$$

which permitts to simplify the proofs of some lemmas and restrict the volumes of the papers [7], [8].

Formulations of results obtained under condition (5) are now given in theorems Б and B (§ 0).

In the present paper it is shown that without change of the method developed in [7] in whole but only equivalently redefining differential operators and slightly changing the proofs of some lemmas (§ 1) it is possible to remove the condition (5) and replace it by the more natural conditions of absolute convergence of the integrals (4) and (4'). Formulations of corresponding results are given in theorems 1 and 2 (§ 0).

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Denjoy.* Sur les fonctions quasi analytiques d'une variable réelle, C. R. Acad Sc., Paris, 173, 1921, 1329—1331.
2. *T. Carleman.* Les fonctions quasi analytiques, Gauthier—Villars, Paris, 1926. Jbuch Fortschritte Math., 52, 1926, 255.
3. *J. Hadamard.* Sur la généralisation de la notion de fonction analytique, C. R. Séances Soc. Math. France, 40, 1912, 28—29.
4. *A. Ostrowski.* Uber quasi-analytishe Functionen and Bestimmtheit asymptotischer Entwiklungen, Acta Math., 53, 1930, 181—266.
5. *С. Мандельбройт.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, Москва, ИИЛ, 1955.
6. *С. Мандельбройт.* Квазианалитические классы функций, ОНТИ, Ленинград, 1937, гл. 1.
7. *М. М. Джрбашян.* Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, № 3, 1968, 171—248;

   M. M. Džrbašjan. An extension of the Denjoy-Carleman quasi-analytic classes. Amer. Math. Soc. Transl., (2) Vol. 110, 1977, 1—59.

8. *А. А. Китбалян.* *Задача α-квазианалитичности в классах Данжуа-Карлемана*, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», X, № 3, 1975, 207—241.
9. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Москва, «Наука», 1966.
10. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян.* Разложения по специальным биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, Труды Моск. мат. общества, 10, 1961.
11. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, № 1, 1968, 3—29.
12. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье, Москва, Гостехиздат, 1948.
13. *S. E. Warschawski.* On conformal mapping of infite strips, Trans. Amer. Math., Soc., 51, № 2, 1942, 280—335.
С. Е. Варшавский. Конформное отображение бесконечных полос, Математика, Периодический сборник переводов иностранных статей, 2:4, 1958, 67—116.
14. *М. М. Джрбашян.* Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Матем. сб., 36 (78), № 3, 1955, 353—440.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 4, 1982 Математика

УДК 517.988

М. Г. КРЕЙН, Ю. Л. ШМУЛЬЯН

УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА, ЯДРА КОТОРЫХ ДОПУСКАЮТ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ ЭКСПОНЕНТЫ

В 1952 г. Д. В. Линдлей [14], занимаясь одним вопросом теории очередей, получил теорему, которая в упрощенном виде может быть сформулирована следующим образом:

Теорема L. *Пусть функция* $k(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ *обладает свойствами*:

$$k(t) \geqslant 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |t|\, k(t)\,dt < \infty.$$

Тогда уравнение

$$\varphi(t) - \int_{0}^{\infty} k(t-s)\,\varphi(s)\,ds = 0 \qquad (0.1)$$

либо имеет единственное P-решение, либо ни одного P-решения, в зависимости от того, будет ли

$$\int_{-\infty}^{\infty} tk(t)\,dt < 0 \quad \text{или} \quad \geqslant 0.$$

Поясним, что решение φ уравнения (0.1) согласно Ф. Спитцеру называем P-решением, если оно не убывает, непрерывно справа, и

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = 1.$$

В 1957 г., а затем в 1960 г. появились две блестящие работы Ф. Спитцера [15], в которых он исследовал уравнение (0,1) при дополнительном предположении четности ядра k. Мы соберем здесь некоторые из его результатов в виде следующего предложения.

Теорема S. *Пусть* $k(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ *удовлетворяет условиям*:

$$k(t) = k(-t) \geqslant 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,dt = 1.$$

Тогда уравнение (0.1) *имеет единственное с точностью до постоянного множителя неубывающее решение* $\varphi(t)$. *Это решение абсолютно непрерывно и допускает нормировку* $\varphi(+0) = 1$. *При этой нормировке оно обладает следующим асимптотическим свойством:*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\sqrt{\frac{2}{J_2}},$$

где

$$J_2=\int_{-\infty}^{\infty}t^2\,k(t)\,dt\ (\leqslant\infty).$$

Если $J_2<\infty$, *то* $\varphi(t)=\sqrt{2/J_2}\,(t+q(t))$, *где* $q(t)$ *обладает свойствами:*

i) $\lim\limits_{t\to\infty}[q(t+h)-q(t)]=0$ *при каждом* $h>0$,

ii) $\lim\limits_{t\to\infty}q(t)$ *всегда существует; этот предел конечен в том и только том случае, когда*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|t|^3\,k(t)\,dt<\infty.$$

При выполнении этого условия

$$\lim_{t\to\infty}q(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{-2}\ln\frac{\lambda^2 J_2}{2(1-K(\lambda))}\,d\lambda, \tag{0.2}$$

где

$$K(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\,k(t)\,dt.$$

При установлении указанных предложений самым существенным образом были использованы теоретико-вероятностные соображения и результаты. Кроме того, Ф. Спитцер использовал различные тауберовы теоремы.

Удивительно, что хотя после появления исследований этих авторов прошло 20—30 лет, до настоящего времени не были найдены чисто аналитические методы установления их результатов. Правда, в недавнее время появились работы [5, 6], в которых аналитическими средствами получена упрощенная теорема Линдлея (теорема L).

Настоящая статья посвящена теории интегрального уравнения Винера-Хопфа

$$g(t)-\int_0^{\infty}k_\sigma(t-s)\,g(s)\,ds=f(t) \tag{0.3}$$

и соответствующих однородных уравнений, где

$$k_\sigma(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-tu}\,d\sigma(u), & \text{при}\quad t>0,\\ \displaystyle-\int_{-\infty}^{0}e^{-tu}\,d\sigma(u), & \text{при}\quad t<0,\end{cases} \tag{0.4}$$

причем σ — некоторая функция класса $(\sum)$. Последнее означает, что функция σ не убывает на $\mathbf{R}_+ = \{u : u \geqslant 0\}$, не возрастает на $\mathbf{R}_- = \{u : u \leqslant 0\}$ и

$$0 < s_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(u)/u < \infty. \tag{0.5}$$

Условие (0.5) выражает тот факт, что $k_\sigma \in L_1(\mathbf{R})$. Очевидно $k_\sigma(t) \geqslant 0$ $(t \in \mathbf{R})$. Согласно известной теореме С. Н. Бернштейна [4], дополненной Д. Уиддером [16], представление (0.4) эквивалентно тому, что функция k_σ является вполне монотонной на $\mathbf{R}_+$ и абсолютно монотонной на $\mathbf{R}_-$. Напомним, что функция $f(t)$, заданная на некотором интервале (a, b), называется абсолютно (вполне) монотонной, если она бесконечно дифференцируема на этом интервале и

$$t^{(k)}(t) \geqslant 0 \,((-1)^k f^{(k)}(t) \geqslant 0) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots; \ a < t < b).$$

Используя специальную структуру ядра k_σ, мы получаем среди прочих результатов теоремы L и S для однородного уравнения (0,1) $(f(t) \equiv 0)$, причем с существенными дополнениями и уточнениями.

Чтобы дать некоторое представление о характере предложений, устанавливаемых в настоящей статье, мы приведем здесь результаты показывающие в каком направлении будет развиваться теория интегральных уравнений (0.1). Предварительно введем обозначения: для $k(t) \geqslant 0$ $(t \in \mathbf{R})$ и любого целого неотрицательного p будем полагать

$$J_p := \int_{-\infty}^{\infty} t^p k(t)\, dt.$$

В дальнейшем эти обозначения будут применяться к функции $k = k_\sigma$. В этом случае, как легко видеть

$$\frac{1}{p!} J_p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u^{p+1}} =: s_{p+1} \quad (p = 0, 1, 2, \cdots).$$

Теорема 0.1. *Пусть $k = k_\sigma$, $J_0 = 1$ и интеграл J_1 абсолютно сходится.*

I) *Если $J_1 < 0$, то уравнение*

$$\varphi_+(t) - \int_0^{\infty} k_\sigma(t - s)\, \varphi_+(s)\, ds = 0 \tag{I+}$$

имеет решение вида

$$\varphi_+^0(t) = 1 + \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ut}}{u}\, d\rho_+(u),$$

где ρ_+ — неотрицательная мера на $\mathbf{R}_+$ такая, что

$$\int_0^\infty d\rho_+(u)/u < \infty.$$

II) *Если* $J_1 > 0$, *то транспонированное уравнение*

$$\varphi_-(t) - \int_0^\infty k_-(s-t)\,\varphi_-(s)\,ds = 0 \qquad (I-)$$

имеет решение вида

$$\varphi_-^0(t) = 1 + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{tu}-1}{u}\,d\rho_-(u),$$

где ρ_- — *неотрицательная мера на* $\mathbf{R}_-$ *такая, что*

$$\int_{-\infty}^0 d\rho_-(u)/|u| < \infty.$$

III) а) *Если* $J_1 = 0$, *то оба уравнения* $(I+)$ *и* $(I-)$ *имеют решения соответственно вида*

$$\varphi_+^0(t) = 1 + m_+ t + \int_0^\infty \frac{1-e^{-ut}}{u}\,d\rho_+(u), \qquad (0.7+)$$

$$\varphi_-^0(t) = 1 + m_- t + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{tu}-1}{u}\,d\rho_-(u), \qquad (0.7-)$$

где

$$m_\pm \geqslant 0,\ m_+ m_- = J_2^{-1},$$

а $\rho_\pm$ — *неотрицательные на* $\mathbf{R}_\pm$ *меры такие, что*

$$\int_{\mathbf{R}_\pm} \frac{d\rho_\pm(u)}{|u|+1} < \infty.$$

б) *Если, кроме того,* $J_2 < \infty$, *а следовательно,* $m_\pm > 0$, *то остаточные члены* $h_\pm(t) := \varphi_\pm^0(t) - m_\pm t$ *ограничены в том и только том случае, когда соответственно*

$$J_3^\pm := \int_{\mathbf{R}_\pm} |t|^3 k(t)\,dt < \infty. \qquad (0.8)$$

Правила определения константы $m_\pm$, **мер** $\rho_\pm$ **и пределов** $\lim_{t\to\pm\infty} h_\pm(t)$ **мы даем в §§ 4, 10.**

Из формул (0.7 ±) вытекает, что производные $d\varphi^0_\pm(t)/dt$ — вполне монотонные функции. Из этих же формул видно, что $\lim\limits_{t\to\infty}[\varphi^0_\pm(t)/t]=m_\pm$. Кроме того, из (0.7 ±) и из утверждения IIIб) вытекают свойства i) и ii) функции q из теоремы S. Таким образом, для нашего специального ядра k_σ мы не только получаем результаты Ф. Спитцера с существенными уточнениями, но и распространяем их на случай несимметричного ядра.

Как установлено Линдлеем, в случае $J_1=0$ уравнение (I +) не имеет ограниченных монотонных решений. Однако при $k=k_\sigma$ можно утверждать, что оно имеет неограниченное решение, являющееся вполне монотонным типа $O(t)$ $(t\to+\infty)$. Впрочем, в случае четного k уже Ф. Спитцером было обнаружено существование монотонного неограниченного решения типа $O(t)$.

Как известно, при исследовании уравнения Винера-Хопфа существенную роль играет его символ $1-K(\lambda)$. При $k=k_\sigma$ он является аналитической функцией при $\operatorname{Re}\lambda\neq 0$. Нам удобно будет в дальнейшем вместо $1-K(\lambda)$ рассматривать функцию $w_\sigma(z)=1-K(-iz)$, аналитическую при $\operatorname{Im} z\neq 0$. Легко проверить, что

$$w_\sigma(z)=1-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(u)}{u-z}\quad(\operatorname{Im} z\neq 0). \tag{0.9}$$

Заметим, что $w_\sigma(0)=1-J_0$.

В упоминавшихся работах Линдлея и Спитцера $k(t)$ было плотностью вероятности, так что $k(t)\geqslant 0$, $J_0=1$. Однако ряд так называемых транспортных задач приводит к необходимости рассмотрения ядер $k(t)$ $(\geqslant 0)$, для которых $J_0\neq 1$. В настоящей работе исследован этот случай для ядра $k=k_\sigma$.

Случай $J_0<1$ $(\langle\!=\!\rangle\ w_\sigma(0)>0)$ укладывается в общую схему [8] В частности, уравнение (I ±) имеет только тривиальные решения во всех естественных функциональных пространствах. Для этого случая разработаны методы решения неоднородных уравнений (0.3).

Случай $J_0>1$ $(\langle\!=\!\rangle\ w_\sigma(0)<0)$ отличается особой сложностью. Функция w_σ имеет в этом случае в замкнутой верхней полуплоскости так называемый „исключительный“ нуль z_e. Мы не будем приводить здесь определение исключительного нуля (оно дано в § 2. п. 3), но отметим, что если $w_\sigma(z)$ имеет обычный нуль в открытой верхней полуплоскости, то этот нуль простой, единственный и совпадает с z_e.

Теорема 0.2. *Если* $\operatorname{Re} z_e\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$, *то уравнение* (I +) (*уравнение* (I —)) *имеет нетривиальное решение, определяемое единственным образом с точностью до постоянного множителя в классе* $L_\infty(\mathrm{R}_+)$.

В наиболее простом случае, когда $\operatorname{Im} z_e>0$, *решения* $\varphi^0_\pm$ *уравнений* (I ±) *выражаются формулами*

$$\varphi^0_\pm(t)=2A_\pm e^{-\alpha t}\cos(\omega t-\vartheta_\pm)-\int\limits_{\mathrm{R}_\pm}e^{-tu}\,d\mu_\pm(u), \tag{0.10 ±}$$

где $a = |\operatorname{Re} z_e|$, $\omega = \operatorname{Im} z_e\ (> 0)$, $A_\pm$, $\theta_\pm$ *также некоторые константы,* $\mu_\pm$ *— конечная на* $\mathbf{R}_\pm$ *мера, непрерывная в нуле.*

В § 9 будут указаны формулы, из которых определяются $A_\pm$, $\theta_\pm$, а также будет приведен вид решения в случае, когда z_e вещественно. Из формулы (0.10±) следует, что нетривиальное решение уравнения (I ±) бесконечно дифференцируемо и стремится к 0 или к гармонике $2A_1 \cos(\omega t - \theta_\pm)$ в зависимости от того, будет ли $\operatorname{Re} z_e \neq 0$ или $=0$. Отметим, что последний случай всегда имеет место при четном k_3.

Для случая четного k, т. е. при $s(-u) = s(u)$ теория уравнений (0.3) и (I ±) была развита М. Г. Крейном непосредственно вслед за статьей [8]. Однако это исследование было опубликовано лишь в 1976—77 г. [9], благодаря большому интересу, который проявил к нему И. А. Фельдман.

Ряд результатов работы [9] сравнительно просто переносится на случай произвольного ядра k_3. Однако в некоторых вопросах отсутствие четности сильно усложняет исследование. Потребовалось привлечение новых средств теории функций. В частности, упомянутый выше случай $J_0 > 1$ удалось исследовать благодаря одному результату из теории функций, полученному в „индефинитных" исследованиях [12, 13].

Вместе с тем, результаты настоящей статьи не покрывают содержание статьи [9]. В частности, в [9] (§ 8) исследована специфика случая экспоненциально убывающего ядра k_3. Такого рода вопросы не рассматриваются в настоящей статье. Отметим также, что в наших исследованиях не используются тауберовы теоремы, в то время, как отмечалось выше, они играли важную роль в работах Ф. Спитцера.

В статье [9] существенную роль играла теория некоторых специальных классов аналитических функций. Здесь также фундаментальную роль играет специальный класс аналитических функций, который мы обозначаем через (W). Исследованию свойств этого класса посвящена вся гл. I.

В главе II излагаются полученные авторами результаты по теории уравнения (0.1) при $k = k_3$; в том числе приводятся доказательства теорем 0.1 и 0.2.

Стоит заметить, что результаты гл. I находят применение не только в теории уравнений Винера-Хопфа рассматриваемого типа, но и в теории возмущений самосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Однако эти вопросы авторы предполагают осветить в другой статье.

Авторы выражают искреннюю признательность А. Б. Нерсесяну за полезные обсуждения и чрезвычайно ценную информацию по литературе, относящейся к излагаемым исследованиям.

Глава I. Класс (W) аналитических функций

§ 1. Вспомогательные предложения теории аналитических функций

1. Следуя известным определениям, функцию u комплексного переменного z будем называть R-функцией и писать $u \in (R)$, если она определена и голоморфна в каждой из полуплоскостей

$$\mathbf{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \text{ и } \mathbf{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}, \quad u(\bar{z}) = \overline{u(z)} \text{ и } \operatorname{Im} u(z) \geqslant 0 \ (\forall z \in \mathbf{C}_+).$$

Как известно (см., напр., [3]) функция $u \in (R)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$u(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{t^2 + 1} \right) d\tau(t) \quad (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{1.1}$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \geqslant 0$, τ — неотрицательная мера на $\mathbf{R}$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{1 + t^2} < \infty.$$

Мера τ определяется однозначно R-функцией u и называется ее спектральной мерой.

В дальнейшем каждой неотрицательной мере τ на $\mathbf{R}$ будем сопоставлять неубывающую непрерывную слева функцию $\tau(t)$, определяемую с точностью до аддитивной постоянной, такую, что τ-мера интервала $[a, b[$ равна $\tau(b) - \tau(a)$.

Пусть $t_0 \in \mathbf{R}$. Для произвольной функции $f(z)$, заданной в $\mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-$, будем обозначать через $\widehat{\lim\limits_{z \to t_0}} f(z)$ ее предел, конечный либо бесконечный, когда он существует при предельном переходе внутри углов $\varepsilon < |\arg(z - t_0)| < \pi - \varepsilon$ (ε — любое число > 0). Аналогично определяется $\widehat{\lim\limits_{z \to \infty}} f(z)$.

Функцию u будем называть R_0-функцией и писать $u \in (R_0)$, если она допускает представление

$$u(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t - z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{1.2}$$

где τ — конечная неотрицательная мера на $\mathbf{R}$. Ясно, что $(R_0) \subset (R)$, причем τ — спектральная мера функции u. Функция $u \in (R)$ принадлежит (R_0) точно тогда, когда $\widehat{\lim\limits_{z \to \infty}} (zu(z))$ конечен. Последний предел равен $-\tau(\mathbf{R})$, так что он отрицателен за исключением тривиального случая $u(z) \equiv 0$. Если $u \in (R_0)$, то

$$\widehat{\lim_{z\to\infty}}\ (zu(z)) = -\infty.$$

2. Если $u \in (R)$, то очевидно функция $u_0(z) := u(-z^{-1}) \in (R)$ и, стало быть, имеет место представление

$$u(-z^{-1}) = \alpha_0 + \beta_0 z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\tau_0(t).$$

Отметим связь между этим представлением и представлением (1.1) (по этому поводу см., например, [10]):

а) β_0 равно скачку функций $\tau(t)$ в нуле; $\beta_0 = \tau(\{0\})$.

б) $\tau_0(\{0\}) = \beta$.

в) $\tau_0(b) - \tau_0(a) = \int_{-a^{-1}}^{-b^{-1}} \frac{d\tau(s)}{s^2}$, если $ab > 0$. (1.3)

Из (1.3) следует, что при любом $p \in \mathbf{R}$

$$\int_a^b (t)^0\, d\tau_0(t) = \int_{-a^{-1}}^{-b^{-1}} \frac{d\tau(s)}{|s|^{p+2}} \quad (ab > 0), \tag{1.4}$$

причем обе части последнего равенства могут быть бесконечными.

3. Число $t_0 \in \mathbf{R}$ назовем *квазиправильной* точкой функции $u \in (R)$ вида (1.1), если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t-t_0)^2} < \infty.$$

Очевидно, если t_0 — квазиправильная точка, то τ непрерывна в точке t_0 и интеграл

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \frac{d\tau(t)}{|t-t_0|} \quad (\delta > 0)$$

сходится. Поэтому имеет смысл

$$u(t_0) := \widehat{\lim_{z\to t_0}}\ u(z) = \alpha + \beta t_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-t_0} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\tau(t).$$

Далее, имеем

$$\frac{u(z)-u(t_0)}{z-t_0} = \beta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t-z)(t-t_0)}. \tag{1.5}$$

Теорема 1.1. *Пусть функция $u \in (R)$ и (1.1) — ее представление, t_0, $c \in \mathbf{R}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *t_0 — квазиправильная точка для u, и $u(t_0) = c$;*

2) *существует конечный предел* $\widehat{\lim_{z\to t_0}} \dfrac{u(z)-c}{z-t_0}$;

3) *функция* $u_0(\zeta) := u\left(t_0 - \frac{1}{\zeta_0}\right) - c$ *принадлежит классу* (R_0).

Заметим в связи с утверждением 3), что формулы $z = t_0 - \frac{1}{\zeta}$, $\zeta = (t_0 - z)^{-1}$ при любом $t_0 \in \mathbf{R}$ дают биекцию каждого из множеств $\mathbf{C}_+$, $\mathbf{C}_-$. Поэтому, если $u \in (R)$, то $u(t_0 - 1/\zeta)$ является R-функцией параметра ζ. Таким образом, существенным в утверждении 3) является принадлежность $u(t_0 - 1/\zeta) - c$ классу (R_0).

Доказательство. 1) => 2): Имеем с учетом (1.5)

$$\lim_{z \to t_0}^{\wedge} \frac{u(z) - c}{z - t_0} = \beta + \lim_{z \to t_0}^{\wedge} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t - z)(t - t_0)} = \beta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t - t_0)^2} < \infty.$$

2) => 3): Для (R)-функции $u_0(\zeta)$:

$$\lim_{\zeta \to \infty}^{\wedge} (\zeta u_0(\zeta)) = -\lim_{z \to t_0}^{\wedge} \frac{u(z) - c}{z - t_0} > -\infty,$$

откуда вытекает, что $u_0(\zeta) \in (R_0)$.

3) => 1): Без ограничения общности будем считать, что $t = 0$. Пусть $u_0(\zeta) := u(-1/\zeta) - c \in (R_0)$, τ_0 — спектральная мера функции $u_0(\zeta)$. Полагая $\alpha = 0$ в (1.4) и учитывая ограниченность меры τ_0, получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t^2} < \infty.$$

Следовательно, 0 — квазиправильная точка $u(z)$. Так как $\lim_{\zeta \to \infty}^{\wedge} u_0(\zeta) = 0$, то $\lim_{z \to 0}^{\wedge} u(z) = c$. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства утверждения 1) => 2) теоремы 1.1 вытекает, что предел, о котором идет речь в утверждении 2), неотрицателен, причем он равен нулю лишь в тривиальном случае $u(z) \equiv c$. Нетрудно показать, что в случае нарушения условий 1) — 3) этот предел также существует, но равен ∞.

Через $\chi_\pm(t)$ в дальнейшем обозначается характеристическая функция полуоси $\mathbf{R}_\pm$. Если $t_0 \in \mathbf{R}$, $\tau(t)$ — неубывающая функция, $\Delta\ (> 0)$ — ее скачок в точке t_0, то $\tau_{t_0}(t) := \tau(t) - \Delta\chi_+(t - t_0)$ — неубывающая функция, непрерывная в точке t_0.

Определение*. Будем говорить, что $\tau(t)$ имеет ω-правильное поведение в точке t_0, если

$$\int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} \frac{d\tau_{t_0}(t)}{(t - t_0)^2} < \infty \quad (\delta > 0).$$

4. Согласно [2, 10] всякая R-функция $u(z) \not\equiv 0$ наряду с обычным представлением (1.1) допускает так называемое экспоненциальное представление

* В настоящей статье это определение используется впервые лишь в § 6, п. 3.

$$u(z)=\exp\left(p+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{s-z}-\frac{s}{s^2+1}\right)f(s)\,ds,\right. \tag{1.6}$$

где $p\in\mathbf{R}$, $f\in L_\infty(\mathbf{R})$, $0\leqslant f(s)\leqslant 1$, причем это представление определяется единственным образом по u.

Обратно, для каждой такой функции f и числе $p\in\mathbf{R}$ представление (1.6) определяет R-функцию $\not\equiv 0$.

Из результатов [10] вытекает предложение: *$u\in(R_0)$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{|s|f(s)}{1+s^2}\,ds<\infty,\quad\int_{0}^{\infty}\frac{s(1-f(s))}{1+s^2}\,ds<\infty.$$

Последние условия равносильны соответственно условиям

$$\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{f(s)}{|s|}\,ds<\infty,\quad\int_{\delta}^{\infty}\frac{1-f(s)}{s}\,ds<\infty\ (\delta>0). \tag{1.7}$$

5. Нам неоднократно придется пользоваться следующим предложением [9]:

Лемма 1.2. *Пусть $\tau(t)$ — вообще говоря, комплексная функция, имеющая локально ограниченную вариацию,*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|d\tau(t)|}{1+|t|}<\infty,$$

$$w(z):=c+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau(t)}{t-z}, \tag{1.8}$$

$a_1,\cdots,a_s$ — нули $w(z)$ кратностей $k_1,\cdots,k_s$ соответственно. Если $b_1,\cdots,b_m$ $(m=k_1+\cdots+k_s)$ — произвольные комплексные числа, $R(z)=\prod_{l=1}^{m}(z-b_l)\Big/\prod_{j=1}^{s}(z-a_j)^{k_j}$, то

$$R(z)\,w(z)=c+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(t)\,d\tau(t)}{t-z}.$$

Заметим, что лемма сохраняет силу и для вещественных a_j. Число $a_j\in R$ называется нулем кратности k_j функции (1.8), если

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|d\tau(t)|}{|t-a_j|^{k_j}}<\infty,\quad w(a_j):=c+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau(t)}{t-a_j}=0,$$

$$w^{(l)}(a_j):=l!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau(t)}{(t-a_j)^{l+1}}=0\ (l=1,\cdots,k_j-1).$$

§ 2. Основные свойства функций класса (W)

1. Напомним (см. Введение), что через (Σ) обозначается совокупность всех функций σ, определенных на $\mathbf{R}$, неубывающих на $\mathbf{R}_+$, невозрастающих на $\mathbf{R}_-$ и удовлетворяющих условию (0.5).

Из (0.5) вытекает непрерывность в нуле функции σ.

Основным объектом исследования в гл. 1 будет класс (W) функций $w = w_\sigma$, представимых в виде (0.9), где $\sigma \in (\Sigma)$. Всякая функция $w \in (W)$ голоморфна в $\mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-$, причем $w(\bar{z}) = \overline{w(z)}$ $(\forall z \in \mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-)$.

Условие (0.5) обеспечивает существование пределов

$$w_\sigma(0) := \lim_{z \to 0}{}^{\wedge} w_\sigma(z) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t} (\leqslant 1), \quad w_\sigma(\infty) := \lim_{z \to \infty}{}^{\wedge} w_\sigma(z) = 1.$$

Теорема 2.1. *Пусть функция w определена в $\mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-$. Для того чтобы эта функция принадлежала классу (W), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

а) *существует конечный предел* $w(0) := \lim_{z \to 0}{}^{\wedge} w(z)$,

б) $u_1(z) := -(w(z) - w(0))/z \in (R_0)$,

в) *спектральная мера τ_1 функции u_1 удовлетворяет условию*

$$\tau_1(\mathbf{R}) = 1 - w(0). \tag{2.1}$$

При выполнении этих условий $\tau_1(\{0\}) = 0$.

Доказательство. Необходимость условия а) отмечена выше. При его выполнении

$$w(z) - w(0) = -z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t(t-z)},$$

так что $u_1(z)$ имеет представление (1.2), где $\tau_1(t) := \int_{-\infty}^{t} d\sigma(s)/s$ — неубывающая на $\mathbf{R}$ функция, непрерывная при $t = 0$, ограниченная в силу (0.5). Таким образом, $u_1 \in (R_0)$, причем

$$\tau_1(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t} = 1 - w(0).$$

Достаточность. Пусть u_1—R_0-функция со спектральной мерой τ_1, удовлетворяющей условию (2.1). Тогда

$$w(z) = w(0) - zu_1(z) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\,d\tau_1(t)}{t-z} =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\,d\tau_1(t)}{t-z} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z},$$

где

$$\sigma(t) = \int_0^t s d\tau_1(s), \quad \sigma \in (\Sigma),$$

и, стало быть, $w \in (W)$.

Из известной формулы $\tau_1(\{0\}) = -\overset{\wedge}{\lim}_{z\to 0}(z u_1(z))$ вытекает, что τ_1 непрерывна при $t = 0$.

Следствие. *Для всякой функции $w \in (W)$ имеет место точно один из трех случаев:*

1) $w(0) = 0$, *тогда* — $w(z)/z$ — R_0-*функция, спектральная мера которой непрерывна в нуле;*

2) $w(0) > 0$, *тогда* — $w(z)/z$ — R_0-*функция, спектральная мера которой имеет в нуле скачок, равный* $w(0)$;

3) $w(0) < 0$, *тогда* — $w(z)/z$ *является разностью* R_0-*функций, в которой вычитаемое равно* $w(0)/z$.

Функцию $w \in (W)$ будем относить к классам (W_0), (W_+), (W_-) соответственно тому, будет ли $w(0) = 0$, > 0, < 0.

Из теоремы 2.1 непосредственно вытекает

Теорема 2.2. *Пусть функция w определена в $\mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-$. Для того чтобы $w \in (W_0) \cup (W_+)$, необходимо и достаточно, чтобы функция* — $w(z)/z \in (R_0)$, *и вариация ее спектральной функции равнялась* 1. *При этом $w(0)$ равно скачку этой спектральной функции в нуле.*

2. Обозначим через $(\hat{W})$ совокупность всех $w \in (W)$, для которых существует конечный предел

$$\overset{\wedge}{\lim}_{z\to 0}(w(z)/z^2). \tag{2.2}$$

Из определения вытекает, что для $w \in (\hat{W})$: $w(0) = 0$, так что $(\hat{W}) \subset (W_0)$.

Теорема 2.3. *Для того чтобы $w = w_\sigma$ принадлежала классу $(\hat{W})$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t} = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t^2} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t^3} < \infty. \tag{2.3}$$

При выполнении этих условий последний интеграл равен умноженному на (-1) *пределу* (2.2).

Доказательство. Для функции $w = w_\sigma$ первое из условий (2.3) означает, что $w(0) = 0$. По теореме 2.2 функция $u(z) := -w(z)/z \in (R_0)$, ее спектральная мера τ непрерывна в нуле и $d\tau(t) = d\sigma(t)/t$.

Конечность предела $\overset{\wedge}{\lim}_{z\to 0}(w(z)/z^2) = \overset{\wedge}{\lim}_{z\to 0}(u(z)/z)$ в силу теоремы 1.1 равносильна тому, что 0 — квазиправильная точка функции u, и $u(0) = 0$, что означает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t^2} < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t} = 0.$$

Последние два условия совпадают соответственно с третьим и вторым из условий (2.3).

Из доказательства теоремы 1.1 (импликации 1) $\Rightarrow$ 2)) вытекает, что $\lim\limits_{z \to 0}^{\wedge} (u(z)/z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau(t)/t^2$, откуда следует последнее утверждение теоремы.

Заметим, что из очевидной положительности последнего интеграла в (2.3) вытекает отрицательность предела (2.2).

Замечание. Из (1.5) вытекает, что при условиях теоремы 2.3

$$u(z)/z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t(t-z)}.$$

Поэтому описание функций $\omega_\sigma \in (\hat{W})$ дается формулой

$$\omega_\sigma(z) = -z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t^2(t-z)} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0). \tag{2.4}$$

3. Существенную роль в дальнейшем сыграет следующая

Теорема 2.4. *Пусть*

$$u(z) := \frac{k}{z} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t-z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{2.5}$$

где τ — непрерывная в нуле неотрицательная мера,

$$0 < k < \tau(\mathbf{R}) < \infty. \tag{2.6}$$

Тогда существует единственная точка $z_e \neq 0$ с $\operatorname{Im} z_e \geqslant 0$ такая, что

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{|t-z_e|^2} \leqslant \frac{k}{|z_e|^2}, \tag{2.7}$$

2) $$(u(z_e) =) \frac{k}{z_e} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t-z_e} = 0. \tag{2.8}$$

Отметим, что в случае $z_e \in \mathbf{R}$ условие 1) означает, что имеет смысл производная $u'(z_e) \leqslant 0$. Кроме того, это условие обеспечивает абсолютную сходимость интеграла в условии 2).

Число z_e, о котором идет речь в теореме, будем называть *исключительным нулем* функции u.

Доказательство. Легко проверить, что ядро

$$N_u(z, \zeta) := \frac{u(z) - \overline{u(\zeta)}}{z - \overline{\zeta}} = -\frac{k}{z\overline{\zeta}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t-z)(t-\overline{\zeta})}$$

$(z, \zeta \in \mathbf{C}_+)$ обладает свойством: при любых $z_1, \cdots, z_p \in \mathbf{C}_+$ эрмитова матрица $[N_u(z_\nu, z_\mu)]_{\nu,\mu=1,\cdots,p}$ имеет не более одного отрицательного собственного числа, причем для некоторых $z_1, \cdots, z_p \in \mathbf{C}_+$ эта матрица имеет точно одно отрицательное собственное число.

Согласно [12] (теорема 3.5) имеет место альтернатива:

а) либо функция u имеет точно один простой невещественный нуль z_e $(\operatorname{Im} z_e > 0)$, и у нее отсутствуют вещественные обобщенные нули отрицательного типа;

б) либо у u отсутствуют невещественные нули, но у нее существует точно один вещественный обобщенный нуль z_e отрицательного типа, возможно, равный ∞, причем он плюс-простой.

Поясним, что $z_e \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ называется *обобщенным нулем отрицательного типа* функции u плюс-кратности $\pi(z_e)$, если для любой достаточно малой окрестности U точки z_e существует такое $\delta > 0$, что при каждом $\alpha \in]0, \delta[$ функция $u + i\alpha$ имеет в $U \cap \mathbf{C}_+$ нули суммарной кратности $\pi(z_e)$*.

Покажем, что точка z_e является искомым исключительным нулем функции u, т. е. удовлетворяет условиям (2.7), (2.8).

Если $\operatorname{Im} z_e > 0$, то равенство (2.7) справедливо. Взяв мнимую часть от обеих частей (2.8), получим (2.7) со знаком равенства. Пусть z_e — вещественный обобщенный нуль отрицательного типа. Согласно определению существует такая последовательность $z_n \in \mathbf{C}_+$, что $z_n \to z_e$, $u(z_n) = -i\alpha_n \to 0$ $(\alpha_n > 0)$. Имеем

$$0 > -\alpha_n = \operatorname{Im} u(z_n) = \operatorname{Im} z_n \left(-\frac{k}{|z_n|^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{|t - z_n|^2} \right),$$

откуда

$$|z_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{|t - z_n|^2} < k \quad (\forall n). \tag{2.9}$$

Подавно при любых a, b $(-\infty < a < b < \infty)$

$$|z_n|^2 \int_a^b \frac{d\tau(t)}{|t - z_n|^2} < k. \tag{2.10}$$

Допустив, что $z_e = \infty$, т. е. $|z_n| \to \infty$, получим из (2.10) на основании леммы Фату

$$\int_a^b d\tau(t) \leqslant k.$$

Поскольку a и b произвольны, получается противоречие с (2.6). Таким образом, $z_e \neq \infty$.

---

* В соответствующем определении в [12, стр. 192] отсутствует префикс „плюс". В п. 5 станет ясно, в связи с чем авторам пришлось ввести этот префикс.

Далее, имеем

$$-i(a_n - a_m) = u(z_n) - u(z_m) = -\frac{k(z_n - z_m)}{z_n z_m} + (z_n - z_m)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t-z_n)(t-z_m)},$$

откуда

$$k - z_n z_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t-z_n)(t-z_m)} = iz_n z_m \frac{a_n - a_m}{z_n - z_m}. \tag{2.11}$$

Допустим, что $z_e = 0$, т. е. $z_n \to 0$. Зафиксировав m и устремив n к ∞, получим, что правая часть стремится к 0. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ при $n > n(\varepsilon)$

$$\left| z_n z_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t-z_n)(t-z_m)} \right| \geqslant k - \varepsilon.$$

Использовав неравенства Коши — Буняковского и (2.9), получим

$$(k-\varepsilon)^2 \leqslant |z_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{|t-z_n|^2} \cdot |z_m|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{|t-z_m|^2} \leqslant$$

$$\leqslant k|z_m|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{|t-z_m|^2}.$$

В силу произвола выбора $\varepsilon > 0$

$$k \leqslant |z_m|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{|t-z_m|^2},$$

что противоречит (2.9). Итак, $z_e \neq 0$.

Разделив обе части (2.10) на $|z_n|^2$ и устремив n к ∞, получим на основании леммы Фату

$$\int_a^b \frac{d\tau(t)}{|t-z_e|^2} \leqslant \frac{k}{|z_e|^2},$$

откуда, в силу произвола выбора a и b, получим (2.7). На основании теоремы Лебега равенство (2.8) вытекает из того, что $u(z_n) \to 0$.

Докажем единственность вещественного числа z_e, обладающего свойствами (2.7), (2.8). Пусть $x_0 \in \mathbf{R}$ таково, что

$$\frac{k}{x_0} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t-x_0} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t-x_0)^2} < \frac{k}{x_0^2}.$$

Имеем

$$0 = \frac{u(z_e) - u(x_0)}{z_e - x_0} = -\frac{k}{z_e x_0} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t-z_e)(t-x_0)}.$$

Таким образом, в неравенстве Коши-Буняковского

$$\left(\frac{k^2}{|z_e|^2\,|x_0|^2}=\right)\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau(t)}{(t-z_e)(t-x_0)}\right|^2\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau(t)}{(t-z_e)^2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau(t)}{(t-x_0)^2}\leqslant\frac{k^2}{|z_e|^2\,|x_0|^2}$$

имеет место знак равенства, что возможно лишь когда $\frac{t-z_e}{t-x_0}=\text{const}$ на носителе меры τ. Если этот носитель состоит более, чем из одной точки, то $x_0=z_e$. Если же τ имеет единственную точку роста $t_0\,(\neq 0)$ и $\tau(\{t_0\})=\mu>0$, то функция $u(z)=\frac{\varkappa}{z}+\frac{\mu}{t_0-z}$, очевидно, имеет единственный нуль. Теорема доказана.

Замечание. Из доказанного следует, что условия (2.7), (2.8) являются характеристикой вещественного обобщенного нуля отрицательного типа для функции u вида (2.5), удовлетворяющей условиям (2.6).

Доказанное предложение родственно одному предложению, установленному Г. Лангером [13] (см. также [12]), однако не следует из него.

4. Вернемся к рассмотрению функций $w\in(\mathcal{W})$. Будем считать теперь, что $w(0)<0$. Положив $u(z):=-w(z)/z$, получим на основании теоремы 2.1, что функция u имеет представление (2.5), в котором $k=-w(0)>0$, $d\tau(t)=d\sigma(t)/t$. Функция τ — неубывающая, причем на основании (2.1) имеют место неравенства (2.6). Согласно теореме 2.4 функция u имеет единственный исключительный нуль $z_e\neq 0$, $z_e\neq\infty$, $\operatorname{Im} z_e\geqslant 0$. Будем в дальнейшем называть z_e исключительным нулем также и функции w.

Теорема 2.5. *Пусть z_e — исключительный нуль функции $w(\in(\mathcal{W}_-))$. Тогда $w_*(z):=\frac{z^2\,w(z)}{(z-z_e)(z-\bar z_e)}\in(\mathring{\mathcal{W}})$. Обратно, если w_* — произвольная функция из $(\mathring{\mathcal{W}})$, z_0 — произвольное число из $\overline{\mathbf{C}}_+\setminus\setminus\{0,\infty\}$, то функция $w(z):=(z-z_0)(z-\bar z_0)\,w_*(z)/z^2$ принадлежит $(\mathcal{W}_-)$, а z_0 является ее исключительным нулем, $z_0=z_e$.*

Доказательство. Для доказательства того, что $w_*\in(\mathring{\mathcal{W}})$, достаточно установить, что $w_*\in(\mathcal{W})$, поскольку

$$\lim_{z\to 0}\frac{w_*(z)}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{w(z)}{(z-z_e)(z-\bar z_e)}=\frac{w(0)}{|z_e|^2}\neq\infty.$$

Рассмотрим сначала случай $\operatorname{Im} z_e>0$. Тогда z_e и $\bar z_e$ — различные нули $w(z)$. Согласно лемме 1.2

$$w_*(z)=1-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2\,d\sigma(t)}{|t-z_e|^2\,(t-z)},$$

откуда видно, что $w_*\in(\mathcal{W})$.

