ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по собому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Isvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of type script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics —with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal,the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been caried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 1, 1981 Математика

А. А. ВАГАРШАКЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РАСТУЩИХ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

Введение

Пусть $K(t) \geqslant 1$ — непрерывная функция, определенная при $0 < t < 1$. Обозначим через A_K множество аналитических в единичном круге функций, для которых

$$\sup_{|z|<1} \frac{\log |f(z)|}{K(1-|z|)} < \infty. \tag{1}$$

В частном случае, когда $K(t) \equiv 1$, A_K совпадает с пространством ограниченных аналитических функций H^∞. С. Я. Хавинсон [5] доказал следующий результат. Пусть последовательность $\{z_k\}_{k=1}^\infty$, $|z_k| < 1$, такова, что

$$\sum_{k=1}^\infty (1-|z_k|) = \infty$$

и

$$\frac{|z_{k+1}|-|z_k|}{(1-|z_{k+1}|)(1-|z_k|)} \geqslant \delta > 0,$$

где δ не зависит от k. Если $f(z) \in H^\infty$ и

$$\lim_{k\to\infty} (1-|z_k|) \log |f(z_k)| = -\infty, \tag{2}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Аналогичный результат, при несколько других предположениях на $\{z_k\}_{k=1}^\infty$, ранее был получен И. В. Ушаковой [7].

В работе автора [1] было получено обобщение приведенного выше результата. Смысл этого обобщения заключается в следующем: на последовательность $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ налагаются более сильные условия, чем в теореме С. Я. Хавинсона, однако условие (2) заменяется более слабым. Эти новые условия на $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ заставляют точки z_k рассеиваться по кругу. Таким образом, рассеиванием точек $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ удается ослабить условие (2) в теореме С. Я. Хавинсона.

В настоящей статье доказана теорема единственности для функций из A_k, аналогичная результатам работы [1]. В этой теореме показано, что для всех классов A_K, для которых функция $K(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{K(t)}{t}}\, dt < \infty,$$

можно, с помощью рассеивания точек $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, ослабить условие на скорость убывания функции по этой последовательности.

Кроме того, в последнем параграфе настоящей статьи показано, что эффекты указанного типа могут быть получены не всегда. Построены примеры, показывающие, что для весовой функции $K(t)$, растущей при $t\to 0$ быстрее, чем $\frac{1}{t}$, нет таких эффектов.

1°. Введем некоторые обозначения. Пусть $h(r)$—неотрицательная непрерывная функция, заданная при $r>0$, а $E\subseteq\partial D$—некоторое множество, где $D=\{z;\ |z|<1\}$. Рассмотрим все покрытия множества E счетным набором кругов S_i радиусов r_i:

$$\bigcup_i S_i\supseteq E$$

и положим

$$M_h(E)=\inf\left(\sum_i h(r_i)\right),$$

где infimum берется по всем таким покрытиям. С величинами $M_h(E)$ можно познакомиться в книгах Л. Карлесона [2] и А. Роджерса [3]. Ниже мы приведем некоторые элементарные свойства этих величин. Для любого $F\subseteq\partial D$, $M_h(F)\geqslant 0$. Если $F\subseteq E$, то $M_h(F)\leqslant M_h(E)$ и для любых E и F

$$M_h(E\cup F)\leqslant M_h(E)+M_h(F).$$

В случае, когда $h(r)\geqslant c>0$, $r>0$, для любого $\emptyset\neq F\subseteq\partial D$, $M_h(F)\geqslant c$. Легко проверить, что если

$$\varliminf_{r\to 0}\frac{h(r)}{r}=0,$$

то $M_h(\partial D)=0$. Из последних двух свойств $M_h(E)$ следует, что на функцию $h(t)$ естественно наложить ограничения

$$\lim_{r\to 0}h(r)=0,\ \varliminf_{r\to 0}\frac{h(r)}{r}>0.$$

Пусть $F\subset\partial D$—некоторое множество, а x—точка из замкнутого единичного круга $\overline{D}$. Обозначим

$$\rho(x, F)=\inf_{y\in F}|x-y|,$$

где $|x-y|$—расстояние точек x и y. Предположим, что $\varkappa(t)\geqslant 1$—невозрастающая интегрируемая функция, определенная при $t>0$. Обозначим через $\varkappa(F)$ следующий интеграл:

$$\varkappa(F)=\int_0^{2\pi}\varkappa(\rho(e^{it}, F))\,dt.$$

Лемма 1. *Пусть* $\varkappa(t) \geq 1$ *— непрерывная невозрастающая функция, определенная при* $t > 0$, *причем*

$$\lim_{t \to 0} \varkappa(t) = \infty.$$

Если для некоторого множества $F \subset \partial D$, $\varkappa(F) < \infty$, *то*

$$M_h(F) = 0,$$

где

$$h(t) = \int_0^t \varkappa(x)\, dx.$$

Доказательство. Заметим, что из условий $\varkappa(F) < \infty$ и $\lim\limits_{t \to 0} \varkappa(t) = \infty$ следует, что $m(F) = 0$, где m — мера Лебега на ∂D. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $G \subseteq \partial D$ и $m(G) < \delta$, то

$$\int_G \varkappa(\rho(e^{it}, F))\, dt < \varepsilon.$$

Так как F имеет нулевую меру, то существует открытое множество $F \subseteq G$ такое, что $m(G) < \delta$. Обозначим через G_j, $j = 1, 2, \cdots$ все составляющие интервалы множества G, которые пересекаются с множеством F. Тогда имеем

$$M_h(F) \leqslant \sum_j \int_0^{m(G_j)} \varkappa(x)\, dx \leqslant \sum_j \int_{G_j} \varkappa(\rho(e^{it}, F))\, dt < \int_G \varkappa(\rho(e^{it}, F))\, dt < \varepsilon,$$

где $h(t) = \int\limits_0^t \varkappa(x)\, dx$. В силу произвольности ε имеем

$$M_h(F) = 0.$$

Лемма 2. *Пусть* $\varkappa(t) \geqslant 1$, $t > 0$, *непрерывная интегрируемая функция. Тогда для любой неотрицательной неубывающей функции* $h(t)$, *которая удовлетворяет условиям* $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = 0$, $th(x) \leqslant \leqslant h(tx)$ *при* $0 < t$, $x < 1$ *и*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \varkappa(x)\, dx = 0$$

существует такое замкнутое множество $E \subseteq \partial D$, *что* $M_h(E) > 0$ *и* $\varkappa(E) < \infty$.

Доказательство. Построим семейство интервалов $\Delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, где индексы i_k независимо друг от друга принимают значения от единицы до n_k. Это семейство мы выбираем таким образом, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1. $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ — замкнутые интервалы, которые не пересекаются друг с другом при разных наборах индексов $i_1, i_2, \cdots, i_n$ одинаковой длины;

2. Для любого допустимого набора индексов $i_1, i_2, \cdots, i_n$ имеет место включение

$$\Delta_{i_1, \dots, i_{n-1}, i_n} \subset \Delta_{i_1, \dots, i_{n-1}};$$

3. Для любого n интервалы $\Delta_{i_1, \dots, i_n}$ имеют одинаковую длину, $m(\Delta_{i_1, \dots, i_n}) = l_n$.

Числа l_k мы выбераем таким образом, чтобы

$$n_1 n_2 \cdots n_k h(l_k) = 1, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{4}$$

Натуральные числа n_k будут выбраны несколько позже. Заметим, что существует семейство $\{\Delta_{i_1, \dots, i_n}\}$, обладающее приведенными выше свойствами. Действительно, для этого достаточно проверить, что имеют место неравенства

$$l_m - n_{m+1} l_{m+1} = m\left(\Delta_{i_1, \dots, i_m} \setminus \bigcup_{i_{m+1}=1}^{n_{m+1}} \Delta_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}}\right) > 0, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

Вспоминая соотношение (4), вышеприведенные неравенства можно привести к виду $y h^{-1}(x) \supset h^{-1}(yx)$, $0 < x, y < 1$, где $h^{-1}(x)$ — функция, обратная к $h(y)$, или, что то же самое, $yh(z) < h(yz)$.

В качестве множества E рассмотрим пересечение

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} \left(\bigcup_{i_k=1}^{n_k} \Delta_{i_1, \dots, i_n} \right) \right).$$

Из (4) следует, что $M_h(E) \geqslant 1$. Если $\inf\limits_{t>0} \dfrac{t}{h(t)} > 0$, то из условий теоремы следует, что $\varkappa(t)$—ограниченная функция и поэтому $\varkappa(E) < \infty$. Предположим, что $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{h(t)} = 0$. Легко заметить, что тогда $m(E) = 0$. Рассмотрим открытое множество $\partial D \setminus E$. Составляющие интервалы этого множества состоят из составляющих интервалов множеств

$$\Delta_{i_1, \dots, i_m} \setminus \bigcup_{i_{m+1}=1}^{n_{m+1}} \Delta_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}},$$

где $i_1, \cdots, i_m$ принимают всевозможные допустимые значения. В силу определения имеем

$$\varkappa(E) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} n_1 \cdots n_m \int\limits_0^{l_m - n_{m+1} l_{m+1}} \varkappa(x)\, dx \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} n_1 \cdots n_m \int\limits_0^{l_m} \varkappa(x)\, dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} n_1 \cdots n_m \int\limits_0^{h^{-1}\left(\frac{1}{n_1 \cdots n_m}\right)} \varkappa(x)\, dx.$$

Пусть $\omega(x)$ — неубывающая непрерывная функция такая, что

$$\omega(m) = n_1 \cdots n_m, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

Имеет место неравенство

$$\varkappa(E) < \sum_{m=1}^{\infty} n_1 \cdots n_m \int_0^{h^{-1}\left(\frac{1}{n_1 \cdots n_m}\right)} \varkappa(x)\, dx \leqslant \int_1^{\infty} \omega(x) \left(\int_0^{h^{-1}\left(\frac{1}{\omega(x)}\right)} \varkappa(t)\, dt \right) dx.$$

После замены переменной $y = h^{-1}\left(\dfrac{1}{\omega(x)}\right)$ в последнем интеграле получим

$$\varkappa(E) \leqslant \int_0^{\alpha} \frac{1}{h(y)} \left(\int_0^{y} \varkappa(t)\, dt \right) d\omega^{-1}\left(\frac{1}{h(y)}\right), \tag{5}$$

где $\alpha = h^{-1}\left(\dfrac{1}{\omega(1)}\right)$. Так как по условию леммы

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \varkappa(x)\, dx = 0,$$

то существует неубывающая непрерывная функция $\omega(x)$, которая удовлетворяет условиям: $\omega(n)$—целое число при целом n; $\omega(n+1)$ делится на $\omega(n)$; $\lim\limits_{x \to \infty} \omega(x) = \infty$ и сходится интеграл (5). Существование такой функции $\omega(x)$ позволяет выбрать числа n_k с нужными нам свойствами следующим образом: $n_k = \dfrac{\omega(k+1)}{\omega(k)}$. Лемма доказана.

2°. Пусть $\varphi(t)$— непрерывная неубывающая функция, заданная при $0 < t$, причем $\varphi(0) = 0$ и

$$\sup_{0 < t} \frac{\varphi(t)}{t} < \infty.$$

Для любой такой функции $\varphi(t)$ и любой точки $y \in \partial D$ положим

$$\Delta_\varphi(y) = \left\{ x \in D;\ \varphi\left(\left| y - \frac{x}{|x|} \right| \right) < 1 - |x| \right\}.$$

Мы будем пользоваться также обозначением

$$\Delta_\varphi(F) = \bigcup_{y \in F} \Delta_\varphi(y),$$

где F — некоторое множество в ∂D.

Многомерный вариант приведенной ниже леммы был доказан в работе автора [4].

Лемма 3. *Пусть $g(t) \geqslant 1$ — невозрастающая непрерывная функция, заданная при $t > 0$, а $\varphi(t)$ — неубывающая непрерывная* *функция, определенная при* $t \geqslant 0$, *причем* $\varphi(0) = 0$, $\sup\limits_{0<t} \frac{\varphi(t)}{t} < \infty$.

Тогда для множества

$$F = \left\{ y \in \partial D;\ \sup_{z \in \Delta_\varphi(y)} \frac{u(z)}{g(1-|z|)} = \infty \right\},$$

где $u(z)$ — *любая неотрицательная гармоническая в* D *функция, имеет место равенство*

$$M_h(F) = 0,$$

где $h(t) = \varphi(t)\, g(\varphi(t))$.

Обратно, для любого $F \subseteq \partial D$ *такого, что* $M_h(F) = 0$, *существует неотрицательная гармоническая функция* $u(z)$ *такая, что в любой точке* $y \in F$ *имеет место*

$$\sup_{z \in \Delta_\varphi(y)} \frac{u(z)}{g(1-|z|)} = \infty.$$

Следующее утверждение показывает, что существует функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1.

Лемма 4. *Пусть* $K(t)$ — *невозрастающая непрерывная функция, определенная при* $t > 0$, *причем* $0 < tK(t) \leqslant 1$, $\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{x^3 K(x)}\right) > 0$ *и*

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{K(t)}{t}}\, dt < \infty.$$

Тогда существует неотрицательная неубывающая функция $\varphi(t)$ *такая, что*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt < \infty$$

и

$$\int_0^1 K(\varphi(t))\, dt < \infty.$$

Доказательство. Положим $\varphi(x) = \sqrt{x^3 K(x)}$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{K(x)}{x}}\, dx < \infty.$$

Остается проверить, что $\int\limits_0^1 K(\varphi(x))\, dx < \infty$. Имеем

$$\int_0^1 K(\varphi(x))\,dx = \int_0^1 \frac{\varphi^2(\varphi(x))}{\varphi^3(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{\varphi(\varphi(x))}{\varphi^2(x)}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^{\varphi(x)} \varphi'(t)\,dt\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{\varphi(\varphi(x))}{\varphi^2(x)}\,\varphi'(\varphi(x))\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{\varphi(\varphi(x))}{\varphi^2(x)}\,\varphi'(x)\,dx.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $\varphi''(x) \geqslant 0$. Далее имеем

$$\int_0^1 K(\varphi(x))\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{\varphi(\varphi(x))}{\varphi^2(x)}\,d\varphi(x) = \int_0^{\varphi(1)} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt < \infty.$$

Лемма доказана.

Отметим, что функция $\varphi(t)$ из леммы 4 может существовать и при других предположениях на $K(t)$. Поэтому в теореме 1 на функцию $K(t)$ налагаются только те ограничения, которые нам кажутся наиболее существенными.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что функции $K(t)$, $g(t)$ и $\varphi(t)$, фигурирующие в формулировках наших результатов, удовлетворяют условиям:

$$\sup_{0<t} \frac{K(t)}{K(2t)} < \infty, \quad \sup_{t>0} \frac{g(t)}{g(2t)} < \infty, \quad \sup_{0<t} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty.$$

Теорема 1. *Пусть $K(t)$ и $g(t)$ — невозрастающие непрерывные функции, для которых $1 \leqslant K(t) \leqslant g(t) \leqslant \frac{1}{t}$ и*

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{K(t)}{t}}\,dt < \infty.$$

Пусть $\varphi(t) > 0$ — неубывающая непрерывная функция, определенная при $0 \leqslant t \leqslant 2$, причем $\frac{\varphi(t)}{t}$ — неубывающая, $\frac{\varphi(t)}{t^2}$ — монотонная, $\sup_{0<t} \frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)} < \infty$ и

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt < \infty, \quad \int_0^1 K(\varphi(t))\,dt < \infty.$$

Для любой гармонической в единичном круге функции $u(z)$, которая удовлетворяет неравенству

$$u(z) < M K(1-|z|),$$

где M не зависит от $z \in D$, положим

$$E=\left\{y\in\partial D;\ \sup_{z\in\Delta_\varphi(y)}\frac{|u(z)|}{g(1-|z|)}=\infty\right\}.$$

Если $F\subseteq E$ — произвольное замкнутое множество, для которого $K(\varphi(F))<\infty$, то $M_h(F)=0$, где $h(t)=\varphi(t)\ g(\varphi(t))$.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. множество E содержит замкнутое подмножество F такое, что $K(\varphi(F))<\infty$ и $M_h(F)>0$. Обозначим через $\{(e^{i\vartheta_k'}, e^{i\vartheta_k''})\}_{k=1}^{\infty}$, $\vartheta_k'<\vartheta_k''$, семейство составляющих интервалов множества $\partial D\setminus F$. Определим функцию

$$f(\vartheta)=c\int\limits_0^{\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt$$

при $\vartheta_k'\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_k''$ и $f(\vartheta)=0$ при $e^{i\vartheta}\in F$. Здесь $c>0$ некоторое число, которое будет выбрано в дальнейшем. Рассмотрим область G, определяемую условием

$$G=\{z\in D;\ f\ (\arg z)<1-|z|\}.$$

Заметим, что если точка z лежит на границе области G и $\vartheta=\arg z\in$ $\in(\vartheta_k', \vartheta_k'')$, то

$$1-|z|=f(\vartheta)=c\int\limits_0^{\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\leqslant c\varphi\left(\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c\varphi\left(\frac{1}{2}\min\,[(\vartheta-\vartheta_k'),\ (\vartheta_k''-\vartheta)]\right)\leqslant cA\ \varphi\left(\rho\left(\frac{z}{|z|}, F\right)\right),$$

где A — число, зависящее только от функции $\varphi(t)$. С другой стороны, имеем

$$1-|z|=f(\vartheta)=c\int\limits_0^{\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\geqslant c\int\limits_{\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_k)}{2(\vartheta_k''-\vartheta_k')}}^{\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant c\log 2\ \varphi\left(\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{2(\vartheta_k''-\vartheta_k')}\right)\geqslant cB\varphi\left(\rho\left(\frac{z}{|z|}, F\right)\right),$$

где B зависит только от $\varphi(t)$. Очевидно, что полученные нами неравенства имеют место и при $\frac{z}{|z|}\in F$.

Обозначим через $w=w(z)$ функцию, которая конформно отображает единичный круг на G. Мы утверждаем, что производная функции $w(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$0<\inf_{z\in D}|w'(z)|,\ \sup_{z\in D}|w'(z)|<\infty.$$

В силу теоремы Варшавского (см., например, [6]) для этого достаточно показать, что модуль непрерывности функции $f'(\vartheta)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{\omega_{f'}(\delta)}{\delta}\,d\delta<\infty.$$

Пусть ϑ_1 и ϑ_2 принадлежат интервалу $(\vartheta_k', \vartheta_k'')$. Тогда

$$|f'(\vartheta_1)-f'(\vartheta_2)|=\left|\frac{\varphi\left(\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right)}{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}(\vartheta_k''+\vartheta_k'-2\vartheta_1)-\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi\left(\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right)}{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}(\vartheta_k''+\vartheta_k'-2\vartheta_2)\right|.$$

В случае, когда $\vartheta_1\leqslant\dfrac{\vartheta_k''+\vartheta_k'}{2}\leqslant\vartheta_2$ имеем

$$|f'(\vartheta_1)-f'(\vartheta_2)|\leqslant\frac{\varphi\left(\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right)}{\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\ \frac{\vartheta_k''+\vartheta_k'-2\vartheta_1}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}+$$

$$+\frac{\varphi\left(\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right)}{\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\ \frac{2\vartheta_2-(\vartheta_k''+\vartheta_k')}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\leqslant 4\frac{\varphi\left(\frac{\vartheta_1-\vartheta_k'}{2}\right)}{\vartheta_1-\vartheta_k'}\ \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}<$$

$$\leqslant A\frac{\varphi(\vartheta_k''-\vartheta_k')}{(\vartheta_k''-\vartheta_k')^2}(\vartheta_2-\vartheta_1).$$

Если $\dfrac{\varphi(t)}{t^2}$ — неубывающая функция, то

$$|f'(\vartheta_2)-f'(\vartheta_1)|\leqslant A(\vartheta_2-\vartheta_1).$$

Если $\dfrac{\varphi(t)}{t^2}$ — невозрастающая функция, то

$$|f'(\vartheta_2)-f'(\vartheta_1)|\leqslant B\frac{\varphi(\vartheta_2-\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}.$$

Окончательно получаем

$$|f'(\vartheta_1)-f'(\vartheta_2)|\leqslant D\max\left\{(\vartheta_2-\vartheta_1),\frac{\varphi(\vartheta_2-\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}\right\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\vartheta_k'<\vartheta_1<\vartheta_2<\dfrac{\vartheta_k''+\vartheta_k'}{2}$. Заметим, что если $\vartheta_1-\vartheta_k'\leqslant\vartheta_2-\vartheta_1$, то

$$|f'(\vartheta_1)-f'(\vartheta_2)|<4\,\frac{\varphi\left(\dfrac{\vartheta_1-\vartheta_k'}{2}\right)}{\vartheta_1-\vartheta_k'}\,\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\leqslant A\,\frac{\varphi(\vartheta_2-\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}.$$

В случае, когда $\vartheta_2-\vartheta_1<\vartheta_1-\vartheta_k'$, достаточно оценить разность.

$$\left|\frac{\varphi\left(\dfrac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right)}{\dfrac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}-\frac{\varphi\left(\dfrac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right)}{\dfrac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}^{\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{t\varphi'(t)-\varphi(t)}{t^2}\,dt\right|\leqslant M\int\limits_{\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}^{\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt.$$

Если $\dfrac{\varphi(t)}{t^2}$ — неубывающая функция, то

$$\int\limits_{\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}^{\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\leqslant M\left|\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)-(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right|=$$

$$=M\,\frac{(\vartheta_2-\vartheta_1)\,|\vartheta_k''+\vartheta_k'-\vartheta_2-\vartheta_1|}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\leqslant M\,|\vartheta_2-\vartheta_1|.$$

Если $\dfrac{\varphi(t)}{t^2}$ — невозрастающая функция, то

$$\int\limits_{\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}^{\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_2''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\leqslant\int\limits_{\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}}^{\frac{3(\vartheta_2-\vartheta_1)}{2}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt.$$

Следовательно

$$|f'(\vartheta_1)-f'(\vartheta_2)|\leqslant c\left(|\vartheta_2-\vartheta_1|+\frac{\varphi(\vartheta_2-\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}+\int\limits_{\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}}^{\frac{3(\vartheta_2-\vartheta_1)}{2}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right).$$

Из того, что $f'(\vartheta)=0$ при $e^{i\vartheta}\in F$, следует, что полученное нами неравенство имеет место не только для ϑ_1 и ϑ_2, принадлежащих какому-то интервалу $(\vartheta_k', \vartheta_k'')$, но и для любых расположений ϑ_1 и ϑ_2. Таким образом

$$\omega_{f'}(\delta)\leqslant c\left(\delta+\frac{\varphi(\delta)}{\delta}+\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{3\delta}{2}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1\frac{\omega_{f'}(\delta)}{\delta}\,d\delta<\infty.$$

Определим функцию $v(z)=u(w(z))$, $z\in D$.

