# ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

## ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

## МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

## ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ (գլխավոր խմբագրի տեղակալ), Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Մ. Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ (պատ. քարտուղար), Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ, Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

*Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝*

*1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։*

*Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։*

*2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։*

*Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։*

*3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։*

*Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։*

*4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։*

*5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։*

*Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։*

*6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։*

*7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։*

*8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։*

*9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։*

*10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։*

*11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։*

*Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։*

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках


## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН (зам. главного редактор), Р. В. АМБАРЦУМЯН, Н. У. АРАКЕЛЯН, И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ, С. Н. МЕРГЕЛЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН, М. А. ОГАНЕСЯН (отв. секретарь), А. А. ТАЛАЛЯН, Р. А. ШАХБАГЯН (зам. главного редактора)


## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих привил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный эист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статьи отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.


Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

1981 Т.16 №3

ԳԻՆԸ 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN (associate editor), R. V. AMBARTZUMIAN, N. H. ARAKELIAN, M. A. HOVHANESSIAN (secretary), S. N. MERGELIAN, A. B. NERSESIAN, A. A. TALALIAN, R. L. SHAKHBAGIAN (associate editor), I. D. ZASLAVSKII

## TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 3, 1981 Математика

Ф. А. ШАМОЯН

# ЗАМКНУТЫЕ ИДЕАЛЫ В АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ГЛАДКИХ ВПЛОТЬ ДО ГРАНИЦЫ

## Введение

1°. Пусть $D$ — открытый единичный круг на комплексной плоскости, $\Gamma$ — его граница. Обозначим через $A$ множество всех функций $f$, непрерывных в $D \cup \Gamma$ и регулярных в $D$. Символом $H^p$ обозначим пространство Харди в круге.

Положим еще:

а) $\lambda_\omega^{(n)} = \{f : f^{(n)} \in A,\ \omega(f^{(n)}, \delta) = o(\omega(\delta)),\ \delta \to 0\}$,

где $\omega(f^{(n)}, \delta)$ — модуль непрерывности $f^{(n)}$ в $\bar{D}$, $\omega(\delta)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\omega(0) = 0$,

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta)),\ (\delta \to 0), \qquad (*)$$

$$\|f\|_{\lambda_\omega^{(n)}} = \|f\|_\infty + \sup_{z_1, z_2 \in \bar{D}} \left\{ \frac{|f^{(n)}(z_1) - f^{(n)}(z_2)|}{\omega(|z_1 - z_2|)} \right\},$$

б) $H_{n+1}^p = \{f : f^{(n+1)} \in H^p,\ \|f\|_{H_{n+1}^p} = \max_{0 \le k \le n+1} \|f^{(k)}\|_{H^p}\},\ 1 < p < +\infty.$

Легко видеть, что указанные пространства являются банаховыми алгебрами относительно поточечного умножения и сложения. Всюду в дальнейшем $X$ будет обозначать одну из этих алгебр, причем $\omega$ удовлетворяет условию (*).

Для каждого $f \in X$ будем обозначать через $G_f$, $F_f$ соответственно внутреннюю и внешнюю части $f$ так, что $f = G_f F_f$, в свою очередь, $G_f = B_f S_f$, где $B_f$ — произведение Бляшке, $S_f$ — сингулярная внутренняя функция (см. [1]). Множество нулей функции $f$ в открытом круге обозначим через $Z(f)$, через $\mu_f$ обозначим неотрицательную меру, определяющую $S_f$, supp $\mu_f$ — замкнутое множество на $\Gamma$, на котором сосредоточена мера $\mu_f$. Для любого $f \in X$ будем обозначать $E_m(f)$ множество нулей функции $f$ на $\Gamma$ кратности выше $m$.

Определение. Пусть $G = BS$ — некоторая внутренняя функция, $Z$ — множество нулей произведения Бляшке, $\mu$ — сингулярная мера, определяющая $S$. Пусть $E_0, E_1, \cdots, E_n$ — замкнутые множества, удовлетворяющие условиям

$$E_0 \supset E_1 \supset \cdots \supset E_n \supset (\operatorname{supp} \mu \cup \bar{Z} \cap \Gamma),$$

$E_0/E_n$ — изолированное множество. Будем обозначать через $I(G, E_0, \cdots, E_n)$ множество элементов $f$ из $X$, обладающих свойствами: $G$ делит $G_f$ и $E_m(f) \supset E_m$, $m = 0, 1, \cdots, n$. Заметим, что $I$ — замкнутый идеал в $X$, из основного результата статьи следует, что идеалами $I(G, E_0, E_1, \cdots, E_n)$ исчерпываются все замкнутые идеалы $X$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $I \neq \{0\}$ — замкнутый идеал в $X$, $G_I$ — наибольший общий делитель внутренних частей функций из $I$*

$$E_m(I) = \bigcap_{f \in I} E_m(f), \quad m = 0, 1, \cdots, n. \tag{0.1}$$

*Тогда*

$$I = I(G_I, E_0(I), \cdots, E_n(I)).$$

Замечание 1. Методика, применяемая при доказательстве теоремы 1, восходит к работам А. Бёрлинга [2] и У. Рудина [3], применялась в статьях [4] — [7]. Суть этой методики состоит в следующем. Пусть $I$ — идеал в $X$ и $F$ — функционал, ортогональный $I$, тогда преобразования Коши функционала $F$:

$$\hat{F}(z) = F(e_z), \quad e_z(\zeta) = \frac{\zeta}{\zeta - z}, \quad |z| > 1$$

аналитично вне $Z(I) \cup E_0(I)$ и скорость роста $|\hat{F}|$ при приближении к $Z(I) \cup E_0(I)$ можно оценить исходя от пространства $X^*$.

Поэтому идеалу $I$ принадлежат все функции из $X$, быстро убывающие вблизи множества $Z(I) \cup E_0(I)$, так как

$$F(f) = \lim_{r \to 1+0} \int_{\Gamma} f(\zeta) \cdot \hat{F}(r\zeta) \, |d\zeta|.$$

Остается доказать, что подобные функции плотны в $I$.

Из результатов работы [7] непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть $I$, $Z(I) = \varnothing$ — замкнутый идеал в $X$, $F$ — ортогональный идеалу $I$ линейный функционал. Тогда функция $\hat{F}(z) = F(e_z)$, $(|z| > 1)$ аналитична вне $E_0(I)$ и при $|z| \geqslant 1$ допускает следующую оценку:*

$$|\hat{F}(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{[\rho(z, E_0(I))]^{2(n+1)}},$$

*где $\rho(z, E_0(I))$ — расстояние от точки $z$ до множества $E_0(I)$.*

Таким образом, используя рассуждения, приведенные в работе [7], для доказательства теоремы 1 достаточно установить такую аппроксимационную теорему.

Теорема 3. *Пусть $f \in X$, тогда для любого фиксированного $N > n$ существует последовательность $\varphi_k \in X$ со следующими свойствами:*

а) $|\varphi_k^{(l)}(z)| \leqslant C_k^*\ [\rho(z, E_n(f))]^{2(N-l)}$, $z \in \overline{D}$, $l = 0, 1, \cdots, n$,

б) $\lim\limits_{k \to +\infty} \|\varphi_k - f\|_X = 0$.

Замечание 2. Считаю необходимым отметить, что результаты этой статьи при $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ были анонсированы в [8]. Основная теорема указанной работы была сформулирована в 1972 г. в работе [7]. В дальнейшем частные случаи этой работы, когда $X = \lambda_\omega = \lambda_\omega^{(0)}$, $0 < \alpha < 1$, были значительно позже переоткрыты в работах [9], [10].

Замечание 3. Замкнутые идеалы алгебр $A^{(n)}$ и $H_1^2$ описаны в работах [5], [6].

Отметим, что хотя мы и используем аналог одной леммы (см. лемму 1.4) из [5], однако у нас аппроксимирующие функции строятся совершенно по другому, что позволяет дать более простое доказательство теоремы 3 в случае $H_{n+1}^p$, чем это сделано в [6] для случая $H_1^2$ использованием гильбертовости $H_1^2$. Кроме того, при $n = 0$ доказательство теоремы 3 сильно упрощается и нет надобности использования функции $H_\delta$ (см. лемму 1.3), а вместо этого достаточно заметить, что $f^p \to f$ при $p \to 1+0$ в пространстве $X$. Более того, оценки $\lambda_\omega^{(n)}$ приходится получать равномерно внутри круга, в то время как в случае $A^{(n)}$ достаточно это сделать на окружности. В § 2 мы будем использовать следующие теоремы Харди-Литтльвуда:

Теорема А. (см. [11], стр. 15).

*Пусть $f$—$2\pi$-периодическая функция, $f \in L^p$*

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \left( \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(t)|\, dt \right), \tag{0.2}$$

*тогда*

$$\|M(f)\|_{L^p} \leqslant A_p \|f\|_{L^p},\ 1 < p < +\infty,$$

*$A_p$—некоторое число, зависящее только от $p$.*

Теорема Б. (см. [11], стр. 77).

*Пусть $f \in H^p$, тогда*

$$\sup_{0<r<1} |f(re^{ix})| \leqslant \text{const}\ M(f)(x),$$

*где $M$ определяется из (0.2) по функции $f(e^{ix})$.*

## § 1. Доказательство теоремы 3 в случае алгебры $\lambda_\omega^{(n)}$

Пусть $E$—замкнутое множество на единичной окружности $\Gamma$, $\{(e^{i\alpha_k}, e^{i\beta_k})\}_1^\infty$—последовательность дополнительных интервалов множества $E$.

---

* Здесь, как и в дальнейшем, $C_{k,\alpha}$ будет обозначать положительное число, зависящее только от $k$, $\alpha$, значение которого не существенно.

Определение. Скажем, что $E$ — карлесоновское множество, если

1) $$\sum_k l_k \log \frac{1}{l_k} < +\infty$$

и $$\sigma(E) = 0, \text{ где } l_k = \beta_k - \alpha_k,\ k = 1, 2, \cdots,$$

$\sigma$ — линейная мера Лебега на окружности $\Gamma$.

Пусть $\delta > 0$ и $N$ — положительное число. Определим функцию $h_\delta$ следующим образом:

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \log\left(1 + \dfrac{\delta}{t - \alpha_k}\right) + \log\left(1 + \dfrac{\delta}{\beta_k - t}\right), & \alpha_k < t < \beta_k,\ k = 1, \cdots. \\ +\infty \text{ в остальных точках.} \end{cases}$$

Следующая лемма доказана в [7].

Лемма 1.1. Если $E$ — карлесоновское множество, то $h_\delta \in L^1$, а внешняя функция

$$G_\delta(z) = \exp\left\{-\frac{N}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_\delta(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt\right\}$$

удовлетворяет условиям

1. $G_\delta^{(N)}$ принадлежат классу $A$, при всех $\delta > 0$ и $\|G_\delta\|_\infty \leqslant 1$,

2. $|G_\delta^{(k)}(z)| \leqslant C_\delta\,[\rho(z, E)]^{2(N-k)}$, $k = 0, 1, \cdots, N$,

3. $\lim\limits_{\delta\to 0} G_\delta(z) = 1$, $\lim\limits_{\delta\to 0} G_\delta^{(k)}(z) = 0$, $k = 0, \cdots N$, равномерно вне множества $E$.

В дальнейшем при фиксированном $f \in X$ положим $E = E_n(f)$. Введем в $\lambda_\omega^{(n)}$ также норму

$$\|f\|^*_{\lambda_\omega^{(n)}} = \sup_{z\in D}\left\{\frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)}\,|f^{(n+1)}(z)|\right\}.$$

Лемма 1.2. *Пусть $f \in A^{(n)}$ и $E_n(f)$ — непустое множество, тогда существуют положительные числа $C_1$ и $C_2$ такие, что*

$$C_1\|f\|_{\lambda_\omega^{(n)}} \leqslant \|f\|^*_{\lambda_\omega^{(n)}} \leqslant C_2\|f\|_{\lambda_\omega^{(n)}}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Очевидно, не ограничивая общности можно предполагать, что $n = 0$. Сначала докажем второе неравенство в (1.1). Имеем

$$\frac{f'(re^{i\varphi})\,e^{i\varphi}}{ir} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\,\frac{(1-r^2)\,r\sin(\theta-\varphi)}{[1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2]^2}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(\varphi+t)})\,\frac{r(1-r^2)\sin t}{[1-2r\cos t+r^2]^2}\,dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(e^{i(\varphi+t)})-f(e^{i\varphi})]\frac{r\sin t\,(1-r^2)}{[1-2r\cos t+r^2]^2}\,dt.$$

Используя выражение $\|f\|_{\lambda(n)}^{\circ}$, получаем

$$|f'(re^{i\varphi})|\leqslant\frac{\|f\|_{\lambda(0)}^{\circ}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)\,|\sin t|\,\omega(f,t)}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\text{const}\,\|f\|_{\lambda(0)}^{\circ}\left(\int_0^{\pi}\frac{(1-r^2)\,\omega(f,t)\cdot t\,dt}{(1-r)^2+t^2}\right)=\text{const}\,\|f\|_{\lambda(0)}^{\circ}\,(I_1+I_2),$$

где

$$I_1=\int_0^{1-r}(\quad)\,dt,\quad I_2=\int_{1-r}^{\pi}(\quad)\,dt.$$

Имеем

$$I_1\leqslant\frac{\omega(1-r)}{(1-r)^4}(1-r)^3=\frac{\omega(1-r)}{1-r)}. \tag{1.2}$$

Теперь оценим $I_2$:

$$I_2\leqslant\sum_{k=0}^{N}\int_{2^k(1-r)}^{2^{k+1}(1-r)}\frac{(1-r^2)\,\omega(f,t)}{t^3}\,dt,$$

где $N$ — такое положительное число, что $2^N(1-r)\leqslant\pi<2^{N+1}(1-r)$.

Используя неравенство

$$\omega(f,t)\leqslant\omega(f,2^{k+1}(1-r))\leqslant 2^{k+1}\,\omega(f,1-r)$$

для

$$t\in[2^k(1-r),\,2^{k+1}(1-r)]$$

получаем

$$\int_{2^k(1-r)}^{2^{k+1}(1-r)}\frac{\omega(f,t)}{t^3}\,dt\leqslant\frac{2^{k+1}\,\omega(1-r)}{2^{2k}(1-r)^2}=\frac{2\omega(1-r)}{2^k(1-r)^2}.$$

Значит

$$I_2\leqslant 2\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}\right)\frac{\omega(1-r)}{1-r}=\frac{4\omega(1-r)}{1-r}. \tag{1.3}$$

Объединяя оценки (1.2), (1.3), получаем

$$\|f\|_{\lambda(0)}^{\circ}\leqslant\text{const}\,\|f\|_{\lambda(0)}^{\circ}.$$

Первое неравенство в (1.1) следует из следующей теоремы Б. Я. Геронимуса.

Теорема (см. [12]). Пусть $f$ голоморфна в $D$ и удовлетворяет условию

$$|f(z)| < \psi(1-|z|),\ z \in D,\ \text{где} \int_0^1 \psi(x)\,dx < +\infty,$$

$\psi(x)$ возрастает вместе с $\frac{1}{x}$, тогда первообразная

$$F(z) = \int_a^z f(t)\,dt,\ |a| \leqslant 1$$

имеет в $\overline{D}$ модуль непрерывности с оценкой

$$\omega(F, \delta) \leqslant \cos nt \int_0^\delta \psi(t)\,dt. \tag{1.4}$$

Действительно, чтобы получить левое неравенство в (1.1), положим $\psi(x) = \frac{\omega(x)}{x}$, тогда из (1.4)

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqslant C\|f\|^*_{\lambda(0)} \int_0^{|\zeta_1-\zeta_2|} \frac{\omega(t)}{t}\,dt \leqslant C_1 \|f\|^*_{\lambda(0)}\, \omega(|\zeta_1-\zeta_2|)$$

по условию (*). Отсюда, учитывая, что $f(\alpha) = 0$, $\alpha \in E_0(f)$, получаем (1.1). ●

Пусть $f \in X$, $\|f\|_X \leqslant 1$, $z \in \overline{D}$ а $l_z$ — дополнительный интервал множества $E = E_n(f)$ на $\Gamma$, которому принадлежит $\arg z$. Положим

$$a(z) = \int_{\Gamma \setminus l_z} \frac{\log \frac{1}{|f(t)|}}{|t-z|^2}\,|dt|.$$

Лемма 1.3. *Пусть $H_\delta(z) = [G_\delta(z)]^\delta$, тогда справедлива оценка*

$$|H_\delta^{(m)}(z)| \leqslant C \sum_{k=1}^{m} \frac{\delta^k (\rho(z, E))^\delta a^k(z)}{[\rho(z, E)]^{m-k}},\ z \in \overline{D},\ m = 1, \cdots, n+1, \tag{1.5}$$

*где $G_\delta$ — функция, построенная в лемме 1.1, $\rho$ — расстояние от точки $z$ до множества $E$.*

Доказательство. Сначала докажем, что

$$|H_\delta(z)| \leqslant 2\pi\,(\rho(z, E))^\delta,\ z \in \overline{D}. \tag{1.6}$$

Пусть $z$ — фиксированная точка из $\overline{D}$, $\rho(z, E) = |z - e^{i\alpha}|$, $e^{i\alpha} \in E$. Не ограничивая общности можно предполагать, что точка $e^{i\alpha}$ — концевая точка некоторого дополнительного интервала, поскольку множество таких точек всюду плотно в $E$. Положим

$$\psi(\zeta)=\frac{H_\delta(\zeta)}{(\zeta-e^{i\alpha})^\delta}.$$

Тогда легко видеть, что

$$|\psi(e^{i\varphi})|=\left(\frac{\varphi-\alpha_k}{\varphi-\alpha_k+\delta}\right)^{N\delta}\left(\frac{\beta_k-\varphi}{\beta_k-\varphi+\delta}\right)^{N\delta}\frac{1}{|e^{i\varphi}-e^{i\alpha}|^\delta}$$

при $\alpha_k<\varphi<\beta_k$, $(e^{i\alpha_k}, e^{i\beta_k})$ — некоторый дополнительный интервал множества $E$. Следовательно

$$|\psi(e^{i\varphi})|\leqslant\frac{1}{\delta^\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right)^\delta<\frac{\pi e}{2}.$$

Так как $\psi$ принадлежит известному классу В. И. Смирнова (см. [13]) то по принципу максимума такая же оценка справедлива в $D$:

$$|\psi(\zeta)|\leqslant\frac{\pi e}{2},\ \zeta\in\overline{D},$$

в частности при $\zeta=z$. Оценка (1.6) доказана. Оценку (1.5) докажем по индукции. Пусть $m=1$. Сначала отметим, что если $f\in\lambda_\omega^{(n)}$, $n\geqslant 0$ и $\omega$ удовлетворяет условию (*), то $f\in\lambda_\alpha$ при некотором $\alpha>0$ (см. [14]). Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma\setminus I_z}\frac{h_\delta(t)}{|t-z|^2}\,|dt|\leqslant Ca(z). \tag{1.7}$$

В то же время

$$a(z)=\int\limits_{\Gamma\setminus I_z}\frac{\lg\frac{1}{|f(t)|}|dt|}{|t-z|^2}\geqslant C_1\int\limits_{\Gamma\setminus I_z}\frac{\lg\frac{1}{\rho(t,E)}|dt|}{|t-z|^2}\geqslant C_2\frac{\lg\frac{1}{\rho(z,E)}}{\rho(z,E)}. \tag{1.8}$$

Далее

$$|H_\delta'(z)|=2\delta\,|H_\delta(z)|\left|\int\limits_\Gamma\frac{h_\delta(t)\,dt}{(t-z)^2}\right|=$$

$$=2\delta\,|H_\delta(z)|\left|\int\limits_{\Gamma\setminus\widetilde{I}_z}\frac{N h_\delta(t)\,dt}{(t-z)^2}+\int\limits_{\widetilde{I}_z}\frac{h_\delta(t)\,dt}{(t-z)^2}\right|,$$

где

$$\widetilde{I}_z=\left\{\zeta:\frac{\zeta}{|\zeta|}\in I_z,\ |\zeta|=1+\rho\left(\frac{\zeta}{|\zeta|},E\right)\right\}. \tag{1.9}$$

Поэтому, учитывая оценку

$$\int\limits_{\widetilde{I}_z}\frac{|h_\delta(t)|}{|t-z|^2}\,|dt|\leqslant C\frac{\lg\frac{1}{\rho(z,E)}}{\rho(z,E)}$$ и (1.8), получаем

$|H_\delta'(z)|<C\delta\,a(z)$, т. е. оценка (1.5) при $m=1$ доказана.

Теперь предположим, что оценка (1.5) справедлива для $1 \leqslant k \leqslant \leqslant m-1$ и докажем ее справедливость для $m$.

Положим

$$W_\delta(z) = \frac{N}{\pi} \int_\Gamma h_\delta(t) \frac{t+z}{t-z} |dt|.$$

Тогда

$$H_\delta^{(m)}(z) = (\exp(\delta W_\delta(z)))^{(m)} = (\delta W_\delta(z) H_\delta(z))^{(m-1)}. \tag{1.9}$$

Используя формулу Лейбница, получим следующее неравенство:

$$|H_\delta^{(m)}(z)| \leqslant C\delta \sum_{k=0}^{m-1} |W_\delta^{(m-k)}(z)| \, |H_\delta^{(k)}(z)|.$$

Поскольку мы предполагали справедливость оценки (1.5) при $1 \leqslant k \leqslant \leqslant m-1$, то

$$|H_\delta^{(m)}(z)| \leqslant C\delta \sum_{k=1}^{m-1} \Big[ |W_\delta^{(m-k)}(z)| \Big( \sum_{l=1}^{k} \frac{\delta^l [\rho(z, E)]^\delta a^l(z)}{[\rho(z, E)]^{k-l}} \Big) + \\ + \delta |W_\delta^{(m)}(z)| \, |H_\delta(z)|.$$

Но

$$|W_\delta^{(m-k)}(z)| \leqslant C \Big( \int_{\Gamma \setminus I_z} \frac{|h_\delta(t)| |dt|}{|t-z|^{n-k+1}} + \int_{I_z} (\quad) \Big) \leqslant C_1 \frac{a(z)}{[\rho(z, E)^{m-k-1}}.$$

В итоге получаем

$$|H_\delta^{(m)}(z)| \leqslant C \Big\{ \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{k} \frac{\delta^{l+1} [\rho(z, E)]^\delta a^{l+1}(z)}{[\rho(z, E)]^{m-l-1}} + \\ + \frac{\delta a(z) \rho^\delta(z)}{[\rho(z, E)]^{m-1}} \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{m} \Big( \frac{\delta^k a^k(z) \rho^\delta(z)}{[\rho(z, E)]^{m-k}} \Big) \bullet$$

Лемма 1.4. *Пусть* $D_E = \Big\{ z \in D: 2(1-|z|) < \rho\Big(\frac{z}{|z|}, E\Big) \Big\}$ *и* $\|f\|_\infty \leqslant 1$, $f \in \lambda_\omega^{(n)}$, $E = E_n(f)$, *тогда равномерно относительно* $z \in D_E$ *имеет место оценка*

$$|f^{(m)}(z)| = o\left( \frac{\log \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} \right)^{n-m} \omega\left( \frac{\log \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} \right), \quad m = 0, 1, \cdots, n, \tag{1.10}$$

*при* $\rho(z, E) \to 0$.