Пусть теперь $z_e\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Тогда выполняются условия (2.7) и (2.8), где $d\tau(t)=d\sigma(t)/t$. Из (2.7) вытекает, в частности, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|d\sigma(t)|}{(t-z_e)^2} < \infty.$$

Имеем

$$0 \leqslant \frac{k}{z_e^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t-z_e)^2} = -z_e^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t-z_e} + z_e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t-z_e)^2} \right) =$$

$$= -z_e^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\,d\tau(t)}{(t-z_e)^2} = -z_e^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{(t-z_e)^2} := \varkappa.$$

Из того, что $w(z_e) = 0$, следует

$$\frac{w(z)}{z-z_e} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{(t-z_e)(t-z)},$$

откуда

$$\lim_{z \to z_e} \frac{w(z)}{z-z_e} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{(t-z_e)^2} = \varkappa z_e. \tag{2.12}$$

Положим

$$u_*(z) := -w_*(z)/z = \frac{-z}{z-z_e} \cdot \frac{w(z)}{z-z_e}.$$

Используя легко проверяемое тождество

$$\frac{z}{z-z_e} \cdot \frac{1}{(t-z)(t-z_e)} = \frac{1}{(t-z_e)^2}\left(\frac{t}{t-z_e} + \frac{z_e}{z-z_e} \right),$$

получим

$$u_*(z) = \frac{\varkappa z_e^2}{z_e - z} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2\, d\tau(t)}{(t-z_e)^2 (t-z)}, \tag{2.13}$$

откуда видно, что $u_* \in (R_0)$ и, следовательно, $w_* \in (W)$. Прямая часть теоремы доказана.

Заметим, что спектральная мера τ_* функции u_* определяется равенством

$$\tau_*(]-\infty,\ t[) = \varkappa z_e^2 \chi_+(t-z_e) + \int_{-\infty}^{t} \frac{s^2\, d\tau(s)}{(s-z_e)^2}.$$

Представление (0.8) функции w_*, легко получаемое из (2.13), имеет вид

$$w_*(z) = 1 - \frac{\varkappa z_e^3}{z_e - z} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2\, d\sigma(t)}{(t-z_e)^2 (t-z)},$$

так что соответствующая функция $\sigma_* \in (\Sigma)$ равна

$$\sigma_*(t) = \varkappa z_0^3 \chi_+(t-z_e) + \int_0^t \frac{s^2\, d\sigma(s)}{(s-z_e)^2}. \tag{2.14}$$

Докажем обратную часть теоремы. Пусть $w_* = w_{\sigma_*} \in (\hat{W})$, т. е.

$$w_*(z) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_*(t)}{t - z},$$

где $\sigma_*(\in(\Sigma))$ удовлетворяет условиям (см. (2.3)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_*(t)}{t} = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_*(t)}{t^2} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_*(t)}{t^3} < \infty. \tag{2.15}$$

Пусть

$$z_0 \in \overline{\mathbf{C}}_+, \ z_0 \neq 0, \ w(z) := (z - z_0)(z - \overline{z}_0) w_*(z)/z^2.$$

Из того, что w_* имеет нуль кратности 2 в точке 0 вытекает на основании леммы 1.2, что

$$w(z) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t - z_0|^2 \, d\sigma_*(t)}{t^2 (t - z)}, \tag{2.16}$$

откуда видно, что $w \in (W)$. Имеем с учетом (2.15)

$$w(0) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t - z_0|^2}{t^3} \, d\sigma_*(t) = 1 -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t} - 2 \operatorname{Re} z_0 \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{|z_0|^2}{t^3} \right) d\sigma_*(t) = - |z_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_*(t)}{t^3} < 0,$$

так что $w \in (W_-)$.

Заметим, что из доказанного вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_*(t)/t^2 = - w(0)/|z_0|^2. \tag{2.17}$$

Очевидно, $w(z_0) = 0$. Поэтому в случае $\operatorname{Im} z_0 > 0$ теорема доказана. В случае $z_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ остается показать, что выполняется (2.7), где $k = - w(0) \ (> 0)$, τ — спектральная мера R_0-функции $(w(z) - w(0))/(-z)$. Из (2.16) следует, что

$$d\tau(t) = \frac{|t - z_0|^2}{t^3} \, d\sigma_*(t).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{|t - z_0|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\overset{\wedge}{\sigma}_*(t)}{t^3},$$

где $\overset{\wedge}{\sigma}_*(t) = \sigma_*(t) - \Delta \chi_+(t - z_0)$, а $\Delta = \sigma_*(z_0 + 0) - \sigma_*(z_0 - 0)$. Заметим, что $\Delta \geqslant 0 \ (\leqslant 0)$, если $z_0 > 0 \ (< 0)$.

Имеем с учетом (2.17)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau(t)}{|t-z_0|^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_*(t)}{t^2}-\Delta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\chi_+(t-z_0)}{t^2}=\frac{k}{z_0^2}-\frac{\Delta}{z_0^2}\leqslant\frac{k}{z_0^2}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что условия (2.3) принимают вид:

а) при невещественном z_ε:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\,d\sigma(t)}{|t-z_\varepsilon|^2}=1,\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{|t-z_\varepsilon|^2}=0,\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t|t-z_\varepsilon|^2}<\infty;$$

в) при вещественном z_ε:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{td\sigma(t)}{(t-z_\varepsilon)^2}+\varkappa z_\varepsilon^2=1,\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t-z_\varepsilon)^2}+\varkappa z_\varepsilon=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t(t-z_\varepsilon)^2}+\varkappa\left(=-\frac{w(0)}{|z_\varepsilon|^2}\right)<\infty.$$

5. В дальнейшем вещественное число z_0 мы будем называть нулем порядка $\geqslant m$ ($\leqslant m$) функции $w\in(\hat{W})$, где m — натуральное число, если $\lim\limits_{z\to z_0}w(z)(z-z_0)^{-m}$ существует и конечен (существует, возможно, бесконечный, и $\neq 0$). Если этот предел существует, конечен и $\neq 0$, то условимся говорить, что z_0 — нуль порядка m. Это определение согласуется с определением, приведенным в § 1, п. 5.

Теперь можно пояснить, что термин „плюс-порядок" появился в связи с тем, что как это ни странно, вещественный плюс-простой исключительный нуль функции $w\in(\hat{W}_-)$ может иметь порядок >1. Этот вопрос исследуется ниже.

Если $w_*(\in(\hat{W}))$ и $u_*(\in(R_0))$ — те же функции, что в теореме 2.5, τ_* — спектральная мера u_*, то

$$d\tau_*(t)=\frac{d\sigma_*(t)}{t}=\frac{td\sigma(t)}{(t-z_\varepsilon)^2}\,(t\neq z_\varepsilon),\ \tau_*(|z_\varepsilon|)=\varkappa z_\varepsilon^2.$$

Из теоремы 1.1 и замечания к ней следует, что $\lim\limits_{z\to z_\varepsilon}u_*(z)/(z-z_\varepsilon)$ существует и $\neq 0$, причем этот предел конечен тогда и только тогда, когда

$$\varkappa=0,\ u_*(z_\varepsilon):=\lim_{z\to z_\varepsilon}u_*(z)=0,\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau_*(t)}{(t-z_\varepsilon)^2}<\infty.\qquad(2.18)$$

Поэтому $\lim\limits_{z\to z_\varepsilon}w(z)/(z-z_\varepsilon)^3$ существует и $\neq 0$, и, таким образом, z_ε является нулем функции w не выше третьего порядка. Последний предел конечен в том и только том случае, когда выполняются условия (2.18) или же равносильные условия

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t-z_e)^2}=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t-z_e)^3}=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t|\,|d\sigma(t)|}{(t-z_e)^4}<\infty$$

(первое равенство следует из выражения для $\varkappa$). Легко видеть, что в двух последних условиях можно отбросить множитель t. Добавив также условие $w(z_e)=0$, получим следующее предложение:

Для того, чтобы число $z_e\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ было исключительным нулем третьего порядка функции $w_\sigma\in(\mathcal{W}_-)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t-z_e}=1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t-z_e)^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t-z_e)^3}=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|d\sigma(t)|}{(t-z_e)^4}<\infty.$$

Из (2.12) вытекает, что $z_e(\in\mathbf{R})$ является нулем порядка не ниже первого функции $w\in(\mathcal{W}_-)$. Из доказательства теоремы 2.5 вытекает

Теорема 2.6. *Следующие предложения о функции $w_\sigma\in(\mathcal{W}_-)$ и ее исключительном нуле $z_e\in\mathbf{R}$ эквивалентны:*

1) *z_e — нуль первого порядка функции w_σ;*

2) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t-z_e}=1,\quad 0<\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t-z_e)^2}\right|(=|z_e|\varkappa)<\infty$$

(*последнее означает, что неравенство* (2.7) — *строгое*);

3. *функция σ_* из* (2.14) *разрывна в точке z_e;*

4) *спектральная мера τ_* функции $u_*(z)=\dfrac{-zw(z)}{(z-z_e)^2}$ обладает свойством $\tau_*(\{z_e\})>0$.*

6. Заканчивая этот параграф, рассмотрим, какие упрощения возникают в аналитической характеристике функций $w_\sigma\in(\mathcal{W})$, если σ — четная функция. Предварительно отметим, что при замене $\sigma\in(\Sigma)$ на $\sigma_1(t):=\sigma(-t)\,(\sigma_1\in(\Sigma))$ функция $w=w_\sigma\in(\mathcal{W})$ переходит в $w_1(z):=w(-z)$, $w_1\in(\mathcal{W})$. Очевидно $w_1(0)=w(0)$. Поэтому:

а) Если $w(0)>0$, то для R_0-функций $u(z):=-w(z)/z$ и $u_1(z):=-w_1(z)/z$ справедливо соотношение $u_1(z)=-u(-z)$.

б) Если $w(0)<0$, z_e — исключительный нуль функции w, то $-\bar{z}_e$ — исключительный нуль функции w_1.

Предположим теперь, что σ — четная функция. В этом и только в этом случае w_σ является четной и имеет место представление

$$w(z)=1-2\int_0^{\infty}\frac{td\sigma(t)}{t^2-z^2}\,.$$

Если $w(0) > 0$, то R_0-функция $-w(z)/z$ является нечетной.

Если $w(0) < 0$, то из единственности исключительного нуля вытекает, что этот нуль чисто мнимый*.

Физико-химический институт АН УССР,
Одесский институт инженеров
морского флота

Поступила 26.IV.1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян.* О рассеянии света атмосферами планет, Научн. труды, I. Ереван, 1960, 206—222.
2. *Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн.* Über Fouriersche Reihen beschrärkter summiurbaren Funktionen und ein neues Extremum problem, II. Зап. Харьк. матем. об-ва, 1934, т. 4, 10, 3—32.
3. *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1966.
4. *Н. И. Ахиезер.* Классическая проблема моментов, М., ГИФМЛ, 1961.
5. *Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян.* О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера—Хопфа, Препринт, ЕГУ, НИИ ФКС, 79—1, Ереван, 1979.
6. *Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян.* Интегральные уравнения на полупрямой с разностным ядром и нелинейные функциональные уравнения, Матем. сб., 97 (139), № 1, 1975, 35—58.
7. *И. С. Кац, М. Г. Крейн.* R-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя, Дополнение I к книге Ф. Аткинсона «Дискретные и непрерывные граничные задачи», М., «Мир», 1968.
8. *М. Г. Крейн.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. УМН, т. 13, 5 (83), 1958, 3—120.
9. *М. Г. Крейн.* О нелинейных интегральных уравнениях, играющих роль в теории уравнений Винера—Хопфа, «Математ. исследования», Кишинев, «Штиинца», I, вып. 42, 1976, 47—90; II, вып. 45, 1977, 67—92.
10. *N. Aronszajn, W. F. Donoghue.* On the exponential representation of analytic functions in the upper half-plane with positive imaginary part, J. d'Analyse Math., 5, 1956—57, 321—388.
11. *E. Hopf.* Mathematical problems of radiative equilibrium, Cambridge Tracts, № 31, 1934.
12. *M. G. Krein, H. Langer.* Some propositions on analytic matrixfunctions related to the theory of operators in the space Π_x, Acta Sci. Math., v. 43, 1—2, 1981, 181—205.
13. *H. Langer* Zur Spectraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren; Dissertation, Tech. Univ., Dresden, 1960.
14. *D. V. Lindley.* The theory of queues with a single server, Proc. of the Cambridge Philos. Soc., v. 48, 277—289.
15. *F. Spitzer.* The Wiener-Horf equation, whose kernel is the probability density, Duke Math. J., v. 24, 1957, 327—343; v. 27, 1960, 363—372.
16. *D. Widder.* The Laplace transform, Princeton, University Press, 1946.

* Продолжение в следующем номере.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Լ. Վ. Միքայելյան. *Տյոպլիցյան դետերմինանտների մասին Գ. Գ. Սեգյոյի թեորեմների մատրիցային կոնտինուալ անալոգները* 239
Մ. Մ. Ջրբաշյան, Վ. Մ. Մարտիրոսյան. *α-քվազիանալիտիկ դասերի տեսության շուրջը* 264
Մ. Գ. Կրեյն, Յու. Լ. Շմուլյան. *Վիներ- Հոպֆի հավասարումները, որոնց կորիզները թույլ են տալիս ներկայացում էքսպոնենտի միջոցով* 307

СОДЕРЖАНИЕ

Л. В. Микаелян. Матричные континуальные аналоги теорем Г. Сеге о теплицевых детерминантах 239
М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян. К теории α-квазианалитических классов . 264
М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян. Уравнения Винера—Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты 307

CONTENTS

L. V. Mikaielian. The matrix continual analogues of Szege's theorems on Teoplitz determinants 239
M. M. Djrbashian, V. M. Martirosian. On the theory of α-quasianalytic classes 264
M. G. Krein, Ju. L. Smul'an. Wiener—Hopf equations the kernels of which admit an integral representation by exponents 307

ՀՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