ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих привил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 5, 1981 Математика

В. М. МАРТИРОСЯН

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В H^∞ ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА БИОРТОГОНАЛИЗАЦИИ М. М. ДЖРБАШЯНА

§ 0. Введение

0.1. М. М. Джрбашяном [1] была поставлена следующая общая задача кратной интерполяции.

Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_k| < 1)$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$ — произвольные комплексные числа и $s_j \geqslant 1$ $(j = 1, 2, \cdots)$ — кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_1^j$.

Выявить критерии для $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$, обеспечивающие существование функций $f(z)$ из класса H_p $(0 < p < +\infty)$ Харди, удовлетворяющие интерполяционным условиям

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{0.1}$$

и построить аппарат для эффективного представления решений такого рода.

В том специальном случае, когда $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — суть различные точки круга $|z| < 1$ и, таким образом, $s_j = 1$ $(1 \leqslant j < +\infty)$, эта задача сводится к интерполяционной задаче

$$f(\alpha_k) = \gamma_k \ (k = 1, 2, \cdots) \tag{0.2}$$

с простыми узлами $\{\alpha_k\}_1^\infty$.

Критерии существования решения задачи (0.2) в классе H^∞ ограниченных в круге $|z| < 1$ функций, либо в классах H_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ были установлены в работах У. Хеймана [2], Д. Ньюмана [3], Л. Карлесона [4], Г. Шапиро и А. Шилдса [5] (см. [6], а также [7], где приведены подробные литературные указания).

В работе В. Кабайла [8] было получено эффективное решение задачи (0.1) в классах H_p $(0 < p < 1)$.

В случае, когда различные точки последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$ появляются *двукратно*, либо с *одинаковой кратностью*, в классе H_2 задача была рассмотрена в работах [9], [10] и [11], *но вновь лишь в постановке существования ее решения.*

Следует отметить, что эти работы, посвященные задаче (0.2), значительно опираются на тонкие результаты теории гильбертовых пространств. В частности, работа Чальмерса [11], в которой, хотя и далеко не в наилучшей формулировке, дан полный ответ на вопрос о *существовании решения* интерполяционной задачи в классе H_2, существенно опирается на известные результаты Н.К. Бари [12] о базисах в гильбертовых пространствах, а также на двусторонние оценки Шура собственных чисел для произведений эрмитово-положительных матриц.

0.2. В работе М. М. Джрбашяна [1] был предложен новый аналитический метод для полного и эффективного решения общей интерполяционной задачи (0.1) в классе H_2. Этот метод основан на построении специальных систем аналитических в круге $|z|<1$ функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, биортогональных на окружности $|z|=1$, ассоциированных с последовательностью $\{\alpha_k\}_1^\infty$, подчиненной условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<+\infty. \tag{0.3}$$

Отметим, что система $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ является несколько модифицированным вариантом построенной в работе М. М. Джрбашяна [13] системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, также биортогональной с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$.

Для последовательностей $\{\alpha_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих обобщенному условию равномерной разделимости

$$\inf_{k>1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\right\}>0 \tag{0.4}$$

и условию ограниченности кратностей

$$\sup_{k>1}\{s_k\}<+\infty \tag{0.5}$$

применением систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ М. М. Джрбашяном [1] было установлено совпадение пространства последовательностей

$$\{(f^{(s_k-1)}(\alpha_k))_{k=1}^{\infty}: f\in H_2\}$$

с пространством последовательностей комплексных чисел $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^\infty$ таких, что

$$\|\gamma\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{2(s_k-1)+1}|\gamma_k|^2<+\infty.$$

При этом было установлено, что эти же условия (0.4) и (0.5) достаточны для эффективного построения решения задачи (0.1) в виде суммы ряда

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\,\Omega_k^*(z), \tag{0.6}$$

сходящегося в метрике H_2.

В работе [1] была также выявлена полная внутренняя характеристика того подпространства $H_2\{\alpha_k\}$ пространства H_2, в котором задача (0.1) имеет единственное решение, причем это решение задается (0.6).

0.3. С целью проверить возможности своего метода биортогонализации в применении к задаче кратной интерполяции, М. М. Джрбашяном было предложено рассмотреть задачу (0.1) в классах H_p в круге, в полуплоскости и в угловых областях (в этом случае $\{a_k\}_1^\infty$ — это последовательность точек из круга, полуплоскости или угловой области соответственно).

Следует здесь же отметить, что задачу (0.1) для различных областей нельзя свести одну к другой путем конформной пересадки, в частности, ввиду наличия кратностей.

В цикле работ М. М. Джрбашяна [1, 14, 15], Ф. А. Шамояна [16], Г. М. Айрапетяна [17—19], А. М. Джрбашяна [20], Ш. А. Григорян [21] и автора [22—24] применением этого метода было получено полное решение задачи (0.1) в классах H_p в указанных областях. При этом было дано эффективное построение решений этой задачи, записываемых в виде рядов по системам $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ М. М. Джрбашяна или по системам, являющимся их модификациями.

В этой связи следует особо выделить случай $1 < p < +\infty$. В этом случае при условии равномерной разделимости (для соответствующей области) последовательности $\{a_k\}_1^\infty$ и при условии ограниченности кратностей (0.5) была дана полная внутренняя характеристика тех подпространств пространств H_p в соответствующих областях, в которых решение задачи (0.1) существует, единственно и эффективным образом строится. Более того, в этом случае было также установлено, что если хотя бы одно из условий равномерной разделимости или ограниченности кратностей нарушается, то пространство последовательностей

$$\{(f^{(s_k-1)}(a_k))_{k=1}^\infty : f \in H_p\}$$

не совпадает ни с каким идеальным банаховым пространством последовательностей (т. е. таким пространством I, что из $\{a_k\}_1^\infty \in I$ и $|b_k| \leqslant |a_k|$, $k \geqslant 1$, следует $\{b_k\}_1^\infty \in I$).

0.4. Данная работа посвящена эффективному решению интерполяционной задачи (0.1) в классе H^∞ ограниченных аналитических в круге $|z| < 1$ функций, при условии ограниченности кратностей (0.5) и при обобщенном условии равномерной разделимости (0.4).

На вопрос о существовании решения этой задачи впервые был дан полный ответ в работе А. М. Джрбашяна [20]. Там было установлено, что если последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (0.5), то для совпадения классов последовательностей

$$\{((1-|a_k|^2)^{s_k-1} f^{(s_k-1)}(a_k))_{k=1}^\infty : f \in H^\infty\} = l^\infty$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось также условие (0.4) (l^∞ — это пространство ограниченных последовательностей комплексных чисел).

Эффективное построение решения интерполяционной задачи (0.2) в H^∞ в случае простых узлов $\{\alpha_k\}_1^\infty$ (т. е. $s_k=1$, $k>1$) получено недавно американским математиком П. Джонсом (устное сообщение).

Применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна в данной работе построена система ограниченных аналитических в круге $|z|<1$ функций $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$, вновь биортогональных на окружности $|z|=1$ с той же системой рациональных дробей, введенных М. М. Джрбашяном

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\,z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad (k=1, 2, \cdots),$$

ассоциированных с последовательностью $\{\alpha_k\}_1^\infty$, подчиненной условию Бляшке (0.3).

Следует отметить, что при построении системы $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ мы разлагаем в ряд Тейлора не функцию

$$\omega_k(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{p_k}}{B(z)},$$

как это делается в работе М. М. Джрбашяна [13], а функцию

$$\tau_k(z)=\omega_k(z)(1-\bar{\alpha}_k z)^{p_k}F(z;\alpha_k)$$

($B(z)$ — это произведение Бляшке, определяемое по формуле (1.2), p_k — кратность появления числа α_k во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, $F(z;\alpha_k)$ определяется по формулам (1.6)—(1.7)). Такого рода прием применялся в теории полиномов Фабера и их обобщений [25].

В леммах 1 и 3 устанавливаются важные интерполяционные свойства функций $\widetilde{\Omega}_k(z)$ и сумм вида

$$R_m(z)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\widetilde{\Omega}_k(z),$$

аналогичные свойствам функций $\Omega_k(z)$, $\Omega_k^*(z)$ и соответствующих им сумм [13], [1].

В лемме 2 устанавливается биортогональность на окружности $|z|=1$ систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$.

В леммах 4 и 5 приводятся некоторые известные из работ [6] и [1] оценки, необходимые нам для дальнейшего изложения.

При условиях (0.4) и (0.5) в леммах 6 и 7 путем дальнейшего обобщения надлежащим способом их работ [1], [15] устанавливаются важные оценки для коэффициентов, участвующих в представлениях функций $\widetilde{\Omega}_k(z)$.

Основным результатом данной статьи является теорема 1. В ней устанавливается, что если последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ подчинена усло_ виям (0.4) и (0.5), а $\{\gamma_k\}_1^\infty \in l^\infty$ — произвольная последовательность, то ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|^2)^{1-s_k} \gamma_k \widetilde{\Omega}_k(z)$$

сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга $|z| < 1$ и определяет функцию $f \in H^\infty$, удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:

$$(1 - |\alpha_k|^2)^{s_k - 1} f^{(s_k - 1)}(\alpha_k) = \gamma_k \; (k = 1, 2, \cdots).$$

Заметим, что можно также получить оценку модуля функции $f(z)$. Но поскольку эта оценка, как и все известные до сих пор оценки интерполирующей функции, не является точной, мы ее не приводим.

§ 1. Необходимые леммы

1.1. (a) Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_k| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел из единичного круга $D = \{z : |z| < 1\}$.

Для произвольного целого $j \geqslant 1$ обозначим через s_j кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_1^j$, а через p_j — кратность появления числа α_j во всей последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$. Очевидно, что

$$1 \leqslant s_j \leqslant p_j \leqslant +\infty \quad (j \geqslant 1).$$

Легко также видеть, что если последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < +\infty, \tag{1.1}$$

то число p_j конечно при любом целом $j \geqslant 1$.

Напомним, что при этом условии бесконечное произведение

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|} \tag{1.2}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга и определяет там ограниченную по модулю единицей аналитическую функцию $B(z)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$. При этом точка $z = \alpha_k$ является для $B(z)$ нулем кратности p_k.

Наряду с произведением Бляшке (1.2) введем в рассмотрение также функции

$$B_k(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \frac{\alpha_j - z}{1 - \bar{\alpha}_j z} \frac{\bar{\alpha}_j}{|\alpha_j|} \equiv B(z) \left[\frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|} \right]^{-p_k} \quad (k \geqslant 1). \tag{1.3}$$

Очевидно, что $B_k(z)$ аналитична и ограничена при $|z| < 1$ и не обращается в нуль в точке $z = \alpha_k$.

Отметим также, что как функция $B(z)$, так и функции $B_k(z)$ определены лишь при условии Бляшке (1.1). Поскольку эти функции необходимы для наших дальнейших целей, то ниже будем предполагать, что последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ удовлетворяет этому условию.

(б) Наряду с $\{a_k\}_1^\infty$ будем рассматривать последовательность $\{z_n\}_1^\infty$ попарно различных точек этой последовательности.

Ввиду нашего предположения относительно $\{a_k\}_1^\infty$, последовательность $\{z_n\}_1^\infty$ также будет удовлетворять условию Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|) < +\infty. \tag{1.1'}$$

В силу этого члены последовательности $\{z_n\}_1^\infty$ можем считать расположенными в порядке неубывания модулей. Таким образом

$$z_{n_1} \neq z_{n_2}, \quad n_1 \neq n_2; \tag{1.4}$$

$$|z_{n_1}| < |z_{n_2}|, \quad n_1 < n_2. \tag{1.5}$$

Рассмотрим функции

$$F_n(z) = \exp\left\{-\sum_{j>n} (1-|z_j|^2) \frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z}\right\} \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{1.6}$$

Поскольку из условия (1.1′) вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$\Psi_n(z) = \sum_{j>n} (1-|z_j|^2) \frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z}, \quad |z|<1 \quad (n=1, 2, \cdots)$$

внутри D и так как

$$\operatorname{Re}\left\{(1-|z_j|^2) \frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z}\right\} = \frac{(1-|z_j|^2)(1-|\bar{z}_j z|^2)}{|1-\bar{z}_j z|^2} > 0,$$

$$|z|<1 \ (j=1, 2, \cdots),$$

то функции $F_n(z) (n=1, 2, \cdots)$ аналитичны и ограничены в единичном круге и не обращаются там в нуль.

Положим

$$F(z; a_k) = F_n(z) \left(\frac{1-|a_k|^2}{1-\bar{a}_k z}\right)^{p_k+1}, \text{ при } a_k = z_n. \tag{1.7}$$

Отметим, что

$$F(z; a_{k_1}) \equiv F(z; a_{k_2}), \text{ если } a_{k_1} = a_{k_2}.$$

1.2. (а). Из определений (1.3) и (1.7) функций $B_k(z)$ и $F(z; a_k)$ вытекает, что произведение $B_k(z) F(z; a_k)$ аналитично в единичном круге и не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $z = a_k$. Поэтому для любого целого $k > 1$, положив

$$\tau_k(z) = \frac{1}{B_k(z) F(z; a_k)}, \tag{1.8}$$

можем утверждать, что в достаточно малой окрестности точки $z=a_k$ эта функция разлагается в степенной ряд

$$\tau_k(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(a_k)(z-a_k)^\nu,\quad |z-a_k|<\eta, \tag{1.9}$$

где

$$a_\nu(a_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{1}{B_k(z)F(z;a_k)}\right\}_{z=a_k}\quad (0\leqslant\nu<+\infty;\ k>1). \tag{1.10}$$

Введем, наконец, в рассмотрение полиномы

$$q_k(z)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(a_k)(z-a_k)^\nu\quad (k=1,2,\cdots) \tag{1.11}$$

и последовательность $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ аналитических и ограниченных в единичном круге D функций, положив

$$\widetilde{\Omega}_k(z)\equiv\frac{(z-a_k)^{s_k-1}q_k(z)}{(s_k-1)!\,\tau_k(z)}\equiv$$

$$\equiv\frac{B_k(z)F(z;a_k)(z-a_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(a_k)(z-a_k)^\nu \tag{1.12}$$

$$(k=1,2,\cdots).$$

Лемма 1. *Функции системы* $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ *обладают следующими интерполяционными свойствами*:

$$\widetilde{\Omega}_k^{(s_j-1)}(a_j)=\delta_{k,j}=\begin{cases}1, & \text{при } k=j,\\ 0, & \text{при } k\neq j,\end{cases}\quad (k,j=1,2,\cdots). \tag{1.13}$$

Доказательство. Сначала заметим, что из (1.11) и (1.9) следует равенство

$$q_k(z)=\tau_k(z)-(z-a_k)^{p_k-s_k+1}\sum_{\varkappa=0}^{\infty} b_\varkappa(a_k)(z-a_k)^\varkappa,\quad |z-a_k|<\eta,$$

где $b_\varkappa(a_k)=a_{\varkappa+p_k-s_k+1}(a_k)$ $(\varkappa\geqslant 0)$. Отсюда на основании (1.8) и определения (1.12) функций $\widetilde{\Omega}_k(z)$ заключаем, что в достаточно малой окрестности точки $z=a_k$ справедливо представление

$$\widetilde{\Omega}_k(z)=\frac{(z-a_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}-\frac{B_k(z)F(z;a_k)}{(s_k-1)!}(z-a_k)^{p_k}\sum_{\varkappa=0}^{\infty} b_\varkappa(a_k)(z-a_k)^\varkappa, \tag{1.14}$$

$$|z-a_k|<\eta.$$

Так как в точке $z=a_k$ функция $(z-a_k)^{p_k}$ имеет нуль кратности $p_k>s_k$, то из (1.14) следуют равенства

$$\tilde{\Omega}_k^{(s_k-1)}(\alpha_k) = 1 \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Если $\alpha_j = \alpha_k$, но $j \neq k$, то $s_j \neq s_k$, и из (1.14) $\tilde{\Omega}_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0$.

Наконец, если $\alpha_j \neq \alpha_k$, то из (1.12) вытекает, что $\tilde{\Omega}_k(z)$ вместе с функцией $B_k(z)$ имеет в точке $z=\alpha_j$ нуль кратности $p_j \geqslant s_j$. Следовательно

$$\tilde{\Omega}_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0, \text{ при } \alpha_j \neq \alpha_k,$$

и лемма доказана.

б) Следуя М. М. Джрбашяну [13], с нашей последовательностью $\{\alpha_k\}_1^\infty$ будем ассоциировать также систему рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$r_k(z) = \frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{1.15}$$

Лемма 2. *Системы функций*

$$\{r_k(z)\}_1^\infty \text{ и } \{\tilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$$

биортогональны на единичной окружности $|z|=1$ *в смысле*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r_j(\zeta)\overline{\tilde{\Omega}_k(\zeta)}\,|d\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{r_j(\zeta)}\,\tilde{\Omega}_k(\zeta)\,|d\zeta| =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ при } k=j, \\ 0, \text{ при } k\neq j, \end{cases} \quad (k, j=1, 2, \cdots). \tag{1.16}$$

Доказательство. Поскольку функция $\tilde{\Omega}_k(z)$ аналитична и ограничена в D, то она представима интегралом Коши

$$\tilde{\Omega}_k(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\tilde{\Omega}_k(\zeta)}{1-\bar{\zeta}z}\,|d\zeta|, \quad |z|<1. \tag{1.17}$$

Заметив теперь, что

$$\frac{d^{s_j-1}}{dz^{s_j-1}}\left\{\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}\right\}_{z=\alpha_j} = \left\{\overline{\frac{(s_j-1)!\,\zeta^{s_j-1}}{(1-\zeta\bar{z})^{s_j}}}\right\}_{z=\alpha_j} = \overline{r_j(\zeta)}, \tag{1.18}$$

(s_j-1)-кратным дифференцированием интеграла (1.17) по параметру z, мы получим

$$\left\{\frac{d^{s_j-1}}{dz^{s_j-1}}\tilde{\Omega}_k(z)\right\}_{z=\alpha_j} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{\Omega}_k(\zeta)\,\overline{r_j(\zeta)}\,|d\zeta| \quad (j, k=1, 2, \cdots).$$

Переписав эти равенства в виде

$$\widetilde{\Omega}_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\overline{r_j(\zeta)}\,\widetilde{\Omega}_k(\zeta)\,|d\zeta|\ (k,\ j=1,\ 2,\cdots),$$

на основании леммы 1 получаем (1.16), и лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\{\gamma_k\}_1^m$ $(1\leqslant m<+\infty)$ — *произвольная конечная последовательность комплексных чисел. Тогда регулярная и ограниченная в круге* D *функция*

$$R_m(z)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\,\widetilde{\Omega}_k(z) \tag{1.19}$$

удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$R_m^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\gamma_j\ (1\leqslant j\leqslant m). \tag{1.20}$$

Доказательство. Функция $R_m(z)$ в круге D допускает представление

$$R_m(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R_m(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\,z}\,|d\zeta|,\ |z|<1.$$

Отсюда в силу (1.18), (1.19) и соотношений биортогональности (1.16) получим

$$R_m^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}R_m(\zeta)\,\overline{r_j(\zeta)}\,|d\zeta|=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\widetilde{\Omega}_k(\zeta)\,\overline{r_j(\zeta)}\,|d\zeta|=\gamma_j\,(1\leqslant j\leqslant m),$$

т. е. равенства (1.20).

Замечание. Эту лемму можно было доказать и непосредственным применением леммы 1. Лемму 2 мы привели с целью показать, что система $\{\widetilde{\Omega}_k(\zeta)\}_1^\infty$ является результатом эффективной биортогонализации системы рациональных функций $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$.

1.3. (а) Последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_k|<1)$ условимся относить к классу Δ (δ), если при некотором δ $(0<\delta<1)$ она удовлетворяет условию

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\right\}\geqslant\delta. \tag{1.21}$$

Отметим здесь же, что в этом случае последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ удовлетворяет также условию Бляшке (1.1), обеспечивающему существование определенных выше функций $B_k(z)$ и $F(z;\ \alpha_k)$.

Отметим также, что если числа последовательности $\{a_k\}_1^\infty$ попарно различны, то условие (1.21) принимает вид

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{a_j-a_k}{1-\bar{a}_j a_k}\right|\right\}\geqslant\delta$$

и известно под названием *условие равномерной разделимости* последовательности $\{a_k\}_1^\infty$.

Выше мы условились под $\{z_n\}_1^\infty$ понимать последовательность всех отличных друг от друга чисел последовательности $\{a_k\}_1^\infty$. Поэтому свойство (1.21) можно записать также в виде

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_n-z_k}{1-\bar{z}_n z_k}\right|^{q_n}\right\}\geqslant\delta, \tag{1.21'}$$

где q_n — кратность появления чисел z_n во всей последовательности $\{a_k\}_1^\infty$, причем очевидно, что

$$\sup_{k\geq 1}\{p_k\}=\sup_{n\geq 1}\{q_n\}.$$

Заметим теперь, что если $\{a_k\}_1^\infty\in\Delta(\delta)$, то для $\{z_n\}_1^\infty$ мы будем иметь

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_n-z_k}{1-\bar{z}_n z_k}\right|\right\}>\delta. \tag{1.22}$$

Это означает, что если $\{a_k\}_1^\infty\in\Delta(\delta)$, то и подавно $\{z_n\}_1^\infty\in\Delta(\delta)$.

Но если предполагать, что

$$\sup_{k\geq 1}\{p_k\}=\sup_{n\geq 1}\{q_n\}=P<+\infty, \tag{1.23}$$

то справедливо и обратное утверждение, поскольку в этом случае

$$\prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_n-z_k}{1-\bar{z}_n z_k}\right|^{q_n}\geqslant\left(\prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_n-z_k}{1-\bar{z}_n z_k}\right|\right)^P (k\geqslant 1).$$

Поскольку равномерно разделимые последовательности, как известно, существуют (см. [6], стр. 289—290), то предыдущие замечания подтверждают, что класс $\Delta(\delta)$ содержит последовательности, удовлетворяющие условию (1.23). Но более того, воспользовавшись известным примером равномерно разделенной последовательности (см. [6], стр. 289—290), легко можно убедиться в том, что класс $\Delta(\delta)$ содержит последовательности, для которых $\sup\{p_k\}=\infty$. Из сказанного, в частности, следует, что условия (1.23) и (1.21) независимы.

Ради удобства дальнейшего изложения приведем еще следующее определение.

Последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ условимся относить к классу $\Delta(\delta; P)$, если $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta(\delta)$ и выполняется условие

$$\sup_{k\geq 1} \{p_k\} = P < +\infty. \tag{1.24}$$

Наконец, через Δ обозначим класс последовательностей $\{\alpha_k\}_1^\infty$ таких, что при некотором $\delta\,(0<\delta<1)$ и некотором натуральном P выполняется $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta(\delta; P)$.

Таким образом, $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия

$$\inf_{k\geq 1} \left\{ \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty} \left| \frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k} \right| \right\} > 0, \tag{1.25}$$

$$\sup_{k\geq 1} \{p_k\} < +\infty. \tag{1.26}$$

б) Приведем теперь формулировки двух известных результатов в предположении, что $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta(\delta)$.

Лемма 4. ([6], стр. 287). *Если последовательность* $\{z_n\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (1.22), *то*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2} \leq 1+2\log\frac{1}{\delta} \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{1.27}$$

Прежде чем сформулировать следующий результат, введем в рассмотрение последовательность функций

$$\Delta_k(z) = \frac{1}{B_k(z)} \equiv \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty} \frac{1-\bar{\alpha}_j z}{\alpha_j - z}\,\frac{|\alpha_j|}{\bar{\alpha}_j} \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{1.28}$$

Лемма 5. [1] *Если последовательность* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (1.21), *то справедливы неравенства*

$$(1-|\alpha_k|^2)^s\, |\Delta_k^{(s)}(\alpha_k)| \leq C_s(\delta) \quad (0\leq s<+\infty;\ 1\leq k<+\infty), \tag{1.29}$$

где $C_s(\delta)$ — *положительные постоянные, зависящие исключительно от* s *и* δ.

1.4 (а). Наряду с последовательностью $\{\Delta_k(z)\}_1^\infty$ функций, определенных по формуле (1.28), введем в рассмотрение также функции

$$\Phi(z; \alpha_k) = \frac{1}{F(z; \alpha_k)} \quad (k=1, 2, \cdots) \tag{1.30}$$

и заметим, что ввиду определения (1.8) функций $\tau_k(z)$ можем написать

$$\tau_k(z) = \Delta_k(z)\,\Phi(z; \alpha_k) \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{1.31}$$

Отметим также, что в силу (1.6), (1.7) и (1.30) справедливы равенства

$$\Phi(z;\alpha_k)=\left(\frac{1-\bar{\alpha}_k z}{1-|\alpha_k|^2}\right)^{p_k+1}\exp\left\{\sum_{j>n}(1-|z_j|^2)\frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z}\right\}\quad (k>1),\qquad (1.32)$$

где $\{z_n\}_1^\infty$ — последовательность попарно различных чисел последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$, расположенная в порядке неубывания модулей. Докажем лемму.

Лемма 6. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta(\delta)$ (*т. е. имеет место* (1.21)), *то справедливы неравенства*

$$(1-|\alpha_k|^2)^r\,|\Phi^{(r)}(\alpha_k;\alpha_k)|\leqslant M_r(\delta)(p_k+1)\qquad (1.33)$$

$$(0\leqslant r<+\infty,\ 1\leqslant k<+\infty),$$

где $M_r(\delta)$ — *положительные постоянные, зависящие исключительно от* r *и* δ.

Доказательство. Проверим сначала справедливость неравенств (1.33) при $r=0$.

Пусть $\alpha_k=z_n$, где $\{z_n\}_1^\infty$ — определенная по $\{\alpha_k\}_1^\infty$ последовательность.

Учитывая, что

$$\mathrm{Re}\left\{(1-|z_j|^2)\frac{1+\bar{z}_j z_n}{1-\bar{z}_j z_n}\right\}=\frac{(1-|z_j|^2)(1-|\bar{z}_j z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2},$$

на основании (1.32) можем написать:

$$|\Phi(\alpha_k;\alpha_k)|=\exp\left\{\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)(1-|\bar{z}_j z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2}\right\}.\qquad (1.34)$$

Однако $|z_j|\geqslant|z_n|$ при $j\geqslant n$, значит

$$1-|\bar{z}_j z_n|^2\leqslant 2(1-|z_n|^2)\quad (j\geqslant n),$$

откуда заключаем, что

$$\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)(1-|\bar{z}_j z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2}<2\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2}\leqslant 2\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right),$$

причем последняя оценка получена на основании неравенства (1.27). Отсюда и из (1.34) следует

$$|\Phi(\alpha_k;\alpha_k)|\leqslant\exp\left\{2\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right)\right\}\quad (k=1,2,\cdots),\qquad (1.35)$$

т. е. неравенства (1.33) при $r=0$.

Применим теперь полную индукцию. Предположим, что неравенства (1.33) справедливы при $0\leqslant r\leqslant\nu$, т. е.

$$(1-|\alpha_k|^2)^r\,|\Phi^{(r)}(\alpha_k;\alpha_k)|\leqslant(p_k+1)\,M_r(\delta)\quad (0\leqslant r\leqslant\nu;\ k>1),\qquad (1.36)$$

где $M_r(\delta)>0$ зависят только от r и δ. Докажем справедливость неравенства (1.33) при $r=\nu+1$. С этой целью заметим сначала, что взяв логарифмическую производную функции $\Phi(z;\alpha_k)$, приходим к тождеству

$$\Phi'(z;\alpha_k)=\Phi(z;\alpha_k)\left\{-\frac{(p_k+1)\bar{\alpha}_k}{1-\bar{\alpha}_k z}+2\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)\bar{z}_j}{(1-\bar{z}_j z)^2}\right\}(k=1,2,\cdots). \tag{1.37}$$

Положив

$$\Psi(z;\alpha_k)=-\frac{(p_k+1)\bar{\alpha}_k}{1-\bar{\alpha}_k z}+2\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)\bar{z}_j}{(1-\bar{z}_j z)^2}, \tag{1.38}$$

будем иметь

$$\Psi^{(m)}(z;\alpha_k)=-\frac{(p_k+1)\,m!\,(\bar{\alpha}_k)^{m+1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{m+1}}+2\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)(m+1)!\,(\bar{z}_j)^{m+1}}{(1-\bar{z}_j z)^{m+2}}. \tag{1.39}$$

Следовательно, если учесть также, что $\alpha_k=z_n$, можем написать

$$|\Psi^{(m)}(\alpha_k;\alpha_k)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{m!\,(p_k+1)}{(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}}+2\,(m+1)!\sum_{j>n}\frac{1-|z_j|^2}{|1-\bar{z}_j z_n|^{m+2}}\quad\begin{pmatrix}0\leqslant m<+\infty,\\ 1\leqslant k<+\infty\end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

Однако

$$|1-\bar{z}_j z_n|>1-|z_j|\,|z_n|>1-|z_n|>\frac{1}{2}(1-|z_n|^2),$$

откуда заключаем, что

$$\frac{1-|z_j|^2}{|1-\bar{z}_j z_n|^{m+2}}\leqslant\frac{2^m}{(1-|z_n|^2)^m}\cdot\frac{1-|z_j|^2}{|1-\bar{z}_j z_n|^2}.$$

Подставив эти неравенства в (1.40), получаем

$$|\Psi^{(m)}(\alpha_k;\alpha_k)|\leqslant$$
$$<\left\{\frac{(p_k+1)\,m!}{(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}}+\frac{2^{m+1}(m+1)!}{(1-|z_n|^2)^{m+1}}\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2}\right\}. \tag{1.41}$$

Если теперь вспомним, что $\alpha_k=z_n$ и воспользуемся неравенствами (1.27), то из (1.41) заключаем, что

$$|\Psi^{(m)}(\alpha_k;\alpha_k)|\leqslant$$
$$\leqslant\left\{(p_k+1)\,m!+2^{m+1}(m+1)!\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right)\right\}\frac{1}{(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}}\begin{pmatrix}0\leqslant m<+\infty,\\ 1\leqslant k<+\infty\end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Вернемся теперь к формуле (1.37). Из этой формулы и из (1.38) следует, что

$$\Phi'(z;\alpha_k)=\Phi(z;\alpha_k)\,\Psi(z;\alpha_k)\quad(k=1,2,\cdots).$$

Продифференцировав обе части этого тождества ν раз по z, получим

$$\Phi^{(\nu+1)}(z;\ \alpha_k)=\sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r\, \Phi^{(r)}(z;\ \alpha_k)\, \Psi^{(\nu-r)}(z;\ \alpha_k),$$

откуда заключаем, что

$$|\Phi^{(\nu+1)}(\alpha_k;\ \alpha_k)| \leqslant \sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r\, |\Phi^{(r)}(\alpha_k;\ \alpha_k)|\, |\Psi^{(\nu-r)}(\alpha_k;\ \alpha_k)|.$$

Воспользовавшись теперь предложением индукции (1.36) и неравенствами (1.42), можем написать

$$|\Phi^{(\nu+1)}(\alpha_k;\ \alpha_k)| \leqslant$$

$$\leqslant (p_k+1)\left\{\sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r\, M_r(\delta)\, B_{\nu+1-r}(\delta)\right\}\frac{1}{(1-|\alpha_k|^2)^{\nu+1}}\ (k=1,\ 2,\cdots),$$

причем постоянная

$$M_{\nu+1}(\delta)=\sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r\, M_r(\delta)\, B_{\nu-r}(\delta)$$

зависит исключительно от $\nu+1$ и δ, поскольку таковыми являются $M_r(\delta)(0\leqslant r\leqslant\nu)$, в силу предположения индукции, а

$$B_{\nu-r}(\delta)=(\nu-r)!+2^{\nu-r+1}(\nu-r+1)!\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right).$$

Таким образом, неравенства (1.33) справедливы также для $r=\nu+1$, и лемма доказана.

б) Теперь дадим оценки коэффициентов разложения (1.9) в предположении, что последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$.

Лемма 7. *Если при некоторых* $P\,(1\leqslant P<+\infty)$ *и* $\delta\,(0<\delta<1)$ *последовательность* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (1.21) *и* (1.24), *то для коэффициентов разложения* (1.9):

$$\tau_k(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ |z-\alpha_k|<\eta,$$

справедливы неравенства

$$|a_\nu(\alpha_k)|\leqslant a(\delta;\ P)(1-|\alpha_k|^2)^{-\nu}$$
$$(0\leqslant\nu\leqslant p_k;\ 1\leqslant k<+\infty), \tag{1.43}$$

где $a(\delta;\ P)$ — *положительная постоянная, зависящая исключительно от* δ *и* P.

Доказательство. В силу (1.31) можем написать тождество

$$\tau_k^{(\nu)}(z)=\sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s\, \Delta_k^{(s)}(z)\, \Phi^{(\nu-s)}(z;\ \alpha_k)\ (\nu=0,1,\ 2,\cdots),$$

откуда на основании оценок (1.29) и (1.33) заключаем, что

$$|\tau_k^{(\nu)}(\alpha_k)| \leqslant \left\{ \sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s \, C_s(\delta)(p_k+1) \, M_{\nu-s}(\delta) \right\} (1-|\alpha_k|^2)^{-\nu},$$

$$(0 \leqslant \nu < +\infty; \ 1 \leqslant k < +\infty). \tag{1.44}$$

Учитывая еще, что

$$a_\nu(\alpha_k) = \frac{1}{\nu!} \tau_k^{(\nu)}(\alpha_k) \quad (0 \leqslant \nu < +\infty; \ 1 \leqslant k < +\infty),$$

ввиду условия $\sup \{p_k\} = P < +\infty$, из (1.44) получаем неравенства (1.43), и лемма доказана.

§ 2. Основная теорема

Перейдем теперь к доказательству основного результата данной работы.

Теорема 1. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$, *т. е. выполняются условия* (1.25) *и* (1.26).

Если $\{c_k\}_1^\infty \in l^\infty$ *— произвольная последовательность комплексных чисел, то ряд*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k|^2)^{1-s_k} c_k \tilde{\Omega}_k(z), \ |z| < 1, \tag{2.1}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга и определяет функцию $f \in H^\infty$, *удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:*

$$(1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1} f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = c_k \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{2.2}$$

Доказательство: Сначала отметим, что ввиду условия $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$ эта последовательность удовлетворяет условиям (1.21) и (1.24) при некоторых δ $(0 < \delta < 1)$ и P $(1 \leqslant P < +\infty)$.

Далее, ввиду определения (1.12) функции $\tilde{\Omega}_k(z)$ и определения (1.6)—(1.7) функции $F(z; \alpha_k)$ можем написать

$$|\tilde{\Omega}_k(z)| \leqslant \frac{|F_n(z)|}{(s_k-1)!} \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|} \right)^{p_k+1} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)| \, |z-\alpha_k|^{\nu+s_k-1}. \tag{2.3}$$

Однако

$$\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|} \right)^{p_k-1} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)| \, |z-\alpha_k|^{\nu+s_k-1} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)| (1-|\alpha_k|^2)^{p_k-1} \left| \frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z} \right|^{\nu+s_k-1} \left(\frac{1}{|1-\bar{\alpha}_k z|} \right)^{p_k-s_k-\nu} \leqslant \tag{2.4}$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)| (1-|\alpha_k|^2)^{p_k-1} \left(\frac{1}{|1-\bar{\alpha}_k z|}\right)^{p_k-s_k-\nu}.$$

С другой стороны, если $|z|<1$, то

$$(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-1} \left(\frac{1}{|1-\bar{\alpha}_k z|}\right)^{p_k-s_k-\nu} = \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|}\right)^{p_k-s_k-\nu} (1-|\alpha_k|^2)^{\nu+s_k-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-|\alpha_k|}\right)^{p_k-s_k-\nu} (1-|\alpha_k|^2)^{\nu+s_k-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p_k-s_k-\nu} (1-|\alpha_k|^2)^{\nu+s_k-1} \leqslant 2^P (1-|\alpha_k|^2)^{\nu+s_k-1}.$$

Отсюда и из (2.4) следует, что

$$\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|}\right)^{p_k-1} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)|\, |z-\alpha_k|^{\nu+s_k-1} \leqslant$$

$$< 2^P \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)| (1-|\alpha_k|^2)^{\nu+s_k-1}.$$

Если еще учесть оценки (1.43), то будем иметь

$$\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|}\right)^{p_k-1} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)|\, |z-\alpha_k|^{\nu+s_k-1} \leqslant$$

$$\leqslant P 2^P a(\delta; P)(1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Из этих оценок на основании (2.3) имеем

$$|(1-|\alpha_k|^2)^{1-s_k} c_k \bar{\Omega}_k(z)| \leqslant$$

$$\leqslant A(\delta; P) \|\{c_k\}_1^\infty\|_\infty \left|\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)^2 F_n(z)\right|, \ |z|<1 \ (k=1, 2, \cdots), \quad (2.5)$$

где $A(\delta; P)$ — положительная постоянная, зависящая исключительно от δ и P, а

$$\|\{c_k\}_1^\infty\|_\infty = \sup_{k\geq 1} \{|c_k|\} < +\infty.$$

Теперь напомним, что через $\{z_n\}_1^\infty$ мы обозначили последовательность попарно различных чисел последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$. Отсюда, во-первых, следует, что

$$\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|} = \frac{1-|z_n|^2}{|1-\bar{z}_n z|} \quad (k=1, 2, \cdots). \qquad (2.6)$$

С другой стороны, в силу условия (1.24) число z_n появляется в последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$ не более, чем P раз.

Из сказанного на основании (2.5) заключаем, что ряд (2.1) мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} PA(\zeta;\ P)\,\|\{c_k\}_1^{\infty}\|_{\infty} \left| \left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^2 F_n(z) \right|, \quad |z|<1. \tag{2.7}$$

Весьма простое доказательство сходимости ряда

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^2 F_n(z), \quad |z|<1, \tag{2.8}$$

было предложено недавно в работе [26]. Ради удобства читателя мы воспроизведем здесь это доказательство.

Пусть $a_n \geqslant 0$,

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty, \quad S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Поскольку $a_n \leqslant e^{a_n}-1$, то положив $S_0=0$, можем написать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left\{-\sum_{j>n} a_n\right\} = e^{-S}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{S_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-S}\sum_{n=1}^{\infty} (e^{a_n}-1)\, e^{S_{n-1}} = e^{-S}\sum_{n=1}^{\infty} (e^{S_n}-e^{S_{n-1}}) = e^{-S}(e^S-1)<1. \tag{2.9}$$

Заметим теперь, что при $|z|<1$

$$\left|\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^2\right| \leqslant \mathrm{Re}\left\{(1-|z_n|^2)\,\frac{1+\bar{z}_n z}{1-\bar{z}_n z}\right\} = \frac{(1-|z_n|^2)(1-|\bar{z}_n z|^2)}{|1-\bar{z}_n z|^2},$$

откуда на основании (1.6) и (2.9) заключаем, что ряд (2.8) сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга и определяет функцию $\varphi \in H^{\infty}$.

Из приведенных выше рассуждений на основании (2.5) и (2.7) следует, что ряд (2.1) сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга и определяет функцию $f \in H^{\infty}$.

Наконец, равенства (2.2) вытекают из леммы 3, и теорема доказана.

Отметим, что когда члены последовательности $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ попарно различны (т. е. $s_k=1$, $k \geqslant 1$) и расположены в порядке возрастания модулей, тогда $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ и $\{z_n\}_1^{\infty}$ совпадают. В этом случае из теоремы 1, в частности, получаем следующее утверждение.

Теорема 1′. *Пусть $\{z_n\}_1^{\infty}$ — последовательность попарно различных чисел, расположенная в порядке неубывания модулей и удовлетворяющая условию* (1.22).

Если положить

$$\tilde{G}_n(z) = \left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^2 \exp\left\{-\sum_{j>n}(1-|z_j|^2)\,\frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z}\right\} \quad (n \geqslant 1), \tag{2.10}$$

то для любой последовательности $\{c_k\}_1^{\infty} \in l^{\infty}$ ряд

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{B_n(z)}{B_n(z_n)} \frac{\widetilde{G}_n(z)}{\widetilde{G}_n(z_n)} \tag{2.11}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга и определяет функцию $f \in H^\infty$, удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:

$$f(z_n)=c_n \ (n=1,\ 2, \cdots).$$

Это утверждение доказано в совместной работе С. А. Виноградова, Е. А. Горина и С. В. Хрущева [26]. Еще раньше Петером Джонсом было доказано такое же утверждение, с той лишь разницей, что в ряде (2.11) вместо функций $\widetilde{G}_n(z)$ он рассматривал функции

$$G_n(z)=\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^3 \exp\left\{-\sum_{j>n}(1-|z_j|^2)\frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z}\right\} \ (n\geqslant 1).$$

Автор признателен профессору В. П. Хавину за это сообщение.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19.V.1981

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. H^∞ դասում՝ բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի էֆեկտիվ լուծումը Մ. Մ. Ջրբաշյանի բիօրթոգոնալիզացիայի մեթոդի կիրառումով *(ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանի բիօրթոգոնալիզացիայի մեթոդի կիրառումով ներկա աշխատանքում կառուցվում է ֆունկցիաների որոշակի մի սիստեմ և այդ ֆունկցիաների միջոցով էֆեկտիվորեն կառուցվում են միավոր շրջանում հոլոմորֆ ու սահմանափակ ֆունկցիաների դասում սահմանափակ պատիկություններով ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումները։ Այդ խնդրի լուծումների գոյության վերաբերյալ հարցին վերջնական պատասխանը առաջին անգամ տրվել է Ա. Մ. Ջրբաշյանի կողմից [20]։

Տվյալ աշխատանքը հանդիսանում է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից սկսած և իր ու իր աշակերտների կողմից շարունակված հետազոտությունների շրջանակի շարունակությունը կոմպլեքս հարթության տարբեր տիրույթների դասերում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի էֆեկտիվ լուծման վերաբերյալ։

V. M. MARTIROSIAN. *Effective solution of the simultaneous interpolation problem in H^∞ by the biorthogonalisation method of M. M. Djrbashian* (summary)

Using the biorthogonalisation method of M. M. Djrbashian a certain system of functions is constructed, which provides solutions for the simultaneous interpelation problem in H^∞. Earlier [20] A. M. Djrbashian gave the answer to the question of existence of solutions for this problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», IX, № 5, 1974, 339—373.

2. *W. K. Hayman.* Interpolation by bounded functions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 8, 1959, 277—290.

3. *D. J. Newman.* Interpolation in H^∞, Trans. Amer. Math. Soc., 92, 1959, 501—507.

4. *L. Carleson.* An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 80, 1958, 921—930.

5. *H. S. Shapiro, A. L. Shields.* On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.

6. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.

7. *P. Duren.* Theory of H^p-spaces, Ac. Press, New York and London, 1970.

8. *В. П. Кабайла.* Интерполяционные последовательности для классов H_p в случае $p < 1$, Лит. матем. ж., III, № 1, 1963, 141—147.

9. *J. Rosenbaum.* Simultaneous interpolation in H_2, Michigan Math. J., 14, 1967 65—70.

10. *J. Rosenbaum.* Simultaneous interpolation in H_2, II, Pacific J. Math., **27, 1968,** 607—610.

11. *B. L. Chalmers.* Some interpolation problem in Hilbert spaces, Michigan Math. J., 18, 1971, 41—49.

12. *Н. К. Бари.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Ученые записки МГУ, 48, «Математика», 1951, 69—107.

13. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», VIII, № 1, 1973, 384—409.

14. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе H_+^p. ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 517—520.

15. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H_p в полуплоскости, Изв. АН СССР, «Математика», 43, № 6, 1978, 1322—1384.

16. *Ф. А. Шамоян.* Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в пространствах H_p, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XI, № 2, 1976, 124—131.

17. *Г. М. Айрапетян.* О базисе рациональных функций в подпространствах Харди $H_p (1 < p < +\infty)$, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», VIII, № 6, 1973, 429—450.

18. *Г. М. Айрапетян.* О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», X, № 2, 1975, 133—152.

19. *Г. М. Айрапетян.* Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах H_p Харди, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 4, 1977, 262—277.

20. *А. М. Джрбашян.* Кратная интерполяция в классах H^p, $0 < p \leqslant +\infty$, ДАН СССР, 234, № 6, 1977, 1253—1256.

21. *Ш. А. Григорян.* Об одном свойстве функций из H^p $(0 < p < +\infty)$ в полуплоскости, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 5, 1977, 335—340.

22. *В. М. Мартиросян.* Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм. ССР, 63, № 5, 1976, 278—283.

23. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.

24. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в $H_p\,[\alpha;\,\omega]$, ДАН СССР, 245, № 1, 1979, 24—27.

25. *М. М. Джрбашян.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», II, № 1, 1967, 3—51.

26. *С. А. Виноградов, Е. А. Горин, С. В. Хрущев.* Свободная интерполяция в H^∞ методом Петера Джонса, Записки научных семинаров ЛОМИ.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 5, 1981 Математика

С. А. ГРИГОРЯН

МАКСИМАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

0°. Пусть B — банахова алгебра и A — замкнутая подалгебра алгебры B. Говорят, что A является максимальной подалгеброй алгебры B, если каждая замкнутая подалгебра алгебры B, содержащая алгебру A, совпадает либо с A, либо с B. В случае, когда A — равномерная алгебра на некотором компакте X и $B = C(X)$, алгебру A называют максимальной.

Примером максимальной алгебры может служить алгебра, полученная с помощью реализации диск-алгебры на окружность (теорема Вермера).

Этот результат дал толчок появлению работ о максимальных подалгебрах банаховых алгебр. Диапазон исследований, посвященных этой тематике, можно проследить, например, по работам К. Гофмана и И. Зингера [3], Ф. Р. Бонсола [4], Е. А. Горина [5], Е. А. Горина и В. М. Золотаревского [6], Е. М. Чирки [7], Р. Блюменталя [8], П. Паепа [9] и др.

В данной заметке также рассматриваются вопросы максимальности, в частности, обобщается следующий результат: если $R(K)$ — равномерная алгебра на K, порожденная рациональными функциями и $P(K)$ — равномерная алгебра на K, порожденная полиномами, то в случае, когда K — круговое кольцо, $P(K)$ является максимальной подалгеброй в $R(K)$.

1°. Пусть G — компактная абелева группа, группой характеров которой является некоторая подгруппа Γ аддитивной группы вещественных чисел R. Рассмотрим компакт $X = G \times [1/2, 1]$ — прямое произведение группы G на отрезок $[1/2, 1]$. Каждому $\alpha \in \Gamma$ поставим в соответствие непрерывную на X функцию φ_α: $\varphi_\alpha(g \times r) = \alpha(g) \cdot r^\alpha$, $g \times r \in X$. Полученное семейство функций обозначим через Φ. Очевидно, на Φ можно задать групповую структуру так, что отображение $\alpha \to \varphi_\alpha$ есть изоморфизм группы Γ на группу Φ.

Пусть A и B — равномерные алгебры на X, порожденные функциями из $\Phi_0 = \{\varphi_\alpha \in \Phi, \alpha \geqslant 0\}$ и Φ соответственно.

Данная работа посвящена изучению этих алгебр. В частности, доказывается, что A является максимальной подалгеброй алгебры B, т. е. любая замкнутая подалгебра алгебры B, содержащая A, совпадает либо с A, либо с B.

Интерес, возникший к этим алгебрам, объясняется тем, что в случае, когда G — единичная окружность, а $\Gamma = Z$, алгебра A совпадает с $P(K)$ — равномерной алгеброй на компакте $K=\{z\in\mathbb{C};\ 1/2\leqslant|z|\leqslant 1\}$, порожденной полиномами, а B совпадает с $R(K)$— равномерной алгеброй на K, порожденной рациональными функциями с полюсами вне K.

В дальнейшем для любого замкнутого множества $F\subset X$ через A_F будем обозначать равномерное замыкание сужения алгебры A на множество F, а через G_α будем обозначать слой $G\times\{\alpha\}$, $1/2\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Лемма 1. *Для равномерной алгебры A выполняются следующие условия:*

а) *пространство максимальных идеалов M_A алгебры A получается из прямого произведения $G\times[0,1]$ путем отождествления в точку слоя $G\times\{0\}$;*

б) *граница Шилова ∂A алгебры A—есть компакт G_1;*

в) *алгебра A_{G_α} является максимальной алгеброй Дирихле, $1/2\leqslant\alpha\leqslant 1$.*

Доказательство. Для доказательства леммы укажем другой метод построения алгебры A, отличный от вышеуказанного.

Пусть D — равномерная алгебра на G, порожденная характерами из $\Gamma_0=\{\alpha\in\Gamma,\ \alpha\geqslant 0\}$. Пространство максимальных идеалов M_D алгебры D с точностью до гомеоморфизма совпадает с M_A, и гельфандовское представление алгебры A на M_A есть в точности гельфандовское представление алгебры D на это же пространство. Поэтому равномерная алгебра A получается из сужения гельфандовского представления $\tilde{D}$ алгебры D на множество $X\subset M_A$, т. е. $\bar{D}_X=A$. Для $\bar{D}_X$ условия а), б) и в) верны (см. [1], стр. 219—226), следовательно, эти условия верны и для алгебры A. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $x_0\in X$. Тогда найдется такая замкнутая окрестность $V\subset X$ точки x_0, что:*

а) $A_V=B_V$;

б) $M_{A_V}=V$.

Доказательство. а). Пусть $\varphi\in\Phi_0$, и W— замкнутая полиномиально выпуклая окрестность точки $\varphi(x_0)$ и $V=\{x\in X,\ \varphi(x)\in W\}$. Заметим, что поскольку $\varphi(x_0)\neq 0$, можно предположить, что $0\,\bar{\in}\,W$. Тогда, применив теорему Мергеляна и теорему 5.1 из [1], стр. 23, получим $\varphi_V\in A_V^{-1}$. Полугруппа $\Gamma_0=\{\alpha\in\Gamma,\ \alpha\geqslant 0\}$ задает полный архимедов порядок на Г. Поэтому Φ_0 архимедово упорядочивает Ф, а так как $\varphi|_V\in A_V^{-1}$, получим $\Psi|_V\in A_V$ для любого $\Psi\in\Phi$. Следовательно, $A_V=B_V$.

Условие б) немедленно следует из построения множества V и леммы 1, а). Лемма доказана.

Лемма 3. *Для алгебры B справедливы следующие утверждения:*

а) *пространство максимальных идеалов M_B алгебры B совпадает с X;*

б) *граница Шилова ∂B алгебры B есть объединение множеств G_1 и $G_{1/2}$;*

в) $B_{G_\alpha} = C(G_\alpha)$ *для любого* $\alpha \in [1/2, 1]$;

г) *равномерное замыкание* $\mathrm{Re}^0 B$ *сужения* $\mathrm{Re}\, B$ *на* ∂B *является гиперплоскостью в* $C_R(\partial B)$*—пространстве всех непрерывных вещественнозначных функций на* ∂B.

Доказательство. Справедливость условий а), б) и в) немедленно следует из построения алгебры B и леммы 1. Докажем условие г).

Рассмотрим на ∂B функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} 1; & x \in G_1 \\ 0; & x \in G_{1/2}. \end{cases}$$

Пусть K — круговое кольцо в $\mathbf{C}^1$ с центром в начале координат. Тогда линейная оболочка $\mathrm{Re}\, R(K)$ и функции $\log|z|$ плотна в $C_R(\partial B)$, где ∂R — граница Шилова алгебры $R(K)$ (см. [1], стр. 159). Воспользовавшись этим фактом, покажем, что линейная оболочка $R^0 B$ и ψ плотна в $C_R(\partial B)$. Действительно, из только что указанного утверждения следует, что для любого $\varphi \in \Phi$ функции вида

$$\varphi^0 = \begin{cases} \mathrm{Re}\, \varphi; & x \in G_1 \\ 0; & x \in G_{1/2} \end{cases}, \quad \varphi_0 = \begin{cases} 0; & x \in G_1 \\ \mathrm{Re}\, \varphi; & x \in G_{1/2} \end{cases}$$

принадлежат замыканию линейной оболочки $\mathrm{Re}^0 B$ и функции ψ. А поскольку A_{G_i} — алгебра Дирихле, $i = 1, 1/2$ (лемма 1), то линейная оболочка функций φ^0 и φ_0, $\varphi \in \Phi$, плотна в $C_R(\partial B)$. Покажем, что ψ не принадлежит $\mathrm{Re}^0 B$. В противном случае нашлась бы функция $f \in B_{\partial B}$, для которой $|\mathrm{Re}\, f - \psi| < 1/4$. Поскольку $\psi|_{G_1} \equiv 1$, $\psi|_{G_2} \equiv 0$, в комплексной плоскости найдутся два полиномиально выпуклых непересекающихся множества F_1 и F_2, таких, что $f(G_1) \subset F_1$ а $f(G_{1/2}) \subset F_2$. Теперь, применив теорему Ока-Вейля, получим, что функцию, равную 0 на F_1 и 1 на F_2, можно приблизить полиномами на множестве $F_1 \cup F_2$. А это означает, что существует функция $g \in B_{\partial B}$, равная 0 на G_1 и 1 на $G_{1/2}$. Но по условию в) данной леммы это означает, что $B_{\partial B} = C(\partial B)$. Пришли к противоречию с условием а). Следовательно, $\mathrm{Re}^0 B$ — гиперплоскость в $C_R(\partial B)$. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $f \in B$ такая, что $f|_{G_1} \equiv 0$. Тогда $f \equiv 0$.

Доказательство. Мера μ_0, заданная на $G_1 \cup G_{1/2}$, $\mu_0|_{G_1} = \sigma$, $\mu_0|_{G_{1/2}} = -\sigma$, где σ — нормированная мера Хаара группы G, ортогональна к алгебре B, так как для любого $\varphi \in \Phi$, $\int \varphi d\mu_0 = 0$. Предположим, что существует $f \in B$ такая, что $f|_{G_1} \equiv 0$, $f|_{G_{1/2}} \neq 0$. Тогда из условия г) леммы 3 следует

$$f \cdot B = \{g \in C(G_1 \cup G_2);\ g|_F = 0\},$$

где

$$F = \{x \in G_1 \cup G_2;\ f(x) = 0\}.$$

Поскольку $f|_{G_{1/2}} \neq 0$, то найдется открытое множество U в $G_{1/2}$ и положительная функция $g \in f \cdot B$, равная 1 на U. Тогда

$$\int_X g d\mu_0 \geqslant \int_U g d\sigma > 0.$$

Пришли к противоречию.

Лемма 4. *Пусть $f \in B$. Предположим, что для некоторого α, $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $f|_{G_\alpha}$ принадлежит A_{G_α}. Тогда $f \in A$.*

Доказательство. Пусть μ — такая регулярная борелевская мера на X, что $\operatorname{supp} \mu = G_1 \cup G_\alpha$, $\mu_{G_1} = \sigma$, $\mu|_{G_\alpha} = -\sigma$, где σ — нормированная мера Хаара группы G. Мера μ ортогональна к B, следовательно и к A. А поскольку мера $\gamma = -\mu|_{G_\alpha}$ является представляющей мерой некоторого мультипликативного функционала алгебры A (так как $\int_X \varphi d\gamma = 0$ для всех $\varphi \in \Phi_0 \setminus \{1\}$) и $f|_{G_\alpha} \in A_{G_\alpha}$, то для любого $g \in A$ имеем

$$\int_X f \cdot g d\gamma = \int_{G_\alpha} f g d\gamma = \int_{G_\alpha} f d\gamma \cdot \int_{G_\alpha} g d\gamma.$$

Рассмотрим теперь меру $\gamma_0 = \mu|_{G_1}$, которая является также представляющей мерой алгебры A. Так как $\gamma_0 - \gamma$ ортогональна к B, то для всех $g \in A$ имеем

$$\int_{G_1} f g d\gamma_0 = \int_{G_\alpha} f g d\gamma,$$

но

$$\int_{G_\alpha} f d\gamma = \int_{G_1} f d\gamma_0, \quad \int_{G_\alpha} g d\gamma = \int_{G_1} g d\gamma_0.$$

Поэтому

$$\int_{G_1} f g d\gamma_0 = \int_{G_1} f d\gamma_0 \cdot \int_{G_1} g d\gamma_0,$$

A_{G_1} —максимальная алгебра и G_1—граница Шилова алгебры A, следовательно, $f|_{G_1} \in A_{G_1}$. Теперь, применив следствие леммы 3, получим $f \in A$. Лемма доказана.

Воспользовавшись леммами 1—4 докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Алгебра A является максимальной подалгеброй алгебры B.*

Доказательство. Пусть D—равномерная алгебра на X, порожденная функциями из A и некоторой функцией $g \in B$. Покажем, что D совпадает либо с A, либо с B. Рассмотрим непрерывное отображение $\pi: M_D \to M_A$; $\pi(m)(g) = m(g)$, $g \in A$ и покажем, что $\pi^{-1}(X) = X$. Пусть $m \in M_D$ такое, что $\pi(m) \in G_1$. Поскольку каждая точка множества G_1 есть обобщенная точка пика для A (лемма 1), а, следовательно, и для D, то носитель представляющей меры функционала m совпадает с $\pi(m)$. Поэтому $m = \pi(m)$. Таким образом, $\pi^{-1}(G_1) = G_1$.

Пусть $\varphi \in \Phi_0$ и π_φ—отображение из M_D в C; $\pi_\varphi(m) = m(\varphi)$. При таком отображении образом X будет круговое кольцо вида $K = \{z \in C;\ \beta \leqslant |z| \leqslant 1\}$. Пусть теперь $m_0 \in M_D$ такое, что $\pi(m_0) \in X \setminus \partial B$. Не теряя общности можно предположить, что $\beta < \pi_\varphi(m_0) < 1$. Тогда множество $V = \left\{ z \in K;\ |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}$ будет замкнутой окрестностью точки $\pi_\varphi(m_0)$.

Рассмотрим два замкнутых в M_B множества:

$$V_1 = \{m \in M_D;\ \pi_\varphi(m) \in V\}$$

и

$$V_2 = \{m \in X;\ \ \pi_\varphi(m) \in V\}.$$

Из леммы 2 следует, что алгебра $A_2 = \{f \circ \pi;\ f \in A_{V_1}\}$ есть замкнутая подалгебра алгебры $A_1 = D_{V_1}$ и, кроме того, для любого $g_1 \in A_1$ найдется такое $g_2 \in A_2$, что $(g_1 - g_2)|_V = 0$. Граница Шоке алгебры A_1, в силу теоремы Росси о локальном принципе максимума модуля, содержится в $\pi_\varphi^{-1}(\partial V)$, где ∂V — топологическая граница V.

Пусть μ — представляющая мера Иенсена для m_0 алгебры A_1, сосредоточенная на ∂A_1. Тогда мера ν

$$\nu(E) = \int \chi_{\pi_\varphi^{-1}}\, d\mu,$$

где $\chi_{\pi_\varphi^{-1}}$ — характеристическая функция множества $\pi_\varphi^{-1}(E)$, сосредоточена на ∂V и является представляющей мерой для точки $\pi_\varphi(m_0) \in \operatorname{int} V$ равномерной алгебры $P(\partial V)$, порожденной полиномами на ∂V. Алгебра $P(\partial V)$—максимальная подалгебра в $C(\partial V)$ и поэтому $\nu(F) > 0$, где $F = \{z \in V;\ |z| = 1\}$. Если теперь $m_0 \neq \pi(m_0)$, то из вышесказанного следует, что найдется $g \in A_1$ такое, что $g|_{V_2} = 0$, $m_0(g) \neq 0$, $\pi(m_0)(g) = 0$. Тогда, поскольку μ — мера Иенсена

$$\log |m_0(g)| < \int\limits_{\pi_\varphi^{-1}(F)} \log |g|\, d\mu + \int\limits_{V_1 \setminus \pi_\varphi^{-1}(F)} \log |g|\, d\mu.$$

Первый интеграл равен $-\infty$, так как $\pi_\varphi^{-1}(F) \subset V_2$. Отсюда $m_0(g) = 0$. Пришли к противоречию. Таким образом, если $m \in M_D$ такое, что $\pi(m) \in X \setminus G_{1/2}$, то $m = \pi(m)$. Наконец, если $M_D = X$ и все функции из Φ обратимы в D, то D совпадает с B. Если же $M_D \supset X$, то граница Шилова сужения гельфандовского представления алгебры D на множество $F = \overline{M_D \setminus X}$ совпадает с $G_{1/2}$. Но алгебра $A_{G_{1/2}}$ максимальна в

$C(G_{1/2})$ (лемма 1), поэтому $D_{G_{1/2}} = A_{G_{1/2}}$. Теперь, применив лемму 4, получим, что D совпадает с A. Теорема доказана.

Теорема 2. *Равномерная алгебра $B_{\partial B}$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(\partial B)$.*

Доказательство. Для каждого $\varphi \in \Phi$ рассмотрим две функции

$$\varphi_0 = \begin{cases} \varphi & \text{на } G_1 \\ 0 & \text{на } G_{1/2} \end{cases}, \quad \varphi^0 = \begin{cases} 0 & \text{на } G_1 \\ \varphi & \text{на } G_{1/2}. \end{cases}$$

Очевидно, $\varphi_0 + \varphi^0 = \varphi|_{\partial B}$.

Функции φ^0, φ_0, $\varphi \in \Phi$ образуют ортогональный базис в $L^2(|\mu_0|)$, где μ_0 — мера, используемая в доказательстве следствия 1. Каждую функцию $f \in L^2(|\mu_0|)$ можно формально представить в виде ряда

$$\sum \alpha(\varphi_0)\varphi_0 + \sum \beta(\varphi^0)\varphi^0,$$

$$\alpha(\varphi_0) = \int f\bar{\varphi}_0\, d|\mu_0|, \quad \beta(\varphi^0) = \int f\bar{\varphi}^0\, d|\mu_0|.$$

Отметим, что функция $f \in C(\partial B)$ принадлежит $B_{\partial B}$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\varphi_0) = \beta(\varphi^0)$ для всех $\varphi \in \Phi$. Этот факт объясняется тем, что любую функцию из $B_{\partial B}$ можно аппроксимировать линейными комбинациями функций из Φ. Обратно, если для некоторой функции $f \in C(\partial B)$, $\alpha(\varphi_0) = \beta(\varphi^0)$ для всех $\varphi \in \Phi$, то формальный ряд функции f имеет вид

$$\sum \alpha(\varphi_0)\varphi_0 + \sum \beta(\varphi^0)\varphi^0 = \sum \alpha(\varphi_0)\varphi|_{\partial B}.$$

Поэтому с помощью сумм подобных средним Чезаро можно построить последовательность из линейных комбинаций функций из Φ, которая равномерно на ∂B сходится к f.

Теперь покажем, что $B_{\partial B}$ — максимальная алгебра.

Пусть $f \in C(\partial B)$ не принадлежит $B_{\partial B}$. Это означает, что найдется такое $\varphi \in \Phi$, что $\alpha(\varphi_0) \neq \beta(\varphi^0)$. Не теряя общности можно предположить, что

$$\varphi_0 = \begin{cases} 1 & \text{на } G_1, \\ 0 & \text{на } G_{1/2} \end{cases}, \quad \varphi^0 = \begin{cases} 0 & \text{на } G_1 \\ 1 & \text{на } G_{1/2} \end{cases}.$$

Тогда

$$\int_X f\,d\mu_0 = \int_{G_1} f\,d\sigma - \int_{G_{1/2}} f\,d\sigma = \alpha(\varphi_0) - \beta(\varphi_0) \neq 0.$$

Это означает, что мера μ_0 не ортогональна к f, хотя ортогональна к алгебре $B_{\partial B}$. И поскольку μ_0 вещественна, то по лемме 3 г) линейные комбинации функций из $\operatorname{Re} B_{\partial B}$ и функции $\operatorname{Re} f$ плотны в $C_R(\partial B)$. Поэтому равномерная алгебра $D = [B_{\partial B}, f]$, порожденная функциями из $B_{\partial B}$ и функцией f, является алгеброй Дирихле на ∂B, и следовательно, существует такая функция $g \in D$, что $|\operatorname{Re} g - 1| < 1/4$ на G_1 и $|\operatorname{Re} g| < \frac{1}{4}$ на $G_{1/2}$. Это означает, что найдутся два полиноминально выпуклых непересекающихся множества F_1 и F_2 комплексной плоскости, для которых

$$g(G_1) \subset F_1,\ g(G_{1/2}) \subset F_2.$$

Применив, как при доказательстве леммы 3, теорему Ока-Вейля, получим, что существует функция из D, равная 0 на G_1 и 1 на $G_{1/2}$. А так как $B_{\partial B} \subset D$ и $B_{G_1} = C(G_1)$, $B_{G_{1/2}} = C(G_{1/2})$, то $D = C(\partial B)$. Теорема доказана.

2°. Как следствие из теорем 1 и 2 укажем два утверждения для почти-периодических функций, определенных в некоторой полосе комплексной плоскости.

Пусть $z = x + iy$ — комплексная переменная. Множество всех z, для которых $x = x_0$, будем называть прямой линией.

Множество всех z, для которых x принадлежит отрезку $[a; b]$, будем называть полосой.

Пусть Γ^0 — аддитивная подгруппа группы вещественных чисел R и $[0, a]$— некоторая полоса в комплексной плоскости. Обозначим через B_0 множество всех тех равномерно почти-периодических на $[0, a]$ и аналитических в $\operatorname{int}[0, a]$ функций, у которых показатели экспонент в ряду Дирихле принадлежат Γ^0, и через A_0—все те функции из B_0, у которых показатели экспонент ряда Дирихле принадлежат $\Gamma_+ = \{x \in \Gamma^0;\ x \geqslant 0\}$.

Множества A_0 и B_0 являются банаховыми алгебрами в sup норме. Нетрудно проверить, что алгебры A_0 и B_0 реализуются на множестве вида $X = G^0 \times [1/2, 1]$, где G^0—есть группа характеров к группе Γ^0 и, кроме того, при этой реализации алгебры A_0 и B_0 перейдут в алгебры A и B, построенные в п. 1°.

Иными словами, существует изоморфизм между алгебрами вида A_0 и B_0 и алгебрами вида A и B. Доказательство этого факта следует из [2].

Поэтому верны следующие два утверждения.

Теорема 3. *Пусть функция $f \in B_0$ не принадлежит A_0. Тогда любую функцию $g \in B_0$ можно равномерно по всей полосе $[0, a]$ приблизить полиномами от f с коэффициентами из A_0.*

Обозначим через C_0 все те равномерно почти-периодические комплекснозначные функции на прямых $x=0$ и $x=a$, у которых показатели экспонент ряда Дирихле принадлежат Γ^0.

Теорема 4. *Пусть функция $f \in C_0$ не продолжается аналитически в полосу $[0, a]$. Тогда любую функцию $g \in C_0$ можно равномерно по прямым $x=0$, $x=a$ приблизить полиномами от f с коэффициентами из B_0.*

Вычислительный центр
Госплана Армянской ССР

Поступила 25.III.1980

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Աբելյան կոմպակտ խմբի բնութագրերից ծնված մաքսիմալ հանրահաշիվներ *(ամփոփում)*

Հոդվածում հետազոտվում են աբելյան կոմպակտ խմբերի բնութագրերից ծնված հատուկ հավասարաչափ հանրահաշիվների հատկությունները։ Ստացված հանրահաշիվները հանդիսանում են դասական՝ R (K) *և* P (K) *հանրահաշիվների ընդհանրացումը կոմպլեքս* C^1 *հարթության* K *շրջանային օղակում։*

S. A. GRIGORIAN. *Maximal algebras generated by characters of compact abelian group* (summary)

The properties of special uniform algebras generated by characters of abelian compact groups are investigated. The obtained algebras are generalizations of the classic $R(K)$ and $P(K)$ algebras in the circle ring of C^1 complex plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, «Мир», 1973.
2. *R. Arens.* A banach algebra generalization of conformal mappings of the disc' Trans. Amer. Math. Soc., 6, 81, № 2, 1956, 501—513.
3. *K. Hoffman, I. Singer.* Maximal subalgebras of C (Г). Amer. J. Math., 79, 1957 295—305.
4. *F. F. Bonsall.* Maximal subalgebras of Banach (*)-algebras, J. London Math. Soc. 40, 1965, 540—550.
5. *Е. А. Горин.* Максимальные подалгебры коммутативных банаховых алгебр с инволюцией, Матем. заметки, 1, № 2, 1967, 173—178.
6. *Е. А. Горин, В. М. Золотаревский.* Максимальные инвариантные подалгебры в алгебрах с инволюцией, Матем. сб., 85, № 3, 1971, 373—387.
7. *Е. М. Чирка.* Приближение голоморфными функциями на гладких многообразиях в C^n, Матем. сб., 79, № 1, 1969, 101—123.
8. *R. Blumental.* Maximality in function algebras, Canad. J. Math., 22, 1970, 1002—1004.
9. *P. J. Paepe*, Maximality in function algebras, J. London Math. Soc., 22, 1980, 345—354.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 5, 1981 Математика

Л. А. ШАГИНЯН

О СУММИРУЕМОСТИ К $+\infty$ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА МЕТОДОМ $(C, 1)$

Введение

Известно (см. [1]), что существуют ряды по подсистемам тригонометрической системы и системы Уолша, которые суммируются к $+\infty$ почти свюду (п. в.) любым методом $(C, \alpha>0)$ и коэффициенты которых принадлежат $l_{2+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon>0$.

В настоящей статье рассматривается вопрос о существовании рядов по подсистемам системы Хаара с аналогичными свойствами.

Интерес этого вопроса обусловлен тем, что ряды по системе Хаара не могут суммироваться к $+\infty$ никаким методом $(C, \alpha>-1)$ на множествах положительной меры (см. [2], [3]) и, кроме того, система Хаара не обладает тем свойством тригонометрической системы и системы Уолша, на котором основывается конструкция работы [1].

В связи с этим отметим, что для системы Хаара вопрос оказался сравнительно сложным и решение удалось получить лишь для метода $(C, 1)$.

Пусть $\{h_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ — система функций Хаара (см. стр. 367), а $\overline{S}[0,1]$ — совокупность всех измеримых функций, определенных п. в. на $[0,1]$, которые могут принимать и бесконечные значения определенных знаков на множествах положительной меры.

Имеет место

Теорема 1. *Существует ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j h_{k_j}(t) \quad (k_1<k_2<\cdots), \tag{1}$$

обладающий следующими свойствами:

1°. *для каждой функции* $f\in\overline{S}[0,1]$ *существует ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{j_i} h_{k_{j_i}}(t) \ (k_{j_1}<k_{j_2}<\cdots), \tag{2}$$

который суммируется к $f(t)$ *п. в. на* $[0,1]$ *методом* $(C, 1)$,

2°. *ряд* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j h_{k_j}(t)|^{2+\varepsilon}$ *сходится равномерно на* $[0,1]$ *для любого* $\varepsilon>0$, 3°. *последовательность $\{k_j\}$ имеет плотность нуль.*

Как следствие получаем

Теорема 2. *Существует ряд по некоторой подсистеме системы Хаара, удовлетворяющий* 2° *условию теоремы* 1, *который суммируется к $+\infty$ п. в. на* [0,1] *методом* (C, 1).

Отметим, что для конечных измеримых функций существование универсальных рядов по системе Хаара относительно частичных рядов в смысле сходимости п. в., ранее было установлено в работе [4].

Отметим также, что утверждения теорем 1 и 2, вообще говоря, перестают быть верными при перестановках системы $\{h_{k_j}(t)\}$. Точнее, любую подсистему можно переставить таким образом, чтобы ряды по этой переставленной системе не смогли суммироваться к $+\infty$ $(-\infty)$ методами $(C, \alpha>0)$ на множествах положительной меры.

В дальнейшем мы воспользуемся двумя утверждениями о рядах по системе Хаара (см. [5]), которые объединим в следующей теореме.

Теорема А. 1) *Если нижний предел частичных сумм ряда $\Omega \sim \sum a_k h_k(t)$ отличен от $-\infty$ на множестве E, то ряд Ω сходится к конечной функции п. в. на E.* 2) *Для того чтобы ряд Ω сходился п. в. на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum |a_k h_k(t)|^2$ сходился п. в. на E.*

§ 2. Необходимые леммы

Функции системы Хаара — $\{h_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ определяются следующим образом: $h_0(t) \equiv 1$ при $t \in [0, 1]$. Далее, для любого натурального $m \geqslant 0$ положим

$$\pi_m(h) = \{h_{2^m}(t),\ h_{2^m+1}(t),\ \cdots,\ h_{2^{m+1}-1}$$

и систему функций $\pi_m(h)$ назовем m-ой пачкой Хаара. Теперь, по определению имеем

$$h_{2^m+k-1}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & t \in \left(\dfrac{k-1}{2^m},\ \dfrac{k-1/2}{2^m}\right), \\ -\sqrt{2^m}, & t \in \left(\dfrac{k-1/2}{2^m},\ \dfrac{k}{2^m}\right), \\ 0, & t \in \left(\dfrac{l-1}{2^m},\ \dfrac{l}{2^m}\right), \end{cases} \tag{3}$$

при $l \neq k$ и $k, l \in [1, 2^m]$, а в точках разрыва $h_{2^m+k}(t)$ определяется как среднее арифметическое значений, которые она имеет в прилегающих к этой точке интервалах. Вместе с тем

$$h_{2^m+k}(0) = \sqrt{2^m},\quad h_{2^m+k}(1) = -\sqrt{2^m}.$$

Для любого натурального $m \geqslant 0$ положим

$$\pi_m(\Delta)=\{\Delta_{2^m},\ \Delta_{2^m+1},\cdots,\ \Delta_{2^{m+1}-1}\},$$

где $\Delta_{2^m+k-1}=\left(\frac{k-1}{2^m},\ \frac{k}{2^m}\right)$, при $k\in[1,\ 2^m]$.

Системы интервалов $\pi_m(\Delta)$, $m\geqslant 0$ назовем соответствующими пачками интервалов Хаара, а совокупность интервалов всех пачек будем обозначать через $\{\Delta\}$.

Лемма 1. *Для любых действительных чисел $\varepsilon\in(0,\ 1)$ и r, и для любых натуральных чисел n и N существует полином*

$$Q(t)=\sum_{j=1}^{q} c_j\, h_{k_j}(t),$$

обладающий следующими свойствами:

1.1 $$k_1>N;$$

1.2 $$k_{j+1}-k_j\geqslant 2^n,\ j\in[1,\ q-1];$$

1.3 $$\sum_{j=1}^{q}|c_j\, h_{k_j}(t)|^{2+\varepsilon}\leqslant\varepsilon,\ t\in[0,\ 1];$$

1.4 $$\operatorname{mes}\{t:\ |Q(t)-r|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=m_1}^{\infty}\ \sum_{j=1}^{2^{(m-1)n}}\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2^{mn}}}\cdot h_{2^{mn}+j2^n-1}(t),\tag{4}$$

где m_1 выбрано таким, чтобы

$$2^{m_1 n}>N,\ \frac{1}{\sqrt{m_1}}\leqslant\varepsilon\tag{5}$$

и вместе с тем

$$\sum_{m=m_1}^{\infty}\frac{1}{m^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}<\varepsilon.\tag{6}$$

Положим

$$E_m^n=\bigcup_{j=1}^{2^{(m-1)n}}\Delta_{2^{mn}+j2^n-1},\ m\geqslant 1$$

и

$$E_n=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{m=l}^{\infty}E_m^n.$$

Пусть

$$t=\frac{\omega_1(t)}{2^n}+\frac{\omega_2(t)}{2^{2n}}+\frac{\omega_3(t)}{2^{3n}}+\cdots\tag{7}$$

— разложение произвольной точки $t\in[0,1]$ по основанию 2^n. Ясно, что $t\in E_n$ тогда и только тогда, когда в разложении (7) бесконечное число цифр $\omega(t)$ принимают значение 2^n-1. Пусть для $t\in E_n$ таковыми являются цифры $\omega(t)$ с индексами $m_1(t)<m_2(t)<\cdots$.

Обозначим через $\Lambda(k,t)$ количество индексов $m_\nu(t)\leqslant k$. Тогда, согласно известной теореме Бореля о „нормальных" числах (см., например, [6], стр. 35), будем иметь

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Lambda(k,t)}{k}=\frac{1}{2^n} \tag{8}$$

для п. в. $t\in[0,1]$. Отсюда непосредственно получаем

$$\operatorname{mes} E_n=1 \tag{9}$$

для любого натурального n. Более того

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu(t)}=+\infty \tag{10}$$

для п. в. $t\in[0,1]$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=m_1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{(m-1)n}}\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2^{m\cdot n}}|h_{2^{mn}+j2^n-1}(t)|^2. \tag{11}$$

В произвольной точке $t\in E_n$ ряд (11) будет иметь вид

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu(t)},$$

следовательно, согласно (9) и (10), ряд (11) расходится почти в каждой точке отрезка [0,1]. Отсюда, согласно теореме A получаем, что ряд

$$\Omega\sim\sum_{j=1}^{\infty}c_j h_{k_j}(t),$$

полученный из ряда (4) раскрытием внутренних сумм, расходится п. в. на [0,1]. Следовательно, будем иметь (см. теорему A)

$$\overline{\lim_{l\to\infty}}\, S_l(t,\Omega)=+\infty \text{ п. в. на } [0,1] \tag{12}$$

и

$$\underline{\lim_{l\to\infty}}\, S_l(t,\Omega)=-\infty \text{ п. в. на } [0,1], \tag{13}$$

где $S_l(t,\Omega)$ есть l-ая частичная сумма ряда Ω.

Пусть, теперь, E^* — множество полной меры, которое не содержит двоичнорациональных точек и на котором имеют место одновременно (12) и (13). Тогда в каждой точке $t\in E^*$ частичные суммы ряда Ω будут колебаться между $+\infty$ и $-\infty$. Следовательно, в силу того, (что слагаемые ряда Ω по абсолютной величине не превосходят ε (см. 5)), для каждой точки $t\in E^*$ найдется некоторая последовательность $\{n_l(t)\}_1^\infty$ такая, что

$$|S_{n_i(t)}(t, \Omega) - r| \leqslant \varepsilon$$

для всех $i \geqslant 1$.

Обозначим через $\Delta^*_{n_i(t)}$ наибольший интервал Хаара, который содержит точку t и на котором $S_{n_i(t)}(t, \Omega)$ постоянна.

Ясно, что совокупность

$$\{\Delta^*_{n_i(t)}\}_1^\infty, \; t \in E^*$$

является покрытием множества E^* в смысле Витали, следовательно, согласно теореме Витали (см., например, [7], стр. 82), существует конечное число интервалов

$$\Delta^*_{n_{l_1}}, \Delta^*_{n_{l_2}}, \cdots, \Delta^*_{n_{l_s}}, \tag{14}$$

обладающих следующими свойствами:

1. $$\Delta^*_{n_{l_\nu}} \cap \Delta^*_{n_{l_\mu}} = \varnothing; \; \nu \neq \mu; \; \nu, \; \mu \in [1, s];$$

2. $$\sum_{\nu=1}^{s} |\Delta^*_{n_{l_\nu}}| > 1 - \varepsilon; \tag{15}$$

3. $$|S_{n_{l_\nu}}(t, \Omega) - r| \leqslant \varepsilon, \; t \in \Delta^*_{n_{l_\nu}}, \; \nu \in [1, s]. \tag{16}$$

Теперь составим полином $Q(t)$ при помощи членов ряда Ω таким образом: $c_j h_{k_j}(t)$ входит как слагаемое в $Q(t)$ в том и только в том случае, когда интервал Δ_{k_j} строго содержит в себе какой-либо интервал из системы (14). Очевидно, что $Q(t) = S_{n_{l_\nu}}(t, \Omega)$ при $t \in \Delta^*_{n_{l_\nu}}$ для каждого $\nu \in [1, s]$. Отсюда, учитывая (4), (5), (6), (15) и (16), сразу получаем, что $Q(t)$ есть искомый полином, удовлетворяющий утверждениям леммы 1*).

Лемма 2. (основная). *Для произвольных действительных чисел $\varepsilon \in (0,1)$ и r, и для произвольных натуральных чисел n и N существует полином вида*

$$P(t) = \sum_{j=1}^{p} a_j h_{\mu_j}(t) \quad (\mu_1 < \mu_2 < \cdots),$$

который обладает следующими свойствами:

2.1 $\mu_1 > N$;

2.2 $\mu_{j+1} - \mu_j \geqslant 2^n, \; j \in [1, p-1]$;

2.3 $$\sum_{j=1}^{p} |a_j h_{\mu_j}(t)|^{2+\varepsilon} \leqslant \varepsilon, \; t \in [0,1];$$

---

*) Отметим, что два основных элемента приведенного построения, по-видимому, впервые встречаются соответственно в работах [8] и [9].

2.4 $\operatorname{mes}\{t: |P(t)-r|\geqslant\varepsilon\}=\operatorname{mes}F\leqslant\varepsilon$;

2.5 $\max\limits_{\nu\in[1,p]}\left|\frac{1}{\nu}\sum\limits_{i=1}^{\nu}\sum\limits_{j=1}^{i}a_jh_{\mu_j}(t)\right|\leqslant|r|+\varepsilon,\ t\overline{\in}F.$

Доказательство. Пусть $Q(t)=\sum\limits_{l=1}^{q}c_lh_{k_l}(t)$ — полином, удовлетворяющий условиям 1.1—1.4 леммы 1 для $\frac{\varepsilon}{2}$, r, n, N и $h_{k_q}(t)\in\pi_{n_q}(h)$.
Возьмем какое-либо натуральное число n_0, которое удовлетворяет следующему неравенству:

$$n_0>\max\{n_q+1,\ n\}. \tag{17}$$

Более точно n_0 будет определено в дальнейшем. Рассмотрим пачки интервалов Хаара — $\{\pi_{m\cdot n_0}(\Delta)\}_{m=1}^{\infty}$ и для каждого $m>1$ из пачки $\pi_{mn_0}(\Delta)$ выделим интервалы

$$\{\Delta_{2^{mn_0}+j2^{n_0}-1}\}_{j=1}^{2^{(m-1)n_0}}. \tag{18}$$

Далее, для каждого $m\geqslant1$ из системы (18) выделим подсистему интервалов

$$\{\Delta_j^{mn_0}\}_{j=1}^{j_m} \tag{19}$$

следующим образом: $\Delta_1^{n_0}=\Delta_{2^{n_0+1}-1}$, если же системы (19) уже выбраны для $m=1, 2,\cdots, s-1$, то $\{\Delta_j^{sn_0}\}_{j=1}^{j_s}$ — те интервалы из системы (18) при $m=s$, которые не пересекаются с уже выбранными. Очевидно, что

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{j_m}\Delta_j^{mn_0}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{(m-1)n_0}}\Delta_{2^{mn_0}+j2^{n_0}-1}\supseteq E_{n_0}$$

(так как интервалы Хаара или не пересекаются, или один содержится в другом).

Отсюда, в силу (9), имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{j_m}|\Delta_j^{m\cdot n_0}|=1.$$

Теперь выберем m_0 так, чтобы

$$\sum_{m=1}^{m_0}\sum_{j=1}^{j_m}|\Delta_j^{m\cdot n_0}|>1-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Отметим, что согласно построению, интервалы системы

$$\{\{\Delta_j^{m\cdot n_0}\}_{j=1}^{j_m}\}_{m=1}^{m_0} \tag{21}$$

попарно не пересекаются и кроме того (в силу (17))

$$[\Delta_{j'}^{m'\cdot n_0}]-[\Delta_{j''}^{m''\cdot n_0}]\geqslant2^n, \tag{22}$$

когда или $m' > m''$, или $m' = m''$ и $j' > j''$, где $[\Delta]$ — индекс интервала Δ.

Для каждого $\Delta_j^{m\cdot n_0} = (\alpha_j^{m\cdot n_0}, \beta_j^{m\cdot n_0})$ из системы (21) положим

$$Q_j^{m\cdot n_0}(t) = Q_{\Delta_j^{m\cdot n_0}}(t) = \sum_{l=1}^{q} c_l h_{k_l}\left(\frac{t-\alpha_j^{m\cdot n_0}}{\beta_j^{m\cdot n_0}-\alpha_j^{m\cdot n_0}}\right), \tag{23}$$

где

$$h_{k_l}\left(\frac{t-\alpha_j^{m\cdot n_0}}{\beta_j^{m\cdot n_0}-\alpha_j^{m\cdot n_0}}\right) = 0, \text{ если } t \overline{\in} \Delta_j^{m\cdot n_0}.$$

Последний является полиномом по системе Хаара, так как $Q(t)$ удовлетворяет условию 1.1 и, следовательно, не содержит, как слагаемое, функцию $h_0(t)$. Теперь для каждого $m \geqslant 1$ определим полином

$$Q_m(t) = \sum_{j=1}^{2^{mn_0-n-1}} c_j^{(m)} h_{2^{m\cdot n_0-1}+j2^{n}-1}(t) + \sum_{j=1}^{j_m} Q_{\Delta_j^{m\cdot n_0}}(t), \tag{24}$$

где $c_j^{(m)} = 0$, $j \in [1, 2^{m\cdot n_0-n-1}]$.

Заметим, что в силу (17) и (22) полиномы $Q_{m_1}(t)$ и $Q_{m_2}(t)$ не имеют общих слагаемых, когда $m_1 \neq m_2$. Более того, если $m_1 > m_2$, то индекс произвольного слагаемого полинома $Q_{m_1}(t)$ превосходит индекс произвольного слагаемого полинома $Q_{m_2}(t)$ более, чем на 2^n. Отсюда сразу следует, что полином

$$P(t) = \sum_{m=1}^{m_0} Q_m(t) = \sum_{j=1}^{p} a_j h_{\mu_j}(t) \tag{25}$$

удовлетворяет утверждению 2.2. Утверждения 2.1 и 2.3 непосредственно следуют соответственно из условий 1.1 и 1.3, которым удовлетворяет полином $Q(t)$. Остается убедиться в справедливости 2.4 и 2.5.

Пусть

$$G_j^{m\cdot n_0} = \left\{ t : t \in \Delta_j^{m\cdot n_0};\ |Q_j^{mn_0}(t) - r| > \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

$$F = \bigcup_{m=1}^{m_0} \bigcup_{j=1}^{j_m} G_j^{mn_0} \cup \left\{[0,1] - \bigcup_{m=1}^{m_0} \bigcup_{j=1}^{j_m} \Delta_j^{mn_0}\right\}.$$

Поскольку полином $Q_j^{mn_0}(t)$ получается из полинома $Q(t)$ сжатием на интервал $\Delta_j^{m\cdot n_0}$, следовательно, в силу 1.4 $\left(\text{для } \frac{\varepsilon}{2}\right)$ будем иметь

$$\operatorname{mes} G_j^{m\cdot n_0} < \frac{\varepsilon}{2} |\Delta_j^{m\cdot n_0}| \tag{26}$$

для произвольного интервала $\Delta_j^{m\cdot n_0}$. Из неравенств (20) и (26) получаем $\operatorname{mes} F \leqslant \varepsilon$. Отсюда сразу следует, что

$$\operatorname{mes} \{t; |P(t) - r| > \varepsilon\} \leqslant \varepsilon,$$

так как интервалы системы (21) попарно не пересекаются, а слагаемые полинома $Q_j^{m\cdot n_0}(t)$ равны нулю вне интервала $\Delta_j^{mn_0}$. 2.4 доказано.

Далее, для полинома

$$Q(t)=\sum_{l=1}^{q} c_l h_{k_l}(t)$$

положим

$$\overline{Q}=\max_{l\in[1,\,q]}\ \max_{t\in[0,\,1]}\ \sum_{j=1}^{l} c_j h_{k_j}(t),$$

и пусть Q^* — количество отличных от тождественного нуля слагаемых полинома $Q(t)$. Если теперь $t_0\in F^c=[0,1]-F$, то $t_0\in\Delta_{j'}^{m'\cdot n_0}$ при некоторых j' и m', $1\leqslant j'\leqslant j_{m'}$ и $1\leqslant m'\leqslant m_0$. Если

$$S_i(P,\ t)=\sum_{j=1}^{i} a_j h_{\mu_j}(t)-$$

— i-ая частичная сумма полинома $P(t)$, то в силу (22), (24) и (25), в точке t_0 будем иметь

$$S_i(P,\ t_0)=0,\ \text{когда}\ 1\leqslant i\leqslant Q^*\sum_{m=1}^{m'-1} j_m+\sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0-n-1}, \tag{27}$$

$$S_i(P,\ t_0)=Q_{j'}^{m'\cdot n_0}(t_0),\ \text{когда}\ Q^*\sum_{m=1}^{m'} j_m+\sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0-n-1}\leqslant i\leqslant$$

$$<Q^*\sum_{m=1}^{m_0} j_m+\sum_{m=1}^{m_0} 2^{m\cdot n_0-n-1}=p \tag{28}$$

(p есть количество слагаемых полинома $P(t)$, см. (25)). Согласно (27) имеем

$$\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} S_i(P,\ t_0)=0,\ \text{когда}\ \nu\leqslant Q^*\sum_{m=1}^{m'-1} j_m+\sum_{m=1}^{m'} 2^{mn_0-n-1}. \tag{29}$$

Если же ν удовлетворяет неравенству

$$Q^*\sum_{m=1}^{m'-1} j_m+\sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0-n-1}\leqslant\nu<Q^*\sum_{m=}^{m'} j_m+\sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0-n-1},$$

то исходя из (18), (19), (27), (28) и учитывая (23) получаем

$$\left|\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} S_i\ (P,t_0)\right|\leqslant\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}|S_i(P,\ t_0)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{m'\cdot n_0-n-1}}\overline{Q}\,Q^*\cdot j_{m'}\leqslant\frac{1}{2^{m'\cdot n_0-n-1}}\overline{Q}\cdot Q^* 2^{m'\cdot n_0-n_0}\leqslant\frac{\overline{Q}\cdot Q^*}{2^{n_0-n-1}}. \tag{30}$$

Пусть теперь n_0, кроме неравенства (17), удовлетворяет также неравенству

$$\frac{\overline{Q}\cdot Q^*}{2^{n_0-n-1}}\leqslant|r|+\varepsilon.$$

Тогда, учитывая (29) и (30), получаем

$$\left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu} S_l(P,\ t_0)\right| \leqslant |r| + \varepsilon,$$

при

$$\nu \leqslant Q^* \sum_{m=1}^{m'} j_m + \sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0 - n - 1}.$$

Наконец, в случае, когда ν удовлетворяет неравенству

$$M = Q^* \sum_{m=1}^{m'} j_m + \sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0 - n - 1} < \nu \leqslant p,$$

исходя из (28) и (31) будем иметь ($t_0 \in F^c$)

$$\left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu} S_l(P,\ t_0)\right| \leqslant \left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{M} S_l(P,\ t_0)\right| + \left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=M+1}^{p} S_l(P,\ t_0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\nu}(|r| + \varepsilon) + \left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=M+1}^{p} Q_{j'}^{m'\cdot n_0}(t_0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\nu}(|r| + \varepsilon) + \frac{1}{\nu}\sum_{l=M+1}^{p}(|r| + \varepsilon) = |r| + \varepsilon.$$

Учитывая, что t_0 — произвольная точка множества F^c, получаем, что полином $P(t)$ удовлетворяет утверждению 2.5 леммы 2. Лемма доказана.

Из леммы 2 легко следует

Лемма 3. *Для произвольной ступенчатой функции $F(t)$, определенной на отрезке $[0,1]$, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ и для любых натуральных чисел n и N существует полином:*

$$P(t) = \sum_{j=1}^{p} c_j h_{k_j}(t) \quad (k_1 < k_2 < \cdots < k_p)$$

и множество $G \subset [0,1[$, обладающие следующими свойствами:

3.1 $k_1 > N$;

3.2 $k_{j+1} - k_j > 2^n$, $j \in [1,\ p-1]$;

3.3 $\sum_{j=1}^{p} |c_j h_{k_j}(t)|^{2+\varepsilon} \leqslant \varepsilon$, $t \in [0,1]$;

3.4 $\mathrm{mes}\ G \geqslant 1 - \varepsilon$;

3.5 $|P(t) - F(t)| < \varepsilon$, $t \in G$;

3.6 $\max\limits_{\nu \in [1,\ p]} \left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{l} c_j h_{k_j}(t)\right| < |F(t)| + \varepsilon$, $t \in G$.

Доказательство. Ясно, что не нарушая общности, лемму можно доказать в случае, когда интервалы постоянства функции $F(t)$ являются интервалами Хаара. Пусть $F(t)$ имеет вид

$$F(t)=\sum_{i=1}^{\lambda} r_i \psi_{\Delta_{\mu_i}}(t), \tag{32}$$

где $\psi_\Delta(t)$ — характеристическая функция интервала Δ, $\Delta_{\mu_i}\in\{\Delta\}$, $i\in[1,\lambda]$ и вместе с тем

$$\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_\lambda. \tag{33}$$

(В точках разрыва функция $F(t)$ может быть неопределенной или же принимать какие угодно значения).

С помощью леммы 2 определим полиномы

$$P_i(t)=\sum_{j=1}^{p_i} c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t),$$

$i=1, 2,\cdots, \lambda$, удовлетворяющие следующим условиям:

3.7 $k_1^{(1)}>N$;

3.8 $k_1^{(i)}>k_{p_{i-1}}^{(i-1)}\geqslant 2^n$, $i\in[1,\lambda]$;

3.9 $k_{j+1}^{(i)}-k_j^{(i)}\geqslant 2^n$, $j\in[1, p_i-1]$, $i\in[1,\lambda]$;

3.10 $\sum\limits_{i=1}^{p_i} |c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t)|^{2+\varepsilon}\leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda}$, $t\in[0,1]$, $i\in[1,\lambda]$;

3.11 $\operatorname{mes} G_i=\operatorname{mes}\{t: |P_i(t)-r_i|>\varepsilon\}\leqslant\varepsilon$, $i\in[1,\lambda]$;

3.12 $\max\limits_{\nu\in[1,p_i]}\left|\frac{1}{\nu}\sum\limits_{l=1}^{\nu}\sum\limits_{j=1}^{l} c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t)\right|\leqslant|r_i|+\varepsilon$, $t\overline{\in} G_i$, $i\in[1,\lambda]$.

Теперь положив

$$\Delta_{\mu_i}=(\alpha_{\mu_i}, \beta_{\mu_i}),\ i\in[1,\lambda],$$

составим выражение

$$P(F,t)=\sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{p_i} c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}\left(\frac{t-\alpha_{\mu_i}}{\beta_{\mu}-\alpha_{\mu_i}}\right),$$

где

$$h_{k_j^{(i)}}\left(\frac{t-\alpha_{\mu_i}}{\beta_{\mu_i}-\alpha_{\mu_i}}\right)=0,\ \text{если } t\overline{\in}\Delta_{\mu_i}.$$

Имеем

$$P(F,t)=\sum_{j=1}^{p} c_j h_{k_j}(t),$$

так как $k_1^{(1)}>N\geqslant 0$ и $\Delta_{\mu_i}\in\{\Delta\}$, $i\in[1,\lambda]$.

Легко усмотреть, что $P(F, t)$ удовлетворяет утверждениям леммы 3. Действительно, 3.1—3.3 сразу следуют из 3.7, (32) и 3.8—3.10. Далее, на каждом интервале Δ_{μ_l} полином $P(F, t)$ получен из полинома $P_l(t)$ при помощи сжатия последнего на интервал Δ_{μ_l}, поэтому, если обозначим через G_l^* образ множества G_l при отображении отрезка $(0,1)$ на интервал Δ_{μ_l} при помощи функции $\frac{t-\alpha_{\mu_l}}{\beta_{\mu_l}-\alpha_{\mu_l}}$, то из 3.11 будет следовать, что

$$\text{mes } G_l^* \leqslant \varepsilon |\Delta_{\mu_l}|$$

и вместе с тем на множестве $\Delta_{\mu_l} - G_l^*$ будем иметь

$$|P(F, t) - F(t)| = \left| P_l\left(\frac{t-\alpha_{\mu_l}}{\beta_{\mu_l}-\alpha_{\mu_l}}\right) - r_l \right| \leqslant \varepsilon. \tag{35}$$

Положим

$$G = [0,1] - \bigcup_{l=1}^{\lambda} G_l^*.$$

Тогда из (34) следует

$$\text{mes } G = 1 - \sum_{l=1}^{\lambda} \text{mes } G_l^* \geqslant 1 - \sum_{l=1}^{\lambda} \varepsilon |\Delta_{\mu_l}| = 1 - \varepsilon,$$

а из (35) получаем

$$|P(F, t) - F(t)| \leqslant \varepsilon, \ t \in G.$$

Для завершения доказательства леммы 3 остается убедиться в справедливости утверждения 3.6. Последнее сразу следует из 3.12, если учесть, что интервалы Δ_{μ_l} попарно не пересекаются и вместе с тем

$$P(F, t) = P_l\left(\frac{t-\alpha_{\mu_l}}{\beta_{\mu_l}-\alpha_{\mu_l}}\right)$$

на каждом интервале Δ_{μ_l}. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $F = \{F_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность всевозможных ступенчатых функций, интервалы постоянства которых являются интервалами Хаара и которые принимают рациональные значения.

Зафиксируем какую-либо последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l < 1. \tag{36}$$

Теперь при помощи леммы 3 последовательно построим полиномы

$$P(F_i, t) = \sum_{j=1}^{p_i} c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t),$$

$i = 1, 2, \cdots$, удовлетворяющие следующим условиям:

4.1 $k_{j+1}^{(i)} - k_j^{(i)} \geqslant 2^i$, $j \in [1, p_i - 1]$, $i > 1$;

4.2 $k_1^{(i)} - k_{p_{i-1}}^{(i-1)} \geqslant 2^i$, $i \geqslant 2$;

4.3 $\sum_{j=1}^{p_i} |c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t)|^{2+\varepsilon_i} \leqslant \varepsilon_i$, $t \in [0,1]$, $i > 1$;

4.4 $\operatorname{mes} G_i = \operatorname{mes} \{t: |P(F_i, t) - F_i(t)| \leqslant \varepsilon_i\} \geqslant 1 - \varepsilon_i$;

4.5 $\max_{\nu \in [1, p_i]} \left| \frac{1}{\nu} \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{l} c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t) \right| < |F_i(t)| + \varepsilon_i$, $t \in C_i$..

Если в ряде

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(F_i, t)$$

раскроем внутренние суммы, то в силу 4.1 и 4.2 получим ряд вида

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j h_{k_j}(t) \quad (k_1 < k_2 < \cdots), \tag{37}$$

причем из (36) и 4.3 сразу следует, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j h_{k_j}(t)|^{2+\varepsilon} \tag{38}$$

сходится равномерно на отрезке [0,1] для любого $\varepsilon \in (0,1)$.

Убедимся, что последовательность $\{k_j\}_1^{\infty}$ имеет плотность нуль, а именно

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \; \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\Lambda(n+m) - \Lambda(n)}{m} = 0. \tag{39}$$

При фиксирооанном m из 4.1 и 4.2 непосредственно следует, что на любом отрезке $[n, n + m]$ при достаточно большом n может содержаться только одно число вида k_j, следовательно

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\Lambda(n+m) - \Lambda(n)}{m} = \frac{1}{m}.$$

Отсюда непосредственно получаем (39). Остается убедиться, что ряд (37) удовлетворяет первому утверждению теоремы.

Пусть $f(t) \in \bar{S}[0,1]$, причем

$$E = \{t: |f(t)| < +\infty\},$$

$$E^+ = \{t : f(t) = +\infty\},$$
$$E^- = \{t : f(t) = -\infty\}.$$

Определим последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \cdots$ и последовательность функций $\{f_n(t)\}_1^\infty$ следующим образом. Положим

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \in E, \\ +1, & t \in E^+, \\ -1, & t \in E^-, \end{cases}$$

и исходя из C-свойства Лузина, найдем функцию $F_{i_1}(t) \in F$, такую, чтобы

$$\operatorname{mes}\{t: |F_{i_1}(t) - f_1(t)| > \varepsilon_1\} \leqslant \varepsilon_1.$$

Если числа $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1}$ и функции $f_1(t), \cdots, f_{n-1}(t)$ уже определены, то $f_n(t)$ и i_n определяются следующим образом: положим

$$f_n(t) = \begin{cases} f_{n-1}(t) - P(F_{i_{n-1}}, t), & t \in E, \\ +1, & t \in E^+, \\ -1, & t \in E^-, \end{cases}$$

и снова воспользовавшись C-свойством Лузина, найдем функцию $F_{i_n}(t)$ такую, чтобы $i_n > i_{n-1}$ и вместе с тем

$$\operatorname{mes}\{t: |F_{i_n}(t) - f_n(t)| \geqslant \varepsilon_n\} \leqslant \varepsilon_n.$$

Итак, существуют последовательности $\{i_n\}_1^\infty$ и $\{f_n(t)\}_1^\infty$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $$i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \cdots; \tag{40}$$

2) $$f_n(t) = \begin{cases} f_{n-1}(t) - P(F_{i_{n-1}}, t), & t \in E \\ +1, & t \in E^+, \\ -1, & t \in E^-; \end{cases} \tag{41}$$

3) $$\operatorname{mes}\{t: |F_{i_n}(t) - f_n(t)| > \varepsilon_n\} \leqslant \varepsilon_n \tag{42}$$

для любого $n \geqslant 1$, причем предполагается, что $f_0(t) \equiv f(t)$ и $P(F_{i_0}, t) \equiv 0$.

Составим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(F_{i_n}, t). \tag{43}$$

Если в ряде (43) раскроем внутренние суммы, то в силу (40), 4.1 и 4.2 получим некоторый подряд

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{j_\mu} h_{k_{j_\mu}}(t) \tag{44}$$

ряда (37). Убедимся, что ряд (44) суммируется методом (C, 1) к $f(t)$ п. в. на отрезке [0,1].

Положим

$$H_n = \{t : |F_{i_n}(t) - f_n(t)| \leqslant \varepsilon_n\}. \tag{45}$$

Из соотношений (36), 4.4 и (42) непосредственно следует, что

$$\operatorname{mes} E = \operatorname{mes} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (G_{l_n} \cap H_n \cap E), \tag{46}$$

$$\operatorname{mes} E^{+} = \operatorname{mes} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (G_{l_n} \cap H_n \cap E^{+}), \tag{47}$$

$$\operatorname{mes} E^{-} = \operatorname{mes} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (G_{l_n} \cap H_n \cap E^{-}) \tag{48}$$

Положим $q_s = \sum_{n=1}^{s} p_{l_n}$, $q_0 = p_0 = 0$ и пусть $\nu \in [q_s, q_{s+1})$. Тогда $\sigma_\nu(t)$ — $(C, 1)$-средние ряда (44) в произвольной точке $t \in [0, 1]$ можно представить в виде

$$\sigma_\nu(t) = \frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{\mu=1}^{l} c_{j_\mu} h_{k_{j_\mu}}(t) = \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{l=q_\lambda+1}^{q_{\lambda+1}}\sum_{\mu=1}^{l} c_{j_\mu} h_{k_{j_\mu}}(t) +$$

$$+ \frac{1}{\nu}\sum_{l=q_s+1}^{\nu}\sum_{\mu=1}^{l} c_{j_\mu} h_{k_{j_\mu}}(t) =$$

$$= \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{l=q_\lambda+1}^{q_{\lambda+1}} \left\{\sum_{n=1}^{\lambda} P(F_{l_n}, t) + \sum_{j=1}^{l-q_\lambda} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j^{(l_{\lambda+1})}}(t)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\nu}\sum_{l=q_s+1}^{\nu}\left\{\sum_{n=1}^{s} P(F_{l_n}, t) + \sum_{j=1}^{l-q_s} c_j^{(l_{s+1})} h_{k_j^{(l_{s+1})}}(t)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=0}^{s-1}(q_{\lambda+1} - q_\lambda)\sum_{n=1}^{\lambda} P(F_{l_n}, t) + \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j^{(l_{\lambda+1})}}(t) +$$

$$+ \frac{1}{\nu}(\nu - q_s)\sum_{n=1}^{s} P(F_{l_n}, t) + \frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu-q_s}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{s+1})} h_{k_j^{(l_{s+1})}}(t). \tag{49}$$

Положим

$$\gamma_\nu(t) = \sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{1}{\nu}\sum_{n=1}^{\lambda} p_{l_{\lambda+1}} P(F_{l_n}, t) + \frac{\nu - q_s}{\nu}\sum_{n=1}^{s} P(F_{l_n}, t), \tag{50}$$

$$\beta_\nu(t) = \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j^{(l_{\lambda+1})}}(t) +$$

$$+ \frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu-q_s}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{s+1})} h_{k_j^{(l_{s+1})}}(t). \tag{51}$$

Рассмотрим бесконечную матрицу $\|\alpha_{\nu\lambda}\|$ (ν — индекс строк, λ — индекс столбцов), где

$$\alpha_{\nu\lambda}=\begin{cases}\frac{1}{\nu}p_{l_{\lambda+1}}, & \lambda\in[0,\ s-1],\\ \frac{1}{\nu}(\nu-q_s), & \lambda=s,\\ 0, & \lambda\geqslant s+1,\end{cases}$$

при $\nu\in[q_s,\ q_{s+1})$.

Для каждого фиксированного λ имеем

$$\lim_{\nu\to\infty}\alpha_{\nu\lambda}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}p_{l_{\lambda+1}}=0.$$

Вместе с тем

$$\sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{1}{\nu}p_{l_{\lambda+1}}+\frac{1}{\nu}(\nu-q_s)=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{\lambda=0}^{s-1}p_{l_{\lambda+1}}+\nu-q_s\right\}=\frac{1}{\nu}\{q_s+\nu-q_s\}=1.$$

Кроме того, очевидно, что $\alpha_{\nu\lambda}>0$ для всех ν и λ. Таким образом, матрица $\|\alpha_{\nu\lambda}\|$ является вполне регулярной матрицей. Следовательно, согласно известной теореме (см., например, [10], стр. 75) будем иметь, что любой сходящийся к конечной или бесконечной сумме ряд суммируется матрицей $\|\alpha_{\nu\lambda}\|$ к той же сумме. Отсюда, так как $\sigma_\nu(t)=\gamma_\nu(t)+\beta_\nu(t)$, то для того, чтобы доказать суммируемость ряда (44) методом (C, 1) к $f(t)$ п. в. на отрезке [0.1], достаточно убедиться, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(F_{l_n},\ t)=f(t) \tag{52}$$

п. в. на [0,1] и, вместе с тем

$$\lim_{\nu\to\infty}\beta_\nu(t)=0 \text{ п. в. на } E, \tag{53}$$

$$|\beta_\nu(t)|\leqslant\text{const п. в. на } E^+\cup E^-. \tag{54}$$

Пусть t_0—произвольная точка множества

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(G_{l_n}\cap H_n\cap E), \tag{55}$$

тогда существует m_0 такое, что

$$t_0\in\bigcap_{n=m_0}^{\infty}(G_{l_n}\cap H_n\cap E). \tag{56}$$

Так как $t_0\in E$, следовательно, в силу (41) имеем

$$|f(t_0)-\sum_{n=1}^{m}P(F_{l_n},\ t_0)|=|f_1(t_0)-\sum_{n=1}^{m}P'(F_{l_n},\ t_0)|=$$

$$= |f_2(t_0) - \sum_{n=2}^{m} P(F_{l_n}, t_0)| = \cdots = |f_{m-1}(t_0) - \sum_{n=m-1}^{m} P(F_{l_n}, t_0)| =$$

$$= |f_m(t_0) - P(F_{l_m}, t_0)| < |f_m(t_0) - F_{l_m}(t_0)| + |F_{l_m}(t_0) - P(F_{l_m}, t_0)|.$$

Если теперь $m > m_0$, то воспользовавшись соотношениями 4.4, (45) и (56) получаем

$$|f(t_0) - \sum_{n=1}^{m} P(F_{l_n}, t_0)| \leqslant 2\varepsilon_m.$$

Следовательно, (52) имеет место в произвольной точке множества (55) и в силу (46) почти в каждой точке множества E.

Пусть теперь t_0 — произвольная точка множества

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (G_{l_n} \cap H_n \cap E^+). \tag{57}$$

Тогда

$$t_0 \in \bigcap_{n=m_0}^{\infty} (G_{l_n} \cap H_n \cap E^+) \tag{58}$$

для некоторого $m_0 \geqslant 1$. Так как $t_0 \in E^+$, следовательно, воспользовавшись соотношениями (36), 4.4, (41) и (42), при $m > m_0$ получаем

$$\sum_{n=1}^{m} P(F_{l_n}, t_0) \geqslant \sum_{n=1}^{m_0-1} P(F_{l_n}, t_0) + \sum_{n=m_0}^{m} [F_{l_n}(t_0) - \varepsilon_{l_n}] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{m_0-1} P(F_{l_n}, t_0) + \sum_{n=m_0}^{m} [f_n(t_0) - \varepsilon_n] - \sum_{n=m_0}^{m} \varepsilon_n > \sum_{n=1}^{m_0-1} P(F_{l_n}, t_0) +$$

$$+ \sum_{n=m_0}^{m} (1 - \varepsilon_n) - 1 > m - m_0 - 2 + \sum_{n=1}^{m_0-1} \cdots.$$

Отсюда сразу следует, что (52) имеет место в произвольной точке множества (57) и в силу (47) почти в каждой точке множества E^+.

Доказательство справедливости (52) п. в. на E^- проводится аналогично. Убедимся в справедливости (53). Пусть t_0 удовлетворяет соотношению (56). Тогда (52) имеет место в точке t_0 и $|f(t_0)| < +\infty$. Отсюда, в силу (36), (42) и 4.4, сразу получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F_{l_n}(t_0)| < +\infty.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ зафиксируем $n_0 > m_0$, такое, чтобы

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |F_{l_n}(t_0)| < \varepsilon \tag{59}$$

и вместе с тем

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon. \tag{60}$$

Пусть теперь $s > n_0$ и $\nu \in [q_s, q_{s+1})$. Тогда воспользовавшись 4.5 будем иметь

$$|\beta_\nu(t_0)| \leqslant \frac{1}{\nu}\left|\sum_{\lambda=0}^{n_0-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j^{(l_{\lambda+1})}}(t_0)\right| +$$

$$+\frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=n_0}^{s-1} p_{l_{\lambda+1}}\left|\frac{1}{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j^{(l_{\lambda+1})}}(t_0)\right| +$$

$$+\frac{1}{\nu}(\nu-q_s)\left|\frac{1}{\nu-q_s}\sum_{l=1}^{\nu-q_s}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j^{(l_{\lambda+1})}}(t_0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\nu}\left|\sum_{\lambda=0}^{n_0-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l}\cdots\right| + \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=n_0}^{s-1} p_{l_{\lambda+1}}\{|F_{l_{\lambda+1}}(t_0)| + \varepsilon_{\lambda+1}\} +$$

$$+\frac{1}{\nu}(\nu-q_s)\{|F_{l_{s+1}}(t_0)| + \varepsilon_{s+1}\}. \tag{61}$$

Отсюда, учитывая (59) и (60), получаем

$$|\beta_\nu(t_0)| \leqslant \frac{1}{\nu}\left|\sum_{\lambda=0}^{n_0-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l}\cdots\right| + \sum_{\lambda=n_0}^{s}|F_{l_{\lambda+1}}(t_0)| +$$

$$+\sum_{\lambda=n_0}^{s}\varepsilon_{\lambda+1} < \frac{1}{\nu}\left|\sum_{\lambda=0}^{n_0-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l}\cdots\right| + 2\varepsilon.$$

Так как первое слагаемое последнего выражения стремится к нулю, когда $\nu \to \infty$, а ε — произвольное, следовательно (53) имеет место в каждой точке множества (55) и в силу (46) почти в каждой точке множества E.

Если же t_0 принадлежит множеству (57), то имеет место (58), а также неравенство (61), где $s > m_0$ и $\nu \in [q_s, q_{s+1})$. Следовательно, учитывая (36), (41) и (45), будем иметь

$$|\beta_\nu(t_0)| \leqslant \frac{1}{\nu}\left|\sum_{\lambda=0}^{n_0-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l}\cdots\right| + \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=n_0}^{s-1} p_{l_{\lambda+1}}\{1+2\varepsilon_{\lambda+1}\} +$$

$$+\frac{1}{\nu}(\nu-q_s)\{1+2\varepsilon_{s+1}\} < \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=1}^{s-1} p_{l_{\lambda+1}} + \frac{1}{\nu}(\nu-q_s) + 2 =$$

$$= \frac{1}{\nu}\{q_s + \nu - q_s\} + 2 = 3$$

для достаточно больших ν.

Отсюда, в силу (47), получаем, что (54) имеет место п. в. на E^+. Случай множества E^- рассматривается аналогичным образом.

Таким образом, имеют место соотношения (52) — (54). Теорема 1 доказана.

Армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна Поступила 9.X.1980

Լ. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ. Հաարի շարքերով $+\infty$-ի ներկայացման մասին (C, 1) գումարման եղանակով *(ամփոփում)*

Հայտնի է, որ Հաարի լրիվ սիստեմով շարքերը չեն կարող հանրագումարվել $+\infty$-ի և ոչ մի (C, $\alpha > -1$) *գումարման եղանակով դրական չափ ունեցող բազմությունների վրա։ Ներկա աշխատանքի հիմնական արդյունքը հետևյալն է՝ գոյություն ունի*

$$\Omega \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i X_{k_i}(x) \quad (k_1 < k_2 < \cdots)$$

շարք, որը (C, 1) *եղանակով հանրագումարվում է $+\infty$-ի համարյա ամենուրեք (0,1)-ի վրա, ընդ որում Ω-ն կարելի է կառուցել այնպիսին, որ $\{k_i\}$ հաջորդականությունը ունենա 0 խտություն, իսկ a_i-երը ձգտեն 0-ի թույլատրելիին մոտ արագությամբ։*

L. A. SHAHINIAN. *On the summation to $+\infty$ of Haar's series by the (C, 1) method*
(summary)

It is known that Haar's series

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X_k(x)$$

cannot be summated to $+\infty$ by any methods $(C, \alpha > -1)$ on the sets of positive measure.

In this paper we have constructed

$$\Omega \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i X_{k_i}(x) \quad (k_1 < k_2 < \cdots)$$

such, that Ω is $(C, 1)$ summable to $+\infty$ *a. e.* on the (0,1) and $a_i \to 0$ with the rate that is near to admissible.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Шагинян.* О суммируемости к бесконечности тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша, Мат. сб., 108 (150), № 3, 1979, 457—470.
2. *А. А. Талалян* и *Ф. Г. Арутюнян.* О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$, Мат. сб., 66 (108), 1965, 240—247.
3. *Л. А. Шагинян.* О суммируемости рядов по системе Хаара методами (C, α) и (H, k), ДАН АрмССР, LVII, № 4, 1973, 206—211.
4. *А. А. Талалян.* О рядах, универсальных относительно перестановок, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, № 4, 1960, 567—604.
5. *Ф. Г. Арутюнян.* О рядах по системе Хаара, ДАН АрмССР, 42, № 3, 1966, 134—140.
6. *М. Кац.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, ИИЛ, М., 1963.

7. *И. П. Натансон*. Теория функций вещественной переменной, Изд. «Наука», М., 1974.

8. *J. J. Price*. Sparse subsets of orthonormal systems, Proceedings of the Amer. Math. Soc., 35, № 1, 1972, September.

9. *М. Б. Петровская*. О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, Изв. АН СССР, сер. матем., 28 : 4, 1964, 773—798.

10. *Г. Харди*. Расходящиеся ряды, ИИЛ, М., 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 5, 1981 Математика

С. С. СЕКТ

РОСТ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ХАРАКТЕРИСТИКАХ М. М. ДЖРБАШЯНА. II

В I-ой части этой статьи ([1]) была сделана попытка построения аналога классической теории распределения значений с использованием характеристик М. М. Джрбашяна, введенных им в [2] и получивших дальнейшее развитие в [3].

В данной статье исследуются свойства величин ω-отклонений мероморфных функций $f(z)$.

Понятие ω-отклонения мероморфной функции от числа a определяется так:

$$\beta_\omega(a, f) = \lim_{r\to\infty} \frac{L_\omega(r, a, f)}{\widetilde{T}_\omega(r, f)},$$

где

$$L_\omega(r, a, f) = \begin{cases} \max\limits_{|z|=r} \ln_\omega^+ \{|f(z) - a|\}^{-1}, & a \neq \infty \\ \max\limits_{|z|=r} \ln_\omega^+ |f(z)|, & a = \infty. \end{cases}$$

Множество

$$\Omega_\omega(f) = \{a: \beta_\omega(a, f) > 0\}$$

называется множеством положительных ω-отклонений.

Основные результаты работы:

Теорема 3. *Если $\omega(x) \in \Omega_\omega$ такова, что при любом фиксированном $\nu > 1$*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\omega(t)}{\omega(\nu t)} = \alpha(\nu) < \infty, \tag{1}$$

то для любой мероморфной функции $f(z)$ с конечным нижним ω-порядком множество положительных ω-отклонений $\Omega_\omega(f)$ имеет емкость нуль.

Теорема 4. *Существуют множество C, имеющее мощность континуума и целая функция $g(z)$, нижний ω-порядок которой равен нулю, такие, что для любого $a \in C$ $\beta_\omega(a, g) = \infty$.*

Вначале получим формулу для представления $\ln_\omega |f(z)|$ мероморфной функции $f(z)$ в секторе и с ее помощью докажем теорему 3. Формула представления $\ln_\omega |f(z)|$ в секторе выводится аналогично случаю представления $\ln |f(z)|$ в секторе и доказательство приводимых фактов см. [4], стр. 41.

Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция и $d_R = \{z: |z| < R, |\arg z| < \alpha\}$, $0 < \alpha < \pi$, $R > 1$. Сделаем замену $\zeta = z^{2x} = \rho e^{i\theta}$, $x = \pi(2\alpha)^{-1}$. Тогда в секторе $D_R = \{\zeta: |\zeta| < R^{2x} = R_1, |\arg \zeta| < \pi\}$ определится мероморфная функция $F(\zeta) = f(\zeta^{(2x)^{-1}}) = f(z)$.

Пусть v — любое число: $0 < v < R_1$ и $\zeta \in D_R$. В D_R рассмотрим

$$Q(v, \zeta) = \ln\left[\left|\frac{R_1^2 - v\zeta}{R_1(v - \zeta)}\right| \frac{R_1(v + |\zeta|)}{R_1^2 + v|\zeta|}\right]. \tag{2.1}$$

Заметим, что $Q(v, \zeta) \geqslant 0$. Одновременно ясно, что

$$\ln\left[|R_1^2 - v\zeta|(R_1^2 + v|\zeta|)^{-1}\right] \leqslant 0.$$

Таким образом

$$0 \leqslant Q(v, \zeta) \leqslant \ln\left[(v + |\zeta|)(|v - \zeta|)^{-1}\right]. \tag{2.2}$$

Пусть $\{c_k\}$ — объединенная последовательность нулей и полюсов функции $f(z)$ в замкнутом секторе $\bar{d}_R$ и $p_k = c_k^{2x}$ их образы в ζ-плоскости.

Многосвязную область $B_R(\varepsilon)$ строим как и в случае $\omega(x) \equiv 1$ и применяем к ней формулу Грина с функциями

$$P = \ln_\infty |F(\zeta)|; \quad Q = Q(v, \zeta).$$

Для функции $Q(v, \zeta)$ имеем

$$\left.\frac{\partial Q(v, \zeta)}{\partial n}\right|_{\zeta = R_1 e^{i\theta}} = \frac{2v(R_1 - v)}{R_1 + v} \frac{1 + \cos\theta}{R_1^2 + v^2 - 2R_1 v \cos\theta},$$

$$\{\partial Q(v, \zeta)/\partial n\}_{\zeta = \rho e^{\pm i\pi}} = 0,$$

$$\Delta Q(v, \rho e^{i\theta}) = (R_1^2 - v^2)\, v\, (R_1^2 - \rho^2)\left[\rho(v + \rho)^2 (R_1^2 + v\rho)^2\right]^{-1}.$$

По теореме 2 [2] функция $P = P(\zeta)$ гармонична, т. е. при $\zeta \in B_R(\varepsilon)$ $\Delta P(\zeta) = 0$. Имеем

$$-\iint_{B_R(\varepsilon)} \ln_\infty |F(\rho e^{i\theta})| \frac{(R_1^2 - v^2)\, v\, (R_1^2 - \rho^2)}{\rho(v + \rho)^2 (R_1^2 + v\rho)^2} \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_{l(p_k, \varepsilon)} \ln_\infty |F(\zeta)| \frac{\partial Q}{\partial n} ds - \int_{l(p_k, \varepsilon)} Q(v, \zeta) \frac{\partial \ln_\infty |F(\zeta)|}{\partial n} ds\right\} +$$

$$+ \int_{l(v, \varepsilon)} \ln_\infty |F(\zeta)| \frac{\partial Q}{\partial n} ds - \int_{l(v, \varepsilon)} Q(v, \zeta) \frac{\partial \ln_\infty |F(\zeta)|}{\partial n} ds +$$

$$+ \int_{\Gamma_{R'}} \ln_\infty |F(R_1 e^{i\theta})| 2v \frac{R_1 - v}{R_1 + v} \frac{1 + \cos\theta}{R_1^2 + v^2 - 2vR_1 \cos\theta} R_1 d\theta. \tag{2.3}$$

Пусть $\zeta \in l(p_k, \varepsilon)$ и p_k совпадает с нулем либо с полюсом функции $F(\zeta)$, тогда

$$\ln|F(\zeta)| = \lambda_k \ln|\zeta - p_k| + \ln|\Psi_k(\zeta)|,$$

где λ_k равно порядку корня p_k, либо порядку полюса, взятому со знаком минус, а $\Psi_k(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in \overline{K(p_k, \varepsilon)}$. Полагая $\zeta = p_k + \varepsilon e^{i\theta}$, получим

$$|\zeta|^2 = \rho^2 = |p_k|^2 + \varepsilon^2 + 2|p_k|\varepsilon\cos(\theta - \alpha_k).$$

По определению функции P получаем

$$P = \omega(\rho)\lambda_k \ln\varepsilon - \int_0^\rho \ln|F(\tau e^{i\theta})|\,\omega'(\tau)\,d\tau + u_k(\zeta),$$

где $u_k(\zeta)$ — гармоническая функция. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial\varepsilon} = \omega(\rho)\frac{\lambda_k}{\varepsilon} + \lambda_k \ln\varepsilon\cdot\omega'(\rho)\,\frac{2\varepsilon + 2|p_k|\cos(\theta - \alpha_k)}{2\sqrt{|p_k^2| + \varepsilon^2 + 2|p_k|\varepsilon\cos(\theta - \alpha_k)}} +$$

$$+ \frac{\partial u_k(\varepsilon)}{\partial\varepsilon} - \ln|F(\rho e^{i\theta})|\,\omega'(\rho)\,\frac{2\varepsilon + 2|p_k|\cos(\theta - \alpha_k)}{2\sqrt{|p_k|^2 + \varepsilon^2 + 2|p_k|\varepsilon\cos(\theta - \alpha_k)}}.$$

Слагаемое $\partial u_k(\varepsilon)/\partial\varepsilon$ ограничено, а второе и четвертое слагаемые после умножения на ε становятся несущественными. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{l(p_k,\varepsilon)} Q(v, \zeta)\frac{\partial \ln_\infty|F(\zeta)|}{\partial n}\,ds = 2\pi\lambda_k\,\omega(|p_k|)\,Q(v, p_k).$$

Если $p_k = v$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{l(v,\varepsilon)} Q(v, \zeta)\frac{\partial \ln_\infty|F(\zeta)|}{\partial n}\,ds = \infty.$$

Имеем далее

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{l(p_k,\varepsilon)} \ln_\infty|F(\zeta)|\,\frac{\partial Q(v,\zeta)}{\partial n}\,ds = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{l(v,\varepsilon)} \ln_\infty|F(\zeta)|\,\frac{\partial Q(v,\zeta)}{\partial n}\,ds = -2\pi\ln_\infty|F(v)|.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ в соотношении (2.3), с учетом последних выражений получим

$$-\int_0^{R_1}\int_{-\pi}^{\pi}\ln_\infty|F(\rho e^{i\theta})|\,\frac{(R_1^2 - v^2)(R_1^2 - \rho^2)}{(v+\rho)^2(R_1^2 + v\rho)^2}\,v\,d\rho\,d\theta =$$

$$= 2vR_1\int_{-\pi}^{\pi}\ln_\infty|F(R_1 e^{i\theta})|\,\frac{R_1 - v}{R_1 + v}\,\frac{1 + \cos\theta}{R_1^2 + v^2 - 2vR_1\cos\theta} +$$

$$+2\pi\sum_{\{p_k\}}\Delta_k\, Q(v,\ p_k)\,\omega(|p_k|)-2\pi\ \ln_\omega|F(v)|, \tag{2.4}$$

где суммирование в правой части проводится по всем нулям и полюсам $F(\zeta)$ с учетом их кратности, а $\Delta_k=1$, если p_k—полюс и $\Delta_k=-1$, если p_k—корень $F(\zeta)$.

Перейдем в z-плоскость. Пусть $v=r^{2x}$, тогда $F(v)=f(r)$. Соотношение (2.4) принимает вид

$$\ln_\omega|f(r)|=\frac{4x^2r^{2x}}{2\pi}\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln_\omega|f(te^{i\varphi})|\ \frac{(R^{4x}-r^{4x})(R^{4x}-t^{4x})\,t^{2x-1}}{(r^{2x}+t^{2x})^2(R^{4x}+r^{2x}t^{2x})^2}\,dtd\varphi+$$

$$+2x\,\frac{R^{2x}r^{2x}}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln_\omega|f(Re^{i\varphi})|\ \frac{(R^{2x}-r^{2x})(1+\cos 2x\varphi)}{(R^{2x}+r^{2x})(R^{4x}+r^{4x}-2R^{2x}r^{2x}\cos 2x\varphi)}\,d\varphi+$$

$$+\sum_{\{c_k\}}\Delta_k\, Q(r^{2x},\ c_k^{2x})\ \omega(|c_k|^{2x}). \tag{2.5}$$

Теперь докажем теорему.

Теорема 2.1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z\neq\infty$ функция; $0<\alpha<\pi$, $0\leqslant\theta<2\pi$, $R>1$ — произвольные фиксированные числа. Тогда для каждого r, $0<r<R$, справедливо соотношение*

$$\ln_\omega|f(re^{i\theta})|=(2x)^2r^{2x}\int_0^R\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln_\omega|f(t\,e^{i(\theta+\varphi)})|\,d\varphi\right\}\frac{t^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\,dt+$$

$$+\sum_{\{c_k\}}\Delta_k\,\omega(|c_k|^{2x})\ln\frac{r^{2x}+|c_k|^{2x}}{|r^{2x}-c_k^{2x}|}+K(R,\ r,\ \theta,\ \alpha), \tag{2.6}$$

где $\Delta_k=1$, если c_k — полюс и $\Delta_k=-1$, если c_k — корень; для каждого $r<R$ имеет место оценка

$$|K(R,\ r,\ \theta,\ \alpha)|\leqslant 20x\,(r/R)^{2x}\,(\widetilde{T}_\omega(R,\ f)+C)\ R^{2x}(R^{2x}-r^{2x})^{-1}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Применим формулу (2.5) к функции $f_1(z)=f(ze^{i\theta})$ (θ — фиксировано) с учетом соотношения (2.2). Тогда

$$K(R,\ r,\ \theta,\ \alpha)=-(2x)^2r^{2x}\int_0^R\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha}\ln_\omega|f(t\,e^{i(\theta+\varphi)})|\,d\varphi\right\}\frac{R^{4x}t^{2x-1}}{(R^{4x}+r^{2x}t^{2x})^2}dt+$$

$$+2x\,\frac{(Rr)^{2x}}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln_\omega|f(R\,e^{i(\theta+\varphi)})|\ \frac{R^{2x}-r^{2x}}{R^{2x}+r^{2x}}\ \frac{1+\cos 2x\varphi}{R^{4x}+r^{4x}-2R^{2x}r^{2x}\cos 2x\varphi}\,d\varphi.$$

С учетом того, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}|\ln_\omega|f(te^{i(\theta+\varphi)})|\,|\,d\varphi\leqslant\widetilde{m}_\omega(t,\ f)+\widetilde{m}_\omega\!\left(t,\ \frac{1}{f}\right)\leqslant 2\,(\widetilde{T}_\omega(R,\ f)+C),$$

получим

$$|K(R, r, \theta, \alpha)| \leqslant \frac{(2x)^2 r^{2x} \cdot 2}{R^{4x}} (\tilde{T}_\omega(R, f) + C) \int_0^R t^{2x-1}\, dt +$$

$$+ 4xR^{2x} r^{2x} \cdot 2\,[\pi (R^{2x} + r^{2x})(R^{2x} - r^{2x})]^{-1} (\tilde{T}_\omega(r, f) + C) \leqslant$$

$$\leqslant (r/R)^{2x}\, 20x\, (\tilde{T}_\omega(R, f) + C)\, R^{2x}(R^{2x} - r^{2x})^{-1},$$

что и завершает доказательство теоремы 2.1.

Так как

$$\ln[(r^{2x} + |c_k|^{2x})\{|r^{2x} - c_k^{2x}|\}^{-1} \geqslant \ln[(r^{2x} + |c_k|^{2x})\{|r^{2x} + |c_k|^{2x}|\}^{-1}],$$

то заменяя $\sum\limits_{\{c_k\}}$ в (2.6) на сумму лишь по одним полюсам (для корней $\Delta_k = -1$), и переходя в (2.6) к положительным частям, получим

$$\ln_\omega^+ |f(re^{i\theta})| \leqslant (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln_\omega^+ |f(te^{i(\theta+\varphi)})|\, d\varphi \right\} \frac{t^{2x-1}}{(t^{2x} + r^{2x})^2}\, dt +$$

$$+ \sum_{\{b_k\}} \ln \frac{r^{2x} + |b_k|^{2x}}{(r^{2x} - |b_k|^{2x}|}\, \omega(|b_k|^{2x}) + |K(R, r, \theta, \alpha)|, \qquad (2.8)$$

$R > 1$, $0 < r < R$, $\{b_k\}$ — последовательность полюсов функции $f(z)$, лежащих в секторе d_R и занумерованных с учетом их кратности.

Положим для произвольной мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z)$

$$L_\omega(r, a, f) = \begin{cases} \max\limits_{|z|=r} \ln_\omega^+ \{|f(z) - a|\}^{-1} & \text{если } a \neq \infty \\ \max\limits_{|z|=r} \ln_\omega^+ |f(z)|, & \text{если } a = \infty. \end{cases}$$

Тогда формула (2.8) принимает вид

$$L_\omega(r, f) \leqslant (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \frac{\tilde{m}_\omega(t, f)\, t^{2x-1}}{(r^{2x} + t^{2x})^2}\, dt +$$

$$+ \sum_{\{b_k\}} \omega(|b_k|^{2x}) \ln \frac{r^{2x} + |b_k|^{2x}}{|r^{2x} - b_k|^{2x}|} + K \cdot x \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{2x} (\tilde{T}_\omega(kR, f) + C), \qquad (2.9)$$

где $L_\omega(r, f) = L_\omega(r, \infty, f)$, $r \leqslant Rk^{-1}$, $1 < k \leqslant 2$ — фиксированное число. Оценка (2.9) справедлива при любом фиксированном $x > 0{,}5$.

Введем понятие величины ω-отклонения мероморфной функции $f(z)$ относительно числа a

$$\beta_\omega(a, f) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{L_\omega(r, a, f)}{\tilde{T}_\omega(r, f)}. \qquad (2.10)$$

Множество $\Omega_\omega(f) = \{a : \beta_\omega(a, f) > 0\}$ будем называть множеством положительных ω-отклонений мероморфной функции $f(z)$.

Доказательство теоремы 3. Для установления этого факта будем пользоваться оценкой (2.9), примененной к функции $\{|f(z)-a|\}^{-1}$. Имеем для каждого $a \neq \infty$ $(1<k<2,\ x>0{,}5)$

$$L_\infty(r, a, f) \leqslant (2x)^2 r^{2x} \int \frac{\tilde{m}_\infty(t, a, f)\, t^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, dt +$$

$$+\sum_{|b_k|<R} \omega(|b_k|^{2x}) \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|} + \frac{20\, x}{\ln k}\left(\frac{r}{R}\right)^{2x} \frac{k^{2x}}{k^{2x}-1}(\tilde{T}_\infty(k R, f)+C), \tag{2.11}$$

где b_k — a-точки $f(z)$, а $r \leqslant Rk^{-1}$. Известна лемма ([5], стр. 35).

Лемма 2.1. *Пусть $\varphi(x)$ — неубывающая функция, определенная при $x \geqslant x_0 > 0$, и такая, что $\varphi(x_0) \geqslant 2$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)=\infty$. Тогда для каждого $\nu>1$ существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n = x_n(\nu) \nearrow \infty$ $(x_1 \geqslant x_0)$, такая, что при $x_n \leqslant x \leqslant x_n + \ln^{-\nu}\varphi(x_n)$*

$$\varphi(x) < \nu\varphi(x_n). \tag{2.12}$$

Пусть $\varphi(y) = \tilde{T}_\infty(e^y, f)$ и $\{y_n\}$ — последовательность, для которой выполняется соотношение (2.12) для функции $\varphi(y)$. Для каждого фиксированного $n \geqslant n_0$ положим в выражении (2.11)

$$R = \exp\{y_n + 0{,}5 \ln^{-\nu}\varphi(y_n)\},\quad k = \exp\{3^{-1}\ln^{-\nu}\varphi(y_n)\}, \tag{2.13}$$

а r будем считать принадлежащим сегменту $[r_1, r_2]$, где $r_1 = \exp y_n$, $r_2 = \exp\{y_n + 6^{-1}\ln^{-\nu}\varphi(y_n)\}$. Тогда оценка (2.11) дает

$$\int_{r_1}^{r_2} L_\infty(r, a, f)\frac{dr}{r} \leqslant (2x)^2 \int_0^R \tilde{m}_\infty(t, a, f)\, t^{2x-1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, dr dt +$$

$$+\sum_{|b_k|<R} \omega(|b_k|^{2x}) \int_{r_1}^{r_2} \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|}\frac{dr}{r} + 10\,(\tilde{T}_\infty(kR, f)+C)\frac{k^{2x}(r_2^{2x}-r_1^{2x})}{\ln k\,(k^{2x}-1)}. \tag{2.14}$$

Оценим

$$\sum_{|b_k|<R} \omega(|b_k|^{2x}) \int_{r_1}^{r_2} \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|}\frac{dr}{r},$$

предварительно заметив, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|}\frac{dr}{r} \leqslant \int_0^\infty \ln \left|\frac{s^{2x}+1}{s^{2x}-1}\right| \frac{ds}{s} = \frac{\pi^2}{4x}.$$

Тогда

$$\sum_{|b_k|<R} \omega(|b_k|^{2x}) \int_{r_1}^{r_2} \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|}\frac{dr}{r} \leqslant \frac{\pi^2}{4x}\sum_{|b_k|<R} \omega(|b_k|) =$$

$$=\frac{\pi^2}{4x}\int_0^R \omega(t)\,dn(t, a) = \frac{\pi^2}{4x}\left[\omega(R)\,n(R, a) + \int_0^R n(t, a)\,d(-\omega(t))\right).$$

Для $k>1$ справедливо

$$\int_0^R \omega'(\tau)\,d\tau = \omega(R) - 1 > \omega(kR) - 1 = k\int_0^R \omega'(k\tau)\,d\tau.$$

Пусть для $\omega(x) \in \Omega_\infty$ справедливо

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{\omega(t)}{\omega(\nu t)} = \alpha(\nu) < \infty \quad (\nu>1),$$

т. е. для $t > t_0$

$$\omega(t) \leqslant c(\nu)\,\omega(\nu t),$$

где $c(\nu) < \infty$ — постоянная.

Тогда

$$\frac{\pi^2}{4x}\sum_{|b_k|<R}\omega(|b_k|) \leqslant \frac{\pi^2}{4x}\left[c(k)\,\omega(kR)\,n(R, a) + \int_0^R n(t, a)\,d(-\omega(kt))\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi^2}{4x}\left[\frac{c(k)}{\ln k}\,\omega(kR)\,N(kR, a, f) + \frac{1}{\ln k}\int_0^R N(kt, a, f)\,d(-\omega(kt))\right] \leqslant$$

$$\leqslant \pi^2 (4x)^{-1}\,c(k)\ln^{-1} k\,\widetilde{N}_\infty(kR, a, f), \tag{2.15}$$

так как $n(x, a) \leqslant \ln^{-1} k N(kx, a, f)$.

Пусть K—произвольный компакт из круга $K(0; 0{,}5) = \{a\colon |a| < 0{,}5\}$ и μ—равновесная мера Робена для K. Проинтегрируем неравенство (2.14) по мере μ и по компакту K. В силу соотношений (1.5) леммы 1.1, (1.15) леммы 1.2, (1.24) ([1]) и (2.15), оценка (2.14) дает

$$\int_{r_1}^{r_2}\left\{\int_K \overline{L}_\infty(r, a, f)\,d\mu(a)\right\}\frac{dr}{r} \leqslant C(K)\,2x\ln\frac{r_2}{r_1} +$$

$$+\frac{\pi^2 c(k)}{4x\ln k}\int_K \widetilde{N}_\infty(kR, a, f)\,d\mu(a) + \frac{10}{\ln k}\frac{k^{2x}}{k^{2x}-1}\left(\frac{r_2}{R}\right)^{2x}(\widetilde{T}_\infty(kR, f) + C) \leqslant$$

$$\leqslant Cx\ln(r_2 r_1^{-1}) + c(\mu_1)(x\ln k)^{-1}(\widetilde{T}_\infty(kR, f) + C) +$$

$$+ K\ln^{-1} k\cdot k^{2x}(k^{2x}-1)^{-1}(r_2 R^{-1})^{2x}(\widetilde{T}_\infty(kR, f) + C), \tag{2.16}$$

где μ_1— фиксированно и больше 1.

Действительно, $\widetilde{N}_\infty(kR, a, f) < (c_1(\mu_1)/(\mu_1 - 1))\,\widetilde{T}_\infty(\mu_1 kR, f) \leqslant$ $\leqslant (c_1(\mu_1)/(\mu_1 - 1))\,\mu_1^{\lambda_\infty+1}\,\widetilde{T}_\infty(kR, f) = c(\mu_1)\,\widetilde{T}_\infty(kR, f)$, в силу справедливости (1) (см. лемму 1.1 в [1]), конечности λ_∞ и

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{t^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\,dt \leqslant \int_0^{\infty} \frac{t^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\,dt = \frac{1}{2x}\,\frac{1}{t^{2x}}\,.$$

Выберем любое $\nu > 1$ и положим в неравенстве (2.16) при фиксированном $n \geqslant n_0$, $x = \ln^{3\nu} \varphi(y_n)$. Тогда для $n \geqslant n_0 = n_0(\nu, f)$ (см. равенства (2.13))

$$(r_2 R^{-1})^{2x} = \exp\{-2x\,(3\ln^{\nu}\varphi(y_n))^{-1}\} = \exp\{-2\cdot 3^{-1}\ln^{2\nu}\varphi(y_n)\} <$$

$$\leqslant 36\ln^{-4\nu}\varphi(y_n) \leqslant 1;\ \tilde{T}_\infty(kR, f) \leqslant \bar{T}_\infty\{\exp[y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n)]\} =$$
$$= \varphi(y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n));\ k^{2x} = \exp\{2x\,(3\ln^{\nu}\varphi(y_n))^{-1}\} \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{0{,}5\ln^{2\nu}\varphi(y_n)\} \geqslant 6^{-1}\ln^{4\nu}\varphi(y_n) > 2.$$

В силу последних соотношений оценка (2.16) принимает вид

$$\int_{r_1}^{r_2}\left\{\int_K L_\infty(r, a, f)\,d\mu(a)\right\}\frac{dr}{r} \leqslant C\,x\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{c(\mu_1)}{x}\ln^{\nu}\varphi(y_n)\,\varphi\times$$

$$\times\left\{y_n + \frac{1}{\ln^{\nu}\varphi(y_n)}\right\} + K\ln^{-3\nu}\varphi(y_n)\,\varphi(y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n)) \leqslant$$
$$\leqslant Cx\ln^{-\nu}\varphi(y_n) + K\,\nu\varphi(y_n)\ln^{-3\nu}\varphi(y_n) +$$
$$+ c(\mu_1)\,x^{-1}\,\nu\varphi(y_n)\ln^{\nu}\varphi(y_n) < C\{\ln^{2\nu}\varphi(y_n) + \varphi(y_n)\ln^{-2\nu}\varphi(y_n)\}.$$

Отсюда, аналогично случаю $\omega(x)\equiv 1$, имеем, что существует $r \in [r_1, r_2]$ такое, что

$$\int_K L_\infty(r, a, f)\,d\mu(a) < C\,\tilde{T}_\infty(r, f)\ln^{-\nu}\bar{T}_\infty(r, f) \tag{2.17}$$

(см. [4], стр. 87).

Оценка (2.17) выполняется на каждом сегменте $[r_1, r_2]$, где $\{r_1 = r_1(n)\} \nearrow \infty$ и $\{r_2 = r_2(n)\} \nearrow \infty$ при $n \to \infty$, следовательно

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\tilde{T}_\infty(r, f)}\int_K L_\infty(r, a, f)\,d\mu(a) = 0,$$

и по лемме Фату

$$\int_K \beta_\infty(a, f)\,d\mu(a) = 0.$$

Отсюда обычным образом следует, что множество $\Omega_\infty(f)$ имеет емкость нуль. Теорема 3 доказана.

Введем целую функцию $E_0(z)$

$$E_0(z) = \begin{cases} \Psi_1(z)\,z^{-2}, & z \in \bar{D}_0 \\ \exp(z+e^z) + \Psi_2(z)\,z^{-2}, & z \in A_0, \end{cases} \tag{2.18}$$

где $\Psi_i(z)$, $i=1, 2$, аналитические функции в соответствующих областях; для каждого z: $|z|\geqslant 1$ в соответствующих областях определения $|\Psi_i(z)|<K$, $i=1, 2$. Рассмотрим систему полуполос $A_n=\{z=x+iy: x>0, (2n-1)\pi\leqslant y<(2n+1)\pi\}$, где $n=0; \pm 1, \pm 2; \pm 3,\cdots$, и положим $E_n(z)=E_0(z-2\pi in)$ (подробнее см. [4], гл. 3).

Пусть $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($b_n\neq 0$) — произвольная ограниченная последовательность различных комплексных чисел. Положим $b_0=1$, $b_{-n}=b_n$. Справедлива лемма ([4], стр. 81).

Лемма 2.2. *Функция*

$$g(z)=\exp(-z-e^z)\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n E_n(z)$$

является целой функцией, для которой при $r>r_0$ $T(r, g)\leqslant 2e^r r^{-0,5}$ и при $r>r_0(n)$, $n=1, 2, 3,\cdots$, $L(r, b_n, g)\geqslant 0{,}5\, e^r$.

Доказательство теоремы 4. Покажем, что для функции $g(z)$, определяемой в лемме 2.2, при $\omega(x)=e^{-(x-1)}x^{-0,5}\in\Omega_\infty$ $\lambda_\omega=0$. С учетом того, что

$$\overline{T}_\omega(r, g)\leqslant\omega(r)\,T(r, g)+\int_1^r|\omega'(\tau)|\,T(\tau, g)\,d\tau\leqslant\omega(r)\,T(r, g),$$

получаем $\overline{T}_\omega(r, g)\leqslant 2er^{-1}$, откуда

$$\lambda_\omega=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln\overline{T}_\omega(r, g)}{\ln r}=0.$$

Из представления функции $E_n(z)$ получаем

$$L_\omega(r, b_m, g)=\max_{|z|=r}\ln^+_\omega\{|g(re^{i\theta_m})-b_m|\}^{-1}\geqslant$$

$$\geqslant\max_{|z|=r}\left[\omega(r)\ln\{|g(re^{i\theta_m})-b_m|\}^{-1}+\int_1^r|\omega'(\tau)|\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}\,d\tau\right]^+.$$

Оценим

$$\int_1^r|\omega'(\tau)|\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}\,d\tau.$$

$$\int_1^r|\omega'(\tau)\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}\,d\tau\geqslant\int_{\frac{r}{m}}^r|\omega'(\tau)|\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}\,d\tau=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\int_{\frac{rk}{m}}^{\frac{r(k+1)}{m}}|\omega'(\tau)|\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}\,d\tau. \qquad (2.19)$$

На каждом участке интегрирования каждой точке луча $z=e^{i\theta_m}$ ставится в соответствие точка горизонтальной прямой $z=2k\pi i$, $k=1, 2,\cdots, m-1$. Обе точки находятся на пересечении прямых $z=e^{i\theta_m}$ и $z=2k\pi i$, $k=1, 2,\cdots, m-1$ с окружностью

$$|z|=\tau,\ \frac{rk}{m}<\tau<\frac{r(k+1)}{m},\ k=1, 2,\cdots, m-1.$$

При достаточно больших r секущая, соединяющая эти две точки, будет стремиться к касательной, проведенной из точки луча $z=e^{i\theta_m}$.

Тогда вводим новую переменную

$$u=\frac{\tau}{\cos\theta_m},\ \frac{rk}{m}<\tau<\frac{r(k+1)}{m},\ k=1, 2,\cdots, m-1.$$

Эта переменная будет определять точки прямой $z=2k\pi i$, $k=1, 2,\cdots, m-1$, а оценка в этих точках известна.

Тогда (2.19) примет вид

$$\int_1^r|\omega'(\tau)|\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}\,d\tau\geqslant\sum_{k=1}^{m-1}\Bigg[\int_{\frac{rk}{m\cos\theta_m}}^{\frac{r(k+1)}{m\cos\theta_m}}\ln\frac{1}{|g(u\cos\theta_m\, e^{i\theta_m})-b_m|}\times$$

$$\times|\omega'(u\cos\theta_m)|\cos\theta_m\,du+O(1)\Bigg]>\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\Bigg\{\int_{\frac{rk}{m\cos\theta_m}}^{\frac{r(k+1)}{m\cos\theta_m}}e^{u\cos\theta_m}\,e^{-(u\cos\theta_m-1)}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{u\cos\theta_m}}\left[1+\frac{1}{2u\cos\theta_m}\right]\cos\theta_m\,du\Bigg\}+O(1)>\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}2e\sqrt{\frac{r}{m}}\times$$

$$\times[\sqrt{k+1}-\sqrt{k}]+O(1)=e\sqrt{rm^{-1}}(\sqrt{m}-1)+O(1)=$$

$$=e\sqrt{r}(1-m^{-0,5})+O(1).$$

Отсюда получаем, что

$$\beta_\omega(b_m, g)=\lim_{r\to\infty}\frac{L_\omega(r, b_m g)}{\overline{T}_\omega(r, g)}=\infty. \tag{2.20}$$

Из формулировки леммы 2.2 видно, что при всех тех $\omega(x)\in\Omega\infty$, для которых нижний ω-порядок конечен, справедливо (2.20).

Покажем теперь, что функция $g(z)$, о которой говорится в условиях теоремы 4, является функцией, определяемой леммой 2.2 со специальными $\{b_k\}_1^\infty$.

Опишем процесс выбора $\{b_k\}$. Пусть

$$\theta(n)=\exp_3(2n),\ n=1, 2, 3,\cdots.$$

Рассмотрим следующее множество действительных чисел C:

$$C=\left\{a: a=1+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n \exp[-\theta(n)]\right\}, \tag{2.21}$$

где γ_p принимает независимо два значения 0 и 1, причем для каждого a 1 встречается бесконечное число раз. Множество C имеет мощность континуума (доказательство см. в [4]).

Запишем теперь каждое натуральное число n в двоичной системе

$$n=\sum_{k=1}^{q(n)}\gamma_k 2^{k-1} \quad (\gamma_k=0,1), \tag{2.22}$$

при этом $q(n)$ определяется однозначно, как наибольший индекс, для которого $\gamma_{q(n)}=1$. Между множеством натуральных чисел (2.22) и множеством

$$b_n=1+\sum_{k=1}^{q(n)}\gamma_k \exp[-\theta(k)],\ n=1, 2, 3, \cdots, \tag{2.23}$$

утанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Пусть $b_0=1$ и $b_{-n}=b_n$. С помощью последовательности $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ составим целую функцию $g(z)$ как и в лемме 2.2. Эта функция удовлетворяет условиям леммы 2.2. Прежде всего для каждого b_n вида (2.23) $\beta_\omega(b_n, g)=\infty$. Но и для каждого $a\in C$, где множество C определено соотношением (2.21), также справедливо $\beta_\omega(a, g)=\infty$. (Доказательство последнего факта проводится аналогично доказательству соответствующего факта при $\omega(x)\equiv 1$).

Теорема 4 доказана.

Автор выражает благодарность проф. Петренко Виктору Павловичу за постановку задачи.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступила 24.X.1980

Ս. Ս. ՍԵԿՏ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների աճը Մ. Մ. Ջրբաշյանի բնութագրիչներում. II (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է դրական ω-շեղումների բազմության բացառիկությունը $\omega(x)\in\Omega_\infty$-ի համար աստիճանային աճի դեպքում։ Բերվում է $g(z)$ ամբողջ ֆունկցիայի օրինակ, որի համար դրական ω-շեղումների բազմությունը ունի կոնտինուումի հզորություն։

S. S. SECT. *Growth of meromorphic function in M. M. Djrbashian characteristics. II* (summary)

In the paper exclusitiveness of the set of positive ω-deviations is established, where $\omega(x)\in\Omega_\infty$ has power growth. An example of entire $g(z)$ function is given, for which the set of positive ω-deviations has the power of the continuum.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. С. Сект.* Рост мероморфных функций в характеристиках М. М. Джрбашяна, I, Изв. АН Арм.ССР, сер. «Математика», XVI, № 4, 1981, 293—300.
2. *М. М. Джрбашян.* Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. «Математика», V, № 6, 1970, 453—485.
3. *А. А. Гольдберг, Р. Д. Мохонько.* Об обобщенных неванлинновских характеристиках, Изв. АН Арм.ССР, сер. «Математика», XI, № 2, 1976, 132—154.
4. *В. П. Петренко.* Рост мероморфных функций, Харьков, Изд. при ХГУ, изд. объед. «Вища школа», 1978.
5. *У. Хейман.* Мероморфные функции, М., «Мир», 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 5, 1981 Математика

Л. Ш. АГАБАБЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Введение

Слабо гиперболические (вырождающиеся гиперболические) уравнения обладают рядом специфических особенностей, проявляющихся при постановке и изучении классических задач (см., например, [1]). Наиболее исследованной является задача Коши, причем случай вырождения внутри области сравнительно мало исследован (см. [1]—[5], а также обзор в [6]).

В случае одномерного строго гиперболического уравнения второго порядка хорошо известен целый ряд корректно поставленных задач и естественно поставить вопрос об изучении аналогичных задач для слабо гиперболических уравнений.

Одним из первых исследований в этой области были работы Геллерстедта ([7], [8]), который впервые показал, что устойчивость задачи Коши для уравнения

$$u_{tt} - \lambda^2 (t)\, K(x, t)\, u_{xx} = a u_x + b u_t + cu + f \tag{1}$$

$$(\lambda (0) = 0,\ \lambda (t) > 0 \text{ при } t > 0,\ K(x, t) \geqslant \varepsilon = \text{const} > 0)$$

с гладкими коэффициентами и с начальными данными на линии параболичности $t = 0$ зависит от коэффициента $a(t, x)$ и может быть нарушена. Он же изучал, в ходе исследования задачи Трикоми, задачу Гурса для уравнения (1) с данными на характеристиках, пересекающихся на оси x в точке, где задана особенность решения.

Задача Гурса исследовалась в дальнейшем рядом авторов, но при ином расположении характеристик с начальными данными. В частности, некоторые результаты по этой задаче следуют из работ Т. В. Чекмарева [9], [10] по системам второго порядка. В. Н. Враговым [11] изучена задача Гурса с линией вырождения на оси симметрии области. Этот же случай изучал Т. Ш. Кальменов [12], который в другой работе [13] исследовал задачу Гурса для интересного со многих точек зрения, (см. также [18], [19]), модельного уравнения (1) (при $\lambda(t) = t$, $K(x, t) \equiv 1$ $a = \text{const}$, $b \equiv c \equiv f \equiv 0$). В работе Б. А. Бубнова [14] также содержатся интересные условия корректности задач Гурса и Дарбу для уравнения (1).

Отметим особо работу А. М. Нахушева [15], где изучена задача Дарбу для уравнения (1) и получены общие критерии существования априорных оценок, причем естественность полученных условий подтверждена примерами (см. также [13] и [16]).

Смешанные задачи для уравнения (1) изучались в работе Р. Г. Айрапетяна [17] (см. также [6]).

Как правило, для корректности упомянутых задач необходимо наложить на младшие коэффициенты уравнения (1) определенные ограничения. В то же время при некоторых «аномальных» значениях коэффициентов та или иная задача перестает быть хорошо поставленной, в то время как малые возмущения этих коэффициентов меняют ситуацию (см., например, [13], [18], [19]). Как правило, такие явления удается обнаружить и изучить на примерах модельных уравнений. Подавляющее большинство этих модельных уравнений относится к случаю $\lambda(t) = t^{\alpha}$, $\alpha = \text{const}$ и сводится, в конечном счете, к известному уравнению Эйлера—Дарбу см. [1], [6]).

В предлагаемой работе вводится и изучается класс модельных уравнений с произвольно заданной «скоростью вырождения». Эти уравнения оказываются «аномальными» по отношению к определенным классическим задачам, в то время как некоторые другие задачи оказываются для него хорошо поставленными.

1°. Основные соотношения. Пусть функция $\lambda(t) > 0$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$, $\lambda(0) \geq 0$. Рассмотрим в полуплоскости $t > 0$ уравнение

$$u_{tt} - \lambda^2(t)\, u_{xx} = \left(\lambda'(t) + \frac{2\lambda(t)}{t}\right) u_x. \tag{2}$$

При $\lambda(0) = 0$ уравнение (2) гиперболо-параболическое и именно этот случай представляет для нас основной интерес. Существенным (см. также п. 5°) является то обстоятельство, что в характеристических обозначениях $\partial_{\pm} = \frac{\partial}{\partial t} \pm \lambda(t) \frac{\partial}{\partial x}$ уравнение (2) записывается в виде

$$\partial_+ [t\partial_- u - u] \equiv \partial_+ \left[t^2\, \partial_- \left(\frac{u}{t} \right) \right] = 0, \quad t > 0. \tag{2'}$$

Обозначим (см. рис. 1) через D криволинейный треугольник, ограниченный характеристиками OB и AB уравнения (2) и отрезком (0, 1) оси x.

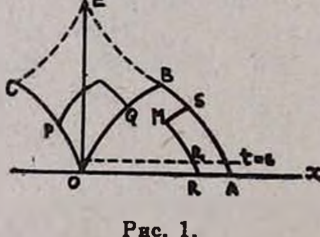

Рис. 1.

Семейства характеристик уравнения (2) задаются уравнениями

$$x = \pm\, \varphi(t) + \mathrm{const}, \text{ где } \varphi(t) = \int\limits_0^t \lambda(t)\, dt.$$

Через φ^{-1} обозначим обратную к φ функцию и пусть $M(x, y)$ — произвольная точка из D.

Уравнения характеристик MS, MR (см. рис. 1) в координатах ξ, τ соответственно имеют вид $\xi = x + \varphi(\tau) - \varphi(t)$ и $\xi = x - \varphi(\tau) + \varphi(t)$, а координаты точек R и S легко подсчитываются: $R(x + \varphi(t), 0)$,

$$S\left(\frac{x - \varphi(t) + 1}{2},\ \varphi^{-1}\left(\frac{1 + \varphi(t) - x}{2}\right)\right),\ (x, t) \in D.$$

Обозначив

$$u(x, t)|_{AB} = u(1 - \varphi(t), t) = \nu(t),\quad u(x, 0) = \mu(x), \tag{3}$$

получим, что (см. (2′)) в точке $M(x, t)$

$$t^2 \partial_-\left(\frac{u}{t}\right) = \varphi^{-1}\left(\frac{1 + \varphi(t) - x}{2}\right) \nu'\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1 + \varphi(t) - x}{2}\right)\right) - \\ - \nu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1 + \varphi(t) - x}{2}\right)\right). \tag{4}$$

В предположении $t\,\partial_- u \to 0$ $(t \to 0)$ получим

$$\mu(x) = \nu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1 - x}{2}\right)\right) - \varphi^{-1}\left(\frac{1 - x}{2}\right) \nu'\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1 - x}{2}\right)\right). \tag{5}$$

Соотношение (5) является ключевым и именно оно предопределяет «аномальность» оператора (2′). Действительно, из него следует, что значения любого решения u уравнения (1) на линии параболичности OA (при любом расположении A на положительной полуоси OX однозначно определяются значениями u на характеристике OB. И наоборот: коль скоро мы знаем значения u на отрезке OA, значения на характеристике AB содержатся в семействе решений дифференциального уравнения первого порядка с сингулярностью в коэффициенте.

Нашей целью является анализ влияния этого явления на постановки и свойства основных классических задач.

В дальнейшем основной является следующая

Лемма. *Пусть*

$$\int\limits_0^T \frac{\lambda(\tau)}{\tau}\, d\tau < +\infty \quad (T > 0).$$

Тогда для любого дважды непрерывно дифференцируемого в $\overline{D}$ решения u уравнения (2) справедливо соотношение

$$u(x, t) = \nu(\varphi^{-1}(\varphi(t)+\alpha)) - \varphi^{-1}(\alpha(\nu'(\varphi^{-1}(\alpha)) + t\cdot\tau(x+\varphi(t)) + t\cdot\Omega(t, \alpha), \tag{6}$$

где ν *определено в* (3), $\tau(x) = u_t(x, 0)$, $\alpha = \dfrac{1-x-\varphi(t)}{2}$, *а функция* Ω *обладает следующими свойствами:*

$$|\Omega(t, \alpha)| \leqslant \text{const}, \lim_{\alpha>0,\, t\to 0} \Omega(t, \alpha) = 0,$$

$$\lim_{t>0,\, \alpha\to 0} \Omega(t, \alpha) = -\nu'(0). \tag{7}$$

Доказательство. Через R_1 обозначим точку из D, лежащую на характеристике MR, координаты которой равны $(x+\varphi(t)-\varphi(\varepsilon), \varepsilon)$ ($\varepsilon>0$ — достаточно мало). Интегрируя соотношение (4) по характеристике MR_1, получим

$$\frac{u(x, t)}{t} = \frac{\nu(\varphi^{-1}(\varphi(t)+\alpha))}{t} = \int_{\varepsilon}^{t} \frac{\nu'(\varphi^{-1}(\varphi(\tau)+\alpha))}{t^2}\Bigg[\varphi^{-1}(\varphi(\tau)+\alpha) -$$

$$- \frac{\tau\lambda(\tau)}{\lambda(\varphi^{-1}(\varphi(\tau)+\alpha))}\Bigg]d\tau + \frac{u(x+\varphi(t)-\varphi(\varepsilon), \varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\nu(\varphi^{-1}(\varphi(\varepsilon)+\alpha))}{\varepsilon}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим соотношение (6), где

$$\Omega(t, \alpha) = \int_0^t \left\{\frac{\nu'(\varphi^{-1}(\varphi(\tau)+\alpha))}{\tau^2}\left[\frac{\varphi^{-1}(\varphi(\tau)+\alpha)\lambda(\varphi(\tau)+\alpha)) - \tau\lambda(\tau)}{\lambda(\varphi^{-1}(\varphi(\tau)+\alpha))}\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{\varphi^{-1}(\alpha)\nu'(\varphi^{-1}(\alpha))}{\tau^2}\right\}d\tau. \tag{8}$$

Подынтегральное выражение в (8) при $\tau\to 0$ имеет порядок $O\left(\frac{\lambda(\tau)}{\tau}\right)$ и, следовательно, по условию леммы, интеграл сходится при фиксированных t и α и, как нетрудно видеть, равномерно ограничен. Соотношение $\Omega(t, \alpha)\to 0$, $t\to 0$, ($\alpha\neq 0$) также легко усматривается из (8). С другой стороны, имеем

$$\Omega(t, \alpha) = -\int_0^t \left\{\nu'(\varphi^{-1}(\varphi(\tau)+\alpha))\frac{d\varphi^{-1}(\varphi(\tau)+\alpha)}{\tau} - \frac{\varphi^{-1}(\alpha)\nu'\varphi^{-1}(\alpha))}{\tau^2}\right\}d\tau =$$

$$= \frac{1}{t}\left[\varphi^{-1}(\alpha)\,\nu'(\varphi^{-1}(\alpha)) - \nu'(\varphi^{-1}(\varphi(t)+\alpha))\,\varphi^{-1}(\varphi(t)+\alpha)\right] +$$

$$+\int_0^t \frac{\varphi^{-1}(\varphi(\tau)+\alpha)\,\nu''(\varphi^{-1}(\varphi(\tau)+\alpha))}{\lambda(\varphi^{-1}(\varphi(\tau)+\alpha))}\;\frac{\lambda(\tau)}{\tau}\,d\tau$$

и, следовательно, при $t>0$ и $\alpha\to 0$

$$\Omega(t,\alpha) = -\nu'(t) + \int_0^t \nu''(\tau)\,d\tau = -\nu'(0),$$

что и завершает доказательство леммы.

2°. Задачи Коши, Дарбу и Коши—Дарбу. Во всех изучаемых в этом и следующем параграфе задачах ищется дважды непрерывно дифференцируемое в $\overline{D}$ решение уравнения (2).

Задача I (Задача Коши)

$$u|_{OA} = \mu(x),\quad u_t|_{OA} = \tau(x),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{9}$$

Решение дается непосредственно формулой (6), где ν (см. (5)) — решение задачи

$$\begin{gathered} t\,\nu'(t) - \nu(t) = -\mu(1-2\varphi(t)),\\ \nu(0) = \mu(1),\quad \nu'(0) = \tau(1). \end{gathered} \tag{10}$$

Уравнение в (10) имеет особенность при $t=0$ и, по существу, эквивалентно уравнению

$$\nu''(t) = 2\mu'(1-2\varphi(t))\;\frac{\lambda(t)}{t},$$

поэтому задача (10) имеет единственное решение

$$\nu(t) = 2\int_0^t (t-\tau)\,\mu'(1-2\varphi(\tau))\,\frac{\lambda(\tau)}{\tau}\,d\tau + t\tau(1) + \mu(1). \tag{11}$$

Таким образом. задача I имеет единственное решение, определяемое формулами (6), (9), (11).

Заметим, что корректность задачи I следует из известных результатов (см., например, [2]), однако полученная здесь формула фактически характеризует точную «потерю гладкости»: необходимо требование существования и суммируемости $\mu'(x)$ и $\nu(x)$.

Задача II (Задача Дарбу I)

$$u|_{OA} = \mu(x),\ 0 < x \leqslant 1,\ u|_{AB} = \nu(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2}\right). \tag{12}$$

Из формулы (6) непосредственно следует, что решение неединственно (определяется с точностью до произвольной функции $\tau(x+\varphi(t))$, а необходимыми и достаточными условиями существования решения являются соотношение (5) и условия согласования $\mu(1)=\nu(0)$, $\nu'(1)=\tau(1)$.

Задача III (Задача Дарбу I)

$$u|_{OA}=\mu(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ u|_{OB}=\nu^*(t). \tag{13}$$

Для определения значения $\nu(t)$ в формуле (6) воспользуемся уравнением (10) при условии $\nu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\nu^*\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. В окрестности точки $t=\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ — это уравнение с гладкими коэффициентами и при $t>0$ мы получим

$$\nu(t)=t\int\limits_t^{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\mu(1-2\varphi(\tau))}{\tau^2}\,d\tau+\frac{\nu^*\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot t, \tag{14}$$

откуда следует, что $\nu(t)\to\mu(1)$, $t\to+0$.

Функция $\tau(x)$ определяется подстановкой в (6) $x=\varphi(t)$:

$$\tau(x)=\left[\varphi^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{-1}\left[\nu^*\left(\varphi^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\mu(x)-\nu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right]+$$
$$+\nu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1-x}{2}\right)\right)-\Omega\left(\varphi^{-1}\left(\frac{x}{2}\right),\frac{1-x}{2}\right). \tag{15}$$

Легко видеть, что $\nu^{*\prime}(0)=\tau(0)$. Таким образом, при выполнении естественного условия согласования $\mu(0)=\nu^*(0)$ задача III обладает единственным решением, задаваемым формулами (6), (14), (15).

Задача IV (Задача Коши—Дарбу или задача Дарбу II)

$$u|_{AB}=\nu(t),\ u_t|_{OA}=\tau(x). \tag{16}$$

Решение существует и единственно при условии согласования $\tau(1)=\nu'(0)$ и задается непосредственно формулой (6).

3°. Задача Гурса. Задача V.

$$u|_{OB}=\nu^*(t),\ u'_{AB}=\nu(t). \tag{17}$$

По сути дела, при $t>0$ мы решаем задачу Гурса для строго гиперболического уравнения и исследование этой задачи сводится к изучению поведения решения u при $t\to 0$. Из (6), (10) для определения $\tau(x)$ получим уравнение

$$\nu^*(t)=\nu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)-\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}-\varphi(t)\right)\nu'\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}-\varphi(t)\right)\right)+$$
$$+t\Omega\left(t,\frac{1}{2}-\varphi(t)\right)+t\tau(2\varphi(t)). \tag{18}$$

Отсюда $\tau(x)$ определяется при $x > 0$. Для существования решения требуемой гладкости необходимо и достаточно выполнение следующих условий согласования:

$$\nu^*\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\nu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

$$\nu^*(0)-\nu\,\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\Big)+\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\nu'\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)=0. \tag{19}$$

Задача VI (см. рис. 1).

$$u|_{OC}=\sigma_1(t),\ u|_{OB}=\sigma_2(t). \tag{20}$$

Решение ищется в характеристическом четырехугольнике $OBEC$. Если предположить, что решение существует, то, так же, как и в 1° (точка N на рис. 1 имеет координаты $(x,\ t)$), получим $(2\beta=x+\varphi(t))$:

$$\frac{u(x,t)}{t}=\int\limits_{\varphi^{-1}(\beta)}^{t}[\varphi^{-1}(\varphi(\tau)-\beta)\,\sigma_1'(\varphi^{-1}(\varphi(\tau)-\beta))-\sigma_1(\varphi^{-1}(\varphi(\tau)-\beta))]\frac{d\tau}{\tau^2}+$$

$$+[\varphi^{-1}(\beta)]^{-1}\sigma_2(\varphi^{-1}(\beta)). \tag{21}$$

Выясним теперь, при каких условиях функция u, задаваемая этой формулой, удовлетворяет граничным условиям (20).

Не представляет труда убедиться, что при $x\to\varphi(t)$ $(t>0)$ $u(x,t)\to\sigma_2(t)$, т. е. второе из условий (20) всегда выполнено при $t>0$. Если же $x\to-\varphi(t)$ (т. е. $\beta\to 0$), то интеграл в (21) становится несобственным. Проведя регуляризацию интеграла справа в (21) (в точке $t=0$) и сделав замену переменной $z=\varphi^{-1}(\varphi(\tau)-\beta)$, получим

$$u(x,\ t)=\sigma_1(\varphi^{-1}(\varphi(t)-\beta))+t\,[\varphi^{-1}(\beta)]^{-1}[\sigma_2(\varphi^{-1}(\beta))-\sigma_1(0)]-$$

$$-\varphi^{-1}(\varphi(t)-\beta)\,\sigma_1'(\varphi^{-1}(\varphi(t)-\beta))+\int\limits_{0}^{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\beta)}\frac{z\sigma''(z)}{\varphi^{-1}(\varphi(z)+\beta)}\,dz. \tag{22}$$

Отсюда следует, что $(2\beta=x+\varphi(t))$

$$\lim_{\beta\to 0}u(x,t)=\sigma_1(t)+t\,]\sigma_2'(0)-\sigma_1'(0)]+\lim_{\beta\to 0}[\varphi^{-1}(\beta)]^{-1}[\sigma_2(\beta)-\sigma_1(\beta)]. \tag{23}$$

Таким образом, необходимыми и достаточными условиями существования решения задачи VI являются следующие:

$$\sigma_1(0)=\sigma_2(0),\ \sigma_1'(0)=\sigma_2'(0). \quad (24$$

4°. Некоторые замечания. 1. Результаты предыдущих параграфов выявили ряд особенностей уравнения (2). Так, при выполнении определенных условий согласования задачи I, III—VI оказались хорошо поставленными, а задача II разрешима лишь при выполнении основного условия (5) и притом неоднозначно. Однако и задачи V, VI существенно отличаются от классических. Отметим, например, необычное условие согласования (19), а также то обстоятельство, что второе из условий (24) не является следствием повышенных требований к гладкости u, ибо, как это следует из соотношения (23), при нарушении его сколь-нибудь разумного решения задачи VI не существует.

Аналогичное явление отмечено А. М. Нахушевым [20].

2. Остановимся вкратце на неизученных в п.п. 2, 3 классических задачах для уравнения (2).

Прежде всего отметим, что не представляет труда изучить задачу Коши для уравнения (2) при $0 \leqslant t \leqslant T$ с данными на линии $t=T$. Несложные, но несколько громоздкие выкладки показывают, что при выполнении условия $\int\limits_0^T \frac{\lambda(\tau)}{\tau} d\tau < +\infty$ задача эта корректна вплоть до линии параболичности $t = 0$. Эффект «потери гладкости» здесь такой же, как и в задаче I (см. также [3], [4]).

Что же касается задачи Коши—Дарбу

$$u_t|_{OA} = \tau(x),\ u_{OB} = \nu^*(t),$$

то ее исследование упирается (см. (6)) в решение определенного интегрального уравнения относительно функции $\nu(t)$, пока нами не исследованного. Аналогичные трудности возникают и при изучении смешанных задач (например, задачи $u|_{OE} = \alpha(t)$, $u|_{OA} = \mu(x)$).

3. Рассмотрим теперь задачу Трикоми для уравнения, эллиптического при $t < 0$ и имеющего вид (2) при $t > 0$ (как обычно, речь идет о непрерывно дифференцируемом решении).

Сначала рассмотрим задачу с заданным u на кривой OB в области гиперболичности. Из формулы (6) следует, что, как и в классических случаях, на отрезке OA приходим к интегральному уравнению для определения $\mu(x)$ (или $\tau(x)$). Однако, как и выше (см. п. 2), уравнение это имеет ряд специфических особенностей и пока нами не изучено.

Совершенно иной характер имеет задача Трикоми с заданным u в области гиперболичности на характеристике AB. Именно, задача эта тривиально разрешима на основе формулы (6). Действительно, из формулы (5) следует, что $\mu(x) = u(x, 0)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ известно. Переходя теперь в область эллиптичности, решаем задачу Дирихле (предполагая, что она однозначно разрешима в классе непрерывно дифференцируемых при $t \leqslant 0$ функций). Наконец, используя значение $\tau(x) = u_t(x, -0)$, выписываем решение (6) при $t > 0$. Таким образом, задача эта хорошо поставлена. Очевидно, что такой же является и соответствующая задача Франкля (см. [1]).

Таким образом, в данном случае мы сталкиваемся с явлением, отмеченным впервые в работе [20] А. М. Нахушева, а именно: неединственность решения задачи Дарбу в области гиперболичности не влияет на корректность задачи Трикоми (см. также работу А. Т. Джунисова [21]).

4. Из (2′) следует, что оператор (2) является композицией одномерных дифференциальных операторов, действующих по характеристикам, причем один из них имеет сингулярные коэффициенты. Именно это обстоятельство и предопределяет «аномальный» характер уравнения (2).

Действительно, внимательный анализ уравнений, изученных в [13] показывает (см. также [18], [19]), что аналогичные ситуации в случае $\lambda(t)=t^a$ и $K\equiv 1$ в уравнении (1) реализуются именно тогда, когда уравнение (1) сводится к виду $L_+ L_- u=0$ где L_+ и L_- — дифференциальные операторы (необязательно первого порядка) по характеристикам.

В случае произвольного вырождения ранее обращалось внимание на уравнение $\partial_+ \partial_- u=0$ $(\partial_\pm=\partial_t \pm \lambda(t, x)\, \partial_x)$. Даже этот простейший случай представляет определенный интерес с точки зрения задач п.п. 2°, 3° и п.п. 2, 3 данного параграфа. В частности, как это уравнение, так и уравнение (2) интересны с точки зрения ветвления сингулярностей при переходе через линию параболичности (если принять $\lambda(-t) = =\lambda(t)$). Соответствующий анализ не представляет сложности (ср. с [18], [19]).

5. В заключение отметим, что выбор уравнения (2) в качестве объекта изучения продиктован, во-первых, соображениями простоты его вида (отсутствуют коэффициенты при u_t и u, а коэффициент при u_x зависит только от t), а во-вторых, тем, что это уравнение не сводится заменой переменной или заменой неизвестной функции к изученным ранее (исключение составляет разве что случай $\lambda(t) = t^a$, когда уравнение (2) сводится к уравнению Эйлера—Дарбу).

Нарушение условия $\int\limits_0^T \frac{\lambda(\tau)}{\tau}\, d\tau < +\infty$ (особенно если не требовать непрерывности $\lambda(t)$ в нуле) также приводит к интересным эффектам, отличным, вообще говоря, от изученных выше.

Отметим также, что и при наличии в уравнении (1) младших коэффициентов, при определенных их значениях, можно записать его в аналогичном (2′) виде $\partial_+ \alpha(\partial_- \beta u)$. С другой стороны, уже в виде (2′) можно считать $\lambda=\lambda(t, x)$ и тогда при $\lambda(t, x)>0$, $(t>0)$, $\lambda(0, x)=0$, анализ задач I — VI упирается в вполне преодолимые технические трудности. Укажем здесь интересный случай, когда в (2′) $\lambda(t, E_1)>0$, $\lambda(t, E_2)>0$ $(E_1 \cup E_2=(0, 1)$, $E_2\neq\varnothing$, $\lambda(t, x)>0$, $x>0)$. В этом случае аналог основного соотношения (5) выполняется только на множестве E_2 отрезка (0,1).

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 17. VII. 1981

Լ. Շ. ԱՂԱԲԱԲՅԱՆ, Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Մի մոդելային թույլ հիպերբոլական հավասարման համար որոշ խնդիրների մասին (ամփոփում)

Հոդվածում հետազոտված են

$$u_{tt} - \lambda^2(t)\, u_{xx} = \left(\lambda'(t) + \frac{2\lambda(t)}{t}\right) u_x$$

թույլ հիպերբոլական հավասարման Կոշու, Գուրսայի, Կոշի-Գուրսայի և Դարբուի խնդիրները: Նշված են այդ խնդիրների կոռեկտության պայմանները: Վերլուծված են նաև այդ հավասարման այլ հատկությունները:

L. Sh. AGABABIAN, A. B. NERSESIAN. *Some problems for one model weakly hyperbolic equation* (summary)

In the present paper the character of solvability of some boundary value problems for the model degenerating hyperbolic equation

$$u_{tt} - \lambda^2(t)\, u_{xx} = \left(\lambda'(t) + \frac{2\lambda(t)}{t}\right) u_x, \quad \lambda(0) \geqslant 0$$

is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Некоторые классы уравнений в частных производных, «Наука», М., 1981.
2. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для одномерного гиперболического уравнения произвольного порядка с данными на линии вырождения, Диф. уравнения, IV, № 9, 1968, 1658—1662.
3. *О. А. Олейник.* О гиперболических уравнениях второго порядка, вырождающихся внутри области и на ее границе, УМН, 1, 1969, 229—230.
4. *К. А. Ягджян.* Условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 36, № 4, 1981.
5. *В. Я. Иврий, В. М. Петков.* Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, XXIX, 1974, 3—70.
6. *М. М. Смирнов.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, «Наука», М., 1966.
7. *Gellerstedt.* Sur un probleme aux limites pour l'equation $y^{2s} z_{xx} + z_{yy} = 0$, Arkiv Mat., Ast. och Fysik, 25 A, № 10, 1935.
8. *Gellerstedt.* Sur une equation lineare aux derivees partielles de type mixte, Arkiv Mat., Ast. och Fysik, 25 A, № 29, 1937.
9. *Т. В. Чекмарев.* Решение систем дифференциальных уравнений смешанного типа в области гиперболичности, Изв. Высших уч. зав., № 5, 1967, 108—119.
10. *Т. В. Чекмарев.* Задача Коши, Гурса и Коши—Гурса для вырождающихся систем уравнений, Изв. Высших уч. зав., № 12, 1969, 99—111.
11. *В. Н. Врагов.* О задаче Гурса и Дарбу для одного класса гиперболических уравнений, Диф. уравнения, 8, № 1, 1972, 7—16.
12. *Т. Ш. Кальменов.* О характеристической задаче Коши для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений, Диф. уравнения, 9, № 1, 1973, 49—58.
13. *Т. Ш. Кальменов.* Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения, Диф. уравнения, 7, № 1, 1971, 178—181.

14. *Б. А. Бубнов*. Задача Гурса и Дарбу для одного класса гиперболических уравнений. Сиб. матем. журнал, XIX, № 2, 1978, 461—645.

15. *А. М. Нахушев*. О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений, Диф. уравнения, 7, № 1, 1971, 49—56.

16. *М. Мередов*. Об однозначной разрешимости задачи Дарбу для одной вырождающейся системы, Диф. уравнения, 10, № 1, 1974, 89—99.

17. *Р. Г. Айрапетян*. Смешанная задача для гиперболических уравнений второго порядка. Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 1, 1977, 32—45.

18. *S. Alinhac*. Branching of singularities for a class of hyperbolic operators, Indiana Univ. Math. J., 1978, 1027—1037.

19. *K. Taniguchi and Y. Tozaki*. A hyperbolic equation with double characteristics which has a solution with branching singularities, Math. Japonica, 25, № 3, 1980, 279—300.

20. *А. М. Нахушев*. О задаче Дарбу для гиперболических уравнений, ДАН СССР, 195, № 4, 1970, 776—779.

21. *А. Т. Джунисов*. О единственности решения задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа с сильным нехарактеристическим вырождением, Диф. уравнения, 15, № 1, 1979, 168—170.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 5, 1981 Математика

Г. А. БАРСЕГЯН

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В работах по теории распределения значений мероморфных функций получение окончательных результатов зачастую упирается в оценки логарифмических производных (см. [1])*. Значительное число работ посвящено оценкам интеграла ($z=re^{i\varphi}$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})}\right|d\varphi,$$

где $w(z)$ — мероморфная в $|z|<R\leqslant\infty$ функция, $r<R$.

В ряде работ [2]—[5] для мероморфной в $|z|<\infty$ функции $w(z)$ приводятся оценки величин

$$\int_{|z|=r}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})}\right|d\varphi=\int_{\Delta(r,0)}+\int_{\Delta(r,\infty)}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})}\right|d\varphi,$$

где $\Delta(r,a)=\Delta(r,a,w)=\{z\colon |z|=r,\ |w(z)-a|\leqslant 1\}$,

$$\Delta(r,\infty)=\Delta(r,\infty,w)=\{z\colon |z|=r,\ |w(z)|>1\}.$$

Однако до сих пор оценки логарифмических производных фигурировали как вспомогательные технические средства.

Теорема 1. *Пусть $w(z)$—мероморфная в $|z|<\infty$ функция конечного нижнего порядка λ, $a_\nu\in\mathbb{C}$ ($\nu=1,2,\cdots,q$ — конечный набор попарно различных комплексных значений. Тогда существует такая абсолютная постоянная $K<\infty$, что на некоторой неограниченной последовательности значений r выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{q} r\int_{\Delta(r,a_\nu)}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})-a_\nu}\right|d\varphi\leqslant K(\lambda+1)\,T(r),\tag{1}$$

де $T(r)$ — неванлинновская характеристика.

Из теоремы 1 вытекает следующее следствие, аналогичное соотношению дефектов Р. Неванлинны.

Следствие 1. Для мероморфной в $|z|<\infty$ функции конечного нижнего порядка λ множество значений a, в которых

---

* Мы полагаем известными основные определения и результаты теории распределения значений.

$$D(a) = D(a, w) \equiv \varliminf_{r\to\infty} \left(r \int_{(\Delta r,\, a)} \left| \frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi / T(r) \right) > 0,$$

не более чем счетно и имеет место неравенство

$$\sum_{(a)} D(a) \leqslant K(\lambda+1). \tag{2}$$

Выявление этого свойства логарифмических производных тем более интересно, что имеют место следующие соотношения: если мероморфная в $|z| < \infty$ функция $w(z)$ имеет по крайней мере два исключительных значения в смысле В. П. Петренко (т. е. существуют значения a_1 и a_2, для которых $\beta(a_1) > 0$ $\beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \beta(a, w) \equiv \varliminf_{r\to\infty} \left(\max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|} / T(r) \right),$$

то для любого $a \in \mathbf{C}$ и r справедливы неравенства

$$m(r, a) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r,\, a)} \ln \frac{1}{|w(re^{i\varphi}) - a|}\, d\varphi \leqslant \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Delta(r,\, a)} \left| \frac{\partial}{\partial\varphi} \ln \frac{1}{|w(re^{i\varphi}) - a|} \right| d\varphi + O(1), \quad r \to \infty, \tag{3}$$

$$\int_{\Delta(r,\, a)} \left| \frac{\partial}{\partial\varphi} \ln \frac{1}{|w(re^{i\varphi}) - a|} \right| d\varphi \leqslant \int_{\Delta(r,\, a)} r \left| \frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi. \tag{4}$$

Так что, если E_1—множество дефектных в смысле Р. Неванлинны значений, E_2 — множество исключительных значений в смысле В. П. Петренко, E_3—множество „исключительных" значений a, для которых $D(a) > 0$, то из неравенств (3) и (4) следует, что имеют место включения

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3,$$

если количество элементов $E_2 > 1$.

Кроме того, из теоремы 1 и неравенств (3) и (4) вытекает частный случай одного результата В. П. Петренко [6]: если мероморфная в $|z| < \infty$ функция имеет конечный нижний порядок λ и для двух значений a_1, a_2, $\beta(a_1) > 0$ и $\beta(a_2) > 0$, то

$$\sum_{(a)} \beta(a) \leqslant K(\lambda + 1),$$

где K — абсолютная постоянная.

Известно (см. [5], теорема 2.3.1), что для любого $\lambda > 1/2$ существует целая функция $f(z)$ нижнего порядка λ, для которой $\beta(\infty, f) = \pi\lambda$. Отсюда следует, что зависимость от λ, устанавливаемая неравенством (2), асимптотически точная при $\lambda \to \infty$.

Можно следующим образом уточнить следствие 1.

Теорема 2. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z|<\infty$ функция конечного нижнего порядка λ и заданы комплексные значения b_j, $j=1,2,\cdots,J$ и $c_{j,k^{(j)}}$, $k^{(j)}=1,2,\cdots,\varkappa^{(j)}$, причем значения b_j отличны друг от друга и при одном и том же j отличны друг от друга значения $c_{j,k^{(j)}}$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k^{(j)}=1}^{\varkappa^{(j)}} D\left(c_{j,k^{(j)}}, w(z)-b_j z\right)\leqslant K(\lambda+1). \tag{5}$$

Отсюда стандартным образом вытекают соотношения:

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k^{(j)}=1}^{\varkappa^{(j)}} \beta\left(c_{j,k^{(j)}}, w(z)-b_j z\right)\leqslant K(\lambda+1),$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k^{(j)}=1}^{\varkappa^{(j)}} \left[\delta\left(c_{j,k^{(j)}}, w(z)-b_j z\right)\right]^{1/2}\leqslant K(\lambda+1),$$

из которых при $J=1$, $b_1=0$ вытекают упомянутый выше результат В. П. Петренко и известный результат В. Фукса о $\sum\limits_{(a)}\delta^{1/2}(a)$ (см. [2]).

Теорема 3. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z|<\infty$ функция, $a_\nu\in\mathbf{C}$, $\nu=1,2,\cdots,q$ таковы, что $a_i\neq a_j$ при $i\neq j$. Тогда существуют такие абсолютные постоянные $K<\infty$ и $C\in(0,1)$, что неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{q}\int_{r/2}^{r} t\int_{\Delta(t,a_\nu)}\left|\frac{w'(te^{i\varphi})}{w(te^{i\varphi})-a_\nu}\right|d\varphi dt\leqslant KrA(r) \tag{6}$$

выполняется на некотором множестве E значений r, имеющем нижнюю логарифмическую плотность C (здесь

$$A(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{|w'(re^{i\varphi})|}{1+|w(re^{i\varphi})|^2}\right)^2 r\,dr\,d\varphi$$

— характеристика Л. Альфорса).

Далее, если существуют хотя бы два значения b_1 и b_2, для которых $\beta(b_1)>0$, $\beta(b_2)>0$, то неравенство (6) можно заменить следующим неравенством:

$$\sum_{\nu=1}^{q}\int_{r/2}^{r}\max_{|z|=t}\ln^{+}\frac{1}{|w(te^{i\varphi})-a_\nu|}dt\leqslant KrA(r). \tag{7}$$

Для доказательства приведенных выше теорем установим предварительно две леммы.

Лемма 1. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z|<R\leqslant\infty$ функция, $a_\nu\in\mathbf{C}$, $\nu=1,2,\cdots q$, таковы, что $a_i\neq a_j$ при $i\neq j$. Тогда для любых $r_1<r_2<R$ выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{q}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\Delta(r,a_\nu)}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})-a_\nu}\right| rdrd\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r_2}{r_1}\int_{r_1}^{r_2}\int_{0}^{2\pi}\left|\frac{w''(re^{i\varphi})}{w'(re^{i\varphi})}\right| rdrd\varphi + h_0\frac{r_2}{r_1}\int_{r_1}^{r_2} L(r)\, dr, \tag{8}$$

где $h_0 = h(a_1, a_2, \cdots, a_q) = \text{const} < \infty$,

$$L(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|w'(re^{i\varphi})|}{1+|w(re^{i\varphi})|^2}\, rd\varphi$$

—сферическая длина образа окружности $|z| = r$ *при отображении функцией* $w(z)$.

Неравенство (8) вытекает из следующих двух неравенств и условий Коши-Римана:

$$\sum_{\nu=1}^{q}\int_{\Delta(r,a_\nu)}\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg(w(re^{i\varphi})-a_\nu)\right| d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{q}\int_{\Delta(r,a_\nu)}\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg\frac{\partial}{\partial\varphi}w(re^{i\varphi})\right| d\varphi + h_1 L(r) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|z|=r}\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg\frac{\partial}{\partial\varphi}w(re^{i\varphi})\right| d\varphi + h_2 L(r). \tag{9}$$

$$\sum_{\nu=1}^{q}\int_{\Delta(\varphi,r_1,r_2,a_\nu)}\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg(w(re^{i\varphi})-a_\nu)\right| dr \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{q}\int_{\Delta(\varphi,r_1,r_2,a_\nu)}\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg\frac{\partial}{\partial r}w(re^{i\varphi})\right| dr + h_3(L(\varphi, r_1, r_2)+1) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{r_1}^{r_2}\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg\frac{\partial}{\partial r}w(re^{i\varphi})\right| dr + h_4(L(\varphi, r_1, r_2)+1), \tag{10}$$

где

$$h_1 < h_2,\ h_3 < h_4,\ h_2,\ h_4 < h(a_1, a_2, \cdots, a_q) = \text{const} < \infty,$$

$$\Delta(\varphi, r_1, r_2, a) = \Delta(\varphi, r_1, r_2, a, w) = \{z\colon \arg z = \varphi,\ r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2,$$

$|w(z) - a| \leqslant 1\}$, $\Delta(\varphi, r_1, r_2, \infty) = \{z\colon \arg z = \varphi,\ r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2,\ |w(z)| > 1\}$,

$L(\varphi, r_1, r_2)$ — сферическая длина образа отрезка $\{z\colon \arg z = \varphi,\ r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\}$ при отображении функцией $w(z)$.

Оценка первого интеграла в (9) последним выражением в соотношении (9) доказана в (7) (см. лемму 3). Оценка первого выражения вторым и второго выражения третьим в соотношении (9) устанавливается с помощью неравенства (13) из [7] в процессе доказательства леммы 3 из [7]. Неравенство (10) доказывается по схеме доказательства неравенства (9).

Лемма 2. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z|<\infty$ функция, k — фиксированное число*

$$(1<k<3/2),\ r_2=\left(1+\frac{k-1}{4}\right)r_1.$$

Тогда при $r_1>r'$ имеет место неравенство

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right|rdrd\varphi\leqslant K_0r_1T(kr_1,w), \tag{11}$$

*где K_0—абсолютная постоянная**.

Доказательство. Обозначим через a_m и b_n соответственно нули и полюсы функции $w'(z)$ и воспользовавшись формулой Пуассона-Иенсена, имеем

$$\left(z=re^{i\varphi},\ R=\left(1+\frac{k-1}{2}\right)r_1\right)$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right|\ rdrd\varphi\leqslant\int_{r_1}^{r_2}r\left\{\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\ln|w'(Re^{i\theta})||\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{2R}{|Re^{i\theta}-z|^2}\,d\theta\right]d\varphi\right\}dr+\sum_{|a_m|<R}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{z-a_m}-\frac{1}{z-R^2/\bar a_m}\right|rdrd\varphi+$$

$$+\sum_{|b_n|<R}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{z-\bar b_n}-\frac{1}{z-R^2/\bar b_n}\right|rdrd\varphi=J_1+J_2+J_3. \tag{12}$$

Используя известное неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\varphi}-|z|\,e^{i\varphi}|^2}\,d\varphi\leqslant 1,$$

---

* Грубый подсчет дает $K_0<177\pi$. В дальнейшем через K обозначим абсолютные постоянные, не обязательно одинаковые даже на протяжении одной цепочки неравенств. Оценка интеграла $\int_0^{2\pi}\left|\frac{w''(re^{i\varphi})}{w'(re^{i\varphi})}\right|d\varphi$, качественно сравнимая с неравенством (11) при $\lambda>1/2$, и более точная при $\lambda\to 0$, приводится в работах [8], [9]. Доказательства этих оценок основаны на специальных представлениях функции $\ln f(z)$ в секторе. Наши рассуждения, по-видимому, более элементарны.

получим

$$J_1 \leqslant 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{2Rr}{R^2 - r^2} \{m(R, 0, w') + m(R, \infty, w')\}\, dr \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi \frac{Rr_2}{R + r_1} [2T(R, w') + O(1)] \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{R - r} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \frac{Rr_2}{r_1} \ln \frac{R - r_1}{R - r_2} [2T(R, w') + O(1)] \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)\left(1 + \frac{k-1}{4}\right) \ln 2\, [2T(R, w') + O(1)]\, r_1 \leqslant$$

$$\leqslant K r_1 [T(R, w') + O(1)], \quad r \to \infty. \tag{13}$$

Покажем, что при $|z_0| \leqslant R$

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - R^2/\bar{z}_0} \right| r\, dr\, d\varphi \leqslant K(r_2 - r_1). \tag{14}$$

Рассмотрим три случая.

Случай 1): $|z_0| \leqslant r_1/2$. Тогда при $z \in \{z: r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\}$, $|z - z_0| > \frac{r_1}{2}$ и $|z - R^2/\bar{z}_0| > R$, откуда

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - R^2/\bar{z}_0} \right| r\, dr\, d\varphi \leqslant \frac{2}{r_1} \int_{r_1}^{r_2} r\, dr\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{R} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} r\, dr\, d\varphi < K(r_2 - r_1). \tag{15}$$

Случай 2): $|z_0| > r_1/2$ и $\rho(z_0)$ — расстояние от z_0 до кольца $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ больше или равно $r_2 - r_1$. Из соображений симметрии имеем

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - R^2/\bar{z}_0} \right| r\, dr\, d\varphi =$$

$$= 2 \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{z - |z_0|} - \frac{1}{z - R^2/|z_0|} \right| r\, dr\, d\varphi. \tag{16}$$

Поскольку при

$$z \in \{z: r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\}, \quad \frac{1}{|z - z_0|} \leqslant \frac{1}{\rho(z_0)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{|z - R^2/|z_0||} \leqslant \frac{1}{\rho(z_0)},$$

то имеем

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi\rho(z_0)}{r_2}}\left|\frac{1}{z-|z_0|}-\frac{1}{z-R^2/|z_0|}\right| r dr d\varphi \leqslant K(r_2-r_1). \tag{17}$$

Если $\frac{\pi\rho(z_0)}{r_2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $|z-|z_0||\geqslant|r_1\sin\varphi$ и $\left|z-\frac{R^2}{|z_0|}\right|>r_1\sin\varphi$, откуда получаем $\left(\sin\varphi>\frac{2}{\pi}\varphi\right)$

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{\frac{\pi\rho(z_0)}{r_2}}^{\pi/2}\left|\frac{1}{z-|z_0|}-\frac{1}{z-R^2/|z_0|}\right| r dr d\varphi=\frac{R^2-|z_0|^2}{|z_0|}\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{\frac{\pi\rho(z_0)}{r_2}}^{\pi/2}\times$$

$$\times\frac{1}{|z-|z_0||\,|z-R^2/|z_0||} r dr d\varphi\leqslant\frac{R^2-|z_0|^2}{|z_0|}\frac{r_2}{r_1^2}(r_2-r_1)\int\limits_{\frac{\pi\rho(z_0)}{r_2}}^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi}d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{R^2-|z_0|^2}{|z_0|}\frac{r_2}{r_1^2}(r_2-r_1)\left(\frac{r_2}{\pi\rho(z_0)}-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Поскольку $R-|z_0|\leqslant\rho(z_0)+2(r_2-r_1)<3\rho(z_0)$, из последнего неравенства имеем

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{\frac{\pi\rho(z_0)}{r_2}}^{\pi/2}\left|\frac{1}{z-|z_0|}-\frac{1}{z-R^2/|z_0|}\right| r dr d\varphi\leqslant\frac{2R}{|z_0|}\frac{3}{\pi}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2(r_2-r_1)\leqslant K(r_2-r_1). \tag{18}$$

Наконец, при

$$\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi,\ |z-|z_0||>\sqrt{\frac{5}{4}}r_1 \text{ и } \left|z-\frac{R}{|z_0|}\right|>R,$$

откуда

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left|\frac{1}{z-|z_0|}-\frac{1}{z-R^2/|z_0|}\right| r dr d\varphi\leqslant K(r_2-r_1). \tag{19}$$

Окончательно, в случае 2) из неравенств (16)—(19) имеем

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\frac{1}{z-z_0}-\frac{1}{z-R^2/\bar{z}_0}\right| r dr d\varphi\leqslant K(r_2-r_1).$$

Случай 3): $|z_0|\geqslant r_1/2$, $\rho(z_0)<r_2-r_1$. В этом случае при

$$z\in\left\{z\colon r_1\leqslant|z|\leqslant r_2,\ 0\leqslant\arg z\leqslant\frac{r_2-r_1}{r_2}\right\}\subset\{z\colon |z-|z_0||\leqslant 3(r_2-r_1)\}$$

имеем $|z-R^2/|z_0||>r_2-r_1$, откуда вытекает неравенство

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\frac{r_2-r_1}{r_2}}\left|\frac{1}{z-|z_0|}-\frac{1}{z-R^2/|z_0|}\right| rdrd\varphi \leqslant \int_0^{3(r_2-r_1)}\int_0^{2\pi} d\rho d\varphi +$$

$$+\frac{1}{r_2-r_1}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\frac{r_2-r_1}{r_2}} rdrd\varphi < K(r_2-r_1). \qquad (20)$$

Как и при выводе неравенства (18), имеем

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_{\frac{r_2-r_1}{r_2}}^{\pi/2}\left|\frac{1}{z-|z_0|}-\frac{1}{z-R^2/|z_0|}\right| rdrd\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R^2-|z_0|^2}{|z_0|}\frac{r_2}{r_1^2}(r_2-r_1)\left(\frac{r_2}{r_2-r_1}-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Так как здесь $R-|z_0|\leqslant 3(r_2-r_1)$, $|z_0|>r_1/2$

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_{\frac{r_2-r_1}{r_2}}^{\pi/2}\left|\frac{1}{z-|z_0|}-\frac{1}{z-R^2/|z_0|}\right| rdrd\varphi \leqslant K(r_2-r_1). \qquad (21)$$

Как и при выводе неравенства (19) получим

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_{\pi/2}^{\pi}\left|\frac{1}{z-|z_0|}-\frac{1}{z-R^2/|z_0|}\right| rdrd\varphi \leqslant K(r_2-r_1).$$

Теперь из соотношений (16), (20), (21) и последнего неравенства имеем

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{z-z_0}-\frac{1}{z-R^2/\bar{z}_0}\right| rdrd\varphi \leqslant K(r_2-r_1),$$

откуда для любого z_0, ($|z_0|\leqslant R$) следует справедливость (14).

Из неравенства (14) вытекает $\left(R_1=\left(1+\frac{3}{4}(k-1)\right)r_1\right)$,

$$J_2\leqslant K(r_2-r_1)\,n(R,0,w')\leqslant K(r_2-r_1)\frac{R_1}{R_1-R}N(R_1,w')\leqslant$$

$$\leqslant Kr_1[T(R_1,w')+O(1)],\ r\to\infty. \qquad (22)$$

Аналогично

$$J_3\leqslant K r_1[T(R_1,w')+O(1)],\ r\to\infty. \qquad (23)$$

Суммируя оценки (12), (13), (22), (23), получим

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right| rdrd\varphi \leqslant Kr_1[T(R_1,w')+O(1)],\ r\to\infty. \qquad (24)$$

Используем теперь известное неравенство ([8], теорема 2.3, гл. III)

$$T(r,\ w^{(l)}) \leqslant (l+1)\ T(r,\ w) + Q(r,\ w), \tag{25}$$

где $Q(r,\ w) = O(\ln r)$, $r \to \infty$, если $w(z)$ имеет конечный порядок и $Q(r,\ w) = O(T(r,\ w) + \ln r)$, если $w(z)$ бесконечного порядка и $r \to \infty$, пропуская, возможно, множество конечной меры.

Согласно теореме 1.3 (лемма о логарифмической производной) и теореме 2.3 главы III книги [10], для величины $Q(r,\ w)$ имеет место оценка ($c = \mathrm{const} > 1$)

$$Q(r,\ w) = o\,[T(cr,\ w)], \quad r \to \infty. \tag{26}$$

Теперь из неравенств (24)—(26) получим при r больше некоторого фиксированного r' оценку

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right| rdrd\varphi < Kr_1T(kr_1,\ w),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3 ([5], лемма 1.3.1). *Если мероморфная в* $|z| < \infty$ *функция* $w(z)$ *имеет конечный нижний порядок* λ, *то для любого* $k > 1$ *существует последовательность* $R_n = R_n(k) \to \infty$, *для которой* $R_n > R_0$ *выполняется неравенство*

$$T(k\,R_n,\ w) \leqslant k^{\lambda+1}\ T(R_n,\ w). \tag{27}$$

Лемма 4. *Для мероморфной в* $|z| < \infty$ *функции* $w(z)$ *справедливы неравенства* (r_1, r_2, k *определены в лемме* 2)

$$\int_{r_1}^{r_2} L(r,\ w)\,dr = o\,[r_1\ T(kr_1,\ w)],\ r \to \infty, \tag{28}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} L(r,\ w')\,dr = o\,[r_1\ T(kr_1,\ w)],\ r \to \infty. \tag{29}$$

В самом деле, используя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\int_{r_1}^{r_2} L(r,w)\,dr = \int_{r_1}^{r_2}\sqrt{r}\left[\int_0^{2\pi}\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\sqrt{r}\,d\varphi\ \right]dr \leqslant$$

$$\leqslant \int_{r_1}^{r_2}\sqrt{r}\left[2\pi\int_0^{2\pi}\frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}\ rd\varphi\ \right]^{1/2} dr \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2\pi}\left(\int_{r_1}^{r_2} rdr\right)^{1/2}\left(\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}\ rdrd\varphi\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \pi\, r_2 \sqrt{A(r_2, w)} \leqslant \pi r_2 \left(\frac{T\left[\left(1+\frac{k-1}{2}\right) r_1, w\right]}{\ln\left[\left(1+\frac{k-1}{2}\right) \Big/ \left(1+\frac{k-1}{4}\right)\right]} \right)^{1/2} =$$

$$= o\left(r_1\, T(kr_1, w)\right), \quad r_1 \to \infty. \tag{28'}$$

Точно так же имеем неравенство

$$\int_{r_1}^{r_2} L(r, w')\, dr \leqslant K r_1 \left[T\left(\left(1+\frac{k-1}{2}\right) r_1, w'\right)\right]^{1/2},$$

применяя к правой части которого соотношения (25) и (26), получим (29).

Доказательство теоремы 1. Из неравенств (8), (10) и (28) вытекает $(r > r_0')$

$$\sum_{\nu=1}^{q} \int_{r_1}^{r_2} r \int_{\Delta(r, a_\nu)} \left| \frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi}) - a_\nu} \right| d\varphi\, dr \leqslant K r_1\, T(kr_1, w).$$

Отсюда имеем, что для каждого r_1 найдется r' из сегмента $r_1 \leqslant r' < r_2$, при котором справедливо неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{q} r' \int_{\Delta(r', a_\nu)} \left| \frac{w'(r' e^{i\varphi})}{w(r' e^{i\varphi}) - a_\nu} \right| d\varphi \leqslant K \frac{r_1}{r_2 - r_1}\, T(kr_1, w) \leqslant K \frac{1}{k-1}\, T(kr_1, w). \tag{30}$$

Положим

$$k = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{\lambda+1} & \text{при } \lambda \geqslant 1, \\ 1 + \dfrac{1}{\lambda+2} & \text{при } \lambda < 1. \end{cases}$$

Применив лемму 3 получим на некоторой последовательности $r_1 = r_n$: при $\lambda \geqslant 1$

$$\frac{1}{k-1}\, T(kr_n, w) \leqslant (\lambda+1)\left(1+\frac{1}{\lambda+1}\right)^{\lambda+1} T(r_n, w) \leqslant K(\lambda+1)\, T(r_n, w),$$

и точно так же при $\lambda < 1$

$$\frac{1}{k-1}\, T(kr_n, w) \leqslant K(\lambda+1)\, T(r_n, w).$$

С учетом последних неравенств из оценки (30) получим при $\lambda < \infty$ (r_n определяются как и r' в неравенстве (30)),

$$\sum_{\nu=1}^{q} r_n' \int_{\Delta(r_n', a_\nu)} \left| \frac{w'(r_n' e^{i\varphi})}{w(r_n' e^{i\varphi}) - a_\nu} \right| d\varphi \leqslant K(\lambda+1)\, T(r_n, w) < K(\lambda+1)\, T(r_n', w).$$

Теорема доказана.

Неравенство (6) теоремы 3 вытекает из неравенств (8), (28′) и следующего предложения ([11], лемма 2): существуют абсолютные постоянные $K<\infty$ и $C\in(0,1)$, такие, что неравенство

$$\int_0^r\int_0^{2\pi}\left|\frac{w''(te^{i\varphi})}{w'(te^{i\varphi})}\right|tdtd\varphi\leqslant KrA(r)$$

выполняется на некотором множестве E значений r, нижней логарифмической плотности C.

Неравенство (7) вытекает из неравенств (3), (4) и (6).

Доказательство теоремы 2. Покажем сначала, что при $c>1$ справедливо соотношение (r_1, r_2, k — те же, что и в лемме 2, $W=cw$)

$$\left|\int_{r_1}^{r_2}\int_{\Delta(r,a,w)}\left|\frac{w'(z)}{w(z)-a}\right|rdrd\varphi-\int_{r_1}^{r_2}\int_{\Delta(r,ca,W)}\left|\frac{W'(z)}{W(z)-ca}\right|\times\right.$$

$$\left.\times\, rdrd\varphi\right|=o[r_1T(kr_1,w)],\quad r\to\infty. \tag{31}$$

К последнему легко прийти, заметив, что при $z\in D=\Delta(r,ca,w)\setminus\Delta_{1/c}(r,a,w)$ (где $\Delta_x(r,a,w)=\{z\colon |z|=r,\ |w(z)-a|<x\}$) выполняется неравенство

$$\left|\frac{w'}{w-a}\right|<c\,(1+(|a|+1)^2)\,\frac{|w'|}{1+|w|^2}\leqslant h\,\frac{|w'|}{1+|w|^2}$$

и, следовательно

$$r\left|\int_{\Delta(r,a,w)}\left|\frac{w'(z)}{w(z)-a}\right|d\varphi-\int_{\Delta(r,ca,W)}\left|\frac{W'(z)}{W(z)-ca}\right|d\varphi\right|\leqslant$$

$$\leqslant r\int_D\left|\frac{w'(z)}{w(z)-a}\right|d\varphi\leqslant hL(r),$$

$$h=\text{const}<\infty,$$

откуда с учетом неравенства (28) леммы 4 получим соотношение (31).

Установим теперь неравенство

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k(j)=1}^{x(j)}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\Delta(r,c_{j,k(j)},w(z)-b_jz)}\left|\frac{w'(z)-b_j}{w(z)-b_jz-c_{j,k(j)}}\right|rdrd\varphi\leqslant$$

$$\leqslant K\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left(\left|\frac{w'''(z)}{w''(z)}\right|+\left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right|\right)rdrd\varphi+$$

$$+o\,[r_1 T(k\,r_1,\ w)],\quad r\to\infty. \tag{32}$$

Неравенство достаточно доказать в случае, когда выполняются следующие соотношения: для любого j

$$\min_{k(j)\neq m(j)} |c_{j,\,k(j)}-c_{j,\,m(j)}|>2;\ \min_{j_1\neq j_2} |b_{j_1}-b_{j_2}|>2.$$

Чтобы убедиться в этом в случае произвольного набора значений b_j, $c_{j,\,k(j)}$, нужно, умножив эти значения на положительное, достаточно большое число c (получим тогда числа $c\,b_j$ и $cc_{j,\,k(j)}$, удовлетворяющие этим условиям), провести доказательство для функции $W=cw$ и воспользоваться неравенством (31) и очевидным соотношением $|T(r,w)-T(r,W)|<\ln c$.

Полагая выполненными эти условия и положив $R>\max\limits_j|b_j|+1$, из неравенств (3) и (10) имеем

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k(j)=1}^{\varkappa(j)}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\Delta(r,\,c_{j,\,k(j)},\,w(z)-b_j z)} r\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg\,(w(z)-b_j z-c_{j,\,k(j)})\right|d\varphi dr\leqslant$$

$$\leqslant r_2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k(j)=1}^{\varkappa(j)}\int_{0}^{2\pi}\int_{\Delta(\varphi,\,r_1,\,r_2,\,c_{j,\,k(j)},\,w(z)-b_j z)}\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg(w(z)-b_j z-c_{j,\,k(j)})\right|d\varphi dr\leqslant$$

$$\leqslant r_2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k(j)=1}^{\varkappa(j)}\int_{0}^{2\pi}\int_{\Delta(\varphi,\,r_1,\,r_2,\,c_{j,\,k(j)},\,w(z)-b_j z)}\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg\frac{\partial}{\partial r}(w(z)-b_j z)\right|d\varphi dr+$$

$$+\sum_{j=1}^{J} r_2\int_{0}^{2\pi} L(\varphi,\,r_1,\,r_2,\,w(z)-b_j z)\,d\varphi\leqslant$$

$$=\sum_{j=1}^{J}\sum_{k(j)=1}^{\varkappa(j)}\frac{r_2}{r_1}\int_{r_1}^{r_2}\Bigg(\int_{\Delta(r,\,c_{j,\,k(j)},\,w(z)-b_j z)\,\cap\,\Delta(r,\,b_j,\,w')}+$$

$$+\int_{\Delta(r,\,c_{j,\,k(j)},\,w(z)-b_j z)\setminus\Delta(r,\,b_j,\,w')} r\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg\,(w'(z)-b_j)\right|d\varphi\Bigg)dr+$$

$$+\sum_{j=1}^{J}\frac{r_2}{r_1}\int_{r_1}^{r_2} L(r,\,w(z)-b_j z)\,dr+h\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{J}\frac{r_2}{r_1}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\Delta(r,\,b_j,\,w')} r\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg\,(w'(z)-b_j)\right|d\varphi dr+$$

$$+\sum_{j=1}^{J}\frac{r_2}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{\Delta_R(r,b_j,w')\setminus\Delta(r,b_j,w')} r\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg(w'(z)-b_j)\right|d\varphi dr+$$

$$+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k(j)=1}^{\varkappa(j)}\frac{r_2}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{\Delta(r,c_{j,k(j)},w(z)-b_jz)\setminus\Delta_R(r,b_j,w')} r\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{w'(z)-b_j}{w'(z)}\right)\right|d\varphi dr+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k(j)-1}^{\varkappa(j)}\frac{r_2}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\times$$

$$\times\int\limits_{\Delta(r,c_{j,k(j)},w(z)-b_jz)\setminus\Delta_R(r,b_j,w')} r\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg w'(z)\right|d\varphi dr+$$

$$+\sum_{j-1}^{J}\frac{r_2}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}L(r,w(z)-b_jz)\,dr+h=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+h. \quad (33)$$

Оценим выражения J_1-J_5. В силу леммы 1

$$J_1\leqslant\frac{r_2}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\frac{w'''(z)}{w''(z)}\right|rdrd\varphi+h\frac{r_2}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}L(r,w')\,dr.$$

Поскольку, в силу условий, наложенных на значения b_j, $c_{j,k}^{(j)}$ при $r>r_0$, $k_1^{(j)}\neq k_2^{(j)}$, $j_1\neq j_2$ справедливы соотношения

$$\Delta(r,c_{j,k_1^{(j)}},w(z)-b_jz)\cap\Delta(r,c_{j,k_2^{(j)}},w(z)-b_jz)=\varnothing,$$

$$\Delta(r,c_{j_1,k(j_1)},w(z)-b_jz)\cap\Delta(r,c_{j_2,k(j_2)},w(z)-b_{j_2}z)=\varnothing,$$

получаем

$$J_4\leqslant\frac{r_2}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right|rdrd\varphi.$$

Так как при $z\in\Delta_R(r,b_j,w')\setminus\Delta(r,b_j,w')$

$$r\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg(w'(z)-b_j)\right|<(2+R^2)\frac{|w''(z)|}{1+|w'(z)|^2}r,$$

то справедливо неравенство

$$J_2\leqslant h\int\limits_{r_1}^{r_2}L(r,w')\,dr=o\,[r_1T(kr_1,w)],\quad r\to\infty.$$

Для оценки J_3 заметим, что

$$r\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg\left(\frac{w'-b_j}{w'}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{[(w'-b_j)(\overline{w'-b_j})]'_\varphi}{|w'-b_j|^2} - \frac{(w'\overline{w'})'_\varphi}{|w'|^2}\right| <$$

$$< r\left\{\frac{|(w'\overline{w'})'_\varphi|\,\big||w'|^2-|w'-b_j|^2\big|}{|w'-b_j|^2\,|w'|^2} + \frac{|w''|\,|b_j|}{|w'-b_j|^2}\right\}.$$

При $z \in \Delta(r, c_{j,k(j)}, w(z)-b_j z) \diagdown \Delta_R(r, b_j, w')$ выполняются соотношения $|w'-b_j|>1$, $|w'|>1$, откуда следует, что для таких z существует h, при котором справедливо

$$r\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg\left(\frac{w'(z)-b_j}{w'(z)}\right)\right| \leqslant h\,\frac{|w''(z)|}{1+|w'(z)|^2}\,r.$$

Из последних двух оценок и неравенства (29) вытекает

$$J_4 \leqslant h\int_{r_1}^{r_2} L(r, w')\,dr = o\,[r_1 T(kr_1, w)],\quad r\to\infty.$$

Учитывая очевидное соотношение $|T(r, w) - T(r, w(z) - b_j z)| = o\,(T(r, w))$, $r\to\infty$, из неравенства (29) получаем

$$J_5 = o\,[r_1 T(kr_1, w)],\quad r\to\infty.$$

Подставляя полученные для $J_1 - J_5$ оценки в неравенство (33), получим

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k(j)=1}^{\varkappa(j)}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\Delta(r, c_{j,k(j)}, w(z)-b_j z)} r\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg(w(z)-b_j z - c_{j,k(j)})\right| d\varphi\,dr \leqslant$$

$$\leqslant K\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left(\left|\frac{w'''(z)}{w''(z)}\right| + \left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right|\right) r\,dr\,d\varphi + o\,[r_1 T(kr_1, w)],\quad r\to\infty.$$

Аналогично имеем

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k(j)=1}^{\varkappa(j)}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\Delta(r, c_{j,k(j)}, w(z)-b_j z)} \left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg(w(z)-b_j z - c_{j,k(j)})\right| d\varphi\,dr \leqslant$$

$$\leqslant K\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left(\left|\frac{w'''(z)}{w''(z)}\right| + \left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right|\right) r\,dr\,d\varphi + o\,[r_1 T(kr_1, w)],\quad r\to\infty.$$

Из последних двух неравенств вытекает (32).

Используя неравенства (25), (26) и лемму 3 из неравенства (32) получим (см. вывод неравенства (1))

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k(j)=1}^{\varkappa(j)} r'_n \int_{\Delta(r'_n, c_{j,k(j)}, w(z)-b_j z)} \left|\frac{w'(z)-b_j}{w(z)-b_j z - c_{j,k(j)}}\right| d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant K(\lambda+1)\,T(r_n', w),$$

откуда вытекает оценка 5 теоремы 2.

В заключение приношу благодарность Н. У. Аракеляну за ценные обсуждения результатов.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 12.II.1981

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների լոգարիթմական ածանցյալի հետ ասոցիացված բացառիկ արժեքները *(ամփոփում)*

Մերոմորֆ ֆունկցիաների տեսության բազմաթիվ վերջնական արդյունքների ապացույցները հանգում են լոգարիթմական ածանցյալի գնահատականներին, որոնք սովորաբար հանդես են գալիս որպես օժանդակ տեխնիկական միջոցներ։ Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ հետևյալ ինտեգրալների համար

$$\int\limits_{\Delta(r,\,a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z)-a} \right| d\varphi,$$

որտեղ $\Delta(r, a) = \{z: |z| = r, |w(z) - a| < 1\}$, $w(z)$*-ը մերոմորֆ է վերջավոր հարթության վրա, տեղի ունի Ռ. Նևանլիննայի երկրորդ հիմնական թեորեմի անալոգը։ Այդ անալոգում նշված ինտեգրալները կատարում են նույն դերը, ինչ որ Նևանլիննյան մոտարկման ֆունկցիան երկրորդ հիմնական թեորեմում։ Որպես հետևանք ստացվում են Վ. Ֆուկսի և Վ. Պ. Պետրենկոյի որոշ հայտնի արդյունքների ընդհանրացումները։*

G. A. BARSEGHIAN. *Exceptional values, associated with the logarithmic derivatives of meromorphic functions* (summary)

The estimates of the logarithmic derivatives of meromorphic functions, which usually appear as auxiliary means, have become the basis for achieving many of the complete results.

In the paper it is shown that for the integrals of the form

$$\int\limits_{\Delta(r,\,a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z)-a} \right| d\varphi,$$

where $\Delta(r, a) = \{z:|z| = r, |w(z) - a)| < 1\}$, $w(z)$ is a meromorphic function in the finite plane, the analogues of R. Nevanlinna's second theorem take place. In such analogues the above-mentioned integrals play the same role, as that of R. Nevanlinna's approximation function does in the second fundamental theorem. Generalization of some famous results by W. Fuchs and V. P. Petrenko are obtained as corollaries.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции. М., Гостехиздат, 1941.
2. *W. H. I. Fuchs.* A theorem on the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order, Ann. Math., 68, № 2, 1958, 203—209.
3. *W. H. I. Fuchs.* Proof of a conjecture of G. Polya concerning gap series, Ill. J. Math., 7, № 4, 1963, 661—667.
4. *E. Mues.* Über eine Vermutung von Hayman, Math. Z., 119, № 1, 1971, 11—20.

5. *В. П. Петренко.* Рост мероморфных функций, Харьков, Вища школа, 1978.
6. *В. П. Петренко.* Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. Изв. АН СССР, сер. матем., 33, № 2, 1969, 414—455.
7. *Г. А. Барсегян.* О геометрической структуре образа круга при отображениях мероморфными функциями, Мат. сб., 106 (148), № 1 (5), 1978, 35—43.
8. *И. В. Островский, И. В. Казакова.* Замечание о дефектах мероморфных функций малого порядка, Записки мех.-мат. фак. и Харьковск. мат. о-ва, 30, 70—74.
9. *В. П. Петренко.* О величинах дефектов мероморфных функций, ДАН СССР, 158, № 5, 1964, 1030—1033.
10. *А. А. Гольберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.
11. *Г. А. Барсегян.* О геометрии мероморфных функций, Мат. сборник, 114 (156), № 2, 179—225.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Վ. Մ. Մարտիրոսյան. *H^∞ դասում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի էֆեկտիվ լուծումը Մ. Մ. Ջրբաշյանի բիօրթոգոնալիզացիայի մեթոդի կիրառումով* . . 339

Ս. Ա. Գրիգորյան. *Աբելյան կոմպակտ խմբի բնութագրերից ծնված մաքսիմալ հանրահաշիվներ* 358

Լ. Ա. Շահինյան. *Հաարի շարքերով $+\infty$-ի ներկայացման մասին (C, 1) գումարման եղանակով* 366

Ս. Ս. Սեկտ. *Մերոմորֆ ֆունկցիաների աճը Մ. Մ. Ջրբաշյանի բնութագրիչներում II.* . 385

Լ. Շ. Աղաբաբյան, Ա. Բ. Ներսեսյան. *Մի մոդելային թույլ հիպերբոլական հավասարման համար որոշ խնդիրների մասին* 397

Գ. Ա. Բարսեղյան. *Մերոմորֆ ֆունկցիաների լոգարիթմական ածանցյալի հետ ասոցիացված բացառիկ արժեքները* 408

СОДЕРЖАНИЕ

В. М. Мартиросян. Эффективное решение задачи кратной интерполяции в H^∞ применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна 339

С. А. Григорян. Максимальные алгебры, порожденные полугруппой характеров компактной абелевой группы 358

Л. А. Шагинян. О суммируемости к $+\infty$ рядов по системе Хаара методом (С, 1) 366

С. С. Сект. Рост мероморфных функций в характеристиках М. М. Джрбашяна. II . 385

Л. Ш. Агабабян, А. Б. Нерсесян. О некоторых задачах для одного модельного слабо гиперболического уравнения 397

Г. А. Барсегян. Исключительные значения, ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций 408

CONTENTS

V. M. Martirosian. An effective solution of the simultaneous interpolation problem in H^∞ by the biorthogonalization method of M. M. Djrbashian 339

S. A. Grigorian. Maximal algebras generated by characters of compact abelian group 358

L. A. Shahinian. On the summation to $+\infty$ of Haar's series by the method (C, 1) 366

S. S. Sect. Growth of meromorphic function in M. M. Djrbashian characteristics. II. 385

L. Sh. Agababian, A. B. Nersesian. Some problems for one model weakly hyperbolic equation 397

G. A. Barseghian. Exceptional values, associated with the logarithmic derivatives of meromorphic functions 408