Доказательство. Пусть $f = G_f F_f$, где $G_f$—внутренняя часть, а $F_f$ — внешняя часть функции $f$. Используя формулу Лейбница и тот факт, что $|G_f^{(m)}(z| \leqslant \frac{m!}{(1-|z|)^m}$, легко установить неравенство

$$|f^{(m)}(z)| \leqslant C \frac{|F_f(z)|}{(1-|z|)^{2n}}, \quad m=1, \cdots, n. \tag{1.11}$$

Выберем $0 < r < 1$, тогда

$$f^{(m)}(z) = f^{(m)}(rz) + f^{(m+1)}(rz) + \cdots + \frac{1}{(n-m)!} \int_{rz}^{z} (z-t)^{n-m} f^{(n+1)}(t)\, dt \tag{1.12}$$

Кроме того, учитывая оценку (1.11) и лемму 1.2, приходим к неравенству

$$|f^{(m)}(z)| \leqslant C \left( \frac{|F_f(rz)|}{(1-r)^{2n}} + \frac{1}{(n-m)!} \int_r^1 (1-t)^{n-m} \frac{\omega(f, 1-t|z|)}{1-t|z|}\, dt \right).$$

Но поскольку

$$\frac{\omega(f, 1-t|z|)}{(1-t|z|)} \leqslant \frac{\omega(f, 1-t)}{1-t} \leqslant \frac{\omega(1-t)^*}{1-t}, \text{ при } |z| \leqslant 1,$$

то

$$|f^{(m)}(z)| \leqslant C \left( \frac{|F_f(rz)|}{(1-r)^{2n}} + \int_r^1 (1-t)^{n-m-1} \omega(1-t)\, dt \right). \tag{1.13}$$

Так как $\omega$ удовлетворяет условию (*), то

$$\int_r^1 (1-t)^{n-m-1} \omega(1-t)\, dt \leqslant c\, (1-r)^{n-m} \omega(1-r).$$

Отсюда получаем

$$|f^{(m)}(z)| \leqslant c \left( \frac{|F_f(rz)|}{(1-r)^{2n}} + (1-r)^{n-m} \omega(1-r) \right). \tag{1.14}$$

Пусть $N$ — положительное число, заметим, что если

$$\frac{\lg \dfrac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} > \frac{1}{N} \rho(z, E),$$

то оценка (1.10) — простое следствие того, что $f \in \lambda_\omega^{(n)}$ и $E = E_n(f)$. Поэтому будем предполагать, что $\dfrac{\lg \dfrac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} < \dfrac{1}{N}, \rho(z, E)$, положим в неравенстве (1.14)

---

* Отметим, что на самом деле имеет место более точная оценка

$$o\left(\frac{\omega(1-t)}{1-t}\right) \text{ при } t \to 1-0$$

$$1-r=\frac{N\lg\dfrac{1}{\rho(z,E)}}{a(z)}<\rho(z,E)<1, \tag{1.15}$$

и оценим

$$|F_f(rz)|=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\lg\frac{1}{|f(t)|}\frac{1-r^2|z|^2}{|t-rz|^2}|dt|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_z}\lg\frac{1}{|f(t)|}\frac{(1-r)(|t-z|^2(1-r^2|z|^2))}{|t-z|^2(|t-rz|^2(1-r)}\right\}.$$

Докажем, что

$$\inf_{e^{it}\in\Gamma\setminus\Gamma_z}\left\{\frac{|e^{it}-z|^2(1-r^2|z|^2}{|e^{it}-rz|^2(1-r)}\right\}>\frac{1}{4}. \tag{1.16}$$

Выражение в скобках обозначим через $J$. Имеем

$$J(t,r,z)=\frac{(1-r^2|z|^2)\left((1-|z|)^2+4|z|\sin^2\dfrac{(t-\varphi)}{2}\right)}{\left((1-r|z|)^2+4r|z|\sin^2\dfrac{t-\varphi}{2}\right)(1-r)},$$

где $z=|z|e^{i\varphi}$.

Ясно, что

$$J(t,r,z)\geqslant\left(1+\frac{r(1-|z|)}{1-r}\right)\frac{\left(\dfrac{1-|z|}{1-r}\right)^2+4|z|\left(\dfrac{\sin\dfrac{(t-\varphi)}{2}}{1-r}\right)^2}{\left(1+\dfrac{r(1-|z|)}{1-r}\right)^2+4r|z|\left(\dfrac{\sin\dfrac{(t-\varphi)}{2}}{1-r}\right)^2}.$$

Положим

$$u=\frac{1-|z|}{1-r},\quad v=\frac{2\sqrt{|z|}\left|\sin\dfrac{t-\varphi}{2}\right|}{1-r}.$$

Тогда ввиду

$$(1-r)^2\leqslant|z-e^{it}|^2=((1-|z|)^2+|z||e^{i\varphi}-e^{it}|^2).$$

Значит $u^2+v^2>1$ и

$$J>\frac{1}{2}(1+u)\frac{u^2+v^2}{(1+u)^2+v^2}-\frac{(1+u)}{2}\frac{x}{1+2u+x},$$

где $x=u^2+v^2$. Теперь заметим, что функция $\psi(x)=\dfrac{x}{x+a}$, $a>0$ возрастает. Следовательно

$$J>\frac{(1+u)}{2}\frac{1}{2+2u}=\frac{1}{4}.$$

Оценка (1.16) доказана. Из (1.16) получаем

$$|F(rz)| \leqslant \exp\left\{-\frac{N}{4\pi}\lg\frac{1}{\rho(z, E)}\right\} = [\rho(z, E)]^{N/4\pi}.$$

Используя тот факт, что $N$ можно брать настолько большим, что выражение

$$\frac{[\rho(z, E)]^{N/4\pi}}{\left[\lg\frac{1}{\rho(z, E)}\right]^{2n}} \cdot a^{2n}(z) \text{ было меньше, чем } \left(\frac{\lg\frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)}\right)^{n-m} \omega\left(\frac{\lg\frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)}\right)$$

и учитывая сноску на стр. 181, получаем (1.10).●

Замечание. Лемма 4 для случая алгебры $A^{(n)}$, когда $z$ находится на $\Gamma$, доказана в работе [5]. Однако доказательство, приведенное здесь, показывает, что аналогичный результат верен равномерно в $D_l = \{\zeta \in D: \arg\zeta \in l\}$, $(\rho(z,E) < 1,)$ где $l$—дополнительный интервал множества $E$.

Лемма 1.5. *Пусть $f \in \lambda_\omega^{(n)}$ и $f_\delta = fH_\delta$, тогда имеет место*

$$\lim_{\delta \to 0} \|f_\delta - f\|_{\lambda_\omega^{(n)}} = 0. \tag{1.17}$$

Доказательство. Используя лемму 1.2, достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{z \in D} \left\{|f_\delta^{(n+1)}(z) - f^{(n+1)}(z)| \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)}\right\} = 0,$$

а для этого, учитывая формулу Лейбница и

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{z \in D} \left\{|f^{(n+1)}(z)(1 - H_\delta)(z)| \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)}\right\} = 0,$$

необходимо установить, что

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{z \in D} \left\{|f^{(n+1-m)}(z) H_\delta^{(m)}(z)| \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)}\right\} = 0, \quad m = 1, 2, \cdots, n+1. \tag{1.18}$$

Пусть $E = E_n(f)$ и

$$D_E = \left\{z \in D: 2(1-|z|) < \rho\left(\frac{z}{|z|}, E\right)\right\}. \tag{1.19}$$

Тогда

$$\sup_{z \in D} \{|f^{(n+1-m)}(z) H_\delta^{(m)}(z)|\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{z \in D_E} \{\quad\} + \sup_{z \in D \setminus D_E} \{\quad\} \overset{\text{def}}{=} I_1^\delta + I_2^\delta.$$

Сначала докажем, что

$$\lim_{\delta \to 0} I_2^\delta = 0.$$

С этой целью заметим, что при $z \in D|D_E$

$$\rho(z, E) \leqslant \rho\left(\frac{z}{|z|}, E\right) + (1-|z|) \leqslant 3(1-|z|). \tag{1.20}$$

Но поскольку $f \in \lambda_\omega^{(n)}$, то для любого положительного $\varepsilon$ можно найти $\eta > 0$ такое, что

$$|f^{(m)}(z)| < \varepsilon (\rho(z, E))^{n-m} \omega(\rho(z, E)), \quad m = 0, 1, \cdots, n$$

как только $\rho(z, E) < \eta$.

Из (1.20)

$$|f^{(n+1-m)}(z)| < 3^m \varepsilon (1-|z|)^{m-1} \omega(1-|z|).$$

Теперь, учитывая элементарную оценку

$$|H_\delta^{(m)}(z)| \leqslant \frac{m!}{(1-|z|)^m},$$

приходим к неравенству

$$\sup_{z \in D|D_E} \left\{ |f^{(n+1-m)}(z)| |H_\delta^{(m)}(z)| \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)} \right\} <$$

$$< 3m! \, \varepsilon + \sup_{\substack{D \in D|D_E \\ \rho(z, E) > \eta}} \{ \qquad \}.$$

Но по лемме 1.1 последнее выражение стремится к нулю, когда $\delta \to 0$. Поэтому существует $\delta_0' > 0$ такое, что $I_2^\delta < (3m! + 1)\varepsilon$, если $0 < \delta < \delta_0$.

Теперь оценим $I_1^\delta$. Здесь мы используем леммы 1.3 и 1.4.

По лемме 1.4 для $\varepsilon > 0$ существует $\eta_1 > 0$ такое, что

$$|f^{(m)}(z)| < \varepsilon \left( \frac{\lg \dfrac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} \right)^{n-m} \omega\left( \frac{\lg \dfrac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} \right)$$

при $z \in D_E$, $\rho(z, E) < \eta_1$.

Тогда

$$I_1^\delta \leqslant \sup_{\substack{z \in D_E \\ \rho(z, E) > \eta_1}} \{ \quad \} + \sup_{\substack{z \in D_E \\ \rho(z, E) < \eta_1}} \{ \quad \}. \tag{1,21}$$

По лемме 1.1 первое слагаемое будет меньше $\varepsilon$, если $0 < \delta < \delta_1$ Для оценки второго слагаемого достаточно предположить, что

$$\frac{\lg \dfrac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} > 1-|z|, \tag{1.22}$$

так как в противном случае нужно лишь повторить рассуждения, приведенные при выводе оценки $I_2^\delta$.

В случае (1.22) имеем при $z \in D_E$, $\rho(z, E) < \eta_1$,

$$\left\{|f^{(n+1-m)}(z)\, H_\delta^{(m)}(z)|\, \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)}\right\} < \varepsilon\, \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)}\, \frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)}\Bigg)^{n-m} \times$$

$$\times \omega\left(\frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)}\right) \cdot \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\delta^k [\rho(z, E)]^k a^k(z)}{[\rho(z, E)]^{m-k}}\right) <$$

$$< c\varepsilon\, \frac{(1-|z|)}{\omega(1-|z|)}\, \omega\left(\frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)}\right) \sum_{k=1}^{m} \delta^k [\rho(z, E)]^k \left(\lg \frac{1}{\rho(z, E)}\right)^k \frac{a(z)}{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}} <$$

$$< C_1 \varepsilon \left(\frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)}\, \frac{a(z)}{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}\, \omega\left(\frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)}\right)\right).$$

Теперь, учитывая (1.22) и тот факт, что функция $\frac{\omega(t)}{t}$ монотонно убывает, получаем $I_1^\delta < C_1\varepsilon$, как только $0 < \delta < \delta_1$ ●

Доказательство теоремы. Пусть $\gamma > 0$, $\delta > 0$, как и выше положим

$$f_\delta = fH_\delta,\ f_{\delta,\gamma} = f_\delta\, G_\gamma,$$

где $H_\delta$ определяется как в лемме 1.3, а функция $G_\gamma$ по лемме 1.1. Согласно вышедоказанным леммам 1.1 и 1.5, функция $f_{\delta,\gamma}$ при указанных $\gamma$ и $\delta$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3. Кроме того, по лемме 1.4

$$f_\delta^{(m)}(z) = o\left(\frac{1}{a(z)}\right) \omega\left(\frac{1}{a(z)}\right),\ \rho(z, E) \to 0. \qquad (1.23)$$
$$z \in D_E$$

В силу леммы 1.5 для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{\gamma \to 0} f_{\delta,\gamma} = f_\delta \qquad (1.24)$$

в пространстве $\lambda_\omega^{(n)}$, а доказательство (1.24) по существу повторяет доказательство леммы 1.5. Приведем его в общих чертах. Как и при доказательстве леммы 1.5, достаточно установить, что

$$\lim_{\gamma \to 0} \sup_{z \in D} \left\{|f_\delta^{(n+1-m)}(z)\, G_\gamma^{(m)}(z)|\, \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)}\right\} = 0,\ 1 \leqslant m \leqslant n+1. \qquad (1.25)$$

Аналогично, как и выше

$$\sup_{z \in D} \{\quad\} \leqslant \sup_{z \in D_E} \{\quad\} + \sup_{z \in D \setminus D_E} \{\quad\}. \qquad (1.26)$$

Оценка $\sup\limits_{z\in D|D_R}\{\quad\}$ точно такая же, как для соответствующего результата из леммы 1.5. Поэтому получим оценку для первого слагаемого в (1.26). Учитывая лемму 1.3, легко установить неравенство

$$|G_\gamma^{(m)}(z)|\leqslant C(a(z))^m,\ m=1,\cdots,n+1, \tag{1.27}$$

где $a(z)=\int\limits_{|\Gamma|_z}\lg\dfrac{1}{|f(t)|}\dfrac{}{|t-z|^2}|dt|$.

Пусть $\varepsilon>0$—положительное число, по (1.23) существует $\eta>0$ такое, что

$$|f_\delta^{(m)}(z)|<\varepsilon\left(\frac{1}{a(z)}\right)^{n-m}\omega\left(\frac{1}{a(z)}\right),\ m=0,\cdots,n, \tag{1.28}$$

как только $z\in D_E$, $\rho(z,E)<\eta$.

Положим

$$D_{E,\eta}=\{z\in D_E:\rho(z,E)<\eta\}.$$

Тогда

$$\sup_{z\in D_{E,\eta}}\left\{|f_\delta^{(n+1-m)}(z)\,G_\gamma^{(m)}(z)|\,\frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\substack{z\in D_{E,\eta}\\ \frac{1}{a(z)}>(1-|z|)}}\{\quad\}+\sup_{\substack{z\in D_{E,\eta}\\ \frac{1}{a(z)}<(1-|z|)}}\{\quad\}\overset{\text{def}}{=}I_1^\delta+I_2^\delta.$$

Теперь, используя (1.28), имеем

$$|f_\delta^{(n+1-m)}(z)|<\varepsilon(1-|z|)^{m-1}\omega(1-|z|)$$

при

$$\frac{1}{a(z)}<1-|z|,\ z\in D_{E,\eta}.$$

В то же время $|G_\gamma^{(m)}(z)|<\dfrac{m!}{(1-|z|)^m}$. Из этих оценок сразу следует, что

$$I_2^\delta<m!\,\varepsilon. \tag{1.29}$$

Аналогично легко заметить, что

$$I_1^\delta<\varepsilon\sup_{\substack{z\in D_{E,\eta}\\ \frac{1}{a(z)}>(1-|z|)}}\left\{\frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)}\,\omega\left(\frac{1}{a(z)}\right)a(z)\right\}.$$

Остается учесть, что функция $\dfrac{\omega(t)}{t}$ монотонно убывает при $t\in[0,1]$, поэтому

$$I_1^{\delta} < \varepsilon. \tag{1.30}$$

Но согласно лемме 1.1

$$\lim_{\gamma\to 0} \sup_{z\in D/D_{E,\eta}} \left\{ \frac{1-|z|)}{\omega(1-|z|)} |f_{\delta}^{(n+1-m)}(z)\ G_{\gamma}^{(m)}(z)| \right\} = 0.$$

Следовательно, из (1.29) и (1.30) получаем утверждение теоремы. ●

## § 2. Доказательство теоремы 3 в случае алгебры $H^p_{n+1}$

1°. Пусть $f \in H^p_{n+1}$, обозначим через $M(f^{(n+1)})(e^{i\varphi})$ максимальную функцию Харди-Литтльвуда от $f^{(n+1)}(e^{i\varphi})$ (см. (0.2)).

Лемма 2.1. *Пусть $f \in H^p_{n+1}$ и $l_\varphi = (e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ — дополнительный интервал множества $E = E_n(f)$ на $\Gamma$, которому принадлежит $e^{i\varphi}$. Тогда имеет место оценка*

$$|f^{(m)}(e^{i\varphi})| \leqslant \text{const} \left( \frac{\log \dfrac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{a(e^{i\varphi})} \right)^{n+1-m} M(f^{(n+1)})(e^{i\varphi}). \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $N$ — положительное число и

$$\left( \frac{\log \dfrac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{a(e^{i\varphi})} \right) > \frac{1}{N} \rho(e^{i\varphi}, E),$$

где $\rho(e^{i\varphi}, E) = |e^{i\varphi} - e^{i\alpha}|$, $e^{i\alpha} \in E$. Тогда

$$f^{(m)}(e^{i\varphi}) = \frac{1}{(n-m)!} \int_{e^{i\alpha}}^{e^{i\varphi}} (e^{i\varphi}\zeta)^{n-m} f^{(n+1)}(\zeta)\, d\zeta,\ m = 0, \cdots, n.$$

Отсюда

$$|f^{(m)}(e^{i\varphi})| \leqslant \frac{1}{(n-m)!} [\rho(e^{i\varphi}, E)]^{n+1-m} \left[ \frac{1}{|e^{i\varphi} - e^{i\alpha}|} \int_{\alpha}^{\varphi} |f^{(n+1)}(e^{it})|\, dt \right].$$

Но поскольку

$$\frac{1}{|e^{i\varphi} - e^{i\alpha}|} \int_{\alpha}^{\varphi} |f^{(n+1)}(e^{it})|\, dt < \text{const}\, M(f^{(n+1)})(e^{i\varphi}),$$

то оценка (2.1) доказана в этом случае. Если же

$$\frac{\log \dfrac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{a(e^{i\varphi})} < \frac{1}{N} \rho(e^{i\varphi}, E),$$

то повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 1.4, получаем



ՀՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ԳՐԱԴԱՐԱՆ

$$|f^{(m)}(e^{i\varphi})| \leqslant \text{const}\left(\frac{\log\frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{a(e^{i\varphi})}\right)^{n+1-m} \sup_{0<r<1}|f^{(n+1)}(re^{i\varphi})|.$$

Остается применить теорему Б.

Лемма 2.2. *Пусть* $f \in H^p_{n+1}$ *и* $f_\delta = fH_\delta$, *тогда*

$$\lim_{\delta\to 0}\|f_\delta - f\|_{H^p_{n+1}} = 0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Для установления (2.2) достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}|H_\delta^{(m)}(e^{i\varphi})\, f^{(n+1-m)}(e^{i\varphi})|^p\, d\varphi = 0,\ m = 1, 2, \cdots, n+1.$$

С этой целью используем леммы 1.3 и 2.1, согласно которым

$$|H_\delta^{(m)}(e^{i\varphi})\, f^{(n+1-m)}(e^{i\varphi})| \leqslant CM(f^{(n+1)}(e^{i\varphi})\left(\frac{\log\frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{a(e^{i\varphi})}\right)^m \times$$

$$\times\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\delta^k\rho^\delta(e^{i\varphi}, E)\, a^k(e^{i\varphi})}{\rho^{m-k}(e^{i\varphi}, E)}\right) = CM(f^{(n+1)})(e^{i\varphi})\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{m}\frac{\delta_k\left(\log\frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}\right)^m\rho^\delta(z)}{[a(e^{i\varphi})\,\rho(e^{i\varphi}, E)]^{m-k}}.$$

Теперь, используя оценку

$$a(e^{i\varphi}) \geqslant C\,\frac{\log\frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{\rho(e^{i\varphi}, E)},$$

получаем

$$|H^{(m)}(e^{i\varphi})\, f^{(n+1-m)}(e^{i\varphi})| \leqslant CM(f^{(n+1)})(e^{i\varphi})\sum_{k=1}^{m}\delta^k(\rho(e^{i\varphi}, E))^\delta\times$$

$$\times\left(\log\frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}\right)^k \leqslant C_1M(f^{(n+1)})(e^{i\varphi}).$$

Для доказательства леммы остается применить теорему Лебега и лемму 1.1. ●

Доказательство теоремы. Положим снова $f_{\delta,\gamma} = f_\delta G_\gamma$. Исходя из лемм 1.1 и 2.2, достаточно доказать, что

$$\lim_{\gamma\to 0} f_{\delta,\gamma} = f_\delta$$

в пространстве $H^p_{n+1}$. А для этого достаточно заметить, что

$$|f_0^{(n+1-m)}(e^{i\varphi})| \leqslant C\left(\frac{1}{a(e^{i\varphi})}\right)^m M(f^{(n+1)})(e^{i\varphi}),$$

и

$$|G_\Gamma^{(m)}(e^{i\varphi})| \leqslant C\,a^m(e^{i\varphi}),\ m=1,\ 2,\cdots,\ n+1.$$

Следовательно

$$|f_0^{(n+1-m)}(e^{i\varphi})\ G_\Gamma^{(m)}(e^{i\varphi})| \leqslant CM(f^{(n+1)})(e^{i\varphi}).$$

Остальное следует из теоремы А, леммы 1.1 и теоремы Лебега (см. [13]).

2°. Отметим, что имеет место аналог теоремы 1 для односвязных областей $\Omega$ с достаточно хорошей границей. В связи с известной теоремой П. Лакса остановимся только на случае, когда $\Omega = \Pi_+ = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$. Обозначим через $H_+^p$ класс аналитических в $\Pi_+$ функций, для которых

$$\|f\|_{H_+^p} = \sup_{y>0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p\,dx\right)^{1/p} < +\infty$$

и через

$$H_+^{p,\,n} = \{f\colon f^{(n)} \in H_+^p,\ \|f\|_{H_+^{p,\,n}} = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \|f^{(k)}\|_{H^p}\}.$$

Легко видеть, что при $p \geqslant 1$, $H_+^{p,\,n}$ представляет банаховую алгебру относительно поточечного умножения. Рассмотрим в $H_+^{p,\,n}$ оператор

$$T_\lambda(f)(z) = e^{i\lambda z} f(z),\ \lambda > 0.$$

Нетрудно убедиться, что замкнутые идеалы алгебры $H_+^{p,\,n}$ совпадают с инвариантными подпространствами этого оператора в $H_+^{p,\,n}$.

Теорема 1*. *Пусть $I$ — замкнутый идеал в $H_+^{p,\,n}$, $1<p<+\infty$, тогда*

$$I = \{f \in H_+^{p,\,n}\colon E_m(f) \supset E_m(I),\ m = 0,\ 1,\cdots,\ n-1,$$

$$G_I \text{ делит } G_f\},$$

*где $G_I$, $E_m(f)$ определяются как в § 1, только вместо $\Gamma$ нужно подставить $R^1$.*

Особо следует отметить, что теорема 1* не получается из теоремы 1 при помощи конформного отображения. В отличие от случая $n=0$ пространства $H_n^p$ в круге и $H_+^{p,\,n}$ в полуплоскости не „сравнимы“ при $n \geqslant 1$.

Пусть

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k},\ a_k \geqslant 0, \tag{2.3}$$

причем $a_{2n}$, $a_0 \neq 0$.

Рассмотрим в пространстве

$$L^2_{\rho_{2n}}(0,\ +\infty) = \{f\colon \|f\|_{L^2_{\rho_{2n}}} = \left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 P_{2n}(x)\,dx\right)^{1/2} < +\infty,$$

оператор

$$S_\lambda(f)(x) = f(x-\lambda),\ \lambda \geqslant 0. \tag{2.4}$$

П. Лаксом в известной работе [16] была дана характеристика инвариантных подпространств этого оператора в пространстве $L^2(0, +\infty)$. Из теоремы 1* легко вывести аналогичные описания в пространствах $L^2_{P_{2n}}(0, +\infty)$ для $P_{2n}$ вида (2.3). С этой целью заметим, что пространство $L^2_{P_{2n}}(0, +\infty)$ по теореме Пэли-Винера переводится на пространство $H^{p,n}_+$, и каждое замкнутое инвариантное подпространство оператора $S_\lambda - M \subset L^2_{P_{2n}}$ переходит в замкнутый идеал $I_M$:

$$I_M \subset H^{p,n}_+ : I_M = \{\hat{\varphi} : \varphi \in M\}, \text{ где } \hat{\varphi}(z) = \int_0^{+\infty} e^{itz}\varphi(t)\,dt.$$

Следствие 2.1. Пусть $M$ — нетривиальное замкнутое подпространство в $L^2_{P_{2n}}(0, +\infty)$, инвариантное относительно $S_\lambda$, $\lambda \geqslant 0$. Тогда

$$M = \{\varphi \in L^2_{P_{2n}}(0, +\infty) : a_\varphi \geqslant a_M,\ E_k(\hat{\varphi}) \supset E_k(I_M),\ k = 0, \cdots, n-1,$$
$$G_{I_M} \text{ делит } G_{\hat{\varphi}}\},$$

где $a_\varphi = \sup_a \{a : \varphi(t) = 0$ почти всюду в $0 < t < a\}$, $a_M = \inf_{\varphi \in M} \{a_\varphi\}$, $G_{\hat{\varphi}}$, $G_{I_M}$ определяются как выше.

И в заключение отметим, что используя теоремы 1 и 1* и учитывая результат С. В. Хрущева (см. [17]), легко получить следующую теорему.

Теорема 4. *Каждый замкнутый идеал алгебры $X$ является главным.*

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.IX.1980

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Փակ իդեալները անալիտիկ և մինչև եզրը ողորկ ֆունկցիաների հանրահաշիվներում *(ամփոփում)*

*Դիցուք $\lambda^{(n)}_\omega$-ն և $H^p_n$-ն շրջանում անալիտիկ այն ֆունկցիաների հանրահաշիվներն են, որոնց $n$-րդ կարգի ածանցյալը պատկանում է համապատասխանաբար $Lip\,\omega$ և $H^p$ դասերին։ Հոդվածում ստացված է նշված հանրահաշիվներում փակ իդեալների լրիվ բնութագիրը։*

F. A. SHAMOYAN. *Closed ideals in the algebras of analytic functions with smooth boundary values* (summary)

Let $\lambda^{(n)}_\omega$ and $H^p_n$ be the set of all analytic functions $f$ which are $n$ times differentiable in the closed disc analytic in the interior $f^{(n)} \in Lip\,\omega$ respectively $f^{(n)} \in H^p$. The article gives complete description of closed ideals in these algebras.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
2. *A. Beurling.* On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math, 81, 1949.
3. *W. Rudin.* The closed ideals in an algebra of continuous analytic functions, Proc. Amer. Math Soc., 7, 1956.
4. *B. A. Taylor and D. L. Williams.* Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values, Canad. J. Math., 22, 1970.
5. *Б. И. Коренблюм.* Замкнутые идеалы кольца $A^{(n)}$, Функц. анализ и его прилож., 6, 3, 1972.
6. *Б. И. Коренблюм.* Инвариантные подпространства оператора сдвига во взвешенном гильбертовом пространстве, Мат. сб., 89, № 1, 1972, 110—137.
7. *Ф. А. Шамоян.* Построение одной специальной последовательности, и структура замкнутых идеалов в некоторых алгебрах аналитических функций, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 7, № 6, 1972.
8. *Ф. А. Шамоян.* Структура замкнутых идеалов в некоторых алгебрах функций, аналитических в круге и гладких вплоть до его границы, ДАН Арм.ССР, 60, № 3, 1975, 133—136.
9. *A. Matheson.* Closed ideals in rings of analytic functions, satisfying Lipschitz conditions, Lecture Notes in Math, 604, 1977.
10. *A. Matheson.* Approximation of analytic functions, satisfying Lipschitz conditions, Mich. Math. Journal, 25, № 3, 1978.
11. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., «Мир», 1973.
12. *Б. Я. Геронимус.* О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге и круговом секторе, Мат. сб., 38 (80), № 3, 1956.
13. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., Гостехиздат, 1950.
14. *Н. К. Бари, С. Б. Стечкин.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, Труды ММО, т. 5, 1956.
15. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М., Гостехиздат, 1957.
16. *P. Lax.* Translation invariant subspaces, Acta Math., 101, 1959.
17. *С. В. Хрущев.* Всякий идеал $C_A^{(n)}$ является главным, Исслед. по линейн. опер. и теории функц., Записки научн. семин. ЛОМИ, т. 65, 1976, 149—160.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 3, 1981 Математика

Б. Т. БАТИКЯН

# ТОЧЕЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА РАВНОМЕРНОЙ АЛГЕБРЕ

Одной из основных проблем теории равномерных алгебр является вопрос о наличии аналитической структуры в пространстве $M(A)$ комплексных гомоморфизмов данной равномерной алгебры $A$. Уже первые результаты в этом направлении показали, что решение вопроса тесно связано с понятием точечного дифференцирования. Так, например, известную теорему Вермера ([1], стр. 210) о вложении аналитических дисков можно сформулировать следующим образом: если в некоторой точке $\varphi$ из пространства $M(A)$ равномерной алгебры Дирихле $A$ существует непрерывное точечное дифференцирование первого порядка, то найдется такое непрерывное и взаимно-однозначное отображение $\tau$ единичного круга $\Delta$ в $M(A)$, что $\tau(0)=\varphi$ и любая функция вида $f\circ\tau$, где $f\in A$, голоморфна в $\Delta$ (см. также [2]). Согласно более общему результату Браудера [3] в пространство $M(A)$ равномерной алгебры $A$ можно аналогичным образом вложить аналитическое множество из $\mathbf{C}^n$, если только линейное пространство всех (непрерывных и разрывных) точечных дифференцирований первого порядка в точке $\varphi$ — $n$-мерно.

В настоящее время опубликовано большое количество работ, посвященных точечным дифференцированиям. Можно указать, в частности, на [4], где в терминах аналитической емкости сформулирован критерий существования точечного дифференцирования в алгебре $R(X)$, порожденной рациональными функциями с полюсами вне компакта $X\subset\mathbf{C}$; [5], [6], в которых изучаются нелокальные точечные дифференцирования; [7], [8], посредством точечного дифференцирования описывающие подалгебры конечной коразмерности.

Точечные дифференцирования высших порядков естественно возникают при попытке продолжения дифференцирования первого порядка на алгебру $A$ с ее подалгебры конечной коразмерности. В настоящей работе изучаются подобного рода дифференцирования на равномерной алгебре, при этом для простоты мы ограничиваемся случаем дифференцирования второго порядка. Большинство результатов работы было анонсировано в заметке [9].

Алгебраические свойства точечных дифференцирований высших порядков исследовались в [10], [11].

1°. В этом пункте мы напомним известные определения и зафиксируем обозначения.

Равномерная алгебра $A$ на компактном пространстве $X$ — это замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$ всех непрерывных комплексно-значных функций на $X$, содержащая постоянные и разделяющая точки $X$. Через $M(A)$ обозначается совокупность всех нетривиальных гомоморфизмов $A$ в поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел. (Комплексный гомоморфизм автоматически непрерывен). Множество $M(A)$ является компактным пространством в слабо* топологии, причем $X$ гомеоморфно вкладывается в $M(A)$, а любая функция $f \in A$ „аналитически" продолжается с $X$ на все $M(A)$.

Каждому гомоморфизму $\varphi \in M(A)$ соответствует такая положительная регулярная борелевская мера $\mu$ на $X$, что $\varphi(f) = \int\limits_X f\,d\mu$ для любого $f \in A$. Мера $\mu$ называется представляющей мерой для $\varphi$ и, вообще говоря, определяется не единственным образом. Выпуклое множество всех представляющих $\varphi$ положительных мер мы будем обозначать через $M_\varphi(X)$.

Пусть $\nu$ — конечная комплексная регулярная борелевская мера на $X$, $|\nu|$ — ее полная вариация. Тогда $\nu = F|\nu|$, где $|F| = 1$ почти всюду по мере $|\nu|$ на $X$. Через $\operatorname{supp}|\nu|$ обозначается носитель меры $|\nu|$, т. е. дополнение объединения тех открытых подмножеств $U \subset X$, для которых $|\nu|(U) = 0$.

Поскольку равномерная алгебра $A$ содержится в $L^\infty(|\nu|) = (L^1(|\nu|))^*$, то мы можем рассмотреть пространство $H^\infty(|\nu|)$ — слабо* замыкание $A$ в $L^\infty(|\nu|)$. По определению ограниченная измеримая функция $G$ принадлежит $H^\infty(|\nu|)$, если для любой функции $m \in L^1(|\nu$ число $\int\limits_X Gm\,d|\nu|$ является предельной точкой для множества

$$\left\{ \int\limits_X fm\,d|\nu|,\ f \in A \right\}.$$

Если $\mu \in M_\varphi(X)$, то $H^\infty(\mu)$ суть банахова подалгебра $L^\infty(\mu)$.

Ядро $J_\varphi$ гомоморфизма $\varphi \in M(A)$ образует максимальный идеал в алгебре $A$. Для любых идеалов $J$, $I$ алгебры $A$ через $IJ$ обозначается линейное пространство, порожденное попарными произведениями вида $gf$, где $g \in I$, $f \in J$.

Линейный непрерывный функционал $\psi \in A^*$ называется точечным дифференцированием первого порядка в точке $\varphi \in M(A)$, если $\psi(f_1 f_2) = \psi(f_1)\varphi(f_2) + \psi(f_2)\varphi(f_1)$ для любых $f_1, f_2 \in A$. Для существования в точке $\varphi$ нетривиального точечного дифференцирования первого порядка необходимо и достаточно, чтобы $J_\varphi \neq \overline{J_\varphi^2}$. Другими словами, пространство $\mathfrak{Q}(A, \varphi)$ всех точечных дифференцирований на $A$ в точке $\varphi$ изоморфно фактор-пространству $J_\varphi / \overline{J_\varphi^2}$. Например, если $x_0 \in X$ является точкой пика для $A$, то согласно факторизационной теореме Коэна [12] $J_{x_0} = J_{x_0}^2$, так что в точке пика не существует даже разрывных точечных дифференцирований.

2°. Пусть $A$ — равномерная алгебра на $X$. Функционал $\Phi \in A^*$ называется точечным дифференцированием второго порядка в точке $\varphi \in M(A)$ относительно $\psi \in \Omega(A, \varphi)$, если

$$\Phi(f_1 f_2) = \Phi(f_1)\varphi(f_2) + \Phi(f_2)\varphi(f_1) + \psi(f_1)\psi(f_2) \tag{1}$$

для всех $f_1, f_2 \in A$.

Положим $I_\varphi = J_\varphi \cap \ker\psi$. Если дифференцирование $\Phi$ нетривиально, то, очевидно, $\overline{I_\varphi J_\varphi} \neq \overline{J_\varphi^2}$. Следующая теорема устанавливает достаточность этого условия.

Теорема 1. *Предположим, что гомоморфизм $\varphi \in M(A)$ и дифференцирование $\psi \in \Omega(A, \varphi)$ таковы, что $\overline{I_\varphi J_\varphi} \neq \overline{J_\varphi^2}$. Тогда в точке $\varphi$ относительно $\psi$ существует ненулевое точечное дифференцирование второго порядка.*

Доказательство. Согласно предположениям теоремы найдется функционал $\Phi \in A^*$, удовлетворяющий условиям $\mathbf{C} + I_\varphi J_\varphi \subset \ker\Phi$ и $\Phi|J_\varphi^2 \neq 0$. Выберем функцию $f_0 \in J_\varphi$ таким образом, чтобы $\psi(f_0) = 1$. Тогда произвольный элемент $f \in A$ можно записать в виде $f = g + \psi(f) f_0$, где $g \in \ker\psi$. Поэтому $\Phi(f_0^2) \neq 0$, и мы можем считать, что $\Phi(f_0^2) = 1$. Наконец, заменив в случае необходимости функцию $f_0$ на $f_0 + \lambda g_0$, где $g_0 \in I_\varphi$ и $\lambda \in \mathbf{C}$ выбраны надлежащим образом, можно утверждать, что $\Phi(f_0) = 0$.

Рассмотрим теперь произвольные элементы $f_1 = g_1 + \psi(f_1) f_0$ и $f_2 = g_2 + \psi(g_2) f_0$ алгебры $A$. Тогда

$$f_1 f_2 = (g_1 - \varphi(g_1))(g_2 - \varphi(g_2)) + g_1\varphi(g_2) + g_2\varphi(g_1) - \varphi(g_1)\varphi(g_2) +$$
$$+ \psi(f_1)(g_2 - \varphi(g_2)) f_0 + \psi(f_1)\varphi(g_2) f_0 + \psi(f_2)(g_1 - \varphi(g_1)) f_0 +$$
$$+ \psi(f_2)\varphi(g_1) f_0 + \psi(f_1)\psi(f_2) f_0^2.$$

Отсюда сразу следует равенство (1).

Замечание. Аналогично можно доказать, что условие $\overline{I_\varphi^2} \neq \overline{I_\varphi^2 + J_\varphi^3}$ необходимо и достаточно для существования точечного дифференцирования третьего порядка.

Из определения (1) сразу следует, что точечное дифференцирование второго порядка анулирует все постоянные функции. Оказывается, аналогичное обстоятельство имеет место и для вещественных функций из $A$.

Теорема 2. *Пусть $\Phi$ — точечное дифференцирование второго порядка на равномерной алгебре $A$. Если функция $g \in A$ принимает вещественные значения на $X$, то $\Phi(g) = 0$.*

Доказательство. Замкнутое подмножество $E$ компакта $X$ называется множеством антисимметрии алгебры $A$, если каждая функция из $A$, принимающая вещественные значения на $E$, постоянна на этом множестве. Теорема Шилова-Бишопа ([1], стр. 87) устанавли-

вает, что компакт $X$ разбивается на совокупность $\{E_\alpha\}$ максимальных множеств антисимметрии, и если непрерывная функция $h$ на каждом множестве $E_\alpha$ совпадает с некоторым элементом алгебры $A$, то $h \in A$.

Пусть функция $g \in A$ принимает на $X$ только вещественные значения. Тогда $g$ постоянна на каждом множестве $E_\alpha$. В алгебре $A$ выделим подалгебру $B = \{f \in A: \Phi(f) = \psi(f) = 0\}$ коразмерности 2. Согласно [13] каждое $E_\alpha$ служит максимальным множеством антисимметрии и для алгебры $B$. Следовательно, по теореме Шилова-Бишопа $g \in B$ и, в частности, $\Phi(g) = 0$.

В работе [14] доказано, что любое точечное дифференцирование первого порядка допускает интегральное представление, обобщающее классическую формулу Коши. Как показывает теорема 3 (см. также пример 1), для дифференцирований высших порядков возможность такого рода представления существенно зависит от нормы данного дифференцирования.

Теорема 3. *Пусть $A$ — равномерная алгебра на $X$, и $\Phi$—точечное дифференцирование второго порядка в точке $\varphi \in M(A)$ относительно $\psi \in \Omega(A, \varphi)$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1) $\|\Phi\| = \|\psi\|^2$;

2) *существует мера $\mu \in M_\varphi(X)$ и функция $G \in H^\infty(\mu)$, ($|G| = 1$ почти всюду на $X$ по мере $\mu$) такие, что для всех $f \in A$*

$$\psi(f) = \|\psi\| \int_X f\bar{G}\, d\mu \quad \text{и} \quad \Phi(f) = \|\Phi\| \int_X f\bar{G}^2\, d\mu. \tag{2}$$

Прежде чем доказывать теорему отметим, что норма любого функционала $\psi \in \Omega(A, \varphi)$ совпадает с нормой его сужения на идеал $J_\varphi$. Действительно, если бы существовала такая функция $f \in A$, что $\|f\| < 1$, $\varphi(f) \neq 0$ и $|\psi(f)| > \|\psi|J_\varphi\|$, то мы (рассуждая стандартным образом) могли бы рассмотреть функцию

$$g = (f - \varphi(f))(1 - \overline{\varphi(f)}\, f)^{-1} \in J_\varphi, \ \|g\| < 1,$$

для которой $|\psi(g)| \geqslant \|\psi|J_\varphi\|$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\|\Phi\| = \|\psi\|^2$. По теореме Рисса найдется, вообще говоря, комплексная мера $\nu$ на $X$, представляющая функционал $\Phi$ и удовлетворяющая условию $\|\Phi\| = \int_X d|\nu|$. Выберем последовательность $\{g_n\} \subset J_\varphi$, $\|g_n\| \leqslant 1$ таким образом, чтобы $\psi(g_n) \to \|\psi\|$, и пусть $G \in H^\infty(|\nu|)$, $|G| \leqslant 1$, — слабо* точка прикосновения последовательности $\{g_n\}$. Ясно, что из последовательности $\{g_n\}$ можно извлечь такие подпоследовательности $\{g_{n_k}\}$ и $\{g_{n_m}\}$, чтобы $\int_X g_{n_k} g_{n_m}\, d\nu \to \int_X G^2\, d\nu$ при $k, m \to \infty$. Но по формуле (1)

$$\int_X g_{n_k} g_{n_m} d\nu = \Phi(g_{n_k} g_{n_m}) = \psi(g_{n_k})\,\psi(g_{n_m}) \to \|\psi\|^2 = \|\Phi\|,$$

т. е.

$$\|\Phi\| = \int_X d|\nu| = \int_X G^2\, d\nu.$$

Отсюда следует, что $|G|=1$ почти всюду на $X$ по мере $|\nu|$.

Рассмотрим на $X$ положительную меру $\mu = \dfrac{G^2\nu}{\|\Phi\|}$, полная вариация которой равна 1. Если $f \in J_\varphi$, то

$$\int_X f d\mu = \lim \frac{1}{\|\Phi\|} \int_X f\, g_{n_k} \cdot g_{n_m} \cdot d\nu = \lim \frac{1}{\|\Phi\|}\, \Phi(f g_{n_k} \cdot g_{n_m}) = 0.$$

Последнее означает, что $\mu \in M_\varphi(X)$. Таким образом, $\Phi(f) = \|\Phi\| \int_X f\bar{G}^2 d\mu$, для любого $f \in A$. Остается доказать первое из равенств (2).

Представим функцию $f$ в виде $f = g + \psi(f) f_0 + \varphi(f)$, где $g \in I_\varphi = J_\varphi \cap \ker \psi$, $f_0 \in J_\varphi$ и $\psi(f_0) = 1$. Тогда

1) $\|\psi\| \int_X g\bar{G}\, d\mu = \dfrac{1}{\|\psi\|} \int_X gG d\nu = \dfrac{1}{\|\psi\|} \lim \int_X g g_n\, d\nu = \dfrac{1}{\|\psi\|} \lim \Phi(g g_n) = 0,$

поскольку $g g_n \in I_\varphi J_\varphi$;

2) $\|\psi\|\, \psi(f) \int_X f_0 \bar{G} d\mu = \dfrac{\psi(f)}{\|\psi\|} \int_X f_0 G d\nu = \dfrac{\psi(f)}{\|\psi\|} \lim \Phi(f_0 g_n) = \dfrac{\psi(f)}{\|\psi\|} \times$
$\times \lim \psi(g_n) = \psi(f)$;

3) $\|\psi\|\, \varphi(f) \int_X \bar{G} d\mu = \|\psi\|\, \varphi(f) \overline{\int_X G\, d\mu} = \|\psi\|\, \varphi(f) \lim \overline{\int_X g_n\, d\mu} = 0,$ поскольку $\mu \in M_\varphi(X)$.

Итак, $\psi(f) = \|\psi\| \int_X f \bar{G}\, d\mu$ для любого $f \in A$.

Предположим теперь, что при некоторых $\mu \in M_\varphi(X)$ и $G \in H^\infty(\mu)$, $|G| \leqslant 1$, справедливы равенства (2). Вновь рассмотрим последовательность $\{g_n\} \subset J_\varphi$, $\|g_n\| \leqslant 1$, на которой $\psi(g_n) \to \|\psi\|$, и функцию $F \in H^\infty(\mu)$, являющуюся предельной для последовательности $\{g_n\}$ в смысле слабо* сходимости. Поскольку

$$\|\psi\| \int_X F\bar{G}\, d\mu = \lim \int_X g_n \bar{G}\, d\mu = \lim \psi(g_n) = \|\psi\| \int_X d\mu,$$

то $F=G$ почти всюду по мере $\mu$. Выберем далее такую подпоследовательность $g_{n_k}\, g_{n_m}$, чтобы

$$\int_X g_{n_k}\, g_{n_m}\, \bar{G}^2\, d\mu \to \int_X F^2\, \bar{G}^2\, d\mu = 1.$$

Следовательно, $\Phi(g_{n_k}\, g_{n_m}) \to \|\Phi\|$. С другой стороны, по формуле (1) $\Phi(g_{n_k}\, g_{n_m}) \to \|\psi\|^2$.

Замечание. Пусть $\Phi_n$ — точечное дифференцирование $n$-го порядка в точке $\varphi$, т. е.

$$\Phi_n(f_1 f_2) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k(f_1)\, \Phi_{n-k}(f_2),$$

где $\Phi_k$ $(k \geqslant 1)$ — точечное дифференцирование порядка $k$, $\Phi_0 = \varphi$. Для того чтобы имело место представление вида

$$\Phi_k(f) = \|\Phi_k\| \int_X f \bar{G}^k\, d\mu,\ 0 \leqslant k \leqslant n,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\|\Phi_n\| = \|\Phi_1\|^n$.

3°. В этом пункте мы рассмотрим два примера. Первый из них иллюстрирует теорему 3 на алгебре голоморфных функций. Второй пример касается вопроса существования точечных дифференцирований высших порядков во „внутренней" точке из $M(A) \setminus X$.

Пример 1. Пусть $D$ — ограниченная односвязная область в $\mathbf{C}$, совпадающая с внутренностью своего замыкания, и $A(D)$ — алгебра всех непрерывных на $\bar{D}$ и голоморфных внутри $D$ функций. Каждой точке $\lambda \in D$ можно сопоставить функционалы $\psi_\lambda$ и $\Phi_\lambda$, определенные на $A(D)$ и являющиеся значениями производных (соответственно, первого и второго порядка) в точке $\lambda$: $\psi_\lambda(f) = f'(\lambda)$ и $\Phi_\lambda(f) = \frac{f''(\lambda)}{2}$, $f \in A(D)$. Очевидно, $\psi_\lambda \in \Omega(A(D), \lambda)$, а $\Phi_\lambda$ — точечное дифференцирование второго порядка относительно $\psi_\lambda$. Спрашивается, всегда ли существует такая точка $\lambda_0 \in D$, для которой $\|\Phi_{\lambda_0}\| = \|\psi_{\lambda_0}\|^2$?

Прежде всего отметим, что $A(D)$ является равномерной алгеброй Дирихле на границе $\partial D$ области $D$. Поэтому: 1) каждая точка $\lambda \in D$ обладает единственной положительной представляющей мерой $\mu_\lambda$ на $\partial D$; $H^\infty(\mu_\lambda) = H^\infty(D)$ ([1], стр. 200); 3) пространство $\Omega(A(D), \lambda)$ одномерно [2]; 4) все точки границы $\partial D$ являются точками пика для $A(D)$.

Поскольку $\|\psi_\lambda\|_{A(D)} = \|\psi_\lambda\|_{H^\infty(D)}$, то функция $G \in H^\infty(D)$, фигурирующая в формулировке теоремы 3, есть не что иное, как функция Римана, конформно отображающая $D$ на единичный круг и удовлетворяющая условиям: $G(\lambda) = 0$, $G'(\lambda) = \|\psi_\lambda\| > 0$. Рассмотрим теперь на $A(D)$ функционал

$$\Phi'_\lambda : f \to \|\psi_\lambda\|^2 \int\limits_{\partial D} f\overline{G^2}\, d\mu_\lambda,$$

являющийся точечным дифференцированием второго порядка в точке $\lambda$ относительно $\psi_\lambda$, причем $\|\Phi'_\lambda\| = \|\psi_\lambda\|^2$ (см. теорему 3). Очевидно, $\Phi_\lambda - \Phi'_\lambda$ — дифференцирование первого порядка, и, в силу одномерности пространства $\mathfrak{Q}(A(D), \lambda)$, $\Phi_\lambda = \Phi'_\lambda + c\psi_\lambda$. Более того, поскольку

$$\Phi'_\lambda(G) = \|\psi_\lambda\|^2 \int\limits_{\partial D} \overline{G} d\mu_\lambda = \|\psi_\lambda\|^2\, \overline{G(\lambda)} = 0,$$

то $c = \dfrac{G''(\lambda)}{2\|\psi_\lambda\|}$.

Другими словами, условия $\|\Phi_\lambda\| = \|\psi_\lambda\|^2$ и $G''(\lambda) = 0$ эквивалентны, и теперь наш вопрос можно сформулировать в следующем виде. Пусть $D$ — такая односвязная ограниченная область в $\mathbf{C}$, что $\operatorname{int}(\overline{D}) = D$. Каждой точке $\lambda \in D$ сопоставим функцию $G_\lambda(z)$, конформно отображающую $D$ на единичный круг и удовлетворяющую условиям: $G_\lambda(\lambda) = 0$, $G'_\lambda(\lambda) > 0$. Спрашивается, существует ли хотя бы одна точка $\lambda_0 \in D$, для которой $G''_{\lambda_0}(\lambda_0) = 0$? (Например, если область $D$ есть круг, то непосредственно проверяется, что подобная точка единственна и совпадает с центром круга).

Предварительно докажем следующую простую лемму.

Лемма 1. *Если $\lambda$ стремится к $\partial D$, то функция $k(\lambda) = \|\psi_\lambda\| \to \infty$.*

Доказательство. Предположим противное и выберем последовательность $\{\lambda_n\} \subset D$ таким образом, чтобы: 1) $\lambda_n \to \xi \in \partial D$, 2) последовательность $k(\lambda_n)$ была ограниченной и, в силу этого 3) $\psi_{\lambda_n}$ слабо* сходилась к функционалу $\psi \in A^*$. Поскольку $\psi_{\lambda_n} \in \mathfrak{Q}(A(D), \lambda_n)$, то, очевидно, $\psi \in \mathfrak{Q}(A(D), \xi)$. Но $\xi$ является точкой пика для $A(D)$, поэтому $\psi = 0$, т. е. $\psi_{\lambda_n}(f) \to 0$ для любого $f \in A(D)$, что невозможно.

Из леммы вытекает существование точки $\lambda_0 \in D$, в которой функция $k(\lambda) = \|\psi_\lambda\|$ принимает минимальное значение. Если $G_{\lambda_0}(z)$ — функция Римана, соответствующая точке $\lambda_0$, то

$$k^2(z) = \frac{G'_{\lambda_0}(z)\overline{G'_{\lambda_0}(z)}}{(1 - G_{\lambda_0}(z)\overline{G_{\lambda_0}(z)})^2}.$$

(Конечно, $k^2(z)$ есть не что иное, как функция Бергмана для области $D$). Имеем

$$\left.\frac{\partial k^2(z)}{\partial z}\right|_{z=\lambda_0} = G''_{\lambda_0}(\lambda_0)\, G'_{\lambda_0}(\lambda_0) = 0.$$

Таким образом, $\|\Phi_{\lambda_0}\| = \|\psi_{\lambda_0}\|^2$ и согласно теореме 3,

$$f'(\lambda_0) = G'_{\lambda_0}(\lambda_0) \int\limits_{\partial D} f\overline{G}_{\lambda_0} d\mu_{\lambda_0}, \quad f''(\lambda_0) = 2\,(G'_{\lambda_0}(\lambda_0))^2 \int\limits_{\partial D} f\overline{G}^2_{\lambda_0} d\mu_{\lambda_0}$$

для всех $f \in A(D)$.

Замечание 1. Аналогичную задачу относительно конформных отображений можно сформулировать и для неограниченной области. Однако, если граница области содержит бесконечно удаленную точку, то подобной точки $\lambda_0$ может не существовать. Типичный пример — полуплоскость.

Замечание 2. Имея в виду интегральное представление точечного дифференцирования более высокого (скажем, третьего) порядка, можно также поставить вопрос о существовании такой точки $\lambda_0 \in D$ и конформного отображения $G$ области $D$ на единичный круг, что $G(\lambda_0)=0$, $G'(\lambda_0)>0$, $G''(\lambda_0)=G'''(\lambda_0)=0$. Вообще говоря, даже для ограниченной области (например, для области, ограниченной отрезком $[-1,1]$ вещественной оси и полуокружностью $|z|=1$, $\operatorname{Im} z>0$) такой точки может не существовать.

Если гомоморфизм $\varphi$ равномерной алгебры $A$ обладает единственной представляющей мерой, и -пространство $\Omega(A, \varphi)$—нетривиально, то в точке $\varphi$ будут существовать точечные дифференцирования любого порядка [2]. Ниже мы приводим пример равномерной алгебры $B$ на компакте $X$, обладающей таким комплексным гомоморфизмом $\varphi_0 \in M(B) \setminus X$, что пространство $\Omega(B, \varphi_0)$ одномерно, однако в $\varphi_0$ не существуют точечные дифференцирования второго порядка и выше.

Пример 2. Пусть равномерная алгебра $A_1$, реализованная на компакте $Y$, и точка $\varphi_1 \in M(A_1) \setminus Y$ таковы, что $\Omega(A_1, \varphi_1)=0$. (Общая схема построения такого рода алгебр дана в [1], стр. 226).

Обозначим через $\Delta$ единичный круг и рассмотрим совокупность непрерывных на $\Delta \times Y$ функций $f(z, y)$, удовлетворяющих условиям

а) $f(z, y_0) \in A(\Delta)$ при любом фиксированном $y_0 \in Y$;
б) $f(0, y)$ и $f'_z(0, y)$ принадлежат $A_1$.

Множество $B$ образует равномерную алгебру на $\Delta \times Y$, причем $M(B)= = \Delta \times Y \cup \{0\} \times M(A_1)$ [6].

Положим $\varphi_0=(0, \varphi_1)$. Тогда функционал $\psi_0 : f \to \varphi_1(f'_z(0, y))$, очевидно, принадлежит $\Omega(B, \varphi_0)$.

Лемма 2. *Относительно точечного дифференцирования $\psi_0$ в алгебре $B$ не существует нетривиального точечного дифференцирования второго порядка.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 нам достаточно доказать, что если $\Phi$ — дифференцирование второго порядка в точке $\varphi_0$ относительно $\psi_0$, то $\Phi(f)=0$ для любого $f \in J^2_{\varphi_0}$. Ясно, что функцию $f(z, y) \in J^2_{\varphi_0}$ можно представить в виде

$$f(z, y) = f_1(y) + z f_2(y) + z^2 g(y) + z^3 h(z, y),$$

где $f_1, f_2 \in J_{\varphi_1} \subset A_1$, а функции $g(y)$ и $h(z_0, y)$, вообще говоря, принадлежат $C(Y)$.

Отображение $\varkappa$: $g \to \Phi(z^2 g)$ является, очевидно, линейным непрерывным функционалом на пространстве $C(Y)$. Предположим, что комплексная мера $\nu$ на $Y$ представляет $\varkappa$:

$$\varkappa(g)=\int_Y g\,d\nu,\quad \|\varkappa\|=\int_Y d\,|\nu|,$$

а функция $F\in L^{\infty}(|\nu|)$,
являющаяся слабо* точкой прикосновения $C(Y)$, такова, что $|\nu|=F\nu$. Пусть $y_0$—произвольная точка из $\operatorname{supp}|\nu|\subset Y$. Выберем функцию $f_0\in A_1$ таким образом, чтобы $f_0(y_0)=1$ и $\varphi_1(f_0)=0$. Тогда

$$\int_Y |f_0|^2\,d\,|\nu|=\int_Y f_0\,\overline{f_0}\,F\,d\nu=\lim\int_Y f_0\,\overline{f_0}\,g_n\,d\nu=\lim\Phi(z^2 f_0\overline{f_0}\,g_n)=0,$$

так как $\Phi(z^2 f_0\overline{f_0}\,g_n)=\Phi(f_0\cdot z^2\,\overline{f_0}\,g_n)=0$ согласно (1) и выбору $\psi_0$ Однако интеграл $\int_Y |f_0|^2\,d\,|\nu|$ равен нулю только в том случае, когда $|\nu|=0$, т. е. $\Phi=0$, поскольку $\Phi(f)=\Phi(z^2 g)$. Лемма доказана.

Замечание. Используя метод доказательства леммы 2, нетрудно показать, что любой функционал $\psi\in\Omega(B,\varphi_0)$ кратен $\psi_0$. Кроме того, легко убедиться, что на алгебре $B$ в произвольной точке множества $\{0\}\times Y$ существуют дифференцирования любого порядка.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.IV.1980

Բ. Թ. ԲԱՏԻԿՅԱՆ. Երկրորդ կարգի կետային դիֆերենցումներ ճավասարաչափ հանրահաշվի վրա *(ամփոփում)*

*Ուսումնասիրվում են բարձր կարգի կետային դիֆերենցումները անընդհատ և հոլոմորֆ ֆունկցիաների հանրահաշիվների վրա։ Մասնավորապես, ստացված է կոշտ կլասիկ բանաձևին համանման ինտեգրալ ներկայացման գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման։*

B. T. BATIKIAN. *Point derivations of order 2 on uniform algebra* (summary)

In this note we study higher point derivations on algebras of continuous and holomorphic functions.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, «Мир», М., 1973.
2. *S. Sidney.* Point derivations in certain sup-norm algebras, Trans. Amer. Math Soc., 131, 1968, 119—127.
3. *A. Browder.* Point derivations and analytic structure in the spectrum of a Banach algebra, J. Funct. Anal., 7, 1971, 156-164.
4. *A. Hallstrom.* On bounded point derivations and analytic capacity, J. Funct. Anal., 4, 1969, 153—165.
5. *А. Д. Варшавский.* Функциональная алгебра второй степени нелокальности. Мат. сб., 80, № 2, 1969, 266—280.
6. *Б. Т. Батикян, Е. А. Горин.* Замечание о нелокальных алгебрах, Иссл. по линейным операторам и теории функц., Труды научн. сем. ЛОМИ, 7, 1976, 172—177.
7. *Е. А. Горин.* Подалгебры конечной коразмерности, Мат. заметки, 6, № 3, 1969, 321—328.

8. *Б. Т. Батикян.* Подалгебры коразмерности 1 (некоммутативный случай), Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 5, 1977, 341—344.

9. *Б. Т. Батикян.* О точечных дифференцированиях второго и третьего порядка, ДАН Арм. ССР, XVI, № 5, 1978, 272—276.

10. *H. Dales, J. McClure.* Higher point derivations on commutative Banach algebras I J. Funct. Anal., 26, 1977, 166—189.

11. *H. Dales, J. McClure.* Higher point derevations on commutative Banach algebras II, J. Lond. Math. Soc., 16, 1977, 313—325.

12. *P. Cohen.* A note on constructive methods in Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 12, 1961, 159—163.

13. *Б. Т. Батикян.* Максимальные подалгебры равномерных алгебр, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XI, № 3, 1976, 229—236.

14 *J. Chaumat.* Derivations ponctuelles continues dans les algèbres de fonction C. R. Acad. Sci.. 269, 1969, 347—350.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 3, 1981 Математика

А. Э. ДЖРБАШЯН

# ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ЛИТТЛЬВУДА-ПЭЛИ И ДЛЯ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

1°. Пусть функция $f$ аналитична в единичном круге $D=\{|z|<1\}$ и принадлежит классу Харди $H^p$, $0<p<\infty$. Отображение $f\to g(f)$:

$$g(f)(\theta)=\left\{\int_0^1 |f'(re^{i\theta}|^2(1-r)\,dr\right\}^{1/2}\quad (z=re^{i\theta})$$

называется функцией Литтльвуда-Пэли.

Теорема Литтльвуда-Пэли ([1], гл. XIV). (i) Пусть $f\in H^p$, $0<p<\infty$, $f(e^{i\theta})$— граничные значения функции $f$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^p(f)(\theta)\,d\theta\leqslant A_p\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p\,d\theta. \tag{1}$$

(ii) Если $f(0)=0$, $1<p<\infty$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p\,d\theta\leqslant B_p\int_{-\pi}^{\pi} g^p(f)(\theta)\,d\theta. \tag{2}$$

Константы $A_p$ и $B_p$ зависят только от $p$.

В настоящей работе мы дадим обобщения на случай весовых пространств неравенств (1) и (2) для оператора $g$ и различных его вариантов. При этом мы рассматриваем эти операторы на пространствах гармонических функций, заданных в шарах $D^n$ пространства $R^n$ и в полупространствах $R^{n+1}_+=\{(x,y): x\in R^n,\ y>0\}$. Все наши результаты верны в этом случае, кроме одного (который особо оговаривается), когда приходится ограничиваться случаем аналитических в единичном круге D или полуплоскости $R^2_+$ функций. Однако, для простоты изложения, все формулировки и доказательства приводятся в случае $R^2_+$ или D. В конце работы приводится применение этих результатов к мультипликаторам преобразований Фурье.

2°. Введем теперь необходимые определения и обозначения.

Определение. Пусть функция $w(x)$ неотрицательна и локально интегрируема на $R^1$. $w$ принадлежит классу Макенхоупта $A_p$, $1<p<\infty$, если существует константа $C>0$ такая, что для любого конечного интервала $I$, $I\subset R^1$

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}\leqslant C, \qquad (A_p)$$

где $|I|$ — лебегова длина интервала $I$.

$w$ принадлежит классу $A_1$, если

$$w^*(x)\leqslant Cw(x), \qquad (A_1)$$

где $w^*$—максимальная функция Харди-Литтльвуда функции $w$ (определение см. ниже). Аналогично определяются классы $A_p$ на окружности $\mathbf{T}=\partial\mathbf{D}$.

Через $H^p_w\equiv H^p(\mathbf{R}^2_+,\ w(x)\,dx)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ обозначаем пространство всех гармонических в $\mathbf{R}^2_+$ функций, для которых

$$\|f\|^p_{p,w}\equiv\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^p\,w(x)\,dx<\infty. \qquad (3)$$

Если $1<p<\infty$ и $w\in A_p$, то этот класс можно отождествить с классом всех функций $f$, заданных на $\mathbf{R}^1$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,w(x)\,dx<\infty. \qquad (4)$$

Точнее, если выполняется (3), то для функции $f$ существуют нетангенциальные граничные значения (также обозначаемые через $f$) для которых выполняется (4). Обратно, если $f$ удовлетворяет (4), то существует гармоническое продолжение $f$ на $\mathbf{R}^2_+$, которое удовлетворяет условию (3). (См. об этом [2], [3]).

Классы $H^p_w$ в круге $\mathbf{D}$ определяются аналогично.

Через $\Gamma_\alpha(x)$ обозначаем конус в $\mathbf{R}^2_+$ с вершиной в точке $x\in\mathbf{R}$ и раствором угла $\alpha>0$

$$\Gamma_\alpha(x)=\{(t,y)\in\mathbf{R}^2_+ : |t-x|<\alpha y\}.$$

Пусть, далее, $\mathbf{D}=\bigcup_k Q_k$ — разбиение круга $\mathbf{D}$ на диадические прямоугольники $Q_k$, некоторым образом занумерованные.

Введем теперь, следуя работам [4], [5], [6], нужные нам операторы. Каждый из них мы определяем либо для $\mathbf{D}$, либо для $\mathbf{R}^2_+$, однако подразумеваем, что понятно их определение в другом случае.

Пусть $f$ гармонична и принадлежит классу $H^p_w$ (в круге или полуплоскости). Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$g_q(f)(\theta)=\left\{\int_0^1(1-r)^{q-1}|\nabla f(re^{i\theta})|^q\,dr\right\}^{1/q},\quad 2\leqslant q\leqslant\infty;$$

$$G_q(f)(\theta)=\left\{\int_0^1 |\nabla f(re^{i\theta})|^q\, d\mu(r)\right\}^{1/q}, \qquad 2\leqslant q<\infty,$$

$$S(f)(x)=\left\{\iint_{\Gamma_\alpha(x)} |\nabla f(t,y)|^2 dt dy\right\}^{1/2},$$

$$g_\lambda^*(f)(x)=\left\{\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{y}{|x-t|+y}\right)^\lambda |\nabla f(t,y)|^2\, dt dy\right\}^{1/2}, \qquad \lambda>1,$$

$$g_{q,\alpha}(f)(\theta)=\left\{\int_0^1 (1-r)^{q-1}\sup_{\xi\in Q_{re^{i\theta}}} |\nabla f(\xi)|^q\, dr\right\}^{1/q}, \qquad 2\leqslant q\leqslant\infty,$$

где $Q_{re^{i\theta}}$ — тот куб из разложения $D=\bigcup_k Q_k$, который содержит точку $z=re^{i\theta}\in D$.

Локально интегрируемой на $R^1$ функции $f$ сопоставляется максимальная функция Харди-Литтльвуда $f^*$:

$$f^*(x)=\sup_{h>0}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f(y)|\, dy.$$

Теорема А. (Muckenhoupt, [7], [3]). Пусть $1<p<\infty$. Неравенство

$$\int_{-\infty}^\infty (f^*(x))^p\, w(x)\, dx\leqslant C\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^p\, w(x)\, dx$$

имеет место тогда и только тогда, когда $w\in A_p$.

Теорема В (Gundy, Wheeden, [2]). Пусть $f\in H^p_w(R^2_+)$, $1<p<\infty$. Тогда, если $w\in A_p$, то существуют константы $C_1$ и $C_2$, зависящие только от $p$ и такие, что

$$C_1\|f\|^p_{p,w}\leqslant\int_{-\infty}^\infty S^p(f)(x)\, w(x)dx\leqslant C_2\|f\|^p_{p,w}.$$

Заметим, что на самом деле имеет место более сильное утверждение, однако для наших целей достаточно ограничиться этим случаем.

Теорема С (Muckenhoupt, Wheeden, [8]). Пусть $f\in H^p_w(R^2_+)$, $1<p<\infty$, $p>\frac{2}{\lambda}$. Если $w\in A_{\frac{p\lambda}{2}}$, то

$$\int_{-\infty}^\infty (g_\lambda^*(f)(x))^p\, w(x)\, dx\leqslant C\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^p\, w(x)\, dx.$$

Теперь мы приведем несколько почти очевидных следствий из теорем A, B и C.

Предложение 1. a) *Пусть* $1<p<\infty$ *и* $f\in H^p_w(\mathrm{D})$. *Тогда если* $w\in A_p$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^p(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, w(\theta)\, d\theta. \tag{5}$$

b) *Если к тому же* $f$ *нормирована условием* $f(0)=0$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, w(\theta)\, d\theta \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi} g^p(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta. \tag{6}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы B и из известного факта, что $g(f)(\theta)\leqslant CS(f)(\theta)$ (см. [9], стр. 108). Второе утверждение следует из первого и из неравенства (см. [9], стр. 102)

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{h(e^{i\theta})}\, d\theta\right| \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi} g_{(1)}(f)(\theta)\, g_{(1)}(h)(\theta)\, d\theta,$$

верного для достаточно „хороших" функций $f$ и $h$. Здесь

$$g_{(1)}(f)(\theta)=\left\{\int_0^1 (1-r)\left|\frac{\partial}{\partial r} f(re^{i\theta})\right|^2 dr\right\}^{1/2}.$$

Кроме того используется факт, что если $w\in A_p$, $1<p<\infty$, то $w^{-\frac{1}{p-1}}\in A_{p'}$, где $p'=\dfrac{p}{p-1}$ (см., напр., [2], [3]).

Предложение 2. *Если* $f\in H^p_w(\mathrm{D})$, $1<p<\infty$, $2\leqslant q\leqslant\infty$ *и* $w\in A_p$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^p_q(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, w(\theta)\, d\theta.$$

Доказательство. Случай $q=2$—это предложение 1 a). Рассмотрим случай $q=\infty$. Имеем

$$g_\infty(f)(\theta)=\sup_{0<r<1}(1-r)\,|\nabla f(re^{i\theta})|\leqslant C\sup_{0<r<1}|f(re^{i\theta})|\leqslant Cf^*(e^{i\theta}),$$

где первое неравенство следует из оценок ядра Пуассона, а второе—известный факт (см., напр., [9], стр. 77). Таким образом, по теореме A

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^p_\infty(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi} (f^*(e^{i\theta}))^p\, w(\theta)\, d\theta \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, w(\theta)\, d\theta.$$

Общее утверждение для любого $q$, $2 \leqslant q \leqslant \infty$, следует теперь из интерполяционных теорем типа Рисса—Торина. Самый подходящий для нас вариант этой теоремы содержится в [10].

3°. В этом пункте мы докажем весовые неравенства для оператора $G_q(f)$. Начнем, однако, со вспомогательных оценок оператора $g_{q,\cdot}(f)$.

Лемма 1. *Для операторов* $g_*(f) \equiv g_{2,\cdot}(f)$ *и* $g^*(f) \equiv g_2^*(f)$ *имеет место поточечная оценка почти всюду*

$$g_*(f)(x) \leqslant Cg^*(f)(x).$$

Доказательство. Пусть $Q$ — некоторый диадический прямоугольник в $\mathbf{R}^2_+$, содержащий фиксированную точку $z = (x, y)$. Тогда ясно, что $\frac{1}{2} y \leqslant \operatorname{dist}(Q, \mathbf{R}) \leqslant 2y$. Пусть $\zeta = (\xi, \eta)$ — некоторая другая точка в $Q$. Тогда, так как градиент гармонической функции есть гармонический вектор, будем иметь по формуле Пуассона

$$\nabla f(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla f\left(t, \frac{y}{4}\right) \frac{\eta - \frac{1}{4} y}{|\xi - t|^2 + \left(\eta - \frac{1}{4} y\right)^2} dt.$$

Отсюда, по неравенству Коши и из того факта, что при $\zeta \in Q$ имеем

$$-\alpha\left(\eta - \frac{y}{2}\right) + |x - t| < |\xi - t| < |x - t| + \alpha\left(\eta - \frac{y}{2}\right)$$

и

$$\frac{3}{4} y \leqslant \eta - \frac{1}{4} y \leqslant \frac{5}{4} y,$$

получим

$$|\nabla f(\xi)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \nabla f\left(t, \frac{y}{4}\right) \right|^2 \frac{\eta - \frac{1}{4} y}{|\xi - t|^2 + \left(\eta - \frac{1}{4} y\right)^2} dt \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} \left| \nabla f\left(t, \frac{y}{4}\right) \right|^2 \frac{y}{|x - t|^2 + y^2} dt \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla f(t, y)|^2 \frac{y}{|x - t|^2 + y^2} dt.$$

Взяв sup в левой части по всем $\zeta \in Q$ и проинтегрировав по мере $y dy$, получим

$$g_*^2(f)(x) = \int_0^{\infty} y \sup_{\zeta \in Q_{x,y}} |\nabla f(\xi)|^2 dy \leqslant$$

$$< C \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\nabla f(t, y)|^2 \frac{y^2}{|x-t|^2+y^2} dt dy \leqslant C (g^*(f)(x))^2.$$

Лемма 2. *Для оператора $g_{\infty,\infty}(f)$ имеет место поточечная оценка почти всюду*

$$g_{\infty,\infty}(f)(x) < Cf^*(x).$$

Доказательство почти очевидно:

$$g_{\infty,\infty}(f)(x) = \sup_{y>0} \sup_{\zeta \in Q(x,y)} y|\nabla f(\zeta)| \leqslant C \sup_{y>0} \sup_{\zeta \in Q(x,y)} |f(\zeta)| \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{\zeta \in \Gamma_\alpha(x)} |f(\zeta)| \leqslant Cf^*(x),$$

так как все прямоугольники $Q_{(x,y)}$ из диадического разбиения, содержащие точку $(x, y)$, лежат в некотором фиксированном конусе $\Gamma_\alpha(x)$ с вершиной $x \in \mathbf{R}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in H^p_w(\mathbf{R}^2_+)$, $1 < p < \infty$ и $2 \leqslant q < \infty$. Тогда если $w \in A_p$, то*

$$\|g_{q,\infty}(f)\|_{p,w} \leqslant C\|f\|_{p,w}.$$

Доказательство является простым следствием лемм 1 и 2 и теоремы С, а также уже упомянутой интерполяционной теоремы типа Рисса-Торина из [10].

Перейдем теперь к оценкам функции

$$G^q_\mu(f)(\theta) = \int_0^1 |\nabla f(re^{i\theta})|^q d\mu(r).$$

Относительно меры $d\mu$, участвующей в определении этого оператора, будем предполагать, что для любого отрезка $[a, 1]$, $0 \leqslant a < 1$, имеет место неравенство

$$\int_0^1 d\mu(r) \leqslant C(1-a)^q \qquad \text{C (q)}$$

Заметим, что из этого условия следует, что если $(a, b)$ — некоторый интервал в $[0, 1]$ и если величины $b-a$ и $1-a$ соизмеримы, то

$$\int_a^b d\mu(r) \leqslant C(b-a)^q.$$

Это обстоятельство будет использовано нами при доказательстве теоремы 2 неоднократно.

Теорема 2. а) *Если для любой функции $f \in H^p_w(\mathbf{D})$ выполняется неравенство*

$$\|G_q(f)\|_{p,w} \leqslant C\|f\|_{p,w},$$

*то мера $d\mu$ удовлетворяет условию $C(q)$, $2 \leqslant q < \infty$.*

b) *Если* $2 \leqslant q = p < \infty$, $\mu$ *удовлетворяет условию* $C(p)$, *а весовая функция принадлежит классу* $A_p$, *то*

$$\|G_p(f)\|_{p,w} \leqslant C\|f\|_{p,w}.$$

c) *Если* $2 < q < p < \infty$, $\mu \in C(q)$, *а* $w \in A_p$, *то*

$$\|G_q(f)\|_{p,w} C \leqslant \|f\|_{p,w}.$$

d) *Если* $1 < p < q$, $q \geqslant 2$, $\mu \in C(q)$, $w \in A_q$, *и если предположить дополнительно, что* $f$ *аналитична в* D, *то*

$$\|G_q(f)\|_{p,w} < C\|f\|_{p,w}.$$

Доказательство. a) Здесь мы можем просто сослаться на пункт i) теоремы 2 из [6].

b) Пусть теперь $p = q \geqslant 2$ и $D = \bigcup_k Q_k$ — диадическое разбиение круга D. Обозначим через $\delta_k$ длину стороны куба и через $I_k$—основание $Q_k$. Пусть также $m_w(I) = \int_I w(\theta)\,d\theta$. Тогда имеем

$$\|G_p(f)\|_{p,w} = \int_{-\pi}^{\pi} w(\theta)\,d\theta \int_0^1 |\nabla f(re^{i\theta})|^p\,d\mu(r) =$$

$$= \iint_D |\nabla f(re^{i\theta})|^p\, w(\theta)\,d\mu(r)\,d\theta = \sum_k \iint_{Q_k} |\nabla f(re^{i\theta})|^p\, w(\theta)\,d\mu(r)\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \sup_{\zeta \in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^p \iint_{Q_k} w(\theta)\,d\mu(r)\,d\theta \leqslant C \sum_k \sup_{\zeta \in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^p\, \delta_k^p \int_{I_k} w(\theta)\,d\theta =$$

$$= C \sum_k \sup_{\zeta \in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^p\, \delta_k^p\, m_w(I_k), \tag{7}$$

так как $\mu$ удовлетворяет условию $C(p)$.

С другой стороны, по теореме 1, если $w \in A_p$, то

$$\|f\|_{p,w}^p > C\|g_p\|_{p,w}^p = \int_{-\pi}^{\pi} w(\theta)\,d\theta \int_0^1 (1-r)^{p-1} \sup_{\zeta \in Q_{re^{i\theta}}} |\nabla f(\zeta)|^p\,dr =$$

$$= \sum_k \sup_{\zeta \in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^p (1-r)^{p-1}\, w(\theta)\,d\theta dr =$$

$$= \sum_k \sup_{\zeta \in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^p \iint_{Q_k} (1-r)^{p-1}\, w(\theta)\,d\theta dr =$$

$$= C \sum_k \sup_{\zeta \in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^p\, \delta_k^p\, m_w(I_k). \tag{8}$$

Сопоставив (7) и (8), получим требуемое утверждение.

c) Пусть теперь $2 \leqslant q < p < \infty$ и неотрицательная функция $\varphi(\theta)$ принадлежит классу $L^{p/p-q}(T, w^{-q/p-q}(\theta)\,d\theta)$, $\|\varphi\| \leqslant 1$. Тогда имеем

$$I_f = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\, G_q^q(f)(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \varphi(\theta)\, |\nabla f(re^{i\theta})|^q\, d\mu(r)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \sup_{\zeta\in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^q \iint_{Q_k} d\mu(r)\, \varphi(\theta)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_k \sup_{\zeta\in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^q\, \delta_k^q \int_{I_k} \varphi(\theta)\, d\theta. \tag{9}$$

Но

$$\delta_k^q \int_{I_k} \varphi(\theta)\, d\theta = C \iint_{Q_k} (1-r)^{q-1}\, \varphi(\theta)\, d\theta dr,$$

поэтому можно продолжить неравенство (9). Получим

$$I_f \leqslant C \sum_k \iint_{Q_k} \sup_{\zeta\in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^q\, (1-r)^{q-1}\, \varphi(\theta)\, d\theta dr =$$

$$= C \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\, g_{q,\cdot}^q(f)(\theta)\, w^{q/p}(\theta)\, w^{-q/p}(\theta)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C \left( \int_{-\pi}^{\pi} g_{p,\cdot}^q(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta \right)^{q/p} \left( \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(\theta))^{p/p-q}\, w^{-q/p-q}(\theta)\, d\theta \right)^{p-q/p} \leqslant$$

$$\leqslant C \|f\|_{p,w}^q \cdot \|\varphi\|_{\frac{p}{p-q},\, w^{-\frac{q}{p-q}}} \leqslant C \|f\|_{p,w}^q,$$

где предпоследнее неравенство следует из теоремы 1, если $w \in A_p$.

Беря sup по всем таким $\varphi$, получим

$$\|G_q(f)\|_{p,w} \leqslant C \|f\|_{p,w},$$

если только $w \in A_p$.

d) Пусть, наконец, $1 < p < q$, $q > 2$ и функция $f \in H_w^p$ аналитична. Предположим также, что $f$ не имеет нулей в D. Тогда найдется аналитическая в D функция $\varphi$, $\varphi \in H_w^q(\mathrm{D})$ такая, что $f = \varphi^{q/p}$. Стало быть $f' = \frac{q}{p}\, \varphi^{q-p/p}\, \varphi'$ и

$$G_q(f)(\theta) = G_q(\varphi^{q/p})(\theta) =$$

$$\left\{ \frac{q}{p} \int_0^1 |\varphi(re^{i\theta})|^{\frac{q-p}{p}q}\, |\varphi'(re^{i\theta})|^q \cdot d\mu(r) \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C\, (\varphi^*(e^{i\theta}))^{q-p/p}\, G_q(\varphi)(\theta).$$

Имеем, далее, по неравенству Гельдера

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_q^p(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta < C \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi^*(\theta))^{q-p}\, G_q^p(\varphi)(\theta)\, \omega(\theta)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C \left( \int_{-\pi}^{\pi} G_q^q(\varphi)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta \right)^{p/q} \left( \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi^*(\theta))^q\, w(\theta)\, d\theta \right)^{\frac{q-p}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C \|\varphi\|_{q,w}^p \|\varphi\|_{q,w}^{q-p} = C \|\varphi\|_{p,w}^q,$$

в силу теоремы A и части b) настоящей теоремы, если $w \in A_q$. Но $\|\varphi\|_{q,w}^q = \|f\|_{p,w}^p$, следовательно

$$\|G_q(f)\|_{p,w} \leqslant C \|f\|_{p,w},$$

если $w \in A_q$.

Если $f$ имеет нули в D, то напишем $f = f_1 + f_2$, $\|f_i\|_{p,w} \leqslant C \|f\|_{p,w}$ и $f_i$ не имеет нулей в D, $i = 1, 2$.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Теорема 2 верна и в гораздо более общей ситуации. Можно рассматривать меры $\mu$, зависящие не только от радиуса, но также, как в [6], от аргумента. Однако мы ограничились этим случаем во избежание не относящихся к существу дела технических осложнений.

4°. В этом пункте мы приведем одно применение доказанных выше теорем. Именно, мы можем дать обобщение известной теоремы Марцинкевича—Михлина—Хёрмандера о мультипликаторах преобразований Фурье в случае весовых пространств.

Пусть $m$ — ограниченная измеримая функция на $\mathbf{R}^n$. Назовем ее мультипликатором для $L_w^p \equiv L^p(\mathbf{R}^n, w(x)\, dx)$, если

$$\int_{\mathbf{R}^n} |T_m f(x)|^p\, w(x)\, dx \leqslant C \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p\, w(x)\, dx,$$

где оператор $T_m$ задается формулой

$$(T_m f)^\wedge(x) = m(x)\, \hat{f}(x),$$

а крышка означает преобразование Фурье (нужно только позаботиться, чтобы $f$ принадлежала подходящему классу).

Множество всех мультипликаторов класса $L_w^p$ обозначим через $M^p(w)$.

Теорема 3. *Пусть $m \in C^k$ на дополнении к началу координат в $\mathbf{R}^n$, $k > \frac{n}{2}$ — целое. Пусть, далее*

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha m(x) \right| \leqslant C\, |x|^{-|\alpha|}, \quad |\alpha| < k, \tag{10}$$

*для любого одночлена* $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$. *Тогда если* $1<p<\infty, p>\frac{n}{k}$, $w\in A_p\cap A_{\frac{pk}{n}}$, *то* $m\in M^p(w)$.

Доказательство. Обозначим $F(x)=T_m f(x)$.

Тогда имеет место неравенство (см. [9], стр. 115)

$$g_{(1)}(F)(x)\leqslant C g_{\lambda}^{*}(f)(x) \tag{11}$$

при $\lambda=\frac{2k}{n}>1$.

С одной стороны, по предложению 1,

$$C\int_{R^n} g_{(1)}^{p}(F)(x)\, w(x)\, dx>\int_{R^n}|F(x)|^p w(x)\, dx=$$

$$=\int_{R^n}|T_m f(x)|^p w(x)\, dx,$$

если $w\in A_p$.

С другой стороны, по теореме С, если $w\in A_{\frac{pk}{n}}$, то

$$\int_{R^n}(g_{\lambda}^{*}(f)(x))^p w(x)\, dx\leqslant C\int_{R^n}|f(x)|^p w(x)\, dx.$$

Сопоставив эти два неравенства, получим

$$\int_{R^n}|T_m f(x)|^p w(x)\, dx\leqslant C\int_{R^n}|f(x)|^p w(x)\, dx,$$

если $w\in A_{\frac{pk}{n}}\cap A_p$, $1<p<\infty$, $p>\frac{n}{k}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Предположение (10) можно заменить более слабыми предположениями

$$|m(x)|\leqslant C,\ \sup_{R>0} R^{2|\alpha|-n}\int_{R<|x|<2R}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} m(x)\right|^2 dx\leqslant C. \qquad |\alpha|\leqslant k.$$

Доказательство следует из того, что неравенство (11) справедливо и для таких функций (см. об этом [9], стр. 115).

Следствие 2. Если $m$ удовлетворяет условиям теоремы 3 или следствия 1 и $m\in M^p(w)$ при некотором $p>1$, то $m$ принадлежит также $M^q(w)$ при любом $q>p$. В частности, если $w\in A$, то $m\in M^p(w)$ при любом $p>1$.

Доказательство сразу следует из теоремы 3 и из того факта, что если $w\in A_r$, $r>1$, то $w\in A_s$ для всех $s$, $s>r$ (см., напр., [2], [3]).

Замечание 2. В процессе написания этой работы нам стало известно, что результат, более сильный, чем теорема 3, получен в работе [11]. Однако наш способ доказательства существенно отличается от способа этой работы и результат получается значительно проще.

Примечание при корректуре. Недавно мы узнали, что несколько иное доказательство теоремы 3 имеется также в работе D. S. Kurtz "Littlewood-Paley and multiplier theorems on weighted $L^p$ spaces", Trans. Amer. Math. Soc., 259, № 1, 1980, 235—254.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.I.1981

Ա. Է. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Կշռային անհավասարություններ Լիթլվուդ-Պելիի տիպի օպերատորների և Ֆուրյեի ձևափոխությունների մուլտիպլիկատորների համար (*ամփոփում*)

*Հոդվածում գտնված են անհրաժեշտ պայմաններ, որպեսզի Լիթլվուդ-Պելիի տիպի ընդհանուր օպերատորները անընդհատ լինեն $L^p(w)$ կշռային տարածություններում։ Պարզվում է, որ դրա համար բավարար է, որ $w$ կշռային ֆունկցիան բավարարի Մաքենհուպտի հայտնի $A_p$ պայմանին։ Բերված են նաև կիրառություններ Ֆուրյեի ձևափոխությունների մուլտիպլիկատորների վերաբերյալ։*

A. E. DJRBASHIAN. *Weighted inequalities for Littlewood-Paley type operators and Fourier multipliers* (summary)

There are found in the paper sufficient conditions for general Littlewood-Paley functions to be bounded in weighted classes $L^p(w)$. It turns out that it is sufficient that the weight function satisfy the well-known Muckenhoupt condition $A_p$. Applications to Fourier multipliers are also given.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, М., «Мир», 1965, т. 1, 2.
2. *R. F. Gundy, R. L. Wheeden.* Weighted integral inequalities for the nontangential maximal function, Lusin area integral, and Walsh-Paley series, Stud. Math 49, № 2, 1974, 107—124.
3. *R. R. Coifman, C. Fefferman.* Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Stud. Math., 51, № 3, 1974, 241—250.
4. *A. Zygmund.* On certain integrals, Trans. Math. Soc., 55, 1944, 170—204.
5. *E. M. Stein.* On functions of Littlewood-Paley, Lusin and Marcikiewicz, Trans. Amer. Math. Soc., 88, 1958, 430—466.
6. *Н. А. Широков.* Некоторые обобщения теоремы Литтльвуда-Пэли. Записки науч. сем. ЛОМИ, 39. 1973, 162—175.
7. *B. Muckenhoupt.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc., 165, 1972, 207—226.
8. *B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden.* Norm inequalities for the Littlewood-Paley function $g_\lambda^*$, Trans. Amer. Math. Soc., 191, 1974, 95—111.
9. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., «Мир», 1973.
10. *А. Э. Джрбашян.* Весовая оценка для функции $g_q$ Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 14, № 5, 1979, 338—347.
11. *D. S. Kurtz, R. L. Wheeden.* Results on weighted norm inequalities for multipliers, Trans. Amer. Math. Soc., 255, 1979, 343—362.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 3, 1981 Математика

В. В. АНДРИЕВСКИЙ, С. П. ГЕРМАН

# ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА КВАЗИКОНФОРМНЫХ ДУГАХ

Вопрос приближения функций, непрерывных на ограниченных жордановых дугах, является важным случаем более общей задачи описания приближения полиномами функций различных классов на произвольных континуумах комплексной плоскости.

В работах В. К. Дзядыка и его учеников (подробный обзор работ см. [1]), Л. И. Колесник [2], И. А. Шевчука [3] и других, была получена оценка скорости полиномиального приближения на кусочно-гладких дугах, зависящая от положения точки $z$, в которой исследуется отклонение аппроксимационного полинома от заданной функции, как в терминах модуля непрерывности, так и модулей гладкости порядка $k>1$.

Другим важным случаем задачи приближения на континуумах является вопрос о приближении функций в областях комплексной плоскости. Идея привлечения понятия квазиконформности к этим вопросам и ее методологическое обоснование принадлежит В. И. Белому [5], который впервые получил прямые теоремы теории приближения в областях, ограниченных квазиконформными кривыми. Оценка скорости сходимости для равномерных модулей гладкости порядка $k>1$, введенных П. М. Тамразовым [6, 7], была получена В. И. Белым и П. М. Тамразовым [8].

В работе В. В. Андриевского [4] получены прямые теоремы приближения для непрерывных функций, заданных на квазиконформных дугах с оценками, зависящими от модуля непрерывности аппроксимируемой функции.

Настоящая работа продолжает изучение вопроса о скорости полиномиальной аппроксимации на конечных квазиконформных дугах и устанавливает прямую теорему приближения в терминах нормальной мажоранты $k$-го ($k\geqslant 1$) модуля гладкости заданной функции.

## § 1. Основные определения и результаты

Пусть $L$ — произвольная конечная жорданова дуга, $\Omega=CL$ — ее односвязное дополнение, $\infty\in\Omega$. Рассмотрим функцию $w=\Phi(z)$, конформно и однолистно отображающую $\Omega$ на $\Omega'=\{w: |w|>1\}$, нормированную условиями

$$\Phi(\infty)=\infty,\ \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}\Phi(z)>0.$$

Это отображение продолжимо до гомеоморфизма между компактификациями $\widetilde{\Omega}$ и $\overline{\Omega}'$ (см., например, [9], стр. 62—92), совпадающего с $\Phi$ в $\Omega$. Сохраним за ним это обозначение и обозначим через $\psi$ — обратный гомеоморфизм.

Поскольку объектом нашего изучения являются непрерывные функции, заданные на квазиконформных конечных дугах, обозначим через $C(L)$ класс таких функций и приведем один из геометрических критериев квазиконформной дуги (см. [10], с. 102—103): жорданова дуга $L$ квазиконформна тогда и только тогда, когда для произвольных трек точек $z_1$, $z_2$, $z_3$, расположенных на $L$ в порядке возрастания индексов, справедливо соотношение

$$\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right| \leqslant 1. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем под символом $A \leqslant B$ $(A>0,\ B>0)$ мы будем понимать, что существует константа $C>0$, не зависящая от $A$ и $B$ и такая, что $A \leqslant CB$.

Обозначим через $z_1$ и $z_2$ концы квазиконформной дуги $L$ и положим $\Phi(z_i)=w_i$, $i=1,\ 2$.

$$\Omega_i' = \{w: |w|>1;\ \arg w_1 < \arg w < \arg w_2\};$$

$$\Omega_2' = \Omega' \setminus \overline{\Omega}_1';$$

$$\Omega_i = \psi(\Omega_i'),\ i=1,\ 2.$$

Используя геометрический критерий (1), нетрудно проверить квазиконформность границ областей $\Omega_i'$, $i=1,\ 2$. Как показано в [4], граница областей $\Omega_i$, $i=1,\ 2$ также является квазиконформной кривой.

Следуя [6], нормальной мажорантой будем называть всякую конечную функцию $\mu(\delta)$, заданную, положительную и неубывающую на $0<\delta<\delta_0$, для которой при некоторых фиксированных $\sigma \geqslant 1$ и $\gamma>0$ выполняется неравенство

$$\mu(t\delta) \leqslant \sigma t^{\gamma} \mu(\delta),\ t \geqslant 1.$$

Обозначим через

$$G_i = \{\zeta: \zeta \in \Omega_i;\ 1<|\Phi(\zeta)|<3\},\ i=1,\ 2,$$

$$G_3 = G_1 \cup G_2,$$

$$L^{(i)}_{1+\frac{1}{n}} = \left\{\zeta: \zeta \in \Omega_i;\ |\Phi(\zeta)| = 1+\frac{1}{n}\right\},\ i=1,\ 2,$$

$$\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z) = \inf_{\zeta \in L^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}} |\zeta - z|,\ z \in L,\ i=1,\ 2,$$

$$\rho^{*}_{1+\frac{1}{n}}(z) = \max\{\rho^{(1)}_{1+\frac{1}{n}}(z),\ \rho^{(2)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\}.$$

В настоящей работе используются равномерные модули гладкости, введенные в [6] и обозначаемые, согласно [7], через $\omega_{k,N,L,f}(\delta)$. Используя указанные определения и обозначения, сформулируем теорему, являющуюся основной в представленной работе.

Теорема 1. *Пусть $L$—конечная квазиконформная дуга. Тогда для любой $f(z)\in C(L)$ существует алгебраический полином $P_n(z)$, степени не выше $n$ такой, что для всех $z\in L$ имеет место неравенство*

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant \mu\,[\rho^{*}_{1+\frac{1}{n}}(z)],$$

*где $\mu(\delta)$ — нормальная мажоранта для $k$-го модуля гладкости $\omega_{k,N,L,f}(\delta)$ ($k>1$, $N$ — достаточно велико).*

## § 2. Геометрические свойства квазиконформных дуг

Сделаем ряд замечаний, касающихся отображающих функций $\Phi$ и $\psi$.

В силу описанной в [4] возможности представлять функцию $\Phi(z)$, рассматриваемую отдельно в $\Omega_1$ и $\Omega_2$, в виде следа некоторого квазиконформного отображения плоскости на себя и известных свойств квазиконформных отображений (см. [10], стр. 216) можно записать следующую оценку искажения площадей при отображении $\Phi$:

$$\operatorname{mes} A\leqslant[\operatorname{mes}\Phi(A)]^{\alpha}, \tag{2}$$

где $A\subset\overline{\Omega}$ — произвольное измеримое множество, $\Phi(A)$ — его образ, а $0<\alpha<1$ — константа, зависящая только от $L$.

Тогда справедлива следующая

Лемма 1. *Для произвольного $0<u\leqslant 1$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{L_{1+u}} d(\zeta, L)\,|d\zeta|\leqslant u^{\alpha}, \tag{3}$$

*где $d(\zeta, L)$ — расстояние от $\zeta\in\Omega$ до кривой $L$, $L_{1+u}=\{\zeta:\zeta\in\Omega;\ |\Phi(\zeta)|=1+u\}$, $0<\alpha<1$ зависит только от $L$.*

Доказательство. Положим для краткости

$$A(v)=\int\limits_{L_{1+v}} d(\zeta, L)\,|d\zeta|.$$

Убедимся сначала в справедливости следующего соотношения:

$$A(u-t)\asymp A(u);\ 0\leqslant t\leqslant\frac{u}{2}. \tag{4}$$

Действительно, переходя на внешность единичного круга и учитывая соотношение $|\psi'(w)| \asymp \dfrac{d(\psi(w), L)}{|w|-1}$, где $d(\zeta, L) = \inf\limits_{z \in L} |\zeta - z|$ из работы [4], будем иметь

$$A(u) = \int\limits_{|w|=1+u} |\psi'(w)|\, d(\psi(w), L)\, |dw| \asymp \frac{1}{u} \int\limits_{|w|=1+u} [d(\psi(w), L)]^2 |dw|,$$

$$A(u-t) \asymp \frac{1}{u-t} \int\limits_{|w|=1+u-t} [d(\psi(w), L)]^2 |dw|. \tag{5}$$

В соотношении (5) сделаем замену переменной $\tau = \dfrac{1+u}{1+u-t} w$. Как было установлено в работе [4], $d(\zeta, L) \asymp |\zeta - \zeta_L|$, где $\zeta_L = \psi\,[\Phi(\zeta) \cdot |\Phi(\zeta)|^{-1}$, а также то, что условия $|\zeta - \zeta_1| \asymp |\zeta - \zeta_2|$ и $|w - w_1| \asymp |w - w_2|$ — эквивалентны ($w_1$ и $w_2$—образы точек $\zeta_1$ и $\zeta_2$ при отображении $\Phi$). Используя эти факты, легко показать справедливость соотношения

$$d(\psi(w), L) \asymp d(\psi(\tau), L),$$

следовательно

$$A(u-t) \asymp \frac{1}{u-t} \int\limits_{|w|=1+u-t} [d(\psi(w), L)]^2 |dw| \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{u-t} \cdot \frac{1+u-t}{1+u} \int\limits_{|\tau|=1+u} [d(\psi(\tau), L)]^2 |d\tau| \asymp A(u),$$

что и утверждается в соотношении (4). Установим теперь справедливость оценки (3). Интегрируя соотношение (4) и учитывая то, что $d(\zeta, L) \asymp |\zeta - \zeta_L|$ и оценку (2), находим

$$A(u) \cdot \frac{u}{2} \asymp \int\limits_{1+\frac{u}{2}}^{1+u} dR \int\limits_{L_R} d(\zeta, L)\, |d\zeta| =$$

$$= \int\limits_{1+\frac{u}{2}}^{1+u} dR \int\limits_{|w|=R} d(\psi(w), L) \cdot |\psi'(w)|\, |dw| \asymp$$

$$\asymp \int\limits_{1+\frac{u}{2}}^{1+u} \int\limits_{0}^{2\pi} |\psi'(w)|^2 R\, dR\, d\varphi = u \cdot \operatorname{mes} \psi \left( \left\{ w : 1 + \frac{u}{2} \leqslant |w| \leqslant 1 + u \right\} \right) \leqslant u^{1+\alpha},$$

откуда следует неравенство (3).

## § 3. Усреднение функций, заданных на внешности конечной квазиконформной дуги

Пользуясь идеей свертки с ядром С. Н. Мергеляна (см. [11], стр. 43), опишем один из возможных способов усреднения функций, заданных на внешности произвольной конечной квазиконформной дуги $L$.

Рассмотрим сначала случай единичного круга.

Лемма 2. *Пусть в* $\overline{\Omega}' = \{w : 1 \leqslant |w| < \infty\}$ *задана непрерывная функция* $\bar{f}(w)$. *Тогда для всякого натурального* $n$ *существует функция* $\bar{f}_n(w)$ *со следующими свойствами:*

1) $\bar{f}_n(w)$ *непрерывна в* $\overline{\Omega}'$, *причем*

$$\bar{f}_n(w) = \bar{f}(w), \text{ если } |w| = 1;$$

2) *если* $l(w) = \{\cos\alpha_1(w), \cos\alpha_2(w)\}$ — *непрерывно меняющаяся в* $\Omega'$ *вектор-функция направлений, то функция* $\dfrac{\partial \bar{f}_n(w)}{\partial l(w)}$ *непрерывна в* $\Omega' \setminus \left\{w : |w| = 1 + \dfrac{1}{n}\right\}$ *и имеет место следующее неравенство:*

$$\left|\frac{\partial \bar{f}_n(w)}{\partial l(w)}\right| \leqslant \frac{1}{\delta(w)} \sup_{|\tau - w| < \delta(w)} |\bar{f}(w) - \bar{f}(\tau)|, \tag{6}$$

*где* $w \in \Omega' \setminus \left\{w : |w| = 1 + \dfrac{1}{n}\right\}$,

$$\delta(w) = \begin{cases} |w| - 1, \text{ если } |w| < 1 + \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n}, \text{ если } |w| \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}; \end{cases} \tag{7}$$

3) *для* $w, \tau \in \left\{w : |w| = 1 + \dfrac{1}{n}\right\}$

$$|\bar{f}_n(w) - \bar{f}_n(\tau)| \leqslant n\,|w - \tau| \sup_{|w| = 1 + \frac{1}{n}} |\tilde{f}(w)|, \tag{8}$$

*т. е.* $\bar{f}_n(w) \in \mathrm{Lip}\,1$ *на* $\left\{|w| = 1 + \dfrac{1}{n}\right\}$.

Доказательство. Зафиксируем натуральное число $n$ и укажем метод построения функции $\bar{f}_n(w) = \bar{f}_n(\tilde{f}, w)$. Для этого, как это было сделано в работе [4], воспользуемся идеей обобщенной свертки с помощью ядер С. Н. Мергеляна

$$K_\delta(r)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{r}{\delta}\right)\dfrac{3}{\pi\delta^2}, & 0<r\leqslant\delta,\\ 0, & r>\delta.\end{cases}$$

Положим $r=r(\tau, w)=|\tau-w|$, $w=u+iv$, $\delta=\delta(w)$ определим как в (7). Тогда для $w\in\Omega'$, $|w|\neq 1+\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{\partial K_\delta(r)}{\partial l(w)}$ определяется по формуле

$$\frac{\partial K_\delta(r)}{\partial l(w)}=\begin{cases}\dfrac{3}{\pi\delta^3}\left\{\left[-r'_n-\delta'_u\left(2-\dfrac{3r}{\delta}\right)\right]\cos\alpha_1(w)+\right.\\ \left.+\left[-r'_v-\delta'_v\left(2-\dfrac{3r}{\delta}\right)\right]\cos\alpha_2(w)\right., & 0<r<\delta,\\ 0, & r>\delta,\end{cases}$$

откуда, так же как и в работе [4], заключаем

$$\iint\limits_{\text{пл. }\tau}\frac{\partial K_\delta(r)}{\partial l(w)}\,d\sigma_\tau=0, \tag{9}$$

$$\left|\frac{\partial K_\delta(r)}{\partial l(w)}\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{\delta^3}, & 0<r<\delta,\\ 0, & r>\delta,\end{cases} \tag{10}$$

$$\iint\limits_{\text{пл. }\tau}\left|\frac{\partial K_\delta(r)}{\partial l(w)}\right|d\sigma_\tau\leqslant\frac{1}{\delta}. \tag{11}$$

В качестве искомой возьмем функцию

$$\tilde f_n(w)=\begin{cases}\iint\limits_{\text{пл. }\tau}\tilde f(\tau)\,K_{\delta(w)}(|\tau-w|)\,d\sigma_\tau, & w\in\Omega',\\ \tilde f(w), & |w|=1.\end{cases} \tag{12}$$

Переходя в соотношении (12) к дифференцированию под знаком интеграла и пользуясь соотношениями (9) — (10) получим, следуя доказательству работы [4], оценку (6). Докажем теперь неравенство (8). Пусть $|w|=|\tau|=1+\dfrac{1}{n}$. Тогда имеем

$$|\tilde f_n(w)-\tilde f(\tau)|=\left|\iint\limits_{\text{пл. }t}\tilde f(t)\,K_{1/n}(|t-w|)\,d\sigma_t-\iint\limits_{\text{пл. }t}\tilde f(t)\,K_{1/n}(|t-\tau|)\,d\sigma_t\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{1<|t|<1+\frac{2}{n}}|\tilde f(t)|\cdot\iint\limits_{\text{пл. }t}|K_{1/n}(|t-w|)-K_{1/n}(|t-\tau|)|\,d\tau_t.$$

Остается установить справедливость неравенства

$$\iint\limits_{\text{пл. } t} |K_{1/n}(|t-w|) - K_{1/n}(|t-\tau|)|\,d\sigma_t \leqslant n\,|w-\tau|,$$

которое проверяется непосредственно, исходя из конкретного вида входящих в него величин.

Рассмотрим теперь случай произвольной конечной дуги.

Лемма 3. *Пусть $L$ — конечная квазиконформная дуга, а $f(\zeta)$ задана и непрерывна в конечной комплексной плоскости. Тогда для всякого натурального $n$ существует функция $f_n^*(\zeta)$ со следующими свойствами:*

1) *$f_n^*(\zeta)$ задана и непрерывна в конечной комплексной плоскости, причем*

$$f_n^*(\zeta) = f(\zeta), \text{ если } \zeta \in L;$$

2) *функция $f_n^*(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$ непрерывно дифференцируема по $\xi$ и по $\eta$ в $\Omega \setminus L_{1+\frac{1}{n}}$ и выполняются следующие условия:*

$$\left|\frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \eta}\right| \leqslant \frac{n\left(|\Phi(\zeta)| - 1 + \frac{1}{n}\right)}{|\zeta - \zeta_L|} \cdot \sup_{z \in V(\zeta)} |f(\zeta) - f(z)|, \quad (13)$$

*где $\zeta_L$ — тело простого конца $Z_L = \psi[\Phi(\zeta)\cdot|\Phi(\zeta)|^{-1}]$,*

$$V(\zeta) = \{z : |\Phi(\zeta) - \Phi(z)| \leqslant \delta[\Phi(\zeta)]\};$$

3) $\qquad f_n^*(\zeta) \in \mathrm{Lip}\,1$ *на* $L_{1+\frac{1}{n}}$.

Доказательство. Искомую функцию построим, опираясь на лемму 2. Пусть $\tilde{f}(w) = f[\psi(w)]$, $\tilde{f}_n(w) = \tilde{f}_n(\tilde{f}, w)$ — функция, заданная формулой (12). Положим

$$f_n^*(\zeta) = \begin{cases} \tilde{f}_n[\Phi(\zeta)], & \zeta \in \Omega = CL, \\ f(\zeta), & \zeta \in L. \end{cases}$$

Свойство 1 очевидно. Неравенство (13) получается так же, как и оценка

$$\left|\frac{\partial f_n^*(z)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f_n^*(z)}{\partial y}\right| \leqslant \frac{1}{|z - z_L|} \sup_{\zeta \in V(z)} |f(\zeta) - f(z_L)|$$

работы [4], путем применения соотношения (6), соотношения $|\psi'(w)| \asymp \frac{d[\psi(w), L)}{|w| - 1}$ (см. [4]) и того факта, что

$$\frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \eta} = \left[\frac{\partial \tilde{f}_n(w)}{\partial l_\xi(w)} + \frac{\partial \tilde{f}_n(w)}{\partial l_\eta(w)}\right] \cdot |\Phi'(\zeta)|,$$

где $w = \Phi(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, а $l_\xi(w)$ и $l_\eta(w)$ — направления, в которые перейдут, соответственно, направления

$$\{z: \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \zeta\} \text{ и } \{z: \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \zeta\}.$$

Свойство 3) следует из утверждения 3) леммы 2.

Следствие. Если $\zeta \in \operatorname{ext} L_{1+\frac{1}{n}} \cap \operatorname{int} L_3$, то в силу соотношения (13) будем иметь

$$\left|\frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \eta}\right| \leqslant \frac{n \sup\limits_{z \in \operatorname{int} L_{3+\frac{1}{n}}} |f(z)|}{d(L, L_{1+\frac{1}{n}})} = M(n, f),$$

где $d(L, L_{1+\frac{1}{n}}) = \inf\limits_{z \in L,\ \zeta \in L_{1+\frac{1}{n}}} |z - \zeta|$.

Следовательно, в $\operatorname{ext} L_{1+\frac{1}{n}} \cap \operatorname{int} L_3$ частные производные функции $f_n^*(\zeta)$ непрерывны и равномерно ограничены при фиксированном числе $n$.

## § 4. Полиномиальная аппроксимация функций класса Lip 1

Для построения аппроксимационных полиномов, используемых в приближении функций класса $C(L)$, будут использованы ядра $K_{r,m,l,n}(\zeta, z)$, введенные В. К. Дзядыком (см., например, [1], стр. 429). Приведем две леммы, описывающие свойства этих ядер.

Лемма 4.

$$\int\limits_{L_3} K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\, d\zeta \equiv 0, \quad z \in L, \tag{14}$$

где $L_3 = \{\zeta : |\Phi(\zeta)| = 3\}$.

Доказательство. Тождество (14) справедливо в силу того факта, что функция $K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)$ при фиксированном $z$ аналитична в $\Omega$, а на бесконечности

$$|K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)| \leqslant \frac{1}{|\zeta - z|^2}.$$

Лемма 5. *Пусть $L$—конечная квазиконформная дуга. Тогда существует натуральное число $l = l(L) > 2$, при котором для всех $z \in L$ и $\zeta \in G_j$ $(j = 1, 2)$ справедливы соотношения*

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - K_{r,m,l,n}(\zeta, z)\right| \leqslant \frac{[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)]^m}{|\zeta - z|\,[|\zeta - z| + \rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)]^m}; \tag{15}$$

$$|K_{r,m,l,n}(\zeta, z)| \leqslant \frac{1}{|\zeta - z| + \rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}.$$

Эта лемма является частным случаем теоремы 5 работы [12].

Докажем теперь теорему единственности, которая понадобится нам для получения интегрального представления функций.

Теорема 2. *Пусть в комплексной плоскости задана функция $F(\zeta)$, принадлежащая в ней классу* Lip 1 *и обращающаяся в нуль на конечной квазиконформной дуге $L$, тогда при всех $z \in L$ и натуральных $r$, $m$, $l$, $n$ имеет место равенство*

$$\int_{L_z} F(\zeta)\, K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\, d\zeta = 2i \iint_{G_z} \frac{\partial F(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\, K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\, d\sigma_\zeta, \tag{16}$$

*где $K_{r,m,l,n}(\zeta, z)$ — многочленное ядро.*

Доказательство. Зафиксируем $z \in L$ и натуральные числа $r$, $m$, $l$, $n$ и рассмотрим заданную в комплексной плоскости функцию

$$g_z(\zeta) = \begin{cases} F(\zeta)\, K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z); & \zeta \in \Omega, \\ 0, & \zeta \in L. \end{cases}$$

Возьмем произвольное число $u > 0$. В силу леммы 5, при $\zeta \in L_{1+u}$ будем иметь

$$g_z(\zeta) \leqslant d(\zeta, L) \sup_{\zeta \in L_{1+u}} |K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)| \leqslant n^4\, d(\zeta, L),$$

поскольку $\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z) > \dfrac{1}{n^2}$ $(j = 1, 2)$.

Следовательно, учитывая лемму 1, получаем

$$\left| \int_{L_{1+u}} g_z(\zeta)\, d\zeta \right| \leqslant n^4 \int_{L_{1+u}} d(\zeta, L)\, |d\zeta| \leqslant n^4 u^\alpha. \tag{17}$$

Применим к функции $g_z(\zeta)$ формулу Грина (см. [10], стр. 148)

$$\int_{L_z} g_z(\zeta)\, d\zeta - \int_{L_{1+u}} g_z(\zeta)\, d\zeta = 2i \iint_{\operatorname{int} L_z \cap \operatorname{ext} L_{1+u}} \frac{\partial g_z(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\, d\sigma_\zeta. \tag{18}$$

Переходя в (18) к пределу при $u \to 0$ и учитывая неравенство (17) и тот факт, что

$$\frac{\partial g_z(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial F(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\, K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z); \quad \zeta \in \Omega,$$

получим равенство (16).

Следствие. Пусть в комплексной плоскости заданы функции $F_1(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$, принадлежащие классу Lip 1, значения которых совпадают на некоторой квазиконформной дуге $L$, тогда при всех $z \in L$ и натуральных $r$, $m$, $l$, $n$ имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_z} F_1(\zeta)\, K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{G_z} \frac{\partial F_1(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\, K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\, d\sigma_\zeta =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} F_2(\zeta)\,K^2_{r,m,l,n}(\zeta,z)\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_2}\frac{\partial F_2(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\cdot K^2_{r,m,l,n}(\zeta,z)\,d\sigma_\zeta. \qquad (19)$$

Действительно, для того, чтобы убедиться в справедливости равенства (19), достаточно применить теорему 2 к функции $F_1(\zeta)-F_2(\zeta)$.

Аналогично работе [4, стр. 16], с учетом следствия к лемме 3, доказывается

Лемма 6. *Пусть функция $f(z)\in C(L)$ удовлетворяет условию* Lip 1. *Тогда при всех $z\in L$ справедливо интегральное представление*

$$f(z)=f^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f^*(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\frac{\partial f^*(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}, \qquad (20)$$

*где функция $f^*(z)$ задана в конечной комплексной плоскости, принадлежит в ней классу* Lip 1, *а на $L$ совпадает с функцией $f(z)$.*

Пусть $f(\zeta)$ и $f_n^*(\zeta)$ те же функции, что и в лемме 3. Обозначим через $P_n(z, f, f_n^*)$ полином, строящийся по формуле

$$P_n(z,f,f_n^*)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} f_n^*(\zeta)\,K^2_{r,m,l,n}(\zeta,z)\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_2}\frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial\bar\zeta}K^2_{r,m,l,n}(\zeta,z)\,d\sigma_\zeta. \qquad (21)$$

Согласно следствию к теореме 2, $P_n(z, f, f_n^*)=P_n(z, f)$, то есть не зависит от выбора продолжения $f_n^*$.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться этим фактом при оценке величины $|f(z)-P_n(z, f)|$.

Лемма 7. *Пусть на конечной квазиконформной дуге $L$ задана функция $F(\zeta)$, которая представима в виде*

$$F(\zeta)=g(\zeta)+h(\zeta),$$

*где функция $g(\zeta)$ непрерывна на $L$, а $h(\zeta)$ аналитична во всей конечной комплексной плоскости, тогда существует функция $g^*(\zeta)$, непрерывная в конечной комплексной плоскости и такая, что имеют место следующие соотношения:*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{h(\zeta)+g^*(\xi)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_2}\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\,\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}, \qquad (22)$$

$$P_n(F,z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}[h(\zeta)+g^*(\zeta)]\,K^2_{r,m,l,n}(\zeta,z)\,d\zeta-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_2}\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\,K^2_{r,m,l,n}(\zeta,z)\,d\sigma_\zeta, \qquad (23)$$

$$\left|\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\right|\leqslant\frac{n\left(|\Phi(\zeta)|-1+\frac{1}{n}\right)}{|\zeta-\zeta_L|}\sup_{z\in V'(\zeta)}|g(z)-g(\zeta_L)|, \qquad (24)$$

где

$$V'(\zeta)=\left\{z\colon z\in L,\ |\arg\Phi(z)-\arg\Phi(\zeta_L)|\leqslant \arcsin\frac{\delta[\Phi(\zeta)]}{|\Phi(\zeta)|}\right\}.$$

Доказательство. Укажем сначала путь построения функции $g^*(\zeta)$. Для этого положим $g_1(\zeta)=g(\zeta_L)$, $\zeta\in\Omega$, а в качестве $g^*(\zeta)=g^*(g_1,\zeta)$ возьмем функцию из леммы 3. Оценка следует из неравенства (13).

Полагая в равенствах (20) и (21) $f^*(\zeta)=g^*(\zeta)+h(\zeta)$ и пользуясь леммой 6 приходим к соотношениям (22) и (23).

## § 5. Аппроксимация функций класса $C(L)$ функциями класса Lip 1

Зафиксируем произвольное достаточно большое натуральное $n$. Разобьем дугу $L$ на отдельные участки следующим образом. Пусть $z_1$ и $z_2$—концевые точки дуги $L$. Положим $\xi_0=z_1$. В качестве $\xi_1$ возьмем одну из точек пересечения окружности с центром в $\xi_0$ и радиусом $\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(\xi_0)$ с кривой $L$. Этот процесс будем продолжать до тех пор, пока не построим точку $\xi_{m-1}\in L$, для которой $|\xi_{m-1}-z_2|\asymp\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(\xi_{m-1})$ и положим $\xi_m=z_2$. Очевидно, что $m\leqslant n$. Через $\gamma_q$ обозначим часть дуги $L$, лежащую между точками $\xi_{q-1}$ и $\xi_q$. Таким образом, $L=\bigcup\limits_{q=1}^{m}\gamma_q$.

Положим $d_q=|\xi_q-\xi_{q-1}|$. На каждой дуге $\gamma_q$ с концами $\xi_{q-1}$ и $\xi_q$ зафиксируем $k$ точек ($k\geqslant 2$) $\xi_{q_1}=\xi_{q-1}$, $\xi_{q_2},\cdots,\xi_{qk}=\xi_q$, удаленные друг от друга на расстояние не меньшее, чем $\dfrac{d_q}{k-1}$.

Через $f_n(\zeta)$ обозначим кусочно-полиномиальную функцию, полагая при $\zeta\in\gamma_q$:

$$f_n(\zeta)=P_{qk}(\zeta)=\sum_{i=1}^{k}f(\xi_{qi})\prod_{j\neq i}\frac{\zeta-\xi_{qj}}{\xi_{qi}-\xi_{qj}}. \tag{25}$$

В силу свойств конечных разностей (см. [6], стр. 44) имеем при $\zeta\in L$:

$$f(\zeta)-P_{qk}(\zeta)=[\zeta,\xi_{q1},\cdots,\xi_{qk};f,\zeta]. \tag{26}$$

В соответствии с оценками, приведенными в [6], стр. 254, справедлива оценка

$$|[\zeta,\xi_{q1},\cdots,\xi_{qk};f,\zeta]|\leqslant\mu_k[d_q+d(\zeta,\gamma_q)], \tag{27}$$

где $\mu_k(\delta)=\mu(\delta)\left[\dfrac{\delta}{d_q}\right]^{k-1}$, а $\mu(\delta)$ — нормальная мажоранта для $k$-го модуля $\omega_{k,N,L,f}(\delta)$ (здесь $N$ достаточно велико, $N>N_0$ — зависящее от $L$ и $k$). Сопоставляя соотношения (26) и (27), приходим к неравенству

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| \leqslant \mu[\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)]. \tag{28}$$

Пользуясь аддитивностью конечных разностей, находим

$$[\zeta, \xi_{q1}, \cdots, \xi_{qk}; f_n, \zeta] = [\zeta, \xi_{q1}, \cdots, \xi_{qk}; f, \zeta] + [\zeta, \xi_{q1}, \cdots, \xi_{qk}; f_n - f, \zeta],$$

то есть

$$|[\zeta, \xi_{q1}, \cdots, \xi_{qk}; f_n, \zeta]| \leqslant \mu_k[d(\zeta, \gamma_q) + d_q]. \tag{29}$$

Лемма 8. *Пусть $z \in \gamma_q$. Тогда для функции $u(\zeta)$, определяемой равенством*

$$u(\zeta) = u(\zeta, z, n) = f_n(\zeta) - P_{qk}(\zeta), \ \zeta \in L,$$

*справедливо следующее неравенство:*

$$|u(\zeta) - u(z)| = |u(\zeta)| \leqslant \begin{cases} \mu_k(d_q)\dfrac{|\zeta - z|}{d_q}; & |\zeta - z| \leqslant d_q, \\ \mu_k(|\zeta - z|); & |\zeta - z| \geqslant d_q, \end{cases} \tag{30}$$

*где $\zeta \in L$.*

Доказательство. Так как

$$|u(\zeta) - u(z)| = |[\zeta, \xi_{q1}, \cdots, \xi_{qk}; f_n, \zeta]|,$$

то нижняя часть соотношения (30) следует из оценки (29). Установим справедливость верхней части неравенства (30).

Не ограничивая общности, рассмотрим только случай, когда точка $\zeta$ лежит на соседней к $\gamma_q$ дуге (например, когда $\zeta \in \gamma_{q+1}$). Тогда на $\gamma_{q+1}$, как было замечено

$$|u(\zeta)| = |P_{q+1k}(\zeta) - P_{qk}(\zeta)| \leqslant \mu_k(d_q)$$

и как нетрудно показать, пользуясь известной теоремой Бернштейна, см. [13], стр. 26, такое же неравенство будет выполняться для всех $\zeta \in V_q = \{\zeta : |\zeta - \xi_q| \leqslant 2C \cdot d_{q+1}\}$, где константа $C > 1$ выбрана так, чтобы

$$\gamma_{q+1} \in u_q \overset{\mathrm{df}}{=} \{\zeta : |\zeta - \xi_q| \leqslant C d_{q+1}\}.$$

Установим предварительно следующую оценку:

$$|P'_{q+1k}(\zeta) - P'_{qk}(\zeta)| \leqslant \frac{\mu(d_q)}{d_{q+1}}, \ \zeta \in u_q.$$

Положим $\partial V_q = \sigma$, тогда имеем при $\zeta \in u_q$:

$$|P'_{q+1k}(\zeta) - P'_{qk}(\zeta)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\sigma \frac{[P_{q+1k}(\xi) - P_{qk}(\xi)]}{[\xi - \zeta]^2} d\xi\right| \leqslant \frac{\mu_k(d_q)}{d_{q+1}}.$$

Таким образом, если $\zeta \in \gamma_{q+1}$, то

$$|P_{q+1k}(\zeta) - P_{qk}(\zeta)| = |[P_{q+1k}(\zeta) - P_{qk}(\zeta)] - [P_{q+1k}(\xi_q) - P_{qk}(\xi_q)]| =$$

$$= \left|\int_{[\xi_q, \zeta]} [P'_{q+1k}(\zeta) - P'_{qk}(\xi)] d\xi\right| \leqslant \frac{\mu(d_q)}{d_{q+1}} |\zeta - \xi_q| \leqslant \frac{\mu_k(\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z))}{\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z)} |\zeta - z|.$$

(Здесь под $[\xi_q, \zeta]$ понимается отрезок, соединяющий $\xi_q$ и $\zeta$), что и утверждается в оценке (30).

По функции $f_n(\zeta)$ определим функцию $F_n(\zeta)$, полагая при $\zeta \in \gamma_q$ $(q = \overline{1, m})$

$$F_n(\zeta) = \sum_{l=1}^{q-1} \int\limits_{[\xi_{l-1}, \xi_l]} P_{lk}(\xi)\, d\xi + \int\limits_{[\xi_{q-1}, \zeta]} P_{qk}(\xi)\, d\xi, \tag{31}$$

где $[\xi_{l-1}, \xi_l]$, $(l = \overline{1, q-1})$, $[\xi_{q-1}, \zeta]$ отрезки, соединяющие выделенные точки.

Функция $F_n(\xi)$ локально-аналитична в точках дуги $L$, за исключением точек $\xi_0, \cdots, \xi_m$, причем

$$\frac{\partial F_n(\zeta)}{\partial \zeta} = f_n(\zeta), \ \zeta \in L \setminus \{\xi_0, \cdots, \xi_m\}. \tag{32}$$

Функция $F_n(\zeta) \in \mathrm{Lip}\, 1$ на $L$, следовательно, для нее можно построить полином $P_n(F_n, z)$ по формуле (21). Эти полиномы и будут использоваться нами в качестве аппроксимационных для функции $f(z)$.

Лемма 9. *Зафиксируем точку* $z \in \gamma_q$ $(q = \overline{1, m})$ *и положим*

$$F_n(\zeta) = C + h(\zeta) + g(\zeta),$$

*где*

$$C = C(z, f) = \sum_{l=1}^{q-1} \int\limits_{[\xi_{l-1}, \xi_l]} P_{lk}(\xi)\, d\xi + \int\limits_{[\xi_{q-1}, \zeta]} P_{qk}(\xi)\, d\xi,$$

$$h(\zeta) = \int\limits_{[z, \zeta]} P_{qk}(\xi)\, d\xi,$$

$$g(\zeta) = \int\limits_{[z, \zeta]} u(\xi)\, d\xi, \tag{33}$$

*а* $u(\zeta)$ — *функция, определенная в лемме* 8. *Построенная по* $g(\zeta)$ *в лемме* 7 *функция* $g^*(\zeta)$ *удовлетворяет следующему соотношению:*

$$\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \leqslant \begin{cases} \mu_k(|\zeta - z|), \text{ если } \zeta \in \operatorname{int} L_{1+\frac{1}{n}};\ |\zeta - z| \geqslant \rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z), \\ \dfrac{\mu_k[\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z)]}{\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z)} |\zeta - z|, \text{ если } \zeta \in \operatorname{int} L_{1+\frac{1}{n}}; \\ \qquad\qquad |\zeta - z| \leqslant \rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z), \\ \mu_k(|\zeta - z|) \left[\dfrac{|\zeta - z|}{\rho^{(J)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}\right]^A, \text{ если } \zeta \in \operatorname{ext} L_{1+\frac{1}{n}}, \end{cases} \tag{34}$$

*где константа* $A > 0$ *зависит только от* $L$.

Доказательство. Соотношение (34) получается путем применения неравенства (24) к функции $g(\zeta)$, определяемой равенством (33) и геометрическими соотношениями. Действительно, установим предварительно следующее соотношение. Пусть $\zeta \in L$, $\xi \in L$, $|\zeta - \xi| \leqslant \rho^{*}_{1+\frac{1}{n}}(\xi)$, тогда

$$|g(\zeta) - g(\xi)| \leqslant |\zeta - \xi| \sup_{|t-z| \leqslant |z-\zeta|+|z-\xi|} |u(t)|. \tag{35}$$

Неравенство (35) следует из определения $g(\zeta)$ как интеграла от $u(\zeta)$. Рассмотрим теперь отдельные случаи расположения точки $\zeta$ в $\Omega$.

1) Пусть $\zeta \in \operatorname{int} L_{1+\frac{1}{n}}$, $|\zeta - z| \geqslant \rho^{*}_{1+\frac{1}{n}}(z)$, тогда, учитывая (24), (30) и (35), получим

$$\left|\frac{\partial g^{*}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\right| \leqslant \frac{1}{|\zeta - \zeta_L|} \sup_{\xi \in V'(\zeta)} |g(\xi) - g(\zeta_L)| \leqslant \mu_k(\zeta - z);$$

2) Пусть $\zeta \in \operatorname{int} L_{1+\frac{1}{n}}$, $|\zeta - z| \leqslant \rho^{*}_{1+\frac{1}{n}}(z)$, тогда, в силу (24), (30) и (35) находим

$$\left|\frac{\partial g^{*}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\right| \leqslant \frac{1}{|\zeta - \zeta_L|} \sup_{\xi \in V'(\zeta)} |g(\xi) - g(\zeta_L)| \leqslant \frac{\mu_k[\rho^{*}_{1+\frac{1}{n}}(z)]}{\rho^{*}_{1+\frac{1}{n}}(z)} |\zeta - z|.$$

3) Пусть $\zeta \in \operatorname{ext} L_{1+\frac{1}{n}}$. Тогда согласно (24), (30), (35) и неравенству $n(|\Phi(\zeta)| - 1) \leqslant \left[\frac{|\zeta - z|}{\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}\right]^{A}$, полученному в [4]:

$$\left|\frac{\partial g^{*}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\right| \leqslant \frac{n(|\Phi(\zeta)| - 1)}{|\zeta - \zeta_L|} \sup_{\xi \in V'(\zeta)} |g(\xi) - g(\zeta_L)| \leqslant$$

$$\leqslant n(|\Phi(\zeta)| - 1)\, \mu_k(|\zeta - z|) \leqslant \left[\frac{|\zeta - z|}{\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}\right]^{A} \mu_k(|\zeta - z|).$$

Приступим теперь к доказательству теоремы 1. Пусть $f(z) \in C(L)$. В качестве аппроксимационного полинома возьмем полином $P_n(F_n, z)$, определяемый соотношениями (21), (31) и (25). Осуществляя промежуточную аппроксимацию функции $f(z)$ посредством кусочно-полиномиальной функции $f_n(z)$ (определяемой равенством (25)) будем иметь в силу (28), (23), (32) и леммы 9:

$$|f(z) - P_n(F_n, z)| \leqslant \mu[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)] + \frac{1}{\pi}\int_{L_n} |h(\zeta) + g^{*}(\zeta)| \left|\frac{1}{(\zeta - z)^2} - \right.$$

$$\left. - K^2_{r,l,m,n}(\zeta, z)\right| |d\zeta| + \frac{1}{\pi}\iint_{\sigma_n} \left|\frac{\partial g^{*}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\right| \left|\frac{1}{(\zeta - z)^2} - K^2_{r,l,m,n}(\zeta, z)\right| d\sigma_\zeta, \tag{36}$$

где

$$\left|\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{\mu\,[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)]}{\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}\,|\zeta-z|, & \text{если } |\zeta-z| \leqslant \rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z), \\ \mu\,[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)]\left[\dfrac{|\zeta-z|}{\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}\right]^{A+k}, & \text{если } |\zeta-z| \geqslant \rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z). \end{cases} \tag{37}$$

Величину $\left|\dfrac{1}{(\zeta-z)^2} - K^2_{r,l,m,n}(\zeta, z)\right|$ можно оценить, используя соотношения (15):

$$\left|\frac{1}{(\zeta-z)^2} - K^2_{r,l,m,n}(\zeta, z)\right| \leqslant \frac{[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)]^m}{|\zeta-z|^2\,[|\zeta-z| + \rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)]^m}. \tag{38}$$

Контурный интеграл в соотношении (36) оценивается тривиально. Оценим теперь интеграл по $G_2$, используя соотношения (37) и (38). Пусть $\zeta \in G_j$; $j=1, 2$, положим $Q_j = \{\zeta : |\zeta - z| \leqslant \rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\} \cap \Omega_j$. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G}\left|\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\right|\left|\frac{1}{(\zeta-z)^2} - K^2_{r,l,m,n}(\zeta, z)\right| d\sigma_\zeta = \iint\limits_{Q_j} [\text{idem}] +$$

$$+ \iint\limits_{G_j \setminus Q_j} [\text{idem}] \leqslant \frac{\mu\,[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)]}{\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)} \iint\limits_{Q_j} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|} + \mu\,[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)][\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)]^m \times$$

$$\times [\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{-A-k} \cdot \iint\limits_{G_j \setminus Q_j} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|^{m+2-A-k}} \leqslant \mu\,[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)],$$

как только $m > [A+k] + 1$.

Учитывая неравенства (36) и (39), получим утверждение теоремы 1.

В заключение авторы выражают глубокую признательность В. И. Белому за постановку задачи.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР, г. Донецк

Поступила 30.XI.1979

Վ. Վ. ԱՆԴՐԻԵՎՍԿԻ, Ս. Պ. ԳԵՐՄԱՆ. Բազմանդամային մոտարկումները էվկլիդյան տեղեկների վրա *(ամփոփում)*

*Կոնֆորմ ինվարիանտների մեթոդի միջոցով ապացուցված է մոտարկման ուղեղ թեորեման տեղեկների վրա k>կարգի հարթ մոդուլների համար, որոնք կարող են լինել անուղղելի իրենց ամեն մի մասի վրա։*

V. V. ANDRIEVSKY, S. P. GERMAN. *Polynomial approximation on the quasiconformal arcs* (summary)

It is established the direct theorem of the approximation theory in terms of the modules of smoothness order $k > 1$ on the quasiconformal arcs.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *В. К. Дзядык.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, «Наука», М., 1977.
2. *Л. И. Колесник.* О приближении функций, непрерывных на жордановых дугах, УМЖ, 19, № 2, 1967, 30—38.
3. *И. А. Шевчук.* Конструктивная характеристика классов непрерывных на множестве $\mathfrak{M} \subset C$ функций для $k$-го модуля непрерывности, Мат. заметки, 25, № 2, 1979, 225—249.
4. *В. В. Андриевский.* Прямые теоремы приближения на квазиконформных дугах, Донецк. ун-т, Донецк, 1979 (рукопись депон. в ВИНИТИ, № 313-79).
5. *В. И. Белый.* Конформные отображения и приближения функций в областях с квазиконформной границей, Мат. сб., 104 (144):3, 1977, 163—193.
6. *П. М. Тамразов.* Гладкости и полиномиальные приближения, Киев, «Наукова думка», 1975.
7. *П. М. Тамразов.* Конечно-разностные гладкости и полиномиальные приближения, Препринт Института математики АН УССР, 75, 10. К., 1975.
8. *В. И. Белый, П. М. Тамразов.* Модули гладкости и полиномиальные приближения функций в квазиконформных областях, ДАН СССР, 241, № 3, 1978, 513—516.
9. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, «Наука», II, 1968.
10. *O. Lehto, K. I. Virtanen.* Quasiconformal mappings in the Plane, — B., H., N—4 1973.
11. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, 1952, VII, вып. 2 (48), 1952, 31—122.
12. *В. В. Андриевский.* Некоторые свойства континуумов с кусочно-квазиконформной границей, Донецк. ун-т, Донецк, 1978, (рукопись депон. в ВИНИТИ, № 3769-78).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 3, 1981 Математика

Г. К. ОГАНЕСЯН

# О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ИЗ КЛАССА $B_2$

## Введение

Изучение свойств рядов Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x},$$

показатели которых линейно независимы над полем рациональных чисел, было начато Г. Бором в связи с изучением поведения $\zeta$-функции Римана ([1], [2]). Пользуясь свойствами таких рядов, в теории $\zeta$-функции удалось получить различные результаты об оценках $\zeta(\sigma+it)$ при $t\to\infty$. В основном это были $\Omega$-результаты (отрицание $O$-результата), которые оказались бы точными, если бы удалось подтвердить гипотезу Римана ([2]). М. Кац и Р. Штейнгауз ([3]) заметили, что свойства экспонент $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n=1}^{\infty}$ с независимыми показателями похожи на свойства независимых случайных величин. Работы А. Винтнера, Ван Кампена, Р. Керчнера, Р. Хартмана ([4], [5]), где имеется обширная библиография, были посвящены доказательству существования, вопросам гладкости функций распределения

$$\mu_{\mathrm{Re}\,f}(y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\,m\{x\in[-T,\ T];\ \mathrm{Re}\,f(x)<y\},$$

$$\mu_{\mathrm{Im}\,f}(y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\,m\{x\in[-T,\ T];\ \mathrm{Im}\,f(x)<y\}$$

для боровских почти-периодических функций. В работах этих авторов были изучены также и многие другие вопросы теории рядов Дирихле. В настоящей работе будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\langle\vec{\lambda}_n,\vec{x}\rangle}, \tag{1}$$

где

$$\vec{\lambda}_n=(\lambda_n^{(1)},\ \lambda_n^{(2)},\cdots,\ \lambda_n^{(N)}),\quad \vec{x}=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_N),$$

$$\langle\vec{\lambda}_n,\ \vec{x}\rangle=\sum_{k=1}^{N}\lambda_n^{(k)}\cdot x_k \text{ и } \{\lambda_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty},\ \cdots,\ \{\lambda_n^{(N)}\}_{n=1}^{\infty}$$

линейно независимы над полем рациональных чисел.

§ 1 настоящей статьи посвящен формулировке основных теорем о пространствах Безиковича $B_p$ функций $N$ переменных. В частности, доказывается, что для любой функции класса $B_1$ существуют относительные функции распределения

$$\mu_{\mathrm{Re}\, f}(y)=\lim_{T\to\infty}\mu_{T,\,\mathrm{Re}\, f}(y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\, m\,\{\vec{x}\in[-T,\,T]^N;\ \mathrm{Re}\, f(\vec{x})<y\},$$

$$\mu_{\mathrm{Im}\, f}(y)=\lim_{T\to\infty}\mu_{T,\,\mathrm{Im}\, f}(y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\, m\,\{\vec{x}\in[-T,\,T]^N;\ \mathrm{Im}\, f(\vec{x})<y\}. \tag{2}$$

Существование пределов (2) дает возможность трактовать функции класса $B_1$ как случайные величины. Однако относительная мера

$$\mu(Q)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\, m\{Q\cap[-T,\,T]^N\}$$

не является $\sigma$-аддитивной. Поэтому такая трактовка позволяет доказывать методами теории вероятностей лишь те теоремы, которые фактически являются теоремами не о случайных величинах, а о функциях распределения.

В § 2 доказываются теоремы, на основе которых можно судить о свойствах коэффициентов ряда (1), если только известна скорость убывания функции

$$1-\mu_f(y)+\mu_f(-y),$$

где $\mu_f(y)$ означает одновременно и $\mu_{\mathrm{Re}\, f}(y)$ и $\mu_{\mathrm{Im}\, f}(y)$.

## § 1. Независимость в пространствах $B_1$

Функция $f(\vec{x})$ принадлежит классу $B_p$ $(p>1)$, если $f(\vec{x})\in L_p([-T\ T]^N)$ для любого $T>0$, и для всякого $\varepsilon>0$ найдется тригонометрический полином $P(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n} a_k e^{i<\vec{\lambda}_k,\,\vec{x}>}$ такой, что

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,\,T]^N}|f(\vec{x})-P(\vec{x})|^p\, d\vec{x}\leqslant\varepsilon.$$

Норму функций $f(\vec{x})\in B_p$ определим формулой

$$\|f\|_{B_p}\overset{\mathrm{def}}{=}\overline{M}_p f(\vec{x})=\overline{\lim_{T\to\infty}}\left[\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,\,T]^N}|f(\vec{x})|^p\, d\vec{x}\right]^{1/p}.$$

Справедлива теорема о полноте пространства $B_p$, принадлежащая Безиковичу ([6]).

Если $f(\vec{x})\in B_p$, то $f(\vec{x})\in B_q$ при $q<p$. Поэтому класс $B_1$ является самым широким. Для функции $f(\vec{x})\in B_1$ положим

$$\mu_{T,\,\mathrm{Re}\, f}(y)=\frac{1}{(2T)^N}\, m\,\{\vec{x}\in[-T,\,T]^N;\ \mathrm{Re}\, f(\vec{x})<y\},$$

$$\mu_{T,\,\mathrm{Im}\,f}(y)=\frac{1}{(2T)^N}\,m\{\vec{x}\in[-T,\ T]^N;\ \mathrm{Im}\,f(\vec{x})<y\}.$$

Каждая из функций $\mu_{T,\,\mathrm{Re}\,f}(y)$ и $\mu_{T,\,\mathrm{Im}\,f}(y)$ непрерывна справа.

Здесь же отметим, что для классов $B_p$ функций одной переменной результаты этого параграфа были установлены в работе Е. М. Никишина ([7]). Перенесение этих результатов на функции многих переменных требует определенных модификаций, что и проделано в этом параграфе.

Лемма 1. *Для комплексных $z$ равномерно по $|z|\leqslant A$ ($A$ — любое) существуют пределы*

$$\chi_{\mathrm{Re}\,P}(z)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,\,T]^N}e^{iz\,\mathrm{Re}\,P(\vec{x})}\,d\vec{x}=$$

$$=\sum_{\substack{m_1,\,m_2,\cdots,\,m_n=-\infty\\ m_1\lambda_1^{(1)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(1)}=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ m_1\lambda_1^{(N)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(N)}=0}}^{\infty}J_{m_1}(|a_1|\,z)\cdots J_{m_n}(|a_n|\,z)\,e^{i\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_k\right)m_k\right]}\tag{3}$$

$$\chi_{\mathrm{Im}\,P}(z)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,\,T]^N}e^{iz\,\mathrm{Im}\,P(\vec{x})}\,d\vec{x}=$$

$$=\sum_{\substack{m_1,\,m_2,\cdots,\,m_n=-\infty\\ m_1\lambda_1^{(1)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(1)}=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ m_1\lambda_1^{(N)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(N)}=0}}^{\infty}J_{m_1}(|a_1|\,z)\cdots J_{m_n}(|a_n|\,z)\,e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k m_k}.\tag{4}$$

*Здесь*

$$P(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}a_k\,e^{i\langle\lambda_k,\,\vec{x}\rangle}=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\,e^{i\left(\varphi_k+\lambda_k^{(1)}x_1+\cdots+\lambda_k^{(N)}x_N\right)}$$

*— произвольный полином $J_k(s)$ — $k$-я функция Бесселя, ряды, представляющие $\chi_{\mathrm{Re}\,P}(z)$ и $\chi_{\mathrm{Im}\,P}(z)$, сходятся равномерно при $|z|\leqslant A$, $\varphi_k=\arg a_k$.*

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{Re}\,P(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\cos(\lambda_k^{(1)}x_1+\cdots+\lambda_k^{(N)}x_N+\varphi_k),$$

$$\mathrm{Im}\,P(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\lambda_k^{(1)}x_1-\cdots-\lambda_k^{(N)}x_N-\varphi_k\right).$$

Воспользуемся формулой ([8])

$$e^{it\cos\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(t)\, e^{im\varphi}. \tag{5}$$

Равномерно по $|z| \leqslant A$

$$J_k(z) = O\left(\frac{1}{|k|!}\right) \tag{6}$$

и следовательно, ряды (3) и (4) сходятся абсолютно и равномерно в круге $|z| \leqslant A$. Представляя $e^{iz\,\mathrm{Re}\,P(\vec{x})}$ в виде произведения рядов, получаем

$$e^{iz\sum_{k=1}^{n}|a_k|\cos(\lambda_k^{(1)}x_1+\cdots+\lambda_k^{(N)}x_N+\varphi_k)} = \prod_{k=1}^{n} e^{iz|a_k|\cos(\lambda_k^{(1)}x_1+\cdots+\lambda_k^{(N)}x_N+\varphi_k)} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(|a_k|z)\cdot e^{im(\lambda_k^{(1)}x_1+\cdots+\lambda_k^{(N)}x_N+\varphi_k)}\right\} =$$

$$= \sum_{m_1, m_2, \cdots, m_n=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(|a_1|z)\cdots J_{m_n}(|a_n|z)\times$$

$$\times\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\right)+\sum_{k=1}^{n}m_k(\lambda_k^{(1)}x_1+\cdots+\lambda_k^{(N)}x_N)+\sum_{k=1}^{n}m_k\varphi_k\right\}.$$

Отсюда следует

$$e^{iz\,\mathrm{Re}\,P(\vec{x})} = \sum_{m_1,\cdots,m_n=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(|a_1|z)\cdots J_{m_n}(|a_n|z)\times$$

$$\times\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\lambda_k^{(1)}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\lambda_k^{(N)}\right)x_N+\sum_{k=1}^{n}m_k\varphi_k\right\}.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{(2T)^N}\int_{[-T,T]^N} e^{iz\,\mathrm{Re}\,P(\vec{x})}\,d\vec{x} = \sum_{\substack{m_1,\cdots,m_n=-\infty\\ m_1\lambda_1^{(1)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(1)}=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ m_1\lambda_1^{(N)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(N)}=0}}^{\infty} J_{m_1}(|a_1|z)\cdots J_{m_n}(|a_n|z)\times$$

$$\times e^{i\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_k\right)m_k} + \sum_{\substack{m_1,\cdots,m_n=-\infty\\ |m_1\lambda_1^{(1)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(1)}|+\cdots\\ +|m_1\lambda_1^{(N)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(N)}|>0}}^{\infty} J_{m_1}(|a_1|z)\cdots$$

$$\cdots J_{m_n}(|a_n|\,z)\,e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_k\right)m_k}\times\prod_{j=1}^{N}{}'\frac{\sin\left[T\left(\sum\limits_{k=1}^{n}m_k\lambda_k^{(j)}\right)\right]}{T\left(\sum\limits_{k=1}^{n}m_k\lambda_k^{(j)}\right)}.$$

Здесь $\Pi'$ означает произведение, в котором $\sum\limits_{k=1}^{n}m_k\lambda_k^{(j)}\neq 0$.

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и разобьем последнюю сумму на две части так, чтобы

$$|\Sigma_2|=\Bigg|\sum_{\substack{|m_1|+\cdots+|m_n|>L(\varepsilon)\\ |m_1\lambda_1^{(1)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(1)}|+\cdots\\ +|m_1\lambda_1^{(N)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(N)}|>0}} J_{m_1}(|a_1|\,z)\cdots J_{m_n}(|a_n|\,z)\times$$

$$\times e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_k\right)m_k}\cdot\prod_{j=1}^{N}{}'\frac{\sin\left[T\sum\limits_{k=1}^{n}m_k\lambda_k^{(j)}\right]}{T\left(\sum\limits_{k=1}^{n}m_k\lambda_k^{(j)}\right)}\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{|m_1|+\cdots+|m_n|>L(\varepsilon)\\ |m_1\lambda_1^{(1)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(1)}|+\cdots\\ +|m_1\lambda_1^{(N)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(N)}|>0}}|J_{m_1}(|a_1|\,z)\cdots J_{m_n}(|a_n|\,z)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $|z|\leqslant A$. Теперь выберем $T_0(\varepsilon)$ так, чтобы при всех $|z|\leqslant A$ и $T>T_0(\varepsilon)$ было

$$|\Sigma_1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\left|\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N}e^{iz\,\mathrm{Re}\,P(\vec{x})}\,d\vec{x}-\chi_{\mathrm{Re}\,P}(z)\right|\leqslant\varepsilon$$

при $|z|\leqslant A$ и $T>T_0$.

Аналогично доказывается равномерная сходимость в (4).

Из оценки (6) следует равномерная сходимость в (3) и (4).

Следствие: *Если показатели полинома независимы, то*

$$\chi_{\mathrm{Re}\,P}(z)=\chi_{\mathrm{Im}\,P}(z)=J_0(|a_1|\,z)\cdots J_0(|a_n|\,z).$$

Лемма 2. *Существуют пределы*

$$\mu_{\mathrm{Re}\,f}(y)=\lim_{T\to\infty}\mu_{T,\,\mathrm{Re}\,f}(y),\quad \mu_{\mathrm{Im}\,f}(y)=\lim_{T\to\infty}\mu_{T,\,\mathrm{Im}\,f}(y).$$

Доказательство этой леммы можно провести в полной аналогии с доказательством для функции одной переменной классов $B_p$, которое сделано в работе Е. М. Никишина ([7]).

Определение 1. *Последовательность* $\{f_n(\vec{x})\}_{n=1}^{\infty}$ *функций из* $B_1$ *назовем независимой, если для любого конечного набора функций* $f_{n_1}, f_{n_2}, \cdots, f_{n_k}$ *выполняются равенства*

$$\chi_{\mathrm{Re}\,(f_{n_1}+\cdots+f_{n_k})}(t)=\chi_{\mathrm{Re}\,f_{n_1}}(t)\cdot\chi_{\mathrm{Re}\,f_{n_2}}(t)\cdots\chi_{\mathrm{Re}\,f_{n_k}}(t),$$

$$\chi_{\mathrm{Im}\,(f_{n_1}+\cdots+f_{n_k})}(t)=\chi_{\mathrm{Im}\,f_{n_1}}(t)\cdot\chi_{\mathrm{Im}\,f_{n_2}}(t)\cdots\chi_{\mathrm{Im}\,f_{n_k}}(t),$$

где

$$\chi_{\mathrm{Re}\,f}(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,\,T]^N} e^{it\,\mathrm{Re}\,f(\vec{x})}\,d\vec{x},$$

$$\chi_{\mathrm{Im}\,f}(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,\,T]^N} e^{it\,\mathrm{Im}\,f(\vec{x})}\,d\vec{x}.$$

Из этого определения следует, что функция распределения суммы $\mu_{\mathrm{Re}\,f}(y)$ (или $\mu_{\mathrm{Im}\,f}(y)$) является сверткой функций распределения слагаемых, т. е.

$$\mu_{\mathrm{Re}\,f}(y)=\mu_{\mathrm{Re}\,f_{n_1}}*\mu_{\mathrm{Re}\,f_{n_2}}*\cdots*\mu_{\mathrm{Re}\,f_{n_k}}(y)$$

(под сверткой как обычно, понимается

$$\mu_1*\mu_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu_1(y-\xi)\,d\mu_2(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu_2(y-\xi)\,d\mu_1(\xi)).$$

Из леммы 1 следует, что $\{e^{i<\vec{\lambda}_n,\,\vec{x}>}\}_1^{\infty}$ является последовательностью независимых функций (в смысле данного выше определения), если показатели $\{\vec{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независимы над полем рациональных чисел. ($\{\vec{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независимы, если линейно независимы $\{\lambda_n^{(1)}\},\cdots,\{\lambda_n^{(N)}\}$).

Определение 2. *Функция* $f(\vec{x})$ *называется периодической с периодом* $\vec{\Delta}=(\Delta_1,\cdots,\Delta_N)$, *если* $f(x_1+\Delta_1,\,x_2+\Delta_2,\cdots,x_N+\Delta_N)=f(x_1,\cdots,x_N)$ *для всякого* $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_N)$.

Пусть $f(\vec{x})$ периодична с периодом $\Delta=(\Delta_1,\cdots,\Delta_N)$. Если

$$f(\vec{x})\in L_p\left(\bigtimes_{i=1}^{N}[0,\,\Delta_i]\right),\ \text{то}\ f(\vec{x})\in B_p\ \text{и}$$

$$\mu_{\mathrm{Re}\, f}(y) = \frac{1}{\Delta_1 \cdots \Delta_N} m\left\{\vec{x} \in \mathop{\times}_{i=1}^{N} [0, \Delta_i];\ \mathrm{Re}\, f(\vec{x}) < y\right\},$$

$$\mu_{\mathrm{Im}\, f}(y) = \frac{1}{\Delta_1 \cdots \Delta_N} m\left\{\vec{x} \in \mathop{\times}_{i=1}^{N} [0, \Delta_i];\ \mathrm{Im}\, f(\vec{x}) < y\right\},$$

а для характеристических функций имеют место равенства

$$\chi_{\mathrm{Re}\, f}(t) = \frac{1}{\Delta_1 \cdots \Delta_N} \int\limits_{\mathop{\times}_{i=1}^{N} [0, \Delta_i]} e^{it\, \mathrm{Re} f(\vec{x})}\, d\vec{x},$$

$$\chi_{\mathrm{Im}\, f}(t) = \frac{1}{\Delta_1 \cdots \Delta_N} \int\limits_{\mathop{\times}_{i=1}^{N} [0, \Delta_i]} e^{it\, \mathrm{Im} f(\vec{x})}\, d\vec{x}.$$

Приведем еще один пример последовательности независимых функций.

Лемма 3. *Пусть* $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \cdots$ — *периодические функции с периодами*

$$\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2, \cdots;\ f_n(\vec{x}) \in L_1\left(\mathop{\times}_{i=1}^{N} [0, \Delta_i]\right).$$

*Если последовательность*

$$\left\{\frac{1}{\vec{\Delta}_n}\right\} = \left\{\frac{1}{\Delta_n^{(1)}}, \cdots, \frac{1}{\Delta_n^{(N)}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

*независима над полем рациональных чисел, то* $f_n(\vec{x})$ *независима.*

Доказательство. Для простоты будем считать $\{f_n(\vec{x})\}_{n=1}^{\infty}$ действительными функциями. Положим

$$\psi_n(x_1, \cdots, x_N) = f_n(\Delta_n^{(1)} x_1, \cdots, \Delta_n^{(N)} x_N).$$

Функции $\psi_n(\vec{x})$ имеют период $\vec{1} = (1, \cdots, 1)$. То же самое можно сказать о $e^{iz\psi_n(\vec{x})}$. Имеем

$$\chi_{f_n}(z) = \frac{1}{\Delta_n^{(1)} \cdots \Delta_n^{(N)}} \int\limits_{\mathop{\times}_{k=1}^{N} [0, \Delta_n^{(k)}]} e^{izf_n(\vec{x})}\, d\vec{x} = \int\limits_{[0,1]^N} e^{iz\psi_n(\vec{x})} d\vec{x}.$$

Далее

$$\frac{1}{(2T)^N} \int\limits_{[-T, T]^N} e^{iz \sum_{k=1}^{n} f_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x} = \frac{1}{(2T)^N} \int\limits_{[-T, T]^N} e^{iz \sum_{k=1}^{n} \psi_{n_k}\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right)}\, d\vec{x}. \qquad (7)$$

Пусть $\tau_k(x_1, \cdots, x_N)$ — прямоугольные Фейеровские средние ряда Фурье функции $e^{iz\psi_{n_k}(\vec{x})}$ (последовательность функций $\{e^{i2\pi(n_1x_1+\cdots+n_Nx_N)}\}$ образует полную ортонормированную систему в пространстве $L_2([0,1]^N)$ со столь большим номером, чтобы

$$\int\limits_{[0,1]^N} |\tau_k(\vec{x}) - e^{iz\psi_{n_k}(\vec{x})}|\, d\vec{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{(2^n-1)\,2^{n-1}}.$$

Хорошо известно (см. [9]), что $|\tau_k(\vec{x})| \leqslant 1$. Заметим, что первый член полинома $\tau_k(\vec{x})$ есть $\int\limits_{[0,1]^N} e^{iz\psi_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x}$. Из (7) получаем

$$\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N} e^{iz\sum\limits_{k=1}^{n} f_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x} = \frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N} \prod_{k=1}^{n}\left[\tau_k\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{iz\psi_{n_k}\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right)} - \tau_k\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right)\right] d\vec{x} = \frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N} \prod_{k=1}^{n} \tau_k\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right) d\vec{x} + A(T,\varepsilon),$$

где $|A(T,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$. Легко видеть, что в силу линейной независимости

$$\left\{\frac{1}{\Delta_n^{(k)}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\Delta_n^{(1)}}, \cdots, \frac{1}{\Delta_n^{(N)}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N} \prod_{k=1}^{n} \tau_k\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right) d\vec{x} = \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{[0,1]^N} e^{iz\psi_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x}.$$

Из этих соотношений следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $T_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $T \geqslant T_0(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N} e^{iz\sum\limits_{k=1}^{n} f_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x} - \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\Delta_{n_k}^{(1)}\cdots\Delta_{n_k}^{(N)}} \int\limits_{\bigtimes\limits_{i=1}^{N}\left[0,\,\Delta_{n_k}^{(i)}\right]} e^{izf_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Лемма 3 доказана.

## § 2. Ряды экспонент с независимыми показателями

В дальнейшем мы будем рассматривать только функции из $B_2$. Если $f(\vec{x}) \in B_2$ и действительна, то, переходя к пределу в равенстве

$$\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N} f^2(\vec{x})\, d\vec{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2\, d\mu_{T,f}(y),$$

получим

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 d\mu_f(y) = \|f\|^2_{B_2}.$$

Обоснование возможности перехода к пределу следует из теоремы непрерывности ([10]).

Теорема непрерывности. Пусть $\Phi_\nu(x)(-\infty < x < \infty)$ — последовательность функций распределения (т. е. $\Phi_\nu(-\infty)=0$, $\Phi_\nu(\infty)=1$ и $\Phi_\nu(x)$ не убывает). Если

$$\chi_\nu(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\lambda} d\Phi_\nu(\lambda)$$

при $\nu \to \infty$ сходятся к непрерывной функции $\chi(\xi)$, то существует функция распределения $\Phi(x)$ такая, что $\Phi_\nu(x) \to \Phi(x)$ в каждой точке непрерывности $\Phi(x)$.

Теорема непрерывности сохраняет силу и для случая, когда $\nu$ изменяется непрерывно. Для формулировки нашей теоремы введем функции $H(y)$ и $H^*(y)$. Пусть $H^*(y)$ — положительная, непрерывная, строго возрастающая функция на $[0, +\infty)$. Функция $H^*(y)$ определяется соотношением $H(H^*(y)) = y+1$, или же $H^*(y) = H^{-1}(y+1)$. Предположим, что при некотором $\alpha > 1$

$$\frac{H^*(y)}{y^\alpha} \downarrow. \tag{8}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \cdots$ — периодические с периодами $\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2, \cdots$ функции из $B_2$, для которых*

$$Mf_n(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta_n^{(1)} \cdots \Delta_n^{(N)}} \int_{\underset{k=1}{\overset{N}{\times}} \left[0, \Delta_n^{(k)}\right]} f_n(\vec{x})\, d\vec{x} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

*Предположим, что $\left\{\frac{1}{\vec{\Delta}_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ независимы и*

$$f(\vec{x}) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}).$$

*Пусть, далее*

$$1 - \mu_f(y) + \mu_f(-y) = O\left(e^{-yH(y)}\right). \tag{9}$$

*Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \frac{1}{H^*\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) \log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)} < +\infty$$

*при любом* $\varepsilon > 0$. *Здесь*

$$\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(1)} \cdots \Delta_n^{(N)}}} \|f_n(\vec{x})\|_{L_2}\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N} [0, \Delta_n^{(k)}]\right),$$

*а* $\mu_f(y)$ *означает одновременно и* $\mu_{\mathrm{Re}\, f}(y)$ *и* $\mu_{\mathrm{Im}\, f}(y)$.

Сперва докажем теорему в случае, когда функция $f(\vec{x})$ действительна.

В дальнейшем нам понадобятся следующие две леммы, доказательства которых приводятся в работе [11].

Лемма 4. *Пусть функция* $f(\vec{x})$ *удовлетворяет условию* (9) *Если*

$$\chi_f(z) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{(2T)^N} \int\limits_{[-T, T]^N} e^{iz f(\vec{x})}\, d\vec{x},$$

*то*

$$|\chi_f(z)| \leqslant c\, e^{|z| H^*(|z|)}.$$

Лемма 5. *Пусть* $H(t)$ — *положительная, монотонно возрастающая, непрерывная функция, которая при некотором* $\alpha > 0$ *удовлетворяет условию* (8).

*Пусть* $\{z_k\}_1^\infty$ — *последовательность нулей функций*

$$\chi_f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{izy}\, d\mu_f(y)$$

*с учетом их кратности.*

*Если*

$$|\chi_f(z)| \leqslant c\, e^{|z| H(|z|)},$$

*то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H^*(|z|)\, |z_n| \log^{1+\varepsilon} |z_n|} < +\infty.$$

Доказательство теоремы 3. Зафиксируем произвольное число $n$.

Тогда

$$f(\vec{x}) = f_n(\vec{x}) + \varphi_n(\vec{x}), \text{ где } \varphi_n(\vec{x}) = \sum_{k \neq n}^{B_1} f_n(\vec{x}). \tag{10}$$

Пусть $\chi_f(z)$ — характеристическая функция $f(\vec{x})$, $\chi_f(z)$ и $\chi_{\varphi_n}(z)$ — характеристические функции $f_n(\vec{x})$ и $\varphi_n(\vec{x})$ соответственно. Для всех действительных чисел $z$ имеем

$$|\chi_{\sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x})}(z) - \chi_f(z)| \leqslant |z|\, \overline{M}_2\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x}) - f(\vec{x})\right). \tag{11}$$

Из независимости функций $\{f_n(\vec{x})\}_{n=1}^{\infty}$ и неравенства (11) для всех действительных чисел $z$ имеем

$$\chi_f(z) = \chi_{f_n}(z)\cdot\chi_{\varphi_n}(z).$$

Отсюда получаем равенство

$$\chi_f(z) = \chi_{f_n}(z)\cdot\chi_{\varphi_n}(z). \tag{12}$$

По теореме единственности для аналитических функций, функцию $\chi_f(z)$ можно продолжить на всю комплексную плоскость с помощью равенства (14). Для функции распределения имеет место равенство

$$\mu_f(y) = \mu_{f_n}(y) * \mu_{\varphi_n}(y).$$

Из теоремы Леви-Райкова (см. [12], стр. 77) следует, что для функций $f_n(\vec{x})$ также справедливо соотношение (9). Из равенства (12) следует, что все нули функции $\chi_{f_n}(z)$ являются нулями функции $\chi_f(z)$. В силу сказанного и из лемм 4 и 5 имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{H^*(|z_{n_k}|)\,|z_{n_k}|\log^{1+\varepsilon}|z_{n_k}|} < +\infty, \tag{13}$$

$$\sigma_n^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{n_k}|^2} < +\infty, \tag{14}$$

где $\{z_{n_k}\}_1^{\infty}$ — последовательность нулей функций с учетом их кратности. Введем обозначение

$$P(y) = \{H^*(y^{-\frac{1}{2}})\cdot\log^{1+\varepsilon}(y^{-\frac{1}{2}})\}^{-1}\cdot y^{\frac{1}{2}}.$$

Воспользовавшись условием (8), получим $P(y)\cdot y^{-1}\downarrow$. Отсюда следует, что $P(y)$—полуаддитивная функция (см. [13], стр. 105). Из (13) и (14) вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{H^*\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)\log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(\sigma_n^2) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|z_{n_k}|^2}\right) < \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{H^*(|z_{n_k}|)\,|z_{n_k}|\log^{1+\varepsilon}|z_{n_k}|} < \infty,$$

Тем самым теорема в случае, когда $f(\vec{x})$— действительная функция, доказана. Пусть $f(\vec{x})$—комплексная функция. Положим

$$H_1^*(y) = H^*\left(\frac{1}{2}y\right), \text{ или } H_1(y) = H\left(\frac{y+1}{2}\right).$$

Функции $H_1^*(y)$ и $H_1(y)$ удовлетворяют условиям теоремы. Следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^0}{H_1^*\left(\frac{1}{\sigma_n^0}\right)\log^{1+\varepsilon}\frac{1}{\sigma_n^0}} < +\infty. \tag{15}$$

Здесь $\sigma_n^0 = \max(\sigma_n', \sigma_n'')$, где

$$\sigma_n' = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(1)}\cdots\Delta_n^{(N)}}}\|\mathrm{Re}\, f(\vec{x})\|_{L_2}\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N}[0, \Delta_n^{(k)}]\right),$$

$$\sigma_n'' = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(1)}\cdots\Delta_n^{(N)}}}\cdot\|\mathrm{Im}\, f(\vec{x})\|_{L_2}\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N}[0, \Delta_n^{(k)}]\right).$$

Из неравенства (15) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{H^*\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)\log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)} \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^0\cdot 2^{1+\varepsilon}}{H^*\left(\frac{1}{2\sigma_n^0}\right)\log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{2\sigma_n^0}\right)} <$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^0 \frac{2^{1+\varepsilon}}{H_1^*\left(\frac{1}{\sigma_n^0}\right)\log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_n^0}\right)} < +\infty.$$

Теорема доказана.

Если $f_n(\vec{x}) = a_n e^{i\langle\vec{\lambda}_n, \vec{x}\rangle}$ $(n \geqslant 1)$, где $\{\lambda_n\}_1^\infty$ независимы, то из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть* $f(\vec{x}) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\langle\vec{\lambda}_n, \vec{x}\rangle}$ *и* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *независимы.*

*Если*

$$1 - \mu_f(y) + \mu_f(-y) = O(e^{-yH(y)}),$$

*то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{H^*\left(\frac{1}{|a_n|}\right)\log^{1+\varepsilon}\left|\frac{1}{|a_n|}\right|} < +\infty,$$

*где* $\mu_f(y)$ *означает одновременно и* $\mu_{\mathrm{Re}f}(y)$ и $\mu_{\mathrm{Im}f}(y)$.

Следствие 1. Пусть $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x})\cdots$ — периодические с периодами $\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2, \cdots$ функции из $B_2$, для которых

$$Mf_n(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta_n^{(1)}\cdots\Delta_n^{(N)}}\int\limits_{\mathop{\times}_{k=1}^{N}[0, \Delta_n^{(k)}]} f_n(\vec{x})\, d\vec{x} = 0 \ (n = 1, 2, \cdots).$$

Предположим, что $\left\{\frac{1}{\vec{\Delta}_n}\right\}_1^\infty$ независимы и

$$f(\vec{x}) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}).$$

Пусть

$$1-\mu_f(y)+\mu_f(-y)=O(e^{-y^q})$$

при некотором $q>2$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{\frac{q}{q-1}} \frac{1}{\log^{1+\varepsilon}\frac{1}{\sigma_n}} < +\infty$$

для любого $\varepsilon>0$.

Следствие 2. Пусть

$$f_n(\vec{x}) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i<\vec{\lambda}_n \vec{x}>} \text{ и } \{\vec{\lambda}_n\}_1^\infty$$

независимы. Если

$$1-\mu_f(y)+\mu_f(-y)=O(e^{-y^q}),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\frac{q}{q-1}} \frac{1}{\log^{1+\varepsilon}\frac{1}{|a_n|}} < +\infty$$

при любом $\varepsilon>0$.

Следствие 3. Пусть $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \cdots$ — периодические с периодами $\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2 \cdots, \vec{\Delta}_n, \cdots$ функции из $B_2$, для которых

$$Mf_n(\vec{x})=\frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(1)}\cdots\Delta_n^{N}}}\|f_n(\vec{x})\|_{L_2}\left(\bigtimes_{k=1}^{N}[0,\ \Delta_n^{(k)}]\right)=0 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

Предположим, что $\left\{\frac{1}{\vec{\Delta}_n}\right\}_{n=1}^\infty$ независимы и

$$f(\vec{x}) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}).$$

Пусть

$$1=\mu_f(y)+\mu_f(-y)=O(e^{-e^y}),$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \frac{1}{\log^{2+\varepsilon}\frac{1}{\sigma_n}} < +\infty.$$

Следствие 4. Пусть

$$f(\vec{x}) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i<\vec{\lambda}_n, \vec{x}>} \text{ и } \{\vec{\lambda}_n\}_1^{\infty}$$

независимы. Если

$$1 - \varphi_f(y) + \varphi_f(-y) = O(e^{-e^y}),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{\log^{2+\varepsilon} \frac{1}{|a_n|}} < \infty.$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю, профессору Е. М. Никишину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинаканский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

Поступила 15.VI.1980

Գ. Կ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. $B_2$ դասի պարբերական ֆունկցիաներով կազմված շարքերի մասին (ամփոփում)

Դիցուք $\{f_k(\vec{t})\}_1^{\infty}$ -ն Բեզիկովիչի $B_2$ դասի ֆունկցիաներ են, ընդ որում $f_k(t)$-ն ունի $\vec{\Delta}_k$ պարբերություն և $f_k$-ի ինտեգրալը $\underset{k=1}{\overset{N}{\times}} (0, \vec{\Delta}_k)$-ով $=0$։

Որոշ պայմաններ դնելով

$$f(\vec{t}) \overset{B_2}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\vec{t})$$

ֆունկցիայի խարակտերիստիկ ֆունկցիայի վրա, ապացուցվում է, որ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \frac{1}{H^*\left(\frac{1}{\sigma_k}\right) \log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)} < +\infty \ (\forall \varepsilon > 0); \quad \sigma_k = \frac{\|f_k\|_{L_2(0;\, \Delta_k)}}{\sqrt{\Delta_{k,1} \cdot \Delta_{k,2} \cdots \Delta_{k,N}}}.$$

Այստեղ $H^*(y)$-ը որոշակի պայմաններին բավարարող դրական, մոնոտոն աճող ֆունկցիա է։

G. K. HOVHANNESIAN. *On the series of periodic functions from the class $B_2$* (summary)

Let $\{f_k(\vec{t})\}_1^{\infty}$, be the sequence of functions from the Besicowitch class $B_2$. $f_k(t)$ is periodic with period $\vec{\Delta}_k$ and the integral of $f_k(\vec{t})$ by $(0, \Delta_k)$ equals 0.

Under some conditions on the characteristic function of the function

$$f(\vec{t}) \overset{B_2}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\vec{t})$$

it proves, that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \frac{1}{H^*\left(\frac{1}{\sigma_k}\right) \log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)} < +\infty \ (\forall \varepsilon > 0), \quad \sigma_k = \frac{\|f_k\|_{L_2(0;\, \Delta_k)}}{\sqrt{\Delta_{k,1} \cdot \Delta_{k,2} \cdots \Delta_{k,N}}}.$$

Here $H^*(y)$ is a positive, monotonously growing function which satisfies some conditions.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *H. Bohr, E. Landau.* Über des Verhalten von $\zeta(s)$ and $\zeta_k(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$, Göttinger Nachrichten, 1910, 303—330.
2. *Е. К. Титчмарш.* Дзета-функция Римана, ИИЛ, М., 1947.
3. *М. Кац.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, ИИЛ, М., 1963.
4. *A. Wintner, P. Hartman, E. R. von Kampen.* On the distribution functions of almost periodic functions, Amer. J. Math., 60, № 2, 1938.
5. *R. Kershner, A. Wintner.* On the asymptotic distribution on almost periodic functions with linearly independent frequencies, Amer. J. Math., 58, 1936, 91—94.
6. *H. Bohr.* Zur Theorie der fastperiodisch en Functionen, I, II, III, Acta Math., 45.
7. *Е. М. Никишин.* Ряды Дирихле с независимыми показателями и их некоторые применения, Мат. сб., 96 (138), № 1, 1975.
8. *Г. Ватсон.* Теория бесселевых функций, ч. 1, ИИЛ, 1949.
9. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. II, изд. «Мир», М., 1965.
10. *М. Лоэв.* Теория вероятностей, М., Физматгиз, 1961.
11. *Г. К. Оганесян.* О рядах из независимых случайных величин, Изв. АН Арм. ССР, серия «Математика», XII, № 5, 1977.
12. *Ю. В. Линник, Н. В. Островский.* Разложения случайных величин и векторов, М., изд. «Наука», 1972.
13. *Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа.* Неравенства, М., ИИЛ, 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 3, 1981 Математика

## ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В нашей работе [1] было допущено несколько опечаток и неточностей.

1) На стр. 339, 11-я строка сверху, в выражении $C_\beta^{\frac{n}{2}-1}\left(\cos\frac{\pi}{2c}x\right)=0$ буква $x$ лишняя.

2) На стр. 344, в оценке $\nabla_z h(z, y)$ в средней зоне $|z| \asymp |y|$ должно быть $\frac{1}{|z-y|^n}$. Как видно из дальнейшего, это не влияет на доказательства последующих неравенств.

3) На стр. 345—346, в оценке интеграла $I_2$ допущена неточность. На самом деле нужно различать два случая: a) $|z| < 4|x|$ и b) $|z| > 4|x|$, где $z=(x, t)\in\Omega$ и $x\in\partial\Omega$. Заметим, что всегда $|z| \geqslant |x|$. Соответствующие интегралы обозначим через $J_2'$ и $J_2''$. В первом случае будем иметь

$$J_2' \leqslant \frac{C}{|x|^{n+\beta-2}} \int\limits_{|y|<2|x|} |y|^{\beta-1} f(y)\, dm_{n-1}(y) \equiv C f_*(x).$$

Непосредственно, по неравенству Гёльдера проверяется, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} f_*^p(x)\, a(x)\, |x|^\alpha\, dm_{n-1}(x) \leqslant C \int\limits_{\partial\Omega} f^p(x)\, a(x) |x|^\alpha\, dm_{n-1}(x).$$

Второй же интеграл $J_2''$ оценивается точно так, как это было в нашей работе в оценке $J_2$.

В связи с вышесказанным в неравенствах (3) и (7) работы [1] правые стороны должны быть заменены на $C(f^*(x) + f_*(x))$.

4) У нас некорректно сформулирована и доказана теорема 2. На самом деле известная весовая максимальная теорема Б. Макенхоупта (см., напр., [2]) верна и для любой липшицевой поверхности. Доказательство при этом не меняется. Применительно к нашей ситуации конической области и весовой функции $w(x) = a(x)\,|x|^\alpha$ мы будем иметь:

Теорема 2. *Пусть максимальная функция $f^*$ определена как в [1]. Тогда для любой функции $f \in L^p(\partial\Omega, a(x)|x|^\alpha dm_{n-1}(x))$, $1 < p < \infty$, при выполнении условия*

$$-(n-1)c < \alpha < (\beta-1)p + (n-1)(p-c)$$

*будем иметь*

$$\int\limits_{\partial\Omega} (f^*(x))^p\, a(x)|x|^\alpha\, dm_{n-1}(x) \leqslant C \int\limits_{\partial\Omega} |f(x)|^p\, a(x)\, |x|^\alpha\, dm_{n-1}(x).$$

В связи с этим в формулировке основной теоремы 1 первое из условий на показатель $\alpha$ надо заменить на условие (1).

*А. Э. Джрбашян*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Э. Джрбашян*. Весовая оценка для функции $g_q$, Известия АН Арм. ССР, Математика, 14, № 5, 1979, 338—347.

*R. Coifman, C. Fefferman*. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Stud. Math., 54, 1974, 241—250.

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ֆ. Ա. Շամոյան. Փակ իդեալները անալիտիկ և մինչև եզրը ողորկ ֆունկցիաների հանրահաշիվներում. . . . . 173
Բ. Թ. Բատիկյան. Երկրորդ կարգի կետային դիֆերենցումներ հավասարաչափ հանրահաշվի վրա . . . . . 192
Ա. Է. Ջրբաշյան. Կշռային անհավասարություններ Լիթլվուդ-Պելիի տիպի օպերատորների և Ֆուրյեի ձևափոխությունների մուլտիպլիկատորների համար . . . . 202
Վ. Վ. Անդրիևսկի, Ս. Ռ. Գերման. Բազմանդամային մոտարկումները քվազիկոնֆորմ աղեղների վրա . . . . . 213
Գ. Կ. Հովհաննիսյան. $B_2$ դասի պարբերական ֆունկցիաներով կազմված շարքերի մասին 229
Նամակ խմբագրությանը . . . . . 244

## СОДЕРЖАНИЕ

*Ф. А. Шамоян.* Замкнутые идеалы в алгебрах аналитических функций, гладких вплоть до границы . . . . . 173
*Б. Т. Батикян.* Точечные дифференцирования второго порядка на равномерной алгебре . . . . . 192
*А. Э. Джрбашян.* Весовые неравенства для операторов типа Литтвуда-Пэли и для мультипликаторов преобразования Фурье . . . . . 202
*В. В. Андриевский, С. П. Герман.* Полиномиальные приближения на квазиконформных дугах . . . . . 213
*Г. К. Оганесян.* О периодических функциях из класса $B_2$ . . . . . 229
Письмо в редакцию . . . . . 244

## CONTENTS

*F. A. Shamoyan.* Closed ideals in the algebras of analytic functions with smooth boundary values . . . . . 173
*B. T. Batikian.* Point derivations of order 2 on uniform algebra . . . . . 192
*A. E. Djrbashian.* Weighted inequalities for Littlewood-Paley type operators and Fourier multipliers . . . . . 202
*V. V. Andrievskii, S. P. German.* Polynomial approximations on the quasiconformal arcs . . . . . 213
*G. K. Hovhanessian.* On the series of periodical functions from the class $B_2$ . 229
A letter to editorial board . . . . . 244