Имеем

$$\int\limits_{\partial D}v^+(z)\,|dz|=\int\limits_{\partial D}u^+(w(z))\,|dz|\leqslant M\int\limits_{\partial D}K(1-|w(z)|)\,|dz|\leqslant$$

$$\leqslant M_1\int\limits_{\partial G}K(1-|w|)\,|dw|\leqslant M_2\int\limits_{\partial G}K\left(\varphi\left(\rho\left(\frac{w}{|w|}, F\right)\right)\right)|dw|\leqslant$$

$$\leqslant M_3\int\limits_{\partial D}K(\varphi(\rho(z, F)))\,|dz|,$$

где $v^+=\max\{v, 0\}$, M_1, M_2, M_3 — постоянные. Следовательно, функция $v(z)$ допускает представление в виде $v(z)=v_1(z)-v_2(z)$, где $v_1(z)$ и $v_2(z)$ — неотрицательные гармонические функции.

Число $c>0$ в определении области G можно выбрать настолько малым, чтобы при $\zeta\in\Delta_\varphi(F)$ имело место неравенство

$$1-|\zeta|\leqslant 2\rho(\zeta, \partial G).$$

Пусть $\zeta\in G$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi\left(\left|w(z)-\frac{\zeta}{|\zeta|}\right|\right)<2\rho(\zeta, \partial G),$$

где z — некоторая точка из множества F. Так как $w(z)$ и $w^{-1}(\zeta)$ имеют ограниченные производные, то существует $0<A<\infty$ такое, что

$$\varphi\left(\left|w(z)-\frac{\zeta}{|\zeta|}\right|\right)\geqslant A\varphi\left(\left|z-\frac{w^{-1}(\zeta)}{|w^{-1}(\zeta)|}\right|\right)$$

и

$$A\rho(\zeta,\ \partial G)\leqslant\rho(w^{-1}(\zeta),\ \partial D).$$

Следовательно

$$A\varphi\left(\left|z-\frac{w^{-1}(\zeta)}{|w^{-1}(\zeta)|}\right|\right)\leqslant\varphi\left(\left|w(z)-\frac{\zeta}{|\zeta|}\right|\right)<2\rho(\zeta,\partial G)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{A}\rho(w^{-1}(\zeta),\partial D)=\frac{2}{A}(1-|w^{-1}(\zeta)|).$$

Поэтому

$$\Delta_\varphi(w(z))\subseteq w\left(\Delta_{\frac{A\cdot\varphi}{2}}(z)\right),$$

при $z\in F$. Откуда следует, что $F\subseteq w(H)$, где

$$H=\left\{y\in\partial D;\ \sup_{w\in\Delta_{\frac{A\cdot\varphi}{2}}(y)}\frac{|v(w)|}{g(1-|w|)}=\infty\right\}.$$

В силу леммы 3 $M_h(H)=0$, что противоречит предположению $M_h(F)>0$. Теорема доказана.

3°. В этом параграфе мы докажем леммы о произведениях Бляшке. Эти леммы в некоторых частных случаях были доказаны в статье автора [1]. В конце параграфа мы приведем основной результат настоящей статьи о единственности аналитической функции из A_K.

Лемма 5. *Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в единичном круге, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty.$$

Пусть $1\leqslant g(t)\leqslant\frac{1}{t}$ — невозрастающая непрерывная функция, а $0\leqslant\varphi(t)\leqslant t$ — неубывающая непрерывная функция. Тогда существует $E\subseteq\partial D$ такое, что $M_h(E)=0$, где $h(t)=\varphi(t)\,g(\varphi(t))$ и для любой точки $y\in\partial D\setminus E$ сходится ряд

$$\sum_{z_k\in\Delta_\varphi(y)}\frac{1}{g(1-|z_k|)}<\infty.$$

Доказательство. Для любой точки $0\neq z\in D$ положим

$$C_\varphi(z)=\{y\in\partial D;\ z\in\Delta_\varphi(y)\}.$$

Через $\chi_\varphi(z,y)$ мы обозначим характеристическую функцию множества $C_\varphi(z)$, $y\in\partial D$. Определим функцию

$$f(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi_\varphi(z_k,y)}{g(1-|z_k|)}.$$

Заметим, что

$$f(y) = \sum_{z_k \in \Delta_\varphi(y)} \frac{1}{g(1-|z_k|)}.$$

Поэтому достаточно доказать, что множество

$$E = \{y \in \partial D,\ f(y) = \infty\}$$

имеет нулевую h-хаусдорфовую меру. Предположим, что это не так. Тогда по теореме Фростмана (см. Л. Карлесон [2], стр. 14) существует константа a такая, что для любого компактного множества F существует неотрицательная мера μ, обладающая свойствами

$$\mu(S_r) \leqslant h(r)$$

для любой дуги $S_r \subset \partial D$ длины $2r$ и

$$\mu(F) \geqslant a\, M_h(F).$$

По теореме Безиковича (см. Л. Карлесон [2], стр. 18) E содержит замкнутое подмножество F, для которого $M_h(F) > 0$. Пусть μ—мера, соответствующая множеству F. Тогда имеем

$$\infty = \int_F f(y)\, d\mu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(C_\varphi(z_k))}{g(1-|z_k|)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)\right) \sup_{z\in D} \frac{\mu(C_\varphi(z))}{(1-|z|)\, g(1-|z|)}.$$

Заметим, что $C_\varphi(z)$— дуга на ∂D с центром в точке $\frac{z}{|z|}$ и длиной $m(C_\varphi(z)) = \varphi^{-1}(1-|z|)$. Поэтому

$$\infty \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)\right) \sup_{z\in D} \frac{\mu(C_\varphi(z))}{(1-|z|)\, g(1-|z|)} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)\right) \times$$

$$\times \sup_{0<t<1} \frac{h(\varphi^{-1}(t))}{t g(t)} < \infty.$$

Из полученного противоречия следует, что $M_h(E) = 0$.

Лемма 6. *Пусть $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$— последовательность в единичном круге, для которой сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g(1-|w_k|)} < \infty,$$

где $1 \leqslant g(t) \leqslant \frac{1}{t}$— невозрастающая, а $tg(t)$— неубывающая функция. Тогда для любой последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{g(1-|z_n|)} = \infty$$

и

$$\inf_{i \neq j} |g(1-|z_i|) - g(1-|z_j|)| > 0,$$

имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |B(z_n, \{w_k\})|}{g(1-|z_n|)} > -\infty,$$

где $B(z, \{w_k\})$*—произведение Бляшке с нулями в точках* $\{w_k\}$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\pi(z) = \frac{z}{|z|}\left(\frac{1}{g(1-|z|)}\right),$$

где $0 \neq z \in D$, при $z=0$ положим $\pi(0)=0$.

Заметим, что $\pi(z)$ отображает единичный круг на себя и для любого $z \in D$, $|\pi(z)| \leqslant |z|$. Докажем, что имеет место неравенство

$$\left|\frac{|\pi(z)| - |\pi(w)|}{1-|\pi(z)|\,|\pi(w)|}\right| \leqslant \left|\frac{|z|-|w|}{1-|z|\,|w|}\right|. \tag{9}$$

Обозначим $x = 1-|w|$, $y = 1-|z|$. Тогда неравенство (9) примет вид

$$\left|\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(y)}}{\dfrac{1}{g(x)} + \dfrac{1}{g(y)} - \dfrac{1}{g(x)\,g(y)}}\right| \leqslant \frac{|x-y|}{|x+y-xy|}. \tag{10}$$

Не теряя общности можно предположить, что $x \geqslant y$. Неравенство (10) эквивалентно следующему:

$$\frac{2y}{g(x)} + \frac{xy}{g(y)} + \frac{y}{g(x)\,g(y)} \leqslant \frac{2x}{g(y)} + \frac{xy}{g(x)} + \frac{x}{g(x)\,g(y)}. \tag{11}$$

Так как $g(t)$—невозрастающая, а $tg(t)$ — неубывающая функция, то

$$\frac{y}{g(x)\,g(y)} \leqslant \frac{x}{g(x)\,g(y)}, \quad \frac{xy}{g(y)} \leqslant \frac{xy}{g(x)}, \quad \frac{2y}{g(x)} \leqslant \frac{2x}{g(y)}.$$

Суммируя эти неравенства получим неравенство (11). Далее, в силу (9) имеем

$$|B(|\pi(z)|, \{|\pi(w_k)|\})| = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|\pi(z)| - |\pi(w_k)|}{1-|\pi(z)|\,|\pi(w_k)|} \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{|z|-|w_k|}{1-|z|\,|w_k|}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |B(z, \{w_k\})|. \tag{12}$$

Заметим, что последовательности $\{\pi(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\pi(w_k)\}_{k=1}^{\infty}$ обладают свойствами

1. $$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\pi(w_k)|)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{g(1-|w_k|)}<\infty;$$

2. $$\inf_{i\neq j}\left|\frac{|\pi(z_i)|-|\pi(z_j)|}{((1-|\pi(z_i)|)(1-|\pi(z_j)|)}\right|=\inf_{i\neq j}|g(1-|z_i|)-g(1-|z_j|)|>0.$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\pi(z_n)|)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{g(1-|z_n|)}=\infty.$$

Из свойства 1 следует что произведение Бляшке с нулями $\{|\pi(w_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ сходится. Из 2 и 3 следует, что последовательность $\{|\pi(z_n)|\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы С. Я. Хавинсона (формулировка этой теоремы приведена во введении настоящей статьи). Следовательно

$$\varlimsup_{n\to\infty}(1-|\pi(z_n)|)\log|B(|\pi(z_n)|,\ \{|\pi(w_k)|\})|>-\infty.$$

В силу неравенства (12) имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|B(z_n,\ \{w_k\})|}{g(1-|z_n|)}>-\infty.$$

Лемма 7. *Пусть $4\varphi(t)\leqslant t$ — неотрицательная неубывающая функция. Положим, что для точек $y\in\partial D$; $z,\ w\in D$ имеют место неравенства*

$$2(1-|w|)\leqslant\varphi\left(\left|y-\frac{w}{|w|}\right|\right),\quad 1-|z|\geqslant c\varphi\left(\left|y-\frac{z}{|z|}\right|\right),$$

где $c=\sup\limits_{0<t}\dfrac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}$. *Тогда имеет место неравенство*

$$-4\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{\left|z-\dfrac{w}{|w|}\right|^2}\leqslant\log\left|\frac{w-z}{1-\bar w z}\right|^2.$$

Доказательство. Имеет место оценка

$$-\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|w-z|^2}\leqslant-\log\left(1+\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|w-z|^2}\right)=\log\left|\frac{w-z}{1-\bar w z}\right|^2.$$

Заметим, что если имеет место неравенство

$$2(1-|w|)\leqslant\left|z-\frac{w}{|w|}\right|, \tag{13}$$

то

$$\left|z-\frac{w}{|w|}\right|\leqslant|z-w|+\left|w-\frac{w}{|w|}\right|=|z-w|+1-|w|\leqslant|z-w|+$$
$$+\frac{1}{2}\left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Следовательно

$$\left|z-\frac{w}{|w|}\right|\leqslant 2|z-w|.$$

Поэтому, если точки z и w удовлетворяют неравенству (13), то

$$-4\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{\left|z-\frac{w}{|w|}\right|^2}\leqslant\log\left|\frac{w-z}{1-\bar{w}z}\right|^2.$$

Таким образом, достаточно доказать, что из условий леммы следует, что z и w удовлетворяют оценке (13). Пусть $\zeta\in\partial D$ такая точка, что имеет место равенство

$$|y-\zeta|+2(1-|w|)=\left|y-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Имеем

$$2(1-|w|)\leqslant\varphi\left(\left|y-\frac{w}{|w|}\right|\right)\leqslant\frac{1}{4}\left|y-\frac{w}{|w|}\right|$$

и

$$\frac{1}{2}\left|y-\frac{w}{|w|}\right|\leqslant\left|y-\frac{w}{|w|}\right|-2(1-|w|)=|y-\zeta|.$$

Поэтому

$$2(1-|w|)\leqslant\varphi\left(\left|y-\frac{w}{|w|}\right|\right)\leqslant c\varphi\left(\frac{1}{2}\left|y-\frac{w}{|w|}\right|\right)\leqslant c\varphi(|y-\zeta|).$$

Отсюда следует, что $2(1-|w|)\zeta\overline{\in}\Delta_{c\varphi}(y)$. Следовательно,

$$\left\{z\in D;\ \left|z-\frac{w}{|w|}\right|<2(1-|w|)\right\}\cap\Delta_{c\varphi}(y)=\varnothing.$$

Так как $z\in\Delta_{c\varphi}(y)$, то

$$2(1-|w|)\leqslant\left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Теорема 2. *Пусть* $K(t)$ *и* $g(t)$ — *невозрастающие непрерывные функции, для которых*

$$1\leqslant K(t)\leqslant g(t)\leqslant\frac{1}{t},\quad\sup_{0<t}\frac{|g'(2t)|}{|g'(t)|}<\infty$$

и

$$\int_0^1\sqrt{\frac{K(t)}{t}}\,dt<\infty.$$

Пусть $\varphi(t)\geqslant 0$ — *неубывающая непрерывная функция, определенная при* $0\leqslant t\leqslant 2$, *причем* $\frac{\varphi(t)}{t}$ *неубывающая,* $\frac{\varphi(t)}{t^2}$ — *монотонная,* $\sup\limits_{0<t}\frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)}<\infty$ *и*

$$\int_{0}^{1} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt < \infty, \quad \int_{0}^{1} K(\varphi(t))\, dt < \infty, \quad \lim_{t\to 0} \frac{1}{\varphi(t)\, g(\varphi(t))} \int_{0}^{t} K(\varphi(x))\, dx = 0.$$

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность точек в единичном круге* D, *а* E *— замкнутое множество в* ∂D. *Предположим, что для любой точки* $y \in E$ *существует подпоследовательность* $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, *удовлетворяющая условиям:*

1. $z_{n_k} \in \Delta_\varphi(y), \; k = 1, 2, \cdots;$
2. $\inf\limits_{i \neq j} |g(1 - |z_{n_i}|) - g(1 - |z_{n_j}|)| > 0;$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{g(1 - |z_{n_k}|)} = \infty,$

а множество E *удовлетворяет условиям*

$$K(\varphi(E)) < \infty, \quad M_h(E) > 0,$$

где $h(t) = \varphi(t)\, g(\varphi(t))$.

Тогда если $f(z) \in A_k$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |f(z_n)|}{g(1 - |z_n|)} = -\infty,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. что существует $f(z) \in A_K$, $f(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющая условиям теоремы. Следуя конструкциям, приведенным в теореме 1, построим область G и обозначим через $w = w(z)$ функцию, которая конформно отображает единичный круг на G. Повторяя рассуждения теоремы 1, легко убедиться, что $F(z) = f(w(z))$ имеет ограниченную характеристику. Обозначим $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в D, где $w(a_k) = z_k$ и пусть $F = \{z \in \partial D, \; w(z) \in E\}$. Заметим, что $M_h(F) > 0$ и последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3 нашей теоремы, где вместо E нужно брать множество F, а вместо $\varphi(t)$ функцию $c\varphi(t)$, где c — постоянное число. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log |F(a_k)|}{g(1 - |a_k|)} = -\infty.$$

Из теоремы Неванлинна следует, что $F(z)$ допускает представление в виде

$$F(z) = z^p B(z, \{b_k\}) \exp\left\{ \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(t) + iC \right\},$$

где p — натуральное число, $B(z, \{b_k\})$ — произведение Бляшке, составленное по нулям функции $F(z)$, μ — конечная мера, C — действительное число. Следовательно

$$\frac{\log|F(z)|}{g(1-|z|)}=\frac{p\log|z|}{g(1-|z|)}+\frac{\log|B(z,\{b_k\})|}{g(1-|z|)}+\frac{u(z)}{g(1-|z|)}, \tag{14}$$

где $u(z)$ можно представить в виде разности двух неотрицательных гармонических функций. В силу леммы 3 существует $F_1\subset\partial D$ такое, что $M_h(F_1)=0$ и для любой точки $y\in\partial D\setminus F_1$

$$\sup_{z\in\Delta_{c\varphi}(y)}\frac{|u(z)|}{g(1-|z|)}<\infty. \tag{15}$$

Так как

$$\lim_{|z|\to 1}\frac{\log|z|}{g(1-|z|)}=0,$$

то остается исследовать второе слагаемое в (14).

В силу леммы 5 существует $F_2\subset\partial D$ такое, что $M_h(F_2)=0$ и

$$\sum_{b_k\in\Delta_{c_1\varphi}(y)}\frac{1}{g(1-|b_k|)}<\infty,$$

при $y\in\partial D\setminus F_2$, где c_1 — постоянное число, удовлетворяющее неравенствам

$$0<c_1<\min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{c}{2\sup\limits_{0<t}\dfrac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}},\ c\inf_{0<t}\frac{t}{4\varphi(t)}\right\}.$$

Введем функцию

$$v(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-|z|^2}{\left|z-\dfrac{b_k}{|b_k|}\right|^2}(1-|b_k|^2).$$

Заметим, что $v(z)$ — неотрицательная гармоническая в D функция и в силу леммы 3 существует множество $F_3\subset\partial D$ такое, что $M_h(F_3)=0$ и

$$\sup_{z\in\Delta_{c\varphi}(y)}\frac{v(z)}{g(1-|z|)}<\infty, \tag{16}$$

при $y\in\partial D\setminus F_3$. Так как $M_h(F)>0$, то существует точка $y\in F\setminus(F_1\cup\cup F_2\cup F_3)$. Разобьем произведение Бляшке $B(z,\{b_k\})$ на две части

$$B(z,\{b_k\})=B_1(z)\,B_2(z),$$

где $B_1(z)$ — произведение Бляшке, составленное по тем b_k, которые попадают в $\Delta_{c,\varphi}(y)$, а $B_2(z)$ — по остальным точкам b_k. В силу леммы 6

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\log|B_1(a_n)|}{g(1-|a_n|)}>-\infty. \tag{17}$$

Далее, в силу леммы 7, имеет место неравенство

$$\log|B_2(z)|>-\sum_{b_k\in\Delta_{c_1\varphi}(y)}\frac{1-|z|^2}{\left|z-\dfrac{b_k}{|b_k|}\right|^2}(1-|b_k|^2)\geqslant -v(z),$$

при $z \in \Delta_\varphi(y)$. Поэтому из (16) следует, что

$$\inf_{z \in \Delta_\varphi(y)} \frac{\log |B_2(z)|}{g(1-|z|)} > -\infty. \tag{18}$$

Из неравенств (15), (17) и (18) вытекает, что

$$\varlimsup_{\substack{a_k \in \Delta_\varphi(y) \\ |a_k| \to 1}} \frac{\log |F(a_k)|}{g(1-|a_k|)} > -\infty.$$

Полученное неравенство противоречит условию, наложенному на функцию $F(z)$. Теорема доказана.

4°. Мы рассмотрели такие классы A_K, для которых функция $K(t)$ удовлетворяет условиям

$$1 \leqslant K(t) \leqslant \frac{1}{t} \text{ и } \int_0^1 \sqrt{\frac{K(t)}{t}}\, dt < \infty.$$

Естественно возникают вопросы: можно ли доказать аналогичные теоремы для классов A_K, где $K(t)$ растет быстрее, чем $\frac{1}{t}$, при $t \to 0$, а также обобщить результаты настоящей статьи, предполагая, что $g(t) \leqslant K(t)$? В этом параграфе мы построим примеры функций, которые дают отрицательный ответ на поставленные выше вопросы. Примеры будут построены для таких функций $K(t)$, которые допускают представление

$$K(t) = \int_\varepsilon^\infty \frac{d\mu(x)}{t^x},$$

где μ — неотрицательная конечная мера, а ε — любое число больше нуля.

Обозначим

$$u(re^{it}) = \sum_{k=0} r^{2^k} \cos(2^k t) \int_\varepsilon^\infty \frac{2^{kt}}{\Gamma(t)}\, d\mu(t),$$

где $\Gamma(t)$ — гамма-функция Эйлера. Заметим, что

$$|u(re^{it})| \leqslant \sum_{k=0}^\infty r^{2^k} \int_\varepsilon^\infty \frac{2^{kt}}{\Gamma(t)}\, d\mu(t) \leqslant \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty \frac{r^{2^x} 2^{xt}}{\Gamma(t)} d\mu(t)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \int_{\varepsilon \log \frac{1}{r}}^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-v}\, v^{t-1}}{\Gamma(t) \log^t \frac{1}{r}}\, dv\, d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\log 2}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{d\mu(t)}{\log^{t}\frac{1}{r}} \leqslant \frac{1}{\log 2}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{d\mu(t)}{(1-r)^{t}} = \frac{K(1-r)}{\log 2}.$$

Теперь рассмотрим функцию $u(z)$ на радиусах $\{z;\ \arg z = \pi 2^{1-k} n\}$, где $n = 0, 1, \cdots, 2^{k}$. Имеем

$$u\left(re^{\pi 2^{1-k} n i}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} r^{2^{j}} \cos\left(\pi 2^{j-k+1}\right)\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{2^{jt}}{\Gamma(t)}\,d\mu(t) +$$

$$+\sum_{j=k}^{\infty} r^{2^{j}}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{2^{jt}}{\Gamma(t)}\,d\mu(t).$$

Следовательно

$$u\left(r\,e^{\pi 2^{1-k} n i}\right) \geqslant \sum_{j=k}^{\infty} r^{2^{j}}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{2^{jt}}{\Gamma(t)}\,d\mu(t) - \sum_{j=0}^{k-1} r^{2^{j}}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{2^{jt}}{\Gamma(t)}\,d\mu(t) >$$

$$> \int\limits_{k+1}^{\infty} r^{2^{x}}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{2^{xt}}{\Gamma(t)}\,d\mu(t)\,dx - \int\limits_{0}^{k} r^{2^{x}}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{2^{xt}}{\Gamma(t)}\,d\mu(t)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\Bigg(\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\int\limits_{2^{k+1}\log\frac{1}{r}}^{\infty}\frac{e^{-v}\,v^{t-1}}{\Gamma(t)\log^{t}\frac{1}{r}}\,d\mu(t)\,dv -$$

$$-\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\int\limits_{\log\frac{1}{r}}^{2^{k}\log\frac{1}{r}}\frac{e^{-v}\quad v^{t-1}}{\Gamma(t)\log^{t}\frac{1}{r}}\,d\mu(t)\,dv\Bigg).$$

Выберем $r = r_k$ таким образом, чтобы $2^{k}\log\frac{1}{r_k} = \delta$, где δ — фиксированное положительное число. Тогда имеем

$$u\left(r_k\,e^{\pi 2^{1-k} n i}\right) \geqslant \frac{1}{\log 2}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\left(\int\limits_{2\delta}^{\infty}\frac{e^{-v}\,v^{t-1}}{\Gamma(t)}\,dv - \int\limits_{0}^{\delta}\frac{e^{-v}\,v^{t-1}}{\Gamma(t)}\,dv\right)\frac{d\mu(t)}{\log^{t}\frac{1}{r_k}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\log 2}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{\Gamma(t)}\int\limits_{0}^{\delta} e^{-v}\,v^{t-1}\,dv\right)\frac{d\mu(t)}{(1-r_k)^{t}}.$$

Заметим, что число $\delta > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$u\left(r_k e^{\pi 2^{1-k} n i}\right) > c \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{(1-r_k)^t} = c\, K(1-r_k),$$

где c — постоянное число, не зависящее от $k=1, 2, \cdots$. Окончательно мы получаем, что

$$\sup_{z \in D} \frac{|u(z)|}{K(1-|z|)} < \infty$$

и в точках $z_{n,k} = \exp\left\{-\frac{\delta}{2^k} + \pi 2^{1-k} n i\right\}$, где $n=0, 1, \cdots, 2^k$, $k=1,2,\cdots$ имеет место неравенство

$$u(z_{n,k}) \geqslant c\, K(1-|z_{n,k}|).$$

Заметим, что для любого $y \in \partial D$ существует бесконечное множество точек вида $z_{n,k}$, которые попадают в $\Delta_{\frac{t}{\delta}}(y)$. Поэтому

$$\varlimsup_{\substack{z \in \Delta_{\frac{t}{\delta}}(y) \\ z \to y}} \frac{u(z)}{K(1-|z|)} \geqslant c > 0.$$

Существование гармонической функции с указанными выше свойствами показывает, что функцию $g(t)$ нельзя брать меньше функции $K(t)$. С другой стороны, из результатов Н. К. Никольского [9] следует, что для достаточно широкого класса функций $K(t)$, растущих при $t \to 0$ быстрее, чем $\frac{1}{t}$ (например, для $K(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, $\alpha > 1$) гармоническая функция $u(z)$, для которой $u(z) \leqslant c\,(K(1-|z|)$ допускает такую же оценку снизу: $u(z) \geqslant -c_1 K(1-|z|)$. Следовательно, для таких $K(t)$ не имеет смысла брать функцию $g(t)$ растущей быстрее, чем $K(t)$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.XII.1979

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Եզրի մոտ աճող անալիտիկ ֆունկցիաների միակության մասին (*ամփոփում*)

Ներկա հոդվածում ապացուցվում են նոր թեորեմներ A_K դասին պատկանող անալիտիկ ֆունկցիաների միակության մասին։

A. A. VAGARSHAKIAN. *About uniqueness of analytic functions growing near the boundary* (summary)

In this paper a new uniqueness theorem for analytic functions in classes A_K is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Вагаршакян*. Теоремы единственности для ограниченных аналитических функций и их приложения в теории аппроксимации, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XII, № 5, 1977, 345—357.
2. *Л. Карлесон*. Избранные проблемы теории исключительных множеств, Изд. «Мир», М., 1971.
3. *C. A. Rogers*. Hausdorff measures, Cambridge, 1970.
4. *А. А. Вагаршакян*. Граничные свойства некоторых классов гармонических функций, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., X, № 1, 1975, 54—60.
5. *С. Я. Хавинсон*. Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН. XVIII, 2 (110), 1963.
6. *M. Tsuji*. The boundary distortion on conformal mapping, J. Math. Soc., Japan, 1954, 6, № 3—4, 235—261.
7. *И. В. Ушакова*. Теория единственности для функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге, ДАН СССР, 130, № 1, 1960.
8. *М. Гусман*. Дифференцирование интегралов в R^n, Изд. «Мир», М., 1978.
9. *Н. К. Никольский*. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, CXX, 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 1, 1981 Математика

R. V. AMBARTSUMIAN AND G. ADOMIAN

SOME REMARKS ON STOCHASTIC TRANSFORMATIONS

This paper discusses some basic aspects of the first author's apprcach to stochasti c differential equations—the basic calculus, convergence, and the choice of operator decomposition into deterministic and random parts.

I. Adomian's iterative methods for solution of stochastic operator equations can be viewed as determining an inverse operator in series form. The solution of the linear equation $\mathbf{L}y=x$, for example, with $\mathbf{L}$ *a stochastic operator* and x a stochastic process defined on appropriate probability spaces, is written $y=\mathbf{L}^{-1}x$ where $\mathbf{L}^{-1}$ is given as a series if $\mathbf{L}$ can be given in the form $\mathbf{L}=L+R$ and where

i) L is non-random and possesses an inverse L^{-1}.
ii) the order of L is higher than that of R.

Let us consider briefly the simpler problem where x is a random variable and the operator is also a random variable. Thus consider the equation $ay=x$ where a, x are a pair of numerical valued independent random variables. The solution is the random variable $y=a^{-1}x$.

Because of the assumed independence of a and x, the expectation of y is given by $\langle y\rangle=\langle a^{-1}\rangle\langle x\rangle$. Let us inquire into the calculation of $\langle a^{-1}\rangle$ in the form of a series.

Choose a constant c, $-\infty<c<\infty$. We have

$$a^{-1}=\frac{1}{c+(a-c)}=$$

$$=\frac{1}{c}\,\frac{1}{1+\frac{a-c}{c}}=$$

$$=\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{a-c}{c}\right)^n. \tag{1}$$

This can be a useful result when we have convergence with probability one. Thus \

$$\langle a^{-1}\rangle=\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\langle\left(\frac{a-c}{c}\right)^n\right\rangle$$

and

$$<a^{-1}> \simeq \frac{1}{c} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n < \left(\frac{a-c}{c}\right)^n > \tag{2}$$

so for $N < \infty$, we have an approximate expression for $<a^{-1}>$ in terms of moments of a.

Unfortunately (1) does not converge with probability one for all choices of the constant c. Such a case occurs for example if we have non-zero probabilities for both of the events $a > 0$ and $a < 0$.

When we consider linear *operators* instead of numbers, the situation is quite different and a series expansion of the mean of the inverse of a random operator proves to be fruitful in cases which are significant from the point of view- of physics and other applications. Adomian has dealt with the *stochastic* (linear differential) *operator* $\mathbf{L}$ subject to the decomposition $\mathbf{L} = L + R$ and to conditions (i) and (ii).

Then, formally,

$$\mathbf{L}^{-1} = (L + R)^{-1} = [L(1 + L^{-1} R)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (L^{-1} R)^n L^{-1}. \tag{3}$$

Because of requirement (ii), $L^{-1} R$ is an *integral* operator and under proper boundedness assumptions, the series given by (3) converges with probability one. As an example consider the equation $(L + \alpha) y = x$. We have $Ly = x - \alpha y$ or $y = L^{-1} x - L^{-1} \alpha y$ and finally

$$y = \mathbf{L}^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (L^{-1} \alpha)^n L^{-1} x$$

or

$$y = L^{-1} x - L^{-1} \alpha L^{-1} x + L^{-1} \alpha L^{-1} \alpha L^{-1} x - \cdots. \tag{4}$$

The first term is $L^{-1} x = \int_0^t e(t, \tau) x(\tau) d\tau$. The second term is

$$-L^{-1} \alpha L^{-1} x = -\int_0^t e(t, \tau) \alpha(\tau) \int_0^\tau e(\tau, \sigma) x(\sigma) d\sigma d\tau$$

or

$$-\int_0^t \int_0^\tau e(t, \tau) e(\tau, \gamma) \alpha(\tau) x(\gamma) d\gamma d\tau.$$

The third term is

$$\int_0^t \int_0^\tau \int_0^\gamma e(t, \tau) e(\tau, \gamma) e(\gamma, \sigma) \alpha(\tau) \alpha(\gamma) x(\sigma) d\gamma d\tau d\sigma$$

etc. If the Green's functions, i. e., the e's, are bounded in the interval, if the α is bounded a.s., and x is bounded a.s., they can be taken outside the integrals as bounds with the remaining n-fold integrals yielding an $n!$ in the denominator assuring convergence.

It is clear that assumption (ii) is necessary as shown by the example:

$$\mathrm{L}y = [a\ d/dt]\ y$$

where a is a random variable. An attempt to invert L using the decomposition

$$\mathrm{L}y = c\frac{dy}{dt} + (c-a)\frac{dy}{dt}$$

where c is a constant meets exactly the same difficulties as occurred in the example with numbers.

Actually the situations causing difficulty are contrary to Adomian's assumption that the coefficient of the highest order derivative is deterministic and greater than zero, so it cannot fluctuate through zero to negative values. In other words, these cases are subsumed in the equation $Ry = x$ where $\mathrm{L} \equiv R$ and $L = 0$ which can be solved by adding and subtracting $Ly = x$ to write $Ly + Ry - Ly = x$ or $Ly = x - Ry + Ly$ and finally $y = L^{-1}x - L^{-1}Ry + y$. Requirement (ii) already made this case a pathological case. If L has a deterministic part L whose order is higher than that of R, there are no difficulties and convergence is assured. The series representation is of direct use when we solve $\mathrm{L}y = x$ with L and x statistically independent.

If $\mathrm{L} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t, \omega)\, d^\nu/dt^\nu$ then it is convenient to take

$$L = \sum_{\nu=0}^{n} \langle a_\nu(t, \omega)\rangle\, d^\nu/dt^\nu$$

and

$$R = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu(t, \omega)\, d^\nu/dt^\nu$$

where

$$a_\nu = \langle a_\nu\rangle + \alpha_\nu \quad \text{for } \nu\ 1, 2, \cdots, n-1,\ a_n > 0,\ \alpha_n = 0.$$

II. A question which naturally arises is whether it is necessary or optimal that $L = \langle \mathrm{L}\rangle$. Adomian lets $\mathrm{L} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t, \omega)\, d^\nu/dt^\nu$ and $a_\nu = \langle a_\nu\rangle + \alpha_\nu(t, \omega)$ for $\nu = 0, 1, \cdots, n-1$. Then $L = \sum_{\nu=0}^{n} \langle a_\nu\rangle d^\nu/dt^\nu$ and $R = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu(t, \omega)\, d^\nu/dt^\nu$. He points out that $L = \langle \mathrm{L}\rangle$ is convenient rather than necessary but does not go into it further. Suppose then $L \neq \langle \mathrm{L}\rangle$. Then we write

$$Ly + (\mathrm{L} - L)\, y = x$$

where

$$\mathbf{L} - L = R.$$

Since $L \neq \langle \mathbf{L} \rangle$, $\langle R \rangle$ is no longer zero, an assumption made in Adomian's work. If this mean value $\langle R \rangle$ is not to be incorporated into L, it is necessary to treat it like the Ry term. Thus let $L_2 = \langle R \rangle$. Then

$$y = L^{-1} x - L^{-1} Ry - L^{-1} L_2 y.$$

The same situation arises if it is difficult to get a Green's function for the actual L operator even if $L = \langle \mathbf{L} \rangle$. Then we can split L into $L_1 + L_2$ where L_1 is easily invertible and write

$$y = L_1^{-1} x - L_1^{-1} Ry - L_1^{-1} L_2 y.$$

Both situations make each individual y_i more complicated by adding terms. Thus we get

$$y_0 = L_1^{-1} x$$

$$y_1 = - L_1^{-1} Ry_0 - L_1^{-1} L_2 y_0$$

$$y_2 = - L_1^{-1} Ry_1 - L_1^{-1} L_2 y_1$$

$$y_3 = - L_1^{-1} Ry_2 - L_1^{-1} L_2 y_2$$

$$\vdots$$

Then

$$y_1 = - L_1^{-1} RL^{-1} x - L_1^{-1} L_2 L_1^{-1} x$$

$$y_2 = - L_1^{-1} R [- L_1^{-1} RL_1^{-1} x - L_1^{-1} L_2 L_1^{-1} x] -$$

$$- L_1^{-1} L_2 [- L_1^{-1} RL_1^{-1} x - L_1^{-1} L_2 L_1^{-1} x] =$$

$$= (L_1^{-1} R)(L_1^{-1} R)(L_1^{-1} x) + (L_1^{-1} R)(L_1^{-1} L_2)(L_1^{-1} x) +$$

$$+ (L_1^{-1} L_2)(L_1^{-1} R)(L_1^{-1} x) + (L_1^{-1} L_2)(L_1^{-1} L_2)(L_1^{-1} x).$$

Thus we see the addition of the last three terms to y_2 because of trying to use a simple L_1 or equivalently because of not using $L = \langle \mathbf{L} \rangle$ and it is easy to see what happens with $y_3, y_4, \cdots$.

III. As a final remark, with $y = L^{-1} x - L^{-1} Ry$, we can clearly write $y_{n+1} = L^{-1} x - L^{-1} Ry_n$ as a method of successive approximations. Thus $y_1 = L^{-1} x - L^{-1} R y_0$, $y_2 = L^{-1} x - L^{-1} R y_1$, $y_3 = L^{-1} x - L^{-1} Ry_2$, etc.

Then each y_i is the complete answer to that degree of approximation. For example, the second term of y_3 integrates the result of operating with R on the entire y_2, i. e., three terms. Although the final result is the same, Adomian's procedure (iterative method) is to think of y as a decomposition into $y_0 + y_1 + \cdots$ and identify y_0 as $L^{-1} x$. If we call $\Phi_n = y_0 + y_1 +, \cdots, y_{n-1}$ as the approximation to n terms each y_i is the result of operating on only the preceding term.

IV. The calculus is that of L_p spaces. The integral operator H in $y = Hx$ is an a.s. bounded linear stochastic operator from an abstract set χ into itself, mapping $x(t, \omega)$ to $y(t, \omega)$ such that $Ly(t, \omega) = x(t, \omega)$ a. s. The a. s. boundedness of H follows from the conditions:

(i) $F(t, \omega) = \int_0^t l(t, \tau) x(\tau, \omega) d\tau$ is bounded a. s.

(ii) $\alpha_\nu(t, \omega) = a_\nu(t, \omega) - \langle a_\nu(t, \omega) \rangle$ are bounded a. s. for all ν from 0 to $n-1$.

The $\langle a_\nu \rangle$ are continuous on T; the derivatives of α_ν are bounded a.s. to appropriate orders; and $l(t, \tau)$ and its k-th derivatives for $0 \leqslant k \leqslant n-1$ are jointly continuous in t, τ over TxT. The set χ consists of all real stochastic processes on T. If $\chi_1 \subset \chi$ consists of all real stochastic processes $x(t, \omega)$ with $\omega \varepsilon \Omega$ in the probability space (Ω, B, μ), it follows that $H: \chi_1 \to \chi_1$ with $Hx(t, \omega) = y(t, \omega)$ a.s.

The expectation $\langle x(t, \omega) \rangle$ of $x(t, \omega)$ on χ_1 is given as the almost sure Lebesgue integral over Ω for each $t \varepsilon T$ if the integral exists, i. e.,

$$\langle x_t(\omega) \rangle = \int_\Omega x_t(\omega) \, d\mu(\omega)$$

and we denote by $L_1(\chi_1)$ the set of all equivalence classes of real valued random variables x_t whose expectation $\langle x_t(\omega) \rangle$ exists. Hence $x_t(\omega) \varepsilon L_1(\chi_1)$ if $\langle x_t(\omega) \rangle < \infty$ a.s.

The expectations of x_t^k and $|x_t|^k$ for all k are called the k-th moment and the k-th absolute moment of the r. v. $x_t(\omega)$ for each $t \varepsilon T$. Then $L_p(\chi_1)$ for $1 < p \leqslant \infty$ denotes equivalence classes of real valued r. v. $x_t(\omega) \varepsilon \chi_1$ such that $\langle |x_t|^p \rangle < \infty$ a.s. for $t \varepsilon T$. The set of random variables $x(t_1, \omega)$, $x(t_2, \omega), \cdots$ of the process $x(t, \omega)$ generate a linear vector space $V_{x(t, \omega)}$ on R and the correlation function $R_x(t_1, t_2)$ defines an inner product over the space $V_{x(t, \omega)}$ given by

$$R_x(t_1, t_2) = \langle x(t_1, \omega) \, x(t_2, \omega) \rangle$$
$$= (x(t_1, \omega), x(t_2, \omega))$$

and the norm $\|x(t, \omega)\| = (x(t_2, \omega), x(t_2, \omega))^{1/2}$. The metric $\rho(x(t_1, \omega), x(t_2, \omega)) = \|x(t_1, \omega) - x(t_2, \omega)\|$ and we have a Hilbert space $L_2(\Omega, R)$

Institute of Mathematics Academy
of Sciences Armenian SSR,

Center for Applied Mathematics,
University of Georgia,
Athens, Georgia, USA

Recieved 21.XI.1980

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Ջ. ԱԴՈՄՅԱՆ. Մի քանի դիտողություն՝ ստոխաստիկ ձևափոխությունների վերաբերյալ (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկվում են ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարումների Ջ. Ադոմյանի տեսության որոշ հարցեր, այդ թվում՝ օպերատորների շարքերի զուգամիտության և օպերատորները ստոխաստիկ դետերմինիստիկ մասերի վերլուծելու խնդիրները։

Р. В. АМБАРЦУМЯН, Дж. АДОМЯН. *Несколько замечаний о стохастических преобразованиях* (резюме)

В работе обсуждаются некоторые вопросы, относящиеся к подходу первого из авторов к стохастическим дифференциальным уравнениям, в т. ч. сходимость рядов операторов и выбор разложения оператора на детерминистическую и случайную части.

REFERENCES

1. *G. Adomian*. Random Operator Equations in Mathematical Physics. J. Math. Phys. Vol. 11, № 3, March, 1970, 1069—1084.
2. *G. Adomian*. ed. Stochastic Systems Analysis, Abblied Stochastic Processes, Acad. Press, 1980, 1—18.
3. *G. Adomian*. A Constructive Method for Linear and Nonlinear Stochastic Partial. Differential Equations. Applied Nonlinear Analysis, Academic Press, 1980, 13—23.
4. *G. Adomian*. On tbe Modeling and Analysis, of Nonlinear Stochastic Systems, Proceedings of the Second International Conference on Mathematical Modeling, St. Louis, Missouri, July 11—13, 1979. (To appear late 1980 as a book).
5. *G. Adomian* and *K. Malakian*. Operator Theoretic Solution of Stochastic Systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 76, no. 1. July 1980, 183—201.
6. *G. Adomian* and *K. Malakian*. Self-Correcting Appoximate Solutions by the Iterative Method for Nonlinear Stochastic Differential Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 76, no. 2, August 1980, 309—327.
7. *G. Adomian* and *K. Malakian*. Recent Results in Stochastic Equations—The Nonlinear Case. Nonlinear Equations in Abstract Spaces, ed. by V. Lakshmikantham, Academic Press, 1978, 3—23.
8. *G. Adomian* and *K. Malakian*. On the Existence of Solutions for Linear and Nonlinear Stochastic Operator Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 62, no. 2, February 1978, 229—235.
9. *G. Adomian* and *K. Malakian*. Linear Stochastic Partial Differential Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 77, no. 2. October 1980, 505—512.
10. *G. Adomian* and *K. Malakian*. Stochastic Analysis, International Journal of Mathematical Modeling, to appear January 1981.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 1, 1981 Математика

Р. Аб. АВЕТИСЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПРОСТЫХ ДРОБЕЙ В ЗАМКНУТОМ КРУГЕ

1°. Вопрос о разложении аналитических функций в ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z}$$

с определенными ограничениями на последовательность полюсов ζ_k и коэффициентов A_k изучался в ряде работ. Вольф в 1920 году ([1], см. также [2], стр. 35) доказал следующую теорему.

Теорема. *Пусть G — ограниченная жорданова область, и пусть f аналитична в замкнутой области $\overline{G}$. Тогда f может быть разложена в G в ряд вида*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z}, \ \zeta_k \overline{\in} \overline{G}, \tag{1}$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty.$$

Очевидно, что условие $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty$ обеспечивает равномерную сходимость ряда (1) на компактах области G.

Данжуа [3] усилил этот результат, показав, что в условиях теоремы Вольфа ряд (1) можно построить так, чтобы он равномерно сходился в G, а коэффициенты A_k удовлетворяли неравенствам

$$|A_k| < C \exp(-K^{1/2-\varepsilon_k}), \ \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0.$$

С другой стороны, А. А. Гончар [4] показал, что коэффициенты A_k нельзя выбрать таким образом, чтобы они удовлетворяли неравенствам

$$|A_k| < C \exp(-k^{1-\varepsilon_k}), \ \varepsilon_k = O\left(\frac{1}{\ln k}\right).$$

В определенном смысле окончательный результат был получен Т. А. Леонтьевой [5]. Она показала, что коэффициенты A_k в теореме Вольфа—Данжуа можно выбрать так, чтобы

$$|A_k| < C\exp(-k^{1-\varepsilon_k}),\quad \varepsilon_k = O\left(\frac{\ln\ln k}{\ln k}\right).$$

Вопрос о разложении в ряды вида (1) более широких классов аналитических функций был впервые изучен в работе Т. А. Леонтьевой [6]. В ней показано, что аналитическая внутри единичного круга $D=\{z,\ |z|<1\}$ функция $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ представима в D в виде ряда (1), если $a_k=O(k^{-p})$, $p>1$ и ряд (1) сходится равномерно в $\overline{D}$, если $a_k=O(k^{-p})$, $p>2$. Для коэффициентов A_k показано, что при $p>1$ они удовлетворяют неравенствам

$$|A_k| < \frac{c}{K^{p-1-\varepsilon}},$$

где ε — произвольное положительное число.

Задача о разложении функции f в виде ряда (1) в зависимости от ее гладкости была исследована в работе автора [7].

В настоящей статье рассматривается вопрос о разложении в виде (1) функций, аналитических в D и непрерывных в $\overline{D}$. Показывается, что разложение f в виде ряда (1) и оценка коэффициентов A_k зависят от модуля непрерывности f на ∂D. Это позволяет выделить новые классы функций, представимые в $\overline{D}$ в виде (1). Для доказательства основных результатов введем сначала соответствующие обозначения.

Пусть $D_k=\{z,\ |z|<R\}$. Обозначим через $A(\overline{D}_k)$ множество функций, аналитических в D_k и непрерывных в $\overline{D}_k$. В дальнейшем, в случае $R=1$, $A(D_1)$ будем обозначать через A, а D_1 через D.

Пусть $f\in A$, через $\omega(f,\delta)$ обозначим модуль непрерывности f на ∂D, т. е.

$$\omega(f,\delta)=\sup_{|\theta_1-\theta_2|<\delta}|f(e^{i\theta_1})-f(e^{i\theta_2})|.$$

Нам также понадобятся частные случаи теоремы Джексона ([8], стр. 231), неравенства Бернштейна ([2], стр. 101).

Теорема Джексона. Пусть $f\in A$. Если $P_n(z)$ — полиномы наилучшего приближения функции f степени n, то при $z\in\overline{D}$

$$|f(z)-P_n(z)| < \omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right). \tag{2}$$

Неравенство Бернштейна. Пусть имеем полином $P_n(z)$ степени n. Тогда при $z\in\overline{D}_k$, $R>1$ имеет место неравенство

$$|P_n(z)| \leqslant \max_{\zeta\in\overline{D}}|P_n(\zeta)|\cdot R^n. \tag{3}$$

2°. В данной работе доказана следующая основная

Теорема 1. *Пусть* $f \in A$. *Если* $\lim_{\delta \to 0} \omega(f, \delta) \cdot \log \frac{1}{\delta} = 0$, *то* f *разлагается в* $\bar{D}$ *в ряд вида* (1) *и при* $z \in \bar{D}$ *имеют место неравенства*

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\zeta_k - z} \right| < c_1(f)\, \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \log n,$$

а коэффициенты A_k *имеют оценку*

$$|A_k| < c_2(f) \frac{\omega(f, k^{-1})}{k},$$

где постоянные $c_1(f)$ *и* $c_2(f)$ *зависят только от* f.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится

Лемма 1. *Пусть* $f \in A(\bar{D}_R)$, $R > 1$. *При* $z \in D_R$ *обозначим*

$$\Phi_n(f, R, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \frac{\int\limits_{\gamma_k} f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta_k - z},$$

где n — *целое и* $n > 8\pi R\,((R-1)^{-1}$, $\zeta_k = R\, e^{\frac{2\pi i k}{n}}$

$$\gamma_k = \left\{\zeta,\ |\zeta| = R,\ \frac{2\pi(k-1)}{n} \leqslant \arg \zeta < \frac{2\pi k}{n}\right\},\quad k = 1, 2 \cdots n.$$

Тогда при $z \in \bar{D}_{1+(R-1)/2}$ *имеет место неравенство*

$$|f(z) - \Phi_n(f, R, z)| < \max_{\zeta \in \bar{D}} |f(\zeta)| \cdot \frac{8\pi R}{n(R-1)}.$$

Доказательство. Функция f в D_k представляется по формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

При $z \in \bar{D}_{1+(R-1)/2}$ и $\zeta \in \gamma_k$ имеет место оценка

$$|\zeta_k - z| > |\zeta - z| - |\zeta_k - z| > |\zeta - z| - \frac{R-1}{4} > \frac{|\zeta - z|}{2}.$$

Учитывая это неравенство и формулу Коши при $z \in \bar{D}_{1+(R-1)/2}$ получаем

$$|f(z) - \Phi_n(f, R, z)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)(\zeta - \zeta_k)}{(\zeta_k - z)(\zeta - z)}\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi R}{n} \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta_k - z|\,|\zeta - z|}\, |d\zeta| < \frac{2\pi R}{n} \max_{\zeta \in \bar{D}} |f(\zeta)| \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{|d\zeta|}{|\zeta_k - z|\,|\zeta - z|} < \frac{4\pi R^2}{n} \max_{\zeta \in \bar{D}_R} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|R e^{i\varphi} - z|^2} <$$

$$< \frac{8\pi R}{n(R-1)} \cdot \max_{\zeta \in \bar{D}_R} |f(\zeta)|.$$

Лемма 1 доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Для краткости будем обозначать $\omega(f, \delta)$ через $\omega(\delta)$. Предположим сначала, что $\max\limits_{\zeta \in \bar{D}} |f(\zeta)| \leqslant \omega\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Пусть $P_n(z)$— полиномы наилучшего приближения функции f степени n. Тогда из (2) и (3) имеем

$$|f(z) - P_2(z)| < \omega\left(\frac{\pi}{2}\right), \; z \in \bar{D}, \tag{4}$$

$$|P_2(z) - P_4(z)| < 6\,\omega\left(\frac{\pi}{2}\right), \; z \in \bar{D}_{1+\frac{1}{4}}, \tag{5}$$

$$|P_2(z)| < 6\,\omega\left(\frac{\pi}{2}\right), \; z \in \bar{D}_{1+\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Положим $R_n = 1 + 2^{-n}$, $n = 1, 2 \cdots$. Из неравенств (6) и (4) и леммы 1, примененной к $P_2(z)$ и кругу D_{R_1} при $z \in \bar{D}_{R_1}$ получаем

$$|f(z) - \Phi_{2^{10}}(P_2, R_1, z)| < 2\omega\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

а учитывая (5) при $z \in \bar{D}_{R_1}$

$$|P_4(z) - \Phi_{2^{10}}(P_1, R_1, z)| < 7\omega\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

Обозначим $f_1(z) = P_2(z)$, а при $z \in \bar{D}_{R_1}$

$$f_2(z) = P_4(z) - \Phi_{2^{10}}(f_1, R_1, z).$$

Учитывая неравенство (7), применим лемму 1 к функции $f_2(z)$ и кругу D_{R_2}, тогда при $z \in \bar{D}_{R_2}$ получим

$$|f_2(z) - \Phi_{2^{20}}(f_2, R_2, z)| < \frac{\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} \leqslant \omega\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Из (2) и (3) будем иметь

$$|f(z) - \Phi_{2^{10}}(f_1, R_1, z) - \Phi_{2^{20}}(f_2, R_2, z)| < 2\omega\left(\frac{\pi}{4}\right), \; z \in \bar{D}, \tag{8}$$

$$|P_8(z) - \Phi_{2^{10}}(f_1, R_1, z) - \Phi_{2^{20}}(f_2, R_2, z)| < 7\,\omega\left(\frac{\pi}{4}\right), \; z \in \bar{D}_{R_2}. \tag{9}$$

Предположим теперь, что неравенства (8) и (9) верны при $n \geqslant 2$, т. е., что

$$|f(z)-\sum_{k=1}^{n} \Phi_{2^{k+11}}(f_k, R_k, z)| < 2\omega\left(\frac{\pi}{2^n}\right), \ z \in \bar{D}, \tag{10}$$

$$|P_{2^{n+1}}(z)-\sum_{k=1}^{n} \Phi_{2^{k+11}}(f_k, R_k, z)| < 7\omega\left(\frac{\pi}{2^n}\right), \ z \in \bar{D}_{R_{n+1}}. \tag{11}$$

Покажем, что они верны и при $n+1$. Обозначим при $z \in \bar{D}_{R_{k+1}}$

$$f_{n+1}(z) = P_{2^{n+1}}(z) - \sum_{k=1}^{n} \Phi_{2^{k+11}}(f_k, R_k, z).$$

Тогда учитывая (11) и (3) и применяя лемму 1 к функции $f_{n+1}(z)$ и кругу $D_{R_{n+1}}$, при $z \in \bar{D}_{R_{n+2}}$ будем иметь

$$|f_{n+1}(z) - \Phi_{2^{(n+1)+11}}(f_{n+1}, R_{n+1}, z)| < \frac{\omega\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2} \leqslant \omega\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right),$$

$$\left|P_{2^{n+1}}(z) - \sum_{k=1}^{n+1} \Phi_{2^{k+11}}(f_k, R_k, z)\right| < 7\omega\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Учитывая (2), отсюда получаем

$$\left|f(z) - \sum_{k=1}^{n+1} \Phi_{2^{k+11}}(f_k, R_k, z)\right| < 2\omega\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Таким образом, утверждения (10) и (11) верны и для $n+1$. Отсюда для f получаем представление в $\bar{D}$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2^{n+11}}(f_n, R_n, z),$$

где по определению

$$\Phi_{2^{n+11}}(f_n, R_n, z) = \sum_{k=1}^{2^{n+11}} \frac{1}{2\pi i} \frac{\int\limits_{\gamma_k^n} f_n(\zeta)\, d\zeta}{\zeta_k^n - z}, \ z \in \bar{D},$$

$$\zeta_k^n = R_n e^{\frac{2\pi i k}{2^{n+11}}}, \ \gamma_k^n = \left\{\zeta.\ |\zeta| = R_n, \ \frac{2\pi(k-1)}{2^{n+11}} \leqslant \arg\zeta < \frac{2\pi k}{2^{n+11}}\right\},$$

$k = 1, 2, \cdots, 2^{n+11}$. Возьмем $m \geqslant 1$. Для него найдется такое $n \geqslant 1$, что $2^{n+11} - 2^{12} < m \leqslant 2^{n+12} - 2^{12}$.

Положим для этих m и n

$$A_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^n_{m-2^{n+11}+2^{12}}} f_n(\zeta)\, d\zeta, \quad \zeta_m = \zeta^m_{m-2^{n+11}+2^{12}} .$$

Тогда для функции f получим формально представление в $\overline{D}$ в виде ряда (1). Проверим теперь, что оно удовлетворяет утверждениям теоремы 1. Оценим сначала коэффициенты A_m. В силу (11)

$$|A_m| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma^n_{m-2^{n+11}+2^{12}}} |f_n(\zeta)|\, |d\zeta| < 7 \frac{\omega\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^{n+11}} .$$

Учитывая, что $2^{n+11} - 2^{12} < m \leqslant 2^{n+12} - 2^{12}$, получаем требуемые неравенства.

При $z \in \overline{D}$ через $S_m(z)$ обозначим m-ю частную сумму формального ряда (1) функции f. Тогда

$$S_m(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{2^{k+11}}(f_k, R_k, z) + \sum_{k=1}^{m-2^{n+11}+2^{12}} \frac{1}{2\pi i} \frac{\int\limits_{\gamma^n_k} f_n(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^n_k - z} ,$$

где n такое, что $2^{n+11} - 2^{12} < m \leqslant 2^{n+12} - 2^{12}$. Следовательно, при $z \in \overline{D}$ будем иметь

$$|f(z) - S_m(z)| = \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{2^{k+11}}(f_k, R_k, z) - \sum_{k=1}^{m-2^{n+11}+2^{12}} \frac{1}{2\pi i} \frac{\int\limits_{\gamma^n_k} f_n(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^n_k - z} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 7\omega\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) + \sum_{k=1}^{m-2^{n+11}+2^{12}} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma^n_k} \frac{|f_n(\zeta)|}{|\zeta^n_k - z|}\, |d\zeta| .$$

Учитывая (11), оценим теперь последнюю сумму при

$$\sum_{k=1}^{m-2^{n+11}+2^{12}} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma^n_k} \frac{|f_n(\zeta)|}{|\zeta^n_k - z|}\, |d\zeta| \leqslant 2 \sum_{k=1}^{2^{n+11}} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma^n_k} \frac{|f_n(\zeta)|}{|\zeta - z|}\, |d\zeta| < 38\omega\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \cdot n .$$

В силу выбора m и n, отсюда получаем первое утверждение теоремы 1. В случае, когда $M = \max\limits_{\zeta \in \overline{D}} |f(\zeta)| > \omega\left(\frac{\pi}{2}\right)$ достаточно рассмотреть функцию $g(z) = \dfrac{\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2M} \cdot f(z)$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 получаем

С л е д с т в и е 1. Пусть $f \in A$. Тогда существуют

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^n}{\zeta_k - z},$$

где $\zeta_k \bar{\in} \bar{D}$, $|A_k^n| \leqslant c_2(f) \cdot \omega(f, k^{-1})/k$ такие, что при $z \in \bar{D}$

$$|f(z) - r_n(z)| \leqslant c_1(f) \cdot \omega(f, k^{-1}).$$

Обозначим через $\mathrm{Lip}_A(\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ класс фуякций из A таких, что $\omega(f, \delta) \leqslant c_3(f)\,\delta^\alpha$. Пусть $R_k = 1 + 2^{-k}$, $k = 1, 2, \cdots$. Возьмем $m > 2$, для него найдется такое $k \geqslant 2$, что $2^{k-1} \leqslant m < 2^k$. Для этих m и k положим $\zeta_m = R_k\, e^{\frac{2\pi i(m-2^{k-1})}{2^{k-1}}}$, $\zeta_1 = R_1$. Обозначим через

$$r_n(z) = \sum_{m=1}^{n} \frac{A_m^n}{\zeta_m - z} \tag{12}$$

рациональную функцию с полюсами в этих точках ζ_m. Тогда имеет место

Теорема 2. *Пусть $f \in A$. Для того чтобы $f \in \mathrm{Lip}_A(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ необходимо и достаточно, чтобы существовали $r_n(z)$ вида (12) такие, что*

$$|f(z) - r_n(z)| < \frac{c_4(f)}{n^\alpha}.$$

и коэффициенты A_m^n функции $r_n(z)$ удовлетворяли неравенствам $|A_m^n| \leqslant c_5(f)\, m^{-(1+\alpha)}$ (где $c_4(f)$ и $c_5(f)$ — постоянные, зовисящие только от f).

Доказательство. Необходимость доказана в следствии 1. Докажем достаточность. Оценим вначале производную рациональных функций типа (12), учитывая неравенства для их коэффициентов A_m^n. Возьмем $k > 2$ такое, что $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$. Тогда при $z \in \bar{D}$

$$|r_n'(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{n} \frac{|A_m^n|}{|\zeta - z|^2} \leqslant \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{|A_l^m|}{|\zeta_l - z|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{k} \frac{c_4(f)}{2^{(m-1)(1+\alpha)}} \sum_{l=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{1}{|\zeta_l - z|^2} \leqslant \sum_{m=1}^{k} \frac{8\,c_4(f)}{2^{m\alpha}} \sum_{l=2^{m-1}}^{2^m-1} \int_{\gamma_l^m} \frac{1}{|\zeta - z|^2}\,|d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant 16\, c_4(f) \cdot \sum_{m=1}^{k} \frac{2^m}{2^{m\alpha}} < 32\, c_4(f) \cdot n^{1-\alpha}.$$

Дальнейшие рассуждения как и при доказательстве теоремы Бернштейна (см. [9], стр. 195). Теорема 2 доказана.

Из теоремы 1 следует, что если $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(f, k^{-1})/k < +\infty$, то коэффициенты A_k разложения f в виде (1) удовлетворяют условию

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|A_k|<+\infty$. Однако, при выполнении условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega(f, k^{-1})/k<$ $<+\infty$ можно доказать точное утверждение. Докажем вначале методом Вольфа одну лемму.

Лемма 2. *Пусть* $f\in A\bar{D}_R)$, $1<R<\frac{3}{2}$. *Тогда* f *в* $\bar{D}$ *можно представить в виде* (1), *причем так, чтобы имело место неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A_k|}{|\zeta_k-z|}<c_6\max_{\zeta\in\bar{D}_R}|f(\zeta)|\log\frac{1}{R-1},\quad z\in\bar{D} \tag{13}$$

и ряд (13) *сходился равномерно в* $\bar{D}$ (*постоянная* c_6 *не зависит от* f *и* k).

Доказательство. Обозначим $\max\limits_{\zeta\in\bar{D}_R}|f(\zeta)|=M$. Возьмем $n_0=$ $=[2^5\,8\pi R\,(R-1)^{-3}]+1$. Тогда по лемме 1 при $|z|\leqslant 1+(R-1)/2$ будем иметь

$$|f(z)-\Phi_{n_0}(f,\ R,\ z)|<\frac{M\,(R-1)^2}{2^2}.$$

Обозначим $f_0(z)=f(z)$, $R_0=R$, $R_m=1+(R-1)\,2^{-m}$, $m=1, 2\cdots$,

$$f_1(z)=f(z)-\Phi_{n_0}(f_0,\ R_0,\ z).$$

Тогда вновь применяя лемму 1 к функции $f_1(z)$ и кругу D_{R_1}, беря $n_1=[2^6\,\pi R\,(R-1)^{-3}]+1$ при $z\in\bar{D}_{R_2}$ будем иметь

$$|f_1(z)-\Phi_{n_1}(f_1,\ R_1,\ z)|<\frac{M\,(R-1)^2}{2^4}.$$

Продолжая, на m-ом шагу возьмем число $n_m=[2^{3(m+1)}\,\pi R\,(R-1)^{-3}]+1$. Тогда по лемме 1 при $z\in\bar{D}_{R_{m+1}}$ будем иметь

$$|f_m(z)-\Phi_{n_m}(f_m,R_m,z)|<\frac{M}{n_m}\,\frac{8\pi\,(1+(R-1)\,2^{-m})}{((1+(R-1)\,2^{-m}-1)}<\frac{M\,(R-1)^2}{2^{2m}}.$$

Следовательно, для $f(z)$ получаем представление

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\Phi_{n_m}(f_m,\ R_m,\ z),\quad z\in\bar{D},$$

где

$$\Phi_{n_m}(f_m,\ R_m,\ z)=\sum_{k=1}^{n_m}\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\int\limits_{\gamma_k^m}f_m(\zeta)\,d\zeta}{\zeta_k^m-z},$$

точки ζ_k^m и дуги γ_k^m определяются по лемме 1. Проверим теперь утверждения леммы 2. Имеем при $z\in\bar{D}$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n_m}\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_k^m}\frac{|f_m(\zeta)|}{|\zeta_k^m-z|}\,|d\zeta|\leqslant\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_k}\frac{|f_0(\zeta)|}{|\zeta_k^0-z|}\,|d\zeta|+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n_m}\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_k^m}\frac{|f_m(\zeta)|}{|\zeta_k^m|-1}\,|d\zeta|\leqslant 2M\log\frac{1}{R-1}+M\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R-1}{2^m}<$$

$$<3M\log\frac{1}{R-1}\cdot$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $f\in A$. *Если* $\sum_{k=1}^{\infty}\omega(f,\,k^{-1})/k<+\infty$, *то* f *в* $\overline{D}$ *разлагается в ряд вида* (1), *причем ряд* (1) *сходится абсолютно равномерно в* $\overline{D}$.

Доказательство. Заметим сперва, что из $\sum_{k=1}^{\infty}\omega(f,k^{-1})/k<+\infty$ следует, что $\sum_{k=1}^{\infty}2^k\omega(f,\,2^{-2^k})<+\infty$. Пусть $P_n(z)$— полиномы наилучшего приближения функции f степени n. Обозначим

$$Q_n(z)=P_{2^{2^{n+1}}}(z)-P_{2^{2^n}}(z).$$

Из (2) и (3) следует, что при $|z|\leqslant 1+2^{-2^n}$

$$|Q_n(z)|<6\,\omega(f,\,2^{-2^n}).$$

Очевидно, что

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(z)+P_2(z).$$

По лемме 2, примененной к $Q_n(z)$ и кругу $|z|<1+2^{-2^{n+1}}$ при $z\in\overline{D}$ будем иметь

$$Q_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k^n}{\zeta_k^n-z},$$

а оценка (13) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A_k^n|}{|\zeta_k^n-z|}<6\cdot c_6\cdot 2^{n+1}\,\omega(f,\,2^{-2^n}).$$

Следовательно, теорема 3 доказана.

Замечание. Условие теоремы $\sum_{k=1}^{\infty}\omega(f,k^{-1})/k<+\infty$, можно записать в интегральном виде $\int_0^1\frac{\omega(f,\,t)}{t}\,dt<+\infty$. Из теоремы 3 получаем

Следствие 2. Пусть $f \in A$. Если $\omega(f, \delta) = O\left(\log^{-(1+\varepsilon)}\frac{1}{\delta}\right)$, где ε — произвольное положительное число, то f в $\overline{D}$ разлагается в ряд вида (1) и ряд (1) сходится абсолютно равномерно в $\overline{D}$.

Покажем теперь, в некотором смысле, точность теоремы 3 и следствия 2.

Утверждение 1. *Существует $f \in A$ такая, что $\omega(f, \delta) = O\left(\log^{-1}\frac{1}{\delta}\right)$, но которую нельзя в $\overline{D}$ представить в виде ряда (1) так, чтобы он абсолютно сходился всюду в $\overline{D}$.*

Доказательство. Пусть f в D представляется в виде ряда (1) и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty$. Если через $f^{(n)}(z)$ обозначить n-ю производную $f(z)$, то

$$f^{(n)}(z) = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(\zeta_k - z)^{n+1}}, \quad z \in D.$$

Следовательно, если при $z \in D$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, то $a_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k^{n+1}}$.

Предположим теперь, что ряд (1), представляющий f в D сходится в некоторой точке $z_0 \in \partial D$. Покажем, что отсюда будет следовать сходимость ряда Тейлора функции f в этой точке. Действительно, пусть в некоторой точке $z_0 \in \partial D$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{|\zeta_k - z_0|} < +\infty. \tag{14}$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty$, то в точке z_0

$$\sum_{n=0}^{m} a_n z_0^n = \sum_{n=0}^{m} z_0^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sum_{n=0}^{m} \frac{z_0^n}{\zeta_k^{n+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z_0} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k z_0^{m+1}}{\zeta_k^{m+1}(\zeta_k - z_0)}.$$

Следовательно, в точке z_0

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z_0} - \sum_{n=0}^{m} a_k z_0^n \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{|\zeta_k^{m+1}| \, |\zeta_k - z_0|}.$$

Покажем, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при $m \to \infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу (14) и того, что $|\zeta_k| > 1$, найдется такое N, что

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{|A_k|}{|\zeta_k|^{m+1} |\zeta_k - z_0|} < \sum_{k=N}^{\infty} \frac{|A_k|}{|\zeta_k - z_0|} < \varepsilon.$$

Так как $|\zeta_k| > 1$, $k=1, 2, \cdots N-1$, то если взять m достаточно большим, получим

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{|A_k|}{|\zeta_k|^{m+1} |\zeta_k - z_0|} < \varepsilon.$$

Следовательно, если мы предположим, что ряд (1) сходится абсолютно всюду в $\overline{D}$, то отсюда будет следовать сходимость на ∂D ряда Тейлора функции f. Поскольку для любой точки $z_0 \in \partial D$ существует (см. 9, стр. 477) $f \in A$, такая, что $\omega(f, \delta) = O\left(\log^{-1}\frac{1}{\delta}\right)$ и ряд Тейлора который расходится в этой точке, откуда и следует утверждение 1.

Теорема 1 дает условие на f, чтобы она представлялась в $\overline{D}$ в виде ряда (1). Однако частные суммы этого ряда не дают наилучшей аппроксимации рациональными функциями этой функции f. Для того, чтобы этого добиться можно перейти к представлению по ядру несколько иного вида, и аналогично теореме 1 может быть доказана следующая

Теорема 4. *Пусть $f \in A$, тогда f в $\overline{D}$ представляется в виде*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(\zeta_k - z)^2}, \quad \zeta_k \overline{\in} \overline{D}$$

и имеют место следующие неравенства:

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(\zeta_k - z)^2} \right| < c_7(f)\, \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \ z \in \overline{D}$$

и $|A_k| \leqslant c_8(f) \cdot \omega(f, k^{-1})/k^2$ *(постоянные $c_7(f)$, $c_8(f)$ зависят только от f).*

В статье автора [7] исследовалась задача о представлении f в $\overline{D}$ в виде (1), так чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| (|\zeta_k| - 1)^{-1} < +\infty$. Можно несколько усилить теорему 1 в [7]. Введем соответствующие обозначения. Через H^1 обозначим класс Харди в круге D, т. е. множество аналитических функций в D таких, что $\sup\limits_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\, dt < +\infty$. Если $f \in H^1$, то через $\omega_1(f, \delta)$ будем обозначать интегральный модуль непрерывности f, т. е.

$$\omega_1(f, \delta) = \sup_{|\theta| < \delta} \int_0^{2\pi} |f(e^{i(t+\theta)}) - f(e^{it})|\, dt.$$

Тогда аналогично теореме 3 можно доказать, используя соответствующую теорему Джексона, следующее

Утверждение 2. *Пусть* $f^{(1)}\in H^1$. *Если* $\int\limits_0^1 \frac{\omega_1(f^{(1)}, t)}{t}\,dt<+\infty$ *то* f *представляется в* $\bar{D}$ *в виде* (1) *так, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|\,(|\zeta_k|-1)^{-1}<+\infty.$$

В случае функций f, производная которых имеет более гладкий интегральный модуль непрерывности, аналогично теореме 1 можно доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть* $f^{(1)}\in H^1$ *и* $\omega_1(f^{(1)}, \delta)\leqslant c_{10}(f)\cdot\delta^{\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$ *Тогда* f *в* D *представляется в виде* (1) *так, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|\cdot(|\zeta_k|-1]^{-(1+\alpha)}\cdot\log^{-(1+\varepsilon)}(|\zeta_k|-1)^{-1}<+\infty$$

и коэффициенты A_k *имеют оценку* $|A_k|\leqslant c_{11}(f)\cdot k^{-(2+\alpha-\varepsilon)}$, *где* ε — *произвольное положительное число, а постоянные* $c_{10}(f)$, $c_{11}(f)$ *зависят только от* f).

Легко доказать также в некотором смысле обратное утверждение.

Утверждение 3. *Пусть* f *в* D *представляется в виде* (1) *так, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|\,(|\zeta_k|-1)^{-(1+\alpha)}<+\infty,\ 0<\alpha\leqslant 1.$$

Тогда $\omega_1(f^{(1)}, \delta)\leqslant c_{12}(f)\cdot\delta^{\alpha}$.

В заключение автор благодарит Н. У. Аракеляна, под руководством которого была выполнена эта работа.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.XII.1979

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Անալիտիկ ֆունկցիաները փակ շրջանում պարզ կոտորակների շարքերով ներկայացնելու մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում է, որ անալիտիկ ֆունկցիայի անընդհատության մոդուլի վրա որոշ պայմանների դեպքում, այդ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել փակ շրջանում պարզ կոտորակների շարքի տեսքով։

R. A. AVETISIAN. *On representation of analytical in a closed circle functions as a series of simple fractions* (summary)

The paper proves that under certain conditions imposes upon the continuity modulus, an analytic in a closed circle functions can be represented in the form of a series of simple fractions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wolff*. Sur les series $\sum_{1}^{\infty} A_k/(z-\alpha_k)$ C. r. Acad. sci, 173, 1921, 1327—1328.
2. *Дж. Л. Уолш*. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., 1961.
3. *A. Denjoy*. Sur les series de fractions rationaless, Bull soc. math. France, 52, 1924, 418—434.
4. *А. А. Гончар*. О квазианалитическом продолжении аналитических функций через жорданову дугу, ДАН СССР, 166, № 5, 1966, 1028—1031.
5. *Т. А. Леонтьева*. Представление функций, аналитических в замкнутой области, рядами рациональных функций, Матем. заметки, 4, № 2, 1968, 191—200.
6. *Т. А. Леонтьева*. О представлении функций в единичном круге рядами простых дробей, Матем. сб. 84 (126), № 2, 1971, 313—326.
7. *Р. Аб. Аветисян*. О представлении функций рядами простых дробей, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XIII, № 1, 1978.
8. *Н. П. Корнейчук*. Экстремальные задачи теории приближения. Изд. «Наука», М., 1976.
9. *А. Зигмунд*. Тригонометрические ряды, т. I, Изд. «Мир», М., 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 1, 1981 Математика

А. В. БАХШЕЦЯН, В. Г. КРОТОВ

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РЯДАХ ПО СИСТЕМАМ ШАУДЕРА

Система функций Фабера—Шаудера (определение см., например, [1] или ниже) обладает рядом интересных свойств с точки зрения теории представления измеримых функций рядами. Так всякая непрерывная на [0,1] функция представима (и притом единственным образом) равномерно сходящимся рядом по этой системе (Фабер [2], Шаудер [3]), всякая измеримая (не обязательно почти всюду конечная) функция представима почти всюду сходящимся рядом по системе Фабера—Шаудера (А. А. Талалян [4] и позже Гоффман [5]). С этой точки зрения система Фабера—Шаудера рассматривалась многими авторами (см. еще [6—10]). П. Л. Ульянов нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы система Фабера—Шаудера была системой представления классов $\varphi(L)$ [1, 8]. В работе [9] установлены критерии для различных типов универсальности рядов по системе Фабера—Шаудера и на основании этих критериев доказано существование таких рядов, обладающих различными свойствами универсальности и указана оптимальная скорость убывания коэффициентов таких рядов, причем рассматривается как сходимость почти всюду, так и сходимость в классах $\varphi(L)$ (основные результаты работы [9] анонсированы еще в 1974 году [11].

Система Фабера—Шаудера (рассмотренная впервые Фабером [2]) входит в класс систем, построенных Шаудером [3], которые определяются следующим образом.

Определение 1. Пусть $T=\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность попарно различных точек отрезка [0,1], причем $t_0=0$, $t_1=1$. Положим $\Phi_0^T(t)\equiv 1$, $\Phi_1^T(t)=t$. При $n\geqslant 2$ функция Φ_n^T определена так: если t_k и t_m — ближайшие к t_n точки множества T с $k<n$ и $m<n$, $t_k<t_n<t_m$, то

$$\Phi_n^T(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } t=t_n \\ 0 & \text{при } t\in[0,t_k]\cup[t_m,1] \\ \text{линейна на отрезках } [t_k,t_n] \text{ и } [t_n,t_m], \end{cases}$$

причем Φ_n^T непрерывна на [0,1].

Системы $\{\Phi_n^T\}$ будем называть системами Шаудера. В частном случае, когда

$$t_0=1,\ t_1=1,\ t_n=\frac{2j-1}{2^{k+1}}\ (n=2^k+j,\ k\geqslant 0;\ 1\leqslant j\leqslant 2^k)$$

мы получаем систему Фабера—Шаудера.

В связи с результатами работы [11] П. Л. Ульянов заметил, что было бы небезынтересным перенести эти результаты на произвольные системы Шаудера (насколько это возможно). Целью настоящей работы и является решение этого вопроса П. Л. Ульянова.

Центральную роль при получении результатов работы [9] играют следующие утверждения, которые содержат полную информацию о системе Фабера—Шаудера (которую мы обозначим через $\{\Phi_n\}$).

Лемма 1. *Для любого набора* $\{c_i\}_{i=0}^n$ *действительных чисел существует такой набор знаков* $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$, $\lambda_i = \pm 1$, *что*

$$\sup_{m<n} \left\| \sum_{i=0}^{m} \lambda_i c_i \Phi_i \right\|_C \leqslant \max_{m<n} |c_m|.$$

Лемма 2. *Пусть* $\{c_i\}$ — *последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0, \tag{1}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x) = +\infty$ *почти всюду на* $[0,1]$. *Пусть заданы также положительные числа* δ, η *и* A, *интервал* $\Delta = (\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ *и натуральное число* m. *Тогда существует конечное множество натуральных чисел* ω *такое, что*

$$\min \omega > m, \ \operatorname{supp} \sum_{n\in\omega} c_n \Phi_n \subset \Delta,$$

$$\sum_{n\in\omega} c_n \Phi_n(x) \leqslant A \quad (x \in \Delta),$$

$$\operatorname{mes}\left\{ x\in\Delta: \left|\sum_{n\in\omega} c_n \Phi_n(x) - A\right| > \delta\right\} < \eta.$$

Лемма 1 справедлива для произвольных систем Шаудера $\{\Phi_n^T\}$ (см. [12], стр. 186—187). Что касается леммы 2, то при ее доказательстве существенно использовалась „аккуратность" системы Фабера—Шаудера и метод доказательства не позволял перенести ее на сколько-нибудь существенно широкий класс систем Шаудера. Сейчас мы докажем одно утверждение, из которого уже нетрудно будет получить справедливость леммы 2 для весьма широкого (и как будет показано, окончательного) класса систем Шаудера. Условимся в дальнейшем предполагать, что множество T, определяющее систему Шаудера $\{\Phi_n^T\}$, всюду плотно на $[0,1]$ (см. замечание в конце статьи).

Лемма 3. *Если последовательность действительных чисел* $\{c_n\}$ *удовлетворяет условию* (1) *и* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n^T(x) = +\infty$ *почти всюду на* $[0,1]$, *то для любого числа* $A > 0$, *натурального числа* m *и лю-*

бого интервала $\Delta=(\alpha, \beta)\subset[0,1]$ *можно указать подмножество* Ω *натурального ряда, удовлетворяющее условиям*

$$\min \Omega > m, \ \operatorname{supp} \sum_{n\in\Omega} c_n \Phi_n^T \subset \Delta,$$

$$\sum_{n\in\Omega} c_n \Phi_n^T(x) = A \text{ (почти всюду на } \Delta).$$

Доказательство. Прежде всего, используя то, что T всюду плотно на $[0,1]$, получаем, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_{n_l} \Phi_{n_l}^T(x) = +\infty \text{ почти всюду на } \Delta, \tag{2}$$

где $\{n_l\}$ — последовательность всех натуральных $n>m$, для которых $\operatorname{supp} \Phi_n^T \subset \Delta$. Искомое множество Ω строится следующим образом:

$$\Omega \subset \{n_l\}_{l=1}^{\infty},$$

$$n_k \in \Omega \Longleftrightarrow \sum_{\substack{1<n<n_k-1 \\ n\in\Omega}} c_n \Phi_n^T(x) + c_{n_k} \Phi_{n_k}^T(x) \leqslant A \quad (x\in\Delta).$$

При таком способе построения нам остается доказать, что $\sum_{n\in\Omega} c_n \Phi_n^T(x) = A$ почти всюду на Δ. Для этого мы предположим противное, т. е. что найдутся $\delta>0$ и множество $E\subset\Delta$ положительной меры такие, что

$$\sum_{n\in\Omega} c_n \Phi_n^T(x) \leqslant A-\delta \quad (x\in E).$$

Тогда в силу известной теоремы Витали-Лебега о точках плотности существует интервал $\Delta_0\subset\Delta$, $\operatorname{mes}\Delta_0>0$, со свойством

$$\operatorname{mes}\left\{x\in\Delta_0 : \sum_{n\in\Omega} c_n \Phi_n^T(x) > A-\delta\right\} < \varepsilon \operatorname{mes}\Delta_0, \tag{3}$$

где

$$\varepsilon < \frac{\delta}{4A} \tag{4}$$

(не ограничивая общности рассуждений можно считать, что $\varepsilon<1$). Определим натуральное число N так, что

$$c_n < \frac{\delta}{2} \text{ при } n \geqslant N. \tag{5}$$

Если $m>N$ и $m\,\overline{\in}\,\Omega$, то из Ω удалим все элементы n, для которых $\operatorname{supp}\Phi_n^T \subset \operatorname{supp}\Phi_m^T$. Полученное таким образом подмножество множества Ω обозначим через Ω_0. При этом ясно, что при $m>N$ и $m\,\overline{\in}\,\Omega$

$$\Delta_0 \cap \operatorname{supp}\Phi_m^T \cap \operatorname{supp} \sum_{\substack{n>m \\ n\in\Omega_0}} c_n \Phi_n^T = \varnothing.$$

Кроме того, в силу (2) и

$$\sum_{n\in\Omega} c_n \Phi_n^T(x) \leqslant A \quad (x\in[0,1])$$

имеем

$$\sum_{\substack{n>N\\ n\bar{\in}\Omega}} c_n \Phi_n^T(x) = +\infty \text{ почти всюду на } \Delta$$

и, следовательно

$$\operatorname{mes} \Delta_0 \cap \operatorname{supp} \sum_{\substack{n>N\\ n\bar{\in}\Omega}} c_n \Phi_n^T = \operatorname{mes} \Delta_0.$$

Поэтому при достаточно большом $M>N$

$$\operatorname{mes} \Delta_0 \cap \operatorname{supp} \sum_{\substack{N<n<M\\ n\bar{\in}\Omega}} c_n \Phi_n^T < \frac{1}{2} \operatorname{mes} \Delta_0.$$

Отсюда, с учетом очевидного соотношения

$$\operatorname{supp} \sum_{\substack{N<n<M\\ n\bar{\in}\Omega}} c_n \Phi_n^T \cap \operatorname{supp} \sum_{\substack{n>M\\ n\in\Omega_0}} c_n \Phi_n^T = \varnothing,$$

получаем неравенство

$$\operatorname{mes} \Delta_0 \cap \operatorname{supp} \sum_{\substack{n<M\\ n\in\Omega_0}} c_n \Phi_n^T < \frac{1}{2} \operatorname{mes} \Delta_0. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь кусочно-линейную непрерывную функцию

$$S(x) \equiv \sum_{\substack{n<M\\ n\in\Omega_0}} c_n \Phi_n^T(x).$$

Если I — любой из интервалов линейности этой функции, для которого

$$S(x) \leqslant A - \frac{\delta}{2} \quad (\forall x \in I),$$

то из определения множеств Ω и Ω_0, а также из (5) легко вывести, что

$$I \subset \operatorname{supp} \sum_{\substack{n>M\\ n\in\Omega_0}} c_n \Phi_n^T. \tag{7}$$

Если же J — любой другой интервал линейности $S(x)$, то

$$\operatorname{mes} \{x\in J : S(x) > A-\delta\} > \frac{\delta}{2A} \operatorname{mes} J.$$

Суммируя эти неравенства по всем таким J и, учитывая (см. (6) и (7)), что сумма длин проекций тех звеньев $S(x)$, которые целиком лежат под прямой $y = A - \frac{\delta}{2}$ меньше $\frac{1}{2} \operatorname{mes} \Delta_0$, получаем, что (см. еще (4))

$$\mathrm{mes}\,\{x\in\Delta_0: S(x)>A-\delta\}>\frac{\delta}{4A}\,\mathrm{mes}\,\Delta_0>\varepsilon\,\mathrm{mes}\,\Delta_0,$$

а это противоречит соотношению (3), ибо

$$S(x)\leqslant\sum_{n\in\Omega}c_n\Phi_n^T(x).$$

Противоречие показывает, что $\sum\limits_{n\in\Omega}c_n\Phi_n^T(x)=A$ для почти всех $x\in\Delta$ и лемма доказана.

Ясно, что из леммы 3 вытекает справедливость леммы 2 для любой системы Шаудера $\{\Phi_n^T\}$ (разумеется, в предположении, что T всюду плотно на $[0,1]$). Используя леммы 1 и 2, доказанные теперь для произвольных систем Шаудера, выясним, в какой мере результаты из [9] переносятся на $\{\Phi_n^T\}$. Для этого напомним ряд определений.

Будем говорить для краткости, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ U_1, U_2 и U_3-универсален (обладает свойствами U_1, U_2 и U_3), если он соответственно универсален относительно подпоследовательностей частичных рядов и перестановок в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду (определение указанных типов универсальности см. в [13], стр. 133—134, [9]). Мы рассматриваем также S-универсальные ряды (см. [9—11]), S-универсальные ряды рассматривал также Н. Б. Погосян [14]). Далее, пусть Φ — совокупность всех четных конечных, неотрицательных, неубывающих и непрерывных справа функций φ с $\varphi(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\infty$. Пусть

$$\varphi(L)=\{f:\int_0^1\varphi(f(x))\,dx<\infty\}.$$

Заменяя в определениях универсальности класс измеримых функций на $\varphi(L)$, а сходимость почти всюду — на φ-сходимость (см. [1], стр. 13—14), получаем понятия U_ν^φ- и S^φ-универсального ряда ($\nu=1,2,3$). Мы всюду будем дополнительно требовать (не оговаривая этого особо), что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}<\infty. \tag{8}$$

Это связано с тем, что из результатов П. Л. Ульянова [1] следует, что (8) необходимо для справедливости теоремы Вейерштрасса в классе $\varphi(L)$ с φ-сходимостью в случае любой системы Шаудера.

Пусть $\{\Phi_n^T\}$ — любая система Шаудера с $\overline{T}=[0,1]$. Рассмотрим для каждого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\Phi_n^T(x),\ \lim_{n\to\infty}c_n=0 \tag{*}$$

два условия

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{n\in\Omega^+\{c_n\}} c_n \Phi_n^T(x) = +\infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{почти всюду на } [0,1] \\ \sum\limits_{n\in\Omega^-\{c_n\}} c_n \Phi_n^T(x) = -\infty \end{array}\right\} \qquad (A)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \Phi_n^T(x) = +\infty \quad \text{почти всюду на } [0,1]. \qquad (B)$$

Теорема 1. *Для любого ряда (*) и* $\varphi \in \Phi$

$$\begin{array}{ccccccc} (A) \Longleftrightarrow & U_2 & \Longleftrightarrow & U_3 & \Longleftrightarrow & S & \Longleftrightarrow (B) \\ & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ & U_2^\varphi & \Rightarrow & U_3^\varphi & \Rightarrow & S^\varphi. & \end{array}$$

Это следует из того, что леммы 1 и 2 справедливы для любой системы $\{\Phi_n^T\}$, ибо эти леммы содержат полную информацию о системе и для вывода теоремы 1 из лемм 1 и 2 никакой дополнительной информации о системе уже не нужно (см. доказательство основной теоремы в [9]).

Аналогично, справедливость лемм 1 и 2 для любой системы вместе с методом доказательства теоремы 5.1 в [9] дает нам следующий результат

Теорема 2. *Пусть* $\{c_n\}$*— последовательность действительных чисел,* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. *Тогда*

1) *условие* (A) *необходимо и достаточно для того, чтобы* а) *некоторый частичный ряд ряда (*) имел свойство* U_1; б) *некоторая перестановка ряда * имела свойство* U_1.

2) *условие* (B) *необходимо и достаточно для* U_1*-универсальности ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n \Phi_n^T(x)$ *при некотором выборе знаков* $\lambda_n = \pm 1$.

Таким образом, вопрос о существовании универсальных (в том или ином смысле) рядов (*) сводится к существованию последовательностей $\{c_n \geqslant 0\}$ со свойством (B). Для решения этого вопроса нам понадобится ряд определений.

Определение 2. Система Шаудера $\{\Phi_n^T\}$ называется системой типа Фабера—Шаудера, если при $k > 0$

$$t^{*}_{j-1} < t_{2^k+j} < t^{*}_{j} \quad (j = 1, \cdots, 2^k),$$

где $\{t^{*}_j\}^{2^k}_{j=0}$ — переставленный в возрастающем порядке набор $\{t_j\}^{2^k}_{j=0}$.

Определение 3. Перестановку $\{\psi_n\}$ системы Шаудера $\{\Phi_n^T\}$ назовем нормальной, если при $\mathrm{supp}\,\psi_n \supset \mathrm{supp}\,\psi_m$ функция ψ_n предшествует функции ψ_m.

Это определение аналогично соответствующему определению А. М. Олевского для системы Хаара [15] (для системы Фабера—Шаудера см. [12], стр. 191).

Лемма 4. *Всякая система Шаудера с $T=[0,1]$ является нормальной перестановкой некоторой (единственной) системы типа Фабера—Шаудера.*

Это утверждение очевидно.

Лемма 5. *Если $c_n \downarrow 0$ и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} = \infty,$$

то для любой системы типа Фабера—Шаудера $\{\Phi_n^T\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n^T(x) = +\infty \qquad \text{почти всюду на } [0,1].$$

Это утверждение доказывается точно так же, как и лемма 3 работы [10].

Лемма 6. *Для любой системы Шаудера $\{\Phi_n^T\}$ существует ряд вида (*), удовлетворяющий условию* (B).

Доказательство следует из лемм 4 и 5.

Теорема 3. *Для любой системы Шаудера $\{\Phi_n^T\}$ существует ряд вида (*), одновременно обладающий свойствами U_ν ($\nu=1$, 2, 3) S, S^φ, U_μ^φ ($\mu=2$, 3).*

Доказательство. Возьмем ряд (*) со свойством (B) (лемма 6) и расставим знаки $\lambda_n = \pm 1$ так, чтобы ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n \Phi_n^T(x)$$

обладал свойствами U_1 (см. утверждение 2) теоремы 2). Из свойства U_1, очевидно, следует условие (A) и осталось применить теорему (1).

Выясним теперь, какова максимальная скорость убывания коэффициентов рядов (*), существование которых обеспечивает теорема 3

Для любой системы Шаудера $\{\Phi_n^T\}$ определим перестановку σ_T натурального ряда так, что $\{\Phi_{\sigma_T(n)}^T\}$ — система типа Фабера—Шаудера (см. лемму 4).

Теорема 4. *Если $\{a_n\}$ такова, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sigma_T^{-1}(n)} = \infty, \quad a_{\sigma_T(n)} \downarrow 0, \tag{9}$$

*то существует ряд вида (*), обладающий свойствами U_ν($\nu=1$, 2, 3) S, S^φ, U_μ^φ ($\mu=2$, 3) одновременно, причем $|c_n| \leq a_n$ для всех $n > 0$.*

Доказательство проходит с помощью леммы 5 так же, как и в теореме 3.

Легко видеть, что первое условие (9) необходимо для существования таких рядов, ибо если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sigma_T^{-1}(n)} < \infty, \ a_{\sigma_T(n)} \downarrow 0,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n^T, \ |c_n| \leqslant a_n$$

сходится равномерно при любой перестановке.

Наиболее прозрачный вид условие (9) принимает в случае, когда $\{\Phi_n^T\}$—система типа Фабера—Шаудера, тогда $\sigma_1(n) = n$ и (9) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \infty, \ a_n \downarrow 0.$$

В заключение работы заметим, что при условии $T = [0,1]$ система Шаудера $\{\Phi_n^T\}$ образует базис в $C\,[0,1]$.

Теорема 5. *Для любой системы* $\{\Phi_n^T\}$ *существует функция* $f \in C\,[0,1]$, *базисное разложение которой по системе* $\{\Phi_n^T\}$ *одновременно обладает свойствами* U_ν, S, S^φ, U_ν^φ $(\nu=1, 2)$,

Доказательство. Пусть (*)—произвольный ряд, удовлетворяющий условию (B). Тогда по лемме 1 можно выбрать знаки $\lambda_n = \pm 1$ так, чтобы ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n \Phi_n^T \qquad (10)$$

сходился равномерно на [0,1]. Сумма этого ряда и есть искомая функция. Действительно, из (B) и из равномерной сходимости ряда (10) вытекает условие (A) и надо применить теорему 1.

Итак, основные результаты работы [9] переносятся на любые системы Шаудера $\{\Phi_n^T\}$, надо только потребовать, чтобы $\overline{T} = [0,1]$. Если $\overline{T} \neq [0,1]$ и (α, β)— любой из интервалов дополнения к $\overline{T}$*, то все функции Φ_n^T являются линейными на (α, β) и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n^T(x)$ может сходится на (α, β) почти всюду только к функции, эквивалентной линейной на (α, β); аналогично если $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n^T(x)$ φ-сходится к $f \in \varphi(L)$, то он сходится к ней и по мере, а некоторая подпоследовательность его частных сумм сходится к f почти всюду и снова f должна быть

---

* Очевидно, что $\overline{T}$—замкнутое множество, не совпадающее с [0,1].

эквивалентна линейной на (α, β). Таким образом, если $T \neq [0,1]$, то $\{\Phi_n^T\}$ не является системой представления измеримых функций почти всюду и функций классов $\varphi(L)$ по φ-расстоянию. Тем более на такие системы нельзя перенести теоремы 1—5, сформулированные выше.

Ереванский государственный
университет,
Одесский государственный
университет

Поступила 13.VI.1979

Ա. Վ. ԲԱԽՇԵԹՑԱՆ, Վ. Գ. ԿՐՈՏՈՎ. Շաուդերի սիստեմներով ունիվերսալ շարքերի մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկված են $\{\Phi_n^T\}$ *Շաուդերի սիստեմներ, որոնց համար* T *բազմությունը ամենուրեք խիտ է* $[0,1]$ *հատվածում և բերված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ՝ այդ սիստեմներով գրված շարքերի ունիվերսալության համար (այս կամ այն իմաստով)։*

Ըստ որում պարզվել է, որ հեղինակներից մեկի կողմից նախկինում ստացված Ֆաբեր-Շաուդերի սիստեմի ունիվերսալության վերաբերյալ հիմնական արդյունքները ճիշտ են նաև վերոհիշյալ սիստեմների դասի համար։

A. V. BAHSHETHSIAN, V. G. CROTOV. *On universal series by Shauder's systems* (summary)

It is proved that all basis results obtained earlier by one of the authors for Faber-Shauder's systems remain valid for series by Shauder's systems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. Л. Ульянов.* Представление измеримых функций рядами и классы $\varphi(L)$, УМН, 27, вып. 2, 1972, 3—52.
2. *G. Faber.* Über die Orthogonal funktionen des Herrn Haar, Jahresber, Deutsch. Math.-Verein., 19. 1910, 104—112.
3. *J. Schauder.* Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionenräumen, Math Zeit., 26, 1927, 47—65.
4. *А. А. Талалян.* Представление произвольной измеримой функции рядами по функциям системы Шаудера, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 12, № 3, 1959, 3—14.
5. *C. Goffman.* Remark on a problem of Lusin, Acta Math., 111, 1964, 63—72.
6. *R. E. Zink.* On a theorem of Goffman concerning Schauder series, Proc. Amer Math. Soc., 21, 1969, 523—529.
7. *С. В. Бочкарев.* О рядах по системе Шаудера, Мат. заметки, 4, № 4, 1968, 453—460.
8. *П. Л. Ульянов.* Представление функций класса $\varphi(L)$ рядами, Труды МИАН СССР, 112, № 1, 1971, 372—384.
9. *В. Г. Кротов.* Представление измеримых функций рядами по системе Фабера—Шаудера и универсальные ряды, Изв. АН СССР, сер. матем., 41, № 1, 1977.
10. *В. Г. Кротов.* Универсальные ряды по системе Фабера—Шаудера, Вестник МГУ, сер. мат., мех., 30, № 4, 1970, 53—57.

11. *В. Г. Кротов*. Представление измеримых функций рядами по системе Фабера—Шаудера и универсальные ряды, ДАН СССР, 214, № 6, 1974, 1258—1261.
12. *В. Г. Кротов*. О рядах по системе Фабера—Шаудера и по базисам пространства $C[0, 1]$, Мат. заметки, 14, № 2, 1973, 185—195.
13. *А. А. Талалян*. Представление измеримых функций рядами, УМН, 15, вып. 5, 1960, 77—141.
14. *Н. Б. Погосян*. Представление измеримых функций базисами $L_p[0, 1]$, $(p \geqslant 2)$, ДАН Арм. ССР, XIII, № 4, 1976, 205—209.
15. *А. М. Олевский*. Ряды Фурье непрерывных функций по ограниченным ортонормальным системам, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 2, 1966, 387—432.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 1, 1981 Математика

Л. А. ШАГИНЯН

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ МАРЦИНКЕВИЧА—ЗИГМУНДА

§ 1. Введение

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $S(E)$ — совокупность всех измеримых функций, определенных п. в. (почти всюду) на множестве E, которые принимают лишь конечные значения п.в. на E; $\overline{S}(E)$ — совокупность всех измеримых функций, определенных п. в. на E, которые могут принимать также бесконечные значения определенных знаков на подмножествах E положительной меры.

Далее обозначим через $\{(C, 1), f, E\}$ множество всевозможных рядов вида

$$\Omega \sim \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x),\ u_i(x) \in S(E),\ i=1, 2, \cdots,$$

которые суммируются методом $(C, 1)$ к $f(x) \in S(E)$ п.в. на E, где $|E| = \text{mes}\, E > 0$.

Кроме того, скажем, что ряд Ω колеблется симметрично вокруг функции $f(x) \in S(E)$ п.в. на E, если любая подпоследовательность $S_{n_i}(\Omega, x)$ частичных сумм ряда Ω колеблется симметрично вокруг $f(x)$ п. в. на E, а именно: если

$$\underline{S}(\Omega, n_i, x) = \varliminf_{i\to\infty} S_{n_i}(\Omega, x) > -\infty \quad \text{на } E,$$

то

$$\overline{S}(\Omega, n_i, x) = \varlimsup_{i\to\infty} S_{n_i}(\Omega, x) < +\infty \quad \text{п.в. на } E,$$

и вместе с тем

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\underline{S}(\Omega, n_i, x) + \overline{S}(\Omega, n_i, x)\right] \quad \text{п.в. на } E.$$

Теорема А (Марцинкевич—Зигмунд). Тригонометрические ряды вида

$$\Omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

принадлежащие классу $\{(C, 1), f; E\}$, колеблются симметрично вокруг $f(x)$ п.в. на E*.

* См. [1], стр. 264, где доказывается симметричное колебание последовательности $S_n(\Omega, x)$ частичных сумм ряда Ω, но, как нетрудно убедиться, то же самое доказательство обеспечивает также симметричное колебание любой подпоследовательности $S_{n_i}(\Omega, x)$. По этому поводу см. также [1], стр. 256.

Вместе с тем, согласно известным теоремам Зигмунда и Колмогорова (см. [2], стр. 325, 326), если $\{k_\nu\}$ лакунарна, то из принадлежности ряда

$$\Omega \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos k_\nu x + b_\nu \sin k_\nu x \quad (k_1 < k_2 < \cdots) \tag{1}$$

классу $\{(C, 1), f, E\}$, $|E| > 0$, в частности, следует сходимость ряда Ω к $f(x)$ п.в. на E.

Таким образом, в двух крайних случаях, когда последовательность $\{k_\nu\}$ совпадает с натуральным рядом или является достаточно редкой, тригонометрические ряды вида (1) из класса $\{(C, 1), f, E\}$ обладают хорошим поведением—колеблются симметрично вокруг $f(x)$ п.в. на E.

Естественно возникает вопрос: как обстоит дело в случае рядов вида (1), когда $\{k_\nu\}$ отлична от вышеописанных.

В настоящей статье показывается, что теорема А допускает обобщение, т. е. распространяется на ряды вида (1) для определенных классов последовательностей $\{k_\nu\}$, например, когда $\{k_\nu\}$ имеет вид $n\cdot\nu^m$, $\nu=1, 2, \cdots$, где $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$ — произвольные натуральные числа. Вместе с тем доказывается, что, вообще говоря, ряды, вида (1) не обязаны колебаться симметрично вокруг какой-либо функции на множествах положительной меры, если даже от них потребовать гораздо большего, а именно, $(C, \alpha>0)$ суммируемости к конечной функции п.в. для всех $\alpha > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\{k_\nu\} = \{k_1 < k_2 < \cdots\}$ — *некоторая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$1 - \frac{k_\nu}{k_{\nu+1}} = O\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad \frac{1}{k_n} \sum_{\nu=1}^{n-2} \nu\, |2k_{\nu+1} - k_{\nu+2} - k_\nu| = O(1). \tag{2}$$

Тогда из принадлежности ряда (1) *множеству* $\{(C, 1), f, E\}$ *следует симметричное колебание ряда* (1) *вокруг* $f(x)$ *п.в. на* E. *В частности, если ряд*

$$\Omega \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos n\cdot\nu^m x + b_\nu \sin n\,\nu^m x,$$

где $n \geqslant 1$ *и* $m \geqslant 1$ — *какие-либо натуральные числа, принадлежит* $\{(C, 1), f, E\}$ *классу, то* Ω *колеблется симметрично вокруг* $f(x)$ *п.в. на* E.

Теорема 2. *Для произвольной функции* $f(x) \in S(0, 2\pi)$ *существует ряд* Ω *вида* (1), *обладающий следующими свойствами:*

1) Ω *суммируется к* $f(x)$ *п.в. на* $(0, 2\pi)$ *любым методом* $(C, \alpha > 0)$;

2) *для любой функции* $F(x) \in S(0, 2\pi)$ *некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда* Ω *сходится к* $F(x)$ *п.в. на* $(0,2\pi)$,

3) $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{2+\varepsilon} + |b_\nu|^{2+\varepsilon} < +\infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$, *где* a_ν, b_ν*—коэффициенты ряда* Ω.

При этом можно добиться того, чтобы

4. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{k_\nu} < +\infty$ *и* $\{k_\nu\}$ *имела плотность нуль.*

Ввиду приведенных утверждений естественно возникает следующая, на наш взгляд, интересная и по-видимому достаточно сложная задача: в тех или иных терминах охарактеризовать те последовательности $\{k_\nu\}$, для которых тригонометрические ряды вида (1) из класса $\{(C, 1), f, E\}$ обязаны колебаться симметрично вокруг $f(x)$ п.в. на E.

Представляется интересным и следующая более частная задача: для заданного $\gamma \in [0,1]$ существует ли последовательность $\{k_\nu\}$ плотности γ, для которого ряды вида (1) из класса $\{(C, 1), f, E\}$ обязаны колебаться симметрично вокруг $f(x)$ п.в. на E.

Из теоремы 1 непосредственно следует, что эта задача имеет положительное решение для любого

$$\gamma \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots, 0\right\}.$$

Теорема 2 получается из следующего более общего утверждения. Обозначим через $\{T\}'$— класс всех линейных вполне регулярных методов суммирований, высота строк матриц которых стремится к нулю (см. стр. 58).

Теорема 3. *Для произвольной последовательности* $\{T_i\}$ *методов суммирований из класса* $\{T\}'$ *и для произвольной функции* $f(x) \in \overline{S}(0, 2\pi)$ *существует ряд* Ω *вида* (1), *который суммируется к* $f(x)$ *п.в. на* $(0, 2\pi)$ *всеми методами* $\{T_i\}$ *и вместе с тем обладает свойствами* 2 —4 *теоремы* 2.

Отметим, что ряд, существование которого утверждается этой теоремой, в определенном смысле является контрпримером для вышеупомянутой теоремы Зигмунда о лакунарных тригонометрических рядах (см. [2], стр. 526). Отметим также, что теорема 3 доказывается в основном по схеме работы [3].

Наконец, точные аналоги приведенных утверждений доказываются и для рядов по системе Уолша*.

§ 2. Необходимые леммы и доказательства теорем

Теорема 1 является непосредственным следствием теоремы А и следующего утверждения о числовых рядах, которое мы сформулируем в виде леммы.

---

* Относительно аналога теоремы А для рядов по системе Уолша см. [4].

Пусть имеем некоторый числовой ряд

$$\Omega \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

где $a_k = 0$, если $k \,\overline{\in}\, \{k_l\}$ для некоторой последовательности натуральных чисел $\{k_1 < k_2 < \cdots\}$.

Положим

$$\overline{\Omega} \sim \sum_{l=1}^{\infty} a_{k_l}, \quad \overline{S}_n = \sum_{l=1}^{n} a_{k_l}, \quad \overline{\sigma}_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \overline{S}_\nu,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} S_\nu.$$

Лемма 1. *Если последовательность* $\{k_l\} = \{k_1 < k_2 < \cdots\}$ *удовлетворяет условиям* (2), *то из* $(C, 1)$*-суммируемости ряда* $\overline{\Omega}$ *к конечному числу* S *следует* $(C, 1)$*-суммируемость ряда* Ω *к той же сумме* S.

Доказательство. Имеем

$$\overline{S}_n = n\overline{\sigma}_n - (n-1)\overline{\sigma}_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots;$$

$$S_j = \overline{S}_l, \text{ если } k_l \leqslant j < k_{l+1}, \quad l = 1, 2, \cdots.$$

Следовательно для $k_n \leqslant j < k_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$ будем иметь

$$\sigma_j = \frac{1}{j} \sum_{\nu=1}^{j} S_\nu = \frac{1}{j} \sum_{\nu=2}^{n} (k_\nu - k_{\nu-1}) \overline{S}_{\nu-1} + \frac{1}{j} (j - k_n) \overline{S}_n =$$

$$= \frac{1}{j} \sum_{\nu=2}^{n} (k_\nu - k_{\nu-1}) [(\nu-1)\overline{\sigma}_{\nu-1} - (\nu-2)\overline{\sigma}_{\nu-2}] + \frac{j-k_n}{j} [n\overline{\sigma}_n - (n-1)\overline{\sigma}_{n-1}] =$$

$$= \frac{1}{j} \sum_{\nu=1}^{n-2} (2k_{\nu+1} - k_{\nu+2} - k_\nu)\, \nu\, \overline{\sigma}_\nu + \frac{2k_n - k_{n-1} - j}{j} \times$$

$$\times (n-1)\overline{\sigma}_{n-1} + \frac{j-k_n}{j} n\overline{\sigma}_n. \qquad (3)$$

Обозначим матрицу перехода от последовательности $\{\overline{\sigma}_j\}$ к последовательности $\{\sigma_j\}$ через $\|\alpha_{j\nu}\|$. Из (3) следует

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{j\nu} = \frac{1}{j} \sum_{\nu=1}^{n-2} (2k_{\nu+1} - k_{\nu+2} - k_\nu)\,\nu + \frac{n-1}{j} (2k_n - k_{n-1} - j) +$$

$$+ \frac{j-k_n}{j} n = \frac{1}{j} \{2(n-2)k_{n-1} + (n-3)k_{n-1} - (n-2)k_n +$$

$$+ 2(n-1)k_n - (n-1)k_{n-1} - (n-1)j + nj - k_n \cdot n\} = \frac{j}{j} = 1, \qquad (4)$$

когда $k_n \leqslant j < k_{n+1}$ для любого $n > 1$.

Теперь учитывая (2) и (4) легко убедиться, что $\|a_{j\nu}\|$ является регулярной матрицей. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Предварительно введем следующее определение и сформулируем необходимые леммы.

Определение. Пусть $\Phi=\{\Phi_n(x)\}_1^\infty$ — ограниченные в совокупности функции, определенные на некотором интервале (a, b). Скажем, что система Φ удовлетворяет условиям (K') на (a, b), если для произвольных функций $f(x)$, $F(x)\in S(a, b)$ и произвольного $\varepsilon>0$ существует натуральное число $p=p(f, F, \varepsilon)$ такое, что для любого натурального N существует тригонометрический полином вида

$$P(x)=P(f, F, \varepsilon, x)=\sum_{k=1}^{p} c_k\Phi_{n_k}(x)\ (n_1<n_2<\cdots),$$

обладающий следующими свойствами:

K'. 1. $n_1>N$;

K'. 2. $\sum\limits_{k=1}^{p}|c_k|^{2+\varepsilon}<2\varepsilon$;

K'. 3. $\operatorname{mes}\{x: |f(x)-P(x)|>\varepsilon\}<\varepsilon$;

K'. 4. $\operatorname{mes}\left\{x: \left|F(x)-\sum\limits_{k=1}^{q}c_k\Phi_{n_k}(x)\right|>\varepsilon\right\}<\varepsilon$

для некоторого $q\in(1, p)$.

Тот факт, что p не зависит от N, мы будем называть условием K'. 5.

Лемма 2. *Тригонометрическая система*

$$\{1, \cos x; \sin x, \cos 2x, \sin 2x,\cdots\}$$

удовлетворяет условиям (K') *на* $(0, 2\pi)$.

Лемма 3. *Система Уолша* $\{W_n(x)\}$ *удовлетворяет условиям* (K') *на* $(0,1)$.

Эти леммы непосредственно следуют, соответственно, из лемм 1 и 2 работы [3].

Пусть T—некоторый метод из класса $\{T\}'$ с матрицей $\|t_{ij}\|$, где i — индекс строк, а j — индекс столбцов. Тогда, согласно определению класса $\{T\}'$, имеют место

T. 1. $t_{ij}\geqslant 0$; $i, j=1, 2,\cdots$;

T. 2. $\lim\limits_{i\to\infty} t_{ij}=0$; $j=1, 2,\cdots$;

T. 3. $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} t_{ij}=1$;

T. 4. $\lim\limits_{i\to\infty}\sup\limits_{j}\{t_{ij}\}=0$.

Замечание. 1) Если какая-либо числовая последовательность $\{s_j\}$ сходится к конечному или бесконечному пределу s, то $\{s_j\}$ суммируется к s любым методом T, матрица которого удовлетворяет условиям $T.1-T.3$ (см. 2, стр. 126). 2) Нетрудно убедиться, что методы $(C, \alpha>0)$ принадлежат классу $\{T\}'$ (см. [5]).

Далее, пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \ |a_i| \leqslant 1, \ i=1, 2, \cdots \tag{5}$$

—некоторый числовой ряд и $\{n_k\}$, $\{p_k\}$—две последовательности натуральных чисел, удовлетворяющие условию

$$a_i=0, \text{ если } \sum_{j=0}^{k} (n_j+p_j)+1 \leqslant i \leqslant \sum_{j=0}^{k} (n_j+p_j)+n_{k+1}, \tag{6}$$

где $n_0=p_0=0$.

Положим

$$r_k=\sum_{j=1}^{k} (p_j+n_j), \ s_k=\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Имеет место

Лемма 4 ([3]). *Пусть $\{T_l\}$—некоторая последовательность методов суммирований из класса $\{T\}'$, ряд (5) удовлетворяет условиям (6) и вместе с тем*

$$\left(1+\sum_{\mu=1}^{k+1} p_\mu\right) \sum_{j=r_k+n_{k+1}+1}^{r_{k+1}} t_{ij}^{(l)} \leqslant \frac{1}{2^k}$$

для $i=1, 2, \cdots$; $k=1, 2, \cdots$; $l=1, 2, \cdots, k$, где $\|t_{ij}^{(l)}\|$—матрица метода T_l. Тогда, если

$$\lim_{k\to\infty} s_{r_k}=s$$

(s может равняться также $\pm\infty$), то ряд (5) суммируется к s любым методом T_l, $l=1, 2, \cdots$.

Мы будем доказывать следующую теорему, из которой, в силу лемм 2 и 3, непосредственно получаются теорема 3 и точный аналог последней для рядов по системе Уолша.

Теорема 4. *Пусть последовательность функций $\{|\Phi(x)| \leqslant \leqslant 1\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям (K') на (a, b), а $\{T_l\}_1^\infty$—произвольная последовательность методов суммирований из класса $\{T\}'$. Тогда для произвольной функции $f(x) \in \bar{S}(a, b)$ существует ряд*

$$\Omega \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_{\nu_k}(x) \quad (\nu_1<\nu_2<\cdots),$$

обладающий следующими свойствами:

1) *ряд* Ω *суммируется к* $f(x)$ *п.в. на* (a, b) *любым методом* T_l, $l=1, 2, \cdots$;

2) *для любой функции* $F(x)\in \bar{S}(a, b)$ *некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда* Ω *сходится к* $F(x)$ *п.в. на* (a, b);

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^{2+\varepsilon} < +\infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$;

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k} < +\infty$ *и* $\{\nu_k\}$ *имеет плотность нуль.*

Доказательство. Пусть $\{F_l(x)\}_1^\infty$ — совокупность всех ступенчатых функций, принимающих рациональные значения, интервалы постоянства которых имеют рациональные концы.

Зафиксируем какую-либо последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < 1. \tag{7}$$

Положим

$$E = \{x\colon x\in(a, b), |f(x)| < +\infty\},$$
$$E^+ = \{x\colon x\in(a, b), f(x) = +\infty\},$$
$$E^- = \{x\colon x\in(a, b), f(x) = -\infty\}.$$

Теперь, исходя из того, что последовательность $\{\Phi_\nu(x)\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям $K'.1 - K'.5$ на (a, b), определим последовательности натуральных чисел $\{p_k\}_1^\infty$, $\{n_k\}_1^\infty$, $\{m_k\}_1^\infty$, $\{q_k\}_1^\infty$ функций $\{f_k(x)\}_1^\infty$ и тригонометрических полиномов $\{Q_k(x)\}_1^\infty$ вида

$$Q_k(x) = \sum_{l=m_k}^{m_k+n_k-1} b_l \Phi_l(x) + \sum_{l=m_k+n_k}^{m_k+n_k+p_k} b_l \Phi_{\nu_l}(x),$$

удовлетворяющие следующим условиям:

1) $$b_l = 0,\ i\in[m_k, m_k+n_k-1],\ k=1, 2, \cdots; \tag{8}$$

2) $$\left(1+\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu\right) \sum_{j=r_{k-1}+n_k+1}^{r_k} t_{ij}^{(l)} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}},\ k=1, 2, \cdots,\ l=0, 1, \cdots, k-1; \tag{9}$$

где $r_k = \sum\limits_{j=1}^{k} (p_j + n_j)$;

3) $$\left.\begin{array}{l} \nu_{m_k} + n_k + p_k < m_{k+1},\ k=1, 2, \cdots; \\ i < \nu_i < \nu_{i+1},\ i=1, 2, \cdots; \end{array}\right\} \tag{10}$$

4) $$\sum_{l=m_k}^{m_k+n_k+p_k} \frac{1}{i} \leqslant \frac{1}{2^k},\ k=1, 2, \cdots; \tag{11}$$

5) $$f_k(x)=\begin{cases} f(x)-\sum\limits_{j=1}^{k-1} Q_j(x), & x\in E, \\ +1, & x\in E^+, \\ -1, & x\in E^-, \quad k=1,2,\cdots; \end{cases} \tag{12}$$

6) $$\operatorname{mes}\{x: |f_k(x)-Q_k(x)|>\varepsilon_k\}<\varepsilon_k, \quad k=1,2,\cdots; \tag{13}$$

7) $$\operatorname{mes}\left\{x: \left|\sum_{j=1}^{k-1} Q_j(x)+\sum_{l=m_k}^{m_k+n_k-1} [b_l\Phi_l(x)+\sum_{l=m_k+n_k}^{q_k} b_l\Phi_{\nu_l}(x)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-F_k(x)\right|>\varepsilon_k\right\}<\varepsilon_k, \tag{14}$$
$$k=1,2,\cdots,\ m_k+n_k\leqslant q_k<m_k+n_k+p_k;$$

8) $$\sum_{l=m_k}^{m_k+n_k+p_k} |b_l|^{2+\varepsilon_k}<2\varepsilon_k, \quad k=1,2,\cdots. \tag{15}$$

Эти последовательности определяются следующим образом: положим

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\in E, \\ +1, & x\in E^+, \\ -1, & x\in E^- \end{cases}$$

и для $f_1(x)$, $F_1(x)$ и ε_1 воспользовавшись условиями $K'.1$—$K'.5$ определим натуральное число $p_1=p_1(f_1\ F_1, \varepsilon_1)$ и составим полином

$$Q_1(x)=\sum_{l=m_1}^{m_1+n_1-1} b_l\Phi_l(x)+\sum_{l=m_1+n_1}^{m_1+n_1+p_1} b_l\Phi_{\nu_l}(x),$$

где $b_l=0$, $i\in[m_1, m_1+n_1)$, а n_1 и m_1 выбраны последовательно такими, чтобы имели место (9) и (11) для $k=1$ и вместе с тем выполнялись (13)—(15) для $k=1$.

Далее, положим

$$f_2(x)=\begin{cases} f(x)-Q_1(x), & x\in E, \\ +1, & x\in E^+, \\ -1, & x\in E^- \end{cases}$$

и снова, воспользовавшись условиями $K'.1-K'.5$, для $f_2(x)$, $F_2(x)-Q_1(x)$ и ε_2, определим натуральное число $p_2=p_2(f_2, F_2-Q_1, \varepsilon_2)$ и составим полином

$$Q_2(x)=\sum_{l=m_2}^{m_2+n_2-1} b_l\Phi_l(x)+\sum_{l=m_2+n_2}^{m_2+n_2+p_2} b_l\Phi_{\nu_l}(x),$$

где $b_l=0$, $i\in[m_2, m_2+n_2)$, а n_2 и m_2 выбраны последовательно такими, чтобы имели место (9)—(11) для $k=2$ и вместе с тем выполнялись (13)—(15) для $k=2$.

Продолжая этот процесс, мы последовательно определим вышеупомянутые последовательности, удовлетворяющие условиям (8)—(15).

Теперь составим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_{\nu_k}(x), \tag{16}$$

полученный из ряда $\sum_{k\geq 1} Q_k(x)$ раскрытием внутренних сумм. Из неравенств (10) сразу следует, что $\nu_k < \nu_{k+1}$ для всех $k \geq 1$.

Убедимся, что ряд (16) является искомым, т. е. удовлетворяет всем утверждениям теоремы 4.

Для этого сперва заметим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) \tag{17}$$

сходится к $f(x)$ п.в. на (a, b).

Положим

$$H_k = \{x: |f_k(x) - Q_k(x)| \leqslant \varepsilon_k\}, \ k = 1, 2, \cdots,$$

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (H_k \cap E),$$

$$H^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (H_k \cap E^+),$$

$$H^- = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (H_k \cap E^-).$$

Из (13) сразу следует, что

$$\operatorname{mes} H = \operatorname{mes} E, \ \operatorname{mes} H^+ = \operatorname{mes} E^+, \ \operatorname{mes} H^- = \operatorname{mes} E^-. \tag{18}$$

Пусть теперь $x_0 \in H$, тогда $x_0 \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} (H_k \cap E)$ для некоторого $n_0 \geq 1$. Отсюда, согласно (12) и (13) будем иметь

$$|f_k(x_0) - Q_k(x_0)| = \left| f(x_0) - \sum_{j=1}^{k} Q_j(x_0) \right| \leqslant \varepsilon_k$$

для всех $k \geqslant n_0$. Следовательно, в произвольной точке $x \in H$ и согласно (18) почти в каждой точке E ряд (17) сходится к $f(x)$.

Пусть теперь $x_0 \in H^+$, тогда

$$x_0 \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} (H_k \cap E^+)$$

для некоторого $n_0 \geq 1$. Отсюда, согласно (7), (12) и (13) будем иметь

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j(x_0) = \sum_{j=1}^{n_0-1} Q_j(x_0) + \sum_{j=n_0}^{k} Q_j(x_0) = \sum_{j=1}^{n_0-1} Q_j(x_0) + (k - n_0) +$$

$$+ \sum_{j=n_0}^{k} [Q_j(x_0) - 1] \geqslant \sum_{j=1}^{n_0-1} Q_j(x_0) + (k - n_0) - \sum_{j=n_0}^{k} |Q_j(x_0) - f_j(x_0)| >$$

$$> \sum_{j=1}^{n_0-1} Q_j(x_0) + (k-n_0) - \sum_{j=n_0}^{k} \varepsilon_j > \sum_{j=1}^{n_0-1} Q_j(x_0) + k - n_0 - 1.$$

Последнее выражение стремится к $+\infty$ вместе с k. Таким образом, в каждой точке H^+ и следовательно, согласно (18), почти всюду на множестве E^+ ряд (17) сходится к $f(x)$. Аналогично рассматривается и случай E^-. Итак, мы убедились, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) = f(x) \text{ п.в. на } (a,\ b). \tag{19}$$

Учитывая, что $|\Phi_\nu(x)| \leqslant 1$, $x \in (a,\ b)$, $\nu = 1, 2, \cdots$ из соотношений (8) и (9) сразу получаем, что в каждой точке x_0, где имеет место (19), ряд (16) удовлетворяет условиям леммы 4 и следовательно суммируется любым методом T_l, $l = 1, 2, \cdots$ к $f(x_0)$. Таким образом, ряд (16) удовлетворяет первому утверждению теоремы 4.

Теперь возьмем произвольную функцию $F(x) \in \bar{S}(a,\ b)$ и пусть

$$\lim_{\gamma\to\infty} F_{k_\gamma}(x) = F(x) \text{ п.в. на } (a,\ b). \tag{20}$$

Рассмотрим частичные суммы ряда (16) вида

$$S_{k_\gamma}(x) = \sum_{j=1}^{k-1} Q_j(x) + \sum_{j=m_{k_\gamma}}^{m_{k_\gamma}+n_{k_\gamma}-1} b_l \Phi_l(x) + \sum_{j=m_{k_\gamma}+n_{k_\gamma}}^{q_{k_\gamma}} b_l \Phi_{\nu_l}(x).$$

Из соотношений (14) и (20) следует, что

$$\lim_{\gamma\to\infty} S_{k_\gamma}(x) = F(x) \text{ п.в. на } (a,\ b).$$

Убедимся, что ряд (16) удовлетворяет также остальным утверждениям теоремы 4. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ согласно (7) найдется k_0 такое, что $\varepsilon_k < \varepsilon$ при $k \geqslant k_0$. Следовательно, из (7) и (15) получаем

$$\sum_{l=1}^{\infty} |b_l|^{2+\varepsilon} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=m_k+n_k}^{m_k+n_k+p_k} |b_l|^{2+\varepsilon} \leqslant \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{l} |b_l|^{2+\varepsilon} +$$

$$+ \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{l} |b_l|^{2+\varepsilon} < \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{l} |b_l|^{2+\varepsilon} + \sum_{k=k_0}^{\infty} 2\varepsilon_k < +\infty.$$

Вместе с тем из (10) сразу следует

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_l} < +\infty.$$

Остается заметить, что при построении ряда (17) нетрудно было бы проследить за тем, чтобы последовательность $\{\nu_k\}$ имела плотность нуль. Теорема 4 доказана.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 23.IX.1979

Լ. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ. Մարցինկևիչի և Զիգմունդի պատկանող մի թեորեմի մասին (ամփոփում)

Ուսումնասիրվում է $\Omega \sim \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos k_l x + b_l \sin k_l x \ (k_1 < k_2 < \cdots)$ տեսքի շարքերի մասնական գումարների վարքը E դրական չափ ունեցող բազմությունների վրա, երբ Ω-ն (C, 1) եղանակով հանրագումարվում է վերջավոր ֆունկցիայի E-ի վրա։

L. A. SHAHINIAN. *On a theorem of Marcinkewicz-Zygmund* (summary)

In this note, we consider the behaviour of partial sums for series of the type

$$\Omega \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \quad (n_1 < n_2 < \cdots),$$

where Ω is summable (C, 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. II, М., ИЛ, 1965.
2. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. I, М., ИЛ, 1965.
3. *Л. А. Шагинян.* О суммируемости к бесконечности тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша, Мат. сб., 108 (150), № 3, 1979, 457—470.
4. *Л. А. Шагинян.* О пределах неопределенности и о множестве предельных функций рядов по системе Уолша, Мат. сб. 95 (137), № 2 (10), 1974, 263—271.
5. *Д. Е. Меньшов.* Sur la convergence et la summation des séries de fonctions orthogonales, Bull. Soc. Math. France, 64, 1936, 147—170.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 1, 1981 Математика

Л. Г. АРАБАДЖЯН

О КОНСЕРВАТИВНОМ УРАВНЕНИИ ВИНЕРА—ХОПФА

1°. В настоящей работе изучается интегральное уравнение Винера—Хопфа второго рода (см. [1—11])

$$f(x)=g(x)+\int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt,\quad K\in L_1(-\infty,\infty) \tag{1}$$

консервативном случае, когда выполняются условия

$$K\geqslant 0,\quad \mu=\int_0^\infty K(x)\,dx=1. \tag{2}$$

Различные частные случаи этой задачи представляют известный интерес в теории переноса излучения и в других приложениях.

Существуют многочисленные работы по однородным уравнениям вида (1), (2) (см., напр., [1—2, 4—11]), где указанное уравнение исследовано с различных точек зрения и разными методами. Неоднородным консервативным уравнениям посвящено относительно небольшое число работ (см. [1, 2, 4, 7, 9—11]).

В известной монографии Е. Хопфа [1] получен ряд важных аналитических формул для решений однородных и неоднородных уравнений (1), (2) при дополнительных условиях

$$K(x)=K(-x),\ K(x)\geqslant\alpha\int_x^\infty K(t)\,dt,\ x>0,\ \alpha=\text{const}>0. \tag{2'}$$

В этом направлении доказана

Теорема (Е. Хопф). Для того чтобы при $g>0$ уравнение (1) при условиях (2), (2′) имело локально интегрируемое решение f необходимо и достаточно, чтобы $g\in L_1(0,\infty)$. ▶

Там же дана классификация неотрицательных решений уравнения (1) при условиях (2), (2′) и показано, что минимальное неотрицательное решение указанного уравнения представимо в виде ряда Неймана.

Нетрудно заметить, что из второго условия (2′) следует, что ядро K на бесконечности убывает быстрее любой степени x.

Впоследствии уравнение (1) с симметричным ядром и несколько иными ограничениями изучалось в работе [4]. В предположении, что функция

$$A(s)=1-\bar{K}(s), \tag{*}$$

где $\bar{K}(s)$ — преобразование Фурье ядра K, имеет в полосе $|\mathrm{Im}\, s| \leqslant C$, $C = \mathrm{const}$, конечное число нулей, а

$$e^{a|x|} K(x) \in L_1^+, \quad (L_1^+ \equiv L_1(0, \infty))$$

для некоторого $a > 0$, и при ограниченной вариации функций K и g в бесконечном промежутке доказано существование решения уравнения (1).

В работе М. Г. Крейна [3] получила дальнейшее развитие теория уравнений (1), где вопросы разрешимости изучены при условии

$$1 - \bar{K}(s) \neq 0, \quad s \in (-\infty, \infty),$$

что, однако, в рассматриваемом случае (1), (2) не выполняется $(1 - \bar{K}(0) = 0)$.

В другой работе [9] того же автора исследованы однородные и неоднородные уравнения (1), (2) для специальных типов ядер и получена асимптотика этих решений.

В настоящей работе предлагается другой подход для изучения уравнения (1), (2) основанный на идее факторизации операторов Винера—Хопфа с использованием методов и результатов работ [8], [11].

2°. В [8] доказано существование факторизации

$$I - \hat{K} = (I - \hat{v}_-)(I - \hat{v}_+), \tag{3}$$

где I — единичный оператор, а $\hat{K}$, $\hat{v}_\pm$ суть интегральные операторы вида

$$(\hat{K}\varphi)(x) = \int_0^\infty K(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

$$(\hat{v}_- \varphi)(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)\,\varphi(t)\,dt, \quad (\hat{v}_+ \varphi)(x) = \int_0^x V_+(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

$V_\pm \in L_1^+$ и представляют собой каноническое решение нелинейной системы

$$V_\pm(x) = K(\pm x) + \int_0^\infty V_\mp(t)\,V_\pm(x+t)\,dt, \quad x > 0. \tag{4}$$

Факторизация (3) понимается как равенство операторов действующих в E^+, где E^+ — любое из пространств L_p^+, $p \geqslant 1$, M^+. Однако равенство (3) оказывается справедливым в том или ином классе локально интегрируемых функций (см. [11]).

В [8] доказано, что $V_\pm$ обладают свойствами

$$V_\pm \geqslant 0, \quad \gamma_\pm = \int_0^\infty V_\pm(x)\,dx \leqslant 1, \quad (1-\gamma_-)(1-\gamma_+) = 1 - \mu. \tag{5}$$

Введем некоторые обозначения, согласованные с обозначениями из [11]. Пусть

$$m_\lambda(f)=\int_0^\infty f(x)\,x^\lambda\,dx,\ \lambda\in R^+,$$

$$\mu_\pm=\int_0^\infty K(\pm x)\,dx\,,\ \mu_p^\pm=\int_0^\infty K(\pm x)\,x^p\,dx,\ p\in R^+,$$

$$\nu=\mu_1^+-\mu_1^-=\int_{-\infty}^\infty xK(x)\,dx.$$

В [11] доказана

Теорема А. Пусть

$$K>0,\ \mu=1 \text{ и } \exists\nu=\int_{-\infty}^\infty xK(x)\,dx.$$

Тогда

а) $\nu>0 <-> \gamma_-<1,\ \gamma_+=1,$

б) $\nu<0 <-> \gamma_-=1,\ \gamma_+<1,$

в) $\nu=0 <-> \gamma_\pm=1.$ ▶

Пусть $\Phi_\pm\geqslant 0$ — локально интегрируемые функции, определяемые из уравнений восстановления (см. [11])

$$\Phi_\pm(x)=V_\pm(x)+\int_0^x V_\pm(x-t)\,\Phi_\pm(t)\,dt, \tag{6}$$

а $S_\pm\geqslant 0$ определяются из уравнений

$$S_\pm(x)=1+\int_0^x V_\pm(x-t)\,S_\pm(t)\,dt. \tag{7}$$

В [11] показано, что

$$S_\pm(x)=1+\int_0^x \Phi_\pm(t)\,dt \tag{8}$$

и $\Phi_\pm\in\Omega$, где Ω — класс функций, удовлетворяющих условию

$$f\in\Omega,\quad \text{если}\quad \int_0^x f(t)\,dt=O(x),\ x\to\infty.$$

Существуют $a_\pm,\ b_\pm<+\infty$ такие, что

$$S_\pm(x)\leqslant a_\pm+b_\pm x,\ x>0. \tag{9}$$

В [11] доказана

Теорема Б. Пусть

$$\gamma_- < 1,\ \gamma_+ = 1 \left(\text{или } \nu = \int_{-\infty}^{\infty} xK(x)\,dx > 0 \right) \text{ и } g \in E^+.$$

Уравнение (1), (2) имеет локально интегрируемое решение, причем

а) если $g \in M^+$, то $f(x) = O(x)$ при $x \to \infty$;

б) если $g \in L_1^+$, то $f \in \Omega$.▶

3°. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^{\infty} V(t-x)\,\varphi(t)\,dt, \tag{10}$$

где

$$0 \leqslant V \in L_1^+,\ \gamma = \int_0^{\infty} V(x)\,dx \leqslant 1.$$

Пусть

$$\Phi \text{ и } S(x) = 1 + \int_0^x \Phi(t)\,dt$$

определяются из уравнений восстановления

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{11}$$

$$S(x) = 1 + \int_0^x V(x-t)\,S(t)\,dt. \tag{12}$$

Мы докажем следующую основную лемму.

Лемма 1. а) *При* $g \in L_1^+$ *уравнение* (10) *обладает решением* φ *из класса* Ω, *представляющим собой предел следующего итерационного процесса:*

$$\varphi_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^{\infty} V(t)\,\varphi_n(x+t)\,dt,\quad \varphi_0 = 0. \tag{13}$$

(*Предел понимается по топологии сходимости по* $L_1(0, r)$, $\forall r < +\infty$).

б) *Справедлива формула*

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^{\infty} \Phi(t)\,g(x+t)\,dt. \tag{14}$$

в) *Если* $(|g|, S)=\int\limits_0^\infty |g(x)|\, S(x)\, dx<+\infty$, то $\varphi\in L_1^+$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $g>0$. (В противном случае g можно представить в виде разности двух неотрицательных функций из L_1^+).

При $\gamma_+<1$ справедливость леммы очевидна, ибо в этом случае оператор $I-\hat{v}$, где

$$(\hat{v}\varphi)(x)=\int\limits_x^\infty V(t-x)\,\varphi(t)\,dt,$$

обратим в L_1^+.

Рассмотрим итерации (13). Нетрудно проверить, что при $V, g\geqslant 0$

$$\varphi_n\geqslant 0;\ \varphi_n\uparrow \text{ по } n \text{ и из } g\in L_1^+ \to \varphi_n\in L_1^+. \tag{15}$$

Из (13) с учетом (15) имеем

$$\int\limits_a^\infty \varphi_n(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^\infty g(x)\,dx+\int\limits_a^\infty \varphi_n(x)\,dx\int\limits_0^{x-a} V(t)\,dt,$$

откуда с учетом $\gamma=1$ получаем

$$\int\limits_a^\infty \varphi_n(x)\,dx\int\limits_{x-a}^\infty V(t)\,dt\leqslant\int\limits_a^\infty g(x)\,dx,$$

что влечет за собой неравенство

$$\int\limits_0^\infty V(t)\,dt\int\limits_a^{a+t}\varphi_n(x)\,dx\leqslant\|g\|_{L_1^+}. \tag{16}$$

Выберем $r\in(0,\infty)$ так, чтобы $\int\limits_r^\infty V(t)\,dt>0$. Тогда при $a=mr$ из (16) получаем

$$\int\limits_r^\infty V(t)\,dt\int\limits_{mr}^{(m+1)r}\varphi_n(x)\,dx\leqslant\|g\|_{L_1^+},\quad m\in N_0,$$

откуда

$$\int\limits_{mr}^{(m+1)r}\varphi_n(x)\,dx\leqslant\|g\|_{L_1^+}\left(\int\limits_r^\infty V(t)\,dt\right)^{-1}\equiv R, \tag{17}$$

где $m\in N_0$.

На интервале $[mr, (m+1)r]$, $m\in N_0$ имеем

$$\varphi_n \uparrow \text{ по } n \text{ и } \|\varphi_n\|_{L_1[mr,\,(m+1)r]} \leqslant R.$$

Из известной теоремы Б. Леви следует существование функции $\varphi^{(m)}$, $m \in N_0$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi^{(m)} \in L_1\,[mr,\,(m+1)\,r],\ \varphi_n \to \varphi^{(m)} \text{ п.в. в } [mr,\,(m+1)\,r].$$

Рассмотрим функцию φ, определенную на $(0,\,\infty)$ и

$$\varphi(x) = \varphi^{(m)}(x) \text{ для } x \in [mr,\,(m+1)\,r]. \tag{18}$$

Покажем, что φ является решением уравнения (10).

Для $\forall A < +\infty$ и $n \in N_0$ имеем

$$\int\limits_x^A V(t-x)\,\varphi_n(t)\,dt \leqslant \varphi(x) - g(x),$$

откуда, учитывая, что $\varphi_n \to \varphi$ в $L_1[0,\,A]$ и ввиду произвольности A получаем

$$\int\limits_x^\infty V(t-x)\,\varphi(t)\,dt \leqslant \varphi(x) - g(x) \text{ п.в. в } (0,\,\infty). \tag{19}$$

Из (13) имеем $\hat{v}\,\varphi \geqslant \varphi_n - g$. Так как $\varphi_n \to \varphi$ почти везде, то в пределе при $n \to \infty$ получаем

$$(\hat{v}\,\varphi)(x) \geqslant \varphi(x) - g(x) \text{ п.в. в } (0,\,\infty). \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что φ — решение уравнения (10). Покажем, что $\varphi \in \Omega$. Из неравенства (17) имеем

$$\int\limits_{mr}^{(m+1)r} \varphi(x)\,dx \leqslant R,\ m \in N_0. \tag{21}$$

Для $x > 0$ с учетом $\varphi \geqslant 0$ и неравенства (21) получаем

$$\int\limits_0^x \varphi(\tau)\,d\tau \leqslant \left(\left[\frac{x}{r}\right] + 1\right) R = O(x) \text{ при } x \to \infty, \tag{22}$$

т. е. $\varphi \in \Omega$.

Для доказательства формулы (14) рассмотрим последовательность $\{V_m\}_{m=0}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям

$$V_m \in L_1^+;\ 0 \leqslant V_m \leqslant V;\ \gamma_m = \|V_m\| < 1;\ V_m \uparrow V \text{ в } L_1^+. \tag{23}$$

Пусть Φ_m определены из уравнений

$$\Phi_m(x) = V_m(x) + \int\limits_0^x V_m(x-t)\,\Phi_m(t)\,dt. \tag{24}$$

Тогда для решений φ_m уравнений

$$\varphi_m(x) = g(x) + \int_x^{\infty} V_m(t-x)\,\varphi_m(t)\,dt$$

с учетом (23) справедливо равенство

$$\varphi_m(x) = g(x) + \int_0^{\infty} \Phi_m(t)\, g(x+t)\,dt. \tag{25}$$

Отсюда получаем

$$\varphi(x) \geqslant g(x) + \int_0^{\infty} \Phi_m(t)\, g(x+t)\,dt. \tag{26}$$

Из соотношения (26) следует существование предела правой части и неравенство

$$\varphi(x) > g(x) + \int_0^{\infty} \Phi(t)\, g(x+t)\,dt. \tag{27}$$

Аналогичными рассуждениями, заменяя в равенстве (25) Φ_m через Φ и переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем неравенство, противоположное (27). Этим завершается доказательство утверждений а) и б) леммы.

Докажем теперь третье утверждение леммы. При указанных в лемме условиях с учетом теоремы Фубини имеем

$$+\infty > \int_0^{\infty} g(x)\, S(x)\,dx = \int_0^{\infty} g(x)\left[1 + \int_0^{x} \Phi(t)\,dt\right]dx =$$

$$= \int_0^{\infty}\left[g(x) + \int_0^{\infty} \Phi(t)\, g(x+t)\,dt\right]dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx. \blacktriangleright$$

С л е д с т в и е. Если

$$\int_0^{\infty} x\,|g(x)|\,dx < +\infty,$$

то $\varphi \in L_1^+$.

Доказательство следует из утверждения в) леммы и из (9). ▶

Приведем пример, показывающий, что асимптотика (22) для класса $\{g\} = L_1^+$ является достаточно точной.

Рассмотрим уравнение (10) при $g \in L_1^+$ и $V(x) = e^{-x}$;

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^{\infty} e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt. \tag{28}$$

Из уравнения (11) получаем $\Phi \equiv 1$. Тогда из формулы (14) следует

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^{\infty} g(\tau)\, d\tau. \tag{29}$$

Если взять $g = (1+x)^{-p}$, $p = 1 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$, то легко проверить, что

$$\int_0^x \varphi(\tau)\, d\tau \sim \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} (1+x)^{1-\varepsilon}, \quad x \to \infty.$$

Из формулы (29) следует также, что решение $\varphi \in M^+$, если $g \in M^+ \cap L_1^+$.

4°. Рассмотрим теперь уравнение восстановления

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x V(x-t) f(t)\, dt, \tag{30}$$

где $0 \leqslant V \in L_1^+$.

Известно, что если φ локально интегрируема на $[0, \infty)$, то уравнение (30) имеет локально интегрируемое решение f (см. [11]).

Из (30) и (12) нетрудно получить формулу

$$\int_0^x f(\tau)\, d\tau = \varphi * S = \int_0^x \varphi(t)\, S(x-t)\, dt, \tag{31}$$

откуда с учетом $S \uparrow$ по x следует

$$\int_0^x f(\tau)\, d\tau \leqslant S(x) \int_0^x \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{32}$$

Если теперь $\varphi \in L_1^+$, то из соотношения (32) при $\|V\|_{L_1^+} = 1$ получаем

$$\int_0^x f(\tau)\, d\tau = O(S(x)) = O(x), \quad x \to \infty, \tag{33}$$

что означает $f \in \Omega$.

5°. Перейдем к изучению уравнения (1). Факторизация (3) сводит уравнение (1) к следующим двум уравнениям:

$$(I - \hat{v}_-)\, \varphi = g, \tag{34}$$

$$(I - \hat{v}_+)\, f = \varphi. \tag{35}$$

Уравнения (34) и (35) принадлежат к уравнениям типа (10) и (30).

Нашей ближайшей целью является доказательство следующей основной теоремы.

Теорема 1. *Если* $g \in L_1^+$, *то уравнение* (1), (2) *обладает локально интегрируемым решением* f, *причем справедлива оценка*

$$\int_0^x f(\tau)\, d\tau \leqslant S_+(x)\left(\left[\frac{x}{r}\right]+1\right)R, \tag{36}$$

где S_+ *определена из* (7), *а* R — *из соотношения* (17). *В этом случае*

а) *если* $\gamma_+ < 1$ (*или если* $\exists\nu$, $\nu < 0$), *то* $f \in \Omega$,

б) *если* $(|g|, S_-) < +\infty$ *и* $\gamma_\pm = 1$ (*или* $\nu = 0$), *то также* $f \in \Omega$,

в) *если* $(|g|, S_-) < +\infty$; $\gamma_- = 1$, $\gamma_+ < 1$ (*или* $\nu < 0$), *то* $f \in L_1^+$,

где S_- — *определена из уравнения* (7).

Замечание. Условие

$$(|g|, S_-) = \int_0^\infty |g(x)|\, S_-(x)\, dx < +\infty$$

может быть заменено более сильным, но легко проверяемым условием

$$m_1(|g|) = \int_0^\infty x\, |g(x)|\, dx < +\infty.$$

Условие $(|g|, S_-) < +\infty$ выполняется также при $|g| \leqslant cK_+$, где $K_\pm = K(\pm x)$, $x > 0$, а $c = \mathrm{const}$. (Это будет доказано ниже). Поэтому теорема 5.1 работы [11] является частным случаем теоремы 1.

Доказательство. Из леммы 1, свойств решений (30) и оценки (32) следует существование локально интегрируемого решения f уравнения (35) и оценка (36) для этого решения. Утверждение а) следует из неравенства (36) с учетом $S_+ \in M^+$ при $\gamma_+ < 1$. Утверждения б) и в) теоремы следуют из вышеуказанной леммы, если учесть обратимость оператора $I - \hat{v}_+$ в L_1^+ при $\gamma_+ < 1$. Как было отмечено в [11] эквивалентность уравнения (1), (2) и системы (34), (35) а приори неизвестна, поскольку равенство (3) понимается как равенство операторов, действующих в одном из пространств L_p^+, $p \geqslant 1$, M^+, а f в некоторых случаях не принадлежит этим пространствам. Поэтому для завершения доказательства теоремы покажем, что при условиях теоремы решение f уравнения (35) удовлетворяет уравнению (1), (2). Доказательство указанного факта аналогично доказательству леммы 4.2 из [11].

Равенство (3) представим в виде

$$\hat{K} = \hat{v}_+ + \hat{v}_-(I - \hat{v}_+). \tag{37}$$

Введем обозначение

$$f_m(x) = f(x)\,\theta(m - x) \in L_1^+,\ m \in N.$$

Последнее включение следует из локальной интегрируемости функции f. Определим последовательность $\{\omega_m\}_{m=0}^{\infty}$ равенством

$$\omega_m(x)=\varphi(x)\,\theta(m-x)+\int_0^x V_+(x-t)\,\omega_m(t)\,dt.$$

Легко проверить, что

$$0\leqslant f_m\leqslant\omega_m\leqslant f.$$

Из равенства (37) с учетом $f_m\in L_1^+$ получаем

$$\hat{K}f_m=\hat{v}_+f_m+\hat{v}_-(I-\hat{v}_+)f_m. \tag{38}$$

Нетрудно проверить, что

$$[(I-\hat{v}_+)f_m](x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если } x<m,\\ -\int_0^m V_+(x-t)f(t)\,dt, & \text{если } x\geqslant m.\end{cases}$$

Учитывая, что $\hat{v}_+f_m\leqslant f-\varphi$, из (38) следует

$$\hat{K}f_m\leqslant f-g\Rightarrow\exists\,\hat{K}f.$$

Из определения $\{\omega_m\}_{m=0}^{\infty}$ и из (37) при $x<m$ имеем

$$(\hat{K}\omega_m)(x)=\omega_m(x)-\varphi(x)+\int_x^m V_-(t-x)\,\varphi(t)\,dt.$$

Совершая предельный переход при $m\to\infty$ в последнем равенстве с учетом (34) получаем (1).▶

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (1), (2) *функция g удовлетворяет условию*

$$|g(x)|\leqslant c\int_x^{\infty}g^*(\tau)\,d\tau, \tag{39}$$

где $c=\text{const}$, $g^*\in L_1^+$ *и* $(|g^*|,S_-)<+\infty$.

Тогда решение уравнения (1), (2) *удовлетворяет оценке*

$$|f(x)|\leqslant c_1S_+(x), \tag{40}$$

где S_+ *определяется из* (7), *а* $c_1=\text{const}$, *значение которой будет определено ниже.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\varphi^*(x)=g^*(x)+\int_0^{\infty}V_-(t)\,\varphi^*(x+t)\,dt. \tag{41}$$

При условии $(|g^*|,S_-^{\pm})<+\infty$ из леммы 1 следует $\varphi^*\in L_1^+$. Из рав енства (41) получаем

$$\int_x^\infty \varphi^*(\tau)\,d\tau = \int_x^\infty g(\tau)\,d\tau + \int_0^\infty V_-(t)\,dt \int_{x+t}^\infty \varphi^*(\tau)\,d\tau. \tag{42}$$

Из сравнения уравнений (34) и (42) и оценки (39) следует существование решения уравнения (34) и оценка

$$|\varphi(x)| \leqslant C \int_x^\infty \varphi^*(\tau)\,d\tau \leqslant C\,\|\varphi^*\|_{L_1^+} = C_1.$$

Сравнивая (7) и (35) с учетом последней оценки получаем (40).▶

Замечание. Как уже отмечалось выше, условие $(|g^*|, S_-) < +\infty$ выполняется, если $|g^*| \leqslant CK_+$, то есть при

$$|g(x)| \leqslant C \int_x^\infty K_+(\tau)\,d\tau. \tag{43}$$

Еще в работе Е. Хопфа [1] (см. формулу (121)) был использован тот простой факт, что $f(x) \equiv C$ является решением уравнения (1), (2) с $g(x) = C \int_x^\infty K(\tau)\,d\tau$. Отсюда непосредственно следует, что при выполнении условия (43) уравнение (1), (2) имеет решение f, $|f| \leqslant C$. Теорема 2 является некоторым обобщением этого факта*.

Она также позволяет установить существование локально интегрируемого решения уравнения (1), (2) в ряде случаев, когда $0 \leqslant g \notin L_1^+$.

Лемма 3. *Пусть в уравнении* (4) $K_\pm \geqslant 0$, $\mu = 1$, $\mu_\lambda^+ < +\infty$, *где* $\lambda > 1$ (*или* $\mu_\lambda^- < +\infty$, $\lambda > 1$). *Тогда* $m_{\lambda-1}(V_+) < +\infty$ (*или* $m_{\lambda-1}(V_-) < +\infty$).

Доказательство. В [11] доказано, что решение уравнения (4) при $\mu = 1$ можно представить в виде

$$V_\pm(x) = K_\pm(x) + \int_0^\infty \Phi_\mp(t)\,K_\pm(x+t)\,dt,$$

где $\Phi_\pm$ определяются из (6). Из последнего равенства имеем, при $\tau \geqslant 0$

$$\int_\tau^\infty V_\pm(x)\,dx = \int_\tau^\infty K_\pm(x)\,dx + \int_\tau^\infty K_\pm(x)\,dx \int_0^{x-\tau} \Phi_\mp(t)\,dt, \tag{44}$$

* Рецензент настоящей работы отметил, что условие (43) существования локально интегрируемого решения уравнения (1), (2) содержалось в сообщении А. Б. Нерсесяна на семинаре проф. М. М. Джрбашяна в ЕрГУ в декабре 1979 г и предложил указать на это.

откуда, с учетом (8) и свойства $S_\pm \uparrow$ по x, имеем

$$\int_\tau^\infty V_\pm(x)\,dx \leqslant \int_\tau^\infty K_\pm(x)\,S_\mp(x)\,dx. \tag{45}$$

Умножая (45) на $\tau^{\lambda-2}$ и интегрируя от 0 до ∞, с учетом оценок (9) и соотношений

$$\int_0^\infty \tau^{\lambda-2}\,d\tau \int_\tau^\infty V_\pm(x)\,dx = \int_0^\infty V_\pm(x)\,dx \int_0^x \tau^{\lambda-2}\,d\tau = \frac{1}{\lambda-1}\,m_{\lambda-1}(V_\pm),$$

$$\int_0^\infty \tau^{\lambda-2}\,d\tau \int_\tau^\infty x^p K_\pm(x)\,dx = \frac{1}{\lambda-1}\,m_{\lambda-1+p}(K_\pm),\ p=1,\ 2,$$

получаем

$$m_{\lambda-1}(V_\pm) < +\infty. \blacktriangleright$$

Замечание. Если в равенстве (44) взять $\tau=0$, то с учетом (8) получаем

$$\gamma_\pm = (K_\pm,\ S_\mp) = \int_0^\infty K_\pm(x)\,S_\mp(x)\,dx \leqslant 1.$$

Этим фактом мы пользовались выше.

В лемме 1 было доказано, что при $m_1(|g|) < +\infty$, $\varphi \in L_1^+$. Обобщая этот результат, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (1), (2) $\gamma_- = 1$, $\gamma_+ < 1$ *или* $\exists \nu$, $\nu < 0$), $0 \leqslant g \in L_1^+$,

$$m_p(g) < +\infty,\ \mu_p^+ = m_p(K_+) < +\infty,\ \textit{где}\ 1 < p \in N. \tag{46}$$

Тогда для решения f уравнения (1), (2)

$$m_{p-1}(f) < +\infty. \tag{47}$$

Доказательство. Интегрируя равенство (14) от $\tau > 0$ до ∞, с учетом равенства (8), аналогично (45) получаем

$$\int_\tau^\infty \varphi(x)\,dx \leqslant \int_\tau^\infty g(x)\,S_-(x)\,dx.$$

По аналогии с доказательством леммы 2 можно показать, что при условии (46)

$$m_{p-1}(\varphi) < +\infty. \tag{48}$$

Из указанной леммы следует также

$$m_{p-1}(V_+) < +\infty, \tag{49}$$

при условии (46).

Покажем, что при условиях $\gamma_+ < 1$, (48) и (49) справедливо утверждение (47) теоремы. Доказательство проведем по индукции.

Пусть $m_{j-1}(f) < +\infty$ при $j \leqslant p-1$. Покажем, что из этого вытекает, что $m_j(f) < +\infty$.

Нетрудно проверить справедливость неравенства

$$\int_0^A x^j f(x)\,dx \leqslant \int_0^A x^j \varphi(x)\,dx + \sum_{q=0}^{j} C_j^q \int_0^A x^q f(x)\,dx \cdot \int_0^A t^{j-q} V_+(t)\,dt$$

для $0 < A < +\infty$, откуда с учетом $\gamma_+ < 1$ следует

$$\int_0^A x^j f(x)\,dx \leqslant \left[m_j(\varphi) + \sum_{q=0}^{j-1} C_j^q\, m_q(f)\, m_{j-q}(V_+) \right] (1-\gamma_+)^{-1},$$

что влечет за собой $m_j(f) < +\infty$. ▶

Теорема 4. *Пусть в уравнении* (1), (2) $0 \leqslant g \in L_1^+$, $\gamma_- = 1$, $\gamma_+ < 1$, (*или* $\exists\, \nu$, $\nu < 0$); $(g, S_-) < +\infty$, K, $g \downarrow$ *на* $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

Тогда а) *из* $g \in C[0, \infty)$ *следует* $f \in C[0, \infty)$;

б) *из* $g \in \mathrm{Lip}^1[0, \infty)$, $K_+ \in M^+$ *следует* $f \in \mathrm{Lip}^1[0, \infty)$,

в) *из* $\overset{\infty}{\underset{0}{\bigvee}} g < +\infty$ *следует* $\overset{\infty}{\underset{0}{\bigvee}} f < +\infty$.

Доказательство. Очевидно, из условий теоремы следует $g \in M^+$, а из леммы 1 при вышеуказанных условиях вытекает существование решения φ уравнения (34), причем $\varphi \in L_1^+$.

Введем обозначения

$$r = \inf\{x;\ x > \tau,\ V_-(x) \leqslant 1\},\quad \rho = \int_r^\infty K_-(x)\,dx. \tag{50}$$

Существование r следует из монотонности $K_-(x)$, а следовательно, и V_- (см. [11]).

Равенство (13) можно представить в виде

$$\varphi_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^r V_-(t)\,\varphi_n(x+t)\,dt + \int_r^\infty V_-(t)\,\varphi_n(x+t)\,dt. \tag{51}$$

Учитывая, что $\varphi_n \in M^+$ при $g \in M^+$, $\varphi_n \uparrow$ по n при g, $K \geqslant 0$, а также (50) и оценку

$$\int_\tau^\infty \varphi_n(x)\,dx \leqslant \|\varphi\|_{L_1^+} \equiv C \quad \text{при} \quad \tau \geqslant 0,$$

из соотношения (51) при $x \in [0, \infty)$ получаем

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \operatorname*{supess}_{x>0} g + C + \operatorname*{supess}_{x>0} \varphi_n \cdot \int_0^r V_-(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда имеем

$$|\varphi_n(x)| \leqslant (\operatorname*{supess}_{x>0} g + C)\,\rho^{-1} \equiv R_1. \tag{52}$$

Из равенства (51) при $\varphi_n \downarrow$ на $[\alpha, \infty)$, что следует из условия $g \downarrow$ на $[\alpha, \infty)$, получаем

$$\omega(\delta, \varphi_{n+1}) \leqslant \omega(\delta, g) + \int_0^r V_-(t)\,\omega(\delta, \varphi_n)\,dt + \delta R_1, \tag{53}$$

где $\omega(\delta, F)$ — модуль непрерывности функции F, а R_1 определяется из (52).

Из соотношения (53) по индукции проверяется оценка

$$\omega(\delta, \varphi_n) \leqslant [\omega(\delta, g) + \delta R_1]\,\rho^{-1}. \tag{54}$$

С учетом $\varphi_n \uparrow$ по n, оценок (52) и (54), из теоремы Арцела следует равномерная сходимость φ_n на $[\alpha, \infty)$. Нетрудно проверить, что $\varphi \in M^+ \cap C^+$. Из [12] имеем, что при $V_+ \in L_1^+$ и $\varphi \in M^+ \cap C^+$ решение f уравнения (35) принадлежит C^+, что доказывает утверждение а) теоремы.

Подобными рассуждениями из (51) получаем

$$L(\varphi_n) \leqslant [L(g) + R_1]\,\rho^{-1}, \tag{55}$$

где $L(F)$ — постоянная Липшица функции F, поэтому и в данном случае для последовательности $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ выполняются условия теоремы Арцела. В пределе при $n \to \infty$ из (55) получаем

$$L(\varphi) \leqslant [L(g) + R_1]\,\rho^{-1}. \tag{56}$$

Из оценки (56) и монотонности φ следует $\varphi \in M^+$.

Рассмотрим последовательность, определяемую равенством

$$f_{n+1}(x) = \varphi(x) + \int_0^x V_+(x-t)\,f_n(t)\,dt, \quad f_0 = 0. \tag{57}$$

Нетрудно проверить, что при $\varphi, V_+ > 0$, $f_n \uparrow$ по n.

Также легко с учетом $\gamma_+ = \|V_+\|_{L_1^+} < 1$ и $\varphi, K \in M^+$ проверяются оценки

$$f_n(x) \leqslant (1-\gamma_+)^{-1} \operatorname*{supess}_{x>0} \varphi \equiv R_2, \tag{58}$$

$$V_+(x) \leqslant (1 + \operatorname*{supess}_{x>0} K_+)\,\rho^{-1} \equiv R_3. \tag{59}$$

Из равенства (57) с учетом (58) и (59) получаем

$$|f_{n+1}(x+\delta) - f_{n+1}(x)| < L(\varphi)\,\delta + \gamma_+ L(f_n)\,\delta + R_2 R_3\,\delta,$$

откуда имеем

$$L(f_n) \leqslant [L(\varphi) + R_2 R_3]\,(1-\gamma_+)^{-1}. \tag{60}$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем $f \in \mathrm{Lip}^1[0, \infty)$, что доказывает второе утверждение теоремы.

Из равенства (51) следует также, что

$$\overset{\infty}{\underset{0}{\bigvee}} \varphi_n \leqslant \left(\overset{\infty}{\underset{0}{\bigvee}} g + \|\varphi\|_{L_1^+} \right) \rho^{-1}. \tag{61}$$

Учитывая оценки (52) и (61) и условие $\varphi_n \uparrow$ по n из теоремы Хелли [13] вытекает $\overset{\infty}{\underset{0}{\bigvee}} \varphi < +\infty$. Аналогично (60), из соотношения (57) легко получить оценку

$$\overset{\infty}{\underset{0}{\bigvee}} f_n \leqslant \left(\overset{\infty}{\underset{0}{\bigvee}} \varphi + R_3 \gamma_+ \right) (1-\gamma_+)^{-1}, \tag{62}$$

где R_3 определена из (59). С учетом $f_n \uparrow$ по n, оценок (58) и (62), из вышеуказанной теоремы Хелли следует, что $\overset{\infty}{\underset{0}{\bigvee}} f < +\infty$.▶

В заключение выражаю глубокую благодарность Н. Б. Енгибаряну за постоянное внимание к работе и ценные указания.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 15.II.1980

Լ. Գ. ԱՐԱԲԱՋՅԱՆ. Վիներ-Հոպֆի կոնսերվատիվ հավասարման մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ուսումնասիրված է Վիներ-Հոպֆի

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t) f(t)\, dt$$

հավասարումը կոնսերվատիվ դեպքում՝

$$\left(K \geqslant 0, \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, dx = 1 \right):$$

Ապացուցվում է, որ երբ $g \in L_1$ *հավասարումը ունի լոկալ ինտեգրելի լուծում, լրացուցիչ՝*

$$m_1(|g|) = \int_0^\infty x\, |g(x)|\, dx < +\infty \tag{*}$$

պայմանի դեպքում

$$\int_0^x f(t)\, dt = O(x), \quad x \to \infty:$$

Եթե $\int_{-\infty}^{\infty} x K(x)\, dx < 0$ և $m_1(|g|) < +\infty$, ապա $f \in L_1^+$:

L. G. ARABADGIAN. *On Wiener-Hopf integral equation* (summary)

In this paper the Wiener-Hopf integral equation in conservative case is considered. The existence of local integrable solution f is proved when $g \in L_1$. It is proved that if

$$m_1(|g|) = \int_0^\infty x\,|g(x)|\,dx < +\infty \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^\infty xK(x)\,dx < 0$$

then $f \in L_1(0, \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Hopf*. Mathematical problems of radiative equilibrium, Cambridge Tracts, 31, 1934.
2. *В. А. Амбарцумян*. Научные труды, том I, Ереван, 1960.
3. *М. Г. Крейн*. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13:5, 1958, 3—120.
4. *В. А. Фок*. О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Мат. сб., 14, 1—3, 1944, 3—50.
5. *D. V. Lindley*. The theory of quenes with a single server, Proc. Cambr. Phil. Soc., vol. 48, 1952.
6. *F. Spitzer*. The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density, Duke. Math. J., 24, 1957.
7. *В. В. Соболев*. Курс теоретической астрофизики, М., «Наука», 1967.
8. *Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян*. Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения, Мат. сб., 97 (139), 1 (5), 1975.
9. *М. Г. Крейн*. О нелинейных интегральных уравнениях, играющих роль в теории уравнений Винера—Хопфа, «Мат. исследования», вып. 46, Кишинев, 1977.
10. *З. Пресдорф*. Некоторые классы сингулярных уравнений, «Мир», М., 1979.
11. *Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян*. О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера—Хопфа, Препринт НИИ ФКС ЕрГУ, 1979.
12. *Р. Беллман, К. Кук*. Дифференциально-разностные уравнения, «Мир», М., 1967.
13. *И. П. Натансон*. Теория функций вещественной переменной, «Наука», М., 1967.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS