ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих привил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 4, 1981 Математика

Э. П. МЕЛИКСЕТЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Введение

Пусть D — односвязная область, ограниченная аналитической кривой Γ. В работе рассматривается следующая задача.

Задача Дирихле. Найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение слабо связанной эллиптической системы дифференциальных уравнений

$$AU_{xx}+BU_{xy}+CU_{yy}=0, \tag{1}$$

непрерывное в замкнутой области $D+\Gamma$ и удовлетворяющее граничному условию

$$U(x, y)|_{\Gamma}=f(x, y), \tag{2}$$

где A, B и C — постоянные, вещественные квадратные матрицы n-го порядка, $f(x, y)=\{f_1(x, y), \cdots, f_n(x, y)\}$ — заданная на Γ вещественная, непрерывная вектор-функция, а $U(x, y)=\{U_1(x, y), \cdots \cdots, U_n(x, y)\}$ — искомое вещественное решение. Понятие слабой связанности эллиптической системы дано в монографии А. В. Бицадзе [1].

В случае, когда $f(x, y)\in C_\alpha^1(\Gamma)$, а решение $U(x, y)$ ищется, в классе $C_\alpha^1(D+\Gamma)$, задача (1)—(2) исследована в монографии [1], в которой показано, что если $f(x, y)\in C_\alpha^1(\Gamma)$, то решение задачи (1)—(2) в классе $C_\alpha^1(D+\Gamma)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma} f(x, y)\, \psi_j(x, y)\, ds=0 \quad (j=1, \cdots, m), \tag{3}$$

где $\psi_j(x, y)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые вектор-функции, а s — длина дуги контура Γ.

Задача Дирихле для одного эллиптического уравнения, когда граничные данные принадлежат классам L_p $(p>1)$ и в классах Соболева, исследована в работах Б. В. Хведелидзе [6], В. П. Михайлова [7], В. С. Виноградова [8].

Пусть вектор-функция $f(x, y)\in C_\alpha^1(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3), тогда в классе $C_\alpha'(D+\Gamma)$ решение $U(x, y)$ представляется в виде (см. [1]).

$$U(x, y) = \int_\gamma K(z, t) f(t)\, dt + \sum_{j=1}^{m} C_j U_j(x, y), \ z = x + iy \in D, \tag{4}$$

где $U_1(x, y), \cdots, U_m(x, y)$ — бесконечно дифференцируемые в $D + \Gamma$ линейно независимые решения однородной ($f(x, y) \equiv 0$) задачи (1)—(2); $K(z, t)$—некоторая бесконечно дифференцируемая квадратная матрица n-го порядка при $z \in D$, $t \in \Gamma$, причем при соблюдении условия (3), оператор

$$K(f) \overset{\text{def}}{=} \int_\gamma K(z, t) f(t)\, dt, \ z \in D, \ t \in \Gamma \tag{5}$$

является частным решением задачи (1)—(2).

Основной целью данной работы является: показать, что вышеуказанные результаты монографии [1] остаются в силе, если $f(x, y) \in C(\Gamma)$, а решение ищется в классе $C(D + \Gamma) \cap C^2(D)$.

В настоящей работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Если $f(t) \in C^\infty(\Gamma)$, то решение $U(x, y)$ задачи* (1)—(2) *принадлежит классу $C^\infty(D + \Gamma)$.*

Теорема 2. *Оператор* (5) *удовлетворяет оценке*

$$|K(f)| \leqslant c \max_{t \in \Gamma} |f(t)|, \ \{f(t) \in C^\infty(\Gamma)\}, \tag{6}$$

где c—некоторая постоянная, не зависящая от $f(t)$.

Теорема 3. *Для разрешимости задачи* (1)—(2) *при непрерывных граничных условиях необходимо и достаточно выполнение условия* (3), *при этом решение задачи* (1)—(2) *дается формулой* (4).

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 приводятся некоторые леммы, необходимые для доказательства вышеуказанных теорем, а § 3 содержит доказательства теорем 1, 2 и 3.

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

Рассмотрим на окружности $|t| = 1$ интегральное уравнение

$$\varphi(t) + \int_{|\tau|=1} K_1(t, \tau) \varphi(\tau)\, d\tau + \int_{|\tau|=1} K_2(t, \tau) \overline{\varphi(\tau)}\, d\tau = F(t), \tag{7}$$

где $F(t) = \{F_1(t), \cdots, F_n(t)\}$—заданная непрерывная вектор-функция, а $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)\}$ — искомое непрерывное решение, при этом $K_j(t, \tau)$, $(j = 1, 2)$—бесконечно дифференцируемые квадратные матрицы n-го порядка по t и τ соответственно на $|t| = 1$ и $|\tau| = 1$; вектор-функция $\overline{\varphi(t)}$—комплексно сопряженная к $\varphi(t)$.

В теории интегральных уравнений (см. [2]) доказано, что если для вектор-функции $F(t)$ уравнение (7) имеет решение, то частное решение определяется формулой

$$\varphi(t) = F(t) + \int\limits_{|\tau|=1} M_1(t, \tau) F(\tau)\, d\tau + \int\limits_{|\tau|=1} M_2(t, \tau) \overline{F(\tau)}\, d\tau, \tag{8}$$

где $M_j(t, \tau)$, $(j=1, 2)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые матрицы по t и τ соответственно на $|t|=1$ и $|\tau|=1$, не зависящие от $F(t)$.

В качестве $F(t)$ возьмем функцию

$$F(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ |z|<1}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad |t|=1, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{9}$$

где $f(\zeta)$ — действительная, бесконечно дифференцируемая вектор-функция. Согласно формуле Сохоцкого—Племеля (см. [3])

$$F(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - t}, \tag{10}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Подставляя $F(t)$ из (10) в (8) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\varphi(t) = F(t) + \int\limits_{|\zeta|=1} M_3(t, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \tag{11}$$

где $M_3(t, \zeta)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая матрица по t и ζ на $|t|=1$ и $|\zeta|=1$, не зависящая от $f(t)$.

Формула (11) остается в силе, если

$$F(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ |z|<1}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad |t|=1. \tag{12}$$

Пусть функция $z=\alpha(t)$ конформно отображает единичный круг $|t|<1$ в область D, а μ—некоторая постоянная, причем $|\mu|<1$. Так как граница Γ области D является аналитической кривой, то $\alpha(t)$ аналитически продолжается в некоторую окрестность окружности $|t|=1$;

$$\alpha'(t) \neq 0 \text{ при } |t| \leqslant 1 \text{ (см. [4]).}$$

Имеют место следующие леммы.

Лемма 1. *Существует такое кольцо* $1-\varepsilon \leqslant |t| \leqslant 1+\varepsilon$, *что функции* $z=\alpha(t)$ *и* $z=\alpha(t)+\mu \cdot \overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar t}\right)}$ *конформно отображают это кольцо в некоторые двусвязные области* D_1 *и* D_2 *соответственно.*

Лемма 2. *Функция*

$$\sigma(t, \tau) \equiv \frac{\alpha(t) - \alpha(\tau) + \mu\left(\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar t}\right)} - \overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}\right)}{t - \tau} \tag{13}$$

является аналитической по t и τ в некоторой окрестности окружности $|t|=1$ и $|\tau|=1$; в этой окрестности имеют место оценки

$$|\sigma(t, \tau)| > \delta, \quad \left|\frac{\partial^k \sigma(t, \tau)}{\partial t^k}\right| \leqslant c_k, \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{14}$$

где c_k и δ — некоторые постоянные, не зависящие от t и τ.

Доказательства лемм 1 и 2 очевидны.

Лемма 3. *Пусть функции $z=\alpha(t)$ и $z=\alpha(t)+\mu\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar t}\right)}$ конформно отображают кольцо $1-\varepsilon<|t|<1+\varepsilon$ в некоторые двусвязные области D_1 и D_2 соответственно, тогда если t и τ находятся в кольце $1-\varepsilon\leqslant|t|\leqslant 1+\varepsilon$ и удовлетворяют уравнению*

$$\alpha(\tau)+\mu\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}=\alpha(t)+\mu\overline{\alpha(t)}, \tag{15}$$

то имеют место следующие неравенства:

$$|\tau-t|\leqslant c_1\,|1-|t||\tag{16}$$

$$|\tau-t|\leqslant c_2\,|1-|\tau||,\tag{17}$$

$$|\zeta-t|\leqslant c_3\,|\zeta-\tau|, \text{ при } |\zeta|=1,\tag{18}$$

$$|\zeta-\tau|\leqslant c_4\,|\zeta-t|, \text{ при } |\zeta|=1,\tag{19}$$

где c_j $(j=1, 2, 3, 4)$ — некоторые постоянные, не зависящие от t, τ и ζ.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$q(\tau)\overset{\text{def}}{=}\alpha(\tau)+\mu\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}, \quad 1-\varepsilon<|\tau|<1+\varepsilon. \tag{20}$$

Из уравнения (15) следует, что τ и t выражаются друг через друга следующим образом:

$$\tau=\beta_0(t) \text{ и } t=\gamma_0(\tau), \tag{21}$$

где

$$\beta_0(t)=\beta\left(\alpha(t)+\mu\overline{\alpha(t)}\right), \tag{22}$$

$$\gamma_0(\tau)=\gamma\left(\frac{1}{1-|\mu|^2}\cdot\left(q(\tau)-\mu\overline{q(\tau)}\right)\right), \tag{23}$$

причем $\beta(z)$ и $\gamma(z)$ аналитические функции, обратные к функциям $q(t)$ и $\alpha(t)$ соответственно в кольце $1-\varepsilon\leqslant|t|\leqslant 1+\varepsilon$.

Из уравнения (15) нетрудно заметить, что

$$\tau=t, \text{ если } |\tau|=1 \text{ или } |t|=1. \tag{24}$$

Из (21) и (24) имеем

$$\beta_0(t)\equiv t, \text{ если } |t|=1; \quad \gamma_0(\tau)\equiv\tau, \text{ если } |\tau|=1. \tag{25}$$

Следовательно

$$\beta_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\equiv\frac{t}{|t|} \text{ при } t\neq 0 \text{ и } \gamma_0\left(\frac{\tau}{|\tau|}\right)\equiv\frac{\tau}{|\tau|}, \text{ при } \tau\neq 0. \quad (26)$$

Из (21), (22) и (26) получим

$$|\tau-t|=|\beta_0(t)-t|=\left|\beta_0(t)-\beta_0\left(\frac{t}{|t|}\right)+\frac{t}{|t|}-t\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\beta_0(t)-\beta_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\right|+|1-|t||\leqslant\left|\beta\left(\alpha(t)+\mu\overline{\alpha(t)}\right)-\right. \quad (27)$$

$$\left.-\beta\left(\alpha\left(\frac{t}{|t|}\right)+\mu\overline{\alpha\left(\frac{t}{|t|}\right)}\right)\right|+|1-|t||\leqslant c_1|1-|t||,$$

где c_1 — некоторая постоянная, не зависящая от t.

Оценка (17) получается аналогично. Теперь получим оценку (18). Ясно, что

$$|1-|\tau||\leqslant|\zeta-\tau|, \text{ при } |\zeta|=1. \quad (28)$$

Из (17) и (28) получим

$$|\zeta-t|\leqslant|\zeta-\tau|+|\tau-t|\leqslant|\zeta-\tau|+c_2|1-|\tau||\leqslant$$

$$\leqslant|\zeta-\tau|+c_2|\zeta-\tau|=c_3|\zeta-\tau|, \text{ при } |\zeta|=1, \quad (29)$$

где c_2 и c_3 — некоторые постоянные, не зависящие от ζ, t и τ. Аналогично доказывается справедливость неравенства (19).

Лемма 3 доказана.

§ 2. Доказательства основных результатов

Замечание 1. Если $f(t)$ бесконечно дифференцируема в окрестности граничной точки $t_0\in\Gamma$, то вектор-функция (5) также является бесконечно дифференцируемой в окрестности точки t_0 области $D+\Gamma$ (см. [1]).

Доказательство теоремы 1. Пусть $U(x, y)$ является решением задачи (1)—(2) и $f(x, y)\in C^\infty(\Gamma)$. Покажем, что $U(x, y)\in C^\infty(D+\Gamma)$. Предположим, что точка $(0, 0)\in D$ и область D звездна относительно начала координат.

Рассмотрим функцию

$$V_R(x, y)=U(Rx, Ry), \; 0<R<1. \quad (30)$$

Ясно, что вектор-функция $V_R(x, y)$ бесконечно дифференцируема в области $D+\Gamma$, удовлетворяет системе (1) и

$$V_R(x, y)=U(Rx, Ry), \text{ при } z=x+iy\in\Gamma. \quad (31)$$

Следовательно, $V_R(x, y)$ является бесконечно дифференцируемым в $D+\Gamma$ решением задачи (1)—(2) при $f(x, y)=U(Rx, Ry)$, поэтому оно дается формулой (4), т. е.

$$V_R(x, y) = \int_\Gamma K(z, t)\, U(R\xi, R\eta)\, dt + \sum_{j=1}^{m} C_j(R)\, U_j(x, y), \tag{32}$$

где $z = x + iy \in D$, $t = \xi + i\eta$, а $C_1(R), \cdots, C_m(R)$ — постоянные, зависящие от R.

Так как $U(x, y) = f(x, y)$ на Γ, то

$$\lim_{R\to 1} U(R\xi, R\eta) = f(\xi, \eta), \ (\xi, \eta) \in \Gamma. \tag{33}$$

Покажем, что числа $C_1(R), \cdots, C_m(R)$ имеют предел при $R \to 1$. Поскольку $U_1(x, y), \cdots, U_m(x, y)$ линейно независимы, то существуют такие точки $(x_1, y_1), \cdots, (x_m, y_m)$, что

$$\begin{vmatrix} U_1(x_1, y_1), & \cdots, & U_m(x_1, y_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_1(x_m, y_m), & \cdots, & U_m(x_m, y_m) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{34}$$

Подставив в (32) $x = x_j$, $y = y_j$ $(j = 1, \cdots, m)$ и решая полученную систему уравнений относительно $C_1(R), \cdots, C_m(R)$, убедимся, используя (30) и (33), что полученное решение этой системы имеет предел при $R \to 1$, который обозначим соответственно через $C_1, \cdots, C_m$.

Итак, переходя в (32) к пределу при $R \to 1$ и используя (30) и (33), получим

$$U(x, y) = \int_\Gamma K(z, t)\, f(t)\, dt + \sum_{j=1}^{m} C_j\, U_j(x, y). \tag{35}$$

Из (35) согласно замечанию 1 имеем, что $U(x, y) \in C^\infty(D + \Gamma)$. Если же область D звездна относительно какой-то внутренней точки (x_0, y_0), то при помощи замены переменных $\xi = x - x_0$ и $\eta = y - y_0$ сведем этот случай к предыдущему.

З а м е ч а н и е 2. Если область D звездна и граничные значения решения $U(x, y)$ системы (1) бесконечно дифференцируемы в окрестности точки t_0 границы Γ, то аналогично можно показать, что $U(x, y)$ бесконечно дифференцируема в окрестности t_0 замкнутой области $D + \Gamma$.

В общем случае, так как граница области D бесконечно дифференцируема, то для любой точки $t_0 \in \Gamma$ можно указать звездную область $D_0 \in D$ с бесконечно дифференцируемой границей, которая содержит окрестность точки t_0 области D. Согласно замечанию 2, $U(x, y)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки t_0 замкнутой области $D_0 + \Gamma_0$ и так как t_0 произвольная точка границы, то отсюда следует утверждение теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Пусть $f(t) \in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3), тогда, согласно формуле (3) задача (1)—(2)

имеет решение, и по теореме 1 все решения принадлежат классу $C^\infty(D+\Gamma)$.

Построим такое частное решение задачи (1)—(2) $U(x, y) \equiv K_0(f)$ вида (5), которое удовлетворяло бы оценке

$$|K_0(f)| \leqslant c \max_{(x, y) \in \Gamma} |f(x, y)|, \tag{36}$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от $f(x, y)$.

В работе (см. [5]) показано, что решения системы (1), первые производные которых удовлетворяют условию Гельдера в $D+\Gamma$, даются формулой

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{e_j+r} \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \ln\left(1 - \frac{x+\lambda_j y}{\xi+\lambda_j \eta}\right) \Phi_{e_j+r}(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{\beta_{jr}^{(p)}}{\pi i} \int_\Gamma \frac{(y-\eta)^p \Phi_{e_j+r-p}(t)\, dt}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^p} \right\} + c_0 \quad (z=0 \in D), \tag{37}$$

где $\lambda_1, \cdots, \lambda_\nu$ — корни характеристического уравнения $\det(A + B\lambda + c\lambda^2) = 0$ с положительными мнимыми частями, $k_1, \cdots, k_\nu$ — их кратность; $e_1 = 0$, $e_j = k_1 + \cdots + k_{j-1}$ $(j = 2, \cdots, n)$, $k_1 + \cdots + k_\nu = n$, $\delta_1, \cdots, \delta_n$ — постоянные n-мерные векторы, причем действительные числа $\beta_{jr}^{(p)}$ и векторы $\delta_1, \cdots, \delta_n$ определяются через коэффициенты системы (1), а $\Phi_1(t), \cdots, \Phi_n(t)$ — произвольные аналитические функции в области D, удовлетворяющие условию Гельдера в $D+\Gamma$, c_0—произвольный действительный постоянный n-мерный вектор. Под логарифмической функцией при данном $t = \xi + i\eta \in \Gamma$ подразумевается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$.

Система (1) называется слабо связанной, если векторы $\delta_1, \cdots, \delta_n$ линейно независимы (см. [1]).

Отметим, что если $U(x, y) \in C^\infty(D+\Gamma)$, то в представлении (37) функции $\Phi_j(z)$ также принадлежат классу $C^\infty(D+\Gamma)$.

Подставляя решение $U(x, y)$ из (37) в граничное условие (2), получим

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{e_j+r} \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \ln\left(1 - \frac{x+\lambda_j y}{\xi+\lambda_j \eta}\right) \Phi_{e_j+r}(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{\beta_{jr}^{(p)}}{\pi i} \int_\Gamma \frac{(y-\eta)^p \Phi_{e_j+r}(t)\, dt}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^p} \right\} + c_0 = f(x, y), \; z = x + iy \in \Gamma. \tag{38}$$

Легко заметить, что

$$\ln\left(1 - \frac{x+\lambda_j y}{\xi+\lambda_j \eta}\right) - \ln\left(1 - \frac{x+iy}{\xi+i\eta}\right) \in C^\infty(\Gamma),$$

$$\frac{(y-\eta)^p}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^p} \in C^\infty(\Gamma), \tag{39}$$

по переменной $t=\xi+i\eta$ и $z=x+iy$ на контуре Г. Следовательно, уравнение (38) можно представить в виде

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\delta_k\left(-\frac{1}{\pi i}\right)\int_\Gamma \ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\Phi_k(t)\,dt\right]+\int_\Gamma K(z,t)\Phi(t)\,dt\right\}+c_0=f(z),$$
$$(z\in\Gamma), \qquad (40)$$

где $K(z, t)$ — квадратные матрицы n-го порядка, элементы которых бесконечно дифференцируемы по z и t на Г, а $\Phi(t)=\{\Phi_1(t),\cdots$ $\cdots, \Phi_n(t)\}$.

Пусть функция $z=\alpha(\tau)$ конформно отображает единичный круг $|\tau|<1$ на область D с аналитической границей Г. Сделаем в уравнении (40) замену переменных по формулам

$$t=\alpha(\tau),\quad z=\alpha(\tau_0). \qquad (41)$$

Получим

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n}\delta_k\left[\left(-\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\ln\left(1-\frac{\alpha(\tau_0)}{\alpha(\tau)}\right)\Phi_k(\alpha(\tau))\cdot\alpha'(\tau)\,d\tau\right]+\right.$$
$$\left.+\int_{|\tau|=1}K_1(\alpha(\tau_0),\alpha(\tau))\cdot\Phi(\alpha(\tau))\cdot\alpha'(\tau)\,d\tau\right\}+c_0=f(\alpha(\tau_0)),\ |\tau_0|=1. \qquad (42)$$

Легко проверить, что

$$\ln\left(1-\frac{\alpha(\tau_0)}{\alpha(\tau)}\right)-\ln\left(1-\frac{\tau_0}{\tau}\right)\in C^\infty\ (|z|=1) \text{ по } \tau \text{ и } \tau_0 \text{ при } |\tau|=1,\ |\tau_0|=1. \qquad (43)$$

Следовательно, формулу (42) можно представить в виде

$$\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\left\{\delta_k\left[\left(-\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\ln\left(1-\frac{\tau_0}{\tau}\right)\psi_k(\tau)\,d\tau\right]+\int_{|\tau|=1}K_1(\tau,\tau_0)\,\psi(\tau)\,d\tau\right\}+$$
$$+c_0=f_1(\tau_0), \qquad (44)$$

где

$$\psi_k(\tau)=\Phi_k(\alpha(\tau))\cdot\alpha'(\tau);\ f_1(\tau_0)=f(\alpha(\tau_0)),\ |\tau_0|=1, \qquad (45)$$

а $K_1(\tau_0, \tau)$ — некоторая вполне определенная бесконечно дифференцируемая матрица по τ_0 и τ на окружности $|\tau|=1$ и $|\tau_0|=1$.

Ясно, что $\psi_k(\tau)$ являются аналитическими функциями в единичном круге $|\tau|\leqslant 1$.

Рассмотрим функцию

$$F(\tau_0,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{K_1(\zeta,\tau)\,d\zeta}{\zeta-\tau_0},\ |\tau_0|\neq 1. \qquad (46)$$

Функция $F(\tau_0, \tau)$ является кусочно-аналитической по τ_0. По формуле Сохоцкого—Племеля (см. [3])

$$K_1(\tau_0, \tau) = \lim_{\substack{t \to \tau_0 \\ |t| < \tau_0}} \left[F(t, \tau) - F\left(\frac{1}{\bar{t}}, \tau\right) \right] = \alpha(\tau_0, \tau) - \overline{\beta(\tau_0, \tau)} \tag{47}$$

$$(|\tau_0| = 1),$$

где функции $\alpha(\tau_0, \tau)$ и $\beta(\tau_0, \tau)$ бесконечно дифференцируемые при $|\tau_0| \leq 1$, $|\tau| = 1$ и аналитические по τ_0 при $|\tau_0| < 1$. Используя (47), из (44) получим

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \delta_k \left[\left(-\frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \ln\left(1 - \frac{\tau_0}{\tau}\right) \psi_k(\tau)\, d\tau \right] + \int_{|\tau|=1} \alpha(\tau_0, \tau)\, \psi(\tau)\, d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{|\tau|=1} \beta(\tau_0, \tau)\, \overline{\psi(\tau)}\, d\bar{\tau} \right\} + c_0 = f_1(\tau_0), \quad |\tau_0| = 1. \tag{48}$$

По формуле Шварца (см. [4]), из (48) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \ln\left(1 - \frac{\tau_0}{\tau}\right) \psi_k(\tau)\, d\tau \right\} + \int_{|\tau|=1} \alpha(\tau_0, \tau)\, \psi(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_{|\tau|=1} \beta(\tau_0, \tau)\, \overline{\psi(\tau)}\, d\bar{\tau} + c_0 = F_1(\tau_0) + ic_1; \ |\tau_0| < 1, \tag{49}$$

где

$$F_1(\tau_0) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{(\tau + \tau_0)\, f_1(\tau_0)\, d\tau}{(\tau - \tau_0)\, \tau}, \ |\tau_0| < 1. \tag{50}$$

Из формулы (49) при $\tau_0 = 0$ имеем

$$c_0 + ic_1 = \int_{|\tau|=1} \beta(0, \tau)\, \overline{\psi(\tau)}\, d\bar{\tau} - \int_{|\tau|=1} \alpha(0, \tau)\, \psi(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{f(\tau)\, d\tau}{\tau}. \tag{51}$$

Выражение (49) продифференцируем по τ_0 и имея ввиду формулу Коши (см. [4]), получим

$$2 \sum_{k=1}^{n} \delta_k\, \psi_k(\tau_0) + \int_{|\tau|=1} \alpha_1(\tau_0, \tau)\, \psi(\tau)\, d\tau - \int_{|\tau|=1} \beta_1(\tau_0, \tau)\, \overline{\psi(\tau)}\, d\bar{\tau} = F_1'(\tau_0), \tag{52}$$

где функции $\alpha_1(\tau_0, \tau)$ и $\beta_1(\tau_0, \tau)$ являются производными по τ_0 соответственно от функций $\alpha(\tau_0, \tau)$ и $\beta(\tau_0, \tau)$ при $|\tau_0| < 1$.

В формуле (52) сделаем замену функций $\psi_k(\tau_0)$ на функции $\omega_k(\tau_0)$ по формуле

$$2 \sum_{k=1}^{n} \delta_k\, \psi_k(\tau_0) = (\omega_1(\tau_0), \cdots, \omega_n(\tau_0)) \equiv \omega(\tau_0). \tag{53}$$

В результате получим

$$\omega(\tau_0) = \int_{|\tau|=1} \beta_2(\tau_0, \tau)\, \overline{\omega(\tau)}\, d\bar{\tau} - \int_{|\tau|=1} \alpha_2(\tau_0, \tau)\, \omega(\tau)\, d\tau + F_1'(\tau_0), \tag{54}$$

где $\beta_2(\tau_0, \tau)$ и $\alpha_2(\tau_0, \tau)$ аналитичны по τ_0 в круге $|\tau_0| < 1$ и бесконечно дифференцируемы при $|\tau_0| \leqslant 1$, $|\tau| = 1$. Так как левая и правая части уравнения (54) аналитичны по τ_0, то достаточно потребовать равенства на границе $|\tau_0| = 1$, т. е.

$$\omega(t) = \int\limits_{|\tau|=1} \beta_2(t, \tau)\overline{\omega(\tau)}\, d\tau - \int\limits_{|\tau|=1} \alpha_2(t, \tau)\,\omega(\tau)\, d\tau + F_1'(t), \quad |t| = 1, \tag{55}$$

где

$$F_1'(t) = \lim_{\tau \to t} F_1'(\tau) \quad \text{на} \quad |\tau_0| = 1. \tag{56}$$

Так как правая часть равенства (55) — аналитическая функция по t при $|t| < 1$ и бесконечно дифференцируемая при $|t| \leqslant 1$, то любое непрерывное на $|t| = 1$ решение $\omega(t)$ уравнения (55) является граничным значением аналитической в области $|t| < 1$ функции, принадлежащей классу $C^\infty(D + \Gamma)$.

Поэтому уравнение (55) в классе непрерывных функций эквивалентно уравнению (54) в классе аналитических функций. Следовательно, задача (1) — (2) эквивалентна уравнению (55) в классе непрерывных функций. Так как $f(t) \in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3), то задача (1) — (2) в классе $C^1_\alpha(D + \Gamma)$ имеет решение, в результате уравнение (55) также имеет решение. Следовательно, по теории интегральных уравнений (см. [2]), частное решение уравнения (55) будет иметь вид (11), т. е.

$$\omega(t) = F_1'(t) + \int\limits_{|\zeta|=1} M_3(t, \zeta)\, f_1(\zeta)\, d\zeta, \quad |t| = 1, \tag{57}$$

где $M_3(t, \zeta)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая матрица по t и ζ.

Подставляя в (57) значение функций $\omega(t)$ из (53), получим

$$2\sum_{k=1}^{n} \delta_k \psi_k(t) = F_1'(t) + \int\limits_{|\zeta|=1} M_3(t, \zeta)\, f_1(\zeta)\, d\zeta, \tag{58}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\,\delta^{-1}\Big(F_1'(t) + \int\limits_{|\zeta|=1} M_3(t, \zeta)\, f_1(\zeta)\, d\zeta\Big), \tag{59}$$

где

$$\psi(t) = \{\psi_1(t), \cdots, \psi_n(t)\}.$$

Далее, подставляя $\psi(t)$ из (59) в (45) и (51) получим вектор-функцию $\Phi(t) = \{\Phi_1(t), \cdots, \Phi_n(t)\}$ и c_0 через граничную функцию $f(t)$, которые подставляя в формулу (37) дают частное решение задачи (1) — (2). Покажем, что это частное решение удовлетворяет оценке (5).

Обозначим

$$I(x, y) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Gamma} \frac{(y - \eta)^p\, \Phi_j(t)\, dt}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^p} \quad (j = 1, \cdots, n). \tag{60}$$

Так как $t=\xi+i\eta$ и $z=x+iy$, то

$$\xi+\lambda_j\eta=c_j(t+\mu_j\bar{t}),\ x+\lambda_j y=c_j\ (z+\mu_j\bar{z}), \tag{61}$$

$$y-\eta=\frac{1}{2i}\ (z-\bar{z}-t+\bar{t}),$$

где $\mu_j=\dfrac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j}$, причем из условия $\operatorname{Im}\lambda_j>0$ имеем $|\mu_j|<1$, а c_j — некоторые постоянные $\left(c_j=\dfrac{1}{2}(1-i\lambda_j)\right)$.

В интеграле (60) сделаем замену переменных

$$t=\alpha(\tau),\ \tau\in\Gamma_0,\ \{\Gamma_0\colon|\tau_0|=1\};\ z=\alpha(\tau_0),\ |\tau_0|<1, \tag{62}$$

используя равенства (61), получим

$$I(x,y)=\tilde{C}_j\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\left[\alpha(\tau_0)-\overline{\alpha(\tau_0)}-\alpha(\tau)+\overline{\alpha\left(\frac{1}{\tau}\right)}\right]^p\psi_j(\tau)\,d\tau}{\left[\left(\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\tau}\right)}\right)-\left(\alpha(\tau_0)+\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}\right)\right]^p}, \tag{63}$$

где $\tilde{C}_j$ — некоторые постоянные.

Согласно лемме 1 существует такая окрестность $1-\varepsilon\leqslant|\tau|\leqslant1$ границы окружности $|\tau|=1$, которая взаимно-однозначно отображается при помощи функции $\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\tau}\right)}$ в некоторую двусвязную область D_j.

Ясно, что если положительное число δ_0 достаточно мало $(\delta_0<\varepsilon)$, то число $(\alpha(\tau_0)+\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)})\in D_j$ при $1-\delta_0\leqslant|\tau_0|\leqslant1$, поэтому уравнение

$$\gamma(\tau,\ \tau_0)\overset{\mathrm{def}}{=}\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\tau}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}=0 \tag{64}$$

относительно τ, при заданном τ_0 из кольца $1-\delta_0\leqslant|\tau_0|\leqslant1$, имеет единственное решение в кольце $1-\varepsilon<|\tau|\leqslant1$, которое обозначим через ζ_0.

Согласно лемме 3 между τ_0 и ζ_0 имеют место следующие соотношения:

$$|\tau_0-\zeta_0|\leqslant c_2|1-|\zeta_0||,\ |\tau_0-\zeta_0|\leqslant c_3|1-|\tau_0||,$$
$$|t-\zeta_0|\geqslant c_4|t-\tau_0|,\quad |t|=1. \tag{65}$$

Поэтому, если $|\tau_0|\to1$, то $|\zeta_0|\to1$, следовательно функция $\gamma(\tau,\tau_0)$ не обращается в нуль при $|\tau|=1-\varepsilon$, $1-\delta_1\leqslant|\tau_0|\leqslant1$, где δ_1— достаточно малое положительное число $(\delta_1\leqslant\delta_0)$, а именно

$$\gamma(\tau,\ \tau_0)\neq0,\ \text{при}\ |\tau|=1-\varepsilon,\ 1-\delta_1\leqslant|\tau_0|\leqslant1. \tag{66}$$

Обозначим через Γ_1 и Γ_2 окружности $|\tau|=1$ и $|\tau|=1-\varepsilon$. Ясно, что интеграл в (63) можно представить в виде двух интегралов $I_1(x,y)$

и $I_2(x, y)$, распространенных, соответственно, по контурам $\Gamma_1+\Gamma_2$ и Γ_2, где интегрирование по Γ_1 ведется против, а по Γ_2 — по часовой стрелке.

Итак, имеем

$$I(x, y)=I_1(x, y)+I_2(x, y). \tag{67}$$

В силу того, что ζ_0 является единственным простым корнем выражения (64), то

$$\gamma(\tau, \tau_0)=\varphi_0(\tau)\cdot(\tau-\zeta_0), \tag{68}$$

где $\varphi_0(\tau)$ — аналитическая функция по τ в кольце $1-\varepsilon\leqslant|\tau|\leqslant 1$. Так как $\tau=\zeta_0$ является решением уравнения (64), то

$$\alpha(\zeta_0)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}=0. \tag{69}$$

Из (64), (68) и (69) имеем

$$\varphi_0(\tau)=\frac{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}-\alpha(\zeta_0)-\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)}}{\tau-\zeta_0}. \tag{70}$$

Согласно лемме 2 функция $\varphi_0(\tau)$ является аналитической по τ и имеют место оценки

$$|\varphi_0(\tau)|>\delta,\ \left|\frac{d^k\varphi_0(\tau)}{d\tau^k}\right|\leqslant c_k,\ 1-\varepsilon\leqslant|\tau|\leqslant 1\ (k=0, 1,\cdots), \tag{71}$$

где δ и c_k — некоторые положительные постоянные, не зависящие от τ и τ_0.

Используя равенство (68), для $I_1(x, y)$ получим

$$I_1(x, y)=\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2}\frac{\left[\alpha(\tau_0)-\overline{\alpha(\tau_0)}-\alpha(\tau)+\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}\right]^p\psi_j(\tau)\,d\tau}{\varphi_0^p(\tau)(\tau-\zeta_0)^p}. \tag{72}$$

Из теории вычетов (см. [4]) имеем

$$I_1(x, y)=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{\tau\to\zeta_0}\frac{d^{p-1}}{d\tau^{p-1}}\left\{\frac{\left[\alpha(\tau_0)-\overline{\alpha(\tau_0)}-\alpha(\tau)+\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}\right]^p\psi_j(\tau)}{\varphi_0^p(\tau)}\right\}. \tag{73}$$

Из (73), используя неравенства (71), получим

$$|I_1(x, y)|\leqslant\sum_{k=0}^{p-1}\tilde{C}_k\left|\alpha(\tau_0)-\overline{\alpha(\tau_0)}-\alpha(\zeta_0)+\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)}\right|^{k+1}\cdot|\psi_j^{(k)}(\zeta_0)|, \tag{74}$$

где $\tilde{C}_k$ — некоторые постоянные, не зависящие от τ_0 $(j=1,\cdots, n)$.

Ясно, что

$$|\alpha(\tau_0)-\alpha(\zeta_0)|\leqslant c_0|\tau_0-\zeta_0|, \tag{75}$$

$$\left|\overline{\alpha(\tau_0)} - \alpha\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)\right| \leqslant c_1 \left|\tau_0 - \frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right| \leqslant c_1 |\tau_0 - \zeta_0| + c_1 \left|\zeta_0 - \frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 |\tau_0 - \zeta_0| + c_2 (1 - |\zeta_0|), \tag{76}$$

где c_0, c_1 и c_2—некоторые постоянные.

Из неравенств (65), (75) и (76) имеем

$$\left|\alpha(\tau_0) - \alpha(\zeta_0) - \overline{\alpha(\tau_0)} - \alpha\overline{\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)}\right| \leqslant c\,(1 - |\zeta_0|), \tag{77}$$

где c — постоянная, не зависящая от τ_0 и ζ_0.

Из выражения (50) и (59) получим

$$|\psi_j^{(k)}(\zeta_0)| \leqslant \frac{\widetilde{C}}{2\pi} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{|f_1(\tau)|\,d\varphi}{|\tau - \zeta_0|^{k+2}} + c \max_{|\tau|=1} |f_1(\tau)|, \quad \tau = e^{i\varphi}. \tag{78}$$

Из неравенств (74), (77) и (78) следует оценка

$$|I_1(x, y)| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \widetilde{C}_k \int\limits_{|\tau|=1} \frac{|1 - \zeta_0|^{k+1} \cdot |f_1(\zeta)|}{|\tau - \zeta_0|^{k+2}} d\varphi + c \max_{|\tau|=1} |f_1(\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{const} \max_{|\zeta|=1} |f_1(\zeta)| = \operatorname{const} \cdot \max_{t \in \Gamma} |f(t)|. \tag{79}$$

Используя (66), получим аналогичную оценку для $I_2(x, y)$.

$$|I_2(x, y)| \leqslant \operatorname{const} \cdot \max_{\tau \in \Gamma_2} |\psi(\tau)|. \tag{80}$$

Из равенства (59) имеем

$$\max_{|\tau|=1-\varepsilon} |\psi(\tau)| \leqslant \operatorname{const} \max_{|\tau|=1} |f_1(\tau)| = \operatorname{const} \max_{t \in \Gamma} |f(t)|. \tag{81}$$

Итак, из (67) на основании (79), (80) и (81) имеем

$$|I(x, y)| \leqslant \operatorname{const} \max_{t \in \Gamma} |f(t)|. \tag{82}$$

Теперь рассмотрим из (38) выражение

$$w(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{e_j+r} \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \ln\left(1 - \frac{x + \lambda_j y}{\xi + \lambda_j \eta}\right) \Phi_{e_j+r}(t)\, dt \right\}. \tag{83}$$

Используя (45), (61) и (62), из (83) имеем

$$w(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{e_j+r} \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \ln\left(1 - \frac{\alpha(\tau_0) + \mu_j \overline{\alpha(\tau_0)}}{\alpha(\tau) + \mu_j \alpha\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}\right) \psi_{e_j+r}(\tau)\, d\tau, \right. \tag{84}$$

где $\psi_{e_j+r}(\tau)$ определяются из формулы (58).

В (84) интегрированием по частям, получим

$$w(x,y)=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{*}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\left\{-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)-\mu_j\frac{1}{\tau^2}\cdot\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}\right]d\tau}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)-\mu_j\frac{1}{\tau^2}\cdot\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}\right]}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}}d\tau,\right. \tag{85}$$

где

$$\Phi^0_{e_j+r}(t)=(t)\int\limits_0^t\psi_{e_j+r}(\tau)\,d\tau. \tag{86}$$

Как показано выше, функция

$$\gamma_j(\tau,\tau_0)\overset{\mathrm{def}}{=}\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)} \tag{87}$$

относительно переменной τ в области $1-\varepsilon\leqslant|\tau|<1$, при $1-\delta_0\leqslant|\tau_0|\leqslant 1$, имеет единственный нуль $\tau=\xi_{j0}$, причем $\gamma_j(\tau,\tau_0)\neq 0$ при $|\tau|=1-\varepsilon$, $1-\delta_0\leqslant|\tau_0|\leqslant 1$ и $\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}\neq 0$ при $1-\varepsilon<|\tau|<1$, где ε и δ_0 — некоторые положительные числа ($\delta_0<\varepsilon$).

Обозначим через l границу области $1-\varepsilon<|\tau|<1$.

Согласно теории вычетов (см. [4])

$$\int\limits_l\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)-\mu_j\frac{1}{\tau^2}\cdot\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}\right]d\tau}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}}=2\,\Phi^0_{e_j+r}(\zeta_{j0}), \tag{88}$$

$$\int\limits_l\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)-\mu_j\cdot\frac{1}{\tau^2}\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}\right]d\tau}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}}=0. \tag{89}$$

Из (85), (88) и (89) имеем

$$w(x,y)=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{*}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\,\Phi^0_{e_j+r}(\zeta_{j0})+$$

$$+\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{*}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\left\{-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)+\mu_j\cdot\frac{1}{\tau^2}\cdot\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}\right]d\tau}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}}+\right.$$

$$+\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)-\mu_j\frac{1}{\tau^2}\cdot\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}\right]d\tau}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}}, \text{ где } \{\Gamma_1: |\tau|=1-\varepsilon\}. \quad (90)$$

Первую сумму в (90) представим в виде

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\,\Phi^0_{e_j+r}(\xi_{j0})=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\delta_k\,\Phi^0_k(\tau_0)+$$

$$+2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\,(\Phi^0_{e_j+r}(\xi_{j0})-\Phi^0_{e_j+r}(\tau_0)). \quad (91)$$

Интегрируя обе части (58) от 0 до τ_0 и используя (86), получим

$$2\sum_{k=1}^{n}\delta_k\,\Phi^0_k(\tau_0)=F_1(\tau_0)-F_1(0)+\int\limits_{|\zeta|=1}M_4(t,\zeta)\,f_1(\zeta)\,d\zeta, \quad (92)$$

где $F_1(\tau_0)$ определяется по формуле (50), а

$$M_4(t,\zeta)=\int\limits_0^{\tau_0}M_3(t,\zeta)\,dt. \quad (93)$$

Так как $\mathrm{Re}\,F_1(\tau_0)$ является интегралом Дирихле с плотностью $f_1(\alpha(t))$, то (см. [4])

$$|\mathrm{Re}\,F_1(\tau_0)|\leqslant \mathrm{const}\max_{|\tau|=1}|f_1(\tau)|=\mathrm{const}\max_{t\in\Gamma}|f(t)|. \quad (94)$$

Из (92) и (94) получим

$$\left|2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\Phi^0_k(\tau_0)\,\delta_k\right|\leqslant \mathrm{const}\max_{t\in\Gamma}|f(t)|. \quad (95)$$

С другой стороны, из (92) имеем

$$|\Phi^0_{e_j+r}(\zeta_{j0})-\Phi^0_{e_j+r}(\tau_0)|\leqslant c_1\max_{|\tau|=1}|F_1(\zeta_{j0})-F_1(\tau_0)|+c_2\max_{t\in\Gamma}|f(t)|, \quad (96)$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные.

Из формулы (50) и из неравенств (65) получим

$$|F_1(\zeta_{j0})-F_1(\tau_0)|<\int\limits_0^{2\pi}\frac{|f(\alpha(\tau)|\cdot|\zeta_{j0}-\tau_0|\,d\varphi}{|\tau-\zeta_{j0}|\cdot|\tau-\tau_0|}\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_0^{2\pi}\frac{|f(\alpha(\tau))|\cdot(1-|\tau|^2)}{|\tau-\tau_0|^2}\,d\varphi\leqslant\tilde{c}\max_{|\tau|=1}|f(\alpha(\tau))|=\mathrm{const}\max_{t\in\Gamma}|f(t)|,\quad \tau=e^{i\varphi}, \quad (97)$$

где c и $\tilde{c}$ — некоторые постоянные.

Из (91), (95) и (97) получим

$$2\left|\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\,\Phi^0_{e_j+r}(\zeta_{j0})\right|\leqslant c\max_{t\in\Gamma}|f(t)|. \tag{98}$$

Аналогично оценке (80) получим, что интеграл по контуру Γ_1 в правой части (90) также оценивается через величину $c\max\limits_{t\in\Gamma}|f(t)|$. Следовательно

$$|w(x, y)|\leqslant c\max_{t\in\Gamma}|f(t)|, \tag{99}$$

где c — некоторая постоянная.

Подставляя значение $\psi(t)$ из (59) в (51), получим такую же оценку для постоянного вектора c_0:

$$|c_0|\leqslant c\max_{t\in\Gamma}|f(t)|, \tag{100}$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от $f(t)$.

Ясно, что построенное решение $U(x, y)=K_0(f)$ имеет вид (5) и согласно (82), (99) и (100) оно удовлетворяет оценке (36).

Пусть $f(t)\in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3), и пусть $U(x, y)=K(f)$ имеет вид (5) и является частным решением задачи (1)—(2). Покажем, что оператор $K(f)$ также удовлетворяет оценке (6).

Возьмем разность

$$P(x, y)\overset{\text{def}}{=}K(f)-K_0(f). \tag{101}$$

Ясно, что при $f(x, y)\in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяющей условию (3), вектор-функция $P(x, y)$ удовлетворяет однородной задаче (1)—(2). Согласно теореме 1 вектор-функция $P(x, y)$ бесконечно дифференцируема.

Из формулы (4) имеем

$$P(x, y)=\sum_{j=1}^{m}c_j\,U_j(x, y), \tag{102}$$

где $U_1(x, y),\cdots, U_m(x, y)$ — линейно независимые решения однородной задачи (1)—(2) в классе $C^\infty(D+\Gamma)$.

Из (101) и (102) получим

$$K(f)=K_0(f)+\sum_{j=1}^{m}c_j\,U_j(x, y), \tag{103}$$

где $f(x, y)\in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3).

Пусть точки $(x_1, y_1),\cdots, (x_m, y_m)\in D$ и удовлетворяют условию (34).

Подставив в (103) $x=x_j$, $y=y_j$ $(j=1,\cdots, m)$ и решив полученную систему относительно $c_1,\cdots, c_m$, получим

$$c_1 = N_1(f(x, y)), \cdots, c_m = N_m(f(x, y)), \tag{104}$$

где $N_j(f)$ $(j=1, \cdots, m)$ — некоторые линейные комбинации от $K_0(f)$ и $K(f)$ в точках (x_j, y_j).

Поэтому

$$|c_j| = |N_j(f(x, y))| < b_j \max_{(x, y)\in\Gamma} |f(x, y)|, \; f(x, y) \in C^\infty(\Gamma), \tag{105}$$

где b_j $(j=1, \cdots, m)$ — некоторые постоянные.

Следовательно

$$K(f) = K_0(f) + \sum_{j=1}^{m} N_j(f)\, U_j(x, y), \tag{106}$$

где $f(x, y) \in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3).

Допустим, что вектор-функции $\psi_j(x, y)$, входящие в (3), ортонормальны.

Пусть $g(x, y)$ — произвольная вектор-функция из класса $C^\infty(\Gamma)$. Ясно, что вектор-функция

$$f(x, y) = g(x, y) - \sum_{k=1}^{m} \psi_k(x, y) \int_\Gamma g(t)\, \psi_k(t)\, ds \tag{107}$$

бесконечно дифференцируема и удовлетворяет условию (3).

Из (106) и (107) имеем

$$|K(f)| \leqslant c \max_{t\in\Gamma} |f(t)|, \quad t = x + iy, \tag{108}$$

$$\max_{t\in\Gamma} |f(t)| \leqslant c_1 \max_{t\in\Gamma} |g(t)|, \tag{109}$$

$$g(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{m} \psi_k(t) \int_\Gamma g(t)\, \psi_k(t)\, dt, \tag{110}$$

где c и c_1 — некоторые постоянные.

Из соотношений (108), (109) и (110) непосредственно следует, что

$$|K(g)| \leqslant c \max_{t\in\Gamma} |g(t)|, \tag{111}$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от $g(t)$.

Тем самым теорема 2 полностью доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть вектор-функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию (3). Покажем, что тогда задача (1)—(2) имеет решение, которое дается формулой (4). Не ограничивая общности предположим, что функции $\psi_j(x, y)$, входящие в условие (3), ортонормальны. Если $f(x, y)$ удовлетворяет условию (3), то

$$f(x, y) = f(x, y) - \sum_{k=1}^{m} \psi_k(x, y) \int_\Gamma f(x, y)\, \psi_k(x, y)\, ds. \tag{112}$$

Пусть последовательность бесконечно дифференцируемых на Γ функций $f_m(x, y)$ стремится к $f(x, y)$ равномерно при $m \to \infty$.

Построим последовательность

$$Q_m(x, y) = f_m(x, y) - \psi_1(x, y) \int_\Gamma f_m(x, y) \psi_1(x, y)\, ds - \cdots$$

$$\cdots - \psi_m(x, y) \int_\Gamma f_m(x, y) \psi_m(x, y)\, ds. \tag{113}$$

Ясно, что

$$Q_m(x, y) \to f(x, y) \text{ при } m \to \infty.$$

С другой стороны, $Q_m(x, y) \in C^\infty(\Gamma)$ и

$$\int_\Gamma Q_m(x, y) \psi_j(x, y)\, ds = 0, \text{ при } j = 1, \cdots, m. \tag{114}$$

Следовательно, согласно формуле (4), для функций $f(x, y) = Q_m(x, y)$ задача (1)—(2) имеет частное решение

$$U_m(x, y) = \int_\Gamma K(z, t)\, Q_m(t)\, dt, \quad z \in D, \ t \in \Gamma. \tag{115}$$

Обозначим через $U(x, y)$ вектор-функцию

$$U(x, y) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Gamma K(z, t)\, f(t)\, dt & \text{при } z \in D \\ f(x, y), & \text{при } z = x + iy \in \Gamma. \end{cases} \tag{116}$$

Из (115) следует, что $U_m(x, y)$ и их вторые производные при $m \to \infty$ сходятся равномерно в любой области, находящейся внутри D, причем

$$\lim_{m \to \infty} U_m(x, y) = U(x, y), \ (x, y) \in D + \Gamma \tag{117}$$

и

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\partial^{i+j} U_m(x, y)}{\partial x^i\, \partial y^j} = \frac{\partial U^{i+j}(x, y)}{\partial x^i\, \partial y^j}, \ (x, y) \in D. \tag{118}$$

Так как $U_m(x, y)$ удовлетворяют уравнению

$$A \frac{\partial^2 U_m(x, y)}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U_m(x, y)}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U_m(x, y)}{\partial y^2} = 0, \tag{119}$$

то переходя в (119) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0, \ (x, y) \in D. \tag{120}$$

Итак, получено, что вектор-функция $U(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1). Теперь покажем непрерывность $U(x, y)$ в замкнутой области $D + \Gamma$.

Согласно теореме 2

$$|U_m(x, y) - U_k(x, y)| = \left| \int_\Gamma K(z, t)[Q_m(t) - Q_k(t)]\, dt \right| \leqslant \tag{121}$$

$$\leqslant c \max_{t\in\Gamma} |Q_m(t) - Q_k(t)| < c \{\max_{t\in\Gamma} |Q_m(t) - f(t)| + \max_{t\in\Gamma} |f(t) - Q_k(t)|\},$$

где c — некоторая постоянная.

Так как последовательность функций $Q_m(t)$ стремится к $f(t)$ равномерно, то из (121) следует, что для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что

$$|U_m(x, y) - U_k(x, y)| \leqslant \varepsilon, \text{ при } m > N,\ k \geqslant N. \tag{122}$$

Переходя в (122) к пределу при $k \to \infty$ и имея в виду (117), получим

$$|U_m(x, y) - U(x, y)| \leqslant \varepsilon, \text{ при } m \geqslant N,\ (x, y) \in D + \Gamma. \tag{123}$$

Это означает, что $U_m(x, y)$ стремится к $U(x, y)$ равномерно в замкнутой области $D+\Gamma$. Так как $U_m(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $D+\Gamma$, то предельная функция $U(x, y)$ также непрерывна в этой области.

По определению (116) $U(x, y)$ принимает на Γ значение $f(x, y)$, следовательно, оператор (5) является решением задачи (1) — (2) при непрерывной граничной вектор-функции $f(x, y)$, удовлетворяющей условию (3).

Теперь пусть для $f(x, y) \in C(\Gamma)$ задача (1) — (2) имеет решение. Покажем, что $f(x, y)$ удовлетворяет условию (3). Представим вектор-функцию $f(x, y)$ в виде

$$f(x, y) = P(x, y) + \sum_{j=1}^{m} c_j \psi_j(x, y), \tag{124}$$

где

$$P(x, y) = f(x, y) - \sum_{j=1}^{m} c_j \psi_j(x, y), \tag{125}$$

а

$$c_j = \int_\Gamma f(x, y)\, \psi_j(x, y)\, ds \quad (j = 1, \cdots, m). \tag{126}$$

Ясно, что функция $P(x, y)$ удовлетворяет условию (3). Следовательно, из вышедоказанного, для $P(x, y)$ задача (1) — (2) будет иметь решение, в результате задача (1) — (2) имеет решение и для вектор-функции

$$T(x, y) \overset{\text{def}}{=} f(x, y) - P(x, y) \equiv \sum_{j=1}^{m} c_j \psi_j(x, y). \tag{127}$$

Так как $T(x, y) \in C^\infty(\Gamma)$ и для него задача (1) — (2) имеет решение, то согласно теореме 1, это решение принадлежит классу $C^\infty(D + \Gamma)$.

Поэтому $T(x, y)$ удовлетворяет условию (3), т. е.

$$\int_{\Gamma} (c_1\psi_1(x,\ y)+\cdots+c_m\psi_m(x,\ y))\cdot\psi_j(x,\ y)\,ds=0\quad (j=1,\cdots,\ m).\quad (128)$$

Отсюда получим, что

$$c_j=0\quad (j=1,\cdots,\ m).\quad (129)$$

Из (126) и (129) следует, что $f(x,\ y)$ удовлетворяет условию (3), тем самым теорема 3 доказана.

Замечание 3. Скажем, что $f(z)$ в точке z_0 имеет слабую особенность, если в окрестности этой точки имеет место

$$|f(z)|\leqslant\frac{c}{|z-z_0|^{\alpha}},\quad 0\leqslant\alpha<1,\ z=x+iy.\quad (130)$$

Полученные результаты остаются в силе, если $f(x,\ y)$ и искомое решение $U(x,\ y)$ в конечном числе точек на границе Γ имеют особенность вида (130).

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность моему научному руководителю, профессору Н. Е. Товмасяну, за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса
Поступила 15.V.1978

Է. Պ. ՄԵԼԻՔՍԵԹՅԱՆ. Դիրիխլեի խնդիրը երկրորդ կարգի թույլ կապակցված էլիպտիկ սիստեմի դիֆերենցիալ հավասարումների համար սահմանափակ տիրույթներում *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը։ Գտնել միակապ D տիրույթում, որի Γ եզրը հանդիսանում է անալիտիկ կոր,

$$AU_{xx}+BU_{xy}+CU_{yy}=0\quad (1)$$

էլիպտիկ սիստեմի երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի լուծումը, որը բավարարում է

$$U(x,\ y)/_{\Gamma}=f(x,\ y)\quad (2)$$

եզրային պայմանին, որտեղ A, B և C գործակիցները հաստատուն, իրական քառակուսային n-չափանի մատրիցաներ են։ (1)—(2) խնդիրը դիտարկվում է, երբ $f(x,\ y)=\{f_1(x,\ y),\cdots,f_n(x,\ y)\}$ պատկանում է $C(\Gamma)$, իսկ $U(x,y)=\{U_1(x,\ y),\cdots,\ U_n(x,\ y)\}$ որոնվում է $C(D+\Gamma)$ դասում։ Որոնելիք դասում ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման (1)—(2) խնդրի լուծման համար։

E. P. MELICKSETIAN. *The Dirichlet problem for weakly connected elliptic systems of second order differential equations in bounded areas* (summary)

In the article the following boundary problem is considered.

In a singleconnected domain D bounded by an analytical curve Γ, find a two times continuously differentiable solution of the weakly connected elliptic system of differential equations

$$AU_{xx}+BU_{xy}+CU_{yy}=0,\quad (1)$$

continuous in the closed $D+\Gamma$ and satisfying a boundary condition

$$U(x, y)|_\Gamma = f(x, y), \tag{2}$$

where A, B and C are constant real square matrices of order n, $f(x, y) = \{f_1(x, y), \cdots, f_n(x, y)\}$ is a vector-function, defined on Γ, $U(x, y) = \{U_1(x, y), \cdots, U_n(x, y)\}$.

In the paper a number of theorems are proved and a necessary and sufficient condition for solvability of the problem (1) — (2) is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., «Наука», 1966.
2. *И. Г. Петровский.* Лекции по теории интегральных уравнений, М., «Наука», 1965.
3. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., «Наука», 1968.
4. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1973.
5. *Н. Е. Товмасян.* Эффективные методы решения задачи Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в областях, ограниченных эллипсом, Диф. уравнения, V, № 1, 1969.
6. *Б. В. Хведелидзе.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Труды Тбилис. математического ин-та АН Груз.ССР, 23, 1957, 3—158.
7. *В. П. Михайлов.* О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, Диф. уравнения, 12, 1976, 1877—1891.
8. *В. С. Виноградов.* Граничная задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости, Диф. уравнения, VII, № 8, 1971, 1440—1448.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 4, 1981 Математика

Л. З. ГЕВОРКЯН

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НЕКОТОРОГО СЕМЕЙСТВА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

0°. В настоящей заметке метод, изложенный в [1], [2] применяется для исследования семейства операторов вида

$$(B_\alpha f)(x) = xf(x) + \alpha \int_0^x G(x-t) f(t)\, dt. \qquad (1)$$

Хотя дальнейшее построение можно провести и в случае, когда $G(x)$ более или менее произвольная функция (см. п. 2.1), однако, чтобы сделать конструкцию особенно прозрачной, мы будем рассматривать случай, когда $G(x) \equiv 1$. Дело в том, что даже этому простейшему случаю посвящено большое число работ. Так, например, Сахнович еще в 1958 г. доказал, что операторы B_i и B_0 подобны в пространстве $L^2(0,1)$ [3], впоследствии Калиш доказал, что операторы B_α и $B_{\mathrm{Re}\,\alpha}$ при любом $\alpha \in \mathbb{C}$ подобны в любом пространстве $L^p(0,1)$ [4], затем Калиш в работе [5] доказал, что у оператора B_{-1} спектр простой и чисто точечный.

В работе [1] (см. также [2]) доказано, что если оператор A обладает циклическим вектором и порожденная им алгебра полупроста, то этот оператор изометрически изоморфен оператору умножения на независимую переменную, который и называется функциональной моделью оператора A.

1.1. Наша цель заключается в построении функциональной модели для семейства операторов вида

$$(B_\alpha f)(x) = xf(x) + \alpha \int^x f(t)\, dt, \qquad (2)$$

действующего в пространстве $L^2(0,1)$, где α — произвольное комплексное число.

Заметим, что правая часть (2) сохраняет смысл и для обобщенных функций, если понимать фигурирующий там интеграл как регуляризованное в смысле [6] значение интеграла. При этом легко убедиться, что хотя при $\mathrm{Re}\,\alpha > 1/2$ функция $\xi_\alpha(x) = x^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ не принадлежит пространству $L^2(0,1)$, однако

$$(B_\alpha \xi_\alpha)(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x t^{-\alpha}\, dt = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Другими словами, действие оператора B_α на функцию ξ_α сводится к уменьшению индекса α на единицу. Поэтому, если ξ_α не принадлежит пространству $L^2(0,1)$, то его некоторая итерация $\xi_{\alpha-n}=B^n\xi_\alpha$ уже будет принадлежать $L^2(0,1)$.

Лемма 1.1. *Функция $\xi_{\alpha-n}$ является циклическим вектором оператора B_α.*

Для доказательства этого утверждения воспользуемся следующей теоремой единственности.

Теорема ([7], III, 298). Если в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ функция $f(z)$ аналитична и ограничена и обращается в нуль в точках $\{z_n\}$, $|z_n|>1$, $\operatorname{Re} z_n>0$, то тогда либо ряд

$$\sum \operatorname{Re}\frac{1}{z_n}$$

сходящийся, либо $f(z)\equiv 0$.

Пусть $\varphi\in L^2(0,1)$ — функция, ортогональная к $\{B^k\xi_{\alpha-n}\}_{k=0}^{\infty}$. Определим функцию $f(z)$ по формуле

$$f(z)=\int_0^1 t^z\overline{\varphi(t)}\,dt.$$

Легко можно доказать, что $f(z)$ — ограниченная в правой полуплоскости аналитическая функция. Из упомянутой ортогональности следует, что $f(k-\alpha)=0$ при всех $k=n,\ n+1,\cdots$. Поэтому в силу приведенной теоремы единственности из расходимости ряда $\sum\frac{1}{k-\alpha}$ заключаем, что $f(z)\equiv 0$, откуда, в свою очередь, следует, что $\varphi=0$.

Рассмотрим сопряженный оператор B_α^*, который имеет вид

$$(B_\alpha^* f)(x)=xf(x)+\bar{\alpha}\int_x^1 f(t)\,dt.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$h_\lambda(x)=c\,\frac{\theta(\lambda-x)}{(\lambda-x)^{1-\alpha}}\quad (\theta(x)\text{ — функция Хевисайда}).$$

при $\alpha>0$ является собственной функцией оператора B_α^* с собственным значением, равным λ, однако она принадлежит пространству $L^2(0,1)$ лишь при $\operatorname{Re}\alpha>1/2$.

Собственные функции h_λ мы в отличие от [1], [2] будем нормировать условием $(\xi_\alpha,\ h_\lambda)_{L^2}=1$,

$$\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x t^{-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}\,dt=\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 z^{-\alpha}(1-z)^{\alpha-1}\,dz=$$

$$=\frac{c\beta(1-\alpha,\ \alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}=c\Gamma(\alpha)=1$$

(интеграл понимается в смысле регуляризованного значения). Таким образом, дробный интеграл Римана-Лиувилля J^{α} есть интегральный оператор с ядром $h_x(t)$, являющимся собственной функцией оператора B_{α}^{*}.

1.2. Покажем теперь, что оператор Римана-Лиувилля J^{α} $(\alpha>0)$ есть в точности дробная степень оператора дифференцирования в смысле теории операторов [8].

С этой целью напомним определение дробной степени оператора. Пусть A — замкнутый оператор в некотором пространстве H с плотной областью определения и замкнутая отрицательная полуось лежит в резольвентном множестве оператора A, а резольвента удовлетворяет неравенству

$$\|R_{\lambda}\| \leqslant \frac{c}{1+|\lambda|} \quad (\lambda<0), \tag{3}$$

тогда дробную степень $A^{-\alpha}$ оператора A можно определить формулой

$$A^{-\alpha}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}\int\limits_0^{\infty}\lambda^{n-1-\alpha}R_{-\lambda}^{n}\,d\lambda \quad (n-1<\alpha<n). \tag{4}$$

Положительные степени оператора A определяются как обратные к соответствующим отрицательным, причем они являются неограниченными операторами. При этом имеет место групповое свойство

$$A^{\alpha}A^{\beta}x=A^{\beta}A^{\alpha}x=A^{\alpha+\beta}_{\lambda} \quad (x\in D(A^{\gamma}),\ \gamma=\max\{\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\}),$$

и для любых чисел $\alpha<\beta<\gamma$ выполняется неравенство моментов

$$\|A^{\beta}x\|\leqslant c(\alpha,\ \beta,\gamma)\|A^{\alpha}x\|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\cdot\|A^{\gamma}x\|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \quad x\in D(A^{\gamma}).$$

В определении дробной степени $A^{-\alpha}$ α можно считать комплексным числом с $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, причем $A^{-\alpha}$ является аналитической функцией в правой полуплоскости со значениями в $B(H)$.

Обозначим через $J^{-1}=d/dx$ оператор дифференцирования в пространстве $L^2(0,1)$ с областью определения

$$D=\{\varphi:\varphi(0)=0,\ \varphi \text{ — абсолютно непрерывна, } \int\limits_0^1|\varphi'|^2\,dx<\infty\}.$$

Резольвента этого оператора имеет вид

$$(R_{\lambda}f)(x)=\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt.$$

Оценим норму резольвенты. Для этого воспользуемся неравенством Юнга [9], которое в случае $L^2(0,1)$ принимает вид

$$\|g*h\|_{L^2}\leqslant\|g\|_{L^1}\|h\|_{L^2}.$$

Тогда

$$\|R_\lambda f\| \leqslant \frac{e^\lambda - 1}{\lambda} \|f\|,$$

откуда нетрудно получить необходимую оценку (3).

Таким образом, мы находимся в условиях применимости формулы (4), применяя которую будем иметь

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} d\lambda \int_0^x e^{-\lambda(x-t)} f(t)\, dt \quad (0 < \alpha < 1).$$

После перестановки пределов интегрирования и замены переменной окончательно получим

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_0^\infty z^{-\alpha} e^{-z} dz = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{5}$$

Заметим, что это равенство остается справедливым и для $\alpha > 1$, если интеграл понимать в смысле регуляризованного значения [6]. Из неравенства Юнга легко следует, что оператор Римана-Лиувилля при $\alpha > 0$ действует из пространства $L^2(0,1)$ в пространство $L^2(0,1)$. Обозначим через H_α образ пространства $L^2(0,1)$ при отображении J^α Легко видеть, что J^α является взаимно-однозначным отображением $L^2(0,1)$ на H_α. Введем в H_α скалярное произведение

$$(f, g)_\alpha = (J^{-\alpha} f, J^{-\alpha} g)_0 = (J^{-\alpha} f, J^{-\alpha} g)_{L^2}.$$

Лемма 1.2. *Пространства H_α, $\alpha \geqslant 0$ образуют банахову шкалу гильбертовых пространств.*

Сначала докажем, что пространство H_β плотно вложено в H_α при $\beta > \alpha$. Действительно

$$H_\beta = J^\beta L^2 = J^\alpha J^{\beta-\alpha} L^2 \subset J^\alpha L^2 = H_\alpha.$$

Если же $\varphi \in H_\alpha$ ортогональна к H_β, то

$$(\varphi, H_\beta)_\alpha = (J^{-\alpha} \varphi, J^{\beta-\alpha} L^2)_0 = 0,$$

т. е. φ ортогональна к $H_{\beta-\alpha}$ (в смысле $L^2(0,1)$. Воспользовавшись леммой 1.1, легко можно доказать, что пространство H_γ при любом $\gamma > 0$ плотно в $L^2(0,1)$, откуда получим $J^{-\alpha}\varphi = 0$, $\varphi = 0$. Неравенство моментов принимает вид

$$\|x\|_\beta \leqslant c(\alpha, \beta, \gamma) \|x\|_\alpha^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \cdot \|x\|_\gamma^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}.$$

Эти два условия и означают, что пространства H_α, $\alpha \geqslant 0$ образуют банахову шкалу пространств [9].

Так как все пространства H_α гильбертовы, то естественно предположить, что пространства H_α образуют гильбертову шкалу пространств.

Предложение 1.3. *Шкала* $\{H_\alpha\}_{\alpha>0}$ *не является гильбертовой.*

В теории самосопряженных операторов хорошо известным является следующий факт [9].

Пусть H_0 и H_1 — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_0$ и $(\cdot,\cdot)_1$, причем пространство H_1 плотно в H_0 и $\|\cdot\|_1 \geqslant \|\cdot\|_0$.

Тогда существует самосопряженный оператор Q такой, что областью его определения служит пространство H_1 и $\|f\|_1 = \|Qf\|_0$.

Если через H_α обозначить область определения оператора Q^α, то скалярное произведение

$$(f, g)_\alpha = (Q^\alpha f, Q^\alpha g)_0$$

превращает H_α в гильбертово пространство, а шкалу $\{H_\alpha\}$ — в шкалу гильбертовых пространств.

В нашем случае пространство H_1 есть образ пространства $L^2(0,1)$ при отображении

$$(Jf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

т. е. состоит из абсолютно непрерывных функ[illegible], [illegible] нулю точке 0 и имеющих квадратично суммируемую производную. Так какв $\|J\| = 2/\pi$ (см. [10], задача 148), то

$$\|f\|_0 = \|Jf'\|_0 \leqslant 2/\pi \|f'\|_0 = 2/\pi \|f\|_1,$$

$$\|f\|_1 \geqslant \frac{\pi}{2}\|f\|_0 > \|f\|_0.$$

Теперь если мы по паре H_0, H_1 найдем оператор Q, то он будет иметь вид (с точностью до унитарного множителя) $(Qf)(x) = f'(1-x)$

Хотя и скалярное произведение

$$(Qf, Qg) = \int_0^1 f'(1-x)\overline{g'(1-x)}\,dx$$

совпадает с тем скалярным произведением, которое есть в H_1, но тем не менее гильбертова шкала, построенная по оператору Q не совпадает с уже имеющейся шкалой. Это не так хотя бы потому, что квадрат оператора Q имеет вид $Q^2 = -d^2/dx^2$ при граничных условиях $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, а пространство H_2 в нашем случае состоит из функций φ, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \int_0^1 |\varphi''|^2\,dx < \infty.$$

Известно, что существует единственная шкала гильбертовых пространств, соединяющая данные два пространства [9].

Замечание 1.4. Взяв оператор дифференцирования $K^{-1}=-d/dx$ с областью определения

$$D=\{\varphi:\varphi(1)=0,\ \varphi\text{ — абсолютно непрерывна, } \int_0^1 |\varphi'|^2\,dx<\infty\}$$

мы тем же путем получили бы оператор дробного интегрирования Вейля K^α

$$(K^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^1 \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}.$$

Легко видеть, что операторы J^α и K^α являются сопряженными (в смысле $L^2(0,1)$). Если через H^α обозначить образ $L^2(0,1)$ при отображении K^α и там ввести скалярное произведение

$${}_\alpha(f,\ g)=(K^{-\alpha}f,\ K^{-\alpha}g)_{L^2},$$

то мы получим банахову шкалу $\{H^\alpha\}_{\alpha>0}$. Шкалы $\{H_\alpha\}$ и $\{H^\alpha\}$ имеют общее начало — пространство $L^2(0,1)$. В известном смысле эти две шкалы совпадают в некоторой окрестности точки 0. Более точно имеет место следующее

Предложение 1.5. *Пусть* $0<\alpha<1/2$. *Тогда*

а) *множества* H_α *и* H^α *совпадают,*

б) *нормы* $\|\cdot\|_\alpha$ и ${}_\alpha\|\cdot\|$ *эквивалентны.*

Доказательство этого утверждения является непосредственным следствием теоремы, доказанной Джубергом [11], о том, что при $|\mathrm{Re}\,\alpha|<1/2$ оператор $J^{-\alpha}K^\alpha$ ограничен и ограниченно обратим в $L^2(0,1)$.

Выше мы отметили, что дробная степень оператора допускает продолжение до аналитической в правой полуплоскости вектор-функции. Это продолжение задается формулой (5), где под $(x-t)^{\alpha-1}$ понимается та ветвь многозначной функции, которая соответствует главной ветви логарифма. В этом случае $(\mathrm{Re}\,\alpha>0)$ мы сохраним наши обозначения H_α и $(\cdot,\cdot)_\alpha$.

Предложение 1.6. *Пусть* $\alpha=a+ib$, *где* $a\geqslant 0$, $b\in R$. *Тогда*

а) *множества* H_α *и* H_a *совпадают,*

б) *нормы* $\|\cdot\|_\alpha$ *и* $\|\cdot\|_a$ *эквивалентны.*

Для доказательства этого утверждения достаточно использовать групповое свойство семейства J^α и известный результат о том, что оператор мнимого интегрирования ограничен и ограниченно обратим в $L^2(0,1)$ [12].

Из результатов работы [1] следует, что оператор J^α приводит семейство B_α к оператору умножения на независимую переменную. Впрочем, в рассматриваемом частном случае это нетрудно установить и непосредственно. В самом деле, для этого достаточно показать, что

$$J^\alpha(X+\alpha J)=XJ^\alpha, \tag{6}$$

где через X обозначен оператор умножения на x в пространстве $L^2(0,1)$.

Действительно, при $\operatorname{Re}\alpha>0$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{tf(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{-\alpha}}=\frac{x}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Рассмотрим теперь семейство $\overset{*}{B}_\alpha$. Из равенства (6) получим

$$(X+\alpha K)K^{\alpha}=K^{\alpha}X,\quad K^{\alpha}(X-\bar{\alpha}K)=XK^{\alpha},$$

т. е. оператор K^α приводит семейство $\overset{*}{B}_\alpha$ к оператору умножения. Таким образом, мы приходим к следующей основной теореме.

Теорема 1.7. *Оператор дробного интегрирования J^α $\operatorname{Re}\alpha>0)$ устанавливает изометрический изоморфизм между оператором B_α и сужением оператора X на пространство H_α. Оператор дробного интегрирования Вейля K^α устанавливает изометрический изоморфизм между оператором $\overset{*}{B}_{-\alpha}$ и сужением оператора X на пространство H^α.*

Итак, для исследования семейства B_α при $\operatorname{Re}\alpha>0$ мы можем воспользоваться пространствами H_α, а при $\operatorname{Re}\alpha<0$ — пространствами $H^{-\alpha}$.

В следующем пункте мы покажем, что эти два случая могут быть объединены, если оператор Римана-Лиувилля рассматривать уже в пространстве обобщенных функций.

1.3. Обозначим через H^∞ пространство всех бесконечно дифференцируемых на $]0,1[$ функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x\to 1-0} f^{(n)}(x)=0,\quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

Введем в H^∞ систему скалярных произведений

$$_{\alpha}(f,g)=(K^{-\alpha}f,K^{-\alpha}g)_{L^2}.$$

Обозначим через $H_{-\infty}$ пространство, сопряженное к H^∞, т. е. пространство всех антилинейных и непрерывных относительно каждой из норм $_\alpha\|\cdot\|$ функционалов над H^∞. Определим оператор Римана-Лиувилля произвольного порядка α над $H_{-\infty}$ по формуле

$$(J^\alpha\varphi,h)=(\varphi,\bar{K}^\alpha h),\quad \varphi\in H_{-\infty},\quad h\in H^\infty.$$

Естественность такого расширения оператора Римана-Лиувилля подтверждается тем, что если $\operatorname{Re}\alpha>0$ и $\varphi\in L^2$, то это определение эквивалентно данному выше определению J^α, если же $\operatorname{Re}\alpha<0$ и $\varphi\in H_{-\alpha}$, то J^α совпадает с $(J^{-\alpha})^{-1}$.

Далее, для любого α обозначим через H_α образ пространства $L^2(0,1)$ при отображении J^α и введем в H_α скалярное произведение

$$(f,g)_\alpha=(J^{-\alpha}f,J^{-\alpha}g)_{L^2}.$$

Тогда ясно, что пространство H_α при любом α изометрически изоморфно пространству $L^2(0,1)$. Определим умножение элементов пространства $H_{-\infty}$ на независимую переменную x по формуле

$$(x\cdot\varphi,\ h)=(\varphi,\ x\cdot h).$$

Это умножение совпадает с обычным (поточечным) умножением, когда $\varphi\in L^2(0,1)$.

Тогда из вышесказанного следует, что семейство B_α приводится к оператору умножения в системе пространств $\{H_\alpha\}$, $\alpha\in\mathbf{C}$.

1.4. В качестве простого приложения построенной модели найдем инвариантные подпространства оператора $\overset{\bullet}{B}_{-1}$ (а значит и B_{-1}). Для этого подробнее рассмотрим пространство $\overset{\bullet}{H}{}^1$. Оно совпадает с пространством абсолютно непрерывных функций с квадратично суммируемой производной, равных нулю в точке $x=1$. Обозначим через $AC^2(0,1)$ пространство всех абсолютно непрерывных функций с квадратично суммируемой производной. В пространстве $AC^2(0,1)$ можно ввести две эквивалентные нормы

$$\|f\|_1^2=|f(0)|^2+\int_0^1|f'|^2\,dx,$$

$$\|f\|_2^2=|f(1)|^2+\int_0^1|f'|^2\,dx.$$

Сужение первой нормы на H_1 совпадает с нормой этого пространства, сужение второй на $\overset{\bullet}{H}{}^1$—с нормой пространства $\overset{\bullet}{H}{}^1$. Найдем теперь инвариантные подпространства оператора $\overset{\bullet}{B}_{-1}$. Инвариантные подпространства оператора умножения x в пространстве $AC^2(0,1)$ описаны в [13], [14]. Они определяются замкнутыми подмножествами F отрезка $[0,1]$ и состоят из всех функций, равных нулю на F. Отсюда следует, что инвариантные подпространства оператора $\overset{\bullet}{B}_{-1}$ определяются замкнутыми подмножествами F отрезка $[0,1]$ и состоят из всех функций $f\in L^2(0,1)$, для которых

$$\int_x^1 f(t)\,dt=0,\ \forall x\in F.$$

Это условие можно переписать в виде

$$\int_0^1 f(t)\,\theta(x-t)\,dt=0.$$

Таким образом, это инвариантное подпространство является ортогональным дополнением к множеству $\{\theta(x-t)\}_{x\in F}$. Инвариантное подпространство оператора B_{-1} будет совпадать с замкнутой линейной оболочкой множества $\{\theta(x-t)\}_{x\in F}$. Отсюда получается следующая

Теорема 1.8. *Инвариантные подпространства оператора B_{-1} определяются открытыми подмножествами U отрезка* $[0,1[$ *и состоят из всех функций $f\in L^2(0,1)$, которые равны нулю на той компоненте связности множества U, которая содержит точку* 0, *а на остальных компонентах постоянны.*

Следует отметить, что как указано в работе [13], Бун-Хуа-Онг нашел решетку инвариантных подпространств оператора B_α при целых α, однако ни сам результат, ни ссылка на какую-либо публикацию не приводятся.

2.1. В этом пункте мы ограничимся изложением формальной схемы, позволяющей аналогичным образом рассматривать возмущения более общего вида.

Рассмотрим семейство операторов

$$(B_\alpha f)(x) = xf(x) + \alpha \int_0^x G(x-t) f(t)\, dt.$$

Предположим, что существует преобразование типа свертки с ядром $K_\alpha(x)$, которое приводит семейство B_α к оператору умножения, т. е.

$$(K_\alpha * B_\alpha f)(p) = p\,(K_\alpha * f)(p).$$

Применяя преобразование Лапласа, получим

$$\widetilde{K}_\alpha(-F' + \alpha\widetilde{G}F) = -\widetilde{K}_\alpha' F - \widetilde{K}_\alpha F',$$

где $\widetilde{K}_\alpha$, $\widetilde{G}$ и F — преобразование Лапласа $K(x)$, $G(x)$ и $f(x)$ соответственно. Решая это дифференциальное уравнение, получим

$$\widetilde{K}_\alpha = ce^{-\alpha\int \widetilde{G}\,dp},$$

откуда $K_\alpha(x)$ можно найти обратным преобразованием Лапласа.

Начнем с тривиального примера, когда $G(x) \equiv 1$. Тогда

$$\widetilde{K}_\alpha = \frac{c}{p^\alpha}.$$

Обратное преобразование дает $K_\alpha(x) = cx^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, т. е. мы опять получили ядро оператора Римана-Лиувилля.

Пусть теперь $G(x) = \cos ax$. Тогда

$$\widetilde{K}_\alpha = e^{-\alpha\int \frac{p\,dp}{p^2+a^2}}.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$K_\alpha(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha/2)} \left(\frac{x}{2a}\right)^{\alpha/2-1/2} J_{\alpha/2-1/2}(ax),$$

где $J_m(z)$ — функция Бесселя первого рода.

Пусть $G(x) = J_0(ax)$, Тогда

$$\widetilde{K}_\alpha = \frac{1}{(p + \sqrt{p^2 + a^2})^\alpha}.$$

Для этой функции оригиналом является

$$K_\alpha(x) = \frac{\alpha a^{2\alpha}}{x} J_{-\alpha}(ax).$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 3.III.1979

Լ. Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ. Ոչ-ինքնահամալուծ օպերատորների որոշակի փնջի ֆունկցիոնալ մոդելը *(ամփոփում)*

Ցույց է տրված, որ ոչ-ինքնահամալուծ օպերատորների որոշակի փունջը կոտորակային ինտեգրման օպերատորի միջոցով կարելի է բերել անկախ փոփոխականով բազմապատկման օպերատորի ընդհանրացված ֆունկցիաներ պարունակող Հիլբերտյան տարածությունների շկալայում։

L. Z. GEVORGIAN. *The functional model of certain bundle of non-selfadjoint operators* (summary)

It has been shown that a certain bundle of non-self-adjoint operators can be bought by the operator of fractional integration into operator of multiplication by independent variable on the scale of Hilbert spaces, consisting of generalized functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. З. Геворкян.* Функциональная модель для некоторого класса несамосопряженных операторов, ДАН АрмССР, 70, № 4, 1980, 212—215.
2. *Л. З. Геворкян.* О представимости операторов в виде оператора умножения на независимую переменную, Дифференциальные уравнения с частными производными, «Наука», Новосибирск, 1980.
3. *Л. А. Сахнович.* Приведение несамосопряженных операторов с непрерывным спектром к диагональному виду, Мат. сб. 44, 1958, 180—186.
4. *G. K. Kalisch.* On similarity of certain operators, Colloq. Math. János Bolai, 5 Hilbert space operators and operator algebras, Tihang (Hungarg), 1970, North Holland Publ. Co. Amsterdam—London, 1972.
5. *G. K. Kalisch.* On operators on Banach spaces with arbitrary prescribed poin spectrum, Proc. Amer. Math. Soc., 34, 1972, 207—208.
6. *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов.* Обобщенные функции, вып. 2, Пространства основных и обобщенных функций, Физматгиз, 1958.
7. *Г. Полиа, Г. Сеге.* Задачи и теоремы из анализа, т. I, «Наука», 1978.
8. *С. Г. Крейн.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве «Наука», 1967.
9. *С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов.* Интерполяция линейных операторов, «Наука», 1978.
10. *П. Халмош.* Гильбертово пространство в задачах. «Мир», 1970.
11. *R. K. Juberg.* The spectra for operators of a basic collection, Bull. Amer. Math. Soc., 79, № 4, 1973, 821—824.

12. *Л. А. Сахнович*. Треугольные интегро-дифференциальные операторы с разностным ядром, Сиб. мат. ж., 19, № 4, 1978, 871—877.

13. *O. Sarason*. Invariant subspaces, in Math. Surveys, vol. 13, Topics in operator theory, 2nd edition. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1979.

14. *Л. З. Геворкян*. Функциональная модель и инвариантные подпространства некоторого класса строго циклических операторов, Изв. АН АрмССР, «Математика», XIV, № 1, 1979, 42—48.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 4, 1981 Математика

Р. В. АМБАРЦУМЯН

О КОМБИНАТОРНЫХ ОСНОВАНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Настоящий краткий обзор представляет собой содержание доклада, прочитанного автором на научной сессии Отделения физико-математических наук АН Армянской ССР 29 января 1981 г. Последний пункт содержит ранее не публиковавшиеся результаты.

I. Классическая Интегральная Геометрия, развитая в трудах В. Бляшке [1] и его учеников [2] занимается в основном отысканием мер в пространствах геометрических элементов (прямые, плоскости и т. д.), инвариантных относительно группы преобразований основного пространства, а также вычислением интегралов по этим мерам. В отличие от классической, Комбинаторная Интегральная Геометрия (КИГ) не ограничивается рассмотрением инвариантных мер. Используя комбинаторные методы, здесь удается получать результаты (так называемые „диофантовы разложения") для широких классов мер. Часто их интерпретация для случаев инвариантных мер приводит к результатам, не известным в классической теории.

Следует отметить, что евклидова структура инцидентности не является обязательной для справедливости диофантовых разложений. Последние поэтому переносятся локально на общие римановы многообразия. Примеры диофантовых разложений, о которых идет речь, дает следующая теорема [3].

Обозначим через H_d пространство ($d-1$-мерных) гиперплоскостей в R^d. Пусть $\{P_i\}_1^n$ — конечная совокупность точек в R^d в общем расположении. Две гиперплоскости $h_1, h_2 \in H_d$ назовем *эквивалентными*, если они порождают одно и то же разбиение множества $\{P_i\}_1^n$. *Ограниченные* множества эквивалентных гиперплоскостей назовем *атомами*. Атомы будем обозначать через a_k.

Обозначим через $\{\sigma_l\}$ класс всех нечетномерных симплексов, которые имеют своими вершинами точки из $\{P_i\}_1^n$. Известно [3], что в случае *четного* d число таких симплексов совпадает с числом атомов.

Обозначим $[\sigma_l] = \{h \in H_d : h$ пересекает симплекс $\sigma_l\}$. Для каждой локально-финитной меры m на H_d, которая приписывает нулевую меру пучкам гиперплоскостей, проходящих через точки P_i, имеем

$$m([\sigma_l]) = \sum_k \delta_{lk}\, m(a_k), \tag{1}$$

где $\|\delta_{lk}\|$ есть квадратная матрица из нулей и единиц.

Теорема 1. *Матрица $\|\beta_{lk}\|$ обратима, т. е. существует матрица $\|c_{kl}\|=\|\beta_{lk}\|^{-1}$. Другими словами, имеет место разложение*

$$m(a_k)=\sum c_{kl}\, m([\sigma_l]), \tag{2}$$

которое мы и называем „диофантовым". Применение этого термина в данном круге вопросов восходит к Дж. Сильвестру [4], который пытался определить коэффициенты c_{kl} в плоском случае. Название „диофантово" разложение оправдывается тем, что числа $c_{kl}\cdot a$, где a — определитель матрицы $\|\beta_{lk}\|$, суть целые.

Основные работы по КИГ принадлежат автору настоящей заметки (см. [3], [5—8]). В настоящее время различными аспектами КИГ занимается ряд других авторов (см. [8], а также [9, 10]). Отметим также, что энциклопедический труд [2] не содержит какого-либо материала по КИГ.

II. Приведем несколько результатов двумерной и трехмерной КИГ.

а) Известно, что на гладких римановых многообразиях каждая точка имеет окрестность, внутри которой существует единственный геодезический путь, соединяющий любые две точки из этой окрестности. Как велика может быть площадь этой окрестности?

Естественно поставить изопериметрическую задачу: фиксировать $L>0$ и пытаться найти верхнюю границу значений площади S т. н. дискоидов, натянутых на границу длины L. Многобразие D с краем называется *дискоидом*, если на D выполняется принцип существования и единственности геодезического пути. Как показано в [5], всегда

$$2\pi S\leqslant L^2,$$

равенство достигается на полусфере.

б) С помощью разложения (2) в двумерном случае в работе [6] получен следующий результат: всякая линейно-аддитивная, непрерывная псевдометрика $\rho(P_1, P_2)$ на плоскости порождается (единственной) локально-финитной, беспучковой мерой m в пространстве H_2 по формуле

$$\rho(P_1, P_2)=m(\{h\in H_2{:}h \text{ отделяет точку } P_1 \text{ от точки } P_2\}).$$

Таким образом, в [6] была продемонстрирована чисто комбинаторная природа этого результата. Эта же задача рассматривалась в [11] с применением некомбинаторных методов.

в) Имеет место (см. [3]) следующий принцип продолжения локальных псевдометрик на многообразиях.

Рассмотрим функцию F, определенную на множестве *геодезических путей* на некотором дифференцируемом римановом многообразии M. Требуется, чтобы M принадлежало бы т. н. классу Сантало. Основное требование, определяющее этот класс, состоит в том, что каждая геодезическая посещает каждый дискоид $D\subset M$ лишь конечное число раз.

Пусть локально (т. е. на каждом дискоиде $D \subset M$) функция представляет собой непрерывную псевдометрику, аддитивную вдоль геодезических. Если дискоид $D_0 \subset M$ посещается (хотя бы однажды) *всеми* геодезическими на M, то значения F на хордах дискоида D_0 однозначно определяет значения F на *всех* геодезических отрезках на M.

д) В трехмерном евклидовом пространстве найдено распределение числа вершин в случайном многоугольнике, возникающих при пересечении выпуклого многогранника случайной плоскостью. Результат записывается в виде „диофантовой" линейной комбинации произведений $\rho_s \cdot \beta_k$, где $\{\rho_s\}$ — расстояния между парами вершин многогранника, $\{\beta_k\}$ — двугранные углы между плоскостями, проходящими через тройки вершин многогранника [7]. Полученное выражение удобно для вычислений на ЭВМ.

е) КИГ имеет многочисленные применения в стохастической геометрии. С некоторыми из них можно познакомиться по статьям сборника [8].

III. На связь результата теоремы 1 в двумерном случае с классической формулой Гаусса-Боннэ в двумерном неевклидовом эллиптическом пространстве указал впервые А. Баддли в статье в сборнике [8]. В настоящем пункте, используя теорему 1, мы построим одно обобщение упомянутой формулы Гаусса-Боннэ, справедливое в эллиптических пространствах высших четных размерностей. Представляется, что наш результат принципиально отличен от обобщения формулы Гаусса-Боннэ. полученного Герглотцем, Черном, Аллендорфером и Вейлем, в том виде, как он приведен в [2]. Обозначим через E_d d-мерное неевклидово эллиптическое пространство. Существует гомеоморфизм

$$\gamma : H_d \to \mathrm{E}_d - \{0\}$$

(выброшенная точка (полюс) $0 \in \mathrm{E}_d$ произвольна), переводящий всякое множество (пучок) гиперплоскостей, проходящих через точку в гипер плоскость в E_d.

Пусть F — ограниченный выпуклый многогранник в R^d с вершинами $\{P_i\}$. Будем предполагать, что d—1-мерные грани многогранника F суть симплексы размерности $d-1$. Рассмотрим множества

$$[F] = \{h \in H_d : h \cap F \neq \varnothing\}.$$

$$[F]^c = \{h \in H_d : h \cap F = \varnothing\}.$$

Нетрудно установить, что:

а) $\gamma\,([F])$ есть собственный (т. е. не содержащий целиком ни одной гиперплоскости из E_d), геодезически выпуклый многогранник в E_d;

б) всякий собственный геодезически выпуклый многогранник Φ в E_d с простыми вершинами имеет вид

$$\Phi = \gamma\,([F]^c).$$

(Вершина называется простой, если в ней пересекаются ровно d $d-1$-мерные грани. Для построения нужного гомеоморфизма γ нужно выбирать полюс внутри Φ).

Запишем диофантово представление для $[F]$:

$$m\,([F]) = \sum c_l\, m\,([\sigma_l]). \tag{3}$$

Существование представления (3) выводится суммированием (2) по составляющим $[F]$ атомам. Далее, через m будем обозначать как меру на H_d, так и ее γ-образ на E_d. Если

$$m\,(\mathrm{E}_d) < \infty,$$

то из (3) находим

$$m\,(\Phi) = m\,(\mathrm{E}_d) - \sum c_l\, m\,(\nu_l),$$

где

$$\nu_l = \gamma\,([\sigma_l]).$$

Имеет место следующее

Предложение 1. Если ν_l не принадлежит границе Φ, то $c_l = 0$; если $\nu_l \subset \partial\Phi$, то значение c_l зависит только от числа вершин $s = s\,(l)$ симплекса σ_l и не зависит от выбора многогранника Φ.

Будем писать поэтому $c_l = x_s = x_s\,(d)$.

Доказательство предложения получается подробным рассмотрением процедуры суммирования по составляющим $[F]$ атомам.

Итак, для любого собственного многогранника $\Phi \subset \mathrm{E}_d$, с простыми вершинами, для всякой ограниченной меры на E_d, приписывающей нуль каждой гиперплоскости в E_d, выполняется (если d четное)

$$m\,(\Phi) = m\,(\mathrm{E}_d) - \sum_{s=2,\,4,\cdots,\,d} x_s \sum_{\dim \sigma_l = s-1} m\,(\nu_l). \tag{4}$$

В частности, m можно выбрать равным обычной объемной мере V_d в E_d. В этом случае

$$V_d\,(\nu_l) = \frac{V_d\,(\mathrm{E}_d)}{V_{s-1}\,(\mathrm{E}_{s-1})}\,\beta_l,$$

где β_l есть раствор $s-1$-мерного внешнего телесного угла при $d-s$-мерной грани $f_l \subset \partial\Phi$. Поясним, что множество ν_l ограничено γ-образами пучков с центрами в вершинах симплекса σ_l, f_l есть пересечение этих γ-образов, $V_d\,(\mathrm{E}_d)$ суть полуобъемы поверхностей обычных d-мерных единичных сфер.

Таким образом, комбинаторная интегральная геометрия предлагает следующее обобщение формулы Гаусса-Боннэ

$$V_d\,(\Phi) = V_d\,(\mathrm{E}_d) - V_d\,(\mathrm{E}_d) \sum_{s=2,\,4,\cdots,\,d} x_s\, V_{s-1}^{-1}\,(\mathrm{E}_{s-1}) \sum_{\dim \sigma_l = s-1} \beta_l. \tag{4'}$$

В общем случае явный вид коэффициентов $x_s = x_s(d)$ остается неизвестным. Ниже мы обсудим способы их вычисления. Одна из возможностей состоит в решении системы (1), записанной для множества $\{P_i\}_{i=1}^{d+1}$ вершин d-мерного симплекса σ в R^d и в последующем суммировании результата по атомам, составляющим $[\sigma]$. В силу предложения 1, это дает решение задачи для произвольного Ф. Однако, система (1) имеет порядок $\binom{d+1}{2}+\binom{d+1}{4}+\cdots+\binom{d+1}{d}$, т. е. порядок весьма велик даже для небольших значений d. Вопрос о сведении этой системы к системам меньших порядков требует специального исследования. Ниже мы укажем другой способ рассуждений, приводящий к системе линейных уравнений значительно меньшего порядка, причем непосредственно для величин x_s. Этот способ пригоден и в других случаях, скажем, для определения коэффициентов в (2). Он может быть назван способом „вырожденных симплексов".

Выберем $d+1$ точек $\{P_i\}$ *на плоскости* так, чтобы они образовывали выпуклый $d+1$-угольник. $\{P_i\}$ можно рассматривать как предельное положение вершин некоторой последовательности невырожденных d-мерных симплексов $\sigma^{(n)} \subset R^d$.

Пусть m — так называемая инвариантная мера в H_d, нормированная условием

$$m(\{h \text{ отделяет } P_1 \text{ от } P_2\}) = 2\rho(P_1, P_2),$$

где ρ—евклидово расстояние. В таком случае

$$\lim_{n\to\infty} m([\sigma^{(n)}]) = \sum a_i, \tag{5}$$

где a_i — длины сторон многоугольника $\{P_i\}_{i=1}^{d+1}$. Тот же предел можно вычислить почленным переходом к пределу в правой части соотношения (3), записанного для $F = \sigma^{(n)}$.

Симплексам меньших размерностей $\sigma_l \subset \partial\sigma^{(n)}$ припишем верхние индексы таким образом, чтобы существовали пределы

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_l^{(n)} = \varepsilon_l,$$

где ε_l — выпуклый многоугольник на R^2, множество его вершин принадлежит $\{P_i\}_{i=1}^{d+1}$, их число равно $s = s(l)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} m([\sigma_l^{(n)}])$ = длине периметра многоугольника ε_l, то предел правой части (3) имеет вид

$$\sum Y_{ij}\,\rho(P_i, P_j). \tag{6}$$

Коэффициенты Y_{ij} следующим образом выражаются через неизвестные x_s.

Пусть продолжение отрезка $P_i P_j$ разбивает $\{P_i\}_{i=1}^{d+1}$ на два подмножества, одно из которых содержит k, а другое — $d-k-1$ точек (пусть $k < d - k - 1$). В таком случае отрезок $P_i P_j$ является стороной для $\binom{k}{s-2} + \binom{d-k-1}{s-2}$ s-угольников* типа ε_l.

Согласно (5), сумма (6) равна единице, если $k = 0$ (т. е. если $P_i P_j$ есть сторона многоугольника $\{P_l\}_{l=1}^{d+1}$) и нулю, если $k > 0$. Возможные значения k суть $k = 0, 1, 2, \cdots, \frac{d-2}{2}$.

Таким образом, получаем $d/2$ линейных уравнений для определения того же числа неизвестных $x_2, x_4, \cdots, x_d$:

$$\sum_{s=2, 4, \cdots, d} \left[\binom{k}{s-2} + \binom{d-k-1}{s-2}\right] x_s = u_k,$$

где

$$u_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0 \\ 0, & \text{если } k > 0, \end{cases}$$

Решения этой системы для $d = 2, 4, \cdots, 14$ составляют следующую таблицу:

	x_2	x_4	x_6	x_8	x_{10}	x_{12}	x_{14}
$d = 2$	1/2						
$d = 4$	− 1/4	1/2					
$d = 6$	1/2	−1/4	1/2				
$d = 8$	−17/8	1/2	−1/4	1/2			
$d = 10$	31/2	−17/8	1/2	−1/4	1/2		
$d = 12$	−691/4	31/2	−17/8	1/2	−1/4	1/2	
$d = 14$	5461/2	−691/4	31/2	−17/8	1/2	−1/4	1/2

Вид этой таблицы дает основание предположить, что всегда

$$x_k(d) = x_2(d - k + 2).$$

Отсюда вытекает рекуррентный алгоритм решения системы (7), основанный на нахождении $x_2(d)$, скажем из первого ($k = 0$) уравнения системы (7), именно

$$2\, x_2(d) = 1 - \sum_{s=4, \cdots, d} \binom{d-1}{s-2} x_2(d - s + 2).$$

Разумеется, этот алгоритм нуждается в полном обосновании.

---

* Это утверждение верно лишь в случае $s > 2$. В случае $s = 2$ (т. е. когда ε_l есть пара точек) соответствующее число равно 1. Однако в этом случае периметр множества ε_l следует считать равным удвоенному расстоянию между точками. Это обстоятельство учитывается автоматически равенством $\binom{k}{0} + \binom{d-k-1}{0} = 2$.

Имея в виду предлагаемое решение, естественно ввести новые величины $\varkappa_r$:

$$\varkappa_r = x_2 (r+2).\ r=0,\ 2,\ 4,\cdots,$$

так что

$$\varkappa_0 = 1/2,\ \varkappa_2 = -1/4,\ \varkappa_4 = \frac{1}{2},\ \varkappa_6 = -17/8,\ \varkappa_8 = \frac{31}{2},\ \varkappa_{10} = -\frac{691}{4}\ \text{и т. д.}$$

Наше обобщение (4′) формулы Гаусса-Боннэ теперь запишется в виде

$$V_d(\Phi) = V_d(\mathrm{E}_d) - V_d(\mathrm{E}_d) \sum_{r=0,\,2,\cdots,\,d} \varkappa_r\, V_{d-r-1}(\mathrm{E}_{d-r-1}) \sum_{\dim f_l = r} \beta_l.$$

Здесь внешняя сумма берется по размерностям граней многогранника Φ; *коэффициенты $\varkappa_r$ зависят только от размерности r грани f_l и не зависят от (четной) размерности пространства E_d.*

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 18.III.1981

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ. Ինտեգրալ երկրաչափության կոմբինատոր հիմքերի վերաբերյալ. *(ամփոփում)*

Հոդվածը սկսվում է կոմբինատոր ինտեգրալ երկրաչափության հիմնական արդյունքների համառոտ ամփոփումով։ Ապա դուրս է բերվում զույգաչափանի էլիպտական տարածություններում Գաուս-Բոննէ-ի բանաձևի մի նոր տարբերակ։ Նոր բանաձևը պարունակում է որոշ կոմբինատոր գործակիցներ, որոնց հաշվարկի մի ալգորիթմ է առաջարկվում։

R. V. AMBARTZUMIAN. *On combinatorial foundations of integral geometry* (summary)

The paper begins with a brief review of some basic results in Combinatorial integral Geometry. The concluding part of the paper is devoted to derivation of a new version of the Gauss — Bonnet formula' for convex polyhedrons in even-dimensional elliptical spaces. This new Gauss — Bonnet type formula involves certain combinatorial coefficients. An algorithm for their calculation is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Blaschke.* Vorlesungen uber Integralgeometrie, Teubner, Leipzig, 1936, 1937.
2. *L. A. Santalo.* Integral geometry and geometric probability, Addison—Wesley, 1976.
3. *R. V. Ambartzumian.* A Synopsis of Combinatorial Integral Geometry, Advances in Mathematics, 37, 1, July, 1980.
4. *J. J. Sylvester.* On a funicular solution of Buffons problem of the needle in its most general form, Acta Math., 14, 1981, 185—205.
5. *R. V. Ambartzumian.* Combinatorial solution of the Buffon—Sylvester problem, Z. Wahrscheinliehkeitstheorie und Verw. Gebiete, 29, 1974, 53—74.
6. *R. V. Ambartzumian.* A note on pseudometrics on the plane, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Varw. Gebiete, 37, 1976, 145—155.
7. *R. V. Ambartzumian.* The solution of the Buffon—Sylvester problem in R^3, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 27, 1973, 53—74.
8. Комбинаторные принципы в стохастической геометрии. Сборник статей под редакцией Р. В. Амбарцумяна, Изд. АН Армянской ССР, Ереван, 1980.

9. *F. Piefke.* Schnitte von zufälligen Geraden durch endliche Punktmengen in der Ebene, Studia Sci. Math. Hungarica, 11, 1976, 301—311.

10. *F. Piefke.* Masze für gerichtete Geraden und nicht-symmetrische Pseudometriken in der Ebene II. Monatshefte für Mathematik, 89, 1980, 45—56.

11. *А. В. Погорелов.* Полное решение четвертой проблемы Гильберта, ДАН СССР, 14, 1973, 46—49.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 4, 1981 Математика

С. С. СЕКТ

РОСТ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ХАРАКТЕРИСТИКАХ М. М. ДЖРБАШЯНА. I

Изучение обобщенных характеристик роста и распределения значений мероморфных функций, введенных М. М. Джрбашяном в [1], представляет большой интерес в свете результатов, полученных А. А. Гольдбергом и В. Д. Мохонько в [2]. Невыполнение 1-ой основной теоремы для характеристик М. М. Джрбашяна налагает большие ограничения при их изучении.

Пусть функция $\omega(x)$ принадлежит классу Ω_∞, определенному М. М. Джрбашяном в [1].

Основные результаты статьи содержатся в теоремах 1 и 2.

Следуя Р. Неванлинна, введем понятие ω-дефекта мероморфной функции $f(z)$ в смысле М. М. Джрбашяна

$$\delta_\omega(a, f) = \lim_{r\to\infty} \frac{\tilde{m}_\omega(r, a, f)}{\tilde{T}_\omega(r, f)}. \tag{1.1}$$

При $a=0$ и $a=\infty$ следует (см. формулу (2.18′) в [1]):

$$0 \leqslant \delta_\omega(a, f) \leqslant 1.$$

Для доказательства аналога соотношения дефектов в случае роста $\omega(x) \in \Omega_\infty$ нам понадобятся характеристики А. Дингхаса m_ω, N_ω и T_ω. Для них справедливо (подробнее см. [2], [3]):

$$N_\omega(r, a, f) = \tilde{N}_\omega(r, a, f),\ \tilde{m}_\omega(r, a, f) \leqslant m_\omega(r, a, f). \tag{1.2}$$

Первая основная теорема для характеристик К. Дингхаса сохраняет силу.

Теперь докажем теорему.

Теорема 1. *Если $\omega(x) \in \Omega_\infty$ такова, что для любого фиксированного $\nu > 1$*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\omega(t)}{\omega(\nu t)} = \alpha(\nu) < \infty, \tag{1.3}$$

то для любой мероморфной функции $f(z)$, имеющей конечный нижний ω-порядок λ_ω, измеренный относительно $\tilde{T}_\omega(r, f)$

$$\lambda_\omega = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \tilde{T}_\omega(r, f)}{\ln r}, \tag{1.4}$$

справедливы следующие утверждения:

а). *Множество ω-дефектных значений*

$$D_\infty(f) = \{a : \delta_\infty(a, f) > 0\}$$ *не более чем счетно;*

б). *Величины ω-дефектов подчинены условию*

$$\sum_{\{a\}} \delta_\infty(a, f) \leqslant c(\nu, f),$$

где $c(\nu, f)$ — положительная постоянная.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, установим некоторые вспомогательные факты.

Лемма 1.1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция. Если для любого фиксированного $\nu > 1$ выполняется* (1.3), *то*

$$\tilde{N}_\infty(r, a, f) \leqslant (c(\nu/(\nu-1))\, \tilde{T}_\infty(\nu r, f) \tag{1.5}$$

справедливо для любого $a: 0 < |a| < \infty$.

Доказательство. Пусть $a \neq 0$ и $a \neq \infty$. Используя теорему 4 из [1], получаем

$$\tilde{N}_\infty(r, a, f) = \tilde{m}_\infty(r, f-a) - \tilde{m}_\infty(r, a, f) + \tilde{N}_\infty(r, f) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln_\infty |f(re^{i\theta}) - a|\, d\theta + \tilde{N}_\infty(r, f), \tag{1.6}$$

в силу определения функций $\tilde{m}_\infty(r, a, f)$, $\ln_\infty |f(re^{i\theta})|$. С использованием очевидного неравенства

$$\ln^+ |f - a| \leqslant \ln^+ |a| + \ln^+ |f| + \ln 2$$

формула (1.6) примет вид

$$\tilde{N}_\infty(r, a, f) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^r \ln^+ |f(\tau e^{i\theta})|\, a\,(-\omega(\tau)) + \right.$$

$$\left. + \omega(r) \ln^+ |f(re^{i\theta})|\right] d\theta + \tilde{N}_\infty(r, f) + \ln^+ |a| + \ln 2, \tag{1.7}$$

так как $\omega(0) = 1$.

Применим формулу (1.19) теоремы 2 М. М. Джрбашяна ([1]) к гармонической функции $\ln |f(z)|$, где $f(z)$—целая. Получим

$$\ln |f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_R(e^{i\theta} z; \omega) \ln_\infty |f(Re^{i\theta})|\, d\theta,$$

$$0 < R < \infty,\ 0 \leqslant t < R,\ z = te^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

где

$$S_R(z; \omega) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(R)},$$

$$\Delta_k(R)=R\int\limits_0^R \omega(x)\,x^{k-1}\,dx,\quad k=1,\,2,\cdots.$$

Имеем

$$\ln^+|f(te^{i\varphi})|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|S_R(e^{-i\theta}te^{i\varphi};\,\omega)|\,|\ln_\omega|\,f(Re^{i\theta})|\,|d\theta. \tag{1.8}$$

Далее

$$\int\limits_0^r \ln^+|f(te^{i\varphi})|\,d(-\omega(t))+\omega(r)\ln^+|f(re^{i\varphi})|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\tilde{m}_\omega(R,f)+\tilde{m}_\omega\left(R,\frac{1}{f}\right)\right)\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(R)}\right\}, \tag{1.9}$$

$$R>0,\ 0\leqslant r<R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

Формула (1.9) легко получается подстановкой в левую часть соотношения (1.8) и проведением простых преобразований с учетом того, что

$$|\ln_\omega|f(Re^{i\theta})|\,|\leqslant\ln_\omega^+|f(Re^{i\theta})|+\ln_\omega^+\{|f(Re^{i\theta})|^{-1}\}.$$

Применив результат (1.9) к формуле (1.7), получим, обозначив $R=\nu r$, $\nu>1$, фиксированное:

$$\tilde{N}_\omega(r,\,a,\,f)\leqslant 2\,\tilde{T}_\omega(\nu r,\,f)\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(\nu r)}\right). \tag{1.10}$$

Здесь мы воспользовались очевидными неравенствами

$$\tilde{m}_\omega(r,f)\leqslant\tilde{T}_\omega(r,f),\quad \tilde{m}_\omega(r,0,f)\leqslant\tilde{T}_\omega(r,f).$$

Пусть теперь для $k>p+1$

$$\Delta_k(r)=\int\limits_0^r\omega(t)\,t^{k-1}\,dt\underset{r\to\infty}{\to}\infty, \tag{1.11}$$

а для $k<p$

$$\Delta_k(\infty)=\lim_{r\to\infty}\int\limits_0^r\omega(t)\,t^{k-1}\,dt<\infty, \tag{1.12}$$

где p — фиксированное натуральное число.

Тогда (1.10) примет вид

$$\tilde{N}_\omega(r,\,a,\,f)\leqslant 2\,\tilde{T}_\omega(\nu r,\,f)\left(1+2\sum_{k=1}^{p}\frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(\nu r)}+\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(\nu r)}\right)$$

и с учетом (1.12) получаем

$$\widetilde{N}_\infty(r, a, f) \leqslant 2\,\widetilde{T}_\infty(\nu r, f)\left(c + 2\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(\nu r)}\right), \tag{1.13}$$

где $c = c(\nu)$ — постоянная.

Из условия (1.3) следует

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\left(\int_0^r \omega(t)\,t^{k-1}\,dt \Big/ \int_0^{\nu r}\omega(t)\,t^{k-1}\,dt\right) \leqslant \alpha(\nu)\,\nu^{-k},\ k > 1. \tag{1.14}$$

Действительно, для любого $t \geqslant t_0(\varepsilon)$

$$\omega(t)/\omega(\nu t) \leqslant (1+\varepsilon)\,\alpha(\nu),\ \varepsilon > 0.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^r \omega(t)\,t^{k-1}\,dt \leqslant (1+\varepsilon)\,\alpha(\nu)\int_{t_0}^r \omega(t\nu)\,t^{k-1}\,dt,\ t_0 > 0,$$

т. е.

$$\int_0^r \omega(t)\,t^{k-1}\,dt \leqslant (1+\varepsilon)\,\alpha(\nu)\int_0^r \omega(t\nu)\,t^{k-1}\,dt + c(\alpha, \varepsilon),$$

где $c(\alpha, \varepsilon)$—постоянная.

Таким образом

$$\int_0^r \omega(t)\,t^{k-1}dt \Big/ \int_0^r \omega(t\nu)\,t^{k-1}\,dt \leqslant (1+\varepsilon)\,\alpha(\nu) + o(1).$$

Отсюда

$$\int_0^r \omega(t)\,t^{k-1}\,dt \Big/ \int_0^{\nu r}\omega(t)\,t^{k-1}\,dt = \int_0^r \omega(t)\,t^{k-1}\,dt \Big/ \left(\nu^k \cdot \int_0^r \omega(t\nu)\,t^{k-1}\,dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\,\alpha(\nu)\,\nu^{-k} + o(1),$$

что и доказывает (1.14).

С учетом (1.14) соотношение (1.13) примет вид

$$\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(\nu r)} = \sum_{k=p+1}^{\infty}\left(\int_0^r \omega(t)\,t^{k-1}\,dt \Big/ \int_0^{\nu r}\omega(t)\,t^{k-1}\,dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^k} \leqslant \alpha(\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^k} = \frac{\alpha(\nu)}{\nu-1};\ \nu > 1$$

и

$$\widetilde{N}_\infty(r, a, f) \leqslant 2\,\widetilde{T}_\infty(\nu r, f)\,(c + 2\alpha(\nu)/(\nu-1)) =$$

$$= (c(\nu)/(\nu-1))\,\widetilde{T}_\infty(\nu r, f),$$

что и завершает доказательство леммы.

Справедлива также

Лемма 1.2. *Если мероморфная функция $f(z)$ имеет конечный нижний ω-порядок λ_ω, то для любого $\nu > 1$ существует последовательность $r_k = r_k(\nu)\uparrow\infty$ такая, что при $n > n_0$*

$$\widetilde{T}_\omega(\nu r_n, f) \leqslant \nu^{\lambda_\omega+\alpha 1}\, \widetilde{T}_\omega(r_n, f). \tag{1.15}$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы в классическом случае (см., например, [4], стр. 19).

Доказательство теоремы 1. Оценим $\sum\limits_{k=1}^{q}\widetilde{m}_\omega(r, a_k, f)$, где $a_1, \cdots, a_q$ — различные числа из расширенной комплексной плоскости. Так как верно (1.2), то

$$\sum_{\{a\}}\widetilde{m}_\omega(r, a_k, f) \leqslant \sum_{\{a\}} m_\omega(r, a_k, f). \tag{1.16}$$

А. А. Гольдбергом и В. Д. Мохонько установлен следующий аналог 2-ой основной теоремы для характеристик А. Дингхаса ([2], теорема 2):

Теорема 1.1. *Пусть $a_1, \cdots, a_q$ — различные числа из расширенной комплексной плоскости, $f(z)$ — мероморфная функция. Если выполняется хоть одно из пяти условий, определяемых теоремой 1 ([2]), то вне множества конечной меры выполняется $(r\to\infty)$*

$$(q-2)\, T_\omega(r, f) \leqslant \sum_{k=1}^{q}\overline{N}_\omega(r, a_k, f_r) + O(\ln T_\omega(r, f) + \\ + \int_1^r \omega(t)\, d\ln t). \tag{1.17}$$

Если $f(z)$ — функция конечного порядка, то для любой функции $\omega(x)$ выполняется (без исключительных значений) $(r\to\infty)$

$$(q-2)\, T_\omega(r, f) \leqslant \sum_{k=1}^{q}\overline{N}_\omega(r, a_k, f) + O(\int_1^r \omega(t)\, d\ln t), \tag{1.18}$$

где $\overline{N}_\omega(r, a, f)$ строится аналогично классическому случаю.

Будем теперь считать, что аналог 2-ой основной теоремы выполняется.

Из формул (1.17) и (1.18) обычным образом следует

$$\sum_{k=1}^{q} m_\omega(r, a_k, f) < 2\, T_\omega(r, f) + s(r)$$

где $(r\to\infty)$

$$s(r) = \begin{cases} O\left(\int\limits_1^r \omega(t)\, d\ln t + \ln T_\infty(r, f)\right), & \lambda = \infty, \\ O\left(\int\limits_1^r \omega(t)\, d\ln t\right), & \lambda < \infty. \end{cases} \tag{1.19}$$

По условиям теоремы функция $f(z)$ имеет конечный нижний ω-порядок, что не предполагает конечности нижнего порядка функции $f(z)$.

После повторного применения формул (1.17) и (1.18) соотношение (1.16) примет вид

$$\sum_{k=1}^{q} \tilde{m}_\infty(r, a_k, f) \leqslant \frac{2}{q-2} \sum_{k=1}^{q} \bar{N}_\infty(r, a_k, f) + s(r), \tag{1.20}$$

где $s(r)$ определяется по (1.19).

По формуле (1.5) леммы 1.1 в условиях нашей теоремы (т. е. справедливо (1.3)) имеем

$$\sum_{k=1}^{q} \bar{m}_\infty(r, a_k, f) \leqslant \frac{4}{q-2} \tilde{T}_\infty(r, f) + \frac{2q}{q-2} \frac{c(\nu)}{\nu-1} \tilde{T}_\infty(\nu r, f) + s(r).$$

Применяя формулу (1.15) леммы 1.2, окончательно получим

$$\sum_{k=1}^{q} \bar{m}_\infty(r, a_k, f) \leqslant c(\nu, f)\, \tilde{T}_\infty(r, f) + s(r). \tag{1.21}$$

Легко видеть, что

$$s(r)(\tilde{T}_\infty(r, f))^{-1} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0. \tag{1.22}$$

На основании двух последних формул может оценить $\sum\limits_{\{a\}} \delta_\infty(a_k, f)$:

$$\sum_{k=1}^{q} \delta_\infty(a_k, f) = \sum_{k=1}^{q} \varliminf_{r \to \infty} \tilde{m}_\infty(r, a_k, f)(\bar{T}_\infty(r, f))^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{r \to \infty} \sum_{k=1}^{q} \bar{m}_\infty(r, a_k, f)(\bar{T}_\infty(r, f))^{-1} \leqslant c(\nu, f),$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{q} \delta_\infty(a_k, f) \leqslant c(\nu, f). \tag{1.23}$$

Из неравенства (1.23) обычным образом следует, что множество $D_\infty(f)$ ω-дефектных значений в смысле М. М. Джрбашяна не более чем счетно. Теорема 1 доказана.

Из классической теории Р. Неванлинна известна

Лемма 1.3. *Для любой мероморфной функции $f(z)$ и для любого компакта K положительной плоской меры*

$$\int_K \ln^+ \{|f(z) - a|\}^{-1} d\mu(a) \leqslant C(K),$$

где $\mu(a)$ — *распределение положительной единичной массы, решающее для* K *проблему Робена* (см., например, [4], стр. 34).

Отсюда сразу получаем, что

$$\int_K \ln_\infty^+ \{|f(z) - a|\}^{-1} d\mu(a) \leqslant C(K)$$

и

$$\int_K \tilde{m}_\infty(r, a, f)\, d\mu(a) \leqslant C(K). \tag{1.24}$$

Теорема 2. *Для любой мероморфной функции* $f(z)$ *и при произвольной порождающей функции* $\omega(x) \in \Omega_\infty$ *множество* ω-*дефектных значений* $D_\infty(f)$ *имеет емкость нуль.*

Доказательство. Пусть E — замкнутое множество, точки a которого представляют ω-дефектные значения в смысле М. М. Джрбашяна мероморфной функции $f(z)$. Пусть E — положительной емкости и пусть $\mu(a)$ — распределение положительной единичной массы, решающее для E проблему Робена. Соответствующий логарифмический потенциал $u(f)$ имеет конечную верхнюю границу и из (1.24) после деления на $\tilde{T}_\infty(r, f)$ и предельного перехода $r \to \infty$, следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\tilde{T}_\infty(r, f)} \int_E \tilde{m}_\infty(r, a, f)\, d\mu(a) = 0;$$

отсюда вытекает, что

$$\int_E \varliminf_{r\to\infty} \frac{\tilde{m}_\infty(r, a, f)}{\tilde{T}_\infty(r, f)}\, d\mu(a) = 0,$$

т. е.

$$\int_E \delta_\infty(a, f)\, d\mu(a) = 0. \tag{1.25}$$

Так как E выбиралось произвольно, то из (1.25) обычным образом следует, что множество $D_\infty(f)$ ω-дефектных значений в смысле М. М. Джрбашяна всегда имеет емкость нуль. Теорема доказана.

Харьковский государственный
университет им. А. М. Горького

Поступила 25. IV. 1980

Ս. Ս. ՍԵԿՏ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների աճը Մ. Մ. Ջրբաշյանի բնութագրիչների տերմիններով *(ամփոփում)*

$\omega(x) \in \Omega_\infty$ ֆունկցիայի աստիճանային աճի դեպքում Մ. Մ. Ջրբաշյանի բնութագրիչների համար ապացուցվում է դեֆեկտների առնչության անալոգը։ Ցույց է տրվում կամայական մերոմորֆ ֆունկցիայի ω-դեֆեկտների արժեքների բազմության բացառիկությունը։ Հոդվածում օգտագործված բոլոր հիմնական նշանակումները և գաղափարները վերցված են [1] աշխատանքից։

S. S. SECT. *Growth of meromorphic funcitons in M. M. Djrbashian characteristics* (summary)

An analogue of the defects of relation for Djrbashian characteristics in case of power growth of $\omega(x) \in \Omega_\infty$ is proved. Exclusitiveness of the set of ω-defective values of an arbitrary meromorphic function is established.

All main conceipts and notatians of the paper are the same as in [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», V, № 6, 1970, 453—485.
2. *А. А. Гольдберг, В. Д. Мохонько.* Об обобщенных неванлинновских характеристиках, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XI, № 2, 1976, 132—154.
3. *A. Dinghas.* Uber eine Verallgemeinerung des Nevanlinnaschen Defektbegriftes Kgl. norske vid. selsk. Forhandl., 34, № 25, 1961, 116—123.
4. *В. П. Петренко.* Рост мероморфных функций, Харьков, изд. при ХГУ, изд. объед. «Вища школа», 1978, 136 с.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 4, 1981 Математика

Г. Р. ОГАНЕСЯН

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ТОЛЬКО ОТ ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Нахождению условий корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений посвящены работы [1]—[8]. При этом самые общие необходые условия корректности Иврия-Петкова [4] в случае неаналитического слипания характеристик на начальной гиперплоскости являются грубыми и не совпадают с известными достаточными условиями корректности [2], [5], [6].

Для дифференциального оператора второго порядка $\partial_t^2 - \lambda^2(t)\,\partial_x^2 + a(t)\,\partial_x$, $\lambda(+0)=0$, С. Тарама [9] в модельном случае $\lambda = \exp(-t^{-n})$, $a(t) = Bt^l\lambda'(t)$, $n>0$, а затем К. Ягджян [10] в более общем случае доказали, что при $Re\ B \neq 0$ достаточное условие Проттера-Нерсесяна

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\left|\frac{a(t)\int\limits_0^t\lambda(\tau)\,d\tau}{\lambda^2(t)}\right|<\infty$$

является также и необходимым, а при $\operatorname{Re} B=0$ необходимым и достаточным условием корректности является условие

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\left|\frac{a(t)\int\limits_0^t\lambda(\tau)\,d\tau}{\lambda^2(t)\,|\ln\lambda(t)|}\right|<\infty.$$

В настоящей работе развитием методов работ [9], [10] эти условия корректности обобщаются на слабо гиперболические уравнения высших порядков. Пусть $L(t, \partial_t, \partial_x)$ — оператор порядка m, дифференциальный по временной переменной t и псевдодифференциальный (п. д.) по пространственным переменным. Задачу Коши

$$L(t, \partial_t, \partial_x)\,\omega(t, x)=0,\ (t, x)\in(0, T]\times R^n, \tag{1}$$

$$\partial_t^k\omega(+0, x)=\omega_k(x),\ k=0, 1,\cdots, m-1, \tag{2}$$

мы назовем (C^∞)-корректной, если для любых функций $\omega_k\in C^\infty(R^n)$ существует одно и только одно решение задачи (1)—(2), принадлежащее $C^\infty([0, T]\times R^n)$.

Если задача Коши (1)—(2) корректна, то согласно теореме Банаха о замкнутом графике, существуют компакт $K \subset R^n$ и целое число $\hat{N}$ (индекс корректности) такие, что любое решение задачи (1)—(2) удовлетворяет оценке

$$\sup_{\substack{t\in[0,\,T/2]\\ x\in K}}\left\{\sum_{|\alpha|<m}|\partial^\alpha \omega(t,x)|\right\} < c\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{|\beta|<\hat{N}+m-k}\sup_{x\in K}|\partial_x^\beta \omega_k(x)|. \tag{3}$$

1°. *Основные предположения и обозначения.* Введем обозначения

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\ \partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right),\ \lambda^{(k)}(t) \equiv \partial_t^k \lambda(t).$$

Пусть $\{\Lambda_k(t, \partial_x)\}_1^m$ — п. д. операторы класса $L^1_{1,0}$ с чисто мнимыми символами $i\lambda_k$ (т. е. $\operatorname{Im}\lambda_k(t,\xi)\equiv 0$, $(t,\xi)\in[0, T]\times R^n$) положительной однородности первого порядка по ξ. Пусть, далее, $\partial_k = \partial_t - \Lambda_k$ — элементарные гиперболические операторы. Рассмотрим п. д. оператор m-того порядка

$$L = \partial_1\circ\partial_2\circ\cdots\circ\partial_m - i^{m+1-j}\, b_{pj}(t, \partial x)\,\partial_{m+p-j}\circ\cdots\circ\partial_{m-1}\circ\partial_m, \tag{4}$$

где $1\leqslant j\leqslant m-1$, $2\leqslant p\leqslant j+1$, $b_{pj}(t,\partial_x)$ — п. д. операторы класса $L^{p-1}_{1,0}$ (порядка $p-1$), а кружок $\circ$ означает произведение операторов, не действующих друг на друга, но действующих на искомую функцию $\omega(t, x)$.

Пусть существует функция $\lambda(t)$ класса $C^1[0, T]$ такая, что

$$\lambda(+0)=0,\ \lambda^{(k)}(t)>0,\ t\in[0, T],\ k=0,\ 1, \tag{5}$$

$$\lambda_k(t,\xi)/\lambda(t)\in C[0, T], \tag{6'}$$

$$|\partial_t^s\lambda_k|\leqslant c\,|\xi|\,\lambda^{(s)}(t),\ s=0,\ 1,\ k=1,\cdots,m,\ \xi\in R^n\diagdown 0, \tag{6}$$

$$|\lambda_k(t,\xi)-\lambda_q(t,\xi)|\geqslant c\,|\xi|\,\lambda(t),\ k\neq q,\ k,\ q=1,\cdots,m, \tag{7}$$

$$l_1\lambda(t)/\Lambda(t)\leqslant\lambda'(t)/\lambda(t)\leqslant L_1\lambda(t)/\Lambda(t),\ l_1\geqslant(m+p-j-2)(m-j-1), \tag{8}$$

здесь

$$\Lambda(t)\equiv\int_0^t\lambda(\tau)\,d\tau.$$

Существуют положительные числа H и H_1 такие, что

$$\frac{1}{H_1}\partial_t(\Lambda^{H_1}(t))<\infty,\ \frac{1}{H}\partial_t(\Lambda^H)>0,\ 0\leqslant H<H_1<\frac{p-1}{m+p-j-1}, \tag{9}$$

$$\lambda(t)\leqslant ct^\Omega,\ \Omega>0. \tag{10}$$

Здесь предполагается, что условия (6)—(10) справедливы для всех $t\in[0, T]$.

2°. *Формулировка результатов.* Рассмотрим вначале задачу Коши

$$L\,\omega(t, x) = 0,\ t > 0,\ \partial_t^k \omega(+0, x) = \omega_k(x),\ k = 0, 1, \cdots, m-1, \quad (11)$$

при

$$\operatorname{Im} b_{pj}(t, \xi) = 0,\ (t, \xi) \in [0, T] \times R^n. \quad (12)$$

Вводя обозначение

$$\nu_s(t, \xi) = |\xi|^{p-1} \lambda^{m+p-j-1+s}(t)/\Lambda^{m-j+s}(t)\, |\partial_t^s b(t, \xi)|,$$

возмущение b_{pj} мы назовем слабо монотонным, если существуют функция $\nu(t) \in C^1(0, T]$ и положительная постоянная ρ такие, что

$$\nu'(t) \geqslant 0,\ t \in (0, T], \quad (13)$$

$$\partial_t\{\Lambda^\rho(t)/\nu(t)\} > 0,\ 0 < \rho < p - 1 + (l_1 - 1)(m+p-j-2), \quad (14)$$

$$\nu(t) > c\, \lambda^{m+p-j-1}/\Lambda^{m-j}(t),\ t \in [0, T], \quad (15)$$

$$\nu_s(t, \xi) \sim \nu(t),\ (t, \xi) \in [0, T] \times R^n \setminus 0,\ s = 0, 1 \quad (16)$$

(здесь и далее знак эквивалентности $\sim$ означает, что отношение левой части эквивалентности к правой отделены от нуля и бесконечности постоянными). Пусть также существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\nu(t)\, \lambda(t)}{\nu'(t)\, \Lambda(t)\, |\ln \Lambda(t)|} \right\}. \quad (14')$$

Теорема 1. *В условиях* (5)—(10), (12), (14′) *и слабо монотонных возмущениях для корректности задачи Коши* (11) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$c_s = \overline{\lim_{t \to +0}} \sup_{|\xi|=1} \left\{ \frac{\Lambda^{m-j+s}}{\lambda^{m+p-j-1+s}} |\partial_t^s b_{pj}(t, \xi)| \right\} < \infty,\ s = 0, 1. \quad (\mathrm{N})$$

Замечание 1. Условия слабой монотонности возмущений и (14′) фигурируют только в необходимой части утверждения теоремы 1 и означают, что (N) нарушается определенным образом. Отметим, что (16) автоматически выполняется, если младший символ $b_{pj}(t, \xi)$ является однородной функцией от ξ, а (15) вместе с (16) означают ограниченность символа $b_{pj}(t, \xi)$. Последнее требование естественно, так как нас интересует C^∞-корректность задачи Коши. Отметим также, что если $\lim\limits_{t \to 0} b_{pj}(t, \xi) = \lim\limits_{t \to 0} (\lambda^{m+p-j-1}/\Lambda^{m-j}) = 0$ и существует предел $\lim\limits_{t \to 0} \{\Lambda^{m-j+1} |\partial_t b_{pj}| / \lambda^{m+p-j}\}$, то в силу известной теоремы Лопиталя условия (N) при $s = 0$ и $s = 1$ эквивалентны.

Замечание 2. Достаточность более грубых условий, чем (N), однако в более общем случае зависимости коэффициентов от пространственных переменных доказана, например, в [6]. С другой стороны, для вырождающихся симметрических систем А. Б. Нерсесян [5] указал более тонкое интегральное достаточное условие корректности задачи Коши.

Теорема 2. *В условиях* (5)—(10) *и слабо монотонных возмущениях для корректности задачи Коши* (11) *при*

$$\operatorname{Re} b_{pj}(t, \xi) \equiv 0, \quad t \in [0, T], \ \xi \in R^n, \tag{17}$$

$$j - p \equiv m - 1 \pmod 2, \tag{18}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$c_{s+2} = \overline{\lim_{t \to +0}} \sup_{|\xi|=1} \left\{ \frac{\Lambda^{m-j+s} |\partial_t^s b_{pj}(t, \xi)|}{\lambda^{m+p-j-1+s} |\ln \lambda(t)|} \right\} < \infty, \quad s = 0, 1. \tag{T}$$

Замечание 3. Достаточность теоремы 2 верна и без условия (18).

Замечание 4. Для операторов второго порядка условия теорем 1, 2 слабее условий аналогичных теорем, доказанных в [10].

3°. *Понижение порядка и сведение к задаче Коши для систем.* Уравнение $L\omega = 0$ применением преобразования Фурье

$$\bar{\omega}(t, \xi) = \int e^{ix\xi} \omega(t, x)\, dx$$

сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с n-мерным параметром ξ:

$$\tilde{L}\bar{\omega} = 0, \tag{11'}$$

где

$$\tilde{L} \equiv \partial_t^m - \sum_{k=1}^{m} q_k \partial_t^{m-k} - i^{m+p-j} b_{pj} \cdot (\partial_t - i\lambda_{m+p-j}) \circ \cdots \circ (\partial_t - i\lambda_m), \tag{19}$$

$$q_k = q_k(t, \xi) = -\sum (-i\lambda_{s_1})(-i\lambda_{s_2}) \cdots (-i\lambda_{s_k}),$$

причем в последней сумме суммирование идет по s_k: $1 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_k \leqslant m$. Уравнение (11′) заменой $u(t, \xi) = (\partial_t - i\lambda_{m+p-j}) \circ \cdots \circ (\partial_t - i\lambda_m)\bar{\omega}$ допускает понижение порядка с m до порядка $m + p - j - 1$, поэтому без ограничения общности можно считать, что оператор $\tilde{L}$ имеет вид

$$P \equiv \partial_t^m - \sum_{k=1}^{m} q_k \partial_t^{m-k} - i^{m+1} b(t, \xi), \tag{20}$$

т. е.

$$p - j = 1, \quad b \equiv b(t, \xi) = b_{p,\, p-1}(t, \xi), \tag{20'}$$

а теоремы 1 и 2 достаточно доказать для оператора (4) в частном случае (20′).

Вводя матрицу

$$A_1 = \|\delta_{k,\,j-1} + q_{m+1-j}\,\delta_{km} + i^{m+1}\,b\,\delta_{km}\,\delta_{1j}\|_{k,\,j=1}^{m}$$

(δ_{kj} — символ Кронекера) и вектор-функцию ${}^t v = (u, \partial_t u, \cdots, \partial_t^{m-1} u)$ уравнение

$$Pu = \partial_t^m u - \sum_{k=1}^{m} q_k\,\partial_t^{m-k} u - i^{m+1}\,bu = 0 \tag{21}$$

можно записать в виде системы

$$v_t = A_1 v. \tag{22}$$

Удобно преобразовать систему (22) так, чтобы матричные элементы A_1 (кроме b) имели бы по ξ однородность порядка не выше первого. Для этого введем матрицу

$$A = \|i\,\lambda_{m+1-k}\,\delta_{kj} + \delta_{k,\,j-1} + i^{m+1}\,b\,\delta_{km}\,\delta_{1j}\|_{k,\,j=1}^{m},$$

которая обладает вышеуказанным свойством и собственные значения которой $\{\mu_k\}_1^m$ удовлетворяют уравнению

$$\prod_{k=1}^{m} (\mu - i\lambda_k) = i^{m+1}\,b \quad \text{или} \quad \mu^m = \sum_{k=1}^{m} q_k\,\mu^{m-k} + i^{m+1}\,b \tag{23}$$

и совпадают с собственными значениями матрицы A_1. Поэтому существует треугольная матрица N_1 с детерминантом единица $((N_1)_{kj} \equiv 0,$ $k > j,$ $\det N_1 = 1)$ такая, что

$$N_1 A = A_1 N_1. \tag{24}$$

Относительно вектор-функции $\hat{u} = N_1^{-1}\,v$ система (22) примет вид

$$\partial_t \hat{u} = (A - N_1^{-1}\,N_{1t})\,\hat{u}. \tag{25}$$

4°. *Схема доказательства теоремы* 1. *Вспомогательные области.*

Если привести систему (22) к каноническому виду, она распадается на уравнения первого порядка, одно из которых имеет вид $v_t = \mu\,(t, \xi)\,v$ или

$$v(t, \xi) = v\,(0, \xi)\,\exp \int_0^t \mu\,(\tau, \xi)\,d\tau, \tag{26}$$

здесь μ — одно из собственных значений матрицы A_1 (см. (23)).

Корректность исходной задачи Коши (11) означает, что функция $v\,(t, \xi)$ по ξ (при $|\xi| \to \infty$) имеет степенной рост, а нарушение корректности означает рост $v\,(t, \xi)$ на некоторой последовательности $\xi_n \to \infty$ быстрее степенного.

Если $|\xi| < M$, то функция $v\,(t, \xi)$ ограничена, поэтому достаточно рассмотреть случай больших ξ $(|\xi| > M)$. Для простоты будем считать, что $p = j + 1 = m = 2$.

Для изучения роста $v(t, \xi)$ при $|\xi| \to \infty$, следуя Тарама, разобьем полосу $\{(t, \xi),\ t \in [0, T],\ \xi \in R^n\}$ поверхностями $t_1(\xi)$, $t_2'(\xi)$ на вспомогательные области. Определим функции $t_1(\xi)$, $t_2'(\xi)$ неявным образом из

$$|\xi|\, \Lambda^{1-H_1}(t_1) = 1, \quad |\xi| \Lambda(t_2') = 1. \tag{27}$$

По теореме о неявной функции $t_1(\xi)$, $t_2'(\xi)$ имеют смысл (см. (5)), причем $t_1(\xi) \leqslant t_2'(\xi)$ (см. ниже лемму 1). Перепишем решение $v(t, \xi)$ в виде

$$v(\tau, \xi) = v(0, \xi) \exp\left\{\left(\int_0^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2'} + \int_{t_2'}^{T}\right) \mu(\tau, \xi)\, d\tau\right\}.$$

В области $t \in [0, t_1(\xi)]$ отношение $|v(t, \xi)/v(0, \xi)|$ ограничено:

$$\exp\left\{\int_0^t \mu\, d\tau\right\} \leqslant \exp\left\{|\xi| \int_0^{t_1} \lambda\, d\tau\right\} \leqslant \exp\left\{\int_0^{t_1} c\, |\xi|\, \Lambda^{1-H_1} d\tau\right\} \leqslant e^{ct_1} < e^{cT}. \tag{28}$$

В области $t \in [t_1(\xi),\ t_2'(\xi)]$ отношение $|v(t, \xi)/v(0, \xi)|$ имеет рост не выше степенного

$$\exp \int_{t_1}^{t_2'} \mu\, d\tau < \exp\left(c \int_{t_1}^{t_2'} |\xi|\, \lambda\, d\tau\right) < \exp \int_{t_1}^{t_2'} \frac{c\lambda}{\Lambda} d\tau \leqslant \exp\left(-c \ln \Lambda(t_1)\right) = |\xi|^{\frac{c}{1-H_1}} \tag{29}$$

(из $\lambda(+0) = 0$ следует, что выбором малого T имеем $\ln \Lambda(t_2') \leqslant 0$ при $t_2' \leqslant T$).

В области $t \in [t_2'(\xi),\ T]$ из (N) следует, что $|\mu - i\lambda_j(t, \xi)| \leqslant c\lambda/\Lambda(t)$, поэтому, так как $\operatorname{Im} \lambda_j \equiv 0$, имеем

$$\left|\exp \int_{t_2'}^{T} \mu\, d\tau\right| \leqslant \exp \int_{t_2'}^{T} \frac{c\lambda}{\Lambda} d\tau \leqslant \exp\{-c \ln \Lambda(t_2')\} \leqslant \exp\{-c \ln \Lambda(t_1)\} \leqslant |\xi|^{\frac{c}{1-H}}. \tag{30}$$

Итак, в условиях (N) и (12) отношение $v(t, \xi)/v(0, \xi)$ имеет степенной рост во всей полосе и задача Коши (11) корректна.

Если (N) нарушено, то

$$\nu(+0) = 0 \tag{31}$$

и разбиение на вспомогательные области производим в зависимости от того, какой из случаев

i). $\nu(t) \geqslant F_0/|\ln \lambda(t)|$,

ii). $\lambda^{2-\frac{1}{h}}/\Lambda(t) \leqslant \nu(t) \leqslant o(1)/|\ln \lambda(t)|,\ t \to 0$,

где $h > (1-H_1)/(1-2H_1) > 1$,

iii). $c\lambda^2(t)/\Lambda(t) \leqslant \nu(t) \leqslant c\Lambda^{2-\frac{1}{h}}/\Lambda(t)$

имеет место.

В случае i), вводя функции $t_3(\xi)$ и $t_4(\xi)$ из уравнений

$$|\xi|\, \Lambda(t_3)\, \nu(t_3) = 1, \quad |\xi|^{\gamma} \Lambda(t_4) = 1, \quad \gamma < 1,$$

имеем $t_3(\xi) \leqslant t_4(\xi)$ и (см. ниже лемму 8)

$$\operatorname{Re}\mu(t, \xi) > c\partial_t(\Lambda/\nu), \quad \text{при} \quad t > t_2(\xi).$$

При $t \in [0, t_2]$ отношение $|v(t, \xi)/v(0, \xi)|$ имеет степенной рост при $|\xi| \to \infty$, а при $t \in [t_2, T]$ имеем

$$\left|\frac{v(t, \xi)}{v(0, \xi)}\right| = \exp\int_{t_2}^{T} \operatorname{Re}\mu\, d\tau \geqslant \exp\left\{\frac{c \ln \Lambda(T)}{\nu(T)} - \frac{c \ln \Lambda(t_2)}{\nu(t_2)}\right\} \geqslant$$

$$> \exp\left\{\frac{c \ln \Lambda(T)}{\nu(T)} - \frac{c \ln \Lambda(t_4)}{\nu(t_2)}\right\} = [\Lambda(T)]^{\frac{c}{\nu(T)}} |\xi|^{\frac{T}{\nu(t_4)}},$$

откуда следует, что исследуемое отношение имеет рост быстрее степенного, так как при $|\xi| \to \infty$, $\nu(t_2(\xi)) \to 0$ (см. (31)).

В случае ii) в силу (15) имеем $\nu(t) > c\lambda^2/\Lambda(t)$, поэтому

$$|\xi| = 1/\Lambda(t_2)\,\nu(t_2) < \frac{c}{\lambda^2(t_2)}, \text{ откуда } \ln|\xi| \leqslant c\,|\ln\lambda(t_2)|. \tag{32}$$

Вводя $t_5(\xi)$ из уравнения $|\xi|^h \lambda(t_5) = 1$ при нарушении (N) можно доказать оценку

$$\int_{t_5}^{t_2} (\operatorname{Re}\mu)\, d\tau > \frac{c}{\nu(t_2)},$$

откуда следует, что отношение

$$\left|\frac{v(T, \xi)}{v(0, \xi)}\right| > \exp\left\{\int_{t_5}^{t_2} \operatorname{Re}\mu\, d\tau\right\} > \exp\left\{\frac{c \ln|\xi|}{\nu(t_2)\ln|\xi|}\right\} \geqslant |\xi|^{\frac{c}{\nu(t_2)\,|\ln\lambda(t_2)|}}$$

имеет рост быстрее степенного, так как в силу ii) имеем

$$\lim_{t \to 0} \{\nu(t)\,|\ln\lambda(t)|\} = 0.$$

Случай iii) аналогичен случаю ii) с заменой функции $t_5(\xi)$ на $t_6(\xi)$ определяемой из уравнения $|\xi|\, t_6 = F_3$, F_3 — малая положительная постоянная.

5°. *Вспомогательные построения и энергетические оценки.*

Переходя к строгому изложению сделаем вспомогательные предположения. Пусть

$$F_4\, \Lambda^{1-H}(t) \leqslant \lambda(t) \leqslant F_5\, \Lambda^{1-H_1}(t), \; 0 \leqslant H \leqslant H_1 < \frac{p-1}{m} \leqslant 1, \tag{33}$$

$$\partial_t\{\Lambda^\rho/\nu(t)\} > 0, \; 0 < \rho < p-1+(m-1)(l_1-1), \tag{34}$$

$$\partial_t\{\nu\,|\ln\Lambda|^{\rho_1}\} \leqslant 0, \; 0 < \rho_1 < \infty, \tag{34'}$$

$$|\partial_t^s b(t, \xi)| < c_s\, |\xi|^{p-1}\, \lambda^{m+s} / \Lambda^{m+1-p+s}, \; s = 0, 1, \tag{35}$$

$$|\partial_t^s b(t, \xi)| \leqslant c_{s+2}\, |\xi|^{p-1}\, \lambda^{m+s} / \Lambda^{m+1-p+s}\, \nu, \; s=0, 1, \tag{36}$$

$$|\partial_t^s b(t,\xi)| > c_7 |\xi|^{p-1} \lambda^{m+s} / \Lambda^{m+1-p+s}, \quad s = 0, 1, \tag{37}$$

$$|b(t,\xi)| \geqslant c_8 |\xi|^{p-1} \lambda^m / \Lambda^{m+1-p} \nu, \tag{38}$$

$$\nu(t)|\ln \lambda(t)|^{m+1-p} \geqslant F_0^{m+1-p}. \tag{39}$$

Обобщая рассуждения Тарама. введем функции $\{t_k(\xi)\}_1^6$, определяемые неявным образом из уравнений

$$|\xi|^{p-1} \lambda^{m-1}(t_1) = \nu^{\frac{m-p}{m-p+1}}(t_1) \Lambda^{m-p}(t_1), \tag{40}$$

$$|\xi|^{p-1} \nu^{\frac{p-1}{m+1-p}}(t_2) \Lambda^{p-1}(t_2) = F_1, \tag{41}$$

$$\nu^q(t_3)(|\xi|\Lambda(t_3))^{m-p} = F_2, \quad 0 < \frac{m-p}{m-p+1} \leqslant q < 1, \tag{42}$$

$$|\xi|^\gamma \Lambda(t_4) = 1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad |\xi|^h \lambda(t_5) = 1, \quad h > \frac{(p-1)(1-H_1)}{p-1-mH_1} > 1, \tag{43}$$

$$|\xi|^{p-1} t_6^\beta = F_3, \ F_3 - \text{мало}, \quad 0 < \beta \leqslant \min\left\{\frac{(p-1)\Omega}{h}, 1\right\}. \tag{44}$$

Из (5), (8), (13), (14) вытекает оценка

$$\partial_t \left\{\frac{\lambda^{m-1}}{(\Lambda \nu^{\frac{1}{m+1-p}})^{m-p}}\right\} \geqslant \left[(m-1) l_1 - (m-p)\left(1 + \frac{p}{m+1-p}\right)\right] \times$$

$$\times \lambda^m / \Lambda^{m-p+1} \nu^{\frac{m-p}{m-p+1}} > 0. \tag{45}$$

Отметим, что из (5), (13), (45) и теоремы о неявной функции, функции $\{t_k\}_1^6$ имеют смысл.

Из (5), (33), (39) следует, что $\left(\text{здесь } q = \dfrac{m-p}{m-p+1}\right)$

$$\frac{\lambda^{m-1}}{\nu^q \Lambda^{m-p}} \leqslant \frac{c\lambda^{m-1}}{\Lambda^{m-p}} |\ln \lambda|^{m-p} = o(1), \text{ при } t \to 0, \tag{46}$$

так как

$$\lambda^{m-1}/\Lambda^{m-p} \leqslant c \lambda^{m-1-\frac{m-p}{1-H}} = o(1), \ t \to 0. \tag{46'}$$

Из (46) следует, что при малом T имеем

$$\ln \frac{\lambda^{m-1}}{\nu^q \Lambda^{m-p}}(t) \leqslant 0, \text{ при } t \in [0, T], \ q = \frac{m-p}{m-p+1}. \tag{47}$$

Лемма 1. *В условиях* (5), (8), (10), (13), (14), (33), (39) *и*

$$\frac{(p-1)\Omega}{\beta} > h \geqslant 1 - H > \frac{m-p}{m-1} \tag{48}$$

при достаточно больших $|\xi|$ ($|\xi| > M$) *имеют место неравенства*

$$t_1(\xi) \leqslant t_2(\xi) \leqslant t_3(\xi) \leqslant t_4(\xi), \text{ при } p=2, 3, \cdots, m-1,$$

$$t_1(\xi) \leqslant t_2(\xi) \leqslant t_4(\xi), \text{ при } p=m,$$

$$t_6(\xi) \leqslant t_5(\xi) \leqslant t_2(\xi), \text{ при } p=2, 3, \cdots, m.$$

Докажем, например, что $t_5 \leqslant t_2$. Из (41), (43) при

$$h \geqslant 1-H \tag{52'}$$

имеем

$$\frac{\Lambda(t_5)}{\Lambda(t_2)} = \frac{\Lambda(t_5)\, \nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_2)}{\sqrt[(p-1)]{F_1}\ \sqrt[h]{\lambda(t_5)}} \leqslant cF_1^{-\frac{1}{p-1}}\, \Lambda^{1-\frac{1-H}{h}}(t_5) \leqslant \varepsilon \leqslant 1,$$

откуда следует, что

$$\Lambda(t_5) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\Lambda(t_5) \leqslant \Lambda(t_2), \ \varepsilon\text{—мало.} \tag{52}$$

Так как функция $\Lambda(t)$ возрастающая, то отсюда $t_5 \leqslant t_2$. Остальные неравенства доказываются аналогично.

Введем матрицы

$$B \equiv \| d^{\frac{m-j}{m}}\, \delta_{kj} \|_{k, j=1}^{m}, \ d \equiv \frac{|\xi|^{p-1} \lambda^m(t)}{\nu(t)\, \Lambda^{m+1-p}(t)}, \tag{53}$$

$$A_0 = B(A - N_1^{-1} N_{1t})\, B^{-1}, \ A_0^+ = {}^t A_0$$

и вспомогательные энергетические формы

$$E_1 = |\hat{u}|^2, \ E_2 = |B\hat{u}|^2. \tag{54}$$

Дифференцируя по t энергетическую форму E_1 из системы (25) с учетом (6), получаем при $t \in [0, t_1]$ оценку

$$\partial_t E_1 < \left\{ |b(t, \xi)| + c\left((1 + |\xi|\lambda + \sum_{k=1}^{m} |\xi|^k \lambda' \lambda^{k-1} \right)\right\} E_1. \tag{55}$$

Из (5), (8), (34) имеем оценку (сравнить с (45))

$$\partial_t \left(\frac{\lambda^{m-1}}{\nu\, \Lambda^{m-p}} \right) \geqslant [(m-1)\, l_1 + p - m - \rho] \frac{\lambda^m}{\nu\, \Lambda^{m+1-p}}, \tag{56}$$

поэтому, в силу (36)

$$\int_0^{t_1} |b|\, d\tau \leqslant \frac{c_2 |\xi|^{p-1} \lambda^{m-1}(t_1)}{[(m-1)\, l_1 + p - m - \rho]\, \nu\Lambda^{m-p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2}{[(m-1)\, l_1 + p - m - \rho]\, \nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_1)}. \tag{57}$$

Если $\alpha < \dfrac{p-1-(m-1)H_1}{1-H_1}$, то из (33), (39) имеем

$$\nu^{\frac{-1}{m+1-p}} \geqslant \frac{F_0}{|\ln\lambda|} > c\lambda^{\frac{m-1-\alpha}{m-p} - \frac{1}{1-H_1}} \geqslant c\lambda^{\frac{m-1-\alpha}{m-p}} / \Lambda(t)$$

и

$$\lambda^{\alpha}(t) > c\lambda^{m-1}\Lambda^{p-m}\nu^{\frac{p-m}{m-p+1}}(t),\ 0<\alpha<\frac{p-1-(m-1)H_1}{1-H_1}. \tag{58}$$

Отметим, что при $p=m$, $c=1$, $\alpha=m-1$ оценка (58) очевидна. Таким образом, получаем оценку

$$\frac{1}{\nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_1)} \leqslant \frac{|\ln\lambda(t_1)|}{F_0} \leqslant \frac{1}{\alpha F_0}\left|\ln\frac{\lambda^{m-1}(\lambda_1)}{\Lambda^{m-p}\nu^{\frac{-m-p}{m-p+1}}}\right| = \frac{(p-1)\ln|\xi|}{\alpha F_0}. \tag{59}$$

Далее, из определения $t_1(\xi)$ имеем

$$k|\xi|\int_0^{t_1}\lambda^{k-1}\lambda'\,d\tau = (|\xi|\lambda(t_1))^{\varkappa} \leqslant c\left(\frac{\Lambda\nu^{\frac{1}{m+1-p}}}{\lambda}\right)^{\frac{k(m-p)}{p-1}} \leqslant c\Lambda^{\frac{kH(m-p)}{p-1}} \leqslant c. \tag{60}$$

Лемма 2. *Если при* $|\xi|>M$ *и* $t\in[T_1, T_2]$

$$\partial_t E(t,\xi) \leqslant K(t,\xi)E(t,\xi),\ E(t,\xi)>0, \tag{61}$$

причем существует положительная постоянная l *такая, что*

$$\left|\int_{T_1}^{T_2}K(\tau,\xi)\,d\tau\right| \leqslant l\ln|\xi|, \tag{62}$$

то для всех $\tau_1, \tau_2\in[T_1, T_2]$, $|\xi|>M$ *имеет место оценка*

$$E(\tau_1,\xi) \leqslant |\xi|^l E(\tau_2,\xi). \tag{63}$$

Очевидное доказательство леммы 2 мы опускаем.

Применением леммы 2 из оценок (55), (57), (59), (60) вытекает

Лемма 3. *В условиях* (5), (6), (13), (8), (34), (36) (39) *для всех* $\tau_1, \tau_2\in[0, t_1]$ *справедлива оценка*

$$E_1(\tau_1,\xi) \leqslant |\xi|^l E_1(\tau_2,\xi),\ |\xi|>M>0, \tag{64}$$

причем

$$l = \frac{c_2(p-1)}{\alpha F_0[(m-1)l_1+p-m-\rho]},\ 0<\alpha<\frac{p-1-H_1(m-1)}{1-H_1}. \tag{64'}$$

Дифференцируя форму E_2 имеем с помощью системы (25) оценку

$$\partial_t E_2 = \partial_t(B\hat{u}, B\hat{u}) \leqslant \frac{2(m-1)}{m}\left|\frac{d_t}{d}\right|E_2 + ((A_0+A_0^{+})B\hat{u}, B\hat{u}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\,(m-1)}{m}\left|\frac{d_t}{d}\right| E_2 + 2\sum_{k=1}^{m-1} |d|^{\frac{2(m-k)}{m}} |\hat{u}_k\ \hat{u}_{k+1}| + 2\,|b\,\hat{u}_1\ \hat{u}_m| +$$

$$+2\,(B N_1^{-1} N_{1t}\,\hat{u},\ B\,\hat{u}). \qquad (65)$$

Обозначив

$$c_0 = \sup_{\substack{|\xi|=1,\ t\\ k>j}} \left\{ \frac{\Lambda\,(t)\,|(N_1^{-1} N_{1t})_{kj}|}{\lambda^{k-j+1}} \right\}, \qquad (65')$$

имеем

$$|2\,(B N_1^{-1} N_{1t}\ \hat{u},\ B\,\hat{u})| \leqslant \frac{2c_0\,\lambda}{\Lambda} \sum_{k=1}^{m-1} (|\xi|\,\lambda)^k\, d^{\frac{2(m-j)}{m}} |\hat{u}_j\ \hat{u}_{j-k}|. \qquad (65'')$$

Далее, при $t \leqslant t_2$ имеем оценку

$$d \geqslant \frac{|\xi|^{(p-1)\left(1+\frac{1}{m-1}\right)}\lambda^m}{\nu\Lambda^{m+1-p}} \left(\frac{\nu^{\frac{p-1}{m+1-p}}\Lambda^{p-1}}{F_2} \right)^{\frac{1}{m-1}} >$$

$$> \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{\frac{m(m-p)}{m-1}} (|\xi|\,\lambda)^{\frac{m(p-1)}{m-1}}\ \nu^{\frac{p-1}{(m-1)(m+1-p)}-1} \Big/ F_1^{\frac{1}{m-1}} \qquad (66)$$

или

$$|\xi|\,\lambda \leqslant F_1^{\frac{1}{m(p-1)}}\, d^{\frac{m-1}{m(p-1)}}\, \nu^{\frac{m-p}{(p-1)(m+1-p)}} \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^{\frac{m-p}{p-1}}, \qquad (66')$$

откуда

$$|\xi|\,\lambda\,(t) \leqslant F_1^{\frac{m+1-p}{m(p-1)}}\, d^{\frac{1}{m}}. \qquad (67)$$

Из оценок (65′), (67) имеем, если $F_1 > 1$

$$2\sum_{k=1}^{m-1} (|\xi|\,\lambda)^k\ d^{\frac{2(m-j)}{m}} |\hat{u}_j\ \hat{u}_{j-k}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m-1} F_1^{\frac{k(m+1-p)}{m(p-1)}} \left(|d^{\frac{m-j}{m}}\,\hat{u}_j|^2 + |d^{\frac{m+k-j}{m}}\,u_{j-k}|^2\right) < (m-1)\,F_1^{\frac{(m-1)(m+1-p)}{m(p-1)}}\, E_2, \qquad (67')$$

$$2\,|b\,\hat{u}_1\ \hat{u}_m| \leqslant |b|\ d^{\frac{1-m}{m}} \left(|d^{\frac{m-1}{m}}\,\hat{u}_1|^2 + |\hat{u}_m|^2\right) \leqslant c_2\, d^{\frac{1}{m}}\, E_2, \qquad (68')$$

$$2\,|d^{\frac{2(m-k)}{m}}\,\hat{u}_k\ \hat{u}_{k+1}| \leqslant d^{\frac{2(m-k)}{m}} \left(|d^{\frac{1}{m}}\,\hat{u}_k|^2 + |d^{-\frac{1}{m}}\,\hat{u}_{k+1}|^2\right) \leqslant d^{\frac{1}{m}}\, E_2. \qquad (68)$$

Таким образом

$$\partial_t E_2 \leqslant \frac{2\,(m-1)}{m}\left|\frac{d_t}{d}\right| + (1+c_2)\, d^{\frac{1}{m}} + (m-1)\, c_0 F_1^{\frac{(m-1)(m+1-p)}{m(p-1)}} \frac{\lambda}{\Lambda} \Big] E_2. \qquad (69)$$

Оценим далее интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt[m]{d(\tau,\xi)}\, d\tau \leqslant \frac{m|\xi|^{\frac{p-1}{m}}}{\nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \nu^{\frac{p-1}{m(m+1-p)}}\, d\Lambda^{\frac{p-1}{m}} =$$

$$= \frac{m(|\xi|\Lambda(t_2))^{\frac{p-1}{m}} \nu^{\frac{p-1}{m(m+1-p)}}(t_2)}{(p-1)\nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_1)} = \frac{mF_1^{\frac{1}{m}}}{(p-1)\nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_1)} \leqslant \frac{mF_1^{\frac{1}{m}} \ln|\xi|}{aF_0}. \tag{70}$$

Из (5), (8), (13), (34), (56) имеем

$$\left|\frac{d_t}{d}\right| = \frac{d_t}{d} = \frac{m\lambda'}{\lambda} - \frac{\nu'}{\nu} - (m+1-p)\frac{\lambda}{\Lambda} \leqslant \frac{(mL_1-1+p-m)\lambda(t)}{\Lambda(t)}. \tag{71}$$

Так как из (8), (34)

$$\partial_t \left\{ \ln \frac{\lambda^{m-1}}{(\Lambda\nu^{\frac{1}{m+1-p}})^{m-p}} \right\} \geqslant \left[(m-1)\, l_1 - (m-p)\left(1 + \frac{p}{m-p+1}\right) \right] \frac{\lambda}{\Lambda}, \tag{71'}$$

то в силу (33)

$$\Lambda(t_1) \geqslant \left(\frac{\lambda^{m-1}}{\Lambda^{m-p}}(t_1) \right)^{\frac{1}{(m-1)(1-H_1)+p-m}} = c|\xi|^{\frac{1-p}{(m-1)(1-H_1)+p-m}},$$

поэтому

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda}{\Lambda}(\tau)\, d\tau = \ln\frac{\Lambda(t_2)}{\Lambda(t_1)} = \ln\frac{c}{|\xi|\Lambda(t_1)} \leqslant \ln\left\{c|\xi|^{\frac{H_1(m-1)}{p-1-H_1(m-1)}}\right\}. \tag{72}$$

В силу леммы 2 из (69)—(72) следует

Лемма 4. *В условиях* (5), (6), (8), (13), (34), (36), (39) *для всех* $\tau_1, \tau_2 \in [t_1, t_2]$ *справедлива оценка*

$$E_2(\tau_1, \xi) \leqslant c|\xi|^l E_2(\tau_2, \xi), \quad |\xi| > M > 0, \tag{73}$$

где

$$l = \frac{(1+c_2)\, mF_1^{\frac{1}{m}}}{aF_0} +$$

$$+ \frac{H_1(m-1)^2\left[2(mL_1-1) + 2(p-m) + mc_6F_1^{\frac{(m+1-p)(m-1)}{m(p-1)}}\right]}{m[p-1-H_1(m-1)]}. \tag{73'}$$

6°. *Приведение систем к диагональному виду.* Пусть матрица N приводит матрицу A_1 к диагональному виду

$$NA_1 = GN, \quad G = \|\mu_k \delta_{kj}\|_{k,\, j=1}^{m}. \tag{74}$$

Матрица, обратная к N, имеет вид ($\det N = 1$):

$$\|N^{-1}\|_{kj} = \prod_{p<s} (\mu_p - \mu_s)^{-1} \|\mu_j^{k-1}\|_{kj}. \tag{74'}$$

Относительно вектор-функции $w = Nv$ система (22) принимает вид

$$\partial_t w = (G + N_t N^{-1}) w. \tag{75}$$

Собственные значения $\{\sigma_k\}_1^m$ матрицы

$$A_2 = \|\delta_{k,\, j-1} + i^{m+1} b(t, \xi) \delta_{km} \delta_{1j}\|_{k,\, j=1}^{m} \tag{76'}$$

находятся из уравнения

$$\sigma^m = i^{m+1} b(t, \xi), \tag{76}$$

из которого, в обозначении

$$\hat{b} = \frac{1}{i} b \tag{77}$$

имеем

$$\sigma_k = i^{\frac{m+2}{m}} \varepsilon_k \hat{b}^{\frac{1}{m}}, \quad k = 1, \cdots, m, \tag{77'}$$

где ε_k — корни m-ой степени из единицы. Перенумеруем вначале корни ε_k для удобства так, чтобы $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, $k = 1, \cdots, m$.

Если

$$\operatorname{Re} b \equiv 0, \quad \hat{b} = \operatorname{Im} b \geqslant 0, \tag{17'}$$

то

$$\operatorname{Re} \sigma_k = \sqrt[m]{\hat{b}} \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{4k+2}{m}\right)\right]. \tag{78}$$

Если же

$$\operatorname{Im} b \equiv 0, \quad b = \operatorname{Re} b \geqslant 0, \tag{12'}$$

то

$$\operatorname{Re} \sigma_k = \sqrt[m]{b} \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{4k+1}{m}\right)\right]. \tag{78'}$$

Пусть матрица N_2 приводит A_2 к диагональному виду:

$$N_2 A_2 = G_2 N_2, \quad G_2 = \|\sigma_k \delta_{kj}\|_{k,\, j=1}^{m}. \tag{79}$$

Матрица, обратная к N_2, имеет вид

$$N_2^{-1} = \prod_{p<s} (\sigma_p - \sigma_s)^{-1} \cdot \|\sigma_j^{k-1}\|_{k,\, j=1}^{m}, \quad \det N_2 = 1. \tag{79'}$$

С помощью ортогональной матрицы

$\Theta = \|\varepsilon_j^{k-1}\|_{k,\, j=1}^{m}$, $\Theta\, \Theta^{+} = mI$, I — единичная матрица, матрицу N_2^{-1} удобно записать в виде

$$N_2^{-1}=m^{-\frac{m}{2}}(-\sqrt{\hat{b}})^{1-m}\hat{M}\Theta, \tag{80}$$

где

$$\hat{M}=\|(i^{m+2}\hat{b})^{\frac{k-1}{m}}\delta_{kj}\|,\quad \det\Theta=i^{\frac{(m-1)(3m-2)}{2}}m^{\frac{m}{2}}.$$

Из представления (80) легко находится матрица

$$N_2=(-\sqrt{\hat{b}})^{m-1}m^{\frac{m-2}{2}}\Theta^{+}\hat{M}^{-1}. \tag{81}$$

Относительно вектор-функции $\hat{w}=N_2v$ система (22) имеет вид

$$\partial_t\hat{w}=[G_2+N_{2t}N_2^{-1}+N_2(A_1-A_2)N_2^{-1}]\hat{w}. \tag{82}$$

Пусть, наконец, матрица N_3 приводит матрицу

$$A_3=\|\delta_{k,\,j-1}+q_{m+1-j}\,\delta_{km}\|_{k,\,j=1}^{m} \tag{83'}$$

к диагональному виду, т. е.

$$N_3A_3=G_3N_3,\quad G_3=\|i\lambda_k(t,\xi)\,\delta_{kj}\|_{k,\,j=1}^{m}, \tag{83}$$

здесь $\{i\lambda_k(t,\xi)\}_1^m$ — собственные значения матрицы A_3. Относительно вектор-функции $\bar{w}=N_3v$ система (22) имеет вид

$$\partial_t\bar{w}=\{G_3+N_{3t}N_3^{-1}+N_3(A_1-A_3)N_3^{-1}\}\bar{w}. \tag{84}$$

7°. Доказательство теоремы 1. Достаточность. Рассмотрим случай $t>t_2$. В силу условий (35), (41) при $v\equiv1$ справедливы оценки

$$2|\mathrm{Re}\,(N_3(A_1-A_3)N_3^{-1}w,\bar{w})|\leqslant\frac{(m+1-\delta_{m2})\lambda}{\Lambda}\sup_{t\in[t_2,T]}\left\{\frac{\Lambda\,(b\,(t,\xi)|}{\lambda\prod\limits_{s<k}|\lambda_s-\lambda_k|}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(m+1-\delta_{m2})c_0\lambda}{\Lambda}\sup\left\{\frac{(|\xi|\lambda)^{m-1}|\xi|^{p-m}}{\Lambda^{m-p}\prod|\lambda_s-\lambda_k|}\right\}\leqslant\frac{(m+1-\delta_{m2})c_0c_5\lambda(t)}{F_1^{\frac{m-p}{p-1}}\Lambda(t)}, \tag{85}$$

где

$$c_5=\sup_{t,\,|\xi|=1}\left\{\frac{\lambda^{m-1}}{\prod\limits_{k>j}|\lambda_k-\lambda_j|}\right\}. \tag{85'}$$

Из условий (6), (7) имеем

$$2|\mathrm{Re}\,(N_{3t}N_3^{-1}w,\bar{w})|\leqslant2m(m-1)c_4\frac{\lambda}{\Lambda}(t)|w|^2, \tag{86}$$

где

$$c_4=\sup_{t,\ \ldots\ k\neq p}\left\{\frac{\Lambda\,|\partial\ \lambda_k(t,\xi)|}{\lambda\,|\lambda_k-\lambda_p|(t,\xi)}\right\}. \tag{86'}$$

Из системы (84), неравенств (85), (86) и $\operatorname{Re}\{i\lambda_j(t, \xi)\} \equiv 0$ получаем оценку

$$\partial_t |\tilde{w}|^2 \leqslant \left\{ 2m(m-1)c_4 + \frac{(m+1-\delta_{m2})c_0c_5}{F_1^{\frac{m-p}{p-1}}} \right\} \frac{\lambda |\tilde{w}|^2}{\Lambda}. \tag{87}$$

Так как $t_1 \leqslant t_2$, то из (45) при $\nu \equiv 1$ имеем оценку

$$\int_{t_2}^{T} \frac{\lambda d\tau}{\Lambda(\tau)} \leqslant -\frac{1}{p-1} \ln \Lambda^{p-1}(t_2) = -\frac{1}{p-1} \ln \frac{\lambda^{m-1}}{\Lambda^{m-p}}(t_1) = \ln |\xi|. \tag{87'}$$

Применяя к (87) лемму 2, в силу (87′) получаем оценку

$$|\tilde{w}(\tau_1)|^2 \leqslant |\xi|^l |\tilde{w}(\tau_2)|^2, \quad |\xi| > M, \quad \tau_1, \tau_2 \in [t_2, T], \tag{88}$$

из которой следует

Предложение 1. *В условиях* (5)—(8), (35) *для всех* $\tau_1, \tau_2 \in [t_2, T]$ *имеет место оценка*

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\partial_t^k u(\tau_1, \xi)|^2 < c|\xi|^l \sum_{k=0}^{m-1} |\partial_t^k u(\tau_2, \xi)|^2, \tag{89}$$

где

$$l = 2m(m-1)c_4 + \frac{(m+1-\delta_{m2})c_0c_5}{F_1^{\frac{m-1}{p-1}}}. \tag{89'}$$

Замечание 5. Достаточность утверждения теоремы 1 следует из лемм 3, 4 и предложения 1 с заменой $m \to m+p-j-1$ (ввиду понижения порядка, см. п. 3) при дополнительном ограничении (39) (сравнить с условием i) п. 4), которое мы в дальнейшем заменим условиями (9), (10), рассмотрев также случаи, соответствующие в схеме доказательства случаям ii), iii).

Замечание 6. Если существует предел

$$\lim_{t\to 0} \left\{ \lambda'(t) \cdot \frac{\Lambda(t)}{\lambda^2(t)} \right\}, \tag{9'}$$

то с помощью теоремы Лопиталя можно показать, что (8) следует из (9).

8°. Оценки для собственных значений в критической области $t > t_2$.

Лемма 5. *В условиях* (5)—(8), (13), (36) *при* $t > t_2$ *справедливы оценки*

$$|\partial_t^s \mu_k(t, \xi)| \leqslant c \left(\frac{\lambda}{\Lambda}(t) \right)^s |\xi| \lambda(t), \quad s = 0, 1. \tag{90}$$

Доказательство. Если возмущение b равно нулю, то уравнение (23) имеет вид

$$\prod_{j=1}^{m} (\mu - i\lambda_j(t, \xi)) = 0$$

с дискриминантом

$$\operatorname{disc}|_{b\equiv 0} = i^{m(m-1)} \prod_{k>j} (\lambda_k - \lambda_j)^2$$

допускающим, ввиду (7), оценку

$$|\operatorname{disc}| \equiv \prod_{k>j} |\mu_k - \mu_j|^2 \geqslant c\, [|\xi|\, \lambda(t)]^{m(m-1)}. \tag{91}$$

Покажем, что в условиях леммы 5 эта оценка верна и без условия $b\equiv 0$. При $t \geqslant t_2(\xi)$ справедливы оценки

$$|q_k(t, \xi)| \leqslant c\, (|\xi|\, \lambda(t))^k,\ k = 1, \cdots, m, \tag{92'}$$

$$|b(t, \xi)| \leqslant c_2 |\xi|^{p-1} \lambda^m/\nu\Lambda^{m+1-p} \leqslant c_2 (|\xi|\, \lambda)^m \left(\frac{\Lambda^{p-1}}{F_1}\right)^{\frac{m+1-p}{p-1}} =$$

$$= c_2 (|\xi|\, \lambda)^m / F_1^{\frac{m+1-p}{p-1}} \leqslant \tilde{\varepsilon}\, (|\xi|\, \lambda)^m,$$

если

$$F_1 > F_{10} \equiv \left(\frac{c_2}{\tilde{\varepsilon}}\right)^{\frac{p-1}{m+1-p}}. \tag{92}$$

Отсюда для любой малой положительной постоянной $\tilde{\varepsilon}$ за счет выбора F_1 достаточно большим получаем оценку

$$|b(t, \xi)| < \tilde{\varepsilon}\, (|\xi|\, \lambda(t))^m, \text{ при } t > t_2. \tag{93}$$

Аналогично доказывается оценка (см. (33))

$$|\partial_t b(t, \xi)| \leqslant \tilde{\varepsilon}\, \frac{\lambda}{\Lambda}(t) \cdot (|\xi|\, \lambda(t))^m. \tag{93'}$$

Из этих оценок вытекает справедливость оценки (91).

В обозначениях

$$z = \frac{\mu(t, \xi)}{i\,|\xi|\, \lambda(t)},\quad \tau_j = \frac{\lambda_j(t, \xi)}{|\xi|\, \lambda(t)},\quad z_j = \frac{\mu_j}{i\,|\xi|\, \lambda(t)},\ j = 1, \cdots, m, \tag{94}$$

уравнение (23) принимает вид

$$\prod_{j=1}^{m} (z - \tau_j) = i\eta,\quad \eta \equiv \frac{b(t, \xi)}{(|\xi|\, \lambda)^m}. \tag{23'}$$

Отметим, что из (93) следует, что

$$|\eta| \leqslant \tilde{\varepsilon}, \text{ при } t > t_2,\ \tilde{\varepsilon} \text{ — мало}. \tag{95}$$

Оценки (7), (91) означают, что при малых $\tilde{\varepsilon}$ корни $\{\tau_k\}_1^m$ и $\{z_k\}_1^m$ простые. Так как отношения $\lambda_k(t, \xi)/\lambda(t)$ по условию (6′) являются непрерывными функциями, то коэффициенты уравнения (23′) непрерывны и по теореме о неявной функции функции $z_k(t, \xi)$ также непрерывны, а, стало быть, ограничены на компакте $|\xi|=1$, $t\in[0, T]$, т. е.

$$|z_k(t, \xi)| \leqslant \text{const}, \quad k=1,\cdots, m. \tag{96}$$

В силу однородности нулевого порядка по ξ функций z_k эту оценку можно продолжить на все $\xi\in R^n$, откуда вытекает (90) при $s=0$.

Для доказательства оценки (90) при $s=1$ продифференцируем по t уравнение (23) и разрешим его относительно μ_t:

$$\mu_t = \left[\left(\sum_{k=1}^{m} q_{kt}\,\mu^{m-k} + i^{m+1} b_t\right)\right] \Big/ m \sum_{k=1}^{m-1} (\mu - \tilde{\mu}_k), \tag{97}$$

где $\{\tilde{\mu}_k\}_1^m$ — корни разделяющего уравнения

$$m\,\tilde{\mu}^{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} (m-k)\, q_k\, \tilde{\mu}^{m-k-1}, \tag{98′}$$

которое в обозначении $\tilde{z}_k = \tilde{\mu}_k/(i\,|\xi|\,\lambda)$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m} \prod_{j\neq k} (\tilde{z} - \tau_j) = 0. \tag{98}$$

С помощью теоремы Штурма в работе [11] доказан удобный критерий действительности корней алгебраического уравнения:

Лемма 6. *Для того чтобы все корни уравнения*

$$y^m + \beta_{m-1}\, y^{m-1} + \cdots + \beta_1 y + \beta_0 = 0, \quad \beta_k\in R, \quad k=0, 1,\cdots, m-1$$

были действительны, необходимо и достаточно, чтобы была неотрицательна симметрическая матрица энергии:

$$A^\circ = \left\| \sum_{k=1}^{i+j-1} \operatorname{sign}(i+j+1-2k)\,[Y(q+1-k) + Y(k-\hat{q})] \times \right.$$
$$\left. \times (m+k-i-j)\,\beta_{m+k+1-i-j}\,\beta_{m+1-k} \right\|_{k,\, j=1}^{m}$$

здесь $\beta_m = 1$, $q=\min(i, j)$, $\hat{q}=\max(i, j)$,

$$Y(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases} \quad \operatorname{sign} x = Y(x) - Y(-x), \quad x\in R.$$

С помощью леммы 6 и (95) нетрудно доказать, что корни уравнений (23′), (98) действительны, причем корни второго уравнения лежат между простыми корнями первого уравнения, т. е.

$$\prod_{k=1}^{m-1}|z_j-\bar{z}_k|\geqslant c>0,\ j=1,\cdots,m, \tag{99'}$$

откуда получаем, что

$$\prod_{k=1}^{m-1}|\mu_j-\tilde{\mu}_k|=(|\xi|\,\lambda)^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}|z_j-\bar{z}_k|\geqslant c\,(|\xi|\,\lambda)^{m-1}. \tag{99}$$

Оценка (90) при $s=1$ следует из (97), (99), (93) и (90) при $s=0$.

Лемма 7. *В условиях леммы* 5 *при* $t>t_1$ *справедлива оценка*

$$2\,|\operatorname{Re}(N_t\,N^{-1}\,w,\,\bar{w})|\leqslant c_9\,\frac{\lambda}{\Lambda}\,|w|^2,\ c_9<\infty, \tag{100}$$

где

$$c_9=\sup_{\substack{w,\,t\in[t_1,\,T\\|\xi|=1}}\left\{\frac{2\Lambda\,|\operatorname{Re}(N_t\cdot N^{-1}\,w,\bar{w})|}{\lambda(t)\,|w|^2}\right\}. \tag{100'}$$

Эта лемма доказывается с помощью оценок (90).

По условию (7) функции $\{\tau_k\}_1^m$ действительны и различны. Выберем нумерацию τ_k так, чтобы

$$\tau_k<\tau_{k+1},\ k=1,2,\cdots,m-1. \tag{101}$$

Применением критерия Рауса-Гурвица можно показать, что уравнение (23) имеет $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ корней (здесь $[\cdot]$—целая часть числа) с отрицательной действительной частью. Мы докажем оценку снизу для корней (23').

Лемма 8. *В условиях* (5), (8), (12'), (13), (37), (38), (101) *при* $t\in[t_2,\,t_3]$ *имеют место оценки*

$$(-1)^{m+1-k}\operatorname{Re}\mu_k\geqslant\frac{c\lambda(t)}{\nu^{1-q}\Lambda(t)},\ k=1,\cdots,m, \tag{102}$$

причем при $p=m$ *надо* t_3 *заменить на* T, *а* $q=0$.

Доказательство. Дифференцируя по η уравнение (23'), мы получим

$$z'(\eta)=\frac{i}{\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j\neq k}(z-\tau_j)}=\frac{i}{Q+iB}=\frac{B+iQ}{B^2+Q^2}, \tag{103}$$

где

$$Q=\sum_1^m Q_k,\quad B=\sum_1^m B_k,\quad Q_k=\operatorname{Re}\prod_{j\neq k}(z-\tau_j),\quad B_k=\operatorname{Im}\prod_{j\neq k}(z-\tau_j).$$

Из (103) имеем

$$\operatorname{Im}z'(\eta)=\frac{Q}{Q^2+B^2},\quad\operatorname{Re}z'(\eta)=\frac{B}{B^2+Q^2}. \tag{103'}$$

Так как

$$z_k(\eta) = \tau_k + o(1), \text{ при } \eta \to 0, \tag{104}$$

то из (103) получаем при $k = 1, \cdots, m$ и $\eta \to 0$

$$\operatorname{Im} z_k'(\eta) = \frac{M_k}{Q^2 + B^2} + o(1), \ \operatorname{Re} z_k'(\eta) = o(1), \tag{105}$$

где

$$M_k \equiv \prod_{j \neq k} (\tau_k - \tau_j).$$

Из формулы конечных приращений

$$z_k(\eta) = z_k(0) + \eta \operatorname{Im} z_k'(\theta) = \tau_k + \eta z_k'(\theta), \ 0 < |\theta| < r,$$

имеем

$$\operatorname{Im} z_k(\eta) = (\operatorname{Re} \eta) \operatorname{Im} z_k'(\theta) + (\operatorname{Im} \eta) \operatorname{Re} z_k'(\theta). \tag{106}$$

В силу (101)

$$\operatorname{sign} M_k = (-1)^{m-k}, \text{ т. е. } (-1)^{m-k} M_k > c > 0, \tag{107}$$

поэтому из (105), (106) получаем оценку

$$(-1)^{m-k} \operatorname{Im} z_k \geqslant c\,(\operatorname{Re} \eta), \ k = 1, \cdots, m. \tag{108'}$$

Далее из (94) и (23') имеем

$$(-1)^{m+1-k} \operatorname{Re} \mu_k = (-1)^{m-k} |\xi| \lambda \operatorname{Im} z_k \geqslant c\, |\xi| \lambda \operatorname{Re} \eta. \tag{108}$$

Если $p = m$, то при $t \geqslant t_3$ имеем

$$(|\xi| \lambda)^{1-m} \operatorname{Re} b \geqslant c_8 \frac{\lambda(t)}{\nu \Delta(t)}. \tag{109'}$$

Если же $2 \leqslant p < m$, то из (38), (42) при $t \in [t_2, t_3]$ имеем оценку

$$(|\xi| \lambda)^{1-m} \operatorname{Re} b \geqslant c_8 \lambda \cdot |\xi|^{p-m} \Lambda^{p-m-1}/\nu > c_8 \frac{\lambda}{\Lambda \nu^{1-q}}. \tag{109}$$

Комбинируя оценки (108), (109), получаем утверждение леммы 8.

Лемма 9. *В условиях* (5), (8), (13), (36) *из*

$$\operatorname{Re} b(t, \xi) \equiv 0 \tag{17''}$$

следует, что при $t > t_3$

$$\operatorname{Re} \mu_k \equiv 0, \ k = 1, \cdots, m. \tag{110}$$

Доказательство. Заменой $z = i\mu$, $\hat{b} = \frac{b}{i}$ из (23) получаем

$$\prod_{k=1}^{m} (z - \lambda_k) + \hat{b} = 0, \tag{111}$$

причем из (17'') следует, что

$$\operatorname{Im} \hat{b} \equiv 0. \tag{112}$$

Если $\hat{b} \equiv 0$, то корни уравнения (111) равны $\{\lambda_k\}_1^m$ и действительны. Поэтому в силу леммы 6 имеем $A^0|_{\hat{b}\equiv 0} \geqslant 0$. В условиях леммы 9 при $t > t_2(\xi)$ справедлива оценка (93), с помощью которой непосредственно проверяется, что при $\hat{b} \not\equiv 0$ матрица A^0 неотрицательна. Поэтому, в силу леммы 6, корни $\{z_k\}_1^m$ уравнения (111) действительны.

Лемма 10. *Если*

$$\operatorname{Re} b = \operatorname{Im} \hat{b} = 0, \quad \hat{b} = \operatorname{Im} b \geqslant 0, \tag{17'}$$

то при $m \geqslant 2$ *имеют место оценки*

$$-\operatorname{Re} \sigma_k > c \sqrt[m]{\hat{b}}, \quad k = 1, 2, \cdots, \left[\frac{m-1}{2}\right] - 1, m,$$

$$\operatorname{Re} \sigma_k \geqslant c \sqrt[m]{\hat{b}}, \quad k = \left[\frac{m-1}{2}\right], \cdots, m-2, m-1, \tag{113}$$

$$\operatorname{Re} \sigma_{\frac{m-1}{2}} \equiv 0, \text{ если } m \text{ нечетно.}$$

Здесь $\{\sigma_k\}_1^m$ — *собственные значения матрицы* A_2, $[\cdot]$—*целая часть числа.*

Если же

$$\operatorname{Im} b \equiv 0, \quad b = \operatorname{Re} b \geqslant 0, \tag{12'}$$

то справедливы оценки

$$-\operatorname{Re} \sigma_k > c \sqrt[m]{b}, \quad k = m, 1, 2, \cdots, \left[\frac{2m-1}{4}\right],$$

$$\operatorname{Re} \sigma_k > c \sqrt[m]{b}, \quad k = \left[\frac{2m-1}{4}\right] + 1, \cdots, m-2, m-1. \tag{114}$$

Доказательство леммы следует из (78), (78′).

9°. Доказательство теоремы 1. Необходимость. Введем форму

$$S(t, \xi) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k |w_k|^2, \tag{115}$$

где

$$\gamma_k = -M_k / |M_1 M_2 \cdots M_m|, \quad k = 1, \cdots, m. \tag{116}$$

В силу (6), (7), (105′) справедливы неравенства

$$|\partial_t^s \gamma_k| \leqslant c \frac{\lambda}{\Lambda}(t), \quad s = 0, 1, \quad k = 1, \cdots, m. \tag{117}$$

Дифференцируя по t энергетическую форму (115) с учетом (75), (100), (117) имеем

$$S_t \geqslant 2 \sum_{k=1}^{m} (\gamma_k \operatorname{Re} \mu_k |w_k|^2) - c \frac{\lambda}{\Lambda} (t) |w|^2. \tag{118}$$

Лемма 11. *В условиях* (5)—(8), (13), (36) *и*

$$\sum_{k=1}^{m} (\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m/\tau_k) > 0, \tag{119}$$

для решений задачи Коши

$$Pu(t, \xi) = 0, \ t \geqslant t_2 (\xi), \tag{120}$$

$$\partial_t^k u (t_2, \xi) = 1, \text{ при } k = 0, 1, \cdots, m-1$$

справедлива оценка

$$S(t, \xi) \geqslant (|\xi| \lambda (t))^{m(m-1)} > 0, \ t \in [t_2, T]. \tag{121}$$

Доказательство. Заметим, что (119) не является ограничением общности, так как заменой неизвестной функции

$$u(t, \xi) = g(t, \xi) \exp \{i\zeta (t, \xi)\}$$

за счет выбора $\zeta(t, \xi)$ можно добиться выполнения условия (119). При $t \geqslant t_2$ из (93), (38) имеем

$$1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < \frac{(|\xi| \lambda)^m}{|b|} \leqslant \frac{\nu}{c_8} \left(\frac{\Lambda}{\lambda} |\xi| \lambda \right)^{m+1-p} \leqslant c (|\xi| \lambda)^{m+1-p}) \cdot \nu, \tag{122}$$

откуда следует, что при $t \geqslant t_2$ из $|\xi| \to \infty$ (или $t \to 0$) следует, что $|\xi| \lambda \to \infty$ и наоборот. Далее, из условий (7), (100) вытекает, что

$$N_{kj} = O((|\xi| \lambda)^{\frac{m(m-1)}{2} + 1 - j}, \text{ при } |\xi| \lambda \to \infty, \ k, j = 1, \cdots, m. \tag{123}$$

Вводя обозначение

$$S_k = (-1)^{k+1} \gamma_k \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m \prod_{\substack{i<j \\ i, j \neq k}} \{(\tau_i - \tau_j)^2/\tau_k\}, \tag{124'}$$

из (104), (123), (120) имеем

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{m} S_k + o(1) \right\} (|\xi| \lambda)^{m(m-1)}, \text{ при } |\xi| \to \infty. \tag{124}$$

Из тождества

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{M_k \tau_k^2} = -\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\tau_k} \right) \Big/ \left(\prod_{k=1}^{m} \tau_k \right)$$

и соотношений (124), (116) получаем при $|\xi| \to \infty$

$$S = (|\xi| \lambda)^{m(m-1)} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m}{\tau_k} + o(1) \right\}, \tag{125}$$

откуда, в силу (119), следует оценка (121).

Предложение 2. *В условиях* (5)—(8), (34′), (101) *решение задачи Коши* (120) *удовлетворяет оценке* ($|\xi| > M$):

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\partial^k u(t, \xi)|^2 < ce^{c\sigma(t)} |\xi|^{\frac{c}{\nu^{1-q}(t_3)}}, \quad t \in [t_2, t_3], \tag{126}$$

где $\sigma(t) = \nu^{q-1} \ln \Lambda(t)$ *и, если* $p = m$, *то* t_3 *надо заменить на* T, *а* $q = 0$.

Доказательство. Из (118), (116) имеем

$$S_t > c \sum_{k=1}^{m} (M_k \operatorname{Re} \mu_k) |w_k|^2 - \frac{c\lambda}{\Lambda} |w|^2, \tag{127}$$

откуда в силу (102), (107)

$$S_t(t, \xi) \geqslant \frac{c\lambda(t)}{\nu^{1-q}(t_3)} S(t, \xi) \tag{128}$$

и

$$S(t, \xi) \geqslant S(t_2, \xi) \exp \int_{t_2}^{t} \frac{c\lambda(\tau)\, d\tau}{\Lambda(\tau)\, \nu^{1-q}(\tau)}. \tag{129}$$

Из (34′) имеем $(1-q)\nu^{q-2}\nu' |\ln \Lambda| \leqslant \nu' \nu^{q-2} |\ln \Lambda| \leqslant \rho_1 \frac{\lambda}{\Lambda \nu^{1-q}}$, поэтому

$$\int_{t_4}^{t} \frac{(1+\rho_1)\lambda d\tau}{\nu^{1-q} \Lambda} \geqslant \int_{t_4}^{t} \partial_\tau \left(\frac{\ln \Lambda}{\nu^{1-q}} \right) \geqslant \sigma(t) - \frac{\ln \Lambda(t_4)}{\nu^{1-q}} = \sigma + \frac{\gamma \ln |\xi|}{\nu^{1-q}(t_3)}. \tag{130}$$

Таким образом, из (129), (130) получаем оценку

$$S(t, \xi) \geqslant S(t_2, \xi)\, e^{c\sigma(t)} |\xi|^{\frac{c}{\nu^{1-q}(t_3)}}, \tag{131}$$

из которой следует оценка (126), ввиду очевидного неравенства

$$S(t, \xi) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k |w_k|^2 \leqslant c |\xi|^{m(m-1)} \sum_{k=0}^{m-1} |\partial_t^k u|^2. \tag{131′}$$

При $p = m$ функция t_3 не имеет смысла. Оценка (126) в этом случае доказывается аналогичным образом, но уже в интервале $[t_2, T]$ с постоянной $q = 0$.

Замечание 7. Если (34′) нарушается, то из теоремы Лопиталя и (14′)

$$\lim_{t\to 0} \frac{[\ln(-\ln \Lambda)]'(t)}{(\ln \nu)'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln |\ln \Lambda|}{\ln \nu} = 0 \text{ или } |\ln \Lambda| = \nu^{o(1)}, \ t \to 0.$$

Далее из (33)

$$\nu |\ln \lambda|^{m+1-p} \leqslant \frac{\nu |\ln \Lambda|^{m+1-p}}{(1-H-\varepsilon)^{m+1-p}} \leqslant c \cdot \nu^{1+o(1)}(t) \to 0$$

при $t \to 0$, т. е. нарушается (39). Таким образом, из (14′), (33), (39) следует (34′), поэтому условие (34′) можно заменить условиями (9), (14′), (39).

Необходимость утверждения теоремы 1 следует из предложения 2, лемм 3, 4 и замечания 5 при дополнительном условии (39), которое мы заменим в дальнейшем условиями (9), (10), (33).

10°. Доказательство теоремы 2. Достаточность.

Предложение 3. *В условиях* (5)—(8), (17″), (101) *и*

$$|\partial_t^s b(t, \xi)| \leqslant c_{s+2} |\xi|^{p-1} \lambda^{m+s} \Lambda^{p-m-1} / |\ln \lambda|^{m+1-p}, \quad s = 0, 1 \tag{132}$$

справедлива оценка (89), *причем* $l = c_9$.

Доказательство. Полагая

$$\nu(t) = (-\ln \lambda)^{p-1-m} \tag{133}$$

нетрудно проверить, что условия (13), (34), (36), (39) лемм 3, 4 выполнены, если выполнены условия предложения 3. Из лемм 3, 4 следует оценка (89) при $\tau_1, \tau_2 \in [0, t_2]$, поэтому достаточно доказать (89) при $\tau_{1,2} \in [t_2, T]$. Из (132) вытекает оценка (36), откуда, в свою очередь, вытекает (93). Поэтому, в силу леммы 6, справедливо (110). Вводя энергетическую формулу

$$E_3 = |w|^2, \tag{134}$$

в силу (75) имеем

$$\partial_t E_3 = \sum_{k=1}^{m} (2 \operatorname{Re} \mu_k) |w_k|^2 + \operatorname{Re}(N_t N^{-1} w, w),$$

откуда, ввиду леммы 7 и (110), получаем оценку

$$\partial_t E_3 \leqslant c_9 \frac{\lambda}{\Lambda} E_3(t, \xi), \quad t \geqslant t_2(\xi). \tag{135}$$

Далее из (5), (8) имеем оценку (87′). Применяя лемму 2 (в интервале к оценке (135), в силу (87′) получаем оценку

$$E_3(\tau_1, \xi) \leqslant |\xi|^l E_3(\tau_2, \xi), \quad \tau_1, \tau_2 \in [t_2, T], \ |\xi| > M, \tag{136}$$

из которой и следует предложение 3.

Замечание 8. Достаточность утверждения теоремы 2 следует из предложения 3 и замечания 5.

11°. Доказательство теоремы 2. Необходимость. Введем форму (m-четно)

$$E_4 = \sum_{k=1}^{m} r_k |\hat{w}_k|^2, \quad r_k = \begin{cases} -1, & k = 1, 2, \cdots, \dfrac{m}{2} - 1, m, \\ 1, & k = \dfrac{m}{2}, \cdots, m-2, m-1. \end{cases} \tag{137}$$

В обозначениях

$$\Gamma = \|r_k \delta_{kj}\|_{k, j=1}^{m},$$

$$\hat{R}=\bar{\hat{M}}^{-1}\,\theta\Gamma\theta^{+}\hat{M}^{-1}=2\left\| i^{(m+2)(k-j)}\,\hat{b}^{\frac{2-k-j}{m}}\sum_{s=1}^{m} r_s\,\varepsilon^{k-j}\right\|_{k,\,j=1}^{m},$$

форму E_4 можно записать в виде

$$E_4=\hat{w}^{+}\,\Gamma\hat{w}=v^{+}\,N_2^{+}\,\Gamma\,N_2\,v=\hat{b}^{m-1}\,m^{m-2}\,v^{+}\hat{R}\,v. \tag{138}$$

Дифференцируя по t равенство (137) с помощью системы (82) имеем

$$\partial_t E_4=\sum_{k=}^{m}\left\{r_k\,\mathrm{Re}\,\sigma_k\,|\hat{w}_k|^2+2\,r_k\,\mathrm{Re}\,((N_{2t}N_2^{-1}+N_2(A_1-A_2)\,N_2^{-1})\hat{w}_k,\,\hat{w}_k)\right\}. \tag{139}$$

Лемма 12. *В условиях* (5), (6), (8), (34), (17′) *и при достаточно малом* F_1 *найдется малая положительная постоянная* ε *такая, что при* $t\leqslant t_2$ *справедлива оценка*

$$|\hat{w}^{+}\,N_2\,(A_1-A_2)\,N_2^{-1}\,\hat{w}|\leqslant\varepsilon\sqrt[m]{\hat{b}}\,|\hat{w}|^2. \tag{140}$$

Доказательство. Из (17′), (37), (67′) при малом F_1 имеем

$$|\xi|\,\lambda\,(t)\leqslant\varepsilon\sqrt[m]{\hat{b}},\ \varepsilon\text{ — мало}, \tag{67″}$$

поэтому справедливы оценки

$$|q_k\,\hat{b}^{\frac{1-k}{m}}|=\hat{b}^{\frac{1}{m}}\left|\frac{q_k}{\hat{b}^{\frac{k}{m}}}\right|\leqslant c\,\hat{b}^{\frac{1}{m}}\left(\frac{|\xi|\,\lambda}{\sqrt[m]{\hat{b}}}\right)^k\leqslant\varepsilon\,\hat{b}^{\frac{1}{m}},$$

откуда и следует (140).

Из формулы (81) непосредственным вычислением получаем

$$N_{2t}N_2^{-1}=\frac{\hat{b}_t}{m\hat{b}}\left\{\frac{(m-1)^2}{2}\,\|\delta_{kj}\|+\left\|\frac{\mathrm{sign}\,|k-j|}{1-\varepsilon_{j-k}}\right\|\right\}_{k,\,j=1}^{m}, \tag{141}$$

причем, по определению, при $k-j=0$ имеем $\mathrm{sign}\,|k-j|/(1-\varepsilon_{j-k})=0$. Имеем также

$$\hat{\Gamma}\equiv\Gamma\,N_{2t}\,N_2^{-1}+(\Gamma\,N_{2t}\,N_2^{-1})^{+}=\frac{\hat{b}_t}{m\hat{b}}((m-1)^2\,\Gamma+\tilde{\Gamma}), \tag{142}$$

где $\tilde{\Gamma}$ — эрмитова матрица ($\tilde{\Gamma}^{+}=\tilde{\Gamma}$) с матричными элементами

$$\tilde{\Gamma}_{kj}=\begin{cases}0, & j=k\\ (r_k+r_j)/(1-\varepsilon_{j-k}), & j>k.\end{cases} \tag{143}$$

Если m — чётно, (18′)

то из леммы 10 имеем оценку

$$r_k\,\mathrm{Re}\,\sigma_k\geqslant c\sqrt[m]{\hat{b}(t,\xi)},\ k=1,\cdots,m. \tag{144}$$

Лемма 13. *В условии* (18′) *существует перестановка индексов последовательности* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m)$, *оставляющая инвариантными множества* $\left(1, 2, \cdots, \frac{m}{2}-1, m\right)$ *и* $\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \cdots, m-1\right)$ *и такая, что*

$$v^{+} \hat{R} v \geqslant 0, \quad \hat{w} \hat{\Gamma} \hat{w} \geqslant 0. \tag{145}$$

Доказательство этой леммы мы опускаем.

Из (139), (140), (143)—(145) получаем оценку

$$\partial_t E_4 \left(c \sqrt[m]{\hat{b}} + \frac{(m-1)^2}{m} \frac{\hat{b}_t}{\hat{b}}\right) E_4(t, \xi), \tag{146}$$

откуда, применяя лемму 2 в интервале $[t_5, t_2]$, с учетом (145), (138) имеем

$$E_4(t_2) \geqslant E_4(t_5)(\hat{b}(t_2)/\hat{b}(t_5))^{\frac{(m-1)^2}{m}} \exp \int_{t_1}^{t_2} \sqrt[m]{\hat{b}(\tau, \xi)}\, d\tau. \tag{147}$$

Из (33), (38), (41) имеем

$$\hat{b}(t_2, \xi) \geqslant c\lambda^m(t_2)/(\Lambda^m(t_2)\, \nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_2)) \geqslant \frac{1}{c} \cdot \tag{148}$$

При начальных условиях

$$v_1(t_5) = v_m(t_5) = 1, \; v_k(t_5) = 0, \; k = 2, 3, \cdots, m-1, \tag{149}$$

из (138), (138′) имеем

$$E_4(t_5, \xi) = c\, \hat{b}^{\frac{(m-1)^2}{m}}(t_5, \xi). \tag{150}$$

Из (147)—(150) получаем оценку

$$E_4(t_2) \geqslant \exp\left\{\int_{t_5}^{t_2} \sqrt[m]{\hat{b}(\tau, \xi)}\, d\tau\right\}. \tag{151}$$

Предложение 4. *В условиях* (5), (6), (8), (13), (17′), (34) (38), (52′) *и*

$$\nu(t)\, |\ln \lambda(t)|^{m+1-p} = o(1), \quad t \to 0, \tag{152}$$

для решений задачи Коши $Pu = 0$ *при* $t > t_5$ *с начальными условиями* (149) *справедлива оценка*

$$E_4(t_2) \geqslant |\xi|^{c\eta}, \tag{153}$$

где, ввиду (152)

$$\eta = \frac{1}{\nu^{\frac{1}{m-p+1}}(t_2)\, |\ln \lambda(t_2)|} \to \infty, \text{ при } t_2 \to 0. \tag{153′}$$

Доказательство. Предварительно заметим, что из (41) (см. (15))

$$\nu(t) \geqslant c\lambda^m \Lambda^{p-m-1}(t) \tag{154}$$

вытекает, что

$$|\xi|^{p-1} = F_1 [\Lambda(t_2)\, \nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_2)]^{1-p} \leqslant c\lambda^{\frac{m(1-p)}{m+1-p}} \tag{155}$$

или

$$\ln|\xi| \leqslant \left(\frac{m}{m+1-p} + \varepsilon\right)|\ln\lambda(t)|. \tag{156}$$

Из (13), (52), (5) и $t_5 \leqslant t_2$ имеем

$$(\nu^{\frac{1}{m+1-p}}\Lambda)^{\frac{p-1}{m}}(t_2) > 2(\nu^{\frac{1}{m+1-p}}\Lambda)^{\frac{p-1}{m}}(t_5). \tag{157}$$

Имеем далее цепочку неравенств (сравнить с (70))

$$\int_{t_5}^{t_2} \sqrt[m]{\hat{b}(\tau,\xi)}\, d\tau > \frac{mc}{(p-1)\,\nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_2)} [\nu^{\frac{1}{m+1-p}} |\xi| \Lambda]^{\frac{p-1}{m}} \Big|_{t_5}^{t_2} >$$

$$> \frac{cm}{(p-1)\,\nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_2)} [\nu^{\frac{1}{m+1-p}} \Lambda(t_2)\, |\xi|]^{\frac{p-1}{m}} \geqslant \frac{c\ln|\xi|}{\nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_2)\ln|\xi|} >$$

$$\geqslant \frac{c\ln|\xi|}{\nu^{\frac{1}{m+1-p}}(t_2)\,|\ln\lambda(t_2)|},$$

откуда

$$\exp\int_{t_5}^{t_2} \sqrt[m]{\hat{b}(\tau,\xi)}\, d\tau \geqslant |\xi|^{c\eta(t_2)}. \tag{159}$$

Комбинируя (151) и (159), получаем оценку (153).

Лемма 14. *В условиях* (5), (6), (36) *и* (*сравнить с условием ii*) *из п.* 4)

$$\nu(t) > c\Lambda^{p-m-1}\lambda^{m-\frac{p-1}{h}}(t) \tag{160}$$

справедлива оценка

$$v(\tau_1, \xi) \leqslant c\, v(\tau_2, \xi) \tag{161}$$

для всех $\tau_1, \tau_2 \in [0, t_5]$ *и* $|\xi| > M$.

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно показать ограниченность матричных элементов матрицы A_1 при $t \leqslant t_5$. Действительно

$$|q_k(t,\xi)| \leqslant c\,(|\xi|\,\lambda)^k \leqslant c\,(|\xi|^h\lambda)^k \cdot |\xi|^{k(1-h)} \leqslant c\,|\xi|^{k(1-h)} \leqslant c, \tag{162}$$

и из (36), (43), (160)

$$|b(t,\xi)| \leqslant c\,|\xi|^{p-1}\lambda^m \Lambda^{p-m-1}/\nu \leqslant c\,\Lambda^{p-m-1}\lambda^{m-\frac{p-1}{h}}/\nu \leqslant c. \qquad (163)$$

Лемма 15. *В условиях* (5), (6), (10), (36) *и* (*сравнить с iii*) *из п.* 4)

$$\lambda^m \Lambda^{p-m-1}(t) \lesssim \nu(t) \leqslant c\Lambda^{p-m-1}\lambda^{m-\frac{p-1}{h}}, \qquad (164)$$

$$\Omega(p-1) > \beta, \quad \beta \leqslant 1 \qquad (165)$$

для решений системы (22) *справедлива оценка* (161) *для всех* $\tau_{1,2} \in [0, t_6]$.

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно показать интегрируемость в $[0, t_6]$ матричных элементов A_1. Из (36), (44), (164), (165) имеем

$$\int_0^{t_6} |b(\tau,\xi)|\,d\tau \leqslant c\,|\xi|^{p-1}\cdot t_6 \leqslant c\,F_3\cdot t_6^{1-\beta} \leqslant c, \qquad (166)$$

а из (5), (6), (10) имеем при $t < t_6$

$$|q_k(t,\xi)| \leqslant c\,(\lambda(t_6)\,t_6^{\frac{\beta}{1-p}})^k < c\,(t_6^{\Omega-\frac{\beta}{p-1}})^k. \qquad (167)$$

Лемма 16. *В условиях* (5), (6), (8), (10), (13), (17′), (33), (36), (52′), (164) *и*

$$h > \frac{(p-1)(1-H_1)}{p-1-mH_1}\,(>1) \qquad (168)$$

для решений задачи Коши

$$Pu = 0, \quad t > t_6 \qquad (169)$$

$$v_1(t_6) = v_m(t_6) = 1, \quad v_k(t_6) = 0, \quad k = 2, \cdots, m-1$$

справедлива оценка (153).

Эта лемма доказывается так же, как и предложение 4, причем условие (152), необходимое для доказательства предложения 4, следует из (33), (164), (168). Действительно

$$\nu(t) \leqslant c\lambda^{m-\frac{p-1}{h}}\Lambda^{p-1-m} \leqslant c\lambda^{m-\frac{p-1}{h}-\frac{m-p+1}{1-H_1}} \leqslant \frac{o(1)}{|\ln\lambda|^{m+1-p}} \qquad (170)$$

Комбинируя предложение 4 и леммы 14—16, мы видим, что в условиях (9), (10) условия (160), (164) дополняют друг друга, поэтому вместо них достаточно полагать выполненным условие

$$c\lambda^m \Lambda^{p-1-m}(t) \leqslant \nu(t) \leqslant \frac{o(1)}{|\ln\lambda|^{m+1-p}} \quad \text{при } t \to 0, \qquad (171)$$

здесь правое неравенство означает нарушение основного условия (T).

Таким образом, из предложения 4, лемм 14—16 и замечания 5 вытекает справедливость необходимой части утверждения теоремы 2.

12°. **Окончание доказательства теоремы 1. Оценка индекса корректности.** Покажем, что дополнительное условие (39), использованное при доказательстве необходимой части теоремы 1 можно ослабить.

Полагая в определении (137) формы

$$r_k = \begin{cases} -1, & k = 1, 2, \cdots, \left[\dfrac{2m-1}{4}\right], m \\ 1, & k = \left[\dfrac{2m-1}{4}\right]+1, \cdots, m-2, m-1, \end{cases} \tag{137'}$$

имеем

Предложение 5. *В условиях* (5), (6), (8), (12′), (13), (34), (38), (152), (168) *для решений задачи Коши* $Pu = 0$ *при* $t > t_6$ *с начальными условиями* (149) *справедлива оценка* (153).

Это предложение доказывается аналогично предложению 4, причем в силу оценки (114) леммы 10, условие (17′) предложения 4 заменяем условием (12), а (52′) вытекает из (168).

Аналогично лемме 16 доказывается

Лемма 17. *В условиях* (5), (6), (8), (12′), (13), (34), (164), (168) *для решений задачи Коши* (169) *справедлива оценка* (153).

Необходимость утверждения теоремы 1 вытекает из предложений 2, 5, лемм 3, 4, 14, 15, 17 и замечаний 5, 7.

Приведем, далее, оценки сверху для индекса корректности.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 (достаточность) и (20′) для индекса корректности справедливы следующие оценки:

a). если $p = m$, то

$$\hat{N} \leqslant \hat{N}_1 = (m-1)\max\left\{\frac{(m+1-\delta_{m2})\, c_0 c_5}{2(m-1)} + mc_4,\ \frac{H_1\,(mL_1-1)}{1-H_1}\right\}. \tag{172}$$

b). если же $2 \leqslant p < m$, то

$$\hat{N} \leqslant \hat{N}_1 = m(m-1)\, c_4 + \frac{(m+1-\delta_{m2})}{2F_1^{\frac{m-p}{p-1}}}\, c_0 c_5, \tag{173}$$

где постоянная F_1 определяется как единственный положительный корень алгебраического уравнения

$$2mc_4 + \frac{(m+1-\delta_{m2})\, c_0 c_5}{(m-1)\, F_1^{\frac{m-p}{p-1}}} =$$

$$= \frac{(m-1)H_1\left[2(mL_1-1+p-m)+c_0 F_1^{\frac{(m+1-p)(m-1)}{m(p-1)}}\cdot m\right]}{[p-1-H_1(m-1)]\, m}. \tag{174}$$

Следствие 2. В условиях теоремы 2 (достаточность) и (20′) для индекса корректности справедлива следующая оценка:

$$\hat{N} < \hat{N}_2 = \frac{1}{2}\max\left\{c_0,\ \frac{c_2(p-1)}{a[(m-1)l_1+p-m]},\ \frac{(1+c_2)\,mF_{10}^{\frac{1}{m}}}{a} + \right.$$

$$\left. + \frac{H_1(m-1)^2}{m[p-1-H_1(m-1)]}\left[2(mL_1-1+p-m)+mc_6F_{10}^{\frac{(m-1)(m+1-p)}{m(p-1)}}\right]\right\}, \tag{175}$$

здесь

$$F_{10}=\left(\frac{c_2}{\varepsilon}\right)^{\frac{p-1}{m+1-p}},\quad \varepsilon=\frac{1}{2}\inf_{|\xi|=1,\,t,\,k}\{|\eta_k|\},\quad 0<a<\frac{p-1-H_1(m-1)}{1-H_1},$$

$\{\eta_k\}_1^{m-1}$ — корни алгебраического уравнения порядка $m-1$ относитель о η_i:

$$|\mathrm{disc}\,|\equiv\prod_{p<j}|z_p-z_j|^2=0, \tag{176}$$

а z_k — корни уравнения (23′).

Пример 1. Если $\lambda(t)=t^Q$, $\nu=t^\varepsilon$, $Q\geqslant 1$, $a>0$;

$$\lambda=\exp(-t^{-n}),\quad \nu=\exp(-t^{-m}),\quad n>m>0;\quad \lambda=\exp\left\{-e^{\frac{1}{t}}\right\},\ \text{и т. д.},$$

то условия теоремы 1, 2 выполнены.

Пример 2. Вычислим индекс корректности для уравнения второго порядка. Пусть $m=p=2$, $j=1$, $\lambda_1=-\lambda_2=\xi\lambda(t)$, $\lambda=t^Q$

$$b=\sigma t^{Q-1}\xi,\ \sigma,\ \xi\in R,\ \Lambda=t^{Q+1}/(Q+1),$$

тогда

$$c_0=c_1=|\sigma|/(Q+1),\quad c_4=\frac{Q}{2(Q+1)},\quad c_5=\frac{1}{2},$$

$$H_1=\frac{1}{Q+1},\quad l_1=L_1=\frac{Q}{Q+1},$$

поэтому из (172) имеем

$$\hat{N}\leqslant\hat{N}_1=\max\left\{\frac{|\sigma|+2Q}{2(Q+1)},\ \frac{Q-1}{Q}\right\}. \tag{177}$$

Точное значение индекса корректности в этом частном случае (см. [7]) равно

$$\hat{N}=\max\left\{\frac{|\sigma|-Q}{2(Q+1)},\ 0\right\}, \tag{178}$$

и при больших $|\sigma|$ имеем $\hat{N}_1\approx\hat{N}$.

Отметим, что оценки индекса корректности, приведенные в работах [2], [3] при больших $|\sigma|$ грубее точного значения индекса в два раза.

Пример 3. Пусть $m=p=2$, $j=1$, тогда из (175) (так как $F_{10}=4c_2c_5^2$)

$$\hat{N}_2=\max\left\{\frac{c_9}{2},\ \frac{c_2}{2l_1},\ 2c_5(1+c_3)\sqrt{c_3}+\right.$$

$$\left.+\frac{H_1}{1-H_1}\left(L_1-\frac{1}{2}+c_5c_6\sqrt{c_2}\right)\right\}. \tag{179}$$

Если, в частности

$$\lambda_1=-\lambda_2=\xi\lambda(t),\ \lambda=t^Q,\ b=i\sigma t^{Q-1}\xi\ln t,\ \sigma,\ \xi\in R,$$

то

$$c_2=c_3=\frac{|\sigma|}{Q(Q+1)},\ c_6=\frac{Q}{Q+1},\ c_9=\frac{5Q}{2(Q+1)}$$

и из (180) получаем

$$\hat{N}_2=\max\left\{\frac{5Q}{4(Q+1)},\ \frac{|\sigma|}{2Q^2},\ \left(1+\frac{|\sigma|}{Q(Q+1)}+\frac{Q}{2(Q+1)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{|\sigma|}{Q(Q+1)}}+\frac{Q-1}{2Q(Q+1)}\right\}. \tag{181}$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.VII.1980

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու խնդրի կոռեկտության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները միայն ժամանակային փոփոխականից կախված գործակիցներով թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար *(ամփոփում)*

Ապացուցվում է, որ Կոշու խնդրի կոռեկտության հայտնի բավարար պայմանները նաև անհրաժեշտ են վերնագրում նշված բարձր կարգի հավասարումների համար, որոնց գործակիցները կախված չեն տարածական փոփոխականներից։

G. R. HOVHANNISIAN. *Necessary and sufficient conditions of the correctness of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations with coefficients depending only on time variable* (summary)

The necessary and sufficient conditions of the well-posedness of the Cauchy problem for high order hyperbolic equations with coefficients depended only on time variable is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. M. Protter*. The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line, Canad. J. Math., 6:4, 1954, 542—553.
2. *А. Б. Нерсесян*. О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, 3, № 2, 1968, 79—100.
3. *O. A. Oleinik*. On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Commun. Pure & Appl. Math., 23, 1970, 569—589.
4. *В. Я. Иврий, В. М. Петков*. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 29, № 5, 1974, 3—70.
5. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян, А. О. Оганесян*. Об одном методе исследования за-

дачи Коши для слабо гиперболических уравнений, Труды всесоюз. конф. по уравн. в частн. производных, М., 1978, 391—395.

6. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян*. О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, 9, № 2, 1974, 149—165.

7. *S. Alinhac*. Parametrix et propagation des singularites pour un problem de Cauchy a multiplicite variable, Soc. Math. France Asterisque, 34—35, 1976, 3—26.

8. *Ya. Ohga*. Le probleme de Cauchy a caracteristiques multiples, Ann. Scu. norm super. Pisa. 4:4, 1977, 757—805.

9. *S. Tarama*. Un exemple dans le probleme de Cauchy pour les equations faible ment hyperboliques, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 15:2, 1979, 455—468.

10. *К. А. Ягджян*. О корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, XV, № 6, 1980, 475—487.

11. *Г. Р. Оганесян*. Смешанные задачи для слабо гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными, Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, 14, № 5, 1979, 369—390.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS