

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶՐԱՍԵՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՑԱՆ

գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵՆՑԱՆ

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՑԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

գլխավոր խմբագրի տեղակալ

պատասխանատու ֆարաուզար՝ Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոգվածների հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» տասագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոգվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոգվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոգվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենայով, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոգվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումների հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոգվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծաատու լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն ու մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինգլիզները շրջանցվեն ու մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծադրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղափոխվում է հոգվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոգվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոգվածի անունը, ամսագրի, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թն շատ զգալի փոփոխությունները (օրինակի նկատմամբ) շնն թույլատրվում։

7. Հոգվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոգվածի առաջման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոգվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրությունը իրավունք է վերապահում շարադրել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոգվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է ուղալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոգվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոգվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Նրևան, Բաբեկամության 34ր. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН

зам. главного редактора

Р. В. АМБАРЦУМЯН

Н. У. АРАКЕЛЯН

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН

А. А. ТАЛАЯН

Р. Л. ШАХБАГЯН

зам. главного редактора

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редакционной коллегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутия, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
associate editor
R. V. AMBARTZUMIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN

A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
associate editor
I. D. ZASLAVSKIĬ

executive secretary M. A. Hovhannesian

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Drafts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series "Matematika"

Academy of Sciences of Armenian SSR

24-b, Berekamutian St.,

Yerevan, Armenian SSR, USSR

УДК 517.92

И. Г. ХАЧАТРЯН

ИЗУЧЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В в е д е н и е

Пусть l — дифференциальное выражение $2n$ -го порядка, заданное на интервале (a, b) ($-\infty < a < b \leq \infty$) по формуле

$$l[y] \equiv p_0 y - \frac{d}{dx} \left[p_1 \frac{dy}{dx} - \dots - \frac{d}{dx} \left[p_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{d}{dx} \left[p_n \frac{d^n y}{dx^n} \right] \right] \dots \right] \quad (1)$$

где коэффициенты $p_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) — комплекснозначные измеримые функции на интервале (a, b) , удовлетворяющие при всех $a \in (a, b)$ какому-нибудь одному из следующих трех условий:

Условие 1.

$$\int_a^x \frac{dx}{|p_n(x)|} < \infty, \\ \int_a^x |p_{n-1-k}(x)| (x-a)^{2k} \int_a^x \frac{dt dx}{|p_n(t)|} < \infty, \quad k=0, 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

Условие 2. При $n > 2$ для некоторого целого числа x ($1 \leq x \leq n-1$)

$$\int_a^x \frac{(x-a)^x}{|p_n(x)|} dx < \infty, \\ \int_a^x (x-a)^{2k-x} h_x(x) |p_{n-1-k}(x)| dx < \infty, \quad k=0, 1, \dots, n-1, \quad (3)$$

где

$$h_x(x) = \int_a^x \frac{(t-a)^x}{|p_n(t)|} dt + (x-a) \int_x^a \frac{(t-a)^{x-1}}{|p_n(t)|} dt.$$

Условие 3.

$$\int_a^x \left[\int_x^a \frac{(t-x)^{n-1}}{|p_n(t)|} dt \right]^2 dx < \infty, \quad (4)$$

$$\int_a^x (x-a)^{2k-n} h_n(x) |p_{n-1-k}(x)| dx < \infty, \quad k=0, 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

В статье рассматривается дифференциальное уравнение

$$l[y] - \lambda y = f, f \in L^2(a, b), \quad (6)$$

где λ — комплексный параметр, и изучается поведение решений этого уравнения при $x \rightarrow a$. В результате этого исследования выясняются некоторые свойства решений и доказываются существование и единственность решения, удовлетворяющего в точке $x=a$ некоторым естественным условиям. Полученные здесь результаты автор намерен применить для изучения спектральных свойств действующих в пространстве $L^2(a, b)$ самосопряженных операторов, порожденных дифференциальным выражением (1) с вещественными коэффициентами. С этой целью важно обеспечить также свойства решений уравнения (6), как их суммируемость с квадратом на конечном интервале $(a, a] \subset (a, b)$, а также существование и единственность решения, удовлетворяющего в точке $x=a$ нулевым начальным условиям. На примерах покажем, что условия 1, 2, 3 нельзя существенно ослабить и одновременно обеспечить отмеченные свойства решений. Действительно, функция

$$y(x) = \int_x^a \frac{(t-x)^{n-1}}{p_n(t)} dt, \quad (7)$$

где $a \in (a, b)$ и $p_n(x) \geq 0$, является решением уравнения

$$(-1)^n [p_n(x) y^{(n)}(x)]^{(n)} = 0. \quad (8)$$

Очевидно, что если неравенство (4) не выполняется, то решение (7) уравнения (8) не является суммируемым с квадратом на интервале $(a, a]$. Далее рассмотрим уравнение

$$(-1)^n [(x-a)^m y^{(n)}(x)]^{(n)} + (-1)^s [c(x-a)^{m+2s-2n} y^{(s)}(x)]^{(s)} = 0, \quad (9)$$

где число s ($0 \leq s \leq n-1$) — целое, m — произвольное и

$$c = (-1)^{n-1-s} \prod_{v=s+1}^n (n-s+v)(m+v).$$

В данном случае

$$p_n(x) = (x-a)^m, \quad p_s(x) = c(x-a)^{m+2s-2n}$$

и $p_k(x) = 0$ ($k \neq s, n$). Заметим, что при $m < 1$ в условии 1 не выполняется только неравенство (2) для $k = n-1-s$, при $x < m < x+1$ в условии 2 не выполняется только неравенство (3) для $k = n-1-s$ и, наконец, при $n < m < n + \frac{1}{2}$ в условии 3 не выполняется только неравенство (5) для $k = n-1-s$. Однако в каждом из этих случаев для любого $\varepsilon > 0$ сходятся, соответственно, интегралы

$$\int_a^x |p_s(x)| |\ln(x-a)|^{-1-\varepsilon} (x-a)^{2(n-1-s)} \int_a^x \frac{dt dx}{|p_n(t)|} < \infty,$$

$$\int_a^x |p_s(x)| |\ln(x-a)|^{-1-s} (x-a)^{2(n-1-s)-s} h_s(x) dx < \infty,$$

$$\int_a^x |p_s(x)| |\ln(x-a)|^{-1-s} (x-a)^{2(n-1-s)-n} h_n(x) dx < \infty.$$

С другой стороны, при любом m уравнение (9) имеет два решения $y_1(x)=0$ и $y_2(x)=(x-a)^{2n}$, удовлетворяющие в точке $x=a$ одинаковым начальным условиям.

Приведем некоторые определения и обозначения из монографии [1], которые используются в статье.^{*)}

Квазипроизводные $y^{[k]}(x)$ ($k=0, 1, \dots, 2n$) функции $y(x)$, соответствующие дифференциальному выражению (1), определяются формулами

$$y^{[k]} = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k=0, 1, \dots, n-1,$$

$$y^{[n]} = p_n \frac{d^n y}{dx^n},$$

$$y^{[n+k]} = p_{n-k} \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx} (y^{[n+k-1]}), \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Из определения квазипроизводных следует, что

$$l[y] = y^{[2n]}. \quad (11)$$

Считается, что выражение $l[y]$ имеет смысл для данной функции $y(x)$, если все квазипроизводные функции $y(x)$ до $(2n-1)$ -го порядка включительно существуют и абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке $[a, \beta] \subset (a, b)$.

Пусть $y(x)$ и $z(x)$ — функции, для которых выражение l имеет смысл и α, β ($a < \beta$) — некоторые числа из интервала (a, b) . Имеет место формула Лагранжа

$$\int_a^\beta l[y(x)] z(x) dx - \int_a^\beta y(x) l[z(x)] dx = [y, z]_\beta - [y, z]_\alpha, \quad (12)$$

где

$$[y, z]_x = \sum_{k=0}^{n-1} \{y^{[k]}(x) z^{[2n-1-k]}(x) - y^{[2n-1-k]}(x) z^{[k]}(x)\}. \quad (13)$$

Если функции $y, z, l[y], l[z]$ суммируемы с квадратом на интервале (a, β) , то, как следует из формулы (12), существует конечный предел

$$[y, z]_a = \lim_{x \rightarrow a} [y, z]_x.$$

Для функций y и z , зависящих от параметра λ , вместо $[y, z]_x$ иногда будем использовать обозначение $[y, z]_{x, \lambda}$.

§ 1. Поведение решений при условии 1

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l[y] = f, f \in L^1(a, b). \quad (14)$$

Теорема 1. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют условию 1. Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Для любого решения $y(x)$ уравнения (14) существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow a} y(x) = y(a) \quad (15)$$

и, кроме того

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{\nu} y^{[\nu]}(x)\} = 0, \nu = 1, 2, \dots, n-1, \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ y^{[n+\nu]}(x) (x-a)^{n+\nu-1} \int_a^x \frac{dt}{|p_n(t)|} \right\} = 0, \nu = 0, 1, \dots, n-1. \quad (17)$$

2°. Если решение $y(x)$ уравнения (14) такое, что при некотором m ($0 \leq m \leq n-1$)

$$y^{[\nu]}(a) = 0, \nu = 0, 1, \dots, m-1, \quad (18)$$

то существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(m-\nu)! (x-a)^{m-\nu} y^{[\nu]}(x)\} = y^{[m]}(a), \nu = 0, 1, \dots, m, \quad (19)$$

и, кроме того

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{m-\nu} y^{[\nu]}(x)\} = 0, \nu = m+1, m+2, \dots, n-1, \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ y^{[n+\nu]}(x) (x-a)^{n+\nu-m-1} \int_a^x \frac{dt}{|p_n(t)|} \right\} = 0, \nu = 0, 1, \dots, n-1. \quad (21)$$

3°. Если решение $y(x)$ уравнения (14) такое, что при некотором m ($0 \leq m \leq n-1$) $y^{[\nu]}(a) = 0$ ($\nu = 0, 1, \dots, n+m-1$), то функции

$$y^{[\nu]}(x) \left[(x-a)^{n-1-\nu+m} \int_a^x \frac{dt}{|p_n(t)|} \right]^{-1}, \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (22)$$

ограничены на конечном интервале $(a, a] \subset (a, b)$, существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(m-\nu)! (a-x)^{m-\nu} y^{[n+\nu]}(x)\} = y^{[n+m]}(a), \nu = 0, 1, \dots, m, \quad (23)$$

и кроме того

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{m-\nu} y^{[n+\nu]}(x)\} = 0, \nu = m+1, m+2, \dots, n-1 \quad (24)$$

4°. Если решение $y(x)$ уравнения (14) удовлетворяет условиям $y^{[\nu]}(a) = 0$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ y^{(v)}(x) \left[(x-a)^{2n-2-v} \int_a^x \frac{dt}{|p_n(t)|} \right]^{-1} \right\} = 0, \quad v=0,1,\dots,n-1, \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{v-n+1} y^{(n+v)}(x) = 0, \quad v=0,1,\dots,n-1. \quad (26)$$

Доказательство. Пусть $y(x)$ — некоторое решение уравнения (14). Обозначим $c_k = y^{(k)}(a)$ ($k=0,1,\dots,2n-1$), где a — некоторое число из интервала (a, b) , и введем функции

$$\varphi_{vk}(x, t) = \int_x^t \frac{(x-u)^{n-1-v} (t-u)^{n-1-k}}{(n-1-v)! (n-1-k)! p_n(u)} du, \quad v, k=0,1,\dots,n-1, \quad (27)$$

$$\psi_v(x) = \sum_{k=v}^{n-1} c_k \frac{(x-a)^{k-v}}{(k-v)!} - \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n-1-k} \varphi_{vk}(x, a) - \int_x^a \varphi_{v0}(x, t) f(t) dt, \quad (28)$$

$$v=0,1,\dots,n-1.$$

Используя формулы (10) и (11), нетрудно убедиться, что функции $y^{(v)}(x)$ ($v=0,1,\dots,n-1$) удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$y^{(v)}(x) = \psi_v(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^a \varphi_{vk}(x, t) p_k(t) y^{(k)}(t) dt, \quad (29)$$

$$v=0,1,\dots,n-1,$$

причем

$$y^{(2n-1-v)}(x) = \sum_{k=0}^v c_{2n-1-k} \frac{(a-x)^{v-k}}{(v-k)!} + \int_x^a \frac{(t-x)^v}{v!} f(t) dt -$$

$$- \sum_{k=0}^v \int_x^a \frac{(t-x)^{v-k}}{(v-k)!} p_k(t) y^{(k)}(t) dt, \quad (30)$$

$$v=0,1,\dots,n-1.$$

В уравнениях (29) число a выберем так, чтобы

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_a^t |p_k(t)| (t-a)^{2(n-1-k)} \int_a^t \frac{du dt}{|p_n(u)|} < \frac{1}{2n}. \quad (31)$$

Если обозначить

$$z_v(x) = y^{(v)}(x) (x-a)^v, \quad \xi_v(x) = \psi_v(x) (x-a)^v,$$

$$v=0,1,\dots,n-1,$$

то из (29) для функций $z_v(x)$ получим соотношения

$$z_v(x) = \xi_v(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^a \frac{(x-a)^v}{(t-a)^k} \varphi_{vk}(x, t) p_k(t) z_k(t) dt, \quad (32)$$

$$v=0,1,\dots,n-1.$$

Очевидно, что при $a < x < t < \alpha$

$$\frac{(x-a)^{\nu}}{(t-a)^k} |\varphi_{\nu k}(x, t)| < (t-a)^{2(n-1-k)} \int_a^t \frac{du}{|p_n(u)|}. \quad (33)$$

Обозначим

$$z(x) = \max_{\substack{x < t < \alpha \\ 0 < \nu < n}} |z_{\nu}(t)|, \quad \xi(x) = \max_{\substack{x < t < \alpha \\ 0 < \nu < n}} |\xi_{\nu}(t)|.$$

Тогда в силу неравенств (31) и (33) из формул (32) получим

$$z(x) \leq \xi(x) + \frac{1}{2} z(x)$$

или, что то же самое, $z(x) \leq 2\xi(x)$. Однако функция $\xi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, \alpha]$. Поэтому в формуле (32) подынтегральная функция при всех $x \in (a, \alpha]$ мажорируется суммируемой функцией $2\xi(a) \times \times g_k(t) |p_k(t)|$, где через $g_k(t)$ обозначено стоящее в правой части (33) выражение. В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из формул (32) получим, что при $x \rightarrow a$ функция $z_0(x)$ стремится к конечному пределу, а функции $z_{\nu}(x)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n-1$) стремятся к нулю. Тем самым существование конечного предела (15), а также соотношения (16) доказаны. Используя соотношения (15) и (16), из формул (30) легко получаются соотношения (17). Таким образом, утверждение 1° доказано.

Утверждение 2° докажем методом индукции. Заметим, что утверждение 2° при $m=0$ совпадает с утверждением 1°. Предположим, что утверждение 2° верно для некоторого $m=j$ ($0 \leq j \leq n-2$). Тогда для решения $y(x)$ уравнения (14) из условия (18) при $m=j+1$ имеем, что

$$\lim_{x \rightarrow a} |(x-a)^{\nu-j} y^{(j)}(x)| = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1. \quad (34)$$

Функцию $\psi_{\nu}(x)$ (см. (28)) представим в виде

$$\psi_{\nu}(x) = \sum_{k=\nu}^{n-1} B_k \frac{(x-a)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \varphi_{\nu k}(x, a) + \int_a^x \varphi_{\nu 0}(x, t) f(t) dt, \quad (35)$$

где

$$B_k = \sum_{s=k}^{n-1} c_k \frac{(a-a)^{s-k}}{(s-k)!} - \sum_{s=0}^{n-1} c_{2n-1-s} \varphi_{k s}(a, a) - \int_a^a \varphi_{k 0}(a, t) f(t) dt,$$

$$A_k = \sum_{s=0}^k c_{2n-1-s} \frac{(a-a)^{k-s}}{(k-s)!} + \int_a^a \frac{(t-a)^k}{k!} f(t) dt. \quad (36)$$

В силу представления (35) формула (30) принимает вид

$$y^{(2n-1-\nu)}(x) = \sum_{k=0}^{\nu} A_k \frac{(a-x)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} - \int_a^x \frac{(t-x)^{\nu}}{\nu!} f(t) dt -$$

$$- \sum_{k=0}^v \int_x^a \frac{(t-x)^{v-k}}{(v-k)!} p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad (37)$$

$$v=0, 1, \dots, n-1.$$

В силу соотношений (34), в формулах (29) при $0 \leq v \leq j$ можно положить $x=a$. Тогда, учитывая (35) и условия $y^{[v]}(a)=0$ ($v=0, 1, \dots, j$) имеем, что

$$B_v = - \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x \varphi_{vk}(a, t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad v=0, 1, \dots, j. \quad (38)$$

Подставляя эти выражения в формулы (29), получим

$$y^{[v]}(x) = \eta_{vj}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x \Phi_{vkj}(x, t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad (39)$$

$$v=0, 1, \dots, j$$

$$y^{[v]}(x) = \psi_v(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^a \varphi_{vk}(x, t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad (40)$$

$$v=j+1, j+2, \dots, n-1,$$

где

$$\eta_{vj}(x) = \sum_{k=j+1}^{n-1} B_k \frac{(x-a)^{k-v}}{(k-v)!} - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \varphi_{vk}(x, a) + \int_a^x \varphi_{v0}(x, t) f(t) dt,$$

$$\Phi_{vkj}(x, t) = - \sum_{s=v}^j \frac{(x-a)^{s-v}}{(s-v)!} \varphi_{sk}(a, t), \quad a \leq t \leq x \leq a, \quad (41)$$

$$\Phi_{vkj}(x, t) = - \sum_{s=v}^j \frac{(x-a)^{s-v}}{(s-v)!} \int_a^x \frac{(a-u)^{n-1-s} (t-u)^{n-1-k}}{(n-1-s)! (n-1-k)! p_n(u)} du +$$

$$+ \sum_{s=j+1}^{n-1} \frac{(x-a)^{s-v}}{(s-v)!} \int_x^t \frac{(a-u)^{n-1-s} (t-u)^{n-1-k}}{(n-1-s)! (n-1-k)! p_n(u)} du, \quad a \leq x \leq t \leq a. \quad (42)$$

Тем же путем, что и при доказательстве утверждения 1°, из формул (39), (40) получим соотношения (19) и (20) при $m=j+1$, а затем из формул (37) получим соотношения (21) при $m=j+1$. Утверждение 2° доказано.

Утверждение 3° тоже доказывается методом индукции. Убедимся в его справедливости при $m=0$. Пусть решение $y(x)$ уравнения (14) удовлетворяет условиям $y^{[v]}(a)=0$ ($v=0, 1, \dots, n-1$). Тогда, в силу утверждения 2°, в формулах (29) можно положить $x=a$. Следовательно, соотношения (38) имеют место для всех v ($0 \leq v \leq n-1$). Подставляя выражения (38) в формулы (29), получим

$$\begin{aligned}
y^{[v]}(x) = & - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \varphi_{v,k}(x, a) + \int_a^x \varphi_{v,0}(x, t) f(t) dt - \\
& - \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x y^{[k]}(t) p_k(t) \int_a^t \frac{(x-u)^{n-1-v} (t-u)^{n-1-k}}{(n-1-v)! (n-1-k)! p_n(u)} du dt - \\
& - \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^a y^{[k]}(t) p_k(t) \int_a^x \frac{(x-u)^{n+1-v} (t-u)^{n-1-k}}{(n-1-v)! (n-1-k)! p_n(u)} du dt, \quad (43)
\end{aligned}$$

$$v = 0, 1, \dots, n-1.$$

Из формул (43) следует ограниченность функций (22) при $m=0$. В силу этого, из формул (37) получим соотношения (23) и (24) при $m=0$. Таким образом, утверждение 3° при $m=0$ верно. Предположим, что для некоторого числа j ($0 \leq j \leq n-2$) утверждение 3° при $m=n-2-j$ верно и докажем его справедливость при $m=n-1-j$. В силу ограниченности функций (22) при $m=n-2-j$, в формулах (37) для $j+1 \leq v \leq n-1$ можно положить $x=a$. Учитывая условия $y^{[2n-1-v]}(a)=0$ ($j+1 \leq v \leq n-1$), получим, что

$$A_v = \sum_{k=0}^v \int_a^x \frac{(t-a)^{v-k}}{(v-k)!} p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad j+1 \leq v \leq n-1. \quad (44)$$

Подставляя эти выражения в формулы (43) и (37), получим (см. (41), (42)), что

$$\begin{aligned}
y^{[v]}(x) = & - \sum_{k=0}^j A_k \varphi_{v,k}(x, a) + \int_a^x \varphi_{v,0}(x, t) f(t) dt - \\
& - \sum_{k=j+1}^{n-1} \int_a^x \varphi_{v,k}(x, t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt + \\
& + \sum_{k=0}^j \int_a^x \Phi_{k,v}(t, x) p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad (45)
\end{aligned}$$

$$v = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\begin{aligned}
y^{[2n-1-v]}(x) = & \sum_{k=0}^j A_k \frac{(a-x)^{v-k}}{(v-k)!} - \int_a^x \frac{(t-x)^v}{v!} f(t) dt + \\
& + \sum_{k=j+1}^v \int_a^x \frac{(t-a)^{v-k}}{(v-k)!} p_k(t) y^{[k]}(t) dt + \\
& + \sum_{k=0}^j \int_a^x \left[\sum_{s=j+1}^v \frac{(a-x)^{v-s} (t-a)^{s-k}}{(v-s)! (s-k)!} \right] p_k(t) y^{[k]}(t) dt - \\
& - \sum_{k=0}^j \int_x^a \left[\sum_{s=k}^j \frac{(a-x)^{v-s} (t-a)^{s-k}}{(v-s)! (s-k)!} \right] p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad (46)
\end{aligned}$$

$$v = j+1, j+2, \dots, n-1,$$

$$y^{[2n-1-v]}(x) = \sum_{k=0}^v A_k \frac{(a-x)^{v-k}}{(v-k)!} - \int_a^x \frac{(t-x)^v}{v!} f(t) dt - \\ - \sum_{k=0}^v \int_a^x \frac{(t-x)^{v-k}}{(v-k)!} p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad (47)$$

$$v = 0, 1, \dots, j.$$

Из формул (45), как нетрудно убедиться, следует ограниченность функций (22) при $m = n-1-j$. В силу этого из формул (46) и (47) получим соотношения (23), (24) при $m = n-1-j$. Тем самым утверждение 3° доказано.

Докажем теперь утверждение 4°. В силу утверждения 3° в формулах (37) можно положить $x = a$. Учитывая условия $y^{[k+v]}(a) = 0$ ($v = 0, 1, \dots, n-1$), получим, что соотношения (44) имеют место для всех v ($0 \leq v \leq n-1$). Подставляя выражения (44) в формулы (43) и (37), получим

$$y^{[v]}(x) = \int_a^x \varphi_{v0}(x, t) f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x \varphi_{vk}(x, t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad (48)$$

$$y^{[2n-1-v]}(x) = - \int_a^x \frac{(t-x)^v}{v!} f(t) dt + \sum_{k=0}^v \int_a^x \frac{(t-x)^{v-k}}{(v-k)!} p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \\ v = 0, 1, \dots, n-1. \quad (49)$$

Из формул (48) и (49) получаются соотношения (25) и (26). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют условию 1. Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Уравнение (14) имеет решение $y(x)$, и притом только одно, удовлетворяющее условиям

$$y^{[v]}(a) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, 2n-1. \quad (50)$$

2°. Для любого целого числа m ($0 \leq m \leq 2n-1$) уравнение (14) имеет решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям

$$y^{[v]}(a) = 0, \quad v = 0, \dots, m-1, \quad (51)$$

$$y^{[m]}(a) = 1. \quad (52)$$

Доказательство. Рассмотрим систему интегральных уравнений (48). Нетрудно убедиться, что эта система уравнений разрешима и определяет решение $y(x)$ уравнения (14), удовлетворяющее условиям (50). Однако, если решение $y(x)$ уравнения (14) удовлетворяет условиям (50), то, как и при доказательстве теоремы 1, функции $y^{[v]}(x)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений (48), имеющей только одно решение. Утверждение 1° доказано.

В силу утверждения 1° доказательство утверждения 2° достаточно провести для однородного уравнения $l[y] = 0$. Пусть $0 \leq m \leq$

$< n-1$. Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений на интервале $(a, a]$:

$$y^{[v]}(x) = \frac{(x-a)^{m-v}}{(m-v)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x \Phi_{v,k,m-1}(x,t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt,$$

$$v = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$y^{[m]}(x) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^a \varphi_{v,k}(x,t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad (53)$$

$$y^{[v]}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^a \varphi_{v,k}(x,t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad v = m+1, m+2, \dots, n-1,$$

где функции $\varphi_{v,k}(x,t)$ и $\Phi_{v,k,m-1}(x,t)$ определяются по формулам (27), (41), (42), при этом предполагается выполненным неравенство (31). В силу неравенства (31) приведенная система уравнений разрешима и определяет на интервале $(a, a]$ решение $y(x)$ уравнения $l[y] = 0$, удовлетворяющее условиям (51). При этом существует конечное значение $y^{[m]}(a)$ и, кроме того

$$|y^{(v)}(x)| (x-a)^{v-m} < 2, \quad v = 0, 1, \dots, n-1. \quad (54)$$

В силу неравенств (31) и (54) из формулы (53) получим, что

$$|y^{[m]}(x)| > 1 - \frac{1}{n} \geq 0.$$

Значит $y^{[m]}(a) \neq 0$ и, следовательно, уравнение $l[y] = 0$ имеет решение, удовлетворяющее всем условиям (51), (52).

В случае $m = n$ нужно рассматривать систему интегральных уравнений (43) и учесть формулы (37), полагая $f(x) = 0$, $A_{n-1} = 1$ и $A_k = 0$ при $k \neq n-1$. А в случае $n+1 \leq m \leq 2n-1$ следует рассматривать систему интегральных уравнений (45) и учесть формулы (46), (47), полагая $j = 2n-1-m$, $f(x) = 0$, $A_{2n-1-m} = 1$ и $A_k = 0$ при $k \neq 2n-1-m$. Теорема доказана.

§ 2. Поведение решений при условии 2

Теорема 3. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют условию 2. Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Для любого решения $y(x)$ уравнения (14) существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} y(x) = y(a)$ и имеют место соотношения

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^v y^{[v]}(x)\} = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{n-1-v} h_v(x) y^{[n+v]}(x)\} = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n-1.$$

2°. Если решение $y(x)$ уравнения (14) такое, что при некотором m ($0 \leq m \leq n-1-x$) $y^{[v]}(a) = 0$ ($v = 0, 1, \dots, m-1$), то существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(m-v)! (x-a)^{v-m} y^{[v]}(x)\} = y^{[m]}(a), \quad v = 0, 1, \dots, m,$$

и имеют место соотношения

$$\lim_{x \rightarrow a} [(x-a)^{v-m} y^{[v]}(x)] = 0, \quad v = m+1, m+2, \dots, n-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{n-1-m-x+v} h_x(x) y^{[n+v]}(x)\} = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n-1.$$

3°. Если решение $y(x)$ уравнения (14) такое, что при некотором m ($0 \leq m \leq x-1$)

$$y^{[v]}(a) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n-1-x+m,$$

$$y^{[n+v]}(a) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, m-1,$$

то функции

$$y^{[v]}(x) [(x-a)^{n-1-v-x+m} h_x(x)]^{-1}, \quad v = 0, 1, \dots, n-1,$$

ограничены на конечном интервале $(a, a] \subset (a, b)$, существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(m-v)! (a-x)^{v-m} y^{[n+v]}(x)\} = y^{[n+m]}(a), \quad v = 0, 1, \dots, m,$$

и, кроме того

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{v-m} y^{[n+v]}(x)\} = 0, \quad v = m+1, m+2, \dots, n-1.$$

4°. Если решение $y(x)$ уравнения (14) такое, что при некотором m ($0 \leq m \leq x-1$)

$$y^{[v]}(a) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n-1-x+m,$$

$$y^{[n+v]}(a) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, m,$$

то существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(n-v-x+m)! (x-a)^{v+x-m-n} y^{[v]}(x)\} = y^{[n-x+m]}(a),$$

$$v = 0, 1, \dots, n-x+m,$$

и, кроме того

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{v+x-m-n} y^{[v]}(x)\} = 0, \quad n-x+m+1 \leq v \leq n-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [(x-a)^{v-m-1} h_x(x) y^{[n+v]}(x)] = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n-1.$$

5°. Если решение $y(x)$ уравнения (14) такое, что при некотором m ($0 \leq m \leq n-1-x$) $y^{[v]}(a) = 0$ ($v = 0, 1, \dots, n+x+m-1$), то функции

$$y^{[v]}(x) [(x-a)^{n-1-v+m} h_x(x)]^{-1}, \quad v = 0, 1, \dots, n-1,$$

ограничены на конечном интервале $(a, a] \subset (a, b)$, существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x+m-v)! (a-x)^{v-x-m} y^{[n+v]}(x)\} = y^{[n+m]}(a),$$

$$v=0,1,\dots, x+m,$$

и, кроме того

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{v-x-m} y^{[n+v]}(x)\} = 0, \quad x+m+1 \leq v \leq n-1.$$

6°. Если решение $y(x)$ уравнения (14) удовлетворяет условиям $y^{[v]}(a) = 0$ ($v=0,1,\dots, 2n-1$), то имеют место соотношения

$$\lim_{x \rightarrow a} \{y^{[v]}(x) [(x-a)^{2n-2-x-v} h_x(x)]^{-1}\} = 0, \quad v=0,1,\dots, n-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{v-n+1} y^{[n+v]}(x)\} = 0, \quad v=0,1,\dots, n-1.$$

Доказательство. Утверждение 1° доказывается таким же образом, как утверждение 1° теоремы 1. Только в данном случае число $a \in (a, b)$ в уравнениях (29) нужно подобрать так, чтобы

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x (x-a)^{2k-x} h_x(x) |p_{n-1-k}(x)| dx < \frac{1}{2n^2}. \quad (55)$$

Утверждения 2°—5° доказываются методом индукции, при этом метод индукции нужно применить к утверждениям 3° и 4° одновременно. Чтобы вывести системы интегральных уравнений, которым удовлетворяют функции $y^{[v]}(x)$ при тех или иных предположениях относительно решения $y(x)$ уравнения (14), удобно функцию $\psi_v(x)$ (см. 28)) представить в виде

$$\begin{aligned} \psi_v(x) = & \int_a^x \varphi_{v,0}(x, t) f(t) dt + \sum_{k=v}^{n-1} D_k \frac{(x-a)^{k-v}}{(k-v)!} - \\ & - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \int_x^a \frac{(x-u)^{n-1-v} (a-u)^{n-1-k}}{(n-1-v)! (n-1-k)! p_n(u)} du, \end{aligned} \quad (56)$$

где

$$D_k = \sum_{s=k}^{n-1} c_s \frac{(a-a)^{s-k}}{(s-k)!} + \int_a^x f(t) \int_t^a \frac{(a-u)^{n-1-k} (t-u)^{n-1}}{(n-1-k)! (n-1)! p_n(u)} du dt,$$

а числа A_k определяются по формуле (36) (представление (35) функции $\psi_v(x)$ при условии 2, вообще говоря, теряет смысл).

Пусть решение $y(x)$ уравнения (14) удовлетворяет условиям

$$y^{[v]}(a) = 0, \quad v=0,1,\dots, m, \quad (57)$$

$$y^{[2n-1-v]}(a) = 0, \quad v=j+1, j+2,\dots, n-1, \quad (58)$$

где $-1 \leq m, j \leq n-1$ (при $m=-1$ или $j=n-1$ условия (57) и (58), соответственно, отсутствуют), и пусть поведение функций $y^{[v]}(x)$ при $x \rightarrow a$ такое, что в формулах (29) при $0 \leq v \leq m$ и форму-

лах (37) при $j+1 \leq v \leq n-1$ можно положить $x=a$. Тогда, учитывая формулу (56) и условия (57), (58), для чисел D_v и A_v получим выражения

$$D_v = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \int_a^x \frac{(a-u)^{2n-2-k-v} du}{(n-1-v)! (n-1-k)! p_n(u)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x \varphi_{v,k}(a, t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad v = 0, 1, \dots, m,$$

$$A_v = \sum_{k=0}^j \int_a^x \frac{(t-a)^{v-k}}{(v-k)!} p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad v = j+1, j+2, \dots, n-1.$$

Подставляя эти выражения в формулы (37) и (29), для функций $y^{[v]}(x)$ ($v=n, n+1, \dots, 2n-1$) получим формулы (46), (47), а для функций $y^{[v]}(x)$ ($v=0, 1, \dots, n-1$) получим следующую систему интегральных уравнений на интервале $(a, x]$:

$$y^{[v]}(x) = \zeta_v(x) + \sum_{k=j+1}^{n-1} \int_a^x F_{v,k}(x, t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^j \int_a^x H_{v,k}(x, t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad (59)$$

$$v = 0, 1, \dots, m,$$

$$y^{[v]}(x) = \psi_v(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^a \varphi_{v,k}(x, t) p_k(t) y^{[k]}(t) dt, \quad (60)$$

$$v = m+1, m+2, \dots, n-1,$$

причем, если ввести обозначения

$$K_{r,v}^s(x, t, u) = \frac{(x-a)^{r-v} (t-u)^{n-1-k} (a-u)^{n-1-r}}{(r-v)! (n-1-k)! (n-1-r)! p_n(u)},$$

$$G_{v,k}^{rs}(x, t, u) = \frac{(x-a)^{r-v} (t-a)^{s-k} (a-u)^{2n-2-s-r}}{(r-v)! (s-k)! (n-1-s)! (n-1-r)! p_n(u)},$$

то для функций $\zeta_v(x)$, $F_{v,k}(x, t)$, $H_{v,k}(x, t)$ имеют место формулы:

$$\zeta_v(x) = \int_a^x \varphi_{v,0}(x, t) f(t) dt + \sum_{k=m+1}^{n-1} D_k \frac{(x-a)^{k-v}}{(k-v)!} +$$

$$+ \sum_{k=0}^j A_k \left\{ \sum_{r=v}^m \int_a^x K_{r,k}^v(x, a, u) du - \sum_{r=m+1}^{n-1} \int_x^a K_{r,k}^v(x, a, u) du \right\}.$$

$$F_{,k}(x, t) = \sum_{r=1}^m \int_1^x K'_{rk}(x, t, u) du - \sum_{r=m+1}^{n-1} \int_x^a K'_{rk}(x, t, u) du,$$

$$a \leq t \leq x \leq a,$$

$$F_{,k}(x, t) = - \sum_{r=m+1}^{n-1} \int_1^a K'_{rk}(x, t, u) du, \quad a \leq x \leq t \leq a,$$

$$H_{,k}(x, t) = - \sum_{s=j+1}^{n-1} \sum_{r=m+1}^{n-1} \int_x^a G'_{rk}(x, t, u) du - \\ - \sum_{s=k}^j \sum_{r=1}^m \int_a^1 G'_{rk}(x, t, u) du + \sum_{s=j+1}^{n-1} \sum_{r=1}^m \int_1^x G'_{rk}(x, t, u) du,$$

$$a \leq t \leq x \leq a,$$

$$H_{,k}(x, t) = - \sum_{s=j+1}^{n-1} \sum_{r=m+1}^{n-1} \int_1^a G'_{rk}(x, t, u) du - \\ - \sum_{s=k}^j \sum_{r=1}^m \int_a^1 G'_{rk}(x, t, u) du + \sum_{s=j+1}^{n-1} \sum_{r=m+1}^{n-1} \int_x^1 G'_{rk}(x, t, u) du,$$

$$a \leq x \leq t \leq a.$$

Если m или j принимают одно из значений -1 или $n-1$, вид приведенных уравнений значительно упрощается. Например, при $m=n-1$ и $j=n-1$ уравнения (59), (60) сводятся к (48).

Дальнейшее доказательство теоремы основано на применении формул (59), (60) и (46), (47). При этом нужно учесть, что функция $h_x(x)$ монотонно возрастает, а функция $(x-a)^{-1} h_x(x)$ монотонно убывает на интервале $(a, a]$ и, кроме того, $h_x(a)=0$.

Теорема 4. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют условию 2. Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Уравнение (14) имеет единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям $y^{[v]}(a)=0$ ($v=0, 1, \dots, 2n-1$).

2°. Для любого целого m ($0 \leq m \leq n-1-x$ или $n+x \leq m \leq 2n-1$) уравнение (14) имеет решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям

$$y^{[m]}(a)=1, \quad y^{[v]}(a)=0, \quad v=0, 1, \dots, m-1.$$

3°. Для любого целого m ($0 \leq m \leq x-1$) уравнение (14) имеет решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям $y^{[n+m]}(a)=1$ и

$$y^{[v]}(a)=0, \quad v=0, 1, \dots, n-1-x+m,$$

$$y^{[s+v]}(a)=0, \quad v=0, 1, \dots, m-1.$$

4°. Для любого целого m ($n - m \leq m \leq n - 1$) уравнение (14) имеет решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям $y^{(m)}(a) = 1$ и

$$y^{(\nu)}(a) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, m - 1,$$

$$y^{(n+\nu)}(a) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, m + n - n.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

§ 3. Поведение решений при условии 3

Теорема 5. Пусть коэффициенты дифференциального уравнения (1) удовлетворяют условию 3. Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Для любого решения $y(x)$ уравнения (14) функции

$$y^{(\nu)}(x)(x-a)^{\nu} \left[1 + \int_x^a \frac{(u-a)^{n-1}}{|p_n(u)|} du \right]^{-1}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1,$$

ограничены на конечном интервале $(a, a] \subset (a, b)$, существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow a} y^{(n)}(x) = y^{(n)}(a)$$

и, кроме того

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{\nu} y^{(n+\nu)}(x)\} = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1.$$

2°. Если решение $y(x)$ уравнения (14) такое, что при некотором m ($0 \leq m \leq n-1$)

$$y^{(\nu)}(a) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$y^{(n+\nu)}(a) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, m,$$

то существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(m-\nu)! (x-a)^{\nu-m} y^{(\nu)}(x)\} = y^{(m)}(a), \quad \nu = 0, 1, \dots, m,$$

и имеют место соотношения

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{\nu-m} y^{(\nu)}(x)\} = 0, \quad \nu = m+1, m+2, \dots, n-1.$$

Кроме того, если $0 \leq m \leq n-2$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \{y^{(n+\nu)}(x)(x-a)^{\nu-m-1} h_n(x)\} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1,$$

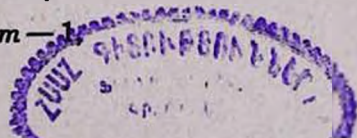
а если $m = n-1$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ y^{(n+\nu)}(x)(x-a)^{\nu-n+1} \int_x^a \frac{(u-a)^{n-1}}{|p_n(u)|} du \right\} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

3°. Если решение $y(x)$ уравнения (14) такое, что при некотором m ($1 \leq m \leq n-1$)

$$y^{(\nu)}(a) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$y^{(n+\nu)}(a) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1,$$



то функции

$$y^{[v]}(x) [(x-a)^{m-v-1} h_v(x)]^{-1}, \quad v=0, 1, \dots, n-1,$$

ограничены на конечном интервале $(a, a] \subset (a, b)$, существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(m-v)! (a-x)^{v-m} y^{[n+v]}(x)\} = y^{[n+m]}(a), \quad v=0, 1, \dots, m,$$

и, кроме того

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{v-m} y^{[n+v]}(x)\} = 0, \quad v=m+1, m+2, \dots, n-1.$$

4°. Если решение $y(x)$ уравнения (14) удовлетворяет условиям $y^{[v]}(a)=0$ ($v=0, 1, \dots, 2n-1$), то имеют место соотношения

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-a)^{v-n+1} y^{[v]}(x)\} = 0, \quad v=0, 1, \dots, n-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ y^{[1+v]}(x) (x-a)^{v-n+1} \int_x^a \frac{(u-a)^{n-1}}{|p_n(u)|} du \right\} = 0, \quad v=0, 1, \dots, n-1.$$

Доказательство основано на применении формул (59), (60) и (46), (47), в которых число $a \in (a, b)$ нужно подобрать так, чтобы имело место неравенство (55) при $x=a$. При этом метод индукции нужно применить к утверждениям 2° и 3° одновременно.

Теорема 6. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют условию 3. Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Уравнение (14) имеет единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям $y^{[v]}(a)=0$ ($v=0, 1, \dots, 2n-1$).

2°. Для любого целого m ($0 \leq m \leq n-1$) уравнение (14) имеет решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям $y^{[n+m]}(a)=1$ и

$$y^{[v]}(a)=0, \quad y^{[n+v]}(a)=0, \quad v=0, 1, \dots, m-1.$$

3°. Для любого целого m ($0 \leq m \leq n-1$) уравнение (14) имеет решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям $y^{[m]}(a)=1$ и

$$y^{[v]}(a)=0, \quad v=0, 1, \dots, m-1, \\ y^{[n+v]}(a)=0, \quad v=0, 1, \dots, m.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

§ 4. Вспомогательные предложения

Докажем несколько предложений, предполагая, что коэффициенты выражения (1) для всех $a \in (a, b)$ удовлетворяют какому-нибудь одному из следующих двух условий:

Условие 4. Для некоторого числа ε ($0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$)

$$\int_a^x \frac{(x-a)^{n-1+\varepsilon}}{|p_n(x)|} dx < \infty,$$

$$\int_a^x |p_k(t)| \int_a^x \frac{(t-a)^{n-1+s} (x-t)^{n-1-k}}{(x-a)^{k+s} |p_n(t)|} dt dx < \infty, \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

Условие 5. Для некоторого числа r ($0 \leq r \leq n-1$)

$$\int_a^x \left[\int_x^a \frac{(t-x)^{n-1-r}}{|p_n(t)|} dt \right]^2 dx < \infty,$$

$$\int_a^x |p_{n-1-k}(x)| \int_x^a \frac{(x-a)^{k+r} (t-x)^k}{(t-a)^r |p_n(t)|} dt dx < \infty, \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

Замечание 1. Если выполняется условие 1 или 2, то выполняется также условие 4, а если выполняется условие 3, то выполняется также условие 5 при $r=0$.

Замечание 2. Если коэффициент $p_0(x)$ дифференциального выражения (1) удовлетворяет какому-нибудь одному из условий 1, 2, 3, то этому условию удовлетворяет и функция $p_0(x) - \lambda$ при любом λ . Поэтому все приведенные выше результаты справедливы также для уравнения (6).

Лемма 1. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют условию 4, и пусть $y(x, \lambda)$ — некоторое решение уравнения (6). Тогда при любом $a \in (a, b)$ имеет место неравенство

$$|y(x, \lambda)| \leq (x-a)^{-s} e^{|\lambda| Q(a)+P(a)} \left\{ \int_a^x q_0(t) |f(t)| dt + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{n-1} (a-a)^{k+s} |y^{[k]}(a, \lambda)| + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(a) |y^{[2n-1-k]}(a, \lambda)| \right\}, \quad (61)$$

где

$$q_k(t) = \int_a^t \frac{(u-a)^{n-1+s} (t-u)^{n-1-k}}{|p_n(u)|} du, \quad k=0, 1, \dots, n-1,$$

$$Q(a) = \int_a^x \frac{q_0(t)}{(t-a)^s} dt, \quad P(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x \frac{q_k(t)}{(t-a)^{k+s}} |p_k(t)| dt.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что функции $y^{[v]}(x, \lambda)$ ($v=0, 1, \dots, n-1$) удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$y^{[v]}(x, \lambda) = \psi_v(x, \lambda) - \lambda \int_x^a \varphi_{v0}(x, t) y(t, \lambda) dt + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^a \varphi_{vk}(x, t) p_k(t) y^{[k]}(t, \lambda) dt, \\ v=0, 1, \dots, n-1,$$

где функции $\varphi_k(x, t)$ и $\psi_k(x, \lambda)$ определяются формулами (27) и (28), причем в формуле (28) $c_v = y^{[v]}(x, \lambda)$ ($v = 0, 1, \dots, 2n-1$).

Если обозначить

$$z(x, \lambda) = \max_{0 \leq v \leq n-1} |(x-a)^{v+r} y^{[v]}(x, \lambda)|,$$

то, как нетрудно убедиться, из приведенной системы интегральных уравнений получим интегральное неравенство

$$z(x, \lambda) \leq \Psi(a, \lambda) + |\lambda| \int_a^x \frac{q_0(t)}{(t-a)^r} z(t, \lambda) dt + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x \frac{q_k(t)}{(t-a)^{k+r}} |p_k(t)| z(t, \lambda) dt,$$

где

$$\Psi(a, \lambda) = \int_a^x q_0(t) |f(t)| dt + \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^{k+r} |y^{[k]}(x, \lambda)| + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) |y^{[2n-1-k]}(x, \lambda)|.$$

Из этого интегрального неравенства следует, что

$$z(x, \lambda) \leq \Psi(a, \lambda) e^{|\lambda| Q(a) + P(a)}.$$

Отсюда, в частности, вытекает неравенство (61).

Аналогично доказывается следующая

Лемма 2. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют условию (5) и пусть $y(x, \lambda)$ — некоторое решение уравнения (6). Тогда при любом $a \in (a, b)$ имеет место неравенство

$$|y(x, \lambda)| \leq g_0(x, a) e^{|\lambda| G(a) + H(a)} \left\{ \int_a^x (t-a)^{n-1+r} |f(t)| dt + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{n-1} (1+a-a)^k |y^{[k]}(x, \lambda)| + \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^{k+r} |y^{[n+k]}(a, \lambda)| \right\}, \quad (62)$$

где

$$g_k(t, a) = 1 + \int_t^a \frac{(u-t)^{n-1-k}}{(u-a)^r |p_n(u)|} du, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$G(a) = \int_a^x (t-a)^{n-1+r} g_0(t, a) dt,$$

$$H(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x (t-a)^{n-1-k+r} g_k(t, a) |p_k(t)| dt.$$

Предложение 1. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют какому-нибудь одному из условий 4 и 5. Тогда решения уравнения (6) суммируемы с квадратом на каждом интервале $(a, a] \subset (a, b)$.

Это непосредственно следует из неравенств (61) и (62).

Предложение 2. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют какому-нибудь одному из условий 4 или 5, и пусть функция $y(x, \lambda)$ при каждом $\lambda \in M$ является решением уравнения (6), где M — некоторое ограниченное множество точек комплексной плоскости, имеющее точку сгущения $\lambda_0 \in M$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1°. Если при некотором $a \in (a, b)$ функции $y^{(v)}(a, \lambda)$ ($v=0, 1, \dots, 2n-1$) непрерывны по λ в точке λ_0 , то в точке λ_0 непрерывна по λ также функция $y(x, \lambda)$ в смысле метрики пространства $L^2(a, a)$. При этом, если $g, l[g] \in L^2(a, a)$, то выражение (см. (13)) $[y, g]_{a, \lambda}$ является непрерывной функцией по λ в точке λ_0 .

2°. Если при некотором $a \in (a, b)$ функции $y^{(v)}(a, \lambda)$ ($v=0, 1, \dots, 2n-1$) дифференцируемы по λ в точке λ_0 , то семейство функций

$$\left| \frac{y(x, \lambda) - y(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right|^2, \quad \lambda \in M, \quad \lambda \neq \lambda_0,$$

имеет суммируемую мажоранту на интервале $(a, a]$.

Доказательство. Очевидно, что функция $u(x, \lambda) = y(x, \lambda) - y(x, \lambda_0)$ является решением уравнения

$$l[u] - \lambda u = (\lambda - \lambda_0) y(x, \lambda_0).$$

Поэтому для решения $u(x, \lambda)$ имеет место неравенство (61) или неравенство (62) с функцией $f(x) = (\lambda - \lambda_0) y(x, \lambda_0)$. Отсюда легко следует непрерывность по λ в точке λ_0 функции $y(x, \lambda)$ в смысле метрики пространства $L^2(a, a)$. Учитывая это, непрерывность функции $[y, g]_{a, \lambda}$ в точке λ_0 легко получается из формулы (12):

$$\begin{aligned} [y, g]_{a, \lambda} &= [y, g]_{a, \lambda} + \int_a^a y(x, \lambda) l[g(x)] dx - \\ &- \lambda \int_a^a y(x, \lambda) g(x) dx - \int_a^a f(x) g(x) dx, \end{aligned} \quad (63)$$

Утверждение 2° также легко следует из неравенства (61) или (62) для функции $u(x, \lambda)$.

Предложение 3. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют какому-нибудь одному из условий 4 или 5, и пусть решение $y(x, \lambda)$ уравнения (6) при каждом $x \in (a, b)$ является целой функцией параметра λ . Тогда для любого числа $a \in (a, b)$ и для любой функции $g \in L^2(a, a)$ интеграл

$$\int_a^a y(x, \lambda) g(x) dx$$

является целой функцией параметра λ . Кроме того, при дополнительном условии $l[g] \in L^2(a, a)$ выражение $[y, g]_{a, \lambda}$ также является целой функцией параметра λ .

Доказательство. Из условия, наложенного на решение $y(x, \lambda)$, как нетрудно убедиться, следует, что квазипроизводные $y^{[v]}(x, \lambda)$ ($v = 0, 1, \dots, 2n-1$) при каждом $x \in (a, b)$ являются целыми функциями параметра λ . Поэтому первое утверждение непосредственно следует из предложения 2. После этого второе утверждение легко следует из формулы (63).

§ 5. Основные следствия

Теорема 7. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют какому-нибудь одному из условий 1, 2, 3. Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Все решения уравнения (6) суммируемы с квадратом на каждом конечном интервале $(a, a] \subset (a, b)$.

2°. Уравнение (6) имеет единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям

$$y^{[v]}(a) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, 2n-1. \quad (64)$$

3°. Если решение $y(x)$ уравнения (6) удовлетворяет условиям (64), то для любого решения $z(x)$ уравнения

$$l[z] - pz = g; \quad g \in L^2(a, b) \quad (65)$$

имеет место соотношение

$$[y, z]_a = 0. \quad (66)$$

4°. Если решение $y(x)$ уравнения (6) удовлетворяет соотношению (66) для всех решений $z(x)$ уравнения (65), то функция $y(x)$ удовлетворяет также условиям (64).

Доказательство. Утверждения 1° и 2° доказаны выше. Утверждение 3° непосредственно следует из теорем 1, 3, 5. Докажем утверждение 4°. Пусть для определенности выполняется условие 1. Тогда согласно теореме 2, уравнение (65) имеет решения $z_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, 2n-1$), удовлетворяющие условиям

$$z_k^{[v]}(a) = \begin{cases} 1 & \text{при } v = 2n-1-k, \\ 0 & \text{при } 0 \leq v < 2n-1-k. \end{cases} \quad (67)$$

Согласно предположению, имеют место соотношения

$$[y, z_k]_a = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1. \quad (68)$$

Если учесть условия (67) при $k=0$, то в силу теоремы 1 получим $[y, z_0]_a = y(a)$ и, следовательно, $y(a) = 0$. Далее применим метод индукции. Пусть при некотором k имеют место равенства $y^{[v]}(a) = 0$ ($v = 0, 1, \dots, k-1$). Тогда, учитывая условия (67), в силу теоремы 1 получим $[y, z_k]_a = y^{[k]}(a)$ при $k < n$ или $[y, z_k]_a = -y^{[k]}(a)$ при $k \geq n$. Отсюда, принимая во внимание соотношения (68), следует равенство $y^{[k]}(a) = 0$, что и доказывает утверждение 4° при условии 1. При условиях 2 и 3 утверждение 4° доказывается аналогично.

Теорема 8. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют какому-нибудь одному из условий 1, 2, 3, и пусть $z_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, 2n-1$) — некоторая фундаментальная система решений уравнения $l[z]=0$. Тогда для любого набора чисел $\{c_0, c_1, \dots, c_{2n-1}\}$ уравнение (6) при любом λ имеет решение $u(x, \lambda)$, и притом только одно, удовлетворяющее условиям

$$[y, z_k]_{a, \lambda} = c_k, \quad k=0, 1, \dots, 2n-1.$$

Решение $u(x, \lambda)$ при каждом фиксированном $x \in (a, b)$ является целой функцией параметра λ .

Доказательство. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$u^{[v]}(x, \lambda) = \int_a^x \varphi_{v0}(x, t) f(t) dt + \lambda \int_a^x \varphi_{v0}(x, t) u(t, \lambda) dt - \\ - \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x \varphi_{vk}(x, t) p_k(t) u^{[k]}(t, \lambda) dt, \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

Эта система уравнений, как нетрудно убедиться, разрешима и определяет решение $u(x, \lambda)$ уравнения (6), удовлетворяющее условиям $u^{[v]}(a, \lambda) = 0$ ($v=0, 1, \dots, 2n-1$). Кроме того, решение $u(x, \lambda)$ при каждом $x \in (a, b)$ является целой функцией параметра λ .

Обозначим через $y_j(x, \lambda)$ ($j=0, 1, \dots, 2n-1$) решения уравнения $l[y] = \lambda y$, удовлетворяющие в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ условиям

$$y_j^{[v]}(x_0, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } v=j \\ 0 & \text{при } v \neq j, \end{cases} \quad j=0, 1, \dots, 2n-1.$$

Решения $y_j(x, \lambda)$ линейно независимы и при каждом $x \in (a, b)$ являются целыми функциями параметра λ . Обозначим

$$\delta_{jk}(\lambda) = [y_j, z_k]_{a, \lambda}, \quad j, k=0, 1, \dots, 2n-1.$$

Покажем, что определитель

$$\Delta(\lambda) = \det \|\delta_{jk}(\lambda)\|_{j,k=0}^{2n-1}$$

не обращается в нуль ни при каком значении λ . Действительно, в противном случае существует ненулевая линейная комбинация $v(x)$ решений $y_j(x, \lambda)$, удовлетворяющая соотношению $[v, z]_a = 0$ для любого решения $z(x)$ уравнения $l[z]=0$. Но тогда, в силу утверждения 4° теоремы 7, имеют место равенства $v^{[v]}(a) = 0$ ($v=0, 1, \dots, 2n-1$). Повтому, согласно утверждению 2° теоремы 7 $v(x) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает неравенство $\Delta(\lambda) \neq 0$. Положим

$$w(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{2n-1} \gamma_j(\lambda) y_j(x, \lambda),$$

где числа $\gamma_j(\lambda)$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \gamma_j(\lambda) \delta_{jk}(\lambda) = c_k, \quad k=0, 1, \dots, 2n-1.$$

Согласно предложению 3 функции $\delta_{jk}(\lambda)$, а следовательно и решение $w(x, \lambda)$ уравнения $l[w] = \lambda w$, являются целыми функциями параметра λ . Положим $y(x, \lambda) = u(x, \lambda) + w(x, \lambda)$. Очевидно, что решение $y(x, \lambda)$ уравнения (6) удовлетворяет всем требованиям теоремы. Теорема доказана.

Введем множество Q целых чисел следующим образом:

- 1) при выполнении условия 1 $Q = \{0, 1, \dots, n-1\}$;
- 2) при выполнении условия 2 $Q = \{0, 1, \dots, n-2-x_0, n, n+1, \dots, n+x_0\}$, где x_0 есть целая часть числа $\frac{x-1}{2}$;
- 3) при выполнении условия 3 $Q = \{0, 1, \dots, n-2-n_0, n, n+1, \dots, n+n_0\}$, где n_0 есть целая часть числа $\frac{n-1}{2}$ (при $n=1$ $Q = \{1\}$).

Очевидно, что во всех трех случаях множество Q содержит n элементов и, кроме того, если $v \in Q$, то $(2n-1-v) \in Q$.

Теорема 9. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют какому-нибудь одному из условий 1, 2, 3. Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Уравнение $l[y] = \lambda y$ имеет равно n линейно независимых решений, удовлетворяющих условиям $y^{[v]}(a) = 0$ при всех $v \in Q$.

2°. Если решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнений (6) и (65) удовлетворяют условиям $y^{[v]}(a) = 0$ и $z^{[v]}(a) = 0$ при всех $v \in Q$, то $[y, z]_a = 0$.

3°. Если решение $y(x)$ уравнения (6) удовлетворяет соотношению $[y, z]_a = 0$ для любого решения $z(x)$ уравнения (65), удовлетворяющего условиям $z^{[v]}(a) = 0$ при всех $v \in Q$, то функция $y(x)$ удовлетворяет также условиям $y^{[v]}(a) = 0$ при всех $v \in Q$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 1-6. При этом утверждение 3° доказывается таким же образом, как утверждение 4° теоремы 7.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.V.1981

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Սովորական օրենքային դիֆերենցիալ եավասարման լուծումների ստանդարտիզացումը (ամփոփում)

Դիցուք l -ը $2n$ կարգի դիֆերենցիալ արտահայտություն է որոշված (a, b) ($-\infty < a < b < \infty$) միջակայքում հետևյալ բանաձևով.

$$l(y) = p_0 y - \frac{d}{dx} \left[p_1 \frac{dy}{dx} - \dots - \frac{d}{dx} \left[p_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \frac{d}{dx} \left[p_n \frac{d^n y}{dx^n} \right] \right] \dots \right]:$$

$p_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$), գործակիցների վրա դրվում են որոշ պայմաններ, որոնց դեպքում (a, b) միջակայքի ձախակետերը ընդհանրապես միջգույլար են l արտահայտության նկատմամբ, Դիտարկվում է

$$l[y] - \lambda y = f, \quad f \in L^2(a, b).$$

դիֆերենցիալ հավասարումը և ուսումնասիրվում է լուծումների վարքը, երբ $x \rightarrow a$: Պարզաբանվում են լուծումների մի շարք հատկություններ, ինչպես նաև պայցուցվում է $x=a$ կետում որոշ պայմանների բավարարող լուծման գոյությունը և միակությունը:

I. G. KHACHATRIAN. *Investigation of solutions of an ordinary singular differential equation (summary)*

Let l be the differential expression of order $2n$ given on the interval (a, b) ($-\infty < a < b < \infty$) by the formula

$$l[y] \equiv p_0 y - \frac{d}{dx} \left[p_1 \frac{dy}{dx} - \dots - \frac{d}{dx} \left[p_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{d}{dx} \left[p_n \frac{d^n y}{dx^n} \right] \right] \dots \right].$$

It is assumed that the coefficients $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) satisfy some restrictions under which both ends of the interval (a, b) are in general singular with respect to l . We consider the differential equation

$$l[y] - \lambda y = f, \quad f \in L^2(a, b),$$

Its solutions are investigated when $x \rightarrow a$. The existence and uniqueness of the solution under some natural conditions at $x = a$ is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.

УДК 517.951

В. Н. МАРКАРЯН

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] Л. С. Повтрягина и Л. Шнирельмана определяется функция $N(\varepsilon, F)$, называемая объемом компакта F относительно данной метрики. Именно через $N(\varepsilon, F)$ обозначается минимальное число замкнутых шаров с диаметром $\varepsilon > 0$, покрывающих компакт F .

Через функцию объема в [1] определяется метрический порядок компакта F и доказывается, что нижняя граница метрических порядков

$$K(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \inf \frac{\log N(\varepsilon, F)}{\log 1/\varepsilon},$$

для всех метрик компакта F равна его размерности.

Отсюда следует, что для любого бесконечномерного компактного метрического пространства F $K(F) = \infty$.

В работе [2] А. Н. Колмогорова показано, что в некоторых типичных случаях для бесконечномерных компактов существует и конечен предел

$$K^*(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log \log N(\varepsilon, F)}{\log 1/\varepsilon}.$$

В работе [3] А. Н. Колмогорова и В. М. Тихомирова рассматриваются примеры, в которых функция $H(\varepsilon, F) = \log N(\varepsilon, F)$ ведет себя как $(\log 1/\varepsilon)^r$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому естественно вводить следующую числовую характеристику подобных порядков роста:

$$df F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log H(\varepsilon, F)}{\log \log 1/\varepsilon}.$$

Эта числовая характеристика и называется функциональной размерностью множества F . Дадим теперь точное определение функциональной размерности.

Пусть E — линейное локально-выпуклое пространство, U — окрестность нуля в E , $A \subset E$. Множество B называется ε -сетью множества A относительно окрестности нуля U , если $A \subset B + \varepsilon U$. Для множества $A \subset E$ обозначим через $N(A, \varepsilon U)$ наименьшее число элементов ε -сети относительно окрестности нуля U . $H(A, \varepsilon U) = \log N(A, \varepsilon U)$ называется ε -энтропией множества A относительно окрестности нуля U (см. [3]).

Определение 1. Функциональной размерностью линейного локально-выпуклого пространства E называется число

$$\text{df } E = \sup_U \inf_V \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log H(V, \varepsilon U)}{\log \log 1/\varepsilon}, \quad (0.1)$$

где U и V пробегает все окрестности нуля пространства E .

Нахождению функциональной размерности того или другого функционального пространства посвящены работы многих авторов. В работе [3] (см. также [4]) приводится понятие функциональной размерности, а в работе [5] доказывается, что локально-выпуклое пространство с конечной функциональной размерностью является ядерным.

Известно, что функциональная размерность пространства Z всех целых аналитических функций от n переменных $\text{df } Z = n+1$, что $\text{df } H$ пространства H всех гармонических функций от n переменных равна n (см. [6]) и т. д.

В работе [7] Ю. Кумуры доказано, что $\text{df } N$ пространства решений $N = \{U(x), U(x) \in C(R_n), P(D)U=0\}$, конечна, если $P(D)$ — гиповоллуптический линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и $\text{df } N=n$, если $P(D)$ — эллиптический оператор.

В работе [8] З. Зилезни доказано, что если для дифференциального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами $\text{df } N=n$, то $P(D)$ — эллиптический оператор.

В работе [9] установлена точная формула для функциональной размерности семиволлуптических операторов с обобщенно-однородной старшей частью.

Что касается пространства решений дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, то известно (см. [10] и [11]), что N является ядерным пространством, но относительно функциональной размерности таких пространств ничего не было известно.

Мы здесь устанавливаем точные формулы как для общих регулярных гиповоллуптических операторов, так и для нерегулярных гиповоллуптических операторов с постоянными коэффициентами. Что касается операторов с переменными коэффициентами, то мы здесь доказываем, что, если $P(x, D)$ — оператор с переменными коэффициентами эллиптивен, то $\text{df } N=n$.

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: R_n и C_n — n -мерные евклидовы пространства точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ с вещественными (соответственно $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ комплексными) координатами. Z_n^+ — пространство мультииндексов, т. е. векторов (точек) $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами. $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$ ($j=1, \dots, n$) — обобщенные по С. Л. Собо-

леву производные, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $R_n^{(0)} = \{\xi, \xi \in R_n, \prod_{j=1}^n \xi_j \neq 0\}$. Для ли-

нейного дифференциального оператора $P(D)$ положим $N \equiv N(P) = \{U(x), U \in C(R_n); P(D)U=0\}$. Если в N определить топологию, индуцированную топологией $C(R_n)$, то N становится линейным локально-выпуклым пространством и в нем можно ввести понятие функциональной размерности формулой (0.1).

Определение 2. Дифференциальный оператор $P(D) = \sum \gamma_\alpha D^\alpha$ с характеристическим многочленом $P(\xi) = \sum \gamma_\alpha \xi^\alpha$ называется гиповаллиптическим, если $N \subset C^-(R_n)$.

Мы будем пользоваться следующими эквивалентными определениями гиповаллиптичности многочленов с постоянными коэффициентами (см. [11], теорему 4.1.3).

Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) гиповаллиптичен тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

а) $|\operatorname{Im} \xi| \rightarrow \infty$, если $P(\xi) = 0$, $|\xi| \rightarrow \infty$,

б) для любого $v \in Z_n^+$, $|v| = \sum_{j=1}^n v_j \neq 0$, $|\xi| \rightarrow \infty$, $\xi \in R_n$,

$$|D^v P(\xi)|/|P(\xi)| \rightarrow 0,$$

в) существуют положительные постоянные C и c такие, что для всех $\alpha \in Z_n^+$, $|\alpha| \neq 0$

$$|D^\alpha P(\xi)|/|P(\xi)| \leq C |\xi|^{-c|\alpha|}, \quad P(\xi) \neq 0.$$

Мы будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 1. (см. [14], лемму 2.1). При $n = 2$ любой λ -однородный многочлен $Q(\xi)$ можно представить в виде

$$Q(\xi) = Q^0(\xi) \prod_{\tau \in \Sigma(Q) \cap R_2^0} (\xi_1 - x(\tau) \xi_2^{\lambda/\lambda_2})^{l(\tau)}, \quad (0.2)$$

где $l(\tau)$ — натуральные числа, $x(\tau) \neq 0$ при $\tau \in \Sigma(Q) \cap R_2^0$, $x(\tau^1) \neq x(\tau^2)$ при $\tau^1 \neq \tau^2$, $Q^0(\xi)$ — многочлен от $(\xi_1, \xi_2^{\lambda/\lambda_2})$, причем $Q^0(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R_2^0$ функция $x(\tau)$ принимает лишь конечное число различных значений.

Пусть $P(\xi) = \sum \gamma_\alpha \xi^\alpha$ многочлен с вообще говоря комплексными коэффициентами. Здесь сумма распространяется по некоторому конечному набору $(P) = \{\alpha, \alpha \in Z_n^+, \gamma_\alpha \neq 0\}$.

Обозначим через $d(\xi)$ евклидово расстояние точки $\xi \in R_n$ от множества $D = \{\zeta, \zeta \in C_n, P(\zeta) = 0\}$.

Доказательство следующего предложения можно найти, например, в [11].

Лемма 2. (см. [11], лемма 4.1.1). Существует такая постоянная $C = C(m) > 0$, что для всех многочленов $P(\xi)$ порядка не больше m имеет место неравенство

$$C^{-1} \leq d(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} \left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leq C \quad (0.3)$$

для всех $\xi \in R_n^-$, для которых $P(\xi) \neq 0$.

Определение 3. Характеристическим многогранником (многогранником Ньютона) (х.м.) многочлена $P(\xi)$ называется наименьший выпуклый многогранник в R_n , содержащий все точки $\alpha \in (P)$.

Многогранник $\mathfrak{X} \subset R_n$ называется вполне правильным, если: а) $\mathfrak{X}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат Z_n^+ и б) все координаты внешних нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней многогранника $\mathfrak{X}$ положительны.

Легко показать (см. [12]), что для гипоеллиптического многочлена $P(\xi)$ х.м. точек $(P) \cup \{0\}$ является вполне правильным.

Обозначим через $\mathfrak{X}_i^k$ ($i=1, \dots, M'_k$, $k=0, \dots, n-1$) k -мерные грани многогранника $\mathfrak{X}$. Грань $\mathfrak{X}_i^k$ многогранника $\mathfrak{X}$ называется главной, если среди внешних (относительно $\mathfrak{X}$) нормалей этой грани существует такая, хоть бы одна координата которой положительна.

Если обозначить через $P^{l,k}(\xi)$ подмногочлен многочлена $P(\xi)$, отвечающий грани $\mathfrak{X}_i^k$, т. е.

$$P^{l,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{X}_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

то легко показать (см. [13]), что $P^{l,k}(\xi)$ является λ -однородным многочленом для любого вектора λ , являющегося внешней нормалью грани $\mathfrak{X}_i^k$ х.м. $\mathfrak{X}$, т. е. для всех $t > 0$, $\xi \in R_n$ $P^{l,k}(t^\lambda \xi) = P^{l,k}(t^{\lambda_1} \xi_1, \dots, t^{\lambda_n} \xi_n) = t^r P^{l,k}(\xi)$ для некоторого числа $r = r(\lambda)$. Далее λ -однородный многочлен порядка r будем обозначать через $P_{r(\lambda)}(\xi)$.

Определение 4. (см. [13] или [14]). Грань $\mathfrak{X}_i^k$ ($i=1, \dots, M'_k$, $k=0, \dots, n-1$) х.м. $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(P)$ многочлена $P(\xi)$ называется P -регулярной (невырожденной), если $P^{l,k}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R_n^{(0)}$.

Многочлен $P(\xi)$ называется регулярным, если все главные грани его х.м. $\mathfrak{X}$ P -регулярны.

Пусть $\mathfrak{X}$ — вполне правильный многогранник. Пусть $\mathfrak{X}_i^k$ ($i=1, \dots, M'_k$, $k=0, \dots, n-1$) — некоординатные грани многогранника $\mathfrak{X}$. Обозначим через $\Lambda_i^k = \Lambda_i^k(\mathfrak{X})$ множество тех внешних нормалей грани $\mathfrak{X}_i^k$, для которой $\min_{1 \leq l \leq n} \lambda_l = 1$. Положим

$$\Lambda \equiv \Lambda(\mathfrak{X}) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_{i=1}^{M'_k} \Lambda_i^k.$$

Пусть $\mathfrak{X}$ — вполне правильный х.м. многочлена $P(\xi)$ и $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{X})$. Представим многочлен $P(\xi)$ в виде

$$P(\xi) = \sum_{i=0}^M P_{m_i(\lambda)}(\xi) = \sum_{i=0}^M \sum_{(\lambda, \alpha) = m_i(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad (0.4)$$

где $m_0(\lambda) > m_1(\lambda) > \dots > m_M(\lambda) > 0$.

Для вектора λ с положительными компонентами, λ -однородного многочлена $R(\xi)$ и точки $\tau \in C_n$ положим

$$\|\tau, \lambda\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |\tau_j|^{2\lambda_j}}, \quad \Sigma(R) = \{\eta, \eta \in R_n, \|\eta, \lambda\| = 1, R(\eta) = 0\}.$$

Число $k = k(\eta)$ назовем λ -порядком нуля λ -однородного многочлена $R(\xi)$ в точке $\eta \in R_n$, если для любого $\nu \in Z_n^+$ такого, что $(\lambda, \nu) \wedge$

$< k$, $D^{\beta} R(\eta) = 0$ и $D^{\beta} R(\eta) \neq 0$ для некоторого мультииндекса β тако-
го, что $(\lambda, \beta) = k$.

Определение 5. (см. [17], определение 7). Характеристиче-
ской линией (х. л.) λ -однородного многочлена $R(\xi)$ порядка $m = m(\lambda)$
в точке $\tau \in R_{\lambda}$ назовем отрезок прямой

$$\chi(\tau, R, \delta) = m - (1 - \delta) k(\tau), \quad \delta \in [0, 1],$$

где $k(\tau)$ — λ -порядок нуля многочлена $R(\xi)$ в точке τ . По определе-
нию будем считать, что $\chi(\tau, R, \delta) \equiv m$, если

$$\tau/\tau, \lambda^{\dagger} \in \Sigma(R).$$

Характеристической ломаной (х. л.) для многочлена $P(\xi)$ вида
(1.2) в точке $\tau \in \Sigma(P_{m,(\lambda)})$ назовем график функции

$$\chi(\tau, P, \delta) = \max_{0 \leq j \leq M} \chi(\tau, P_{m_j(\lambda)}, \delta), \quad \delta \in [0, 1].$$

Определение 6. Будем говорить, что многочлен $P_{m_i(\lambda)}(\xi)$
($0 \leq i \leq M$) является активным подмногочленом многочлена $P(\xi)$ вида
(1.2) в точке $\tau \in \Sigma(P_{m,(\lambda)})$, если существует число $\delta_0 \in [0, 1]$, такое
что $\chi(\tau, P, \delta_0) = \chi(\tau, P_{m_i(\lambda)}, \delta_0)$.

Обозначим через $A(\tau)$ множество тех индексов i ($0 \leq i \leq M$),
для которых $P_{m_i(\lambda)}(\xi)$ является активным подмногочленом многочлена
 $P(\xi)$ в точке τ и положим

$$A = \bigcup_{\tau \in \Sigma(P_{m,(\lambda)})} A(\tau).$$

Определение 7. Критическим числом $\delta_0(\tau) = \delta_0(\tau, P)$ много-
члена $P(\xi)$ в точке $\tau \in \Sigma(P_{m,(\lambda)})$ назовем максимальное из чисел
 $\delta_0 \in [0, 1]$, для которых $\chi(\tau, P, \delta_0) \leq \chi(\tau, P, \delta)$ для всех $\delta \in [0, 1]$.

Рассмотрим сначала многочлен от двух переменных.

При рассмотрении нерегулярных многочленов мы будем пред-
полагать, что многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие $A(\lambda)$: для $\lambda \in \Lambda$ существует постоянная $C > 0$ такая,
что

$$1 + |P(\xi)| > C \sum_{i \in A} |P_{m_i(\lambda)}(\xi)|, \quad \forall \xi \in R_{\lambda}. \quad (0.5)$$

В [15] показано, что если все главные грани х.м. $\mathcal{M}$ гиповэллиптичес-
кого многочлена $P(\xi)$ p -регулярны, за исключением одной главной
($n-1$)-мерной грани $\mathcal{M}_{i_n}^{n-1}$ с внешней нормалью λ^0 и

$$\sum (P_{m_i(\lambda^0)}) \cap \sum (P_{m_i(\lambda^0)}) \cap R_2^0 = \emptyset,$$

то многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условию $A(\lambda^0)$.

Следующее предложение доказывается аналогично лемме 6 рабо-
ты [9].

Лемма 3. Пусть $n = 2$, $\mathcal{M}_{i_n}^{n-1}$ — единственная одномерная P -
нерегулярная грань х. м. $\mathcal{M}$ гиповэллиптического многочлена $P(\xi)$.
Пусть $\lambda^0 \in \Lambda$ — внешняя нормаль грани $\mathcal{M}_{i_n}^{n-1}$ и многочлен $P(\xi)$ удов-
летворяют условию $A(\lambda^0)$. Тогда существует постоянная $C > 0$ та-
кая, что

$$1 + d(\xi) \geq C(|\xi_1|^{\lambda_1} + |\xi_2|^{\lambda_2}), \quad (0.6)$$

где

$$\Delta_i = \min_{\substack{\tau \in \mathbb{R} \\ \tau_j \neq 0}} [\delta_0(\tau) \lambda_j^0 / \lambda_j^1], \quad i, j = 1, 2; i \neq j,$$

$\delta_0(\tau)$ — критическое число многочлена $P(\xi)$ в точке τ .

Предложение 1. Пусть $\mathcal{M} \subset R_2$ — вполне правильный многогранник и $\lambda \in \Delta$, $\lambda_2 \geq \lambda_1 = 1$. Тогда существует вектор $\mu \in \Delta$, являющийся нормалью одномерной грани многогранника $\mathcal{M}$, такой, что

$$\mu_1 = \lambda_1, \quad \mu_2 \geq \lambda_2.$$

Доказательство. Если λ является нормалью к одномерной грани, то можно положить $\mu = \lambda$. Пусть поэтому λ является нормалью к нульмерной некоординатной грани $\mathcal{M}_i^0$ многогранника $\mathcal{M}$. Положим $\lambda = \lambda/|\lambda|$. Пусть грань $\mathcal{M}_i^0$ получается пересечением граней $\mathcal{M}_i^1$ и $\mathcal{M}_i^1$ с нормальными $\lambda^0, \lambda^1 \in \Delta$.

Пусть φ, φ_1 и φ_2 — углы, которые составляют соответственно векторы λ, λ^0 и λ^1 с координатной осью Oa_1 . Тогда, либо $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, либо $\varphi_2 < \varphi < \varphi_1$ (строгое неравенство следует из того, что вектор λ является нормалью к нульмерной грани).

В силу вполне правильности многогранника $\mathcal{M}$

$$0 < \min(\varphi_1, \varphi_2) < \max(\varphi_1, \varphi_2) < \frac{\pi}{2}.$$

Пусть, для определенности, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\bar{\lambda}^0 = (\cos \varphi_1, \sin \varphi_1), \quad \bar{\lambda}^1 = (\cos \varphi_2, \sin \varphi_2), \quad \bar{\lambda} = (\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Положим $\bar{\lambda}^0 = \bar{\lambda}^0 / \cos \varphi_1 = (1, \operatorname{tg} \varphi_1)$, $\bar{\lambda}^1 = \bar{\lambda}^1 / \cos \varphi_2 = (1, \operatorname{tg} \varphi_2)$, $\bar{\lambda} = \bar{\lambda} / \cos \varphi = (1, \operatorname{tg} \varphi) = \lambda$. Поскольку $\lambda_2 \geq \lambda_1$ и $\lambda \in \Delta$, то $\operatorname{tg} \varphi \geq 1$. Так как $\operatorname{tg} \varphi_2 > \operatorname{tg} \varphi > 1$, то в качестве вектора μ можно брать вектор $\bar{\lambda}^1$. Этим предложение 1 доказано.

Основным результатом настоящей заметки является

Теорема 1. Если многочлен $P(\xi)$ с вполне правильными х. м. $\mathcal{M}$ регулярен, то

$$\operatorname{df} N(P) = \max_{\lambda \in \Delta(\mathcal{M})} \sum_{j=1}^n \lambda_j. \quad (0.7)$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, которые будут получены в § 1. Доказательство теоремы 1 будет приведено в § 2. В § 3 устанавливается формула для функциональной размерности пространств решений эллиптических операторов с переменными коэффициентами.

§ 1. Некоторые свойства корней многочленов от многих переменных

Обозначим через $b(\sigma)$, $\sigma > 0$ множество непрерывных функций $\varphi(t)$, $t \in R_1$, для которых с некоторой постоянной $C > 0$

$$C^{-1} |t|^\sigma \leq |\varphi(t)| < C |t|^\sigma, |t| > 2.$$

Пусть

$$B(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=1}^k \gamma_j \varphi_j(\xi_1) \xi_2^{\alpha_j}, \quad (1.1)$$

где $\varphi_j(t) \in b(\alpha_j)$, α_j — целые неотрицательные числа ($j=1, \dots, k$), так что $B(\xi_1, \xi_2)$ — многочлен от ξ_2 .

Определение 3'. Характеристическим многогранником (х. м.) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(B)$ для функции вида (1.1) назовем наименьший выпуклый многогранник в R_2 , содержащий все точки $\{(\alpha_j', \alpha_j'')\}$, $j=1, \dots, k$.

Следующее предложение доказывается аналогично лемме 2 работы [9] с применением предложения 1.

Лемма 4. Пусть х. м. функций $B(\xi_1, \xi_2)$ вида (1.1) вполне правилен, $\lambda \in \Delta(B)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 = 1$. Тогда для любого числа $\xi_1 \geq 2$ существуют (вообще говоря комплексное) число $\xi_2(\xi_1)$ и постоянная $C > 0$ такие, что $B(\xi_1, \xi_2(\xi_1)) = 0$,

$$|\xi_2(\xi_1)| \leq C (\xi_1^{\lambda_1} + 1), \quad \xi_1 \geq 2. \quad (1.2)$$

Лемма 5. Пусть $n=2$, $P(\xi)$ — гиповоллиптический многочлен с вполне правильным х. м. $\mathfrak{X}$, λ — нормаль к некоторой одномерной некоординатной грани х. м. $\mathfrak{X}$. Пусть $\delta_0(\tau^0)$, как и выше, критическое число многочлена $P(\xi)$ в точке $\tau^0 \in \Sigma(P_{m_i(\lambda)})$, тогда для любого числа $\xi_1 > 1$ существуют (вообще говоря комплексное) число $\xi_2 = \xi_2(\xi_1)$ и постоянная $C > 0$ такие, что $P(\xi_1, \xi_2(\xi_1)) = 0$ и для всех $\xi_1 > 1$

$$|\operatorname{Im} \xi_2(\xi_1)| \leq C (\xi_1^{\delta_0(\tau^0) \lambda_2 / \lambda_1} + 1), \quad \text{если } \tau_1^0 \neq 0, \quad (1.3)$$

$$|\operatorname{Im} \xi_2(\xi_1)| \leq C (\xi_1^{\lambda_2 \lambda_1 \delta_1(\tau^0)} + 1), \quad \text{если } \tau_0^0 \neq 0. \quad (1.4)$$

Доказательство. Поскольку всякий λ -однородный многочлен $a\lambda$ -однороден для любого числа $a > 0$, то не умаляя общности можно считать, что $\lambda_2 = 1$.

Представим λ -однородные многочлены $P_{m_i(\lambda)}(\xi)$ ($i=0, \dots, M$) в виде

$$P_{m_i(\lambda)}(\xi) = \xi^{\beta^i} R_{k_i(\lambda)}(\xi),$$

где $R_{k_i(\lambda)}(\xi)$ — λ -однородный многочлен, $R_{k_i(\lambda)}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R_2 \setminus R_2^{(0)}$, $\xi \neq 0$; $k_i(\lambda) = m_i(\lambda) - (\lambda, \beta^i)$. Из этого представления и из леммы 1 для многочленов $R_{k_i(\lambda)}(\xi)$ имеем

$$P_{m_i(\lambda)}(\xi) = \xi^{\beta^i} R_{k_i(\lambda)}^0(\xi) \prod_{\tau \in \Sigma(P_{m_i(\lambda)} \cap R_2^{(0)})} (\xi_1^{1/\lambda_1} - \kappa(\tau) \xi_2)^{l_i(\tau)}.$$

Пусть сначала 1) $\tau_1^0 \neq 0$. Рассмотрим следующие два возможных подслучая I.1) $\tau_2^0 \neq 0$, I.2) $\tau_2^0 = 0$.

В случае I.1), производя следующую замену переменных: $\eta_1 = \xi_1^{\lambda_1}$, $\eta_2 = \xi_1^{\lambda_1} - x(\tau) \xi_2$, приходим к многочлену

$$\begin{aligned} Q(\tau_1, \tau_2) &\equiv P(\xi_1(\eta_1), \xi_2(\eta_1, \tau_2)) = \sum_{i=0}^M \sum_{|\alpha| = m_i(\lambda)} \gamma_\alpha \tau^\alpha \equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^M Q_{m_i}(\eta) = \sum_{i=0}^M Q_{m_i}^0(\eta) \eta_2^{i_{i_0}(\tau)}, \end{aligned}$$

$$Q_{m_i}^0(\eta) = (\xi(\eta))^{\beta^i} R_{k_{i_0}(\lambda)}^0(\xi(\eta)) \prod_{\tau \in \mathbb{Z}(P_{m_i}(\lambda)) \cap R_2^{(0)}} (\xi_1^{\lambda_1}(\eta) - x(\tau) \xi_2(\eta))^{i_{i_0}(\tau)}.$$

Покажем, что вектор $\mu = (1, \delta_0(\tau^0))$ является внешней нормалью к некоторой одномерной некоординатной грани х. м. $\mathfrak{M}(Q)$. Пусть номер j : $0 < j \leq M$ определяется из условия $P_{m_j(\lambda)}(\tau^0) \neq 0$, $P_{m_i(\lambda)}(\tau^0) = 0$ при $i < j$ (существование такого номера следует из гиповаллиптичности многочлена $P(\xi)$ (см. [14], теорему 1), а номер $i_0 < j$ — из условия $m_j(\lambda) = m_{i_0}(\lambda) - l_{i_0}(\tau^0) + \delta_0(\tau^0) l_{i_0}(\tau^0)$ (существование такого номера следует из определения критического числа и гиповаллиптичности многочлена $P(\xi)$). Поскольку по предположению $\tau^0 \in R_2^{(0)}$, то

$$(\tau^0)^{\beta^i} R_{k_{i_0}(\lambda)}^0(\tau^0) \neq 0; P_{m_j(\lambda)}(\tau^0) \neq 0.$$

Отсюда немедленно следует, что после замены переменных в многочлене $P(\xi)$, для многочлена $Q(\eta)$

$$\gamma_{m_{i_0} - l_{i_0}(\tau^0), l_{i_0}(\tau^0)} \neq 0, \gamma_{(m_j, 0)} \neq 0.$$

С другой стороны, поскольку $m_i(\lambda) - l_i(\tau^0) + \delta_0(\tau^0) l_i(\tau^0) \leq \chi(\tau^0, P, \delta_0(\tau^0))$, $m_j(\lambda) - l_j(\tau^0) + \delta_0(\tau^0) l_j(\tau^0) = m_j(\lambda) = \chi(\tau^0, P, \delta_0(\tau^0))$, то получаем, что вектор $\mu = (1, \delta_0(\tau^0))$ является внешней нормалью к некоторой одномерной некоординатной ($l_{i_0}(\tau^0) \neq 0$) грани х. м. $\mathfrak{M}(Q)$, проходящей через точки

$$(m_{i_0}(\lambda) - l_{i_0}(\tau^0), l_{i_0}(\tau^0)), (m_j(\lambda), 0).$$

Тогда многочлен $Q(\eta)$ можно представить в виде

$$Q(\eta) = \sum_{(\mu, \alpha) = \chi(\tau^0, P, \delta_0(\tau^0))} \gamma_\alpha \tau^\alpha + \sum_{(\mu, \alpha) < \chi(\tau^0, P, \delta_0(\tau^0))} \gamma_\alpha \tau^\alpha.$$

Теперь в силу леммы 2 работы [9] получим, что для любого $\eta_1 \geq 1$ существуют число $\eta_2(\eta_1)$ и постоянная $C_1 > 0$, для которых $Q(\eta_1, \eta_2(\eta_1)) = 0$ и

$$|\eta_2(\eta_1)| \leq C_1 (\eta_1^{i_{i_0}(\tau^0)} + 1) \quad \forall \eta_1 \geq 1,$$

откуда немедленно следует неравенство (1.4).

Случай I.2) рассматривается аналогично случаю I.1), если сделать следующую замену переменных: $\eta_1 = \xi_1^{\lambda_1}$, $\eta_2 = \xi_2$. Случай II ($\tau_2^0 \neq 0$)

рассматривается аналогично случаю I) заменой вектора $\mu = (1, \delta_0(\tau^0))'$ вектором $\mu' = (\delta_0(\tau^0), 1)$, являющимся нормалью к одной одномерной некоординатной грани х.м. $\mathfrak{X}(Q)$. Лемма 5 доказана.

Переходим к общему случаю $n \geq 2$.

Пусть $\mathfrak{X}_{i_0}^{k_0}$ — координатная грань многогранника $\mathfrak{X}$. Обозначим через $\alpha^1, \dots, \alpha^{N_0}$ все мультииндексы из $\mathfrak{X}_{i_0}^{k_0}$. Поскольку грань $\mathfrak{X}_{i_0}^{k_0}$ координатная, то для некоторых номеров j : $1 \leq j \leq n$, $\alpha_j^i = 0$, $i = 1, \dots, \dots, N_0$. В дальнейшем для определенности будем считать, что

$$\sum_{i=1}^{N_0} \alpha_j^i \neq 0 \quad j=1, \dots, m; \quad \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_j^i = 0; \quad j=m+1, \dots, n \quad (m \leq n-1).$$

Предложение 2. Если грань $\mathfrak{X}_{i_0}^{k_0}$ является координатной гранью многогранника $\mathfrak{X}$, λ — нормаль этой грани, то существует некоординатная грань $\mathfrak{X}_{i_1}^{k_1}$ с нормалью μ такая, что грань $\mathfrak{X}_{i_1}^{k_1}$ является ее подгранью и $\mu_j = \lambda_j$, $j=1, \dots, m$, $\mu_j > \lambda_j$, $j=m+1, \dots, n$.

Доказательство. Пусть $\alpha^1, \dots, \alpha^{N_0}$ — все мультииндексы грани $\mathfrak{X}_{i_0}^{k_0}$. Тогда $(\lambda, \alpha^i) = \text{const} = d_\lambda$, $i=1, \dots, N_0$ и $\alpha_j^i = 0$; $j=m+1, \dots, n$; $i=1, \dots, N_0$. В силу выпуклости многогранника $\mathfrak{X}$ имеем, что $(\lambda, \alpha) < d_\lambda$ для любого мультииндекса $\alpha \in \mathfrak{X}$, для которого $\alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n \neq 0$. Рассмотрим вектор $\mu' = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, t, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_n)$. В силу непрерывности скалярного произведения (μ', α) и в силу того, что $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}_{i_0}^{k_0} \neq \emptyset$ следует существование мультииндекса $\alpha^{N_0+1} \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}_{i_0}^{k_0}$ и числа $t_0 > \lambda_{m+1}$, для которых $(\mu, \alpha^{N_0+1}) = d$, и $(\mu', \alpha) \leq d$ для все мультииндексов $\alpha \in \mathfrak{X}$.

Пусть для мультииндексов $\alpha^{N_0+1}, \dots, \alpha^{N_0+r} \in \mathfrak{X}$, $(\lambda, \alpha^{N_0+i}) < d_\lambda$; $(\mu', \alpha^{N_0+i}) = d_\lambda$, $i=1, \dots, r$. Очевидно, что $\alpha_{m+1}^{N_0+i} \neq 0$, $i=1, \dots, r$. Если грань $\mathfrak{X}_{i_0}^{k_0}$, проходящая через точки $\alpha^1, \dots, \alpha^{N_0+1}, \alpha^{N_0+1}, \dots, \alpha^{N_0+r}$, является некоординатной гранью, то предложение доказано. Если же грань $\mathfrak{X}_{i_0}^{k_0}$ является координатной гранью многогранника $\mathfrak{X}$, то продолжая аналогичные рассуждения, через конечное число шагов ($\leq n-m-1$) получим грань $\mathfrak{X}_{i_1}^{k_1}$ с нормалью $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, t_0, \dots, t_l, \lambda_{m+l+2}, \dots, \lambda_n)$; $(t_i > \lambda_{m+i+1}$, $i=0, \dots, l$), которая будет некоординатной гранью многогранника $\mathfrak{X}$.

Этим предложение 2 доказано.

Предложение 3. Пусть многочлен $P(\xi) = \sum \gamma_s \xi^s$ с вполне правильным х.м. $\mathfrak{X}$ регулярен, λ — нормаль к некоторой грани $\mathfrak{X}_{i_1}^{k_1}$ х.м. $\mathfrak{X}$. Пусть $\{\lambda^s\}_1^\infty$ являются нормалью многогранника $\mathfrak{X}$ такие, что $\lambda^s \rightarrow \lambda$, $\rho_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. $\xi^s = \rho_s^{\lambda^s}$, $(\xi_i^s = \rho_s^{\lambda_i^s}$, $i=1, \dots, n)$. Тогда для любого числа ε , $0 < \varepsilon < 1$ существует постоянная $C = C(\varepsilon) > 0$ такая, что

$$A(\xi^s) \equiv \sum_{j \neq 0} \left(\frac{|D^s P(\xi^s)|}{1 + |P(\xi^s)|} \right)^{1/|v|} \leq C [B(\xi^s)]^{-(1-s) \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j} \equiv \\ \equiv C \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j^{s_j}|^{1/\lambda_j} \right)^{-(1-s) \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

если грань $\mathfrak{M}_i^k$ — некоординатная и

$$A(\xi^s) \leq C [B(\xi^s)]^{-(1-s) \min_{1 \leq j \leq n} \mu_j} \equiv C \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j^{s_j}|^{1/\mu_j} \right)^{-(1-s) \min_{1 \leq j \leq n} \mu_j},$$

если грань $\mathfrak{M}_i^k$ — координатная. Здесь вектор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — нормаль к некоторой некоординатной грани, отвечающий вектору λ по предложению 2.

Доказательство. Пусть сначала $\mathfrak{M}_i^k$ — некоординатная грань. Не умаляя общности можно считать, что $\lambda \in \Lambda$. В силу регулярности многочлена $P(\xi)$ при $s \rightarrow \infty$ имеем (см. [13]).

$$|P(\xi^s)| = \rho_s^{\max_{\xi \in (P)} (\lambda^s, \alpha)} |P_{m_s(\lambda)}(\tau)| (1 + o(1)),$$

где

$$\tau = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi^s / |\xi^s|, \quad \lambda^s = \lim_{s \rightarrow \infty} (\xi_1^s / |\xi^s|, \lambda^s, \dots, \xi_n^s / |\xi^s|, \lambda^n)$$

$$\tau \in R_n^0, \quad P_{m_s(\lambda)}(\tau) \neq 0.$$

Отсюда следует, что для любого числа ε , $0 < \varepsilon < 1$ существует постоянная $C_1(\varepsilon) > 0$, для которой

$$1 + |P(\xi^s)| \geq C_1(\varepsilon) \rho_s^{m_s(\lambda) - \varepsilon/2} |P_{m_s(\lambda)}(\tau)|, \quad s = 1, 2, \dots. \quad (1.6)$$

Пусть теперь v — произвольный мультииндекс ($|v| \neq 0$, $0 < \varepsilon < 1$). Легко видеть, что для некоторой постоянной $C_2(\varepsilon) > 0$

$$|D^v P(\xi^s)| |B(\xi^s)|^{|v|(1-s/2)} \leq C_2(\varepsilon) |D^v P(\xi^s)| \sum_{j=1}^n |\xi_j^{s_j}|^{\frac{(1-s/2)|v|}{\lambda_j}} \leq \\ \leq C_2(\varepsilon) \left[\sum_{\alpha} \sum_{v \leq \alpha} |\tau_\alpha| |(\xi^s)^{\alpha-v}| \right] \sum_{j=1}^n |\xi_j^{s_j}|^{\frac{(1-s/2)|v|}{\lambda_j}}.$$

Так как мономы последнего выражения имеют вид

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j^{s_1 - v_1} \dots |\xi_j^{s_j - v_j} + \frac{(1-s/2)|v|}{\lambda_j} \dots |\xi_n^{s_n - v_n}|,$$

то отсюда получим для некоторой постоянной $C_3(\varepsilon) > 0$

$$|D^v P(\xi^s)| |B(\xi^s)|^{|v|(1-s/2)} \leq C_3(\varepsilon) \sum_{\alpha} \sum_{v \leq \alpha} \sum_{j=1}^n |\xi_1^{s_1 - v_1} \dots \times$$

$$\times |\xi_j|^{n_j - \nu_j + \frac{(1 - \varepsilon/2)|\nu|}{\lambda_j}} \dots |\xi_n^{\varepsilon}|^{n - \nu_n} = C_3^{(\varepsilon)} \sum_n \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \times \\ \times \sum_{j=1}^n \rho_x^{(\lambda, \varepsilon) - (\lambda - \lambda^j, \varepsilon) - (\lambda, \nu) + (\lambda - \lambda^j, \nu) + (1 - \varepsilon/2) \left(1 - \frac{\lambda_j - \lambda^j}{\lambda_j}\right) |\nu|}$$

Поскольку по предположению $\lambda \in \Lambda$, $|\nu| - (\lambda, \nu) \leq 0$, $\lambda^s \rightarrow \lambda$ при $s \rightarrow \infty$, то отсюда следует существование постоянной $C_4(\varepsilon) > 0$ такой, что

$$|D^* P(\xi^s)| |B(\xi^s)|^{1 - (1 - \varepsilon/2)} \leq C_4(\varepsilon) \rho_x^{m_0(\lambda) + \varepsilon/2}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Из неравенств (1.6) и (1.7) имеем для некоторой постоянной $C_5(\varepsilon) > 0$

$$\sum_{\lambda \neq 0} \left(\frac{|D^* P(\xi^s)|}{1 + |P(\xi^s)|} \right)^{1/|\nu|} \leq C_5(\varepsilon) [B(\xi^s)]^{-(1 - \varepsilon)}.$$

Случай, когда грань $\mathbb{M}_i^+$ — координатная, рассматривается аналогично с надлежащими модификациями. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. Пусть многочлен $P(\xi)$ с вполне правильным х. м. $\mathbb{M}$ регулярен. Пусть $\zeta^s \in C_n$, $P(\zeta^s) = 0$, $s = 1, 2, \dots$, $|\operatorname{Re} \zeta^s| \rightarrow \infty$. Тогда для любого числа ε , $0 < \varepsilon < 1$ существуют натуральное число $k(\varepsilon)$, постоянная $C(\varepsilon)$ и векторы $\lambda^j \in \Lambda(\mathbb{M})$, $j = 1, \dots, k(\varepsilon)$, такие, что последовательность $\{\zeta^s\}_1^\infty$ можно разбить на подпоследовательности $\{\zeta^{s, j}\}_1^\infty$, $j = 1, \dots, k(\varepsilon)$ так, чтобы для всех $j = 1, \dots, k(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$1 + \|\operatorname{Im} \zeta^{s, j}, \lambda^j\| > C(\varepsilon) |\operatorname{Re} \zeta^{s, j}, \lambda^j|, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < 1$, тогда из вполне правильности многогранника $\mathbb{M}$, очевидно, следует существование $\varepsilon/4$ -сети $\{\lambda^1, \dots, \lambda^{k(\varepsilon)}\}$, $\lambda^j \in \Lambda(\mathbb{M})$, $j = 1, \dots, k(\varepsilon)$, множества $\Lambda(\mathbb{M})$. Докажем, что элементы $\varepsilon/4$ -сети $\{\lambda^j\}_1^{k(\varepsilon)}$ удовлетворяют условиям предложения 4. Пусть, наоборот, существует подпоследовательность $\{\zeta^{s, 0}\}_1^\infty$ последовательности $\{\zeta^s\}_1^\infty$ такая, что при $s \rightarrow \infty$

$$\|\operatorname{Im} \zeta^{s, 0}, \lambda^j\| |\operatorname{Re} \zeta^{s, 0}, \lambda^j|^{1 - \varepsilon} \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, k(\varepsilon). \quad (1.9)$$

Рассмотрим следующие два возможных взаимноисключающих случая: I) существует подпоследовательность $\{\zeta^{s, 0}\}$ последовательности $\{\zeta^s\}$ такая, что при $s \rightarrow \infty$ для всех $i = 1, \dots, n$, $|\operatorname{Re} \zeta_i^{s, 0}| \rightarrow \infty$, II) существуют номер i_0 , $1 \leq i_0 \leq n$ и постоянная $\sigma > 0$ такие, что

$$|\operatorname{Re} \zeta_{i_0}^{s, 0}| \leq \sigma < \infty, \quad s = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим случай I). Очевидно, не умаляя общности, можно считать, что $\operatorname{Re} \zeta_i^{s, 0} > 0$, $i = 1, \dots, n$; $s = 1, 2, \dots$.

Для простоты записи обозначим подпоследовательность $\{\zeta^{s, 0}\}$ через $\{\zeta^s\}$. Положим

$$\lambda_i^s = \frac{\log(\operatorname{Re} \zeta_i^s)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n [\log(\operatorname{Re} \zeta_j^s)]^2}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\rho_s = \exp \sqrt{\sum_{j=1}^n [\log (\operatorname{Re} \zeta_j)]^2},$$

тогда $\operatorname{Re} \zeta_s = \rho_s^{\lambda^s}$, $s=1, 2, \dots$. Так как для всех $s=1, 2, \dots$, векторы λ^s находятся на единичной сфере, то у последовательности $\{\lambda^s\}$ есть предельная точка λ^∞ и за счет, быть может, взятия подпоследовательности, можно считать, что $\lambda^s \rightarrow \lambda^\infty$ при $s \rightarrow \infty$. Из выпуклости х. м. $\mathfrak{M}$ следует, что λ^∞ является внешней нормалью к одной и только одной грани х. м. $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим следующие два возможных подслучая: I.a) λ^∞ является нормалью к некоординатной грани х. м. $\mathfrak{M}$, I.a) λ^∞ является нормалью к координатной грани х. м. $\mathfrak{M}$. По вектору λ^∞ представим многочлен $P(\xi)$ в виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\lambda^\infty)} P_{mj}(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\lambda^\infty)} \sum_{(\lambda^\infty, e) = m_j} \gamma_m \xi^e.$$

В силу регулярности многочлена $P(\xi)$ имеем (см. [13]), что существует постоянная $C_1(\varepsilon) > 0$, для которой

$$1 + |P(\operatorname{Re} \zeta^s)| \geq C_1(\varepsilon) \rho_s^{m_0(\lambda^\infty) - \varepsilon/4} |P_{m_0}(\tau)|,$$

где

$$\tau = \lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \zeta^s / |\operatorname{Re} \zeta^s|, \lambda^\infty \perp \lambda^\infty, P_{m_0}(\tau) \neq 0.$$

Из предложения 3 и леммы 2 получим, что для некоторых постоянных $C_2(\varepsilon) > 0$, $C_3(\varepsilon) > 0$ и для всех $s=1, 2, \dots$

$$1 + \|\operatorname{Im} \zeta^s, \mu\| > d(\operatorname{Re} \zeta^s) > C_2(\varepsilon) A(\operatorname{Re} \zeta^s) \geq C_3(\varepsilon) |\operatorname{Re} \zeta^s, \mu|^{1-\varepsilon/2}, \quad (1.10)$$

где $\mu = \lambda^\infty / (\min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j^\infty) \in \Lambda$. Поскольку множество $\{\lambda^1, \dots, \lambda^{k(\varepsilon)}\}$ является $\varepsilon/4$ -сетью множества Λ , то из (1.10) получим для некоторой постоянной $C_4(\varepsilon) > 0$ и некоторого вектора λ^j , $1 \leq j \leq k(\varepsilon)$

$$1 + \|\operatorname{Im} \zeta^s, \lambda^j\| > C_4(\varepsilon) |\operatorname{Re} \zeta^s, \lambda^j|^{1-\varepsilon}, \quad s=1, 2, \dots$$

Это противоречит (1.9).

Рассмотрим случай I.6). Пусть λ^∞ является нормалью к координатной грани $\mathfrak{M}_{k_1}^{\lambda_1}$. В силу предложения 2 существует некоординатная грань $\mathfrak{M}_{k_2}^{\lambda_2}$ х. м. $\mathfrak{M}$ с нормалью μ' , для которой грань $\mathfrak{M}_{k_2}^{\lambda_2}$ является подгранью и $\mu'_j = \lambda_j^\infty$, $j=1, \dots, m$; $\mu'_j \geq \lambda_j^\infty$, $j=m+1, \dots, n$. Положим $\mu = \mu' / (\min_{1 \leq j \leq n} \mu'_j) \in \Lambda$. В силу предложения 3 существуют постоянные $C_5(\varepsilon) > 0$, $C_6(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $s=1, 2, \dots$

$$1 + \|\operatorname{Im} \zeta^s, \mu\| \geq d(\operatorname{Re} \zeta^s) > C_5(\varepsilon) A(\operatorname{Re} \zeta^s) \geq C_6(\varepsilon) |\operatorname{Re} \zeta^s, \mu|^{1-\varepsilon/2}. \quad (1.11)$$

Поскольку множество $\{\lambda^1, \dots, \lambda^{k(\varepsilon)}\}$ является $\varepsilon/4$ -сетью множества Λ , то из (1.11) получим для некоторой постоянной $C_7(\varepsilon) > 0$ и некоторого вектора λ^j , $1 \leq j \leq k(\varepsilon)$

$$1 + \|\operatorname{Im} \zeta^s, \lambda^j\| > C_7(\varepsilon) |\operatorname{Re} \zeta^s, \lambda^j|^{1-\varepsilon}, \quad s=1, 2, \dots$$

Это противоречит (1.9).

Рассмотрим случай II). Пусть, для определенности, в этом случае $|\operatorname{Re} \zeta_i| \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, r < n$; $|\operatorname{Re} \zeta_j| \leq \operatorname{const} < \infty$, $i = r + 1, \dots, n$. Положим

$$\lambda_i^s = \frac{\log (\operatorname{Re} \zeta_i^s)}{\sqrt{\sum_{j=1}^r [\log (\operatorname{Re} \zeta_j^s)]^2}}, \quad i = 1, \dots, r;$$

$$\rho_s = \exp \sqrt{\sum_{j=1}^r [\log (\operatorname{Re} \zeta_j^s)]^2}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим векторы $\bar{\lambda}^s = (\lambda_1^s, \dots, \lambda_r^s, 0, \dots, 0)$, $s = 1, 2, \dots$, которые находятся на единичной сфере и следовательно у этой последовательности есть предельная точка λ^∞ . За счет взятия подпоследовательности можно считать, что $\lambda^s \rightarrow \lambda^\infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Из выпуклости х. м. $\mathfrak{M}$ следует, что λ^∞ является внешней (относительно $\mathfrak{M}$) нормалью к одной и только одной грани $\mathfrak{M}_{\lambda^\infty}^k$ х. м. $\mathfrak{M}$. Проводя аналогичные рассуждения, как при рассмотрении случая I.6), из предложений 2 и 3 получим существование постоянных $C_s(s) > 0$, $C_s(e) > 0$ и вектора $\mu \in \Lambda$ таких, что для всех $s = 1, 2, \dots$

$$1 + |\operatorname{Im} \zeta^s, \mu| \geq d(\operatorname{Re} \zeta^s) \geq C_s(s) A(\operatorname{Re} \zeta^s) \geq C_s(s) |\operatorname{Re} \zeta^s, \mu|^{1-1/2}.$$

Поскольку множество $\{\lambda^1, \dots, \lambda^{k(s)}\}$ является $3/4$ -сетью множества Δ , то отсюда получим для некоторой постоянной $C_{10}(s) > 0$ и некоторого вектора λ^j , $1 \leq j \leq k(s)$

$$1 + |\operatorname{Im} \zeta^s, \lambda^j| \geq C_{10}(s) |\operatorname{Re} \zeta^s, \lambda^j|^{1-1/2}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Это противоречит (1.14) и доказывает предложение 4.

Пусть многочлен $P(\xi) = \sum \gamma_\alpha \xi^\alpha$ с вполне правильным х. м. регулярен. Положим $N(P) = \{u(x); u(x) \in C(R_n); P(D)u(x) = 0\}$. Обозначим через $\Gamma^{(p_1, \dots, p_n)}(R_n)$ множество функций $f \in C^\infty(R_n)$ таких, что для любого компакта $K \subset R_n$ существует постоянная $C = C(K)$ такая, что для всех мультииндексов $\alpha \in Z_+^n$

$$|D^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1} a^{\rho_\alpha} \quad \forall x \in K, \quad \rho = (p_1, \dots, p_n).$$

Если в $\Gamma^{(p_1, \dots, p_n)}(R_n)$ ввести топологию, индуцированную топологией $C(R_n)$, то пространство Жевре $\Gamma^{(p_1, \dots, p_n)}(R_n)$ станет пространством Фреше.

Лемма 6. Если многочлен $P(\xi)$ с вполне правильным х. м. $\mathfrak{M}$ регулярен, то для любого числа ε , $0 < \varepsilon < 1$

$$N(P) \subset \bigcup_{i=1}^{k(\varepsilon)} \Gamma^{\lambda^i/(1-\varepsilon)}(R_n),$$

где для данного числа ε векторы λ^i ($i = 1, \dots, k(\varepsilon)$) определяются как в предложении 4.

Доказательство. В силу теоремы 3.4.1 работы [11] имеем, что $N(P)$ является линейной оболочкой всех экспоненциальных решений дифференциального уравнения $P(D)U=0$. В силу предложения 4 и теорем 4.4.1, 4.4.6 работы [11], каждое экспоненциальное решение уравнения $P(D)U=0$ принадлежит указанному в лемме множеству.

§ 2. Функциональная размерность пространства решений гиперэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть E — линейное локально-выпуклое пространство, A — ограниченное множество из E , U — окрестность нуля, $\varepsilon > 0$ любое фиксированное число. Через $M(A, \varepsilon U)$ обозначим наибольшее из чисел m таких, что $x_1, \dots, x_m \in A$, $x_i - x_j \in U$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, m$. В [3] доказано, что $M(A, 2\varepsilon U) \leq N(A, \varepsilon U)$ (определение числа $N(A, \varepsilon U)$ см. во введении).

Доказательство теоремы 1. Пусть $\lambda^0 \in \Lambda$,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^0 = \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{j=1}^n \lambda_j. \quad (2.1)$$

Для определенности предположим, что $1 = \lambda_1^0 < \lambda_2^0 \leq \dots \leq \lambda_n^0$. Пусть $h \geq 3$, положим $\omega_1 = [h^{\lambda_n^0}] + 1$, где $[a]$ — целая часть числа a . Пусть $\delta < 1$ — любое положительное число $\nu_j = (\lambda_j^0 - \delta)/\lambda_n^0$; $j = 2, \dots, n-1$; ξ_n принимает значения из множества $F = \{2, \dots, \omega_1\} = \xi_n^{\lambda_n^0/\lambda_n^0} + C_j(\xi_n)\xi_n^{l_j}$, где $|C_j(\xi_n)| \leq 1$ — непрерывные функции, $j = 2, \dots, n-1$. Легко видеть, что существуют непрерывные функции $C_j(\xi_n)$, $j = 2, \dots, n-1$, для которых ξ_j принимает значения $\{[\xi_n^{\lambda_j^0/\lambda_n^0}] + l_j\}$ при $\xi_n \in F$, где $l_j = [1, 2, \dots, [\xi_n^{1/2}]]$, $j = 2, \dots, n-1$. В силу леммы 4 для любого числа $\xi_n \geq 2$, $\xi_j = \xi_n^{\lambda_j^0/\lambda_n^0} + C_j(\xi_n)\xi_n^{l_j}$, $j = 2, \dots, n-1$ существуют (вообще говоря комплексное) число $\xi_1 = \xi_1(\xi_n, \lambda^0, C_2, \nu_2, \dots, C_{n-1}, \nu_{n-1})$ и постоянная $\kappa(\delta)$, для которых $P(\xi) = 0$ и

$$|\xi_1| = |\xi_1(\xi_n, \lambda^0, C_2, \nu_2, \dots, C_{n-1}, \nu_{n-1})| \leq \kappa(\delta) (\xi_1^{\lambda_1^0/\lambda_n^0} + 1) < 4\kappa(\delta)h = \kappa_1(\delta)h.$$

Каждому набору $(\xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ (где ξ_j принимает значение $[\xi_n^{\lambda_j^0/\lambda_n^0}] + l_j$) $j = 2, \dots, n-1$; $\xi_n \in F$) сопоставим функцию

$$U(x) = e^{\left(\sum_{j=2}^n x_j \xi_j + x_1 \xi_1(\xi_n, \lambda^0, C_2, \nu_2, \dots, C_{n-1}, \nu_{n-1}) \right)},$$

которая является решением дифференциального уравнения $P(D)U = 0$. Количество таких наборов обозначим через ω , а таким образом полученные решения через $U_1(x), \dots, U_\omega(x)$. Легко видеть, что для некоторых положительных постоянных $\kappa_2(\delta), \kappa_3(\delta), \kappa_4(\delta)$

$$\omega > \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sum_{\xi_n=2}^{\omega_1} [\xi_n^{\nu_2}] \dots [\xi_n^{\nu_{n-1}}] > \kappa_2(\delta) \sum_{\xi_n=2}^{\omega_1} \xi_n^{\sum_{j=2}^{n-1} \nu_j} >$$

$$\begin{aligned}
&\geq x_1(\delta) \int_2^{\sum_{j=2}^{n-1} \gamma_j} d\xi_n \geq x_1(\delta) \omega_1^{1 + \sum_{j=2}^{n-1} \gamma_j} > \\
&\geq x_1(\delta) h \quad \lambda_n^0 + \sum_{j=2}^{n-1} \gamma_j \lambda_n^0 \geq x_1(\delta) h \quad \lambda_n^0 + \sum_{j=2}^{n-1} \gamma_j^0 - (n-2)\delta
\end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть γ — некоторое положительное число, для которого γ^{-1} целое. Обозначим через A множество векторов $a = (a_1, \dots, a_n)$, где $a_j \gamma^{-1} = k_j$ — целые неотрицательные числа, $k_j \leq \gamma^{-1}$. Легко видеть, что число таких векторов равно γ^{-n} . Каждому такому вектору можно сопоставить функцию $W(x) = \sum_{i=1}^n a_i U_i(x)$, которая является решением дифференциального уравнения $P(D)U(x) = 0$. Число таких решений равно γ^{-n} . Введем в $N(P)$ следующие полунормы:

$$\begin{aligned}
q(U) &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} |U(0, x_2, \dots, x_n)|^2 dx_2 \dots dx_n \right]^{1/2}, \\
q_L(U) &= \max_{|x| < L} |U(x)|, \quad L=1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

с помощью которых можно в $N(P)$ задать топологию

$$U = \{U(x); U(x) \in N(P), q(U) < 1\},$$

$$V_L = \{U(x); U(x) \in N(P); q_L(U) < 1, L=1, 2, \dots\}$$

Пусть a и b — два различных вектора из A , тогда легко видеть, что

$$q\left(\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) U_i^{(x)}\right) \geq \gamma. \quad (2.3)$$

Если L — фиксированное число, то для любого вектора $a \in A$

$$\sum_{i=1}^n a_i U_i^{(x)} \in \omega e^{x_1(\delta) h L} V_L. \quad (2.4)$$

Из соотношений (2.3) и (2.4) получим, что

$$M(\omega e^{x_1(\delta) h L} V_L, \gamma U) > \gamma^{-n}. \quad (2.5)$$

Пусть $\varepsilon' > 0$, L — натуральное число. Выберем число $h \geq 3$ так, чтобы

$$h > \frac{1}{x_1(\delta) L} \log \left(\frac{4\omega}{\varepsilon'} \right).$$

Положим

$$\varepsilon = e^{-2x_1(\delta) h L}, \quad \gamma^{-1} = \left[\frac{\varepsilon' e^{-x_1(\delta) h L}}{2\varepsilon\omega} \right].$$

Поскольку при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\gamma \rightarrow 0$, то существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\gamma^{-\omega} = \left[\frac{\varepsilon' e^{-x_1(\delta) h L}}{2 \varepsilon \omega} \right]^\omega > \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/3}} \right)^\omega.$$

Отсюда получим, что

$$\begin{aligned} \log \log N(\varepsilon' V_L, \varepsilon U) &= \log \log N\left(V_L, \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} U\right) > \\ &\geq \log \log M\left(V_L, \frac{2\varepsilon}{\varepsilon'} U\right) \geq \log \log \gamma^{-\omega} \geq \log \omega + \log \log 1/\varepsilon - \log 3 > \\ &> \left(\lambda_n^0 + \sum_{j=2}^{n-1} (\lambda_j^0 - \delta) \right) \log h + \log \log 1/\varepsilon - \log(3 x_4(\delta)) = \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^0 \log \log 1/\varepsilon - (n-2) \delta \log \log 1/\varepsilon - \\ &- \left(\sum_{j=2}^{n-1} (\lambda_j^0 - \delta) + \lambda_n^0 \right) \log(2 x_1(\delta) L) - \log(3 x_4(\delta)). \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log \log N(\varepsilon' V_L, \varepsilon U)}{\log \log(1/\varepsilon)} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j^0 - (n-2) \delta.$$

Так как $\{\varepsilon' V_L\}$ является базой в $N(P)$, то

$$df N(P) \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j^0 - (n-2) \delta.$$

Откуда в силу произвольности числа $\delta > 0$ имеем

$$df N(P) > \sum_{j=1}^n \lambda_j^0. \quad (2.6)$$

Пусть $\alpha \in (P)$ такое, что $|\alpha| = \max_{\beta \in (P)} |\beta|$ и α является вершиной х. м.

УЖ. Пусть $v \in Z_n^+$, $0 \leq v_j = \alpha_j - 1$, если $\alpha_j \neq 0$ и $v_j = 0$, если $\alpha_j = 0$, $1 \leq j \leq n$. Пусть для определенности $\alpha_j \neq 0$ $j = 1, \dots, r$, $\alpha_j = 0$, $j = r+1, \dots, n$. Обозначим через T оператор, отображающий $N(P)$ в декартово произведение классов Жеврея $\Gamma^{(P)}(R_{n-1})$.

$$\begin{aligned} T: U \rightarrow & \left\{ U_1(0, x_2, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial^{v_1}}{\partial x_1^{v_1}} U(0, x_2, \dots, x_n); \dots \right. \\ & \left. \dots, U(x_1, \dots, x_{r-1}, 0, x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial^{v_r}}{\partial x_r^{v_r}} U(x_1, \dots, x_{r-1}, 0, x_{r+1}, \dots, x_n) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда для любой функции $U(x) \in N(P)$ в силу леммы 6

$$TU(x) \in \bigcup_{j=1}^{h(\alpha)} \bigcup_{l=1}^n \Gamma^{\lambda^{j,l}/(1-\varepsilon)}(R_{n-1}),$$

где $\lambda^{j,l} = (\lambda_l^j, \dots, \lambda_{l-1}^j, \lambda_{l+1}^j, \dots, \lambda_n^j)$. В силу теоремы Хольмгрена, существует обратный оператор T^{-1} и является гомоморфизмом. Используя это, получим

$$df N(P) \leq \max_{j,l} df \Gamma^{\lambda^{j,l}/(1-\varepsilon)}(R_{n-1}).$$

Теперь, в силу леммы 5 работы [7] получим, что для любого числа ε $0 < \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} df N(P) &\leq \max_{j,l} \sum_{r=1}^n \lambda_r^{j,l} / (1-\varepsilon) + 1 \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq k(\varepsilon)} \sum_{r=1}^n \lambda_r^j / (1-\varepsilon) \leq \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{r=1}^n \lambda_r / (1-\varepsilon). \end{aligned}$$

Из-за произвольности ε отсюда получаем

$$df N(P) \leq \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{j=1}^n \lambda_j.$$

Это вместе с оценкой (2.6) доказывает формулу (0.7).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $n=2$, A_n^1 — единственная одномерная $(n-1)$ -мерная P -нерегулярная грань х. м. A гиповалиптического многочлена $P(\xi)$. Пусть $\lambda^0 \in \Lambda$ — внешняя нормаль грани A_n^1 , и многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условию $A(\lambda^0)$. Тогда

$$df N(P) = 1 + 1/g, \quad (2.7)$$

где

$$g = \min \left\{ \min_{\substack{\tau \in \Sigma(P_{m_0}(\lambda^0)) \\ \tau_1 \neq 0}} \frac{\delta_0(\tau) \lambda_2^0}{\lambda_1^0}, \min_{\substack{\tau \in \Sigma(P_{m_0}(\lambda^0)) \\ \tau_2 \neq 0}} \frac{\delta_0(\tau) \lambda_1^0}{\lambda_2^0} \right\},$$

$\delta_0(\tau)$ — критическое число многочлена $P(\xi)$ в точке τ .

Доказательство. Проводя аналогичные рассуждения, как при доказательстве первой части теоремы 1, используя лемму 5, получим, что

$$df N(P) \geq 1 + 1/g. \quad (2.8)$$

В силу теоремы 4.4.1 работы [11] и леммы 3 получаем, что для любого $U(x) \in N(P)$, $Y \in R_2$ и компакта $K \subset R_2$, существует постоянная C такая, что

$$|\langle Y, D \rangle^j U(x)| \leq C^j j^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad j=0, 1, \dots; x \in K.$$

Отсюда в силу теоремы 4.4.6 работы [11] имеем, что

$$N(P) \subset \Gamma^{\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right)}(R_2).$$

Теперь, проводя аналогичные рассуждения, как при доказательстве второй части теоремы 1, получим, что

$$df N(P) \leq 1 + 1/g. \quad (2.9)$$

Оценки (2.8) и (2.9) вместе доказывают справедливость формулы 2.7). Теорема 2 доказана.

§ 3. Функциональная размерность пространства решений эллиптического уравнения с переменными коэффициентами

Пусть $b > 0$, обозначим через $E(b)$ множество m -мерных векторов с компонентами вида kb , где k — натуральное число. Обозначим через E линейную оболочку всех функций вида $e^{i\langle x, \xi \rangle}$, где $\xi \in E(b)$. Пусть область $\Omega \subset R_m$ содержит куб $\{x; x \in R_m; |x_j| \leq b\pi, j = 1, \dots, m\}$, для некоторого числа $b > 0$. Через $E(\Omega)$ будет обозначено сужение множества E на область Ω . Тогда имеет место следующая

Теорема 3. Если в $E(\Omega)$ введена топология, индуцированная из $C(\Omega)$, то $df E(\Omega) = m + 1$.

Доказательство. Неравенство $df E(\Omega) \leq m + 1$ следует из леммы 5 работы [7] и из того, что $E(\Omega) \subset \Gamma^{(1, \dots, 1)}(\Omega)$. Для доказательства того, что $df E(\Omega) \geq m + 1$ достаточно в $E(\Omega)$ ввести следующие нормы:

$$q_1(U) = \left(\frac{1}{2\pi b} \right)^{\frac{m}{2}} \left[\int_{-\pi b}^{\pi b} \dots \int_{-\pi b}^{\pi b} |U(x)|^2 dx \right]^{1/2},$$

$$q_2(U) = \max_{x \in \Omega} |U(x)|$$

и провести аналогичные рассуждения, как при доказательстве первой части теоремы 1.

Пусть $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} \gamma_\alpha(x) D^\alpha$ — линейный дифференциальный оператор с аналитическими в $\Omega_\epsilon = \{x, x \in R_n, |x| < \epsilon\}$ коэффициентами. Пусть многочлен $P(x, \xi)$ эллиптивен в Ω_ϵ , тогда $\gamma_{(m, 0, \dots, 0)}(0) \neq 0$. Поэтому, подходящим образом выбирая число $\lambda > 0$, можно считать, что оператор $P(x, 0)$ имеет вид

$$P(x, D) = D_1^m + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_1 < m}} \gamma_\alpha(x) D^\alpha.$$

Положим $N(P, \Omega_\epsilon) = \{U(x); U(x) \in C(\Omega_\epsilon), P(x, D)U = 0\}$.

Теорема 4. Если в $N(P, \Omega_\epsilon)$ введена топология, индуцированная из $C(\Omega_\epsilon)$, то $df N(P, \Omega_\epsilon) = n$.

Доказательство. Обозначим через $\Omega'_\epsilon = \Omega_\epsilon \cap \{x; x \in R_n, x_1 = 0\}$, а через E линейную оболочку множества функций вида $e^{i\langle x', \xi' \rangle}$, где $x' = \{x_2, \dots, x_n\}$, $\xi' = \{\xi_2, \dots, \xi_n\} \in E(b)$, число $b > 0$ выбрано так, что бы куб $\{x'; x' \in R_{n-1}, |x_j| \leq \pi b; j = 2, \dots, n\}$ принадлежал Ω'_ϵ . Пусть $\varphi(x') \in E$, $\psi(x) = e^{ix_1} \varphi(x')$. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$D_1^m U(x) = -(P(x, D) - D_1^m) U(x),$$

$$D_1^j (U - \psi)|_{x_1=0} = 0, j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Так как $\varphi(x') \in \Gamma^{(1, \dots, 1)}(\Omega'_i)$, то в силу определения функций $\psi(x)$ из теоремы 5.1.1 работы [11] и теоремы 3 имеем, что

$$df N(P, \Omega_i) \geq df E(\Omega'_i) = n - 1 + 1 = n. \quad (3.1)$$

В силу теоремы 7.5.1 работы [11] имеем, что для любого

$$U(x) \in N(P, \Omega_i)$$

$$\left\{ U(0, x') \frac{\partial}{\partial x_1} U(0, x'), \dots, \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}} U(0, x') \right\} \in \Gamma^{(1, \dots, 1)}(\Omega'_i).$$

Отсюда, в силу теоремы Хольмгрена, получим

$$df N(P, \Omega_i) \leq df \Gamma^{(1, \dots, 1)}(\Omega'_i).$$

Теперь используя лемму 5 работы [7], получаем

$$df N(P, \Omega_i) \leq df \Gamma^{(1, \dots, 1)}(\Omega'_i) \leq n - 1 + 1 = n. \quad (3.2)$$

Соотношения (3.1) и (3.2) вместе доказывают теорему.

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно показать, что если N — пространство решений формально гипоеллиптического в Ω оператора (см. [17], [18]) $P(x, D)$ с аналитическими в Ω коэффициентами, то $n \leq df N < \infty$.

ЕрНИИММ

Поступила 7. VII.1981

Վ. Ն. ՄԱՐԿԱՐՅԱՆ. Որոշ դասի ճիշդելիպտիկ հավասարումների լուծումների տարածության ֆունկցիոնալ չափը (ամփոփում)

Այս աշխատանքում տրված է որոշ դասի հաստատուն գործակիցներով հիպոէլիպտիկ հավասարումների լուծումների տարածության ֆունկցիոնալ չափի ճշգրիտ բանաձև: Փոփոխական գործակիցներով հավասարումների համար, մասնավորապես, ապացուցված է, որ $df N(P(x, D)) = n$, եթե $P(x, D)$ -ն էլիպտիկ դիֆերենցիալ օպերատոր է:

V. N. MARKARIAN. Functional dimension of the space of solutions of some classes hypoelliptic equations (summary)

The paper gives an exact formula for functional dimension for spaces of solutions of some classes of hypoelliptic equations with constant coefficients. In particular, for the equations with variable coefficients $df N(P(x, D)) = n$ if $P(x, D)$ is an elliptic differential operator.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Pontrjagin et L. Schnirelman. Annals of Mathematics, 33, 1932, 156—162.
2. А. Н. Колмогоров. Оценки минимального числа элементов ε -сети в различных функциональных пространствах, УМН, X, вып. 1, 1955, 192—193.
3. А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров. ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах, УМН, XIV, вып. 2 (96), 1959, 3—86.
4. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин. Обобщенные функции, вып. 4, М., 1961.
5. А. Пич. Ядерные локально-выпуклые пространства, М., «Мир», 1967.
6. S. Tanaka. The ε -entropy of some class of harmonic function, Proc., Japan—Acad, 39, № 2, 1963, 85—88.

7. Y. Komara. Die Nuklearität der Lösungsräume der Hypoelliptischen Gleichungen. *Funkcialaj Ekvacioj*, 9, 1966, 313—324.
8. Z. Zizleng. On the Functional dimension of the space of solutions of partial differential equations, *J. Diff. Equat.*, 18, № 2, 1975, 340—345.
9. В. Н. Маркарян, Г. Г. Казарян. О функциональной размерности пространства решений гиповэллиптических уравнений, *Мат. сб.*, 115 (157), № 4 (8), 1981, 614—631.
10. B. Malgrange. Existence et approximation des solutions des equations aux derivees partielles et equations the convolution, *Ann. Fours.*, VI, 1955—56, 271—355.
11. Л. Хермандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.
12. L. Cattabriga. Su una classi di polinomi ipoellittici, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 36, 1966, 285—309.
13. В. П. Михайлов. О поведении на бесконечности одного класса многочленов, *Труды МИАН*, 91, 1967, 59—81.
14. Г. Г. Казарян. Об одном семействе гиповэллиптических полиномов, *Изв. АН Арм. ССР, сер. матем.*, IX, № 3, 1974, 189—211.
15. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян. Критерии гиповэллиптичности в терминах мощности и силы операторов, *Труды МИАН*, 150, 1979, 128—142.
16. Г. Г. Казарян. О добавлении младших членов к дифференциальным полиномам, *Изв. АН Арм. ССР, сер. матем.*, IX, № 6, 1974, 473—485.
17. L. Hörmander. On the interior regularity of the solutions of PDE, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1958, 197—218.
18. B. Malgrange. Sur une classe d'operateurs differentielles hypoelliptiques, *Bull Soc. Math. France*, 58, 1957, 283—306.

УДК 517.984

Т. Н. АРУТЮНЯН

О СПЕКТРЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ

0°. В работе выделен класс дифференциальных операторов, действующих в пространстве вектор-функций, для которого указаны условия существенной самосопряженности, дискретности спектра, изучено асимптотическое распределение дискретного спектра. Весьма важным, по мнению автора, является то обстоятельство, что асимптотика функции $N(-\lambda, \lambda)$ — числа собственных значений изучаемого оператора, лежащих в интервале $(-\lambda, \lambda)$ — есть реализация следующей асимптотической формулы: при $\lambda \rightarrow \infty$

$$N(-\lambda, \lambda) \sim (2\pi)^{-n} \sum_k \text{mes} \{ (x, s): \lambda_k^2(x, s) < \lambda^2 \}, \quad (1)$$

где $\lambda_k(x, s)$ — собственные значения символа дифференциального выражения, порождающего наш оператор

При построении этих операторов и изучении их спектральных свойств существенную роль играют некоторые матрицы, являющиеся обобщением известных матриц Паули и Дирака. А именно, рассмотрим множество γ_p квадратных числовых матриц порядка p , элементы A_k которого удовлетворяют условиям

$$A_k \cdot A_j = -A_j \cdot A_k, \quad k \neq j, \quad (0.1)$$

$$A_k^2 = E^{(p)} \quad (E = E^{(p)} - \text{единичная матрица порядка } p), \quad (0.2)$$

$$A_k^* = A_k, \quad (\text{самосопряженность}). \quad (0.3)$$

В работе [1] доказано, что это множество содержит ровно $S = S(p) = 2q + 1$ элементов (матриц), где натуральное число p записано в виде $p = 2^q \cdot r$, $r = 1 \pmod{2}$, т. е. r — нечетное число. В частности, доказано, что $S(p) = S\left(\frac{p}{2}\right) + 2$ и что при нечетном p множество γ_p состоит из одного элемента (единичной матрицы). В дальнейшем, если не оговорено противное, у нас p — четное число. Относительно структуры этих матриц доказано следующее утверждение: если через A_1 и A_2 обозначить матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} E^{(\frac{p}{2})} & 0 \\ 0 & -E^{(\frac{p}{2})} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & E^{(\frac{p}{2})} \\ E^{(\frac{p}{2})} & 0 \end{pmatrix}, \quad (0.4)$$

то остальные матрицы множества γ_p определяются из рекуррентного соотношения

$$A_{l+2} = \begin{pmatrix} 0 & -iA_l^{(\frac{p}{2})} \\ iA_l^{(\frac{p}{2})} & 0 \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2, \dots, S\left(\frac{p}{2}\right), \quad (0.5)$$

где $A_l^{(\frac{p}{2})} \in \gamma_{\frac{p}{2}}$.

Заметим, что при $p=2$ множество γ_p состоит из трех матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (0.6)$$

известных под названием матриц Паули.

При $p=4$ их пять, это известные матрицы Дирака, которые легко построить по формулам (0.4) и (0.5), исходя из матриц Паули (которые, в свою очередь, строятся также, но исходя из „одномерной“ матрицы 1).

Из (0.1) — (0.5) легко получить еще несколько простых, но важных для нашего изложения, свойств матриц A_k :

$$\text{sp } A_k = 0 \quad \forall A_k \in \gamma_p, \quad (0.7)$$

$$\det \left(\sum_{k=1}^S \xi_k A_k \right) = (-1)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{k=1}^S \xi_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}, \quad \xi_k \in \mathbb{R}^1, \quad (0.8)$$

$$\left| \sum_{k=1}^S \xi_k A_k \right|^2 = p \left(\sum_{k=1}^S \xi_k^2 \right), \quad \xi_k \in \mathbb{R}^1, \quad (0.9)$$

где sp — след матрицы, а под нормой $|A|$ матрицы $A = (a_{ij})$ понимаем абсолютную норму, т. е.

$$|A|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2.$$

Собственные значения матрицы $\sum_{k=1}^S \xi_k A_k$ равны

$$-\lambda_1 = -\lambda_2 = \dots = -\lambda_{\frac{p}{2}} = \lambda_{\frac{p}{2}+1} = \dots = \lambda_p = \sqrt{\sum_{k=1}^S \xi_k^2}. \quad (0.10)$$

1°. Рассмотрим дифференциальный оператор, порожденный в гильбертовом пространстве p -компонентных вектор-функций $L_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^p)$ системой дифференциальных выражений

$$t(x, D) = \sum_{|\alpha| < m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (1.1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс,

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n},$$

а матрицы $a_{\alpha}(x)$ имеют вид

$$a_{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^S a_{\alpha k}(x) A_k, \quad (1.2)$$

где, в свою очередь, $a_{\alpha k}(x)$ — скалярные функции, а $A_k \in \gamma_p$.

Заметив, что выражение (1.1) можно записать в виде

$$t(x, D) = \sum_{k=1}^S \left(\sum_{|\alpha| < m} a_{\alpha k}(x) D^{\alpha} \right) A_k \quad (1.3)$$

и обозначив через

$$l_k(x, D) = \sum_{|\alpha| < m} a_{\alpha k}(x) D^{\alpha} \quad (1.4)$$

скалярные дифференциальные выражения, участвующие в представлении (1.3), запишем (1.1) в виде

$$t(x, D) = \sum_{k=1}^S l_k(x, D) A_k. \quad (1.5)$$

Операторы с постоянными коэффициентами вида

$$d[u] = \sum_{|\alpha| < m} \left(\sum_{k=1}^{S-1} \mu_{\alpha k} A_k \right) D^{\alpha} u$$

были впервые рассмотрены в работе [1], где они были названы операторами D -типа, видимо потому, что при $m=1$, $p=4$ и определенном выборе коэффициентов $\mu_{\alpha k}$ получается известный оператор Дирака. В [1] были изучены некоторые качественные вопросы спектра операторов D -типа четного порядка с постоянными коэффициентами в определенного вида областях.

Через T_0 обозначим оператор, порожденный выражением (1.1) на $C_0^{\infty}(R^n; C^p)$, а через T — его замыкание в $L_2(R^n; C^p)$; т. е. минимальный оператор. Обозначим через $t(x, s) = \sum_{|\alpha| < m} a_{\alpha}(x) s^{\alpha}$ символ выражения (1.1), через $t_m(x, s) = \sum_{|\alpha| = m} a_{\alpha}(x) s^{\alpha}$ — главный символ, а через

$t_0(x, s) = t_0(x) = \sum_{k=0}^S a_{0k}(x) A_k$ — символ члена без производной или так

называемый „потенциал“.

Основными результатами нашей работы являются утверждения:

а) при определенных условиях на коэффициенты оператор T самосопряжен, имеет чисто дискретный спектр и для числа $N[(-\lambda, \lambda), T]$ собственных значений оператора T , лежащих в интервале $(-\lambda, \lambda)$, имеет место асимптотическая формула

$$N[(-\lambda, \lambda), T] = \rho(\lambda) (1 + o(1)), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

где

$$\rho(\lambda) = \frac{p}{(2\pi)^n} \text{mes} \left\{ (x, s) : \frac{1}{p} (|t_m(x, s)|^2 + |t_0(x)|^2) < \lambda^2 \right\}, \quad (1.7)$$

$\text{mes } A$ — мера Лебега множества A .

в) Если оператор T порождается выражением

$$t(x, D) = \sum_{k=1}^{s-1} l_k(x, D) A_k,$$

то при тех же условиях

$$N[(0, \lambda), T] = N[(-\lambda, 0), T] = \frac{1}{2} \rho(\lambda) (1 + o(1)), \quad \lambda \rightarrow \infty; \quad (1.8)$$

с) в лемме 5.1 указано условие на функцию Грина (ядро резольвенты) оператора T , при котором имеет место асимптотическая формула

$$N[(0, \lambda), T] \sim N[(-\lambda, 0), T] \sim \frac{1}{2} \sigma(\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

где

$$\sigma(\lambda) = \frac{p}{(2\pi)^n} \text{mes} \left\{ (x, s) : \frac{1}{p} |t(x, s)|^2 < \lambda^2 \right\}, \quad (1.10)$$

учитывающая, как видно из вида $\sigma(\lambda)$, влияние всех членов выражения (1.1), в отличие от предыдущего случая, где учитывается влияние только главного члена и потенциала $t_0(x)^*$, а остальная часть (как будет видно из условия (4.7)) считается „подчиненной“. Из (0.9), (0.10) и (1.5) следует, что

$$\frac{1}{p} |t(x, s)|^2 = \lambda_k^2(x, s), \quad k = \overline{1, p},$$

где $\lambda_k(x, s)$ — собственные значения полного символа $t(x, s)$, а $p^{-1} (|t_m(x, s)|^2 + |t_0(x)|^2)$ есть квадрат собственных значений „главной“ части $t_m(x, s) + t_0(x, s)$, т. е., после этого замечания, асимптотические формулы (1.6) и (1.9) имеют вид (1), приведенный во введении.

2°. В этом пункте докажем леммы, вытекающие непосредственно из вида дифференциального выражения (1.5), порождающего наши операторы.

Наряду с оператором T рассмотрим минимальный оператор $\tilde{T}$, порожденный выражением

$$\tilde{t}(x, D) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^s l_k(x, D) A_k - l_{k_0}(x, D) A_{k_0},$$

т. е. таким же как $t(x, D)$, но в котором знак одного (произвольно-го) из скалярных выражений $l_k(x, D)$ заменен на противоположный.

Лемма 2. 1. *Оператор $\tilde{T}$ унитарно эквивалентен оператору $-T$.*

* Среди работ, в которых получены асимптотические формулы для функции $N(\lambda)$, учитывающие влияние не только главного члена и потенциала, отметим, как наиболее близкие к нашему взгляду, работы А. Г. Костюченко [7] и М. Г. Гасимова [8]. Более подробно эти вопросы освещены в обзоре М. Ш. Бирмана и М. Э. Соломина [9].

Унитарная эквивалентность устанавливается равенством (очевидно, что A_k — унитарные матрицы)

$$\bar{T} = A_{k_0}(-T)A_{k_0}.$$

В самом деле, легко видеть, что если $u \in D(T)$, то $A_{k_0}u \in D(\bar{T})$ и, наоборот, если $u \in D(\bar{T})$, то $A_{k_0}u \in D(T)$, т. е.

$$A_{k_0}D(T) \subset D(\bar{T}) \subset A_{k_0}D(T),$$

т. е. $D(\bar{T}) = A_{k_0}D(T)$. Пусть теперь $u \in D(T)$, тогда, используя свойства матриц A_k , получаем

$$\begin{aligned} \bar{T}A_{k_0}u &= \left(\sum_{k \neq k_0} l_k A_k - l_{k_0} A_{k_0} \right) A_{k_0}u = \\ &= -A_{k_0} \left(\sum_{k \neq k_0} l_k A_k + l_{k_0} A_{k_0} \right) u = -A_{k_0} T u. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Если λ есть точка спектра оператора T то $-\lambda$ есть точка спектра оператора $\bar{T}$.

Следствие 2. Если в (1.5) хотя бы одно из выражений $l_k(x, D) = 0$, т. е. T порожден выражением $t(x, D) = \sum_{k=1}^{s-1} l_k A_k$, то спектр оператора T симметричен относительно начала координат.

Следствие 1 очевидно, следствие 2 — также, поскольку в этом случае $\bar{T} = T$.

3°. В этом пункте приводятся некоторые достаточные условия самосопряженности и дискретности спектра минимального оператора T . В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты $a_{\alpha k}(x)$ — действительнзначные функции, $\overline{a_{\alpha k}}(x) = a_{\alpha k}(x)$, и что T — симметрический эллиптический оператор. Условие эллиптичности оператора T записывается следующим образом (см. (0.8)):

$$\begin{aligned} \det(t_m(x, s)) &= \det \left(\sum_{k=1}^s \left(\sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha k}(x) s^\alpha \right) A_k \right) = \\ &= \det \left(\sum_{k=1}^s \xi_k A_k \right) = (-1)^{p/2} \left(\sum_{k=1}^s \xi_k^2 \right)^{p/2} \neq 0, \end{aligned}$$

при $s \neq 0$,

где мы обозначили $\xi_k = \xi_k(x, s) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha k}(x) s^\alpha$. Очевидно, что это условие эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^s \xi_k^2 = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha k}(x) a_{\beta k}(x) s^{\alpha+\beta} \right) \neq 0, \quad s \neq 0. \quad (3.1)$$

Следующая лемма, которая не используется в дальнейшем, имеет самостоятельный интерес.

Лемма 3.1. Если симметрический оператор T порожден выражением вида $t(x, D) = \sum_{k=1}^{S-1} l_k(x, D) A_k$, то индексы дефекта оператора T равны между собой

Для доказательства леммы достаточно заметить, что матрица A_k , не участвующая в выражении $t(x, D)$, устанавливает взаимно однозначное унитарное соответствие между дефектными подпространствами оператора T , сохраняющее размерность. В самом деле, обозначим через $\mathfrak{M}_{\pm 1}$ дефектные подпространства оператора T , и пусть $v \in \mathfrak{M}_1$, т. е. $(v, (T - iE)g) = 0 \quad \forall g \in D(T)$. Тогда для $u = A_k v$ имеем $(u, (T + iE)f) = (A_k v, (T + iE)f) = (v, A_k (T + iE)f) = -(v, (T - iE)A_k f) = 0$, поскольку здесь из $f \in D(T)$ следует $A_k f \in D(T)$. Таким образом, $A_k \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_{-1}$. Совершенно аналогично получаем, что $\mathfrak{M}_{-1} \subset A_k \mathfrak{M}_1$, т. е. $\mathfrak{M}_{-1} = A_k \mathfrak{M}_1$. Если теперь $v_1, v_2, \dots, v_m$ ($m \leq \infty$) образуют ортонормированный базис $\mathfrak{M}_1$, то $A_k v_1, A_k v_2, \dots, A_k v_m$ образуют ортонормированный базис $\mathfrak{M}_{-1}$, поскольку $(A_k v_i, A_k v_j) = (v_i, v_j)$ в силу свойств (0.2) и (0.3). Лемма доказана.

Теорема 3.1. Пусть коэффициенты $a_{\alpha k}(x) \in C^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$, и пусть существует положительная функция $g(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, такая, что

$$|\text{grad } g^m(x)| \leq C g^m(x), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

для любого $M > 1$ существует постоянная $C(M)$ такая, что при $|x| < \tau_1$, $|y| < \tau_1$, $1 < \tau_1^{-1} \cdot \tau_2 < M$

$$\frac{g(x)}{g(y)} < C(M);$$

$$\sum_{k=1}^S a_{\alpha k}^2(x) \leq C_1 g^{2m}(x), \quad |\alpha| = \overline{0}, m;$$

$$\sum_{k=1}^S [D^\beta a_{\alpha k}(x)]^2 = o(g^{2m}(x)), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

где $|\alpha| = \overline{0}, m$, $|\beta| = \overline{1}, |\alpha|$, $|\beta| = 1$ при $|\alpha| = 0$;

$$\sum_{k=1}^S l_k^2(x, s) > \varepsilon [g^m(x) (1 + |s|^m)]^2,$$

где $x, s \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon = \text{const} > 0$. Тогда эллиптический оператор T самосопряжен и имеет чисто дискретный спектр, точнее, его резольвента вполне непрерывна.

Теорема 3.1 есть следствие теорем 2.2 и 3.2 работы [2], если взять в условиях этих теорем $h(x) = g(x)$, $P_1(x) = |x|$ при $|x| > 1$ и достаточно гладкой при $|x| \leq 1$ и если учесть, что коэффициенты нашего оператора имеют вид (1.2) (с соответствующим применением свойств (0.8) и (0.9) матриц A_k).

4°. В этом пункте мы предполагаем самосопряженность оператора T (не обязательно при условиях теоремы 3.1), не предполагая

при этом дискретности его спектра, ибо условия теоремы 4.1, при которых будет получена асимптотическая формула (1.6), уже достаточны для дискретности его спектра.

Рассмотрим квадрат T^2 самосопряженного оператора T . Используя свойства матриц A_k , получаем

$$\begin{aligned} T^2 u &= \sum_{|a| < m} a_a(x) D^a \left(\sum_{|\beta| < m} a_\beta(x) D^\beta u \right) = \\ &= \sum_{|a|, |\beta| < m} \left(\sum_{k=1}^S a_{ak}(x) A_k \right) \left(D^a \sum_{j=1}^S a_{\beta j}(x) A_j D^\beta u \right) = \\ &= \sum_{|a|+|\beta|=m} \left(\sum_{k=1}^S a_{ak}(x) A_k \right) \left(\sum_{j=1}^S a_{\beta j}(x) A_j \right) D^{a+\beta} u + P_1(x, D) u + \\ &+ \sum_{|a|=|\beta|=0} \left(\sum_{k=1}^S a_{ak}(x) A_k \right) \left(\sum_{j=1}^S a_{oj}(x) A_j \right) u = \\ &= \sum_{|a|+|\beta|=m} \left(\sum_{k=1}^S a_{ak}(x) a_{\beta k}(x) \right) E D^{a+\beta} u + P_1(x, D) u + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^S a_{ok}^2(x) \right) E u = P_0(x, D) u + P_1(x, D) u + Q(x) u, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$P_0(x, D) = p_0(x, D) \cdot E = \left[\sum_{|a|+|\beta|=m} \left(\sum_{k=1}^S a_{ak}(x) a_{\beta k}(x) D^{a+\beta} \right) \right] E, \quad (4.2)$$

$$Q(x) = \left(\sum_{k=0}^S a_{ok}^2(x) \right) E = q(x) E \quad (q(x) \geq 0), \quad (4.3)$$

а $P_1(x, D)$ — оператор порядка $\leq 2m-1$, матрицы-коэффициенты которого обозначим через $b_a(x)$, т. е. пусть

$$P_1(x, D) = \sum_{|a| < 2m-1} b_a(x) D^a.$$

Таким образом

$$T^2 = (p_0(x, D) + q(x)) E + P_1(x, D). \quad (4.4)$$

Вводя соответствующие символы, потребуем выполнение условий

$$p_0(x, s) \text{ ограничен по } x, \quad (4.5)$$

$$p_0(x, s) \geq \delta |s|^{2m}, \quad (4.6)$$

$$|b_a(x)| \leq c_a [q(x)]^{\frac{2m-|a|}{2m}}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad c_a = \text{const}, \quad (4.7)$$

$$|p_0(x, s) - p_0(y, s)| \leq C |x-y|^\gamma |s|^{2m}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \text{при } |x-y| \leq 1. \quad (4.8)$$

Остальные условия на функцию $q(x) = \sum_{k=1}^S a_{ok}^2(x)$:

$$|q(x) - q(y)| \leq B q^a(y) |x-y|, \quad a < 1 + \frac{1}{2m}, \quad \text{при } |x-y| \leq 1, \quad (4.9)$$

$$q(x) \leq Cq(y) \quad \text{при } |x-y| \leq 1, \quad (4.10)$$

$$q(x) \leq B_1 \exp \{c^* |x-y|^{1/2m}(y)\} \quad \text{при } |x-y| > 1, \\ c^* - \text{постоянная, зависящая от } p_0(x, s), \quad (4.11)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{q^l(x)} < \infty \quad \text{при некотором } l > 0 \quad (4.12)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-cq(x)t} dx = O(1) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)t} dx \quad \text{при всяком } c > 0 \quad (t > 0). \quad (4.13)$$

Обозначим еще через

$$\Phi(\lambda) = \frac{p}{(2\pi)^n} \int_{q(x) < \lambda} \text{mes} \{s: p_0(x, s) + q(x) < \lambda\} q(x).$$

Поскольку у нас

$$p_0(x, s) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} \left(\sum_{k=1}^S a_{\alpha k}(x) a_{\beta k}(x) \right) s^{\alpha+\beta} = \sum_{k=1}^S \xi_k^2(x, s) \geq 0,$$

где $\xi_k = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha k}(x) s^\alpha$, то из

$$q(x) \leq p_0(x, s) + q(x) < \lambda$$

следует, что

$$\int_{q(x) < \lambda} \text{mes} \{s: p_0(x, s) + q(x) < \lambda\} dx = \text{mes} \{(x, s): p_0(x, s) + q(x) < \lambda\},$$

т. е.

$$\Phi(\lambda) = \frac{p}{(2\pi)^n} \text{mes} \{(x, s): p_0(x, s) + q(x) < \lambda\}.$$

Заметив еще, что из свойства (0.9) матриц A_k следуют равенства

$$p_0(x, s) = \frac{1}{p} |t(x, s)|^2, \quad q(x) = \frac{1}{p} |t_0(x)|^2,$$

получаем

$$\rho(\lambda) = \Phi(\lambda^2). \quad (4.14)$$

Из результатов работ [3], [4] (где рассмотрены более общие, чем T^2 , положительные операторы) следует, что при условиях (4.5)–(4.13) оператор T^2 имеет чисто дискретный спектр, а при дополнительном тауберовом условии

$$\lambda \Phi'(\lambda) < a_0 \Phi(\lambda), \quad a_0 > 0 \quad (4.15)$$

имеет место асимптотическая формула

$$N[(0, \lambda), T^2] \sim \Phi(\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Воспользовавшись теперь очевидным соотношением

$$N[(-\lambda, \lambda), T] = N[(0, \lambda^2), T^2]$$

и равенством (4.14) мы можем сформулировать утверждение.

Теорема 4.1. При условиях (4.5) — (4.13), (4.15), спектр самосопряженного оператора T чисто дискретен и для функции $N[(-\lambda, \lambda), T]$ имеет место асимптотическая формула

$$N[(-\lambda, \lambda), T] \sim \rho(\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

В частности, если оператор T порожден выражением вида

$$t(x, D) = \sum_{k=1}^{S-1} l_k(x, D) A_k,$$

то

$$N[(-\lambda, 0), T] = N[(0, \lambda), T] \sim \frac{1}{2} \rho(\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Вторая часть теоремы вытекает из следствия 2.2.

5°. В этом пункте мы получим асимптотическую формулу (1.9). Пусть оператор T самосопряжен и имеет чисто дискретный спектр. Тогда известно, что между матрицей-функцией Грина (т. е. ядром резольвенты) $G(x, \xi, \lambda)$ и функцией $N(\lambda, T)$ оператора T имеет место соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^n} \text{sp} \frac{\partial^m}{\partial z^m} G(x, x, z) dx = m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(\lambda, T)}{(\lambda - z)^{m+1}} \quad (5.1)$$

при тех m , для которых интеграл слева сходится. Допустим, что такое m существует. Здесь через $\text{sp} A$ мы обозначаем след матрицы A , а

$$N(\lambda, T) = \begin{cases} N[(0, \lambda), T], & \lambda > 0 \\ -N[(\lambda, 0), T], & \lambda < 0. \end{cases}$$

Через $g(x, \xi, \lambda)$ обозначим матрицу-функцию Грина оператора с „замороженными“ коэффициентами $t(\xi, D_x)$, точнее, матричное решение уравнения

$$(t(\xi, D_x) - \lambda E) g(x, \xi, \lambda) = \delta(x - \xi) \cdot E, \quad (5.2)$$

принадлежащее L_2 по переменной x , т. е.

$$g_{ij}(x, \xi, \lambda) \in L_2(\mathbb{R}^n) \text{ по } x, \quad i, j = 1, 2, \dots, p.$$

Определим функцию $\tau(\lambda)$ на всей оси следующим образом: $\varphi(\lambda) = \frac{1}{2} \sigma(\lambda)$ при $\lambda \geq 0$ и нечетная, т. е. $\tau(-\lambda) = -\varphi(\lambda) = -\frac{1}{2} \sigma(\lambda)$. Пусть, кроме того, $\tau(\lambda)$ удовлетворяет следующему (тауберовому) условию: $\forall C > 1$ существуют константы γ и N , $m < \gamma < m + 1$, $N \geq 0$ такие, что для всех λ, μ , $|\lambda| > |\mu| > N$ (λ и μ одного знака)

$$\frac{\tau(\lambda)}{\tau(\mu)} \leq C \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^\gamma. \quad (5.3)$$

Лемма 5.1. Пусть при некотором нечетном m

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{sp} \frac{\partial^m}{\partial z^m} G(x, x, z) dx \sim \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{sp} \frac{\partial^m}{\partial z^m} g(x, x, z) dx, \quad (5.4)$$

при $|z| \rightarrow \infty$ по некоторому действительному лучу, и пусть функция $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет условию (5.3). Тогда

$$N[(\lambda, 0), T], N[(0, \lambda), T] \sim \varphi(\lambda) \quad (5.5)$$

соответственно при $\lambda \rightarrow -\infty$ и $\lambda \rightarrow \infty$.

Для доказательства леммы нам достаточно установить равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{sp} \frac{\partial^m}{\partial z^m} g(x, x, z) dx = m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(\lambda)}{(\lambda - z)^{m+1}}, \quad (5.6)$$

поскольку тогда из (5.1) и (5.4) следует асимптотическое равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(\lambda, T)}{(\lambda - z)^{m+1}} \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(\lambda)}{(\lambda - z)^{m+1}}, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

откуда, воспользовавшись двусторонней тауберовой теоремой типа М. В. Келдыша, установленной Я. Т. Султанаевым в [5], получим

$$N(\lambda, T) \sim \varphi(\lambda) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \pm \infty,$$

т. е. утверждение нашей леммы.

Итак, перейдем к доказательству равенства (5.6). Применяя прямое, а затем обратное преобразования Фурье к обеим сторонам уравнения (5.2), находим явный вид матрицы $g(x, \xi, z)$

$$g(x, \xi, z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (t(x, s) - zE)^{-1} e^{i\langle x, s - \xi \rangle} ds. \quad (5.7)$$

Используя свойства матриц A_k , находим матрицу

$$\begin{aligned} (t(x, s) - zE)^{-1} &= \left(\sum_{k=1}^s l_k(x, s) A_k - zE \right)^{-1} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^s l_k(x, s) A_k + zE}{\sum_{k=1}^s l_k^2(x, s) - z^2} = \frac{t(x, s) + zE}{\frac{1}{p} |t(x, s)|^2 - z^2}. \end{aligned}$$

Для m -ой производной матрицы получаем выражение

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} (t(x, s) - zE)^{-1} = \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{\sum_{k=1}^s l_k(x, s) A_k}{\frac{1}{p} |t(x, s)|^2 - z^2} + \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{z \cdot E}{\frac{1}{p} |t(x, s)|^2 - z^2}.$$

Поскольку $\operatorname{sp} A_k = 0$ для любого A_k , то

$$\operatorname{sp} \frac{\partial^m}{\partial z^m} (t(x, s) - zE)^{-1} = p \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{z}{\frac{1}{p} |t(x, s)|^2 - z^2}. \quad (5.8)$$

Вспоминая определение (1.10) функции (меры) $\sigma(\lambda)$ из (5.7) и (5.8) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{sp} \frac{\partial^m}{\partial z^m} g(x, x, z) dx &= \frac{p}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{z}{p |t(x, s)|^2 - z^2} ds dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{z}{\lambda^2 - z^2} d\sigma(\lambda). \end{aligned} \quad (5.9)$$

С другой стороны, поскольку $m+1$ — четное число,

$$\begin{aligned} m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(\lambda)}{(\lambda - z)^{m+1}} &= -\frac{m!}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{d\sigma(\lambda)}{(\lambda - z)^{m+1}} + \frac{m!}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{(\lambda - z)^{m+1}} = \\ &= \frac{m!}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(\lambda + z)^{m+1}} + \frac{1}{(\lambda - z)^{m+1}} \right] d\sigma(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\lambda + z} \right) d\sigma(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{z}{\lambda^2 - z^2} d\sigma(\lambda). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Из (5.9) и (5.10) следует (5.6) и лемма доказана.

Условия на коэффициенты оператора T , при которых имеет место асимптотическое равенство (5.4), будут предметом отдельного исследования. Заметим только, что в некоторых частных случаях такие условия получены. Например, для операторов типа Дирака

$$L = \sum_{k=1}^n \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} A_k + \sum_{k=n+1}^S p_k(x) A_k,$$

при $n=1, 2, 3$ такие условия получены в работе автора [6]. Там же получены асимптотические формулы для функций $N_{\pm}(\lambda, L)$, которые являются частным случаем формулы (1.9). В самом деле, согласно (1.10) для оператора L получаем

$$N[(0, \lambda), L] \sim N[(-\lambda, 0), L] \sim \frac{p}{2(2\pi)^n} \operatorname{mes} \left\{ (x, s): \frac{1}{p} |t(x, s)|^2 < \lambda^2 \right\},$$

где

$$t(x, s) = \sum_{k=1}^n s_k A_k + \sum_{k=n+1}^S p_k(x) A_k$$

и соответственно

$$|t(x, s)|^2 = p \left(\sum_{k=1}^n s_k^2 + \sum_{k=n+1}^S p_k^2(x) \right) = p(|s|^2 + a^2(x)),$$

т. е.

$$N_{\pm}(\lambda, L) \sim \frac{p}{2(2\pi)^n} \operatorname{mes} \{(x, s): |s|^2 + a^2(x) < \lambda^2\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda^2 - |s|^2 - a^2(x))_+ ds dx = \\
&= \frac{p}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|s|^2 < [\lambda^2 - a^2(x)]_+} ds \right) dx.
\end{aligned}$$

Заметив, что внутренний интеграл есть объем n -мерного шара радиуса $[\lambda^2 - a^2(x)]_+^{1/2}$, окончательно получаем

$$N_{\pm}(\lambda, L) \sim \frac{p \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int_{\mathbb{R}^n} [\lambda^2 - a^2(x)]_+^{n/2} dx, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (5.11)$$

откуда при $n = 1, 2, 3$ следует ранее полученные в [6] формулы для главного члена асимптотики функций $N_{\pm}(\lambda, L)$.

Заметим также, что формула (1.6) пригодна для исследования асимптотики спектра скалярных дифференциальных операторов и, в частности, для полуограниченных операторов, т. е. для них верна теорема 4.1. Здесь надо только заметить, что единственной „матрицей“ A_k является число 1 (см. пункт 0°), а функция $N(\lambda) = N[(-\infty, \lambda)]$ при больших λ совпадает с функцией $N[(-\lambda, \lambda)] = N_-(\lambda) + N_+(\lambda)$. Например, для самосопряженного полуограниченного оператора Шредингера с дискретным спектром

$$P = -\Delta + q(x)$$

получается хорошо известная формула

$$N(\lambda, P) \sim \frac{\pi^{n/2}}{(2\pi)^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda - q(x))_+^{n/2} dx, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что неравенства $q^2(x) < \lambda$ и $q(x) < \lambda$ равносильны при $q(x) \geq 0$.

Замечание. Легко видеть, что все результаты настоящей работы, относящиеся к операторам в пространстве четномерных вектор-функций (т. е. p — четно и множество матриц A_k не ограничивается единичной матрицей) не зависит от того, в каком порядке записаны матрицы A_k в представлении (1.5), т. е. изученные спектральные свойства операторов указанного класса инварианты относительно перестановок матриц A_k в (1.5).

Ереванский государственный университет

Поступила 21.VII.1981

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ. Որոշ դասի դիֆերենցիալ օպերատորների սպեկտրի մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում արևանաքված է դիֆերենցիալ օպերատորների մի դաս, որոնց համար տրված են ինքնահամալուծության և սպեկտրի դիսկրետության պայմանները։ Հետազոտված է $(-\lambda, \lambda)$ հատվածում բնկած, $N(-\lambda, \lambda)$ սեփական արժեքների թվի ֆունկցիայի ասիմպտոտիկ վարքը, երբ $\lambda \rightarrow \infty$ ։ Բերված են պայմաններ, երբ դրական և բացասական սեփական արժեքների բաշխման ֆունկցիաները ունեն համարժեք ասիմպտոտիկաներ։

T. N. HARUTIUNIAN. *On the spectrum of a class of differential operators (summary)*

The paper describes a class of differential operators, for which conditions of self-adjointness and discreteness of spectrum are found. The asymptotic ($\lambda \rightarrow \infty$) behaviour of function $N(-\lambda, \lambda)$ (the number of eigenvalues in $(-\lambda, \lambda)$) is considered. Conditions are stated which ensure that the asymptotic behaviour of distribution functions of positive and negative eigenvalues are asymptotically equivalent.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernd Stöckert. Über das Spektrum einer Klasse von Vektordifferentialoperatoren, *Publ. math.*, 17, №1—4, 1970, 41—55.
2. А. Г. Брусенцев. О спектре несамосопряженных эллиптических систем произвольного порядка, *Дифф. уравнения*, XII, № 6, 1976, 1040—1051.
3. А. Г. Косюченко. Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, 168, № 1, 1966, 21—24.
4. Ю. Н. Суларев. О распределении собственных значений сингулярного оператора, *Дифф. уравнения*, XIV, № 9, 1968, 1676—1682.
5. Я. Т. Султанов. Двусторонняя тауберова теорема для отношений, *Изв. ВУЗ-ов*, № 1, 1974.
6. Т. Н. Арутюнян. О спектре операторов типа Дирака, *ДАН Арм. ССР*, XIV, № 3, 1977.
7. А. Г. Косюченко. Асимптотическое поведение спектральной функции самосопряженных эллиптических операторов, в книге «Четвертая летняя математическая школа», Киев, 1968, 42—117.
8. М. Г. Гасымов. О распределении собственных значений самосопряженного дифференциального оператора, *ДАН СССР*, 186, № 4, 1969, 753—756.
9. М. Ш. Бирман, М. Э. Соломяк. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений, в сб. «Математический анализ», том 14, *Итоги науки и техники*, ВИНТИ, 1977.

УДК 517.548
517.956

А. А. ВАГАРШАКЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей статье рассматривается линейная система из двух уравнений первого порядка

$$u_x = a_{11}v_x + a_{12}v_y + b_{11}u + b_{12}v + c_1, \quad (1)$$

$$-u_y = a_{21}v_x + a_{22}v_y + b_{21}u + b_{22}v + c_2$$

относительно неизвестных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$. Предположим, что все коэффициенты системы (1) равномерно ограничены, измеримы и, кроме этого

$$a_{12} \geq \delta > 0, \quad 4a_{11}a_{21} - (a_{11} + a_{22})^2 > \delta > 0, \quad (2)$$

где δ — некоторая константа. Простыми вычислениями можно показать (см. [2]), что каждая система вида (1), коэффициенты которой удовлетворяют условиям (2), может быть записана в следующей комплексной форме:

$$w_z = \mu w_z + \bar{\partial} \bar{w}_z + \alpha w + \beta \bar{w} + \gamma, \quad z = x + iy, \quad (3)$$

где $\mu(z), \dots, \gamma(z)$ — комплексные измеримые функции, удовлетворяющие неравенству вида

$$|\mu(z)| + |\bar{\partial}(z)| \leq k < 1,$$

а функции α, β, γ равномерно ограничены.

Мы будем исследовать следующую задачу. Пусть E — некоторое множество, лежащее на действительной оси. Требуется найти условия на множество E , при которых два непрерывных вплоть до границы решения уравнения (3), совпадающие на множестве E , тождественно равны.

Заметим, что в случае, когда все коэффициенты уравнения (3) равны нулю, мы приходим к теореме единственности для аналитических функций. Хорошо известно, что в этом случае для единственности необходима и достаточна положительность лебеговой меры множества E . Как мы увидим ниже таков же ответ в том случае, когда $\mu \equiv \bar{\partial} \equiv 0$ (см. [6], стр. 158).

В настоящей статье исследуется общий случай приведенной задачи единственности решений уравнений (3). Получено условие на множество E , зависящее от числа k , обеспечивающее единственность.

1°. В настоящей статье мы существенно будем опираться на следующую теорему Л. Берса и Л. Ниренберга [1] (см. [2]). Пусть $w(z)$

является решением равномерно эллиптического ($|\mu| + |\vartheta| \leq k < 1$) уравнения (3) в верхней полуплоскости. Тогда $w(z)$ допускает представление

$$w(z) = e^{s(z)} f(\chi(z)) + s_0(z),$$

где $s(z)$ и $s_0(z)$ непрерывны при $\operatorname{Im} z \geq 0$ и вещественны при $\operatorname{Im} z = 0$; $\xi = \chi(z)$ определяет гомеоморфизм замкнутой верхней полуплоскости на себя и является решением уравнения Бельтрами

$$\bar{\chi}_z = \bar{\mu} \chi_z, \quad (4)$$

где $|\mu| \leq k < 1$, а функция $f(\xi)$ аналитична при $\operatorname{Im} \xi > 0$.

Если $\gamma \equiv 0$, то теорема справедлива при $s_0 \equiv 0$. Если $\mu \equiv \vartheta \equiv 0$, то теорема справедлива при $\chi(z) \equiv z$.

Из последнего замечания сразу следует, что в случае $\mu \equiv \vartheta \equiv 0$ для единственности необходимо и достаточно, чтобы лебегова мера E была больше нуля.

Для исследования единственности в общем случае нам понадобятся некоторые результаты о квазиконформных отображениях. Пусть $\xi = \chi(z)$ — гомеоморфизм замкнутой верхней полуплоскости на себя, удовлетворяющий уравнению (4). Обозначим через $h(t)$ функцию

$$h(t) = \chi(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Известно (см. [3], стр. 62), что функция $h(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{M} \leq \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leq M, \quad (5)$$

где

$$M = M(k) = \frac{e^{\frac{1+k}{1-k}}}{16} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\frac{(2n-1)(1+k)}{1-k}}} {1 + e^{-\frac{2n(1+k)}{1-k}}} \right)^8. \quad (6)$$

Пусть $h(t)$ — монотонная функция, удовлетворяющая неравенствам (5). Тогда (см. [3], стр. 69) существует гомеоморфное отображение верхней полуплоскости на себя такое, что для него удовлетворяется уравнение (4), где $|\tilde{\mu}(z)| \leq \frac{M^2 - 1}{M^2 + 1}$.

Приведем некоторые обозначения, которые будут применяться в дальнейшем. Через Δ мы обозначим интервал на действительной оси, а длину Δ — через $|\Delta|$. Пусть $E \subset (-\infty, \infty)$ — некоторое множество. Рассмотрим все покрытия E счетным набором интервалов $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ и положим

$$M_{\sigma}(E) \inf \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\Delta_j|^{\sigma} \right),$$

где infimum берется по всем покрытиям E , а $0 < \sigma < 1$ (см. [4]).

Следующая лемма в несколько иной форме содержится в работе автора [5].

Лемма. Пусть $h(x)$ — возрастающая функция, удовлетворяющая неравенствам (5), а μ_h — мера Стильтьеса, порожденная этой функцией. Если для замкнутого множества E существует интервал Δ такой, что

$$M_*(\Delta \setminus E) < 4^{-\sigma} M_*(\Delta),$$

где $2^\sigma = \frac{M+1}{M}$, то $\mu_h(E) > 0$.

Доказательство. Докажем некоторые неравенства для функции $h(x)$, которые непосредственно следуют из (5). Пусть x и δ — положительные числа, причем $\delta < x$. Тогда

$$h(x+\delta) - h(x) \leq M(h(x) - h(x-\delta)).$$

Так как $h(0) \leq h(x-\delta)$, то

$$h(x+\delta) - h(x) \leq M(h(x) - h(0)).$$

Если $3\delta < x$, то

$$h(x+\delta) - h(x-\delta) \leq M(h(x-\delta) - h(x-3\delta))$$

или

$$\begin{aligned} h(0) < h(x-3\delta) &\leq \frac{(M+1)h(x-\delta) - h(x+\delta)}{M} \leq \\ &\leq \frac{(M+1)^2 h(x) - (2M+1)h(x+\delta)}{M^2} \leq \\ &\leq \frac{M^2 h(x) - (2M+1)(h(x+\delta) - h(x))}{M^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $3\delta < x$ имеет место неравенство

$$h(x+\delta) - h(x) \leq \frac{M^2}{2M+1} (h(x) - h(0)).$$

В общем случае, если для некоторого натурального n имеет место неравенство $(2^n - 1)\delta < x$, то

$$h(x+\delta) - h(x) \leq \frac{M^n}{(M+1)^n - M^n} (h(x) - h(0)). \quad (7)$$

Действительно, пусть $(2^n - 1)\delta < x$ и $1 \leq k < n$. Из неравенства (5), где вместо x написано $x+\delta-2^k\delta$, а вместо t , $2^k\delta$, следует

$$h(x+\delta) - h(x+\delta-2^k\delta) \leq M(h(x+\delta-2^k\delta) - h(x+\delta-2^{k+1}\delta)).$$

Повторяя

$$h(x+\delta-2^{k+1}\delta) \leq \frac{1}{M} ((M+1)h(x+\delta-2^k\delta) - h(x+\delta)). \quad (8)$$

Последовательно применяя неравенство (8) для $k=n-1, \dots, 1$ получим

$$\begin{aligned} h(0) &\leq h(x+\delta-2^n\delta) \leq \frac{1}{M} ((M+1)h(x+\delta-2^{n-1}\delta) - h(x+\delta)) \leq \\ &\leq \frac{1}{M} \left(\frac{M+1}{M} ((M+1)h(x+\delta-2^{n-2}\delta) - h(x+\delta)) - h(x+\delta) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{M^n} \left((M+1)^n h(x+\delta) - 2^{n-2} \delta - (2M+1) h(x+\delta) \right) \leq \dots \leq \\
&\leq \frac{1}{M^n} \left((M+1)^n h(x) - ((M+1)^n - M^n) h(x+\delta) \right) = \\
&= \frac{1}{M^n} \left(M^n h(x) - ((M+1)^n - M^n) (h(x+\delta) - h(x)) \right).
\end{aligned}$$

Полученное неравенство легко переписать в форме (7). Аналогичными рассуждениями можно доказать, что если $(2^n - 1)\delta < x$, то

$$h(\delta) - h(0) \leq \frac{M^n}{(M+1)^n - M^n} (h(x+\delta) - h(x)). \quad (9)$$

Пусть Δ_1 и Δ_2 — два интервала, которые не пересекаются и имеют общую граничную точку. Из полученных нами неравенств (7) и (9) следует, что

$$\mu_h(\Delta_1) \leq \frac{M^n}{(M+1)^n - M^n} \mu_h(\Delta_2), \quad (10)$$

если $(2^n - 1)|\Delta_1| \leq |\Delta_2|$. В частности, неравенство (10) имеет место при $n = \left\lceil \log_2 \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2|}{|\Delta_1|} \right\rceil$, где $[a]$ — целая часть числа a . Поэтому

$$\mu_h(\Delta_1) \leq \frac{\mu_h(\Delta_2)}{\left(\frac{M+1}{M} \right)^{\left\lceil \log_2 \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2|}{|\Delta_1|} \right\rceil} - 1}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^\sigma} \left(\frac{|\Delta_1 \cup \Delta_2|}{|\Delta_1|} \right)^\sigma \mu_h(\Delta_1) &\leq 2^{\sigma \left(\log_2 \frac{|\Delta_1 \cup \Delta_2|}{|\Delta_1|} - 1 \right)} \mu_h(\Delta_1) \leq \\
&\leq \left(\frac{M+1}{M} \right)^{\left\lceil \log_2 \frac{|\Delta_1 \cup \Delta_2|}{|\Delta_1|} \right\rceil} \mu_h(\Delta_1) \leq \mu_h(\Delta_1 \cup \Delta_2).
\end{aligned}$$

Следовательно

$$\mu_h(\Delta_1) \leq 2^\sigma \left(\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_1 \cup \Delta_2|} \right)^\sigma \mu_h(\Delta_1 \cup \Delta_2). \quad (11)$$

Рассмотрим множество $\Delta \setminus E$. Из условия леммы следует, что существует семейство интервалов $\{\Delta_j\}_{j=1}^\infty$, которые покрывают $\Delta \setminus E$ и имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^\infty |\Delta_j|^2 < 4^{-\sigma} |\Delta|^2.$$

Не теряя общности можно считать, что $\Delta_j \subseteq \Delta$, $j=1, 2, \dots$. Через Δ_j обозначим интервал наибольшей длины, содержащийся в $\Delta \setminus \Delta_j$. Заметим, что $|\Delta| \leq 2(|\Delta_j| + |\Delta_j'|)$. Из неравенства (11) следует

$$\begin{aligned}\mu_h(\Delta \setminus E) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_h(\Delta_j) \leq 2^\sigma \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|\Delta_j|}{|\Delta_j \cup \Delta'_j|} \right)^\sigma \mu_h(\Delta_j \cup \Delta'_j) \leq \\ &< 4^\sigma \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\Delta_j|^\sigma \right) |\Delta|^{-\sigma} \mu_h(\Delta).\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\left(1 - 4^\sigma |\Delta|^{-\sigma} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\Delta_j|^\sigma \right) \right) \mu_h(\Delta \setminus E) \leq 4^\sigma |\Delta|^{-\sigma} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\Delta_j|^\sigma \right) \mu_h(E).$$

Следовательно, $\mu_h(E) > 0$, так как в противном случае $\mu_h(\Delta \setminus E) = 0$ и поэтому $\mu_h(\Delta) = 0$. Лемма доказана.

2°. В этом параграфе мы докажем теорему о единственности решения уравнения эллиптического типа.

Теорема. Пусть $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — непрерывные функции в замкнутой верхней полуплоскости, удовлетворяющие уравнению

$$w_z = \mu w_z + \theta \bar{w}_z + \alpha w + \beta \bar{w} + \gamma, \quad \text{Im } z > 0,$$

где $\mu(z), \dots, \gamma(z)$ — комплексные измеримые функции, удовлетворяющие неравенству вида

$$|\mu(z)| + |\theta(z)| \leq k < 1,$$

где $k = \text{const}$, α, β, γ — равномерно ограниченные функции. Пусть $E \subset (-\infty, \infty)$ — замкнутое множество, для которого существует такой интервал Δ , что

$$M_\sigma(\Delta \setminus E) < \frac{1}{4^\sigma} M_\sigma(\Delta),$$

где $2^\sigma = \frac{M+1}{M}$, а $M = M(k)$ определяется формулой (6). Тогда если

$$w_1(z) = w_2(z) \text{ при } z \in E, \text{ то } w_1(z) \equiv w_2(z).$$

Доказательство. Заметим, что $w(z) = w_1 - w_2$ удовлетворяет уравнению

$$w_z = \mu w_z + \theta \bar{w}_z + \alpha w + \beta \bar{w}$$

и обращается в нуль на множестве E . В силу теоремы Л. Берса и Л. Ниренберга, приведенной в начале настоящей статьи, $w(z)$ допускает представление

$$w(z) = f(\chi(z)) e^{s(z)}.$$

Следовательно, аналитическая в верхней полуплоскости функция обращается в нуль на множестве $F = \{\xi; \text{существует } z \in E \text{ такое, что } \chi(z) = \xi\}$. В силу леммы F имеет положительную лабегову меру. Поэтому $f(\xi) \equiv 0$ или $w(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Пользуясь случаем привношу благодарность В. П. Хавину за обсуждение результатов статьи.

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Էլիպտիկան արդի հավասարումների լուծումների միակության մասին (ամփոփում)

Այս հոդվածում հետազոտվում են հետևյալ հավասարումների

$$w_z = \mu w_z + \bar{\theta} \bar{w}_z + \alpha w + \beta \bar{w} + \gamma, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

լուծումների միակության եզրային բազմությունները, որտեղ $|\mu(z)| + |\theta(z)| < k < 1$, իսկ α, β, γ -ն սահմանափակ ֆունկցիաներ են: Ստացված է k թվից կախված պայման $E \subset (-\infty, \infty)$ բազմության վրա, որը ապահովում է լուծման միակությունը:

A. A. VAGARSHAKIAN. *On uniqueness of the solution of the equations of elliptic type (summary)*

In this paper the boundary sets of solution uniqueness for the equation

$$w_z = \mu w_z + \bar{\theta} \bar{w}_z + \alpha w + \beta \bar{w} + \gamma, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

are considered, where $|\mu(z)| + |\theta(z)| < k < 1$ and α, β, γ are bounded functions.

A condition depending on k on the set $E \subset (-\infty, \infty)$, which provides the uniqueness of solution is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Bers, L. Nirenberg. On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications, *Atti del Convegno internazionale sulle Equazioni alle derivate parziali*, Trieste, 1954, 111—140.
2. Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. Уравнения с частными производными, Изд. «Мир», М., 1966.
3. Л. Альфорс. Лекции по квазиконформным отображениям, Изд. «Мир», М., 1969.
4. Л. Карлесон. Избранные проблемы теории исключительных множеств, Изд. «Мир», М., 1971.
5. А. Вазаршакян. Теорема единственности для квазиконформных отображений, *ДАН Арм. ССР*, 72, № 3, 1981, 144—150.
6. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

УДК 517.55

И. А. ДЖВАРШЕЙШВИЛИ

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В БИЦИЛИНДРЕ

§ 1. Предварительные сведения

Через $\mathbb{C}$ будем обозначать пространство комплексных чисел, $\mathbb{R}$ — пространство действительных чисел. Пусть

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \{Z = (z_1, z_2); z_i \in \mathbb{C}, i=1, 2\}, \quad \mathbb{R}^2 = \{r = (r_1, r_2); r_i \in \mathbb{R}, i=1, 2\}.$$

Далее

$$U_j^2 = \{Z = (z_1, z_2); z_j \in \mathbb{C}, |z_j| < r_j, r_j \in \mathbb{R}, j=1, 2, r = (r_1, r_2)\},$$

$$T_j^2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2); \omega_j \in \mathbb{C}, |\omega_j| = r_j, r_j \in \mathbb{R}, j=1, 2, r = (r_1, r_2)\},$$

$$U^2 = U_1^2, \quad T^2 = T_1^2, \quad 1 = (1, 1),$$

$$dm_2(\omega) = [2\pi]^{-2} d\theta_1, d\theta_2,$$

где $\omega \in T^2$, $\omega_j = e^{i\theta_j}$, $j=1, 2$.

Если $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}$ и $Z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, то $rZ = (r_1 z_1, r_2 z_2)$.

Ядром Пуассона $P_R(Z, \omega)$, $Z \in U^2$, $\omega \in T^2$, $z_j = r_j e^{i\theta_j}$ и $\omega_j = e^{i\varphi_j}$, $j=1, 2$, называется произведение

$$P_R(Z, \omega) = P_{R_1}(r_1, \theta_1 - \varphi_1) \cdot P_{R_2}(r_2, \theta_2 - \varphi_2),$$

здесь $R = (R_1, R_2)$, $0 < r_j < R_j$, $j=1, 2$, а

$$P_{R_j}(r_j, \theta_j - \varphi_j) = \frac{R_j^2 - r_j^2}{R_j^2 - 2R_j r_j \cos(\theta_j - \varphi_j) + r_j^2}$$

— обычное ядро Пуассона.

Заметим, что

$$P(Z, \omega) > 0, \quad \int_{T^2} P(Z, \omega) dm_2(\omega) = 1.$$

Треугольной окрестностью точки $Z = (r_1 e^{ix_1}, r_2 e^{ix_2})$ относительно T_R^2 назовем множество

$$\Omega(Z, \rho, \theta) = \Delta(r_1 e^{ix_1}, \rho_1, \theta_1) \times \Delta(r_2 e^{ix_2}, \rho_2, \theta_2),$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, а множество

$$\Delta(re^{i\alpha}, \rho_1, \theta_1) = \left\{ z = re^{i\alpha} + is e^{i(\alpha + \Psi + \pi)}, \right.$$

$$\left. 0 < s < \rho_1 < \cos \frac{\pi}{2} \theta_1, |\Psi| < \frac{\pi}{2} \theta_1, \theta_1 \in (0, 1) \right\}.$$

Символом $Z = (r_1 e^{i\alpha_1}, r_2 e^{i\alpha_2}) \rightarrow t \in T^2$ мы обозначим стремление Z к t таким образом, что

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1-r_1}{1-r_2} < \lambda, \quad \lambda > 1$$

и будем называть λ -пределом.

Обозначим через L двумерный сегмент. L будем называть λ -регулярным ($\lambda > 1$ — данное число), если отношение длины его непараллельных сторон находится между $1/\lambda$ и λ .

Пусть функция F определена в области U^2 . Функция F имеет в точке $\omega \in T^2$ λ -некасательный предел, если найдутся числа $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ и $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ такие, что существует предел

$$\lim_{\substack{Z \rightarrow \omega(\omega, \rho, \theta) \\ \lambda \rightarrow \infty}} F(Z).$$

Скажем, что аналитическая функция f в U^2 принадлежит классу H^p , $p > 0$, если интеграл

$$\int_{T^2} |f(r_1 e^{i\alpha_1}, r_2 e^{i\alpha_2})|^p dm_2(\omega)$$

ограничен для $r_1 < 1$, $r_2 < 1$. Функция f , аналитическая в U^2 , принадлежит классу N , если

$$\int_{T^2} \ln^+ |f(r_1 e^{i\alpha_1}, r_2 e^{i\alpha_2})| dm_2(\omega)$$

ограничен для $r_1 < 1$, $r_2 < 1$.

В 1934 г. Зигмунд ([9], [3], стр. 476) установил, что для ограниченной аналитической функции f , определенной в U^2 , справедлива теорема типа Фату, то есть в этом случае у f существуют почти всюду на T^2 некасательные пределы.

Им же ([10], [3], стр. 476) в 1949 году было дано обобщение предыдущего результата в следующем направлении: если f — аналитическая функция в U^2 принадлежит классу H^p , то f имеет почти всюду на T^2 некасательные пределы. Далее в 1950 году Кальдероном ([11], [3], стр. 478) был установлен следующий результат: если функция u бигармонична и если для каждой точки из множества $E \subset T^2$ существует треугольная окрестность, в которой u ограничена, то u имеет предел по некасательным путям почти всюду на E . А для функции класса N существование уже λ -некасательных пределов установили Кальдерон и Зигмунд ([12], [3], стр. 483) также в 1950 году. С другой стороны, существуют примеры аналитических в U^2 функций, у которых почти всюду на T^2 существуют λ -некасательные пределы, а сама функция не принадлежит классу N .

Поэтому представляет интерес расширение классов H^p и N с сохранением основного свойства функций данных классов, существование почти всюду некасательных и λ -некасательных пределов. Введем следующие определения.

Определение 1. Скажем, что аналитическая в U^2 функция f принадлежит классу $GH^{\delta}(U^2)$, если почти для каждой точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2}) \in T^2$ существуют: последовательность

$$r_k = (r_{1k}, r_{2k}), \quad \frac{2}{3} < \frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}} < 1, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad j = 1, 2, \quad 0 < r_{j1} < \dots \\ \dots < r_{jk} < \dots < 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_{jk} = 1, \quad j = 1, 2$$

и числа $N = N(f, x)$, $C = C(f)$ такие, что

$$(a) \quad \lim_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \iint_L |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})|^{\delta} d\alpha d\beta = N(\omega),$$

где $(x_1, x_2) \in L$, L — λ -регулярный двумерный сегмент;

$$(b) \quad \iint_{T^2} |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})|^{\delta} d\alpha d\beta \leq \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad \delta > 0.$$

Определение 2. Скажем, что аналитическая в U^2 функция f принадлежит классу $GN(U^2)$, если почти для каждой точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2}) \in T^2$ существуют: последовательность

$$r_k = (r_{1k}, r_{2k}), \quad \frac{2}{3} < \frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}} < 1, \quad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad 0 < r_{j1} < \dots \\ \dots < r_{jk} < \dots < 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_{jk} = 1, \quad j = 1, 2$$

и числа $A = A(\omega, f)$, $C = C(f)$ такие, что

$$(a') \quad \lim_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \iint_L \ln^+ |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta = A(\omega) < \infty,$$

где $(x_1, x_2) \in L$, L — λ -регулярный двумерный сегмент;

$$(b') \quad \iint_{T^2} \ln^+ |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta \leq \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

§ 2. Существование угловых граничных значений

Прежде чем перейти к изложению основного результата этого параграфа сформулируем следующую лемму.

Лемма 2.2. Пусть дана двойная последовательность

$$R_k = (r_{1k}, r_{2k}), \quad k = \overline{1, \infty}, \quad 0 < r_{j1} < \dots < r_{jk} < \dots < 1, \quad j = 1, 2,$$

$$\frac{2}{3} < \frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}} < 1, \quad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, \infty} \quad \text{и} \quad r_{jk} \uparrow 1 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Далее $\Omega(R_k, \rho_k, \theta)$ — треугольная окрестность относительно $T_{R_k}^2$

где $\rho_k = (\rho_{1k}, \rho_{2k})$ и $\rho_{jk} = (1-r_{jk})$, $j = 1, 2$, $k = \overline{1, \infty}$ и θ_j — фиксиро-

важное число из $(0,1)$. Тогда существует треугольная окрестность $\Omega(1, \rho_0, \theta_0)$ точки $1 = (1,1)$ относительно T^2 такая, что

$$\Omega_0(1, \rho_0, \theta_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega(R_k, \rho_k, \theta).$$

Основной целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.2. Пусть f — аналитическая функция в U^2 . Если в каждой точке $\omega \in E$, $E \subset T^2$ и $\text{mes}_2 E > 0$ (где $\text{mes}_2 E$ — плоская мера Лебега) выполнены условия (а') и (в') определения 2, то почти всюду на множестве E функция f имеет некасательный λ -предел.

Доказательство. В силу того, что функция $\ln^+ |f|$ субгармоническая (см. [1], стр. 44) и в силу одного неравенства из [1], стр. 44 имеем

$$\ln^+ |f(Z)| \leq \int_{T^2} P_R(Z, \omega) \ln^+ |f(R\omega)| dm_2(\omega), \quad (2.3)$$

где $Z = (r_1 e^{i\alpha}, r_2 e^{i\beta})$, $R = (R_1, R_2)$ и $r_j < R_j$, $j = 1, 2$. Пусть в точке $\omega_k = (e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ выполнено условие (а') определения 2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $k > N$ и для $|\Pi| < 1/N = \eta$ (Π — двумерный λ -регулярный сегмент и $|\Pi|$ — площадь этого сегмента, причем $(\varphi, \psi) \in \Pi$) имеем

$$\frac{1}{|\Pi|} \int_{\Pi} \ln^+ |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta \leq A(\omega_0) + \varepsilon. \quad (2.4)$$

Введем функцию $\Phi(r_1 e^{i\alpha_1}, r_2 e^{i\alpha_2}) = \ln^+ |f(r_{1k} e^{i\alpha_1}, r_{2k} e^{i\alpha_2})|$, при $\rho_j = r_{jk}$

$j = 1, 2$, $k = 1, \infty$ и $(x_1, x_2) \in \Pi_\eta$, где $\Pi_\eta = [\varphi - \eta, \varphi + \eta; \psi - \eta, \psi + \eta]$

— двумерный сегмент, а в остальных точках $\Phi(z_1, z_2) = 0$. Пусть теперь число N выбрано так, что для точки $Z = (r_1 e^{i\alpha}, r_2 e^{i\beta})$ из (2.3) при $k > N$ имеем $r_1 < r_{1k}$ и $r_2 < r_{2k}$, $R_k = (r_{1k}, r_{2k})$. Используя выше введенную функцию Φ , разобьем в выражении (2.3) интеграл на два интеграла. Получим

$$\begin{aligned} \ln^+ |f(Z)| &< \int_{\Pi_\eta} P_{R_k}(Z, \omega) \Phi(R_k, \omega) dm_2(\omega) + \\ &+ \int_{T^2 \setminus \Pi_\eta} P_{R_k}(Z, \omega) \ln^+ |f(R_k(\omega))| dm_2(\omega) = J_1(Z) + J_2(Z). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Как следует из неравенства (26) леммы 5 (см. [2], стр. 94) и неравенства (2.4), имеем

$$\sup J_1(Z) \leq C(A(\omega_0) + \varepsilon), \quad (2.6)$$

при этом $\sup$ берется по $Z = (r_1 e^{i\alpha}, r_2 e^{i\beta}) \in \Omega(R_k, \omega_0, \rho, \theta)$ и $\frac{1}{\lambda} < \frac{1-r_1}{1-r_2} < \lambda$, причем $k > N$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_j \in (0,1)$ фиксировано, а кон-

станта C не зависит от ε , k и точки ω_0 . Пусть $\rho_k = (\rho_{1k}, \rho_{2k}) = (1 - r_{1k}, 1 - r_{2k})$. Заметим, что для $Z = (r_1 e^{ix}, r_2 e^{iy}) \in \Omega(R_k \omega_0, \rho_k, \theta)$ имеем

$$\operatorname{tg} |x - \varphi| \leq \frac{\rho_{1k} \sin \theta_1}{r_{1k} - \rho_{1k} \cos \theta_1} = x_{1k}, \quad \operatorname{tg} |y - \psi| \leq \frac{\rho_{2k} \sin \theta_2}{r_{2k} - \rho_{2k} \cos \theta_2} = x_{2k},$$

где $\omega_0 = (e^{i\varphi}, e^{i\psi})$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ и $\rho_k = (\rho_{1k}, \rho_{2k})$, $R_k = (r_{1k}, r_{2k})$. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{jk} = 0$, $j = 1, 2$, то для $\eta = 1/N$ существует такой номер $N_0 > N$, что при $k > N_0$ будем иметь

$$(x, y) \in \left(\varphi - \frac{\eta}{2}, \varphi + \frac{\eta}{2}; \psi - \frac{\eta}{2}, \psi + \frac{\eta}{2} \right). \quad (2.7)$$

Пусть $\omega \in T^2 \setminus \Pi_\eta$. Тогда в силу (2.7) для $Z \in \Omega(R_k \omega_0, \rho_k, \theta)$ и $k > N_0$ имеем

$$P_{R_k}(Z, \omega) \leq C \frac{(r_{1k} - r_1)(r_{2k} - r_2)}{\eta^4}, \quad (2.8)$$

где $C > 0$ и не зависит от k и Z .

Так как функция f удовлетворяет условию (в'), то из (2.8) для $Z \in \Omega(R_k \omega_0, \rho_k, \theta)$ имеем

$$|f_2(Z)| \leq C \frac{(r_{1k} - r_1)(r_{2k} - r_2)}{\eta^4 (1 - r_{1k})(1 - r_{2k})} \leq C \frac{\rho_{1k} \rho_{2k} \eta^{-4}}{(1 - r_{1k})(1 - r_{2k})} = C \eta^{-4}, \quad (2.9)$$

где C не зависит от k и Z . Следовательно, из соотношений (2.5) (2.6) и (2.9) для $Z = (r_1 e^{ix}, r_2 e^{iy}) \in \Omega(R_k \omega_0, \rho_k, \theta) = \Omega_k$ справедливо неравенство

$$\sup_{Z \in \Omega_k} \ln^+ |f(Z)| < C_1, \quad (2.10)$$

где C_1 не зависит от k и $\frac{1}{\lambda} < \frac{1 - r_1}{1 - r_2} < \lambda$. Теперь в силу леммы 2.1, существует треугольная окрестность точки $\omega_0 = (e^{i\varphi}, e^{i\psi})$, $\Omega_0 = \Omega(\omega_0, \theta_0)$ такая, что $\Omega_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$.

Отсюда и из (2.10) непосредственно получаем $\sup \ln^+ |f(Z)| < C$ или $\sup |f(Z)| < e^C$, где $\sup$ берется по $Z = (r_1 e^{ix}, r_2 e^{iy}) \in \Omega_0$ и $\frac{1}{\lambda} < \frac{1 - r_1}{1 - r_2} < \lambda$, а константа C может зависеть только от точки ω_0 . Следовательно, на основании теоремы (4.13) из [3], стр. 478 заключаем, что функция f имеет почти всюду на E некасательные λ -пределы, и теорема доказана.

Следствие 2.11. Пусть f принадлежит классу $GH(U^3)$, тогда почти всюду на T^2 у функции f существуют некасательные λ -пределы.

Замечание 2.12. Утверждения типа (2.2) и (2.11) справедливы и для функций класса $GH^0(U^3)$.

В связи с полученными результатами возникают следующие вопросы:

I) Если отбросить условие (а'), (а) определения 2 (1), останется ли верным следствие 2.11?

II) Если условие (в'), (в) заменить на условие

$$\iint_{T^2} \ln^+ |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta \geq \frac{C}{(1-r_{1k})^{1+\eta} (1-r_{2k})^{1+\eta}}$$

для любой $\{r_k\}$, $\eta, \eta > 0$, остается ли верным следствие 2.11?

В [4] были построены функции, которые дают отрицательный ответ на поставленные вопросы (I) и (II) для одномерного случая. Пусть этими функциями являются $f_I(z)$ и $f_{II}(z)$. Тогда на поставленные вопросы (I) и (II) дадут отрицательный ответ функции

$$F_I(Z) = f_I(z_1) f_I(z_2), F_{II}(Z) = f_{II}(z_1) f_{II}(z_2),$$

где $Z = (z_1, z_2) \in U^2$.

Следующая теорема представляет обобщение теоремы 1.5.1. из [5] на случай двух переменных.

Теорема 2.13. Пусть функция $f(Z)$ аналитична в U^2 и для каждой точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2}) \in E$, $E \subset T^2$, $\text{mes}_2 E > 0$ существуют: последовательность $r_k = r_k(\omega) = (r_{1k}, r_{2k})$, $0 < r_{11} < \dots < r_{1k} < \dots < 1$,

$$\frac{2}{3} < \frac{1-r_{j/k+1}}{1-r_{jk}} < 1, \quad j=1, 2, k=\overline{1, \infty}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_{jk} = 1$$

и число C такие, что

$$(i) \quad \lim_{|L| \rightarrow 0} \frac{1}{|L|} \iint_L |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})|^2 d\alpha d\beta = 0,$$

L — двумерный λ -регулярный сегмент,

$$(ii) \quad \iint_{T^2} |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})|^2 d\alpha d\beta < \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}, \quad k=\overline{1, \infty},$$

тогда $f(Z) \equiv 0$ для $z \in U^2$.

§ 3. Обобщение теоремы Хинчина и Островского на случай бицилиндра

В этом параграфе мы докажем теорему, аналогичную теореме Хинчина и Островского, для класса $GN(U^2)$.

Теорема 3.1. Пусть дана последовательность $\{f_n\}$ функций, аналитических в бицилиндре U^2 и удовлетворяющих условиям:

I. Для почти каждой точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2}) \in T^2$ существуют: последовательность $r_k = r_k(\omega, f) = (r_{1k}, r_{2k})$, не зависящая от n , причем

$$0 < r_{11} < \dots < r_{1k} < \dots < 1, \quad \frac{2}{3} < \frac{1-r_{j/k+1}}{1-r_{jk}} < 1, \quad j=1, 2, k=\overline{1, \infty},$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} r_{jk} = 1$, и константа C (также не зависящая от n) такие, что

$$(a) \quad \lim_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \int_L \int_L \ln^+ |f_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta \leq A(\omega) < \infty,$$

$n = \overline{1, \infty}$, L — λ -регулярный двумерный сегмент и $(x_1, x_2) \in L$.

$$(b) \quad \int_{T^2} \ln^+ |f_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta \leq \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})},$$

$$k = \overline{1, \infty}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

2. Последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится в точках множества $E \subset T^2$, $\text{mes}_2 E > 0$.

Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри U^2 к функции класса $GN(U^2)$.

Доказательство. Пусть $F_R(Z) = f(RZ)$, $R = (R_1, R_2)$, $|R_j| < 1$, $j = 1, 2$ и $Z = (r_1 e^{i\alpha}, r_2 e^{i\beta}) \in U^2$. Тогда а в силу одного неравенства из [1], стр. 39 имеем

$$\begin{aligned} \ln^+ |F_R(Z)| &\leq \int_{T^2} P(Z, \omega) \ln^+ |F_R(\omega)| dm_2(\omega) \leq \\ &\leq \frac{C}{(1-r_1)(1-r_2)} \int_{T^2} \ln^+ |F_R(\omega)| dm_2(\omega). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пусть в точке $\omega_1 \in T^2$ выполняется условие (а) теоремы. Заменим R в неравенстве (3.2) на r_k , где r_k взято из условия теоремы, причем пусть $r_{jk-1} < r_j < r_{jk}$, $j = 1, 2$. Тогда из (3.2) и условия (в) теоремы имеем

$$\ln^+ |f(r_k Z)| \leq \frac{C}{(1-r_1)(1-r_2)(1-r_{1k})(1-r_{2k})}. \quad (3.3)$$

Обозначим $W = r_k Z$ и $W = (\rho_1 e^{i\alpha}, \rho_2 e^{i\beta})$. Тогда

$$r_{jk-1}^2 < \rho_j < r_{jk}^2, \quad j = 1, 2 \text{ и } 1 - r_{jk-1}^2 > 1 - \rho_j > 1 - r_{jk}^2, \quad j = 1, 2.$$

В силу ограничений, наложенных теоремой на последовательность r_k , имеем

$$1 - \rho_j < C(1 - r_{jk-1}). \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) имеем

$$\ln^+ |f(W)| < \frac{C}{(1-\rho_1)^2(1-\rho_2)^2}, \quad (3.5)$$

где $W = (\rho_1 e^{i\alpha}, \rho_2 e^{i\beta})$. Применим неравенство (3.5) к функциям $f_n(Z)$, $Z \in U^2$, получим

$$|f_n(Z)| < \exp \frac{C}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2}, \quad (3.6)$$

где $Z = (r_1 e^{i\alpha}, r_2 e^{i\beta})$. Из оценки (3.6) следует, что последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно ограничена внутри U^2 . Допустим, что последовательность $\{f_n\}$ не сходится в U^2 . Тогда из нее можно выделить две подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$ и $\{f_{n'_k}\}$, $k = \overline{1, \infty}$, сходящиеся в

U^2 к различным аналитическим функциям. Следовательно, разность $f_{n_k}(Z) - f_{n_k}(Z) \rightarrow \varphi(Z)$. С другой стороны, в силу условия теоремы $f_{n_k}(\omega) - f_{n_k}(\omega) \rightarrow 0$ на множестве $E \subset T^2$, $\text{mes}_2 E > 0$. Кроме того так как

$$\begin{aligned} \ln^+ |\varphi_k(Z)| &= \ln^+ |f_{n_k}(Z) - f_{n_k}(Z)| < \\ &\leq \ln^+ |f_{n_k}(Z)| + \ln^+ |f_{n_k}(Z)| + \ln 2, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \int_L \ln^+ |\varphi_l(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta &\leq \\ &\leq \lim_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \int_L \ln^+ |f_{n_k}(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta + \\ &+ \overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \int_L \ln^+ |f_{n_k}(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta + \ln 2, \end{aligned}$$

где L — λ -регулярный двумерный сегмент и $\omega_1 \in L$. В силу условия теоремы каждый из пределов ограничен числом $A(\omega_1)$, то есть

$$\overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \int_L \ln^+ |\varphi_e(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta \leq 2A(\omega_1) + \ln 2. \quad (3.7)$$

Аналогично показывается, что

$$\iint_{T^2} \ln^+ |\varphi_e(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta \leq \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}. \quad (3.8)$$

Из (3.7), (3.8) и теоремы Фату ([6], стр. 133) заключаем, что $\varphi \in GN(U^2)$. В силу теоремы 2.12 заключаем, что у функции φ почти всюду на T^2 существуют некасательные λ -пределы, и $\varphi(\omega) = 0$, когда $\omega \in E$, $E \subset T^2$, $\text{mes}_2 E > 0$. Пользуясь теперь замечанием из [3], стр. 483 заключаем, что $\varphi(Z) \equiv 0$. Значит, последовательность $\{f_n\}$ сходится всюду в U^2 и равномерно внутри U^2 . Теорема доказана.

§ 4. Характеристические свойства граничных значений функций классов $GN(U^2)$ и $GH^2(U^2)$

В этом параграфе охарактеризуем измеримые функции двух переменных, которые могут быть предельными значениями функций класса $GN(U^2)$ или $GH^2(U^2)$, $\delta > 0$.

Теорема 4.1. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы измеримая функция $\varphi(\omega)$, определенная на T^2 , почти всюду на T^2 совпадала с некасательным λ -пределом $f(\omega)$ некоторой функции $f(Z)$ класса $GN(U^2)$, является существование последовательности многочленов $\{P_n\}$ таких, что*

1. $\{P_n(\omega)\}$ почти всюду на T^2 сходится к $\varphi(\omega)$,

2. почти для каждой точки $\omega \in T^2$ существуют $r_k = r_k(\omega) = (r_{1k}, r_{2k})$, $0 < r_{j1} < r_{j2} < \dots < r_{jk} < \dots < 1$, $\frac{2}{3} < \frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}} < 1$, $j = 1, 2$, $k = \overline{1, \infty}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_{jk} = 1$ и константа C такие, что

$$(a) \quad \overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \left| \frac{1}{|L|} \int_L \ln^+ |P_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta \right| = M(\omega) < \infty,$$

где L — λ -регулярный двумерный сегмент и

$$(6) \quad \overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \iint_L \ln^+ |P_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta < \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}.$$

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть $f(\omega)$, $\omega \in T^2$ — некасательные λ -пределы функции f класса $GN(U^2)$, тогда для почти каждой точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2})$ существуют: последовательность $r_k = r_k(\omega) = (r_{1k}, r_{2k})$, $0 < r_{j1} < \dots < r_{jk} < \dots < 1$, удовлетворяющая условиям теоремы и константы $C = C(f)$ и $M(\omega)$, такие что

$$\overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \iint_L \ln^+ |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta = M(\omega) < \infty, \quad (4.2)$$

где L — λ -регулярный сегмент и $(x_1, x_2) \in L$

$$\iint_L \ln^+ |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta < \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}. \quad (4.3)$$

Пусть $\{p_k\}$, $p_k = (p_{1k}, p_{2k})$ — последовательность такая, что $0 < p_{j1} < \dots < p_{jk} < \dots < 1$, $\lambda^{-1} < \frac{1-p_{1k}}{1-p_{2k}} < \lambda$, $\lambda > 1$, λ — фиксированное число, $j = 1, 2$, $k = \overline{1, \infty}$ и $p_{jk} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим последовательность функций

$$F_n(Z) = f(p_n Z). \quad (4.4)$$

Функция $F_n(Z)$ аналитична для $Z \in \tilde{U}^2$. Причем U^2 является областью Рунге (см. [7], стр. 28). Поэтому для $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, найдется многочлен $P_n(Z)$ такой, что

$$|F_n(Z) - P_n(Z)| < \varepsilon_n, \quad Z \in U^2, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (4.5)$$

Так как $f(p_n \omega) \xrightarrow{\lambda} f(\omega)$ почти для всех ω , то последовательность $P_n(\omega)$ почти для всех $\omega \in T^2$ сходится к $f(\omega)$. Пусть теперь для точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2})$ имеет место условие (4.2). Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \iint_L \ln^+ |P_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta = \\ & = \overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \iint_L \ln^+ [|P_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta}) - f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| + \end{aligned}$$

$$+ f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta \leq \overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \iint_L \ln^+ |P_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta}) - f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta + \ln 2. \quad (4.6)$$

Из (4.4) и (4.5) следует, что

$$\overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \iint_L \ln^+ |P_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta}) - f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta < \varepsilon_n C, \quad (4.7)$$

где L — λ -регулярный сегмент и $(x_1, x_2) \in L$. Далее в силу (4.2), (4.6) и (4.7) имеем

$$\overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \iint_L \ln^+ |P_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta < A(\omega) + \varepsilon_n C + \ln 2,$$

а поэтому

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \iint_L \ln^+ |P_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta < A(\omega) + \ln 2.$$

Аналогично показывается, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \iint_{T^1} \ln^+ |P_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| d\alpha d\beta < \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}.$$

Достаточность немедленно следует из теоремы 3.1.

Для функций класса $GH^1(U^2)$ имеет место следующая

Теорема 4.8. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы измеримая функция $\varphi(\omega)$, определенная на множестве E , $E \subset T^2$, $\text{mes}_2 E > 0$, почти всюду на E совпадала с некасательными λ -пределами $f(\omega)$ некоторой функции класса $f \in GH^1(U^2)$, является существование последовательности многочленов $\{P_n\}$ таких, что*

1. $\{P_n(\omega)\}$ почти всюду на T^2 сходится к $\varphi(\omega)$,

2. почти для каждой точки $\omega \in T^2$ существуют $r_k = r_k(\omega) = (r_{1k}, r_{2k})$, $0 < r_{1k} < \dots < r_{jk} < \dots < 1$, $\frac{2}{3} < \frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}} < 1$, $j=1, 2$, $k = \overline{1, \infty}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_{jk} = 1$ и константа C такие, что

$$(a) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\substack{|L| \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{|L|} \iint_L |P_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})|^2 d\alpha d\beta = A(\omega) < \infty,$$

где L — λ -регулярный двумерный сегмент и

$$(b) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \iint_{T^2} |P_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})|^2 d\alpha d\beta < \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}.$$

Основные результаты этой работы были анонсированы в статье [8].

Ի. Ա. ԶՎԱՐՇԵՆՇՎԻԼԻ. Բիզանուս անալիտիկ ֆունկցիաների մի դասի եզրային հատկությունների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում մտցված են երկզանուս սրտված անալիտիկ $GN(U^2)$ և $GH^{\delta}(U^2)$ ֆունկցիաները, որոնք նախա ընդհանրացում են N և H^{δ} , $\delta > 0$ դասերը: Ցույց է տրված, որ նշված ֆունկցիաները գրեթե ամենուրեք ունեն անկյունային սահմանային արժեքներ:

I. A. JVARSHISHVILI. On boundary properties of a class of analytic functions in bicylinder (summary)

The classes $GN(U^2)$ and $GH^{\delta}(U^2)$ are introduced, which generalize classes N and H^{δ} , $\delta > 0$ for functions from these classes the existence of angular boundary condition is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Рудин. Теория функций в полукруге, М., 1974.
2. В. Г. Челидзе. Метод Абеля-Пуассона суммирования рядов Фурье, Труды Тбл. матем. ин-та, 13, Тбилиси, 1944.
3. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 2, «Мир», М., 1965.
4. И. А. Джваршейшвили. О граничных свойствах аналитических функций, Сообщ. АН ГССР, 87, № 1, 1977.
5. И. А. Джваршейшвили. О поведении аналитических функций вблизи границы области, Автореферат канд. диссертации, Тбилиси, 1980.
6. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, «Наука», М., 1974.
7. Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ, т. 2, «Наука», М., 1976.
8. И. А. Джваршейшвили. Об одном классе аналитических функций в единичном полукруге, Сообщ. АН ГССР, 95, № 2, 1979.
9. A. Zygmund. On the differentiability of multiple integrals, Fundam. Math., 23, 1934.
10. A. Zygmund. On the boundary values of functions of several complex variables Fundam. Math., 36, 1949.
11. A. P. Calderon. On the behaviour of harmonic functions on the boundary, T.A.M.S 68, 1950.
12. A. P. Calderon, A. Zygmund. Note on the boundary values of functions of several complex variables, Math. Studies, 25, 1950.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ի. Գ. Խաչատրյան. Սովորական սինգուլյար դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների համակարգությունը	159
Վ. Ն. Մադգադյան. Որոշ դասի հավասարումների լուծումների տարածության ֆունկցիո- նալ շափողականությունը	182
Տ. Ն. Հառուսյունյան. Որոշ դասի դիֆերենցիալ օպերատորների սպեկտրի մասին	201
Ա. Ա. Վաղարշապետյան. Էլիպսական տիպի հավասարումների լուծումների միակության մասին	214
Ի. Ա. Զվարթիշվիլի. Բիգլյանում անալիտիկ ֆունկցիաների մի դասի եզրային հատկու- թյունների մասին	221

СОДЕРЖАНИЕ

И. Г. Хачатрян. Изучение решений обыкновенного сингулярного дифференциаль- ного уравнения	159
В. Н. Маркарян. Функциональная размерность пространств решений некоторых классов гиповоллиптических уравнений	182
Т. Н. Арутюнян. О спектре одного класса дифференциальных операторов	201
А. А. Вагаршакян. О единственности решений уравнений эллиптического типа	214
И. А. Джваршевили. О граничных свойствах одного класса аналитических функ- ций в биглиindre	221

CONTENTS

I. G. Khachatryan. Investigation of solutions of an ordinary singular differen- tial equation	159
V. N. Markarian. Functional dimension of the space of solutions of some clas- ses hypoelliptic equations	182
T. N. Harutunian. On the spectrum of a class of differential operators	201
A. A. Vagarshakyan. On uniqueness of the solution of the equations of ellip- tic type	214
I. A. Jvarshelashvili. On boundary properties of a class of analytic functions in bicylinder	221