ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке, должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика»

1982 1.17 wα

ԳԻՆԸ ЦЕНА 85 Կ К

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математика

А. К. БАБАДЖАНЯНЦ, П. Б. МГОЯН

ОЦЕНКА ГОЛОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Правые части линейны по параметру и являются алгебраическими полиномами по неизвестным с голоморфными по аргументу коэффициентами. Предлагаются оценки области голоморфности локального решения по аргументу и оценки остаточных членов соответствующих тейлоровских разложений. Доказательство их основано на сведении нелинейной дифференциальной системы конечной размерности к счетной линейной дифференциальной системе.

1°. **Обозначения.** Символика и обозначения, используемые ниже, мало отличаются от стандартных. Здесь приводится небольшой их список. В неясных случаях следует обратиться к работам [1, 2].

Для введения обозначений используется символ $\overset{\text{def}}{=}$. Символы Z, R, C обозначают множества целых, вещественных и комплексных чисел соответственно. Если $i=(i_1,\cdots,i_n)\in Z^n$, то $|i| \overset{\text{def}}{=} i_1+\cdots+i_n$. Если $X=(x_1,\cdots,x_n)\in C^n$, то $X^i \overset{\text{def}}{=} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, $|X| \overset{\text{def}}{=} \max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}$. Если $m,\ n\in Z$, то $[m:n] \overset{\text{def}}{=} \{j\in Z|\ m\leqslant j\leqslant n\}$. Если $m,\ n\in Z$, то $C_n^m \overset{\text{def}}{=} n!/(m!\,(n-m)!)$, если $n\geqslant m\geqslant 0$ и $C_n^m \overset{\text{def}}{=} 1$ в остальных случаях. Если $m_0>m_1$, то $\sum\limits_{m=m_0}^{m_1} a_m \overset{\text{def}}{=} 0$, $\prod\limits_{m=m_0}^{m_1} a_m \overset{\text{def}}{=} 1$. Если f — функция аргумента t, то $d^0f/dt^0 \overset{\text{def}}{=} f$. Если $\tau\in C$, $\rho\in[0,+\infty)$, то $V_\rho(\tau) \overset{\text{def}}{=} \{t\in C|\,|t-\tau|<\rho\}$.

Кроме векторов и матриц конечной размерности используются бесконечные векторы и матрицы (бесконечно число компонент). Рассматриваются только матрицы с конечными строками и столбцами (каждые строка и столбец содержат конечное число ненулевых элементов). Для бесконечных векторов и матриц используются формальные понятия суммы, произведения на число, произведения матриц и т. п., определяемые как в конечномерном случае— через соответствующие понятия для их компонент (см. [1], 5. 6, с. 22—24).

2°. **Введение.** Рассмотрим систему

$$dx_j/dt=\sum_{m=1}^{L+1}\sum_{i\in I_n(m)}(a_j^1[i]+\varepsilon a_j^2[i])X^i, \tag{1}$$

где $X \overset{\text{def}}{=} (x_1,\cdots,x_n)$; $j\in[1:n]$; $t,\ \varepsilon\in C$; $L\in[0:+\infty)$,

$$I_n(m) \overset{\text{def}}{=} \{i=(i_1,\cdots,i_n)\in Z^n|\ i_1>0,\cdots,i_n>0;\ |i|=m\},$$

$a_j^{\nu}[i]$ — комплекснозначные функции аргумента t. Ее решение рассмотрим как функцию $X = X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$ аргументов $t, t_0, \varepsilon \in C$; $X_0 \overset{\text{def}}{=} (x_{10}, \cdots, x_{n0}) \in C^n$, удовлетворяющую начальному условию

$$X(t_0, t_0, X_0, \varepsilon) = X_0. \tag{2}$$

Относительно коэффициентов $a_j^{\nu}[i]$ в системе (1) предположим, что они удовлетворяют неравенствам

$$|d^l a_j^{\nu}[i]/dt^l|_{t=t_0} \leqslant \varphi(l) M_j^{\nu}[i], \quad l = 0, 1, \cdots, \tag{3}$$

где $M_j^{\nu}[i] > 0$ — постоянные, а функция φ такова, что ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l \varphi(l)/l! \tag{4}$$

имеет ненулевой радиус сходимости. Сказанное есть не что иное, как специальным образом представленное предположение о голоморфности коэффициентов $a_j^{\nu}[i]$ в точке $t = t_0$.

При сделанных предположениях ставится задача: оценить область голоморфности решения $X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$ по (t, ε) и остаточные члены его тейлоровских разложений по t и по ε.

Решение ее дается теоремой 1 в п. 3°. Для доказательства используется метод сведения уравнений (1) к счетной линейной дифференциальной системе, примененный в работах [1, 2] (см., например, предложение 4 из [2]). Этот метод позволяет получать простые оценки для производных решения X по t и ε произвольного порядка.

В п. 4° вместо уравнений (1) рассматриваются уравнения (29), отличающиеся от (1) наличием свободных членов, и, как следствие теоремы 1, доказывается теорема 2, содержащая аналогичные, но более сильные при малых $|X_0|$, $|\varepsilon|$ результаты. В п. 5° показывается, что проверка условий теорем 1, 2 не представляет затруднений.

3°. Первая теорема о голоморфном решении. При $\gamma \in (0, +\infty)$ введем обозначение

$$s(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \max_{\nu=1,2} \max_{j \in [1:n]} \sum_{m=1}^{L+1} \gamma^m \sum_{i \in I_n(m)} M_j^{\nu}[i] \cdot \gamma^{-1}. \tag{5}$$

В условиях теорем 1, 2 используется уравнение

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} (\varphi(l)/(L\sigma s)^l)/l! \tag{6}$$

относительно σ. Для понимания этих условий полезно иметь в виду следующий результат.

Лемма 1. *Пусть* $R \in (0, +\infty]$ — *радиус сходимости ряда* (4) *и* $s > 0$. *Тогда уравнение* (6) *имеет единственное на промежутке* $(0, +\infty)$ *решение* σ, *а величина*

$$\theta = \theta(s) \overset{\text{def}}{=} \sigma s \tag{7}$$

есть возрастающая функция от $s\in(0,+\infty)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\Theta(s)>(\mathbf{R}L)^{-1},\ \lim_{s\to+0}\Theta(s)=(\mathbf{R}L)^{-1}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha\in(0,+\infty)$, *выполнены условия* (3), *величины* $s\overset{\mathrm{def}}{=}s(|X_0|)$ *и* Θ *вычисляются по формулам* (5), (7) *и используется обозначение* $r_0\overset{\mathrm{def}}{=}(L(1+\alpha)\Theta)^{-1}$. *Тогда решение* $X(t,\ t_0,\ X_0,\ \varepsilon)$ *задачи* (1), (2) *является голоморфной по* (t,ε) *функцией в области* $\mathbf{V}_{r_0}(t_0)\times\mathbf{V}_\alpha(0)$ *и удовлетворяет там неравенствам*

$$|X(t,\ t_0,\ X_0,\ 0)-\sum_{l=0}^{N}X_{0l}(t-t_0)^l/l!|\leqslant\mathbf{K}_0|X_0|(|t-t_0|/r_0)^{N+1},\tag{8}$$

$$|X(t,\ t_0,\ X_0,\ \varepsilon)-\sum_{l=0}^{N}X_{\varepsilon l}\varepsilon^l/l!|\leqslant\mathbf{K}|X_0||\varepsilon/\alpha|^{N+1}(|t-t_0|/r_0)^{N+1},\tag{9}$$

где $\mathbf{K}_0\overset{\mathrm{def}}{=}(1-|t-t_0|/r_0)^{-1/L}$, $\mathbf{K}\overset{\mathrm{def}}{=}\mathbf{K}_0\alpha r_0/(\alpha r_0-|\varepsilon(t-t_0)|)$,

$$\begin{aligned}X_{0l}&\overset{\mathrm{def}}{=}(d^lX(t,\ t_0,\ X_0,\ 0)/dt^l)_{t=t_0},\\X_{\varepsilon l}&\overset{\mathrm{def}}{=}(d^lX(t,\ t_0,\ X_0,\ \varepsilon)/d\varepsilon^l)_{\varepsilon=0}.\end{aligned}\tag{10}$$

Замечание. Из леммы 1 следует, что

$$\lim_{\substack{\alpha>\varepsilon\\ \alpha\to0}}\lim_{s\to0}r_0=\mathbf{R}.$$

Доказательство. Шаг 1. Следуя [1, 2] сведем систему (1) к счетной линейной системе. Для этого введем счетное множество переменных $x[i]\overset{\mathrm{def}}{=}X^i$ при $i\in\bigcup_{m=1}^{\infty}I_n(m)$. Условимся полагать $a_j^\nu[i]\overset{\mathrm{def}}{=}0$, если хотя бы одна из компонент мультииндекса i отрицательна или $|i|>L$. Тогда введенные переменные $x[k]$ $(k=k_1,\cdots,k_n))$ удовлетворяют следующим уравнениям ([1], стр. 14):

$$dx[k]/dt=\sum_{m=0}^{L}\sum_{i\in J(m)}(\alpha^1[k;\ i]+\varepsilon\alpha^2[k;\ i])\,x\,[k+i],\tag{11}$$

где

$$k\in\bigcup_{m=1}^{\infty}I_n(m),\ \alpha^\nu[k;\ i]\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{j=1}^{n}k_j\,a_j^\nu[i_1,\ \cdots,\ i_j+1,\cdots,\ i_n],\ \nu=1,\ 2,$$

$$\mathrm{J}(m)\overset{\mathrm{def}}{=}\{i=(i_1,\cdots,\ i_n)\in\mathbf{Z}^n\,|i_1\geqslant-1,\cdots,\ i_n\geqslant-1;\ |i|=m\}.\tag{12}$$

Множества $\chi_m\overset{\mathrm{def}}{=}\{x[i]|,\ i\in I_n(m)\}$ упорядочим слева направо в порядке $\chi_1,\ \chi_2,\cdots$, элементы каждого из этих множеств упорядочим так, чтобы из $i_1=k_1,\cdots,\ i_j=k_j,\ i_{j+1}>k_{j+1}$ следовало, что $x[i_1,\cdots,\ i_n]$, предшествует $x[k_1,\cdots,\ k_n]$, и обозначим все введенные переменные слева направо символами $x_1,\ x_2,\cdots$. Первые n из этих переменных совпадают с неизвестными $x_1, \cdots, x_n$ системы (1). Вектор-функция $x \overset{\text{def}}{=} (x_1, x_2, \cdots)$ удовлетворяет уравнению

$$dx/dt = (\mathbf{A}_1 + \varepsilon \mathbf{A}_2)\, x, \tag{13}$$

где $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ — бесконечные матрицы с конечными строками и столбцами.

Будем рассматривать x как функцию $x(t, t_0, x_0, \varepsilon)$ четырех аргументов t, t_0, $x_0 \overset{\text{def}}{=} (x_{10}, \cdots, x_{n0}, x_{10}^2, x_{10} \cdot x_{20}, \cdots, x_{n0}^2, x_{10}^3, \cdots)$, ε, удовлетворяющую начальному условию $x(t_0, t_0, x_0, \varepsilon) = x_0$.

Шаг 2. Согласно теореме Коши—Пуанкаре каждая из компонент x_j решения X задачи (1), (2) голоморфна по (t, ε) в окрестности точки $(t_0, 0)$ и может быть представлена там степенным рядом по ε, $t - t_0$. С другой стороны, все компоненты x_j вектора x есть произведения степеней компонент $x_1, \cdots, x_n$ вектора X. Поэтому величину x можно представить в виде

$$x(t, t_0, x_0, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} x^r(t, t_0, x_0)\, \varepsilon^r, \tag{14}$$

где

$$x^0(t_0, t_0, x_0) = x_0,\ x^r(t_0, t_0, x_0) = 0,\ r = 1, 2, \cdots. \tag{15}$$

Для удобства положим $x^r \overset{\text{def}}{=} 0$, если $r < 0$. Подставляя (14) в (13) и приравнивая коэффициенты при ε^r получаем

$$dx^r/dt = \mathbf{A}_1 x^r + \mathbf{A}_2 x^{r-1},\ r = 0, 1, \cdots. \tag{16}$$

Искомые оценки (8), (9) будут получены из представления (14). Для этого при помощи (16) мы оценим величины $x^r(t, t_0, x_0)$ (шаги 3—9).

Шаг 3. При $r \geqslant 0$, $l \geqslant 0$ символом x_{0p}^{rl} обозначим p-ую компоненту вектора $x_0^{rl} \overset{\text{def}}{=} (d^l x^r / dt^l)_{t=t_0}$. Из формул (16), (15) несложно вывести, что $x_0^{rl} = 0$ при $l < r$. Поэтому в некоторой окрестности точки t_0 истинно представление

$$x^r(t, t_0, x_0) = \sum_{l=r}^{\infty} x_0^{rl} (t - t_0)^l / l!,\ r = 0, 1, \cdots. \tag{17}$$

Шаг 4. Введем ряд обозначений. Символом y_0^{rl} обозначим вектор с компонентами $y_{0p}^{rl} \overset{\text{def}}{=} |x_{0p}^{rl}|$, $p = 1, 2, \cdots$. Если $\mathbf{A}$ — матрица, а x — вектор, то символом $(\mathbf{A}x)_p$ обозначим p-ую компоненту $\mathbf{A}x$.

Пусть $\{a_j^1[i]\}$, $\{a_j^2[i]\}$ — как-то упорядоченные наборы из коэффициентов системы (1). Из формулы (12) видно, что каждая величина $a^v[k; i]$ есть линейная форма с целочисленными неотрицательными коэффициентами от величин $a_j^v[i]$, то есть таковой является каждый элемент матриц $\mathbf{A}_v = \mathbf{A}_v(|a_j^v[i]|)$. Поэтому получаем равенства

$$\mathbf{A}_{v0}^{(w)} \overset{\text{def}}{=} [d^w \mathbf{A}_v / dt^w)_{t=t_0} = \mathbf{A}_v(|(d^w a_j^v[i]/dt^w)_{t=t_0}|),\ w = 0, 1, \cdots. \tag{18}$$

Из формул (18), (3) следует, что если y — вектор с неотрицательными вещественными компонентами, то

$$|(\mathbf{A}_{\nu 0}^{(w)} y)_p| \leqslant \varphi(w)(\mathbf{B}_\nu y)_p, \quad w = 0, 1, \cdots, \tag{19}$$

где $\mathbf{B}_\nu \overset{\text{def}}{=} \mathbf{A}_\nu (|M_j^\nu[i]|)$.

Шаг 5. *Дифференцируя при* $l \geqslant 1$ *формулу* (16) $l-1$ *раз, полагая затем* $t = t_0$ *и учитывая* (15) *при* $l \geqslant r$, $l \geqslant 1$, $r \geqslant 0$ *получаем:*

$$x_0^{rl} = \sum_{v=r}^{l-1} C_{l-1}^v \mathbf{A}_{10}^{(l-1-v)} x_0^{rv} + \sum_{v=r-1}^{l-1} C_{l-1}^v \mathbf{A}_{20}^{(l-1-v)} \cdot x_0^{r-1, v}.$$

Учитывая (19) приходим к неравенствам

$$y_{pp}^{rl} \leqslant \sum_{v=r}^{l-1} C_{l-1}^v \varphi(l-1-v)(\mathbf{B}_1 y_0^{rv})_p + \sum_{v=r-1}^{l-1} C_{l-1}^v \varphi(l-1-v)(\mathbf{B}_2 y_0^{r-1, v})_p. \tag{20}$$

при $l \geqslant r$, $l \geqslant 1$, $r \geqslant 0$.

Шаг 6. Вычислим величину $(\mathbf{B}_\nu y_0^{rv})_p$. В начале доказательства введя счетное множество переменных $x[i]$ и вектор $x = (x_1, x_2, \cdots)$ мы определили тем самым взаимно-однозначное отображение множества мультииндексов $i = (i_1, \cdots, i_n)$ на множество натуральных чисел p — порядковых номеров компонент вектора x. Символами $i(p)$ и $p(i)$ будем обозначать значения i и p при этом отображении. Если y—вектор с компонентами $y_1, y_2, \cdots$, то символом $y[i(p)]$ или просто $y[i]$ будем обозначать величину y_p.

Из формул (11), (12) следует, что при $k(p) = (k_1, \cdots, k_n)$; $\nu = 1, 2$; $v > r \geqslant 0$ истинны равенства

$$(\mathbf{B}_\nu y_0^{rv})_p = \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{L} \sum_{i \in J(m)} k_j M_j^\nu[i_1, \cdots, i_j + 1, \cdots, i_n] \, y_0^{rv}[k+i]. \tag{21}$$

Шаг 7. Лемма 2. *При любых целых* $l \geqslant r \geqslant 0$ *истинны неравенства*

$$y_0^{rl}[k] \leqslant \Pi(l, k) \, \psi(r, l) \, |X_0|^{|k|}, \tag{22}$$

где

$$\Pi(l, k) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\mu=1}^{l-1} (|k| + \mu L), \quad k \in \bigcup_{m=1}^{\infty} I_n(m),$$

а ψ — *любая вещественнозначная функция аргументов* r, l, *удовлетворяющая условиям*

$$\psi(0, 0) = 1, \ \psi(-1, l) = 0, \ (l > r > 0),$$

$$\psi(r, l) \geqslant s(|X_0|) \left(\sum_{u=0}^{l-1-r} \varphi(u) \psi(r, l-1-u) L^{-u} / u! + \right.$$

$$\left. + \sum_{u=0}^{l-r} \varphi(u) \psi(r-1, l-1-u) L^{-u} / u! \right) \ ((r, l) \neq (0, 0)). \tag{23}$$

Доказательство. Из равенства (21) получаем, что при любых $l \geqslant r = 0, 1, \cdots$, если y_0^{rl} удовлетворяет (22) и $k = k(p) = (k_1, \cdots, k_n)$, то

$$(B_v y_0^{rl})_p < s(|X_0|)\,\psi(r, l)\,\Pi(l+1, k)\,|X_0|^{|k|}. \tag{24}$$

Очевидно y_0^{00} удовлетворяет неравенству (22). Пусть ему удовлетворяет величина y_0^{0v} при $v = 0, \cdots, l-1$. Тогда из неравенств (20), (24) и оценки

$$C_{l-1}^v \Pi(v+1, k)/\Pi(l, k) \leqslant L^{v+1-l}/(l-1-v)!$$

получаем

$$y_{0p}^{0l} < \left(\sum_{v=0}^{l-1} C_{l-1}^v \varphi(l-1-v)\psi(0, v)\, s(|X_0|)\,\Pi(v+1, k)/\Pi(l, k)\right) \times$$
$$\times\, \Pi(l, k)\,|X_0|^{|k|} \leqslant \psi(0, l)\,\Pi(l, k)\,|X_0|^{|k|},$$

то есть y_0^{0l} также удовлетворяет неравенству (22). Таким образом неравенство (22) доказано по индукции при $r=0$; $l=0, 1, \cdots$. Аналогично оно доказывается при $r=l=1, 2, \cdots$, а затем в предположении, что $g \geqslant 0$ и это неравенство истинно при $r=g$; $l=g, g+1, \cdots$, тем же способом доказывается, что оно истинно при $r=g+1$; $l=g+1, g+2, \cdots$.

Шаг 8. Для получения оценок величин $y_0^{rl}[k]$ из неравенства (22) осталось найти функцию ψ, удовлетворяющую условиям (23). Индукцией можно показать, что в качестве таковой подходит функция

$$\psi(r, l) = C_l^r\,\Theta^l, \tag{25}$$

где Θ определяется формулой (7).

Шаг 9. Неравенство

$$C_l^r (1+\alpha)^{-l} \leqslant \alpha^{-r} \tag{26}$$

при $\alpha > 0$; $0 < r \leqslant l$ следует из биномиальной формулы $(1+\alpha)^l = = \cdots + C_l^r \alpha^r + \cdots$.

Пользуясь (22) при $|k| = 1$, (25) и (26) замечаем, что при любых $p \in [1:n]$ и $M \geqslant N+1 \geqslant r \geqslant 0$ истинны неравенства

$$\left|\sum_{l=N+1}^{M} x_{0p}^{rl}(t-t_0)^l/l!\right| \leqslant |X_0|\,\alpha^{-r}(|t-t_0|/r_0)^{N+1} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{M-N-1}\left[((1+\alpha)\,|t-t_0|\,\Theta)^l/l!\right]\prod_{\mu=0}^{l-1}(1+\mu L). \tag{27}$$

Полагая $N+1=r$ и устремляя M к $+\infty$ из (17), (27) получаем (см. (34) в [2]), что при $t \in \mathrm{V}_{r_0}$; $p \in [1:n]$; $r = 0, 1, \cdots$, величины $x_p^r(t, t_0, x_0)$ голоморфны по t и удовлетворяют неравенствам

$$|x_p^r(t, t_0, x_0)| \leqslant \mathrm{K}_0\,|X_0|\,(|t-t_0|/(r_0\,\alpha))^r. \tag{28}$$

Таким же способом при $r=0$ получаем неравенства

$$\left| x_p^0(t, t_0, x_0) - \sum_{l=0}^{N} x_{op}^{0l}(t-t_0)^l / l! \right| \leqslant \mathrm{K}_0 |X_0| \left(|t-t_0|/r_0\right)^{N+1},$$

совпадающие с (8) с точностью до обозначений.

Шаг 10. Применяя (28) для оценки правой части равенства (см. (14))

$$\left| x_p(t, t_0, x_0, \varepsilon) - \sum_{r=0}^{N} x_p^r(t, t_0, x_0)\, \varepsilon^r \right| = \left| \sum_{r=N+1}^{\infty} x_p^r(t, t_0, x_0)\, \varepsilon^r \right|$$

завершаем доказательство теоремы.

4°. Вторая теорема о голоморфном решении. Перейдем к рассмотрению системы

$$dx_j/dt = \sum_{k=1}^{n+1} b_{jk} x_k + \nu \sum_{m=2}^{L+1} \sum_{l \in I_n(m)} b_j^1[i] X^l +$$

$$+ \varepsilon \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{l \in I_n(m)} b_j^2[i] X^l,\ j \in [1:n];\ dx_{n+1}/dt = 0 \tag{29}$$

при обозначениях, аналогичных (1). Предположим, что $x_{n+1} \in C$; $\nu \in R$ — фиксированные постоянные, величины $b_j^k[i]$, b_{jk} — голоморфные функции аргумента t, а решение X удовлетворяет условию (2).

Задача (29), (2) есть частный случай задачи (1), (2). С другой стороны, если подставить постоянную x_{n+1} в первые n уравнений (29), то получится система более общая, чем (1) (в (1) отсутствуют свободные члены $x_{n+1} b_{j,n+1}(t)$).

Величина r_0 в теореме 1 тем больше, чем меньше $s(|X_0|)$. В свою очередь, $s(|X_0|)$ монотонно убывает вместе с $|X_0|$, причем $s(|X_0|) \to 0$ при $|X_0| \to 0$ только в том случае, если в системе (1) отсутствуют линейные члены. Поэтому займемся сведением системы (29) к системе без линейных членов в невозмущенной части (остальные линейные члены можно, вообще говоря, сделать малыми за счет ε) с тем, чтобы применив к ней теорему 1 получить для задачи (29), (2) более сильный при малых $|X_0|$, $|\varepsilon|$ результат—теорему 2.

Введем в рассмотрение $(n+1) \times (n+1)$ — матрицу U такую, что ее компоненты голоморфны в некоторой области $D \subset C$, причем $t_0 \in D$ и удовлетворяют условиям:

(u1) при любых $t \in D$; $W \in C^{n+1}$ истинны неравенства $|UW| \leqslant u^* W$, $|U_0^{-1} W| \leqslant u_* W$, где u_*, $u^* \in R$ — постоянные, $U_0^{-1} \overset{\text{def}}{=} U^{-1}|_{t=t_0}$;

(u2) система относительно $W = (w_1, \cdots, w_{n+1})$, в которую переходит (29) при замене

$$(X, x_{n+1}) = UW, \tag{30}$$

имеет вид

$$dW/dt = \sum_{m=2}^{L+1} \sum_{l \in I_{n+1}(m)} a_j^1[i] W^l + \varepsilon \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{l \in I_{n+1}(m)} a_j^2[i] W^l, \tag{31}$$

причем $a_j^s[i]$ голоморфны по t при $t = t_0$.

Эти условия выполнены, если U — фундаментальная матрица системы (29) при $\nu = \varepsilon = 0$, голоморфная в области $D_1 \supset D$.

Из (2) следует, что W удовлетворяет условию

$$W(t_0, t_0, W_0, \varepsilon) = W_0 \overset{\text{def}}{=} U_0^{-1}(X_0, x_{n+1}). \tag{32}$$

Теорема 2. *Пусть U удовлетворяет условиям $(u\,1)$, $(u\,2)$ и не зависит от ε. Пусть $\alpha \in (0, +\infty)$ и выполнены условия (3) относительно коэффициентов $a_j^{\nu}[i]$ системы (31). Пусть величина W_0 определяется формулой (32), величины $s \overset{\text{def}}{=} s(|W_0|)$, Θ — формулами (5), (7) (в (5) n следует заменить на $n+1$), а $r_0 \overset{\text{def}}{=} (L(1+ +\alpha)\Theta)^{-1}$. Пусть, наконец, область D удовлетворяет условию $D \supset V_{r_0}(t_0)$.*

Тогда решение $X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$ системы (29) голоморфно по (t, ε) в области $V_{r_0}(t_0) \times V_{\alpha}(0)$ и удовлетворяет там неравенству (8) при $N=0$ и неравенству (9) при любом N, если в них заменить K_0 на $H_0 = u_* u^* K_0 |(X_0, x_{n+1})|/|X_0|$.

Доказательство. Применяя теорему 1 к задаче (31), (32) получаем, что ее решение W голоморфно по (t, ε) в области $V_{r_0}(t_0) \times \times V_{\alpha}(0)$ и удовлетворяет там неравенствам

$$|W(t, t_0, W_0, 0) - W_0| \leqslant K_0 |W_0| |t-t_0|/r_0, \tag{33}$$

$$\left| W(t, t_0, W_0, \varepsilon) - \sum_{l=0}^{N} W_{sl} \varepsilon^l / l! \right| \leqslant K |W_0| \, |\varepsilon/\alpha|^{N+1} |(t-t_0)/r_0|^{N+1}, \tag{34}$$

где использованы обозначения, аналогичные (10). Так как матрица U голоморфна в $V_{r_0}(t_0)$, то из (30) следует, что решение $X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$ голоморфно по $(t, \varepsilon) \in V_{r_0}(t_0) \times V_{\alpha}(0)$. Используя (30), $(u\,1)$, (32) из неравенств (33), (34) получаем доказываемые.

5°. О проверке условий теорем. Покажем, что проверка условий теорем 1, 2 достаточно проста.

(а) О вычислении $\varphi(l)$, $M_j^{\nu}[i]$ в условиях (3). Если все $a_j^{\nu}[i]$ в (1) постоянны, то можно положить

$$\varphi(0) = 1, \ \varphi(l) = 0, \ l = 1, 2, \cdots, \ M_j^{\nu}[i] = |a_j^{\nu}[i]|. \tag{35}$$

В случае переменных $a_j^{\nu}[i]$ лучше всего получить $\varphi(l)$, $M_j^{\nu}[i]$, опираясь на конкретный вид $a_j^{\nu}[i]$. Если это сделать не удается, то в предположении, что все $a_j^{\nu}[i]$ голоморфны в круге $V_r(t_0)$, можно использовать неравенства Коши

$$|d^l a_j^{\nu}[i]/dt^l|_{t=t_0} \leqslant l! \, \rho^{-l} \max_{|t-t_0|=\rho} |a_j^{\nu}[i]|, \ \rho < r,$$

то есть положить

$$\varphi(l) = l! \, \rho^{-l}, \ M_j^{\nu}[i] = \max_{|t-t_0|=\rho} |a_j^{\nu}[i]|. \tag{36}$$

(в) О вычислении s, σ. Вычисление $s = s(|X_0|)$ по формуле (5) не представляет затруднений. Если $a_j^{\nu}[i]$ постоянны, то из (35), (6), (7)

следует, что $\sigma = 1$, $\Theta = s = s\,(|X_0|)$. В случае переменных $a_j^{*}[i]$ из (36), (6), (7) следует, что $\sigma = 1 + (\rho L s)^{-1}$, $\Theta = s + 1/(\rho L)$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова
Поступила 5.I.1981

Լ. Կ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆՑ, Փ. Հ. ՄՀՈՅԱՆ. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների հոլոմորֆ լուծումների գնահատումը *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է առաջին կարգի n սովորական դիֆֆերենցիալ հավասարումների համակարգը։ Աջ մասերը գծային են ըստ պարամետրի և հանդիսանում են հանրահաշվական պոլինոմներ անհայտներից, որոնց գործակիցները հոլոմորֆ են արգումենտից։ Առաջարկվում են գնահատականներ ըստ արգումենտի ու պարամետրի լոկալ լուծումների հոլոմորֆության տիրույթի համար և համապատասխան գնահատականներ Թեյլորյան վերլուծության մնացորդային անդամների համար։ Դրանց ապացույցները հիմնվում է վերջավոր թվով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի հաշվելի թվով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի բերման վրա։

L. K. BABADZANJANZ, P. B. MGOJAN. *The estimation of the golomophic solution of ordinary differential equations* (summary)

The article deals with a system of n ordinary differential equations of the first order with the right-hand sides linear with respect to a parameter ε and polynomial with respect to all dependent variables. The coefficients of the polynomials are golomorphic functions of the independent variable t.

The purpose of this paper is to give estimates of the (t, ε)-region where the local solution is golomorphic as well as to estimate the remainders terms of the corresponding Taylor formulae.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. К. Бабаджанянц.* Продолжаемость и представление решений в задачах небесной механики, Труды ИТА АН СССР, XVII, 1978, 3—45.
2. *L. K. Babadzanjanz.* Existence of the continuations in the N-body problem, Celestial Mechanics 20, 1979, 43—57.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математика

Г. В. МИКАЕЛЯН

О СУЩЕСТВОВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ В КРУГЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМИ α-КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ

1. Пусть $Z=\{z_k\}_1^\infty$ и $\beta=\{\beta_k\}_1^\infty$ — последовательности комплексных чисел, причем $z_k\neq 0$ и $z_k\to\infty$ при $k\to\infty$.

Следуя работе [1] Л. А. Рубеля и Б. А. Тейлора величины

$$c_0(r;\, Z:\beta)=\sum_{|z_n|<r}\log\frac{r}{|z_n|},$$

$$c_k(r;\, Z:\beta)=\frac{1}{2}\beta_k r^k+\frac{1}{2k}\sum_{|z_n|<r}\left[\left(\frac{r}{z_n}\right)^k-\left(\frac{\bar z_n}{r}\right)^k\right],$$

$$c_{-k}(r;\, Z:\beta)=\overline{c_k(r;\, Z:\beta)}\quad (k=1, 2,\cdots),$$

где $r>0$, назовем коэффициентами Фурье, ассоциированными с последовательностью Z.

В той же работе [1] было доказано, что если для любого $r\in\in(0, +\infty)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r;\, Z:\beta)|^2<+\infty,$$

то существует единственная целая функция $f(z)$ со следующими свойствами:

1°. $f(0)=1$, последовательность нулей $f(z)$ совпадает с Z.

2°. Последовательность коэффициентов Фурье функции $\log|f(re^{i\theta})|$ $(r>0)$ совпадает с $\{c_k(r;\, Z:\beta)\}$, $k=0, \pm 1, \pm 2,\cdots$.

3°. В окрестности точки $z=0$ справедливо разложение

$$\log f(z)=\text{const}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k z^k.$$

2. Пусть $D^{-\alpha}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ — интегро-дифференциальный оператор в смысле Римана-Лиувилля, т. е.

$$D^{-\alpha}f(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt\quad (0<\alpha<+\infty),$$

$$D^0 f(x)\equiv f(x),$$

$$D^{-\alpha}f(x)\equiv\frac{d}{dx}\{D^{-(1+\alpha)}f(x)\}\quad (-1<\alpha<0),$$

где $\Gamma(\alpha)$—гамма-функция Эйлера.

В работе [3] была доказана следующая

Лемма. *Пусть функция $f(z)(f(0)\neq 0)$ с последовательностью нулей $Z=\{z_n\}_1^\infty$ аналитична в круге $|z|<R$ $(0<R\leqslant+\infty)$. Если в окрестности точки $z=0$*

$$\log f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k,$$

то для любого $r\in(0, R)$ и $\alpha\in(-1, +\infty)$ справедливо представление

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|f(re^{i\theta})|=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k^{(\alpha)}(r, f)\,e^{ik\theta},$$

где $c_k^{(\alpha)}(r,f)$ определяются по формулам

$$c_0^{(\alpha)}(r, f)\equiv\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{|z_n|<r}\int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\log|f(0)|,$$

$$c_k^{(\alpha)}(r, f)\equiv\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\beta_k r^k+\frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)}\times$$

$$\times\sum_{|z_n|<r}\left\{\left(\frac{r}{z_n}\right)^k\int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx+\left(\frac{\bar z_n}{r}\right)^k\int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\},$$

$$c_{-k}^{(\alpha)}(r, f)\equiv\overline{c_k^{(\alpha)}(r, f)}\quad(k=1, 2,\cdots).$$

Отметим, что когда $\alpha=0$ и $f(0)=1$, то

$$c_k^{(\alpha)}(r; f)\equiv c_k(r; Z: \beta)\ (k=0, \pm1, \pm2,\cdots).$$

3. Теперь допустим, что $Z=\{z_k\}_1^\infty$ и $\beta=\{\beta_k\}_1^\infty$ — последовательности комплексных чисел, причем $0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1$ и при фиксированном $\alpha\in(-1, +\infty)$ выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty. \tag{1}$$

Определение. *Для любого $r\in(0, 1]$ и $\alpha\in(-1, +\infty)$ величины*

$$c_0^{(\alpha)}(r; Z: \beta)\equiv\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{|z_n|<r}\int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx,$$

$$c_k^{(\alpha)}(r; Z: \beta)\equiv\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\beta_k r^k+$$

$$+\frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)}\sum_{|z_n|<r}\left\{\left(\frac{r}{z_n}\right)^k\int\limits_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx+\left(\frac{\bar z_n}{r}\right)^k\int\limits_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}, \tag{2}$$

$$c_{-k}^{(\alpha)}(r;\ Z:\ \beta)\equiv\overline{c_k^{(\alpha)}(r;\ Z:\ \bar\beta)}\quad(k=1,\ 2,\cdots),$$

назовем α-коэффициентами Фурье, ассоциированными с последовательностью Z.

Заметим, что при $r=1$ α-коэффициенты Фурье определяются как суммы рядов, которые сходятся ввиду условия (1).

Если для последовательности $Z=\{z_k\}$ условие (1) выполнено, то бесконечное произведение Бляшке—Джрбашяна (см. [2], гл. IX), где

$$W_\alpha(z;\ \zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\times$$

$$\times\left\{\zeta^{-k}\int\limits_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\bar\zeta^k\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k \tag{3}$$

$$(|z|<1,\ |\zeta|<1),$$

сходится в круге $|z|<1$ и представляет там аналитическую функцию, обращающуюся в нуль только на последовательности Z. $B_\alpha(z)$ совпадает с функцией Бляшке при $\alpha=0$.

Теорема. *Пусть $\{c_k^{(\alpha)}(r)\}\equiv\{c_k^{(\alpha)}(r;\ Z:\ \beta)\}$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$ $\cdots$ — последовательность α-коэффициентов Фурье, ассоциированная с последовательностью Z, и пусть для некоторого $\alpha\in(-1,+\infty)$*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k^{(\alpha)}(1)|^2<+\infty. \tag{4}$$

Тогда существует единственная аналитическая в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ со следующими свойствами:

1°. $f(0)=1$, *последовательность нулей $f(z)$ совпадает с Z.*

2°. *Последовательности коэффициентов Фурье функций $\log|f(re^{i\theta})|$ и $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|f(re^{i\theta})|$ $(0<r<1)$ совпадают соответственно с $\{c_k^{(0)}(r)\}_{-\infty}^{+\infty}=\{c_k(r)\}_{-\infty}^{+\infty}$ и $\{c_k^{(\alpha)}(r)\}$.*

3°. *В окрестности точки $z=0$ справедливо разложение*

$$\log f(z)=\mathrm{const}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k z^k. \tag{5}$$

Доказательство. Ввиду условия (4) ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k^{(\alpha)}(1)\,e^{ik\varphi}$$

по теореме Рисса-Фишера является рядом Фурье некоторой функции

$$\Phi_\alpha(e^{i\varphi}) \in L_2[-\pi, \pi].$$

Для $\alpha \in (-1, +\infty)$ введем в рассмотрение следующие функции:

$$S_\alpha(w; z) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{\left(1-\frac{z}{w}\right)^{1+\alpha}} - 1\right\}, \tag{6}$$

$$Q_\alpha(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} S_\alpha(w; z)\,\Phi_\alpha(w)\,\frac{dw}{w}\right\}, \tag{7}$$

$$f(z) = B_\alpha(z)\,Q_\alpha(z). \tag{8}$$

Функция $f(z)$ аналитична в круге $|z|<1$ и последовательность ее нулей совпадает с Z.

Поскольку

$$Q_\alpha(0) = \exp\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\Phi_\alpha(w)\,\frac{dw}{w}\right\} =$$

$$= \exp\{\Gamma(1+\alpha)\,c_0^{(\alpha)}(1)\} = \prod_{n=1}^{\infty}\exp\left\{\int\limits_{|z_n|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\right\}$$

и по (2) и (3)

$$B_\alpha(0) = \prod_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\int\limits_{|z_n|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\right\},$$

то

$$f(0) = B_\alpha(0)\,Q_\alpha(0) = 1.$$

Докажем теперь, что последовательность чисел

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,e^{-ik\theta}\,d\theta,\quad k=0, \pm1, \pm2, \cdots$$

и $\{c_k(r)\}_{-\infty}^{+\infty}$ совпадают.

Для этого, по лемме пункта 2, достаточно показать, что в окрестности нуля справедливо представление (5).

Из (2) и (3) будем иметь

$$\log B_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right) - W_\alpha(z; z_n)\right] =$$

$$= \text{const} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{z_n^k\,k} + \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\,\times\right.$$

$$\left.\times\left\{z_n^{-k}\int\limits_0^{|z_n|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx - \bar{z}_n^{-k}\int\limits_{|z_n|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\}\right] z^k$$

$$(|z| < |z_1|).$$

Поэтому

$$\frac{B'_\alpha(z)}{B_\alpha(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(\alpha)} z^{k-1}, \text{ при } |z|<|z_1|, \tag{9}$$

где

$$U_k^{(\alpha)} = -\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ z_n^{-k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx + \bar{z}_n^{-k} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{|z_n|}^{1} (1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx \right\}. \tag{10}$$

Далее из (6) и (7) получим

$$\frac{Q'_\alpha(z)}{Q_\alpha(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \Phi_\alpha(w) \frac{\partial}{\partial z} S_\alpha(w;\, z) \frac{dw}{w} =$$

$$= \frac{\Gamma(2+\alpha)}{\pi i} \int_{|w|=1} \frac{\Phi_\alpha(w)}{\left(1-\frac{z}{w}\right)^{2+\alpha}} \frac{dw}{w^2}. \tag{11}$$

Вычислим последний интеграл в (11):

$$\frac{\Gamma(2+\alpha)}{\pi i} \int_{|w|=1} \frac{w^{k-2}}{\left(1-\frac{z}{w}\right)^{2+\alpha}} dw = \frac{\Gamma(2+\alpha)}{\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2+m)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(m+1)} \times$$

$$\times \int_{|w|=1} w^{k-2-m}\,dw\, z^m = 2\,\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k)} z^{k-1} \quad (|z|<1,\ k>0). \tag{12}$$

Поскольку

$$\int_{|w|=1} \frac{w^{-k}}{\left(1-\frac{z}{w}\right)^{2+\alpha}} \frac{dw}{w^2} = 0,\ k=0,\ 1,\ 2, \cdots,$$

то из (11) и (12) следует, что

$$\frac{Q'_\alpha(z)}{Q_\alpha(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^{(\alpha)} z^{k-1} \quad (|z|<1), \tag{13}$$

где

$$V_k^{(\alpha)} = 2\, c_k^{(\alpha)}(1) \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(k)} = k\,\beta_k +$$

$$+ \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ z_n^{-k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx + \bar{z}_n^{-k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx \right\}. \tag{14}$$

Замечая, что $U_k^{(\alpha)} + V_k^{(\alpha)} = k\,\beta_k$, из (9), (10), (13), (14) получим, что в окрестности точки $z=0$ имеет место разложение

$$\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{B'_n(z)}{B_n(z)}+\frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}k\,\beta_k\,z^{k-1}.$$

Тот факт, что последовательность коэффициентов Фурье функции $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|f(re^{i\theta})|$ совпадает с $\{c_k^{(\alpha)}(r)\}_{-\infty}^{+\infty}$ $(0<r<1)$ следует из леммы.

Докажем единственность построенной нами функции. Допустим противное, то есть что существуют функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_1(0)=f_2(0)=1$, с нулями Z и с коэффициентами Фурье

$$c_k(r,\ f_1)=c_k(r,f_2)=c_k(r)\ (0<r<1).$$

Тогда для аналитической в круге $|z|<1$ функции

$$\varphi(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\ c_k(r,\ \varphi)=0\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots),$$

и поэтому $|\varphi(z)|\equiv1$ $(|z|<1)$. Так как $\varphi(0)=1$, то

$$\varphi(z)\equiv1,\ \text{т. е. } f_1(z)\equiv f_2(z).$$

Теорема полностью доказана.

Теперь приведем пример, который демонстрирует целесообразность введения α-коэффициентов Фурье.

Пусть для $z_n\in(0,1)$ и $\alpha=1$ условие (1) выполнено и

$$\beta_k=-(k+1)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{z_n^{-k}\int_{|z_n|}^{1}(1-x)\,x^{k-1}\,dx+\bar{z}_n^{k}\int_{|z_n|}^{1}(1-x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}+2$$

$$(k=1,\ 2,\cdots).$$

Тогда

$$c_k^{(1)}(1;\ Z\colon\beta)=\frac{1}{k+1}\ (k=1,\ 2,\cdots).$$

Если условие (1) при $\alpha=0$ также выполнено, то вычисление показывает, что

$$c_k^{(0)}(1;\ Z\colon\beta)=\frac{1}{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}(z_n-z_n^k)+1\ (k=2,\ 3,\cdots),$$

а если (1) не выполнено, то просто $c_k^{(0)}(1;\ Z\colon\beta)=\infty$.

Таким образом, условие (4) при $\alpha=1$ выполняется, а при $\alpha=0$ не выполняется.

В заключение приношу свою благодарность М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство.

Ереванский государственный
университет

Поступила 2.VII.1981
9.XII.1981

Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Ֆուրյեի տրված α-գործակիցներով շրջանում անալիտիկ ֆունկցիայի գոյության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում լուծվում է խնդիր Ֆուրյեի տրված α-գործակիցների $(-1<\alpha<+\infty)$ հաջորդականությունն ունեցող միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիայի կառուցման մասին։ $\alpha=0$ դեպքում ստացվում են Ֆուրյեի սովորական գործակիցները։ Լուծումը կայես հենվում է Ռուբել-Թեյլորի մի թեորեմի և Բլյաշկե-Ջրբաշյանի արտադրյալի վրա։

G. V. MIKAELIAN. *Existence of a function analytic in the disk having prescribed α-Fourier coefficients* (summary)

In the paper an analytic in the disk function with given sequence of α-Fourier coefficients $(-1 < \alpha < +\infty)$ is constructed. When $\alpha = 0$ we obtain the ordinary Fourier coefficients. The solution is based on the theorem of Rubel—Taylor and Blaschke—Djrbashian products.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. A. Rubel, B. A. Taylor.* A. Fourier series method for meromorphic and entire functions, Bul. Soc. Math. France, 96, 1968, 53—96.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
3. *Г. В. Микаелян.* О росте произведений Бляшке—Джрбашяна, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XVI, № 6, 1981.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математика

М. А. МКРТЧЯН, А. П. ЮЖАКОВ

МНОГОГРАННИК НЬЮТОНА И РЯДЫ ЛОРАНА РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ n ПЕРЕМЕННЫХ

Как известно, функция, голоморфная в n-круговой области пространства $\mathbf{C}^n$, разлагается в этой области в кратный ряд Лорана. Коэффициенты ряда Лорана выражаются интегралом (см. [1], стр. 41) и не всегда могут быть вычислены эффективно. В работах [2—5](см. также [6], §§ 20,21), посвященных применению кратного логарифмического вычета к неявным функциям и системам алгебраических уравнений, рассмотрены некоторые случаи, когда вычет рациональной функции (коэффициент при $z_1^{-1}\ldots z_n^{-1}$ соответствующего ряда Лорана) выражается рационально через коэффициенты числителя и знаменателя.

В настоящей заметке исследуется вопрос о существовании различных разложений Лорана рациональной функции n переменных и вычислении их коэффициентов. Оказывается этот вопрос можно связать с понятием многогранника Ньютона многочлена. Показано (теоремы 1, 2), что каждой вершине многогранника Ньютона многочлена Q соответствует n-круговая область с центром в начале координат, в которой рациональная функция $\dfrac{P}{Q}$ разлагается в ряд Лорана, причем коэффициенты ряда выражаются рационально через коэффициенты многочленов P, Q. Заметим, что случаи, встречающиеся в [2—5], охватываются теоремой 1. Как и в [2—5] выписываются явные формулы ((1.4), (1.5)). Полученные результаты позволяют оценить снизу размерность группы гомологий $H_n(\mathbf{C}^n\setminus\{z: Q(z)=0\})$ числом вершин многогранника Ньютона, не лежащих на координатных плоскостях (теорема 3, следствие 1).

§ 1. Обозначения. Основные результаты

Обозначим $N, Z, R, \mathbf{C}$, соответственно, множества натуральных (включая 0), целых, вещественных, комплексных чисел. Если M — произвольное множество, то $M^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n): x_j\in M\}$. $H_n=\{z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}: z\in\mathbf{C}^n,\ \alpha\in Z^n\}$ — множество мономов от n переменных.

Определение 1. Линейное отношение порядка $\succ$ на множестве H_n назовем мультипликативным, если из условия $z^\alpha\succ z^\beta$ следует $z^{\alpha+\mu}\succ z^{\beta+\mu}$ для любого $\mu\in Z^n$. Здесь $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$.

Определение 2. Многогранником Ньютона многочлена

$$Q(z)=\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha \tag{1.1}$$

называется выпуклая оболочка в R^n множества $\{\alpha\in Z^n: a_\alpha\neq 0\}$. Многогранник Ньютона многочлена Q обозначим $\mathcal{N}(Q)$.

Предложение 1. *Пусть для члена $a_\beta z^\beta$ многочлена* (1.1) *на остове $\Gamma_\beta = \{z \in \mathbf{C}^n \colon |z_1| = \rho_1, \cdots, |z_n| = \rho_n\}$ выполняется неравенство*

$$|a_\beta z^\beta| > |g(z)|, \tag{1.2}$$

где $g(z) = Q(z) - a_\beta z^\beta$. Тогда коэффициенты ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{\alpha \in Z^n} c_\alpha z^\alpha \tag{1.3}$$

рациональной функции $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ (P — произвольный многочлен) в окрестности Γ_β выражаются абсолютно сходящимся рядом

$$c_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathfrak{M} \left[\frac{P(z)}{a_\beta z^{\beta + \alpha}} \left(\frac{g(z)}{a_\beta z^\beta} \right)^k \right], \tag{1.4}$$

где $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, ставящий в соответствие многочлену Лорана его свободный член.

Формулу (1.4) можно также записать в виде

$$c_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_\beta^{k+1} \prod\limits_{j=1}^{n} [\alpha_j + \beta_j (k+1) - 1]!} \times$$

$$\times \left. \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (k+1)(\beta_1 + \cdots + \beta_n) - n} [P(z) g^k(z)]}{\partial z_1^{\alpha_1 + (k+1)\beta_1 - 1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n + (k+1)\beta_n - 1}} \right|_{z=0}.$$

Теорема 1. *Пусть $a_\beta z^\beta$ — старший член многочлена* (1.1) *при некотором мультипликативном отношении порядка $\succ$ в H_n. Тогда*

а) *существуют числа $\rho_1, \cdots, \rho_n$, $\rho_j > 0$ такие, что на остове $\Gamma_\beta = \{z \colon |z_j| = \rho_j,\ j = 1, \cdots, n\}$ выполняется неравенство* (1.2);

б) *в ряде* (1.4) *для каждого α лишь конечное число членов отлично от нуля, т. е. коэффициенты ряда Лорана рациональной функции $f = \dfrac{P}{Q}$ в окрестности Γ_β выражаются рационально через коэффициенты многочленов P и Q.*

Выбор радиусов ρ_j остова Γ_β описан в § 2 при доказательстве теоремы 1.

Замечание 1. Если $f = P / \prod\limits_{j=1}^{m} Q_j$ и $a_{\beta(j)} z^{\beta(j)}$ — старший член многочлена Q_j, $j = 1, \cdots, m$ для некоторого мультипликативного отношения порядка в H_n, то, очевидно, $a_\beta z^\beta = \prod\limits_{j=1}^{n} a_{\beta(j)} z^{\beta(j)}$ является старшим членом многочлена $Q = \prod\limits_{j=1}^{m} Q_j$ для этого отношения порядка. В этом случае коэффициенты c_α ряда Лорана функции f в окрестности Γ_β можно вычислять как по формуле (1.4), так и по формуле

$$c_\alpha = \sum_{k_1, \dots, k_m = 0}^{\infty} \mathfrak{M} \left[P \prod_{j=1}^{m} \frac{(-1)^{k_j}}{a_{\beta(j)} z^{\beta(j)}} \left(\frac{g_j(z)}{a_{\beta(j)} z^{\beta(j)}} \right)^{k_j} \right], \tag{1.5}$$

где $g_j(z) = Q_j(z) - a_{\beta(j)} z^{\beta(j)}$. При этом в ряде (1.5) также для каждого α содержится лишь конечное число членов отличных от нуля.

Замечание 2. В работах [2—5] для формул типа (1.5) в каждом случае даются конкретные оценки числа слагаемых, отличных от нуля. Эти оценки неявно опираются на некоторые частные случаи мультипликативной упорядоченности.

Замечание 3. Из формулы (1.4) следует, что если в «старшем» члене $a_\beta z^\beta$ показатель $\beta_j = 0$, то ряд Лорана (1.3) функции f в окрестности Γ_β не содержит отрицательных степеней переменной z_j.

Теорема 2. *Член $a_\beta z^\beta$ многочлена Q является старшим при некотором мультипликативном отношении порядка тогда и только тогда, когда точка β является вершиной многогранника Ньютона.*

Таким образом, каждой вершине многогранника Ньютона знаменателя рациональной функции соответствует свое лорановское разложение этой функции. При этом коэффициенты рядов Лорана выражаются рационально через коэффициенты числителя и знаменателя.

Остов Γ_β становится n-мерным циклом в $\mathbf{C}^n \setminus \{z: Q(z) = 0\}$, если на нем ввести некоторую ориентацию.

Обозначим $M(Q)$ — множество вершин многогранника Ньютона, не лежащих на координатных плоскостях.

Теорема 3. *Циклы Γ_β, $\beta \in M(Q)$ гомологически независимы в $\mathbf{C}^n \setminus \{z: Q(z) = 0\}$. Цикл $\Gamma_\beta \sim 0$ в $\mathbf{C}^n \setminus \{z: Q(z) = 0\}$, если хотя бы для одного $j \in \{1, \cdots, n\}$ $\beta_j = 0$.*

Отсюда следует, что циклы Γ_β, $\beta \in M(Q)$ образуют базис некоторой подгруппы группы $H_n(\mathbf{C}^n \setminus \{z: Q(z) = 0\})$.

Следствие 1. *Размерность группы гомологий $H_n(\mathbf{C}^n \setminus \{Q(z) = 0\})$ не меньше мощности множества $M(Q)$, т. е. числа вершин многогранника Ньютона многочлена $Q(z)$, не лежащих в координатных плоскостях.*

§ 2. Доказательства. Вспомогательные утверждения

Доказательство предложения 1. Из неравенства (1.2) следует, что функция $f = \frac{P}{Q}$ голоморфна в окрестности Γ_β и, следовательно, разлагается там в ряд Лорана (1.3) с коэффициентами (см. [1], стр. 41).

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\beta} \frac{f(z)\, dz}{z^{\alpha+I}}, \tag{2.1}$$

где $I = (1, \dots, 1)$.

В силу (1.2) ряд геометрической прогрессии

$$\frac{P(z)}{z^{\alpha+I} Q(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{P(z)}{a_\beta z^{\beta+\alpha+I}} \left(\frac{g(z)}{a_\beta z^\beta} \right)^k$$

равномерно и абсолютно сходится на Γ_β. Подставляя его в (2.1), получим

$$c_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\beta} \frac{P(z)}{a_\beta z^{\nu+\beta+I}} \left(\frac{g(z)}{a_\beta z^\beta}\right)^k dz$$

или (1.4), поскольку $\int_{\Gamma_\beta} z^\alpha dz = (2\pi i)^n$, если $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = -1$, и $\int_{\Gamma_\beta} z^\alpha dz = 0$, если $\alpha \in Z^n$, $\alpha \neq (-1, \cdots, -1)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть точка $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ является вершиной многогранника Ньютона $N(Q)$ многочлена (1.1). Так как $N(Q)$ — выпуклый, то существует опорная гиперплоскость $L = \{x \in R^n: \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = d\}$ такая, что $N(Q) \cap L = \{\beta\}$. Можно предполагать, что точки $x \in N(Q)$, $x \neq \beta$ удовлетворяют неравенству $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n < d$. Тогда для членов $a_\alpha z^\alpha \neq a_\beta z^\beta$ многочлена (1.1) имеет место неравенство

$$\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n < \lambda_1 \beta_1 + \cdots + \lambda_n \beta_n. \tag{2.2}$$

Введем на H_n отношение порядка $\succ$ следующим образом. Будем полагать $z^\beta \succ z^\alpha$, если существует индекс $j \in \{1, \cdots, n\}$ такой, что $\lambda_i \alpha_i + \cdots + \lambda_i \alpha_i = \lambda_1 \beta_1 + \cdots + \lambda_i \beta_i$ для $i = j+1, \cdots, n$ и $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_j \alpha_j < \lambda_1 \beta_1 + \cdots + \lambda_j \beta_j$. Очевидно это отношение порядка является мультипликативным и для него в силу наравенства (2.2) $a_\beta z^\beta$ является старшим членом многочлена $Q(z)$.

Обратно, пусть $a_\beta z^\beta$ является старшим членом многочлена (1.1) при некотором мультипликативном отношении порядка $\succ$ в H_n. Предположим, что β не является вершиной $N(Q)$. Так как многогранник $N(Q)$ выпуклый, а его вершины $\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)}$ имеют целочисленные координаты, то найдутся неотрицательные рациональные числа $q_1, \cdots, q_k$ такие, что $q_1 + \cdots + q_k = 1$ и $q_1 \alpha^{(1)} + \cdots + q_k \alpha^{(k)} = \beta$. Умножая эти равенства на общий знаменатель s чисел $q_1, \cdots, q_k$ получим равенства

$$p_1 \alpha^{(1)} + \cdots + p_k \alpha^{(k)} = s\beta, \quad p_1 + \cdots + p_k = s, \tag{2.3}$$

где $p_1, \cdots, p_k$ — неотрицательные целые числа. Так как $a_\beta z^\beta$ — старший член многочлена Q при данном отношении порядка, то $z^\beta \succ z^{\alpha^{(j)}}$, $j = 1, \cdots, k$. Отсюда и из (2.3), учитывая мультипликативность $\succ$, имеем

$$z^{s\beta} = z^{p_1\beta + \cdots + p_k\beta} \succ z^{p_1\alpha^{(1)} + \cdots + p_k\alpha^{(k)}} = z^{s\beta}.$$

Противоречие.

При доказательстве теоремы 1 нами будет использоваться теорема 2 и следующая

Лемма. *Если для любых двух элементов $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ множества $E \subset N^m$, $m \geq 2$, существуют индексы $i, j \in \{1, \cdots, m\}$ такие, что $\alpha_i > \beta_i$, $\alpha_j > \beta_j$, то множество E конечно.*

Доказательство проведем индукцией по m. Пусть $m = 2$. Так как в любом подмножестве чисел из N есть наименьшее число, то найдутся

$\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)$, $\gamma=(\gamma_1, \gamma_2)\in E$ такие, что $\lambda_1\leqslant\alpha_1$, $\eta_2\leqslant\alpha_2$ для любого $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)\in E$. Тогда согласно условию леммы $\lambda_1\leqslant\alpha_1\leqslant\gamma_1$, $\eta_2\leqslant\alpha_2\leqslant\lambda_2$ для любого $\alpha\in E$, т. е. E конечно.

Предположим теперь, что лемма верна для $m-1$, $m>2$ и докажем ее для m. Фиксируем произвольный элемент $\lambda=(\lambda_1,\cdots, \lambda_m)\in E$. Из условия леммы следует, что $E=\bigcup\limits_{l=1}^{m}\bigcup\limits_{j=1}^{\lambda_l} E_{lj}$, где $E_{lj}=\{\alpha\in E: \alpha_l=j\}$. Но по предположению индукции E_{lj} конечно. Значит E также конечно.

Доказательство теоремы 1. а). По теореме 2 β является вершиной многограника Ньютона $N(Q)$ многочлена (1.1). Возьмем $\rho_1=t^{\lambda_1},\cdots, \rho_n=t^{\lambda_n}$, где $\lambda_1,\cdots, \lambda_n$ — коэффициенты уравнения опорной гиперплоскости к $N(Q)$ в точке β, $t>0$. В силу неравенства (2.2) при t достаточно большом ($t>t_0$) на остове $\Gamma_\beta=\{z\in\mathbf{C}^n: |z_j|=\rho_j, j=1,\cdots$ $\cdots, n\}$ будет выполняться неравенство

$$|a_\alpha z^\alpha|=|a_\alpha|\, t^{\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n}<\frac{1}{m}|a_\beta z^\beta|=\frac{1}{m}\,|a_\beta|\, t^{\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n},$$

где $\alpha\neq\beta$, m — число членов многочлена $g(z)$, и, следовательно, неравенство (1.2).

б). Ввиду линейности функционала $\mathfrak{M}$ достаточно рассмотреть случай, когда $P(z)=z^\mu$. Пусть $g(z)=\sum\limits_{j=1}^{m} a_{\alpha(j)} z^{\alpha(j)}$. Тогда k-й член ряда (1.4) можно представить в виде

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=k}\frac{(-1)^k a_{\alpha(1)}^{k_1}\cdots a_{\alpha(m)}^{k_m}\, k!}{a_\beta^{k+1}\, k_1!\cdots k_m!}\mathfrak{M}\left[\frac{z^\mu}{z^{\beta+\alpha}}\left(\frac{z^{\alpha(1)}}{z^\beta}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{z^{\alpha(m)}}{z^\beta}\right)^{k_m}\right],$$

где m—число членов многочлена $g(z)$.

Согласно определению функционала $\mathfrak{M}$ значение

$$\mathfrak{M}\left[z^{\mu-\beta-\alpha}\left(z^{\alpha(1)-\beta}\right)^{k_1}\cdots\left(z^{\alpha(m)-\beta}\right)^{k_m}\right]\neq 0$$

тогда и только тогда, когда

$$z^{\mu-\beta-\alpha}\left(z^{\alpha(1)-\beta}\right)^{k_1}\cdots\left(z^{\alpha(m)-\beta}\right)^{k_m}=z^0=1. \tag{2.4}$$

Множество E наборов $(k_1,\cdots, k_m)$, определяемых условием (2.4)' удовлетворяет условиям леммы. Действительно, если $(p_1,\cdots, p_m)\in E$, $(p_1,\cdots, p_m)\neq(k_1,\cdots, k_m)\in E$, то из (2.4) следует, что

$$\left(z^{\alpha(1)-\beta}\right)^{k_1-p_1}\cdots\left(z^{\alpha(m)-\beta}\right)^{k_m-p_m}=1. \tag{2.5}$$

С другой стороны, так как $a_\beta z^\beta$ — старший член многочлена (1.1), то $z^{\alpha(j)-\beta}\to 1$, $j=1,\cdots, m$. Таким образом, (2.5) возможно лишь тогда, когда $k_i-p_i>0$ и $k_j-p_j<0$ для некоторых $i, j\in\{1,\cdots, m\}$. По лемме E конечно, следовательно множество $\{k=k_1+\cdots+k_m: (k_1,\cdots$ $\cdots, k_m)\in E\}$ конечно.

Из теорем 1, 2 вытекает

Предложение 2. *Если β — вершина многогранника Ньютона многочлена Q, то*

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_\beta} \frac{P(z)\,dz}{Q(z)} = c_{-I} = \sum_{k>0} (-1)^k \mathfrak{M}\left[\frac{P(z)}{a_\beta z^{\beta-I}}\left(\frac{g(z)}{a_\beta z^\beta}\right)^k\right]. \quad (2.6)$$

При этом в последней сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Предложение 3. *Для любых* $\alpha, \beta \in M(Q)$ *интеграл*

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_\beta} \frac{a_\alpha z^{\alpha-I}\,dz}{Q(z)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha=\beta \\ 0, & \text{если } \alpha\neq\beta. \end{cases} \quad (2.7)$$

Доказательство. Согласно определению $M(Q)$ из $\alpha \in M(Q)$ следует $\alpha_j \geqslant 1$, $j=1,\cdots,m$. Положим в (2 6) $P(z) = a_\alpha z^{\alpha-I}$, тогда члены ряда (2.6) можно представить в вид

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=k} \frac{(-1)^k a_\alpha a_{\alpha(1)}^{k_1}\cdots a_{\alpha(m)}^{k_m}\, k!}{k_1!\cdots k_m!\, a_\beta^{k+1}}\, \mathfrak{M}\left[\frac{z^{\alpha-I}}{z^\beta}\left(\frac{z^{\alpha(1)}}{z^\beta}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{z^{\alpha(m)}}{z^\beta}\right)^{k_m}\right]. \quad (2.8)$$

Так как β — вершина $N(Q)$, то по теореме 2 $a_\beta z^\beta$ является старшим членом многочлена Q для некоторого мультипликативного отношения порядка $\succ$. Тогда $z^\beta \succ z^{\alpha(j)}$, $j=1,\cdots,m$, $z^\beta \succ z^\alpha$, если $\alpha\neq$ Следовательно

$$\mathfrak{M}\left[\frac{z^\alpha}{z^\beta}\left(\frac{z^{\alpha(1)}}{z^\beta}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{z^{\alpha(m)}}{z^\beta}\right)^{k_m}\right]=1,$$

если $\alpha=\beta$, а $k_1=\cdots=k_m=k=0$ и равно 0, если $\alpha\neq\beta$, либо $\alpha=\beta$ но $k_1+\cdots+k_m=k>0$. Отсюда и из (2.8) и (2.6) вытекает (2.7),

Доказательство теоремы 3. Докажем, что циклы Γ_β $\beta\in M(Q)$, гомологически независимы. Допустим противное, что существуют числа λ_β, $\beta\in M(Q)$ не все равные нулю, для которых цикл $\Gamma = \sum_{\beta\in M(Q)} \lambda_\beta \Gamma_\beta \sim 0$ в $\mathbf{C}^n \setminus \{z: Q(z)=0\}$. Пусть $\lambda_\alpha \neq 0$. Так как форма $\omega_\alpha = a_\alpha z^{\alpha-I}\,dz/Q(z)$ голоморфна и замкнута в $\mathbf{C}^n\setminus\{z: Q(z)=0\}$, то по теореме Стокса (см. [1]) $\int_\Gamma \omega_\alpha = 0$. С другой стороны, из предложения 3 следует, что

$$\int_\Gamma \omega_\alpha = \sum_{\beta\in M(Q)} \lambda_\beta \int_{\Gamma_\beta} \omega_\alpha = \lambda_\alpha \neq 0.$$

Противоречие.

Пусть теперь β — вершина $N(Q)$ и $\beta_j = 0$. На остове Γ_β выполняется неравенство (1.2). Так как $a_\beta z^\beta$ не зависит от z_j, то по принципу максимума при фиксированных $z_k \in \{|z_k| = \rho_k\}$, $k\neq j$, неравенство (1.2) выполняется при всех $z_j \in \{|z_j| \leqslant \rho_j\}$. Следовательно, $B = \{z: |z_k| = \rho_k,\ k\neq j,\ |z_j|\leqslant \rho_j\} \subset \mathbf{C}^n \setminus \{z: Q(z)=0\}$. Но при соответствующей ориентации Γ_β и B цикл $\Gamma_\beta = \partial B$. Таким образом, $\Gamma_\beta \sim 0$ в $\mathbf{C}^n\setminus\{z: Q(z)=0\}$.

Институт физики СО АН СССР

Поступила 27.IV.1981

Մ. Ա. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ա. Պ. ՅՈՒԺԱԿՈՎ. Նյուտոնի բազմանիստը և n փոփոխականի ռացիոնալ ֆունկցիայի Լորանի շարքերը *(ամփոփում)*

Քննարկվում է n փոփոխականի ռացիոնալ ֆունկցիայի տարբեր Լորանի շարքերի գոյության և նրանց գործակիցների հաշվման հարցերը։

Այս խնդրի մասնակի լուծումը կապված է $Q(z)=\sum c_\alpha z^\alpha$ բազմանդամի $N(Q)$ Նյուտոնի բազմանիստի հասկացության հետ ($\{\alpha\in R^n : c_\alpha\neq 0\}$) բազմության ուռուցիկ թաղանթը R^n-ում),

Ցույց է տրվում (թեորեմներ 1, 2), որ Նյուտոնի բազմանիստի յուրաքանչյուր գագաթին համապատասխանում է n-շրջանային տիրույթ, որում P/Q ռացիոնալ ֆունկցիան վերլուծվում է Լորանի շարքի, ընդ որում շարքի գործակիցները արտահայտվում են P և Q բազմանդամների գործակիցներով ռացիոնալորեն։

M. A. MKRTCHIAN, A. P. JUZAKOV. *The Newton polytope and the Laurent series of rational functions of n variables* (summary)

The questions of existence of Laurent series and of calculating the coefficients of these series are considered.

It is shown (theorems 1, 2) that to each vertex of the Newton polytope of a polynomial $a(z)$ corresponds an n-circular domain. Where the rational function P/Q can be expanded to Laurent series. The coefficients of this series are expressed rationally by coefficients of polynomials P and Q.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. В. Шабат*. Введение в комплексный анализ, ч. 2, М., «Наука», 1976.
2. *А. П. Южаков*. О применении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды, Мат. сб., № 2, 1975, 177—192.
3. *Л. А. Айзенберг*. Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и ее приложении к решению систем алгебраических уравнений, ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 505—508.
4. *Л. А. Айзенберг, А. К. Цих*. О применении многомерного логарифмического вычета к системам алгебраических уравнений, Сибирский матем. журн., 20, № 4, 1979, 699—703.
5. *А. П. Южаков*. О вычислении значений многочлена в решениях системы алгебраических уравнений, в кн.: «Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа», Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1980, 197—214.
6. *Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков*. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, «Наука», 1979.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ СС
Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математик

Р. М. МЕГРАБЯН

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ РИМАНА О БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Для ряда $\sum x_n$ из линейного пространства X через $M(\sum x_n)$ будем обозначать множество тех $x \in X$, для каждого из которых существует перестановка $\tau(i) = n_i$ натурального ряда такая, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_{\tau(i)} = x$.

Через s обозначается линейное пространство числовых последовательностей с топологией, эквивалентной покоординатной сходимости, а через T — линейное пространство вещественных функций на $[0,1]$ с топологией, эквивалентной сходимости всюду на $[0,1]$.

Одна из эквивалентных в R^1 формулировок теоремы Римана выглядит так: для безусловной сходимости ряда $\sum a_n$ необходимо и достаточно, чтобы $M(\sum a_n)$ состояло из одного элемента (кратко card $M = 1$).

Известно, что эта формулировка сохраняет силу и для рядов из R^k (см. [1], [2], а также [4]).

Б. С. Кашин показал (см. [4]), что подобное утверждение для пространства T неверно, более того он построил пример ряда

$$\sum_{1}^{\infty} f_n(x), \qquad (1)$$

состоящего из непрерывных функций, для которого card$M(\sum f_n) = 1$ (точнее $M(\sum f_n) = \{0\}$; сходимость в смысле T) и при этом выполняется условие

$$\sum_{1}^{\infty} |f_n(x)| = \infty \quad \forall\, x \in [0, 1]. \qquad (2)$$

В настоящей заметке, упрощая метод Б. С. Кашина, мы доказываем справедливость такого утверждения:

Теорема 1. *Существует ряд* $\sum f_n(x)$, $f_n \in C[0, 1]$, *удовлетворяющий условиям:*

а) $\sum f_n$ *сходится к нулю равномерно на* $[0,1]$.

б) *если для какой-нибудь перестановки* σ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ *сходится всюду на* $[0,1]$, *то обязательно к нулю для всех* x, *причем равномерно на* $[0,1]$,

в) $\sum |f_n(x)| = \infty \ \forall x \in [0,1]$.*

* В примере Б. С. Кашина $f_n(x) \underset{n}{\to} 0$ неравномерно на $[0,1]$.

Далее мы показываем, что для пространства s, которое занимает в известном смысле промежуточное положение между R^k и T, ситуация такова же, как и в R^k.

Теорема 2. *Для ряда* $\sum x_i$, $x^i \in s$, *безусловная сходимость эквивалентна условию* $\operatorname{card} M(\sum x_i) = 1$.

В связи с этой теоремой уместно отметить следующее утверждение, принадлежащее Р. И. Овсепяну: если X— бесконечномерное банахово пространство (в нормированной или слабой топологии) или

$$x = L^p(x, \Omega, \mu),\ 0 < p < 1,\ \dim L^p(x, \Omega, \mu) = \infty$$

(μ — произвольная мера) или $X = L^0(X, \Omega, \mu)$ и μ имеет неатомичную часть, то в X существует ряд $\sum x_i$, для которого $\operatorname{card} M = 1$, однако он не является безусловно сходящимся.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через A множество числовых последовательностей $a = (a_1, a_2, \cdots)$, где $a_i = 1$ или 0 и пусть $n_a = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Для $\gamma \in (0,1)$ введем обозначение $B = B_\gamma = \{a \in A: \frac{n_a}{n} \geqslant \gamma,\ \forall n\}$.

Пусть $C = \{x = 0, a_1, a_2, \cdots; (a_1, a_2, \cdots) \in B\}$.

Легко проверить, что C— замкнутое подмножество отрезка [0,1], поэтому $D \equiv [\inf C, \sup C] \setminus C$ является открытым множеством. Пусть (α_i, β_i) $i = 1, 2, \cdots$ — составляющие интервалы множества D.

Положим $\varphi_{2\cdot i-1}(x) = \frac{a_i}{\sqrt{i}}$, где $x = 0, a_1, a_2, \cdots \in C$ $\varphi_{2\cdot i}(x) \equiv - \varphi_{2\cdot i-1}(x)$, $i = 1, 2, \cdots$,

$$f_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & x \in C \\ \varphi_i(\alpha_j) & \alpha_j < x \leqslant \gamma_j^i = \beta_j - \dfrac{\beta_j - \alpha_j}{i} \\ \varphi_i(\inf C) & 0 \leqslant x \leqslant \inf C \\ \varphi_i(\sup C) & \sup C \leqslant x \leqslant 1 \\ \text{отрезок прямой, соединяющий точки } (\gamma_j^i, f_i(\gamma_j^i)) \text{ и} \\ (\beta_j, \varphi_i(\beta_j)). \end{cases}$$

Покажем, что для ряда $\sum f_i$ выполняются все утверждения теоремы 1. Сначала установим несколько простых утверждений.

1. Если для $a \in A$ выполняется неравенство $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n_a}{n} > 0$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1}{\sqrt{i}} = \infty.$$

Доказательство. $\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{1}{\sqrt{i}} \geqslant \frac{N_a}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} \frac{N_a}{N}$.

2. Для любых положительных чисел β и ε существует $N = N(\beta, \varepsilon)$ такое, что для любого $a \in A$, удовлетворяющего условию

$$\sum a_i \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant \beta \tag{3}$$

и для $\forall\ n > N\ n_a/n < \varepsilon$. В частности, если $a_i = 0$, $i \leqslant N$, то $n_a/n < < \varepsilon\ \forall n$.

Доказательство. Возьмем N настолько большим, что $\beta/\sqrt{N} < \varepsilon$. Тогда для $\forall a \in A$, удовлетворяющего условию (3), имеем $\frac{n_a}{n} = \frac{n_a}{\sqrt{n}\ \sqrt{n}} \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ при $n > N$.

Очевидно, что ряд $\sum \varphi_i(x)$ сходится к нулю равномерно на C и что φ_i непрерывны на C, но тогда в силу определения функций f_i они сами непрерывны на [0,1], и ряд (1) сходится к нулю равномерно на [0,1]. Далее, поскольку $\sum\limits_1^\infty |\varphi_i(x)| = \infty\ \forall x \in C$, то условие (2) выполнено.

Пусть σ — взаимнооднозначное отображение множества натуральных чисел на себя и $x_0 = 0, 1\,1\,1 \cdots \in C$. Назовем член $\varphi_{\sigma(j)}(x_0)$, $j < N$ сокращающийся в выражении

$$\varphi_{\sigma(1)}(x_0) + \cdots + \varphi_{\sigma(N)}(x_0), \tag{4}$$

если $-\varphi_{\sigma(j)}(x_0) \in \{\varphi_{\sigma(i)}(x_0),\ i = 1, \cdots, N\}$, в противном случае назовем его несокращающимся.

Обозначим через (α^+, N, σ), (α^-, N, σ) сумму положительных, соответственно отрицательных, несокращающихся членов в выражении (4).

3. Если $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}\ (\alpha^+, N, \sigma) = \underline{\lim\limits_{N\to\infty}}\ (\alpha^-, N, \sigma) = 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi_{\sigma(i)}(x)$ сходится к нулю равномерно на C.

Доказательство. Утверждение является следствием очевидного неравенства

$$(\alpha^-, N, \sigma) \leqslant \sum_1^N \varphi_{\sigma(i)}(x) \leqslant (\alpha^+, N, \sigma)\ \ \forall\ N,\ \forall\ x \in C.$$

4. Если $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}\ (\alpha^+, N, \sigma) = \beta_1 > 0$ (или $\underline{\lim\limits_{N\to\infty}}\ (\alpha^-, N, \sigma) = \beta_2 < 0$), то существует точка $\bar{x} \in C$, в которой ряд $\sum \varphi_{\sigma(i)}(\bar{x})$ расходится.

Доказательство. Если расходится ряд $\sum\limits_1^\infty \varphi_{\sigma(i)}(x_0)$, то $\bar{x} \equiv x_0$.

Предположим $\sum\limits_1^\infty \varphi_{\sigma(i)}(x_0) = p$. Пусть $\gamma \in (0,1)$. Для $\beta = 1$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1-\gamma}{3}\right)$ выберем n_0 в соответствии с пунктом 2. На k-ом шаге берем N'_k настолько большим, чтобы $(\alpha^+, N'_k, \sigma) > \beta_0/2$* и $\varphi_i(x_0)$, $i = 1, \cdots, 2 \cdot n_{k-1}$ сокращается в выражении

$$\varphi_{\sigma(1)}(x_0) + \cdots + \varphi_{\sigma(N'_k)}(x_0).$$

---

* $\beta_0 = \min\{1, \beta_1\}$

Из $\{\varphi_{\sigma(i)}(x_0)\}_{i=1}^{N_k'}$ выбираем произвольным образом такое количество положительных несокращающихся членов, что их сумма s_k удовлетворяет неравенству

$$\beta_0/2 \leqslant s_k \leqslant 1. \tag{5}$$

Теперь выберем натуральные числа N_k и n_k так, чтобы числа $\varphi_{\sigma(i)}(x_0)$, $i = 1, \cdots, N_k'$ сокращались в выражении

$$\varphi_{\sigma(1)}(x_0) + \cdots + \varphi_{\sigma(N_k)}(x_0),$$

$$\{\varphi_{\sigma(i)}(x_0)\}_{i=1}^{N_k} \subset \{\varphi_i(x_0)\}_{i=1}^{2\cdot n_k} \text{ и } n_k > 2\cdot n_{k-1}. \tag{6}$$

Ясно, что выбранные согласно (5) положительные несокращающиеся члены на k-ом шаге принадлежат множеству

$$\{\varphi_i(x_0)\}_{i=2\cdot n_{k-1}}^{2\cdot n_k}. \tag{7}$$

Положим $a^k = (a_1^k, a_2^k, \cdots) \in A$, где $a_i^k = 1$ тогда и только тогда, если $\varphi_{2\cdot i-1}(x_0)$ присутствует в сумме s_k. Из (7) следует

$$a_i^k = 0 \ \forall\ i \leqslant n_{k-1} \text{ и } \forall\ i > n_k. \tag{8}$$

Из (5) и определения a^k имеем для любого $k \geqslant 1 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant 1.$

Но тогда в силу пункта 2 имеем

$$\frac{n_{a^k}}{n} < \varepsilon \ \forall n, \forall k, \tag{9}$$

откуда

$$\frac{n_{a^k}}{n_k} < \varepsilon \quad \text{для } \forall n > n_k, \ \forall\ k. \tag{10}$$

Пусть $\bar{a} = (1, 1, 1, \cdots) - \sum_{1}^{\infty} a^k$ (здесь имеется в виду покоординатная сумма и разность).

Из (8) следует, что $\bar{a} \in A$. Покажем, что $\bar{a} \in B$.

В самом деле, при $n \leqslant n_0$ имеем $\frac{n_{\bar{a}}}{n} = 1$. Если же $n_{m-1} < n < n_m$, то в силу (6), (9), (10) получим

$$\frac{n_{\bar{a}}}{n} = \frac{1}{n}\left(n - \sum_{k=1}^{m} n_{a_k}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{n_{a^k}}{n} \geqslant$$

$$> 1 - (2^{-(m-2)} \cdot \frac{n_{a^1}}{n_1} + 2^{-(m-3)} \cdot \frac{n_{a^2}}{n_2} + \cdots + \frac{n_{a^{m-1}}}{n_{m-1}} + \frac{n_{a^m}}{n} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \left(2\varepsilon + \sum_{1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-i}\right) = 1 - 3\cdot\varepsilon > \gamma,$$

откуда следует, что $\bar{a} \in B\ (= B_\gamma)$.

Пусть $\bar{x} = 0, \bar{a}_1\bar{a}_2 \cdots$ (где $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2 \cdots)$). Из конструкции a следует

$$\sum_1^{N_k'} \varphi_{\sigma(l)}(\bar{x}) = \sum_1^{N_k'} \varphi_{\sigma(l)}(x_0) - s_k \ \forall\ k,$$

$$\sum_1^{N_k} \varphi_{\sigma(l)}(\bar{x}) = \sum_1^{N_k} \varphi_{\sigma(l)}(x_0) \quad \forall\ k,$$

откуда вытекает

$$\lim_{k\to\infty} \sum_1^{N_k} \varphi_{\sigma(l)}(\bar{x}) = p,$$

$$\varliminf_{k\to\infty} \sum_1^{N_k'} \varphi_{\sigma(l)}(\bar{x}) \leqslant p - \beta_0/2,$$

а это влечет расходимость ряда $\sum\limits_1^\infty \varphi_{\sigma(l)}(\bar{x})$ и 4-й пункт доказан.

Из пунктов 3 и 4 следует, что для любой перестановки возможны 2 случая:

а) $\sum \varphi_{\sigma(l)}(x)$ сходится к нулю равномерно на C, следовательно ряд $\sum f_{\sigma(l)}(x)$ сходится к нулю равномерно на $[0,1]$,

б) $\sum \varphi_{\sigma(l)}(x)$ расходится в некоторой точке множества C, но тогда в этой же точке расходится и ряд $\sum f_{\sigma(i)}(x)$.

Теорема 1 доказана.

Покажем еще, что рассматриваемые в теореме функции можно брать из класса C^∞.

Пусть $\sum \varepsilon_k < \infty$, $\varepsilon_k > 0$. Пусть $F_1 \in C^\infty$ и $\|F_1 - f_1\|_\infty < \varepsilon_1$. Далее $F_2 \in C^\infty$ выбираем так, чтобы $\|(F_1 + F_2) - (f_1 + f_2)\|_\infty < \varepsilon_2$. Отсюда следует, что $\|F_2 - f_2\|_\infty < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Затем берем $F_3 \in C^\infty$ таким, чтобы $\left\| \sum\limits_1^3 F_i - \sum\limits_1^3 f_i \right\|_\infty < \varepsilon_3$. Но тогда $\|F_3 - f_3\|_\infty < \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ и т. д. Ясно, что $\sum\limits_1^\infty \|F_n - f_n\|_\infty < \infty$. Нетрудно проверить, что ряд $\sum F_n$ искомый.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся некоторые обозначения и вспомогательные утверждения.

Если $y = (y^1, y^2, \cdots)$ — элемент из s или $y = (y^1, \cdots, y^m)$ — элемент из R^m и $k < m$, то обозначим $(y)^k = (y^1, \cdots, y^k) \in R^k$.

Аналогично, если E — подмножество s или R^m, то обозначим $(E)^k = \{(y)^k\colon\ y \in E\}$.

Для ряда

$$\sum_{i=1}^\infty x_i \tag{11}$$

с элементами из s множество $M \equiv M(\sum x_i)$ определяется как и ранее. Далее обозначим $M^k = \{x \in R^k\}$; существует перестановка τ такая, что $\sum_\tau (x_i)^k = x$. Положим еще

$$(m, n) \equiv \{m, m+1, \cdots, n\},$$

$$\tau(m, n) = \{\tau(m), \tau(m+1), \cdots, \tau(n)\}.$$

Лемма 1. (*Е. Штейниц, см.* [1], *а также* [3], [5]). *Для любого натурального числа k существует число B_k такое, что для любой конечной системы $x_1, \cdots, x_N$ элементов из R^k, удовлетворящей условию $\sum_1^N x_i = 0$, существует перестановка τ множества $\{1, 2, \cdots, N\}$ такая, что $\left\|\sum_{1}^{m} {}_\tau x_i\right\| \leqslant B_k \cdot \max_{1<i<N} \|x_i\|$, $1 \leqslant m \leqslant N$.*

Мы будем пользоваться следующими двумя очевидными следствиями этой леммы.

Следствие 1. *Для любой конечной системы $x_1, \cdots, x_N$ элементов из R^k существует перестановка τ множества $\{1, \cdots, N\}$ такая, что*

$$\left\|\sum_{1}^{m} {}_\tau x_i\right\| \leqslant B_k \cdot \max_{1<i<N} \|x_i\| + B_k \left\|\sum_1^N x_i\right\| \ \forall\ m \in (1, N).$$

Следствие 2. (*см.* [3], *лемма* 1). *Пусть $x_i \in R^k$ $i = 1, 2, \cdots$ и $\|x_i\| \underset{i}{\to} 0$. Если подпоследовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\sum_{i=1}^{n_m} {}_\tau x_i \underset{m}{\to} x$ в R^k, то существует перестановка $\bar\tau$ такая, что для любого*

$$m, \bar\tau\colon (n_{m-1}+1, n_m) \to \tau(n_{m-1}+1, n_m) \text{ и } \sum_{1}^{\infty} {}_{\bar\tau} x_i = x.$$

Лемма 2. *Для произвольного ряда*

$$\sum x_i \quad x_i \in s$$

верно:

1°. *При фиксированном k, если $M^{k+1} \neq \varnothing$, то $M^k = (M^{k+1})^k$.*

2°. *Если $y \in s$ и для любого $k=1, 2, \cdots$ $(y)^k \in M^k$, то $y \in M$.*

3°. *Если $M \neq \varnothing$, то $M^k = (M)^k$ для всех $k = 1, 2, \cdots$.*

Доказательство леммы 2.

1°. Пусть α и β — такие перестановки, что

$$\sum_\alpha (x_i)^{k+1} = (a^1, \cdots, a^{k+1}),\ \sum_\beta (x_i)^k = (b^1, \cdots, b^k), \tag{12}$$

где $a^1, \cdots, a^{k+1}) \in R^{k+1}$, $(b^1, \cdots, b^k) \in R^k$.

Обозначим $A = (a^1, \cdots, a^k)$, $B = (b^1, \cdots, b^k)$.

Мы должны доказать, что существует такая перестановка τ, что

$$\sum_\tau (x_i)^k = B \tag{13}$$

и ряд $\sum_\tau x_i^{k+1}$ сходится, где x_i^{k+1} — $k+1$-я координата вектора $x_i \in s$.

Допустим противное, т. е. что при всех перестановках τ, удовлетворяющих условию (13), ряд $\sum_\tau x_i^{k+1}$ расходится. Но поскольку в силу (12) $\|(x_i)^k\| \underset{i}{\to} 0$, то по следствию 2 получим, что для всех перестановок τ, удовлетворяющих (13), должны выполняться условия

$$\sum_{l=1}^{m}{}_{\tau}\, x_l^{k+1} \underset{m}{\to} +\infty \quad \text{или} \quad \sum_{l=1}^{m}{}_{\tau}\, x_l^{k+1} \underset{m}{\to} -\infty. \tag{14}$$

Более того, если перестановка τ такая, что для некоторой подпоследовательности натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполняется условие

$$\sum_{l=1}^{m}{}_{\tau}\, (x_l)^k \underset{m}{\to} B, \tag{15}$$

то

$$\sum_{l=1}^{n_m}{}_{\tau}\, x_l^{k+1} \underset{m}{\to} +\infty \quad \text{или} \quad \sum_{l=1}^{n_m}{}_{\tau}\, x_l^{k+1} \underset{m}{\to} -\infty. \tag{16}$$

Таким образом, в силу (12), перестановка β также удовлетворяет условию (14). Не ограничивая общность можно считать, что

$$\sum_\beta x_l^{k+1} = +\infty. \tag{17}$$

Покажем, что тогда для всякой перестановки σ, удовлетворяющей условию (3), должно выполняться равенство

$$\sum_{l=1}^{\infty}{}_{\sigma}\, x_l^{k+1} = +\infty. \tag{18}$$

Действительно, в противном случае из (14) получим, что

$$\sum_{l=1}^{\infty}{}_{\sigma}\, x_l^{k+1} = -\infty.$$

Далее положим $m_0 = 0$ и по индукции определим на p-ом шаге натуральные числа n_p и m_p так, чтобы выполнялись условия

$$\sigma(1, m_{p-1}) \subset \beta(1, n_p) \subset \sigma(1, m_p), \tag{19}$$

$$\left\| \sum_{l=1}^{n_p}{}_{\beta} (x_l)^k - B \right\| < \frac{1}{p}, \quad \sum_{l=1}^{n_p}{}_{\beta}\, x_l^{k+1} > 0, \tag{20}$$

$$\left\| \sum_{l=1}^{m_p}{}_{\sigma} (x_l)^k - B \right\| < \frac{1}{p}, \quad \sum_{l=1}^{m_p}{}_{\sigma}\, x_l^{k+1} < 0. \tag{21}$$

Теперь определим перестановку τ

$$\tau: (m_{p-1}+1,\ n_p) \longleftrightarrow \beta(1, n_p) \setminus \sigma(1, m_{p-1}) \quad \forall\ p,$$

$$\tau: (n_p+1,\ m_p) \longleftrightarrow \sigma(1, m_p) \setminus \beta(1, n_p) \quad \forall\ p.$$

Из (20), (21) и определения τ вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{n_p}{}_{\tau}(x_i)^k=\sum_{i=1}^{n_p}{}_{\beta}(x_i)^k \underset{p}{\rightarrow} B,\ \sum_{i=1}^{n_p}{}_{\tau}x_i^{k+1}=\sum_{i=1}^{n_p}{}_{\beta}x_i^{k+1}>0,$$

$$\sum_{i=1}^{m_p}{}_{\tau}(x_i)^k=\sum_{i=1}^{m_p}{}_{\sigma}(x_i)^k \underset{p}{\rightarrow} B,\ \sum_{i=1}^{m_p}{}_{\tau}x_i^{k+1}=\sum_{i=1}^{m_p}{}_{\sigma}x_i^{k+1}<0.$$

Но это противоречит (15) и (16). Итак, утверждение (18) справедливо.

Очевидно, что подобным образом можно показать, что если хотя бы для одной перестановки τ с условиями (15) и (16) имеем

$$\sum_{i=1}^{n_m}{}_{\tau}x_i^{k+1} \underset{m}{\rightarrow} +\infty, \tag{22}$$

то этот же знак будет реализовываться для всех перестановок с условиями (15), (16).

А теперь построим перестановку τ с условием (15), но для которой не выполняется (22). Этим противоречием будет завершено доказательство пункта 1° леммы 2.

Так как по теореме П. Леви-Штейница M^k — плоское множество и A, $B \in M^k$, то найдется такая перестановка σ, что

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\sigma}(x_i)^k=A+2\cdot(B-A). \tag{23}$$

Положим $n_0=0$, $m_0=0$, $m_0'=0$.

Определим по индукции на p-ом шаге натуральные числа n_p, m_p, m_p' так, что

$$\alpha(1,\ m'_{p-1})\subset\sigma(1,\ n_p)\subset\beta(1,\ m_p)\subset\alpha(1,\ m'_p), \tag{24}$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n_p}{}_{\sigma}(x_i)^k-(A+2(B-A))\right\|<\frac{1}{p}, \tag{25}$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{m_p}{}_{\beta}(x_i)^k-B\right\|<\frac{1}{p},\ \sum_{i=1}^{m_p}{}_{\beta}x_i^{k+1}>a^{k+1}+\sum_{i=1}^{n_p}{}_{\sigma}x_i^{k+1}, \tag{26}$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{m'_p}{}_{\alpha}(x_i)^{k+1}-(a^1,\cdots,a^{k+1})\right\|<\frac{1}{p}. \tag{27}$$

С помощью (24) можно определить перестановку τ так, что для любого $p=1,2,\cdots$

$$\tau\colon(n_{p-1}+m'_{p-1}-m_{p-1}+1,\ n_p)\longleftrightarrow\sigma(n_{p-1}+1,\ n_p)\setminus[\alpha(1,\ m'_{p-1})\setminus$$
$$\setminus\beta(1,\ m_{p-1})],$$
$$\tau\colon(n_p+1,\ n_p+m'_p-m_p)\longrightarrow\alpha(1,\ m'_p)\setminus\beta(1,\ m_p).$$

Из (23), (25—27) и определения τ вытекает, что

$$\sum_{l=1}^{n_p+m_p'-m_p}{}_{\tau}(x_l)^k=\sum_{l=1}^{n_p}{}_{\sigma}(x_l)^k+\sum_{l=1}^{m_p'}{}_{\alpha}(x_l)^k-\sum_{l=1}^{m_p}{}_{\beta}(x_l)^k\underset{p}{\to}B,$$

$$\sum_{l=1}^{n_p+m_p'-m_p}{}_{\tau}x_l^{k+1}=\sum_{l=1}^{n_p}{}_{\sigma}x_l^{k+1}+\sum_{l=1}^{m_p'}{}_{\alpha}x_l^{k+1}-\sum_{l=1}^{m_p}{}_{\beta}x_l^{k+1}<\frac{1}{p}\ \forall p.$$

Но это находится в противоречии с (15) и (22).

Утверждение 1° леммы 2 доказано,

2°. Пусть $y\in s$ и для любого $k=1,2,\cdots$ существует перестановка τ_k такая, что $\sum_{\tau_k}(x_l)^{k+1}=(y)^{k+1}$.

Положим $n_0=0$. Определим по индукции на k-ом шаге число n_k так, что

$$\tau_{k-1}(1,\ n_{k-1})\subset\tau_k(1,\ n_k), \tag{28}$$

$$\left\|\sum_{l=1}^{n_k}{}_{\tau_k}(x_l)^{k+1}-(y)^{k+1}\right\|<\frac{1}{k\cdot B_{k+1}},\ \|(x_i)^{k+1}\|<\frac{1}{(k+1)\,B_{k+1}}\ \forall\, i>n_k. \tag{29}$$

Обозначим $\Omega_k=\tau_k(1,\ n_k)\setminus\tau_{k-1}(1,\ n_{k-1})$.

Из (28) и (29) следует

$$\left\|\sum_{l\in\Omega_k}{}_{\tau}(x_l)^k\right\|=\left\|\sum_{l=1}^{n_k}{}_{\tau_k}(x_l)^k-\sum_{l=1}^{n_{k-1}}{}_{\tau_{k-1}}(x_l)^k\right\|\leqslant\frac{1}{k\cdot B_k}+\frac{1}{(k-1)\,B_k}. \tag{30}$$

Из следствия 1 и из (29), (30) вытекает существование перестановки τ такой, что

$$\tau:(n_{k-1}+1,\ n_k)\to\Omega_k\ \forall\, k\geqslant 1$$

и

$$\left\|\sum_{l=n_{k-1}+1}^{m}{}_{\tau}(x_l)^k\right\|\leqslant\max_{n_{k-1}<l<n_k}\|(x_{\tau(l)})^k\|\cdot B_k+\left\|\sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k}{}_{\tau}(x_l)^k\right\|\cdot B_k=$$

$$=\max_{l\in\Omega_k}\|(x_l)^k\|\cdot B_k+\left\|\sum_{l\in\Omega_k}(x_l)^k\right\|\cdot B_k\leqslant B_k\left(\frac{2}{k\cdot B_k}+\frac{1}{(k-1)\,B_k}\right)<\frac{3}{k-1}$$

для любого m, $n_{k-1}<m<n_k$.

При $p>k$ из (29) и того, что если $x\in s$, то $\|(x)^k\|\leqslant\|(x)^{p+1}\|$, получаем

$$\left\|\sum_{l=1}^{n_p}{}_{\tau}(x_l)^k-(y)^k\right\|\leqslant\left\|\sum_{l=1}^{n_p}{}_{\tau}(x_l)^{p+1}-(y)^{p+1}\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{l=1}^{n_p}{}_{\tau_p}(x_l)^{p+1}-(y)^{p+1}\right\|<\frac{1}{p},$$

$$\left\|\sum_{l=n_{p-1}+1}^{m}{}_{\tau}(x_l)^k\right\|\leqslant\left\|\sum_{l=n_{p-1}+1}^{m}{}_{\tau}(x_l)^p\right\|\leqslant\frac{3}{p-1},\ n_{p-1}<m\leqslant n_p.$$

Отсюда вытекает сходимость ряда $\sum_{1}^{\infty} (x_i)^k$ и $\sum_{1}^{\infty} (x_i)^k=(y)^k$ $(\forall\ k)$.

Следовательно $\sum x_i=y$ и $y\in M$. Утверждение 2° леммы 2 доказано.

3°. Включение $(M)^k\subset M^k$ $\forall\ k$ очевидно.

Зафиксируем i и докажем, что $(M^i)\supset M^i$. Пусть $(y^1,\cdots, y^i)\in M^i$. Поскольку M—непустое множество, то, очевидно, что таковы же все M^k и тогда в силу 1° существует такое y^{i+1}, что $(y^1,\cdots, y^i, y^{i+1})\in M^{i+1}$. Аналогично рассуждая и дальше, мы получим бесконечный вектор $y=(y^1,\cdots, y^i,\cdots)$, удовлетворяющий условиям $(y)^k\in M^k$ $\forall\ k$ и, следовательно, по пункту 2° $y\in M$, а потому $(y)^i\in(M)^i$.

Доказательство теоремы 2.

Пусть $\text{card}\, M(\sum x_i)=1$. В силу пункта 3° леммы 2 имеем для любого k, $\text{card}\, M^k=1$ и тогда по теореме П. Леви—Е. Штейница ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^k$ безусловно сходится в R^k, а значит и покоординатно. Отсюда сразу следует безусловная сходимость ряда $\sum x_i$ в s. Обратная часть утверждения теоремы 2 очевидна.

З а м е ч а н и е. Лемма 2 доставляет нам другое доказательство теоремы С. Л. Троянски (см. [5]), которая утверждает, что для условно сходящегося ряда $\sum x_i$ в s его множество сумм M является смещенным подпространством.

В самом деле, если $x, y\in M$ и z—произвольная точка, лежащая на прямой, проходящей через x и y, то ясно, что $(x)^k\in M^k$, $(y)^k\in M^k$ и так как M^k—смещенное подпространство (теорема П. Леви—Е. Штейница), то $(z)^k\in M^k$. Поскольку это справедливо для каждого натурального k, в силу пункта 2° леммы 2 имеем $z\in M$.

В заключение автор выражаат свою благодарность Р. И. Овсепяну за постановку задач и руководство в процессе их решения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 25.I.1981
и 15.V.1981

Ռ. Մ. ՄԵՀՐԱԲՅԱՆ. Ռիմանի թվային շարքերի տեղափոխելիության վերաբերյալ թեորեմի ընդհանրացման մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ անվերջ թվային հաջորդականությունների s *տարածությունում* $\text{card}\left\{x\in s: \exists\sigma, \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}=x\right\}=1$ *պայմանից հետևում է* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *շարքի տեղափոխելիությունը, իսկ ֆունկցիոնալ շարքերի համար ուժեղացվում է Բ. Մ. Կաշինի բացասական օրինակը։*

R. M. MEHRABIAN. *On a generalization of Rieman's theorem about unconditional convergence of number series* (summary)

It is shown in the space s of infinite sequences of numbers the condition card $\{x\in s: \exists\sigma, \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}=x\}=1$ implies unconditional convergence of the series $\sum_{1}^{\infty} x_n$.

It is shown also that this is not the case in the space $C([0,1]$ (generalization of the theorem of B. S. Kashin).

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Steinitz.* Bedingt konvergent Reihen und konvexe systeme, J. reine u. angew Math., 143, 1913, 128—175.
2. *P. Levy.* Sur les series semi-convergents, Nouv. ann. d. Math., 5. 1905, 506—511.
3. *М. И. Кадец.* Об одном свойстве ломаных в n-мерном пространстве, УМН, VIII, вып. 1, 1953, 139—143.
4. *Б. С. Кашин.* Об одном свойстве функциональных рядов, Матем. заметки, 11, вып. 5, 1972, 481—490.
5. *С. Троянски.* Об условно сходящихся рядах и некоторых F-пространствах. Теор. функций, функц. анализ и их приложения, вып. 5, 1967, 102—107.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математика

В. М. МАРТИРОСЯН

О ЗАМЫКАНИИ, МИНИМАЛЬНОСТИ И БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА НА СИСТЕМЕ ЛУЧЕЙ

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию вопросов полноты, описания замыкания, минимальности и базисности определенных систем функций, порожденных целой функцией типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z; \mu)$, где

$$E_\rho(z; \mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma\left(\mu+\frac{n}{\rho}\right)}\quad(\rho>0,\ -\infty<\mu<+\infty).$$

При этом рассмотрения ведутся в пространствах $L_{2,\omega}(\Gamma)\equiv L_2(\Gamma; |\zeta|^\omega |d\zeta|)(-1<\omega<1)$ функций, определенных на конечной системе лучей Γ, исходящих из начала координат.

Приведем краткий обзор связанных с данным исследованием работ.

1° (a). Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ $(\operatorname{Re}\lambda_k>0)$— произвольная последовательность комплексных чисел (среди которых могут быть и повторяющиеся) из правой полуплоскости. Следуя М. М. Джрбашяну [1], обозначим s_k кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$. Теорема Мюнца-Саса о полноте системы экспонент в наиболее общем виде может быть сформулирована следующим образом [1—3].

Теорема. *Для полноты в* $L_2(0, +\infty)$ *системы функций* $\{e^{-\lambda_k x}x^{s_k-1}\}_1^\infty$ *необходимо и достаточно условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}=+\infty.$$

М. М. Джрбашяном было получено существенное обобщение этого результата; им был установлен критерий полноты систем функций, порожденных целой функцией типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z; \mu)$ [3]. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем обозначения.

Обозначим через $L_{2,\omega}(0, +\infty)(-1<\omega<1)$ гильбертово пространство измеримых на $(0, +\infty)$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\omega}(0,+\infty)}=\left\{\int_0^{+\infty}|f(x)|^2x^\omega\,dx\right\}^{1/2}<+\infty.$$

Пусть, далее, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ($|\arg\lambda_k|<\pi/(2\alpha)$, $1/2<\alpha<+\infty$) — последовательность комплексных чисел, а $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$. С этой последовательностью можно ассоциировать систему функций $\{\omega_\rho^*(x;\lambda_k)\}_1^\infty$ из $L_{2,\omega}(0,+\infty)$, положив

$$\omega_\rho^*(x;\lambda_k)=E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x;\mu)\,x^{s_k-1}\quad(k=1,2,\cdots),$$

$$\rho=\frac{\alpha}{2\alpha-1},\quad \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

Теорема (М. М. Джрбашян). *Для полноты в $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ системы функций $\{\omega_\rho^*(x;\lambda_k)\}_1^\infty$ необходимо и достаточно условие*

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\operatorname{Re}\lambda_k^\alpha}{1+|\lambda_k|^{2\alpha}}=+\infty^*.$$

Если учесть, что $E_1(z;1)=\exp(z)$, то при $\omega=0$, $\alpha=1$ ($\rho=\mu=1$), эта теорема переходит в теорему Мюнца-Саса в обобщенной формулировке.

(б) В связи с теоремой Мюнца-Саса в работе Л. Шварца [4] были выявлены характеристические свойства функций, принадлежащих замыканию системы $\{e^{-\lambda_k x}\}_1^\infty$ в метриках $L_p(0,+\infty)$, $p\geqslant 1$, или $C[0,+\infty]$, в предположении, что λ_k вещественны, $\uparrow+\infty$ и ряд $\sum 1/\lambda_k$ сходится. Но следует отметить, что эти свойства не дают собственно внутренней характеризации замыкания системы $\{e^{-\lambda_k x}\}_1^\infty$ в случае ее неполноты.

Впервые в работе М. М. Джрбашяна [1] (см. также [2]) было дано полное внутреннее описание замыкания системы $\{e^{-\lambda_k x}x^{s_k-1}\}_1^\infty$ ($\operatorname{Re}\lambda_k>0$) в случае ее неполноты в $L_2(0,+\infty)$; этот результат содержит в себе, в частности, результат работы [4] в принципиально важном случае $p=2$.

В работе С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна [5] было дано полное внутреннее описание замыкания системы $\{\omega_\rho^*(x;\lambda_k)\}_1^\infty$, в случае ее неполноты в $L_{2,\omega}(0,+\infty)$.

(в) Другие обобщения сформулированных выше теорем Мюнца-Саса и М. М. Джрбашяна были получены в работах [6—10]. В них были рассмотрены вопросы замыкания и базисности систем функций вида $\{e^{-\lambda_k z}z^{s_k-1}\}$ и $\{E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k z;\mu)\,z^{s_k-1}\}_1^\infty$ в различных пространствах функций, определенных на системе двух лучей, исходящих из точки $z=0$.

В работе [11] был установлен критерий полноты на конечной системе лучей систем функций типа Миттаг-Леффлера. Чтобы сформулировать этот результат введем обозначения.

Пусть $N\geqslant 2$ — целое и $L_{2,\omega}(\Gamma)$ $(-1<\omega<1)$ — пространство функций f, измеримых на системе лучей Γ, где

$$\Gamma=\bigcup_{n=1}^N\{\zeta:\operatorname{Arg}\zeta=\vartheta_n\},\ 0\leqslant\vartheta_1<\cdots<\vartheta_N<2\pi$$

---

* Всюду в этой работе под z^α подразумевается та ветвь этой функции, которая на полуоси $(0,+\infty)$ принимает положительные значения.

и имеющих конечную норму

$$\|f\|_{2,\,\omega} = \{\int_{\Gamma} |f(\zeta)|^2 |\zeta|^{\omega} |d\zeta|\}^{1/2} < +\infty.$$

Пусть, далее

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant N} \left\{\frac{\pi}{\vartheta_{n+1} - \vartheta_n}\right\} < \rho \ (\vartheta_{N+1} = \vartheta_1 + 2\pi),$$

и при фиксированном $n\,(1 \leqslant n \leqslant N)$ $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел из угловой области $\vartheta_n + \pi/(2\rho) < \operatorname{Arg}\lambda < \vartheta_{n+1} - \pi/(2\rho)$, а $s_k^{(n)}$ — кратность появления числа $\lambda_k^{(n)}$ на отрезке $\{\lambda_j^{(n)}\}_{j=1}^{k}$. Полагая $\mu = (1 + \omega + \rho)/(2\rho)$, рассмотрим систему функций

$$E_{\rho}^{\left(s_k^{(n)}-1\right)} (\overline{\lambda_k^{(n)}} z;\ \mu)\ z^{s_k^{(n)}-1} \quad (k = 1, 2, \cdots;\ 1 \leqslant n \leqslant N). \tag{1}$$

Теорема (А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, И. О. Хачатрян). *Для полноты в $L_{2,\,\omega}(\Gamma)$ системы функций (1) необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k^{(n)}|^{2\beta_n})^{-1} \operatorname{Re}[e^{i\gamma_n} \overline{\lambda_k^{(n)}}]^{\beta_n} = +\infty,$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2}(\vartheta_n + \vartheta_{n+1}),\ \pi/\beta_n = \vartheta_{n+1} - \vartheta_n - \pi/\rho \ (1 \leqslant n \leqslant N).$$

Следует отметить, что при доказательстве этой теоремы авторы пользуются классическим методом сведения задачи полноты к теореме единственности в определенном классе голоморфных функций, что, в свою очередь, сводит задачу к обращению интегрального преобразования М. М. Джрбашяна на системе лучей.

2°. В данной работе рассматриваются более общие чем (1) системы. Эти системы определяются следующим образом.

Пусть

$$\rho_n > \frac{\pi}{\vartheta_{n+1} - \vartheta_n} \ (1 \leqslant n \leqslant N)$$

и $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел из угловой области $\vartheta_n + \pi/(2\rho_n) < \operatorname{Arg}\lambda < \vartheta_{n+1} - \pi/(2\rho_n)$, а $s_k^{(n)}$ — кратность появления числа $\lambda_k^{(n)}$ на отрезке $\{\lambda_j^{(n)}\}_{j=1}^{k}$. Полагая $\mu_n = (1 + \omega + \rho_n)/(2\rho_n)$, рассмотрим систему функций

$$E_{\rho_n}^{\left(s_k^{(n)}-1\right)} (\overline{\lambda_k^{(n)}} z;\ \mu_n)\ z^{s_k^{(n)}-1} \quad (k = 1, 2, \cdots;\ 1 \leqslant n \leqslant N). \tag{2}$$

Для этой системы устанавливаются критерии полноты, минимальности и базисности (в ее замыкании) в метрике $L_{2,\,\omega}(\Gamma)$. В случае неполноты такой системы дается полное внутреннее описание ее замыкания, а в случае минимальности строится биортогональная с ней система функций.

При установлении этих результатов мы основываемся на том, что $L_{2,\omega}(\Gamma)$ представимо в виде прямой суммы пространств $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$ $(1\leqslant n\leqslant N)$ функций F, голоморфных в угловой области

$$\Delta_n^* = \{z:\ \vartheta_{n+1} < \operatorname{Arg} z < \vartheta_n + 2\pi,\ 0<|z|<+\infty\}$$

и имеющих конечную норму

$$\|F\|^*_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]} = \sup_{\vartheta_{n+1}<\varphi<\vartheta_n+2\pi} \left\{\int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2\, r^\omega\, dr\right\}^{1/2} < +\infty.$$

Пользуясь этим фактом, мы сводим задачи замыкания, минимальности и базисности системы (2) в метрике $L_{2,\omega}(\Gamma)$ к соответствующим известным результатам [10] для системы

$$E_{\rho_n}^{\left(s_k^{(n)}-1\right)}\left(\overline{\lambda_k^{(n)}}\, z;\ \mu_n\right) z^{s_k^{(n)}-1} \quad (k=1,\ 2,\cdots)$$

в метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$.

Введем следующие обозначения:

(a) Пусть $N\geqslant 2$ — целое и

$$0\leqslant\vartheta_1<\cdots<\vartheta_N<2\pi,\ \vartheta_{N+1}=\vartheta_1+2\pi.$$

Для значений $n=1,\cdots,N$ обозначим через

$$\Delta_n = \{z:\ \vartheta_n < \operatorname{Arg} z < \vartheta_{n+1},\ 0<|z|<+\infty\},$$
$$\Delta_n^* = \{z:\ \vartheta_{n+1} < \operatorname{Arg} z < \vartheta_n + 2\pi,\ 0<|z|<+\infty\}$$

взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Пусть параметры ρ_n определяются из условий

$$\rho_n > \frac{\pi}{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n}\ (n=1,\cdots,N).$$

Обозначим через $\Delta(\rho_n)$ угловую область

$$\Delta(\rho_n) = \left\{z:\ \vartheta_n + \frac{\pi}{2\rho_n} < \operatorname{Arg} z < \vartheta_{n+1} - \frac{\pi}{2\rho_n},\ 0<|z|<+\infty\right\}$$

и положим

$$\eta_n = \frac{\vartheta_n+\vartheta_{n+1}}{2},\quad \frac{\pi}{\beta_n} = \vartheta_{n+1}-\vartheta_n-\frac{\pi}{\rho_n}\ (n=1,\cdots,N).$$

Очевидно, что π/β_n — это раствор угловой области $\Delta(\rho_n)$. Ясно также, что $\Delta(\rho_n)$ является подобластью области Δ_n и луч $\{re^{i\eta_n}: r>0\}$ является общей биссектрисой этих угловых областей.

Обозначим также через

$$\widetilde{\Delta}(\rho_n) = \left\{z:\ -\vartheta_{n+1} + \frac{\pi}{2\rho_n} < \operatorname{Arg} z < -\vartheta_n - \frac{\pi}{2\rho_n},\ 0<|z|<+\infty\right\},$$

$$\widetilde{\Delta}^*(\rho_n)=\left\{z: -\vartheta_n-\frac{\pi}{2\rho_n}<\operatorname{Arg} z<-\vartheta_{n+1}+\frac{\pi}{2\rho_n}+2\pi,\ 0<|z|<+\infty\right\},$$

взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Очевидно, что $\Delta(\rho_n)$ и $\widetilde{\Delta}(\rho_n)$ симметричны относительно вещественной оси. Через $\partial\widetilde{\Delta}^*(\rho_n)$ обозначим границу $\widetilde{\Delta}^*(\rho_n)$, пробегаемую в положительном относительно этой области направлении.

Далее, обозначим через $\Gamma=\bigcup\limits_{n=1}^{N}\Gamma_{\vartheta_n}$ систему N лучей Γ_{ϑ_n} $(n=1,\cdots,N)$, исходящих из точки $\zeta=0$, где

$$\Gamma_{\vartheta_n}=\{\zeta: \operatorname{Arg}\zeta=\vartheta_n,\ 0\leqslant|\zeta|<+\infty\}.$$

Эта система лучей Γ разбивает плоскость $\mathbb{C}$ на непересекающиеся угловые области Δ_n $(n=1,\cdots,N)$ и является границей их объединения.

(б) Для дальнейшего изложения нам необходимо также определить некоторые классы функций.

Полагая, что $-1<\omega<1$, обозначим через $L_{2,\omega}(\Gamma)$ гильбертово пространство измеримых на Γ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\omega}=\left\{\int\limits_{\Gamma}|f(\zeta)|^2|\zeta|^{\omega}|d\zeta|\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{0}^{+\infty}|f(re^{i\vartheta_n})|^2 r^{\omega}\,dr\right\}^{1/2}<+\infty.$$

Пусть далее

$$\Delta=\{z: \chi<\operatorname{Arg} z<\varkappa,\ 0<|z|<+\infty\},\ 0<\varkappa-\chi<2\pi$$

— произвольная угловая область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $H_2^{(\omega)}[\Delta]$ класс функций F, голоморфных в Δ и таких, что

$$\|F\|^{*}_{H_2^{(\omega)}[\Delta]}=\sup_{\chi<\varphi<\varkappa}\left\{\int\limits_{0}^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}\,dr\right\}^{1/2}<+\infty. \qquad (3)$$

Такие классы функций, голоморфных в угловых областях, впервые были введены и исследованы М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [12] (см. также [13], гл. VII). Они являются естественными обобщениями на произвольные угловые области известного класса H_2 в полуплоскости (см., напр., [14]), и для них имеют место аналоги ряда важных свойств класса H_2. В частности, справедлива следующая теорема (см. [13], теорему 7.5).

Теорема А. *Если* $F\in H_2^{(\omega)}[\Delta]$, *то*

1°. *Почти всюду на границе* $\partial\Delta$ *области* Δ *существуют угловые граничные значения* $F(\zeta)$ *функции* F, *причем*

$$\|F\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta]}=\left\{\int\limits_{\partial\Delta}|F(\zeta)|^2|\zeta|^{\omega}|d\zeta|\right\}^{1/2}<+\infty \qquad (4)$$

и справедливы равенства

$$\lim_{\varphi\to\chi+0}\int_0^{+\infty}|F(re^{i\chi})-F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}\,dr=0,$$

$$\lim_{\varphi\to\chi-0}\int_0^{+\infty}|F(re^{i\chi})-F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}\,dr=0;$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}F(z), & при\ z\in\Delta,\\ 0, & при\ z\in\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta},\end{cases}$$

где направление на $\partial\Delta$ совпадает с направлением положительного обхода области Δ.

В силу утверждения 1° этой теоремы в $H_2^{(\omega)}[\Delta]$ можно ввести скалярное произведение

$$(F,G)=\int_{\partial\Delta}F(\zeta)\,\overline{G(\zeta)}\,|\zeta|^{\omega}\,|d\zeta|;\ F,\ G\in H_2^{(\omega)}[\Delta]. \tag{5}$$

При этом $H_2^{(\omega)}[\Delta]$ *со скалярным произведением* (5) *является гильбертовым пространством и*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|F\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta]}\leqslant\|F\|^{*}_{H_2^{(\omega)}[\Delta]}\leqslant\|F\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta]} \tag{6}$$

(см. [15], теорему 2).

(в) Между пространством $L_{2,\omega}(\Gamma)$ и пространствами $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^{*}](n=1,\cdots,N)$ имеется прямая связь.

Во-первых, каждую функцию $F_n\in H_2^{(\omega)}[\Delta_n^{*}]$ можно рассматривать как элемент пространства $L_{2,\omega}(\Gamma)$. Действительно, в силу теоремы А функция F_n однозначно определяется своими граничными значениями $F_n(\zeta)$, $\zeta\in\partial\Delta_n^{*}$; и поскольку $\partial\Delta_n^{*}\subset\Gamma$, то F_n полностью определяется заданием ее значений на Г. А из неравенств (3) и (4) следует, что $F_n\in L_{2,\omega}(\Gamma)$, причем в силу (6) имеем

$$\|F_n\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^{*}]}\leqslant\|F_n\|_{2,\omega}\leqslant N\,\|F_n\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^{*}]}. \tag{6'}$$

При этом заметим, что мы можем рассматривать сужение F_n на Г, так как $\Gamma\subset\Delta_n^{*}\cup\partial\Delta_n^{*}$.

С другой стороны, если рассмотреть функцию

$$f(\zeta)=\sum_{n=1}^{N}F_n(\zeta),\ \zeta\in\Gamma,$$

где $F_n\in H_2^{(\omega)}[\Delta_n^{*}]$, то $f\in L_{2,\omega}(\Gamma)$. Оказывается, что это представление характерно для пространства $L_{2,\omega}(\Gamma)$. Именно, имеет место

Теорема В. *Каждая функция $f\in L_{2,\omega}(\Gamma)$ единственным образом представима в виде*

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^{N} F_n(\zeta),\ \zeta \in \Gamma,$$

где $F_n \in H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$. *При этом*

$$A_\omega \max_{1\leq n\leq N} \{\|F_n\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]}\} \leq \|f\|_{2,\omega} \leq B_\omega \max_{1\leq n\leq N} \{\|F_n\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]}\}, \tag{7}$$

где $A_\omega > 0$, $B_\omega > 0$ — *константы, не зависящие от* f. (см. [16], теорему 1).

Замечание. В этой теореме на $\partial\Delta_n^*$ мы рассматриваем угловые граничные значения функции $F_n \in H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$. Это замечание относится также к утверждениям 3° теорем 1 и 2.

(г) Для удобства читателя мы здесь напомним также известные (см., напр., [17]) определения базисных и минимальных систем.

Система $\{h_k\}_1^\infty$ элементов гильбертова пространства H называется его базисом, если каждый элемент $h \in H$ единственным образом разлагается в сходящийся по метрике H ряд

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(h)\, h_k,$$

где $c_k(h)$ — комплексные коэффициенты. Базис $\{h_k\}_1^\infty$ называется базисом Рисса H, если выполняются неравенства

$$a \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(h)|^2 \leq \|h\|^2 \leq A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(h)|^2,\ \forall h \in H,$$

где $a > 0$ и $A > 0$ — не зависящие от h константы. Нетрудно проверить, что система $\{h_k\}_1^\infty$ будет базисом Рисса пространства H в том и только в том случае, когда существует ограниченный обратимый линейный оператор $A: H \to H$ и такой, что $\{Ah_k\}_1^\infty$ является ортонормальным базисом H.

Далее, система $\{h_k\}_1^\infty$ называется минимальной в H, если ни один ее член нельзя приблизить линейными комбинациями остальных. Минимальность системы $\{h_k\}_1^\infty$ необходима и достаточна для существования биортогональной с ней системы, т. е. такой системы $\{h_k^*\}_1^\infty \subset H$, что

$$(h_k, h_m^*) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad (k, m = 1, 2, \cdots,).$$

Напомним также, что если $\{h_k\}_1^\infty$ — базис H, то $\{h_k\}_1^\infty$ — минимальная система.

Формулировки результатов

1. Пусть для данного n $(1 \leq n \leq N)$ $\Lambda_n \equiv \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\rho_n)$, среди которых могут быть числа произвольной конечной или даже бесконечной кратности.

Для произвольного целого $j>1$ обозначим через $s_j^{(n)}$ кратность появления числа $\lambda_j^{(n)}$ на отрезке $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{j}$, а через $p_j^{(n)}$ — кратность появления числа $\lambda_j^{(n)}$ во всей последовательности $\Lambda_n\equiv\{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$.

Очевидно, что

$$1\leqslant s_j^{(n)}\leqslant p_j^{(n)}\leqslant+\infty\ (j=1,2,\cdots).$$

Легко видеть также, что если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k^{(n)}|^{2\beta_n})^{-1}\operatorname{Re}[e^{i\gamma_n}\overline{\lambda_k^{(n)}}]^{\beta_n}, \tag{8}$$

то число $p_k^{(n)}$ конечно при любом $k\geqslant1$.

Введем в рассмотрение систему функций типа Миттаг-Леффлера $E\equiv\{E_k^{(n)}(\zeta);\ k\geqslant1,\ 1\leqslant n\leqslant N\}$, положив

$$E_k^{(n)}(\zeta)=E_{\rho_n}^{\left(s_k^{(n)}-1\right)}(\overline{\lambda_k^{(n)}}\zeta;\ \mu_n)\,\zeta^{s_k^{(n)}-1}\quad(k\geqslant1;\ 1\leqslant n\leqslant N). \tag{9}$$

Из асимптотических свойств целой функции типа Миттаг-Леффлера (см. [13], лемму 3.4) следует, что функции системы (9) принадлежат пространству $L_{2,\omega}(\Gamma)$, т. е. $E\subset L_{2,\omega}(\Gamma)$.

Обозначим через $V_{2,\omega}(E)$ замыкание (т. е. замкнутую линейную оболочку) системы (9) в метрике $L_{2,\omega}(\Gamma)$. Очевидно, что $V_{2,\omega}(E)$ является замкнутым подпространством пространства $L_{2,\omega}(\Gamma)$, и полнота системы (9) в $L_{2,\omega}(\Gamma)$ означает равенство $V_{2,\omega}(E)=L_{2,\omega}(\Gamma)$.

2 (а). В этой работе мы устанавливаем следующий критерий полноты в $L_{2,\omega}(\Gamma)$ системы (9).

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны*

1°. *Система E полна в $L_{2,\omega}(\Gamma)$;*

2°. *Одновременно расходятся ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k^{(n)}|^{2\beta_n})^{-1}\operatorname{Re}(e^{i\gamma_n}\overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n}=+\infty\ (1\leqslant n\leqslant N); \tag{10}$$

3°. *Класс $V_{2,\omega}(E)$ совпадает с множеством функций f, которые единственным образом представимы в виде*

$$f(\zeta)=\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{\partial\Delta^*(\rho_n)}E_{\rho_n}(\zeta t;\ \mu_n)\,\varphi_n(t)\,dt,\ \zeta\in\Gamma, \tag{11}$$

где $\varphi_n\in H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\rho_n)]$.

Отметим, что эквивалентность утверждений 1° и 2° этой теоремы в специальных частных случаях были установлены ранее в других работах: в случае $N=2$ и $\rho_1=\rho_2$ — в работе автора [7], в случае $N=2$ и $\rho_1\neq\rho_2$ — в работе А. Е. Аветисяна [9], и в случае $N\neq2$, но $\rho_1=\cdots=\rho_N$ — в совместной работе А. Е. Аветисяна, С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна [11].

(б) В силу теоремы 1, если хотя бы при одном $n\,(1\leqslant n\leqslant N)$ ряд (8) сходится, то система (9) не полна в $L_{2,\omega}(\Gamma)$, и, следовательно, порожденное ею замкнутое подпространство $V_{2,\infty}(E)$ не совпадает с $L_{2,\infty}(\Gamma)$. Чтобы описать это подпространство, введем еще один класс функций. Для этого сначала отметим, что если ряд (8) при данном n сходится, то бесконечное произведение

$$B_{\tilde{\Delta}(\rho_n)}(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(e^{i\eta_n}z)^{\beta_n}-(e^{i\eta_n}\overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n}}{(e^{i\eta_n}z)^{\beta_n}+(e^{i\eta_n}\overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n}}\varkappa_k,$$

$$\varkappa_k=\frac{|1-(e^{i\eta_n}\lambda_k^{(n)})^{2\beta_n}|}{1-(e^{i\eta_n}\overline{\lambda_k^{(n)}})^{2\beta_n}},$$

сходится абсолютно и равномерно внутри угловой области $\tilde{\Delta}(\rho_n)$ и определяет там аналитическую функцию $B_{\tilde{\Delta}(\rho_n)}(z)$, которая обладает следующими свойствами:

1) $|B_{\tilde{\Delta}(\rho_n)}(z)|\leqslant 1$, при $z\in\tilde{\Delta}(\rho_n)$;

2) функция $B_{\tilde{\Delta}(\rho_n)}$ обращается в нуль лишь в точках последовательности $\{\overline{\lambda_k^{(n)}}\}_{k=1}^{\infty}$, при этом точка $z=\overline{\lambda_k^{(n)}}$ является для нее нулем кратности $p_k^{(n)}$ (см. [3]).

При условии сходимости ряда (8) обозначим через

$$H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n);\ \Lambda_n]$$

класс функций φ, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\varphi\in H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n)]$;

2) существует мероморфная в $\tilde{\Delta}(\rho_n)$ функция φ_*, с возможными полюсами в точках последовательности $\{\overline{\lambda_k^{(n)}}\}_{k=1}^{\infty}$ и такая, что

а) $\varphi_* B_{\tilde{\Delta}(\rho_n)}\in H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}(\rho_n)]$;

б) угловые граничные значения φ изнутри $\tilde{\Delta}^*(\rho_n)$ и угловые граничные значения φ_* изнутри $\tilde{\Delta}(\rho_n)$ совпадают почти всюду на общей границе $\partial\tilde{\Delta}^*(\rho_n)$ областей $\tilde{\Delta}^*(\rho_n)$ и $\tilde{\Delta}(\rho_n)$.

Грубо говоря, $H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n);\ \Lambda_n]$ — это класс тех функций φ из $H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n)]$, которые в определенном смысле допускают мероморфное продолжение φ_* в область $\tilde{\Delta}(\rho_n)$, с возможными полюсами в точках последовательности $\{\overline{\lambda_k^{(n)}}\}_{k=1}^{\infty}$; и это продолжение, будучи умножено на $B_{\tilde{\Delta}(\rho_n)}$, принадлежит $H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}(\rho_n)]$.

Следует здесь же отметить, что класс $H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n); \Lambda_n]$ совпадает с замыканием в метрике $H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n); \Lambda_n]$ системы простейших рациональных дробей $\{(\zeta-\overline{\lambda_k^{(n)}})^{-s_k^{(n)}}\}_{k=1}^{\infty}$ (см. [5] или [15]).

Сформулируем теперь теорему, в которой дается полное внутреннее описание замыкания системы (9), в случае ее неполноты в $L_{2,\omega}(\Gamma)$.

Теорема 2. *Если хотя бы при одном n $(1\leqslant n\leqslant N)$ ряд* (8) *сходится, то класс $V_{2,\omega}(E)$ совпадает с множеством функций f, единственным образом представимых в виде*

$$f(\zeta)=\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{\partial\tilde{\Delta}^*(\rho_n)} E_{\rho_n}(\zeta t;\ \mu_n)\,\varphi_n(t)\,dt,\ \zeta\in\Gamma, \tag{12}$$

где $\varphi_n\in H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n)]$, если при данном n ряд (8) *расходится, и $\varphi_n\in H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n); \Lambda_n]$, если при данном n ряд* (8) *сходится.*

3. Теперь сформулируем критерий минимальности системы (9).

Теорема 3. *Система* (9) *минимальна в $L_{2,\omega}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда одновременно сходятся ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k^{(n)}|^{2\beta_n})^{-1}\operatorname{Re}(e^{i\eta_n}\overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n}<+\infty\ (1\leqslant n\leqslant N). \tag{13}$$

В случае, когда выполняются условия (13), мы построим систему функций

$$\Omega(\zeta;\ \overline{\lambda_k^{(n)}})\in L_{2,-\omega}(\Gamma)\ \ (k=1,2,\cdots;\ 1\leqslant n\leqslant N), \tag{14}$$

биортогональную с системой (9) в смысле

$$\int\limits_{\Gamma}E_p^{(r)}(\zeta)\,\Omega(\zeta;\ \overline{\lambda_k^{(n)}})\,|\zeta|^{\omega}|d\zeta|=\begin{cases}1, & \text{когда } k=p \text{ и } r=n;\\ 0, & \text{когда } k\neq p \text{ или } r\neq n;\end{cases} \tag{15}$$

$$k,\ p=1,2,\cdots;\ 1\leqslant n,\ r\leqslant N).$$

Наконец, положим

$$\lambda_k^{(n)}(\omega)=\left\{|\lambda_k^{(n)}|^{\omega}[|\lambda_k^{(n)}|^{1-\beta_n}\operatorname{Re}(e^{i\eta_n}\overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n}]^{2s_k^{(n)}-1}\right\}^{1/2}$$
$$(k=1,2,\cdots;\ 1\leqslant n\leqslant N),$$

и сформулируем следующий критерий базисности системы (9).

Теорема 4. *Если одновременно выполняются условия*

$$\inf_{k\geqslant 1}\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j^{(n)}\neq\lambda_k^{(n)}}}^{\infty}\left|\frac{(e^{i\eta_n}\overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n}-(e^{i\eta_n}\overline{\lambda_j^{(n)}})^{\beta_n}}{(e^{i\eta_n}\overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n}+\overline{(e^{i\eta_n}\overline{\lambda_j^{(n)}})^{\beta_n}}}\right|>0\ (1\leqslant n\leqslant N), \tag{16}$$

$$\sup_{k\geqslant 1}|p_k^{(n)}|<+\infty\ (1\leqslant n\leqslant N), \tag{17}$$

то система $\{\lambda_k^{(n)}(\omega)\, E_k^{(n)}(\zeta)\colon\ k \geqslant 1,\ 1 \leqslant n \leqslant N\}$ *является базисом Рисса пространства* $V_{2,\omega}(E)$.

Если же хотя бы одно из $2N$ *условий* (16) *и* (17) *нарушается, то система* E *ни при какой расстановке членов не является базисом пространства* $V_{2,\omega}(E)$.

Таким образом, если выполняются условия (16) и (17), то любая функция f, принадлежащая пространству $V_{2,\omega}(E)$ (т. е. замыканию в метрике $L_{2,\omega}(\Gamma)$ системы (9)) единственным образом разлагается в ряд

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} c_k^{(n)}(f)\, \{\lambda_k^{(n)}(\omega)\, E_k^{(n)}(\zeta)\}, \tag{18}$$

который безусловно сходится к f в метрике $L_{2,\omega}(\Gamma)$. Но легко видеть, что из условий (16) следует также сходимость рядов (8) при всех n $(1 \leqslant n \leqslant N)$, т. е. (13). А в этом случае, как уже было отмечено, мы построим систему $\{\Omega(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})\colon\ k \geqslant 1,\ 1 \leqslant n \leqslant N\}$, удовлетворяющую соотношениям биортогональности (15). Следовательно, коэффициенты ряда (18) эффективно восстанавливаются по формулам

$$c_k^{(n)}(f) = \frac{1}{\lambda_k^{(n)}(\omega)} \int_\Gamma f(\zeta)\, \overline{\Omega(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})}\, |\zeta|^{\omega} |d\zeta| \quad (k \geqslant 1;\ 1 \leqslant n \leqslant N).$$

Доказательства теорем 1—4

При установлении сформулированных здесь теорем 1 — 4 вопросы замыкания, минимальности и базисности системы (9) в метрике $L_{2,\omega}(\Gamma)$ мы сводим к соответствующим вопросам для систем

$$E_k^{(n)}(\zeta) = E_{\rho_n}^{\left(s_k^{(n)}-1\right)}(\overline{\lambda_k^{(n)}}\zeta;\ \mu_n)\, \zeta^{s_k^{(n)}-1} \qquad (k = 1, 2, \cdots) \tag{19}$$

в метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$. Поэтому обозначим также через

$$V_2^{(\omega)}(E^{(n)};\ \Delta_n^*)$$

замыкание в метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$ системы функций $E^{(n)} \equiv \{E_k^{(n)}(\zeta)\}_{k=1}^{\infty}$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$. Отметим при этом, что из асимптотических свойств целой функции типа Миттаг-Леффлера (см. [13], лемму 3.4) следует включение $E^{(n)} \subset H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$.

Доказательства теорем 1 и 2. Пусть $\{Q_j\}_1^{\infty}$ — некоторая последовательность линейных комбинаций элементов системы E:

$$Q_j = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{m_{j,n}} a_{k,j}^{(n)} E_k^{(n)} \quad (j = 1, 2, \cdots).$$

Так как система E распадается на N подсистем $E^{(n)}$, то каждое Q_j представимо в виде

$$Q_j = \sum_{n=1}^{N} Q_{j,n} \quad (j = 1, 2, \cdots), \tag{20}$$

где $Q_{j,n}$ — линейная комбинация элементов подсистемы $E^{(n)}$:

$$Q_{j,n} = \sum_{k=1}^{m_{j,n}} a_{k,j}^{(n)} E_k^{(n)}.$$

При этом $\{Q_{j,n}\}_{j=1}^{\infty} \subset H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]$, поскольку функции системы $E^{(n)}$ принадлежат классу $H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]$.

Пусть, далее, $f \in L_{2,\infty}(\Gamma)$. По теореме B справедливо представление вида

$$f = \sum_{n=1}^{N} F_n, \quad F_n \in H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*].$$

Отсюда и из (20) получаем

$$f - Q_j = \sum_{n=1}^{N} (F_n - Q_{j,n}) \quad (j = 1, 2, \cdots),$$

причем очевидно, что $F_n - Q_{j,n} \in H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$. Следовательно, справедливы неравенства

$$A_\infty \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \{\|F_n - Q_{j,n}\|_{H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]}\} \leqslant \|f - Q_j\|_{L_{2,\infty}} \leqslant$$

$$\leqslant B_\infty \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \{\|F_n - Q_{j,n}\|_{H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]}\}, \quad j = 1, 2, \cdots. \tag{21}$$

Отсюда, во-первых, следует, что каждую функцию $f \in L_{2,\infty}(\Gamma)$ можно аппроксимировать в метрике $L_{2,\infty}(\Gamma)$ линейными комбинациями элементов системы E тогда и только тогда, когда для всех n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ каждую функцию $F_n \in H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]$ можно аппроксимировать в метрике $H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]$ линейными комбинациями элементов системы $E^{(n)}$. Иначе говоря, система E полна в $L_{2,\infty}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда для всех $n\,(1 \leqslant n \leqslant N)$ система $E^{(n)}$ полна в $H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]$; и поскольку система $E^{(n)}$ полна в $H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]$ в том и только в том случае, когда расходится ряд (8) (см. [10], теорему 1), то эквивалентность утверждений 1° и 2° теоремы 1 доказана.

С другой стороны, из неравенств (21) вытекает, что последовательность $\{Q_j\}_1^{\infty}$ сходится по метрике $L_{2,\infty}(\Gamma)$ к функции f тогда и только тогда, когда при каждом n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ последовательность компонент $\{Q_{j,n}\}_1^{\infty}$ сходится в топологии $H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]$ к соответствующей компоненте F_n функции f. Таким образом, класс $V_{2,\infty}(E)$ совпадает с множеством функцией f, представимых в виде

$$f = \sum_{n=1}^{N} F_n, \quad F_n \in V_2^{(\infty)}(E^{(n)}; \Delta_n^*), \tag{22}$$

причем в силу теоремы B такое представление единственно. Отсюда уже следует утверждение теоремы 2, так как класс $V_2^{(\infty)}(E^{(n)}; \Delta_n^*)$ совпадает с множеством функций F_n, представимых в виде

$$F_n(\zeta) = \int\limits_{\partial\widetilde{\Delta}^*(\rho_n)} E_{\rho_n}(\zeta t;\, \mu_n)\, \varphi_n(t)\, dt,\ \zeta \in \Delta_n^*,$$

где $\varphi_n \in H_2^{(-\omega)}[\widetilde{\Delta}^*(\rho_n)]$, если при данном n ряд (8) расходится, и $\varphi_n \in$ $\in H_2^{(-\omega)}[\widetilde{\Delta}^*(\rho_n);\, \Lambda_n]$, если при данном n ряд (8) сходится (см. [10], теоремы 1 и 2). Очевидно, что из этих рассуждений следует также импликация $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ в теореме 1. Чтобы завершить доказательство теоремы 1 нам осталось установить импликацию $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ (напомним, что эквивалентность утверждений 2° и 3° уже доказана). Но эта импликация следует из теоремы B и того факта, что при каждом n $(1 \leqslant \leqslant n \leqslant N)$ класс $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$ совпадает с множеством функций F_n, представимых в виде

$$F_n(\zeta) = \int\limits_{\partial\widetilde{\Delta}^*(\rho_n)} E_{\rho_n}(\zeta t;\, \mu_n)\, \varphi_n(t)\, dt,\ \zeta \in \Delta_n^*,$$

где $\varphi_n \in H_2^{(-\omega)}[\widetilde{\Delta}^*(\rho_n)]$ (см. [13], теорему 7.7, или [10], теорему 1).

Таким образом, теоремы 1 и 2 полностью доказаны.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что при некотором $n = n_0$ $(1 \leqslant n_0 \leqslant N)$ ряд (8) расходится. Тогда система $E^{(n_0)}$ (т. е. система (19) при $n = n_0$) не минимальна в метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta_{n_0}^*]$ (см. [10], теорему 3). Иначе говоря, существует элемент системы $E^{(n_0)}$, который можно приблизить в метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta_{n_0}^*]$ линейными комбинациями остальных элементов этой системы. В силу неравенств (6′) этот же элемент можно приблизить линейными комбинациями остальных элементов системы $E^{(n_0)}$ уже в метрике $L_{2,\omega}(\Gamma)$. Поскольку $E^{(n_0)}$ является подсистемой системы E, то отсюда уже вытекает, что в данном случае система E не минимальна в $L_{2,\omega}(\Gamma)$. Таким образом, выполнение условий (13) необходимо для минимальности в $L_{2,\omega}(\Gamma)$ системы E.

Обратно, предположим, что условия (13) выполняются. Построим систему функций (14), биортогональную с системой E в смысле (15). Отсюда уже будет следовать минимальность системы E в $L_{2,\omega}(\Gamma)$.

При условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k^{(n)}|^{2\beta_n})^{-1}\, \mathrm{Re}\, (e^{i\eta_n}\, \overline{\lambda_k^{(n)}})^{\rho_n} < +\infty$$

в работе [10] была построена система функций

$$\{\Omega_{\rho_n}^*(\zeta;\, \overline{\lambda_k^{(n)}})\}_{k=1}^{\infty} \subset H_2^{(-\omega)}[\Delta_n], \tag{23}$$

биортогональная с системой (19) в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta_n} E_p^{(n)}(\zeta)\, \Omega_{\rho_n}^*(\zeta;\, \overline{\lambda_k^{(n)}})\, d\zeta = \begin{cases} 1, & k = p, \\ 0, & k \neq p, \end{cases} \quad (k,\, p \geqslant 1). \tag{24}$$

Исходя из систем (23), построим нашу систему (14). Для значений k $(k=1, 2, \cdots)$ и n $(1\leqslant n\leqslant N)$ положим

$$\Omega(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})=\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}|\zeta|^{-\omega}e^{-i\vartheta_n}\overline{\Omega^*_{\rho_n}(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})}, & \zeta\in\Gamma_{\vartheta_n},\\ \dfrac{1}{2\pi i}|\zeta|^{-\omega}e^{-i\vartheta_{n+1}}\overline{\Omega^*_{\rho_n}(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})}, & \zeta\in\Gamma_{\vartheta_{n+1}},\\ 0, \ \zeta\in\Gamma\setminus\{\Gamma_{\vartheta_n}\cup\Gamma_{\vartheta_{n+1}}\}. \end{cases}$$

В силу такого определения, очевидно, будем иметь

$$\overline{\Omega(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})}\,|\zeta|^{\omega}|d\zeta|=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\Omega^*_{\rho_n}(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})\,d\zeta, \text{ при } \zeta\in\partial\Delta_n,\\ 0, \text{ при } \zeta\in\Gamma\setminus\partial\Delta_n.\end{cases} \tag{25}$$

С другой стороны, из (23) вытекает принадлежность функции $\Omega(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})$ классу $L_{2,\omega}(\Gamma)$.

Теперь убедимся в соотношениях биортогональности (15). Для этого, воспользовавшись (25), напишем равенство

$$\int\limits_{\Gamma}E_p^{(r)}(\zeta)\overline{\Omega(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})}\,|\zeta|^{\omega}\,|d\zeta|=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_n}E_p^{(r)}(\zeta)\,\Omega^*_{\rho_n}(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})\,d\zeta \tag{26}$$

и рассмотрим три возможных случая: 1) $n=r$, $k=p$; 2) $n=r$, $k\neq p$; 3) $n\neq r$.

В первых двух случаях ввиду (24) и (26) будем иметь:

$$\int\limits_{\Gamma}E_p^{(r)}(\zeta)\overline{\Omega(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})}\,|\zeta|^{\omega}\,|d\zeta|=$$

$$=\begin{cases}1, \text{ при } n=r \text{ и } k=p,\\ 0, \text{ при } n=r \text{ и } k\neq p,\end{cases}\quad (k, p=1, 2,\cdots;\ 1\leqslant n,\ r\leqslant N). \tag{27}$$

Рассмотрим теперь случай $n\neq r$.

В этом случае имеем включение $\Delta_n\subset\Delta^*_r$, и поскольку $E_p^{(r)}(\zeta)\in$ $\in H_2^{(\omega)}[\Delta^*_r]$, то

$$E_p^{(r)}(\zeta)\in H_2^{(\omega)}[\Delta_n]. \tag{28}$$

Имеем также

$$\Omega^*_{\rho_n}(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})\in H_2^{(-\omega)}[\Delta_n]. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_n}E_p^{(r)}(\zeta)\,\Omega^*_{\rho_n}(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})\,d\zeta=0\ (n\neq r;\ k, p=1, 2,\cdots),$$

(см. [15], лемму 2). Отсюда на основании (26) получаем

$$\int\limits_{\Gamma}E_p^{(r)}(\zeta)\overline{\Omega(\zeta;\overline{\lambda_k^{(n)}})}\,|\zeta|^{\omega}\,|d\zeta|=0\ (n\neq r;\ k,\ p=1, 2,\cdots).$$

Эти равенства вместе с (27) дают (15). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Сначала напомним, что, как было установлено в процессе доказательства теорем 2 и 3, каждая функция $f \in V_{2,\infty}(E)$ представима в виде

$$f = \sum_{n=1}^{N} F_n, \quad F_n \in V_2^{(\omega)}(E^{(n)}, \ \Delta_n^*). \tag{22'}$$

При этом имеют место неравенства (см. теорему B)

$$\frac{A_\infty^2}{N} \sum_{n=1}^{N} \|F_n\|^2_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]} \leqslant \|f\|^2_{2,\infty} \leqslant B_\infty^2 \sum_{n=1}^{N} \|F_n\|^2_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]}. \tag{7'}$$

Теперь предположим, что условия (16) и (17) выполняются. Тогда при каждом n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ система $\{\lambda_k^{(n)}(\omega) E_k^{(n)}(\zeta)\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом Рисса пространства $V_2^{(\omega)}(E^{(n)}; \Delta_n^*)$ (см. [10], теорему 5). Иначе говоря, каждая функция $F_n \in V_2^{(\omega)}(E^{(n)}; \Delta_n^*)$ единственным образом разлагается в ряд

$$F_n(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)}(F_n) \{\lambda_k^{(n)}(\omega) E_k^{(n)}(\zeta)\}, \tag{30}$$

безусловно сходящийся к F_n по метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$, причем выполняются неравенства

$$a \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(n)}(F_n)|^2 \leqslant \|F_n\|^2_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]} \leqslant A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(n)}(F_n)|^2,$$

где $a > 0$ и $A > 0$ не зависят от F_n.

Отсюда на основании (22') и (7') заключаем, что каждая функция $f \in V_{2,\infty}(E)$ разлагается в безусловно сходящийся по метрике $L_{2,\infty}(\Gamma)$ ряд

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)}(f) \{\lambda_k^{(n)}(\omega) E_k^{(n)}(\zeta)\}, \tag{31}$$

где

$$c_k^{(n)}(f) = c_k^{(n)}(F_n) \quad (k = 1, 2, \cdots; \ 1 \leqslant n \leqslant N)$$

и при этом

$$\frac{a A_\infty^2}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(n)}(f)|^2 \leqslant \|f\|^2_{2,\infty} \leqslant A B_\infty^2 \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(n)}(f)|^2.$$

Наконец, поскольку из (16) следует (13), то система E минимальна в $L_{2,\infty}(\Gamma)$. Значит разложение функции $f \in V_{2,\infty}(E)$ в ряд вида (31) единственно.

Таким образом, при условиях (16) и (17) система $\{\lambda_k^{(n)}(\omega) E_k^{(n)}(\zeta), k = 1, 2, \cdots; 1 \leqslant n \leqslant N\}$ является базисом Рисса пространства $V_{2,\infty}(E)$.

Обратно, предположим, что система E при некоторой расстановке членов является базисом пространства $V_{2,\infty}(E)$. Обозначим эту расстановку через σ.

Из базисности системы E вытекает, что она минимальна в $L_{2,\infty}(\Gamma)$ и, следовательно, выполняются условия (13). Ввиду этого каждая система $E^{(n)}$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$ минимальна в $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$ (см. [10], теорему 3).

Убедимся теперь, что при каждом n_0 $(1 \leqslant n_0 \leqslant N)$ система $E^{(n_0)}$ является базисом пространства $V_2^{(\omega)}(E^{(n_0)}; \Delta_{n_0}^*)$ при расстановке σ ее членов.

Пусть $F_{n_0} \in V_2^{(\omega)}(E^{(n_0)}; \Delta^*_{n_0})$. Поскольку $E^{(n_0)}$ является подсистемой системы E и имеют место неравенства (6′), то F_{n_0} принадлежит замыканию в метрике $L_{2,\omega}(\Gamma)$ системы $E^{(n_0)}$, и, в частности, $F_{n_0} \in V_{2,\omega}(E)$. Следовательно, F_{n_0} разлагается в ряд

$$F_{n_0}(\zeta) = (\sigma) \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)}(F_{n_0}) E_k^{(n)}(\zeta), \tag{32}$$

сходящийся к F_{n_0} по метрике $L_{2,\omega}(\Gamma)$. Значок (σ) означает, что члены ряда расставлены в порядке σ.

Однако из минимальности системы E следует, что коэффициенты $c_k^{(n)}(F_{n_0})$ ряда (32) определяются из формул

$$c_k^{(n)}(F_{n_0}) = \int_\Gamma F_{n_0}(\zeta)\overline{\Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}})}\, |\zeta|^\omega |d\zeta| \quad (k \geqslant 1;\ 1 \leqslant n \leqslant N). \tag{33}$$

Но поскольку F_{n_0} принадлежит замыканию в метрике $L_{2,\omega}(\Gamma)$ системы $E^{(n_0)}$, то некоторая последовательность $\{P_j\}_1^\infty$ линейных комбинаций элементов системы $E^{(n_0)}$ сходится к F_{n_0} в метрике $L_{2,\omega}(\Gamma)$. Ввиду (15) будем иметь

$$\int_\Gamma P_j(\zeta)\overline{\Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}})}\, |\zeta|^\omega |d\zeta| = 0 \quad (j \geqslant 1,\ k \geqslant 1,\ n \neq n_0)$$

и устремив здесь $j \to +\infty$, на основании (33) получим

$$c_k^{(n)}(F_{n_0}) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots;\ n \neq n_0,\ 1 \leqslant n \leqslant N).$$

Следовательно, каждая функция $F_{n_0} \in V_2^{(\omega)}(E^{(n_0)}; \Delta^*_{n_0})$ разлагается в ряд

$$F_{n_0}(\zeta) = (\sigma) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n_0)}(F_{n_0}) E_k^{(n_0)}(\zeta), \tag{32′}$$

сходящийся к F_{n_0} по метрике $L_{2,\omega}(\Gamma)$. Ввиду неравенств (6′) этот ряд сходится к F_{n_0} и по метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta^*_{n_0}]$ и поскольку система $E^{(n_0)}$ минимальна в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*_{n_0}]$, то разложение F_{n_0} в ряд вида (32′) единственно. Иначе говоря, система $E^{(n_0)}$ при расстановке σ является базисом пространства $V_2^{(\omega)}(E^{(n_0)}; \Delta^*_{n_0})$. Следовательно, при каждом n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ выполняются условия

$$\inf_{k \geqslant 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j^{(n)} \neq \lambda_k^{(n)}}}^{\infty} \left| \frac{(e^{i\tau_n}\overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n} - (e^{i\tau_n}\overline{\lambda_j^{(n)}})^{\beta_n}}{(e^{i\tau_n}\overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n} + (e^{i\tau_n}\overline{\lambda_j^{(n)}})^{\beta_n}} \right| > 0,$$

$$\sup_{k \geqslant 1} |p_k^{(n)}| < +\infty$$

(см. [10], теорему 5). Отсюда вытекают условия (16) и (17). Теорема доказана.

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за внимание к работе.

Институт математики АН Армянской ССР Поступила 26.VI.1980

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Ճառագայթների համակարգի վրա Միտագ-Լեֆլերի տիպի սիստեմների փակույթի, մինիմալության ու բազիսության մասին *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում ստացվել են ճառագայթների համակարգի վրա Միտագ-Լեֆլերի տիպի սիստեմների լրիվության, մինիմալության ու բազիսության հայտանիշները։ Այդպիսի սիստեմի ոչ լրիվ լինելու դեպքում տրվել է նրա փակույթի լիակատար ներքին նկարագրությունը, իսկ մինիմալության դեպքում կառուցվել է նրա հետ բիօրթոգոնալ սիստեմը։

V. M. MARTIROSIAN. *On the closure, minimality and basisness of systems of Mittag-Leffler type on a system of rays* (summary)

In the paper criteria of fullness, minimality and basisness on the system of rays are established for function systems of Mittag-Leffler type. In case the system is not full, a description of its closure is given, and in case of minimality the biorthogonal system is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О пополнении и замыкании неполной системы функций. $\{e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
2. *М. М. Джрбашян.* Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций, Матем. сборник, 114 (156), № 1, 1981 3—84.
3. *М. М. Джрбашян.* О замкнутости системы типа Миттаг—Леффлера, ДАН СССР, 219, № 6, 1974, 1302—1305.
4. *L. Schwartz.* Etude des sommes d'exponenentielles, Paris, 1942; Strasburg, 1953.
5. *С. А. Акопян, И. О. Хачатрян.* О замыкании незамкнутых систем функций типа Миттаг—Леффлера, Изв. АН СССР, сер. матем., 40, № 1, 1976, 96—114.
6. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян.* Теоремы типа Винера—Пэли и Мюнца—Саса, ДАН СССР, 225, № 5, 1975, 1001—1004; Изв. АН СССР, сер. матем., 41, № 4, 1977, 868—894.
7. *В. М. Мартиросян.* О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера и систем простейших рациональных дробей, ДАН Арм. ССР, 62, № 5, 1976, 269—274.
8. *В. М. Мартиросян.* Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм. ССР, 63, № 5. 1976, 278—283.
9. *А. Е. Аветисян.* О пополнении одной неполной системы функций, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XV, № 2, 1980, 96—109.
10. *В. М. Мартиросян.* О замыкании, минимальности и базисности систем функций типа Миттаг—Леффлера в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XVI, № 2, 1981, 85—102.
11. *А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, И. О. Хачатрян.* О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера на произвольной конечной системе лучей, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 389—395.
12. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
13. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
14. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
15. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
16. *В. М. Мартиросян.* О замыкании, минимальности и базисности систем простейших рациональных дробей на системе лучей, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XV, № 4, 1980, 276—291.
17. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», М., 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математика

А. С. ЗИЛЬБЕРГЛЕЙТ, Ю. И. КОПИЛЕВИЧ

О СПЕКТРЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

1°. В гильбертовом пространстве H над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ рассмотрим полиномиальный операторный пучок степени n [1, 2]

$$L(\lambda) = I - \sum_{j=1}^{n} \lambda^j A_j, \tag{1.1}$$

где I — единичный оператор, $A_j \in R(H)$, $j = 1, 2, \cdots, n$ — ограниченные операторы в H, λ — произвольное комплексное число. Число $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ называется характеристическим числом пучка $L(\lambda)$, если задача

$$L(\lambda_0)\, u = 0$$

нетривиально разрешима в H. Одним из основных результатов теории операторных пучков является тот факт, что если все операторы A_j вполне непрерывны, $A_j \in \sigma_\infty(H)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, то спектр пучка $L(\lambda)$ состоит из нормальных характеристических чисел* [2]. Цель настоящей работы заключается в установлении более слабых требований к операторам A_j, сохраняющих приведенный результат. Именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, существует натуральное m такое, что $A_k^m \in \sigma_\infty$, и, кроме того $A_j \in \sigma_\infty$ для $j \neq k$. Тогда множество характеристических чисел пучка $L(\lambda)$ (1.1) состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности*.*

Этот результат в известном смысле точен: если хотя бы два из входящих в (1.1) операторов A_j не вполне непрерывны, но имеют вполне непрерывные итерации, то спектр пучка может „испортиться". В самом деле, рассмотрим следующий пример. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортобазис в H. Зададим квадратичный пучок (1.1), $n=2$, с операторами A_1 и A_2, действующими по правилам

$$A_1 \varphi_{2k} = a_k \varphi_{2k-1}, \quad A_1 \varphi_{2k-1} = 0,$$

$$A_2 \varphi_{2k} = 0, \quad A_2 \varphi_{2k-1} = b_k \varphi_{2k},$$

$$a_k,\ b_k \neq 0; \quad k = 1, 2, \cdots,$$

где $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ — произвольные комплексные числовые последовательности, не стремящиеся к нулю при $k \to \infty$. Ясно, что $A_1, A_2 \overline{\in} \sigma_\infty$, но $A_1^2 = A_2^2 = 0 \in \sigma_\infty$; укажем, что $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$. Остается заметить, что

* В спектр пучка может входить, кроме того, точка $\lambda = \infty$, не являющаяся характеристическим числом (см. далее п. 2°).

рассматриваемый пучок имеет последовательность характеристических чисел $\lambda_k = (a_k b_k)^{-1/3}$, которым соответствуют собственные векторы $u_k = \varphi_{2k} + \lambda_k a_k \varphi_{2k-1}$. Выбирая $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ так, что $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k b_k) = \mu^{-3}$, $\mu \in \mathbf{C}$, получаем, что μ — точка сгущения спектра пучка; полагая же $a_k = b_k = 1$, $k = 1, 2, \cdots$, видим, что $\lambda = 1$ — характеристическое число бесконечной кратности.

Имеет место, однако

Теорема 2. *Пусть операторы A_j, $j = 1, 2, \cdots, n$, попарно коммутируют и имеют вполне непрерывные итерации, то есть найдутся натуральные m_j такие, что $A_j^{m_j} \in \sigma_\infty$, $j = 1, 2, \cdots, n$. Тогда множество характеристических чисел пучка $L(\lambda)$ (1.1) состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности*.*

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в пп. 4° и 5° соответственно; пп. 2° и 3° содержат необходимые предварительные результаты.

Отметим, что квадратичные операторные пучки с непрерывным спектром изучались в работе [3].

2°. Как известно [1, 2] пучку (1.1) может быть сопоставлен ассоциированный оператор S, действующий в прямой сумме $H^n = \sum\limits_{l=1}^{n}{}^{+} H$ n копий пространства H с элементами $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $u_j \in H$, $j = 1, 2, \cdots, n$, которые можно рассматривать как векторы размерности n. Оператор S задается матрицей [4] вида

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_{n-1} & A_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{array} \right) \end{array}, \tag{2.1}$$

причем всякому его собственному числу μ отвечает характеристическое число $\lambda = \mu^{-1}$ пучка $L(\lambda)$, и обратно.

Очевидно, что $S \in R(H^n)$ при $A_j \in R(H)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, но, независимо от свойств операторов A_j, $S \overline{\in} \sigma_\infty(H^n)$. Далее мы покажем, однако, что в условиях сформулированных теорем некоторая итерация S^r оператора S оказывается вполне непрерывным оператором в H^n, и, следовательно, весь ненулевой спектр S^r состоит из нормальных собственных чисел. Тогда и ненулевой спектр оператора S состоит из нормальных собственных чисел (см. [2], стр. 327), и, значит, имеют место доказываемые утверждения.

3°. Разобьем оператор S на два слагаемых

$$S = S_k + S_k' \tag{3.1}$$

где

$$S_k=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & A_k & \cdots & 0 & 0\\ I & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & I & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & I & 0\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$S'_k=\begin{pmatrix} A_1 & A_2\cdots A_{k-1} & 0 & A_k\cdots A_n\\ 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0\\ \vdots & \vdots\quad\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\ \vdots\\ 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Отнесем $n\times n$ -- матрицы M, N, P вида

$$M=\begin{pmatrix} M_{11}\cdots M_{1k} & 0\\ \vdots\qquad\ \vdots & \\ M_{k1}\cdots M_{kk} & \\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ & N_{k+1\,k+1}\cdots N_{k+1\,n}\\ & \vdots\qquad\qquad \vdots\\ 0 & N_{n\,k+1}\cdots N_{nn}\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ P_{k+1\,1}\cdots P_{k+1\,k} & \\ \vdots\qquad\ \vdots & \\ P_{n1}\ \cdots\ P_{nk} & \end{pmatrix},\ 1\leqslant k\leqslant n,$$

к классам $\mathbf{M}_k$, $\mathbf{n}_k$, $\mathbf{P}_k$, соответственно. Следующие утверждения могут быть проверены непосредственно.

Лемма 1. *Пусть* M, $\tilde{M}\in\mathbf{M}_k$, N, $\tilde{N}\in\mathbf{n}_k$, P, $\tilde{P}\in\mathbf{P}_k$. *Тогда* $M\tilde{M}\in\mathbf{M}_k$, $N\tilde{N}\in\mathbf{n}_k$, $P\tilde{P}=0$.

Лемма 2. *Пусть* $M\in\mathbf{M}_k$, $N\in\mathbf{n}_k$, $P\in\mathbf{P}_k$. *Тогда* $MN=NM=0$, $MP=PN=0$; $PM\in\mathbf{P}_k$, $NP\in\mathbf{P}_k$.

Заметим теперь, что матрицу (3.2) можно представить следующим образом:

$$S_k=M_k+N_k+P_k, \tag{3.4}$$

причем $M_k\in\mathbf{M}_k$, $N_k\in\mathbf{n}_k$, $P_k\in\mathbf{P}_k$:

$$M_k=\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0\cdots 0 & A_k\\ I & 0\cdots 0 & 0\\ 0 & I\cdots 0 & 0\\ \vdots & \vdots\quad\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\cdots I & 0\end{matrix} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad N_k=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & \begin{matrix} 0 & 0\cdots 0 & 0\\ I & 0\cdots 0 & 0\\ \vdots & \vdots\quad\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\cdots I & 0\end{matrix}\end{pmatrix},$$

$$P_k=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ \begin{matrix} 0 & 0\cdots 0 & I\\ 0 & 0\cdots 0 & 0\\ \vdots & \vdots\quad\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\cdots 0 & 0\end{matrix} & 0\end{pmatrix}.$$

Нетрудно установить равенства

$$M_k^k = \begin{pmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & A_k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \equiv \operatorname{diag}\{A_k, \cdots, A_k\}, \tag{35}$$

$$N_k^{n-k} = 0, \quad 1 \leqslant k < n, \quad N_n = 0. \tag{3.6}$$

Из представления (3.4) и лемм 1 и 2 вытекает

Лемма 3. *Для любого натурального p*

$$S_k^p = M_k^p + N_k^p + \sum_{\alpha=0}^{p-1} N_k^\alpha P_k M_k^{p-\alpha-1}.$$

Отсюда с учетом (3.6) следует

Лемма 4. *Для всякого натурального $p > n - k$*

$$S_k^p = M_k^p + \sum_{\beta=p-n+k}^{p-1} N^{p-\beta-1} P_k M_k^\beta. \tag{3.7}$$

Наконец, справедлива

Лемма 5. *Пусть для некоторого натурального m оператор. A_k^m вполне непрерывен, $A_k^m \in \sigma_\infty(H)$. Тогда $S_k^{mk+n-k} \in \sigma_\infty(H^n)$.*

Доказательство. В силу (3.5) и условия леммы $M_k^{mk} = \operatorname{diag}\{A_k^m, \cdots, A_k^m\}$ вполне непрерывен. Следовательно, $M_k^\beta \in \sigma_\infty(H^n)$ для $\beta \geqslant mk$. Положим теперь в (3.7) $p = mk + n - k$, тогда в каждое слагаемое правой части (3.7) входит вполне непрерывный множитель M_k^β, $\beta \geqslant mk$. Лемма 5 доказана.

4°. Доказательство теоремы 1. По условию оператор S_k' (3.3) вполне непрерывен. Поэтому, возводя равенство (3.1) в степень $mk + n - k$, получаем

$$S^{mk+n-k} = S_k^{mk+n-k} + T,$$

где $T \in \sigma_\infty(H^n)$. Далее, условие леммы 5 выполняется, следовательно, $S_k^{mk+n-k} \in \sigma_\infty(H^n)$, а, значит, и оператор S^{mk+n-k} вполне непрерывен в H^n. Как было указано в п. 2°, отсюда следует утверждение теоремы 1.

5°. Доказательство теоремы 2. Представим ассоциированный с пучком (1.1) оператор S в виде

$$S = J + A, \tag{5.1}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Заметим, что

$$\begin{array}{l} p\{ \\ \\ \\ \\ \end{array} J^p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \begin{matrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}, \ 1 \leqslant p < n, \tag{5.3}$$

$$J^p = 0, \quad p \geqslant n. \tag{5.4}$$

Кроме того

$$A^q = \begin{pmatrix} A_1^q & A_1^{q-1} A_2 \cdots A_1^{q-1} & A_n \\ 0 & 0 \quad \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \quad \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

и из (5.3), (5.5) имеем

$$A^q J^p = \left(\begin{array}{ccccc} A_1^{q-1} A_{p+1} & A_1^{q-1} A_{p+2} & \cdots & A_1^{q-1} A_n & \overbrace{0 \cdots 0}^{p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \end{array} \right). \tag{5.6}$$

Возводя (5.1) в некоторую натуральную степень r, получаем, что S^r есть сумма однородных одночленов степени r вида

$$\prod_{i=1}^{s} A^{q_i} J^{p_i}, \tag{5.7}$$

причем

$$\sum_{i=1}^{s} (q_i + p_i) = r; \ 0 \leqslant q_1, \ p_s \leqslant r, \ 1 \leqslant q_{i+1}, \ p_i \leqslant r-1, \ i=1, 2, \cdots, \ s-1. \tag{5.8}$$

В силу (5.4) можно считать $p_i \leqslant n-1$, $i=1, \cdots, s$, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{s} q_i \geqslant r - s(n-1). \tag{5.9}$$

Ясно, что все одночлены (5.7) для которых хотя бы одно из чисел q_i, $i=1, 2, \cdots, s$, больше m_1 (см. условие теоремы 2), являются, ввиду (5.5), вполне непрерывными операторами. Поэтому далее рассматриваем лишь одночлены, в которых $q_i < m_1 + 1$, $i=1, 2, \cdots, s$. Для таких одночленов

$$r = \sum_{i=1}^{s} (q_i + p_i) < \sum_{i=1}^{s} (n + m_1),$$

то есть

$$s > \frac{r}{n+m_1}. \tag{5.10}$$

Из (5.9) и (5.10) получаем оценку снизу для суммы показателей q_i:

$$\sum_{i=1}^{s} q_i \geqslant r\left(1 - \frac{n-1}{n+m_1}\right).$$

Заметим теперь, что всякий одночлен (5.7) представляет собой, согласно (5.6), матрицу-строку, каждый ненулевой элемент которой, вследствие коммутативности операторов A_j, $j=1, 2, \cdots, n$, имеет вид

$$A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n},$$

причем $\alpha_j \geqslant 0$ и

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{l=1}^{s} q_l > r\left(1 - \frac{n-1}{n+m_1}\right).$$

Поэтому для достаточно больших r среди чисел α_j, $j=1, 2, \cdots, n$, заведомо найдется такое, которое превосходит соответствующее m_j. Именно, достаточно, чтобы

$$r \geqslant n\,\frac{m_1+n}{m_1+1} \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant n} m_j.$$

При этом все одночлены (5.7) оказываются вполне непрерывными, и, значит, $S' \in \sigma_\infty(H^n)$. Теорема 2 доказана.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР,
Государственный оптический
институт им. С. И. Вавилова

Поступила 20.II.1980

Ա. Ս. ԶԻԼԲԵՐԳԼԵՅՏ, Յու. Ի. ԿՈՊԻԼԵՎԻՉ. Բազմանդամային օպերատորային փնջի մասին *(ամփոփում)*

Հայտնի է, որ եթե բազմանդամային փունջ կազմող օպերատորները լիովին անընդհատ են, ապա նրա սպեկտրը կազմված է նորմալ խարակտերիստիկ թվերից։ Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ այդ արդյունքը տեղի ունի ավելի թույլ պայմանների դեպքում. ա) եթե A_j փնջի օպերատորներից մեկը լիովին անընդհատ չէ, սակայն ունի $A_j^{m_j}$ լիովին անընդհատ իտեռացիա, բ) եթե նշված պայմանին բավարարում են բոլոր օպերատորները և նրանք զույգ առ զույգ տեղափոխելի են։ Բերվում է օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ ա) պայմանը որոշ իմաստով ճշգրիտ է։

A. S. SILBERGLEIT, Yu. I. KOPILEVICH. *On the spectrum of polynomial operator pencil* (summary)

The spectrum of polynomial pencil $L(\lambda) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda^j A_j$ is known to consist of normal eigenvalues when it's operators are compact. The validity of this result is demonstrated under two sets of weaker conditions, namely a) when one of the operators of the pencil, A_j is not compact but has a compact iteration $A_j^{m_j}$ and b) when the previous condition is satisfied by all the operators A_j, $j=1, \cdots, n$ and $A_j A_k = A_k A_j$. An example is presented which proves the condition a) to be in some sence exact.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 77, №1, 1951.
2. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965.
3. *Г. В. Вирабян.* О квадратичных операторных пучках с непрерывным спектром, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XII, № 6, 1977.
4. *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь.* Лекции по функциональному анализу, М., «Мир», 1979.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математика

Э. К. ДИЛАНЯН

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ М. М. ДЖРБАШЯНА

1. Первоначально в работе [1], а затем в монографии [2] М. М. Джрбашяном была построена теория гармонического анализа в собственно комплексной плоскости, а именно, на конечной системе лучей, исходящих из точки $z=0$. Основой для этого послужили замечательные асимтотические свойства целой функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\ (\rho>0,\ \mu\in C).$$

Эта теория послужила основой для установления общих теорем типа теорем Винера-Пэли — о параметрическом представлении широких классов как целых функций произвольного порядка и нормального типа, так и для классов функций, аналитических в угловых областях (см., напр., [2]).

Поскольку в данной работе мы существенно опираемся на один из этих результатов, приведем здесь его формулировку.

Пусть $\frac{1}{2}<\alpha<+\infty$,

$$\Delta(\alpha;\ 0)=\left\{z;\ |\arg z|<\frac{\pi}{2\alpha},\ 0<|z|+\infty\right\}$$

— угловая область на конечной комплексной плоскости C. Обозначим через L_α границу угловой области $\Delta(\alpha;\ 0)$, а через $L_{2,-\omega}(L_\alpha)\ (-1<\omega<1)$ — класс функций $V(\xi)$, измеримых на L_α и удовлетворяющих условию

$$\|V\|_{2,-\omega}=\left\{\int_{L_\alpha}|V(\xi)|^2|\xi|^{-\omega}\,|d\xi|\right\}^{1/2}<+\infty,$$

Следующая теорема была установлена М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [3] (см. также [2], стр. 431) и является существенным обобщением теоремы Винера-Пэли о параметрическом представлении класса H_2 в полуплоскости.

Теорема А. *Пусть*

$$\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1,\ \rho\geqslant\frac{\alpha}{2\alpha-1},$$

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\ \text{и}\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

1°. *Класс $H_2[\alpha; \omega]$ функций $F(z)$, голоморфных в угловой области $\Delta(\alpha; 0)$ удовлетворяющих условию*

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2\alpha}}\left\{\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}dr\right\}<+\infty,$$

совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\gamma}E_\rho(z\xi;\ \mu)\,V(\xi)\,d\xi;\ \ z\in\Delta(\alpha;\ 0), \tag{1}$$

где $V(\xi)$ — произвольная функция из класса $L_{2,\,-\omega}(L_\gamma)$.

2°. *Если $F(z)\in H_2[\alpha;\ \omega]$, то справедлива формула*

$$L_2(z;\ F)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\gamma}E_\rho(z\xi;\ \mu)\,V(\xi;\ F)\,d\xi=F(z); \tag{2}$$

$$z\in\Delta(\alpha;\ 0),$$

где $V(\xi;\ F)$ также принадлежит классу $L_{2,\,-\omega}(L_\gamma)$ и почти всюду на $(0;\ +\infty)$ определяется формулами

$$V\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\gamma}}\tau;\ F\right)=\tau^{\rho(\mu-1)}\frac{e^{\mp i\frac{\pi}{2}\left(2+\frac{1}{\gamma}-\mu\right)}}{\rho}\,\frac{d}{d\tau}\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mp i\tau^\rho t}-1}{\mp it}\times$$

$$\times F\left(e^{\mp i\frac{\pi}{2\alpha}}t^{1/\rho}\right)t^{\mu-1}\,dt. \tag{3}$$

3°. *Формула*

$$L_2^*(re^{i\varphi};\ F)\equiv\frac{r^{1-\rho\mu}}{2\pi\rho i}\frac{d}{dr}r^{\rho\mu}\int_{L_\gamma}E_\rho(re^{i\varphi}\xi;\ \mu+1)\,V(\xi;\ F)\,d\xi=F(re^{i\varphi})$$

$$\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2\alpha},\ 0<r<+\infty\right) \tag{4}$$

справедлива для всех r при $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ и почти для всех r при $\varphi=\pm\frac{\pi}{2\alpha}$.

Замечание. Отметим, что когда $\rho>\frac{\alpha}{2\alpha-1}$, в представлении (1) функция $V(\xi)\in L_{2,\,-\omega}(L_\gamma)$ не определяется единственным образом, она определяется из условия

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(\gamma;\ 0)}\frac{V(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(\gamma;\ 0)}\frac{V(\xi;\ F)}{\xi-z}\,d\xi; \tag{5}$$

$$z\in\Delta(\gamma;\ 0)$$

(см. теоремы 7.6 и 7.9 монографии [2], стр. 419, 446). Ниже приводим одну лемму и теорему, которые нами будут использованы в дальнейшем.

Лемма А. (см. [4], лемму 1). *Пусть* $f \in L_{2, -\omega}(\Gamma(\nu))$, *где* $\Gamma(\nu)$ — *луч, исходящий из начала координат:* $\Gamma(\nu) = \{re^{i\nu};\ 0 \leqslant r < +\infty\}$; *причем* $\Gamma(\nu)$ *пробегается в направлении возрастания* r. *Тогда функция*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(\nu)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi; \quad z \in \mathbf{C} \setminus \Gamma(\nu),$$

аналитична в области $\mathbf{C} \setminus \Gamma(\nu)$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{\nu < \varphi < \nu + 2\pi} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2\, r^{-\omega}\, dr \right\}^{1/2} \leqslant B_{2,\omega} \|f\|_{2,-\omega},$$

где $B_{2,\omega} \in (0; +\infty)$ *не зависит от* f. *Более того, функция* F *почти всюду на* $\Gamma(\nu)$ *имеет угловые граничные значения* $F^{(-)}(\xi)$ *и* $F^{(+)}(\xi)$, $\xi \in \Gamma(\nu)$, *соответственно слева и справа от луча* $\Gamma(\nu)$, *причем* $F^{(\pm)}(re^{i\nu})\, r^{-\omega/2} \in L_2(0, +\infty)$ *и*

$$f(\xi) = F^{(-)}(\xi) - F^{(+)}(\xi) \text{ п.в. на } \Gamma(\nu). \tag{6}$$

Пусть $\Delta(\alpha; \nu)$ — угловая область на плоскости $\mathbf{C}$, определяемая таким образом:

$$\Delta(\alpha; \nu) = \begin{cases} |\operatorname{Arg} z - \nu| < \dfrac{\pi}{2\alpha}, & \text{при } \dfrac{1}{2} < \alpha < +\infty; \\ \arg z = \nu, & \text{при } \alpha = +\infty. \end{cases}$$

$H_{2,\omega}[\Delta(\alpha; \nu)]$ — класс голоморфных в $\Delta(\alpha; \nu)$ $\left(\dfrac{1}{2} < \alpha < +\infty\right)$ функций F, для которых

$$\|F\|^{*}_{H_{2,\omega}[\Delta(\alpha;\nu)]} = \sup_{\nu - \frac{\pi}{2\alpha} < \varphi < \nu + \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}\, dr \right\}^{1/2} < +\infty. \tag{7}$$

Справедлива следующая теорема (см. [11], теорему 7.5).

Теорема В. *Если* $F(z) \in H_{2,\omega}[\Delta(\alpha; \omega)]$, *то*

1°. *Почти всюду на* $\partial\Delta(\alpha; \nu)$ *функция* F *имеет некасательные значения* $F(\xi)$, *причем*

$$\|F\|_{H_{2,\omega}[\Delta(\alpha;\nu)]} = \left\{ \int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\nu)} |F(\xi)|^2\, |\xi|^{\omega}\, |d\xi| \right\}^{1/2} < +\infty$$

и справедливы равенства

$$\lim_{\varphi \to \nu \pm \frac{\pi}{2\alpha}} \int\limits_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi}) - F(re^{i\left(\nu \pm \frac{\pi}{2\alpha}\right)})|^2\, r^{\omega}\, dr = 0.$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\nu)} \frac{F(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \begin{cases} F(z), & \text{при } z \in \Delta(\alpha; \nu); \\ 0, & \text{при } z \in \mathbf{C} \setminus \overline{\Delta(\alpha; \nu)}, \end{cases}$$

где $\partial\Delta(\alpha;\nu)$ пробегается в положительном относительно $\Delta(\alpha;\nu)$ направлении.

2. М. М. Джрбашяном были также введены весьма общие классы функций, определенных на конечной системе лучей и угловых областей, имеющих общую вершину—начало координат (см. [1], а также [2], гл. VII). Им же были даны параметрические представления этих классов. В данной работе мы дадим другие параметрические представления таких классов. В частности, нами будет получена также одна теорема единственности, которая иным способом была установлена А. Е. Аветисяном [5]. Чтобы определить эти классы функций, введем обозначения.

Предположим, что совокупности чисел

$$\{\nu_k\}_1^N;\ 0<\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_N\leqslant 2\pi,$$

$$\{\alpha_k\}_1^N;\ \frac{1}{2}<\alpha_k\leqslant+\infty\ (k=1,\cdots,N)\ (N\geqslant 1), \tag{8}$$

таковы, что всевозможные пересечения $\overline{\Delta(\alpha_{k_1};\nu_{k_1})}\cap\overline{\Delta(\alpha_{k_2};\nu_{k_2})}\ (k_1\neq k_2)$ замкнутых множеств $\{\overline{\Delta(\alpha_k;\nu_k)}\}_1^N$ содержат лишь единственную точку—начало координат.

Легко заметить, что это условие эквивалентно следующей цепочке неравенств:

$$\nu_{k+1}-\nu_k>\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)\ (k=1,\cdots,N), \tag{9}$$

где $\nu_{N+1}=\nu_1+2\pi$ и $\alpha_{N+1}=\alpha_1$.

В принятых условиях на плоскости C рассмотрим, далее, точечное множество

$$M\{\nu_1,\cdots,\nu_N;\alpha_1,\cdots,\alpha_N\}\equiv M\{\nu;\alpha\}=\bigcup_{k=1}^{N}\Delta(\alpha_k;\nu_k),$$

компонентами которого служат лучи, исходящие из начала координат (если среди чисел α_k имеются равные $+\infty$), и угловые области с вершиной в той же точке $z=0$ (если среди чисел имеются отличные от $+\infty$).

Условимся через $\tilde{\Delta}(\alpha_k;\nu_k)$ обозначать множества точек угла $\Delta(\alpha_k;\nu_k)$ или пустое множество, если соответственно $\frac{1}{2}<\alpha_k<+\infty$ или $\alpha_k=+\infty$.

Если хотя бы одно из чисел $\{\alpha_k\}_1^N$ отлично от $+\infty$, то открытое множество

$$\tilde{M}\{\nu;\alpha\}=\bigcup_{k=1}^{N}\tilde{\Delta}(\alpha_k;\nu_k)$$

содержит совокупность всех внутренних точек множества $M\{\nu;\alpha\}$. Обозначим через

$$e_k^* = \begin{cases} \left\{\varphi;\ |\varphi - \nu_k| < \dfrac{\pi}{2\alpha_k}\right\}, & \text{при } \dfrac{1}{2} < \alpha_k < +\infty, \\ \{\varphi;\ \varphi = \nu_k\}, & \text{при } \alpha_k = +\infty\ (k=1, \cdots, N), \end{cases}$$

$$\mathrm{E}^*\{\nu;\ \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{N} e_k^*.$$

Условимся говорить, что функция $F(z)$ принадлежит классу $H_2^{(\omega_1, \cdots, \omega_N)}[\alpha_1, \cdots, \alpha_N;\ \omega] \equiv H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$ $(-1 < \omega < 1)$, если она определена на множестве $M\{\nu;\ \alpha\}$ и удовлетворяет условию

А) при $\varphi \in \mathrm{E}^*\{\nu, \alpha\}$

$$I_F(\varphi) = \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}\, dr \leqslant A_F < +\infty,$$

где A_F не зависит от φ. В том случае, когда множество $\widetilde{M}\{\nu;\ \alpha\}$ не пусто, функция $F(z)$ должна удовлетворять также дополнительному условию

Б) $F(z)$ голоморфна на каждой компоненте $\widetilde{M}\{\nu;\ \alpha\}$, т. е. в каждой угловой области $\Delta(\alpha_k;\ \nu_k)$ такой, что $\left(\dfrac{1}{2} < \alpha_k < +\infty\right)$.

Обозначим через

$$\delta_n = \frac{1}{2}(\nu_{n+1} + \nu_n) + \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) + \pi \tag{10}$$

и

$$\frac{\pi}{\beta_n} = (\nu_n - \nu_{n+1}) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) + 2\pi,\quad n = 1, \cdots, N,$$

где

$$\nu_{N+1} = \nu_1 + 2\pi \text{ и } \alpha_{N+1} = \alpha_1.$$

Легко заметить, что δ_n является биссектрисой угловой области $\Delta_n^* = \mathrm{C} \setminus \Delta_n$, где

$$\Delta_n = \left\{z;\ \nu_n + \frac{\pi}{2\alpha_n} < \arg z < \nu_{n+1} - \frac{\pi}{2\alpha_{n+1}}\right\},\quad (n = 1, \cdots, N),$$

а $\dfrac{\pi}{\beta_n}$ — раствором этого угла.

Теперь уже мы можем сформулировать и доказать следующую теорему о параметрическом представлении класса $H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$.

Теорема 1. *Пусть* $-1 < \omega < 1$, *параметры* $\{\nu_k\}_1^N$ *и* $\{\alpha_k\}_1^N$ *определены по* (8) *и удовлетворяют условию* (9),

$$\rho_k \geqslant \frac{\beta_k}{2\beta_k - 1},\quad \frac{1}{\gamma_k} = \frac{1}{\beta_k} + \frac{1}{\rho_k},\quad \mu_k = \frac{1 + \omega + \rho_k}{2\rho_k}\ (k = 1, \cdots, N),$$

где β_k *и* δ_k *определены по* (10). *Имеют место следующие утверждения:*

1°. *Класс* $H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$ *совпадает с множеством функций, допускающих представление вида*

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;\,-\delta_k)}E_{\rho_k}(z\xi;\ \mu_k)\,V_k(\xi)\,d\xi, \tag{11}$$

$$z\in\widetilde{M}\{\nu;\ \alpha\},$$

где $V_k(\xi)$ — *произвольные функции из класса* $L_{2,-\infty}(\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k))$, $(k=1,\cdots,\ N)$.

2°. *Если* $F(z)\in H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$, *то справедлива формула*

$$F(re^{i\varphi})=\sum_{k=1}^{N}\frac{1^{-\rho_k\mu_k}}{2\pi\rho_k i}\frac{d}{dr}r^{\rho_k\mu_k}\int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;\,-\delta_k)}E_{\rho_k}(e^{i\varphi}r\xi;\ \mu_{k+1})\,V_k(\xi;\ F)\,d\xi, \tag{12}$$

$$\left(|\varphi-\delta_k|\leqslant\frac{\pi}{2\beta_k},\ k=1,\cdots,\ N\right),$$

где $V_k(\xi;\ F)$ — *функции из класса* $L_{2,-\infty}(\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k))$ *и почти всюду на* $(0;\ +\infty)$ *определяются формулами*

$$V_k\left(e^{i\left(-\delta_k\pm\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)}\tau;\ F\right)=\tau^{\rho_k(\mu_k-1)}\frac{e^{\mp i\frac{\pi}{2}\left(2+\frac{1}{\gamma_k}-\mu_k\mp\delta_k\right)}}{\rho_k}\frac{d}{dr}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{\mp i\tau\rho t}-1}{\mp it}\times \tag{13}$$

$$\times F\left(e^{i\left(\delta_k\mp\frac{\pi}{2\beta_k}\right)}t^{1/\rho_k}\right)dt\quad(k=1,\cdots,\ N).$$

При этом формула (12) *справедлива для всех* $r\in(0,\ +\infty)$, *если* $|\varphi-\delta_k|<\dfrac{\pi}{2\beta_k}$ *и почти для всех* $r\in(0,\ +\infty)$, *если* $\varphi=\delta_k\pm\dfrac{\pi}{2\beta_k}$ $(k=1,\cdots,\ N)$.

Если $\widetilde{M}\{\nu;\ \alpha\}$ *не пусто, то справедлива также формула*

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;\,-\delta_k)}E_{\rho_k}(z\xi;\ \mu_k)\,V_k(\xi;\ F)\,d\xi, \tag{14}$$

$$z\in\widetilde{M}\{\nu;\ \alpha\}.$$

Доказательство 2°. Пусть $F(z)\in H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$. Если $\alpha_k=+\infty$, то по определению класса $H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$ $F(re^{i\nu_k})\in L_{2,-\infty}(\Gamma(\nu_k))$. А если $\alpha_k<+\infty$, то существуют некасательные граничные значения $F\left(\nu_k\pm\dfrac{\pi}{2\alpha_k}\right)\in L_{2,-\infty}\left(\Gamma\left(\nu_k\pm\dfrac{\pi}{2\alpha_k}\right)\right)$ $(k=1,\cdots,\ N)$ (см. теорему B). Воспользуемся теперь некоторыми рассуждениями из работы [6].

Рассмотрим следующие множества индексов

$$J_N=\{n,\ \ \text{если}\ \ \alpha_n<+\infty\}$$

и

$$\overset{*}{J}_N=\{n,\ \ \text{если}\ \ \alpha_n=+\infty\}.$$

Ясно, что при этом $J_N\cup\overset{*}{J}_N=\{n\}_1^N$ и $J_N\cap\overset{*}{J}_N=\varnothing$. Кроме того,

$$\{\bigcup_{n\in J_N^*}\Gamma(\nu_n)\}\cup(\bigcup_{n\in J_\Gamma}\Delta(\alpha_n;\ \nu_n)\}\equiv M\{\nu;\ \alpha\}.$$

Если $k\in J_N$, то обозначим

$$\Phi_k^{(\pm)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\left(\nu_k\pm\frac{\pi}{2\alpha_n}\right)}\frac{F(\xi)}{\xi-z}d\xi, \tag{15}$$

$$z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma\left(\nu_k\pm\frac{\pi}{2\alpha_k}\right),$$

а если $k\in J_N^*$, то положим

$$\Psi_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\nu_k)}\frac{F(\xi)}{\xi-z}d\xi,\ z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma(\nu_k). \tag{16}$$

Пусть $\Psi_k^{(-)}$ и $\Psi_k^{(+)}$ — некасательные граничные значения $\Psi_k(z)$ на $\Gamma(\nu_k)$ соответственно слева и справа от этого луча. Если взять

$$\varphi_k^{(+)}(z)=\begin{cases}\Psi_k(z);\ z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma(\nu_k)\\ \Psi_k^{(+)}(z);\ z\in\Gamma(\nu_k),\end{cases}$$

$$\varphi_k^{(-)}(z)=\begin{cases}\Psi_k(z);\ z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma(\nu_k)\\ \Psi_k^{(-)}(z);\ z\in\Gamma(\nu_k),\end{cases}$$

то по лемме А имеет место следующее равенство:

$$\sum_{k\in J_N^*}[\varphi_k^{(-)}(z)-\varphi_k^{(+)}(z)]=F(z),\ z\in\bigcup_{k\in J_N^*}\Gamma(\nu_k).$$

Имея ввиду это и теорему В можем написать, что

$$\sum_{k\in J_N}[\Phi_k^{(-)}(z)-\Phi_k^{(+)}(z)]+\sum_{k\in J_N^*}[\varphi_k^{(-)}(z)-\varphi_k^{(+)}(z)]=F(z) \tag{17}$$

$$z\in M\{\nu;\ \alpha\}.$$

Положим

$$G^{(+)}(z)=\begin{cases}\Phi_k^{(\pm)}(z),\ \text{если}\ k\in J_N\\ \varphi_k^{(\pm)}(z),\ \text{если}\ k\in J_N^*\end{cases}$$

и

$$F_k(z)=G_{k+1}^{(-)}(z)-G_k^{(+)}(z).$$

Легко заметить, что $F_k(z)\in H_{2,-\infty}[\Delta\,\beta_k;\ \delta_k)]$. Тогда из (17) заключаем, что имеет место равенство

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}F_k(z),\ z\in M\{\nu;\ \alpha\}, \tag{18}$$

где $F_k(z)\in H_{2,\infty}[\Delta(\beta_k;\ \delta_k)]$ $(k=1,\cdots,N)$.

Рассмотрим функции $\widetilde{F}_k(z)=F_k(ze^{i\delta_k})$. Легко проверить, что $\widetilde{F}_k(z)\in H_2[\beta_k;\ \omega]$. По формуле (4) теоремы А имеет место представление

$$\tilde{F}_k(re^{i\varphi}) = \frac{r^{1-\rho_k\mu_k}}{2\pi\rho_k i}\frac{d}{dr}\, r^{\rho_k\mu_k}\int\limits_{L_{\gamma_k}} E_{\rho_k}(re^{i\varphi}\xi;\ \mu_k+1)\ \tilde{V}_k(\xi;\ F)\,d\xi \tag{19}$$

$$|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\beta_k},\ k=1,\cdots,N,$$

где $\tilde{V}_k(\xi;\ F)$ — функции из класса $L_{2,-\infty}(L_{\gamma_k})(k=1,\cdots,N)$. В этой формуле заменим $re^{i\varphi}$ через $re^{i\varphi}e^{-i\delta_k} = re^{i(\varphi-\delta_k)}$. Тогда получим

$$F_k(re^{i\varphi}) = -\frac{r^{1-\rho_k\mu_k}}{2\pi\rho_k i}\frac{d}{dr}\, r^{\rho_k\mu_k}\int\limits_{L_{\gamma_k}} E_{\rho_k}(e^{-i\delta_k}e^{i\varphi}r\xi;\ \mu_k+1)\,\tilde{V}_k(\xi;\ F)\,d\xi. \tag{20}$$

Если заменить тут $e^{-i\delta_k}\ \xi \sim \xi$, то получим

$$F_k(re^{i\varphi}) = \frac{r^{1-\rho_k\mu_k}}{2\pi\rho_k i}\frac{d}{dr}\, r^{\rho_k\mu_k}\int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k)} E_{\rho_k}(re^{i\varphi}\xi;\ \mu_k+1)\ V_k(\xi;\ F)\,d\xi,$$

$$\left(|\varphi-\delta_k| \leqslant \frac{\pi}{2\beta_k},\ k=1,\cdots,N\right),$$

где уже $V_k(\xi;\ F) \in L_{2,-\infty}(\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k))$.

Имея в виду (20) и (18) окончательно получится представление (12). В силу (19) и формулы (3) теоремы А, получим обращение (13). Утверждение 2° доказано. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. Теорема доказана.

Следует отметить, что при $\rho_k > \dfrac{\beta_k}{2\beta_k-1}$ $(k=1,\cdots,N)$ представление вида (11) не определяется единственным образом по функции $F(z)$. Это видно из доказательства теоремы и из замечания, приведенного после теоремы A. Если для данного индекса к $\rho_k > \dfrac{\beta_k}{2\beta_k-1}$, то в представлении (19) функция $F_k(z)$ в области $\Delta(\beta_k;\ \delta_k)$ не представляется единственным способом. Значит для единственности представления (11) необходимо нарушение этого условия для всех k. А еще точнее, числа $\{\nu_k\}_1^N$ и $\{\alpha_k\}_1^N$ должны быть таковы, чтобы для любого n кроме условий (9) имели место и следующие условия:

а) все числа α_n конечны;

б) $$\nu_{n+1} - \nu_n - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_n}\right) = \text{const}\ (n=1,\cdots,N). \tag{21}$$

Постоянную в (21) обозначим $\dfrac{\pi}{\rho}$.

Имея в виду вышесказанное, можно условие (21) принять как необходимое и достаточное условие единственности представления (11). Именно справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть параметры* $\{\nu_k\}_1^N$ *и* $\{\alpha_k\}_1^N$ *определены по* (8), *удовлетворяют условиям* (9), (22), $\{\delta_k\}_1^N$ *и* $\{\beta_k\}_1^N$ *определены по* (10),

$$\mu=\frac{1+\rho+\omega}{2\rho},\quad \frac{1}{\gamma_k}=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\beta_k};\quad k=1,\cdots,N;$$

и пусть $F(z)$ — произвольная функция из $H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$. При этих условиях $F(z)$ единственным образом можно представить в виде

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)}E_\rho(z\xi;\ \mu)\,V_k^*(\xi)\,d\xi, \tag{22}$$

$$z\in\overline{M}\{\nu;\ \alpha\},$$

где $V_k^*(\xi)$ — функции из $L_{2,-\omega}\left(\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)\right)$ $(k=1,\cdots,N)$.

Имеет место и формула обращения

$$V_k^*\left(e^{i\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)}\tau\right)=\tau^{\rho(\mu-1)}\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(2+\frac{1}{\gamma_k}-\mu+\delta_k\right)}}{\rho}\frac{d}{dr}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{it^\rho t}-1}{it}\times$$

$$\times F\left(e^{i\left(\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)}t^{1/\rho}\right)t^{\mu-1}\,dt-\tau^{\rho(\mu-1)}\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\left(2+\frac{1}{\gamma_k}-\mu-\delta_k\right)}}{\rho}\times$$

$$\times\frac{d}{dr}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau^\rho t}-1}{-it}F\left(e^{i\left(\delta_k-\frac{\pi}{2\beta_k}\right)}t^{1/\rho}\right)t^{\mu-1}\,dt. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $F(z)\in H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$. Прежде чем убедиться в единственности представления (22), докажем единственность представления (18)

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}F_k(z),$$

где $F_k(z)\in H_2[\Delta(\beta_k;\ \delta_k)]$ $(k=1,\cdots,N)$.

Пусть

$$F_1(z)+F_2(z)+\cdots+F_N(z)=0 \text{ п.в. на } M\{\nu;\ \alpha\}.$$

Отсюда, в частности, можем написать

$$F_1(z)=-\sum_{n=2}^{N}F_n(z). \tag{24}$$

Так как $F_1(z)\in H_{2,\omega}[\Delta(\beta_1,\ \delta_1)]$, то в силу теоремы В имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1)}\frac{F_1(z)}{\xi-z}\,d\xi=0,\quad z\in\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1), \tag{25}$$

где $\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1)=\mathbf{C}\setminus\overline{\Delta(\beta_1;\ \delta_1)}$.

С другой стороны, $\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1)\subset\bigcap_{k=2}^{N}\Delta(\beta_k;\ \delta_k)$ и $F_k\in H_{2,\omega}[\Delta(\beta_k;\ \delta_k)]$. Значит сужение каждой функции $F_k\,(k=2,\cdots,N)$ на область $\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1)$

принадлежит классу $H_{2,\omega}[\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1)]$. Следовательно $F_2+\cdots+F_N\in H_{2,\omega}[\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1)]$ и по теореме В

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta^*(\beta_1;\delta_1)}\frac{-(F_2(\xi)+\cdots+F_N(\xi))}{\xi-z}d\xi=-\sum_{n=2}^{N}F_n(z);\ z\in\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1).$$

Из этого на основании (24) и (25) получаем, что $F_1(\xi)=0$ почти всюду на $\partial\Delta(\beta_1;\ \delta_1)\equiv\partial\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1)$. В области $\Delta(\beta_1;\ \delta_1)$ F_1 представима интегралом Коши по своим значениям на границе $\partial\Delta(\beta_1;\ \delta_1)$. Значит $F_1(z)=0$ при $z\in\Delta(\beta_1;\ \delta_1)$. Из этого тождества, включения $M\{\nu;\ \alpha\}\subset\Delta(\beta_1;\ \delta_1)$, окончательно получаем, что $F_1(z)=0$ на $M\{\nu;\ \alpha\}$. Аналогично можно доказать, что $F_n(z)=0$ $(n=2,\cdots,N)$ почти всюду на $M\{\nu;\ \alpha\}$. Отсюда следует единственность представления (18). Так как $F(z)\in H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$, то в силу теоремы 1 имеет место представление (11), где $V_k(\xi)\in L_{2,-\omega}(\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k))$. Поскольку

$$\partial\Delta(\gamma_k;-\delta_k)\equiv\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)\cup\Gamma\left(-\delta_k-\frac{\pi}{2\gamma_k}\right),$$

то обозначая

$$V_k^{(+)}(\xi)=V_k(\xi)\Big|_{\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)}$$

$$V_k^{(-)}(\xi)=V_k(\xi)\Big|_{\Gamma\left(-\delta_k-\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)},$$

получим сужение V_k соответственно на $\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)$ и на $\Gamma\left(-\delta_k-\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)$. Легко заметить, что при условии (22) область $\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k)$ обращается в плоскость с разрезом, границей которой служит дважды пробегаемый луч $\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)\equiv\Gamma\left(-\delta_k-\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)$.

Обозначим $\quad V_k^*(\xi)=V_k^{(-)}(\xi)-V_k^{(+)}(\xi);\ \xi\in\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)$.

Отсюда и из (11) получим представление (22).

Отметим, что наряду с (11) имеет место представление (14), где $V_k(\xi;\ F)$ определяются по формуле (13). Аналогично $V_k^*(\xi)$ определяем и $V_k^*(\xi;\ F)$. По теореме 7.8 (см. [1], стр. 446)

$$\int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k)}\frac{V_k(\xi)}{\xi-z}d\xi=\int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k)}\frac{V_k(\xi;\ F)}{\xi-z}d\xi;\ z\in\Delta(\gamma_k;\ \delta_k). \tag{26}$$

Покажем, что $V_k^*(\xi)=V_k^*(\xi;\ F)$ почти всюду на $\Gamma=\bigcup\limits_{k=1}^{N}\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)$.

В силу

$$\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k)\equiv\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)\cup\Gamma\left(-\delta_k-\frac{\pi}{2\gamma_k}\right),$$

а также (26) и определения $V_k^*(\xi)$ и $V_k^*(\xi;\ F)$, заключаем, что

$$\int\limits_{\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)} \frac{V_k^*(\xi)}{\xi-z}\,d\xi = \int\limits_{\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)} \frac{V_k^*(\xi;\,F)}{\xi-z}\,d\xi,\quad z\in C\setminus\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right), \quad k=1,\cdots,N. \tag{27}$$

Отсюда по известным теоремам о граничных свойствах аналитических функций заключаем, что $V_k^*(\xi)=V_k^*(\xi;\,F)$ почти всюду на

$$\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)\ (k=1,\cdots,N).$$

Отсюда и из единственности суммы (18) вытекает, что представление (22) единственно.

Имея в виду обозначение V_k^* и формулу (13) теоремы 1, получим обращение (23). Теорема доказана.

Отметим, что эта теорема другим способом была установлена в работе А. Е. Аветисяна [5].

Автор приносит благодарность кандидату физ.-мат. наук В. М. Мартиросяну за руководство при выполнении работы.

Армянский сельскохозяйственный институт

Поступила 26.VI.1981

Է. Կ. ԴԻԼԱՆՅԱՆ. Մ. Մ. Ջրբաշյանի ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսության մի կիրառության մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկված են անկյունային տիրույթներից և ճառագայթներից բաղկացած բազմությունների վրա որոշված Մ. Մ. Ջրբաշյանի դասերի ինտեգրալ ներկայացման հարցերը։ Ելնելով Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից զարգացված հարմոնիկ անալիզի տեսությունից, ստացվել են այդ դասերի նոր ինտեգրալ ներկայացումներ։ Ապացուցված է նաև միակության մի թեորեմ, որը նախկինում այլ եղանակով ստացվել է Ա. Ե. Ավետիսյանի կողմից։

E. K. DILANIAN. *An application of the M. M. Djrbashian integral transformations theory* (summary)

The paper considers integral representations of M. M. Djrbashian classes of functions on systems of rays and angular domains. Basing upon M. M. Djrbashian's harmonic analysis, new integral representations of these classes are given. A uniqueness theorem which was earlier established by A. E. Avetisian in a different way is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье), Изв. АН СССР, сер. матем., 18. 1954, 427—448.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
3. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.

4. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
5. *А. Е. Аветисян.* К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна, ДАН Арм. ССР, 65, № 5, 1977, 266—270; Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 376—388.
6. *В. М. Мартиросян.* О замыкании, минимальности и базисности систем простейших рациональных дробей на системе лучей, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XV, № 4, 1980, 276—291.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS