ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих привил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 6, 1981 Математика

А. В. БАХШЕЦЯН

ОБ $U(\varepsilon)$-МНОЖЕСТВАХ ПОЛНОЙ МЕРЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ УОЛША

Для ортонормированной на $[a, b]$ системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ подмножество $E\subset[a, b]$ называется U-множеством, если из условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = 0 \text{ для любого } x\in E^c \tag{1}$$

($E^c=[a, b]\setminus E$) следует, что $c_n=0$ при всех n.

Хорошо известно (см. [1], [2]), что для тригонометрической системы и системы Уолша любое счетное подмножество отрезка ортогональности является U-множеством и не всякое подмножество нулевой меры является таковым, а в силу принципа локализации ни одно подмножество положительной меры не является U-множеством для этих систем.

Определение. *Для $\varepsilon_n\downarrow 0$ подмножество $E\subset[a, b]$ называется $U(\varepsilon)$-множеством для ортонормированной на $[a, b]$ системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, если из условий*

$$c_n = O(\varepsilon_n) \tag{2}$$

*и (1) следует, что $c_n=0$ при всех n**.

А. Зигмундом было показано (см. [7], стр. 549—551), что для любой последовательности $\varepsilon_n\downarrow 0$ существует подмножество $E\subset[0, 2\pi]$ ($\mu E>0$), являющееся $U(\varepsilon)$-множеством для тригонометрической системы и был поставлен вопрос о существовании $U(\varepsilon)$-множеств меры 2π.

Положительный ответ на этот вопрос дается в работах Ж.—П. Кахана и И. Кацнельсона (см. [8]). Аналог теоремы А. Зигмунда для системы Уолша-Пэли был установлен В. Шапиро (см. [9]).

В данной работе устанавливается аналог теоремы Ж.—П. Кахана и И. Кацнельсона для системы Уолша (при любом порядке внутри „пачек").

Рассмотрим ряд по системе Уолша—Пэли $\{w_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x). \tag{3}$$

Частичные суммы этого ряда обозначим через $S_m(x)$:

---

* Если же в этом определении условие (2) заменить на $\{c_n\}\in l^p$ (при фиксированном $p>1$), то получим определение U_p-множеств (в этой связи см. работы [3]—[6]).

$$S_m(x)=\sum_{n=0}^{m-1} c_n w_n(x).$$

Мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой последовательности* $\{\varepsilon_l\}_{l=0}^{\infty}$ ($\varepsilon_l>0$, $\lim \varepsilon_l=0$) *существует множество* A *меры нуль такое, что если коэффициенты ряда* (3) *удовлетворяют условию* (2) *и для какого-либо счетного множества* X

$$\lim S_{2^k}(x)=0 \text{ на } A\setminus X, \tag{4}$$

то $c_n=0$ *для всех* n.

При доказательстве теоремы 1 наряду с другими соображениями мы будем пользоваться некоторыми элементами техники, восходящей к работам А. Райхмана и Н. К. Бари (см. [7], стр. 547—551), которые применялись ранее в подобных ситуациях в работах [8], [9] (см. также [10]).

С другой стороны справедлива

Теорема 2. *Для любой монотонной последовательности*

$$\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}\left(\lim \varepsilon_n=0,\ \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n=+\infty\right)$$

и для любого счетного множества $F\subset[0,1]$ *существует ненулевая последовательность* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, *удовлетворяющая условию* (2) *и такая, что для любого* $x\in F$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x)=0^*.$$

В связи с этой теоремой отметим, что если брать по одной функции из каждой „пачки", то для полученной подсистемы существует U-множество со счетным дополнением, а вообще любая ортонормированная на $[a, b]$ система $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющая условию $\overline{\lim}\int_a^b|\varphi_n(x)|\,dx>0$, содержит подсистему, имеющую U-множество с дополнением нулевой меры (см. [11]).

При доказательстве теоремы 1 мы можем предположить, что для любого $k\geqslant 0$

$$\varepsilon_{2^k}=\varepsilon_{2^k+1}=\cdots=\varepsilon_{2^{k+1}-1}=a_k. \tag{5}$$

В противном случае мы могли бы последовательность $\{\varepsilon_l\}$ заменить на $\{\varepsilon'_i\}$, где $\varepsilon'_i=\max\limits_{2^k<j<2^{k+1}}\varepsilon_j$ при $2^k\leqslant i<2^{k+1}$.

* Заметим, что существуют равномерно ограниченные полные ортонормированные системы непрерывных функций с U-множествами, имеющими счетное дополнение (см. [5]).

Далее мы будем считать фиксированным последовательность $\{\varepsilon_i\}$, удовлетворяющую условию (5).

Обозначим

$$B_s = \{t \in (0,1):\ r_s(t) = 1\} \quad (s = 0, 1, \cdots),$$

где $\{r_s(t)\}$ — система Радемахера.

Пусть, далее, числа $n_k^{(m)}$ такие, что

$$a_{n_k^{(m)}} \leqslant \frac{1}{m 4^k} \quad (k = 0, 1, \cdots;\ m = 1, 2, \cdots), \tag{6}$$

причем потребуем, чтобы последовательность $\{n_k^{(m)}\}_{k=0}^{\infty}$ при каждом фиксированном m была строго возрастающей. Заметим также, что

$$\lim_{m \to \infty} n_k^{(m)} = \infty \text{ при любом } k. \tag{7}$$

Рассмотрим множества

$$U_{m,p} = \bigcap_{k=0}^{m+p} B_{n_k^{(m)}},\quad A_p = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{m,p},\quad A = \bigcap_{p=0}^{\infty} A_p,$$

$$U_m = \bigcap_{k=0}^{\infty} B_{n_k^{(m)}},\quad B = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m \quad (m = 1, 2, \cdots;\ p = 0, 1, \cdots).$$

В силу (6) и определения множеств B_s имеем

$$\mu U_{m,p} = \frac{1}{2^{m+p+1}},\quad \mu A_p \leqslant \frac{1}{2^{p+1}},\quad \mu A = 0.$$

Очевидно также, что $B \subset A$. Зафиксируем некоторое счетное множество $X \subset [0,1]$.

Мы докажем, что множество A удовлетворяет требованиям теоремы 1. Но прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, установим следующие вспомогательные утверждения.

Л е м м а 1. *Если коэффициенты ряда* (3) *удовлетворяют условию* (2) *и*

а) $\lim\limits_{k \to \infty} S_{2^k}(x) = 0$ *на* $B \setminus X$,

б) $|S_{2^k}(x)| < C$ *на* $B \setminus X$ *при любом* k,

то $c_n = 0$ *для всех* n.

Л е м м а 2. *Если коэффициенты ряда* (3) *удовлетворяют условию* (2) *и для некоторого* $p > 0$

$$\lim_{k \to \infty} S_{2^k}(x) = 0 \text{ на } A_p \setminus X,$$

то $c_n = 0$ *для всех* n.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Пусть для некоторого M

$$|c_n| < M\varepsilon_n \quad (n=0,\ 1,\ 2, \cdots). \tag{8}$$

Зафиксируем также $m > \frac{2M}{\delta}$.

Каждую двоично-иррациональную точку отрезка [0,1] можно единственным образом представить в виде суммы ряда

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}},\quad x_i = 0 \text{ или } 1. \tag{9}$$

Определим отображение T множества J двоично-иррациональных точек [0,1] в U_m следующим образом: $Tx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_i}{2^{i+1}}$, где

$$t_i = \begin{cases} 0, & \text{при } i = n_k^{(m)} \\ x_{i-k}, & \text{при } n_{k-1}^{(m)} < i < n_k^{(m)}, \end{cases}$$

$k=0, 1, \cdots, (n_{-1}^{(m)} = -1)$. Легко проверить, что $Tx \in U_m$ и отображение T взаимно-однозначно.

Пусть

$$\bar{w}_i(x) = \begin{cases} w_i(Tx), & \text{при } x \in J \\ 0, & \text{при } x \in [0, 1] \setminus J, \end{cases}$$

$i=0, 1, \cdots$.

Нетрудно показать, что для любого i $\tilde{w}_i(x)$ почти всюду совпадает с некоторой функцией системы Уолша. Действительно, пусть $i = 2^{l_0} + 2^{l_1} + \cdots + 2^{l_j}$. Тогда при $x \in J$

$$\tilde{w}_i(x) = w_i\ (Tx) = \prod_{k=0}^{\infty} r_{l_k}(Tx).$$

Но если x имеет вид (9), то

$$r_i\ (Tx) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = n_k^{(m)} \\ (-1)^{x_{i-k}} = r_{i-k}(x), & \text{при } n_{k-1}^{(m)} < i < n_k^{(m)}, \end{cases}$$

$k=0, 1, \cdots$, Отсюда также получаем, что $\tilde{w}_i(x) = w_0(x)$ п.в. только тогда, когда либо $i=0$, либо i имеет вид

$$2^{n_{k_0}^{(m)}} + 2^{n_{k_1}^{(m)}} + \cdots + 2^{n_{k_j}^{(m)}}. \tag{10}$$

Рассмотрим последовательность

$$\varphi_k(x) = S_{2^k}(Tx) = \sum_{n=0}^{2^k-1} c_n \tilde{w}_n(x),$$

$k=0, 1, \cdots$. Из условий леммы 1 имеем, что п.в. на [0,1]

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)=0 \text{ и } |\varphi_k(x)|<C \text{ для любого } k.$$

Отсюда следует, что

$$0=\lim_{k\to\infty}\int_0^1 \varphi_k(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{2^k-1} c_n\int_0^1 \bar{w}_n(x)\,dx=c_0+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_n c_n\Big), \quad (11)$$

где внутренняя сумма берется по всем n, для которых $[\log_2 n]=n_k^{(m)}$ и которые имеют вид (10). Но количество таких n равно 2^k. Следовательно, в силу (6), (8) и (11), имеем

$$|c_0|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}2^k M a_{n_k^{(m)}}\leqslant\frac{M}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{2M}{m}<\delta.$$

В силу произвольности δ, отсюда заключаем, что $c_0=0$.

Пусть теперь $n_0>1$. Рассмотрим последовательность

$$\tilde{S}_{2^k}(x)=w_{n_0}(x)\,S_{2^k}(x)\ (k=0,1,\cdots). \quad (12)$$

Очевидно при $k>[\log_2 n_0]$ $\tilde{S}_{2^k}(x)$ — есть полином по системе Уолша вида

$$\tilde{S}_{2^k}(x)=\sum_{n=0}^{2^k-1}\tilde{c}_n w_n(x),$$

где

$$\tilde{c}_n=c_{n\dot{+}n_0}. \quad (13)$$

(Напомним, что операция $\dot{+}$ определяется следующим образом: $n\dot{+}m=l$, если $w_n(x)\,w_m(x)=w_l(x)$).

Пусть $[\log_2 n]>[\log_2 n_0]$. Тогда $[\log_2(n\dot{+}n_0)]=[\log_2 n]$ и

$$\{\tilde{c}_i:\ i=2^k,2^k+1,\cdots,2^{k+1}-1\}=\{c_i:\ i=2^k,2^k+1,\cdots,2^{k+1}-1\} \quad (14)$$

при $k>[\log_2 n]$.

Из (12), (5) и (14) следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{c}_n w_n(x)$ также удовлетворяет условиям леммы 1 и, следовательно, в силу доказанного выше $\tilde{c}_0=0$. Но из (13) следует, что $c_{n_0}=\tilde{c}_0$. Итак $c_n=0$ для любого n. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Зафиксируем произвольное $m\geqslant 1$. Докажем, что $S_{2^k}(x)=0$ на $U_{m,p}$ для любого k.

Нетрудно заметить, что характеристическая функция множества $U_{m,p}$ всюду, за исключением некоторых двоично-рациональных точек, совпадает с функцией

$$\lambda(x)=\prod_{k=0}^{m+p}\frac{1+r_{n_k^{(m)}}(x)}{2}=\sum_{l=0}^{s}\gamma_l w_l(x),$$

где $s=2^{n_{m+p}^{(m)}+1}-1$ и

$$\sum_{l=0}^{s}|\gamma_l|=1. \tag{15}$$

Отсюда получаем, что для $k>n_{m+p}^{(m)}$

$$\lambda(x)\,S_{2^k}(x)=\sum_{l=0}^{s}\gamma_l\sum_{n=0}^{2^k-1}c_n\,w_{n\dot{+}l}(x)=$$

$$=\sum_{l=0}^{s}\gamma_l\sum_{n=0}^{2^k-1}c_{n\dot{+}l}\,w_n(x)=\sum_{n=0}^{2^k-1}a_n\,w_n(x),$$

где $a_n=\sum_{l=0}^{s}\gamma_l\,c_{n\dot{+}l}$. Но в силу (15) имеем

$$\max_{2^k<n<2^{k+1}}|a_n|\leqslant\max_{2^k<n<2^{k+1}}|c_n| \text{ при } k>n_{m+p}^{(m)}$$

и, так как

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{2^k-1}a_n\,w_n(x)=0 \text{ на } [0,1]\setminus X,$$

то получаем (см. [10], а также [12]), что $a_n=0$ для любого n. Отсюда имеем, что для любых k и $x\in[0,1]$

$$\lambda(x)\,S_{2^k}(x)=0.$$

Но при $x\in U_{m,p}$ $\lambda(x)\,S_{2^k}(x)=S_{2^k}(x)$.

Итак, $S_{2^k}(x)=0$ на A_p при всех $k\geqslant 0$. А это значит, что ряд (3) удовлетворяет условиям леммы 1. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$N=\{t\in[0,1],\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ |S_{2^k}(t)|\geqslant 1\}.$$

Множество N можно представить в виде $N=N_0\cup P$, где N_0 — множество типа G_δ, а P—некоторое, не более чем счетное множество двоично-рациональных точек. Далее, допустим, что

$$N_1=N_0\setminus X\neq\varnothing. \tag{16}$$

(Заметим, что N_1 также есть множество типа G_δ). Так как $N_1\subset A^c=\bigcup_{p=0}^{\infty}A_p^c$, то (см. [7], стр. 548) существуют $p>0$ и двоичный интервал $\Delta\subset[0,1]$ $\left(\text{т. е. интервал вида } \left(\frac{l}{2^n},\frac{l+1}{2^n}\right)\right)$ такие, что

$$\Delta \cap N_1 \subset \Delta \cap A_p^c. \tag{17}$$

Из (7) имеем, что A_p — всюду плотное открытое множество. Следовательно, для любой точки $x \in \Delta \cap A_p$ существует двоичный интервал Δ_x такой, что

$$x \in \Delta_x \subset \Delta \cap A_p. \tag{18}$$

Очевидно, существует полином (разложение характеристической функции интервала Δ_x по системе Уолша)

$$\varphi(t) = \sum_i \beta_i w_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in \Delta_x \\ 0, & \text{при } t \bar{\in} \bar{\Delta}_x, \end{cases}$$

где $\sum_i |\beta_i| = 1$.

Рассуждениями, аналогичными приводимым при доказательстве леммы 2, получаем, что для достаточно больших k

$$\varphi(t) \, S_{2^k}(t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} a_n w_n(t),$$

где коэффициенты a_n также удовлетворяют условию (2). С другой стороны, так как, в силу (17) и (18), пересечение множеств $\operatorname{supp} \varphi(t) = \Delta_x$ и N не более чем счетно, то имеем

$$\varlimsup_{k \to \infty} \left| \sum_{n=0}^{2^k-1} a_n w_n(t) \right| < 1$$

всюду, за исключением некоторого счетного множества. Отсюда, по теореме В. А. Скворцова (см [13], теорему 4), получаем, что $\sum a_n w_n(t)$ есть ряд Фурье некоторой ограниченной функции. Следовательно, последовательность $\{\varphi(t) S_{2^k}(t)\}$ равномерно ограничена и в силу леммы 1 $\varphi(t) S_{2^k}(t) = 0$ для любого k. Но при $t \in \Delta_x$ $\varphi(t) S_{2^k}(t) = S_{2^k}(t)$. Итак, мы получили, что при всех k $S_{2^k}(x) = 0$ на $\Delta \cap A_p$.

Аналогично, рассматривая последовательность $\{\psi(x) S_{2^k}(x)\}$, где $\psi(x)$ — полином по системе Уолша, равный единице на Δ и нулю на $\bar{\Delta}^c$, и используя лемму 2, получим, что при всех k

$$S_{2^k}(x) = 0 \text{ на } \Delta.$$

Но это противоречит условию (16). Следовательно $N \subset X \cup P$.

Итак, мы получили, что $\varlimsup_{k \to \infty} |S_{2^k}(x)| < 1$ всюду, за исключением счетного множества. Из той же теоремы В. А. Скворцова вытекает, что (3) есть ряд Фурье ограниченной функции. Отсюда по лемме 1 получаем, что $c_n = 0$ при любом n. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание. *Из доказательства видно, что утверждение теоремы остается в силе при любом порядке системы Уолша внутри „пачек“.*

Выше мы заметили, что каждая двоично-иррациональная точка отрезка [0,1] единственным образом представляется в виде (9). Если же x—двоично-рациональна $\left(\text{т. е. имеет вид } x=\frac{m}{2^n}\right)$, то это представление не однозначно. Точнее, в этом случае

$$x=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{x_l'}{2^{l+1}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{x_l''}{2^{l+1}}, \tag{19}$$

где начиная с некоторого номера $x_l'=0$, а $x_l''=1$. Далее, из определения системы Уолша—Пэли имеем, что при $n=\sum_{l=0}^{k} n_l 2^l$ ($n_l=0$ или 1) для двоично-иррациональных точек x

$$w_n(x)=(-1)^{\sum_{l=0}^{k} n_l x_l},$$

а для двоично-рациональных x

$$w_n(x+0)=(-1)^{\sum_{l=0}^{k} n_l x_l'},\quad w_n(x-0)=(-1)^{\sum_{l=0}^{k} n_l x_l''}$$

и

$$w_n(x)=\frac{1}{2}\left[w_n(x+0)+w_n(x-0)\right]$$

$$(w_n(0)=w_n(0+0),\ w_n(1)=w_n(1-0)),$$

где последовательности $\{x_l\}$, $\{x_l'\}$ и $\{x_l''\}$ определяются из равенств (9) и (19).

Следуя работе [10], мы вместо точек отрезка [0,1] будем рассматривать соответствующие им двоичные последовательности.

Для двоичных последовательностей $x=(x_0, x_1, \cdots)$ и $y=(y_0, y_1, \cdots)$ определим сложение $\dot{+}$: $x\dot{+}y=(x_0\dot{+}y_0, x_1\dot{+}y_1, \cdots)$.

Тем самым, множество X двоичных последовательностей можно рассматривать как векторное пространство над конечным полем $Z_2=\{0,1\}$ классов вычетов по mod 2.

Из сказанного выше видно, что для доказательства теоремы 2 достаточно установить следующее утверждение.

Теорема 2′. *Пусть $\{\varepsilon_l\}_{l=0}^{\infty}$ — произвольная монотонно стремящаяся к нулю последовательность, причем $\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon_l=+\infty$. Тогда для любой счетной последовательности векторов $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ ($x^{(m)}\in X$, $m=0,1,\cdots$) существует ненулевая последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условию* (2) *и такая, что для любого m*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-1)^{<n,\, x^{(m)}>} = 0,$$

где

$$<n,\, x^{(m)}> = n_0 x_0^{(m)} \dot{+} n_1 x_1^{(m)} \dot{+} \cdots \dot{+} n_{k_n} x_{k_n}^{(m)},\ k_n = [\log_2 n],$$

$$\sum_{l=0}^{k_n} n_l 2^l = n.$$

При доказательстве теоремы 2′ мы можем предположить, что последовательность $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$x^{(m)} \neq x^{(n)} \text{ при } m \neq n;\ x^{(0)} = 0\ (=(0,0,\cdots))$$

при $m = 2^{i_0} + 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}$ $(i_0 < i_1 < \cdots < i_k)$,

$$x^{(m)} = x^{(2^{i_0})} \dot{+} x^{(2^{i_1})} \dot{+} \cdots \dot{+} x^{(2^{i_k})}. \tag{20}$$

В противном случае мы могли бы этого достичь добавлением новых векторов и, быть может, их перенумерованием.

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 2′, а $\{y^{(m)}\}_{m=0}^{l}$ — произвольный набор линейно независимых векторов из X. Тогда для любых δ_m ($\delta_m = 0$ или 1, $m = 0,1,\cdots,l$)*

$$\sum_{i\in\Omega} \varepsilon_i = +\infty,$$

где $\Omega = \{i\colon <i,\, y^{(m)}> = \delta_m,\ m = 0,1,\cdots,l\}$.

Лемма 4. *Пусть $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 2′, а $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ — соотношениям* (20). *Тогда для любых k, n, p $(2^k \leqslant p < 2^{k+1})$ и для любых $\rho > 0$ и α существуют $N > n$ и коэффициенты* c_i $(i = n, n+1,\cdots, N)$ такие, что

$$|c_i| \leqslant \varepsilon_i \tag{21}$$

$(i = n,\, n+1,\cdots, N)$;

$$\sum_{i=n}^{N} c_i (-1)^{<i,\, x^{(s)}>} = \begin{cases} 0, \text{ при } 0 < s < 2^{k+1},\ s \neq p \\ \alpha, \text{ при } s = p \end{cases} \tag{22}$$

и

$$\max_{\substack{n < m < N \\ s < 2^k}} \left| \sum_{i=n}^{m} c_i (-1)^{<i,\, x^{(s)}>} \right| < \rho. \tag{23}$$

Доказательство леммы 3. Пусть i_0 такое, что $y_{i_0}^{(0)} = 1$. Существование i_0 вытекает из линейной независимости $\{y^{(m)}\}_{m=0}^{l}$. Мы можем предположить, что $y_{i_0}^{(m)} = 0$ для любого $m \geqslant 1$. Действительно, в противном случае мы могли бы вместо векторов $y^{(m)}$ $(m = 0,1,\cdots, l)$ взять

$$\tilde{y}^{(0)} = y^{(0)},\ \tilde{y}^{(m)} = \begin{cases} y^{(m)}, & \text{если } y_{i_0}^{(m)} = 0 \\ y^{(0)} + y^{(m)}, & \text{если } y_{i_0}^{(m)} = 1 \end{cases}$$

$(m = 1, 2, \cdots, l)$, а вместо δ_m $(m = 0, 1, \cdots)$ числа

$$\tilde{\delta}_0 = \delta_0,\quad \tilde{\delta}_m = \begin{cases} \delta_m & \text{при } y_{i_0}^{(m)} = 0 \\ \delta_0 + \delta_m & \text{при } y_{i_0}^{(m)} = 1 \end{cases}$$

$(m = 1, 2, \cdots, l)$.

Аналогичным образом можем предположить, что существуют числа $i_1, i_2, \cdots, i_l$ такие, что для любого $k \geqslant 1$

$$y_{i_k}^{(k)} = 1 \text{ и } y_{i_k}^{(m)} = 0 \text{ при } m > k + 1.$$

Пусть $p = \max\limits_{0 < k < l} i_k$. Докажем, что для любого n существует $q \in \Omega$ такое, что

$$n 2^{p+1} \leqslant q < (n+1)\, 2^{p+1}. \tag{24}$$

Действительно. Выберем $q_l \in Z_2$ так, чтобы число $i = n 2^{p+1} + q_l\, 2^{i_l}$ удовлетворяло равенству $\langle i, y^{(l)} \rangle = \delta_l$.

Далее, если числа q_i $(i = l, l-1, \cdots, k+1)$ уже выбраны, то выберем $q_k \in Z_2$ так, чтобы число

$$i = n\, 2^{p+1} + q_l\, 2^{i_l} + q_{l-1}\, 2^{i_l - 1} + \cdots + q_k\, 2^{i_k}$$

удовлетворяло равенству $\langle i, y^{(k)} \rangle = \delta_k$.

Легко проверить, что в силу выбора чисел i_k $(k = 0, 1, \cdots, l)$ и p число

$$q = n\, 2^{p+1} + \sum_{k=0}^{l} q_k\, 2^{i_k}$$

принадлежит Ω и удовлетворяет (24). А отсюда, используя монотонность последовательности $\{\varepsilon_l\}$ и расходимость ряда $\sum \varepsilon_l$ легко получить утверждение леммы 3. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Очевидно, не нарушая общности, можно предположить, что $\alpha > 0$. Обозначим

$$y^{(m)} = \begin{cases} x^{(2^m)}, & m = 0, 1, \cdots, k-1 \\ x^{(p)}, & m = k. \end{cases}$$

Из соотношений (20) следует, что вектора $y^{(m)}$ $(m = 0, 1, \cdots, k)$ линейно независимы.

Пусть j $(0 \leqslant j < 2^{k+1})$ имеет вид:

$$j = \sum_{m=0}^{k} \delta_m^{(j)}\, 2^m. \tag{25}$$

Положим $\Omega_j = \{i\colon \langle i, y^{(m)} \rangle = \delta_m^{(j)},\ m = 0, 1, \cdots, k\}$.

Далее, для конечных подмножеств натуральных чисел Ω и Ω' будем писать $\Omega < \Omega'$, если $\max\{i : i \in \Omega\} < \min\{i : i \in \Omega'\}$. Зафиксируем целое $r > \alpha/\rho$.

Применяя лемму 3, мы можем последовательно строить конечные подмножества

$$\{n\} < \Omega_0^1 < \Omega_1^1 < \cdots < \Omega_{2^{k+1}-1}^1 < \Omega_0^2 < \Omega_1^2 < \cdots < \Omega_{2^{k+1}-1}^2 < \cdots <$$
$$< \Omega_0^r < \Omega_1^r < \cdots < \Omega_{2^{k+1}-1}^r$$

и найти коэффициенты

$$c_i \left(|c_i| \leqslant \varepsilon_i, \ i \in \bigcup_{l=1}^{r} \bigcup_{j=0}^{2^{k+1}-1} \Omega_j^l \right)$$

со следующими свойствами:

$$\Omega_j^l \subset \Omega_j \quad (l = 1, 2, \cdots, r; \ j = 0, 1, \cdots, 2^{k+1} - 1); \tag{26}$$

$$c_i > 0, \text{ при } i \in \bigcup_{0 < j < 2^k} \Omega_j^l \text{ и } c_i < 0, \text{ при } i \in \bigcup_{2^k < j < 2^{k+1}} \Omega_j^l \tag{27}$$
$$(l = 1, 2, \cdots, r):$$

для любых l и j

$$\left| \sum_{i \in \Omega_j^l} c_i \right| \doteq \frac{\alpha}{2^k r}. \tag{28}$$

Положим $N = \max \{i : i \in \Omega_{2^{k+1}-1}^r\}$ и $c_i = 0$ при

$$n \leqslant i < N, \ i \overline{\in} \bigcup_{l=1}^{r} \bigcup_{j=0}^{2^{k+1}-1} \Omega_j^l.$$

Покажем, что коэффициенты c_i $(i = n, n + 1, \cdots, N)$ удовлетворяют требованиям леммы 4. Действительно, условие (21) очевидно. Докажем (22). При $s = 0$ имеем

$$\sum_{i=n}^{N} c_i (-1)^{<i, x^{(0)}>} = \sum_{i=n}^{N} c_i = \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} \sum_{i \in \Omega_j^l} c_i.$$

Но в силу (27) и (28) имеем при любом l

$$\sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} \sum_{i \in \Omega_j^l} c_i = 0.$$

Пусть $s \geqslant 1$ и $x^{(s)}$ имеет вид

$$x^{(s)} = y^{(m_1)} \dot{+} y^{(m_2)} \dot{+} \cdots \dot{+} y^{(m_{l_s})} \quad (m_1 < m_2 < \cdots m_{l_s} \leqslant k).$$

Тогда

$$\sum_{i=n}^{N} c_i (-1)^{<i, x^{(s)}>} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=0}^{2^{k+1}} \sum_{i=\Omega_j^l} c_i (-1)^{<i, y^{(m_1)}>} \dot{+} \cdots \dot{+} < i, \ y^{(m_{l_s})}>.$$

Но в силу (26)

$$\sum_{l\in\Omega_j^l} c_l(-1)^{<l,\, y^{(m_1)}> \dot{+} \cdots \dot{+} <l,\, y^{(m_{i_s})}>} = (-1)^{\delta_{m_1}^{(j)} \dot{+} \cdots \dot{+} \delta_{m_{i_s}}^{(j)}} \sum_{l\in\Omega_j^l} c_l,$$

где $\delta_{m_i}^{(j)}$ $(i=1, 2,\cdots i_s)$ определяются из равенства (25). Отсюда, учитывая (28) и (27), получаем для любого l

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{l\in\Omega_j^l} c_l(-1)^{<l,\, x^{(s)}>} = \frac{a}{2^k r} \sum_{j=0}^{2^k-1} (-1)^{\delta_{m_1}^{(j)} \dot{+} \cdots \dot{+} \delta_{m_{i_s}}^{(j)}}. \tag{29}$$

Но легко проверить, что последняя сумма равна 2^k при $m_1 = k$ (т. е. при $s=p$) и нулю при $m_1 < k$. Аналогично можно получить, что для любого l

$$\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{l\in\Omega_j^l} c_l(-1)^{<l,\, x^{(s)}>} = \begin{cases} 0, & \text{при } s\neq p \\ \dfrac{a}{r}, & \text{при } s=p \end{cases} \tag{30}$$

Этим доказывается соотношение (22). Из (29) и (30) получаем также, что

$$\max_{\substack{n<m<N\\ s<2^k}} \left|\sum_{l=n}^{m} c_l(-1)^{<l,\, x(s)>}\right| = \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{l\in\Omega_j^l} c_l = \frac{a}{r} < \rho.$$

Итак, лемма 4 полностью доказана.

Из этой леммы легко получить утверждение теоремы 2'. Действительно, возьмем $c_0=\varepsilon_0$. Предположим, что коэффициенты c_n, $n=0,1,\cdots, n_j$ $(j\geqslant 1,\ n_1=0)$ уже выбраны так, что для любого $i\leqslant n_j$ имеет место (21) и

$$\sum_{l=0}^{n_j} c_l(-1)^{<l,\, x^{(s)}>} = 0, \text{ при } 0\leqslant s<2^{j-1}.$$

Найдем числа $\{N_i\}_{i=1}^{2^{j-1}}$, $n_j = N_0 < N_1 < \cdots < N_{2^{j-1}} = n_{j+1}$ и коэффициенты $\{c_l\}_{l=n_j+1}^{n_{j+1}}$, последовательно применяя лемму 4 при $k=j-1$,

$$n = N_i + 1,\ p = 2^{j-1} + i,\ \rho = \frac{1}{j},\ a = -\sum_{l=0}^{N_i} c_l(-1)^{<l,\, x^{(p)}>}$$

$$(i = 0,1,\cdots, 2^{j-1}-1).$$

После этого очевидно будем иметь, что для любого $s<2^j$

$$\sum_{l=0}^{n_{j+1}} c_l(-1)^{<l,\, x^{(s)}>} = 0. \tag{31}$$

Продолжая таким образом построение, получим последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, которая в силу (23) и (31) будет удовлетворять требованиям теоремы. Теорема 2′ доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность Р. И. Овсепяну, под руководством которого выполнена данная работа.

Ереванский государственный
университет

Поступила 25.V.1981

Ա. Վ. ԲԱԽՇԵՑՅԱՆ. Ուոլշի սիստեմի համար լրիվ չափի $U(\varepsilon)$-բազմությունների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցված է, որ Ուոլշի սիստեմի համար գոյություն ունեն լրիվ չափի $U(\varepsilon)$*—բազմություններ (թեորեմ 1) և որ այդպիսի բազմությունները չեն կարող ունենալ հաշվելի լրացում (թեորեմ 2)։*

A. V. BAKHSHETZIAN. *On the* $U(\varepsilon)$*-sets of full measure for Walsh system* (summary)

The existence of $U(\varepsilon)$-sets of full measure for Walsh system is proved (theorem 1). It is shown that such sets cannot have countable complements (theorem 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., Физ.-мат. лит., 1961.
2. *Л. А. Балашов, А. И. Рубинштейн.* Ряды по системе Уолша и их обобщения, Итоги науки. Сер. матем., Матем. анализ, 1970, М., ВИНИТИ, 1971, 147—202.
3. *Y. Katznelson.* Sets of uniqueness for some classes of trigonometrical series, Bull Amer. Math. Soc., 70, 1964, 722—723.
4. *Leonede de Michele, Paolo M.* Soardi. A remark on sets of uniqueness of l^p. Bolletino. U. M. I., (4), 11, 1975, 64—65.
5. *Р. И. Овсепян.* О пустом множестве как M-множестве в классе общих ортонормированных систем, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XIII, № 4, 1978, 261—274.
6. *Leonardo Golzani.* Sets of uniqueness of l_p for general orthonormal complete systems, Bolletino U. M. I., (5), 16—B, 1979, 1134—1143.
7. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. I, М., «Мир», 1965.
8. *J.-P. Kahane, Y. Katznelson.* Sur les ensembles d'unicidé $U(\varepsilon)$ de Zygmund, C. R, Acad. Sc. Paris, 277, 1973, ser. A, 893—895.
9. *V. Shapiro.* $U(\varepsilon)$-sets for Walsh series, Proc. Amer. Math. Soc., 16, № 5, 1965. 867—870.
10. *А. А. Шнейдер.* О единственности разложений по системе функций Уолша, Матем. сб., 24 (66), № 2, 1943, 279—300.
11. *Р. И. Овсепян.* Об извлечении из общих систем лакунарных подсистем со свойством абсолютной сходимости, Маметм. сб., 111 (153), № 4, 522—531.
12. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 6, 1964, 1391—1408.
13. *В. А. Скворцов.* Некоторые обобщения теоремы единственности для рядов по системе Уолша, Матем. заметки, 13, вып. 3, 1973, 367—372.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 6, 1981 Математика

В. М. МАНУКЯН

ОСОБЕННОСТЬ КАРЛЕМАНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ ХОТЯ БЫ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормальная система (ПОНС) в $L^2[0,1]$ и $f(x)\in L^2[0,1]$. Тогда коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2<\infty.$$

Карлеман впервые установил (см. [1], стр. 311) существование непрерывной функции, коэффициенты Фурье которой по тригонометрической системе удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p=\infty \quad \text{при всех } p<2. \tag{1}$$

В связи с этим возникло следующее определение ([2], стр. 270, [3], стр. 5):

Функция $f(x)$ обладает особенностью Карлемана относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$, если коэффициенты Фурье $c_n=\int\limits_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$ удовлетворяют условию (1). В работе [4] А. М. Олевский установил, что для любой ортонормированной полной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует непрерывная функция, обладающая особенностью Карлемана относительно этой системы. Им же в работе [5] построена ПОНС, относительно которой каждая непрерывная функция (кроме тождественного нуля) обладает особенностью Карлемана.

В настоящей работе построена полная ортонормальная система функций в $L^2[0,1]$, для которой каждая функция $f(x)\in L^2[0,1]$ $(f\not\sim 0)$, непрерывная хотя бы в одной точке отрезка $[0,1]$, обладает особенностью Карлемана.

При построении этой системы существенно используются идеи А. М. Олевского, разработанные в работе [5].

Теорема 1. *Существует ПОНС функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на $[0,1]$, такая, что каждая функция $f(x)\in L^2[0,1]$ $(f\not\sim 0)$, непрерывная хотя бы в одной точке отрезка $[0,1]$, обладает особенностью Карлемана относительно $\{\varphi_n(x)\}$.*

Основная лемма. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ПОНС на $[0,1]$ и функции $\varphi_n(x)$ можно представить в виде $\varphi_n(x)=f_n(x)+\nu_n(x)$, $n=1,2,\cdots$, где $f_n(x)$ и $\nu_n(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*

I $f_n(x)$ *непрерывны на* $[0,1]$ $n=1, 2, \cdots$,

II $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^q$ *равномерно сходится на* $[0, \alpha)$ *при любом* $0<\alpha<1$ *и любом* $q>2$,

III $$\nu_n(x)=\begin{cases}\nu_n>0, & \text{если } x\in e_n^1\\ 0, & \text{если } x\in e_n^2\end{cases} \quad n=1, 2, \cdots,$$

IV *для любого натурального числа* s *и произвольной последовательности* $\{i_n\}$, $n=1, 2, \cdots, s$ (*где* i_n *принимает значения* 1 *или* 2), *множество* $\bigcap\limits_{n=1}^{s} e_n^{i_n}$ *в любом интервале отрезка* $[0,1]$ *имеет положительную меру**,

V $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n^2<\infty$,

тогда каждая функция $f(x)\in L^2[0,1]$ $(f \overline{\backsim} 0)$, *непрерывная хотя бы в одной точке отрезка* $[0,1]$ *обладает особенностью Карлемана относительно* $\{\varphi_n(x)\}$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f(x)\in L^2[0,1]$ $(f\overline{\backsim}0)$, которая не обладает особенностью Карлемана относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ и покажем, что $f(x)$ разрывна в любой точке отрезка $[0,1]$. Так как $f(x)$ не обладает особенностью Карлемана, то существует $p<2$ такое, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^p<\infty$, где $c_n=(f, \varphi_n)$. Пользуясь неравенством Гёльдера из условий I и II получим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ сходится к некоторой функции $\Phi(x)$, непрерывной на $[0,1)$, поскольку сходимость осуществляется равномерно внутри $[0,1)$ (то есть на любом интервале $[0, \alpha)$, где $0<\alpha<1$). Учитывая также равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ на $[0.1]$ убедимся, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ равномерно сходится внутри $[0,1)$. Обозначим сумму этого ряда через $g(x)$. Ясно, что $g\backsim f$ и $g(x)=\Phi(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ на $[0,1)$. Так как $f\overline{\backsim}0$, то существует хотя бы одно n_0 такое, что $c_{n_0}\neq 0$. Покажем, что в произвольном интервале $\Delta\subset[0,1]$ существуют множества положительной меры X' и X'' такие, что $|g(x')-g(x'')|>\frac{\nu_{n_0}|c_{n_0}|}{2}$

* Нетрудно убедиться в существовании системы множеств $\{e_n^i\}$ $(n\geqslant 1,\ i=1$ или 2), обладающих свойством IV.

для произвольных $x' \in X'$ и $x'' \in X''$. Этим мы докажем существенный разрыв функции $g(x)$, а значит и $f(x)$ в любой точке $[0,1]$.

Так как $\Phi(x)$ непрерывна в интервале Δ, то можно выбрать такой интервал $\Delta' \subset \Delta$, что для произвольных $x_1 \in \Delta'$, $x_2 \in \Delta'$

$$|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| < \frac{\nu_{n_0} |c_{n_0}|}{6}. \tag{2}$$

Выберем $N > n_0$ такое, что

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \nu_n(x) \right| < \frac{\nu_{n_0} |c_{n_0}|}{6} \text{ для любого } x \in \Delta' \tag{3}$$

и обозначим $X' = \Delta' \cap \left(\bigcap_{n=1}^{N} e_n^{i_n} \right)$, $X'' = \Delta' \cap \left(\bigcap_{n=1}^{N} e_n^{i'_n} \right)$, где $i_n = i'_n$ если $n \neq n_0$, $i_{n_0} = 1$, $i'_{n_0} = 2$. Из IV условия леммы следует, что $\operatorname{mes} X' > 0$, $\operatorname{mes} X'' > 0$.

Воспользовавшись III-им условием леммы, определением множеств X' и X'', неравенствами (2) и (3) для произвольных $x' \in X'$ и $x'' \in X''$, получим

$$|g(x') - g(x'')| = |\Phi(x') - \Phi(x'') + \sum_{n=1}^{N} c_n \nu_n(x') - \sum_{n=1}^{N} c_n \nu_n(x'') +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \nu_n(x') - \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \nu_n(x'')| > \left| \sum_{n=1}^{N} c_n \nu_n(x') - \sum_{n=1}^{N} c_n \nu_n(x'') \right| -$$

$$- |\Phi(x') - \Phi(x'')| - \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \nu_n(x') \right| - \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \nu_n(x'') \right| >$$

$$> \nu_{n_0} |c_{n_0}| - \frac{\nu_{n_0} |c_{n_0}|}{2} = \frac{\nu_{n_0} |c_{n_0}|}{2}.$$

Тем самым лемма доказана.

Для доказательства теоремы осталось построить полную ортонормальную систему, которая удовлетворяет условиям основной леммы.

В дальнейшем через $\|\cdot\|$ мы будем обозначать норму $\|\cdot\|_{L^2[0,1]}$.

Лемма 1. *Пусть заданы ОНС* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$, $g(x)$ *и функция* $\|\gamma(x)\| \leqslant 1$, *определенные на* $[0,1]$, *тогда для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \nu\gamma(x)$ *такая, что* $f(x)$ *непрерывна на* $[0,1]$, $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$, $0 < \nu < \varepsilon$ *и система* $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ *ортонормирована в* $L^2[0,1]$, *причем, если* $g(x)$ *непрерывна на некотором* $[a, b] \subset [0,1]$, *а* $\varphi_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *ограничены на том же отрезке, то* $f(x)$ *можно выбрать так, чтобы* $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ *всюду на* $[a, b]$.

Доказательство. Можно ограничиться случаем $\varepsilon < 1$.

Обозначим через $J = \{a_{ij}\}$ единичную матрицу размера n и через $m_{ij}(J)$—матрицу, полученную из J выкидыванием ее i-ой строчки и

i-ого столбца. Так как детерминант матрицы является непрерывной функцией ее элементов, то можно выбрать такое $0<\delta<1$, что для произвольной квадратной матрицы D (размера n) из условия

$$|d_{ij}-a_{ij}|<\delta \quad i=1,\ 2,\cdots,\ n,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n \tag{4}$$

будет следовать, что

$$|\det D-1|<\frac{1}{2},$$

$$|\det m_{ij}(D)|<\frac{1}{2} \quad i\neq j,\ i=1,\ 2,\cdots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

$$|\det m_{ii}(D)-1|<\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Выберем

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{21\,n} \text{ и } \varepsilon_2=\frac{\delta\,\varepsilon_1}{2\,(n+2)}. \tag{6}$$

Возьмем непрерывные функции $\bar{\varphi}_i(x)$, $i=1,\ 2,\cdots,\ n$ и $\bar{g}(x)$ так чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\|\varphi_i(x)-\bar{\varphi}_i(x)\|<\varepsilon_2,\ i=1,\ 2,\cdots,\ n,$$
$$\|g(x)-\bar{g}(x)\|<\varepsilon_2. \tag{7}$$

Взяв функцию $\sigma(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\,\bar{\varphi}_i(x)$, где $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ пока не определены, будем искать значения этих коэффициентов так, чтобы функция $\psi(x)=\bar{g}(x)+\sigma(x)+\varepsilon_2\,\gamma(x)$ была ортогональна всем $\varphi_i(x)$, $i=1$, $2,\cdots,n$. Для определения этих коэффициентов получим следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\,(\bar{\varphi}_i,\ \varphi_j)=b_j,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n, \tag{8}$$

где $b_j=-(\bar{g}+\varepsilon_2\gamma,\ \varphi_j)$. Покажем, что матрица D этой системы удовлетворяет условию (4).

$$|d_{ij}-a_{ij}|=|(\bar{\varphi}_i,\ \varphi_j)-(\varphi_i,\ \varphi_j)|<\|\varphi_j\|\cdot\|\bar{\varphi}_i-\varphi_i\|<\varepsilon_2<\delta.$$

Из этого следует, что можно воспользоваться условием (5) и система (8) имеет решение. Кроме того, из определения чисел b_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ и условия (7)

$$|b_i|=|(\bar{g},\ \varphi_i)+\varepsilon_2(\gamma,\ \varphi_i)|\leqslant|(\bar{g}-g,\ \varphi_i)|+|(g,\ \varphi_i)|+\varepsilon_2|(\gamma,\ \varphi_i)|\leqslant$$

$$\leqslant\|\bar{g}-g\|\cdot\|\varphi_i\|+\varepsilon_2\|\gamma\|\cdot\|\varphi_i\|<2\,\varepsilon_2<\frac{\varepsilon_1}{n+2}. \tag{9}$$

Воспользовавшись формулой Крамера и условиями (5) и (9), получим

$$|a_j|=\frac{|\det d_j|}{|\det D|}<2\,|\det d_j|\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}|b_i|\cdot|\det m_{ij}\,(D)|<\varepsilon_1. \qquad (10)$$

Таким образом, для функции $\sigma(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\,\bar{\varphi}_i\,(x)$ из (10), (7) и (6) имеем

$$\|\sigma(x)\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot\|\bar{\varphi}_i\,(x)\|<n\varepsilon_1\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\bar{\varphi}_i\,(x)\|<n\varepsilon_1\,(1+\varepsilon_2)<2n\varepsilon_1. \qquad (11)$$

Для $\psi(x)=\bar{g}\,(x)+\sigma(x)+\varepsilon_2\,\gamma\,(x)$ имеем из (7), (11) и (6)

$$\|\psi(x)\|\geqslant\|\bar{g}\,(x)\|-\|\sigma(x)\|-\varepsilon_2\,\|\gamma\,(x)\|>1-\varepsilon_2-2n\,\varepsilon_1-\varepsilon_2>$$

$$>1-\frac{\varepsilon_1}{n+2}-2n\varepsilon_1>1-3n\varepsilon_1=1-\frac{\varepsilon}{7}\cdot \qquad (12)$$

Обозначим $\beta=\dfrac{1}{\|\psi(x)\|}$ и рассмотрим функцию $\varphi_{n+1}(x)=\beta\,\psi(x)=$ $=f(x)+\nu\gamma\,(x)$, где $f(x)=\beta\bar{g}\,(x)+\beta\sigma\,(x)$ и $\nu=\beta\,\varepsilon_2$. Очевидно, что функция $f(x)$ непрерывна, $\varphi_{n+1}\,(x)$ ортогональна всем $\varphi_i\,(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, $\|\varphi_{n+1}\,(x)\|=1$. Осталось проверить, что $\|f\,(x)-g\,(x)\|<\varepsilon$ и $0<\nu<\varepsilon$.

Для этого оценим β. В (12) уже получено $\dfrac{1}{\beta}=\|\psi\,(x)\|>1-\dfrac{\varepsilon}{7}$, аналогично из (7) и (11) можно получить

$$\frac{1}{\beta}=\|\psi\,(x)\|\leqslant\|\bar{g}\,(x)\|+\|\sigma\,(x)\|+\varepsilon_2\,\|\gamma\,(x)\|<1+3n\,\varepsilon_1<1+\frac{\varepsilon}{7}, \qquad (13)$$

то есть

$$\frac{7}{7+\varepsilon}<\beta<\frac{7}{7-\varepsilon},\ |1-\beta|<\frac{\varepsilon}{7-\varepsilon}\cdot \qquad (14)$$

Тогда из условий (7), (11), (14) и (6) следует, что

$$\|f\,(x)-g\,(x)\|=\|\beta\bar{g}\,(x)+\beta\sigma\,(x)-g\,(x)\|\leqslant\|\beta\bar{g}(x)+\beta\sigma\,(x)-\bar{g}\,(x)\|+\|\bar{g}(x)-$$

$$-g\,(x)\|<|1-\beta|\cdot\|\bar{g}\,(x)\|+\beta\,\|\sigma\,(x)\|+\varepsilon_2<\frac{\varepsilon}{7-\varepsilon}\,(1+\varepsilon_2)+\frac{7}{7-\varepsilon}\times$$

$$\times\,2n\,\varepsilon_1+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

Легко также видеть, что $\nu=\beta\varepsilon_2<\varepsilon$. Таким образом, первая часть леммы доказана.

Если же функция $g\,(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a,\ b]\subset\subset[0,1]$, а $\varphi_i\,(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ ограничены на $[a,\ b]$, то обозначив через $M>0$ верхнюю грань функций $g\,(x)$ и $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ на этом отрезке, возьмем

$$0<\varepsilon_1\leqslant\min\left\{\frac{\varepsilon}{21n},\ \frac{\varepsilon}{6nM+4n}\right\} \tag{15}$$

и выберем функции $\bar{\varphi}_i(x)$ $(1\leqslant i<n)$ и $\bar{g}(x)$ так, чтобы они дополнительно условию (7) удовлетворяли также следующим соотношениям:

$$\bar{g}(x)=g(x) \text{ на отрезке } [a,\ b],$$

$$|\bar{\varphi}_i(x)|\leqslant M\ (1\leqslant i\leqslant n) \text{ на отрезке } [a\ ,b]. \tag{16}$$

Повторяя предыдущую конструкцию, найдем функцию $\varphi_{n+1}(x)=$ $=f(x)+\nu\gamma(x)$. Воспользовавшись тем, что $\varepsilon_1\leqslant\dfrac{\varepsilon}{6nM+4n}$ и $\varepsilon<1$, аналогично (14) получим

$$0<\beta<\frac{3M+2}{3M} \text{ и } |1-\beta|<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot \tag{17}$$

Тогда на отрезке $[a,\ b]$ из (16), (10) и (17) следует

$$f(x)-g(x)|=|\beta g(x)+\beta\sigma(x)-g(x)|\leqslant|1-\beta|\cdot M+\beta\sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot|\bar{\varphi}_i(x)|<$$

$$<|1-\beta|\cdot M+n\beta\varepsilon_1 M<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+n\cdot\frac{3M+2}{3M}\cdot\frac{\varepsilon}{6nM+4n}\cdot M<\varepsilon.$$

Лемма 1 доказана.

Повторяя конструкцию, данную в предыдущей лемме соответствующее число раз, легко получить следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть заданы ОНС* $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\cdots,\ \varphi_n(x),\ g_1(x),\cdots$ $\cdots,\ g_m(x)$ *и функции* $\|\gamma_j(x)\|\leqslant 1,\ j=1,\ 2,\cdots,\ m,$ *определенные на отрезке* $[0,1]$, *тогда для произвольного* $\varepsilon>0$ *существуют функции* $\varphi_{n+j}(x)=f_j(x)+\nu_j\gamma_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ *такие, что* $f_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ *непрерывны на* $[0,1]$, $\|f_j(x)-g_j(x)\|<\varepsilon$ $(1\leqslant j\leqslant m)$, $0<\nu_j<\varepsilon$ *и система* $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n+m}$ *ортонормирована в* $L^2[0,1]$. *Если же* $g_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ *непрерывны на некотором* $[a,\ b]\subset[0,1]$, *а* $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ *ограничены на том же отрезке,* $f_j(x)$ *можно выбрать так, что* $|f_j(x)-$ $-g_j(x)|<\varepsilon$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ *на отрезке* $[a,\ b]$.

Замечание 1. Если взять $\gamma_j(x)\equiv 0,\ j=1,\ 2,\cdots,\ m,$ то $\varphi_{n+j}(x)\in C[0,1]$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ и $\|\varphi_{n+j}(x)-g_j(x)\|<\varepsilon$.

Лемма 3. *Если в* $L^2[0,1]$ *заданы:*

1° *ортонормальная система ограниченных функций* $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$,

2° *функции* $\|\gamma_j(x)\|\leqslant 1,\ j=1,\ 2,\cdots,$ *то для произвольных* $\varepsilon>0$ *и функции* $\tau(x)\in L^2[0,1]$ *существуют: натуральное число* m, *функции* $\varphi_{n+j}(x),\ j=1,\ 2,\cdots,m,$ *многочлен* $P(x)$, *составленный из функций* $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n+m)$ *такие, что*

I $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n+m}$ *ОНС в* $L^2[0,1]$, II $\varphi_{n+j}(x)=f_j(x)+\nu_j\gamma_j(x)$, $j=1, 2\cdots, m$, *где* $f_j(x)$ *непрерывны на отрезке* $[0,1]$, *а числа* $\nu_j>0$,

III $\sum\limits_{j=1}^{m}|f_j(x)|^q<\varepsilon$ *на* $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ *при любом* $q>2+\frac{1}{n}$,

IV $\sum\limits_{j=1}^{m}\nu_j^2<\varepsilon$,

V $\|P(x)-\tau(x)\|<\varepsilon$.

Доказательство. Можно ограничиться случаем $\varepsilon<1$. Пусть

$$\tau(x)=\tau^*(x)+\tau^{**}(x), \tag{18}$$

где $\tau^*(x)$—полином по функциям $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$, а $\tau^{**}(x)$ ортогональна всем этим функциям. Систему $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ дополним функциями $\psi_1(x)$, $\psi_2(x),\cdots$ до ортонормальной полной в $L^2[0,1]$ системы. Разложим $\tau^{**}(x)$ в ряд по этому базису и возьмем достаточно много членов этого разложения так, чтобы полученный полином $\overline{Q}(x)=\sum\limits_{i=1}^{l_1}a_i\psi_i(x)$ удовлетворял соотношению

$$\|\overline{Q}(x)-\tau^{**}(x)\|<\frac{\varepsilon}{4}\cdot \tag{19}$$

К системе функций $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$, $\psi_1(x),\cdots,\psi_{l_1}(x)$ применим предыдущую лемму, взяв в ней соответствующий $\gamma_i(x)\equiv 0$, $i=1, 2,\cdots, l_1$. Получим ортонормальную систему функций $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$, $p_1(x),\cdots,p_{l_1}(x)$, в которой функции $p_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant l_1)$ непрерывны на $[0,1]$ (см. замечание 1) и

$$\|p_i(x)-\psi_i(x)\|<\frac{\varepsilon}{4\,al_1},\ i=1, 2,\cdots, l_1, \tag{20}$$

где $a=\max\limits_{1<i<l_1}|a_i|$. Взяв $Q(x)=\sum\limits_{i=1}^{l_1}a_i\,p_i(x)$, получим из (19) и (20)

$$\|Q(x)-\tau^{**}(x)\|\leqslant\|Q(x)-\overline{Q}(x)\|+\|\overline{Q}(x)-\tau^{**}(x)\|<\sum_{i=1}^{l_1}|a_i|\cdot\|p_i(x)-$$

$$-\psi_i(x)\|+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{21}$$

Можно было, воспользовавшись результатом Г. С. Шапиро [6], сразу же дополнить систему $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ до полной ортонормальной системы непрерывными функциями, но для полноты изложения мы предпочли обратиться к замечанию 1.

Так как функции $p_i(x)$ $(1\leqslant i<l_1)$ непрерывны на $[0,1]$, то существует число $R>1$ такое, что

$$|p_i(x)|<R,\ i=1, 2,\cdots, l_1. \tag{22}$$

Выберем натуральные числа k, t и l_2, число M таким образом

$$M = 8l_1^3 R^3,\quad \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon,\quad t > 2(nk + n\log_2 M),\quad l_1 + l_2 = 2^t\,. \tag{23}$$

Обозначим

$$m = l_1 + l_2. \tag{24}$$

В пространстве $L^2\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$ обозначим через H ортогональное дополнение линейного подпространства L, натянутого на функции $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$, $p_1(x), \cdots, p_{l_1}(x)$. Взяв произвольный ортонормальный базис в H выберем первые l_2 функции этого базиса и продолжим эти функции на $[0,1]$, полагая их значения на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ равными нулю. Получим ортонормальную систему функций $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$, $p_1(x), \cdots, p_{l_1}(x)$, $p_{l_1+1}(x), \cdots, p_m(x)$ в $L^2[0,1]$, причем все функции $p_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ (24) непрерывны на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$. К системе функций $\{p_i(x)\}_{i=1}^m$ применим ортонормальную матрицу Уолша A_t, которая определяется следующим способом:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_{l+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} A_l & A_l \\ A_l & -A_l \end{pmatrix}. \tag{25}$$

(Такое применение ортонормальных матриц с целью получения ПОНС функций $\{\varphi_n(x)\}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^{2+\varepsilon}$ равномерно сходится при любом $\varepsilon > 0$ было предложено А. М. Олевским в работе [5]).

В полученной таким образом ортонормальной системе функций $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$, $g_1(x), \cdots, g_m(x)$, все $g_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ непрерывны на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$. Заметим, что линейное пространство, натянутое на $\{g_i(x)\}_{i=1}^m$ содержит в себе линейное пространство, натятутое на $\{p_i(x)\}_{i=1}^{l_1}$. Из этого следует существование таких чисел c_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, что

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i g_i(x). \tag{26}$$

Кроме того, так как $p_{l_1+i}(x) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant l_2)$ на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$, то на этом отрезке из (24), (25), (23) и (22) получим

$$|g_i(x)| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, p_j(x)\right| = \left|\sum_{j=1}^{l_1} a_{ij}\, p_j(x)\right| < \left(\sum_{j=1}^{l_1} |a_{ij}|^q\right)^{1/q} \times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{l_1}|p_j(x)|^p\right)^{1/p}<\left(l_1\left(\frac{1}{\sqrt{2^t}}\right)^q\right)^{1/q}(l_1R^p)^{1/p}=\frac{l_1R}{\sqrt{2^t}}\cdot \tag{27}$$

На отрезке $\left[0,\frac{n}{n+1}\right]$, при $2+\frac{1}{n}<q<3$, вспомнив, что $R>1$, из (27) и (23) получим

$$\sum_{l=1}^{m}|g_l(x)|^q<m\cdot\frac{l_1^qR^q}{2^{\frac{t}{2}q}}<\frac{l_1^3R^3}{2^{\frac{t}{2}(q-2)}}<\frac{M}{8}\cdot\frac{1}{2^{(nk+n\log_2 M)\frac{1}{n}}}=\frac{\varepsilon}{16}\cdot \tag{28}$$

Лемму 2 применим к системе $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),g_1(x),\cdots,g_m(x)$ и функциям $\gamma_j(x),j=1,2,\cdots,m$, заданным в условии 2° доказываемой леммы, вспомнив, что все функции $g_j(x)\ (1\leqslant j\leqslant m)$ непрерывны на отрезке $\left[0,\frac{n}{n+1}\right]$. Получим ОНС $\{\varphi_l(x)\}_{l=1}^{n+m}$, где

$$\varphi_{n+j}(x)=f_j(x)+\nu_j\gamma_j(x),\ j=1,2,\cdots,m, \tag{29}$$

$f_j(x)\ (1\leqslant j\leqslant m)$ непрерывны на отрезке $[0,1]$,

$$\|f_j(x)-g_j(x)\|<\frac{\varepsilon}{4mc},\ 0<\nu_j<\frac{\varepsilon}{4mc},\ j=1,2,\cdots,m, \tag{30}$$

где $c=1+\max\limits_{1<l<m}|a_l|$ (26),

$$|f_j(x)-g_j(x)|<\frac{\varepsilon}{4mc},\ j=1,2,\cdots,m,\ \text{на отрезке}\ \left[0,\frac{n}{n+1}\right]\cdot \tag{31}$$

Построенная таким образом система функций $\{\varphi_l(x)\}_{l=1}^{n+m}$, многочлен

$$P(x)=\tau^*(x)+\sum_{l=1}^{m}c_l\,\varphi_{n+l}(x) \tag{32}$$

удовлетворяют всем условиям леммы. Проверим выполнение условия III. На отрезке $\left[0,\frac{n}{n+1}\right]$ при $2+\frac{1}{n}<q<3$ из (31), (28) и известного неравенства $|a+b|^q\leqslant 2^q(|a|^q+|b^q|)$ получим

$$\sum_{j=1}^{m}|f_j(x)|^q<\sum_{j=1}^{m}\left|g_j(x)+\frac{\varepsilon}{4mc}\right|^q<2^q\sum_{j=1}^{m}|g_j(x)|^q+2^q m\left(\frac{\varepsilon}{4mc}\right)^q<$$

$$<8\cdot\frac{\varepsilon}{16}+8m\left(\frac{\varepsilon}{4mc}\right)^2<\varepsilon. \tag{33}$$

А из того, что $\varepsilon<1$ следует выполнение этого неравенства при любом $q>2+\frac{1}{n}$. Проверим IV условие. Из (30) следует сразу, что $\sum\limits_{j=1}^{m}\nu_j^2<m\left(\frac{\varepsilon}{4\,mc}\right)^2<\varepsilon$.

Проверим выполнение условия V. Последовательно используя условия (32), (18), (29), (26), (21) и (30), получим

$$\|P(x)-\tau(x)\|=\left\|\tau^*(x)+\sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_{n+i}(x)-\tau^*(x)-\tau^{**}(x)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_{n+i}(x)-Q(x)\right\|+\|Q(x)-\tau^{**}(x)\|<\sum_{i=1}^{m}|c_i|\cdot\|f_i(x)-g_i(x)\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}|c_i|\cdot\nu_i\|\gamma_i(x)\|+\frac{\varepsilon}{2}<mc\cdot\frac{\varepsilon}{4mc}+mc\cdot\frac{\varepsilon}{4mc}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Лемма 3 доказа́на.

Построение системы, удовлетворяющей условиям основной леммы, уже очевидно. Возьмем счетное, всюду плотное в $L^2[0,1]$ множество функций $\tau_k(x)$, последовательность положительных чисел ε_k таких, что $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k<\infty$, функции

$$\gamma_i(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in e_i^1\\ 0, & \text{если } x\in e_i^2,\end{cases}\quad (i=1, 2,\cdots)$$

где множества $\{e_i^1\}_1^{\infty}$ и $\{e_i^2\}_1^{\infty}$ удовлетворяют IV условию основной леммы. Построение системы $\{\varphi_n(x)\}$ осуществим последовательно, пачками.

Возьмем $\varphi_1(x)=\dfrac{\gamma_1(x)}{\|\gamma_1(x)\|}$. Предположим, что после k-ого шага выбраны первые n_k функций $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n_k)$, которые составляют ОНС и ограничены, опишем $k+1$-ый шаг. К имеющимся уже n_k функциям $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n_k)$ и функциям $\gamma_{n_k+i}(x)$ $(i\geqslant 1)$ применим предыдущую лемму, взяв $\varepsilon=\varepsilon_k$, $\tau(x)=\tau_k(x)$. Обозначим $\nu_i(x)=\nu_i\gamma_i(x)$. Так как в результате применения леммы 3 вновь полученные функции $\varphi_i(x)$ $(n_k+1\leqslant i\leqslant n_{k+1})$ ограничены (следует из ограниченности функций $\gamma_i(x)$ $(i\geqslant 1)$, то ОНС $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n_{k+1}}$ можно тем же способом дополнить новой пачкой функций и т. д. Система, удовлетворяющая условиям основной леммы, построена. Ее полнота следует из условия V леммы 3 и того, что множество функций $\{\tau_k(x)\}_1^{\infty}$ всюду плотно в $L^2[0,1]$. Проверим для построенной таким образом системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ выполнение II условия основной леммы (остальные свойства этой системы непосредственно следуют из леммы 3). Возьмем произвольные $0<\alpha<1$, $q>2$ и выберем k_0 так, чтобы $\dfrac{n_{k_0}}{n_{k_0}+1}>\alpha$ и $q>2+\dfrac{1}{n_{k_0}}$, тогда воспользовавшись III условием леммы 3 получим на $[0,\alpha)$

$$\sum_{i=n_{k_0}+1}^{\infty}|f_i(x)|^q=\sum_{k=k_0}^{\infty}\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}|f_i(x)|^q<\sum_{k=k_0}^{\infty}\varepsilon_k.$$

Замечание 2. Воспользовавшись замечанием А. М. Олевского (см. [5], теорема 5) можно, слегка изменив предыдущую конструкцию, получить аналогичный результат и для особенностей типа Вейля. Именно, справедлива

Теорема 2. *Для произвольной последовательности* $\omega(n) \to \infty$ *существует полная ортонормальная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *такая, что коэффициенты Фурье любой функции* $f(x) \in L^2[0,1]$ $(f \not\sim 0)$, *непрерывной хотя бы в одной точке отрезка* $[0,1]$, *удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\, \omega(n) = \infty.$$

В заключение автор выражает благодарность Ф. Г. Арутюняну за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15.I.1981

Վ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ. Կարլեմանի եզակիությունը գոնե մեկ կետում անընդհատ ֆունկցիաների համար (*ամփոփում*)

Եթե $\{\varphi_n(x)\}$*-ը օրթոնորմավորված լրիվ սիստեմ է* $L^2[0,1]$*-ում, ապա, ինչպես հայտնի է, կամայական* $f(x) \in L^2[0,1]$ *ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցների համար* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$*։*

Բայց եթե $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p = \infty$*, բոլոր* $p < 2$ *համար, ապա ասում են, որ* $f(x)$ *ֆունկցիան ունի Կարլեմանի եզակիություն* $\{\varphi_n(x)\}$ *օրթոնորմավորված լրիվ սիստեմում։*

Տվյալ աշխատանքում $L^2[0,1]$ *-ում կառուցված է օրթոնորմավորված ֆունկցիաների լրիվ սիստեմ, ըստ որի* $L^2[0,1]$*-ի կամայական ֆունկցիա, որն անընդհատ է* $[0,1]$ *հատվածի գոնե մեկ կետում* $(f \not\sim 0)$*, ունի Կարլեմանի եզակիություն ըստ այդ սիստեմի։*

V. M. MANUKIAN. *The Carleman singularity for at least at one point continuous functions* (summary)

If $\{\varphi_n(x)\}$ is an orthonormal complete system in the $L^2[0,1]$, then, for the Fourier coefficients of the arbitrary function $f(x) \in L^2[0,1]$ we have $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$.

But if we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p = \infty \text{ for all } p < 2,$$

then, the function $f(x)$ is said to have the Carleman singularity in the orthonormal complete system.

In this paper a complete system of functions orthogonal in the $L^2[0,1]$ is constructed, with respect to which, any function from $L^2[0,1]$ $(f \not\sim 0)$, which is continuous at least at one point of the segment $[0,1]$, has the Carleman singularity with respect to this system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961.
2. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, Физматгиз, М., 1958.
3. *П. Л. Ульянов.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19, вып. 1, 1964, 3—69.
4. *А. М. Олевский.* О расходимости ортогональных рядов и о коэффициентах Фурье непрерывных функций по полным системам, Сиб. матем. ж., IV, № 3, 1963, 647—656.
5. *А. М. Олевский.* Об особенностях типа Карлемана для полных ортонормальных систем, Сиб. матем. ж., VIII, № 4, 1967, 807—826.
6. *H. S. Shapiro.* Incomplete orthogonal families and related question on an orthogonal matrix, Michigan Math. J., 11, № 1, 1964, 15—18.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 6, 1981 Математика

Ш. А. ГРИГОРЯН, В. М. МАРТИРОСЯН

О ЗАМЫКАНИИ, МИНИМАЛЬНОСТИ И БАЗИСНОСТИ НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

1 (а) В давней работе М. М. Джрбашяна и А. Б. Нерсесяна [1] впервые был предложен метод построения биортогональных систем, порожденных аналитическими функциями с кратными нулями.

В дальнейшем этот метод был существенно усовершенствован и нашел новые важные применения в ряде различных по своей природе задач анализа, в том числе и в работах других авторов. Подробные литературные ссылки (до 1973 года) по этому поводу приведены в работе [2].

Этот метод получил также эффективные применения при решении родственных задач интерполяции и базисности, им, в частности, были установлены критерии базисности неполных систем простейших рациональных дробей (вообще говоря, с кратными полюсами) в их замыканиях в метрике H^p в полуплоскости и в круге [3—6].

(б) В работе М. М. Джрбашяна [7] впервые были рассмотрены системы рациональных функций вида $\{r_k(z)=(s_k-1)!\,(1-\lambda_k z)^{-s_k}\}_1^\infty$ ($|\lambda_k|<1$, s_k — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$) и была предложена схема построения биортогональной с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ системы функций $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ (см. также [3, 8]).

Заметка Ю. Ф. Коробейника [9] посвящена рассмотрению более общих систем вида $\{h_k(z)=f^{(s_k-1)}(\lambda_k z)\}_1^\infty$, которые получаются из системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ путем изоморфного отображения пространства H^2 в круге на себя. Воспользовавшись известным критерием базисности неполной в H^2 системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ (см. [10—12]) и доказав, что в случае полноты в H^2 эта система не является базисом (кроме случая $r_k(z)=z^k$), автор указанной заметки получает критерий базисности системы $\{h_k(z)\}_1^\infty$.

В той же заметке [9], по существу путем повторения предложенной М. М. Джрбашяном схемы построения системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональной с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ (см [3, 7, 8]), приводится построение системы функционалов $\{H_k\}_1^\infty$, биортогональной с $\{h_k(z)\}_1^\infty$.

Впрочем, как станет очевидно из данной заметки, как в случае полуплоскости, так и в случае круга, систему даже функций, а не только функционалов, биортогональную с $\{h_k(z)\}_1^\infty$, можно сразу получить из системы М. М. Джрбашяна $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ путем изоморфного отображения соответствующих пространств.

(в) М. М. Джрбашяном впервые были рассмотрены также системы рациональных дробей вида $\{r_k(z) = (s_k - 1)!\,(z - \bar\lambda_k)^{-s_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ($\operatorname{Im}\lambda_k > 0$, s_k — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$) (см. [2, 8]), и были построены биортогональные с ними системы $\{\Omega_k(z)\}_1^{\infty}$. Им же в работах [4, 5] было дано полное внутреннее описание замыкания в метрике пространства H_+^p $(1 < p < +\infty)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ системы $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ и установлен критерий базисности в своем замыкании такой системы.

Данная заметка посвящена системам функций, получаемых из системы $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ путем изоморфного отображения пространства H_+^2 на себя. Полученные таким образом системы записываются в виде

$$\Psi_k(z) = \Phi^{(s_k-1)}(z - \bar\lambda_k),\ k = 1, 2, \cdots,$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{i}\int_0^{+\infty} e^{izt} g(t)\,dt,\ \operatorname{Im} z > 0,$$

а $g(t)$ и $1/g(t)$ — из класса $L_\infty(0, +\infty)$.

На основании отмеченных выше результатов М. М. Джрбашяна для системы $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$, в данной заметке получены критерии полноты, минимальности и базисности в метрике H_+^2 системы $\{\Psi_k(z)\}_1^{\infty}$; в случае неполноты такой системы дано полное внутреннее описание ее замыкания, а в случае минимальности построена биортогональная с ней система.

В качестве приложения получены соответствующие результаты для конкретных систем функций, порожденных определенными специальными функциями.

2 (а) Обозначим через H_+^2 известное пространство функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости $G^{(+)} = \{z;\ \operatorname{Im} z > 0\}$ и имеющих конечную норму

$$\|f\| = \sup_{0<y<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2\,dx\right\}^{1/2} < +\infty.$$

Пространство H_-^2 в полуплоскости $G^{(-)} = \{z;\ \operatorname{Im} z < 0\}$ определяется аналогичным образом.

Лемма 1. *Если $\alpha(t) \geq 0$ — измеримая на $(0, +\infty)$ функция и ее преобразование Лапласа*

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt}\alpha(t)\,dt,\ z \in G^{(+)}, \tag{1}$$

сходится в полуплоскости $G^{(+)}$ и определяет функцию $f(z) \in H_+^2$, то $\alpha(t) \in L_2(0, +\infty)$.

Доказательство. Из (1) при $\operatorname{Im} z = 1$ имеем

$$f(x+i) = \int_0^{+\infty} [e^{-t} \alpha(t)] e^{ixt}\, dt, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

Положив здесь $x = 0$ и учитывая, что $\alpha(t) \geqslant 0$, получим $e^{-t} \alpha(t) \in L_1(0, +\infty)$.

С другой стороны, по теореме Винера—Пэли для $f(z)$ справедливо представление вида

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt} \gamma(t)\, dt, \quad z \in G^{(-)}, \quad \gamma(t) \in L_2(0, +\infty).$$

В частности

$$f(x+i) = \int_0^{+\infty} [e^{-t} \gamma(t)] e^{ixt}\, dt, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2'}$$

причем ясно, что $e^{-t} \gamma(t) \in L_1(0, +\infty)$.

Из (2) и (2′) на основании теоремы единственности преобразования Фурье ([13], стр. 37) следует $\alpha(t) = \gamma(t)$, откуда $\alpha(t) \in L(0, +\infty)$.

(б) Пусть $f(z) \in H^2_+$. По теореме Винера—Пэли существует функция $\varphi(t) \in L_2(0, +\infty)$, единственным образом определяемая по $f(z)$ и такая, что

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt} \varphi(t)\, dt, \quad z \in G^{(+)}. \tag{3}$$

Полагая, что $g(t)$ — измеримая на $(0, +\infty)$ функция, определим в H^2_+ оператор A_g по формуле

$$A_g[f] = \int_0^{+\infty} e^{izt} \varphi(t)\, g(t)\, dt. \tag{4}$$

Лемма 2. *Оператор A_g является автоморфизмом* в H^2_+ тогда и только тогда, когда $g, g^{-1} \in L_\infty(0, +\infty)$.*

Доказательство. Предположим, что A_g—автоморфизм в H^2_+. Тогда из (4) ясно, что $g(t)$ конечна почти всюду на $(0, +\infty)$, так что без ограничения общности можем считать g всюду конечной функцией.

Пусть $\psi(t) \in L_2(0, +\infty)$ произвольна. Очевидно, что и функция $\varphi(t) = |\psi(t)| \exp\{-i \arg g(t)\} \in L_2(0, +\infty)$. Следовательно, опреде-

* т. е. A_g является ограниченным обратимым линейным оператором, отображающим H^2_+ на H^2_+.

ленная по формуле (3) функция $f(z)$ принадлежит H^2_+. В силу нашего предположения относительно A_g этому же классу принадлежит и функция

$$A_g[f]=\int_0^{+\infty} e^{izt}\,\alpha(t)\,dt,$$

где $\alpha(t)=|\psi(t)|\,|g(t)|$, и по лемме 1 $\alpha(t)\in L_2(0,+\infty)$.

Таким образом, для любой функции $\psi(t)\in L_2(0,+\infty)$ будем иметь, что $|\psi(t)|^2\,|g(t)|^2\in L_1(0,+\infty)$. Следовательно, и для любой функции $\gamma(t)\in L_1(0,+\infty)$ произведение $\gamma(t)\,|g(t)|^2\in L_1(0,+\infty)$, откуда по одной известной теореме ([14], стр. 20) $|g(t)|^2$, а вместе с ней и $g(t)$ существенно ограничены на $(0,+\infty)$. Принадлежность $g^{-1}=\dfrac{1}{g}$ к $L_\infty(0,+\infty)$ вытекает из уже доказанного и равенства $A_g^{-1}=A_{g^{-1}}$.

Достаточность условий $g, g^{-1}\in L_\infty(0,+\infty)$ для автоморфности оператора A_g очевидна.

3. Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений.

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность комплексных чисел из полуплоскости $G^{(+)}$, а s_j и p_j $(j\geqslant 1)$ — кратности появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_k\}_1^j$ и во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ соответственно.

Отметим, что сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^2)^{-1}\,\mathrm{Im}\,\lambda_k \tag{5}$$

обеспечивает сходимость произведения Бляшке с нулями в точках $z=\lambda_k$:

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z-\lambda_k}{z-\bar\lambda_k}\,\varkappa_k,\quad \varkappa_k=\frac{|1+\lambda_k^2|}{1+\lambda_k^2}.$$

Следуя М. М. Джрбашяну [4, 5], при условии сходимости ряда (5) обозначим через $H^2_\pm\{\lambda_k\}$ класс функций $f(z)$, определенных вне точек вещественной оси и удовлетворяющих условиям: 1) $f(z)\equiv f^+(z)\in H^2_+$, $z\in G^{(+)}$; 2) $f(z)\equiv f_-(z)=B(z)\,f_*(z)$, $z\in G^{(-)}$, $f_*(z)\in H^2_-$; 3) почти для всех $x\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{y\to+0} f(x+iy)=f_+(x)=f_-(x)=\lim_{y\to-0} f(x+iy).$$

Далее, с последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем систему простейших рациональных дробей $\{r_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$r_k(z)=(s_k-1)!\,(z-\bar\lambda_k)^{-s_k}\quad (k\geqslant 1).$$

Известно [4, 5], что если ряд (5) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не минимальна в H^2_+. При условии же сходимости ряда (5) в работе

[8] была построена система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональная с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на вещественной оси в смысле

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} r_k(x)\,\overline{\Omega_\nu(x)}\,dx=\begin{cases}1, & k=\nu,\\ 0, & k\neq\nu\end{cases}\quad (k\geqslant 1,\ \nu\geqslant 1). \tag{6}$$

Эта система определяется так:

$$\Omega_k(z)=\frac{B(z)}{(s_k-1)!}\sum_{j=0}^{p_k-s_k}\frac{a_j(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)^{p_k-s_k-j+1}}\quad (k\geqslant 1),$$

$$a_j(\lambda_k)=\frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{dz^j}\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{B(z)}\right\}_{z=\lambda_k}\quad (k\geqslant 1,\ j\geqslant 0).$$

4. Пусть теперь $g\in L_\infty(0, +\infty)$ и $g^{-1}\in L_\infty(0, +\infty)$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{i}\int_0^{+\infty} e^{izt}\, g(t)\,dt,\quad z\in G^{(+)}$$

и порожденную этой функцией и последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ систему функций $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$\Psi_k(z)=\Phi^{(s_k-1)}(z-\bar{\lambda}_k),\quad z\in G^{(+)}\quad (k\geqslant 1).$$

Нетрудно проверить, что

$$A_g[r_k]=\Psi_k(z)\quad (k\geqslant 1), \tag{7}$$

и поскольку в силу леммы 2 A_g — автоморфизм в H_+^2, то на основании установленных М. М. Джрбашяном [4, 5] результатов для системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$, для системы $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ получаем следующие теоремы.

Теорема 1. *Для полноты H_+^2 системы $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ необходима и достаточна расходимость ряда* (5).

Теорема 2. *Если ряд* (5) *сходится, то замыкание в метрике H_+^2 системы $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ совпадает с множеством функций $\Psi(z)$, допускающих представление вида*

$$\Psi(z)=\frac{1}{i}\int_0^{+\infty} e^{izt}\,\varphi(t)\,g(t)\,dt,\quad z\in G^{(+)},$$

где $\varphi(t)$ — преобразование Фурье функции $f(z)\in H_\pm^2\{\lambda_k\}$,

$$\varphi(t)=\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-ixt} f(x)\,dx\right\}.$$

Теорема 3. *Если последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям*

$$\inf_{j\geq 1} \prod_{\substack{k=1\\ \lambda_k\neq\lambda_j}}^{\infty} \left|\frac{\lambda_j-\lambda_k}{\lambda_j-\bar{\lambda}_k}\right| > 0, \quad \sup_{k\geq 1} \{p_k\} < +\infty, \tag{8}$$

то система $\{(\operatorname{Im}\lambda_k)^{s_k-\frac{1}{2}}\Psi_k(z)\}_1^\infty$ *является базисом Рисса в своем замыкании в метрике* H_+^2.

Если же хотя бы одно из условий (8) *нарушено, то система* $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ *ни при какой расстановке членов не является базисом своего замыкания в метрике* H_+^2.

Наконец, займемся вопросом минимальности системы $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$.

Сначала отметим, что поскольку в случае расходимости ряда (5) система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не минимальна в H_+^2, то при том же условии система $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ также не минимальна в H_+^2 и, следовательно, не имеет биортогонального дополнения.

Пусть теперь ряд (5) сходится. Покажем как можно с помощью системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ М. М. Джрбашяна построить систему функций, биортогональную с $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$. Для этого сначала заметим, что $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty\subset H_+^2$ (см. [4, 5]). Следовательно, по теореме Винера—Пэли существует последовательность функций $\{\chi_k(t)\}_1^\infty\subset L_2(0, +\infty)$ таких, что

$$\Omega_k(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt}\chi_k(t)\,dt, \quad z\in G^{(+)}\ (k\geq 1), \tag{9}$$

причем

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-ixt}\,\Omega_k(x)\,dx = \begin{cases}\chi_k(t), & t\in(0, +\infty)\\ 0, & t\in(-\infty, 0).\end{cases} \tag{10}$$

Определим систему функций $\{\omega_k(z)\}_1^\infty\subset H_+^2$, положив

$$\omega_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{izt}\,\frac{\chi_k(t)}{\overline{g(t)}}\,dt, \quad z\in G^{(+)}. \tag{11}$$

Теорема 4. *Системы функций* $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{\omega_k(z)\}_1^\infty$ *биортогональны на вещественной оси в смысле*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_k(x)\,\overline{\omega_\nu(x)}\,dx = \begin{cases}1, & k=\nu\\ 0, & k\neq\nu\end{cases} \quad (k\geq 1,\ \nu\geq 1). \tag{12}$$

Доказательство. Положив

$$\varphi_k(t) = (it)^{s_k-1}\,e^{-i\bar{\lambda}_k t}\ (k\geq 1), \quad t\in(0, +\infty)$$

нетрудно проверить, что

$$r_k(z)=\frac{1}{i}\int\limits_0^{+\infty} e^{izt}\varphi_k(t)\,dt,\ z\in G^{(+)}\ (k>1). \tag{13}$$

Отсюда и из (7) будем также иметь

$$\Psi_k(z)=\frac{1}{i}\int\limits_0^{+\infty} e^{izt}\varphi_k(t)\,g(t)\,dt,\ z\in G^{(+)}\ (k>1). \tag{14}$$

Из (13) и (9) в силу обобщенного равенства Парсеваля (см. [13], стр. 41) можем написать

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} r_k(x)\ \overline{\Omega_\nu(x)}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\varphi_k(t)\,\chi_\nu(t)\,dt, \tag{15}$$

а из (14) и (11)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi_k(x)\,\overline{\omega_\nu(x)}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\varphi_k(t)\,\overline{\chi_\nu(t)}\,dt. \tag{16}$$

Следовательно, учитывая также (6), из (15) и (16) получим (12).

5. В заключение приведем примеры конкретных систем $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$, порождаемых последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$.

Пусть $g(t)=2i\,(1+e^{-t})^{-1}$, тогда

$$\Phi(z)=\Psi\left(\frac{1-iz}{2}\right)-\Psi\left(\frac{-iz}{2}\right),$$

где $\Psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ — логарифмическая производная гамма функции Эйлера (см. [15], стр. 401, формулу 9.179). Следовательно, в качестве системы $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ можно взять

$$\Psi_k(z)=\left(\frac{1}{2i}\right)^{s_k-1}\left\{\Psi^{(s_k-1)}\left(\frac{1+i\bar\lambda_k-iz}{2}\right)-\Psi^{(s_k-1)}\left(\frac{i\bar\lambda_k-iz}{2}\right)\right\}(k>1). \tag{17}$$

Пусть теперь $g(t)=i\exp(-a\,e^{-t})$ $(a>0)$, тогда $\Phi(z)=a^{iz}\,\gamma(-iz;a)$, где $\gamma(-iz,a)$ — неполная гамма-функция:

$$\gamma(-iz;a)=\int\limits_0^a u^{-iz-1}e^{-u}\,du$$

(см. [15], стр. 403, формула 9.193). В этом случае система $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ имеет вид

$$\Psi_k(z)=\int\limits_0^a u^{-iz-1}e^{-u}\,(-i\ln u)^{s_k-1}\,u^{i\bar\lambda_k}\,du\ (k>1). \tag{18}$$

Таким образом, для систем (17) и (18) справедливы все утверждения теорем 1—4.

Наконец, отметим, что можно привести и другие примеры конкретных систем $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$, для которых справедливы утверждения теорем 1—4 (см., напр., [15], формулы 9.90; 9.101; 9.129; 9.153; 9.183; 9.195).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 2.II.1981

Շ. Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Ֆունկցիաների որոշ ընդհանուր սիստեմների փակության, մինիմալության ու բազիսության մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ստացվել են ֆունկցիաների որոշ ընդհանուր սիստեմների փակության, մինիմալության ու բազիսության հայտանիշները։ Այդպիսի սիստեմի ոչ-լրիվության դեպքում տրվել է նրա փակույթի լիակատար ներքին նկարագիրը, իսկ մինիմալության դեպքում կառուցվել է նրա հետ բիօրթոգոնալ սիստեմը։

Որպես կիրառություն ստացվել են համապատասխան արդյունքներ ֆունկցիաների կոնկրետ սիստեմների համար, որոնք ծնվում են որոշակի հատուկ ֆունկցիաներով։

Sh. H. GRIGORIAN, V. M. MARTIROSSIAN. *On the closedness, minimality and basicity of certain general systems of functions* (summary)

In the present paper the criteria for closedness, minimality and basicity for ceritain general systems of functions are established. In the case where such a system is not closed, the full inner description of its closure is given, and where such a system is minimal, its biorthogonal system is constructed.

Corresponding results for concrete systems of functions are also obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян.* О построении некоторых специальных биортогональных систем, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, XII, № 5, 1959, 17—42.
2. *М. М. Джрбашян.* Теорема единственности аналитических функций, асимптотически представимых рядами Дирихле-Тейлора, Матем. сб., 91(133), №4(8), 1973, 580—626.
3. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», IX, № 5, 1974, 339—373.
4. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе H_+^p ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 517—520.
5. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H_p в полуплоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., 43, № 6, 1978, 1322—1384.
6. *Г. М. Айрапетян.* Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах H_p Харди, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 4, 1977, 262—277.
7. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», VIII, № 1, 1973, 384—409.

8. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и наилучшие приближения ядра Коши на вещественной оси, Матем. сб., 95(137), № 3(11), 1974, 418—444.
9. *Ю. Ф. Коробейник.* Критерий базисности одной системы функций, Матем. заметки, 25, № 5, 1979, 665—674.
10. *В. Э. Кацнельсон.* Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов, Функц. анализ и его прилож., 1, № 2, 1967, 39—51.
11. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.* Базисы из собственных векторов вполне неунитарных сжатий и характеристическая функция, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 1, 1970, 90—133.
12. *Г. М. Айрапетян.* О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной плоскости, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», X, № 2, 1975, 133—152.
13. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
14. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, Госиздат физ.-мат. лит., М., 1958.
15. *В. А. Диткин, А. П. Прудников.* Интегральные преобразования и операционное исчисление, «Наука», М., 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 6, 1981 Математика

В. А. ОГАНЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В работе [1] в односвязной ограниченной области E рассмотрено линейное уравнение второго порядка эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+X(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+Y(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+Z(x, y)\,u(x, y)=0, \tag{A}$$

где X, Y, Z — целые действительные функции своих аргументов. Доказано, что всякое действительное решение этого уравнения можно представить в виде

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\left[\alpha(z, \bar z)\,\Phi(z)+\int\limits_{z_0}^{z}\beta(z, \bar z, t)\,\Phi(t)\,dt\right], \tag{B}$$

где α, β — целые функции своих аргументов, $\Phi(z)$ аналитична в E.

Используя представление (B), В. Б. Хведелидзе [2] изучил задачу Дирихле с разрывными граничными условиями для уравнения (A), где граничная функция из класса $L_p(\Gamma, \rho)$, $p>1$, $\rho(t)$—неотрицательная весовая функция.

Задача Пуанкаре для системы уравнений вида (A) с разрывными граничными условиями исследована в работе [3]. Эта задача приводится к системе сингулярных интегральных уравнений с разрывными правыми частями.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в классе функций, имеющих особенность на границе области, исследована в работе [7]. В работе [6] рассмотрена задача Дирихле для эллиптических систем второго порядка в верхней полуплоскости, когда граничная функция имеет слабую особенность на границе области.

В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в верхней полуплоскости, когда граничная функция имеет особенность в конечном числе точек, причем особенность необязательно слабая.

Пусть D— верхняя полуплоскость $y\geqslant 0$, а Γ — ее граница.

Рассмотрим в области D эллиптическую систему

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

где A, B, C — действительные постоянные квадратные матрицы n-го порядка, $u(x, y) = [u_1(x, y), u_2(x, y), \cdots, u_n(x, y)]$ — дважды непрерывно дифференцируемая искомая вектор-функция.

Напомним, что система (1) называется эллиптической, если $\det C \neq 0$ и характеристическое уравнение

$$\det(A + 2B\lambda + C\lambda^2) = 0$$

не имеет действительных корней.

Пусть $x_1, x_2, \cdots, x_p$ — конечные точки границы Γ, $l_1, l_2, \cdots l_s$ — целые, а $l_{s+1}, l_{s+2}, \cdots, l_p$—нецелые числа. Обозначим через $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$ класс действительных вектор-функций $u(x, y)$, непрерывных всюду в $\overline{D}$, кроме, быть может, граничных точек $x_1, x_2, \cdots, x_p$, около которых функции удовлетворяют неравенствам

$$|u(z)| < \begin{cases} \dfrac{\text{const}}{|z-x_k|^{l_k}} \cdot \ln \dfrac{1}{|z-x_k|}, & k=1, 2, \cdots, s \\ \dfrac{\text{const}}{|z-x_k|^{l_k}}, & k=s+1, s+2, \cdots, p, \end{cases}$$

а в окрестности бесконечности ограничены, $z = x + iy$. Обозначим через $N_\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$ класс действительных функций $f(x)$, непрерывных всюду на Γ, кроме, быть может, точек, $x_1, x_2, \cdots$ $\cdots, x_p$, около которых функции удовлетворяют неравенствам

$$|f(x)| \leqslant \frac{\text{const}}{|x - x_k|^{l_k}}, \quad k = 1, 2, \cdots p,$$

а в окрестности бесконечности ограничены.

Ставится задача: найти в области D регулярное решение системы (1), принадлежащее классу $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \neq x_1, x_2, \cdots, x_p, \tag{2}$$

где $f(x)$ — заданная вектор-функция из класса $N_\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение системы (1) имеет только простые корни. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения с положительными мнимыми частями, тогда общее решение системы (1) дается формулой [4]

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x + \lambda_j y), \tag{3}$$

где a_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$— ненулевое решение системы

$$(A + 2B\lambda_j + C\lambda_j^2)\, a_j = 0,$$

а $\varphi_j(x + \lambda_j y)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$—произвольные аналитические функции относительно $x + \lambda_j y$.

Доказана следующая

Теорема. *Если векторы* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *линейно независимы, то при любом* $f(x)$ *из класса* $N_\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$, *задача* (1), (2) *имеет решение в классе* $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$, *а соответствующая однородная задача имеет* $n \cdot \sum_{k=1}^{p} [l_k]$ *линейно независимых решений, где* $[l_k]$*—целая часть* l_k $(k=1, 2, \cdots, p)$.

Докажем теорему в частном случае, когда $p=1$, $x_1=0$. Обозначим $l_1=l$, $[l]=m$, $l-m=\gamma$.

Пусть $f(x) \in N_\Gamma(0; l)$ и равна нулю вне некоторого интервала $(-\beta, \beta)$.

Из системы

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{t^m f(t)\, dt}{z^m (t-z)},$$

учитывая линейную независимость векторов $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, находим

$$\varphi_j(z) = \gamma_j \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{t^m f(t)\, dt}{z^m (t-z)} \right) \quad (j=1, 2, \cdots, n),$$

где γ_j — j-тая строка матрицы, которая является обратной той матрице столбцами которой служат векторы $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

Докажем, что функция

$$\tilde{u}(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \gamma_j \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{t^m f(t)\, dt}{z_j^m (t-z_j)} \right) \tag{4}$$

является решением задачи (1), (2).

Очевидно, что $\tilde{u}(x, y)$ удовлетворяет системе (1). Остается показать, что $\tilde{u}(x, y)$ стремится к $f(x_0)$ $(x_0 \neq 0)$ при $x \to x_0$, $y \to +0$. $\tilde{u}(x, y)$ представим в виде

$$\tilde{u}(x, y) = \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{t^m f(t)\, dt}{z^m (t-z)} \right\} + \operatorname{Re}\left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \gamma_j \int_{-\beta}^{\beta} t^m f(t) \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{1}{z_j^m (t-z_j)} - \frac{1}{z^m (t-z)} \right] \right\}. \tag{5}$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{t^m}{z^m (t-z)} = \frac{1}{t-z} + \frac{1}{z} + \frac{t}{z^2} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{z^m}$$

первое слагаемое правой части формулы (5) перепишем в виде

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\beta}^{\beta}\frac{t^m f(t)\,dt}{z^m(t-z)}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{|t-x_0|<\frac{|x_0|}{2}}\frac{f(t)}{t-z}\,dt\right)+$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{|t-x_0|<\frac{|x_0|}{2}}\frac{1}{z^k}\cdot t^{k-1}f(t)\,dt\right)+\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{|t-x_0|>\frac{|x_0|}{2}}\frac{t^m f(t)\,dt}{z^m(t-z)}\right). \qquad (6)$$

Как известно (см. [5])

$$\lim_{\substack{z\to x_0\\ y>0}}\left(\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{|t-x_0|<\frac{|x_0|}{2}}\frac{f(t)\,dt}{t-z}\right)=f(x_0). \qquad (7)$$

Так как

$$\lim_{z\to x_0}\left(\operatorname{Re}\frac{1}{z^k}\cdot\frac{1}{\pi i}\int_{|t-x_0|<\frac{|x_0|}{2}}t^{k-1}f(t)\,dt\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x_0^k}\cdot\frac{1}{\pi i}\int_{|t-x_0|<\frac{|x_0|}{2}}t^{k-1}f(t)\,dt\right)=0, \qquad (8)$$

$$\lim_{z\to x_0}\left(\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{|t-x_0|>\frac{|x_0|}{2}}\frac{t^m f(t)\,dt}{z^m(t-z)}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{|t-x_0|>\frac{|x_0|}{2}}\frac{t^m f(t)\,dt}{x_0^m(t-x_0)}\right)=0, \qquad (9)$$

то из (7), (8), (9) получаем

$$\lim_{\substack{z\to x_0\\ y>0}}\left(\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\beta}^{\beta}\frac{t^m f(t)\,dt}{z^m(t-z)}\right)=f(x_0).$$

Теперь покажем, что второе слагаемое выражения (5) стремится к нулю при $z\to x_0$, $y>0$. Для оценки этого слагаемого достаточно оценить следующее выражение:

$$J(x,y)=\int_{-\beta}^{\beta}\left[\frac{1}{z_j^m(t-z_j)}-\frac{1}{z^m(t-z)}\right]t^m f(t)\,dt.$$

Легко проверить, что

$$J(x,y)=K_1(x,y)+K_2(x,y),$$

где

$$K_1(x,y)=\frac{\lambda_j-i}{z_j^m z^m}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\left[z_j^m+z_j^{m-1}z+\cdots+z^m-x_0\left(z_j^{m-1}+\cdots+z^{m-1}\right)x_0^m f(x_0)\right]dt}{(t-z_j)(t-z)}, \qquad (10)$$

$$K_2(x, y) = \frac{\lambda_j - i}{z_j^m\, z^m} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\,\{(z_j^m + z_j^{m-1} z + \cdots + z^m)\,[t^m f(t) - x_0^m f(x_0)] -}{(t - z_j)(t - z)}$$

$$\frac{-(z_j^{m-1} + \cdots + z^m)[t^{m+1} f(t) - x_0^{m+1} f(x_0)]\}\,dt}{(t - z_j)(t - z)}. \tag{11}$$

В силу теоремы о вычетах $K_1(x, y) = 0$. Для оценки $K_2(x, y)$ заметим, что существуют постоянные $B_1 > 0$, $B_2 > 0$ такие, что

$$B_1 |z_j - t| \leqslant |z - t| \leqslant B_2 |z_j - t|. \tag{12}$$

С другой стороны, по непрерывности $f(x)$ в точке $x = x_0$ для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что

$$|t^m f(t) - x_0^m f(x_0)| < \varepsilon, \quad |t^{m+1} f(t) - x_0^{m+1} f(x_0)| < \varepsilon$$

лишь только $|t - x_0| < \delta$. $K_2(x, y)$ разобьем на три части:

$$K_2(x, y) = \int_{-\beta}^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^{\beta} = J_1 + J_2 + J_3. \tag{13}$$

Первое и третье слагаемые правой части выражения (13) ограничены без сомножителя y, следовательно стремятся к нулю при $y \to +0$. Второе слагаемое оценивается так:

$$|J_2| \leqslant \varepsilon \cdot \mathrm{const} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{y\,dt}{|t - z|^2} \leqslant \varepsilon \cdot \mathrm{const}.$$

Таким образом, мы показали, что $\tilde{u}(x, y) \to f(x)(x \neq 0)$ при $(x, y) \to (x, 0)$, $y > 0$.

Осталось показать, что $\tilde{u}(x, y) \in M_D(0; l)$. $\tilde{u}(x, y)$ представим в следующем виде:

$$\tilde{u}(x, y) = \mathrm{Re}\left(\int_{-\frac{|z|}{2}}^{\frac{|z|}{2}} \frac{t^m f(t)\,dt}{z^m (t - z)}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi i} \int_{|t| > \frac{|z|}{2}} \frac{f(t)\,dt}{t - z}\right) +$$

$$+ \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi i} \int_{|t| > \frac{|z|}{2}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^{k-1}}{z^k} f(t)\,dt\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi i} \int_{|t| > \frac{|z|}{2}} \frac{t^m f(t)\,dt}{z^m}\right) +$$

$$+ \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} a_j \left\{ \gamma_j \frac{1}{\pi i} \int_{-\frac{|z|}{2}}^{\frac{|z|}{2}} \left[\frac{1}{z_j^m (t - z_j)} - \frac{1}{z^m (t - z)}\right] t^m f(t)\,dt \right\} +$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left\{\gamma_j\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\frac{|z|}{2}<|t|<2|z|}\left[\frac{1}{z_j^m(t-z_j)}-\frac{1}{z^m(t-z)}\right]t^m f(t)\,dt\right\}+$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left\{\gamma_j\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|>2|z|}\left[\frac{1}{z_j^m(t-z_j)}-\frac{1}{z^m(t-z)}\right]t^m f(t)\,dt\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{7}\tilde{u}_k(x, y).$$

Учитывая, что в окрестности нуля $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)\cdot x^l|\leqslant \text{const}$$

получаем

$$\tilde{u}_1(x, y)=\left|\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\frac{|z|}{2}}^{\frac{|z|}{2}}\frac{t^m f(t)\,dt}{z^m(t-z)}\right|\leqslant\frac{\text{const}}{|z|^m\cdot\frac{|z|}{2}}\cdot\int\limits_{-\frac{|z|}{2}}^{\frac{|z|}{2}}|t|^{-\gamma}\,dt\leqslant\frac{c_1}{|z|^l},\quad(14)$$

$$\tilde{u}_2(x, y)=\left|\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|>\frac{|z|}{2}}\frac{f(t)}{t-z}dt\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>\frac{|z|}{2}}\frac{yf(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\text{const}\int\limits_{|t|>\frac{|z|}{2}}\frac{y\,dt}{|t|^l[(t-x)^2+y^2]}\leqslant\frac{c_2}{|z|^l},\qquad(15)$$

$$|\tilde{u}_3(x, y)|=\left|\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|>\frac{|z|}{2}}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{t^{k-1}}{z^k}f(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\text{const}\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_{|t|>\frac{|z|}{2}}\frac{|t|^{k-1-l}}{|z|^k}\,dt\leqslant\frac{c_3}{|z|^l},\qquad(16)$$

$$|\tilde{u}_4(x, y)|=\left|\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|>\frac{|z|}{2}}\frac{t^{m-1}f(t)\,dt}{z^m}\right|\leqslant\frac{\text{const}}{|z|^m}\int\limits_{|t|>\frac{|z|}{2}}|t|^{m-1-l}dt\leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases}\dfrac{\text{const}}{|z|^l}\text{если } [l]\neq l\\[2mm]\dfrac{\text{const}}{|z|^l}\cdot\ln\dfrac{1}{|z|},\ [l]=l,\end{cases}\qquad(17)$$

$$|\tilde{u}_5(x, y|\leqslant\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left\{\gamma_j\frac{1}{\pi i}\times\right.\right.$$

$$\times \int\limits_{-\frac{|z|}{2}}^{\frac{|z|}{2}} \frac{[z_j^m + z_j^{m-1} z + \cdots + z^m - t\,(z_j^{m-1} + z_j^{m-2} z + \cdots}{z_j^m\, z^m\, (t - z_j)(t - z)}$$

$$\left.\frac{\cdots + z^{m-1})(\lambda_j - i)\, y\, t^m f(t)\, dt}{z_j^m\, z^m\, (t - z_j)(t - z)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{|z|^{2m}} \int\limits_{-\frac{|z|}{2}}^{\frac{|z|}{2}} \frac{|z|^m\, y\, |t|^m\, |f(t)|\, dt}{|t - z|^2} \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^{2m}} \cdot |z|^{m+1} \int\limits_{-\frac{|z|}{2}}^{\frac{|z|}{2}} \frac{|t|^{-\gamma}}{|z|^2}\, dt \leqslant \frac{c_5'}{|z|^l}, \tag{18}$$

$$|\tilde{u}_0(x, y)| \leqslant \text{const} \sum_{j=1}^{n} \times$$

$$\times \left| \int\limits_{\frac{|z|}{2} < |t| < 2|z|} \frac{z_j^m + z_j^{m-1} z + \cdots + z^m - t\,(z_j^{m-1} + \cdots + z^{m-1})](\lambda_j - i)\, y\, t^m f(t)\, dt}{z_j^m\, z^m\, (t - z_j)(t - z)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{|z|^{2m}} \int\limits_{\frac{|z|}{2} < |t| < 2|z|} \frac{|t| \cdot |z|^{m-1} \cdot y \cdot |t|^m\, |f(t)|\, dt}{|t - z|^2} \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^{m+1}} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{|z|}{2} < |t| < 2|z|} \frac{|t|^{1-\gamma} \cdot y\, dt}{(t - x)^2 + y^2} \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^l}, \tag{19}$$

$$|\tilde{u}_\gamma(x, y)| \leqslant \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \left\{ \gamma_j \frac{1}{\pi i} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int\limits_{|t| \geqslant 2|z|} \frac{[z_j^m + \cdots + z^m - t\,(z_j^{m-1} + \cdots + z^{m-1})](\lambda_j - i)\, y\, t^m f(t)\, dt}{z_j^m\, z^m\, (t - z_j)\,(t - z)} \right\} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{|z|^{m+1}} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|t| \geqslant 2|z|} \frac{|t|^{1-\gamma}\, y\, dt}{|t - z|^2} \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^{m+1}} \int\limits_{|t| \geqslant 2|z|} \frac{|z| \cdot |t|^{1-\gamma}}{t^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{\text{const}}{|z|^l}, & [l] \neq l \\ \dfrac{\text{const}}{|z|^l} \ln \dfrac{1}{|z|}, & [l] = l. \end{cases} \tag{20}$$

Из (14)—(20) следует, что $\tilde{u}(x, y) \in M_D(0, l)$, когда $f(x)$ равняется нулю вне интервала $(-\beta, \beta)$.

Пусть теперь $f(x)$—любая функция из класса $N_\Gamma(0, l)$. Представим ее в виде

$$f(x)=f(x)\,\alpha(x)+f(x)(1-\alpha(x)),$$

где $\alpha(x)$—непрерывная функция на всей оси и такая, что

$$\alpha(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(-\frac{\beta}{2},\frac{\beta}{2}\right)\\ 0, & x\overline{\in}(-\beta,\beta).\end{cases}\tag{23}$$

Согласно вышедоказанному задача (1), (2) с граничной функцией $f(x)\,\alpha(x)$ имеет решение в классе $M_D\,(0;\ l)$.

В работе [6] показано, что решение задачи (1), (2) с граничной функцией $f(x)(1-\alpha(x))$ ограничено. Итак, при любом $f(x)\in N_\Gamma(0,l)$ задача (1), (2) в классе $M_D(0,l)$ имеет решение.

Заметим, что задача (1), (2) в более узком классе может и не иметь решения. В случае $n=1$ это показано в работе [7].

Первая часть теоремы доказана. Перейдем к доказательству второй части.

Пусть $u^*(x,y)$—решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&A\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\\&u(x,0)\equiv 0\quad(x\neq 0)\end{aligned}\right\},\tag{*}$$

удовлетворяющее следующим условиям: непрерывна и имеет непрерывные частные производные в замкнутой полуплоскости $y\geqslant 0$, кроме, быть может, точки $(0,0)$, в окрестности которой выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial y}\right|\leqslant\frac{\text{const}}{|z|^{l+1}}\quad(0<|z|\leqslant 1,\ y>0),\tag{24}$$

а в окрестности бесконечности $\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial y}$ ограничены.

Так как $u^*(x,y)$—решение (*), то оно дается формулой

$$u^*(x,y)=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\psi_j(x+\lambda_j y)\quad(y>0),\tag{25}$$

где функции $\psi_j(x+\lambda_j y)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ аналитические относительно $x+\lambda_j y$ в верхней полуплоскости.

Составим аналитическую функцию

$$H(z)=\alpha_1\psi_1(z)+\alpha_2\psi_2(z)+\cdots+\alpha_n\psi_n(z),\ \mathrm{Im}\,z>0.\tag{26}$$

Очевидно, что

$$u^*(x,0)=\mathrm{Re}\,H(z)|_{z=x}=0,\quad x\neq 0.$$

Следовательно, $H(z)$ можно аналитически продолжить в нижнюю полуплоскость о следующему закону:

$$K(z)=\begin{cases}H(z) & \mathrm{Im}\,z\geqslant 0\\ -\overline{H(\bar z)} & \mathrm{Im}\,z<0.\end{cases}\tag{27}$$

Имеем, $\alpha_1\psi_1(z)+\alpha_2\psi_2(z)+\cdots+\alpha_n\psi_n(z)=K(z)$, $\mathrm{Im}\,z>0$. Обозначим $\Psi(z)=\{\psi_1(z),\psi_2(z),\cdots,\psi_n(z)\}$, и через A_1 матрицу, столбцами которой являются векторы $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, тогда

$$\Psi(z) = A_1^{-1} K(z), \tag{28}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x} = \operatorname{Re}(\alpha_1 \psi_1'(z_1) + \alpha_2 \psi_2'(z_2) + \cdots + \alpha_n \psi_n'(z_n)),\\ \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial y} = \operatorname{Re}(\alpha_1\lambda_1 \psi_1'(z_1) + \alpha_2\lambda_2 \psi_2'(z_2) + \cdots + \alpha_n\lambda_n \psi_n'(z_n)),\end{gathered} \tag{29}$$

или

$$\begin{gathered}\frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2}(\alpha_1\psi_1'(z_1) + \cdots + \alpha_n \psi_n'(z_n) + \overline{\alpha_1}\,\overline{\psi_1'(z_1)} + \cdots + \overline{\alpha_n}\,\overline{\psi_n'(z_n)}),\\ \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2}(\alpha_1\lambda_1\psi_1'(z_1) + \cdots + \alpha_n\lambda_n\psi_n'(z_n) + \overline{\alpha_1}\,\overline{\lambda_1}\,\overline{\psi_1'(z_1)} + \cdots\\ \cdots + \overline{\alpha_n}\,\overline{\lambda_n}\,\overline{\psi_n'(z_n)}).\end{gathered} \tag{30}$$

Так как (см. [8])

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_n & \overline{\alpha_1}\,\overline{\alpha_2}\cdots\overline{\alpha_n}\\ \lambda_1\alpha_1\;\lambda_2\alpha_2\;\lambda_n\alpha_n & \overline{\lambda_1}\,\overline{\alpha_1}\;\overline{\lambda_2}\,\overline{\alpha_2}\cdots\;\overline{\lambda_n}\,\overline{\alpha_n}\end{pmatrix} \neq 0, \tag{31}$$

то из (30) и (31) следует, что $\psi_1'(z_1), \psi_2'(z_2), \cdots, \psi_n'(z_n)$ линейно выражаются через $\dfrac{\partial u^*(x, y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u^*(x, y)}{\partial y}$, значит удовлетворяют неравенствам

$$|\psi_j'(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^{l+1}}, \text{ при } 0 < |z| \leqslant 1,\ \operatorname{Im} z > 0\ (j = 1, 2, \cdots, n), \tag{32}$$

а в окрестности бесконечности $\psi_j'(z)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ ограничены.

Значит

$$|\psi_j(z)| < \begin{cases}\dfrac{\text{const}}{|z|^l}, & 0 < |z| \leqslant 1,\ \operatorname{Im} z > 0\\ \text{const}\cdot|z| & \text{в окрестности } z = \infty,\ \operatorname{Im} z > 0.\end{cases} \tag{33}$$

Из (26), (27), (28) и (33) следует, что $\psi_j(z)$ аналитически продолжаются в нижнюю полуплоскость и удовлетворяют соотношениям (33).

Следовательно, они представляются в виде

$$\psi_j(z) = b^{(j)} z + a_0^{(j)} + \frac{a_1^{(j)}}{z} + \cdots + \frac{a_m^{(j)}}{z^m}\quad j = 1, 2, \cdots, n), \tag{34}$$

где $b^{(j)}$, $a_k^{(j)}$ — постоянные $(k = 0, 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n)$.

Тогда

$$u^*(x, y) = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(b^{(j)} z_j + a_0^{(j)} + \frac{a_1^{(j)}}{z_j} + \cdots + \frac{a_m^{(j)}}{z_j^m}\right). \tag{35}$$

Так как решение $u^*(x, y)$ ограничено в окрестности бесконечности, то из (35) получим, что полином

$$P(x, y) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} b^{(j)} z_j \tag{36}$$

ограничен, т. е $P(x, y) \equiv 0$.

Учитывая (36) и то, что $u^*(x, 0) \equiv 0$ $(x \neq 0)$, из (35) получаем

$$u^*(x, y) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{a_1^{(j)}}{z_j} + \cdots + \frac{a_m^{(j)}}{z_j^m} \right) \tag{35*}$$

и

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_k^{(j)} = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{37}$$

Обозначим через $\alpha_j = \gamma_j + i\theta_j$, $a_p^{(j)} = \beta_p^{(j)} + i\mu_p^{(j)}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, $(p=1, 2, \cdots, m)$, где γ_j и θ_j—n-мерные векторы, а $\beta_p^{(j)}$ и $\mu_p^{(j)}$— действительные числа.

Запишем (37) в координатной форме, получим систему $n \cdot m$ линейных однородных уравнений

$$\tilde{B} \delta = 0, \tag{38}$$

где

$$\delta = (\beta_1^{(1)}, \mu_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \mu_2^{(1)}, \cdots, \beta_m^{(1)}, \mu_m^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \mu_1^{(2)}, \cdots, \beta_m^{(2)}, \mu_m^{(2)}, \cdots$$
$$\cdots, \beta_1^{(n)}, \mu_1^{(n)}, \cdots, \beta_m^{(n)}, \mu_m^{(n)}).$$

Ранг матрицы $\tilde{B}$ равен $m \cdot n$, число неизвестных — $2m \cdot n$, следовательно (38) имеет $r = 2m \cdot n - m \cdot n$ линейно независимых решений, которые обозначим через

$$\delta_k = \{\beta_{1k}^{(1)} \mu_{1k}^{(1)}, \beta_{2k}^{(1)} \mu_{2k}^{(1)}, \cdots, \beta_{mk}^{(n)}, \mu_{mk}^{(n)}\} \ (k=1, 2, \cdots, r). \tag{39}$$

Подставляя эти решения в (35*), получаем

$$u_k^*(x, y) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{a_{1k}^{(j)}}{z_j} + \frac{a_{2k}^{(j)}}{z_j^2} + \cdots + \frac{a_{mk}^{(j)}}{z_j^m} \right), \ (k=1, 2, \cdots, r) \tag{40}$$

решений однородной задачи (*), где $a_{l \cdot k}^{(j)} = \beta_{l \cdot k}^{(j)} + i\, \mu_{l \cdot k}^{(j)}$,

$$(j=1, 2, \cdots, n;\ l=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, r).$$

Покажем, что $u_k^*(x, y)$ $(k=1, 2, \cdots, r)$ линейно независимы. Допустим обратное, тогда $\exists h_1, h_2, \cdots, h_r$ такие, что $\sum_{k=1}^{r} h_k^2 \neq 0$ и

$$u^{**}(x, y) \equiv h_1 u_1^*(x, y) + h_2 u_2^*(x, y) + \cdots + h_r u_r^*(x, y) \equiv 0 \tag{41}$$

или

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{c_{j \cdot 1}}{z_j} + \frac{c_{j \cdot 2}}{z_j^2} + \cdots + \frac{c_{j \cdot m}}{z_j^m} \right) \equiv 0, \tag{42}$$

где $c_{j\cdot k}=h_1 a^{(j)}_{k\cdot 1}+h_2 a^{(j)}_{k\cdot 2}+\cdots+h_r a^{(j)}_{k\cdot r}$ $(j=1, 2,\cdots, n,\ k=1,2,\cdots, m)$.

Очевидно, что один из $c_{j\cdot k}$ отличен от нуля, в противном случае получили бы, что $\delta_1, \delta_2,\cdots, \delta_r$ линейно зависимы.

Из (42) следует, что

$$\frac{\partial \bar{u}(x,y)}{\partial x}\equiv 0,\ \frac{\partial \bar{u}(x,y)}{\partial y}\equiv 0.$$

Как уже показано выше, производные функций $\frac{c_{j\cdot 1}}{z_j}+\cdots+\frac{c_{j\cdot m}}{z_j^m}$ линейно выражаются через $\frac{\partial \bar{u}\ (x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u\ (x, y)}{\partial y}$, следовательно

$$\frac{c_{j1}}{z_j}+\frac{c_{j2}}{z_j^2}+\cdots+\frac{c_{jm}}{z_j^m}\equiv \text{const}\quad (j=1, 2,\cdots, n),$$

что невозможно. Линейная независимость $u_k^*(x,\ y)$, $(k=1,\ 2,\cdots,\ r$ доказана.

Покажем, что любое решение однородной задачи (*) $u^{**}(x, y)$ имеет вид

$$u^{**}(x, y)=c_1 u_1^*(x, y)+c_2 u_2^*(x, y)+\cdots+c_r u_r^*(x, y). \qquad (**)$$

Так как $u^{**}(x, y)$ ограничена в полуплоскости $y\geqslant \frac{h}{2}$ $(h>0)$, то все ее производные ограничены в полуплоскости $y\geqslant h$ (см. [9]).

Составим функцию

$$w_h(x, y)=u^{**}(x, y+h)-v_h(x, y),$$

где

$$v_h(x, y)=v_{1h}(x, y)+v_{2h}(x, y),$$

$$v_{1h}(x, y)=\text{Re}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left\{\gamma_j\ \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^{**}(t, h)(1-\alpha(t))\,dt}{t-z_j}\right\}, \qquad (43)$$

$$v_{2h}(x, y)=\text{Re}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left\{\gamma_j\ \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^m u^{**}(t, h)\,\alpha(t)\,dt}{z_j^m(t-z_j)}\right\}, \qquad (44)$$

$\alpha(t)$ — функция, определенная формулой (23).

Легко проверить, что $\left|\frac{\partial v_{1h}(x, y)}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial v_{1h}(x, y)}{\partial y}\right|$ ограничены, а $\left|\frac{\partial v_{2h}(x, y)}{\partial x}\right|$ и $\left|\frac{\partial v_{2h}(x, y)}{\partial y}\right|$ при любом фиксированном $h>0$ в окрестности $z=0$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\frac{\partial v_{2h}(x, y)}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial v_{2h}(x, y)}{\partial y}\right| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^{m+1}},$$

а в окрестности бесконечности ограничены.

Очевидно, что $v_h(x, 0) = u^{**}(x, h)$.

$w_h(x, y)$ является решением однородной задачи, а ее производные при фиксированном $h > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\frac{\partial w_h(x, y)}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial w_h(x, y)}{\partial y}\right| \leqslant \frac{c}{|z|^{m+1}} \quad \text{в окрестности } z=0,$$

а в окрестности бесконечности ограничены.

Следовательно, она имеет вид

$$w_h(x, y) = c_1(h)\, u_1^*(x, y) + c_2(h)\, u_2^*(x, y) + \cdots + c_r(h)\, u_r^*(x, y). \tag{45}$$

Из линейной независимости $u_1^*(x, y), u_2^*(x, y), \cdots, u_r^*(x, y)$ следует существование таких точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_r, y_r)$, что

$$\det \begin{pmatrix} u_1^*(x_1, y_1) \cdots u_r^*(x_1, y_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_1^*(x_r, y_r) \cdots u_r^*(x_r, y_r) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{46}$$

Так как $\lim\limits_{h \to +0} v_h(x, y) = 0$ (что следует из (43), (44)) и $\lim\limits_{h \to +0} u^{**} \times \times (x, y+h) = u^*(x, y)$, то, используя (45) и (46), получаем, что $c_j(h)$ $(j = 1, 2, \cdots, r)$ имеют предел при $h \to +0$.

Таким образом, в (45) можно перейти к пределу при $h \to +0$, получим

$$u^{**}(x, y) = c_1^* u_1^*(x, y) + c_2^* u_2^*(x, y) + \cdots + c_r^* u_r^*(x, y).$$

Теорема доказана.

Общий случай доказывается аналогично.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Ереванский государственный
университет

Поступила 26.II.1981

Վ. Հ. ՕՀԱՆՅԱՆ. Խզվող եզրային պայմաններով դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտական համակարգի համար Դիրիխլեի խնդիրը (*ամփոփում*)

$M_D(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$ *դասում դիտարկվում է*

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \neq x_1, x_2, \cdots, x_p \tag{2}$$

եզրային խնդիրը, որտեղ

$$f(x) \in N_\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_p, l_1, l_2, \cdots, l_p),$$

Ցույց է տրված, որ (1) համակարգի համար որոշակի պայմանի առկայության դեպքում (1), (2) խնդիրը ունի լուծում։

Գտնված է համապատասխան համասեռ խնդրի գծորեն անկախ լուծումների թիվը։

V. H. OHANIAN. *The Dirichlet problem for the elliptic system of differential equations with discontinuous boundary conditions* (summary)

A boundary problem

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{d^2 u}{dy^2}=0 \quad (1)$$

$$u(x,\ 0)=f(x),\ x\neq x_1,\ x_2,\cdots,\ x_p \quad (2)$$

is considered in this class, $M_D\,(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_p;\ l_1,\ l_2,\cdots,\ l_p)$ where

$$f(x)\in N_\Gamma(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_p;\ l_1,\ l_2,\cdots,\ l_p)$$

Under a certain condition, the problem (1), (2) for this system is shown to have a solution.

The number of the solutions of the corresponding homogeneous linear independent problems is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Векуа*. Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948.
2. *Б. В. Хведелидзе*. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Тр. Тбилисск. Матем. ин-та, 23, 1956, 3—158.
3. *Н. П. Векуа*. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, М., «Наука», 1970.
4. *А. В. Бицадзе*. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Изд. «Наука», 1966, 109—117.
5. *М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат*. Методы теории функций комплексного переменного, Изд. «Наука», 1973, 224—225.
6. *Э. П. Меликсетян*. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в верхней полуплоскости, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XIV, № 5, 1979, 391—402.
7. *Н. Е. Товмасян*. О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классах функций, имеющих особенности на границе области, Сибирский математический журнал, II, № 2, 1961, 290—312.
8. *Д. К. Фаддеев и В. И. Фаддеева*. Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1960.
9. *Н. Е. Товмасян*. Об устранимых особых точках эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Матем. сб., 108, № 1, 1979, 22—31.

1281—4

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 6, 1981 Математика

Г. В. МИКАЕЛЯН

О РОСТЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ—ДЖРБАШЯНА

§ 0. Введение

0.1. Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|<1)$ — последовательность комплексных чисел, причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<+\infty$. Рассмотрим произведение Бляшке

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\,\frac{|z_k|}{z_k}.$$

Л. А. Рубель и Г. Р. Маклейн решили следующую задачу, поставленную А. Зигмундом.

Какой должна быть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$, чтобы интеграл

$$I(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\log|B(re^{i\theta})|]^2\,d\theta\quad(0<r<1)$$

был ограниченным при $r\to 1-0$?

В работах [1], [2], [3], [4] Рубеля, Тейлора и Маклейна важную роль играет следующая лемма, которая по существу восходит к давним работам Ф. и Р. Неванлинна [5] и [6], а в явном виде формулы этой леммы впервые встречаются в статьях Н. И. Ахиезера [7] и М. Л. Картрайта [8].

Лемма. *Пусть функция $f(z)$ $(f(0)\neq 0)$ с последовательностью нулей $z=\{z_n\}_1^\infty$ аналитична в круге $|z|<R\leqslant+\infty$ и в окрестности $z=0$ имеет место разложение*

$$\log f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k.$$

Тогда при $0<r<R$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

$$\log|f(re^{i\theta})|=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(r,f)\,e^{ik\theta},$$

где $c_k(r,f)$ определяются по формулах

$$c_0(r,f)=\log|f(0)|+\sum_{|z_n|<r}\log\frac{r}{|z_n|},$$

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2}\beta_k r^k + \frac{1}{2k} \sum_{|z_n|<r} \left[\left(\frac{r}{z_n}\right)^k - \left(\frac{\bar{z}_n}{r}\right)^k\right] \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

$$c_{-k}(r, f) = \overline{c_k(r, f)} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

В работе [4] установлены следующие результаты.

Теорема I. *Для того чтобы $I(r)$ была ограничена необходимо и достаточно, чтобы была ограничена $J(r)$, где*

$$J(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left| \left(r^k - \frac{1}{r^k}\right) \sum_{|z_n|<r} \bar{z}_n^k + r^k \sum_{|z_n|>r} \left(\bar{z}_n^k - \frac{1}{z_n^k}\right)\right|^2.$$

Теорема II. *Пусть $n(r)$—количество чисел z_n в круге $|z| \leqslant r$. Если*

$$n(r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right); \; r \to 1-0, \tag{0.1}$$

то $I(r)$ ограничена.

Теорема III. *Допустим, что числа z_n лежат на конечном числе лучей, выходящих из начала координат. Тогда, если функция $I(r)$ ограничена, то условие* (0.1) *выполнено.*

Следствие. *Существуют произведения Бляшке с положительными нулями, для которых $I(r)$ не ограничена.*

Они доказали также, что если числа z_n лежат на конечном числе лучей, выходящих из начала координат и $I(r)$ ограничена, то справедливо неравенство

$$\sup_{0<r<1} J(r) \geqslant [n(r) - n(s)]^2 \, [u((s/r)^2) - 2u(s^2) + u((rs)^2)], \tag{0.2}$$

где $s \leqslant r$ и

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \quad (|x| < 1).$$

Далее было показано, что существует последовательность $\{z_k\}_1^{\infty}$ которая лежит на бесконечном числе лучей, выходящих из начала координат, так что $I(r) \to 0$ при $r \to 1-0$, но условие (0.1) не выполнено.

0.2. Пусть $\Gamma(z)$—гамма-функция Эйлера.

Если последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^{\infty}$ $(0 < |z_k| < 1)$ при фиксированном $\alpha \in (-1, +\infty)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < +\infty,$$

то бесконечное произведение Бляшке—Джрбашяна

$$B_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-W_\alpha(z;\, z_k)}, \tag{0.3}$$

где

$$W_\alpha(z;\xi)=\int\limits_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\times$$

$$\times\left\{\xi^{-k}\int\limits_{0}^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\bar{\xi}^{k}\int\limits_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\}z^k\ (|z|<1,\ |\xi|<1) \quad (0.4)$$

сходится в круге $|z|<1$ и представляет там аналитическую функцию, обращающуюся в нуль только на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$. $B_\alpha(z)$ совпадает с функцией Бляшке $B(z)$ при $\alpha=0$.

Известно также, что функция $B_\alpha(z)$ обладает следующим свойством:

$$\lim_{r\to1-0}\int\limits_{0}^{2\pi}[D^{-\alpha}\log|B_\alpha(re^{i\vartheta})|]\,d\vartheta=0, \quad (0.5)$$

где $D^{-\alpha}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ интегро-дифференциальный оператор в смысле Римана—Лиувилля, т. е.

$$D^{-\alpha}f(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt;\ 0<\alpha<+\infty, \quad (0.6)$$

$$D^0 f(x)\equiv f(x), \quad (0.7)$$

$$D^{-\alpha}f(x)\equiv\frac{d}{dx}\{D^{-(1+\alpha)}f(x)\};\ -1<\alpha<0. \quad (0.8)$$

Эти и другие результаты М. М. Джрбашяна по теории факторизации мероморфных в круге $|z|<1$ функций изложены в гл. IX его монографии (см. [9]).

Настоящая работа посвящена решению следующей задачи: какой должна быть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$, чтобы интегралы

$$I_\alpha(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}[D^{-\alpha}\log|B_\alpha(re^{i\vartheta})|]^2\,d\vartheta,\ -1<\alpha<+\infty \quad (0.9)$$

были ограничены при $r\to1-0$.

0.3. В § 1 статьи, имеющем вводный} характер, приводятся основные формулы, необходимые для решения задачи. Здесь установлены явные формулы для коэффициентов Фурье функции $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|f(re^{i\vartheta})|$ $(-1<\alpha<+\infty)$.

В § 2 с помощью формул, установленных в § 1, доказываются теоремы об ограниченности интегралов $I_\alpha(r)$. Получено необходимое и достаточное условие для ограниченности $I_\alpha(r)$ (теорема 2.1). Затем доказываются более простые признаки ограниченности $I_\alpha(r)$, связанные с порядком роста функции $n(r)$. Взамен (0.1) мы получаем следующее условие:

$$n(r)=O\left[\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right],\quad r\to 1-0.$$

В конце параграфа отмечаются случаи, при которых $I_\alpha(r)$ $\left(-\frac{1}{2}<\alpha<-1\right)$ не ограничены, и дается оценка для разности $n(r)-$ $-n(s)$ $(s<r)$.

Приношу свою благодарность М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство.

§ 1. Основные формулы

Пусть $Z=\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|<R,\ 0<R\leqslant+\infty)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, причем $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=R$ и

$$0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_k|\leqslant\cdots. \tag{1.1}$$

Для фиксированного значения параметра $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$ введем следующие обозначения:

$$N_\alpha(r,Z)\equiv\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{|z_n|<r}\int\limits_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}\frac{(1-t)^\alpha}{t}\,dt, \tag{1.2}$$

$$S_\alpha(r;k:Z)\equiv\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(1+\alpha+k)}\sum_{|z_n|<r}\left(\frac{1}{z_n}\right)^k, \tag{1.3}$$

$$S_\alpha^*(r;k:Z)\equiv\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{|z_n|<r}\left[\left(\frac{r}{z_n}\right)^k\int\limits_0^{\frac{|z_n|}{r}}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\bar z_n}{r}\right)^k\int\limits_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right] \tag{1.4}$$

$$(0<r<R,\ k=1,2,\cdots).$$

Докажем лемму.

Лемма 1.1. *Пусть функция $f(z)$ $(f(0)\neq0,\infty)$ с последовательностями нулей $Z(f)=\{z_k\}_1^\infty$ и полюсов $W(f)=\{w_k\}_1^\infty$ мероморфна в $|z|<R$ $(0<R\leqslant+\infty)$. Если в окрестности точки $z=0$*

$$\log f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k, \tag{1.5}$$

то для любого $r\in(0,R)$ и $\alpha\in(-1,+\infty)$ справедливо представление

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |f(re^{i\theta})| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{(\alpha)}(r, f)\, e^{ik\theta}, \tag{1.6}$$

где $D^{-\alpha}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ — *оператор Римана-Лиувилля, а коэффициенты* $\{c_k^{(\alpha)}(r, f)\}$ *определяются из следующих формул:*

$$c_0^{(\alpha)}(r, f) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \log |f(0)| + N_\alpha(r, Z) - N_\alpha(r, W), \tag{1.7}$$

$$c_k^{(\alpha)}(r, f) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)} \beta_k r^k + \frac{r^k}{2} [S_\alpha(r; k: Z) - S_\alpha(r; k: W)] -$$

$$-\frac{1}{2} [S_\alpha^*(r; k: Z) - S_\alpha^*(r; k: W)] \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{1.8}$$

$$c_{-k}^{(\alpha)}(r, f) = \overline{c_k^{(\alpha)}(r, f)} \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{1.9}$$

Доказательство. По лемме § 0, если положить

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|\, e^{-ik\theta}\, d\theta \tag{1.10}$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

то справедливы формулы

$$c_0(r, f) = \log |f(0)| + N_0(r, Z) - N_0(r, W), \tag{1.11}$$

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2} \beta_k r^k + \frac{1}{2} r^k [S_0(r; k: Z) - S_0(r; k: W)] -$$

$$-\frac{1}{2} [S_0^*(r; k: Z) - S_0^*(r; k: W)] \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{1.12}$$

$$c_{-k}(r, f) = \overline{c_k(r, f)} \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{1.13}$$

Следовательно, в силу (1.6)

$$c_0^{(\alpha)}(r, f) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} c_0(r, f), \tag{1.14}$$

$$c_k^{(\alpha)}(r, f) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} c_k(r, f) \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{1.15}$$

$$c_{-k}^{(\alpha)}(r, f) = \overline{c_k^{(\alpha)}(r, f)} \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{1.16}$$

Установим справедливость следующих равенств:

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} N_0(r, Z) = N_\alpha(r, Z), \tag{1.17}$$

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} [r^k S_0(r; k: Z) - S_0^*(r; k: Z)] = r^k S_\alpha(r; k: Z) - S_\alpha^*(r; k: Z) \tag{1.18}$$

$$(k=1, 2, \cdots).$$

При $\alpha=0$ они очевидны ввиду тождества (0.7).

Рассмотрим сначала случай, когда $0<\alpha<+\infty$. Положив для $0<r<R$

$$n(r)=\sum_{|z_n|<r}1,$$

будем иметь

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}N_0(r,Z)=r^{-\alpha}D^{-\alpha}\sum_{|z_n|<r}\log\frac{r}{|z_n|}=$$

$$=r^{-\alpha}D^{-\alpha}\int_0^r\log\frac{r}{x}\,dn(x)=\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r\left\{\int_0^t(r-t)^{\alpha-1}\log\frac{t}{x}\,dn(x)\right\}dt=$$

$$=\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r\left\{\int_x^r(r-t)^{\alpha-1}\log\frac{t}{x}\,dt\right\}dn(x)=$$

$$=\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^r\left\{\int_x^r\frac{(r-t)^{\alpha}}{t}\,dt\right\}dn(x)=N_\alpha(r,Z).$$

Для доказательства (1.18) положим $z_n=|z_n|\,e^{i\vartheta_n}$ и

$$n(r,\vartheta)=\sum_{\substack{|z_n|<r\\ \arg z_n=\vartheta}}1\,(0<r<R,\ 0\leqslant\vartheta<2\pi).$$

Тогда будем иметь

$$t^kS_0(t;k:Z)-S_0^*(t;k:Z)=\frac{1}{k}\sum_{|z_n|<t}\left[\left(\frac{t}{z_n}\right)^k-\left(\frac{\bar z_n}{t}\right)^k\right]=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{|z_n|<t}e^{-i\vartheta_nk}\left[\left(\frac{t}{|z_n|}\right)^k-\left(\frac{|z_n|}{t}\right)^k\right](0<t<r,\ k=1,2,\cdots).$$

Те числа z_n, которые находятся в круге $|z|\leqslant r$, лежат на конечном числе лучей, выходящих из начала координат. Пусть для данного $r\in(0,R)$ — число этих лучей равно $N(r)$. Тогда при фиксированном r и при любом $t\leqslant r$ будем иметь

$$t^kS_0(t;k:Z)-S_0^*(t;k:Z)=\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{N(t)}e^{-i\vartheta'_mk}\sum_{\substack{|z_n|<t\\ \arg z_n=\vartheta'_m}}\left[\left(\frac{t}{|z_n|}\right)^k-\left(\frac{|z_n|}{t}\right)^k\right],$$

где $\{\vartheta'_m\}=\{\vartheta_m\}$, но $\vartheta'_m\neq\vartheta'_e$ при $m\neq e$. Полученную формулу можно записать и так:

$$t^kS_0(t;k:Z)-S_0^*(t;k:Z)=\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{N(r)}e^{-i\vartheta'_mk}\sum_{\substack{|z_n|<t\\ \arg z_n=\vartheta'_m}}\left[\left(\frac{t}{|z_n|}\right)^k-\left(\frac{|z_n|}{t}\right)^k\right],\quad(1.19)$$

поскольку вторая сумма в (1.19) равна нулю при $N(t)<m\leqslant N(r)$.

Далее, при $0\leqslant x<r<1$ справедливо следующее равенство:

$$r^{-\alpha}\int_x^r (r-t)^{\alpha-1}\left[\left(\frac{t}{x}\right)^k-\left(\frac{x}{t}\right)^k\right]dt=$$

$$=\left(\frac{r}{x}\right)^k\int_{\frac{x}{r}}^1 (1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt+\left(\frac{x}{r}\right)^k\int_{\frac{x}{r}}^1 (1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt, \qquad (1.20)$$

поскольку

$$\frac{1}{x^k}\int_x^r (r-t)^{\alpha-1}t^k\,dt=\frac{1}{\alpha}(r-x)^\alpha+\frac{k}{\alpha x^k}\int_x^r (r-t)^\alpha t^{k-1}\,dt,$$

$$x^k\int_x^r (r-t)^{\alpha-1}t^{-k}\,dt=\frac{1}{\alpha}(r-x)^\alpha-\frac{kx^k}{\alpha}\int_x^r (r-t)^\alpha t^{-k-1}\,dt.$$

Из (1.19) и (1.20), воспользовавшись тождеством

$$\int_\xi^1 (1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+k+\alpha)}-\int_0^\xi (1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt\ (0\leqslant\xi\leqslant1), \qquad (1.21)$$

получим

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}\left[r^k S_0(r;\,k\colon Z)-S_0^*(r;\,k\colon Z)\right]=$$

$$=\frac{r^{-\alpha}}{k\Gamma(\alpha)}\sum_{m=1}^{N(r)}e^{-i\vartheta_m' k}\int_0^r (r-t)^{\alpha-1}\int_0^t\left[\left(\frac{t}{x}\right)^k-\left(\frac{x}{t}\right)^k\right]dn(x,\vartheta_m')\,dt=$$

$$=\frac{r^{-\alpha}}{k\Gamma(\alpha)}\sum_{m=1}^{N(r)}e^{-i\vartheta_m' k}\int_0^r\int_x^r (r-t)^{\alpha-1}\left[\left(\frac{t}{x}\right)^k-\left(\frac{x}{t}\right)^k\right]dt\,dn(x,\vartheta_m')=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{|z_n|<r}\left[\left(\frac{r}{z_n}\right)^k\int_{\frac{|z_n|}{r}}^1 (1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt+\left(\frac{\bar z_n}{r}\right)^k\int_{\frac{|z_n|}{r}}^1 (1-t)^\alpha t^{-k-1}\,dt\right]=$$

$$=r^k S_\alpha(r;\,k\colon Z)-S_\alpha^*(r;\,k\colon Z)\qquad (k=1,2,\cdots).$$

Теперь покажем справедливость формул (1.17) и (1.18) в случае, когда $-1<\alpha<0$.

По определению

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}N_0(r,Z)=r^{-\alpha}\frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}N_0(r,Z).$$

Поскольку $1+\alpha>0$, то

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} N_0(r, Z) = \frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r \left\{ \int_x^r \frac{(r-t)^{1+\alpha}}{t}\, dt \right\} dn(x) =$$

$$= \frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^r \int_x^r \frac{(r-t)^{\alpha}}{t}\, dt\, dn(x) = N_\alpha(r, Z),$$

и формула (1.17) установлена.

Далее имеем

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} [r^k S_0(r; k: Z) - S_0^*(r; k: Z)] =$$

$$= r^{-\alpha} \frac{d}{dr} D^{-(1+\alpha)} [r^k S_0(r; k: Z) - S_0^*(r; k: Z)] =$$

$$= \frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \frac{d}{dr} \sum_{m=1}^{N(r)} e^{-i\vartheta'_m k} \int_0^r [x^{-k} \int_x^r (r-t)^{1+\alpha} t^{k-1}\, dt +$$

$$+ x^k \int_x^r (r-t)^{1+\alpha} t^{-k-1}\, dt]\, dn(x, \vartheta'_m) =$$

$$= \frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{m=1}^{N(r)} e^{-i\vartheta'_m k} \int_0^r [x^{-k} \int_x^r (r-t)^{\alpha} t^{k-1}\, dt +$$

$$+ x^k \int_x^r (r-t)^{\alpha} t^{-k-1}\, dt]\, dn(x, \vartheta'_m) =$$

$$= r^k S_\alpha(r; k: Z) - S_\alpha^*(r; k: Z) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Поскольку при любом $\alpha \in (-1, +\infty)$

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} r^k = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)} r^k \quad (k=0, 1, 2, \cdots), \tag{1.22}$$

то из (1.14)—(1.18) и (1.22) следуют формулы (1.7), (1.8) и (1.9) леммы.

В специальном случае, когда $\alpha = 0$ и функция $f(z)$ целая, доказанная лемма переходит в лемму § 0.

§ 2. Теоремы об ограниченности интегралов $I_\alpha(r)$

2.1. Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| < 1)$, пронумерованных в порядке (1.1), удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{2.1}$$

где $\alpha\in(-1,+\infty)$ — фиксированное число.

Обозначим

$$I_\alpha(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[D^{-\alpha}\log|B_\alpha(re^{i\vartheta})|]^2\,d\vartheta\quad(0<r<1), \tag{2.2}$$

где $B_\alpha(z)$ — функция Бляшке—Джрбашяна, $D^{-\alpha}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ как и выше}— оператор Римана-Лиувилля.

Докажем теорему.

Теорема 2.1. *Для того чтобы интеграл* $I_\alpha(r)$ $(0<r<1$ *был ограничен необходимо и достаточно, чтобы была ограничена функция* $J_\alpha(r)$ $(0<r<1)$, *где*

$$J_\alpha(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg|\,r^{k+\alpha}\sum_{|z_n|<r}\Bigg[\frac{\overline{z}_n^{\,k}}{r^{2k}}\int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{-k-1}\,dx-$$

$$-z_n^{-k}\int_{|z_n|}^{\frac{|z_n|}{r}}(1-x)^{\alpha}x^{k-1}\,dx-\overline{z}_n^{\,k}\int_{|z_n|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{-k-1}\,dx\Bigg]-$$

$$-r^{k+\alpha}\sum_{|z_n|>r}\Bigg[z_n^{-k}\int_{|z_n|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{k-1}\,dx+\overline{z}_n^{\,k}\int_{|z_n|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{-k-1}\,dx\Bigg]\Bigg|^2 \tag{2.3}$$

Замечание. Отметим, что, когда $\alpha=0$, то

$$I_0(r)\equiv I(r),\quad J_0(r)\equiv J(r),$$

и мы получаем теорему 1 введения.

Доказательство теоремы. Согласно лемме 1.1. справедливо представление

$$D^{-\alpha}\log|B_\alpha(re^{i\vartheta})|=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}r^{\alpha}c_k^{(\alpha)}(r)\,e^{ik\vartheta}\quad(0<r<1), \tag{2.4}$$

где

$$c_0^{(\alpha)}(r)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\log|B_\alpha(0)|+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{|z_n|<r}\int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx, \tag{2.5}$$

$$c_k^{(\alpha)}(r)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\beta_k r^k+\frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)}\times$$

$$\times \sum_{|z_n|<r} \left[\left(\frac{r}{z_n}\right)^k \int\limits_{\frac{|z_n|}{r}}^{1} (1-x)^\alpha x^{k-1}\, dx + \left(\frac{\bar{z}_n}{r}\right)^k \int\limits_{\frac{|z_n|}{r}}^{1} (1-x)^\alpha x^{-k-1}\, dx \right] \tag{2.6}$$

$$(k=1,\ 2,\cdots),$$

$$c_{-k}^{(\alpha)}(r) = \overline{c_k^{(\alpha)}(r)} \quad (k=1,\ 2,\cdots) \tag{2.7}$$

и β_k определяются из разложения

$$\log B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \tag{2.8}$$

в окрестности $z=0$.

Найдем числа β_k. Из (0.3) и (0.4) имеем

$$\log B_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\log\left(1-\frac{z}{z_k}\right) - W_\alpha(z;\, z_k) \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{z^n}{n z_k^n} - \int\limits_{|z_k|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[z_k^{-n} \int\limits_0^{|z_k|} (1-x)^\alpha x^{n-1}\, dx - \bar{z}_k^n \int\limits_{|z_k|}^{1} (1-x)^\alpha x^{-n-1}\, dx \right] z^n \right\} \quad (|z|<|z_1|).$$

Ввиду сходимости ряда (2.1) имеем также

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{|z_k|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{(1+\alpha)\,|z_1|} \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{1+\alpha} < +\infty.$$

Следовательно

$$\log B_\alpha(z) = \text{const} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{n z_k^n} + \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[z_k^{-n} \int\limits_0^{|z_k|} (1-x)^\alpha x^{n-1}\, dx - \bar{z}_k^n \int\limits_{|z_k|}^{1} (1-x)^\alpha x^{-n-1}\, dx \right] \right\} z^n (|z|<|z_1|). \tag{2.9}$$

Далее, меняя порядок суммирования в (2.9), с учетом равенства (1.21) получаем

$$\log B_\alpha(z) = \text{const} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[z_k^{-n} \int\limits_{|z_k|}^{1} (1-x)^\alpha x^{n-1}\, dx + \bar{z}_k^n \int\limits_{|z_k|}^{1} (1-x)^\alpha x^{-n-1}\, dx \right] \right\} z^n \quad (|z| < |z_1|.$$

Поэтому для коэффициентов разложения (2.8) находим

$$\beta_k = -\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[z_n^{-k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)^{\alpha} x^{k-1}\, dx + \right.$$

$$\left. + \bar{z}_n^{-k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)^{\alpha} x^{-k-1}\, dx \right] \quad (k=1, 2, \cdots) \tag{2.10}$$

Подставляя значения β_k в (2.6), приходим к формуле

$$c_k^{(\alpha)}(r) = -\frac{r^k}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[z_n^{-k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)^{\alpha} x^{k-1}\, dx + \right.$$

$$\left. + \bar{z}_n^{-k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)^{\alpha} x^{-k-1}\, dx \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{|z_n|<r} \left[\left(\frac{r}{z_n}\right)^k \int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1} (1-x)^{\alpha} x^{k-1}\, dx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\bar{z}_n}{r}\right)^k \int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1} (1-x)^{\alpha} x^{-k-1}\, dx \right] \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{2.11}$$

В силу (0.5) $c_0^{(\alpha)}(r) \to 0$ при $r \to 1-0$. Далее по формуле Парсеваля, из (2.4) и (2.11) после перегруппировки сумм в (2.11) получим утверждение теоремы.

2.2. Обозначим

$$U_k^{(\alpha)}(r) = kr^{k+\alpha} \sum_{|z_n|<r} \left[z_n^{-k} \int_{|z_n|}^{\frac{|z_n|}{r}} (1-x)^{\alpha} x^{k-1}\, dx + \bar{z}_n^{k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)^{\alpha} x^{-k-1}\, dx - \right.$$

$$\left. - \bar{z}_n^{k} r^{-2k} \int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1} (1-x)^{\alpha} x^{-k-1}\, dx \right] \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{2.12}$$

$$V_k^{(\alpha)}(r) = kr^{k+\alpha} \sum_{|z_n|>r} \left[z_n^{-k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)^{\alpha} x^{k-1}\, dx + \bar{z}_n^{k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)^{\alpha} x^{-k-1}\, dx \right]$$

$$(k=1, 2, \cdots). \tag{2.13}$$

Легко видеть, что

$$I_\alpha(r) \leqslant [c_0^{(\alpha)}(r)]^2 + \frac{1}{[\Gamma(1+\alpha)]^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} [|U_k^{(\alpha)}(r)|^2 + |V_k^{(\alpha)}(r)|^2]. \tag{2.14}$$

Для получения более простых признаков ограниченности интегралов $I_\alpha(r)$ нам понадобятся следующие леммы, которые в специальном случае $\alpha = 0$ были установлены в отмеченной выше работе [4] Рубеля и Маклейна.

Лемма 2.1. *Пусть $n(r)$ — количество чисел z_n в круге $|z| \leqslant r$. Если при $r \to 1-0$*

$$n(r) = O\left[\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right] \quad \left(-\frac{1}{2} < \alpha < +\infty\right),$$

то для любого $\beta > \alpha + \dfrac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{\beta} < +\infty, \tag{2.15}$$

а при $r \to 1-0$

$$\sum_{|z_n|<r} (1-|z_k|)^{\alpha+\frac{1}{2}} = O\left(\log\frac{1}{1-r}\right). \tag{2.16}$$

Доказательство. (2.15) и (2.16) следуют из очевидного неравенства

$$\int_0^r (1-x)^{\beta}\, dn(x) = n(r)(1-r)^{\beta} + \beta\int_0^r (1-x)^{\beta-1} n(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_\alpha\left[(1-r)^{\beta-\alpha-\frac{1}{2}} + \int_0^r (1-x)^{\beta-\alpha-\frac{3}{2}} dx\right],$$

где c_α может зависеть только от α.

Лемма 2.2. *Для того чтобы при* $-\dfrac{1}{2} < \alpha < +\infty$ *имели*

$$n(r) = O\left[\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right] \quad \textit{при } r \to 1-0, \tag{2.17}$$

необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\int_r^1 (1-t)^{1+\alpha}\, dn(t) \leqslant c_\alpha \sqrt{1-r} \quad \textit{при } r \to 1-0. \tag{2.18}$$

Доказательство проводим следуя Рубелю и Маклейну.

Необходимость. Если функция $n(r)$ имеет порядок (2.17), то

$$\int_r^1 (1-t)^{1+\alpha}\, dn(t) = -(1-r)^{1+\alpha} n(r) + (1+\alpha)\int_r^1 (1-t)^\alpha n(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (1+\alpha)\int_r^1 (1-t)^\alpha n(t)\, dt \leqslant c_\alpha \sqrt{1-r}\,,\ r\to 1-0.$$

Достаточность. Если выполнено условие (1.18), то при $r'=\frac{1+r}{2}$ имеем также

$$\int_r^{r'} (1-t)^{1+\alpha}\, dn(t) \leqslant c_\alpha \sqrt{1-r} \text{ при } r\to 1-0.$$

Отсюда интегрированием по частям получим

$$c_\alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{1-r}}(1-r')^{1+\alpha} n(r') - (1-r)^{\frac{1}{2}+\alpha} n(r) +$$

$$+\frac{1+\alpha}{\sqrt{1-r}}\int_r^{r'}(1-t)^\alpha n(t)\, dt \geqslant \sqrt{\frac{1-r'}{1-r}}\,(1-r')^{\frac{1}{2}+\alpha} n(r') -$$

$$-(1-r)^{\frac{1}{2}+\alpha} n(r) + \frac{(1-r)^{1+\alpha}-(1-r')^{1+\alpha}}{\sqrt{1-r}} n(r) =$$

$$=\sqrt{\frac{1-r'}{1-r}}\,(1-r')^{\frac{1}{2}+\alpha} n(r') - \left(\frac{1-r'}{1-r}\right)^{1+\alpha}(1-r)^{\frac{1}{2}+\alpha} n(r).$$

Обозначая $(1-r)^{\frac{1}{2}+\alpha} n(r)=\rho(r)$, будем иметь

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\,\rho(r') - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\alpha}\rho(r) \leqslant c_\alpha.$$

Убедимся, что $\lim\limits_{t\to 1-0}\sup \rho(t) < +\infty$. В самом деле, в противном случае для некоторой последовательности $r_n\to 1-0$ $\rho(r_n)\geqslant\rho(t)$ при $t\leqslant r_n$ и $\rho(r_n)\to+\infty$.

Далее

$$c_\alpha \geqslant \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^{1+\alpha}}\right)\rho(r_n) + \frac{1}{2}[\rho(r_n) - \rho(r)] \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^{1+\alpha}}\right)\rho(r_n),$$

что приводит нас к противоречию, так как $\alpha > -\frac{1}{2}$ и $\sqrt{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2^{1+\alpha}}$.

Мы будем опираться также на следующую лемму (см. [4]).

Лемма 2.3. *Если*

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}\quad(|x|\leqslant 1),$$

то при $r\to 1-0$

$$u(1)-2u(r)+u(r^2)=O(1-r).$$

2.3. Докажем теорему.

Теорема 2.2. *Если*

$$n(r)=O\left[\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right];\ r\to 1-0,$$

то при условии $0\leqslant\alpha<+\infty$ *имеем*

$$\sup_{0<r<1} I_\alpha(r)<+\infty.$$

Доказательство. Справедливы следующие оценки:

$$|U_k^{(\alpha)}(r)|\leqslant kr^{k+\alpha}\sum_{|z_n|<r}\left[|z_n|^{-k}\int_{|z_n|}^{\frac{|z_n|}{r}}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx+\right.$$

$$\left.+|z_n|^k\int_{|z_n|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx-\frac{|z_n|^k}{r^{2k}}\int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right]= \tag{2.19}$$

$$=kr^{k+\alpha}\int_0^r\left[t^{-k}\int_t^{\frac{t}{r}}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx+t^k\int_t^{\frac{t}{r}}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx+\right.$$

$$\left.+\left(t^k-\frac{t^k}{r^{2k}}\right)\int_{\frac{t}{r}}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right]dn(x)\leqslant(1-r^{2k})\int_0^r(1-t)^\alpha dn(t),$$

так как при $0\leqslant\alpha<+\infty$

$$\int_t^{\frac{t}{r}}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\leqslant\frac{1}{k}(1-t)^\alpha\left(\frac{t^k}{r^k}-t^k\right)$$

и

$$\int_t^{\frac{t}{r}}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\leqslant\frac{1}{k}(1-t)^\alpha\left(t^{-k}-\frac{t^{-k}}{r^{-k}}\right).$$

$$(k=1,2,\cdots).$$

Из (2.19) интегрированием по частям получаем

$$|U_k^{(\alpha)}(r)| \leqslant (1-r^{2k})\left[(1-r)^{\alpha}\, n(r) + \alpha\int_0^r (1-t)^{\alpha-1}\, n(t)\, dt\right] \leqslant$$

$$\leqslant c_\alpha \frac{1-r^{2k}}{\sqrt{1-r}} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|U_k^{(\alpha)}(r)|^2}{k^2} \leqslant c_\alpha \frac{1}{1-r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-r^{2k})^2}{k^2} =$$

$$= c_\alpha \frac{1}{1-r}\left[u(1) - 2u(r^2) + u(r^4)\right]$$

и согласно лемме 2.3

$$\sup_{0<r<1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|U_k^{(\alpha)}(r)|^2}{k^2} < +\infty. \tag{2.20}$$

Теперь оценим функцию $V_k^{(\alpha)}(r)$. Справедливы следующие неравенства:

$$|V_k^{(\alpha)}(r)| \leqslant kr^{k+\alpha}\int_r^1 \left| t^{-k}\int_t^1 (1-x)^{\alpha}\, x^{k-1}\, dx + t^k \int_t^1 (1-x)^{\alpha}\, x^{-k-1}\, dx\right| dn(t) \leqslant$$

$$\leqslant r^{k+\alpha}\int_r^1 (1-t)^{\alpha}\left(\frac{1}{t^k} - t^k\right) dn(t), \tag{2.21}$$

так как при $0 < \alpha < +\infty$ и $0 \leqslant t < 1$

$$\int_t^1 (1-x)^{\alpha}\, x^{k-1}\, dx \leqslant \frac{1}{k}(1-t)^{\alpha}(1-t^k)$$

и

$$\int_t^1 (1-x)^{\alpha}\, x^{-k-1}\, dx \leqslant \frac{1}{k}(1-t)^{\alpha}(t^{-k}-1),$$

$$(k = 1, 2, \cdots).$$

Обозначив $e^x = \frac{1}{t}$ и заметив, что

$$\frac{t^{-k}-t^k}{t^{-1}-t} = \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} x} \quad (k \geqslant 1)$$

монотонно возрастающая функция от x, из (2.21) получим

$$|V_k^{(\alpha)}(r)| \leqslant 2r^{k-1}\int_r^1 (1-t)^{\alpha}\frac{t^{-k}-t^k}{t^{-1}-t}\, dn(t) \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\frac{1-r^{2k}}{1-r^{k}}\int\limits_r^1 (1-t)^{1+\alpha}\,dn(t)=2\,\frac{1-r^{2k}}{1-r}\times$$

$$\times\left[-(1-r)^{1+\alpha}\,n(r)+(1+\alpha)\int\limits_r^1 (1-t)^{\alpha}\,n(t)\,dt\right]\leqslant c_\alpha\,\frac{1-r^{2k}}{\sqrt{1-r}}$$

$$(k=1,\,2,\cdots).$$

Следовательно, имеем также

$$\sup_{0<r<1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|V_k^{(\alpha)}(r)|^2}{k^2}<+\infty. \tag{2.22}$$

Из (2.20), (2.22) и из неравенства (2.14) следует утверждение теоремы.

Теорема 2.3. *Допустим, что числа z_n лежат на конечном числе лучей, выходящих из начала координат. Тогда, если при данном* $\alpha\in\left(-\frac{1}{2},\,+\infty\right)$ $\sup\limits_{0<r<1} I_\alpha(r)<+\infty$, *то при* $r\to 1-0$

$$n(r)=O\left[\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right].$$

Доказательство. Без нарушения общности будем считать, что $z_n\in[0,1]$. Тогда

$$J_\alpha(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,[U_k^{(\alpha)}(r)+V_k^{(\alpha)}(r)]^2.$$

Поскольку функции $U_k^{(\alpha)}(r)$ и $V_k^{(\alpha)}(r)$ неотрицательные, то $J_\alpha(r)$ ограничена сверху лишь при

$$\sup_{0<r<1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[U_k^{(\alpha)}(r)]^2}{k^2}<+\infty \text{ и } \sup_{0<r<1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[V_k^{(\alpha)}(r)]^2}{k^2}<+\infty.$$

Но так как при любом $\alpha\in(-1,\,+\infty)$

$$\int\limits_t^1 (1-x)^{\alpha}\,x^{k-1}\,dx\geqslant\frac{(1-t)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\,t^{k-1}\quad(k=1,\,2,\cdots),$$

то

$$V_k^{(\alpha)}(r)=kr^{k+\alpha}\int\limits_r^1\left[t^{-k}\int\limits_t^1(1-x)^{\alpha}\,x^{k-1}\,dx+t^{k}\int\limits_t^1(1-x)^{\alpha}\,x^{-k-1}\,dx\right]\times$$

$$\times\,dn(t)\geqslant\frac{kr^{k+\alpha}}{1+\alpha}\int\limits_r^1(1-t)^{1+\alpha}\,dn(t)\quad(k=1,\,2,\cdots).$$

Отсюда видно, что если при фиксированном $\alpha \in (-1, +\infty)$ $\sup\limits_{0<r<1} I_\alpha(r) <$ $< +\infty$, то

$$\sup_{0<r<1}\left\{\left[\int_r^1 (1-t)^{1+\alpha}\, dn(t)\right]^2 \sum_{k=1}^{\infty} r^{2(k+\alpha)}\right\} < +\infty,$$

что равносильно условию

$$\int_r^1 (1-t)^{1+\alpha}\, dn(t) \leqslant c_\alpha \sqrt{1-r}, \quad r \to 1-0. \tag{2.23}$$

Теперь, если $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, то утверждение теоремы следует из леммы 2.2.

Пусть $-1 < \alpha \leqslant -\frac{1}{2}$ и $\sup\limits_{0<r<1} I_\alpha(r) < +\infty$ при предположениях теоремы 2.3 относительно z_n. Тогда (2.23) имеет место и поэтому при $r \to 1-0$

$$\int_r^1 (1-t)^{1+\alpha\beta}\, dn(t) \leqslant \int_r^1 (1-t)^{1+\alpha}\, dn(t) \leqslant c_\alpha \sqrt{1-r},$$

где $\beta < -\frac{1}{2\alpha}$.

Поскольку $\alpha\beta > -\frac{1}{2}$, то по теореме 2.3 имеем

$$n(r) \leqslant \frac{C_{\alpha\beta}}{(1-r)^{\alpha\beta+\frac{1}{2}}} \quad \text{при } r \to 1-0.$$

Таким образом, мы получили необходимые условия для ограниченности $I_\alpha(r)$ при $-1 < \alpha \leqslant -\frac{1}{2}$. Например, если $\beta = \frac{1}{2}$, то необходимое условие будет таким:

$$n(r) = O\left[\frac{1}{(1-r)^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right] \quad \text{при } r \to 1-0.$$

С л е д с т в и е. *При $\alpha \in (-1, +\infty)$ существуют функции $B_\alpha(z)$ с положительными нулями, для которых интегралы $I_\alpha(r)$ $(0<r<1)$ не ограничены.*

З а м е ч а н и е. Если взять лишь один фактор произведения $B_\alpha(z)$

$$A_\alpha(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) e^{-W_\alpha(z;\, \zeta)} \quad (|z|<1,\ |\zeta|<1),$$

то нетрудно убедиться в том, что

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [D^{-\alpha} \log |A_\alpha (re^{i\theta};\ \zeta)|]^2\, d\theta = 0\ (-1 < \alpha < +\infty),$$

в то время как существуют бесконечные произведения, для которых $I_\alpha (r)$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ не ограничена.

Теорема 2.4. *Если числа z_n лежат на конечном числе лучей, выходящих из начала координат и если выполнено одно из следующих двух условий:*

$$\text{(a)}\qquad \overline{\lim_{r\to 1-0}} \left[n\left(\frac{1+r}{2}\right) - n(r) \right] > 0, \tag{2.24}$$

(б) *существует подпоследовательность целых чисел* $\{m_k\}$ $(m_k > k)$, *таких, что*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{1}{\sqrt{m_k - k}}\, \frac{1-|z_k|}{1-|z_{m_k}|} < +\infty, \tag{2.25}$$

то при $-1 < \alpha < -\dfrac{1}{2}$ *функция* $I_\alpha (r)$ *не ограничена.*

Доказательство. Если функция $I_\alpha (r)$ $\left(-1 < \alpha < -\dfrac{1}{2}\right)$ ограничена, то имеет место (2.23), а оттуда находим

$$c_\alpha \sqrt{1-r} \geqslant (1-r)^\alpha \int_r^1 (1-t)\, dn(t) > (1-r)^\alpha \int_r^{\frac{1+r}{2}} (1-t)\, dn(t) >$$

$$> \frac{1}{2}\, (1-r)^{1+\alpha} \left[n\left(\frac{1+r}{2}\right) - n(r) \right],\ r\to 1-0.$$

Таким образом

$$0 \leqslant n\left(\frac{1+r}{2}\right) - n(r) \leqslant c_\alpha\, (1-r)^{-\alpha-\frac{1}{2}},\ r\to 1-0 \tag{2.26}$$

и поскольку $-\alpha - \dfrac{1}{2} > 0$, то первая часть теоремы вытекает из (2.26).

При условии (б) из (2.23), при достаточно больших $k \geqslant k_0$ получаем

$$(m_k - k)(1-|z_{m_k}|)^{1+\alpha} < \sum_{n=k+1}^{\infty} (1-|z_n|)^{1+\alpha} < c_\alpha \sqrt{1-|z_k|}\,.$$

Отсюда в силу (2.25) имеем

$$(1-|z_{m_k}|)^{\frac{1}{2}+\alpha} < c_\alpha',\ k > k_0,$$

что невозможно, так как $\frac{1}{2}+\alpha<0$.

Теорема доказана.

Пусть числа z_n лежат на конечном числе лучей, выходящих из начала координат. Тогда при $0\leqslant\alpha<+\infty$ и $0\leqslant s<r$ имеем

$$\frac{U_k^{(\alpha)}(r)}{k}=r^{k+\alpha}\int\limits_0^r\Big[t^{-k}\int\limits_t^{\frac{t}{r}}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx+t^k\int\limits_t^{\frac{t}{r}}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx-$$

$$-\frac{1-r^{2k}}{r^k}\,t^k\int\limits_{\frac{t}{r}}^1(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\Big]\,dn(t)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{k}\,\frac{1-r^{2k}}{r^k}\int\limits_0^r(r-t)^\alpha t^k\,dn(t)\geqslant\frac{s^k}{k}\,\frac{1-r^{2k}}{r^k}\int\limits_s^r(r-t)^\alpha\,dn(t).$$

$$(k=1,\ 2,\cdots),$$

так как

$$(1-x)^\alpha\geqslant(1-x_0)^\alpha \text{ при } x\leqslant x_0<1,$$

$$(1-x)^\alpha\leqslant(1-x_0)^\alpha \text{ при } x_0\leqslant x<1.$$

Следовательно, при $0\leqslant\alpha<+\infty$

$$\sup_{0<r<1}J_\alpha(r)\geqslant\Big[\int\limits_s^r(r-t)^\alpha\,dn(t)\Big]^2\Big[u\Big(\Big(\frac{s}{r}\Big)^2\Big)-2u(s^2)+u((rs)^2)\Big]. \qquad (2.27)$$

При $\alpha=0$ (2.27) совпадает с неравенством (0.2).

Из (2.27) вытекает, что для любых $s<r'\leqslant r<1$ справедливо неравенство

$$\sup_{0<r<1}J_\alpha(r)\geqslant(r-r')^{2\alpha}\,[n(r')-n(s)]^2\times$$

$$\times\Big[u\Big(\Big(\frac{s}{r}\Big)^2\Big)-2u(s^2)+u((rs)^2)\Big]\quad(0\leqslant\alpha<+\infty),$$

которое дает оценку для $n(r')-n(s)$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 6.V.1981

Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Բլյաշկե-Ջրբաշյանի արտադրյալների աճի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածը նվիրված է հետևյալ հարցին. ենթադրենք, որ $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|<1)$ *կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը բավարարում է*

$$\sum_{k=1}^\infty(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty$$

պայմանին, որտեղ $\alpha \in (-1, +\infty)$ ֆիքսած թիվ է։ Ինչպիսի՞ն պետք է լինի $\{z_k\}_1^\infty$-ը, որպեսզի

$$I_\alpha(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[D^{-\alpha}\log|B_\alpha(re^{i\theta})|]\,d\theta \quad (0<r<1)$$

ինտեգրալը մնա սահմանափակ, որտեղ $B_\alpha(z)$-ը Բլյաշկե-Ջրբաշյանի արտադրյալն է, իսկ $D^{-\alpha}(-1<\alpha<+\infty)$ Ռիման-Լիուվիլի օպերատորը։

Սկզբում բերվում է $I_\alpha(r)$-ի սահմանափակության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը, իսկ այնուհետև հաստատվում են սահմանափակության ավելի պարզ պայմաններ։

G. V. MIKAELIAN. *On the growth of Blaschke-Jrbashian products* (summary)

The subject of the paper is the following question. Let $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|<1)$ be a sequence of complex numbers, such that

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty,$$

where $\alpha \in (-1, +\infty)$ is a fixed number.

Let $B_\alpha(z)$ be a function of Blaschke-Jrbashian and $D^{-\alpha}$ $(-1<\alpha<+\infty)$—operator of Riemann-Liouville. What are the sequences $\{z_k\}_1^\infty$ for which the following integral

$$I_\alpha(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[D^{-\alpha}\log|B_\alpha(re^{i\theta})|]^2\,d\theta \quad (0<r<1)$$

is bounded?

At first the necessary and sufficient condition for boundedness of $I_\alpha(r)$ is given and then the simpler conditions of boundedness are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. A. Rubel.* A Fourier series method for entire functions, Duke Math. J., 30, 1963, 437–442.
2. *L. A. Rubel, B. A. Taylor.* A. Fourier series method for moromorphic and entire functions, Bull. Soc. Math. France, 96, 1968, 53—96.
3. *L. A. Rubel.* A generalized canonical product, Сб. "Современные проблемы теории аналитических функций", М., „Наука", 1966, 264—270.
4. *G. R. Maclane, L. A. Rubel.* On the growth of Blaschke product, Canadian J. of Math., XXI, № 3, 1969, 595—601.
5. *F. Nevanlinna.* Bemerhungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung, Soc. sci. fenn., Comment. Phys. math., 2, Nr 4, 1923.
. *R. Nevanlinna.* Zur Theorie der meromorphen Funktionen, Acta math., 46, 1925.
7. *Н. И. Ахиезер.* Зап. физ.-мат. отд. АН УССР, 1927, 2, № 3, 29—33.
8. *M. L. Cartwright.* Proc. London Math. Soc., 33, 1931, 209—224.
9. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1981 թ., XVI, №№ 1—6

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия «Математика» за 1981 г., XVI, №№ 1—6

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR seria "Mathematika", 1981, vol. XVI, №№ 1—6

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS