ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրատարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих привил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный эист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статьи отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция «Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

1981 T.16 N3

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 2, 1981 Математика

Выпуск посвящается XXVI съезду КПСС

В. М. МАРТИРОСЯН

О ЗАМЫКАНИИ, МИНИМАЛЬНОСТИ И БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Введение

1. (а) Известна следующая теорема Мюнца—Сасса в обобщенной формулировке [1, 2].

Теорема (Мюнц—Сасс). *Пусть* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ $(\operatorname{Re}\lambda_k>0)$ — *последовательность комплексных чисел и* s_k — *кратность появления числа* λ_k *на отрезке* $\{\lambda_j\}_1^k$. *Для полноты в* $L_2(0,+\infty)$ *системы* $\{e^{-\lambda_k x}\, x^{s_k-1}\}_1^\infty$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^2)^{-1}\operatorname{Re}\lambda_k=+\infty.$$

М. М. Джрбашяном [2] был исследован вопрос о полноте систем функций, порожденных целой функцией типа Миттаг—Леффлера

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\quad(\mu>0,\ \rho>0),$$

и был установлен критерий полноты этих систем. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем обозначения.

Пусть α, ρ, ω и μ — вещественные параметры и

$$\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ \rho=\frac{\alpha}{2\alpha-1},\ -1<\omega<1,\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

Обозначим через $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ гильбертово пространство измеримых на $(0,+\infty)$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\omega}(0,+\infty)}=\left\{\int_0^{+\infty}|f(x)|^2x^\omega\,dx\right\}^{1/2}<+\infty.$$

Пусть, наконец, $\{\lambda_k\}_1^\infty\left(|\arg\lambda_k|<\dfrac{\pi}{2\alpha}\right)$ — последовательность комплексных чисел, а s_k — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$.

Следующая теорема является обобщением вышеприведенной теоремы Мюнца—Сасса.

Теорема (М. М. Джрбашян). *Для полноты в* $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ *системы функций*

$$\omega_\rho^*(x;\lambda_k)=E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x;\mu)\,x^{s_k-1}\ (k=1,2,\cdots)$$

необходимо и достаточно условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^{2\varkappa})^{-1}\operatorname{Re}\lambda_k^*=+\infty.$$

(б) В связи с теоремой Мюнца—Сасса Л. Шварц и А. Ф. Леонтьев рассмотрели вопрос описания функций, принадлежащих замыканию системы $\{e^{-\lambda_k x}\}_1^\infty$, в случае ее неполноты в $C[0,+\infty]$ или $L_p(0,+\infty)$, $p>1$ [3, 4]. Однако в этих исследованиях не была дана собственно внутренняя характеристика замыкания системы $\{e^{-\lambda_k x}\}_1^\infty$.

М. М. Джрбашяном [1] было дано полное внутреннее описание замыкания системы $\{e^{-\lambda_k x}x^{s_k-1}\}_1^\infty$ $(\operatorname{Re}\lambda_k>0)$ в случае ее неполноты в $L_2(0,+\infty)$. В работе С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна [5] этот результат был обобщен и было дано полное внутреннее описание замыкания системы $\{\omega_\rho^*(x;\lambda_k)\}_1^\infty$ в случае ее неполноты в $L_{2,\omega}(0,+\infty)$.

(в) Другие обобщения теоремы Мюнца—Сасса были получены в работе М. М. Джрбашяна и автора [6]. Там был установлен критерий полноты системы $\{e^{-\lambda_k z}z^{s_k-1}\}_1^\infty$ при среднеквадратичном приближении в угловых областях. В случае неполноты таких систем в [6] было дано полное внутреннее описание их замыканий.

В совместной работе А. Е. Аветисяна, С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна [7] был установлен критерий полноты систем функций типа Миттаг—Леффлера на конечной системе лучей, исходящих из точки $z=0$.

2. В настоящей работе рассматриваются вопросы полноты, описания замыкания, минимальности и базисности систем функций, порожденных целой функцией типа Миттаг—Леффлера*. Эти рассмотрения ведутся в пространствах голоморфных в угловых областях функций, которые определяются следующим образом.

$H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)]$ $(0<\varkappa-\chi<2\pi,\ -1<\omega<1)$ — это пространство функций F, голоморфных в угловой области $\Delta(\chi;\varkappa)=\{z:\chi<\operatorname{Arg}z<\varkappa\}$ и таких, что

$$\|F\|_{2,\omega}^*=\sup_{\chi<\varphi<\varkappa}\left\{\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega\,dr\right\}^{1/2}<+\infty.$$

Аналогично определяется пространство $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ в угловой области $\Delta^*(\chi;\varkappa)=\mathbf{C}\setminus\overline{\Delta(\chi;\varkappa)}$.

Такие пространства функций в угловых областях впервые были введены и исследованы М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [10] (см. также гл. VII монографии [11]). Ими же впервые было установ-

---

* Результаты данной работы были частично опубликованы в заметках автора [8, 9].

лено, что в том случае, когда $\Delta(\chi;\varkappa)\equiv\{z\colon \operatorname{Re} z>0\}$ (т. е. когда $\chi=-\frac{\pi}{2}$, $\varkappa=\frac{\pi}{2}$), класс $H_2^{(0)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right]$ совпадает с известным классом H_2 функций Φ, голоморфных в правой полуплоскости и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<x<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(x+iy)|^2\,dy\right\}<+\infty.$$

В § 1 данной работы приводится ряд известных результатов относительно пространств $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)]$.

В § 2 рассматриваются вопросы полноты и описания замыкания систем функций типа Миттаг—Леффлера. Эти системы определяются следующим образом. Полагая, что

$$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{\varkappa-\chi}<\rho,\ -1<\omega<1,\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho},$$

с последовательностью

$$\{\lambda_k\}_1^{\infty}\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho}<\operatorname{Arg}\lambda_k<\varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$$

ассоциируется система функций

$$\omega_\rho^*(z;\lambda_k)=E_\rho^{(s_k-1)}(\bar{\lambda}_k z;\mu)\,z^{s_k-1}\ (k=1,2,\cdots).$$

В том же параграфе устанавливается, что расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^{2\beta})^{-1}\operatorname{Re}[e^{i\eta}\bar{\lambda}_k]^{\beta}, \tag{1}$$

$$\eta=\frac{\chi+\varkappa}{2},\ \frac{\pi}{\beta}=\varkappa-\chi-\frac{\pi}{\rho},$$

является необходимым и достаточным условием полноты в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ системы $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^{\infty}$. В случае неполноты этой системы в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ дается полное внутреннее описание ее замыкания.

§ 3 посвящен вопросам минимальности и базисности систем $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^{\infty}$. Устанавливается, что сходимость ряда (1) необходима и достаточна для минимальности системы $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^{\infty}$. В случае минимальности такой системы строится биортогональная с ней система.

В заключение устанавливается следующий критерий базисности системы $\{\omega_\rho^*(z;\bar{\lambda}_k)\}_1^{\infty}$.

Пусть последовательность $\{\lambda_k^{(\omega)}\}_1^{\infty}$ определяется следующим образом:

$$\lambda_k^{(\omega)}=\{|\lambda_k|^{\omega}(|\lambda_k|^{1-\beta}\operatorname{Re}(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^{\beta})^{2s_k-1}\}^{1/2}\ (k=1,2,\cdots).$$

Тогда, если выполняются условия

$$\inf_{k>1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_k}}^{\infty} \left| \frac{(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^\beta - (e^{i\eta}\bar{\lambda}_j)^\beta}{(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^\beta + (e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^\beta} \right| > 0, \ \sup \{s_k\} < +\infty,$$

то система $\{\lambda_k^{(\omega)}\, \omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ является базисом Рисса своего замыкания в метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\gamma;\ x)]$. Если же хоть одно из этих условий нарушено, то система $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ ни при какой перестановке членов не является базисом своего замыкания (в той же метрике).

При установлении результатов настоящей работы вопросы замыкания, минимальности и базисности системы $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ сводятся к соответствующим известным [12] результатам для определенных систем простейших рациональных дробей. Этот переход осуществляется с использованием преобразования типа Бореля, построенного М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [10] (см. также гл. VII монографии [11]).

§ 1. Предварительные сведения и определения

1 (а). Пусть $0 < x - \chi < 2\pi$ и

$$\Delta(\chi;\ x) = \{z\colon \chi < \operatorname{Arg} z < x,\ 0 < |z| < +\infty\},$$

$$\Delta^*(\chi;\ x) = \{z\colon x < \operatorname{Arg} z < \chi + 2\pi,\ 0 < |z| < +\infty\}$$

— взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости C.

Полагая, что ω изменяется в пределах $-1 < \omega < 1$, обозначим через $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\ x)]$ класс функций F, голоморфных в $\Delta(\chi;\ x)$ и удовлетворяющих условию

$$\|F\|_{2,\omega} = \sup_{\chi<\varphi<x} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega\, dr \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Аналогично, через $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ x)]$ обозначим класс функций F, голоморфных в $\Delta^*(\chi;\ x)$ и таких, что

$$\|F\|_{2,\omega}^* = \sup_{x<\varphi<\chi+2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega\, dr \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Заметим, что между классами $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;x)]$ и $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi,\ x)]$ нет никакого принципиального различия, поскольку $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ x)] \equiv H_2^{(\omega)}[\Delta(x;\ \chi+2\pi)]$ и класс $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ x)]$ мы вводим для удобства.

(б) Приведем некоторые свойства классов $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\ x)]$ $(0 < x - \chi < 2\pi,\ -1 < \omega < 1)$, необходимые для дальнейшего изложения.

Справедлива следующая теорема (см. [11], теорему 7.5 или [12], теорему 1).

Теорема А. *Для любой функции $F \in H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\ x)]$ справедливы следующие утверждения:*

1°. *Почти всюду на границе* $\partial\Delta(\chi;\varkappa)$ *угловой области* $\Delta(\chi;\varkappa)$ *функция* F *имеет угловые граничные значения* $F(\zeta)$, *причем*

$$\|F\|_{2,\omega}^{*}=\left\{\int\limits_{\partial\Delta(\chi;\varkappa)}|F(\zeta)|^{2}|\zeta|^{\omega}|d\zeta|\right\}^{1/2}<+\infty;$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\chi;\varkappa)}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}F(z), & z\in\Delta(\chi;\varkappa),\\ 0, & z\in\Delta^{*}(\chi;\varkappa),\end{cases}$$

где направление на $\partial\Delta(\chi;\varkappa)$ *совпадает с направлением положительного обхода области* $\Delta(\chi;\varkappa)$.

В силу утверждения 1° этой теоремы в $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)]$ можно ввести скалярное произведение равенством

$$(F,G)_{2,\omega}=\int\limits_{\partial\Delta(\chi,\varkappa)}F(\zeta)\overline{G(\zeta)}|\zeta|^{\omega}|d\zeta|,$$

где $F(\zeta)$ и $G(\zeta)$ — граничные значения функций $F, G\in H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)]$.

Имеет место следующая теорема (см. [12], теорему 2).

Теорема В. *Справедливы утверждения*:

1°. $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)]$ *со скалярным произведением* $(F,G)_{2,\omega}$ *является гильбертовым пространством*;

2°. *Нормы* $\|F\|_{2,\omega}^{*}$ *и* $\|F\|_{2,\omega}$ *эквивалентны, именно,*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|F\|_{2,\omega}\leqslant\|F\|_{2,\omega}^{*}\leqslant\|F\|_{2,\omega},\quad\forall F\in H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)].$$

Замечание. Поскольку $H_2^{(\omega)}[\Delta^{*}(\chi;\varkappa)]\equiv H_2^{(\omega)}[\Delta(\varkappa;\chi+2\pi)]$, то утверждения, аналогичные теоремам А и В, справедливы и для класса $H_2^{(\omega)}[\Delta^{*}(\chi;\varkappa)]$.

2. В работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [10] (см. также гл. VII монографии [11]) для функций класса

$$H_2[\alpha;\omega]\equiv H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right]\left(\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1\right)$$

было построено преобразование типа Бореля $G_{\rho,\mu}(\zeta;F)$. Для этого прежде всего вводились два вспомогательных параметра ρ и μ, где

$$\rho>\frac{\alpha}{2\alpha-1},\quad\mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

Далее, если $F\in H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right]$, то для каждого значения $\vartheta\in\left(-\frac{\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}\right)$ образовывалась функция

$$g_\vartheta(\zeta; F) = \rho\,(e^{-i\vartheta}\zeta)^{\mu\rho}\,\zeta^{-1}\int_0^{+\infty} F(re^{-i\vartheta})\, e^{-(e^{-i\vartheta}\zeta)^\rho r^\rho}\, r^{\mu\rho-1}\,dr, \tag{2}$$

рассматриваемая в области $\Delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2\rho}; \vartheta + \frac{\pi}{2\rho}\right)$ (при этом рассматриваются те ветви функций $(e^{-i\vartheta}\zeta)^{\mu\rho}$ и $(e^{-i\vartheta}\zeta)^\rho$, которые на луче $\arg\zeta = \vartheta$ принимают положительные значения). О свойствах функции $g_\vartheta(\zeta; F)$ справедлива следующая теорема (см. [11], теорему 7.6).

Теорема С. *Пусть*

$$F \in H_2[\alpha; \omega] \equiv H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}; \frac{\pi}{2\alpha}\right)\right] \left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty,\ -1 < \omega < 1\right)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. *Для каждого значения* $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2\alpha}; \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ *функция* (2) *голоморфна в области* $\Delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2\rho}; \vartheta + \frac{\pi}{2\rho}\right)$;

2°. *Существует функция* $G_{\rho,\mu}(\zeta; F)$, *голоморфная в области*

$$\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma}\right), \text{ где } \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho},$$

и такая, что для любого $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$

$$g_\vartheta(\zeta; F) \equiv G_{\rho,\mu}(\zeta; F),\ \zeta \in \Delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2\rho}; \vartheta + \frac{\pi}{2\rho}\right);$$

3°. *Функция* $G_{\rho,\mu}(\zeta; F)$ *принадлежит классу*

$$H_2[\gamma, -\omega] \equiv H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}, \frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]$$

*и справедливо неравенство**

$$\|G_{\rho,\mu}(\zeta; F)\|_{2,-\omega} \leqslant \sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}\ \|F\|_{2,\omega}.$$

Таким образом, преобразование типа Бореля $G_{\rho,\mu}$ является ограниченным линейным оператором, отображающим

$$H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}; \frac{\pi}{2\alpha}\right)\right] \text{ в } H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma}\right)\right].$$

Из теорем 7.6, 7.7 и 7.9 монографии [11] легко следует обратимость этого оператора, а также аналитический вид обратного оператора. Именно, справедлива следующая

* Этого неравенства нет в формулировке теоремы 7.6 монографии [11]. Оно получено в процессе ее доказательства.

Теорема Д. *Пусть* $\frac{1}{2}<\alpha<+\infty$, $-1<\omega<1$, *а параметры* ρ, μ *и* γ *определяются из условий*

$$\rho\geqslant\frac{\alpha}{2\alpha-1},\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho},\ \frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}.$$

Пусть, далее, $\partial\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)$ — *граница области* $\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)$, *пробегаемая в положительном относительно этой области направлении. Тогда формулой*

$$F(w)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)}E_\rho(w\zeta;\mu)\,G(\zeta)\,d\zeta,\ w\in\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right),\quad(3)$$

где $G\in H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]$, *определяется ограниченный обратимый линейный оператор, отображающий*

$$H_2^{-(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]\ \text{на}\ H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right],$$

причем $G_{\rho,\mu}(\xi;F)\equiv G(\zeta)$, $\xi\in\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)$.

Следовательно, формулой (3) определяется оператор $G^{-1}_{\rho,\mu}$, обратный к $G_{\rho,\mu}$.

3. Для удобства читателя мы здесь напомним также определения базисных и минимальных систем (см., например, [13]).

Пусть $\{h_k\}_1^\infty$ — система элементов гильбертова пространства H. Обозначим через $(h_k;H)$ замыкание в топологии H линейной оболочки системы $\{h_k\}_1^\infty$.

По определению, $\{h_k\}_1^\infty$ является базисом $(h_k;H)$, если любой элемент $h\in(h_k;H)$ единственным образом представим в виде суммы ряда

$$h=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(h)\,h_k,$$

сходящегося в топологии H. Здесь $c_k(h)$ — комплексные коэффициенты, единственным образом определяемые по элементам h.

Система $\{h_k\}_1^\infty$ называется базисом Рисса пространства $(h_k;H)$, если существует ограниченный обратимый линейный оператор A, отображающий $(h_k;H)$ на $(h_k;H)$ и такой, что система $\{Ah_k\}_1^\infty$ является ортонормированным базисом пространства $(h_k;H)$.

Далее, система $\{h_k\}_1^\infty$ называется минимальной в H, если ни один ее член нельзя приблизить в топологии H линейными комбинациями остальных членов. Минимальность системы $\{h_k\}_1^\infty$ необходима и достаточна для существования биортогональной с ней системы, т. е. такой системы ограниченных линейных функционалов $\{h_k^*\}_1^\infty\subset H^*$, что

$$h_k^*(h_n)=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases} \quad (k,\ n=1,\ 2,\cdots).$$

§ 2. Полнота и замыкание систем функций типа Миттаг—Леффлера

1. Пусть вещественные параметры χ, $\varkappa$ и ρ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{\varkappa-\chi}<\rho.$$

Очевидно, что тогда

$$0<\left(\varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)-\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho}\right)<2\pi$$

и угловая область $\Delta\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ является подобластью угловой области $\Delta(\chi;\ \varkappa)$.

Пусть, далее, $\{\lambda_k\}_1^\infty$— произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$.

Для каждого целого $j\geqslant 1$ обозначим через s_j кратность появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_k\}_{k=1}^j$, а через p_j — кратность появления числа λ_j во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Легко видеть, что

$$1\leqslant s_j\leqslant p_j<+\infty\ (j\geqslant 1).$$

С последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем систему функций $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$, порожденную целой функцией типа Миттаг—Леффлера $E_\rho(z;\ \mu)$, положив

$$\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)=E_\rho^{(s_k-1)}(\bar{\lambda}_k z;\ \mu)\ z^{s_k-1}\ (k=1,\ 2,\cdots),$$

$$-1<\omega<1,\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

Из асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\ \mu)$ (см. [11], лемму 3.4) следует, что

$$\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty\subset H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ \varkappa)].$$

Наша ближайшая цель—установить критерий полноты в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ \varkappa)]$ системы $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$. Для этого нам нужно доказать одно утверждение, которое позволит установить связь между системой $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ и определенной системой простейших рациональных дробей. Прежде чем его формулировать, введем обозначения.

Обозначим через

$$\tilde{\Delta}\equiv\tilde{\Delta}\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$$

угловую область, симметричную с областью $\Delta\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ относительно вещественной оси, т. е.

$$\tilde{\Delta}=\Delta\left(-\varkappa+\frac{\pi}{2\rho};\ -\chi-\frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Через

$$\tilde{\Delta}^*\equiv\tilde{\Delta}^*\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$$

обозначим угловую область, дополнительную к угловой области $\tilde{\Delta}$, т. е. $\tilde{\Delta}^*=\mathbf{C}\setminus\bar{\tilde{\Delta}}$, где $\bar{\tilde{\Delta}}$ — замыкание области $\tilde{\Delta}$. Ясно, что области $\tilde{\Delta}^*$ и $\Delta^*\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ симметричны относительно вещественной оси.

Очевидно также, что

$$\tilde{\Delta}=\left\{\bar{z}:\ z\in\Delta\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)\right\},$$

$$\tilde{\Delta}^*=\left\{\bar{z}:\ z\in\Delta^*\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)\right\}.$$

Далее положим

$$r_k(\zeta)=\frac{(s_k-1)!}{(\zeta-\bar{\lambda}_k)^{s_k}}\quad (k=1,\ 2,\cdots).$$

Наконец, обозначим через $\partial\tilde{\Delta}$ границу области $\tilde{\Delta}$, пробегаемую в положительном относительно этой области направлении.

Полагая, как и раньше,

$$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{\varkappa-\chi}<\rho,\ -1<\omega<1,\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho},$$

докажем лемму.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1°. *Формулой*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\tilde{\Delta}}E_\rho(z\zeta;\ \mu)\ g(\zeta)\ d\zeta,\ z\in\Delta^*(\chi;\ \varkappa),$$

где $g\in H_2^{(-\omega)}[\tilde{\Delta}^*]$, *определяется ограниченный обратимый линейный оператор* $g_{\rho,\mu}^{-1}$, *отображающий пространство* $H_2^{(-\omega)}[\tilde{\Delta}^*]$ *на пространство* $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ \varkappa)]$;

2°. *Оператор* $g_{\rho,\mu}^{-1}$ *переводит систему* $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ *в систему* $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$:

$$g_{\rho,\mu}^{-1}[r_k(\zeta)] = \omega_\rho^*(z;\lambda_k)\ (k=1,2,\cdots).$$

Доказательство. Пусть

$$\frac{\pi}{\alpha} = 2\pi - (\varkappa - \chi)$$

есть раствор угловой области $\Delta^*(\chi;\varkappa)$, а

$$\frac{\pi}{\gamma} = 2\pi - \left(\varkappa - \chi - \frac{\pi}{\rho}\right)$$

— раствор угловой области $\tilde{\Delta}^*$.

Имеем, что параметры α, ω, ρ, μ и γ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2} < \alpha < +\infty,\ -1 < \omega < 1,\ \rho > \frac{\alpha}{2\alpha-1},\quad \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho},\ \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho}.$$

Следовательно, по теореме Д формулой (3) определяется ограниченный обратимый линейный оператор $G_{\rho,\mu}^{-1}$, отображающий

$$H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)\right] \text{ на } H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right].$$

Пусть теперь $\{re^{i\delta}: r>0\}$ $\left(\delta = \frac{1}{2}(\chi+\varkappa)+\pi\right)$ — биссектриса угловой области $\Delta^*(\chi;\varkappa)$. Очевидно, что равенством

$$f(z) = F(e^{-i\delta}z)\ z\in\Delta^*(\chi;\varkappa),$$

где $F\in H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right]$, определяется изометрический изоморфизм между

$$H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right] \text{ и } H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)].$$

Очевидно также, что равенством

$$e^{-i\delta}g(\zeta) = G(e^{i\delta}\zeta),\ \zeta\in\tilde{\Delta}^*,$$

где $G\in H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]$ определяется изометрический изоморфизм между $H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]$ и $H_2^{(-\omega)}[\tilde{\Delta}^*]$.

Следовательно, заменив в (3) $F(w) = F(e^{-i\delta}z)$ на $f(z)$ и $G(\xi) = G(e^{i\delta}\zeta)$ на $e^{-i\delta}g(\zeta) = e^{-i\delta}g(e^{-i\delta}\xi)$, а также w на $e^{-i\delta}z$, получим, что формулой

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)} E_\rho(ze^{-i\delta}\xi;\mu)\,g(e^{-i\delta}\xi)\,e^{-i\delta}d\xi,\ z\in\Delta^*(\chi;\varkappa),$$

определяется ограниченный обратимый линейный оператор, отображающий $H_2^{(-\omega)}[\widetilde{\Delta}^*]$ на $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$. Наконец, произведя в этом интеграле замену переменной $e^{-i\delta}\xi=\zeta$, получим утверждение 1° леммы.

Чтобы получить утверждение 2° леммы, сначала заметим, что из асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\mu)$ [см. [11], лемму 3.4) следует $E_\rho(\lambda z;\mu)\in H_2^{(\omega)}[\widetilde{\Delta}]$, когда $z\in\Delta^*(\chi;\varkappa)$ фиксировано. Следовательно, по теореме A справедливо интегральное представление

$$E_\rho(\lambda z;\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{\Delta}}\frac{E_\rho(z\zeta;\mu)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta,\quad \lambda\in\widetilde{\Delta}.$$

Продифференцировав обе части этого равенства s_k-1 раз по λ и положив $\lambda=\bar{\lambda}_k$, получим утверждение 2° леммы.

2. Теперь рассмотрим вопрос полноты в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ системы $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$.

Пусть $\{re^{i\eta}: r>0\}$ — биссектриса $\Delta\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$, т. е.

$$\eta=\frac{1}{2}(\chi+\varkappa),\text{ а } \pi/\beta=\varkappa-\chi-\pi/\rho \text{ — раствор } \widetilde{\Delta}.$$

Образуем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^{2\beta})^{-1}\operatorname{Re}(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^\beta. \tag{4}$$

В силу леммы 1 система $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$ полна в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ тогда и только тогда, когда система $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ полна в $H_2^{(-\omega)}[\widetilde{\Delta}^*]$, что равносильно расходимости ряда (4) (см. [12]). Учитывая также лемму 1, получим такой результат.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1° $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$ *полна в* $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$;

2°. *Ряд* (4) *расходится*;

3°. *Замыкание в метрике* $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ *системы* $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$ *совпадает с классом функций* f, *единственным образом представимых в виде*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{\Delta}}E_\rho(z\zeta;\mu)\,g(\zeta)\,d\zeta,\quad z\in\Delta^*(\chi;\varkappa),$$

где $g\in H_2^{(-\omega)}[\widetilde{\Delta}^*]$.

Таким образом, если ряд (4) сходится, то система $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$ не полна в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$, и замыкание этой системы есть некоторое собственное подпространство из $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$; чтобы его описать введем еще один класс функций.

При условии сходимости ряда (4) обозначим через $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*; \overline{\lambda}_k]$ класс функций $g \in H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*]$ и таких, что $g(\zeta) B_{\widetilde{\Delta}}(\zeta)$, $\zeta \in \partial\widetilde{\Delta}$, является граничной функцией некоторой функции из $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}]$, а

$$B_{\widetilde{\Delta}}(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{i\eta}\zeta)^{\beta} - (e^{i\eta}\overline{\lambda}_k)^{\beta}}{(e^{i\eta}\zeta)^{\beta} + (e^{i\eta}\overline{\lambda}_k)^{\beta}} \cdot \frac{|1-(e^{i\eta}\overline{\lambda}_k)^{2\beta}|}{1-(e^{i\eta}\overline{\lambda}_k)^{2\beta}}, \quad \zeta \in \widetilde{\Delta}, \tag{5}$$

—сходящееся произведение типа Бляшке для угловой области $\widetilde{\Delta}$ [с нулями в точках $\zeta = \overline{\lambda}_k$.

Теорема 2. *Если ряд* (4) *сходится, то замыкание в метрике* $H_2^{(\infty)}[\Delta^*(\chi; \varkappa)]$ *системы* $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ *совпадает с классом функций* f, *единственным образом представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\widetilde{\Delta}} E_\rho(z\zeta; \mu)\, g(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in \Delta^*(\chi; \varkappa), \tag{6}$$

где $g \in H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*; \overline{\lambda}_k]$.

Доказательство. В силу леммы 1 замыкание в метрике $H_2^{(\infty)}[\Delta^*(\chi; \varkappa)]$ системы $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ совпадает с множеством функций f, представимых в виде (6), где g принадлежит замыканию в метрике $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*]$ системы $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$. Но если ряд (4) сходится, то замыкание в метрике $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*]$ системы $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ совпадает с классом $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*; \overline{\lambda}_k]$ (см. [12], теорему 7), откуда и следует утверждение теоремы.

§ 3. Минимальность и базисность систем функций типа Миттаг—Леффлера

1 (а). Ввиду леммы 1 система $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ минимальна в $H_2^{(\infty)}[\Delta^*(\chi; \varkappa)]$ тогда и только тогда, когда система $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ минимальна в $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*]$. А для этого необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд (4) (см. [12], § 2). Следовательно, справедлив следующий критерий минимальности системы $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$.

Теорема 3. *Система* $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ *минимальна в* $H_2^{(\infty)}[\Delta^*(\chi; \varkappa)]$ *тогда и только тогда, когда сходится ряд* (4).

(б) Итак, если ряд (4) сходится, то система $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ имеет биортогональную систему. Займемся ее построением.

Предварительно построим другую систему $\{\Omega_k(\xi)\}_1^\infty$, функции которой удовлетворяют следующим интерполяционным данным:

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\bar\lambda_n)=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases}\quad (k,\ n>1). \tag{7}$$

При этом мы будем следовать схеме, предложенной М. М. Джрбашяном (см., например, [14, 15]).

Сначала заметим, что если ряд (4) сходится, то число p_j (т. е. кратность появления числа $\bar\lambda_j$ во всей последовательности $\{\bar\lambda_k\}_1^\infty$) конечно при любом $j\geqslant 1$.

Пусть ряд (4) сходится. Тогда бесконечное произведение (5) сходится абсолютно и равномерно внутри области $\tilde\Delta$ и определяет там ограниченную аналитическую функцию $B_{\tilde\Delta}(\zeta)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{\bar\lambda_k\}_1^\infty$. При этом для функции $B_{\tilde\Delta}(\zeta)$ точка $\zeta=\bar\lambda_k$ является нулем кратности p_k.

Очевидно, что функция

$$\tau_k(\xi)=\frac{(\xi-\bar\lambda_k)^{p_k}}{B_{\tilde\Delta}(\xi)} \tag{8}$$

регулярна и отлична от нуля в некоторой окрестности точки $\xi=\bar\lambda_k$. Следовательно, при достаточно малом $\varepsilon>0$ справедливо разложение

$$\tau_k(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\bar\lambda_k)(\xi-\bar\lambda_k)^\nu,\ |\xi-\bar\lambda_k|<\varepsilon, \tag{9}$$

где

$$a_\nu(\bar\lambda_k)=\frac{1}{\nu!}\tau_k^{(\nu)}(\bar\lambda_k)(\nu=0,\ 1,\cdots;\ k=1,\ 2,\cdots).$$

Введем в рассмотрение полиномы

$$q_k(\xi)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu(\bar\lambda_k)(\xi-\bar\lambda_k)^\nu\ (k=1,\ 2,\cdots), \tag{10}$$

и функции

$$\Omega_k(\xi)=\frac{B_{\tilde\Delta}(\xi)\ q_k(\xi)}{(s_k-1)!\,(\xi-\bar\lambda_k)^{p_k-s_k+1}}=\frac{B_{\tilde\Delta}(\xi)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\bar\lambda_k)}{(\xi-\bar\lambda_k)^{p_k-s_k+1-\nu}}. \tag{11}$$

Так как функция $B_{\tilde\Delta}(\xi)$ аналитична и ограничена в области $\tilde\Delta$ и в точке $\xi=\bar\lambda_k$ имеет нуль кратности p_k, то $\Omega_k(\xi)$ аналитична и ограничена в той же области $\tilde\Delta$. Более того, при $|\xi|\to+\infty$ функция $\Omega_k(\xi)$ имеет порядок $O(|\xi|^{-1})$. Отсюда заключаем, что

$$\Omega_k(\xi)\in H_2^{(\omega)}[\tilde\Delta]\ (k=1,\ 2,\cdots).$$

Об интерполяционных свойствах функций $\Omega_k(\xi)$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Функции системы $\{\Omega_k(\xi)\}_1^\infty$ удовлетворяют интерполяционным данным* (7).

Доказательство. Из (9) и (10) следует, что

$$q_k(\xi) = \tau_k(\xi) - \sum_{\nu=p_k-s_k+1} a_\nu(\bar\lambda_k)(\xi-\bar\lambda_k)^\nu, \ |\xi-\bar\lambda_k|<\varepsilon,$$

а в силу (8) имеем

$$\frac{B_{\tilde\Delta}(\xi)\,\tau_k(\xi)}{(s_k-1)!\,(\xi-\bar\lambda_k)^{p_k-s_k+1}} = \frac{(\xi-\bar\lambda_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}.$$

Из этих равенств и (11) получаем

$$\Omega_k(\xi)=\frac{(\xi-\bar\lambda_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!} - \frac{B_{\tilde\Delta}(\xi)}{(s_k-1)!}\sum_{j=0}^{\infty} b_j(\bar\lambda_k)(\xi-\bar\lambda_k)^j, \ |\xi-\bar\lambda_k|<\varepsilon. \quad (12)$$

Теперь рассмотрим три единственно возможных случая: 1) $k=n$; 2) $\bar\lambda_k=\bar\lambda_n$, но $k\neq n$; 3) $\bar\lambda_k\neq\bar\lambda_n$.

Так как $B_{\tilde\Delta}(\xi)$ в точке $\xi=\bar\lambda_k$ имеет нуль кратности $p_k\geqslant s_k$, то из (12) имеем

$$\Omega_k^{(s_k-1)}(\bar\lambda_k)=1 \ (k=1, 2,\cdots).$$

Если $\bar\lambda_k=\bar\lambda_n$, но $k\neq n$, то $s_k\neq s_n$, и из (12) получаем

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\bar\lambda_n)=0.$$

Наконец, если $\bar\lambda_k\neq\bar\lambda_n$, то из (11) вытекает, что в точке $\xi=\bar\lambda_n$ функция $\Omega_k(\xi)$ вместе с $B_{\tilde\Delta}(\xi)$ имеет нуль кратности $p_n\geqslant s_n$. Следовательно, в этом случае

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\bar\lambda_n)=0.$$

Лемма доказана.

(в) Пусть, как и раньше,

$$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{\varkappa-\chi}<\rho, \ -1<\omega<1, \ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

Пусть, далее, $\{re^{i\eta}: r>0\}$ $\left(\eta=\frac{1}{2}(\chi+\varkappa)\right)$ — биссектриса угловой области $\Delta(\chi;\varkappa)$, $\frac{\pi}{\gamma}=\varkappa-\chi$ — раствор той же области, а $\frac{\pi}{\gamma}=\varkappa-\chi-\frac{\pi}{\rho}$ — раствор угловой области $\tilde\Delta$.

Легко видеть, что поворот комплексной плоскости на угол $-\eta$ переводит $\Delta(\chi;\varkappa)$ в $\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)$, а поворот на угол η переводит $\tilde\Delta$ в $\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)$.

Нетрудно также проверить, что параметры α, ω, ρ, μ и γ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1,\ \rho>\frac{\alpha}{2\alpha-1},\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho},\ \frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}.$$

Далее, очевидно, что равенством

$$f(\xi)=e^{i\eta}F(e^{i\eta}\xi),\quad \xi\in\widetilde{\Delta},$$

где $F\in H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\ \frac{\pi}{2\alpha}\right)\right]$ определяется изометрический изоморфизм между пространствами

$$H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\ \frac{\pi}{2\alpha}\right)\right] \text{ и } H_2^{(\omega)}[\widetilde{\Delta}],$$

а равенством

$$h(z)=g(e^{-i\eta}z),\ z\in\Delta(\chi;\ \varkappa),$$

где $g\in H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\ \frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]$ —между пространствами

$$H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\ \frac{\pi}{2\gamma}\right)\right] \text{ и } H_2^{(-\omega)}[\Delta(\chi;\ \varkappa)].$$

Если теперь $f\in H_2^{(\omega)}[\widetilde{\Delta}]$, то для каждого значения $\varphi\in\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho},\right.$ $\left.\varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ образуем функцию

$$h_\varphi(z;\ f)=\rho(e^{-i\varphi}z)^{\mu\rho}z^{-1}\int\limits_0^{+\infty}f(re^{-i\varphi})\,e^{-(e^{-i\varphi}zr)^\rho}r^\rho r^{\mu\rho-1}\,dr, \tag{13}$$

рассматривая ее в области $\Delta\left(\varphi-\frac{\pi}{2\rho};\ \varphi+\frac{\pi}{2\rho}\right)$. При этом рассматриваются те ветви функций $(e^{-i\varphi}z)^{\mu\rho}$ и $(e^{-i\varphi}z)^\rho$, которые при $\operatorname{Arg} z=\varphi$ принимают положительные значения.

Учитывая приведенные выше замечания, на основании теорем С и Д получаем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* $f\in H_2^{(\omega)}[\widetilde{\Delta}]$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1°. *Для каждого значения* $\varphi\in\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho},\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ *функция* (13) *голоморфна в области* $\Delta\left(\varphi-\frac{\pi}{2\rho};\ \varphi+\frac{\pi}{2\rho}\right)$;

2°. *Существует функция* $\overline{G}_{\rho,\mu}(z;\ f)$, *принадлежащая классу* $H_2^{(-\omega)}[\Delta(\chi;\ \varkappa)]$ *и такая, что для любого* $\varphi\in\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho},\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$

$$h_\rho(z; f) \equiv \widetilde{G}_{\rho, \mu}(z; f), \ z \in \Delta\left(\varphi - \frac{\pi}{2\rho}; \varphi + \frac{\pi}{2\rho}\right);$$

3°. *Справедливо равенство*

$$f(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\chi;\varkappa)} E_\rho(\xi z; \mu)\, \widetilde{G}_{\rho,\mu}(z; f)\, dz, \quad \xi \in \overline{\Delta},$$

где $\partial\Delta(\chi; \varkappa)$ — *граница* $\Delta(\chi; \varkappa)$, *пробегаемая в положительном относительно этой области направлении.*

(г) Теперь мы уже можем определить биортогональную с $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ систему $\{\Omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$. Для этого вспомним, что $\{\Omega_k(\xi)\}_1^\infty \subset \subset H_2^{(\omega)}[\overline{\Delta}]$ и положим

$$\Omega^*_\rho(z; \lambda_k) = \widetilde{G}_{\rho,\mu}(z; \Omega_k) \ (k=1, 2, \cdots). \tag{14}$$

Ясно, что система $\{\Omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ определена лишь при условии сходимости ряда (4) (так как такова и система $\{\Omega_k(\xi)\}_1^\infty$), и по лемме 3

$$\Omega_\rho^*(z; \lambda_k) \in H_2^{(-\omega)}[\Delta(\chi; \varkappa)] \ (k=1, 2, \cdots).$$

Теорема 4. *Системы* $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ *биортогональны в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta^*(\chi,\varkappa)} \omega_\rho^*(z; \lambda_n)\, \Omega_\rho^*(z; \lambda_k)\, dz = \begin{cases} 1, & k=n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \ (k, n \geqslant 1), \tag{15}$$

где $\partial\Delta^*(\chi; \varkappa)$ — *граница* $\Delta^*(\chi; \varkappa)$, *пробегаемая в положительном относительно этой области направлении.*

Доказательство. Ввиду (14) и леммы 3 для любого $k \geqslant 1$ можем написать

$$\Omega_k(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\chi,\varkappa)} E_\rho(z\xi; \mu)\, \Omega_\rho^*(z; \lambda_k)\, dz, \ \xi \in \overline{\Delta}.$$

Продифференцировав обе части этого равенства $s_n - 1$ раз по ξ, получим

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\chi,\varkappa)} E_\rho^{(s_n-1)}(\xi z; \mu)\, \Omega_\rho^*(z; \lambda_k)\, dz, \ \xi \in \overline{\Delta},$$

(при этом дифференцирование под знаком интеграла допустимо ввиду абсолютной и равномерной сходимости полученных после дифференцирования интегралов). Подставив в это равенство $\xi = \overline{\lambda}_n$ и поменяв направление контура интегрирования, будем иметь

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\overline{\lambda}_n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\chi;\varkappa)} E_\rho^{(s_n-1)}(\overline{\lambda}_n z; \mu)\, z^{s_n-1}\, \Omega_\rho^*(z; \lambda_k)\, dz,$$

а это, в силу леммы 2, равносильно (15). Теорема доказана.

Замечание. Отметим, не останавливаясь на подробностях, что воспользовавшись (14) и леммой 3, можно на основании соответствующих результатов из работы [12] для системы $\{\Omega_k(\xi)\}_1^\infty$ описать замыкание в метрике $H_2^{(-\omega)}[\Delta(\chi; \varkappa)]$ системы $\{\Omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ и получить критерий ее базисности в этом замыкании.

2. В заключение установим критерий базисности системы $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$. С этой целью обозначим через $\{\lambda_k^{(\omega)}\}_1^\infty$ последовательность положительных чисел, положив

$$\lambda_k^{(\omega)} = \{|\lambda_k|^{\omega} (|\lambda_k|^{1-\beta} \operatorname{Re}(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^\beta)^{2s_k-1}\}^{1/2} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

где

$$\eta = \frac{\chi + \varkappa}{2}, \quad \frac{\pi}{\beta} = \varkappa - \chi - \frac{\pi}{\rho}.$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 5. *Справедливы следующие утверждения:*

1° *Если выполняются условия*

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_k}}^{\infty} \left| \frac{(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^\beta - (e^{i\eta}\bar{\lambda}_j)^\beta}{(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^\beta + \overline{(e^{i\eta}\bar{\lambda}_j)^\beta}} \right| > 0, \quad \sup_{k \geq 1} |p_k| < +\infty, \tag{16}$$

то система $\{\lambda_k^{(\omega)} \omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ *является базисом Рисса своего замыкания в метрике* $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi; \varkappa)]$;

2°. *Если хоть одно из условий* (16) *нарушается, то система* $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ *ни при какой перестановке членов не является базисом своего замыкания в метрике* $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi; \varkappa)]$.

Доказательство. При выполнении условий (16) система $\{\lambda_k^{(\omega)} r_k(\zeta)\}_1^\infty$ является базисом Рисса своего замыкания в метрике $H_2^{(-\omega)}[\tilde{\Delta}^*]$ (см. [12], теорему 11). Тогда, в виду леммы 1, система $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\lambda_k^{(\omega)}\}_1^\infty$ также является базисом Рисса своего замыкания в метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi; \varkappa)]$.

Если же хоть одно из условий (16) нарушается, то система $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ ни при какой перестановке членов не является базисом своего замыкания в метрике $H_2^{(-\omega)}[\tilde{\Delta}^*]$ (см. [12], теорему 11). Снова воспользовавшись леммой 1, отсюда получаем утверждение 2° теоремы.

Приношу глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.III.1980

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների փակության, մինիմալության ու բազիսության մասին անկյունային տիրույթներում (ամփոփում)

Ուսումնասիրված է Միտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիայով ծնված սիստեմների լրիվության, մինիմալության, բազիսության ու փակույթի նկարագրման հարցերը անկյունային տիրույթներում:

V. M. MARTIROSIAN. *On the closure, minimality and basisity of the systems of Mittag—Leffler type in angular domains* (summary)

The problem of closedness, minimality, basisity and of describing the closure of a systems of Mittag—Leffler type in angular domains are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
2. *М. М. Джрбашян*. О замкнутости системы типа Миттаг—Леффлера, ДАН СССР, 219, № 6, 1974, 1302—1305.
3. *L. Schwartz*. Etude des sommes d'exponentielles, Actualites scientifiques et industrielles, Paris, 1959.
4. *А. Ф. Леонтьев*. Об одной последовательности полиномов, ДАН СССР, 72, № 4, 1950, 621—624.
5. *С. А. Акопян, И. О. Хачатрян*. О замыкании незамкнутых систем функций типа Миттаг—Леффлере, Изв. АН СССР, сер. матем., 40, № 1, 1976, 96—114.
6. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян*. Теоремы типа Винера—Пэли и Мюнца—Сасса, Изв. АН СССР, сер. матем., 41, № 4, 1977, 868—894.
7. *А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, И. О. Хачатрян*. О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера на произвольной конечной системе лучей, Изв. АН Арм. ССР, матем., XIII, №№ 5—6, 1978, 389—395.
8. *В. М. Мартиросян*. О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера и систем простейших рациональных дробей, ДАН Арм. ССР, 62, № 5, 1976, 269—274.
9. *В. М. Мартиросян*. Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм. ССР, 63, № 5, 1976, 278—283.
10. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
11. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
12. *В. М. Мартиросян*. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, матем., XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
13. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», М., 1967.
14. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм. ССР, матем., VIII, № 1, 1973, 384—409.
15. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси, Матем. сб., 95 (137), № 3 (11), 1974, 418—444.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 2, 1981 Математика

В. С. ВИДЕНСКИЙ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПА БЕРНШТЕЙНА

1°. В заметках [1], [2] рассмотрено приближение функций $f \in C$ [0; 1] положительными операторами

$$\mathrm{B}_n (f;\ x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tau_{kn})\, p_{kn}(x), \tag{1.1}$$

где p_{kn} — неотрицательные на [0; 1] рациональные дроби с данной матрицей полюсов $(x_{in})_{i=1}^{n}$, $x_{in} \in R \setminus [0;\ 1]$, $n \in N$. С другой стороны, в статье [3] при помощи производящей функции, которая встречается в теории вероятностей ([4], стр. 69), введены операторы вида (1.1), где p_{kn} имеют более общую природу, но точки τ_{kn} выбираются равными k/n, как в классических многочленах Бернштейна.

Здесь объединяются оба подхода и указываются достаточные условия равномерной сходимости $\mathrm{B}_n f$ к f, обобщающие результаты для многочленов Бернштейна и их аналогов, исследованных в работах [1] — [3]. В качестве примеров приводятся случаи, когда p_{kn} — функции с вещественными алгебраическими или логарифмическими особенностями, лежащими вне отрезка [0; 1].

2°. Введем обозначения, $x \in [0;\ 1]$; $\|f\| = \sup\limits_{0<x<1} |f(x)|$; пусть $h_{in} \in C[0, 1]$; $i = 1, \cdots, n$; $n \in N$, причем $0 \leqslant h_{in}(x) \leqslant 1$, $h_{in}(0) = 0$, $h_{in}(1) = 1$ и, кроме того, функция

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{in}(x) \tag{2.1}$$

строго возрастает на [0; 1]. Точки τ_{kn} определяются равенствами

$$\varphi_n(\tau_{kn}) = \frac{k}{n}\ (k = 0,\ 1, \cdots,\ n). \tag{2.2}$$

Функции p_{kn} определяются при помощи производящей функции (см. [3], [5])

$$G_n(t;\ x) = e^{-t\varphi_n(x)} \prod_{i=1}^{n} (h_{in}(x)\, e^{t/n} + 1 - h_{in}(x)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_{kn}(x) \exp\left[\varphi_n(\tau_{kn}) - \varphi_n(x)\right] t. \tag{2.3}$$

Таким образом, операторы (1.1) построены. Если, в частности, все $h_{in}(x) = x$, то $\varphi_n(x) = x$, $\tau_{kn} = k/n$, $p_{kn}(x) = C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}$, и (1.1) совпадает с многочленом Бернштейна. Если для краткости положим

$$\Phi_{kn}(x) = \varphi_n(\tau_{kn}) - \varphi_n(x), \tag{2.4}$$

$$S_{\nu n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_{kn}^{\nu}(x)\, p_{kn}(x), \tag{2.5}$$

то можем написать

$$G_n(t;\ x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{S_{\nu n}(x)}{\nu!}\, t^{\nu}. \tag{2.6}$$

Далее обозначим

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\tau_{kn} - x)^2\, p_{kn}(x), \tag{2.7}$$

$$\gamma_n(x) = \inf_{0<y<1} [\varphi_n(y) - \varphi_n(x)](y-x)^{-1}. \tag{2.8}$$

Интерес представляет случай, когда $\gamma_n(x) > 0$ в $]0;\ 1[$. При $\varphi_n(x) = x$ имеем $\gamma_n(x) = 1$, но обычно не удается вычислить функцию $\gamma_n(x)$, а находится некоторая ее оценка снизу.

3°. Если в (2.3) положить $t = 0$, то получим

$$S_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{kn}(x) = 1. \tag{3.1}$$

Благодаря (2.4) и (2.8), имеем

$$\gamma_n^2(x)\,(\tau_{kn} - x)^2 \leqslant \Phi_{kn}^2(x), \tag{3.2}$$

откуда следует неравенство

$$\gamma_n^2(x)\, D_n(x) \leqslant S_{2,n}(x). \tag{3.3}$$

Применяя известную схему Т. Поповичиу [6], получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Если $\gamma_n(x) > 0$ при $0 < x < 1$ и $f \in C(0;\ 1]$, то*

$$|\mathrm{B}_n(f;\ x) - f(x)| \leqslant 2\,\omega(f;\ \sqrt{D_n(x)}) \leqslant 2\,\omega(f;\ \gamma_n^{-1}(x)\sqrt{S_{2,n}(x)}), \tag{3.4}$$

где $\omega(f;\ \delta)$ — модуль непрерывности f.

Таким образом, $\mathrm{B}_n f$ сходится к f равномерно, если

$$\lim_{n\to\infty} \|\gamma_n^{-2}(x)\, S_{2,n}(x)\| = 0. \tag{3.5}$$

Так как $\mathrm{B}_n(f;\ 0) = f(0)$ и $\mathrm{B}_n(f;\ 1) = f(1)$, то оценивать разность (3.4) нужно только при $0 < x < 1$. Благодаря (3.1), имеем

$$|\mathrm{B}_n(f;\ x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |f(\tau_{kn}) - f(x)|\, p_{kn}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \omega(f;\ |\tau_{kn} - x|)\, p_{kn}(x). \tag{3.6}$$

Неравенство $\omega(f;\ \delta) < \omega(f;\ \varepsilon)\,(1 + \delta/\varepsilon)$ дает

$$\omega(f;\ |\tau_{kn}-x|)\leqslant\omega(f;\sqrt{D_n(x)}\,)\,(1+|\tau_{kn}-x|\,D_n^{-1/2}(x)). \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в (3.6) и замечая, что

$$\sum_{k=0}^{n}|\tau_{kn}-x|\,p_{kn}(x)\leqslant\sqrt{D_n(x)}, \tag{3.8}$$

получаем (3.4).

4°. Из равенств

$$S_{\nu n}(x)=\frac{\partial^{\nu}G_n(0;\ x)}{\partial t^{\nu}} \tag{4.1}$$

находим

$$S_{1,n}(x)=0;\quad S_{2,n}(x)=n^{-2}\sum_{i=1}^{n}h_{in}(1-h_{in}),$$

$$S_{3,n}(x)=n^{-3}\sum_{i=1}^{n}h_{in}(1-h_{in})(1-2h_{in}), \tag{4.2}$$

$$S_{4,n}(x)=3S_{2,n}^2(x)+n^{-4}\sum_{i=1}^{n}h_{in}(1-h_{in})(1-6h_{in}(1-h_{in})).$$

Заметим, между прочим, что формулы (4.2) для $S_{1,n}$ и $S_{2,n}$ легко получаются из соображений теории вероятностей. Если считать, что независимые случайные величины ξ_{in} $(i=1,\cdots,n)$ принимают два значения 1 и 0 с вероятностями h_{in} и $1-h_{in}$, то p_{kn} — вероятность того, что $\Sigma\xi_{in}$ принимает значение k. Остается вычислить математическое ожидание и дисперсию $\Sigma\xi_{in}$.

Так как $0\leqslant h_{in}\leqslant 1$, то имеем оценку

$$S_{2,n}(x)<(4n)^{-1}, \tag{4.3}$$

к сожалению, не достаточно тонкую для некоторых дальнейших применений. Впрочем, в классическом случае, когда все $h_{in}(x)=x$, неравенство (4.3) точное, равенство достигается при $x=1/2$. Очевидно, при $n>4$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}&|S_{3,n}(x)|\leqslant n^{-1}S_{2,n}(x)\leqslant(4n^2)^{-1},\\ &S_{4,n}(x)\leqslant S_{2,n}(x)(3S_{2,n}(x)+n^{-2})\leqslant n^{-1}S_{2,n}(x)\leqslant(4n^2)^{-1}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Для функций $f\in C^2[0;\ 1]$ при дополнительных предположениях, что $\varphi_n\in C^2[0;\ 1]$ и $\varphi_n'(x)>0$ на $[0;\ 1]$ можно получить формулу типа Вороновской [7]. Обозначим

$$L^0(f;\ x)=f(x);\quad L^{\nu}(f;\ x)=[L^{\nu-1}(f;\ x)]'/\varphi_n'(x) \tag{4.5}$$

и напишем формулу Тейлора в таком виде

$$f(u)=\sum_{\nu=0}^{2}\frac{1}{\nu!}L^{\nu}(f;\ x)\,[\varphi_n(u)-\varphi_n(x)]^{\nu}+R(u),$$

$$R(u)=\frac{1}{2}\int_{x}^{u} L^3(f;\ t)[\varphi_n(u)-\varphi_n(t)]\,\varphi_n'(t)\,dt. \tag{4.6}$$

Разлагаем $f(\tau_{kn})$ по формуле (4.6) и подставляем в (1.1); учитывая, что $S_{1,n}(x)=0$, получаем

$$B_n(f;\ x)-f(x)=\frac{1}{2}L^2(f;\ x)\,S_{2,n}(x)+\sum_{k=0}^{n}R(\tau_{kn})\,p_{kn}(x). \tag{4.7}$$

Можно указать некоторую оценку второго слагаемого

$$\sum_{k=0}^{n}|R(\tau_{kn})|\,p_{kn}(x)\leqslant\frac{1}{2}\|L^3 f\|\sum_{k=0}^{n}|\Phi_{kn}(x)|^3\,p_{kn}(x)\leqslant$$

$$<\frac{1}{2}\|L^3 f\|\,S_{2,n}^{1/2}(x)\,S_{4,n}^{1/2}(x)\leqslant(8\,n^{3/2})^{-1}\|L^3 f\|. \tag{4.8}$$

Следует, однако, иметь в виду, что $L^\nu f$ зависит от отношений φ_n^k/φ_n' $(k=2,\cdots,\nu)$. Поэтому утверждать, что первое слагаемое в правой части (4.7) является главным членом, можно только при специальных допущениях относительно свойств φ_n. В случае дробно-рациональных операторов этот вопрос рассмотрен в [1] и [2]. Здесь мы остановимся на нем детально в случае операторов (1.1) с данной матрицей логарифмических особенностей.

5°. В качестве первого примера применения теоремы 1 приведем операторы, которые имеют фиксированные алгебраические особенности. Пусть $(x_{ln})_{l=1}^{n}$, $(\alpha_{ln})_{l=1}^{n}$, $n\in\mathbf{N}$, —данные матрицы; $x_{ln}\in\mathbf{R}\setminus[0;\ 1]$, $\alpha_{ln}\in[0;\ 1]$; ρ_{ln} — расстояние от x_{ln} до $[0;\ 1]$; $r_n=\max\limits_{1<l<n}\rho_{ln}^{-1}$. Положим

$$h_{ln}(x)=x\left(\frac{1-x_{ln}}{x-x_{ln}}\right)^{\alpha_{ln}}, \tag{5.1}$$

$$\theta_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(\rho_{ln}\,|x-x_{ln}|^{-1})^{\alpha_{ln}}, \tag{5.2}$$

$$s_n=\sum_{l=1}^{n}(\rho_{ln}(1+\rho_{ln})^{-1})^{\alpha_{ln}}. \tag{5.3}$$

В дальнейшем индекс n будем как правило опускать. Так как

$$\rho_l\leqslant|x-x_l|\leqslant 1+\rho_l, \tag{5.4}$$

то

$$n^{-1}s_n\leqslant\theta_n(x)\leqslant 1. \tag{5.5}$$

Покажем, что

$$\theta_n(x)\leqslant\gamma_n(x), \tag{5.6}$$

где γ_n определено в (2.8). Действительно, если $x_l<0$ и $0\leqslant x<y\leqslant 1$, то

$$h_i(y) - h_i(x) = (1+\rho_i)^{\alpha_i} \frac{y(x+\rho_i)^{\alpha_i} - x(y+\rho_i)^{\alpha_i}}{(x+\rho_i)^{\alpha_i}(y+\rho_i)^{\alpha_i}} >$$

$$\geqslant \frac{\rho_i^{\alpha_i}(y-x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}} > \frac{\rho_i^{\alpha_i}(y-x)}{(y-x_i)^{\alpha_i}}, \tag{5.7}$$

так как

$$(x+\rho)^{\alpha} \geqslant \left(1-\frac{x}{y}\right)\rho^{\alpha} + \frac{x}{y}(y+\rho)^{\alpha},$$

благодаря выпуклости функции $(t+\rho)^{\alpha}$. При $x_i > 1$ и $0 \leqslant x < y \leqslant 1$ из $x_i - x > x_i - y$ непосредственно вытекает

$$h_i(y) - h_i(x) > \frac{\rho_i^{\alpha_i}(y-x)}{(x_i-y)^{\alpha_i}} > \frac{\rho_i^{\alpha_i}(y-x)}{(x_i-x)^{\alpha_i}}. \tag{5.8}$$

Неравенство (5.6) следует из (5.7) и (5.8).

Используя формулу (4.2), докажем, что

$$nS_{2,n}(x) \leqslant \theta_n(x). \tag{5.9}$$

Действительно, при $x_i < 0$

$$1 - h_i(x) = \frac{(x+\rho_i)^{\alpha_i} - x(1+\rho_i)^{\alpha_i}}{(x+\rho_i)^{\alpha_i}} \leqslant \frac{\rho_i^{\alpha_i}}{(x-x_i)^{\alpha_i}}, \tag{5.10}$$

так как

$$(x+\rho)^{\alpha} \leqslant \rho^{\alpha} + x(1+\rho)^{\alpha},$$

благодаря выпуклости функции $(t+\rho)^{\alpha}$. При $x_i > 1$ имеем

$$h_i(x) = \frac{x\rho_i^{\alpha_i}}{(x_i-x)^{\alpha_i}} \leqslant \frac{\rho_i^{\alpha_i}}{(x_i-x)^{\alpha_i}}. \tag{5.11}$$

Так как $0 \leqslant h_i \leqslant 1$, то (5.9) следует из (4.2), (5.10) и (5.11). Из (5.5) и (5.9) вытекает основная оценка

$$\theta_n^{-2}(x)\, S_{2,n}(x) \leqslant n^{-1}\, \theta_n^{-1}(x) \leqslant s_n^{-1}. \tag{5.12}$$

Благодаря (5.6) и (5.12), теорема 1 приводит к следующему результату для оператора (1.1), построенного по функциям (5.1).

Т е о р е м а 2. *Если* $f \in C[0,1]$, *то*

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leqslant 2\omega(f; s_n^{-1/2}). \tag{5.13}$$

Таким образом, для равномерной сходимости $B_n f$ к f достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty. \tag{5.14}$$

Заметим, что если в (5.1) все $\alpha_{in} = 0$, то $h_{in}(x) = x$, и мы получаем классические многочлены Бернштейна. Случай, когда все $\alpha_{in} = 1$, т. е. когда все x_{in} являются полюсами, рассмотрен в [1] и [2].

Для операторов (1.1), построенных по функциям (5.1), при некотором дополнительном предположении относительно (x_{in}) и (α_{in}) имеет место следующее обобщение теоремы Вороновской (см. [2]).

Теорема 3. *Если* $f \in C^3[0; 1]$ *и матрицы* (x_{in}), (α_{in}) *таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty} s_n (1+r_n)^{-2} n^{-1/2} = \infty, \tag{5.15}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} s_n \left| \mathrm{B}_n (f; x) - f(x) - \frac{1}{2} L^2 (f; x) S_{2,n}(x) \right| = 0. \tag{5.16}$$

В [2] указано также обобщение соответствующей теоремы Бернштейна [5] для случая, когда $f \in C^m[0; 1]$, $m > 3$ и все $\alpha_{in} = 1$.

6°. Пусть (x_{in}), ρ_{in}, r_n имеют тот же смысл, что в п. 5°, а в качестве h_{in} выберем функции

$$h_{in}(x) = \frac{\ln\left(1 - \dfrac{x}{x_{in}}\right)}{\ln\left(1 - \dfrac{1}{x_{in}}\right)}. \tag{6.1}$$

Будем считать, что $x_{in} < 0$ при $i = 1, \cdots, p$, и что $x_{in} > 1$ при $i = p + 1, \cdots, n$. Положим

$$\theta_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-x}\sum_{i=1}^{p}(1 - h_i(x)) + \frac{1}{x}\sum_{i=p+1}^{n} h_i(x)\right), \tag{6.2}$$

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n}\left((1+\rho_i)\ln\left(1+\frac{1}{\rho_i}\right)\right)^{-1}. \tag{6.3}$$

Мы докажем, что

$$n^{-1}\sigma_n \leqslant \theta_n(x), \quad nS_{2,n}(x) \leqslant \theta_n(x) \leqslant \gamma_n(x), \tag{6.4}$$

откуда вытекает неравенство, аналогичное (5.12):

$$\theta_n^{-2}(x) S_{2,n}(x) \leqslant \sigma_n^{-1}. \tag{6.5}$$

Из (6.5) и теоремы 1 мы получаем для оператора (1.1), построенного по функциям (6.1), следующую теорему.

Теорема 4. *Если* $f \in C[0; 1]$, *то*

$$|\mathrm{B}_n(f; x) - f(x)| \leqslant 2\omega(f; \sigma_n^{-1/2}). \tag{6.6}$$

Следовательно, условие

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty \tag{6.7}$$

достаточно для равномерной сходимости $\mathrm{B}_n f$ к f.

Так как

$$\frac{1 - h_i(x)}{1-x} = h_i'(\xi_i), \quad \frac{h_i(x)}{x} = h_i'(\eta_i),$$

то для вывода первого из неравенств (6.4) достаточно заметить, что

$$\left|\ln\left(1-\frac{1}{x_i}\right)'\right|=\ln\left(1+\frac{1}{\rho_i}\right), \tag{6.8}$$

откуда, благодаря (5.4), следует, что

$$h_i'(x)=\left(|x-x_i|\ln\left(1+\frac{1}{\rho_i}\right)\right)^{-1}\geqslant\left((1+\rho_i)\ln\left(1+\frac{1}{\rho_i}\right)\right)^{-1}. \tag{6.9}$$

Неравенство $nS_{2,n}(x)\leqslant\theta_n(x)$ очевидно, если учесть, что $0\leqslant h_{in}(x)\leqslant 1$, и формулу (4.2). Доказательство того, что $\theta_n(x)\leqslant\gamma_n(x)$, основано на неравенствах

$$\frac{1}{y-x}\int\limits_x^y\frac{dt}{t+\rho}>\frac{1}{1-x}\int\limits_x^1\frac{dt}{t+\rho},$$

$$\frac{1}{y-x}\int\limits_x^y\frac{dt}{1+\rho-t}>\frac{1}{x}\int\limits_0^x\frac{dt}{1+\rho-t},$$

справедливых при $x, y\in\,]0;\,1[$ и $\rho>0$, из которых следует, что

$$\begin{gathered}\frac{h_i(y)-h_i(x)}{y-x}>\frac{1-h_i(x)}{1-x}\quad(i=1,\cdots,p),\\ \frac{h_i(y)-h_i(x)}{y-x}>\frac{h_i(x)}{x}\quad(i=p+1,\cdots,n).\end{gathered} \tag{6.10}$$

Итак, доказаны все неравенства (6.4), а значит доказана и теорема 4.

7°. Для операторов (1.1), построенных по функциям (6.1), справедлива следующая теорема, подобная теореме 3.

Теорема 5. *Если $f\in C^3[0;\,1]$ и матрица (x_{in}) такова, что*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(1+r_n)^{-2}n^{-1/2}=\infty, \tag{7.1}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n\left\|\mathrm{B}_n(f;\,x)-f(x)-\frac{1}{2}L^2(f;\,x)\,S_{2,n}(x)\right\|=0. \tag{7.2}$$

Для доказательства заметим, что из явных формул для $\varphi_n^{(\nu)}$ следует неравенство

$$|\varphi_n^{(\nu)}(x)|\leqslant(\nu-1)!\,r_n^{\nu-1}\varphi_n'(x). \tag{7.3}$$

Если положить $g_n=1/\varphi_n'$ и учесть, что $g_n'=-\varphi_n''g_n^2$, то можем написать

$$L^2f=g_n\left(-\varphi_n''g_n^2f'+f''\cdot\frac{1}{\varphi_n'}\right)$$

и оценить это выражение, используя (6.9) и (7.3):

$$|L^2(f;\ x)| \leqslant A_{f,\,2}\, g_n(x)(r_n+1)\frac{n}{\sigma_n}, \tag{7.4}$$

где $A_{f,\,\nu} = \max\limits_{1 \leqslant l \leqslant \nu} \|f^{(l)}\|$. Аналогичное вычисление дает

$$|L^3(f;\ x)| \leqslant 4A_{f,\,3}\, g_n(x)(r_n+1)^2\left(\frac{n}{\sigma_n}\right)^2. \tag{7.5}$$

Применяя (7.5) для оценки интеграла (4.6), получаем

$$|R(\tau_k)| \leqslant 2A_{f,\,3}(r_n+1)^2\left(\frac{n}{\sigma_n}\right)^2 \Phi_k^2(x)\,|\tau_k - x|. \tag{7.6}$$

Далее, если учесть (3.3), (4.4) и (6.4), то будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n} \Phi_k^2(x)\,|\tau_k - x|\, p_k(x) \leqslant \sqrt{S_{4,\,n}(x)\,D_n(x)} \leqslant n^{-3/2}. \tag{7.7}$$

Предельное равенство (7.2) следует из (4.7), (7.1), (7.6) и (7.7).

Неравенства, подобные указанным в [2], приводят к обобщению теоремы 4 для случая, когда $f \in C^m[0;\ 1]$, $m \geqslant 3$.

Ленинградский государственный
педагогический институт
им. А. И. Герцена

Поступила 11. IV. 1979

Վ. Ս. ՎԻԴԵՆՍԿԻ. Բեռնշտեյնի տիպի օպերատորներով մոտարկման մասին (*ամփոփում*)

h_{ln} ֆունկցիաներով տրված մատրիցայով (2.2) և (2.3) բանաձևերով որոշվում են (1.1) գծային օպերատորները։ Ապացուցվում է բավական ընդհանուր (3.4) անհավասարությունը։ Դիտարկվում են մասնավոր դեպքեր, երբ h_{ln}-երը որոշվում են (5.1) կամ (6.1) բանաձևերով։

V. S. VIDENSKI, *On approximation by Bernstein type operators* (summary)

For a given matrix of functions (h_{ln}) positive linear operators (1.1) are defined by formulas (2.2) and (2.3). A general unequality (3.4) is proved. Special cases where the h_{ln} functions are defined by (5.1) and (6.1) are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. С. Виденский*. Полиномы типа Бернштейна по рациональным дробям, Лит. матем. сборник, 19, № 1, 1979.
2. *В. С. Виденский*. О приближении функций рациональными дробями с фиксированными вещественными полюсами, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 1, 1979.
3. *J. P. King*. The Lototsky transform and Bernstein polynomials, Canadian Journal of mathem., 18, № 1, 1966, 89—91.
4. *С. Н. Бернштейн*. Теория вероятностей, М—Л., 1946.
5. *С. Н. Бернштейн*. Добавление к статье Е. В. Вороновской «Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна», Сочинения, том 2, статья № 57, М., 1954, 155—158.
6. *T. Popoviciu*. Sur l'aproximation des fonctions convexes d'ordre supèrieur, Mathematica (Cluj), 10, 1934, 49—54.
7. *Е. В. Вороновская*. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна, ДАН СССР, № 4, 1932, 79—85.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 2. 1981 Математика

М. Ж. ГРИГОРЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ ДВОЙНЫМИ РЯДАМИ

§ 1. Введение

А. А. Талаляном были доказаны следующие теоремы, [(1], [2]).

Теорема I. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *система функций, определенных на измеримом множестве* $G\subset[0, 1]$; $|G|^*>0$ *и образующих нормированный базис в пространстве* $L^p(G)$; $p>1$. *Тогда для любой измеримой функции* $f(x)$, *определенной на множестве* G, *существует ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \ (a_k - \textit{действительные числа}), \tag{1.1}$$

обладающий следующими свойствами:

1) *если обозначить через* A *множество тех точек из* G, *где* $f(x)$ *конечна, то на множестве* A *ряд* (1.1) *асимптотически сходится к* $f(x)$ *в метрике* L^p, *а на множестве* $G\setminus A$ *этот ряд сходится к* $f(x)$ *по мере;*

2) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=0$.

Теорема II. *Если* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *базис пространства* $L^p[0, 1]$; $p>1$, *то для любой функции* $f(x)\in L^q[0, 1]$; $0<q<1$, *существует ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{1.2}$$

который сходится к $f(x)$ *в метрике* $L^q[0, 1]$; $0<q<1$, *т. е.*

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 \left|f(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\right|^q dx=0.$$

В 1977 году К. Гофман и Р. Зинк [3] опираясь на лемму 3 работы [1] доказали следующую теорему.

Теорема III. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$—*базис во всех пространствах*

$$L^p[0,1];\ p>1 \text{ и } \inf_k \|\varphi_k\|_{L^p}>0.$$

Тогда для любой измеримой функции $F(x, y)$ *существует ряд*

---

* Символ $|G|$ обозначает меру Лебега множества G.

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} a_{k,s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y), \tag{1.3}$$

обладающий следующими свойствами:

1) *на множестве* E, *где* $F(x, y)$ *конечна ряд,* (1.3) *по Принсгейму асимптотически сходится к* $F(x, y)$ *в метрике* $L^1[0,1]\times\times[0,1]$, *а на множестве* $[0,1]\times[0,1]\setminus E$ *ряд* (1.3) *сходится к* $F(x, y)$ *по мере,*

2) $\lim\limits_{k,s\to\infty} a_{k,s}=0.$

В этой же работе авторы поставили вопрос в возможности доказательства теоремы III при менее жестких условиях на систему $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, в частности, для полных ортонормированных систем.

В настоящей работе удается доказать еще более общий результат, т. е. получен полный аналог теоремы А. А. Талаляна для двумерного случая. При этом здесь также применяется техника работы [1].

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *нормированный базис пространства* $L^p(G)$; $p>1$; $|G|>0$.

Тогда для любой измеримой функции $F(x, y)$, *определенной на множестве* $G\times G$, *существует ряд*

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} c_{k,s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y), \tag{1.4}$$

обладающий следующими свойствами:

1) *на множестве* E, *где* $F(x, y)$ *конечна, ряд* (1.4) *по Принсгейму асимптотически сходится к* $F(x, y)$ *в метрике* $L^p(G\times G)$, $p>1$, *т. е. для любого* $\varepsilon>0$ *существует множество* $E_\varepsilon\subset E$ *такое, что*

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k,s=1}^{n,m} c_{ks}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y)-F(x, y)\right\|_{L^p(E_\varepsilon)}=0;\ |E_\varepsilon|>|E|-\varepsilon,$$

а на множестве $H\setminus E$ (*где* $H=G\times G$), *ряд* (1.4) *сходится к* $F(x, y)$ *по мере,*

2) $\lim\limits_{k,s\to\infty} c_{k,s}=0.$

Основываясь на лемме 2 работы [2] можно установить следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *базис пространства* $L^p[0,1]$, $p\geqslant 1$.

Тогда для любой функции $f(x, y)\in L^q\,[0,1]\times[0,1]$; $0<q<1$ *существует двойной ряд*

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} c_{k,s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y), \tag{1.5}$$

который по Прингсхейму сходится к $f(x, y)$ *в метрике* $L^q[0,1]\times\times[0,1]$, $0<q<1$, *т. е.*

$$\lim_{n, m\to\infty}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{k, s=1}^{n, m} c_{k, s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)-f(x, y)\right|^q dxdy=0. \tag{1.6}$$

Теорема 3. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *базис пространства* $L^p[0,1]$, $p\geqslant 1$.

Тогда существует ряд (1.5), *у которого не все коэффициенты* $c_{k, s}$ *равны нулю и который по Прингсхейму сходится к нулю в метрике всех пространств* $L^q[0,1]\times[0,1]$, $0<q<1$, *т. е.*

$$\lim_{n, m\to\infty}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{k, s=1}^{n, m} c_{k, s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)\right|^q dxdy=0 \text{ для всех } q,\ 0<q<1. \tag{1.7}$$

В дальнейшем через $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ будем обозначать сопряженную к $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ систему функций.

Мы будем пользоваться следующим хорошо известным свойством базиса.

Если $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — базис пространства $L^p(G)$, $p>1$, $|G|>0$, то для любой $f(x)\in L^p(G)$ имеет место неравенство

$$\|S_n(f)\|_{L^p(G)}=\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k(f)\varphi_k(x)\right\|_{L^p(G)}\leqslant C_p\|f\|_{L^p(G)}, \tag{1.8}$$

где

$$a_k(f)=\int_G f(t)\psi_k(t)\,dt$$

и c_p — абсолютная постоянная, зависящая только от p и от базиса $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

§ 2. Доказательства основных лемм

Лемма 1. *Пусть даны прямоугольник* $\Delta=\Delta_1\times\Delta_2\subset T=[0,1]\times\times[0,1]$, *натуральное число* N, *действительные числа* $\gamma\neq 0$; $0<\delta<1$ *и* $\eta>0$. *Пусть, далее* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *нормированный базис пространства* $L^p(G)$, $p\geqslant 1$, $G\subset[0,1]$, $|G|>0$, $H=G\times G$.

Тогда существуют множество e *и функция* $g(x, y)$, *обладающие следующими свойствами:*

а) $g(x, y)=\begin{cases}\gamma \text{ при } (x, y)\in\Delta\setminus e\\ 0 \text{ вне } \Delta\end{cases}$; $|e|<\delta|\Delta|$,

б) $g(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, $(x, y)\in T$, *где* $f_i(t)\in L^p(\Delta)$; $i=1, 2$, в) $\|S_{n,m}[g]\|_{L^p(H)} \leqslant 4 \cdot c_p^2 \cdot \delta^{-\frac{2(p-1)}{p}} \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|^{1/p}$, $m, n = 1, 2, \cdots$,

г) $\|S_{n,m}[g]\|_{L^p(H)} < \eta$, *при* $\min(n, m) \leqslant N$,

где

$$S_{n,m}[g] = \sum_{k,s=1}^{n,m} a_{k,s}(g) \cdot \varphi_k(x) \varphi_s(y);$$

$$a_{k,s}(g) = \iint_H g(x, y) \psi_k(x) \psi_s(y) \, dxdy \tag{2.1}$$

и c_p — *константа неравенства* (1.8).

Доказательство леммы 1. Положим

$$g_1(x) = \begin{cases} |\gamma|^{1/2} & \text{при } x \in \Delta_1 \\ 0 & \text{вне } \Delta_1 \end{cases}; \quad g_2(y) = \begin{cases} \operatorname{sign} \gamma \cdot |\gamma|^{1/2} & \text{при } y \in \Delta_2 \\ 0 & \text{вне } \Delta_2 \end{cases}. \tag{2.2}$$

Функции $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ продолжим до отрезка $[0,1]$, полагая равными нулю вне множества G.

Применим лемму 1 работы [1] к функциям $g_i(t)$ $i = 1, 2$ $\psi_1(t), \cdots, \psi_N(t)$, рассматриваемым на Δ_i; $i = 1, 2$. По этой лемме, где положено

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{2} \text{ и } \varepsilon = \eta \cdot \delta^{\frac{p-1}{p}} \cdot [2 \cdot N \cdot |\gamma|^{1/2} \cdot |\Delta|^{1/2p} \cdot c_p]^{-1},$$

где c_p — константа неравенства (1.8), можно определить ограниченную функцию $f_i(t)$ и множество $e_i \subset \Delta_i$ $(i = 1, 2)$, обладающие свойствами:

$$f_i(t) = g_i(t) \text{ при } t \in e_i; \quad |e_i| < \frac{\delta}{2} |\Delta_i|; \quad i = 1, 2, \tag{2.3}$$

$$\int_{\Delta_i} |f_i(t)|^p \, dt \leqslant \frac{2}{(\delta/2)^{p-1}} \int_{\Delta_i} |g_i(t)|^p \, dt; \quad i = 1, 2, \tag{2.4}$$

$$|a_k^{(i)}| = \left| \int_{\Delta_i} f_i(t) \psi_k(t) \, dt \right| < \eta \cdot \delta^{\frac{p-1}{p}} \cdot [2 \cdot N \cdot |\gamma|^{1/2} \cdot |\Delta|^{1/2p} \cdot c_p]^{-1}; \quad k \leqslant N. \tag{2.5}$$

Функции $f_i(t)$; $i = 1, 2$ продолжим до отрезка $[0,1]$, полагая равными нулю вне Δ_i; $i = 1, 2$.

Положим

$$g(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \text{ и } e = e_1 \times \Delta_1 \cup e_2 \times \Delta_2. \tag{2.6}$$

Очевидно

$$S_{n,m}[g] = S_n(f_1) \cdot S_m(f_2) \quad n, m = 1, 2 \cdots. \tag{2.7}$$

Из (2.2), (2.3), (2.4), (2.6) следует, что функция $g(x, y)$ и множество e удовлетворяют условиям а) и б) леммы 1. Неравенство в) вытекает из условий (1.8), (2.4), (2.6) и (2.7)

$$\|S_{n,m}[g]\|_{L^p(H)} = \|S_n(f_1)\|_{L^p(G)} \cdot \|S_m(f_2)\|_{L^p(G)} \leqslant c_p^2 \cdot 4 \cdot \delta^{-\frac{2(p-1)}{p}} \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|^{1/p}. \tag{2.8}$$

Учитывая (1.8), (2.2), (2.4), (2.5) и (2.7) при $\min(n, m) \leqslant N$ получаем

$$\|S_{n,m}[g]\|_{L^p(H)} = \|S_n(f_1)\|_{L^p(G)} \cdot \|S_m(f_2)\|_{L^p(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=1,2} \left[c_p \cdot \|f_i\|_{L^p(\Delta_i)} \cdot \sum_{k=1}^{N} |a_k^{(i)}| \cdot \|\varphi_k\|_{L^p(G)} \right] \leqslant \eta. \tag{2.9}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — нормированный базис пространства $L^p(G)$, $G \subset [0,1]$, $|G| > 0$, $p > 1$ и $f(x, y)$ — произвольная ступенчатая функция, определенная на $[0,1] \times [0,1]$.*

Тогда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ и натурального N_1 можно определить измеримое множество e_0 и действительные числа $\{a_{k,s}\}_{k,s=N_1}^{M}$ так, что выполняются условия:

1°. $e_0 \subset H = G \times G$; $|e_0| < \varepsilon$,

2°. $\left\| \sum_{k,s=N_1}^{M} a_{ks} \varphi_k(x) \cdot \varphi_s(y) - f(x, y) \right\|_{L^p(H \setminus e_0)} < \varepsilon$,

3°. $|a_{k,s}| < \varepsilon$, $N_1 \leqslant k$, $s \leqslant M$,

4°. $\left\| \sum_{k,s=N}^{n,m} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right\|_{L^p(e)} \leqslant \varepsilon + \|f\|_{L^p(e)}; N_1 < n, m \leqslant M$,

где e — произвольное измеримое подмножество множества $H \setminus e_0$.

Доказательство леммы 2. Функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ продолжим до отрезка [0,1], полагая равными нулю вне множества G. Пусть Δ_k, $k = 1, 2, \cdots, \nu$ — прямоугольники постоянства функции $f(x, y)$ и $f(x, y) = \gamma_k$ при $(x, y) \in \Delta_k$. Тогда

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k \cdot \chi_{\Delta_k}(x, y), \text{ где } \chi_{\Delta_k}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \in \Delta_k \\ 0 & \text{вне } \Delta_k. \end{cases} \tag{2.10}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant \nu} \left[C_p^2 |\gamma_k| |\Delta_k|^{1/p} \cdot \varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p}} \right] \leqslant \frac{\varepsilon}{4^4}. \tag{2.11}$$

В формулировке леммы 1. полагая

$$\Delta = \Delta_1, \ \gamma = \gamma_1, \ \delta = \varepsilon, \ \eta = \varepsilon \cdot 2^{-2}, \ N = N_1,$$

получаем функцию $g_1(x, y)$ и измеримое множество $e_1 \subset \Delta_1$ со следующими свойствами:

$$g_1(x, y)=\begin{cases}\gamma_1 \text{ при } (x, y)\in \Delta_1\setminus e_1, \ |e_1|<\varepsilon\,|\Delta_1|. \\ 0 \text{ вне } \quad \Delta_1\end{cases} \tag{2.12}$$

$$g_1(x, y)=f_1^{(1)}(x)\cdot f_2^{(1)}(y), \text{ где } f_i^{(1)}(t)\in L^p(0,1), \ i=1, 2, \tag{2.13}$$

$$\|S^{(1)}_{n, m}[g_1]\|_{L^p(H)}^p<\frac{\varepsilon}{4^1} \text{ при } \min(n, m)<N_1, \tag{2.14}$$

$$\|S^{(1)}_{n, m}[g_1]\|_{L^p(H)}\leqslant c_p^2\cdot 4\cdot\varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p}}\cdot|\gamma_1|\cdot|\Delta_1|^{1/p}<\varepsilon/2^1, \ n, \ m=1, 2\cdots, \tag{2.15}$$

где

$$S^{(1)}_{n, m}[g_1]=\sum_{k, s=1}^{n, m} a^{(1)}_{k, s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y); \ a^{(1)}_{k, s}=\iint_{\Delta_1} g_1(x, y)\,\psi_k(x)\,\psi_s(y)\,dxdy. \tag{2.16}$$

Из базисности системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^p(G)$ и из условия (2.13) следует

$$\lim_{n, m\to\infty}\|S^{(1)}_{n, m}[g_1]-g_1(x, y)\|_{L^p(H)}=0. \tag{2.17}$$

В силу (2.12) и (2.17) имеем

$$\lim_{n, m\to\infty}\|S^{(1)}_{n, m}[g_1]-\gamma_1\cdot\chi_{\Delta_1}(x, y)\|_{L^p(H\setminus e_1)}=0. \tag{2.18}$$

Возьмем число $N_2>N_1$ настолько большим, чтобы выполнялись следующие условия:

$$|a^{(1)}_{k, s}|<\varepsilon/2^1 \text{ при } k, \ s\geqslant N_2, \tag{2.19}$$

$$\|S^{(1)}_{n, m}[g_1]-\gamma_1\cdot\chi_{\Delta_1}(x, y)\|_{L^p(H\setminus e_1)}\leqslant\varepsilon/2^1 \text{ при } n, \ m>N_2. \tag{2.20}$$

Предположим, что определены функции $g_1(x, y),\cdots, g_{k_0-1}(x, y)$, числа $N_1<N_2<\cdots<N_{k_0-1}$ и множества $e_1,\cdots, e_{k_0-1}$, где

$$g_i(x, y)=f_1^{(i)}(x)\cdot f_2^{(i)}(y); \ f_j^{(i)}(t)\in L^p[0,1]; \ j=1, 2, \ i=1,\cdots, k_0-1, \tag{2.21}$$

$$g_i(x, y)=\begin{cases}\gamma_i & \text{при } (x, y)\in\Delta_i \\ 0 & \text{вне } \Delta_i\end{cases} \quad i=1, 2,\cdots, k_0-1. \tag{2.22}$$

Положим

$$\Delta'_r=\bigcup_{j=1}^{i}\Delta_j; \ e'_i=\bigcup_{j=1}^{i} e_j.$$

Легко видеть, что число $N_{k_0}>N_{k_0-1}$ можно выбрать настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$\left|\iint_{\Delta_{k_0-1}}\left[\sum_{i=1}^{k_0-1} g_i(x, y)\right]\cdot\varphi_s(x)\,\psi_j(y)\,dxdy\right|=\left|\sum_{i=1}^{k_0-1} a^{(i)}_{j, s}\right|<\frac{\varepsilon}{2^{k_0+2}},$$

$$\text{при } j, \ s>N_{k_0}, \tag{2.23}$$

где

$$a_{s,j}^{(l)} = \iint\limits_{\Delta_l \cap H} g_l(x, y) \cdot \psi_s(x)\, \psi_j(y)\, dxdy = \int_0^1\int_0^1 g_l(x, y)\, \psi_s(x)\, \psi_j(y)\, dxdy, \tag{2.24}$$

$$\left\| \sum_{l=1}^{k_0-1} s_{n,m}^{(l)}[g_l] - \sum_{l=1}^{k_0-1} \gamma_l \chi_{\Delta_l}(x, y) \right\|_{L^p\left(H \setminus e'_{k_0-1}\right)} < \frac{\varepsilon}{2^{k_0+2}};\ n, m > N_{k_0}. \tag{2.25}$$

В формулировке леммы 1, полагая

$$\Delta = \Delta_{k_0};\ \gamma = \gamma_{k_0}\ \delta = \varepsilon,\ \eta = \varepsilon/2^{k_0+3},\ N = N_{k_0},$$

получаем функцию $g_{k_0}(x, y)$ и измеримое множество $e_{k_0} \subset \Delta_{k_0}$ со следующими свойствами:

$$g_{k_0}(x, y) = \begin{cases} \gamma_{k_0} & (x, y) \in \Delta_{k_0} \setminus e_{k_0}; \\ 0 & \text{вне } \Delta_{k_0} \end{cases} \quad |e_{k_0}| < \varepsilon\, |\Delta_{k_0}|, \tag{2.26}$$

$$g_{k_0}(x, y) = f_1^{(k_0)}(x) \cdot f_2^{(k_0)}(y), \text{ где } f_i^{(k_0)}(t) \in L^p[0,1],\ i = 1, 2, \tag{2.27}$$

$$\| S_{n,m}^{(k_0)}[g_{k_0}] \|_{L^p(H)} \leqslant \varepsilon/2^{k_0+3} \text{ при } \min(n, m) \leqslant N_{k_0}, \tag{2.28}$$

$$\| S_{n,m}^{(k_0)}[g_{k_0}] \|_{L^p(H)} < 4 \cdot c_p^2 \cdot \varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p}} \cdot |\gamma_{k_0}| \cdot |\Delta_{k_0}|^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2^k},\ n, m = 1, 2, \cdots, \tag{2.29}$$

где

$$S_{n,m}^{(k_0)}[g_{k_0}] = \sum_{s,j=1}^{n,m} a_{s,j}^{(k_0)} \varphi_s(x)\, \varphi_j(y);\quad a_{sj}^{(k_0)} = \iint\limits_H g_{k_0}(x, y)\, \psi_s(x) \psi_j(y)\, dxdy. \tag{2.30}$$

Ввиду того, что

$$a_{n,m}^{(k_0)} = S_{n,m}^{(k_0)}[g_{k_0}] + S_{n-1,m-1}^{(k_0)}[g_{k_0}] - S_{n-1,m}^{(k_0)}[g_{k_0}] - S_{n,m-1}^{(k_0)}[g_{k_0}] \tag{2.31}$$

из (2.28) получаем

$$|a_{n,m}^{(k_0)}| < \varepsilon/2^{k_0+1} \text{ при } \min(n, m) \leqslant N_{k_0}. \tag{2.32}$$

Таким образом, определяются функции $g_1(x, y), \cdots, g_\nu(x, y)$ и числа $N_1 < N_2 < \cdots < N_\nu$ такие, что для каждого k_0, $1 \leqslant k_0 \leqslant \nu$ удовлетворяются условия (2.26) — (2.32).

Положим

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\nu} g_k(x, y),\ e_0 = \bigcup_{k=1}^{\nu} e_k, \tag{2.33}$$

$$\bar{a}_{k,s} = \iint\limits_H F(x, y)\, \psi_k(x)\, \psi_s(y)\, dxdy, \tag{2.34}$$

$$S_{n,m}[F] = \sum_{k,s=1}^{n,m} a_{k,s} \cdot \varphi_k(x)\, \varphi_s(y). \tag{2.35}$$

Отсюда будем иметь

$$a_{k,s}=\sum_{l=1}^{\nu} a_{k,s}^{(l)};\quad S_{n,m}[F]=\sum_{l=1}^{\nu} S_{n,m}^{(l)}[g_l]. \tag{2.36}$$

Очевидно, что $|e_0|<\varepsilon$, т. е. условие 1° выполнено.

Легко видеть, что

$$\lim_{n,m\to\infty}\|S_{n,m}[F]-F(x,y)\|_{L^p(H)}=0. \tag{2.37}$$

Ввиду того, что $F(x,y)=f(x,y)$ при $(x,y)\in H\setminus e_0$, из (2.37) получаем

$$\lim_{n,m\to\infty}\|S_{n,m}[F]-f(x,y)\|_{L^p(H\setminus e_0)}=0. \tag{2.38}$$

Выберем натуральное число M настолько большим, чтобы

$$\left\|\sum_{k,s=1}^{M} a_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)-f(x,y)\right\|_{L^p(H\setminus e_0)}<\varepsilon/4. \tag{2.39}$$

Покажем, что числа $\{a_{k,s}\}_{k,s=N_1}^{M}$ удовлетворяют всем условиям леммы 2.

В силу (2.28), (2.33), (2.36) имеем

$$\|S_{n,m}[F]\|_{L^p(H)}\le\sum_{l=1}^{\nu}\|S_{n,m}[g_l]\|_{L^p(H)}<\varepsilon/4 \text{ при } \min(n,m)<N_1. \tag{2.40}$$

Ввиду того, что

$$\left\|\sum_{k,s=N_1}^{M} a_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)-f(x,y)\right\|_{L^p(H\setminus e_0)}\leqslant$$

$$\leqslant\|S_{M,M}[F]-f(x,y)\|_{L^p(H\setminus e_0)}+\|S_{N_1-1,N_1-1}[F]\|_{L^p(H)}+$$

$$+\|S_{N_1-1,M}[F]\|_{L^p(H)}+\|S_{M,N_1-1}[F]\|_{L^p(H)}, \tag{2.41}$$

из (3.39) и (3.40) вытекает

$$\left\|\sum_{k,s=N_1}^{M} a_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)-f(x,y)\right\|_{L^p(H\setminus e_0)}<\varepsilon. \tag{2.42}$$

Таким образом, условие 2° леммы 2 доказано.

Проверим условия 3° и 4°.

Для любых натуральных чисел k, s, $N_1\leqslant k$, $s<N$, найдутся некоторые i и j, такие что

$$N_i\leqslant k<N_{i+1};\quad N_j\leqslant s<N_{j+1}\quad i,\ j<\nu. \tag{2.43}$$

Из (2.36) получаем

$$|a_{k,s}|\leqslant\left|\sum_{l=1}^{q-1} a_{k,s}^{(l)}\right|+|a_{k,s}^{(q)}|+\left|\sum_{l=q+1}^{\nu} a_{k,s}^{(l)}\right|,\ \text{где } q=\min(i,j). \tag{2.44}$$

Согласно условию (2.23) первое слагаемое в правой части неравенства (2.44) не больше $\varepsilon/2^{q+1}$.

Из условий (2.29) и (2.31) легко следует, что

$$|a_{k,s}^{(q)}| < \varepsilon/2. \tag{2.45}$$

Согласно условию (2.31), ввиду того, что $\min(k, s) < N_{q+1} < \cdots < N_\nu$ получаем

$$\left|\sum_{l=q+1}^{\nu} a_{k,s}^{(l)}\right| \leqslant \varepsilon/2^{q+2} + \cdots + \varepsilon/2^{\nu+1} < \varepsilon/2^{q+1}. \tag{2.46}$$

Итак, при $k, s < N_\nu$ будем иметь

$$|a_{k,s}| < \varepsilon/2^{q+1} + \varepsilon/2 + \varepsilon/2^{q+1} < \varepsilon. \tag{2.47}$$

Неравенство (2.47) для случая $\min(k, s) \leqslant N_\nu$ доказывается аналогично. Если $k, s > N_\nu$, то неравенство следует из (2.23).

Выполнение условия 3° доказано.

Теперь проверим условие 4° леммы 2.

Очевидно

$$\left\|\sum_{k, s=N_1}^{n, m} a_{ks}\varphi_k(x)\varphi_s(y)\right\|_{L^p(e)} \leqslant \|S_{n,m}[F]\|_{L^p(e)} +$$

$$+ \|S_{N_1-1,m}[F]\|_{L^p(e)} + \|S_{n,N_1-1}[F]\|_{L^p(e)} + \|S_{N_1-1,N_1-1}[F]\|_{L^p(e)}, \tag{2.48}$$

где $e \subset H \setminus e_0$.

Для любых натуральных чисел $n, m, N_1 < n, m \leqslant N_\nu$ найдутся некоторые i и j, такие что

$$N_i \leqslant n < N_{i+1},\ N_j < m < N_{j+1}. \tag{2.49}$$

Из (2.36) вытекает

$$\|S_{n,m}[F]\|_{L^p(e)} \leqslant \left\|\sum_{l=1}^{q-1} S_{n,m}^{(l)}[g_l] - \sum_{k=1}^{q-1} \gamma_k\cdot\chi_{\Delta_k}^{(x,y)}\right\|_{L^p(e)} +$$

$$+\left\|\sum_{k=q}^{\nu} S_{n,m}^{(k)}[g_k]\right\|_{L^p(e)} + \left\|\sum_{k=1}^{q-1}\gamma_k\chi_{\Delta_k}(x, y)\right\|_{L^p(e)}, \tag{2.50}$$

где $q = \min(i, j)$.

Согласно условию (2.28), (2.29) и ввиду того, что $\min(n, m) < N_{q+1} < \cdots < N_\nu$, получаем

$$\left\|\sum_{k=q}^{\nu} S_{n,m}^{(k)}[g_k]\right\|_{L^p(e)} \leqslant \|S_{n,m}^{(q)}[g_k]\|_{L^p(e)} + \sum_{k=q+1}^{\nu}\|S_{n,m}^{(k)}(g_k)\|_{L^p(e)} < \varepsilon/4. \tag{2.51}$$

Отсюда и из (2.10), (2.25), (2.49) и (2.50) получаем

$$\|S_{n,m}[F]\|_{L^p(e)} \leqslant \varepsilon/4 + \|f\|_{L^p(e)}. \tag{2.52}$$

Учитывая (2.48), (2.40), (2.49), (2.50) и (2.52) при $n, m < N_\nu$ имеем

$$\left\|\sum_{k, s=N_1}^{n, m} a_{ks}\varphi_k(x)\varphi_s(y)\right\|_{L^p(e)} < \varepsilon + \|f\|_{L^p(e)}. \tag{2.53}$$

Неравенство (2.53) при $\max(n, m) > N$, доказывается аналогично.

Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 непосредственно следует

Лемма 3. *Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — нормированный базис пространства $L^p(G), p \geqslant 1$, $G \in [0,1]$ $|G| > 0$ и $f(x, y)$ — произвольная почти всюду конечная измеримая функция, определенная на G.*

Тогда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ и натурального N можно определить измеримое множество e_0 и действительные числа $\{a_{k,s}\}_{k,s=N}^{M}$ так, что выполняются условия:

1. $e_0 \subset H = G \times G$, $|e_0| < \varepsilon$,
2. $|a_{k,s}| < \varepsilon$, $N < k, s \leqslant M$,
3. $\left\| \sum_{k,s=N}^{M} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - f(x, y) \right\|_{L^p(H \setminus e_0)} < \varepsilon$,
4. $\left\| \sum_{k,s=N}^{n,m} a_{ks} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right\|_{L^p(e)} \leqslant \varepsilon + \|f\|_{L^p(e)}$; $\forall e \subset H \setminus e_0$; $N < n, m \leqslant M$.

Лемма 4. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — базис пространства $L^r_{[0,1]}$, $r \geqslant 1$ $f(x, y) \in L^p_{[0,1] \times [0,1]}$, $0 < p < 1$ и p_0 — фиксированное число $0 < p_0 < p$.*

Тогда для всякого натурального N и положительного $\eta > 0$ существует полином вида

$$H(x, y) = \sum_{k,s=N}^{M} c_{k\, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y), \tag{2.55}$$

который удовлетворяет условиям

а) $$\int_0^1 \int_0^1 |H(x, y) - f(x, y)|^q \, dxdy < \eta, \quad p_0 \leqslant q < p,$$

β) $$\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{l,j=N}^{k,s} c_{lj} \varphi_l(x) \varphi_j(y) \right|^q dxdy \leqslant \eta +$$
$$+ \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)|^q \, dxdy, \quad p_0 \leqslant q \leqslant p, \; N \leqslant k, s \leqslant M.$$

Доказательство леммы 4. Возьмем ступенчатую функцию $g(x, y)$ таким образом, чтобы

$$\int_0^1 \int_0^1 |g(x, y) - f(x, y)|^q \, dxdy < \eta/2, \quad p_0 \leqslant q \leqslant p. \tag{2.56}$$

Пусть $\Delta_k = \Delta_k^{(1)} \times \Delta_k^{(2)}$, $1 \leqslant k \leqslant \nu$ — прямоугольники постоянства функции $g(x, y)$ и $g(x, y) = \gamma_k$ при $(x, y) \in \Delta_k$.

Положим

$$f_k^{(1)}(x)=\begin{cases}\gamma_k & \text{при } x\in\Delta_k^{(1)}\\ 0 & \text{вне } \Delta_k^{(1)}\end{cases};\quad f_k^{(2)}(y)=\begin{cases}1; & y\in\Delta_k^{(2)}\\ 0 & \text{вне } \Delta_k^{(2)}\end{cases},\quad k=1,2,\cdots,\nu. \tag{2.57}$$

Ясно, что

$$g(x,y)=\sum_{k=1}^{\nu} f_k^{(1)}(x)\cdot f_k^{(2)}(y) \tag{2.58}$$

и

$$\int_0^1\int_0^1 |g(x,y)|^q\,dxdy=\sum_{k=1}^{\nu}\int_0^1\int_0^1 |f_k^{(1)}(x)\cdot f_k^{(2)}(y)|^q\,dxdy,\quad p_0\leqslant q\leqslant p. \tag{2.59}$$

Положим

$$a_s=1+\sup_{p_0<q<p}\left[\int_0^1 |f_s^{(1)}(x)|^q\,dx+\int_0^1 |f_s^{(2)}(y)|^q\,dy\right]. \tag{2.60}$$

В работе [2] для полных ортонормированных систем доказана лемма 2. Точно таким же образом доказывается следующая

Лемма 5. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *базис пространства* $L^r\,[0,1]$ $r\geqslant 1$, $f(x)\in L^p\,[0,1]$; $0<p<1$ *и* p_0 — *фиксированное число,* $0<p_0<p$. *Тогда для всякого натурального* N *и положительного* $\varepsilon>0$ *существует полином по системе* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *вида*

$$H(x)=\sum_{k=N}^{m} b_k\,\varphi_k(x), \tag{2.61}$$

который удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 |H(x)-f(x)|^q\,dx<\varepsilon,\quad p_0\leqslant q\leqslant p, \tag{2.62}$$

$$\int_0^1\left|\sum_{k=N}^{s} b_k\,\varphi_k(x)\right|^q dx<\varepsilon+\int_0^1 |f(x)|^q\,dx;\quad N<s\leqslant m,\ p_0\leqslant q\leqslant p. \tag{2.63}$$

Если N_s — заранее заданное натуральное число и $\varepsilon=\eta\cdot(4\nu\cdot a_s)^{-1}$, то в силу леммы 5 существует полином

$$\sum_{k=N_s}^{m_s} b_k^{(i)}\,\varphi_k(t), \tag{2.64}$$

удовлетворяющий условиям

$$\int_0^1\left|\sum_{k=N_s}^{m_s} b_k^{(i)}\,\varphi_k(t)-f_s^{(i)}(t)\right|^q dt<\eta\cdot[4\nu\cdot a_s]^{-1},\quad i=1,\ 2,\quad p_0\leqslant q\leqslant p, \tag{2.65}$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_s}^{m} b_k^{(i)} \varphi_k(t) \right|^q dt \leqslant \eta (4\nu \cdot a_s)^{-1} + \int_0^1 |f_s^{(i)}(t)|^q dt, \quad N_s \leqslant m \leqslant m_s,$$

$$i = 1, 2. \tag{2.66}$$

Таким образом, для фиксированных s и i, $1 \leqslant s \leqslant \nu$, $i = 1, 2$ определяется полином по системе $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ вида (2.64), удовлетворяющий условиям (2.65) и (2.66), при этом, очевидно, можно взять

$$N_1 = N+1, \quad N_s = m_s + 1, \; 1 < s \leqslant \nu. \tag{2.67}$$

Докажем, что полином

$$H(x, y) = \sum_{k, s=N}^{M} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) = \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{k, s=N_l}^{m_l} b_k^{(1)} b_s^{(2)} \varphi_k(x) \varphi_s(y), \tag{2.68}$$

где

$$M = m_\nu^{(1)} \text{ и } c_{k, s} = b_k^{(1)} \cdot b_s^{(2)}, \; k, \; s = N, \; N+1 \cdots, \; M \tag{2.69}$$

удовлетворяет требованиям леммы 4.

Покажем, что

$$J_s = \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k, l=N_s}^{m_s} c_{k l} \varphi_k(x) \varphi_l(y) - f_s^{(1)}(x) \cdot f_s^{(2)}(y) \right|^q dx dy <$$

$$< \eta/2\nu; \; s = 1, 2, \cdots, \nu; \; p_0 \leqslant q < p. \tag{2.70}$$

В самом деле, пользуясь теоремой Фубини получаем

$$J_s = \int_0^1 \left| \sum_{k=N_s}^{m_s} b_k^{(1)} \varphi_k(x) - f_s^{(1)}(x) \right|^q dx \cdot \int_0^1 \left| \sum_{k=N_s}^{m_s} b_k^{(2)} \varphi_k(y) \right|^q dy +$$

$$+ \int_0^1 \left| \sum_{k=N_s}^{m_s} b_k^{(2)} \varphi_k(y) - f_s^{(2)}(y) \right|^q dx \cdot \int_0^1 |f_s^{(1)}(x)|^q dx, \quad p_0 \leqslant q \leqslant p. \tag{2.71}$$

Отсюда и из условий (2.60), (2.65) и (2.66) вытекает (2.70). Учитывая (2.56), (2.58), (2.68) и (2.70), получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k, l=N}^{M} c_{k, l} \varphi_k(x) \varphi_l(y) - f(x, y) \right|^q dx\, dy \leqslant \eta, \quad p_0 \leqslant q < p. \tag{2.72}$$

Теперь проверим выполнение условия β) леммы 4. Пусть $N \leqslant k$, $s \leqslant M$ и числа i_0 и j_0, в силу (2.67), выбраны так, что

$$N_{i_0+1} \leqslant k \leqslant m_{i_0+1}, \; N_{j_0+1} \leqslant s \leqslant m_{j_0+1}. \tag{2.73}$$

Обозначая $n = \min(i_0, j_0)$ из условий (2.69), (2.73) выводим, что

$$J_{ks} = \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{i, l=N}^{k, s} c_{i, l} \varphi_i(x) \varphi_l(y) \right|^q dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i, l=N_j}^{m_j} c_{i, l} \varphi_i \varphi_l + \sum_{i, l=m_n}^{k, s} c_{i, l} \varphi_i \varphi_l \right|^q dx\, dy \leqslant$$

$$\tag{2.74}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \left| \sum_{l=N_j}^{m_j} b_l^{(1)} \varphi_l(x) \right|^q dx \cdot \int_0^1 \left| \sum_{l=N_j}^{m_j} b_l^{(2)} \varphi_l(y) \right|^q dy +$$

$$+ \max_{m_n < k', s' < m_{n+1}} \left[\int_0^1 \left| \sum_{l=m_n}^{k'} b_l^{(1)} \varphi_l(x) \right|^q dx \cdot \int_0^1 \left| \sum_{m_n}^{s'} b_l^{(2)} \varphi_l \right|^q dy. \right.$$

Отсюда и из условий (2.60), (2.67) получаем

$$J_{k_s} = \sum_{s=1}^{\nu} \left\{ \left[\eta \cdot (4\nu a_j)^{-1} + \int_0^1 |f_j^{(1)}(x)|^q dx \right] \cdot \left[\eta \cdot (4\nu a_j)^{-1} + \int_0^1 |f_j^{(2)}(y)|^q dy \right] \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\nu} \left[\eta \cdot /2\nu + \int_0^1 \int_0^1 |f_j^{(1)}(x) \cdot f_j^{(2)}(y)|^q dxdy \right] = \eta/2 + \int_0^1 \int_0^1 |g(x, y|^q dxdy \leqslant \eta +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)|^q dxdy. \tag{2.75}$$

Лемма 4 доказана.

§ 3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $F(x, y)$ — измеримая функция, определенная на множестве $H = G \times G$.

Обозначим

$$A = \{(x, y) \in H, |F(x, y)| < +\infty\}, \; B = \{(x, y), F(x, y) = +\infty\},$$
$$C = \{(x, y); \; F(x, y) = -\infty\}. \tag{3.1}$$

Положим

$$f_1(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{при} \quad (x, y) \in A \\ 1 & \text{при} \quad (x, y) \in B \\ -1 & \text{при} \quad (x, y) \in C, \end{cases} \tag{3.2}$$

Для $\varepsilon = 1/2^2$, $N = 1$ и функции $f_1(x, y)$ согласно лемме 3 можно определить множество e_1 и действительные числа $\{a_{k,s}\}_{k,s=1}^{N_1}$, которые удовлетворяют условиям

$$|a_{k,s}| < 1/2^2; \; 1 \leqslant k, s \leqslant N_1. \; e_1 \subset H, \; |e_1| < 1/2^2, \tag{3.3}$$

$$\left\| \sum_{k,s=1}^{N_1} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - f_1(x, y) \right\|_{L^p(H \setminus e_1)} < 1/2^2, \tag{3.4}$$

$$\left\| \sum_{k,s=1}^{n,m} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right\|_{L^p(e)} \leqslant 1/2^2 + \|f_1\|^p_{L(e)}, \; e \subset H \setminus e_1; \; n, m \leqslant N_1. \tag{3.5}$$

Предположим, что определены числа $\{a_{k,s}\}_{k,s=1}^{N_l-1}$.

Положим

$$f_i(x, y)=\begin{cases} F(x, y)-\sum\limits_{k, s=1}^{N_{i-1}} a_{k, s}\varphi_k(x)\varphi_s(y); & (x, y)\in A\\ 1 \quad \text{при} & (x, y)\in B\\ -1 \quad \text{при} & (x, y)\in C.\end{cases} \tag{3.6}$$

Для $\varepsilon=1/2^{i+1}$, $N=N_{i-1}+1$ и функции $f_i(x, y)$ согласно лемме 3 можем определить множество e_i и действительные числа $\{a_{k, s}\}_{k, s=N_{i-1}+1}^{N_i}$, которые удовлетворяют условиям

$$e_i\subset H,\ |e_i|<2^{-i-1},\ |a_{k, s}|<2^{-i-1},\ N_{i-1}+1\leqslant k, s\leqslant N_i \tag{3.7}$$

$$\Big\|\sum_{k, s=N_{i-1}+1}^{N_i} a_{k, s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)-f_i(x, y)\Big\|_{L^p(H\setminus e_i)}<2^{-i-1}, \tag{3.8}$$

$$\Big\|\sum_{k, s=N_{i-1}+1}^{n, m} a_{k, s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)\Big\|_{L^p(e)}\leqslant 2^{-i-1}+\|f_i\|_{L^p(e)};$$

$$\forall e\subset H\setminus e_i,\ N_{i-1}+1\leqslant n,\ m\leqslant N_i. \tag{3.9}$$

Продолжая вышеописанный процесс, можно определить действительные числа $\{a_{k, s}\}_{i, k=1}^{\infty}$, последовательность натуральных чисел $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ и множества $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых выполняются условия (3.7), (3.8) и (3.9) для всех i $(i=1, 2, 3, \cdots)$.

Покажем, что на A двойной ряд

$$\sum_{k, s=1}^{\infty} a_{k, s}\varphi_k(x)\varphi_s(y) \tag{3.10}$$

по Прингсхейму асимптотически сходится к $F(x, y)$ в метрике L^p, $p\geqslant 1$.

Пусть $\varepsilon>0$—произвольное положительное число. Положим

$$A_\varepsilon=A\setminus\bigcup_{i=i_0}^{\infty} e_i,\ \text{где}\ i_0=[\log_2\varepsilon^{-1}]+1. \tag{3.11}$$

Очевидно

$$A_\varepsilon\subset A\setminus e_i\ \text{при}\ i\geqslant i_0\ \text{и}\ |A_\varepsilon|>|A|-\varepsilon. \tag{3.12}$$

Числа n и m возьмем настолько большими, чтобы

$$q=\min(i, j)>i_0, \tag{3.13}$$

где i и j определяются из условий

$$N_i\leqslant n<N_{i+1};\ N_j\leqslant m<N_{j+1}. \tag{3.14}$$

Из условий (3.6), (3.8), (3.9), (3.13) и (3.14) ввиду того, что

$$f_{q+1}(x, y)=f_q(x, y)-\sum_{k, s=N_{q-1}+1}^{N_q} a_{k, s}\varphi_k(x)\varphi_s(y), \tag{3.15}$$

получаем

$$\left\| \sum_{k,\, s=1}^{n,\, m} a_{k,\, s}\, \varphi_k(x)\, \varphi_s(y) - F(x,\, y) \right\|_{L^p(A_\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{l=1}^{q} \sum_{N_{l-1}+1}^{N_l} a_{ks}\, \varphi_k(x)\, \varphi_s(y) - F(x,\, y) \right\|_{L^p(A_\varepsilon)} +$$

$$+ \max_{N_q < n',\, m' \leqslant N_{q+1}} \left\| \sum_{N_q+1}^{n',\, m'} a_{k,\, s}\, \varphi_k(x)\, \varphi_s(y) \right\|_{L^p(A_\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{N_{q+1}+1}^{N_q} a_{k,\, s}\, \varphi_k\, \varphi_s - f_q(x,\, y) \right\|_{L^p(A_\varepsilon)} + 2^{-q} + \| f_{q+1} \|_{L^p(A_\varepsilon)} < 3 \cdot 2^{-q}. \quad (3.16)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \sum_{k,\, s=1}^{n,\, m} a_{k,\, s}\, \varphi_k(x)\, \varphi_s(y) - F(x,\, y) \right\|_{L^p(A_\varepsilon)} = 0. \quad (3.17)$$

Теперь докажем, что ряд (3.10) на множестве B (по Прингсхейму) сходится по мере к $+\infty$.

Возьмем i_0 настолько большим, чтобы

$$\sum_{k=i_0}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon \cdot [4\,(2^p+1)]^{-1}. \quad (3.18)$$

Учитывая (3.6), (3.8) получаем

$$\iint\limits_{B \cap H \setminus e_l} \left| \sum_{N_{l-1}+1}^{N_l} a_{k,\, s}\, \varphi_k(x)\, \varphi_s(y) - 1 \right|^p dxdy < 2^{-lp}. \quad (3.19)$$

Из (3.19) следует

$$\left| \left\{ (x,\, y) \in B \cap H \setminus e_l,\ \sum_{N_{l-1}+1}^{N_l} a_{k,\, s}\, \varphi_k\, \varphi_s(y) < 1/2 \right\} \right| < 2^{-lp+p}. \quad (3.20)$$

Отсюда учитывая неравенство (3.7), получаем

$$\left| \left\{ (x,\, y) \in B,\ \sum_{N_{l-1}+1}^{N_l} a_{k,\, s}\, \varphi_k(x)\, \varphi_s(y) < 1/2 \right\} \right| < 2^{-lp+p} + 2^{-l-1} < 2^{-l}\,(1+2^p). \quad (3.21)$$

Пусть $M > 0$ и $1 > \varepsilon > 0$ — произвольные положительные числа. Возьмем некоторое большое число $M_0 > 0$ такое, что

$$\left| \left\{ (x,\, y) \in B,\ \sum_{k,\, s=1}^{N_{l_0}} a_{k,\, s}\, \varphi_k(x)\, \varphi_s(y) > -M_0 \right\} \right| > |B| - \varepsilon/4. \quad (3.22)$$

Очевидно

$$B\cap\left\{(x,\ y);\ \sum_{N_{i_0}+1}^{N_{j+1}} a_{k,\,s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y)|<\right.$$

$$<(j-i_0)\cdot\frac{1}{2}\Big\{\subset\bigcup_{l=i_0}^{j} B\cap\Big\{(x,\ y);\ \sum_{N_l+1}^{N_{l+1}} a_{k,\,s}\,\varphi_k\,\varphi_s<1/2\Big\}. \tag{3.23}$$

В силу (3.18), (3.21) и (3.23) будем иметь

$$\left|\left\{(x,\ y)\in B,\ \sum_{N_{i_0}+1}^{N_j} a_{k,\,s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y)<(j-i_0)\,\frac{1}{2}\right\}\right|<\varepsilon/4. \tag{3.24}$$

Для любого j, $j>i_0$, сравнивая (3.22) и (3.24) получаем

$$\left|\left\{(x,\ y)\in B,\ \sum_{k,\,s=1}^{N_j} a_{k,\,s}\,\varphi_k\,\varphi_s>(j-i_0)\,1/2-M_0\right\}\right|>|B|-\varepsilon/4. \tag{3.25}$$

Возьмем $j_0>i_0$ такое, что

$$(j_0-i_0)\,1/2-M_0>M+2\,(4/\varepsilon)^{1/p}. \tag{3.26}$$

Из (3.25) и (3.26) для всех $j>j_0$ имеет место неравенство

$$\left|\left\{(x,\ y)\in B;\ \sum_{k,\,s=1}^{N_j} a_{k,\,s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y)>M+2\,(4/\varepsilon)^{1/p}\right\}\right|>|B|-\varepsilon/2. \tag{3.27}$$

Пусть $n>m>N_{j_0}$, тогда для некоторых j и i имеем

$$N_i\leqslant n<N_{i+1},\quad N_j\leqslant m<N_{j+1},$$

Очевидно

$$\sum_{k,\,s=1}^{n,\,m} a_{k,\,s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y)=\sum_{k,\,s=1}^{N_j} a_{k,\,s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y)+$$

$$+\sum_{k=N_j+1}^{N_{j+1}}\ \sum_{s=N_j+1}^{m} a_{k,\,s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y), \tag{3.28}$$

В силу (3.9), где $i=j+1$, имеем

$$\iint\limits_{B\cap H\setminus e_l}\left|\sum_{N_j+1}^{n',\,m'} a_{k,\,s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y)\right|^p dxdy\leqslant(1+2^{-l-1})^p<2^p,$$

$$N_j<n',\ m'<N_{j+1}. \tag{3.29}$$

Из (3.7) и (3.29) вытекает

$$\max_{N_j<l,\ q<N_{j+1}}\left|\left\{(x,\ y)\in B,\ \sum_{N_j+1}^{l,\,q} a_{k,\,s}\,\varphi_k(x)\,\varphi_s(y)>-2\,(4/\varepsilon)^{1/p}\right\}\right|>|B|-\varepsilon/2. \tag{3.30}$$

Сравнивая условия (3.27) и (3.30), получаем

$$\left|\left\{(x, y)\in B;\ \sum_{k,s=1}^{n,m} a_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)\geqslant M\right\}\right| > |B|-\varepsilon. \tag{3.31}$$

Аналогично доказывается, что ряд (3.10) на множестве C сходится по мере к $-\infty$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $F(x,y)\in L^p_{[0,1]\times[0,1]}$, $0<p<1$. Предположим, что определен полином вида

$$g_l(x, y)=\sum_{k,s=1}^{m_l} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y). \tag{3.32}$$

удовлетворяющий условию

$$\int_0^1\int_0^1 |F(x, y)-g_l(x, y)|^p\,dxdy<2^{-l}, \tag{3.33}$$

Согласно лемме 4, в формулировке которой берется $N=m_l+1$, $\eta=2^{-l-1}$, $\eta=2^{-l-1}$ и $f(x, y)=F(x, y)-g_l(x, y)$, существует полином

$$H_l(x, y)=\sum_{k,s=m_l+1}^{m_{l+1}} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y), \tag{3.34}$$

удовлетворяющий условиям

$$\int_0^1\int_0^1 |g_{l+1}(x, y)-F(x, y)|^p\,dxdy<2^{-l-1}, \tag{3.35}$$

где

$$g_{l+1}(x, y)=g_l(x, y)+H_l(x, y), \tag{3.36}$$

$$\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{k,s=m_l+1}^{n,m} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)\right|^p dxdy<2^{-l-1}+$$
$$+\int_0^1\int_0^1|F(x,y)-g_l(x, y)|^p\,dxdy,\quad n,\ m<m_{l+1}. \tag{3.37}$$

По индукции можно определить последовательности полиномов $\{H_l(x, y)\}_{l=1}^{\infty}$ и $\{g_l(x, y)\}_{l=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (3.35), (3.36) и (3.37) для всех $l\ (l=1, 2, 3,\cdots)$.

Ряд

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y) \tag{3.38}$$

сходится к $F(x, y)$ в метрике $L^p_{[0,1]\times[0,1]}$ по Прингсхейму.

Действительно, пусть $m_i \leqslant n < m_{i+1}$, $m_j \leqslant m < m_{j+1}$ и $q=\min(i,j)$.

Тогда из (3.35) и (3.37) следует

$$\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{k,s=1}^{n,m} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)-F(x,y)\right|^p dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1\int_0^1\left|\sum_{k,s=1}^{m_q} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)-F(x,y)\right|^p dxdy + \tag{3.39}$$

$$+\max_{m_q<n',m'<m_q+1}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{k,s=m_q+1}^{n',m'} c_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)\right|^p dxdy < 2^{-q}+2^{-q-1}+2^{-q}.$$

Ясно, что $2^{-q+2}\to 0$, при n, $m\to\infty$.

Теорема 2 доказана.

Теперь докажем теорему 3. Возьмем последовательность $\{p_k\}$, где

$$0<p_1<\cdots<p_k<p_{k+1}<\cdots,\ \lim_{k\to\infty} p_k=1. \tag{3.40}$$

Согласно лемме 4, в формулировке которой берется $\eta=1/2$, $N=2$, $p=p_1$ и $f(x,y)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_1(y)$ существует полином

$$H_1(x,y)=\sum_{l,s=2}^{m_1} a_{l,s}\varphi_l(x)\varphi_s(y), \tag{3.41}$$

который удовлетворяет условию

$$\int_0^1\int_0^1 |H_1(x,y)-\varphi_1(x)\varphi_1(y)|^{p_1}dxdy<1/2. \tag{3.42}$$

Предположим, что определены полиномы

$$H_i(x,y)=\sum_{l,s=m_i+1}^{m_{i+1}} a_{l,s}\varphi_l(x)\varphi_s(y),\ 0<i\leqslant j-1, \tag{3.43}$$

где

$$1<m_0<m_1<\cdots<m_j \tag{3.44}$$

и имеет место неравенство

$$\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{l,s=2}^{m_j} a_{l,s}\varphi_l(x)\varphi_s(y)-\varphi_1(x)\varphi_1(y)\right|^q dxdy<2^{-j-1};\ p_1<q\leqslant p_j. \tag{3.45}$$

Согласно лемме 4, где положено $p_0=p_1$, $p=p_{j+1}$, $N=m_j+1$, $\eta=2^{-j-2}$ и $f(x,y)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_1(y)-\sum\limits_{l,s=2}^{m_j} a_{l,s}\varphi_l(x)\varphi_s(y)$, существует полином

$$\sum_{l,\, s=m_j+1}^{m_{j+1}} a_{l,s}\,\varphi_l(x)\,\varphi_s(y), \tag{3.46}$$

который обладает свойствами:

$$\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{l,\, s=m_j+1}^{m_{j+1}} a_{l,s}\,\varphi_l(x)\,\varphi_s(y)-\left[\varphi_1(x)\cdot\varphi_1(y)-\sum_{l,\, s=2}^{m_j} a_{l,s}\,\varphi_l(x)\,\varphi_s(y)\right]\right|^q\times$$

$$\times\, dxdy<2^{-j-2};\quad p_0\leqslant q\leqslant p_{j+1}, \tag{3.47}$$

$$\max_{m_j<n,\, m<m_{j+1}}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{l,\, s=m_{j+1}}^{n,\, m} a_{l,s}\,\varphi_l(x)\,\varphi_s(y)\right|^q dxdy<2^{-j-2}+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\left|\varphi_1(x)\,\varphi_1(y)-\sum_{l,\, s=2}^{m_j} a_{l,s}\,\varphi_l\,\varphi_s\right|^q dxdy. \tag{3.48}$$

Продолжая это построение, определяем двойной ряд

$$\sum_{l,\, s=2}^{\infty} a_{l,s}\,\varphi_l(x)\,\varphi_s(y) \tag{3.49}$$

и последовательность натуральных чисел $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$, для которых условия (3.45) и (3.48) выполняются при всех j, $j=2, 3,\cdots$.

Покажем, что ряд (3.49) по Прингсхейму сходится к $\varphi_1(x)\,\varphi_1(y)$ в любой метрике L^q; $0<q<1$.

Пусть $p_1\leqslant q<1$ — натуральные числа, n и m выберем настолько большими, чтобы $m_i\leqslant n<m_{i+1}$ и $m_j\leqslant m<m_{j+1}$, то $p_k\geqslant q$, где $k=\min(i, j)$.

Тогда имеем

$$\int_0^1\int_0^1\left|\varphi_1(x)\,\varphi_1(y)-\sum_{l,\, s=2}^{n,\, m} a_{l,s}\,\varphi_l(x)\,\varphi_s(y)\right|^q dxdy\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1\int_0^1\left|\varphi_1(x)\,\varphi_1(y)-\sum_{l,\, s=1}^{m_k} a_{l,s}\,\varphi_l\,\varphi_s(y)\right|^q dxdy+$$

$$+\max_{m_k<n',\, m'<m_{k+1}}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{l,\, s=m_k+1}^{n',\, m'} a_{l,s}\,\varphi_l(x)\,\varphi_s(y)\right|^q dxdy<2^{-k}+2^{-k-1}\to 0 \tag{3.50}$$

и следовательно ряд $\sum\limits_{l,\, s=1}^{\infty} c_{l,s}\,\varphi_l\,\varphi_s$, где $c_{1,1}=1$, $c_{l,s}=-a_{l,s}$, $l, s\geqslant 2$

по Прингсхейму сходится к нулю одновременно во всех метриках

$$L^q_{[0,1]\times[0,1]},\ 0<q<1.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Справедливы также N-мерные аналоги доказанных теорем ,$N>2$.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну за постановку задач и внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15.VIII.1979

Մ. Ժ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Չափելի ֆունկցիաների ներկայացումը կրկնակի շարքերով *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է 2 փոփոխականի չափելի ֆունկցիաների $\sum\limits_{k,s=1}^{\infty} a_{k,s}\varphi_k(x)\varphi_s(y)$, *շարքերով* ($\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *սիստեմը* L_p, $p>1$*-ի բազիսն է), կրկնակի շարքերով ասիմպտոտիկ* L^p, $p>1$ *մետրիկայով ներկայացման հարցը։*

Տրվում է Գ. Գոֆմանի և Ռ. Զինկի հարցի դրական պատասխանը։

M. G. GRIGORIAN. *Representation of measurable functions by double series* (summary)

The question of representation by double series $\sum\limits_{k,s=1}^{\infty} a_{ks}\varphi_k(x)\varphi_s(y)$ (where $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ is the basis in L^p) of two variable measurable functions asymptotically in the L^p, $p>1$ metric is considered.

The affirmative answer to a question of G. Goffman's and R. Zink's is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Талалян.* Представление измеримых функций рядами, УМН, XV, вып. 5 (95), 1960, 77—140.
2. *А. А. Талалян.* Представление функций классов $L^p_{[0,1]}$, $0<p<1$, ортогональными рядами, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus, 21 (1—2), 1970.
3. *G. Goffman and R. Zink.* On the representation of measurable functions by multiple series associated with a certain class of Schauder bases, Proc. London Math. Soc., 35, № 3, 1977, 527—540.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 2, 1981 Математика

Г. Р. ОГАНЕСЯН, К. А. ЯГДЖЯН

ЗАДАЧА КОШИ В КЛАССАХ ЖЕВРЕ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей работе приводятся достаточные условия корректности в классах Жевре задачи Коши для псевдодифференциальных (п.д.) уравнений специального вида, к которым сводятся слабо гиперболические дифференциальные уравнения. Такого рода условия для дифференциальных уравнений были получены ранее в работах [1], [2], [3].

Использование алгебры п.д. операторов, действующих в шкале банаховых пространств Жевре ([4]) и получение энергетических оценок для п.д. операторов, образующих модуль над кольцом п.д. операторов нулевого порядка, позволяет в данной работе значительно упростить доказательства и охватить более широкий класс уравнений.

Статья построена следующим образом. В § 1 формулируются основные теоремы. В § 2 приводятся вспомогательные факты из теории п.д. операторов, действующих в классах Жевре, а также энергетические оценки для простейших гиперболических (эволюционных) операторов. Здесь же уточняется большинство определений и обозначений. В § 3 устанавливаются достаточные условия C^∞-корректности задачи Коши, а в § 4 на их основе доказывается основная теорема о корректности задачи Коши в классах Жевре (теорема 2 из § 1). В § 5 приводятся примеры.

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Обозначим через $H^m(S_t)$ пространство Соболева с нормой

$$|D^m u, S_t| = \sum_{|\alpha| < m} |D^\alpha u|^2 \equiv \sum_{|\alpha| < m} \left\{ \int |D^\alpha u|^2 \, dS_t \right\}^{1/2}, \tag{1}$$

здесь

$$V = V_t = \{(x_0, x),\ 0 < x_0 < t,\ x \in S \subset\subset R^n\},$$
$$S_t = \{(x_0, x) \in V,\ x_0 = t\}.$$

Шкала гильбертовых пространств Жевре определяется как

$$G(\gamma, s) = \{f(x),\ \|f\|_{\gamma, s} < \infty\}, \tag{2}$$

где

$$\|f\|_s \equiv \|f\|_{\gamma, s} \equiv \{\sum_\alpha (|\alpha|!^{-\gamma} s^\alpha \|D_x^\alpha f\|)^2\}^{1/2},\ \gamma \geqslant 1.$$

Если $\Omega \subset R$, а X — линейное топологическое пространство, то $C^m(\Omega, X)$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений Ω в X. Введем элементарные гиперболические операторы первого порядка

$$\partial_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_j(t, x, D_x), \; j=1, 2, \cdots, m,$$

где Λ_j — п.д. операторы первого порядка с вещественными символами $\lambda_j(t, x, \xi)$. Для единообразия дальнейших формул положим $\partial_{m+1}=1$.

С целью описания класса символов п.д. операторов введем функцию

$$A(x, \xi) = A_1(\xi) + A_2(x, \xi), \tag{3}$$

где $A_1 \in C^\infty(R^n)$, $A_2 \in C^\infty(R^n \times R^n)$. Если ρ, $m > 0$, $\gamma > 1$, l, $q \in Z^n_+$, то введем обозначение

$$N(A, \gamma, \rho, m, q, l) = N_1(A_1, m, q) + N_2(A_2, \gamma, \rho, m, q, l), \tag{4}$$

где

$$N_1(A_1, m, q) = \sup_\xi |<\xi>^{|q|-m} |\partial_\xi^q A_1(\xi)||,$$

$$N_2(A_2, \gamma, \rho, m, q, l) = \sup_{x, \xi, p} |\rho^{|p|} |p|!^{-\gamma} <\xi>^{|q|-m} |x^l D_x^p \partial_\xi^q A_2(x, \xi)||,$$

$$<\xi> = (1+|\xi|^2)^{1/2}.$$

Класс символов Жевре GS определяется как

$$GS(\gamma, \rho, m) = \{A(x, \xi),\ N(A, \gamma, \rho, m, q, l) < \infty \text{ для всех } q, l \in Z^n_+\}. \tag{5}$$

Соответствующий класс п.д. операторов обозначим через GO.

Класс символов S^m состоит из бесконечно дифференцируемых функций $a(x, \xi)$ таких, что для любых мультииндексов α, $\beta \in Z^n_+$ и компакта $K \subset R^n$ справедлива оценка

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta, K} <\xi>^{m-|\alpha|}. \tag{6}$$

Пространства GS и S^m являются линейными топологическими пространствами с топологией, индуцированной полунормами (4), (6). Монотонно убывающую функцию $p(t) \in C([0, \infty))$ назовем масштабной, если $p(0) = 1$, $p(t) > 0$ и существуют положительные постоянные M, d такие, что

$$p(t) \leqslant e^{-tM}(1+td)^{-1}. \tag{7}$$

Если X_s — шкала банаховых пространств, а $p(t)$ — масштабная функция, то $f(t) \in B[T, X_s, p, m]$ означает, что

$$\sup_{t\in[0, T]} \|f(t)\|_{sp(t)} < \infty, \; f(\tau) \in C^m[0, \tau], \; X_{sp(\tau)}), \; \tau \in [0, t].$$

Настоящая работа посвящена изучению задачи Коши для п.д. оператора порядка m вида

$$P \equiv P_0 + \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{j=2}^{p+1} b_{jp}(\partial_1 - \partial_j)(\partial_2 - \partial_j)\cdots(\partial_{j-1} - \partial_j)\,\partial_{m+j-p}\cdots\partial_{m-1}\partial_m, \tag{8}$$

где

$$P_0 \equiv \partial_1 \partial_2 \cdots \partial_m + \sum_{p=0}^{m-2} b_{1p}\, \partial_{p+2} \cdots \partial_{m-1}\, \partial_m + b_{1,\, m-1}\,, \tag{9}$$

а b_{jp}, b_{1p} — п.д. операторы нулевого порядка.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ вектор-функций $\bar{\mu}(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \cdots, \mu_{m-1}(t))$, компоненты которых на полуинтервале $(0, T]$ положительны вместе со своими производными:

$$\mu_j(t) > 0,\ \mu_j'(t) \geqslant 0 \text{ при } 0 < t \leqslant T,\ j = 1, 2, \cdots, m-1 \tag{10}$$

(но могут обращаться в нуль при $t = +0$), а также упорядочены в том смысле, что

$$\frac{\mu_j'(t)}{\mu_j(t)} \leqslant c\, \frac{\mu_{j+1}'(t)}{\mu_{j+1}(t)},\ \mu_{j+1}(t) \leqslant c\mu_j(t),\ j=1, 2, \cdots, m-2. \tag{11}$$

Отметим, что если при $t = +0$ слипаются r характеристических корней оператора P $(1 \leqslant r \leqslant m)$, то

$$\mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \cdots \equiv \mu_{m-r} \equiv 1.$$

Пусть существует вектор-функция $\bar{\mu} \in \mathfrak{M}$ такая, что

$$\mu_k^{-1}(t)(\Lambda_{k+1} - \Lambda_1)(\Lambda_{k+1} - \Lambda_2) \cdots (\Lambda_{k+1} - \Lambda_k) \in C(G0(\gamma, \rho, k)), \tag{12}$$

$$k = 1, \cdots, m-1,$$

и

$$\mu_k^{-1}(t) \prod_{j=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_j)(t, x, \xi) \neq 0,\ (t, x, \xi) \in V_T \times R^n \setminus 0,\ k=1, \cdots, m-1, \tag{13}$$

что означает эллиптичность оператора

$$\mu_k^{-1}(t)(\Lambda_{k+1} - \Lambda_1)(\Lambda_{k+1} - \Lambda_2) \cdots (\Lambda_{k+1} - \Lambda_k).$$

Введем операторы коммутирования ($[,]$ — коммутатор)

$$ad_j(\cdot) = [\partial_j, \cdot],\ j = 1, 2, \cdots, m.$$

(A) Пусть существуют неотрицательные постоянные c_1, c_2 $(c_1^2 + c_2^2 > 0)$ и п.д. операторы нулевого порядка $\tilde{\beta}_k$, β_k, β, $\alpha_{i_1 \ldots i_q}$:

$$\beta,\ \tilde{\beta}_k,\ \alpha_{i_1 \ldots i_q},\ K^{-1}\beta_k(t, x, D_x) \in C(GO(\gamma, \rho, 0)), \tag{14}$$

здесь $K \equiv c_1 + c_2\, \mu'(t)/\mu(t)$, $\mu(t) \equiv \mu_{m-1}(t)$ и такие, что справедливы операторные равенства

$$ad_{i_1} ad_{i_2} \cdots ad_{i_{k-1}}(\partial_{i_k}) = \beta_k (\partial_{i_k} - \partial_{i_{k-1}}) + \tilde{\beta}_k,\ 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k < m, \tag{15}$$

$$\partial^{q}_{m+1-r} = \beta + \sum a_{i_1 \dots i_q}\, \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_q},\ 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_q < m-p, \tag{16}$$

$$p = 1, 2, \cdots, m-2,\ q = 1, 2, \cdots, m-p-1.$$

Отметим, что если переписать эти равенства на языке символов (в частных случаях $m=2$, 3 мы проделаем это в § 5), то в случае различных характеристических корней они выполнены всегда, а в противном случае эти равенства означают определенный характер слипания характеристик.

Мы скажем, что младшие коэффициенты оператора P удовлетворяют обобщенным условиям Э. Э. Леви, если

$$b_{1p},\ t^{m-p-1}\, b_{jp}(t, x, \xi)/K(t) \in C(GS(\gamma, \rho, 0)), \tag{17}$$

$$p = 1, 2, \cdots, m-1,\ j = 2, 3, \cdots, p+1.$$

Если выполнены условия (12), (14)—(17), где классы символов Жевре $C(GS)$ заменены более широкими классами $C(S^0)$, то справедлива

Теорема 1. *Задачи Коши*

$$Pu = f,\ (t, x) \in V_T, \tag{18}$$

$$\partial_t^k u(+0, x) = 0,\ k = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{18'}$$

при $f \in C(H^q(S_t))$ (q — достаточно большая постоянная, зависящая от оператора P) имеет единственное решение $u \in H^m(V_T)$, причем справедлива оценка

$$|D^m u, S_t| \leqslant c \int_0^t |D_\tau^q Pu, S_\tau|\, d\tau \tag{19}$$

для всех функций $u \in H_0^m(V)$.

Замечание. Теорема 1 остается справедливой, если вместо условий (16) потребовать выполнения условий (13).

Пусть

$$\alpha(t) \equiv \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{j=2}^{p+1} t^{m+j-p-1}\, \mu_{j-1}(t)\, \|b_{jp}\|_{sp\,(t)},$$

$$\beta(t) \equiv \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{j=2}^{p+1} t^{m-p-1}\, \|b_{jp}\|_{sp\,(t)}. \tag{20}$$

Если обобщенные условия Э. Э. Леви (17) не выполнены, но существуют положительные постоянные η, σ, ε, $\gamma \geqslant 1$ такие, что

$$\lim_{t\to 0} \max_{t_1 \in [0, t]} \left\{ \left(t \int_0^t \alpha(\tau)\, d\tau \right)^{1-\eta} \left(\int_{t_1}^t \beta(\tau)\, d\tau \right)^{(\gamma-1)(r-1)-1+\sigma} \right\}_s^s = 0, \tag{21}$$

$$b_{1p},\ \mu^{2-\varepsilon}_{1+m-r}\, t^{m-p-1}\, b_{jp}/\mu'_{1+m-r}(t) \in C(GS(\gamma, \rho, 0)), \tag{22}$$

$$j = 2, \cdots, p+1,\ p = 1, 2, \cdots, m-1,$$

то в условиях (12), (14)—(16) справедлива

Теорема 2. *Для любого* $f \in B(\delta, G_s, p, 0)$ *задача Коши* (18), (18′) *имеет единственное решение* $u \in B(T, G_s, p(t), m)$, *причем имеет место оценка* $(0 < s' < s < d)$

$$\sum_{j=0}^{m} \|\partial_t^j u\|_{s' p(t)} \leqslant c(s, s', \gamma) \int_{\delta}^{t} \|Pu\|_{sp(\tau)} d\tau \tag{23}$$

для произвольных функций $u \in C_0^\infty(G_s)$.

§ 2. Псевдодифференциальные операторы

Свойства алгебры п.д. операторов, действующих в классах Жевре, подробно описаны в работах многих авторов, поэтому мы приведем без доказательств важнейшие свойства, придерживаясь в основном работы [4].

Приведем лемму о непрерывности п.д. операторов в шкале гильбертовых пространств Жевре.

Лемма 1 ([4]). *Если* $A(x, \xi) \in GS(\gamma, \rho, 0)$ *и* $f \in G(\gamma, S)$, *то имеет место оценка*

$$\|A(x, D_x) f\|_s \leqslant cN \|f\|_s, \tag{24}$$

де постоянная c *не зависит от* A *и* s, $s < \rho$, *а*

$$N = \sup_{|l| < k} N(A, \gamma, \rho, 0, 0, l)$$

при некотором k.

Если же $A(\xi) \equiv \langle \xi \rangle^m$, $m > 0$, $0 < a < s' < s < b < \infty$, то

$$\|A(D_x) f\|_{s'} \leqslant c(s - s')^{-m\gamma} \|f\|_s, \tag{25}$$

с постоянной c, не зависящей от s' и s.

Для символов, зависящих от параметра $t \in [0, \delta]$, справедливо

Предложение 1. ([4]). *Пусть* $\gamma, \rho, \rho', m_1, m_2, \delta, m, k, r, s$ — *положительные числа,* $\gamma > 1$, $\rho' < \rho$. *Если (при* $j = 1, 2$) $A_j \equiv A_j(t, x, \xi) \in C^k([0, \delta], GS(\gamma, \rho, m_j))$, *то*

$$A_1 + A_2 \in C^k([0, \delta], GS(\gamma, \rho', \max(m_1, m_2))),$$

$$D_x^r \partial_\xi^s A_1(t, x, \xi) \in C^k([0, \delta], GS(\gamma, \rho', m_1 - s)),$$

$$(A_1 A_2)(t, x, \xi) \in C^k([0, \delta], GS(\gamma, \rho', m_1 + m_2)),$$

$$A_1 \circ A_2 - \sum_{|p| < m-1} \frac{1}{p!} (\partial_\xi^p A_1)(D_x^p A_2) \in C^k([0, \delta], GS(\gamma, \rho', m_1 + m_2 - m)).$$

Предложение 2 ([4]). *Пусть* δ, ρ — *положительные числа, а полный символ* $\lambda(t, x, \xi)$ *оператора* $\Lambda(t, x, D_x)$ *является вещественнозначной функцией, принадлежащей классу* $C^0([0, \delta], GS(\gamma, \rho, 1))$. *Тогда для любой функции* $g(t) \in C^1([0, \delta], L_2)$ *найдется решение* $f(t) \in C^1([0, \delta], L_2)$ *задачи Коши*

$$\left[\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\Lambda(t, x, D_x)\right]f(t, x)=g(t, x),\ f(+0, x)=0, \tag{26}$$

причем справедлива оценка

$$\frac{d}{dt}\|f(t)\|\leqslant c\|f(t)\|+\|g(t)\|, \tag{27}$$

с постоянной c, не зависящей от f.

Если $D_x^\alpha g\in C([0, \eta], L_2)$ для всех α, то и $D_x^\alpha f\in C([0, \delta], L_2)$ для всех α.

Предложение 3. (Неравенство Гординга). *Пусть $A\in GO(d, \rho, 1)$, причем существует $c>0$ такое, что для любого $u\in C_0^\infty(R_n)$*

$$\|\Lambda u\|^2\leqslant c(\|Au\|^2+\|u\|^2). \tag{28}$$

Тогда существует ρ_0, $0<\rho_0<\rho$ такое, что с некоторой постоянной c_1 имеет место неравенство

$$\|\Lambda u\|_s^2\leqslant c_1(\|Au\|_s^2+\|u\|_s^2) \tag{29}$$

для $u\in G(d, s)$, $0<s<\rho_0$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\|\Lambda u\|_s^2\leqslant 2c\sum_\alpha (s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-d}\|AD^\alpha u\|)^2+2c\|u\|_s^2. \tag{30}$$

Поэтому достаточно рассмотреть ряд.

Обозначим через $A_{(p)}^{(q)}(x, \xi)=\partial_\xi^q D_x^p A(x, \xi)$. Тогда

$$D_x^\alpha A(x, D_x)u=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\xi^\beta A_{(\gamma)}(x, \xi)\tilde{u}(\xi)\,d\xi$$

и

$$A(x, D_x)D^\alpha u=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\xi^\alpha A(x, \xi)\tilde{u}(\xi)\,d\xi,$$

поэтому

$$[A, D^\alpha]u=\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\ \gamma\neq 0}}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}A_{(\gamma)}(x, D_x)(D^\beta u). \tag{31}$$

Следовательно

$$\sum_\alpha(s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-d}\|AD^\alpha u\|)^2=2\|Au\|_s^2+2\sum_\alpha(s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-d}\|[A, D^\alpha]u\|)^2. \tag{32}$$

Последний член оценивается сверху через

$$\sum_\alpha\left\{s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-d}\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\ \gamma\neq 0}}\left(\|A_{(\gamma)}(x, D_x)D^\beta u\|\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\right)\right\}^2. \tag{33}$$

Но для любой функции f

$$(A_{(\gamma)}(x, D_x)f)^{\sim}(\eta)=\int(\eta-\xi)^\gamma\tilde{A}(\eta-\xi, \xi)\tilde{f}(\xi)\,d\xi, \tag{34}$$

и

$$|\langle\tau\rangle^{n+1}|\tau^{\gamma}\tilde{A}(\tau,\xi)|\leqslant cc_1(n+1+|\gamma|)!^{d}\langle\xi\rangle\rho^{-(n+1+|\gamma|)}, \tag{35}$$

где

$$c_1=N_1(A,0,0)+\sup_{\substack{\tau,\xi,p\\|l|\leqslant n+1}}|\rho^{|p|}|p|!^{-d}\langle\xi\rangle^{-1}|\tau^{p}\partial_{\tau}^{l}\partial_{\xi}^{q}\tilde{A}(\tau,\xi)||.$$

Тогда

$$\|A_{\gamma}(x,D_x)f\|^2\leqslant 2\tilde{c}(cc_1)^2\|\Lambda f\|^2[(n+1+|\gamma|)!^{2d}\rho^{-2(n+1+|\gamma|)}, \tag{36}$$

т. е.

$$\|A_{(\gamma)}(x,D_x)f\|\leqslant c(n+1+|\gamma|)!^{d}\rho^{-(n+1+|\gamma|)}\|\Lambda f\|. \tag{37}$$

Из (33) и (37) выводим, что

$$\sum_{\alpha}\Big\{s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-d}\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\ \gamma\neq 0}}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\|A_{(\gamma)}(x,D_x)D^{\beta}u\|\Big\}^2<$$

$$\leqslant 2c^2\rho^{-2(n+1)}\sum_{\alpha}\sum_{\substack{\beta_1+\gamma_1=\alpha\\ \gamma_1\neq 0}}\sum_{\substack{\beta_2+\gamma_2=\alpha\\ \gamma_2\neq 0}}(|\beta_1|!^{-d}s^{|\beta_1|}\|D^{\beta_1}\Lambda u\|)^2\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{2}\left[\prod_{j=1}^{n+1}(j+|\gamma_k|)\left(\frac{\alpha!}{\beta_k!\gamma_k!}\right)\left(\frac{|\beta_k|!\,|\gamma_k|!}{|\alpha|!}\right)^{d}\left(\frac{s}{\rho}\right)^{|\gamma_k|}\right]\right\}. \tag{38}$$

Но

$$\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\,\frac{|\beta|!\,|\alpha-\beta|!}{|\alpha|!}\leqslant 1,\quad \beta<\alpha \tag{39}$$

(см., напр., [8]), поэтому продолжая (38)

$$\leqslant 2c^2\rho^{-2(n+1)}\sum_{\alpha}\sum_{\beta_1<\alpha}\sum_{\beta_2<\alpha}(|\beta_1|!^{-d}s^{|\beta_1|}\|D^{\beta_1}\Lambda u\|)^2\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{2}\left\{\left(\frac{s}{\rho}\right)^{|\gamma_k|}\prod_{j=1}^{n+1}(j+|\gamma_k|)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2c^2\rho^{-2(n+1)}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2\|\Lambda u\|^2\left\{\sum_{\gamma=1}^{\infty}\left(\frac{s}{\rho}\right)^{\gamma-1}(\gamma+n+1)^{2(n+1)}\right\}. \tag{40}$$

Для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать ρ_0, $s\leqslant\rho_0<\rho$ так, чтобы

$$2c^2\rho^{-2(n+1)}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2\left\{\sum_{\gamma=1}^{\infty}\left(\frac{s}{\rho}\right)^{\gamma-1}(\gamma+n+1)^{2(n+1)}\right\}<\varepsilon. \tag{41}$$

Выбирая $2\varepsilon<1$ из (30), (32), (40), (41) выводим необходимую оценку (29).

§ 3. Доказательство теоремы 1

Введем интегралы энергии

$$Eu \equiv \sum_{p=0}^{m-1} t^{-p} \|\partial_{p+2}\cdots\partial_{m-1}\partial_m u\| +$$

$$+\sum_{p=2}^{m-1}\sum_{j=2}^{p+1} t^{p+1-m}\|(\partial_1-\partial_j)\cdots(\partial_{j-1}-\partial_j)\,\partial_{j+m-p}\cdots\partial_m\|, \tag{42}$$

$$\tilde{E}u \equiv \sum_{p=0}^{m-1} t^{-p}\|\partial_{p+2}\cdots\partial_m u\| + \sum_{p=2}^{m-1}\sum_{j=2}^{p+1} t^{p+1-m}\|\mu_{j-1}\Lambda^j\partial_{j+m-p}\cdots\partial_m u\|. \tag{43}$$

Имеет место

Лемма 3.1. *В условиях* (12) *и* (A) *справедлива оценка*

$$\|Eu\|_{sp\,(t)} \leqslant c\int_0^t \{\|\partial_1\cdots\partial_m u\|_{sp\,(\tau)} + K(\tau)\|Eu\|_{sp\,(\tau)}\}\,d\tau \tag{44}$$

для всех $u\in C^m(G_\gamma)$ *удовлетворяющих начальным условиям*

Доказательство. Очевидно, что достаточно оценить через правую часть (44), которую мы обозначим через $J(t)$, каждое слагаемое интеграла энергии. Имеем

$$t^{-p}\|\partial_{p+2}\cdots\partial_m u\|_{sp\,(t)} \leqslant \int_0^t \frac{(t-\tau)^p}{p!\,t^p}\|\partial_1\cdots\partial_m u\|_{sp\,(\tau)}\,d\tau \leqslant J(t). \tag{45}$$

Так как согласно (16)

$$\partial_j^{j-2} = a + \sum_{k=1}^{j-1} a_k\,\partial_1\cdots\check{\partial}_k\cdots\partial_{j-1} \tag{46}$$

(знак $\check{}$ означает, что оператор ∂_k опущен), то имеем что

$$\|\partial_j^{j-2}\partial_j\,\partial_{j+1}\cdots\partial_m\| \leqslant c\sum_{k=1}^{j-1}\|\partial_1\cdots\check{\partial}_k\cdots\partial_j\partial_{j+1}\cdots\partial^m u\| +$$

$$+\|\partial_j\cdots\partial_m u\| \leqslant c\sum_{k=1}^{j-1}\int_0^t\|\partial_k\,\partial_1\cdots\check{\partial}_k\cdots\partial_m u\|\,d\tau. \tag{47}$$

Протащив оператор ∂_k на свое место с учетом коммутационных соотношений (15), получим оценку

$$\|\partial_j^{j-2}\,\partial_j\cdots\partial_m u\|_{sp\,(t)} \leqslant J(t). \tag{48}$$

Аналогично оцениваются оставшиеся слагаемые интеграла энергии.

Лемма доказана.

Если операторы $\mu_k^{-1}(\Lambda_{k+1}-\Lambda_1)\cdots(\Lambda_{k+1}-\Lambda_k)$ эллиптичны, т. е. для всех $(t, x, \xi)\in V_T\times R^n\setminus 0$, $k=1,\cdots, m-1$ имеет место (13), то в силу неравенства Гординга (29) справедливы оценки

$$\|\Lambda^{j-1}\partial_{j+1}\cdots\partial_m u\|_s < c\|\mu_{j-1}^{-1}(\partial_1-\partial_j)\cdots(\partial_{j-1}-\partial_j)\,\partial_{j+1}\cdots\partial_m u\|_s+$$

$$+\|\partial_{j+1}\cdots\partial_m u\|_s,\ j=2, 3,\cdots, m, \tag{49}$$

поэтому справедлива

Лемма 3.2. *В условиях* (12)—(15) *для всех* $u\in C^m(G_T)$, *удовлетворяющих* (18′), *справедливо неравенство*

$$\|\bar{E}u\|_{sp(t)}\leqslant\int_0^s c\,\|\partial_1\cdots\partial_m u\|_{sp(\tau)}+K(\tau)\|\tilde{E}u\|_{sp(\tau)})\,d\tau. \tag{50}$$

Отметим, что если выполнено первое из условий (17), то из очевидной оценки

$$\int_0^t d\tau\sum_{p=0}^{m-2}\|b_{1p}\partial_{p+2}\cdots\partial_m u\|_{sp(\tau)}\leqslant c\int_0^t\|\tilde{E}u\|_{sp(\tau)}\,d\tau \tag{51}$$

следует, что оценка (50) остается в силе, если выражение $\partial_1\cdots\partial_m u$ в правой части (50) заменить на P_0u.

Если же условия (17) выполнены полностью, то справедлива оценка

$$\int_0^t\|(P-P_0)u\|_{sp(\tau)}\,d\tau\leqslant\int_0^t K(\tau)\|\bar{E}u\|_{sp(\tau)}\,d\tau, \tag{52}$$

из которой следует, что выражение $\partial_1\cdots\partial_m u$ в правой части (50) можно заменить на Pu.

Полученные в леммах 3.1, 3.2 интегральные неравенства с неинтегрируемым ядром $K(\tau)$ можно обратить, используя обобщенную лемму Гронуолла (см. лемму 2 [5]):

Лемма 3.3. *В условиях лемм* 3.1, 3.2, *соответственно, справедливы оценки*

$$\|Eu\|_{sp(t)}\leqslant c\,\mu^M(t)\int_0^t\mu^{-M}(\tau)\|P_0u\|_{sp(\tau)}\,d\tau, \tag{53}$$

$$\|\bar{E}u\|_{sp(t)}< c\mu^M(t)\int_0^t\mu^{-M}(\tau)\|P_0u\|_{sp(\tau)}\,d\tau, \tag{53′}$$

для всех $u\in C^m(G_T)$, *удовлетворяющих* (18′) *и*

$$Eu,\ \bar{E}u=\mu^M(t)\,o(1),\ t\to+0,\ \textit{соответственно}. \tag{54}$$

Приведем теперь лемму, позволяющую сводить задачу Коши (18) (18′) к новой с быстроубывающим к нулю при $t\to+0$ свободным членом.

Лемма 3.4. *Пусть* $\gamma>1$, δ, $\rho>0$, *имеет место* (A), *и при некотором* $\varepsilon>0$ *выполнено* (22). *Тогда для любых* a, b, z, $0<a<b<\rho$, $z\geqslant 0$, *существуют постоянные* c, d *такие, что для любой масштабной функции* $p(t)$ *и для любой функции* $f\in B[\delta, G(\gamma, bs), p, 0]$ *найдется функция* $v\in B[\delta, G(\gamma, bs'), p, m]$ *такая, что* $v(0, x)=v_t(0, x)=\cdots=\partial_t^{m-1}v(0, x)=0$ *и*

$$\|Pv-f\|_{s'p(t)}\leqslant c\mu^z(t)\int_0^t e^{M(t-\tau)}\|f\|_{sp(\tau)}\,d\tau, \tag{55}$$

для всех $a\leqslant s'<s\leqslant b$ *и* $0<t<\delta$, *причем*

$$\|Ev\|_{s'p(t)}\leqslant c(s', s)\int_0^t e^{M(t-\tau)}\|f(\tau)\|\,d\tau. \tag{56}$$

Доказательство. Представим P в виде

$$P=P_0+(P-P_0)\equiv P_0+P_1 \tag{57}$$

и рассмотрим задачи Коши

$$P_0v_k=f_{k-1},\ f_0\equiv f,\ f_k=-P_1v_k, \tag{58}$$

$$\partial_t^l v_k(0, x)=0,\ l=0, 1,\cdots, m-1,\ k=1, 2,\cdots. \tag{59}$$

Тогда, согласно лемме 3.3

$$\|f_k\|_{s'p(t)}=\|P_1v_k\|_{s'p(t)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{p=1}^{m}\sum_{j=2}^{p+1}\|b_{jp}(\partial_1-\partial_j)\cdots(\partial_{j-1}-\partial_j)\partial_{j+m-p}\cdots\partial_{m-1}\partial_m v_k\|_{s'p(t)}. \tag{60}$$

Оценим теперь каждый член получившейся суммы. Очевидно, что

$$\|b_{jp}(\partial_1-\partial_j)\cdots(\partial_{j-1}-\partial_j)\partial_{j+m-p}\cdots\partial_m v_k\|_{s'p(\tau)}\leqslant$$

$$\leqslant c(s', s_1)\mu'_{j-1}(t)\mu_{j-1}^{\varepsilon-1}(t)\int_0^t\|f_{k-1}\|_{s_1p(\tau)}\,d\tau. \tag{61}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$[\mu_{j-1}^{2-\varepsilon}t^{p+2-m-j}b_{jp}/\mu'_{j-1}(t)\in B[T, GO(\gamma, \rho, 0), 1, m], \tag{62}$$

$$\mu_{j-1}^{-1}(t)(\partial_1-\partial_j)\cdots(\partial_{j-1}-\partial_j)\in C_t(GO(\gamma, \rho, j-1)), \tag{63}$$

Поэтому неравенство (60) приводит к

$$\|f_k\|_{s'p(t)}\leqslant c(s', s_1)\sum_{j=m+2}^{m+1}\sum_{r}\left(\mu'_{j-1}\mu_{j-1}^{\varepsilon-1}\int_0^t\|f_{k-1}\|_{s_1p(\tau)}\,d\tau\right). \tag{64}$$

Применяя его k раз, получаем, что левая часть (64) мажорируется функцией

$$c(s', s_1, \cdots, s_k) \sum_{j=m+2-r}^{m+1} \mu'_{j-1} \mu_{j-1}^{s-1}(t) \Big(\sum_{j=m+2-r}^{m+1} \mu'_{j-1} \Big)^{k-1} \int_0^t \|f\|_{s_k p(\tau)} d\tau.$$

Теперь выберем $\{s_l\}_1^k$ так, чтобы $s_{l+1} - s_l = s_l - s_{l-1}$, $s_k = s$ и вспомним, что согласно условию $\mu'_{j+1} \leqslant c\, \mu_j$, а k может быть выбрано сколь угодно большим.

Обозначим теперь через v сумму $v_1 + v_2 + \cdots + v_k$. Нетрудно убедиться, что $Pv - f$ равно $-f_k$ и поэтому удовлетворяет оценке (55). Теперь уже заметим, что норма любой из функций v_j оценивается через соответствующий интеграл нормы, поскольку v_j есть решение задачи Коши для уравнения $P_0 v_j = f_{j-1}$. Следовательно, мы можем оценить и v и получить желаемую оценку (56). Лемма доказана.

Покажем, что функция v, построенная при доказательстве леммы 3.4 такова, что разность $u - v$ удовлетворяет условию (54).

Перепишем уравнение $Pu = f$ в виде

$$P_0(u - v) = (P_0 - P)(u - v) + f - Pv. \tag{65}$$

Оценивая первое слагаемое правой части (65) так же, как и при доказательстве оценок леммы 3.4, получим $(s' < s)$

$$\|(P_0 - P)(u - v)\|_{s'p(t)} \leqslant c(s, s')\, \mu^M \int_0^t \|E_0(u - v)\|_{sp(\tau)} d\tau. \tag{66}$$

Для второго слагаемого правой части (65) справедливо неравенство (55), поэтому при $t \to +0$

$$\|P_0(u - v)\|_{s'p(t)} = \mu^M(t) \cdot o(1). \tag{67}$$

Энергия $\|E_0(u - v)\|_{s'p(t)}$ мажорируется левой частью (67) и мажорирует с потерей гладкости энергию $\|E(u - v)\|_{sp(t)}$, откуда следует, что

$$\|E(u - v)\|_{sp(t)} = \mu^M(t)\, o(1) \text{ при } t \to +0. \tag{68}$$

Итак, к разности $u - v$ применима лемма 3.3, поэтому справедлива оценка

$$\|E(u - v)\|_{sp(t)} \leqslant c\mu^M(t) \int_0^t \mu^{-M}(\tau) \|P(u - v)\|_{sp(\tau)} d\tau. \tag{69}$$

Из неравенства треугольника

$$\|Eu\| \leqslant \|E(u - v)\| + \|Ev\|$$

и оценок (55), (69) получаем энергетическую оценку $(s' < s)$

$$\|\tilde{E}u\|_{s'p(t)} \leqslant c(s, s') \int_0^t \|Pu\|_{sp(\tau)} d\tau. \tag{70}$$

Аналогично доказывается оценка

$$\|\tilde{E}u\|_{s'p(t)} \leqslant c(s, s') \int_0^t \|Pu\|_{sp(\tau)}\, d\tau. \tag{71}$$

Замечание 3.1. Для п.д. операторов класса $C(L^m_\chi)$ справедливы аналоги всех утверждений, приведенных в § 2.

Поэтому, если в условиях леммы 3.1—3.4 классы символов (операторов) Жевре $GS(GO)$ заменить более широкими классами $C(S^0)$ $C(L^0_\chi)$, то совершенно аналогично можно доказать справедливость оценок, полученных из (44), (50), (53), (54) заменой норм $\|\cdot\|_{sp(t)}$ на L_2-нормы $\|\cdot\|$. Вместо оценок (55), (56) при этом мы получим оценки (с потерей гладкости q)

$$\|Pv - f\| < c\mu^{\varkappa}(t) \int_0^t \sum_{|\alpha| < q} \|D^{\alpha}_x f\|\, d\tau, \tag{55'}$$

$$\|Ev\| \leqslant c \int_0^t \sum_{|\alpha| < q} \|D^{\alpha}_x f\|\, d\tau, \tag{56'}$$

с постоянными c, q, зависящими от символа оператора P, но не зависящими от u.

В этом случае будут справедливы также аналоги оценок (70), (71):

$$\|Eu\| \leqslant c \int_0^t \sum_{|\alpha| < q} \|D^{\alpha}_x Pu\|\, d\tau, \tag{70'}$$

$$\|\tilde{E}u\| \leqslant c \int_0^t \sum_{|\alpha| < q} \|D^{\alpha}_x Pu\|\, d\tau, \tag{71'}$$

из которых следует единственность решения задачи Коши (18)—(18') а априорная оценка (19).

Доказательство теоремы существования 1 мы опускаем, т. к. оно получается с помощью оценки (19) стандартными рассуждениями (см., например, [9]).

§ 4. Доказательство теоремы 2

С помощью леммы 3.4 задачу (18), (18') сведем к новой со свободным членом, который достаточно быстро стремится к нулю при $t \to +0$, точнее

$$\mu^{-M}(t) f \in B(\delta, G_s, p, 0). \tag{72}$$

После этого рассмотрим последовательность задач Коши

$$P_0 v_n(t, x) = f_n(t, x), \ n = 0, 1, \cdots, \tag{73}$$

$$\partial_t^{k-1} \varepsilon_n(+0, x) = 0, \ k=0, 1, \cdots, m-1, \ n=0, 1, \cdots, \tag{74}$$

$$f_0 \equiv f, \ f_{n+1} \equiv (P_0 - P)\varepsilon_n, \quad n=0, 1, \cdots. \tag{75}$$

Согласно теореме 1 и лемме 3.3

$$\|E\, \varepsilon_n\|_{sp\,(t)} \leqslant c\, \mu^M(t) \int_0^t \mu^{-M}(\tau) \|(P - P_0)\, \varepsilon_{n-1}\|_{sp\,(\tau)}\, d\tau. \tag{76}$$

Поэтому, если через R обозначим оператор интегрирования по времени, т. е.

$$R_{k+1}(\beta) f = \int_0^t (t-\tau)^k \beta(\tau) f(\tau)\, d\tau / k!, \quad k=0, 1, \cdots$$

$$\|E\, \varepsilon_n\|_{sp\,(t)} \leqslant c\, \mu^M(t) \int_0^t d\tau\, \mu^{-M}(\tau) \sum_{p=1}^{m} \sum_{j=2}^{p+1} \|b_{jp}(\partial_1 - \partial_j) \cdots (\partial_{j-1} - \partial_j) \times$$

$$\times \partial_{j+m-p} \cdots \partial_m\, \varepsilon_{n-1}\| \leqslant c^{2k} \mu^M(t)\, R_1^k(\beta)\, (\|\mu^{-M} E\, \varepsilon_{n-k}\|_{sp\,(\tau)}). \tag{77}$$

С другой стороны

$$\|E\, \varepsilon_m\|_{sp\,(t)} \leqslant c\, \mu^M \int_0^t d\tau\, \mu^{-M} \sum_{p=1}^{m} \sum_{j=2}^{p+1} \mu_{j-1} \|b_{jp}\|_{sp\,(\tau)} (s' - s_1)^{\gamma(1-j)} \times$$

$$\times \|\partial_{m+j-p} \cdots \partial_m\, \varepsilon_{n-1}\|_{sp\,(\tau)} \leqslant c\mu^M \int_0^t d\tau \Big\{ \mu^{-M} \sum_{p=1}^{m} \sum_{j=2}^{p+1} \mu_{j-1} (s - s_1)^{\gamma(1-j)} \times$$

$$\times \|b_{jp}\|_{sp\,(\tau)} R_{m+j-p-1}(1) \|E\, \varepsilon_{n-1}\|_{s,\, p} \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant c^m \mu^z \Big\{ \sum_{p=1}^{m} \sum_{j=2}^{p+1} \mu_{j-1} \|b_{jp}\| (s' - s)^{\gamma(1-j)} m^{\gamma(j-1)} R_{m+j-p-1}(1) \Big\}^m \times$$

$$\times \int_0^t \|f\|_{s_m p}\, \mu^{-M}(\tau)\, d\tau. \tag{78}$$

Если выбрать $s_0 = s$, $s_{l+1} - s_l = s_l - s_{l-1}$, $s_m = s'$, то

$$\|E\, \varepsilon_n\|_{sp\,(t)} \leqslant c^n \mu^M(t)\, R_1^k(\beta) \Big\{ \prod_{l=1}^{n-k} \sum_{p_l=1}^{m} \sum_{j_l=2}^{p_l+1} \mu_{j_l-1} \times$$

$$\times \|b_{j_l p_l}\|_{sp} \left(\frac{s' - s}{n-k}\right)^{\omega} R_{m+j_l-p_l-1}(1) \int_0^t \mu^{-M}(\tau) \|f\|_{s' p\,(\tau)}\, d\tau \Big\}, \tag{79}$$

где

$$\omega=\gamma\left(n-k-\sum_{l=1}^{n-k} j_l\right).$$

Принимая во внимание (22), видим, что правая часть (79) не больше, чем

$$c^n \mu^M(t)\left(\int_0^t \mu^{-M}(\tau)\|f\|_{s'p(\tau)}\,d\tau\right)\times$$

$$\times R_1^k(\beta)\left\{\prod_{l=1}^{n-k}\sum_{p_l=1}^{m}\sum_{j_l=2}^{p_l+1}\left(\frac{s'-s}{n-k}\right)^{\omega} \alpha\, R_{m+j_l-p_l-1}(1)\right\}(1). \qquad (80)$$

С помощью теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом легко показать, что это, в свою очередь, не больше, чем

$$c^n \mu^M\left(\int_0^t \mu^{-M}(\tau)\|f\|_{s'p(\tau)}\,d\tau\right) R_1^k(\beta)\ \left\{\left(\frac{s'-s}{n-k}\right)^{\gamma(n-k)(1-m)}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\times\right.$$

$$\left.\times R_1^{n-k}(\alpha)\frac{1}{(n-k)!}\right\}\leqslant c^n \mu^M(t)\left(\int_0^t \mu^{-M}(\tau)\|f\|_{s'p(\tau)}\,d\tau\right)\left(\frac{s'-s}{n-k}\right)^{\gamma(1-m)(n-k)}\times$$

$$\times\frac{t_1^{n-k}}{k!\,(n-k)!^2}\left(\int_{t_1}^t \beta(\tau)\,d\tau\right)^k\left(\int_0^{t_1}\alpha(\tau)\,d\tau\right)^{n-k}. \qquad (81)$$

Пусть теперь k — целое, определяемое из условия

$$k=k(n)=n-\left[-\frac{n}{(\gamma-1)(m-1)}\right],\ [\ ]\text{—целая часть числа.} \qquad (82)$$

Теперь уже с помощью основного условия (21) нетрудно показать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|E\,\varepsilon_n\|$ сходится и также, что имеет место (23). Для доказательства единственности достаточно заметить, что решение однородной задачи, как легко видеть, стремится к нулю при $t\to+0$ с нужной скоростью и при некотором $\delta>0$ оценивается через n-й член ряда для всех $t\leqslant\delta$. Теорема доказана.

§ 5. Примеры

Пример 1. Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка

$$P_2=P_{22}+P_{21}+P_{20}, \qquad (83)$$

$$P_{22}=\partial_t^2-a_j(t,\ x)\,\partial_t\partial_{x_j}-a_{lj}(t,\ x)\,\partial_{x_l}\partial_{x_j},$$

$$P_{21}=b_0(t,\ x)\,\partial_t+b_j(t,\ x)\,\partial_{x_j},\ \ P_{20}=c(t,\ x),$$

здесь и далее знаки сумм по повторяющимся индексам опускаются. Функции $\{\lambda_j(t,\ x,\ \xi)\}_{j=1}^2$ определяются из характеристического уравнения

$$\lambda^2-\lambda\,(a_j(t,\ x)\,\xi_j)-a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j=0, \tag{84}$$

т. е.

$$\lambda_{1,2}=a_j\,\xi_j\mp\sqrt{(a_i\,a_j+4\,a_{ij})\,\xi_i\,\xi_j}\,.$$

Вводя операторы $\partial_j=\partial_t-\Lambda_j$, $j=1,\ 2$, где Λ_j — п.д. операторы с символами $\lambda_1,\ \lambda_2(t,\ x,\ \xi)$, соответственно, оператор P_2 можно представить в виде

$$P_2=\partial_1\partial_2+b_{10}\partial_2+b_{21}(\partial_1-\partial_2)+b_{11}. \tag{85}$$

Определив скобки Пуассона,

$$\{\lambda_1,\ \lambda_2\}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_1^{(j)}\lambda_{2\,(j)}-\lambda_{1\,(j)}\,\lambda_2^{(j)}),$$

$$\{\partial_2,\ \partial_1\}=(\lambda_2-\lambda_1)_t+\{\lambda_2,\ \lambda_1\}$$

и субсимвол

$$p_2^s(\xi_0)\equiv p_{21}(t,\ x,\ \xi)+\frac{i}{2}\,p_{22(j)}^{(j)}(t,\ x,\ \xi_0,\ \xi)=$$

$$=b_0\xi_0+b_j\,\xi_j+\frac{1}{2}\,[(\lambda_1+\lambda_2)_t+\xi_0\,(\lambda_1+\lambda_2)_{(j)}^{(j)}-(\lambda_1\lambda_2)_{(j)}^{(j)}] \tag{86}$$

для символов псевдодифференциальных операторов b_{10}, b_{21}, получаем следующие выражения:

$$b_{10}\equiv b_0\,(t,\ x),$$

$$b_{21}(t,\ x,\ \xi)=[2\,(\lambda_2-\lambda_1)]^{-1}\,(2\,p_2^s+\{\partial_1,\ \partial_2\}+(\lambda_1-\lambda_2)\,\lambda_{2\,(j)}^{(j)}). \tag{87}$$

Условия (14)—(17) теоремы 1 упрощаются и имеют вид: существуют неотрицательные постоянные c_1, $c_2\,(c_1^2+c_2^2>0)$ и функция $\mu(t)$ класса $\mathfrak{M}$ такие, что

$$b_{11},\ b_{10},\ \{\partial_1,\ \partial_2\}\,/\,K(t)\,(\lambda_1-\lambda_2),\ \ p_2^s(\lambda_2)\,/\,K(\lambda_1-\lambda_2)\in C\,(S^0), \tag{88}$$

$$K(t)\equiv c_1+c_2\,\mu'(t)\,/\,\mu(t)$$

(см. [6]).

Условия (14) — (16), (22), (21) теоремы 2 в этом случае имеют вид

$$b_{11},\ b_{10},\ \mu^{2-s}\,b_{21}/\mu',\ \{\partial_1,\ \partial_2\}\,/\,K(t)\,(\lambda_1-\lambda_2)\in C\,(GS\,(\gamma,\ \rho,\ 0)), \tag{89}$$

$$\lim_{t\to 0}\max_{t_1\in[0,\ t]}\left\{\int_0^{t_1}\|p_2^s(\lambda_2(\tau))\|_{s\rho(\tau)}\,d\tau\left(\int_{t_1}^{t}\left\|\frac{p_2^s(\lambda_2)}{\mu(\tau)}\right\|_{s\rho(\tau)}d\tau\right)^{\gamma-2}\right\}=0. \tag{90}$$

Если, в частности, $\mu=t^\alpha$, $p_2^s=t^\beta$, $\alpha,\ \beta\in Z_+$, $\alpha-\beta>1$, то последнее условие означает, что

$$\gamma < 2 + \frac{\beta + 2}{\alpha - \beta - 1}. \tag{91}$$

Это условие является необходимым и достаточным условием корректности задачи Коши для оператора P_2 (см. [2], [3]).

Пример 2. Рассмотрим дифференциальный оператор третьего порядка

$$P_3 = \partial_t^3 + c_j \partial_t^2 \partial_{x_j} + c_{ij} \partial_t \partial_{x_i} \partial_{x_j} + c_{ijk} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \partial_{x_k} +$$
$$+ b_0 \partial_t^2 + b_j \partial_t \partial_{x_j} + a_{kj} \partial_{x_k} \partial_{x_j} + d_0 \partial_t + d_j \partial_{x_j} + c(t, x). \tag{92}$$

Пусть $\{\lambda_j (t, x, \xi)\}_{j=1}^3$ — корни уравнения

$$\lambda^3 + (c_j \xi_j) \lambda^2 + (c_{jk} \xi_j \xi_k) \lambda + c_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k = 0. \tag{93}$$

Определив элементарные операторы $\{\partial_j\}_1^3$ с помощью функций $\lambda_j (t, x, \xi)$ обычным образом, перепишем оператор в факторизованном виде

$$P_3 = \partial_1 \partial_2 \partial_3 + b_{10} \partial_2 \partial_3 + b_{22} (\partial_1 - \partial_2) \partial_3 +$$
$$+ b_{32} (\partial_3 - \partial_2)(\partial_3 - \partial_1) + b_{11} \partial_3 + b_{21} (\partial_1 - \partial_2) + b_{12}. \tag{94}$$

Приведем формулы главных символов операторов b_{pj} через коэффициенты оператора P_3:

$$b_{10} = b_0 (t, x), \quad b_{22} = [b_j \xi_j - b_0 (\lambda_2 + \lambda_3) - \rho_{12}^1 - \rho_{23}^1 - \rho_{13}^1] / (\lambda_2 - \lambda_1),$$
$$\tag{95}$$
$$b_{32} = [a_{ij} \xi_i \xi_j + \lambda_1 \rho_{23}^1 + \lambda_2 \rho_{13}^1 + \lambda_3 \rho_{12}^1 + b_0 \lambda_2 \lambda_3 + b_{22} \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2)] / (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3),$$

$$b_{11} = d_0 + \rho_{12}^0 + \rho_{23}^0 + \rho_{13}^0 + b_{23}^{(j)} (\lambda_1 - \lambda_2)_{(j)},$$
$$b_{21} = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \{d_j \xi_j + \lambda_1 \rho_{23}^0 + \lambda_2 \rho_{13}^0 + \lambda_3 \rho_{12}^0 - \lambda_3 b_{11} -$$
$$- \rho_{123}^1 + b_0 \rho_{23}^1 + b_{22}^{(j)} [\lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2)]_{(j)} + b_{22} (\lambda_1 - \lambda_2)^{(j)} \lambda_{3\,(j)} + \tag{95'}$$
$$+ b_{32}^{(j)} [(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)]_{(j)} + b_{32} (\lambda_3 - \lambda_2)^{(j)} (\lambda_3 - \lambda_1)_{(j)}\},$$

где

$$\rho_{kp}^{(1)} = \lambda_k^{(j)} \lambda_{p\,(j)} - \lambda_{pt}, \quad \rho_{kp}^0 = \lambda_k^{(ij)} \lambda_{p\,(ij)},$$
$$\rho_{123}^1 = (\lambda_2^{(j)} \lambda_{3\,(j)} - \lambda_{3t})_t + \lambda_1^{(j)} \lambda_{3\,t\,(j)} -$$
$$- \lambda_1^{(j)} (\lambda_2^{(i)} \lambda_{3\,(i)})_{(j)} - \lambda_1^{(ij)} (\lambda_{2\,(i)} \lambda_{3\,(j)} + \lambda_{2\,(j)} \lambda_{3\,(i)}).$$

Введем обозначение для скобки Якоби:

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{\lambda_1, \lambda_2\} + \{\lambda_2, \lambda_3\} + \{\lambda_3, \lambda_1\}.$$

Если R — п.д. оператор с главным символом

$$r (t, x, \xi) \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} / (\lambda_1 - \lambda_3) \in C (S^0), \tag{96}$$

то из тождества

$$\xi_0 - \Lambda_3 = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} (\Lambda_3 - \Lambda_2)(\xi_0 - \Lambda_1) + (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} (\Lambda_1 - \Lambda_3)(\xi_0 - \Lambda_2)$$

следует, что найдутся п.д. операторы α_1, α_2, R класса $C (L_x^0)$ такие, что имеет место условие (16) теоремы 1, что в нашем частном случае означает, что

$$\partial_3 = \alpha_1 \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + R. \tag{97}$$

При этом условия (12), (14) теоремы 1 принимают вид

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\mu_1},\ [(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) + (\lambda_3 - \lambda_1)^{(j)} (\lambda_3 - \lambda_2)_{(j)}] / \mu_2 \in C\,(S^0), \tag{98}$$

$$\frac{\{\partial_i,\ \partial_j\}}{K_{j-1}(\lambda_i - \lambda_j)},\ \frac{\{\partial_1, \{\partial_2, \partial_3\}\}}{(\lambda_2 - \lambda_3)},\ \frac{\{\partial_3, \{\partial_1, \partial_2\}\}}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \in C'\,(S^0), \tag{99}$$

$$K_1 = c_1 + c_2\, \mu_1'/\mu_1, \quad K_2 = c_1 + c_2\, \mu_2'/\mu_2,\ i < j,\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

Обобщенные условия Э. Э. Леви (17) имеют вид

$$b_{10},\ b_{11},\ b_{12} \in C\,(S^0), \tag{100}$$

$$b_{22}\,(t,\ x,\ \xi)/K_1,\ tb_{21}/K_1,\ b_{32}/K_2 \in C\,(S^0). \tag{101}$$

Отметим, что в условиях (101) символы b_{32}, b_{22}, b_{21} можно заменить функциями Леви оператора P_3 (например, b_{32} заменить субсимволом p_3^j и т. д.).

Условия (12), (14), (16), (22), (21) теоремы 2 будут выполнены, если выполнены условия (98), (99), (96), (100) с заменой класса $C\,(S^0)$ на $C\,(GS\,(\gamma,\ \rho,\ 0))$ и функций K_1, K_2 на K_2, а также если

$$t\mu^{2-\varepsilon}\, b_{21}/\mu',\ \mu^{2-\varepsilon}\, b_{22}/\mu',\ \mu^{2-\varepsilon}\, b_{32}/\mu' \in C\,(GS\,(\gamma,\ \rho,\ 0)), \tag{102}$$

$$\varepsilon > 0,\ \mu\,(t) \equiv \mu_2\,(t).$$

$$\lim_{t \to 0}\ \max_{t_1 \in [0,\ t]} \left(t_1 \int_0^{t_1} \|b_{32}\|_{sp\,(\tau)}\, d\tau \right) \left(\int_{t_1}^{t} \left\| \frac{b_{32}}{\mu_2} \right\|_{sp\,(\tau)} d\tau \right)^{2\gamma - 3} = 0, \tag{103}$$

$$\lim_{t \to 0}\ \max_{t_1 \in [0,\ t]} \left(t^{3-j} \int_0^{t_1} \|b_{2j}\|_{sp\,(\tau)}\, d\tau \right)^{3-j} \left(t^{2-j} \int_{t_1}^{t} \left\| \frac{b_{2j}}{\mu_1} \right\|_{sp\,(\tau)} d\tau \right)^{\gamma + j - 4} = 0,\ j = 1,\ 2 \tag{104}$$

и только один из символов b_{32}, b_{22}, b_{21} не удовлетворяет условиям Э. Э. Леви (101).

Если, в частности, α, $\beta \in Z_+$, $2\alpha - \beta \geqslant 1$ и

$$(\lambda_i - \lambda_j)(t,\ x,\ \xi) = t^{\alpha}\, |\xi|,\ \mu_2 = \mu_1^2 = t^{2\alpha},\ b_{21} = t^{\alpha - 2},\ b_{22} = t^{\alpha - 1},\ b_{32} = t^{\beta}, \tag{105}$$

то условие (103) упрощается и означает, что

$$\gamma < \frac{3}{2} + \frac{\beta + 2}{2\,(2\alpha - \beta - 1)} \tag{106}$$

или

$$\beta > 2\alpha - 1 - \frac{1 + 2\alpha}{2\,(\gamma - 1)}\,. \tag{106'}$$

Если

$$b_{21}=t^{\alpha-2},\ b_{32}=t^{2\alpha-1},\ b_{22}=t^{\beta},\ \alpha-\beta\geqslant 1,$$

то условие (104) при $j=2$ означает, что

$$\gamma<2+\frac{\beta+2}{\alpha-\beta-1}. \tag{107}$$

Если же

$$b_{21}=t^{\beta},\ b_{32}=t^{2\alpha-1},\ b_{22}=t^{\alpha-1},\ \alpha-\beta\geqslant 2,$$

то (104) имеет вид

$$\gamma<3+\frac{3(\beta+2)}{\alpha-\beta-2}.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.III.1980

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Կոշու խնդիրը Ժևրեի դասերում պսեդոդիֆերենցիալ օպերատորների համար *(ամփոփում)*

Ապացուցվում է Կոշու խնդրի կոռեկտությունը պսևդոդիֆերենցիալ հավասարումների համար Սոբոլևի տարածություններում, եթե բավարարվում են է. է. Լևիի ընդհանրացրած պայմանները, եթե այդ պայմանները խախտվում են, ապա նույն խնդրի կոռեկտությունը ապացուցվում է Ժևրեյի դասում, որի ցուցիչը կախված է Լևիի ֆունկցիայի զրոյի ձգտելու արագությունից։ Հոդվածում ուսումնասիրված պսևդոդիֆերենցիալ հավասարումների են բերվում թույլ հիպերբոլական հավասարումները փոփոխական պատիկությամբ։

G. R. HOVHANISIAN, K. H. YAGDJIAN. *The Cauchy problem for pseudo-differential equations in the scale of Gevrey spaces* (summary)

The paper deals with the Cauchy problem for pseudo-differential operator with characteristic roots of variable multiplicity. If the generalized Levi conditions are satisfied then the wall posedness in the Gevrey space with the order depending on the symbol of operator is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян.* О бесконечно дифференцируемых решениях задачи Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 4:3, 1969, 182—191.
2. *В. Я. Иврий.* Условия корректности в классах Жевре задачи Коши для гиперболических операторов с характеристиками переменной кратности, Сибирск. мат. журн., 17:6, 1976, 1256—1270.
3. *К. А. Ягджян.* Задача Коши для слабо гиперболического уравнения в классах Жевре, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 13:1, 1978, 3—22.
4. *S. Steinberg.* Existence and uniqueness of solutions of hyperbolic equations which are not necesserily strictly hiperbolic, J. of Differential Equat., 17, № 1, 1975, 119—153.
5. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка. Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3:2, 1968, 79—100.

6. *Г. Р. Оганесян.* Задача Коши с весом для слабо гиперболических псевдодифференциальных уравнений с данными на гиперплоскости вырождения. Ученые записки ЕГУ, № 1, 1975, 10—16.
7. *К. А. Ягджян.* О некоторых задачах для гиперболических уравнений в классах Жевре, УМН, 34:4, 1979, 146.
8. *Н. Я. Виленкин.* Комбинаторика, М., Изд. «Науак», 1969.
9. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», IX, № 2, 1974, 149—165.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 2, 1981 Математика

Р. Л. ШАХБАГЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В работе М. И. Вишика и А. В. Марченко [1] исследована задача Дирихле для эллиптических и параболических операторов второго порядка на специальном классе бесконечномерных многообразий с краем. Как выяснилось основную роль при изучении краевых задач на бесконечномерных многообразиях с краем играет, как и в конечномерном случае, изучение соответствующей задачи в полупространстве.

Настоящая статья является обобщением результатов работы [1] по разрешимости задачи Дирихле в полупространстве на случай некоторого класса эллиптических операторов порядка $2m$, $m>1$, содержащих комплексный параметр. Построен двусторонний регуляризатор и доказана однозначная разрешимость первой краевой задачи (в соответствующих функциональных пространствах) при достаточно больших значениях входящего в оператор параметра.

1°. Введем некоторые обозначения, используемые в дальнейшем (подробнее см. в [1], [2]).

H — вещественное гильбертово пространство l_2, H_1, по определению, — гильбертово пространство последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_1=\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\, \sigma_k^{-2}\right)^{1/2},$$

где последовательность $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ задана, при этом $\sigma_k>0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-2}<+\infty.$$

H_1^+ обозначает полупространство: $H_1^+=\{x\in H_1,\ x_1>0\}$, H^N—подпространство H_1 элементов вида $(y_1, y_2, \cdots, y_N, 0, \cdots)$, P^N — оператор ортогонального проектирования H_1 на H^N.

2°. В полупространстве H_1^+ рассмотрим оператор с символом $P(x, A(x, \xi, \lambda))$ вида

$$P(x, A(x, \xi, \lambda))=\sum_{j=0}^{m} a_j(x)\,[A(x, \xi, \lambda)]^j,\ \ x\in H_1^+,\ \xi\in H, \tag{1}$$

где

$$A(x, \xi, \lambda) = (A_1(x)\xi, \xi) + \lambda^2,$$

$$(A_1(x)\xi, \xi) = \xi_1^2 + \sum_{l, k=2}^{\infty} a_{lk}(x)\xi_l\xi_k,$$

λ — комплексный параметр, принадлежащий $\mathbf{C}_+ = \{\lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}\lambda > 0\}$. Матрица $\|a_{lk}\|$ предполагается симметрической, а функции $a_{lk}(x)$ бесконечно дифференцируемы на H_1^+.

Коэффициенты $a_j(x)$, $j = 0, 1, \cdots, m$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми и ограниченными на H_1^+, $a_m(x) \neq 0$, $x \in H_1^+$. Пусть выполнено условие эллиптичности: существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\forall x \in H_1^+$ и $\xi \in H$

$$\gamma^{-1}\|\xi\|^2 \leqslant \xi_1^2 + \sum_{l, k} a_{lk}(x)\xi_l\xi_k \leqslant \gamma\|\xi\|^2, \tag{2}$$

где $\|\xi\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2\right)^{1/2}$.

Все результаты статьи остаются в силе, если вместо A рассмотреть символы более общего вида, а именно

$$\tilde{A}(x, \xi, \lambda) = \tilde{A}_0(\xi, \lambda) + \tilde{A}_1(x, \xi),$$

где $\tilde{A}_0(\xi, \lambda) = (\bar{A}_0\xi, \xi) + \lambda$, $\bar{A}_0$ удовлетворяет условию эллиптичности (2), а

$$(\tilde{A}_1(x)\xi, \xi) \geqslant 0, \ \forall x \in H_1^+, \ \xi \in H.$$

3°. Введем в рассмотрение классы символов.

Класс $\sum_{A_0}^{q, s}$. Пусть $A_0(\xi, \lambda)$ — фиксированный символ, удовлетворяющий условию (2) (в качестве A_0 можно взять, например, символ бесконечномерного оператора Лапласа: $-\Delta + \lambda^2$.

Функция $Q(x, \xi, \lambda)$, определенная на $H_1(x) \times \{H(\xi) \setminus 0\} \times \mathbf{C}_+(\lambda)$ бесконечно дифференцируема.

Пусть, далее $Q(x, \xi^N, \lambda) = Q(x, P_1^N\xi, \lambda)$ — ограничение $Q(x, \xi, \lambda)$ на $H_1(x) \times \{H^N \setminus 0\} \times \mathbf{C}_+$.

Обозначим через

$$G(x, z^N, \lambda) = F^{-1}_{\xi^N \to z^N} Q(x, \xi^N, \lambda) = (2\pi)^{-N/2}\int_{H^N} e^{i(\xi^N, z^N)} Q(x, \xi^N, \lambda)\, d\xi^N.$$

Пусть $L_1(H_z^N)$ — пространство, натянутое на вообще говоря обобщенные функции следующего вида: $f(z^N) = f(z^{N_1}) \times \delta('z^{N_2})$, где $'z^{N_2} = (0, \cdots, 0, z_{N_1+1}, \cdots, z_N)$, $z^N = z^{N_1} + 'z^{N_2}$, $N_1 + N_2 = N$, $f \in L_1(R_z^{N_1})$, $\delta(z^{N_2})$ — δ-функция. Норму вводим таким образом:

$$\|f\|_{L_1(H_z^N)} = \int_{R^{N_1}} f(z^{N_1})\, dz^{N_1}.$$

Предположим, что для любого целого неотрицательного N и $\forall\lambda \in \mathbf{C}_+$ соответствующее символу $Q(x, \xi^N, \lambda)$ ядро

$$G^N(x, z^N, \lambda) \in L_1(H_z^N).$$

Положим

$$\|Q(x, \xi, \lambda)\|_0 = \sup_N \|G^N(x, z^N, \lambda)\|_{L_1(H_z^N)}$$

и

$$\|Q(x, \xi, \lambda)\|_0^{(q)} = \sup_{\alpha, \beta} \|A_0^{-\frac{q+|\beta|}{2}}(\xi, \lambda) D_x^\alpha \partial_\xi^\beta Q(x, \xi, \lambda)\|_0, \tag{3}$$

где верхняя грань берется по всевозможным $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$, $\operatorname{Re}\lambda > a > 0$.

Обозначим далее

$$|||Q(x, \xi, \lambda)|||_{s, R}^{(q)} = \sum_{|\alpha| < s} \sup_{\substack{\|x\|_1 < R \\ \operatorname{Re}\lambda > a}} |||D_x^\alpha Q(x, \xi, \lambda)|||_0^{(q)}.$$

Определение. Символ $Q(x, \xi, \lambda)$ принадлежит классу $\sum_{\Lambda_0}^{q, s}$, если при любых a, α_0, β_0 выполняются следующие условия:

1. $$|||Q(x, \xi, \lambda)|||_{s, \infty}^{(q)} < +\infty \tag{4}$$

и $$\forall N \quad |||Q(x^N, \xi, \lambda)|||_{s, \infty}^{(q)} < +\infty,$$

2. $$\lim_{N\to\infty} |||Q(x, \xi, \lambda) - Q(x^N, \xi, \lambda)|||_{s, R}^{(q)} = 0, \tag{5}$$

$$\forall R,\ 0 < R < +\infty.$$

Топология вводится следующим образом:

Последовательность символов $\{Q_k(x, \xi, \lambda)\}_{k=1}^{\infty}$, $Q_k \in \sum_{\Lambda_0}^{q, s}$ сходится к нулю, если

а) $$\sup_k |||Q_k(x, \xi, \lambda)|||_{s, \infty}^{(q)} < +\infty,$$

б) $$\lim_{k\to\infty} |||Q_k(x, \xi, \lambda)|||_{s, R}^{(q)} = 0,\ \forall R,\ 0 < R < +\infty.$$

В связи с изучением краевой задачи (см. [1]), введем в рассмотрение класс $'\sum_{\Lambda_0, (\xi', \lambda)}^{q, s}$.

Обозначим $\xi = (\xi_1, \xi')$, $\xi' = (\xi_2, \xi_3, \cdots)$.

По определению, символ $S(x, \xi') \in {'\sum_{\Lambda_0}^{q, s}}$, если выполнены условия (4), (5), при этом преобразование Фурье берется по $(\xi')^{N-1} = (\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_N)$, а под знаком нормы в (3) стоит дифференцирование по ξ'.

4°. Введем в рассмотрение функциональные пространства, связанные с изучением краевой задачи.

Через C_Φ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых финитных цилиндрических функций.

Пространства $CL^s(H_1)$ и $CL^s(H_1^+)$.

По определению, функция $f \in CL^s(H_1)$, если $f \in C^s_-$ и для нее существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ цилиндрических функций, $f_n \in C_\Phi$ такая, что

1°. $\sup \|f_n\|_{s,\infty} \leqslant M < +\infty$, M — некоторая константа, (6)

2°. $\|f_n - f\|_{s,R} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \forall R > 0$, (7)

где

$$\|f\|_{s,R} = \sum_{|\alpha|<s} \|D^\alpha f\|_{0,R}, \ 0 < R < \infty,$$

$$\|f\|_{0,R} = \sup_{\|x\|_1 < R} |f(x)|, \ 0 < R \leqslant \infty.$$

При выполнении условий (6), (7) последовательность $f_n \in CL^s(H_1)$ будем считать сходящейся к f.

Функция $f \in CL^s(H_1^+)$, по определению, если она является сужением на H_1^+ функции пространства $CL^s(H_1)$.

5°. Обозначим через $\hat{P}$ оператор, порожденный символом (1).

Теорема 1. *Оператор $\hat{P}$ допускает замыкание в $CL^0(H_1^+)$.*

Доказательство. Очевидно оператор $\hat{P}$ определен на цилиндрических функциях класса $C_\Phi(\overline{H}_1^+)$ и отображает его в пространство $CL^0(\overline{H}_1^+)$.

Рассмотрим последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in C_\Phi(\overline{H}_1^+)$, стремящуюся к нулю в $CL^0(\overline{H}_1^+)$, такую, что $\hat{P}u_n(x) \to f(x)$ также в $CL^0(\overline{H}_1^+)$. Наша цель доказать, что $f \equiv 0$ в $\overline{H}_1^+$.

Следуя схеме доказательства, проведенного в [2], построим гладкое продолжение функций $u_n(x)$ на пространство H_1. Пусть lu_n есть это продолжение, причем $lu_n \in C^{2m}(H_1)$, а lf — продолжение функции $f \in CL^0(\overline{H}_1^+)$ на пространство H_1.

Имеем

$$lu_n \to 0 \text{ в } CL^0(H_1) \text{ и } \hat{P}lu_n \to lf \text{ также в } CL^0(H_1). \tag{8}$$

(Это очевидным образом следует из свойства ограниченности оператора продолжения).

Построим последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in C_\Phi(H_1)$, обладающую следующими свойствами:

$$\varphi_n \to 0 \text{ в } CL^0(H_1) \text{ и } \hat{P}\varphi_n \to lf \text{ в } CL^0(H_1).$$

Докажем возможность построения такой последовательности.

Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n > 0$ — последовательность, стремящаяся к нулю. Для каждой функции lu_n выберем $\varphi_n \in C_\Phi(H_1)$ так, чтобы выполнялись условия

$$|D^{\alpha}\varphi_n - D^{\alpha} lu_n| < \varepsilon_n \gamma_{\alpha}, \tag{9}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n, 0, \cdots)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant 2m$, а $\gamma_{\alpha} > 0$ — некоторые постоянные, удовлетворяющие условию

$$\sum_{|\alpha| < 2m} \gamma_{\alpha} < +\infty. \tag{10}$$

Из ограниченности оператора продолжения вытекает, что $\varphi_n \to 0$ в $CL^0(H_1)$. Далее, в силу линейности оператора $\hat{P}$ можем записать

$$\hat{P}\varphi_n = \hat{P} lu_n + \hat{P}(\varphi_n - lu_n). \tag{11}$$

Оценим

$$|\hat{P}(\varphi_n - lu_n)| \leqslant K\varepsilon_n \left(|\lambda|^{2m} + \sum_{|\alpha| < 2m} \gamma_{\alpha} \right),$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная.

Отсюда, переходя к пределу в (11), в силу (8) и (10) имеем $\hat{P}\varphi_n \to lf$ в $CL^0(H_1)$.

Далее, из оценки

$$|A_0^{-\frac{q+|\beta|}{2}}(\xi, \lambda)\, D_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} P(x, A(x, \xi, \lambda))| \leqslant C\|\xi\|^{-q+2m}$$

вытекает конечность нормы

$$\|P(x, A(x, \xi, \lambda))\|_0^{(q)} < +\infty,$$

а также норм $|||P(x, A(x, \xi, \lambda))|||_{s, R}^{(q)}$ для любого $0 < R < +\infty$ и $s > 0$ если положить $q = 2m + \varepsilon$. Иными словами символ $P \in \sum_{A_0}^{2m+\varepsilon, s}$. Но, тогда, в силу теоремы 6.1 из [3], оператор $\hat{P}$ допускает замыкание в $CL^0(H_1)$, при $s > 2(m+1) + \varepsilon$, то есть $lf = 0$ в H_1, а отсюда следует, что ее сужение на $H_1^+ : f(x) \equiv 0$ в H_1^+. Теорема доказана.

6°. Краевая задача. Для оператора $\hat{P}$ в полупространстве рассмотрим задачу Дирихле:

$$\hat{P}u(x) = f(x), \quad x \in H_1^+, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial x_1^j}\right|_{x_1=0} = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{13}$$

где $f \in CL^0(H_1^+)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ оператор, соответствующий краевой задаче (12), (13):

$$\mathfrak{M}u(x) = \left\{ \hat{P}u(x),\ x \in H_1^+,\ \left.\frac{\partial^j u}{\partial x_1^j}\right|_{x_1=0},\ j = 0, 1, \cdots, m-1 \right\}.$$

Область определения замыкания оператора $\mathfrak{M}$ обозначим $\Omega_{\mathfrak{M}}$, а через $\Omega^0_{\mathfrak{M}}$ обозначим следующее множество:

$$\Omega^0_{\mathfrak{M}} = \left\{ u \in \Omega_{\mathfrak{M}}, \left.\frac{\partial^j u}{\partial x_u^j}\right|_{x_1=0} = 0,\ j = 0,\ 1, \cdots, m-1 \right\}.$$

Построим регуляризатор задачи (12), (13).

Пусть $P_0(x, \xi, \lambda)$ — главная часть символа P, т. е.

$$P_0(x, \xi, \lambda) = a_m(x)[A(x, \xi, \lambda)]^m, \tag{14}$$

а

$$P_1(x, \xi, \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x)[A(x, \xi, \lambda)]^j. \tag{15}$$

Поскольку $a_m(x) \neq 0$, то не ограничивая общности, можно считать, что $a_m(x) \equiv 1$.

Представим символ $P_0(x, \xi, \lambda)$ в виде:

$$P_0(x, \xi, \lambda) = (\xi_1 + iS(x, \xi', \lambda)^m (\xi_1 - iS(x, \xi', \lambda))^m, \tag{16}$$

где

$$S(x, \xi', \lambda) = \left(\sum_{j, k=2}^{n} a_{jk} \xi_j \xi_k + \lambda^2 \right)^{1/2}.$$

Обозначим

$$A_{\pm}(x, \xi, \lambda) = (\xi_1 \pm iS(x, \xi', \lambda))^m.$$

По аналогии с конечномерным случаем правый и левый регуляризатор задачи (12), (13) будем искать в виде

$$\hat{R}f = P^{+\,\wedge}(\psi(x_1) A_+^{-1}(x, \xi, \lambda))\theta(x_1)\ {}^{\wedge}(\psi(x_1) A_-^{-1}(x, \xi, \lambda)\, lf^*, \tag{17}$$

где lf—гладкое продолжение функции $f \in CL^0(H_1^+)$ на H_1, $lf \in CL^0(H_1)$, $\theta(x_1)$ — функция Хевисайда, а $\psi \in C_0^{(\infty)}(R^1)$, $\psi(x_1) \equiv 1$, при $x_1 > -\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\psi(x_1) \equiv 0$, при $x_1 \leqslant -\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), P^+ —оператор сужения функции, заданной на H_1, на полупространство H_1^+.

В силу теоремы 1.2 из [1] символы $\psi(x_1) A_{\pm}^{-1}(x, \xi, \lambda)$ принадлежат классу $\sum_{A_0(\xi', \lambda)}^{-m+\varepsilon, s}$ (отличающемуся, по определению, от класса $\sum_{A_0}^{q, s}$ лишь тем, что эталонный оператор A_0 зависит только от ξ', т. е. не зависит от ξ_1).

Естественно считать упомянутые символы продолженными нулем для $\{x = (x_1, x') \in H_1, x_1 < -\varepsilon\}$.

Теорема 2. *Оператор $\hat{R}$, задаваемый формулой* (17), *отображает пространство $CL^{2m}(H_1^+)$ в пространство $CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$,*

---

* Можно доказать, что $\hat{R}$ не зависит от конкретного выбора оператора продолжения.

Предварительно докажем лемму.

Лемма 1. *Оператор* $P^+ \psi(x_1)\, \hat{A}_+^{-1}\, \theta(x_1)$ *отображает пространство* $CL^{2m}(H_1)$ *в пространство* $CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{Q}^0_{\mathfrak{M}}$.

При доказательстве леммы нам понадобится результат, обобщающий теорему 3.2 из [3], на случай операторов высокого порядка.

Теорема 3. *Оператор* $\hat{Q}$, *порожденный символом* $Q(x, \xi) \in \in \Sigma_{A\,0}^{p,s\,m}$, *продолжается с пространства* C_Φ *до непрерывного оператора, отображающего пространство* $CL^s(H_1)$ *в пространство* $CL^+(H_1)$, *где* $s = t + r$

$$r = \begin{cases} [p] + 2m, & \text{при } p > 0 \\ 0, & \text{при } p \leqslant 0 \end{cases}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.2 из [3] и поэтому мы его опускаем.

Доказательство леммы 1 будет опираться также на теорему 1.2 работы [1]. Приведем ее формулировку.

Теорема А. *Если символ* $P(x, \xi') \in {}'\Sigma^{p,s}_{A_0(\xi',\lambda)}$, *то символы*

$$Q(x, \xi, \lambda) = \frac{P(x, \xi')}{(\xi_1 \pm iS(x, \xi', \lambda))^k\, S^l(x, \xi', \lambda)}$$

принадлежат классу $\sum^{q,s}_{A_0}$, *где* $q = p - k - l - \varepsilon$, $k \in Z_+$, $\varepsilon > 0$ — *произвольное число. При этом справедлива оценка*

$$\|A_0(\xi', \lambda)^{-q/2}\, Q(x, \xi, \lambda)\|_0 \leqslant M\, |\mathrm{Re}\, \lambda|^{-\varepsilon_1/2},\ 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon,\ \mathrm{Re}\, \lambda > a > 0.$$

Доказательство леммы. Рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in C_\Phi$, сходящуюся в $CL^{2m}(H_1)$ к функции $f \in CL^{2m}(H_1)$.

Обозначим через

$$v_N(x^N) = P^+ \hat{A}_+^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)\, \theta\varphi_n \quad (N > n) \tag{18}$$

(здесь мы опустили сомножитель $\psi(x_1)$, поскольку перед ним стоит оператор P^+).

Докажем, что последовательность v_N сходится в $CL^{2m}(H_1^+)$. С этой целью рассмотрим для $\forall \alpha$, $|\alpha| \leqslant 2m$ производную $D^\alpha v_N$:

$$D^\alpha v_N = \sum_{\substack{\alpha_1 + |\alpha'| + |\alpha''| = |\alpha| \\ \alpha_1 \geqslant 1}} C_{\alpha_1, \alpha', \alpha''}\, P^+ D^{\alpha'}\, \hat{A}_+^{-1} \frac{\partial^{\alpha_1} \theta(x_1)}{\partial x_1^{\alpha_1}}\, D^{\alpha''} \varphi_n +$$

$$+ \sum_{|\alpha'| + |\alpha''| = |\alpha|} C_{\alpha', \alpha''}\, P^+ D^{\alpha'}\, \hat{A}_+^{-1}\, \theta(x_1)\, D^{\alpha''} \varphi_n \tag{19}$$

(в первой сумме производная $\dfrac{\partial^{\alpha_1} \theta}{\partial x_1^{\alpha_1}}$ понимается в смысле теории обобщенных функций). Слагаемые первой суммы выражения (19) можно вычислить следующим образом. Пусть $\varphi(x_1)$ — произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция: $\varphi \in C_0^{(\infty)}(R_1)$.

Тогда

$$< \frac{\partial^{\alpha_1}\theta}{\partial x_1^{\alpha_1}} D^{\alpha''}\varphi_n, \varphi > = < \frac{\partial^{\alpha_1}\theta}{\partial x_1^{\alpha_1}}, D^{\alpha''}\varphi_n \cdot \varphi > =$$

$$= D^{\alpha''}\varphi_n(0, (x')^{n-1})\, \delta_{(x_1)}^{\alpha_1 - 1}. \tag{20}$$

Заметим, что символ $A_+^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda) = (\xi_1 + iS(x^N, (\xi')^{n-1}, \lambda))^{-m}$ как функция от ξ_1 аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im}\xi_1 > 0$ и удовлетворяет условию гладкости, приведенному в [4], откуда следует, что $v_N \in C^{(\infty)}(H_1^+)$ и, следовательно, $CL^{2m}(H_1^+)$.

Символы $A_+^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)$, $\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} A_+^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)$, а также $\xi_1^{\alpha_1} A_+^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)$, $\forall \alpha_1 \leqslant m-1$ аналитичны и ограничены в полуплоскости $\operatorname{Im}\xi_1 > 0$, откуда следует (см. [4]), что $v_N \in \Omega^0_{\mathfrak{M}}$. Таким образом, установили, что $v_N \in CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$.

Перейдем к доказательству сходимости $\{v_N\}_{N=1}^{\infty}$.

Поскольку функция $A_+^{-1} \in \sum_{A_0(\xi^n, \lambda)}^{-m+\varepsilon, \delta}$, то для любого целого $s > 0$ имеем в силу (5)

$$\sum_{|\alpha| \leqslant 2m} \| D_x^{\alpha}(A_+^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda) - A_+^{-1}(x, \xi^n, \lambda)) \|_0 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{21}$$

откуда, в частности, следует сходимость последовательности v_N, то есть существование предела $\lim\limits_{N\to\infty} v_N(x^N)$ в $CL^0(H_1^+)$.

Обозначим

$$\lim_{N\to\infty} v_N(x^N) = v^{(n)}(x). \tag{22}$$

Рассмотрим вначале вторую сумму выражения (19). Пусть

$$v_N^{(1)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha'| + |\alpha''| = |\alpha|} c_{\alpha', \alpha''} P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1} \theta(x_1) D^{\alpha''}\varphi_n. \tag{23}$$

Из (21) и того, что $\varphi_n \to f$ в $CL^{2m}(H_1)$ непосредственно следует, что

$$\lim_{N\to\infty} v_N^{(1)} = \sum_{|\alpha'| + |\alpha''| = |\alpha|} c_{\alpha', \alpha''} P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1}(x, \xi^n, \lambda)\, \theta D^{\alpha''}\varphi_n \tag{24}$$

(предел понимается в смысле сходимости в $CL^0(H_1^+)$), ибо $\forall R > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x \in S_R^+} \left\| v_N^{(1)} - \sum_{|\alpha'| + |\alpha''| = |\alpha|} c_{\alpha', \alpha''} P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1}(x, \xi^n, \lambda)\, \theta D^{\alpha''}\varphi_n \right\|_0 = 0,$$

где $S_R^+ = \{x \in H_1,\ x_1 > 0,\ \|x\|_1 \leqslant R\}$.

Рассмотрим теперь первую сумму выражения (19), состоящую из слагаемых вида

$$v_N^{(2)} = P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1} D^{\alpha''} \varphi_n (0, (x')^{n-1}) \delta^{(\alpha_1-1)} (x_1). \tag{25}$$

Перепишем (25) следующим образом:

$$v_N^{(2)} = P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1} \hat{A}_0^{-\varepsilon\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)} \hat{A}_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} D^{\alpha''} \varphi_n (0, (x')^{n-1}) \delta^{(\alpha_1-1)} (x_1). \tag{26}$$

Обозначим через

$$g_n^{(\alpha'')}((x')^{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} D^{\alpha''} \varphi_n(0, (x')^{n-1}).$$

Тогда (26) примет вид

$$v_N^{(2)} = P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1} \hat{A}_0^{-\varepsilon\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)} g_n^{(\alpha'')} ((x')^{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{G}_N g_n^{(\alpha'')}. \tag{27}$$

Докажем теперь, что оператор $\hat{A}_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}$ отображает пространство $CL^{2m-|\alpha''|}(H_1)$ в $CL^0(H_1)$. Действительно, пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon$, тогда очевидно, что символ $A_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} \in \sum_{A_0(\xi',\lambda)}^{2\varepsilon_1, s} m-\frac{\alpha''}{2}$. Выбирая теперь $\varepsilon_1 > 0$ настолько малым, чтобы $2\varepsilon_1 < 1$ и применяя теорему 3, получим

$$\hat{A}_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} : CL^{2m-|\alpha''|}(H_1) \to CL^0 (H_1).$$

Отсюда выводим, что оператор $\hat{A}_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} D^{\alpha''}$ отображает непрерывным образом пространство $CL^{2m}(H_1)$ в $CL^0(H_1)$.

Символ $D^{\alpha'} A_+^{-1} A^{-\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}$ представляет собой сумму, слагаемые которой имеют вид

$$\frac{P(x^N, (\xi')^{n-1}) A_0^{-\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} ((\xi')^{n-1}, \lambda)}{(\xi_1 + iS(x^N, (\xi')^{n-1}, \lambda))^k S^l (x^N, (\xi')^{n-1}, \lambda)} \equiv$$

$$\equiv Q_{k,l}(x^N, \xi^n, \lambda) A_0^{-\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}, \tag{28}$$

где

$$Q_{k,l}(x^N, \xi^n, \lambda) = \frac{P(x^N, (\xi')^{n-1})}{(\xi_1 + iS)^k S^l}.$$

Ядра этих операторов

$$G_{k,l}^{N}(x^N, z_1, (z')^{n-1}) = F_{\xi^n \to z^n}^{-1} Q_{k,l} A_0^{-\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} ((\xi')^{n-1}, \lambda)$$

представляют собой операторы типа поверхностного потенциала. Докажем, что они обладают следующими свойствами:

а) $\|G^N_{k,l}\|'_0 = \int\limits_{R^{n-1}} |G^N_{k,l}(x^N, x_1, (z')^{n-1})|\, d(z')^{n-1} \leqslant K, \ \forall x^N \in R^N, x_1, n,$

б) $\sup\limits_{\|x\|_1 < R} \|G^N_{k,l}(x^N, x_1, (z')^{n-1}) - G^{N+s}_{k,l}(x^{N+s}, x_1, (z')^{n-1}\|'_0 \underset{N, s \to \infty}{\longrightarrow} 0,$

с) $\sup\limits_{i \geqslant 2} \int\limits_{R^{n-1}} |z_i^2 G^N_{k,l}(x^N, x_1, (z')^{n-1})|\, d(z')^{n-1} \leqslant M < +\infty, \ \forall x^N, N, n.$

Докажем свойство а). С этой целью представим $Q_{k,l} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)}$ в виде

$$Q_{k,l} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} = \frac{P(x^N, (\xi')^{n-1})}{(\xi_1 + iS)^k S^{l-\varepsilon_1}} S^{\varepsilon_1} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} . \quad (29)$$

Как следует из леммы 3.3 работы [3]

$$\|S^{\varepsilon_1} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}\|'_0 \leqslant C \quad (30)$$

при $\varepsilon_1 < (2m - |\alpha''|)\varepsilon$.

Рассмотрим обратное преобразование Фурье по переменной ξ_1 функции $\dfrac{P(x^N, (\xi')^{n-1})}{(\xi_1 + iS)^k S^{l-\varepsilon_1}}$.

Легко видеть (ср. [3]), что оно вычисляется по формуле

$$\widetilde{G}^N_{k,l}(x^N, z_1, (\xi')^{n-1}, \lambda) \overset{\text{def}}{=} F^{-1}_{\xi_1 \to z_1} \frac{P(x^N, (\xi')^{n-1})}{(\xi_1 + iS)^k S^{l-\varepsilon_1}} =$$

$$= C_1 z_1^{k-1} e^{-Sz_1} P(x^N, (\xi')^{n-1}) S^{-l+\varepsilon_1}(x^N, (\xi')^{n-1}, \lambda), \quad (31)$$

при $z_1 \geqslant 0$, а при $z_1 \leqslant 0$ $\widetilde{G}^N_{k,l} \equiv 0$; $C_1 > 0$ — постоянная.

Заметим, что $P \in {}'\sum^{2|\alpha'|+\varepsilon}_{A_0}$, где $|\alpha'| \leqslant 2m - 1$.

Представим $\widetilde{G}^N_{k,l}$ в виде

$$\widetilde{G}^N_{k,l} = C_1 z_1^{k-1} e^{-Sz_1} S^{-l+\varepsilon_1+\rho} S^{-\rho} P,$$

где $\rho > 4m - 2 + \varepsilon$. Тогда легко получить, что

$$\|S^{-\rho} P\|'_0 \leqslant C_2. \quad (32)$$

Далее проводя оценку, аналогичную оценке 1.14 работы [1], получаем

$$\|z_1^{k-1} e^{-Sz_1} S^{-l+\varepsilon_1+\rho}\|'_0 \leqslant C_3. \quad (33)$$

Из неравенств (30), (32) и (33) вытекает оценка для $G^N_{k,l}$:

$$\|G^N_{k,l}\|'_0 \leqslant z_1^{k-1} e^{-Sz_1} S^{-l+\varepsilon_1+\rho}\|'_0 \|S^{-\rho} P\|'_0 \times$$

$$\times \|S^{\varepsilon_1} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}\|'_0 \leqslant C_3 \cdot C_2 \cdot C, \quad (34)$$

при этом участвующие в неравенствах константы не зависят от N и n. Свойство а) доказано.

Докажем теперь свойство б), а именно, покажем, что

$$\sup_{\|x_1\|_1 < R} \|G^N_{k,l}(x^N, x_1, (z')^{n-1}) - G^{N+s}_{k,l}(x^{N+s}, x_1, (z')^{n-1})\|'_0 \to 0 \qquad (35)$$

при N, $s \to \infty$.

Действительно, из теоремы A легко вывести, что символы $Q_{k,l} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}$, соответствующие ядрам $G^N_{k,l}$, принадлежат классу $\sum^{q,s}_{A_0}$, где $q = 2|\alpha'| - k - p - (2m - |\alpha'| + 1)\varepsilon$.

Далее, в силу свойства (5) определения класса $\sum^{q,s}_{A_0}$ принадлежащие им символы „слабо" зависят от далеких переменных, откуда непосредственно следует (35). Свойство б) также установлено.

Докажем, наконец, свойство с). Из принадлежности символа $Q_{k,l} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}$ классу $\sum^{q,s}_{A_0}$ следует, в частности, что

$$\sup_{l > 2} \left\| \frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2} Q_{k,l} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} \right\|'_0 \leqslant M < +\infty,$$

откуда получаем, что

$$\sup_{l > 2} \int\limits_{R^{n-1}} |z_l^2 G^N_{k,l}(x^N, x_1, (z')^{n-1})| \, d(z')^{n-1} \leqslant M_1 < +\infty$$

для любых N, x^N и n.

Из свойств а) и б) следует сходимость последовательности $v_N^{(2)}$ в $CL^0(H_1)$. Объединяя это с (24) получим, что $\{v_N\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в $CL^{2m}(H_1^+)$ к $v^{(n)}(x)$, т. е. $\lim\limits_{N \to \infty} v_N(x^N) = v^{(n)}(x)$ в смысле сходимости в $CL^{2m}(H_1^+)$. Таким образом, доказано, что $v^{(n)} \in \mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}} \cap CL^{2m}(H_1^+)$.

Докажем, наконец, сходимость последовательности $\{v^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Подставляя в (18), (23) и (25) x вместо x^N и пользуясь тем, что соответствующие символы принадлежат классам $\sum^{p,s}_{A_0}$ (с соответствующими p) замыканием легко получить, что $\lim\limits_{n \to \infty} v_n(x) = w(x)$ (где предел понимается в смысле сходимости в пространстве $CL^{2m}(H_1^+)$. При этом сходимость последовательности $\{v_2^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, где $v_2^{(n)} \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{N \to \infty} v_N^{(2)}$, является следствием того, что условия а)—с) обеспечивают существование семейства мер $\mu(x, x_1, dz')$, заданных на H_1 с равномерно ограниченной вариацией (по z') таких, что их проекции на $R^{n-1}_{(z')_{n-1}}$ порождаются плотностями $G_n(x, x_1 (z')^{n-1})$.

Воспользовавшись полнотой пространства $CL^{2m}(H_1^+)$ получаем, что $w(x) = P^+ \hat{A}_+^{-1}(x, \xi, \lambda)\, \theta(x_1) f$ принадлежит пространству $CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}$. Лемма 1 доказана.

Следствие. В условиях леммы 1 справедливо следующее утверждение: оператор $\hat{R}$, задаваемый формулой (17), непрерывным образом отображает пространство $CL^0(H_1^+)$ в себя.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Следует рассмотреть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in CL^{2m}(H_1^+)$, сходящуюся к f в $CL^0(H_1^+)$ при $n \to \infty$. Тогда по лемме $\hat{R}f_n \in CL^{2m}(H_1^+)$, совершая предельный переход, легко получить утверждение о том, что $\hat{R}: CL^0(H_1^+) \to CL^0(H_1^+)$.

Доказательство теоремы 2. Оператор продолжения l отображает пространство $CL^{2m}(H_1^+)$ в $CL^{2m}(H_1)$:

$$l: CL^{2m}(H_1^+) \to CL^{2m}(H_1). \tag{36}$$

Далее, поскольку символ $A_-^{-1} \in \sum_{A_0}^{-m+\varepsilon, s}$, а $\psi \in C_0^{(\infty)}(R^1)$, то в силу теоремы 3

$$\psi(x_1)\hat{A}^{-1}: CL^{2m}(H_1) \to CL^{2m}(H_1) \tag{37}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $p = -m + \varepsilon < 0$).

Применяя лемму 1 имеем

$$P^+ \psi(x_1)\hat{A}_+^{-1}\theta: CL^{2m}(H_1) \to CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}. \tag{38}$$

Из (36) — (38) следует, что оператор

$$\hat{R}: CL^{2m}(H_1^+) \to CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}},$$

при этом $\hat{R}$ непрерывен в смысле топологии пространства $CL^{2m}(H_1^+)$. Теорема 2 доказана.

7°. В этом пункте будет сформулирован и доказан основной результат статьи.

Теорема 4. *Пусть оператор P с символом, задаваемым формулой* (1), *удовлетворяет условию* (2). *Тогда при достаточно больших* $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ *оператор* $\hat{R}$, *определяемый формулой* (17), *является двусторонним регуляризатором задачи* (12), (13), *то есть имеют место представления*

$$\mathfrak{M} \circ \hat{R} = E + \hat{T}_1, \text{ где } \|\hat{T}_1\|_{C(H_1^+)} < 1 \tag{39}$$

$$\hat{R} \circ \mathfrak{M} = E + \hat{T}_2, \text{ где } \|\hat{T}_2\|_{C(H_1^+)} < 1, \tag{40}$$

операторы $\hat{T}_i$, $i = 1, 2$ *отображают* $\mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}$ *в себя.*

При доказательстве теоремы будет существенно использована формула композиции псевдодифференциальных операторов с символами, принадлежащими классам $\sum_{A_0}^{p, s}$ и оценка для остаточного члена.

Приведем формулировку соответствующих теорем.

Теорема В. ([1], теорема 2.3). *Пусть символы* $Q_i(x, \xi, \lambda)$, $i=1, 2$ *принадлежат классам* $\Sigma_{A_0}^{p_i, s}$, *где* s *достаточно велико. Тогда оператор* $\hat{Q}=\hat{Q}_1\circ\hat{Q}_2$ *порождается символом* $Q(x, \xi, \lambda)$, *принадлежащим классу* $\Sigma_{A_0}^{p, s}$, *где* $p=p_1+p_2$, *при этом имеет место разложение*

$$Q(x, \xi, \lambda)=\sum_{|\alpha|<r}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha Q_1(x, \xi, \lambda)\, D_x^\alpha Q_2(x, \xi, \lambda)+Q_3(x, \xi, \lambda) \tag{41}$$

и $Q_3\in\Sigma_{A_0}^{p_3, s}$ *для любого* $p_3>p_1+p_2-r$.

Замечание. Теорема остается справедливой и в том случае, когда $Q_1=S^{p_1}$, $Q_2\in\Sigma_{A_0}^{p_2, s}$, а также при $Q_1\in\Sigma_{A_0}^{p_1, s}$, $Q_2=\xi_1^2+S^2$.

Теорема С. ([1], теорема 2.4). *Пусть* $Q_1\in\Sigma_{A_0}^{p_1}(\xi', \lambda)$, $Q_2(x, \xi', \lambda)=$ $=S^{p_2}(x, \xi', \lambda)$. *Если* $p=p_1+p_2-r$, *то оператор* $\hat{Q}_3$ (*остаточный член в формуле* (41) *порождается мерой* $\mu(x, dz, \lambda)$, *при этом*

$$\mathrm{Var}_z\,\mu_3(x, dz, \lambda)=\|Q_3(x, \xi, \lambda)\|_0\leqslant C|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{p}{2}+\varepsilon} \tag{42}$$

($\varepsilon>0$ *достаточно мало*).

Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы в идейном отношении близко доказательству теоремы 3.2 работы [1]. Установим формулу (39) (представление (40) доказывается аналогично). Пусть вначале $f\in CL^{2m}(H_1^+)$, тогда в силу теоремы 2 $\hat{R}f\in CL^{2m}(H_1^+)$. Применим к $\hat{R}$ слева дифференциальный оператор $\hat{P}_0$, определенный по символу (16).

Имеем

$$\hat{P}_0\circ P^+\ \hat{}\ (\psi(x_1)A_+^{-1})\,\theta(x_1)\ \hat{}\ (\psi(x_1)A_-^{-1})\,lf=$$

$$=P^+(\hat{A}_+\circ\hat{A}_-\ \hat{}\ (\psi(x_1)A_+^{-1})\,\theta(x_1)\ \hat{}\ (\psi(x_1)A_-^{-1})\,lf.$$

Воспользовавшись теоремой В и замечанием к ней, а также тем, что $A_+^{-1}\in\Sigma_{A_0}^{-m+\varepsilon, s}$, можно записать

$$P^+(\hat{A}_+\circ\hat{A}_-(\psi(x_1)\hat{A}_+^{-1})=P^+(\hat{A}_-+\sum_{l=-m+1}^{m}\hat{C}_{-l}, \tag{43}$$

где символы C_{-l} в соответствии с формулой композиции имеют вид

$$C_{-l}=\sum_{|\alpha|=l+m}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha P_0(x, \xi, \lambda)\,D_x^\alpha A_+^{-1}(x, \xi, \lambda). \tag{44}$$

Рассмотрим теперь операторы $P^+(\hat{A}_-\theta\hat{A}_-^{-1})$ и $P^+(\hat{C}_{-l}\theta\hat{A}_-^{-1})$, $l=-m+1,\cdots, m$.

Имеем

$$P^+(\hat{A}_- \theta \hat{A}_-^{-1}) = P^+(E + \sum_{l=1}^{m} \hat{C}'_{-l} + C'_{-(m+1)} \tag{45}$$

(здесь мы воспользовались тем, что оператор $\hat{A}_-$ — дифференциальный по переменной x_1), а символы

$$C'_{-l} = \sum_{|\alpha|=l} \partial_\xi^\alpha A_-(x, \xi, \lambda) D_x^\alpha A_-^{-1},$$

$C'_{-(m+1)}$ — символ остаточного члена. В силу теоремы A и приведенной там оценки, символы $C'_{-l} \in \sum_{A_0}^{-l+\varepsilon, s}$, причем справедливо неравенство

$$\|C'_{-l}(x, \xi, \lambda)\|_0 \leqslant M |\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{l}{2}+\varepsilon}, \; i = 1, 2, \cdots, m+1. \tag{46}$$

Операторы $P^+(\hat{C}_{-l} \theta \hat{A}_-^{-1})$, $(i = -m+1, \cdots, m)$ разделим на две группы. В первую группу включим операторы с индексами $1 \leqslant i \leqslant m$, а во вторую — остальные.

Заметим, что операторы $\hat{C}_{-l}$ первой группы порождаются мерами, поскольку их символы $C_{-l} \in \sum_{A_0}^{-l+\varepsilon, s} \subset \sum_{A_0}^{0, 0}$ (см. [1], теорема 2.2).

При этом справедлива оценка

$$\|C_{-l} A_-^{-1}\|_0 \leqslant C |\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{l+m}{2}+\varepsilon}.* \tag{47}$$

Операторы второй группы представим в виде

$$P^+(\hat{C}_{-l} \theta \hat{A}_-^{-1}) = P^+(\hat{C}_{-l} \circ \hat{A}_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}} \theta A_0^{\frac{\varepsilon_1-l}{2}} \circ \hat{A}_-^{-1}) =$$
$$= P^+ \widehat{(C_{-l} A_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}})} \theta \hat{A}_0^{\frac{\varepsilon_1-l}{2}} \circ \hat{A}_-^{-1}, \; i = -m+1, \cdots, 0, \tag{48}$$

где символ оператора $\hat{A}_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}}$ есть $A_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}}(\xi', \lambda)$.

Заметим, что $C_{-l} A_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}} \in \sum_{A_0}^{\varepsilon-\varepsilon_1, s}$ и при $\varepsilon_1 > \varepsilon$ $C_{-l} A_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}} \in \sum_{A_0}^{0, 0}$, откуда следует, что соответствующие операторы порождаются мерами, при этом справедлива оценка

$$\|C_{-l} A_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}}\|_0 \leqslant C. \tag{49}$$

В соответствии с формулой композиции (41) можем записать, что

$$\hat{A}_0^{\frac{\varepsilon_1-l}{2}} \hat{A}_-^{-l} = \widehat{A_0^{\frac{\varepsilon_1-l}{2}} A_-^{-l}} + Q_{-(m+l+1)+\varepsilon+\varepsilon_1},$$

* Здесь и далее через C будут обозначаться различные константы.

при этом символы $A_0^{\frac{\varepsilon_1 - i}{2}} A_-^{-1} \in \sum_{A_\varepsilon}^{-(m+i)+\varepsilon_1+\varepsilon}$ и при достаточно малых $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ имеем $-(m+i)+\varepsilon+\varepsilon_1 < 0$, если $-m+1 \leqslant i \leqslant 0$. Следовательно, операторы $\widehat{\ } A_0^{\frac{\varepsilon_1 - i}{2}} A_-^{-1}$ и $\hat{Q}_{-(m+i+1)+\varepsilon+\varepsilon_1}$ также порождаются мерами, при этом имеют место оценки

$$\| A_0^{\frac{\varepsilon_1 - i}{2}} A_-^{-1} \|_0 \leqslant C |\operatorname{Re} \lambda|^{-\frac{m+i}{2}+\varepsilon_1}, \tag{50}$$

$$\| Q_{-(m+i+1)+\varepsilon+\varepsilon_1} \|_0 \leqslant C |\operatorname{Re} \lambda|^{-\frac{m+i+1}{2}+\varepsilon_1}. \tag{51}$$

Таким образом, оператор $\hat{P}_0 \circ \hat{R} f$ представим в виде

$$\hat{P}_0 \circ \hat{R} f = P^+ f + \hat{T}_1 f, \tag{52}$$

при этом в силу неравенств (46), (47), (49) — (51) имеет место оценка

$$\| \hat{T}_1 f \|_{C(H_1^+)} \leqslant C |\operatorname{Re} \lambda|^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \| f \|_{C(H_1^+)}, \tag{53}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, откуда следует, что при достаточно больших $|\operatorname{Re} \lambda|$ можно добиться того, чтобы $\| \hat{T}_1 f \|_{C(H_1^+)}$ была достаточно мала.

Для завершения доказательства теоремы обратимся к оценке оператора $\hat{P}_1 \circ \hat{R} f$.

Обозначим через $\hat{P}_j$ оператор, соответствующий символу $a_j(x) [A(x, \xi, \lambda)]^j$:

$$P_j(x, \xi, \lambda) = a_j(x) (\xi_1^2 + S^2)^j, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Рассмотрим композицию

$$\begin{aligned} \hat{P}_j \circ \hat{R} f &= \hat{P}_j \circ P^{+\,\wedge} (\psi(x_1) A_+^{-1}) \theta(x_1)^{\wedge} (\psi(x_1) A_-^{-1}) l f = \\ &= a_j(x) \circ P^+ (\hat{A}_+^{j/m} \circ \hat{A}_-^{j/m\,\wedge} (\psi(x_1) A_+^{-1}) \theta(x_1)\, \widehat{\ } (\psi(x_1) A_-^{-1})) l f \end{aligned} \tag{54}$$

(здесь мы воспользовались тем, что оператор $\hat{A}^j$ дифференциальный по переменной x_1).

Для оператора $P^+ (\hat{A}_+^{j/m} \circ \hat{A}_-^{j/m\,\wedge} (\psi(x_1) A_+^{-1}))$ имеем представление (в силу формулы композиции)

$$P^+ (\hat{A}_+^{j/m} \circ \hat{A}_-^{j/m\,\wedge} (\psi(x_1) A_+^{-1})) = P^+ (\hat{A}_-^{j/m} \hat{A}_+^{\frac{j}{m}-1} + \sum_{l=-2j+m+1}^{m} \hat{Q}_{-l}), \tag{55}$$

где символы операторов $\hat{Q}_{-l}$ имеют вид

$$Q_{-l}(x, \xi, \lambda) = \sum_{|\alpha| = l + 2j - m} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha A^j(x, \xi, \lambda) D_x^\alpha A_+^{-1}(x, \xi, \lambda). \tag{56}$$

Запишем операторы $P^+(\hat{A}_-^{j/m} \hat{A}_+^{\frac{j}{m}-1} \circ \theta \hat{A}_-^{-1}$ в виде

$$P^+(\hat{A}_-^{j/m} \hat{A}_+^{\frac{j}{m}-1} \circ \theta \hat{A}_-^{-1}) = P^+(\hat{A}^j \hat{A}_+^{-1} \hat{A}_0^{\frac{m-\varepsilon}{2}-j}(\xi', \lambda) \circ \theta \hat{A}_0^{-\frac{m-\varepsilon}{2}+j} \circ \hat{A}_-^{-1}),$$
$$j = 0, 1, \cdots, m-1,$$

при этом, как легко видеть, операторы

$$\hat{A}^j \hat{\ } (A_+^{-1} A_0^{\frac{m-\varepsilon}{2}-j}) \text{ и } \hat{A}_0^{-\frac{m-\varepsilon}{2}+j} \circ \hat{A}_-^{-1}$$

порождаются мерами и имеют место оценки

$$\| A^j A_+^{-1} A_0^{\frac{m-\varepsilon}{2}-j} \|_0 \leqslant C, \tag{56'}$$

$$\| A_0^{-\frac{m-\varepsilon}{2}+j} A_-^{-1} \| \leqslant C |\mathrm{Re}\, \lambda|^{\varepsilon_1 + j - m}, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1. \tag{57}$$

Из оценок (56′), (57) следует, что

$$\| \hat{P}_j \circ \hat{R} f \|_{C(H_1^+)} \leqslant C |\mathrm{Re}\, \lambda|^{\varepsilon_1 + j - m} \| f \|_{C(H_1^+)}, \tag{58}$$
$$j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Далее, из неравенств (58) вытекает, что

$$\| \hat{P}_1 \circ \hat{R} f \|_{C(H_1^+)} \leqslant C |\mathrm{Re}\, \lambda|^{\varepsilon_1 - 1} \| f \|_{C(H_1^+)}. \tag{59}$$

Представление (39) теперь следует из (52) и оценок (53), (59), если обозначить полученный в результате оператор через $\hat{T}_1$, а неравенство $\| \hat{T}_1 \|_{C(H_1^+)} < 1$ обеспечивается выбором достаточно большого $|\mathrm{Re}\, \lambda|$.

Теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е. Оператор $\mathfrak{M}$ гомеоморфно отображает $\mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}$ на пространство $CL^0(H_1^+)$ при достаточно больших $|\mathrm{Re}\, \lambda|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу представления и оценки (39) оператор $E + \hat{T}_1$ обратим, при этом обратный оператор $(E + \hat{T}_1)^{-1}$ представим в виде ряда Неймана и

$$(E + \hat{T}_1)^{-1} : CL^0(H_1^+) \to CL^0(H_1^+),$$

отображение непрерывно. Имеем

$$\mathfrak{M} \circ \hat{R} = E + \hat{T}_1.$$

Применим справа оператор $(E+\hat{T}_1)^{-1}$. Получим

$$\mathfrak{M}\circ\hat{R}\circ(E+\hat{T}_1)^{-1}=E,$$

откуда следует, что оператор $\hat{R}\circ(E+\hat{T}_1)^{-1}$ является правым обратным оператором к оператору $\mathfrak{M}$. Совершенно аналогично из (40) можно вывести, что существует также левый обратный оператор для $\mathfrak{M}$. Этим завершается доказательство утверждения.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 25.XII.1980

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ. Դիրիխլեի խնդիրը կիսատարածությունում անվերջ թվով անկախ փոփոխականներով բարձր կարգի էլիպտական տիպի օպերատորների համար *(ամփոփում)*

Հոդվածում ընդհանրացված են Մ. Ի. Վիշիկի և Ա. Վ. Մարչենկոյի արդյունքները կիսատարածությունում Դիրիխլեի խնդրի լուծման գոյության և միակության վերաբերյալ բարձր կարգի էլիպտական տիպի օպերատորների համար։

Կառուցված է դիտարկվող խնդրի պարամետրիքսը համապատասխան ֆունկցիոնալ տարածություններում և ապացուցված է լուծման գոյությունն ու միակությունը դիտարկվող օպերատորում մասնակցող պարամետրի բավականաչափ մեծ արժեքների դեպքում։

R. L. SHAKHBAGIAN. *The Dirichlet problem in the half-space for the elliptic operators of higher order with infinite number of independent variables* (summary)

The paper deals with the solvability of the Dirichlet problem in the half space for a class of the elliptic operators of order $2m$, $m>1$, which contain a complex parameter. The main theorems generalize the results of the paper by Visik and Marchenko [1]. The bilateral regularization is constructed and unique solvability of the first boundary value problem in the appropriate functional spaces is proved for value of parameter large enough.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. И. Вишик, А. В. Марченко.* Кравые задачи для эллиптических и параболических операторов второго порядка на бесконечномерных многообразных с краем, Матем. сб., 90, № 3, 1973, 331—371.
2. *Р. Л. Шахбагян.* Эллиптическая задача с параметром для уравнений второго горядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 252—261.
3. *П. М. Блехер, М. И. Вишик.* Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях, Матем. сб., 86, № 3, 1971, 446—494.
4. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Параболические уравнения в свертках в ограниченной области, Матем. сб., 71, № 2, 1966, 162—190.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS