ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ (գլխավոր խմբագրի տեղակալ), Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Մ. Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ (պատ. քարտուղար), Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ, Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված մեկ թերթից ավել շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը լրամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН (зам. главного редактора), Р. В. АМБАРЦУМЯН, Н. У. АРАКЕЛЯН, И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ, С. Н. МЕРГЕЛЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН, М. А. ОГАНЕСЯН (отв. секретарь), А. А. ТАЛАЛЯН, Р. Л. ШАХБАГЯН (зам. главного редактора)

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по собому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

1980 T.15 №6

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN (associate editor), R. V. AMBARTZUMIAN, N. H. ARAKELIAN, M. A. HOVHANESSIAN (secretary), S. N. MERGELIAN, A. B. NERSESIAN, A. A. TALALIAN, R. L. SHAKHBAGIAN (associate editor), I. D. ZASLAVSKII

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of types script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been caried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

Ане 411

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 6, 1980 Математика

В. А. МАРТИРОСЯН

О РОСТЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНОВ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИХ РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1°. Пусть E—компакт комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $A(E)$—банахово пространство непрерывных на E и голоморфных в его внутренности E^0 комплексных функций с нормой $\|f\| = \sup |f|(E)$.

В 1951 г. С. Н. Мергелян получил [1] исчерпывающее решение проблемы комплексной полиномиальной аппроксимации, доказав, что любая функция из $A(E)$ приближается равномерно на E многочленами тогда и только тогда, когда E имеет связное дополнение $\mathbf{C} \setminus E$. В этой связи естественно рассмотреть следующую задачу: каким условиям должны удовлетворять компакт E и последовательность положительных чисел $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$, чтобы какова бы ни была функция $f \in A(E)$ для любого числа $\varepsilon > 0$ существовал бы такой многочлен $p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, что

$$\|f - p\| < \varepsilon \tag{1}$$

и

$$|c_k| < \varepsilon \omega_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n?$$

Очевидно, что для разрешимости задачи необходимо, чтобы E имело связное дополнение $\mathbf{C} \setminus E$ и $0 \overline{\in} E^0$; кроме того при $0 \in E$ аппроксимируемые функции должны быть равны нулю в точке нуль.

Первый общий результат по этой задаче получил С. Я. Хавинсон. Он установил [2], что если компакт E имеет связное дополнение $\mathbf{C} \setminus E$, $E^0 = \varnothing$ и $0 \in E$, а последовательность положительных чисел $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию

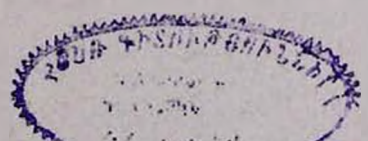
$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\omega_k} = \infty, \tag{2}$$

то любая функция $f \in A(E)$, $f(0) = 0$, допускает приближение вида (1); если же 0 является предельной точкой компакта E и

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{\omega_k} < \infty,$$

то существуют функции $f \in A(E)$, $f(0) = 0$, не допускающие такого приближения.

Затем Р. М. Тригуб показал [3], что приведенный результат о приближении справедлив также для более общего класса компактов: компакты, внутренность которых не может сгущаться к граничной



точке нуль. Тем самым для этого важного класса компактов был найден точный рост мажорантной последовательности чисел $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$.

В настоящей заметке возможность приближения вида (1) изучается для таких компактов, внутренность которых может сгущаться к граничной точке нуль. Оказывается, что в такой ситуации рост мажорантной последовательности зависит от метрических свойств внутренности компакта в окрестности нуля и уже, вообще говоря, не определяется условием (2).

2°. Изложение полученных результатов начнем с рассмотрения такого случая, когда возможно „прерывистое" сгущение внутренности компакта к его граничной точке нуль.

Теорема 1. *Пусть компакт E имеет связное дополнение $\mathbf{C}\setminus E$, $0\in\partial E$ и в любом круге $\{z:|z|<r\}$ существует охватывающая точку нуль кривая Жордана $\gamma\subset\mathbf{C}\setminus E$, а последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{w_k}=\infty.$$

Тогда любая функция $f\in A(E)$, $f(0)=0$, допускает приближение вида (1).

Доказательство. Пусть комплексная борелевская мера μ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\sum_{k=0}^{n} w_k\left|\int_{\partial E} z^k\,d\mu_z\right|\leqslant 1,\quad n=0,\ 1,\cdots. \tag{3}$$

В силу критерия полноты с мажорантой $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ системы функций $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ (см. [4]) и теорем Рисса и Мергеляна, достаточно показать, что из (3) следуют соотношения

$$\int_{\partial E} z^k\,d\mu_z=0,\quad k=1,\ 2,\cdots. \tag{4}$$

Рассмотрим голоморфную в $\overline{\mathbf{C}}\setminus E$ функцию

$$G(t)=\int_{\partial E}\frac{d\mu_z}{t-z}.$$

В окрестности точки $t=\infty$ она разлагается в ряд Лорана

$$G_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty} t^{-k-1}\int_{\partial E} z^k\,d\mu_z.$$

Так как из (3) имеем, в частности

$$\left|\int_{\partial E} z^k\,d\mu_z\right|\leqslant\frac{1}{w_k},\quad k=0,\ 1,\cdots,$$

то, в силу (2), функция $G_1(t)$ будет голоморфной при $t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$. Поэтому, учитывая связность $\mathbf{C} \setminus E$, по теореме единственности получим

$$G(t) = G_1(t), \quad t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus E. \tag{5}$$

При предположениях теоремы найдутся такие контуры γ_n, $n = 1, 2, \cdots$, что каждый контур $\gamma_n \subset \mathbf{C} \setminus E$ и охватывает точку нуль, диаметры контуров стремятся к нулю при $n \to \infty$ и если G_n—ограниченная область с границей γ_n, то $\gamma_{n+1} \subset G_n$. Обозначим $E_n = E \setminus (E \cap G_n)$; ясно, что $E_n \cap (E \setminus E_n) = \varnothing$, $n = 1, 2, \cdots$. Из определения $G_1(t)$ имеем

$$\int\limits_{\partial E} z^k \, d\mu_z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} t^k \, G_1(t) \, dt, \quad k = 1, 2, \cdots; \; n = 1, 2, \cdots.$$

Однако, $\gamma_n \subset \mathbf{C} \setminus E$, $n = 1, 2, \cdots$ и поэтому, согласно (5)

$$\int\limits_{\partial E} z^k \, d\mu_z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} t^k \, dt \int\limits_{\partial E} \frac{d\mu_z}{t - z}.$$

Отсюда, применяя теорему Фубини и интегральную формулу Коши, получим

$$\int\limits_{\partial E} z^k \, d\mu_z = \int\limits_{\partial E \setminus \partial E_n} z^k \, d\mu_z$$

и, следовательно, будем иметь

$$\int\limits_{\partial E_n} z^k \, d\mu_z = 0, \quad k = 1, 2, \cdots; \; n = 1, 2, \cdots.$$

Переходя к пределу под знаком интеграла при $n \to \infty$, что возможно по теореме Лебега, получим соотношения (4). Теорема доказана.

3°. Рассмотренному в теореме 1 случаю противоположен другой случай, когда возможно „непрерывное" сгущение внутренности компакта к его граничной точке нуль. В этом случае рост мажорантной последовательности зависит от метрических свойств внутренности компакта в окрестности нуля и уже не определяется условием (2). Чтобы привести соответствующий результат нам понадобятся две леммы.

Для компакта E и точки t введем обозначение

$$d_E(t) = \min_{z \in E} |z - t|.$$

Лемма 1. *Пусть дуга Жордана* Γ *в полярной системе координат* r, θ *имеет уравнение* $\theta = \varphi(r)$, $0 \leqslant r < R$, *где функция* $\varphi(r)$ *при* $0 < r < R$ *имеет равномерно ограниченную производную. Тогда для всех достаточно малых* $t \in \Gamma$ *справедлива оценка*

$$d_\Gamma(t) \geqslant C\,|t|\,|\arg t - \varphi(|t|)|, \tag{6}$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* t.

Доказательство. Пусть $|\varphi'(r)| \leqslant M$ $(M \geqslant 1)$, при $0 < r < R$. Оценку (6) докажем для всех $t \in \Gamma$, удовлетворяющих условию

$$|t| \leqslant \min\left\{\frac{R}{2}, \frac{1}{2M}\right\}.$$

Зафиксируем такое t и взяв $z = re^{i\varphi(r)} \in \Gamma$, рассмотрим функцию

$$f(r) = |t-z|^2 = |t|^2 + r^2 - 2\,|t|\,r\cos(\arg t - \varphi(r)),\ 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Оценим эту функцию снизу. Так как $f(r) \geqslant (r - |t|)^2$, $0 \leqslant r \leqslant R$, то обозначая

$$\delta = \frac{|\arg t - \varphi(|t|)|}{32},\quad I = \left(\left(1 - \frac{\delta}{M}\right)|t|,\ \left(1 + \frac{\delta}{M}\right)|t|\right),$$

будем иметь

$$f(r) \geqslant \frac{\delta^2}{M^2}\,|t|^2,\ 0 \leqslant r \leqslant R,\ r \overline{\in} I. \tag{7}$$

Для оценки функции при $r \in I$ отметим, что из теоремы Лагранжа о конечном приращении имеем

$$|\varphi(r) - \varphi(|t|)| < \delta,\ r \in I. \tag{8}$$

Рассмотрим два случая. Предположим сперва, что

$$\frac{\pi}{2} + 2\delta \leqslant |\arg t - \varphi(|t|)| \leqslant \pi.$$

Тогда из (8) будем иметь

$$\frac{\pi}{2} + \delta \leqslant |\arg t - \varphi(r)| \leqslant \pi + \delta,\ r \in I,$$

откуда, так как $0 < \delta < \frac{1}{4}$, получим

$$f(r) \geqslant |t|^2,\ r \in I. \tag{9}$$

Пусть теперь имеем

$$2\delta \leqslant |\arg t - \varphi(|t|)| \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\delta. \tag{10}$$

Для производной

$$f'(r) = 2r - 2\,|t|\cos(\arg t - \varphi(r)) - 2\,|t|\,r\varphi'(r)\sin(\arg t - \varphi(r)),\ 0 < r < R,$$

имеются две возможности: она или имеет хотя бы один корень $r_0 \in I$, или не имеет ни одного такого корня. Ясно, что во втором случае будем иметь

$$f(r) \geqslant \frac{\delta^2}{M^2}\,|t|^2,\ r \in I.$$

В другом случае, учитывая, что каждый корень r_0 удовлетворяет соотношению

$$r_0 = \frac{|t| \cos(\arg t - \varphi(r_0))}{1 - |t| \varphi'(r_0) \sin(\arg t - \varphi(r_0))},$$

простыми выкладками получим неравенство

$$f(r_0) \geqslant |t|^2 \sin^2(\arg t - \varphi(r_0)),\ f'(r_0) = 0,\ r_0 \in I.$$

Поэтому, так как из (8), (10) будем иметь

$$\delta \leqslant |\arg t - \varphi(r_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} + 3\delta,$$

то получим

$$f(r_0) \geqslant |t|^2 \sin^2 \delta,\ f'(r_0) = 0,\ r_0 \in I.$$

Следовательно, (10) всегда влечет неравенство

$$f(r) \geqslant \frac{\sin^2 \delta}{M^2} |t|^2,\ r \in I. \qquad (11)$$

Остается отметить, что (7), (9), (11) приводят к оценке

$$f(r) \geqslant C_1 \delta^2 |t|^2,\ 0 \leqslant r \leqslant R,$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от t. Лемма доказана.

Формулировке другой леммы предпошлем (см. статью С. Е. Варшавского [5]) несколько определений.

Пусть кривые Γ_+ и Γ_-, расположенные в плоскости $\zeta = re^{i\theta}$, не имеют общих точек, кроме точки $\zeta = 0$ и представляются в полярных координатах непрерывными функциями

$$\theta = \varphi_+(r),\ \theta = \varphi_-(r),\ 0 \leqslant r < +\infty,$$

удовлетворяющими условиям:

$$-\infty \leqslant \theta_1 < \varphi_{\pm}(r) < \theta_2 \leqslant +\infty,$$

$$0 < r < +\infty.$$

$$0 < \varphi_+(r) - \varphi_-(r) < 2\pi$$

Область Δ, ограниченную кривой $\Gamma = \Gamma_+ + \Gamma_-$ и содержащую область

$$\varphi_-(r) < \vartheta < \varphi_+(r),\ 0 \leqslant r < +\infty,$$

назовем *простым углом Жордана*. Величины

$$\theta(r) = \varphi_+(r) - \varphi_-(r) \text{ и } \psi(r) = \frac{1}{2}[\varphi_+(r) + \varphi_-(r)]$$

назовем *раствором и биссектрисой* угла Δ соответственно. Скажем, что *угол Жордана Δ в точке $\zeta = \infty$ имеет угол колебания границы, равный γ и конечное вращение границы*, если функции $\theta(r)$ и $\psi(r)$ при $r \geqslant r_1$ имеют непрерывные производные, причем

$$\lim_{r \to \infty} r\theta'(r) = 0,\ \lim_{r \to \infty} r\psi'(r) = \operatorname{tg} \gamma,\ |\gamma| < \frac{\pi}{2}$$

и сходятся интегралы

$$\int_{r_1}^{\infty} |dr\,\theta'(r)|, \quad \int_{r_1}^{\infty} |dr\psi'(r)|.$$

Пусть дополнительно сходится интеграл

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{r\theta'^2(r)}{\theta(r)}\,dr.$$

Тогда из теоремы С. Е. Варшавского [5] легко следует, что если $w = w(\zeta)$ — функция, конформно отображающая угол Δ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$, причем $\lim\limits_{\zeta \to \infty} |w(\zeta)| = +\infty$, то существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что в угле $\overline{\Delta}$ при $|\zeta| \geqslant r_1$ имеет место неравенство

$$C_1\sigma(|\zeta|) \leqslant |w(\zeta)| \leqslant C_2\sigma(|\zeta|), \tag{12}$$

где

$$\sigma(s) = \exp\left\{\pi \int_{r_1}^{s} \frac{1+[r\psi'\,r)]^2}{r\theta(r)}\,dr\right\}.$$

Далее скажем, что угол Жордана Δ в точке $\zeta = 0$ имеет угол колебания границы, равный γ и конечное вращение границы, если функции $\theta(r)$ и $\psi(r)$ при $0 < r \leqslant r_2$ имеют непрерывные производные, причем

$$\lim_{r \to 0} r\theta'(r) = 0, \quad \lim_{r \to 0} r\psi'(r) = \operatorname{tg}\gamma, \quad |\gamma| < \frac{\pi}{2}$$

и сходятся интегралы

$$\int_0^{r_2} |dr\theta'(r)|, \quad \int_0^{r_2} |dr\psi'(r)|.$$

Ясно, что такой угол при отображении $z = \frac{1}{\zeta}$ переходит в угол, имеющий в точке $z = \infty$ угол колебания границы, равный γ, и конечное вращение границы.

Лемма 2. *Пусть Δ — простой угол Жордана, имеющий в точке $\zeta = \infty$ конечное вращение границы и угол колебания границы, равный γ, $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, а $\theta(r)$ и $\psi(r)$ $(0 \leqslant r < +\infty)$ — соответственно раствор и биссектриса угла Δ, причем*

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{r\theta'^2(r)}{\theta(r)}\,dr < \infty$$

и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\log\dfrac{1}{\vartheta(r)}}{r}<\infty.$$

Тогда существует целая функция $g(\zeta)\not\equiv\text{const}$, *которая равномерно ограничена при* $\zeta\in\mathbf{C}\setminus\Delta$ *и удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\ \frac{\log M(s)}{\sigma(2s)}<\infty,$$

где

$$\sigma(s)=\exp\left\{\pi\int_{r_1}^{s}\frac{1+[r\psi'(r)]^2}{r\vartheta(r)}\,dr\right\},\quad M(s)=\max_{|\zeta|\le s}|g(\zeta)|.$$

Доказывается эта лемма по следующей схеме (см. [1], стр. 96). Пусть Δ^*—содержащийся в Δ угол, биссектриса которого совпадает с биссектрисой угла Δ, а раствор $\vartheta^*(r)$ имеет вид

$$\vartheta^*(r)=\begin{cases}\vartheta(r)\left[1-\dfrac{\vartheta^2(r)}{8\pi^2r^2}\right] & \text{при } r\geqslant 1,\\ \vartheta(r)\left[1-\dfrac{\vartheta^2(1)}{8\pi^2}\right] & \text{при } 0\leqslant r\leqslant 1.\end{cases}$$

Этот угол сам удовлетворяет всем требованиям леммы относительно угла Δ и, кроме того, справедливо неравенство

$$\sigma^*(s)\leqslant C\sigma(s),\quad s\geqslant r_1, \tag{13}$$

где C — постоянная,

$$\sigma^*(s)=\exp\left\{\pi\int_{r_1}^{s}\frac{1+[r\psi'(r)]^2}{r\vartheta^*(r)}\,dr\right\}.$$

Пусть $w=w(\zeta)$—функция, конформно отображающая Δ^* на полуплоскость $\operatorname{Re} w>0$, причем $\lim\limits_{\zeta\to\infty}|w(\zeta)|=+\infty$, а D^* — дополнительная к Δ^* область. Обозначая

$$D_R^*=D^*\cup\{\zeta:|\zeta|<R\}\ (R>0),\quad \Gamma_R=\partial D_R^*,$$

определим голоморфную в области D_R^* функцию

$$g_R(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{w(z)}\,dz}{z(z-\zeta)},\quad \zeta\in D_R^*,$$

где контур Γ_R обходится в таком направлении, при котором область D_R^* остается слева. Каждая функция $g_{R'}(\zeta)$, $R'>R$, осуществляет аналитическое продолжение функции $g_R(\zeta)$ из области D_R^* в область $D_{R'}^*$. Таким образом, определяется целая функция $g(\zeta)$ — функция, существование которой утверждает лемма. Она равномерно ограничена при $\zeta\in\mathbf{C}\setminus\Delta$, так как имеем оценку

$$|g(\zeta)|\leqslant C_1+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1\cap\overline{\Delta^*}}\frac{d|z|}{|z||z-\zeta|},\quad \zeta\in\mathbf{C}\setminus\Delta,\ |\zeta|\geqslant 2,$$

где постоянная C_1 не зависит от ζ, а из свойств последнего интеграла можно извлечь его равномерную ограниченность при $\zeta \in \mathbf{C} \setminus \Delta$. Для оценки роста функции $g(\zeta)$ достаточно заметить, с учетом (13), что она растет примерно как функция $e^{\omega(\zeta)}$, $\zeta \in \Delta^*$, и для $\omega(\zeta)$ справедливо неравенство вида (12) с заменой $\sigma(s)$ на $\sigma^*(s)$.

4°. Приведенные леммы позволяют изучить рост мажорантной последовательности в случае, когда возможно „непрерывное" сгущение внутренности компакта к его граничной точке нуль.

Теорема 2. *Пусть S—объединение не имеющих друг с другом общих точек, за исключением нуля, конечного числа секторов*

$$S_k = \{z \in \mathbf{C} : \varphi_{k,-}(|z|) \leqslant \arg z \leqslant \varphi_{k,+}(|z|),\ |z| \leqslant R\},\ k=1, 2, \cdots, n,$$

причем:

а) *каждая из функций $\varphi_{k,\pm}(r)(0 \leqslant r \leqslant R)$, $k=1, 2, \cdots, n$, имеет при $0 < r < R$ равномерно ограниченную производную;*

в) $\vartheta_k(r) > 0$ *при* $0 < r \leqslant R$, $k=1, 2, \cdots, n$, *и удовлетворяются условия*

$$\overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\log \frac{1}{\vartheta_k(r)}}{\log \frac{1}{r}} < \infty,\ k=1, 2, \cdots, n, \tag{14}$$

где

$$\vartheta_k(r) = \varphi_{k+1,-}(r) - \varphi_{k,+}(r),\ k=1, 2, \cdots, n-1, \text{ и}$$
$$\vartheta_n(r) = \varphi_{1,-}(r) - \varphi_{n,+}(r).$$

Пусть компакт E имеет связное дополнение $\mathbf{C} \setminus E$, $0 \in \partial E$ и в окрестности $\{z : |z| \leqslant R\}$ точки нуль $E \cap \{z : |z| \leqslant R\} \subseteq S$, а последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k \log k}{\log w_k} < \frac{\pi}{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \theta_k(0)}, \tag{15}$$

где

$$\theta_k(r) = \varphi_{k,+}(r) - \varphi_{k,-}(r),\ k=1, 2, \cdots, n.$$

Тогда любая функция $f \in A(E)$, $f(0)=0$ допускает приближение вида (1).

Доказательство. Пусть комплексная борелевская мера μ удовлетворяет неравенством (3). Достаточно показать, что из (3) следуют соотношения (4). Введем для этого, как и при доказательстве теоремы 1, функции

$$G(t) = \int_{\partial E} \frac{d\mu_z}{t - z},\ t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus E,$$

$$G_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-k-1} \int_{\partial E} z^k\, d\mu_z,\ t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \{0\}.$$

Они удовлетворяют соотношению (5). Кроме того, так как из (3) имеем, в частности

$$\left| \int_{\partial E} z^k \, d\mu_z \right| \leqslant \frac{1}{w_k}, \quad k=0, 1, \cdots,$$

то порядок ρ целой функции $g(\zeta) = G_1\left(\frac{1}{t}\right)$ будет удовлетворять неравенству

$$\rho \leqslant \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k \log k}{\log w_k}. \tag{16}$$

Рассмотрим содержащее S следующее множество:

$$S^* = \bigcup_{k=1}^{n} S_k^*,$$

где

$$S_k^* = \{z \in \mathbf{C} : \varphi_{k,-}(|z|) - \theta^*(|z|) < \arg z < \varphi_{k,+}(|z|) + \theta^*(|z|),\ |z| \leqslant R\}$$

и

$$\theta^*(r) = \frac{r}{4R} \min_{1 \leqslant k \leqslant n} |\vartheta_k(r)|,\ 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Ясно, что из (14) следует оценка

$$\theta^*(r) \geqslant C_1 r^{\alpha},\ 0 \leqslant r \leqslant R, \tag{17}$$

где постоянные $C_1 > 0$ и $\alpha \geqslant 1$ не зависят от r.

Обозначая через $M(s) = \max\limits_{0 < \varphi < 2\pi} |g(se^{i\varphi})|$ и замечая, что

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\log \sigma_k^*(s)}{\log s} = \frac{\pi}{\theta_k(0) + \theta^*(0)} = \frac{\pi}{\theta_k(0)},\ k=1, 2, \cdots, n,$$

где

$$\sigma_k^*(s) = \exp\left\{ \pi \int_{\frac{1}{s}}^{R} \frac{dr}{r\,[\theta_k(r) + \theta^*(r)]} \right\},$$

из (15), (16) в силу определения порядка целой функции получим

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\log M(s)}{\sigma_k^*(s)} = 0,\ k=1, 2, \cdots, n. \tag{18}$$

Далее, так как $E \cap \{z : |z| \leqslant R\} \subseteq S \subset S^*$, то из леммы 1 легко следует, что при достаточно малом r $(0 < r < R)$ для всех $t \in D^*$, где

$$D^* = (\mathbf{C} \setminus S^*) \cap \{z : 0 < |z| \leqslant r\},$$

имеет место оценка

$$d_E(t) > C_2 |t| \theta^*(|t|),$$

где постоянная $C_2 > 0$ не зависит от t. Значит, с учетом (17), будем иметь

$$d_E(t) > C_3 |t|^{1+\alpha},\ t \in D^*,$$

где постоянная $C_3>0$ не зависит от t. Но так как $D^*\subset \mathbf{C}\setminus E$ и при $t\in \mathbf{C}\setminus E$ имеем

$$|G(t)|\leqslant \frac{C_4}{d_E(t)},$$

где постоянная $C_4>0$ не зависит от t, то получим оценку

$$|G(t)|\leqslant C\,|t|^{-(1+\alpha)},\ t\in D^*, \tag{19}$$

где постоянная $C>0$ не зависит от t.

Вспоминая соотношение (5) и обозначая через D образ D^* при отображении $\zeta=\frac{1}{t}$, из (19) будем иметь

$$|g(\zeta)|\leqslant C\,|\zeta|^{1+\alpha},\ \zeta\in D.$$

Отсюда же, применяя в силу (18) к области $\mathbf{C}\setminus D$ n—раз теорему Фрагмена—Линделефа, получим

$$|g(\zeta)|\leqslant C\,|\zeta|^{1+\alpha},\ \zeta\in \mathbf{C}\setminus D.$$

Следовательно, целая функция $g(\zeta)$ будет многочленом и поэтому начиная с некоторого номера будут справедливы соотношения (4). Остается заметить, что при любом натуральном N система функций $\{1\}\cup\{z^k\}_{k=N}^{\infty}$ полна в $A(E)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Частный случай теоремы 2, когда компакт E совпадает с сектором вида

$$\{z\in \mathbf{C}:|\arg z|\leqslant \alpha,\ |z|\leqslant R\}\ (0<\alpha<2\pi),$$

получен другим подходом в работе [6].

Условие (15) теоремы 2 ограничивает снизу рост мажоранты в зависимости от метрических свойств внутренности компакта аппроксимации в окрестности нуля. Покажем, что для рассматриваемого в теореме класса компактов это условие нельзя существенно ослабить.

Теорема 3. *Пусть Δ—простой угол Жордана, имеющий в точке $z=0$ конечное вращение границы и угол колебания границы, равный γ, $|\gamma|<\frac{\pi}{2}$, а $\theta(r)$ и $\psi(r)(0\leqslant r<+\infty)$ — соответственно раствор и биссектриса угла Δ, причем*

$$\int_0^{r_2}\frac{r\,\theta'^2(r)}{\theta(r)}\,dr<\infty,$$

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\ r\log\frac{1}{\theta(r)}<\infty.$$

Пусть компакт E совпадает с содержащейся в окрестности $\{z:|z|\leqslant R\}$ $(0<R\leqslant r_2)$ точки нуль частью замкнутого угла $\overline{\Delta}$, а последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\log k}{\log w_k} > \overline{\lim_{s\to\infty}}\left\{\frac{\pi}{\log s}\int_{\frac{1}{s}}^{r_0}\frac{1+[r\psi'(r)]^2}{r\theta(r)}\,dr\right\}. \tag{20}$$

Тогда существуют функции $f\in A(E)$, $f(0)=0$, *не допускающие приближения вида* (1).

Доказательство. В силу критерия полноты с мажорантой $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ системы функций $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ (см. [4]) и теорем Рисса и Мергеляна, достаточно указать такую комплексную борелевскую меру μ, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k\left|\int_{\partial E} z^k\,d\mu_z\right| \leqslant 1 \tag{21}$$

и

$$\int_{\partial E} z^{k_l}\,d\mu_z \neq 0,$$

по какой-либо подпоследовательности натуральных чисел $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$.

По лемме 2 построим целую функцию

$$g(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k\zeta^k$$

такую, что $g\left(\frac{1}{z}\right)$ равномерно ограничена при $z\in\mathbf{C}\setminus\Delta$ и

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\frac{\log M(s)}{\sigma(2s)} < \infty, \tag{22}$$

где

$$\sigma(s)=\exp\left\{\pi\int_{\frac{1}{s}}^{r_0}\frac{1+[r\psi'(r)]^2}{r\theta(r)}\,dr\right\},\quad M(s)=\max_{|z|\leqslant s}|g(\zeta)|.$$

Рассмотрим на борелевских подмножествах $e\subseteq\partial E$ конечную меру ν:

$$\nu(e)=\frac{1}{2\pi i}\int_{e\cap\Gamma} g\left(\frac{1}{z}\right)dz,$$

где Γ — граница E с положительным направлением обхода. Проверим сперва, что

$$\int_{\partial E} z^k\,d\nu_z = g_{k+1},\quad k=0,\,1,\cdots. \tag{23}$$

Введем для этого контуры L_r и l_r $(0<r<R)$: контур L_r состоит из части контура Γ, лежащей вне круга $\{z:\,|z|\leqslant r\}$, и части окружности $\{z:\,|z|=r\}$, лежащей в $\mathbf{C}\setminus E$, а контур l_r состоит из части Γ, лежа-

щей в круге $\{z: |z| \leqslant r\}$, и части $\{z: |z| = r\}$, лежащей в $\mathbf{C} \setminus E$, причем L_r имеет положительное, а l_r — отрицательное направление обхода.

Тогда имеем

$$\int_{\partial E} z^k \, d\nu_z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} z^k \, g\left(\frac{1}{z}\right) dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_r} z^k \, g\left(\frac{1}{z}\right) dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{l_r} z^k \, g\left(\frac{1}{z}\right) dz = g_{k+1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{l_r} z^k \, g\left(\frac{1}{z}\right) dz \quad (0 < r < R)$$

и так как $l_r \subset \mathbf{C} \setminus \Delta$ $(0 < r < R)$, а функция $g\left(\frac{1}{z}\right)$ равномерно ограничена при $z \in \mathbf{C} \setminus \Delta$, то остается отметить, что при каждом фиксированном $k = 0, 1, \cdots$, интеграл по l_r стремится к нулю при $r \to 0$.

Далее, согласно (20) найдутся такие числа a и b, что

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k \log k}{\log w_k} > a > b > \overline{\lim_{s \to \infty}} \frac{\log \sigma(s)}{\log s}.$$

Отсюда получим

$$w_k < C_1 k^{k/a}, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{24}$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от k. Кроме того, учитывая (22), будем иметь

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \frac{\log M(s)}{s^b} < \infty,$$

откуда легко следует оценка для коэффициентов $g(\zeta)$

$$|g_k| \leqslant C_2 k^{-\frac{k}{a_1}}, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{25}$$

где $b < a_1 < a$, постоянная $C_2 > 0$ не зависит от k. Из (23), (24) (25) следует, очевидно, что в качестве искомой можно взять меру $\mu = C\nu$, где постоянная $C > 0$ выбирается так, чтобы выполнялось (21). Теорема доказана.

Отметим, что если в дополнение к требованиям теоремы 3 компакт E расположен симметрично относительно действительной оси, $(\psi(r) = 0, \ 0 \leqslant r \leqslant R)$, то условие (20) этой теоремы примет следующий вид:

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k \log k}{\log w_k} > \frac{\pi}{\theta(0)}.$$

Замечание 2. Для любого числа ρ, $\frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant \infty$, существуют удовлетворяющий условиям теорем 2 и 3 компакт

$$E = \{z \in \mathbf{C}: \varphi_-(|z|) \leqslant \arg z \leqslant \varphi_+(|z|), \ |z| \leqslant R\}$$

и последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ такие, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\log k}{\log w_k}=\frac{\pi}{\theta(0)}=\rho\ (\theta(r)=\varphi_+(r)-\varphi_-(r)), \tag{26}$$

но существуют функции $f\in A(E)$, $f(0)=0$, не допускающие приближения вида (1).

Действительно, пусть

$$E=\begin{cases}\left\{z\in\mathbf{C}:|\arg z|\geqslant 2\arcsin|z|,\ |z|\leqslant\frac{1}{2}\right\} & \text{при } \rho=\frac{1}{2},\\ \left\{z\in\mathbf{C}:|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2\rho},\ |z|\leqslant 1\right\} & \text{при } \frac{1}{2}<\rho<\infty,\\ \left\{z\in\mathbf{C}:|\arg z|\leqslant\arcsin\frac{\pi}{2}|z|,\ |z|\leqslant\frac{1}{\pi}\right\} & \text{при } \rho=+\infty.\end{cases}$$

Легко видеть, что для E справедливы все требования теорем 2 и 3. Рассмотрим функцию

$$g(\zeta)=\begin{cases}\cos\sqrt{\zeta} & \text{при } \rho=\frac{1}{2},\\ E_\rho(\zeta) & \text{при } \frac{1}{2}<\rho<+\infty,\\ E(\zeta) & \text{при } \rho=+\infty,\end{cases}$$

где $E_\rho(\zeta)$ и $E(\zeta)$ — известные функции Миттаг-Леффлера (см. [7] и [8], стр. 144). Из свойств функций $\cos\sqrt{\zeta}$, $E_\rho(\zeta)$ и $E(\zeta)$ следует, что $g(\zeta)$ будет целой функцией порядка ρ, причем $g\left(\frac{1}{z}\right)$ равномерно ограничена при $z\in\mathbf{C}\setminus E^0$. Положим теперь

$$w_k=\begin{cases}\frac{(2(k+1))!}{(k+2)^2}=\frac{1}{(k+2)^2\,g_{k+1}} & \text{при } \rho=\frac{1}{2},\\ \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}+1\right)}{(k+2)^2}=\frac{1}{(k+2)^2\,g_{k+1}} & \text{при } \frac{1}{2}<\rho<+\infty,\\ \frac{1}{(k+2)^2|g_{k+1}|},\ \text{если } g_{k+1}\neq 0 & \\ & \text{при } \rho=+\infty\\ k+1, \quad \text{если} \quad g_{k+1}=0, & \end{cases}$$

где g_k, $k=0, 1, \cdots$, — тейлоровские коэффициенты для $g(\zeta)$ в окрестности точки нуль. Отсюда, так как порядок $g(\zeta)$ равен ρ, получим (26). Существование функций $f\in A(E)$, $f(0)=0$, не допускающих приближения вида (1), устанавливается как в теореме 3.

В заключение выражаю благодарность Н. У. Аракеляну за обсуждение результатов работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.II.1986

Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Կոմպլեքս հարթության վրա հավասարաչափ մոտավորություն իրականացնող բազմանդամների գործակիցների աճի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է տրված կոմպակտի վրա անընդհատ և նրա ներսում հոլոմորֆ ֆունկցիաների հավասարաչափ մոտարկող բազմանդամների գործակիցների աճը, երբ դրա ներքին կետը կարող է լինել մոտարկման կամայական կոմպակտի ներքին կետերի սահմանային կետ։

V. A. MARTIROSIAN. *On the growth of coefficients of polynomials, which realize uniform approximation in the complex plane* (summary)

The paper considers the growth of coefficients of polynomials which uniform approximate the functions continuous on a compact and holomorphic in its interior. The case, when the interior of the compact can condense to its zero boundary point is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, 7, № 2, 1952, 31—122.
2. *С. Я. Хавинсон.* Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций, Мат. заметки, 6, № 5, 1969, 619—625.
3. *Р. М. Тригуб.* О приближении функций многочленами со специальными коэффициентами, Изв. вузов, Матем., № 1, 1977, 93—99.
4. *С. Я. Хавинсон.* О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 6, №№ 2—3, 1971, 221—234.
5. *С. Е. Варшавский.* Конформные отображения бесконечных полос, Математика, 2:4, 1958, 67—116.
6. *О. А. Мурадян.* О росте коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в теореме Мюнца, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 8, № 1, 1973, 70—87.
7. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
8. *Г. Полиа и Г. Сеге.* Задачи и теоремы из анализа, том 1, М., ГИТТЛ, 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 6, 1980 Математика

С. А. ТЕРЗИЯН, Д. Т. ДОЧЕВ

СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

Введение

Работа посвящена изучению смешанной задачи для параболических уравнений с запаздыванием по времени:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Au(x,t) - \varepsilon Bu(x,t-\tau) = f(x,t),\ 0<x<l,\ 0<t<T,$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ -\tau \leqq t \leqq 0,\ 0 \leqq x \leqq l,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ -\tau \leqq t \leqq T, \tag{1}$$

где

$$Au(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)$$

— сильно эллиптический оператор по x, а B — линейный ограниченный оператор в $L^2(0,l)$. Дифференциальные уравнения типа (1) при $\varepsilon = 0$ изучались Лионсом, в его монографии [1], методом Галеркина. При отсутствии запаздывания уравнения такого типа изучались в [2], если ε достаточно мало. При наличии запаздывания уравнения такого типа встречаются в процессах автоматически управляемых печей; в [3] исследуется асимптотическая устойчивость решений уравнений типа (1).

§ 1. Обозначения, предположения и основные результаты

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Au(x,t) - \varepsilon Bu(x,t-\tau) = f(x,t),\ 0<x<l,\ 0<t<T, \tag{1}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ -\tau \leqq t \leqq 0,\ 0 \leqq x \leqq l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ -\tau \leqq t \leqq T, \tag{3}$$

где

$$Au(x,t) \equiv -\partial/\partial x\,(a(x,t)\,\partial u(x,t)/\partial x),$$

$a(x, t)$ — непрерывная функция на $Q = [0, l]_x \times [0, T]_t$, непрерывно дифференцируемая по x. Предполагаем, что билинейная форма

$$\mathbf{A}(u, v) = \int_0^l a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

удовлетворяет условию

$$\mathbf{A}(u, u) \geqq k |u|_1^2, \ \forall u \in H_0^1(0, l), \ k = \text{const} > 0, \tag{4}$$

где $H_0^1(0, l)$ и $H^1(0, l)$ — обычные пространства Соболева, а через $|\cdot|_1$, $|\cdot|_0$, $|\cdot|_{-1}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать нормы в $H_0^1(0, l)$, $L^2(0, l)$, $H^{-1}(0, l)$ и скалярное произведение между $H^{-1}(0, l)$ и $H_0^1(0, l)$, являющееся обобщением скалярного произведения в $L^2(0, l)$. Из (4) следует, что $k \leqq a(x, t) \leqq C$, $(x, t) \in Q$, $C > 0$.

Предполагаем также, что

$$B : L^2(0, l) \to L^2(0, l) \tag{5}$$

— линейный ограниченный оператор.

Через C_j в тексте будем обозначать положительные константы. Через $u(t)$ будем обозначать $u(x, t)$.

Если $u(t)$, $v(t) \in H_0^1(0, l)$, то $\mathbf{A}(u(t), v(t)) = \langle Au(t), v(t) \rangle$.

Определение. Функция $u(x, t) \in L^2(-\tau, T; H_0^1(0, l))$ называется слабым решением задачи (1), (2), (3), если для $f(x, t) \in L^2(0, T; H^{-1}(0, l))$ выполняется тождество

$$\left\langle \frac{\partial u(t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle + \mathbf{A}(u(t), v(x)) - \varepsilon \langle Bu(t-\tau), v(x) \rangle = \langle f(t), v(x) \rangle, \ \forall v(x) \in H_0^1(0, l)$$

и начальное условие (2) в $L^2(-\tau, 0; H_0^1(0, l))$.

Замечание. Если задана функция $u \in L^2(0, T; H_0^1(0, l))$, такая, что $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(0, l))$, то функция $u(t)$: $[0, T] \to L^2(0, l)$ непрерывна (после быть может, изменения на множестве меры нуль) и отображение $u \to u(0)$ — сюръекция.

Теорема 1. *Если выполнены предположения* (4), (5) *и* ε — *достаточно малая константа, то существует единственное слабое решение задачи* (1), (2), (3).

Доказательство, приводимое в § 2, основано на методе Галеркина. Мы требуем малости $\varepsilon > 0$ в связи с априорными оценками. В [2] также требуется малости ε в связи с применением принципа сжатых отображений.

Рассмотрим также вопрос о поведении слабого решения задачи (1), (2), (3) при $t \to +\infty$ и периодичность решения по t.

Для этого воспользуемся шаговым методом Проуза, рассмотренным в [1], гл. 4. Пусть

$$f(x, t) \in L^2_{\text{loc}}(0, +\infty; H^{-1}(0, l)) \tag{6}$$

это значит, что $\forall T>0$, $f(x, t)\in L^2(0, T; H^{-1}(0, l))$ и

$$\sup\left\{\int_t^{t+\tau}|f(\tau)|^2_{-1}\,d\tau: t\geqq 0\right\}\leqq C_1. \tag{7}$$

Для любого $T>0$ согласно теореме 1 найдется единственная функция $u(t)$, являющаяся решением задачи (1), (2), (3). Так как T — произвольное конечное число, то $u\in L^2_{\text{loc}}(0, +\infty; H^1_0(0, l))$.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* (6), (7) *и* $\varepsilon>0$ *— достаточно малое число. Тогда существуют константы* C_2 *и* C_3, *такие что*

$$|u(t)|_0\leqq C_2,\ t\to+\infty, \tag{8}$$

$$\sup\left\{\int_t^{t+\tau}|u(\sigma)|^2_1\,d\sigma: t\geqq 0\right\}\leqq C_3. \tag{9}$$

В [1] доказан аналогичный результат при $\varepsilon=0$ и вместо (7) предполагается, что

$$\sup_{t>0}\left\{\int_{t_0}^{t+1}|f(\sigma)|^2_{-1}\,d\sigma\right\}<\infty.$$

Отметим, что при $\varepsilon=0$ если предположить, что

$$\sup_{t>0}\left\{\int_t^{t+s}|f(\sigma)|^2_{-1}\,d\sigma\right\}<+\infty$$

для произвольного $s>0$, то будем иметь

$$\sup_{t>0}\left\{\int_t^{t+s}|u(\sigma)|^2_1\,d\sigma\right\}<+\infty.$$

Отметим, что при наличии запаздывания — $\varepsilon>0$, $\tau>0$ при применении метода Проуза возникают технические трудности и весьма удобным оказывается выбор $s=\tau$, откуда следует ограниченность нормы $|u(t)|_0$, так что τ в условии (7) связно с наличием запаздывания. Как следствие выводим результат о периодичности решений.

Пусть

$f(x, t)$, $t\geqq 0$ — периодическая функция по t с периодом T и

$$f(x, t)\in L^2(0, T; H^{-1}(0, l)). \tag{10}$$

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1 и (10). Тогда после, быть может, изменения на множестве меры нуль функции $\varphi(x, t)$ существует решение $u(x, t)$, являющееся T-периодической функцией по t.

Отметим в качестве следствия и результат об ограниченности решения на всей оси.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и функция* $f(x, t)$, *определенная на* $\mathbf{R}$ *такова, что*

$$f(t) \in L^2(\mathbf{R}; H^{-1}(0, l)),$$

$$\sup\left\{\int_t^{t+\tau} |f(\sigma)|^2_{-1}\, d\sigma;\ t \in \mathbf{R}\right\} \leqq C_4.$$

Тогда существует такая функция $u(t)$, *что*

$$u'(t) + Au(t) - \varepsilon Bu(t-\tau) = f(t),\ -\infty < t < \infty,$$

$$u \in L^\infty(\mathbf{R}; L^2(0, l)),$$

$$\sup\left\{\int_t^{t+\tau} |u(\sigma)|^2_1\, d\sigma;\ t \in \mathbf{R}\right\} \leqq C_5.$$

Отметим также что утверждения теорем 1 и 2 остаются справедливыми и при наличии переменного запаздывания $\tau(t)$, которое ограничено: $\tau_0 \geqq \tau(t) \geqq 0$, $\tau(t)$ — непрерывная функция.

§ 2. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся методом Фаедо—Галеркина. Пусть $w_1, w_2, \cdots, w_m, \cdots$ „базис" в $H_0^1(0, l)$. Определим „приближенное" решение $u_m(t)$ нашей задачи:

$$\langle u_m'(t), w_k\rangle + A(u_m(t), w_k) - \varepsilon\langle Bu_m(t-\tau), w_k\rangle = \langle f(t), w_k\rangle$$

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j(x),\ k = 1, 2, \cdots, m, \tag{11}$$

$$u_m(t) = \varphi_m(t),\ -\tau \leqq t \leqq 0;\ \varphi_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm}(t)\, w_j \to \varphi(x, t),$$

в $L^2(-\tau, 0; H_0^1(0, l))$. $\alpha_{jm}(t)$ — непрерывные функции на $[-\tau, 0]$. Общие результаты о линейных системах дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом гарантируют существование решения задачи (11) (см. [4]) на интервале $[0, t_m]$. Априорные оценки показывают, что $t_m = T$. Умножим уравнение (11), отвечающее индексу k, на $g_{km}(t)$ и просуммируем по k. Тогда получим

$$\langle u_m'(t), u_m(t)\rangle + A(u_m(t), u_m(t)) - \varepsilon\langle Bu_m(t-\tau), u_m(t)\rangle =$$

$$= \langle f(t), u_m(t)\rangle,\ m = 1, 2, \cdots,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|_0^2 + k\,|u_m(t)|_1^2 \leqq |f(t)|_{-1}\,|u_m(t)|_1 +$$

$$+\varepsilon C_6 (|u_m(t-\tau)|_0^2 + |u_m(t)|_0^2),$$

и после интегрирования от 0 до t:

$$|u_m(t)|_0^2 + 2k\int_0^t |u_m(\sigma)|_1^2\, d\sigma \leqq |\varphi(0)|_0^2 + \delta\int_0^t |u_m(\sigma)|_1^2\, d\sigma +$$

$$+\frac{1}{\delta}\int_0^T |f(\sigma)|_{-1}^2\, d\sigma + \varepsilon C_6\left(\int_0^t |u_m(\sigma-\tau)|_0^2\, d\sigma + \int_0^t |u_m(\sigma)|_0^2\, d\sigma\right),$$

$$\int_0^t |u_m(\sigma-\tau)|_0^2\, d\sigma \leqq \|\varphi\|^2_{L^2(-\tau,\,0;\,H_0^1(0,\,l))} + \int_0^t |u_m(\sigma)|_0^2\, d\sigma.$$

Если $\alpha^{1/2}$ — константа вложения $H_0^1(0, l)$ в $L^2(0, l)$, то

$$|u_m(t)|_0^2 + C_7\int_0^t |u_m(\sigma)|_1^2\, d\sigma \leqq |\varphi(0)|_0^2 +$$

$$+ (1/\delta)\,\|f\|^2_{L^2(0,\,T;\,H^{-1}\,(0,\,l))} + \varepsilon C_6 \|\varphi\|^2_{L^2(-\tau,\,0;\,H_0^1(0,\,l))}, \qquad (12)$$

где ε и δ настолько малы, что $C_7 = 2k - \delta - 2\alpha\varepsilon C_6 > 0$.

В силу (12) имеем

$$\begin{aligned} &u_m \text{ ограничены в } L^\infty(-\tau,\ T;\ L^2(0,\ l)),\\ &u_m \text{ ограничены в } L^2(-\tau,\ T;\ H_0^1(0,\ l)). \end{aligned} \qquad (13)$$

Следовательно, в силу линейности A, B и (13) мы можем выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$$\begin{aligned} u_\mu &\to u \quad \text{в} \quad L^\infty(-\tau,\ T;\ L^2(0,\ l))^* \text{ слабо},\\ u_\mu &\to u \quad \text{в} \quad L^2(-\tau,\ T;\ H_0^1(0,\ l)) \text{ слабо},\\ u_\mu(T) &\to \xi \quad \text{в} \quad L^2(0,\ l) \text{ слабо},\\ Au_\mu &\to Au \quad \text{в} \quad L^2(0,\ T;\ H^{-1}(0,\ l)) \text{ слабо},\\ Bu_\mu(t-\tau) &\to Bu(t-\tau) \text{ в } L^\infty(0,\ T;\ L^2(0,\ l))^*\text{-слабо}. \end{aligned}$$

Продолжим $u_m(t)$, $Au_m(t), \cdots$ на R нулем вне $[0, T]$; соответствующие продолжения обозначим через $\tilde{u}_m(t)$, $\widetilde{Au_m}(t), \cdots$. Из (11) согласно формуле о дифференцировании свертки:

$$\left\langle \frac{d}{dt}\tilde{u}_m(t),\ w_k \right\rangle + \langle \widetilde{Au_m}(t),\ w_k\rangle - \varepsilon\langle \widetilde{Bu_m(t-\tau)},\ w_k\rangle =$$

$$= \langle \tilde{f}(t),\ w_k\rangle + \langle u_m(0),\ w_k\rangle\,\delta(t-0) - \langle u_m(T),\ w_k\rangle\,\delta(t-T).$$

Теперь мы можем перейти к пределу в (13) при $m=\nu$ и при фиксированном k, откуда выведем, что

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(t)+\bar{Au}(t)-\varepsilon\widetilde{Bu(t-\tau)}=\tilde{f}(t)+u_0\delta(t)-\xi\delta(t-T). \quad (14)$$

Сужая (14) на $[0, T]$ мы получим, что

$$\frac{du(t)}{dt}+Au(t)-\varepsilon Bu(t-\tau)=f(t).$$

В силу определения слабого решения мы выводим оценку

$$|u(t)|_0^2+C_7\int_s^t|u(\sigma)|_1^2\,d\sigma\leqq|u(s)|_0^2+$$

$$+(1/\delta)\int_s^t|f(\sigma)|_{-1}^2\,d\sigma+\varepsilon C_8\int_{s-\tau}^s|u(\sigma)|_0^2\,d\sigma. \quad (15)$$

Так как задача линейна, в силу (15) с $s=0$ следует, что слабое решение единственно. Теорема 1 доказана.

Замечание. Отметим, что следуя этому доказательству мы можем установить следующий абстрактный результат.

Пусть V — рефлексивное пространство Банаха, содержащееся в пространстве Гильберта H, $H\subset V$, причем вложение непрерывно и H плотно в V. Отождествляя H с его сопряженным и обозначая через V^* сопряженное к V пространство мы таким образом можем отождествить H с подпространством V^*: $V\subset H\subset V^*$.

Теорема 1′. *Пусть оператор $A: V\to V^*$ обладает следующими свойствами: $A: V\to V^*$ семинепрерывный, монотонный оператор $\langle Av, v\rangle\geqq k\|v\|^2$, $|Av|_*\leqq c\|v\|$, $\forall v\in V$,*

$$\langle Av_1-Av_2, v_1-v_2\rangle\geqq k\|v_1-v_2\|^2,\ \forall v_1, v_2\in V,$$

$B: H\to H$ — линейный ограниченный оператор. Пусть заданы функции $f\in L^2(0, T; V^*)$, $\varphi\in L^2(-\tau, 0; V)$. Тогда если ε достаточно мало, то существует единственная функция $u\in L^2(-\tau, T; V)$:

$$u'(t)+Au(t)-\varepsilon Bu(t-\tau)=f(t),\ u(t)=\varphi(t),\ -\tau\leqq t\leqq 0.$$

Доказательство теоремы 2. Предположим, что выполнены условия (6), (7). Разобьем полупрямую $[0, +\infty)$ на интервалы $\Delta_j=[(j-1)\tau, j\tau]$, $j=0, 1, 2, \cdots$ и пусть $M_j=\sup\{|u(t)|_0^2: t\in\Delta_j\}=|u(t_j')|_0^2$. Применим (15) для $t=t_{j+2}$ и $s=t_j$, предполагая что $M_{j+2}>M_j$:

$$C_7\int_{t_j}^{t_{j+2}}|u(\sigma)|_1^2\,d\sigma\leqq(1/\delta)\int_{t_j}^{t_{j+2}}|f(\sigma)|_{-1}^2\,d\sigma+\varepsilon C_8\int_{t_{j-\tau}}^{t_j}|u(\sigma)|_1^2\,d\sigma. \quad (16)$$

В силу определения M_j и (16):

$$\int_{t_j}^{t_{j+2}} |u(\tau)|_1^2 \, d\sigma \leqq (1/\delta)\frac{3C_1}{C_7} + \frac{\varepsilon C_6}{C_7}(M_{j-1} + M_j).$$

Так как $t_{j+2} - t_j \geqq \tau$, то существует $\xi \in [t_j, t_{j+2}]$ такое, что

$$|u(\xi_0)|_0^2 \leqq \frac{\alpha}{\tau} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{3C_1}{C_7} + \frac{\alpha}{\tau}\frac{\varepsilon C_6}{C_7}(M_{j-1} + M_j).$$

Теперь применим (15) для $t = t_{j+2}$ и $s = \xi$. Получим

$$M_{j+2} \leqq \varepsilon b_1 (M_{j-1} + M_j) + b_0, \tag{17}$$

где

$$b_1 = \frac{\alpha C_6}{\tau C_7} + \tau C_6, \quad b_0 = \frac{3\alpha C_1}{\tau\delta C_7} + \frac{3C_1}{\delta}.$$

Так для последовательности M_j получаем:

$$M_{j+2} \leqq \max(M_j, \varepsilon b_1 (M_{j-1} + M_j) + b_0).$$

Имеем

$$\max(M_{j+2}, M_{j+1}) \leqq \max\{\max(M_{j+1}, M_j), 2\varepsilon b_1 \max(M_j, M_{j-1}) + b_0\}.$$

Обозначим $K_{j-1} = \max(M_j, M_{j-1})$ и для последовательности $\{K_j\}$ получим

$$K_{j+1} \leqq \max(K_j, 2\varepsilon b_1 K_{j-1} + b_0).$$

Методом математической индукции доказывается, что если ε достаточно мало ($2\varepsilon b_1 < 1/2$), то последовательность $\{K_j\}$ ограничена. Тогда последовательность $\{M_j\}$ тоже ограничена и значит существует C_2 такое, что (8) выполнено. В силу (15)

$$C_7 \int_t^{t+\tau} |u(\sigma)|_1^2 \, d\sigma \leqq C_2 + \frac{C_1}{\delta} + \alpha\varepsilon C_6 \int_{t-\tau}^{t} |u(\sigma)|_1^2 \, d\sigma. \tag{18}$$

Обозначим

$$N_j = \int_{\Delta_j} |u(\sigma)|_1^2 \, d\sigma, \quad a_0 = \frac{1}{C_7}\left(C_2 + \frac{C_1}{\delta}\right), \quad a_1 = \frac{\varepsilon C_6}{C_7}.$$

В силу (18) получаем, что $N_j \leqq \varepsilon a_1 N_{j-1} + a_0$. Методом математической индукции доказывается, что если ε достаточно мало ($\varepsilon a_1 < 1/2$), то последовательность $\{N_j\}$ ограничена, откуда следует, что существует C_3 такое, что (9) выполнено.

Отметим, что оценка (17) выполнена при $\xi \in [t_j, (j+1)\tau]$. Если $\xi \in [(j+1)\tau, t_{j+2}]$, то вместо (17) получается оценка вида $M_{j+2} \leqq \varepsilon b_1' (M_{j-1} + M_j + M_{j+1}) + b_0'$. Затем доказательство продолжается как прежде с небольшими изменениями.

Отметим также, что ε в теореме 2 может оказатся меньше, чем ε в теореме 1. Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия. Так как A и B линейные операторы, то если u_1 и u_2 решения, соответствующие (f_1, φ_1) и $(f_2, \varphi_2)_I$ в силу (15):

$$|u_1(t) - u_2(t)|_0^2 - |u_1(s) - u_2(s)|_0^2 \leqq \left(\frac{1}{\delta}\right) \int_s^t |f_1(\sigma) - f_2(\sigma)|_{-1}^2 \, d\sigma +$$

$$+ \varepsilon C_6 \int_{s-\tau}^{s} |u_1(\sigma) - u_2(\sigma)|_0^2 \, d\sigma.$$

Если $f_1 = f_2 = f$, $s = 0$, $t = T$, то

$$|u_1(T) - u_2(T)|_0^2 - |u_1(0) - u_2(0)|_0^2 \leqq \varepsilon C_6 \int_{-\tau}^{0} |\varphi_1(\sigma) - \varphi_2(\sigma)|_0^2 \, d\sigma.$$

Пусть $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$ п. в. на $[-\tau, 0]$ и $\varphi_1(0) \neq \varphi_2(0)$. Тогда $|u_1(T) - u_2(T)|_0 \leqq |u_1(0) - u_2(0)|_0$. Обозначим через T нерастягивающий оператор $L^2(0, l) \to L^2(0, l)$, определенный на $H_0^1(0, l)$, такой что $Tu(0) = u(T)$. В силу (10) условия (6) и (7) выполнены. По теореме 2 степени T^n оператора T ограничены. По теореме о неподвижной точке (см. [5]) оператор T имеет неподвижную точку, обозначим ее через ζ. Пусть $\varphi^*(t) = \zeta$, если $t = 0$ и $\varphi^*(t) = \varphi(t)$, если $-\tau \leqq t < 0$. Тогда решение $u^*(t)$, соответствующее $f(t)$ и $\varphi^*(t)$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль есть T-периодическая функция.

Доказательство теоремы 3. По теореме 2 для любого целого n существует и притом только одна функция $u_n(t)$ такая, что

$$u_n'(t) + Au_n(t) - \varepsilon B u_n(t - \tau) = f(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

$$u_n(t) = 0, \quad -n - \tau \leqq t \leqq -n,$$

$$u_n \in L^\infty(\mathbf{R}_+; L^2(0, l)),$$

$$|u_n(t)|_0^2 \leqq C_2,$$

причем константа C_2 такая же, как и в теореме 2 и

$$\int_t^{t+\tau} |u_n(\sigma)|_1^2 \, d\sigma \leqq C_3. \tag{19}$$

Продолжим u_n на R нулем при $t < -n - \tau$; теперь $u_n(t)$ всюду будет означать продолженную функцию. Далее через S обозначим отображение

$$S : L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}_t, H_0^1(0, l)) \to L^\infty(\mathbf{R}_t, L^2(0, \tau; H_0^1(0, l))), \quad (Su(t))(\sigma) = u(t + \sigma).$$

Тогда (19) будем означать, что:
функции $Su_n \in L^\infty(\mathbf{R}_t; L^2(0, \tau; H_0^1(0, l)))$ принадлежат ограниченному множеству в этом пространстве при $n \to \infty$.

Теперь мы можем так выделить подпоследовательность, обозначаемую опять через u_n, чтобы

$$u_n \to u \quad \text{в} \quad L^\infty(\mathbf{R}_t; L^2(0, l)) \quad \text{слабо*},$$

$$Bu_n(t-\tau) \to Bu(t-\tau) \quad \text{в} \quad L^\infty(\mathbf{R}_t; L^2(0, l)) \quad \text{слабо*},$$

$$Su_n \to Su \quad \text{в} \quad L^\infty(\mathbf{R}_t; L^2(0, \tau; H_0^1(0, l))) \quad \text{слабо*},$$

$$Au_n \to \chi \quad \text{в} \quad L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}_t; H^{-1}(0, l)) \quad \text{слабо}.$$

Последнее означает, что $Au_n \to \chi$ в $L^2(s, t; H^{-1}(0, l))$ слабо для всех конечных s и t.

Теорема будет доказана, коль скоро проверим, что $Au = \chi$. Следуя [1] мы доказываем это равенство. Так как рассуждения стандартные мы их опускаем.

Высший институт механизации
и электрификации сельского хозяйства
Болгария

Поступила 1.VII. 1980

Ս. Ա. ԹԵՐՋԻԱՆ, Դ. Տ. ԴՈՉԵՎ. Ըստ ժամանակի ուշացումով պարաբոլական հավասարման համար խառը խնդրի լուծումների գոյության, միակության և սահմանափակության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ խառը խնդիրը

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Au(x, t) - \varepsilon Bu(x, t-\tau) = f(x, t),$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$$-\tau \leqslant t \leqslant T,$$

որտեղ

$$A = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x, t)\right)\frac{\partial}{\partial x} - b$$

հանդիսանում է ուժեղ էլիպտական օպերատոր ըստ x-ի, $B: L^2(0, l) \to L^2(0, l)$ —գծային անընդհատ օպերատոր է։ Գալյորկինի մեթոդով ապացուցվում է դիտարկվող խնդրի թույլ լուծման գոյությունը և միակությունը, ինչպես նաև սահմանափակությունը։

S. A. TERSIAN, D. T. DOCHEV. *Existence, unicity and boundedness of the solution of a mixed problem for parabolic equations with time delay* (summary)

The mixed problem

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Au(x, t) - \varepsilon Bu(x, t-\tau) = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad -\tau \leqslant t \leqslant T,$$

is considered where the operator

$$A = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x, t)\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

is strongly elliptical with respect to x, $B: L^2(0, l) \to L^2(0, l)$ is a continuous linear operator. Using Galerkin method, the existence and uniqueness of the weak solution is proved. Then results on boundedness are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ж.-Л. Лионс.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, «Мир», М., 1972, 166—173, 519—525.
2. *M. Yamaguchi.* Existence and stability of bounded and almost periodic solutions of preturbed quasilinear partial differential equations of standart types Proc. Fac. Sci., Tokai Univ., XIV, 1978.
3. *P. K. C. Wang.* Asimptotic stability of a time-delayed diffusion system, transaction of the ASME, December 1963, 500—504.
4. *А. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, М., «Наука», 1971, 28—37.
5. *Б. М. Левитан, В. В. Жиков.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения, М., Изд. МГУ, 1978, 152.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 6, 1980 Математика

В. Н. МАРКАРЯН

ДОБАВЛЕНИЕ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ, СОХРАНЯЮЩИХ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ ОПЕРАТОРА

Введение

Пусть R_n — n-мерное эвклидово пространство точек $\{\xi\}$, $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, Z_n^+ — n-мерное пространство мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, где α_l $(l=1,\cdots,n)$ — неотрицательные целые числа.

Для λ, $\xi\in R_n$, $t>0$ и $\alpha\in Z_n^+$ положим $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$,

$$|\alpha|=\sum_{l=1}^{n}\alpha_l,\quad \xi/t^\lambda=(\xi_1/t^{\lambda_1},\cdots,\xi_n/t^{\lambda_n}),\quad |\xi|=\sqrt{\sum_{l=1}^{n}\xi_l^2},$$

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n},\ \text{где}\ D_k=\frac{\partial}{\partial\xi_k},\ k=1,\cdots,n.$$

Определение 1. Многочлен $P(\xi)$ называется λ-однородным $\lambda\in R_n$ порядка k, если $P(t^{\lambda_1}\xi_1,\cdots,t^{\lambda_n}\xi_n)=t^kP(\xi)$ для всех $\xi\in R_n$ и $t>0$.

Определение 2. (см. [1], определение 3. 2. 1). Многочлен $P(\xi)$ сильнее многочлена $Q(\xi)$ $(Q<P)$, если существует постоянная $C>0$ такая, что

$$\widetilde{Q}(\xi)\leqslant C\,\widetilde{P}(\xi)\ \forall\,\xi\in R_n, \tag{1}$$

где для данного многочлена $R(\xi)$ функция Л. Хёрмандера $\widetilde{R}(\xi)$ определяется формулой

$$\widetilde{R}(\xi)=\left[\sum_{\alpha}|D^\alpha R(\xi)|^2\right]^{1/2}. \tag{2}$$

Определение 3 (см. [1], определение 3. 3. 1). Многочлен $P(\xi)$ доминирует над многочленом $Q(\xi)$ $(Q<<P)$, если

$$\sup_{\xi}\frac{\widetilde{Q}(\xi,t)}{\widetilde{P}(\xi,t)}\to 0\ \text{при}\ t\to\infty, \tag{3}$$

где для данного многочлена $R(\xi)$

$$\widetilde{R}(\xi,t)=\left[\sum_{\alpha}(D^\alpha R(\xi)|^2\,t^{2|\alpha|}\right]^{1/2}.$$

Определение 4 (см. [9], определение 0.1). Многочлен $P(\xi)$ мощнее многочлена $Q(\xi)$ $(Q < P)$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|Q(\xi)| \leqslant C\,(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R_n. \tag{4}$$

Пусть $P(\xi) = \sum\limits_{(\lambda,\,\alpha)\leqslant m} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, положим $\{P\} = \{\alpha,\ \alpha \in Z_n^+,\ \gamma_\alpha \neq 0\}$,

$$P_m(\xi) = \sum_{(\lambda,\,\alpha)=m} \gamma_\alpha \xi^\alpha,\quad \Sigma(P_m) = \{\xi,\ \xi \in R_n^{(0)},\ P_m(\xi) = 0\}.$$

где

$$R_n^{(0)} = \left\{\xi,\ \xi \in R_n,\ \prod_{l=1}^{n} \xi_l \neq 0\right\}.$$

Определение 5. Характеристическим многогранником (х.м.) (многогранником Ньютона) данного многочлена $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ назовем минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(P)$ в R_n, содержащий все точки $\alpha \in \{P\}$.

Определение 6. Число $r = r(\eta, P_m)$ назовем λ-порядком нуля в точке η λ-однородного многочлена $P_m(\xi)$, если $D^\nu P_m(\eta) = 0$ при $(\lambda, \nu) < r$ и для некоторого $\nu \in Z_n^+$, $(\lambda, \nu) = r$,

$$D^\nu P_m(\eta) \neq 0.$$

При этом будем считать по определению, что $r(\eta, P_m) = 0$, если $P_m(\eta) \neq 0$.

Пусть $r(\xi, P_m)$ — λ-порядок нуля λ-однородного многочлена $P_m(\xi)$ в точке ξ. Положим

$$k = k(P_m) = \sup_{\xi \in \Sigma(P_m)} r(\xi, P_m),$$

$$P'(\xi) = \sum_{(\lambda,\,\alpha) > k} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

В [2] доказана следующая теорема.

Теорема Б. Пини. *Для того чтобы многочлен $P(\xi)$ был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы а) многочлен $P'(\xi)$ был гипоэллиптическим, б) $|P(\xi) - P'(\zeta)|/\|\xi, \lambda\|^k \to 0$ при $\|\xi, \lambda\| \to \infty$, где*

$$\|\xi, \lambda\| = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} |\xi_l|^{2a_0\lambda_l}},\quad a_0 = \min_{1\leqslant l\leqslant n} \lambda_l > 0.$$

Из результатов работ [6] и [11] следует, что если λ — любой n-мерный вектор с положительными компонентами и $P(\xi)$ — гипоэллиптический многочлен, то существует число $\sigma = \sigma(\lambda, P) > 0$ такое, что неравенство

$$|\xi^\nu| \leqslant C\,(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R_n,\ C = C(\lambda, P), \tag{5}$$

имеет место для всех мультииндексов ν таких, что $\nu \in \mathfrak{M}$, $(\lambda, \nu) < \sigma$. При этом, если $\sigma_1 > \sigma$, то либо для всех $\nu \in \mathfrak{M}$, $(\lambda, \nu) \leqslant \sigma$, либо суще-

ствует мультииндекс $\mu \in \mathfrak{M}$ такой, что $(\lambda, \mu) \leqslant \sigma_1$ и для этого мультииндекса μ неравенство (5) не может иметь места.

Таким образом, через данный гипоэллиптический многочлен $P(\xi)$ и через вектор λ единственным образом определяется число $\sigma = \sigma(\lambda, P)$. С другой стороны, ясно, что неравенство типа (5) может иметь место для многочлена $P(\xi)$ и мультииндекса ν независимо от гипоэллиптичности $P(\xi)$.

В настоящей заметке мы, в частности, устанавливаем критерий гипоэллиптичности многочленов в терминах оценок типа (5) и обобщаем теорему Б. Пини.

§ 1. Гипоэллиптичность и сравнение многочленов с постоянными коэффициентами

Определение 7. Многогранник $\mathfrak{M}$ называется вполне правильным (в.п.), если

а) $\mathfrak{M}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат;

б) все координаты внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней х.м. $\mathfrak{M}$ положительны.

Обозначим через Λ множество единичных внешних нормалей $(n-1)$-мерных граней х.м. $\mathfrak{M}$.

Пусть имеем многочлен $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Положим

$$\mathbf{P}(\xi) = P(\xi) - \sum_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

где сумма распространяется по набору мультииндексов $\{\alpha\} \equiv \mathfrak{M}^*$ таких, что $(\lambda, \alpha) < \sigma(\lambda, P)$ для любого $\lambda \in \Lambda$.

Так как (см. [12]) х.м. множества $(P) \cup \{0\}$ гипоэллиптического многочлена $P(\xi)$ является вполне правильным, то в дальнейшем, не умаляя общности, можно считать, что х.м. $\mathfrak{M}$ (гипоэллиптического многочлена $P(\xi)$) вполне правилен.

Теорема 1. *Многочлены $P(\xi)$ и $\mathbf{P}(\xi)$ гипоэллиптичны или не гипоэллиптичны одновременно.*

Доказательство сводится к теореме 4.1.6 работы [1], если заметить, что для точек $\nu \in \mathfrak{M}^*$ имеет место неравенство (5) для всех $\lambda \in \Lambda$ и, следовательно, $P(\xi) - \mathbf{P}(\xi) \ll \mathbf{P}(\xi)$.

Ниже рассматриваются многочлены с вещественными коэффициентами. Всегда будем считать, что $\lambda \in \Lambda$.

Определение 8. $(n-1)$-мерная грань $\mathfrak{M}_i^{n-1}$ $(i = 1, \cdots, N_{n-1})$ х.м. $\mathfrak{M}$ называется главной, если внешняя (относительно $\mathfrak{M}$) нормаль этой грани имеет хотя бы одну положительную координату; k-мерная грань $\mathfrak{M}_i^k$ $(i = 1, \cdots, N_k,\ k = 0, \cdots, n-1)$ х.м. называется главной, если среди $(n-1)$-мерных граней, пересечением которых образуется грань $\mathfrak{M}_i^k$, существует хотя бы одна главная грань.

Определение 9. Грань $\mathfrak{M}_i^k$ $(i=1, \cdots, N_k, \quad k=0, \cdots, n-1)$ х.м. $\mathfrak{M}$ многочлена $P(\xi)$ называется P-регулярной, если подмногочлен

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha \neq 0 \text{ при } \xi \in R_n^{(0)}.$$

Грани, не являющиеся P-регулярными будем называть P-нерегулярными.

Пусть $\mathfrak{M}$ — в.п. х.м. многочлена $P(\xi)$, $\mathfrak{M}_{i_0}^{k_0}$ — некоторая главная P-нерегулярная грань х.м. $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\Lambda_{i_0}^{k_0}$ множество единичных внешних (относительно $\mathfrak{M}$) нормалей грани $\mathfrak{M}_{i_0}^{k_0}$.

Пусть $\lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}$, представим многочлен $P(\xi)$ в виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M_\lambda} P_{m_j(\lambda)}(\xi) = \sum_{j=0}^{M_\lambda} \sum_{(\lambda, \alpha)=m_j(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

где $m_0(\lambda) > m_1(\lambda) > \cdots > m_{M_\lambda}(\lambda) \geqslant 0$,

$$P_{m_0(\lambda)}(\xi) = P^{i_0, k_0}(\xi) \quad \forall \lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\Sigma^{i_0, k_0} \equiv \Sigma_{m_0(\lambda)}^{i_0, k_0} = \{\eta, \ \eta \in R_n^{(0)}, \ P^{i_0, k_0}(\eta) = 0\},$$

$$\Sigma_{m_j(\lambda)}^{i_0, k_0} = \{\eta, \ \eta \in \Sigma_{m_{j-1}(\lambda)}^{i_0, k_0}, \ P_{m_j(\lambda)}(\eta) = 0\} \quad j=1, \cdots, M_\lambda.$$

Для $\lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}$ и $\eta \in \Sigma_{m_j(\lambda)}^{i_0, k_0}$ положим

$$A_{m_j(\lambda)}^{i_0, k_0}(\eta) = \{\nu, \ \nu \in Z_n^+, \ D^\nu P_{m_j(\lambda)}(\eta) \neq 0\},$$

$$A^{i_0, n-1} = \bigcup_{\eta \in \Sigma_{m_0(\lambda)}^{i_0, n-1}} A_{m_0(\lambda)}^{i_0, n-1}(\eta).$$

Мы будем пользоваться следующей теоремой (см. [4], теорема 2).

Теорема Г. Г. Казаряна. *Пусть все главные грани в.п. х.м. многочлена $P(\xi)$ кроме одной главной $(n-1)$-мерной грани $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$ P-регулярны, а грань $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$ P-нерегулярна, $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$-внешняя нормаль этой грани. Тогда многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен при одновременном выполнении следующих условий:*

а) $\max\limits_{\nu \in A^{i_0, n-1}} [m_0(\lambda) - (\lambda, \nu)] < m_1(\lambda)$,

в) *для каждой точки $\eta \in \Sigma^{i_0, n-1}$ существуют аналитические в $R_n^{(0)}$ функции $r(\eta, \xi)$, $P(\eta, \xi)$ и натуральное число $k(\eta)$ такие, что в некоторой окрестности точки η многочлен $P^{i_0, n-1}(\xi)$ представляется в виде*

$$P^{i_0, n-1}(\xi) = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} P(\eta, \xi) \geqslant 0 \ (\leqslant 0),$$

где

$$P(\eta, \eta) \neq 0, \ \frac{\partial r(\eta, \eta)}{\partial \xi_i} \neq 0 \ (i=1, \cdots, n),$$

c) $P_{m_1(\lambda)}(\eta_1) > 0$ (< 0) $\forall \eta_1 \in \Sigma^{l_0,\, n-1}$.

В некотором смысле обратной к теореме 3.3.4 работы [1] является следующая

Теорема 2. *Пусть* $P(\xi) = \sum\limits_{(\lambda,\, \alpha) \leqslant k} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, $Q(\xi) = \sum\limits_{(\lambda,\, \alpha) \leqslant m} \delta_\alpha \xi^\alpha$, $k > m$. *Если для любого числа* $a \in R_1$ *многочлен* $P(\xi) + a\, Q(\xi)$ *гипоэллиптичен, то* $Q \ll P$.

Доказательство. Допустим обратное, а именно, что при выполнении условия теоремы, многочлен $P(\xi)$ не доминирует над многочленом $Q(\xi)$. Так как многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен, то это означает (см. [1], теорему 4.1.6 и замечание), что существуют последовательность $|\xi^s|$, $\|\xi^s,\ \lambda\| \to \infty$ при $s \to \infty$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$|Q(\xi^s)/P(\xi^s)| \geqslant \varepsilon,\ s = 1,\ 2,\ \cdots. \tag{6}$$

Поскольку $k > m$, то существует последовательность $\{\eta^s\}$ такая, что для всех $s = 1,\ 2, \cdots$, $\|\eta^s,\ \lambda\| = \|\xi^s,\ \lambda\|$ и при $s \to \infty$

$$|Q(\eta^s)/P(\eta^s)| \to 0. \tag{7}$$

Из-за гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)$, $R(\xi) = |Q(\xi)/P(\xi)|$ является непрерывной функцией вне некоторого эллипсоида $\|\xi,\ \lambda\| > M$. В силу этого из (6) и (7) получаем, что для любого числа δ, такого, что $\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \delta \leqslant \varepsilon$ существует последовательность точек $\{\tau^s\}$ таких, что $\|\tau^s,\ \lambda\| = \|\xi^s,\ \lambda\|$ и $R(\tau^s) = \delta$ для всех s, для которых $\|\xi^s,\ \lambda\| \geqslant M$. Так как коэффициенты многочленов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ вещественны, то для бесконечного числа s либо $Q(\tau^s)/P(\tau^s) = \delta$, либо $Q(\tau^s)/P(\tau^s) = -\delta$. Взяв в первом случае $a = -1/\delta$, а во втором $a = 1/\delta$, получаем, что для некоторой подпоследовательности $\{\tau^{s'}\} \subset \{\tau^s\}$, $P(\tau^{s'}) + a\, Q(\tau^{s'}) = 0$ при $\|\tau^{s'},\ \lambda\| = \|\xi^{s'},\ \lambda\| \to \infty$.

Это противоречит гипоэллиптичности многочлена $P(\xi) + aQ(\xi)$ и доказывает теорему.

Определение 10 (см. [7], определение 7). Характеристической линией х.л. λ-однородного многочлена $R(\xi) = \sum\limits_{(\lambda,\, \alpha) = m} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ в точке $\tau \in R_n$, $\|\tau,\ \lambda\| = 1$ назовем функцию $\chi(\tau,\ R,\ \delta) = m - l\delta$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, где $l = l(\tau)$ — λ-порядок нуля многочлена $R(\xi)$ в точке τ.

Если $\tau \notin \Sigma(R)$, то по определению будем считать, что $\chi(\tau,\ R,\ \delta) \equiv m$ при всех $\delta \in [0,\ 1]$.

Определение 11. Характеристической линией х.л. многочлена $P(\xi) = \sum\limits_{j=0}^{M} P_{m_j}(\xi)$, где $P_{m_j}(\xi)$ — λ-однородный многочлен порядка m_j; $j = 0,\ 1, \cdots, M$, $m_0 > m_1 > \cdots, m_M \geqslant 0$ в точке τ назовем функцию

$$\chi(\tau,\ P,\ \delta) = \max_{0 \leqslant j \leqslant M} \chi(\tau,\ P_{m_j},\ \delta),\ \delta \in [0,\ 1].$$

Определение 12. Будем говорить, что λ-однородный многочлен $P_{m_k}(\xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(\xi)$ в точке $\tau \in \Sigma(P_{m_k})$, если для некоторого числа

$$\delta \in [0,1],\ \chi(\tau, P_{m_k}, \delta) = \chi(\tau, P, \delta).$$

Обозначим через $\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, P)$ множество тех индексов j, $0 \leqslant j \leqslant M$, для которых $P_{m_j}(\xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(\xi)$ в точке τ.

Определение 13. Будем говорить, что многочлен $P(\xi)$ регулярен в точке $\tau \in \Sigma(P_{m_0})$, если существует окрестность $O(\tau)$ точек ξ такая, что $P_{m_j}(\xi)\, P_{m_0}(\xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in O(\tau)$ и для всех $j \in \mathbf{A}(\tau)$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что $Q(\xi)$ и $P_{m_j}(\xi)$, $0 \leqslant j \leqslant M$ — λ-однородные многочлены для фиксированного $\lambda \in \Lambda$.

Лемма 1 (см. [4], лемму 2.1). *Пусть $n = 2$, $R(\xi)$ — λ-однородный многочлен, тогда $R(\xi)$ представляется в виде*

$$R(\xi) = r(\xi) \prod_{\tau \in \Sigma(R)} (\xi_1 - \varkappa(\tau)\, \xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{l(\tau)},$$

где $l(\tau)$ — натуральные числа, $\varkappa(\tau) \neq 0$ для $\tau \in \Sigma(R)$, $\varkappa(\tau^1) \neq \varkappa(\tau^2)$ при $\tau^1 \neq \tau^2$, $\tau^1, \tau^2 \in \Sigma(R)$, $r(\xi)$ аналитическая в $R_2^{(0)}$ функция, $r(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R_2^{(0)}$. При этом функция $\varkappa(\tau)$ принимает лишь конечное число различных значений.

Лемма 2. *Пусть $n = 2$, $Q_m(\xi)$ и $P_{m_i}(\xi)$ $(i = 0, 1, \cdots, M)$ λ-однородные многочлены, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *х.м. многочлена $P(\xi) = \sum_{i=0}^{M} P_{m_i}(\xi)$ вполне правилен,*

2) *многочлен $P(\xi)$ регулярен в каждой точке $\tau \in \Sigma(P_{m_0})$;*

3) *для каждой точки $\tau \in \Sigma(P_{m_0})$ существует номер j; $0 \leqslant j \leqslant M$ такой, что $P_{m_j}(\tau) \neq 0$, $P_{m_i}(\tau) = 0$ при $i < j$ и $m_i - l_i(\tau) < m$ при $i < j$, где $l_i(\tau)$ — λ-порядок нуля в точке τ многочлена $P_{m_i}(\xi)$;*

4. $\chi(\tau, Q_m, \delta) \leqslant \chi(\tau, P, \delta)$ $\forall \tau \in \Sigma(P_{m_0})$; $\delta \in [0, 1]$.

Тогда существует число N такое, что

$$|Q_m(\xi)|/(|P(\xi)| + 1) \leqslant N \quad \forall \xi \in R_2. \tag{8}$$

Отметим, что из условий 1)—3) следует, что многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен (см. [7], теорема 4).

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в силу регулярности многочлена $P(\xi)$ в каждой точке $\tau \in \Sigma(P_{m_0})$ имеем, что для некоторой постоянной $C > 0$

$$1 + |P(\xi)| \geqslant C \sum_{j=0}^{M} |P_{m_j}(\xi)| \quad \forall \xi \in R_2. \tag{9}$$

Пусть при выполнении условий леммы соотношение (8) нарушается. Тогда существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что при $s \to \infty$

$$\|\xi^s, \lambda\| \to \infty,\ \xi^s/\|\xi^s, \lambda\|^{\lambda} \to \tau,\ \tau \in \Sigma(P_{m_0}),$$

$$|Q_m(\xi^s)|/(|P(\xi^s)| + 1) \to \infty. \tag{10}$$

Из леммы 1 следует, что для некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$1+|P(\xi^s)|\geqslant C\sum_{l=0}^{M}|P_{m_l}(\xi^s)|=C\sum_{l=0}^{M}\|\xi^s,\lambda\|^{m_l}|P_{m_l}(\xi^s/\|\xi^s,\lambda\|^{\lambda})|>$$

$$\geqslant C_1\sum_{l=0}^{M}\theta_l\|\xi^s,\lambda\|^{m_l-l_l(\tau)}|\xi_1^s-\varkappa(\tau)(\xi_2^s)^{\lambda_2/\lambda_3}|^{l_l(\tau)},$$

где $l_l(\tau)$ — λ-порядок нуля многочлена $P_{m_l}(\xi)$ в точке τ, $\theta_l=1$ при $i\in\bigcup_{\tau\in\Sigma(P_{m_0})}A(\tau)$, $\theta_l=0$ — в остальных случаях.

Из представления многочлена $Q_m(\xi)$ по лемме 1 имеем для некоторой постоянной $C_2>0$

$$|Q_m(\xi^s)|\leqslant C_2\xi^s,\ \lambda\|^{m-l(\tau)}|\xi_1^s-\varkappa(\tau)(\xi_2^s)^{\lambda_2/\lambda_3}|^{l(\tau)}.$$

Эти два соотношения вместе с условием 4) противоречат (10) и доказывают лемму.

Теорема 3. *Если многочлены* $P(\xi)=\sum_{l=0}^{M}P_{m_l}(\xi)$ *и* $P(\xi)+Q(\xi)$ *одновременно гипоэллиптичны,* $Q(\xi)=\sum_{(\lambda,\alpha)<m_0}\gamma_\alpha\xi^\alpha$, *то для любого числа* $a\in(0,1)$ *существует число* $C=C(a)$ *такое, что*

$$|1+|P(\xi)+aQ(\xi)|\geqslant C(|P(\xi)|+|Q(\xi)|)\ \forall\xi\in R_n. \tag{11}$$

Доказательство. Очевидно, добавлением постоянной всегда можно добиться того, чтобы гипоэллиптический многочлен $P(\xi)\neq 0$ при $\xi\in R_n$.

Разобьем пространство R_n на следующие два подмножества:

$$D_1=\{\xi,\ \xi\in R_n,\ |Q(\xi)/P(\xi)|\geqslant 1\},\ D_2=R_n\setminus D_1.$$

Для произвольного числа N положим $K^N=\{\xi,\ \xi\in R_n,\ \|\xi,\lambda\|\leqslant N\}$.

Если для некоторого числа $N>0$, $D_1\subset K_N$, то неравенство (11) доказывается просто. Если же множество D_1 не ограничено, то докажем, что существует число N такое, что для всех точек

$$\xi\in D_1\setminus K_N,\quad Q(\xi)/P(\xi)>1.$$

Предполагая обратное получим, что для некоторой последовательности $\{\xi^s\}$; $\xi^s\in D_1$, $\|\xi^s,\lambda\|\to\infty$; $Q(\xi^s)/P(\xi^s)\leqslant -1$. Так как $d_Q=ordQ<m_0$, то, очевидно, существует стремящаяся к бесконечности последовательность $\{\eta^s\}$ такая, что $Q(\eta^s)/P(\eta^s)\to 0$.

Из этих двух соотношений следует существование последовательности $\{\tau^s\}$, $\|\tau^s,\lambda\|\to\infty$ такой, что $Q(\tau^s)/P(\tau^s)=-1$, т. е. $Q(\tau^s)+P(\tau^s)=0$, $s=1,2,\cdots$, что противоречит гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)+Q(\xi)$.

Пусть $a\in(0,1)$ — некоторое фиксированное число. Тогда по доказанному существует число N такое, что для множества D_1/K_N

$$|P(\xi)+aQ(\xi)|=|P(\xi)|+a|Q(\xi)|>a(|P(\xi)|+|Q(\xi)|). \tag{12}$$

Для множества D_2 имеем

$$|P(\xi)+aQ(\xi)|=|P(\xi)|\,|1+aQ(\xi)/P(\xi)|>|P(\xi)|\,(1-a)>$$

$$\geqslant\frac{1-a}{2}\,(|P(\xi)|+|Q(\xi)|). \tag{13}$$

Так как при $\xi\in K_N$ выражение $|P(\xi)|+|Q(\xi)|$ ограничено, то из (12), (13) получаем требуемое неравенство (11).

Покажем на примерах, что в теореме 3 нельзя расширять область изменения числа a.

Пример 1. Пусть $n=2$, $m>2$, $P(\xi)=(\xi_1-\xi_2)^{2m}+\xi_1^{2(m-2)}+\xi_2^{2(m-2)}$, $Q(\xi)=\xi_1^{2(m-1)}+\xi_2^{2(m-1)}$. Очевидно, при $a\neq 0$ неравенство (11) не имеет места, несмотря на то, что многочлены $P(\xi)$ и $P(\xi)+Q(\xi)$ гипоэллиптичны.

Пример 2. Пусть $n=2$, $P(\xi)=\xi_1^8\,\xi_2^8+\xi_1^{14}+\xi_2^{14}$, $Q(\xi)=2\xi_1^4\,\xi_2^{11}+\xi_1^2\,\xi_2^{12}$. Легко проверить гипоэллиптичность многочлена $P(\xi)$. Докажем, что многочлен $P(\xi)+Q(\xi)$ также гипоэллиптичен. Для этого покажем, что многочлен $P(\xi)+Q(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы Г. Г. Казаряна.

Многочлен $P(\xi)+Q(\xi)$ имеет только одну одномерную $(P+Q)$-нерегулярную грань $\mathfrak{M}_1^1=\{(0,14);(8,8)\}$. Покажем выполнение условия а) указанной теоремы. $\lambda=\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\right)$—нормаль грани $\mathfrak{M}_1^1$, $m_0=56/5$, $m_1=54/5$. Для точки $e^1=(14,0)$ имеем $(\lambda,e^1)<m_1$. Для любого $\nu\in A^{1,1}$ имеем $m_0-(\lambda,\nu)\leqslant 56/5-3/5=53/5<54/5=m_1$.

Следовательно

а) $\max\limits_{\nu\in A^{1,1}}[m_0-(\lambda,\nu)]<m_1$.

Выполнение условия в) теоремы следует из леммы 1. Для завершения доказательства гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)+Q(\xi)$ покажем выполнение условия с) теоремы.

с) $(P+Q)_{m_0}(\xi)=\xi_1^8\,\xi_2^8+\xi_2^{14}+2\xi_1^4\,\xi_2^{11}=\xi_2^2\,(\xi_1^4+\xi_1^3)^2\geqslant 0$,

$(P+Q)_{m_1}(\xi)=\xi_1^2\,\xi_2^{12}>0$, $\forall\,\xi\in R_2^{(10)}$.

При $a=1$ неравенство (11) для многочленов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ не имеет места, что следует из того, что на последовательности $\xi^s=[s^{3/4},-s]$ при $s\to\infty$

$$|Q(\xi^s)+P(\xi^s)|/|P(\xi^s)|.$$

Теорема 4. *Пусть $n=2$, многочлен $P(\xi)=\sum\limits_{l=0}^{M}P_{m_l}(\xi)$ гипоэллиптичен, $Q_m(\xi)$ —λ-однородный многочлен порядка $m<m_0$, при этом для некоторой постоянной $C>0$*

$$1+|P(\xi)+Q_m(\xi)|>C(|P(\xi)|+Q_m(\xi)|)\ \ \forall\xi\in R_2. \tag{14}$$

Если для каждой точки $\tau \in \Sigma(P_m)$, $m - l(\tau) < \chi(\tau, P, 1)$, *где* $l(\tau) = l(\tau, Q_m)$ — λ-*порядок нуля многочлена* $Q_m(\xi)$ *в точке* τ, *то многочлен* $P(\xi) + Q_m(\xi)$ *гипоэллиптичен.*

Доказательство. Отметим особо, что здесь не требуется регулярности многочлена $P(\xi)$.

Пусть наоборот, при выполнении условий теоремы многочлен $P(\xi) + Q_m(\xi)$ не гипоэллиптичен, т. е. для некоторой последовательности $\{\xi^s\}$, $\|\xi^s, \lambda\| \to \infty$ существуют число $\varepsilon > 0$ и мультииндекс α, $|\alpha| \neq 0$ такие, что

$$\frac{|P(\xi^s) + Q_m(\xi^s)|}{|D^\alpha (P(\xi^s) + Q_m(\xi^s))|} \leqslant \varepsilon, \quad s = 1, 2, \cdots. \tag{15}$$

Легко видеть, что тогда для некоторой подпоследовательности этой последовательности (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) $\xi^s/\|\xi^s, \lambda\|^\lambda \to \tau^0$ при $s \to \infty$, $\tau^0 \in \Sigma(P_m)$.

Представим, согласно лемме 1, многочлен $Q_m(\xi)$ в виде

$$Q_m(\xi) = Q_m^0(\xi) \prod_{\tau \in \Sigma(Q_m)} (\xi_1 - \varkappa(\tau)\, \xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{l(\tau)}$$

и покажем, что $|\xi_1^s - \varkappa(\tau^0)\, (\xi_2^s)^{\lambda_1/\lambda_2}| \to \infty$ при $s \to \infty$.

Предполагая обратное, имеем для любого $\nu \in Z_2^+$ и для некоторой подпоследовательности последовательности $\{\xi^s\}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$)

$$|D^\nu Q_m(\xi^s)| \leqslant C(\|\xi^s, \lambda\|^{m - l(\tau^0)} + 1),$$
$$1 + |P(\xi^s)| \geqslant C^{-1} \|\xi^s, \lambda\|^{\chi(\tau^0, P, 1)},$$

для некоторой постоянной $C > 0$.

Эти соотношения, вместе с условием $m - l(\tau^0) < \chi(\tau^0, P, 1)$ противоречат (15).

Итак, для указанной последовательности $\{\xi^s\}$

$$|\xi_1^s - \varkappa(\tau^0)\, (\xi_2^s)^{\lambda_1/\lambda_2}| \to \infty \text{ при } s \to \infty.$$

Тогда легко видеть, что при $|\nu| \neq 0$ и $s \to \infty$

$$|Q_m(\xi^s)|/|D^\nu Q_m(\xi^s)| \to \infty.$$

Из условия (14) и гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)$ получаем при $s \to \infty$

$$\left|\frac{P(\xi^s) + Q_m(\xi^s)}{D^\nu (P(\xi^s) + Q_m(\xi^s))}\right| > C \frac{|P(\xi^s)| + |Q_m(\xi^s)|}{|D^\nu P(\xi^s)| + |D^\nu Q_m(\xi^s))} \to \infty. \tag{16}$$

Это соотношение противоречит (15) и доказывает теорему.

Следствие 1. Пусть $n = 2$, многочлены $P(\xi)$ и $P(\xi) + Q_m(\xi)$ $(m < m_0)$ одновременно гипоэллиптичны, тогда для любого числа $a \in [0,1]$ многочлен $P(\xi) + a\, Q_m(\xi)$ также гипоэллиптичен.

Доказательство немедленно следует из теорем 3 и 4.

Пример 3. Пусть $n=2$, $P(\xi)=(\xi_1-\xi_2)^6(\xi_1+\xi_2)^4+\xi_1^6+\xi_2^6$, $Q_1(\xi)=(\xi_1-\xi_2)^2(\xi_1+\xi_2)^5$. Легко показать, что многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы Г. Г. Казаряна и, следовательно, гипоэллиптичен. Простые вычисления показывают, что $Q_1<P$ и для некоторой постоянной $C>0$

$$1+|Q_1(\xi)+P(\xi)|\geqslant C(|P(\xi)|+|Q_1(\xi)|)\quad\forall\xi\in R_2. \tag{17}$$

Тогда из теоремы 4 следует, что многочлен $P(\xi)+Q_1(\xi)$ также гипоэллиптичен. С другой стороны, если положим $Q_1(\xi)=2(\xi_1-\xi_2)^2(\xi_1+\xi_2)^5$, то оценка (17) не может иметь места и при этом многочлен $P(\xi)+Q_1(\xi)$ не будет гипоэллиптическим.

Теорема 5. *Пусть $n\geqslant 2$. Многочлен $P_k(\xi)$ доминирует над многочленом $P_m(\xi)$ тогда и только тогда, когда $P_m<P_k$ и $m<k$.*

Доказательство. Пусть $P_m<P_k\,(m<k)$, но $P_k(\xi)$ не доминирует над $P_m(\xi)$. Тогда в силу леммы 5 работы [7] следует существование последовательности $\{\xi^s\}$ и числа $\varepsilon>0$ таких, что при $|\xi^s|\to\infty$

$$|P_m(\xi^s)/P_k(\xi^s)|\geqslant\varepsilon,\quad B_s=|P_m(\xi^s)/\widetilde{P}_k'(\xi^s)|\to\infty,$$

где

$$\widetilde{P}_k'(\xi)=\Big[\sum_{|\alpha|=r_0}'|D^\alpha P_k(\xi)|^2\Big]^{1/2}.$$

Обозначим для каждого $s=1,2,\cdots$, $t_s=B_s^{-\frac{1}{3m-1}}$. Тогда при $s\to\infty$ имеем для последовательности $(t_s^\lambda\xi^s)=(t_s^{\lambda_1}\xi_1^s,\cdots,t_s^{\lambda_n}\xi_n^s)$

$$|P_m(t_s^\lambda\xi^s)/P_k(t_s^\lambda\xi^s)|>\varepsilon t_s^{m-k}\to\infty, \tag{18}$$

$$\left|\frac{P_m(t_s^\lambda\xi^s)}{\widetilde{P}_k'(t_s^\lambda,\xi^s)}\right|\geqslant\frac{t_s^m|P_m(\xi^s)|}{\sum\limits_{0<r<k}\sum\limits_{|\lambda,\alpha|=r}|D^\alpha P_k(t_s^\lambda\xi^s)|},$$

$$\frac{|t_s^m P_m(\xi^s)|\cdot}{t_s^{k-r}\sum\limits_{(\lambda,\alpha)=r}|D^\alpha P_k(\xi^s)|}\geqslant t_s^{m-k+r}\frac{|P_m(\xi^s)|}{|\widetilde{P}_k^1(\xi^s)|}=B_s^{-(m+r-k)\frac{1}{3m-1}}\cdot B_s\geqslant$$

$$\geqslant B_s^{(2m-1)/(3m-1)}.$$

Откуда, считая, что $m>\frac{1}{2}$*, при $s\to\infty$ имеем

$$\left|\frac{P_m(t_s^\lambda\xi^s)}{\widetilde{P}_k'(t_s^\lambda\xi^s)}\right|\to\infty. \tag{19}$$

Соотношения (18) и (19) вместе показывают, что $P_m\not\lhd P_k$. Так как из условия $P_m\ll P_k$ следует, что $P_m<P_k$, то это доказывает теорему.

* Это не умаляет общности, так как λ-однородный многочлен и $k\cdot\lambda$ однороден для любого числа $k>0$.

Теорема 6. *Пусть* $n=2$. *Многочлен* $P_k(\xi)$ *сильнее многочлена* $P_m(\xi)$ (*соответственно, доминирует над многочленом* $P_m(\xi)$) *тогда и только тогда, когда для любого* $\tau \in \Sigma(P_k)$

$$\gamma(\tau, P_m, \delta) < \gamma(\tau, P_k, \delta), \quad \delta \in [0,1] \tag{20}$$

соответственно

$$\gamma(\tau, P_m, 0) < \gamma(\tau, P_k, 0), \ \gamma(\tau, P_m, \delta) < \gamma(\tau, P_k, \delta), \ \delta \in [0, 1]. \tag{21}$$

Доказательство немедленно следует из теоремы 5 и результатов работы [7].

Следствие 2. Если многочлен $P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_{m_j}(\xi)$ гипоэллиптичен и $P_{m_j} < P$ для некоторого j; $0 \leqslant j \leqslant M$, то для любого λ-однородного многочлена $Q_r(\xi)$, $r < m_j$ такого, что $Q_r < P_{m_j}$, многочлен $P(\xi) + Q_r(\xi)$ также гипоэллиптичен и $Q_r \ll P$.

Доказательство немедленно получается, если применить теорему 4.1.6 работы [1], теорему 1 работы [7] и теорему 5 настоящей заметки.

§ 2. Сравнение (λ, β)-многочленов

Определение 13. Функцию $Q(\xi)$ назовем (λ, β)-многочленом ($\xi \in R_n$; $\lambda, \beta \in Z_n^+$) порядка d_Q, если

А) $Q(t^\lambda \xi) = t^{d_Q} Q(\xi)$ $\forall \xi \in R_n$, $t > 0$,

Б) $Q(\xi^\beta)$—многочлен от $\xi \in R_n$.

Простым примером (λ, β)-многочлена, не являющегося обычным многочленом, является функция $Q(\xi) = \xi_1 + \xi_2^{1/3}$ при $\lambda = \beta = (1, 3)$:

Определение 14. Будем говорить, что многочлен $P(\xi) = \sum_{i=0}^{M} P_{m_i}(\xi)$ (где $P_{m_i}(\xi)$, $i = 0, 1, \cdots M$, λ-однородные многочлены) доминирует (соответственно, сильнее) над (λ, β)-многочленом $Q(\xi)$, если многочлен $P(\xi^\beta)$ доминирует (соответственно сильнее) над многочленом $Q(\xi^\beta)$.

Определение 15. Характеристической линией (λ, β)-многочлена $Q(\xi)$ в точке τ назовем х.л. многочлена $Q(\xi^\beta)$ в точке $\tau^{1/\beta}$.

Пусть многочлен $P(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha) < m_0} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ удовлетворяет следующему условию:

С) для любого $\tau \in \Sigma(P_{m_0})$, и для любого $i \in \mathbf{A}(\tau)$ (определение $\mathbf{A}(\tau)$ см. на странице 448) существует число $\delta \in [0, 1]$ такое, что $\gamma(\tau, P_{m_i}, \delta) > \gamma(\tau, P - P_{m_i}, \delta)$.

Пусть $Q(\xi)$ (λ, β)-многочлен. Положим

$$E(P) = \{Q;\ Q < P\},\ \widetilde{E}(P) = \{Q;\ Q \lessdot P\},\ \tilde{E}(P) = \{Q;\ Q \ll P\}.$$

Теорема 7. *Пусть $n=2$, х.м. многочлена $P(\xi)$ в.п., многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условию* C) *и $E(P)\supset \tilde{E}(P)$, тогда либо $P<P_{m_0}$, либо многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен.*

Доказательство. Рассмотрим сдедующие два возможных случая:

а) для некоторой точки $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$, $\chi(\tau, P, 1)=0$;

в) для всех $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$, $\chi(\tau, P, 1)>0$.

В первом случае из определения х.м. многочлена $P(\xi)$ имеем, что для всех $i=0, 1, \cdots, M$, $\chi(\tau, P, 1)=0$. Это в силу леммы 1 означает, что для всех $i=0, 1, \cdots, M$ многочлены $P_{m_i}(\xi)$ имеют вид

$$P_{m_i}(\xi)=(\xi_1-\varkappa(\tau)\,\xi_1^{\lambda_1/\lambda_2})^{m_i}.$$

Так как $m_0>m_1>\cdots>m_M\geqslant 0$, то отсюда и из теоремы 6 легко следует, что $P<P_{m_0}$.

Во втором случае, не умаляя общности, можно считать, что $\chi(\tau, P, 1)\geqslant 1$ для всех $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$. В этом случае мы докажем, что многочлен $P(\xi)$ доминирует над (λ, β)-многочленом $Q(\xi)=\xi_1-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}$, где $\beta=(\lambda_1, \lambda_2)=\lambda$, т. е. $Q(\xi^\beta)=\xi_1^{\lambda_1}-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1}$.

При переходе от ξ к ξ^β λ-однородные многочлены $P_{m_i}(\xi)$ становятся однородными, при этом, если $P_{m_i}(\tau)=0$, то

$$P_{m_i}(\xi^\beta)=P^0_{m_i}(\xi^\beta)\,(\xi_1^{\lambda_1}-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1})^{\nu_{l_i}(\tau)}.$$

Поскольку $m_0>m_1>\cdots>m_M\geqslant 0$, то порядок однородного многочлена $P_{m_0}(\xi^\beta)$ хотя бы на $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ единиц больше порядка однородных многочленов $P_{m_i}(\xi^\beta)$ при $i=1, \cdots, M$.

Отсюда легко следует, что многочлен $P(\xi^\beta)$ доминирует над многочленом $Q(\xi^\beta)$, т. е. многочлен $P(\xi)$ доминирует над (λ, β)-многочленом $Q(\xi)$. Поскольку $\tilde{E}(P)\subset E(P)$, то из условия C) следует, что многочлен $P(\xi)$ регулярен в окрестности каждой точки $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$. Пусть $\tau^0\in\Sigma(P_{m_0})$. Тогда при всех $i=0, 1, \cdots, r$ многочлен $P_{m_i}(\tau)=0$,

$$P_{m_i}(\xi)=P^0_{m_i}(\xi)\prod_{\tau\in\Sigma(P_{m_0})}(\xi_1-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{l_i(\tau)}$$

доминирует над (λ, β)-многочленом

$$P'_{m_i}(\xi)=P^0_{m_i}(\xi)\prod_{\substack{\tau\in\Sigma(P_{m_0})\\ \tau\neq\tau^0}}(\xi_1-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{l_i(\tau)},$$

где $l_i(\tau)$, λ-порядок нуля многочлена $P_{m_i}(\xi)$ в точке τ. Из следствия 2 имеем, что многочлен $P(\xi)$ доминирует над (λ, β)-многочленом $P'_{m_i}(\xi)$ для любого i; $0\leqslant i\leqslant r$. Поскольку $\tilde{E}(P)\subset E(P)$, то существует положительное число $C>0$ такое, что

$$\sum_{l=0}^{r} |P^{(\alpha)}_{m_l}(\xi)| \leqslant C\,(|P(\xi)|+1)\ \forall \xi \in R_n.$$

Так как $P^{(\alpha)}_{m_l}(\tau^0) \neq 0$, $i=0, 1, \cdots, r$, то х.л. (λ, β)—многочлена $P^{\alpha}(\xi) = \sum_{l=0}^{r} (P^{(\alpha)}_{m_l}(\xi))^2$ в точке τ не зависит от $\delta \in [0, 1]$. Так как многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условию С), то существует единственный номер j; $0 \leqslant j \leqslant M$ такой, что $\chi(\tau^0, P_{m_j}, 1) > \chi(\tau, P - P_{m_j}, 1)$. Это значит, что $m_l - l_l(\tau^0) < m_j - l_j(\tau^0)$ для любого $i \in \mathbf{A}(\tau^0)$.

Для завершения доказательства нам остается показать, что $l_j(\tau^0) = 0$. Предполагая обратное, т. е. что $l_j(\tau^0) \neq 0$, получим для последовательности $\xi^s = \{\tau_1^0 s, \tau_2^0 s^{\lambda_2/\lambda_1}\}$ и для некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$1 + \sum_{l=0}^{r} |P^{(\alpha)}_{m_l}(\xi^s)| \geqslant C_1 s^{\chi(\tau^0, P_{m_j}, 1)}.$$

С другой стороны, так как $\chi(\tau^0, P_{m_j}, 1) = m_j - l_j(\tau^0) > \chi(\tau^0, P_{m_l}, 1)$ для любого $i \in \mathbf{A}(\tau^0)$ и $P_{m_j}(\xi^s) = 0$, $s=1, 2, \cdots$, то $P(\xi^s)/s^{\chi(\tau^0, P_{m_j}, 1)} \to 0$ при $s \to \infty$.

Это противоречие показывает, что $l_j(\tau^0) = 0$. Тогда $m_l - l_l(\tau^0) < m_j$, $i=0, 1, \cdots, M$, $i \neq j$. Так как $\tau^0 \in \Sigma(P_{m_0})$—произвольная точка, то для любой точки $\tau \in \Sigma(P_{m_0})$ существует номер j; $0 \leqslant j \leqslant M$ такой, что $P_{m_j}(\tau) \neq 0$ и $m_l - l_l(\tau) < m_j$ для всех

$$i;\ 0 \leqslant i \leqslant M;\ i \neq j.$$

Последнее вместе с регулярностью многочлена $P(\xi)$ в каждой точке $\tau \in \Sigma(P_{m_0})$ показывают, что многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен (см. теорему 4 работы [7]).

Этим теорема доказана.

Замечание. Легко видеть, что если многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен, то $\tilde{E}(P) \subset E(P)$.

§ 3. Сравнение и гипоэллиптичность многочленов с переменными коэффициентами при $n=2$

Пусть имеем многочлен $P(x, \xi) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha(x) \xi^\alpha$, где $\gamma_\alpha(x)$ — вещественные функции, определенные в области Ω пространства R_n.

Определение 1б. Многочлен $P(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω, если для любых двух точек $x, y \in \Omega$ существует постоянная $C_{x,y} > 0$ такая, что $\tilde{P}(x, \xi)/\tilde{P}(y, \xi) \leqslant C_{x,y}$ для любого $\xi \in R_n$, где для данного многочлена $R(x, \xi)$, $\tilde{R}(x, \xi) = [\sum_{\alpha} |D_\xi^\alpha R(x, \xi)|^2]^{1/2}$.

В работе [8] при $n=2$ доказано, что λ-однородный многочлен $Q_m(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω тогда и только тогда, когда имеет место представление

$$Q_m(x, \xi) = Q_m^0(x, \xi)\, q(\xi),$$

где $Q_m^0(x, \xi) \neq 0$ для любого $x \in \Omega$ и $\xi \in R_2^{(0)}$, а

$$q(\xi) = \prod_{\tau \in \Sigma(Q_m(x^0, \xi))} (\xi_1 - \varkappa(\tau)\, \xi_2^{1/r_0})^{l(\tau)}.$$

Там же доказано, что если многочлен $Q_m(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω, то $\Sigma(x, Q_m)$ не зависит от точки $x \in \Omega$:

$$\Sigma(x, Q_m) \equiv \Sigma(Q_m).$$

Мы будем рассматривать многочлены вида

$$P(x, \xi) = \sum_{i=0}^{M} P_{m_i}(x, \xi),\ m_0 > m_1 > \cdots > m_M \geqslant 0,$$

где $P_{m_i}(x, \xi)$ — λ-однородный многочлен ($\lambda_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$) порядка m_i, $i = 0, \cdots, M$, где $P_{m_0}(x, \xi)$ представляется в виде $P_{m_0}^0(x, \xi)\, P(\xi)$, $P_{m_0}^0(x, \xi)$, $P(\xi)$ являются (λ, β)-многочленами и $P_{m_0}^0(x, \xi) \neq 0$ для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R_2^{(0)}$.

Далее мы будем считать, что рассматриваемые многочлены удовлетворяют следующему условию:

C′) для каждой пары точек (τ, x), где $\tau \in \Sigma(P)$, $x \in \Omega$ и для любого $j \in A(x, \tau)$ существует число $\delta = \delta(x) \in [0, 1]$ такое. что

$$\gamma(x, \tau, P_{m_j}, \delta) > \gamma(x, \tau, P - P_{m_j}, \delta).$$

Лемма 3. *Пусть многочлен $P(x, \xi)$ удовлетворяет условию* C′) *и для всех точек $\tau \in \Sigma(P)$ функция $\gamma(x, \tau, P, \delta)$ не зависит от $x \in \Omega$.*

Тогда, если многочлен $P_{m_i}(x^0, \xi)$, $0 \leqslant i \leqslant M$ является активным подмногочленом многочлена $P(x^0, \xi)$ в точке $\tau \in \Sigma(P)$, где x^0 — некоторая точка из Ω, то для любой точки $x \in \Omega$ многочлен $P_{m_i}(x, \xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(x, \xi)$ в точке τ и при этом для всех $x \in \Omega$ множество чисел $\delta \in [0, 1]$, удовлетворяющих условию C′) *не зависит от x.*

Доказательство. Сначала заметим, что из условия C′) и из определения х.л. следует, что если многочлен $P_{m_i}(x^0, \xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(x^0, \xi)$ в точке τ, то существует отрезок $[C_1, C_2] \subset [0, 1]$ такой, что при $\delta \in [C_1, C_2]$, $\gamma(x^0, \tau, P_{m_i}, \delta) > \gamma(x^0, \tau, P - P_{m_i}, \delta)$. Пусть $x^1 \in \Omega$ — произвольная точка. Докажем, что многочлен $P_{m_i}(x^1, \xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(x^1, \xi)$ в точке τ. Так как по условию $\gamma(x, \tau, P, \delta) \equiv \gamma(x^0, \tau, P, \delta)$, $\delta \in [0, 1]$, то существует многочлен $P_{m_j}(x, \xi)$, $0 \leqslant j \leqslant M$, являю-

щийся активным подмногочленом многочлена $P(x^1, \xi)$ в точке τ такой, что для некоторого числа $\delta_0 \in [C_1, C_2]$ $\gamma(x^1, \tau, P_{m_j}, \delta_0) = \gamma(x^0, \tau, P, \delta_0) = \gamma(x^0, \tau, P_{m_l}, \delta_0)$ и $\gamma(x^1, \tau, P_{m_j}, \delta_0) > \gamma(x^1, \tau, P - P_{m_j}, \delta_0)$. Из этого следует существование отрезка $[C_3, C_4] \subset [C_1, C_2]$ такого, что $\gamma(x^1, \tau, P_{m_j}, \delta) = \gamma(x^0, \tau, P_{m_l}, \delta)$ при $\delta \in [C_3, C_4]$. Но поскольку х.л. γ-однородного многочлена определяетзя любым куском х.л. этого многочлена, то $m_j = \gamma(x^1, \tau, P_{m_j}, 0) = \gamma(x^0, \tau, P_{m_l}, 0) = m_l$, а это означает, что $P_{m_l}(x, \xi) \equiv P_{m_j}(x, \xi)$, т. е. многочлен $P_{m_l}(x^1, \xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(x^1, \xi)$ в точке τ. Так как число $\delta_0 \in [0, 1]$ можно брать произвольным, лишь бы оно удовлетворяло условию C'), то это доказывает лемму.

Лемма 4. *Пусть многочлен* $P(x, \xi) = \sum_{l=0}^{M} P_{m_l}(x, \xi)$, *где* $m_0 > m_1 > \cdots > m_M \geqslant 0$ *имеет постоянную силу в* Ω, *тогда функция* $\gamma(x, \tau, P, \delta)$ *при* $x \in \Omega$, $\tau \in \Sigma(P)$, $\delta \in [0, 1]$ *не зависит от точки* $x \in \Omega$.

Доказательство. Пусть для точек $\tau \in \Sigma(P)$, $x^0, x^1 \in \Omega$ и число $\delta_0 \in [0, 1]$

$$\gamma(x^1, \tau, P, \delta_0) > \gamma(x^0, \tau, P, \delta_0). \tag{22}$$

Рассмотрим многочлены с постоянными коэффициентами $P(x^1, \xi)$ $P(x^0, \xi)$. Из определения х.л. следует существование последовательности $\{\xi^s\}$ и чисел C_0, C_1, $C_2 > 0$ таких, что для любого $\alpha \in Z_2^+$

$$|\xi_1^s - \varkappa(\tau)(\xi_2^s)^{\lambda_1/\lambda_2}| = C_0 \|\xi^s, \lambda\|^{1-\lambda_0},$$

$$1 + |P(x^1, \xi^s)| > C_1 \|\xi^s, \lambda\|^{\gamma(x^1, \tau, P, \delta_0)},$$

$$|D_\xi^\alpha P(x^0, \xi^s)| \leqslant C_2 \|\xi^s, \lambda\|^{\gamma(x^0, \tau, P, \delta_0) - \delta_0 |\alpha|}.$$

Эти оценки вместе с соотношением (22) противоречат тому, что многочлен $P(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω и доказывают лемму.

Следствие 3. Пусть многочлен $P(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω и удовлетворяет условию C'), тогда

$$P(x, \xi) = \sum_{l \in V} P_{r_l}(x, \xi) p_l(\xi) + Q(x, \xi),$$

где $P_{r_l}(x, \xi) \neq 0$ при $\xi \in \Sigma(P)$, $x \in \Omega$ многочлен $Q(x, \xi)$ не является активным подмногочленом многочлена $P(x, \xi)$ ни для какой точки $\tau \in \Sigma(P)$, а $V \equiv V(x) = \bigcup_{\tau \in \Sigma(P)} \mathbf{A}(x, \tau)$ для любой точки $x \in \Omega$.

Теорема 8. *Если многочлен* $P(x, \xi) = \sum_{l=0}^{M} P_{m_l}(x, \xi)$ *удовлетворяет условию* C'), *регулярен в каждой точке* $\tau \in \Sigma(x, P_{m_0})$, $P_{m_0}(x, \xi)$ *имеет постоянную силу в* Ω *и функция* $\gamma(x, \tau, P, \delta)$ *не зависит от точки* $x \in \Omega$, *то многочлен* $P(x, \xi)$ *имеет постоянную силу в* Ω.

Доказательство. Пусть наоборот, при выполнении условий теоремы многочлен $P(x, \xi)$ не имеет постоянной силы в Ω. Это зна-

чит, что существуют точки x^0, $x^1 \in \Omega$ и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что при $s \to \infty$

$$\widetilde{P}(x^1, \xi^s)/\widetilde{P}(x^0, \xi^s) \to 0. \tag{23}$$

Легко видеть, что для некоторой подпоследовательности этой последовательности (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) существует точка $\tau \in \Sigma(P)$ такая, что $\xi^s/\|\xi^s, \lambda\|^\lambda \to \tau$ при $s \to \infty$. Учитывая регулярность многочлена $P(x, \xi)$, получим для некоторой постоянной $C > 0$

$$1 + |P(x^1, \xi^s)| \geqslant C \sum_{l=0}^{M} |P_{m_l}(x^1, \xi^s)|, \quad |P(x^0, \xi^s)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{M} |P_{m_l}(x^0, \xi^s)|.$$

Докажем, что для некоторой подпоследовательности $\{\xi^{s'}\}$ последовательности $\{\xi^s\}$, такой, что $\xi^{s'} \to \infty$

$$|\xi_1^{s'} - \varkappa(\tau)(\xi_2^{s'})^{\lambda_1/\lambda_2}| \to \infty.$$

Пусть наоборот

$$|\xi_1^s - \varkappa(\tau)(\xi_2^s)^{\lambda_1/\lambda_2}| \leqslant C < \infty \quad s = 1, 2, \cdots.$$

Тогда для некоторых постоянных $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ имеем

$$|\widetilde{P}(x^1, \xi^s)| < C_1 \|\xi^s, \lambda\|^{\chi(x^1, \tau, P, 1)},$$

$$1 + |\widetilde{P}(x^0, \xi^s)| > C_2 \|\xi^s, \lambda\|^{\chi(x^0, \tau, P, 1)}.$$

Так как $\chi(x^1, \tau, P, 1) = \chi(x^0, \tau, P, 1)$, то полученные соотношения противоречат (23).

Итак, при $s' \to \infty$

$$|\xi_1^{s'} - \varkappa(\tau)(\xi_2^{s'})^{\lambda_1/\lambda_2}| \to \infty.$$

В силу следствия 3 имеем, что

$$P(x, \xi^{s'}) = \sum_{l \in V} P_{r_l}^0(x, \xi^{s'}) p_l(\xi^{s'}) + Q(x, \xi^{s'}).$$

В силу леммы 9 работы [7] имеем, что при $s' \to \infty$

$$\left| \frac{Q(x^1, \xi^{s'})}{\sum_{l \in V} P_{r_l}(x^1, \xi^{s'}) P_l(\xi^{s'})} \right| \to 0, \quad \frac{|Q(x^0, \xi^{s'})|}{\left|\sum_{l \in V} P_{r_l}(x^0, \xi^{s'}) P_l(\xi^{s'})\right|} \to 0.$$

Отсюда следует, что с некоторой постоянной $C_3 > 0$

$$\frac{|\widetilde{P}(x^0, \xi^{s'})|}{1+|\widetilde{P}(x^1, \xi^{s'})|} \leqslant C_3 \frac{|\sum_{l\in V} P^0_{r_l}(x^0, \xi^{s'})\, P_l(\xi^{s'})|}{1+|\sum_{l\in V} P^0_{r_l}(x^1, \xi^{s'})\, p_l(\xi^{s'})|}.$$

Поскольку в точке ξ многочлены $P^0_{r_l}(x^0, \xi)$ и $P^0_{r_l}(x^1, \xi)$ не обращаются в нуль ни для какого индекса $i \in V$, то для каждого $i \in V$ существует число $\varepsilon_l > 0$ такое, что

$$|P^0_{r_l}(x^0, \xi^{s'})|/(1+|P^0_{r_l}(x^1, \xi^{s'})|) \leqslant \varepsilon_l, \quad s = 1, 2, \cdots. \tag{24}$$

Так как $P_l(\xi^{s'}) \to \infty$ при $s' \to \infty$ для $i \in V$, то (24) противоречит (23) и доказывает теорему.

Следствие 4. Если при условиях теоремы 8 еще потребовать, чтобы $\gamma_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$ для всех $\alpha \in (P)$, то многочлен $P(x, \xi)$ будет формально гипоэллиптическим в Ω (см. [10]), если многочлен $P(x, \xi)$ гипоэллиптичен хотя бы в одной точке $x^0 \in \Omega$.

Доказательство немедленно следует из теоремы 8 и теоремы 7.4.1 работы [1].

Ереванский научно-исследовательский
институт математических машин

Поступила 10.VIII.1979

Վ. Ն. ՄԱՐԳԱՐՅԱՆ. Օպերատորի հիպոէլիպտիկությունը պահպանող կրտսեր անդամների գումարում *(ամփոփում)*

Այս աշխատանքում գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $Q(\xi)$ բազմանդամի համար այնպիսի, որպեսզի $P(\xi)+Q(\xi)$ բազմանդամը լինի հիպոէլիպտիկ, եթե հիպոէլիպտիկ է $P(\xi)$ բազմանդամը։

V. N. MARGARIAN. *Addition of junior terms preserving hypoellipticity of an operator* (summary)

When the polynomial $P(\xi) + Q(\xi)$ is hypoelliptic if the polynomial $P(\xi)$ is hypoelliptic. The paper gives an answer to this question stating some necessary as well as some sufficient conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.
2. *B. Pini.* Osservazoni sulla ipoellicita, Boll. un. Mat. Ital., 1963, 420—432.
3. *L. Hörmander.* On intrior regularrity of the solutions of partial differential equations, Comm. Pure. Appl. Math., 11, 1958, 197—218.
4. *Г. Г. Казарян.* Об одном семействе гипоэллиптических многочленов, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 3, 1974, 189—211.
5. *Г. Г. Казарян.* О добавлении младших членов к дифференциальным полиномам, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 6, 1974, 373—485.
6. *Г. Г. Казарян.* Об оценках мономов через данный многочлен и характеризация гипоэллиптичности, ДАН СССР, 222, № 3, 1975, 530—533.
7. *Г. Г. Казарян, В. И. Маркарян.* Критерии гипоэллиптичности в терминах сравнения мощности и силы операторов, Труды МИАН СССР, 150, 1979, 128—142.

8. *Г. Г. Казарян.* Операторы постоянной силы с оценками снизу через производные и формально гипоэллиптические операторы, Analysis Math., 3, Fasc. 4, 1977, 263—289.
9. *Г. Г. Казарян.* Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность, Труды МИАН СССР, 150, 1979, 143—159.
10. *J. Peetre.* A proof of the hypoellipticity of formaly hypoelliptic differential operators, Comm. Pure. Appl. Math., 14, 1967, 737—747.
11. B. *Malgrange.* Sure une classe d'operatours differentials hypoelliptiques, Bull. Soc. Math. France, 85, № 3, 1957, 283—306.
12. *L. Cattabriga.* Su una classi di polinomi ipoellitici, Rend. Sem., Math. Univ. Padova, 36, 1966, 285—309.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 6, 1980 Математика

А. М. ДЖРБАШЯН, Г. В. МИКАЕЛЯН

ПОСТРОЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ ТИПА БЛЯШКЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Введение

1°. В своей давней работе [1] (см. также [2]) М. М. Джрбашян открыл весьма общий класс формул типа Иенсена-Неванлинна, зависящих от непрерывного параметра α $(0<\alpha<+\infty)$ и совпадающих с классической формулой Иенсена-Неванлинна при $\alpha=0$. Эти формулы, связывая значения мероморфной в единичном круге $D=\{z;\ |z|<1\}$ функции $f(z)$ с ее нулями $\{a_n\}$ и полюсами $\{b_n\}$, как и в классическом случае порождали некие факторы — аналоги известных факторов Бляшке, зависящие от параметра α $(0<\alpha<+\infty)$.

Факторы, введенные в работе [1], имеют вид

$$A_\alpha(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-U_\alpha(z;\zeta)\},\qquad(1)$$

где функция

$$U_\alpha(z;\zeta)=\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^\alpha}{t}\,dt-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\int_0^{|\zeta|^2}(1-t)^\alpha\,t^{n-1}\,dt\qquad(2)$$

при любых α $(0<\alpha<+\infty)$ и $\zeta\in D$ аналитична в единичном круге D.

Там же было установлено, что в единичном круге D, кроме отрезка $l(\zeta)=\{z;\ |\zeta|\leqslant|z|<1,\ \arg z=\arg\zeta\}$ фактор $A_\alpha(z;\zeta)$ допускает также представление

$$A_\alpha(z;\zeta)=\exp\left\{-\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^\alpha}{\left(1-\frac{z}{\zeta}\,t\right)^{1+\alpha}}\,\frac{dt}{t}\right\}\ (0<\alpha<+\infty).\qquad(3)$$

Далее, было доказано, что для сходимости бесконечного произведения

$$\pi_\alpha(z)=\prod_{k=1}^{\infty}A_\alpha(z;z_k);\ 0<\alpha<+\infty\qquad(4)$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{z_k\}_1^\infty\subset D$ удовлетворяла условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty. \tag{5}$$

В частности, когда $\alpha\to 0$, предел произведения $\pi_\alpha(z)$ отличался от известной функции Бляшке лишь постоянным множителем

$$\pi_0(z)=c_0\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\frac{|z_k|}{z_k},\quad c_0=\prod_{k=1}^{\infty}|z_k|. \tag{6}$$

На дальнейших результатах, полученных в работах [1] и [2], а также на родственных окончательных результатах (см. [3], гл. IX, а также [4]) М. М. Джрбашяна мы останавливаться не будем.

2°. В канонической факторизации функций класса H^p, а также функций ограниченного вида в полуплоскости $G^{(+)}=\{z;\ \operatorname{Im} z>0\}$ существенную роль играют две функции, нули $\{z_k\}_1^\infty$ которых лежат в $G^{(+)}$ и которые также принято называть функциями Бляшке:

$$\Pi(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z-z_k}{z-\bar{z}_k}\frac{|1+z_k^2|}{1+z_k^2}\quad\text{и}\quad B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-\frac{z}{z_k}}{1-\frac{z}{\bar{z}_k}}. \tag{7}$$

Первая из этих функций непосредственно может быть получена из функции Бляшке для единичного круга D путем отображения его на полуплоскость $G^{(+)}$. Это бесконечное произведение сходится в том и только в том случае, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} z_k}{1+|z_k|^2}.$$

Для сходимости второго произведения достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} z_k}{|z_k|^2}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_k}\right|<+\infty \tag{8}$$

(а если точки последовательности $\{z_k\}_1^\infty\subset G^{(+)}$ лежат вне некоторой окрестности начала координат, последнее условие будет также необходимо). Это произведение в свое время было введено Р. Неванлинной, оно играет важную роль, например, в теории целых функций так называемого класса A (см. [5], гл. 5).

Заметим, что при отображении $w=z^{-1}$ $(w_k=z_k^{-1})$, переводящим верхнюю полуплоскость $G^{(+)}$ в нижнюю — $G^{(-)}=\{w;\ \operatorname{Im} w<0\}$, произведение $B(z)$ принимает вид

$$B(w)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{w-w_k}{w-\bar{w}_k}, \tag{9}$$

причем $\{w_k\}_1^\infty\subset G^{(-)}$, и для сходимости последнего произведения в $G^{(-)}$ достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k| < +\infty. \tag{10}$$

3°. На основании указанных выше фактов и в связи со специальной аналогией, наблюдаемой между классическими теориями факторизации функций, мероморфных в круге и в полуплоскости, было естественно попытаться построить аналог функции $\pi_\alpha(z)$ для полуплоскости $G^{(-)}$. Причем такой аналог, который сходился при выполнении условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty$$

и в каком-то естественном смысле обладал свойствами, аналогичными свойствам функции $\pi_\alpha(z)$.

Указанная задача представлялась тем более естественной еще и потому, что первым из соавторов в работе [6] был построен полуплоскостной аналог более совершенной, чем $\pi_\alpha(z)$ функции типа Бляшке, введенной также М. М. Джрбашяном (см., например, [3], гл. IX).

Данное исследование проводится методами, разработанными впервые в работе [6]. Приводимые в настоящей статье результаты во многом аналогичны результатам этой работы. При этом, факторы построенного в статье произведения примечательны тем, что для целочисленных значений параметра α $(-1 < \alpha < +\infty)$ они, как и факторы $\pi_\alpha(z)$, имеют структуру классических факторов Вейерштрасса.

4°. В настоящей статье, как и в работе [6], для достижения поставленной цели был применен подход, основанный по существу на правдоподобном рассуждении. Суть этого рассуждения заключается в следующем.

Как нетрудно заметить, факторы $A_\alpha(z; \zeta)$ $(0 < \alpha < +\infty)$, а также подынтегральные функции в их представлении (3) инвариантны относительно переменных z и ζ при вращении единичного круга D вокруг начала координат. Одновременно, относительно переменных w и w_k при параллельном вещественной оси перемещении полуплоскости $G^{(-)}$ инвариантны факторы произведения (9).

Запишем фактор произведения (9) в виде интеграла с инвариантной относительно w и w_k при параллельном перемещении $G^{(-)}$ подынтегральной функцией

$$a_0(w; w_k) \equiv \frac{w - w_k}{w - \overline{w}_k} = \exp\left\{-\int_0^{2\operatorname{Im}\overline{w}_k} \frac{d\tau}{\tau + i(w - w_k)}\right\}. \tag{11}$$

Определим теперь искомые факторы по аналогии с представлением (3) факторов $A_\alpha(z; \zeta)$ следующим образом:

$$a_\alpha(w; w_k) \equiv \exp\left\{-\int_0^{2\operatorname{Im}\overline{w}_k} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\alpha}}\right\}, \quad -1 < \alpha < +\infty. \tag{12}$$

В приводимых ниже теоремах устанавливается, что предположение (12) относительно вида искомых факторов не только правдоподобно, но и вполне оправдано.

§ 1. Простейшие свойства функций $a_\alpha(w; w_k)$

1.1. Пусть $w_k \equiv u_k + iv_k \in G^{(-)}$ — любая фиксированная точка. Запишем функцию (11) в виде

$$a_0(w; w_k) = \exp\{-\omega_0(w; w_k)\}, \tag{1.1}$$

$$\omega_0(w; w_k) = \int_0^{2|v_k|} \frac{d\tau}{\tau + i(w - w_k)}. \tag{1.1'}$$

Легко видеть, что при этом

$$\omega_0(w; w_k) = \log[2|v_k| + i(w - w_k)] - \log[i(w - w_k)] = \tag{1.2}$$

$$= \log \frac{w - \overline{w}_k}{w - w_k}$$

и, следовательно, мы имеем

$$a_0(w; w_k) = \frac{w - w_k}{w - \overline{w}_k}.$$

Далее, в предположении, что α $(-1 < \alpha < +\infty)$ произвольное, введем в рассмотрение также функции

$$a_\alpha(w; w_k) = \exp\{-\omega_\alpha(w; w_k)\}, \tag{1.3}$$

$$\omega_\alpha(w; w_k) = \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\alpha}}. \tag{1.3'}$$

Легко видеть, что при $\alpha > 0$ интегрированием по частям мы получим

$$\omega_{\alpha-1}(w; w_k) = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\tau}{\tau + i(w - w_k)}\right]^\alpha \Bigg|_0^{2|v_k|} +$$

$$+ \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\alpha}},$$

т. е.

$$\omega_\alpha(w; w_k) = \omega_{\alpha-1}(w; w_k) - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{2|v_k|}{2|v_k| + i(w - w_k)}\right]^\alpha.$$

Таким образом, мы пришли к рекуррентной формуле

$$\omega_\alpha(w; w_k) = \omega_{\alpha-1}(w; w_k) - \frac{1}{\alpha}\left[-\frac{2iv_k}{w - \overline{w}_k}\right]^\alpha, \quad 0 < \alpha < +\infty. \tag{1.4}$$

В случае, когда $\alpha = p \geqslant 1$ — целое число, из этой формулы нетрудно получить представление

$$\omega_p(w; w_k) = \log\frac{w-\overline{w}_k}{w-w_k} - \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\left[-\frac{2iv_k}{w-\overline{w}_k}\right]^n.$$

Отсюда и из (1.3) мы приходим к формуле

$$a_p(w; w_k) = \frac{w-w_k}{w-\overline{w}_k}\exp\left\{\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\left[-\frac{2iv_k}{w-\overline{w}_k}\right]^n\right\}, \tag{1.5}$$

справедливой при любом $p \geqslant 1$ целом.

1.2. Из формул (1.1), (1.1′) и (1.3), (1.3′), как нетрудно убедиться, следует, что при любом α $(-1 < \alpha < +\infty)$ справедлива формула

$$a_\alpha(w; w_k) = a_0(w; w_k)\exp[\omega_0(w; w_k) - \omega_\alpha(w; w_k)]. \tag{1.6}$$

На основании этой формулы доказывается следующая

Теорема 1.1. *При любых* α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *и* $w_k = u_k + iv_k \in G^{(-)}$ *функция* $a_\alpha(w; w_k)$ *аналитична в разрезанной плоскости* $\mathbf{C}\setminus\{w = u_k + ih;\ 0 \leqslant h < +\infty\}$ *и имеет нуль, притом первого порядка, только в точке* $w_k \in G^{(-)}$*.

Доказательство. При $w \notin [w_k; \overline{w}_k]$ (т. е. w не принадлежащем замкнутому отрезку, соединяющему точки w_k и $\overline{w}_k$) из формул (1.1), (1.1′) и (1.3), (1.3′) мы придем к разложению вида

$$\omega_\alpha(w; w_k) - \omega_0(w; w_k) =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left[\left\{\frac{\tau}{\tau + i(w-w_k)}\right]^\alpha - 1\right\}\frac{d\tau}{\tau + i(w-w_k)} -$$

$$- \int_{2|v_k|}^{+\infty}\left\{\left[\frac{\tau}{\tau + i(w-w_k)}\right]^\alpha - 1\right\}\frac{d\tau}{\tau + i(w-w_k)} \equiv$$

$$\equiv I_1(w; w_k) + I_2(w; w_k), \tag{1.7}$$

где последние два интервала сходятся, поскольку при $\tau \to +\infty$

$$\left[\frac{\tau}{\tau + i(w-w_k)}\right]^\alpha - 1 \sim \alpha\left[\frac{\tau}{\tau + i(w-w_k)} - 1\right] = -i\alpha\frac{w-w_k}{\tau + i(w-w_k)}.$$

Заметим, что подынтегральная функция в I_2 аналитична в разрезанной плоскости $\mathbf{C}\setminus\{w = u_k + ih;\ 0 \leqslant h < +\infty\}$. Одновременно, в силу последнего соотношения этот интеграл равномерно сходится в той же области, и, таким образом, функция $I_2(w; w_k)$ аналитична в разрезанной плоскости $\mathbf{C}\setminus\{w = u_k + ih;\ 0 \leqslant h < +\infty\}$.

---

* Область $\mathbf{C}\setminus\{w = u_k + ih;\ 0 < h < +\infty\}$ содержит в себе нижнюю полуплоскость $G^{(-)}$. Отметим, однако, что аналитичность функции $a_\alpha(w; w_k)$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ в $G^{(-)}$ не очевидна, так как все представления (1.3), (1.3′) подынтегральная функция разветвляется на полупрямой $\{w = w_k + ih;\ 0 < h < +\infty\}$, частично содержащейся в $G^{(-)}$.

Далее, мы убедимся, что интеграл I_1 в разложении (1.7) — постоянная, и в силу (1.6) и (1.7) теорема будет доказана.

Повторяя рассуждения, проведенные для I_2 для интеграла I_1, нетрудно установить аналитичность функции $I_1(w;\ w_k)$ в разрезанной плоскости $\mathbf{C}\setminus\{w_k+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$. Одновременно, на полупрямой $\{w=w_k-ih;\ 0<h<+\infty\}$ мы имеем

$$I_1(w_k-ih;\ w_k)=\int_0^{+\infty}\left[\left(\frac{\tau}{\tau+h}\right)^{\alpha}-1\right]\frac{d\tau}{\tau+h}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha}-1\right]\frac{dx}{1+x}=\text{const}.$$

1.3. Для дальнейшего изложения важна следующая

Лемма 1.1. *При любых* $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ *и* $\xi\in(-\infty;\ +\infty)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\eta\to+0}\frac{\log a_\alpha(w;\ \xi-i\eta)}{\eta^{1+\alpha}}=-\frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha}\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}}{(w-\xi)^{1+\alpha}},\quad w\in G^{(-)}. \tag{1.8}$$

Доказательство. В силу формул (1.3) и (1.3′) заменой переменной $\tau=2\eta x$ при $\eta>0$ мы получим представление

$$\log a_\alpha(w;\ \xi-i\eta)=-2^{1+\alpha}\eta^{1+\alpha}\int_0^1\frac{(1-x)^\alpha\,dx}{[\eta(1+2x)+i(w-\xi)]^{1+\alpha}}.$$

Отсюда соотношение (1.8) леммы следует непосредственно.

На основании теоремы 1.1 и предыдущей леммы доказывается следующая основная

Теорема 1.2. *Пусть последовательность точек* $\{w_k\}_1^\infty\subset G^{(-)}$ *при некотором* $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'|\operatorname{Im}w_k|^{1+\alpha}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|^{1+\alpha}<+\infty. \tag{1.9}$$

Тогда бесконечное произведение

$$A_\alpha(w)=\prod_{k=1}^{\infty}a_\alpha(w;\ w_k) \tag{1.10}$$

абсолютно и равномерно сходится внутри полуплоскости $G^{(-)}$ *и представляет аналитическую в* $G^{(-)}$ *функцию, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности* $\{w_k\}_1^\infty$. *Причем в каждой точке* $w_j\in\{w_k\}_1^\infty$ *функция* $A_\alpha(w)$ *имеет нуль кратности, равной кратности появления точки* w_j *в последовательности* $\{w_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Пусть $K\subset G^{(-)}$ — какой-либо компакт и $w\in K$. Тогда в силу соотношения (1.8) леммы 1 при $\eta\to+0$ мы, очевидно, имеем

$$|\log a_\alpha(w;\ \xi - i\eta)| \leqslant O(\eta^{1+\alpha}) \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} [\min_{\substack{w\in K \\ -\infty<\xi<+\infty}} |w-\xi|]^{-1-\alpha} + o(\eta^{1+\alpha}) =$$

$$= O(\eta^{1+\alpha}) + o(\eta^{1+\alpha}). \tag{1.11}$$

Из этой оценки следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\log a_\alpha(w;\ w_k)|,$$

кроме конечного числа своих первых членов (для которых $|w_k| \geqslant \min_{w\in K} |\operatorname{Im} w|$ и, следовательно, возможно включение $w_k \in K$), равномерно сходится на компакте $K \subset G^{(-)}$.

Аналитичность произведения (1.10) и утверждения теоремы относительно его нулей следуют из его равномерной сходимости и утверждения теоремы 1.1.

Замечание. При $|\xi| \leqslant M < +\infty$ из соотношения (1.8) нетрудно вывести оценку, обратную (1.11). А именно, в этом случае при $\eta \to +0$ справедлива оценка

$$|\log a_\alpha(w;\ \xi - i\eta)| \geqslant C\eta^{1+\alpha} \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} [\max_{\substack{w\in K \\ |\xi|<M}} |w-\xi|]^{-1-\alpha} +$$

$$+ o(\eta^{1+\alpha}) = C_1\eta^{1+\alpha} + o(\eta^{1+\alpha})$$

(C и C_1 — положительные постоянные), при помощи которой доказывается, что если

$$\sup_{k\geqslant 1} |u_k| = M < +\infty,$$

то условие (1.9) одновременно и необходимо для сходимости произведения (1.10)

§ 2. Свойства функций $\log |a_\alpha(w;\ w_k)|$ и $\log |A_\alpha(w)|$, выраженные посредством оператора интегродифференцирования в смысле Г. Вейля

В этом параграфе мы к функциям $\log a_\alpha(w;\ w_k)$ и $\log A_\alpha(w)$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ применим оператор $W^{-\alpha}$ интегродифференцирования в смысле Вейля, а затем установим основные свойства функций

$$W^{-\alpha} \log |a_\alpha(w;\ w_k)| \text{ и } W^{-\alpha} \log |A_\alpha(w)| \ (-1 < \alpha < +\infty).$$

2.1. Определим оператор $W^{-\alpha}$ интегродифференцирования в смысле Г. Вейля.

Пусть $w = u + iv \in \mathbf{C}$ — любая точка, и функция $f(\omega)$ определена почти всюду на полупрямой $\Gamma(w;\ \infty) = \{\omega;\ \omega = w - i\sigma;\ 0 < \sigma < +\infty\}$. Формально мы считаем, что

$$W^{-\alpha} f(w) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{v} (v-t)^{\alpha-1} f(u+it)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} f(w-i\sigma)\, d\sigma;\ 0 < \alpha < +\infty, \tag{2.1}$$

$$W^{0} f(w) \equiv f(w), \tag{2.2}$$

$$W^{\alpha} f(w) \equiv W^{-(p-\alpha)} \left\{ \frac{\partial^p}{\partial v^p} f(u+iv) \right\}; \tag{2.3}$$

p— целое, $0 \leqslant p-1 < \alpha \leqslant p < +\infty$. Для дальнейшего изложения важна следующая

Лемма 2.1. *При любых* α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *и* $w_k \in G^{(-)}$

1° *интеграл* $W^{-\alpha} \log a_\alpha(w; w_k)$ *сходится вне полупрямой* $\{w;\ w = w_k + ih;\ 0 < h < +\infty\}$ *и представляет аналитическую вне прямолинейного отрезка* $[w_k; \overline{w}_k]$ *функцию.*

2° *при* $w \overline{\in} [w_k; \overline{w}_k]$ *справедливы представления*

$$W^{-\alpha} \log a_\alpha(w; w_k) = -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{0}^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{\tau + i(w-w_k)}, \tag{2.4}$$

$$W^{-\alpha} \log |a_\alpha(w; w_k)| = \operatorname{Re} W^{-\alpha} \log a_\alpha(w; w_k) =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{0}^{2|v_k|} \frac{(\tau - v + v_k)\, \tau^\alpha\, d\tau}{(\tau - v + v_k)^2 + (a-u_k)^2}. \tag{2.5}$$

Доказательство. В силу формул (1.3), (1.3′) и (2.2) в случае $\alpha = 0$ утверждения леммы очевидны. Для доказательства леммы в случае $\alpha \neq 0$ рассмотрим по отдельности случаи $0 < \alpha < +\infty$ и $-1 < \alpha < 0$.

Предварительно приведем одну формулу, которая нам понадобится в доказательстве леммы.

Пусть $0 < \alpha < +\infty$, тогда, как нетрудно убедиться, при $z \neq -h$ $(0 \leqslant h < +\infty)$ справедлива формула

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sigma^{\alpha-1}\, d\sigma}{(z+\sigma)^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha z}. \tag{2.6}$$

а) Пусть $0 < \alpha < +\infty$. Тогда в силу формул (1.3), (1.3′), (2.1) и (2.6) при $w \neq w_k + ih$ $(0 \leqslant h < +\infty)$ мы будем иметь

$$W^{-\alpha} \log a_\alpha(w; w_k) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} \sigma^{\alpha-1}\, d\sigma \int_{0}^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{[\tau + i(w-w_k) + \sigma]^{1+\alpha}} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha d\tau \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\alpha-1}\,d\sigma}{[\tau + i(w-w_k)+\sigma]^{1+\alpha}} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha\,d\tau}{\tau + i(w-w_k)}.$$

Таким образом, справедлива формула (2.4).

б) Пусть $-1 < \alpha < 0$. Тогда в силу формул (1.3), (1.3′), (2.3), (2.1) и (2.6) при $w \neq w_k + ih$ $(0 \leqslant h < +\infty)$ мы будем иметь

$$W^{-\alpha}\log a_\alpha(u+iv;\ w_k) = W^{-(1+\alpha)}\frac{\partial}{\partial v}\log a_\alpha(u+iv;\ w_k) =$$

$$= -\frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{+\infty} \sigma^\alpha\,d\sigma \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha\,d\tau}{[\tau + i(w-w_k)+\sigma]^{2+\alpha}} =$$

$$= -\frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha\,d\tau \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^\alpha\,d\sigma}{[\tau + i(w-w_k)+\sigma]^{2+\alpha}} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha\,d\tau}{\tau + i(w-w_k)}.$$

Таким образом, при любых $\alpha\,(-1 < \alpha < +\infty)$ и $w \neq w_k + ih$ $(0 \leqslant h < +\infty)$ нами доказана формула (2.4). Из анализа этой формулы становится очевидным утверждение 1° нашей леммы.

Что касается равенств (2.5), то левое равенство очевидно в силу определений (2.1) и (2.3) оператора $W^{-\alpha}$, а правое непосредственно следует из формулы (2.4).

Следующая теорема устанавливает одно интегральное свойство функции $W^{-\alpha}\log a_\alpha(w;\ w_k)$.

Теорема 2.2. *При любых* α $(-1 < \alpha < +\infty)$, $w_k = u_k + iv_k \in G^-$ *и* $v < 0$ *справедлива оценка*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha}\log|a_\alpha(u+iv;\ w_k)||\,du \leqslant \pi\frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}|v_k|^{1+\alpha}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Из формул (1.3), (1.3′) и (2.5) мы получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha}\log|a_\alpha(u+iv;\ w_k)||\,du \leqslant$$

$$< \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{2|v_k|} \frac{|\tau - v + v_k|\,\tau^\alpha}{(\tau - v + v_k)^2 + (u-u_k)^2}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha |\tau - v + v_k|\, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(\tau - v + v_k)^2 + (u - u_k)^2} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \right) \int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha\, d\tau = \pi \frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} |v_k|^{1+\alpha}.$$

2.2. В этом пункте мы будем полагать, что $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha} < +\infty \tag{2.8}$$

при наперед заданном числе α $(-1 < \alpha < +\infty)$.

Через $G_\rho^{(-)}$ будем обозначать полуплоскость, лежащую ниже вещественной оси, удаленную от нее на расстояние $|\rho|$ — $G_\rho^{(-)} = \{w;\ \operatorname{Im} w < \rho < 0\}$. А через $\overline{G_\rho^{(-)}}$ будем обозначать соответствующую замкнутую полуплоскость — $\overline{G_\rho^{(-)}} = \{w;\ \operatorname{Im} w \leqslant \rho < 0\}$.

Заметим, что в силу условия (2.8) $|v_k| \to 0$ при $k \to +\infty$ и, следовательно, выбором числа $N \equiv N(\rho) \geqslant 1$ можно добиться того, чтобы

$$w_k \overline{\in G_\rho^{(-)}} \text{ при } k \geqslant N(\rho).$$

Далее, введем в рассмотрение функцию

$$\psi_\alpha(w) \equiv \log |A_\alpha(w)| - \sum_{k=1}^{N(\rho)} \log |a_\alpha(w;\ w_k)| =$$

$$= \sum_{k=N(\rho)+1}^{\infty} \log |a_\alpha(w;\ w_k)|;\ -1 < \alpha < +\infty. \tag{2.9}$$

Справедлива следующая

Лемма 2.2. *При любом* α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *ряд*

$$\sum_{k=N(\rho)+1}^{\infty} \log |a_\alpha(w;\ w_k)| \tag{2.10}$$

абсолютно и равномерно сходится в замкнутой полуплоскости $\overline{G_\rho^{(-)}}$.

Доказательство. Опираясь на формулу (2.5), учитывая, что при $k \geqslant N(\rho)$ мы имеем $|v_k| < |\rho|$, при любых $k \geqslant N(\rho)$ и $w = u + iv \in G_\rho^{(-)}$ мы получаем неравенства

$$|W^{-\alpha} \log |a_\alpha(w;\ w_k)|| \leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{2|v_k|} \frac{|\tau - v + v_k|\, \tau^\alpha\, d\tau}{(\tau - v + v_k)^2 + (u - u_k)^2} <$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{|v_k - v + \tau|} < \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(|v|-\delta)} \int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha d\tau =$$

$$= \frac{2^{1+\alpha}|v_k|^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)(|v|-\delta)}, \text{ где } \delta = \max_{k>N(\rho)+1} |v_k|.$$

Утверждение леммы очевидно в силу условия (2.8).

Для доказательства аналога теоремы 2.2 для произведения $A_\alpha(w)$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ нам необходима также следующая

Лемма 2.3. *При любых* α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *и* $w \in G_\rho^{(-)}$ *интеграл* $W^{-\alpha}\psi_\alpha(w)$ *сходится, причем справедливо равенство*

$$W^{-\alpha}\psi_\alpha(w) = \sum_{k=N(\rho)+1}^{\infty} W^{-\alpha} \log |a_\alpha(w; w_k)|. \tag{2.11}$$

Доказательство леммы основано на следующих двух неравенствах, справедливых при любых α $(-1 < \alpha < +\infty)$, $w = u + iv \in G_\rho^{(-)}$ и $k \geqslant N(\rho) + 1$:

$$|\log |a_\alpha(u + iv; w_k)|| \leqslant \frac{2^{1+\alpha}|v_k|^{1+\alpha}}{(|v|-\delta)^{1+\alpha}}, \tag{2.12}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial v} \log |a_\alpha(u+iv; w_k)|\right| \leqslant (1+\alpha)\frac{2^{1+\alpha}|v_k|^{1+\alpha}}{(|v|-\delta)^{2+\alpha}}, \tag{2.13}$$

где $\delta = \max\limits_{k>N(\rho)+1} |v_k|$.

Предварительно докажем эти два неравенства.

Поскольку при $w = u + iv \in G_\rho^{(-)}$ и $k > N(\rho) + 1$

$$|\tau - v + v_k + i(u - u_k)| \geqslant |\tau - v + v_k| \geqslant |v - v_k| \geqslant |v| - |v_k| \geqslant |v| - \delta,$$

воспользовавшись определением (1.3), (1.3′) функции $a_\alpha(w; w_k)$ мы будем иметь:

$$|\log |a_\alpha(w; w_k)|| \leqslant |\log a_\alpha(w; w_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{|\tau - v + v_k + i(u - u_k)|^{1+\alpha}} \leqslant \frac{1}{(|v| - \delta)^{1+\alpha}} \int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha d\tau.$$

Таким образом, оценка (2.12) доказана.

Для доказательства оценки (2.13) воспользуемся опять определением (1.3), (1.3′) функции $a_\alpha(w; w_k)$. Мы будем иметь

$$\left|\frac{\partial}{\partial v} \log |a_\alpha(u + iv; w_k)|\right| \leqslant \left|\frac{\partial}{\partial v} \log a_\alpha(u + iv; w_k)\right| =$$

$$= (1+\alpha)\left|\int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau - v + v_k + i(u - u_k)]^{2+\alpha}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+\alpha)\int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{|\tau - v + v_k + i(u-u_k)|^{2+\alpha}} \leqslant (1+\alpha)\frac{2^{1+\alpha}|v_k|^{1+\alpha}}{(|v|-\delta)^{2+\alpha}}.$$

Заметим, что в случае $\alpha = 0$ лемма по существу уже доказана (см. лемму 2.2). Для доказательства же леммы при $\alpha \neq 0$ целесообразно рассмотреть в отдельности два случая $-0 < \alpha < +\infty$ и $-1 < \alpha < 0$.

а) Пусть $0 < \alpha < +\infty$, тогда из оценки (2.13) следует, что при любом $w \in G_\rho^{(-)}$ интеграл

$$I(w) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{v} \sum_{k=N(\rho)+1}^{\infty} (v-t)^{\alpha-1} |\log |a_\alpha(u+it;\, w_k)|\, dt$$

сходится.

Действительно, воспользовавшись условием (2.8) и оценкой (2.12), мы будем иметь

$$I(w) \leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{k=N(\rho)+1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha} \right) \int_{-\infty}^{v} \frac{(v-t)^{\alpha-1}}{(|t|-\delta)^{1+\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{k=N(\rho)+1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha} \right) \frac{1}{|v|-\delta} \int_{t=|v|}^{+\infty} \left(\frac{t-|v|}{t-\delta} \right)^{\alpha-1} d\left(\frac{t-|v|}{t-\delta} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{1}{|v|-\delta} \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha}.$$

Отсюда, в силу теоремы Фубини, мы легко получаем требуемое утверждение.

а) Пусть $-1 < \alpha < 0$, тогда, воспользовавшись оценкой (2.13), мы получим сходимость интеграла

$$J(w) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{v} (v-t)^{\alpha} \sum_{k=N(\rho)+1} \left| \frac{\partial}{\partial t} \log |a_\alpha(u+it;\, w_k)| \right| dt$$

при любом $w \in G_\rho^{(-)}$. А отсюда, как и в предыдущем случае а), следует формула (2.11).

При помощи лемм 2.2 и 2.3 устанавливается интегральное свойство произведения (1.10).

Теорема 2.3. *При выполнении условия* (2.8) *при любом* $v < 0$ *справедлива оценка*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\,|V^{-\alpha} \log |A_\alpha(u+iv)|\,|\, du \leqslant \pi \frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha}; \qquad (2.14)$$

$$-1 < \alpha < +\infty.$$

Доказательство. В силу теоремы 1.2 и формул (2.9) и (2.11) при $w \in G^{(-)}$ мы имеем

$$W^{-\alpha} \log |A_\alpha(w)| = W^{-\alpha}\left[\psi_\alpha(w) + \sum_{k=1}^{N(\rho)} \log |a_\alpha(w; w_k)|\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} W^{-\alpha} \log |a_\alpha(w; w_k)| .$$

Далее, воспользовавшись оценкой (2.7), в силу условия (2.8), мы придем к утверждению нашей теоремы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |A_\alpha(u+iv)|| \, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} W^{-\alpha} \log |a_\alpha(u+iv; w_k)| \right| du \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |W^{-\alpha} \log |a_\alpha(u+iv; w_k)|| \, du =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |a_\alpha(u+iv; w_k)|| \, du \leqslant \pi \frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha}.$$

Институт математики
АН Армянской ССР,
Ереванский государственный
университет

Поступила 5.V.1980

Ա. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Կիսահարթության համար Բլյաշկեյի տիպի արտադրյալների մի ընտանիքի կառուցումը և հիմնական հատկությունները *(ամփոփում)*

Հոդվածում հեղինակակիցներից մեկի [6] աշխատանքում զարգացված մեթոդով $G^{(-)} = [w; \operatorname{Im} w < 0]$ կիսահարթության համար կառուցված է α $(-1 < \alpha < +\infty)$ անընդհատ պարամետրից կախված Բլյաշկեյի տիպի արտադրյալների մի ընտանիք։

Կառուցված արտադրյալները հանդիսանում են Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից [1] հայտնաբերված շրջանի համար Բլյաշկեյի տիպի $\pi_\alpha(z)$ արտադրյալների անալոգները և զուգամիտում են

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty; \quad \{w_k\} \subset G^{(-)}$$

պայմանի բավարարման դեպքում։ Միաժամանակ, α պարամետրի ամբողջ արժեքների համար կառուցված արտադրյալի արտադրիչները, ինչպես և $\pi_\alpha(z)$ -ի արտադրիչները ունեն Վեյերշտրասի դասական արտադրիչների կառուցվածք։

A. M. JERBASHIAN, G. V. MIKAELIAN. *Construction and main properties of a family of Blaschke type functions for a half-plane* (summary)

In the paper a family of Blaschke type functions for the half-plane $G^{(-)} = \{w;\ \mathrm{Im}\, w < 0\}$ is constructed by the method developed in [6]. These functions depend on a continuous parameter $\alpha\ (-1 < \alpha < +\infty)$ and converge if

$$\sum_k |\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha} < +\infty;\ \{w_k\} \subset G^{(-)}.$$

These Blaschke type functions are analogues of the functions $\pi_\alpha(z)$ introduced by M. M. Djrbashian [1] for the disk. In particular for the integer values of α both the factors in our paper and the factors of $\pi_\alpha(z)$ have the structure of classical Weierstrass factors.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм. ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Института математики и механики АН Арм. ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
4. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб., 79 (121), № 4 (8), 1969, 517—615.
5. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., 1956.
6. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 6, 1980 Математика

К. А. ЯГДЖЯН

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in R^{n+1}$, $x_0 \equiv t$, $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ — мультииндекс и

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1}$$

а $P_s(x; \xi) = \sum_{|\alpha| = s} a_\alpha(x) \xi^\alpha$, $\xi \in R^{n+1}$. Рассмотрим задачу Коши

$$Pu = f \text{ в } G_T = [0, T] \times R^n, \tag{2}$$

$$D_0^j u = g_j, \quad j = 0, \cdots, m-1, \quad t = 0, \quad x \in R^n. \tag{3}$$

Будем считать, что $a_{(m, 0, \cdots, 0)} = -1$. Известно, что для корректности задачи Коши в очень слабом смысле необходимым условием является вещественность всех характеристических корней $\xi_0 = \lambda_j(x, \xi')$ уравнения

$$P_m(x; \xi_0, \xi') = 0, \quad \xi' \in R^n \setminus 0 \tag{4}$$

(см. [1]). Если они различны, то выполнена L_2-оценка, и наоборот. Поэтому, если мы потребуем всего лишь, чтобы для любых достаточно гладких правых частей f и начальных данных g_j задача Коши имела бы единственное классическое решение, то, вообще говоря, для подобной корректности необходимо будет накладывать некоторые условия на $P_s(x; \xi)$, $s < m$. В работах [2]—[5] были описаны достаточные условия корректности задачи Коши для операторов, строго гиперболических при $t > 0$. Необходимость этих условий была доказана (см. [6]) только в предположении степенной скорости слипания характеристических корней λ_j и их бесконечной гладкости. Это исключало из рассмотрения, например, оператор

$$P = -D_t^2 + A^2 \exp(-2t^{-n}) D_x^2 + iBt^{-n-1-l} \exp(-t^{-n}) D_x, \tag{5}$$

A, B, n, l — постоянные. Задача (2), (3) для (5) была изучена в работе [7], где, в частности, доказано, что если A, B вещественны, а $l > 0$, то задача не корректна в указанном выше смысле. Если же $l \leqslant 0$, то задача корректна. Несмотря на то, что этот результат работы [7] нов и интересен, он, безусловно, носит характер отдельного примера и не отвечает даже на вопрос, является ли корректной задача Коши для оператора

$$P = -D_t^2 + A^2 \exp(-2t^{-n}) D_x^2 + iB(-\ln t)^l t^{-n-1} \exp(-t^{-n}) D_x, \quad (6)$$

не говоря уже об общем уравнении второго порядка.

Целью настоящей заметки является ответ на этот вопрос для довольно общих классов уравнений второго порядка. Оказывается что в этих классах достаточные условия, указанные А. Б. Нерсесяном в [2]—[5], являются также и необходимыми. Очевидно, что доказательство этого сводится к описанию класса операторов, для которых задача Коши не является корректно поставленной.

Мы не останавливаемся здесь на уравнении высокого порядка, хотя излагаемый метод позволяет сформулировать и доказать соответствующий результат.

§ 1. Формулировки теорем

Задачу (2), (3) будем называть C^∞-корректной, если выполнены следующие два условия:

(E) Для любых $g_j \in C_0^\infty(R^n)$ и для $f=0$ существует решение $u \in C^\infty(G_T)$ задачи (2), (3);

(U_Γ) Для задачи (2), (3) скорость распространения конечна, т. е. существует конус зависимости Г.

Если задача C^∞-корректна, то с помощью теоремы о замкнутом графике легко устанавливается энергетическое неравенство: при $f=0$ для любого компакта $K \subset G_T$ существует постоянная C, такая что

$$\sum_{|\alpha|<m-1} \sup_K |D^\alpha u| \leqslant C \Big(\sum_{\substack{l<m-1 \\ |\alpha|<C}} \sup_{\Gamma_K \cap \{t=0\}} |D^\alpha g_l| \Big), \quad (7)$$

где Γ_K есть объединение конусов зависимости всех точек K.

Поскольку мы будем рассматривать операторы, строго гиперболические при $t>0$, можно считать T достаточно малым. Положим также, что уравнение записано в самосопряженном виде, т. е. $a_\alpha = 0$, если $a_0 = 1$, $|\alpha| = 2$.

Перейдем теперь к описанию класса операторов, для которых задача Коши не является корректной.

Теорема 1. *Предположим, что вектор* $\zeta \in R^n$, $|\zeta| = 1$, *таков, что*

$$P_2(x; 0, \zeta) = \mu^2(t) A^2(t), \quad (8)$$

$$P_1(x; 0, \zeta) = iB(t) \frac{\dot\mu(t)}{\nu(t)}, \quad \dot\mu = \frac{d\mu}{dt}, \quad (8')$$

где непрерывные функции A, B, μ, ν *удовлетворяют условиям* $A(0) \neq 0$, $A(t) > 0$, $\operatorname{Re} B(0) \neq 0$, $\mu(0) = 0$, $\mu(t>0) > 0$ *и*

1°. $\dfrac{\dot\mu(t)}{\nu(t)} \geqslant 0$, $\dfrac{\dot\mu(t)}{\nu(t)}$ — *неубывающая на* $[0, T]$ *функция,*

$$\left|\frac{\ddot{\mu}(t)}{\dot{\mu}(t)}\right| \leqslant \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}, \quad \frac{\dot{\nu}(t)}{\nu(t)} \leqslant \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \frac{1}{(-\ln \mu(t))},$$

$$|\dot{A}(t)| \leqslant c \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}, \quad |\dot{B}(t)| \leqslant c \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}, \quad t>0, \ c>0;$$

2'. *Функция* $\nu \frac{\mu^2}{\dot{\mu}}$ *монотонно возрастает.*

Тогда если $\nu(0)=0$, *то задача Коши* (2), (3) *не является* C^∞*-корректной.*

Замечание. Условие 2° для монотонно неубывающих функций μ и ν всегда выполнено. Нетрудно также увидеть, что 1° выполняются тем скорее, чем медленнее стремится к нулю функция ν, т. е. чем слабее нарушается достаточное условие корректности $\nu(0) \neq 0$.

Случай более сильного нарушения условия корректности, т. е. большей скорости стремления к нулю функции ν, описывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Предположим, что вектор* $\zeta \in R^n$, $|\zeta|=1$, *таков, что имеет место* (8), *и*

$$P_1(x; 0, \zeta) = iB(t) \frac{\dot{\mu}(t) \ln \mu(t)}{\nu(t)}, \tag{8''}$$

где непрерывные функции A, B, μ, ν *удовлетворяют условиям*

$$A(0) \neq 0, \ A(t)>0, \ B(0) \neq 0, \ \mu(0)=0, \ \mu(t>0)>0, \quad и$$

$$1^\circ. \left|\frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)} \frac{\ln \mu(t)}{\sqrt{\mu(t)}}\right| \leqslant c, \left|\frac{\sqrt{\mu(t)}}{\nu(t)}\right| \leqslant c, \ t>0, \ c=\text{const}>0;$$

$$2^\circ. \frac{\ddot{\mu}}{\dot{\mu}} + \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{\nu}}{\nu} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} \frac{1}{\ln \mu} \geqslant 0, \ t>0;$$

$$3^\circ. \frac{d}{dt}(\ln(-\ln \mu)) \leqslant 0, \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu} \circ \mu^{-1}\right)(z) \geqslant c_1 \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu} \circ \mu^{-1}\right)(z^2), \ c_1>0,$$

$z \downarrow 0$, *где* μ^{-1} *— функция, обратная к* μ;

$$4^\circ. -\frac{\nu \mu^2}{\dot{\mu} \ln \mu} \text{ — монотонно возрастающая.}$$

Тогда если $\nu(0)=0$, *то задача Коши* (2), (3) *не является* C^∞*-корректной.*

Следующая теорема дает достаточные условия корректности задачи Коши, отличающиеся от условий работ [2] — [5]. Эти условия в классе операторов, описанных в теореме 2, являются и необходимыми.

Обозначим через $C_t^m(T; H^s)$ класс функций, осуществляющих непрерывное отображение $[0, T]$ в $H^s(R^n)$, вместе со своими произ-

водными по t порядка $\leqslant m$, а через $\|\cdot\|_s$ обозначим обычную норму соболевского пространства $H^s(R^n)$.

Теорема 3. *Пусть $a_\alpha(x)$ — непрерывные функции, зависящие только от t, и пусть для любого $\zeta \in R^n$*

$$P_2(x;\ 0,\ \zeta) = \mu^2(t) \sum_{i,\ j=1}^{n} A^{ij}(t)\,\zeta_i\zeta_j, \tag{8a}$$

$$P_1(x;\ 0,\ \zeta) = \dot{\mu}(t) \ln \mu(t) \sum_{j=1}^{n} B^j(t)\,\zeta_j, \tag{8'''}$$

где вещественнозначные непрерывные функции μ, A^{ij}, B^j, $\dot{\mu}$ удовлетворяют условиям $\mu(0)=0$, $\mu(t>0)>0$, $\sum A^{ij}(t)\zeta_i\zeta_j \geqslant \delta|\zeta|^2$, $\delta>0$, $\left|\frac{\ddot{\mu}}{\dot{\mu}}\right| \leqslant \frac{\dot{\mu}}{\mu}$, $-\dot{\mu}\ln\mu$ — неубывающая,

$$|A^{ij}(t)| \leqslant \text{const}\,\frac{\dot{\mu}}{\mu},\ |B^j(t)| \leqslant \text{const}\,\frac{\dot{\mu}}{\mu},\ t \in (0,\ T],\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant n.$$

Тогда существуют постоянные C и k, такие что для любого $s \geqslant 2$ и любых $f \in C_t^0(T;\ H^s)$, $g_j \in H^{s+k-j}$ задача Коши (2), (3) имеет единственное решение $u \in \bigcap_{0<l<2} C_t^l(T;\ H^{s-l})$ и для него имеет место оценка

$$\|u(t)\|_s^2 + \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_{s-1}^2 \leqslant C\left(\|g_0\|_{s+k}^2 + \|g_1\|_{s+k-1}^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_{s+k}^2\,d\tau\right). \tag{7'}$$

§ 2. Доказательство теоремы 1

Мы следуем методу, впервые, по-видимому, предложенному С. Мизохатой [8] и использованному С. Тарамой [7].

Очевидно, что можно считать $P_1(t;\ 1,\ 0)=0$. Обозначим $P_0(t)$ через $D(t)$, а

$$\hat{L} = -D_t^2 + A^2(t)\,\mu^2(t)\,\xi^2 + iB(t)\frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}\,\xi + D(t). \tag{9}$$

Предложение 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и t_ξ — решение уравнения*

$$\nu(t_\xi)\frac{\mu^2(t_\xi)}{\dot{\mu}(t_\xi)} = \frac{1}{|\xi|}. \tag{10}$$

Тогда существует положительное число M, такое что для всех $|\xi| > M$ и для всех s_1, s_2 из интервала $[0,\ t_\xi]$ решение уравнения

$$\hat{L}u = 0 \tag{11}$$

удовлетворяет неравенству

$$|u(s_1,\ \xi)|^2 + \left|\frac{du}{dt}(s_1,\ \xi)\right|^2 \leqslant c\,(1+|\xi|)^k\left(|u(s_2,\ \xi)|^2 + \left|\frac{du}{dt}(s_2,\ \xi)\right|^2\right) \tag{12}$$

с постоянными c и k, не зависящими от ξ, s_1, s_2, и.

Доказательство. Рассмотрим (9) сначала в промежутке $[0, t_1]$, где t_1 — решение уравнения

$$\mu(t_1) = \frac{1}{|\xi|^2}. \tag{13}$$

Обозначим $u = v_1$, $\frac{du}{dt} = v_2 + iA(0)\mu(t)\xi u$, $\Delta A^2(t) = A^2(0) - A^2(t)$, а через $E_1(t, \xi)$ — квадрат нормы вектора $^t(v_1, v_2)$. Тогда

$$\frac{dE_1}{dt} = 2\,\mathrm{Re}\{v_1\bar{v}_2 + \bar{v}_1 v_2\,(-iA(0)\,\dot{\mu}(t)\,\xi + iB(t)\,\frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}\,\xi + \\ + D(t)) + \bar{v}_1 v_2\,\mu^2(t)\,\xi^2\,\Delta A^2(t)\}, \tag{14}$$

поэтому

$$\pm \ln \frac{E_1(s_1, \xi)}{E_1(s_2, \xi)} \leqslant c\left(1 + \int_0^{t_1} \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}\,dt\,|\xi|\right). \tag{15}$$

Из 1° получаем, что с некоторой положительной постоянной c и при $\delta > 0$

$$\int_0^t \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}\,dt \leqslant -c\sqrt{\mu(t)}\ln\mu(t),\ t \in [0, \delta]. \tag{16}$$

Поэтому с некоторыми постоянными $k \geqslant 0$ и $c > 0$

$$E_1(s_2, \xi) \leqslant c\,(1 + |\xi|)^k\,E_1(s_1, \xi),\ s_1, s_2 \in [0, t_1]. \tag{17}$$

Но

$$|u|^2 + \left|\frac{du}{dt}\right|^2 \leqslant 3E_1(t, \xi) \leqslant c\left(|u|^2 + \left|\frac{du}{dt}\right|^2\right), \tag{18}$$

что доказывает неравенство (12) в $[0, t_1]$.

Рассмотрим теперь (11) в $[t_1, t_\xi]$. Обозначим

$$E_2(t, \xi) = \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}|\xi|\,|v_1|^2 + |v_2|^2, \tag{19}$$

тогда

$$\left|\frac{dE_2}{dt}\right| \leqslant \left\{c_1\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} + c_2\sqrt{\frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}}\,|\xi|^{1/2}\right\}E_2. \tag{20}$$

Далее, в силу 1°, при достаточно малых t,

$$\int_0^t \sqrt{\frac{\dot{\mu}(s)}{\nu(s)}}\,ds \leqslant c\mu(t)\sqrt{\frac{\nu(t)}{\dot{\mu}(t)}}\ln\frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)\,\mu^2(t)}, \tag{21}$$

поэтому

$$\left|\frac{E_2(s_1, \xi)}{E_2(s_2, \xi)}\right|^{\pm 1} < c\,(1 + |\xi|)^k \tag{22}$$

для любых $s_1, s_2 \in [t_1, t_\xi]$. С другой стороны

$$E_2(t, \xi) = \frac{\dot{\mu}}{\nu} |\xi| |u|^2 + \left|\frac{du}{dt}\right|^2 + A(0) \mu^2 \xi^2 |u|^2 +$$

$$+ 2 A(0) \mu \xi \operatorname{Im} \left(i \bar{u} \frac{du}{dt} \right), \tag{23}$$

поэтому

$$E_2(t, \xi) \leqslant c (1 + |\xi|)^5 E_2(t, \xi). \tag{24}$$

Последнее неравенство вместе с (22) и доказывает предложение 1.

Предложение 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, а t_ξ определяется из* (10). *Тогда решение задачи*

$$\begin{cases} \hat{L}u = 0, \ t \in [t_\xi, T], & (25) \\ u(t_\xi, \xi) = \dfrac{du}{dt}(t_\xi, \xi) = 1, & (26) \end{cases}$$

при всех $t \in [t_\xi, T]$ удовлетворяет неравенству

$$|u(t, \xi)|^2 + \left|\frac{du}{dt}(t, \xi)\right|^2 \geqslant c[\mu(t)]^{\delta/\nu(t)} (1 + |\xi|)^{\gamma/\nu(t_\xi)}, \tag{27}$$

где положительные постоянные c, δ, γ не зависят от ξ, t.

Доказательство. Пусть λ — комплексное число, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и

$$\lambda^2 = -A^2(t) \mu^2(t) \xi^2 + \alpha(t) \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)} \xi + i\beta(t) \xi \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}, \tag{28}$$

$B(t) = -\beta(t) + i\alpha(t)$, $\beta(0) \neq 0$. Можно считать, что $\frac{1}{2} A^2(t) > |B(t)|$. Тогда

$$|\lambda|^2 \geqslant \frac{A^2(t)}{2} \mu^2(t) \xi^2, \quad t \in [t_\xi, T]. \tag{29}$$

Очевидно также, что при тех же t

$$|\lambda|^2 \leqslant \text{const} (1 + |\xi|)^2. \tag{30}$$

Оценим теперь $\operatorname{Re}\lambda$. Если $\lambda^2 = r \exp(i\theta)$, то $\operatorname{Re}\lambda \geqslant r^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{2} |\sin\theta|$. Но $r|\sin\theta| = |\beta(t)| \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)} |\xi|$ и

$$r^{1/2} \leqslant \frac{3}{2} A(t) \mu(t) |\xi|. \tag{31}$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant k \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t) \mu(t)}. \tag{32}$$

В силу условий теоремы получаем

$$\left|\frac{\dot\lambda}{\lambda}\right| \leqslant c\left(1+\frac{\dot\mu}{\mu}\right) \leqslant c\frac{\dot\mu}{\mu}. \tag{33}$$

Вводя новые неизвестные функции $v_1 = \lambda u + u_t$, $v_2 = \lambda u - u_t$, имеем для $S(t, \xi) = |v_1|^2 - |v_2|^2$

$$\frac{dS}{dt} \geqslant (\operatorname{Re}\lambda) S. \tag{34}$$

Но $S(t_\xi, \xi) = 4\operatorname{Re}\lambda(t_\xi, \xi) > 0$, поэтому

$$S(t, \xi) \geqslant \exp\left(\int_{t_\xi}^{t} \operatorname{Re}\lambda\, d\tau\right) S(t_\xi, \xi). \tag{35}$$

Из 1° нетрудно вывести, что с некоторой положительной постоянной c, для всех t_1, $t_2 \in [0, T]$ при достаточно малых T

$$\int_{t_2}^{t_1} \frac{\dot\mu(s)}{\nu(s)\mu(s)}\, ds \geqslant c^{-1} \frac{\ln\mu(s)}{\nu(s)}\Big|_{t_2}^{t_1}, \quad t_1 > t_2. \tag{36}$$

Поэтому

$$\exp\left(\int_{t_\xi}^{t} \operatorname{Re}\lambda\, d\tau\right) \geqslant \exp\left(\frac{k}{c}\frac{\ln\mu(t)}{\nu(t)}\right)\exp\left(-\frac{k}{c}\frac{\ln\mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)}\right). \tag{37}$$

С другой стороны, для любого $\alpha > 2$ при достаточно малых T

$$-\ln\mu(t) \geqslant \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\dot\mu(t)}{\nu(t)\mu^2(t)}. \tag{38}$$

Окончательно

$$S(t, \xi) \geqslant \exp\left(\frac{k}{c\nu(t)}\ln\mu(t)\right)\exp\left(\frac{k}{c\alpha}\frac{1}{\nu(t_\xi)}\ln\frac{\dot\mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)\mu^2(t_\xi)}\right) S(t_\xi, \xi) \geqslant$$

$$\geqslant 4k\,[\mu(t)]^{\frac{k}{c\nu(t)}}\,|\xi|^{\frac{k}{c\alpha}\frac{1}{\nu(t_\xi)}}. \tag{39}$$

Имеем также

$$S(t, \xi) \leqslant 2|\lambda|\,(|u|^2 + |u_t|^2). \tag{40}$$

Вместе с (39) и (29) это приводит к оценке (28).

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим решение задачи (2), (3) вида

$$U(t, x) = u(t, \xi)\, e^{i\xi\langle\zeta, x\rangle}, \quad \xi \in R^1, \tag{41}$$

где $\langle\zeta, x\rangle = \sum_{l=1}^{n} \zeta_l x_l$. Тогда $u(t, \xi)$ будет решением уравнения $\hat L u = 0$ при всех t, и поэтому для $u(t, \xi)$ справедливы утверждения предложений 1 и 2. Но при достаточно больших $|\xi|$ они приводят к нарушению оценки (7), что и доказывает теорему.

§ 3. Доказательства теорем 2 и 3

Предварительно сформулируем и докажем

Предложение 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, и пусть t_1 определяется из уравнения $\mu(t_1)=|\xi|^{-2}$, а t_ξ — из*

$$-\frac{\mu^3(t_\xi)\,\nu(t_\xi)}{\dot\mu(t_\xi)\ln\mu(t_\xi)}=\frac{1}{N|\xi|}. \tag{42}$$

Тогда существуют положительные числа M, N, C_1, C_2, α, β, такие что решение задачи

$$\begin{cases}(-D_t^2-\mu^2(t)A^2(t)\xi^2+iB(t)\dfrac{\dot\mu(t)}{\nu(t)\ln\mu(t)}\,\xi+D(t))\,u=0, & (43)\\ u(t_1,\xi)=\dfrac{du}{dt}(t_1,\xi)=1, & (44)\end{cases}$$

удовлетворяет неравенствам

$$\left|u(0,\xi)|^2+\left|\frac{du}{dt}(0,\xi)\right|^2\leqslant C_1,\right. \tag{45}$$

$$|u(t_\xi,\xi)|^2+\left|\frac{du}{dt}(t_\xi,\xi)\right|^2\geqslant C_2(1+|\xi|)^{\frac{\alpha}{\nu(t_\xi)}}, \tag{46}$$

для любых ξ, $|\xi|>M$, и $\operatorname{Re}(iB(0)\xi)\leqslant 0$.

Доказательство Из 1° следует, что при $t\leqslant t_1$ коэффициенты уравнения (43) ограничены равномерно по ξ, $|\xi|>M$. Отсюда получаем (45). Далее, пусть $v_1=u$, $v_2=u_t$, а

$$N=\begin{bmatrix}|\xi|^{1/2}\lambda\sqrt{-\dfrac{\dot\mu\ln\mu}{\nu}}, & 1\\ |\xi|^{1/2}\lambda\sqrt{-\dfrac{\dot\mu\ln\mu}{\nu}}, & -1\end{bmatrix}, \tag{47}$$

где $\lambda=\sqrt{-iB(t)\dfrac{\xi}{|\xi|}}$, $\operatorname{Re}\lambda>0$, $\operatorname{Re}iB(0)\xi\leqslant 0$. Обозначим через $w={}^t(w_1,w_2)$ вектор Nv, где $v={}^t(v_1,v_2)$, тогда для $S=|w_1|^2-|w_2|^2$ нетрудно получить неравенство

$$\frac{dS}{dt}\geqslant 2\operatorname{Re}\lambda\sqrt{-\frac{\dot\mu\ln\mu}{\nu}}|\xi|^{1/2}(|w_1|^2+|w_2|^2)-$$

$$-\frac{2A^2}{|\lambda|^2}\mu^2|\xi|\sqrt{-\frac{\nu}{\dot\mu\ln\mu}}|\xi|^{1/2}(|w_1|^2+|w_2|^2)+\left(\operatorname{Re}\frac{\dot\lambda}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{\dot\nu}{\nu}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\ddot\mu}{\dot\mu}+\frac{1}{2}\frac{\dot\mu}{\mu}\frac{1}{\ln\mu}\right)(|w_1|^2-|w_2|^2)+2\operatorname{Im}(w_1\bar w_2)\operatorname{Im}\frac{1}{2}\frac{\dot B}{B}. \tag{48}$$

Но при достаточно больших M и N

$$\frac{1}{|\xi|} \leqslant \mu(t_\xi) \leqslant \frac{1}{|\xi|^{1/2}}, \quad |\xi| > M, \tag{49}$$

а $0 < t_1 < t_\xi$. Далее, при достаточно большом N

$$\operatorname{Re}\lambda + \frac{2A^2}{|\lambda|}|\xi| \cdot \frac{\nu\mu^2}{\mu \ln \mu} > 0, \quad t \in [0, t_\xi]. \tag{50}$$

Следовательно

$$\frac{dS}{dt} > \left[\operatorname{Re}\lambda \sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}}|\xi|^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot\mu}{\dot\mu} + \frac{\dot B}{B} + \frac{\dot\mu}{\mu}\frac{1}{\ln\mu} - \frac{\dot\nu}{\nu}\right)\right] S. \tag{51}$$

С другой стороны

$$S(t, \xi) = 4|\xi|^{1/2} \sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}} \operatorname{Re}(\lambda v_1 \bar v_2). \tag{52}$$

В частности, $S(t_1, \xi) > 0$. Учитывая еще и 2°, из (52) выводим

$$\ln \frac{S(t_\xi, \xi)}{S(t_1, \xi)} > \int_{t_1}^{t_\xi} \left[\operatorname{Re}\lambda \sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}} \right] dt\, |\xi|^{1/2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot\mu B}{\nu} \ln \mu \right|_{t_1}^{t_\xi}. \tag{53}$$

Таким образом

$$S(t_\xi, \xi) \geqslant \exp\left\{ \operatorname{Re} \int_{t_1}^{t_\xi} \lambda \sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}}\, dt\, |\xi|^{1/2} \right\} \times$$

$$\times \sqrt{-\frac{\dot\mu(t_\xi)|B(t_\xi)| \ln \mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)}} \left[\sqrt{-\frac{\dot\mu(t_1)|B(t_1)| \ln \mu(t_1)}{\nu(t_1)}} \right]^{-1} S(t_1, \xi). \tag{54}$$

Далее

$$\operatorname{Re} \int_{t_1}^{t_\xi} \lambda \sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}}\, dt \geqslant \left(\min_{t_1 < t < t_\xi} \operatorname{Re}\lambda(t)\right) \int_{t_1}^{t_\xi} \sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}}\, dt. \tag{55}$$

Поэтому достаточно оценить интеграл, стоящий справа в (55). Очевидно, что он не меньше чем

$$\sqrt{-\frac{\ln \mu(t_1)}{(\ln \mu(t_1))_t}} \int_{t_1}^{t_\xi} \sqrt{\frac{\dot\mu (\ln \mu)_t}{\nu}}\, dt, \tag{56}$$

а интеграл в (56), в свою очередь, не меньше, чем $\sqrt{\frac{\mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)}}$. Таким образом

$$S(t_\xi, \xi) \geqslant \exp\left\{ k|\xi|^{1/2} \sqrt{-\frac{\mu(t_1) \ln \mu(t_1)}{\dot\mu(t_1)}} \sqrt{\frac{\mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)}} \right\} \times$$

$$\times \sqrt{-\frac{\mu(t_\xi)\ln\mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)}}\sqrt{-\frac{\nu(t_1)}{\mu(t_1)\ln\mu(t_1)}}\left|\frac{B(t_\xi)}{B(t_1)}\right|^{1/2} S(t_1,\xi), \tag{57}$$

и, следовательно

$$|v_1(t_\xi,\xi)|^2+|v_2(t_\xi,\xi)|^2 \geqslant c\exp\left\{k_1\sqrt{-\frac{\mu(t_1)\ln\mu(t_1)}{\mu(t_1)}}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{-\frac{\mu(t_\xi)\ln\mu(t_\xi)}{\mu(t_\xi)}}\frac{1}{\nu(t_\xi)}\right\}. \tag{58}$$

Но

$$\sqrt{-\frac{\mu(t_1)\ln\mu(t_1)}{\mu(t_1)}}\sqrt{-\frac{\mu(t_\xi)}{\mu(t_\xi)}\ln\mu(t_\xi)}\geqslant c\ln|\xi|,\ c>0, \tag{59}$$

откуда и следует (46). Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2. Снова рассматриваем решение задачи (2), (3) вида (41) и применяем предложение 2. Но при достаточно больших $|\xi|$ оно приводит к нарушению оценки (7), что и доказывает теорему.

Предложение 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и пусть* t_ξ *определяется из* (42), *где* $\nu(t)\equiv 1$ *и* $|\xi|=|\zeta|$. *Тогда решение уравнения*

$$u_{tt}+\left[\mu^2(t)\sum_{i,\,j=1}^{n}A^{ij}(t)\zeta_i\zeta_j+\dot{\mu}(t)\ln\mu(t)\sum_{j=1}^{n}B^j(t)\zeta_j+D(t)\right]u=f \tag{60}$$

при достаточно большом M *и при* $t\in[t_\xi,\ T]$, $|\zeta|>M$ *удовлетворяет неравенству*

$$|u(t,\zeta)|^2+\left|\frac{du}{dt}(t,\zeta)\right|^2\leqslant c(1+|\zeta|)^k\left(|u(t_\xi,\zeta)|^2+\left|\frac{du}{dt}(t_\xi,\zeta)\right|^2+\right.$$

$$\left.+\int_{t_\xi}^{t}|f(s,\zeta)|^2\,ds\right) \tag{61}$$

с постоянными c *и* k, *не зависящими от* ζ, t.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что

$$\delta>\frac{3}{n}\max_t|B^j|+3\max|D|,$$

и пусть

$$\lambda^2(t,\zeta)=-\mu^2(t)\sum A^{ij}(t)\zeta_i\zeta_j-\dot{\mu}(t)\ln\mu(t)\sum B^j(t)\zeta_j-D(t).$$

Тогда при достаточно большом M и при $t\in[t_\xi,\ T]$

$$\operatorname{Re}\lambda=0,\ |\lambda|^2\geqslant\frac{1}{3}\delta\mu^2(t)|\zeta|^2\geqslant\frac{1}{3}\delta,$$

$$|\lambda|^2\leqslant c(1+|\zeta|)^2,\ \left|\frac{\lambda_t}{\lambda}\right|\leqslant c\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}.$$

Для $E(t, \zeta)=|\lambda u+u_t|^2+|\lambda u-u_t|^2$ нетрудно получить неравенство

$$\left|\frac{dE}{dt}\right| \leqslant c\,\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\,E(t, \zeta)+|f(t, \zeta)|^2,\ t \geqslant t_\varepsilon,$$

откуда и следует утверждение предложения.

Предложение 5. *Пусть выполнены условия предложения* 4. *Тогда решение уравнения* (60) *при достаточно большом* M *и при* $t \in [0, t_\varepsilon]$, $|\zeta| > M$ *удовлетворяет неравенству*

$$|u(t, \zeta)|^2+\left|\frac{du}{dt}(t, \zeta)\right|^2 \leqslant c\,(1+|\zeta|)^k\,(|u(0, \zeta)|^2+\left|\frac{du}{dt}(0, \zeta)\right|^2+$$

$$+\int_0^t |f(s, \zeta)|^2\,ds) \qquad (62)$$

с постоянными c *и* k, *не зависящими от* ζ, t.

Доказательство почти дословно совпадает с доказательством предложения 1, где надо только положить $\nu(t)=-\dfrac{1}{\ln \mu(t)}$.

Доказательство теоремы 3. Из ограниченности при $|\zeta| \leqslant M$ коэффициентов обыкновенного дифференциального уравнения (60) следует справедливость (62) при всех $t \in [0, T]$. В силу предложений 4 и 5 заключаем, что (62), таким образом, имеет место для любых $\zeta \in R^n$, $t \in [0, T]$. Чтобы завершить доказательство достаточно теперь воспользоваться преобразованием Фурье по x.

§ 4. Примеры

С целью проиллюстрировать теоремы 1, 2, 3 приведем несколько примеров, к которым по тем или иным причинам неприменимы результаты работ [2]—[9].

Пример 1.

$$u_{tt}-A^2 \exp(-2t^{-n})\,u_{xx}+B(-\ln t)^l \exp(-t^{-n})\,u_x=f. \qquad (63)$$

Согласно теореме 1 (см. также введение) задача (2), (3) для (63) при $\operatorname{Re} B \neq 0$ является C^∞-корректной тогда и только тогда, когда $l=0$. При $\operatorname{Re} B=0$ она корректна в смысле теоремы 3 при любом $l \in R^1$.

Пример 2.

$$u_{tt}-A^2 \exp(-2t^{-n})\,u_{xx}+Bt^{-n-1} \exp(-(1-\alpha)\,t^{-n})\,u_x=f, \qquad (64)$$

$0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{2}$. Теорема 1 в этом случае неприменима, а согласно теореме 2 если задача (2), (3) для (64) C^∞-корректна, то $\alpha=0$. При $\alpha \leqslant 0$ задача C^∞-корректна, согласно [2], а при $\alpha \geqslant 1$ коэффициент оператора имеет в $t=0$ особенность. Случай $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$ остается открытым.

Пример 3.

$$u_{tt}-A^2t^{2k}u_{xx}+B(-\ln t)^l\,t^{k-1}u_x=f, \tag{65}$$

где $k>1$ — необязательно целое число. Так как коэффициенты оператора не являются бесконечно гладкими функциями результаты работ [6], [9] к (65) неприменимы. Для $l\leqslant 1$ согласно теореме 1 задача (2), (3) для (65) при $\operatorname{Re}B\neq 0$ является C^∞-корректной тогда и только тогда, когда $l\leqslant 0$. При $\operatorname{Re}B=0$, $l\leqslant 1$, задача корректна согласно теореме 3.

Пример 4.

$$u_{tt}-A^2(t)\,\mu^2(t)\,u_{xx}+B(t)\,\dot\mu(t)\,t^{-l}u_x=f, \tag{66}$$

где $A(t)>0$, $B(0)\neq 0$, $l\in R^1$, $\mu(t)=\underbrace{\exp(-\exp(\exp(\cdots(\exp}_{k} t^{-n})\cdots))$,

$n>0$,

$$|\dot A|,\ |\dot B|\leqslant \mathrm{const}\cdot t^{-1}\underbrace{(-\ln\mu)(\ln(-\ln\mu))\cdots(\ln\ln\cdots\ln(-\ln\mu))}_{k}.$$

Согласно теореме 1 (см. также введение) задача (2), (3) для (66) при $\operatorname{Re}B(0)\neq 0$ является C^∞-корректной тогда и только тогда, когда $l\leqslant 0$. При $\operatorname{Re}B(t)\equiv 0$ она корректна в смысле теоремы 3 при любом l. Случай, когда $\operatorname{Re}B(0)=0$, но $\operatorname{Re}B(t)\not\equiv 0$ остается открытым.

Пример 5.

$$u_{tt}-A^2\exp(-2t^{-n})\,u_{xx}+Bt^{-l-n-1}\underbrace{(\ln(\ln\cdots\ln t))}_{m}\exp(-t^{-n})\,u_x=f, \tag{67}$$

где $n>0$, $l\in R^1$. Согласно теореме 1 задача (2), (3) для (67) при $\operatorname{Re}B\neq 0$ является C^∞-корректной тогда и только тогда, когда $l\leqslant 0$, $m=0$. При $\operatorname{Re}B=0$ согласно теоремам 2, 3 задача корректна тогда и только тогда, когда $l\leqslant n$, $m=0$, либо $l<n$, $m>0$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 8.V.1980

Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար Կոշու խնդրի կոռեկտության մասին (ամփոփում)

Հոդվածում ուսումնասիրվում է փոփոխական պատիկությամբ խարակտերիստիկ արմատներով երկրորդ կարգի հիպերբոլիկ հավասարման համար Կոշու խնդրի C^∞-կոռեկտությունը: Խարակտերիստիկ արմատները կարող են համընկնել միայն սկզբնական հիպերհարթության վրա: Բավականին ընդհանուր դասերի հավասարումների համար ապացուցված է, որ Հ. Բ. Ներսիսյանի կողմից նախկինում նշված բավարար պայմանները հանդիսանում են C^∞-կոռեկտության համար նաև անհրաժեշտ պայմաններ: Կոմպլեքս գործակիցների դեպքում բերված է նոր բավարար պայման և ապացուցված է նրա անհրաժեշտությունը:

K. H. YAGDJIAN. *On correctness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations* (summary)

The paper deals with the Cauchy problem for equations with characteristic roots of variable multiplicity. For a wide class of such operators it is proved that the sufficient condition of [2] — [5] is also necessary for the problem to be C^∞ well-posed. In particular, a new necessary and sufficient condition for equations with a complex coefficients is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. D. Lax.* Asymtotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., 24, № 4, 1957, 627—646.
2. *А. Б. Нерсесян.* О корректности задачи Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, ДАН СССР, 166, № 6, 1966, 1288—1291.
3. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 3, № 2, 1968, 79—100.
4. *А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», VIII, № 3, 1973, 255—273.
5. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», IX, № 2, 1974, 149—165.
6. *В. Я. Иврий, Б. М. Петков.* Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 29, вып. 5, 1974, 3—70.
7. *S. Tarama.* Un exemple dans le probleme de Cauchy pour les equations faiblement hyperboliques. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 15, № 2, 1979, 455—468.
8. *S. Mizohata.* Une remrque sur le probleme de Cauchy hyperbolique bien pose (non publie).
9. *S. Alinhac.* Parametrix et propagation des singularites pour un probleme de Cauchy a multiplicilti variable, Asterisque, 34—35, 3—26.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 6, 1980 Математика

Г. С. АКОПЯН

ОБ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

1°. Введение. Однородная задача Дирихле для простейшего гиперболического уравнения впервые была рассмотрена в работе Р. А. Александряна [1] в связи с изучением качественного поведения решений системы С. Л. Соболева, описывающей малые колебания вращающейся идеальной жидкости [2], [3].

В [4] было показано, что эта задача эквивалентна изучению спектральных свойств некоторого ограниченного и самосопряженного в $\mathring{W}_2^1$ оператора.

При построении спектрального разложения упомянутого оператора, фундаментальную роль сыграло исследование свойств введенного в [4], [5] семейства диффеоморфизмов границы области, которое опиралось на использование и развитие классической теории Пуанкаре-Данжуа.

В настоящей работе мы рассматриваем аналогичные вопросы, однако уже для операторов с постоянными коэффициентами, действующими в пространстве вектор-функций.

2°. Пусть Ω—ограниченная область в $\mathbf{R}^2$ с достаточно гладкой границей Γ.

В гильбертовом пространстве вектор-функций

$$\vec{\mathring{W}}_2^1(\Omega)=\left\{\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix} f_1(x,y)\\ \vdots \\ f_n(x,y)\end{pmatrix},\ f_i(x,y)\in \mathring{W}_2^1(\Omega),\ i=1,2,\cdots,n\right\}$$

рассматривается оператор

$$\mathbf{A}=-\Delta^{-1}\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

где A, B, C — $n\times n$ коммутирующие между собой постоянные, вещественные, симметрические матрицы, Δ^{-1} —оператор, обратный к оператору Δ при нулевых краевых условиях.

В пространстве $\vec{\mathring{W}}_2^1(\Omega)$ скалярное произведение зададим по формуле

$$(\vec{f},\vec{g})_1=\int_\Omega\left[\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{g}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vec{g}}{\partial y}\right]dxdy.$$

Предложение 2.1. *В пространстве* $\vec{W}_2^1(\Omega)$ *оператор* $\mathbf{A}$ *является ограниченным и самосопряженным, а его собственные функции являются решениями однородной краевой задачи*

$$(A+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x\partial y}+(C+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

$$\vec{u}|_\Gamma=0, \tag{2}$$

где E*—единичная матрица.*

Доказательство. Пусть $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — произвольные вектор-функции из $\vec{\Phi}_0(\Omega)=\{\vec{f}(x,\ y);\ \vec{f}(x,\ y)\in C^\infty(\bar{\Omega}),\ \vec{f}|_\Gamma=0\}$. Тогда

$$(\mathbf{A}\vec{u},\ \vec{v})_1=\int\limits_\Omega\left[\frac{\partial\mathbf{A}\vec{u}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{A}\vec{u}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\right]dxdy=$$

$$=\int\limits_\Omega\left[\frac{\partial^2\mathbf{A}\vec{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{A}\vec{u}}{\partial y^2}\right]\cdot\vec{v}dxdy=\int\limits_\Omega\left[A\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial y^2}\right]\times$$

$$\times\vec{v}dxdy=\int\limits_\Omega\vec{u}\cdot\left[A\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial y^2}\right]dxdy=(\vec{u},\ \mathbf{A}\vec{v})_1$$

и $|(\mathbf{A}\vec{u},\ \vec{u})_1|\leqslant M\ (\vec{u},\ \vec{u})_1$.

Определение 2.1. $\vec{u}_\lambda\ (x,\ y)\in\vec{L}_2(\Omega)$ называется собственным функционалом оператора $\mathbf{A}$ или краевой задачи (1)—(2), соответствующим собственному значению λ, если

$$\int\limits_\Omega\vec{u}_\lambda(x,\ y)\cdot\left[(A+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x\partial y}+(C+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial y^2}\right]dxdy=0 \tag{3}$$

для всех $\vec{\varphi}(x,\ y)\in\vec{\Phi}_0(\Omega)$.

Пусть $a_k,\ b_k,\ c_k,\ 1\leqslant k\leqslant n$ — собственные значения матриц A, B, C и $\gamma_k(\lambda)$ — совокупность тех граничных точек*, в которых

$$(a_k+\lambda)\cos^2\nu x+b_k\cos\nu x\cos\nu y+(c_k+\lambda)\cos^2\nu y=0.$$

Предложение 2.2. *Если собственный функционал* $\vec{u}_\lambda(x,\ y)$*— гладкая вектор-функция и если дополнения к множествам* $\gamma_k(\lambda)$, $k=1,\ 2,\cdots,\ n$ *являются всюду плотными на* Γ, *то* $\vec{u}_\lambda\ (x,\ y)$ *является классическим решением задачи* (1)—(2).

---

* ν — внешняя нормаль.

Доказательство. Пусть N — невырожденное преобразование, приводящее матрицы A, B, C одновременно к диагональному виду

$$N^{-1}AN=D_A,\ N^{-1}BN=D_B,\ N^{-1}CN=D_C.$$

Ясно, что если $\vec{\varphi}$ принадлежит $\vec{\Phi}_0(\Omega)$, то $N\vec{\varphi}$ тоже принадлежит $\vec{\Phi}_0(\Omega)$. Подставляя в определение собственного функционала вектор-функции $N\vec{\varphi}_k$, где $\vec{\varphi}_k(x, y)$ — вектор-функция, k-тая компонента которой равна $\varphi_k(x, y)\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $\varphi_k|_\Gamma=0$, остальные компоненты — нули, получим

$$0=\int_\Omega \vec{u}_\lambda(x, y)\cdot\left[(A+\lambda E)\frac{\partial^2 N\vec{\varphi}_k}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 N\vec{\varphi}_k}{\partial x\,\partial y}+(C+\lambda E)\frac{\partial^2 N\vec{\varphi}_k}{\partial y^2}\right]dxdy=$$

$$=\int_\Omega \vec{u}_\lambda(x, y)\cdot\left[(AN+\lambda N)\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial x^2}+BN\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial x\partial y}+\right.$$

$$\left.+(CN+\lambda N)\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial y^2}\right]dxdy=\int_\Omega \vec{u}_\lambda(x, y)\cdot\left[N(D_A+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+ND_B\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial x\partial y}+N(D_C+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial y^2}\right]dxdy=\int_\Omega [N^*\vec{u}_\lambda]_k\times$$

$$\times\left[(a_k+\lambda)\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}+b_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x\partial y}+(C_k+\lambda)\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}\right]dxdy,$$

где $[N^*\vec{u}_\lambda]_k$ — k-тая компонента вектор-функции $N^*\vec{u}_\lambda$.

Интегрированием по частям получим

$$0=\int_\Omega \varphi_k\cdot\left[(a_k+\lambda)\frac{\partial^2[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial x^2}+b_k\frac{\partial^2[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial x\partial y}+(c_k+\lambda)\frac{\partial^2[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial y^2}\right]dxdy+$$

$$+\int_\Gamma [N^*\vec{u}_\lambda]_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}[(a_k+\lambda)\cos^2\nu x+b_k\cos\nu x\cos\nu y+(c_k+\lambda)\cos^2\nu y]\,ds. \quad (4)$$

Полагая в (4) φ_k произвольной финитной заключаем, что

$$(a_k+\lambda)\frac{\partial^2[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial x^2}+b_k\frac{\partial^2[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial x\partial y}+(c_k+\lambda)\frac{\partial^2[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial y^2}=0,\ k=1, 2, \cdots, n. \quad (5)$$

Поэтому (4) принимает вид

$$\int_\Gamma [N^* \vec{u}_\lambda]_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} [(a_k + \lambda)\cos^2 \nu x + b_k \cos \nu x \cos \nu y + (c_k + \lambda)\cos^2 \nu y]\, ds = 0,$$

откуда в силу произвольности $\frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu}$ на границе получаем $[N^* \vec{u}_\lambda]_k = 0$ $k = 1, 2, \cdots, n$ на Γ, следовательно, $\vec{u}_\lambda = 0$ на Γ.

Из (5) получаем, что

$$(D_A + \lambda E)\frac{\partial^2 N^* \vec{u}_\lambda}{\partial x^2} + D_B \frac{\partial^2 N^* \vec{u}_\lambda}{\partial x \partial y} + (D_C + \lambda E)\frac{\partial^2 N^* \vec{u}_\lambda}{\partial y^2} = 0.$$

Так как $AN = ND_A$, $BN = ND_B$, $CN = ND_C$, то $D_A N^* = N^* A$, $D_B N^* = N^* B$, $D_C N^* = N^* C$ откуда имеем

$$N^* (A + \lambda E)\frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial x^2} + N^* B \frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial x \partial y} + N^* (C + \lambda E)\frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial y^2} = 0,$$

следовательно, $(A + \lambda E)\frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial x \partial y} + (C + \lambda E)\frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial y^2} = 0.$

3°. Будем считать область Ω „допустимой“, т. е. такой, что любая прямая пересекает ее границу не более, чем в двух точках.

Рассмотрим однородную краевую задачу:

$$(a + \lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (c + \lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (*)$$

$$u|_\Gamma = 0.$$

Пусть $y + \mu_1 x = \text{const}$ и $y + \mu_2 x = \text{const}$ — соответственно первое и второе семейство вещественных характеристик уравнения (*), где μ_1 и μ_2 — решения характеристического уравнения $(a + \lambda)\mu^2 + b\mu + c + \lambda = 0$.

Диффеоморфизм $S_\lambda^{(+)}(a, b, c)$ (соответственно $S_\lambda^{(-)}(a, b, c)$) сопоставляют каждой точке $\theta \in \Gamma$ точку пересечения с границей Γ характеристики первого семейства (соответственно второго семейства), проходящей через θ.

Диффеоморфизм $S_\lambda(a, b, c)$ определяется как произведение диффеоморфизмов $S_\lambda^{(+)}(a, b, c)$ и $S_\lambda^{(-)}(a, b, c)$, т. е.

$$S_\lambda(a, b, c) = S_\lambda^{(-)}(a, b, c) \cdot S_\lambda^{(+)}(a, b, c).$$

Определение 3.1. Орбитой точки $\theta \in \Gamma$ относительно группы, порожденной образующими $S_\lambda(a, b, c)$ и $S_\lambda^{-1}(a, b, c)$ называется множество $Orb(\theta) = \{S_\lambda^k(a, b, c)\theta,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$, а

$$Orb(S_\lambda^{(+)}(a, b, c)\theta) \text{ и } Orb(S_\lambda^{(-)}(a, b, c)\theta)$$

называются смежными по отношению к $Orb(\theta)$.

Каждая точка $\theta \in \Gamma$ порождает вполне определенную совокупность граничных точек $\mathfrak{M}(\lambda, \theta, \Gamma)$, которая называется λ-орбитой и представляет объединение двух смежных орбит, порождаемых этой точкой.

λ-орбита $\mathfrak{M}(\lambda, \theta, \Gamma)$ называется тривиальной, если она содержит точку, в которой касательная к границе Γ параллельна одному из характеристических направлений.

Имеют место следующие леммы, справедливость которых устанавливается аналогично доказательству теорем 9, 11 из [5].

Лемма 3.1. *Если при $\lambda=\lambda_0$ некоторая итерация диффеоморфизма $S_\lambda(a, b, c)$ имеет такую неподвижную точку θ_0, что λ_0-орбита $\mathfrak{M}(\lambda_0, \theta_0, \Gamma)$ не является тривиальной, то существует собственный функционал краевой задачи (*), изоморфный ограниченной функции*

Доказательство. Пусть r — период точки θ_0, т. е. $S^r_{\lambda_0}(a, b, c)\,\theta_0 = \theta_0$. Проведем через точки $S^k_{\lambda_0}(a, b, c)\,\theta_0 (k = 0, 1, 2, \cdots, r-1)$ характеристики первого и второго семейств уравнения (*). На границе получим $2r$ различных точек. Пронумеруем эти точки в том порядке, в каком они встречаются при движении на границе Γ в положительном направлении: $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{2r-1}$. Определим на Γ две кусочно-постоянные функции $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ по формулам

$$u_1(\theta) = (-1)^l \frac{1}{2}, \quad u_2(\theta) = (-1)^{l+1} \frac{1}{2},$$

когда $\theta \in (\theta_l, \theta_{l+1})$. Нетрудно проверить, что функции $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ инвариантны относительно $S^{(+)}_{\lambda_0}(a, b, c)$ и $S^{(-)}_{\lambda_0}(a, b, c)$, т. е.

$$u_i(\theta) = u_i(S^{(+)}_{\lambda_0}(a, b, c)\,\theta) = u_i(S^{(-)}_{\lambda_0}(a, b, c)\,\theta), \quad i = 1, 2.$$

Определим функции $u_1(x, y, \lambda_0, \theta_0)$ и $u_2(x, y, \lambda_0, \theta_0)$ в Ω следующим образом: $u_1(x, y, \lambda_0, \theta_0) = u_1(\theta')$, $u_2(x, y, \lambda_0, \theta_0) = u_2(\theta'')$, где θ' (соответственно θ'') точка пересечения с границей Γ характеристики первого (соответственно второго) семейства уравнения (*), проходящей через точку (x, y).

Построим теперь функцию $u(x, y, \lambda_0, \theta_0) = u_1(x, y, \lambda_0, \theta_0) + u_2(x, y, \lambda_0, \theta_0)$. Докажем, что построенная таким образом кусочно-постоянная функция $u(x, y, \lambda_0, \theta_0)$ является собственным функционалом краевой задачи (*).

Характеристики обоих семейств, проведенные через точки $S^k_{\lambda_0}(a, b, c)\,\theta_0$ $(k=0, 1, 2, \cdots, r-1)$, разбили область Ω на конечное число параллелограммов $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$, криволинейных треугольников и двуугольников, примыкающих к границе.

Представим себе область Ω покрашенной в два цвета по следующему правилу: частичные области, границы которых имеют одну и только одну общую точку, покрашены в один и тот же цвет, а если границы их имеют общий отрезок характеристики, покрашены в различные цвета.

Предположим, что один из криволинейных треугольников окрашен в белый цвет, тогда очевидно, при соблюдении указанного правила все частичные области будут окрашены в вполне определенный цвет. Легко видеть, что в частях области Ω, окрашенных в белый цвет, построенная функция $u(x, y, \lambda_0, \theta_0)$ равна нулю, а в параллелограммах, окрашенных в черный цвет, равна либо $+1$, либо -1, так, однако, что в черных параллелограммах с общей вершиной функция u принимает различные значения.

Очевидно, что

$$\int_{\Omega} u(x, y, \lambda_0, \theta_0) \cdot \left\{ (a+\lambda_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (c+\lambda_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\} dxdy =$$

$$= \sum \pm \int_{\Omega_p} \left\{ (a+\lambda_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (c+\lambda_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\} dxdy, \qquad (7)$$

где суммирование распространено только на параллелограммы, окрашенные в черный цвет.

Принимая во внимание, что Γ_p—граница области Ω_p состоит из отрезков характеристик, вдоль которых подынтегральное выражение является полным дифференциалом, легко получим

$$\int_{\Omega_p} \left\{ (a+\lambda_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (c+\lambda_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\} dxdy =$$

$$= \int_{\Gamma_p} (a+\lambda_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy - (c+\lambda_0) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = \{ \varphi(b_p) + \varphi(d_p) -$$

$$- \varphi(a_p) - \varphi(c_p) \},$$

где через a_p, b_p, c_p, d_p обозначены вершины параллелограмма Ω_p.

Подставляя значения интегралов по отдельным параллелограммам в (7) легко убедиться, что в получаемой при этом сумме значение функции $\varphi(x, y)$ в вершинах, общих для двух черных параллелограммов, фигурирует дважды, причем с различными знаками и, следовательно, эти слагаемые сокращаются. Если вершина не является общей для двух черных параллелограмов, то она должна принадлежать границе, где функция $\varphi(x, y)$ равна нулю.

Таким образом

$$\int_{\Omega} u(x, y, \lambda_0, \theta_0) \left\{ (a+\lambda_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (c+\lambda_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\} dxdy = 0,$$

$$\varphi \in \Phi_0(\Omega).$$

Пусть $A_r(\lambda, a, b, c)$ — совокупность точек $\theta \in \Gamma$, неподвижных относительно r-й итерации отображения $S_\lambda(a, b, c)$. Ясно, что

$$\Gamma = A_-(\lambda, a, b, c) + \sum_{r=1}^{\infty} A_r(\lambda, a, b, c).$$

Можно доказать (см. лемму 12 [5]), что в этом представлении только одно слагаемое под знаком суммы может быть непустым. т. е. либо $\Gamma = A_-(\lambda, a, b, c)$, либо существует $r = r(\lambda, a, b, c)$ такое, что $\Gamma = A_-(\lambda, a, b, c) + A_r(\lambda, a, b, c)$.

Таким образом, диффеоморфизм $S_\lambda(a, b, c)$ состоит из двух компонент, одна из них индуцирована им на множестве $A(\lambda, a, b, c)$ — периодическая компонента с фиксированным периодом, а другая индуцирована им на множестве $A_-(\lambda, a, b, c)$ — апериодическая компонента.

Лемма 3.2. *Если множество $A_{\lambda_0}(a, b, c)$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то можно построить гладкую собственную функцию краевой задачи* (*).

Доказательство. Пусть дуга $(\theta_1, \theta_2) \subset A(\lambda_0, a, b, c)$, т. е. для всех $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ имеем $S^r_{\lambda_0}(a, b, c)\ \theta = 0$.

Без ограничения общности можем считать, что

1) дуга (θ_1, θ_2) не содержит точку θ^*, являющуюся образом точки, в которой касательная к Γ параллельна одной из характеристик;

2) все точки дуги (θ_1, θ_2) λ_0- различны, т. е. не принадлежат одной и той же λ_0-орбите $\mathfrak{M}(\lambda_0, \theta, \Gamma)$.

В противном случае берем такую ее часть, которая обладает указанными свойствами.

Образуем интеграл

$$v(x, y, \lambda_0) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} u(x, y, \lambda_0, \theta)\, \sigma(\theta)\, d\theta,$$

где $u(x, y, \lambda_0, \theta)$ — функция, построенная в лемме 3.1, $\sigma(\theta)$ — произвольная гладкая функция.

При фиксированном $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, $u(x, y, \lambda_0, \theta)$ — кусочно-постоянная функция, представляющая собой линейную комбинацию характеристических функций полуплоскостей, определяемых характеристиками уравнения (*). Пусть $E(x, y, \lambda_0, \theta)$ — характеристическая функция одной из этих полуплоскостей. Функция

$$E(x, y, \lambda_0) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} E(x, y, \lambda_0, \theta)\, \sigma(\theta)\, d\theta$$

имеет конечный интеграл Дирихле. Это следует из того, что производная $E(x, y, \lambda_0)$ по направлению характеристик одного семейства равна нулю, а по перпендикулярному направлению, как нетрудно проверить, имеет столько же непрерывных производных, сколько $\sigma(\theta)$.

Таким образом, функция $v(x, y, \lambda_0)$ исчезает на границе, будет иметь конечный интеграл Дирихле и, как функция из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ будет

удовлетворять уравнению (*), если только $\varphi'(\vartheta)$ интегрируема с квадратом модуля.

Теорема 3.1. *Если при $\lambda=\lambda_0$ для некоторого $1\leqslant k\leqslant n$ существует диффеоморфизм $S_{\lambda_0}(a_k, b_k, c_k)$, конечная итерация которого имеет неподвижную точку ϑ_0 такую, что λ_0-орбита $\mathfrak{M}(\lambda_0, \vartheta_0, \Gamma)$ не является тривиальной, то существует собственный функционал оператора* A, *изоморфный ограниченной вектор-функции.*

Доказательство. Пусть, как и выше, N — невырожденное преобразование, которое приводит одновременно к диагональному виду матрицы A, B, C. Из нашего условия и в силу леммы 3.1 следует, что уравнение (*) с коэффициентами λ_0, a_k, b_k, c_k имеет кусочно-постоянное решение $v_{\lambda_0 k}(x, y)$. Тогда $\vec{u}_{\lambda_0}=N\vec{v}_{\lambda_0}$, где $\vec{v}_{\lambda_0}$ — вектор-функция, k-тая компонента которой равна $v_{\lambda_0 k}$, а остальные компоненты—нули, будет собственным функционалом оператора A. В самом деле

$$\int_\Omega \vec{u}_{\lambda_0}\left[A+\lambda_0 E)\,\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x\partial y}+(C+\lambda_0 E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial y^2}\right]dxdy=$$

$$=\int_\Omega N\vec{v}_{\lambda_0}\left[(A+\lambda_0 E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x\partial y}+(C+\lambda_0 E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial y^2}\right]dxdy=$$

$$=\int_\Omega \vec{v}_{\lambda_0}\cdot\left[(N^*A+\lambda_0 N^*)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x^2}+N^*B\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x\partial y}+(N^*C+\lambda_0 N^*)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial y^2}\right]dxdy=$$

$$=\int_\Omega \vec{v}_{\lambda_0}\cdot\left[(D_A+\lambda_0 E)\,\frac{\partial^2 N^*\vec{\varphi}}{\partial x^2}+D_B\frac{\partial^2 N^*\vec{\varphi}}{\partial x\partial y}+\right.$$

$$\left.+(D_C+\lambda_0 E)\frac{\partial^2 N^*\vec{\varphi}}{\partial y^2}\right]dxdy=\int_\Omega v_{\lambda_0 k}\cdot\left[(a_k+\lambda_0)\frac{\partial^2[N^*\vec{\varphi}]_k}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+b_k\frac{\partial^2[N^*\vec{\varphi}]_k}{\partial x\partial y}+(c_k+\lambda_0)\frac{\partial^2[N^*\vec{\varphi}]_k}{\partial y^2}\right]dxdy=0.$$

Теорема 3.2. *Если при $\lambda=\lambda_0$ для некоторого $1\leqslant k\leqslant n$ множество $A(\lambda_0, a_k, b_k, c_k)$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то можно построить гладкую собственную вектор-функцию краевой задачи* (1)—(2).

Доказательство. Из леммы 3.2 следует, что уравнение (*) с коэффициентами λ_0, a_k, b_k, c_k имеет собственную функцию $v_{\lambda_0 k}(x, y)$, которая принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(2)$. Тогда вектор-функция

$\vec{u}_{\lambda_0}=N\vec{v}_{\lambda_0}\in\vec{W}_2^1(\Omega)$, где $\vec{v}_{\lambda_0}$ — вектор-функция, k-тая компонента которой равна $v_{\lambda_0 k}(x, y)$, а остальные компоненты нули, и в силу теоремы 3.1, будет собственным функционалом оператора A.

4°. В этом пункте мы рассмотрим случай, когда Ω — круг и, аналогично, как это сделано в [5], построим явное выражение собственных вектор-функций через полиномы Чебышева.

Предложение 4.1. *Если* Γ *есть окружность* $x^2+y^2=1$, *то множество* $A(\lambda, a, b, c)\neq\varnothing$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lambda=\lambda_{l,m}=-\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}\cos\frac{\pi l}{m}\ (m=2, 3,\cdots,$$

$$l=1, 2,\cdots, m-1).$$

Доказательство. Пусть $\mu_1=\operatorname{tg}\alpha_1$, $\mu_2=\operatorname{tg}\alpha_2$ — решения характеристического уравнения, $\theta_0=e^{it_0}$ — произвольная точка на Γ. Легко видеть, что $S_\lambda(a, b, c)\,\theta_0=e^{i(t_0+2(\alpha_1-\alpha_2))}$ и по индукции $S_\lambda^m(a, b, c)\,\theta_0=e^{i(t_0+2m(\alpha_1-\alpha_2))}$, поэтому необходимым и достаточным условием неподвижности точки θ_0 является условие $\alpha_1-\alpha_2=\frac{\pi l}{2m}$. что, как нетрудно проверить, выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lambda=-\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}\cos\frac{\pi l}{m}.$$

Теорема 4.1. *Если* Ω *есть круг* $x^2+y^2<1$, *то функции*

$$v_{l,m}(x, y)=\cos\left[m\arccos\left(x\sin\left(\frac{\pi l}{2m}-\beta\right)+y\cos\left(\frac{\pi l}{2m}-\beta\right)\right)\right]+$$

$$+(-1)^{l+1}\cos\left[m\arccos\left(y\cos\left(\frac{\pi l}{2m}+\beta\right)-x\sin\left(\frac{\pi l}{2m}+\beta\right)\right)\right]$$

являются собственными функциями краевой задачи (*), *соответствующими собственному значению* $\lambda=\lambda_{l,m}$, *где*

$$\beta=\frac{1}{2}\arccos\frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}},\ m=2, 3,\cdots, l=1, 2,\cdots, m-1.$$

Доказательство. Функция $v_{l,m}(x, y)$ представляет собой сумму двух слагаемых, первое из которых постоянно на характеристиках первого семейства уравнения (*), а второе — на характеристиках второго семейства, поэтому она удовлетворяет уравнению (*) при $\lambda=\lambda_{l,m}$. Далее, переходя к полярным координатам и полагая $\rho=1$, получим

$$v_{l,m}(x, y)|_\Gamma=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot m-mt+m\beta-\frac{\pi l}{2}\right)+$$

$$+(-1)^{l+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot m-mt+m\beta+\frac{\pi l}{2}\right)=0.$$

Из теорем 3.1, 4.1 следует, что вектор-функции $\vec{u}_{l,\,m,\,k} = N\vec{v}_{l,\,m,\,k}$, где $\vec{v}_{l,\,m,\,k}$ — вектор-функция, k-тая компонента которой равна $v_{l,\,m}$, а остальные компоненты — нули, являются собственными функциями оператора A, соответствующими собственным значениям $\lambda_{l,\,m,\,k}$

$$\lambda = \lambda_{l,\,m,\,k} = -\frac{a_k + c_k}{2} + \frac{\sqrt{(a_k - c_k)^2 + b_k^2}}{2}\cos\frac{\pm l}{m}$$

$$(m = 2,\ 3, \cdots,\ l = 1,\ 2, \cdots,\ m-1,\ k = 1,\ 2, \cdots,\ n).$$

Теорема 4.2. *Вектор-функции* $\vec{u}_{l,\,m,\,k}(x, y)$ $(m = 2, 3, \cdots, l = 1, 2, \cdots, m-1, k = 1, 2, \cdots, n)$ *образуют полную систему в* $\vec{W}_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Допустим, что $(\vec{f}, \vec{u}_{l,\,m,\,k})_1 = 0$ $(m = 2, 3, \cdots, l = 1, 2, \cdots, m-1, k = 1, 2, \cdots, n)$. При фиксированном k получаем

$$0 = (\vec{f}, \vec{u}_{l,\,m,\,k})_1 = (\vec{f}, N\vec{v}_{l,\,m,\,k})_1 = (N^*\vec{f}, \vec{v}_{l,\,m,\,k}) = ([N^*\vec{f}]_k, v_{l,\,m})_1$$

для всех $m = 2, 3, \cdots, l = 1, 2, \cdots, m-1$. Так как функции $v_{l,\,m}(x, y)$ образуют полную систему в $\dot{W}_2^1(\Omega)$ (см. теорему 14 [5]), то $[N^*\vec{f}]_k = 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$, откуда вытекает, что $N^*\vec{f} = 0$, следовательно, $\vec{f} = 0$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 21.XII.1979

Գ. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ. Վեկտոր-ֆունկցիաների տարածություններում դիֆերենցիալ օպերատորների փնջի համար Դիրիխլեի ճամասեռ խնդիրը *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների փնջի համար։ Նշելով տիրույթի եզրագծի դիֆեոմորֆիզմների ընտանիքի որոշ հատկություններից, կառուցվում է այդ խնդրի ընդհանրացված լուծումների սրոշակի համախմբություն։ Այն դեպքում, երբ տիրույթը շրջան է, կառուցվում է բազմանդամային սեփական վեկտոր-ֆունկցիաների լրիվ սիստեմ։

G. S. AKOPIAN. *On the homogenous Dirichlet problem for a bundle of differential operators in a space of vector-functions* (summary)

The Dirichlet problem for a bundle of systems of differential equations is investigated. Proper functionals of the problem are constructed, using familiar properties of specially chosen diffeomorphisms of the boundary. In the case, when the domain is a disk, the full system of polynomial proper vector-functions is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян.* О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге, ДАН СССР, 73, № 5, 1950, 869—872.
2. *С. Л. Соболев.* Об одной новой задаче математической физики, Изв. АН СССР, сер. матем., 18, № 1, 1954, 3—50.
3. *С. Л. Соболев.* О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью, ПМТФ, № 3, 1960, 20—55.
4. *Р. А. Александрян.* Диссертация, МГУ, 1949.
5. *Р. А. Александрян.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева, Труды ММО, 9, 1960, 455—505.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Վ. Հ. Մարտիրոսյան. *Կոմպլեքս հարթության վրա հավասարաչափ մոտավորություն իրագործող բազմանդամների գործակիցների աճի մասին* 419
Ս. Ա. Թերզիան, Դ. Տ. Դոչև. *Ըստ ժամանակի ուշացումով պարաբոլական հավասարման համար խառը խնդրի լուծումների գոյության միակության և սահմանափակության մասին* 433
Վ. Ն. Մարգարյան. *Օպերատորի հիպոէլիպտիկությունը պահպանող կրտսեր անդամների գումարում* 443
Ա. Մ. Ջրբաշյան, Գ. Վ. Միքայելյան. *Կիսահարթության համար Բլյաշկեի տիպի արտադրյալների մի ընտանիքի կառուցումը և հիմնական հատկությունները* . . 461
Կ. Հ. Յաղջյան. *Թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար Կոշու խնդրի կոռեկտության մասին* 475
Գ. Ս. Հակոբյան. *Վեկտոր-ֆունկցիաների տարածությունում դիֆերենցիալ օպերատորների փնջի համար Դիրիխլեի համասեռ խնդիրը* 488

СОДЕРЖАНИЕ

В. А. Мартиросян. О росте коэффициентов многочленов, осуществляющих равномерное приближение на комплексной плоскости 419
С. А. Терзиян, Д. Т. Дочев. Существование, единственность и ограниченность решений смешанной задачи для параболических уравнений с запаздыванием по времени 433
В. Н. Маркарян. Добавление младших членов, сохраняющих гипоэллиптичность оператора 443
А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян. Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости 461
К. А. Ягджян. О корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений 475
Г. С. Акопян. Об однородной задаче Дирихле для пучка дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций 488

CONTENTS

V. A. Martirosjan. On the growth of coefficients of polynomials, which realize uniform approximation in the complex plane 419
S. A. Terzian, D. T. Dochev. Existence, unicity and boundedness of the solutions of a mixed problem for parabolic equations with time delay 433
V. N. Margaryan. Addition of junior terms preserving hypoellipticity of an operator 443
A. M. Jerbashian, G. V. Mikaelian. Construction and main properties of a family of Blaschke type functions for a half-plane 461
K. H. Yagdjian. On correctness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations 475
G. S. Akopian. On the homogenous Dirichlet problem for a bundle of differential operators in a space of vector-functions 488

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1980 թ., XV, №№ 1—6

Ի. Ա. Ալիխանյան. *Խառը եզրային խնդիր լապլասի հավասարման համար անվերջ բազմակապ տիրույթում* 4, 258

Ա. Ա. Անդրյան. *Եզրային խնդիրներ երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով բաղադրյալ տիպի սիստեմի համար* 2, 154

Ս. Հ. Անտոնյան. *Ինտրակտները G-տարածությունների կատեգորիայում* . . 5, 365

Հ. Ս. Առաքելյան. *Կրեատիվ էկվիվալենտությունների մասին* 2, 145

Ա. Ն. Ավետիսյան. *Միատեղ-էֆյեների տիպի ֆունկցիաների ոչ փակ սիստեմի լրիվացման մասին* 2, 96

Ռ. Ա. Բաղիյան. *Ս. Ն. Բեռնշտեյնի անհավասարության և Բ. Մ. Լևիտանի պոլինոմների ընդհանրացումը* 3, 191

Ս. Լ. Բերբերյան. *Միավոր շրջանի ավտոմորֆիզմների վրա նորմալ ընտանիքներ առաջացնող սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների եզրային հատկությունների մասին* 5, 395

Դ. Լ. Բերման. *Կոմպլեքս տիրույթում ինտերպոլյացիայի տեսության վերաբերյալ* . 3, 209

Ռ. Ս. Դալոյան. *Սեփական և միակցված ֆունկցիաների մի սիստեմի լրիվության մասին* 4, 310

Ռ. Լ. Դոլինսկի. *Օրթոգոնալ բազմանդամների պարամետրերի նվազման կարգի և համապատասխան բաշխման ֆունկցիայի միջև եղած կապի մասին* . . . 2, 127

Մ. Ժ. Գրիգորյան. *Ինտեգրալի ֆունկցիաների ֆուրյեի կրկնակի շարքերի L_p, $0<p<1$ մետրիկայով ղուգամիտության մասին* 1, 15

Ն. Բ. Նիգիբարյան. *Մատրից-ֆունկցիաների ֆակտորիզացիան և ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումները* 3, 233

Դ. Գ. Էվին. *Վերջավոր մոդուլից առաջացած բազմաձևությունները և լոկալիզացիաները բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում* 2, 81

Վ. Յա. Էյդերման. *Մերոմորֆ ֆունկցիաների միակության թեորեմ* . . . 2, 110

Ս. Ա. Թերգիան, Դ. Տ. Դոշև. *Ըստ ժամանակի ուշացումով պարաբոլական հավասարման համար խառը խնդրի լուծումների գոյության միակության և սահմանափակության մասին* 6, 433

Ի. Գ. Խաչատրյան. *Զևափոխության օպերատորներ եզրային խնդիրների համար* . 1, 30

Մ. Յու. Խոջայանց. *e-աստիճանների կառուցվածքի մասին* 3, 165

Ռ. Ս. Կաշին. *l^n_2 տարածությունից l^m_2 տարածության գործող սահմանափակ օպերատորների որոշ հատկությունների մասին* 5, 379

Ա. Ն. Կոչուրեյ. *Սիմետրիկ օպերատորների և նրանց լայնացման ընորոշող ֆունկցիաները* 3, 219

Գ. Ս. Հակոբյան. *Վեկտոր-ֆունկցիաների տարածություններում դիֆերենցիալ օպերատորների փնջի համար Դիրիխլեի համասեռ խնդիրը* 6, 488

Ռ. Վ. Հակոբյան. *J-ոչ բացասական օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի ռեգուլյարությունը անվերջությունում* 3, 357

Հ. Մ. Հայրապետյան. *Հարդիի H^1 դասի որոշ ենթադասերի ֆունկցիաների ըստ ռացիոնալ կոտորակների սիստեմի վերլուծության մասին* 1, 3

Գ. Ռ. Հովհաննիսյան. *Վրոնակիաններով սկզբնական խնդրի մասին* . . . 4, 292

Ա. Մ. Ջրբաշյան, Գ. Վ. Միքայելյան. *Կիսահարթության համար Բլյաշկեյի տիպի արտադրյալների մի ընտանիքի կառուցումը և հիմնական հատկությունները* 6, 461

Վ. Ն. Մարգարյան. Օպերատորի հիպոէլիպտիկությունը պաշտպանող կրտսեր անդամների գումարում 6, 443
Վ. Մ. Մարտիրոսյան. Ճառագայթների համակարգի վրա պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների սիստեմների փակուղի, մինիմալության ու բազիսության մասին 4, 292
Վ. Հ. Մարտիրոսյան. Կոմպլեքս հարթության վրա հավասարաչափ մոտավորության իրագործող բազմանդամների գործակիցների աճի մասին 6, 419
Լ. Ս. Մայերզոյզ. Գոլիայի թեորեմի անալոգը և նրա մի քանի կիրառությունները 1, 45
Է. Գ. Մելիխսեթյան. Դիրիխլեի խնդիրը էլիպտիկ սիստեմի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար սրած դաշերում $(z)>1$ տիրույթում . 5, 336
Է. Ա. Միրզախանյան. Հիպերտյան տարածության ենթաբազմությունների արտայատկերումների մի դասի հատկություններն մասին 5, 349
Ա. Ա. Ներսիսյան. Անալիտիկ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկում միաժամանակյա ինտերպոլյացիայով 4, 249
Տ. Ա. Շամոյան. Բաժանման թեորեմներ և փակ իդեալների նկարագրության վերջավոր կարգ ունեցող անալիտիկ ֆունկցիաների հանրահաշիվներում . . . 4, 323
Ն. Ա. Շիրոկով. Որոշ սինգուլյար ինտեգրալ օպերատորների գնահատականները $Lp(C)$-ում 1, 63
Ռ. Գ. Սաֆարյան. Որոշ եզրային խնդիրներ փոքր պարամետրերով վերածվող դիֆուզիան պրոցեսների և համապատասխան դիֆերենցիալ հավասարումների համար 4, 258
Լ. Ա. Սեխպոսյան. Լիտվուդի թեորեմի մի ընդհանրացման մասին . . . 5, 403
Գ. Վ. Վիրաբյան. Անընդհատ սպեկտրով հերմիտի օպերատոր-ֆունկցիայի սպեկտրալ վերլուծության մասին 3, 176
Կ. Հ. Յաղջյան. Թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար Կոշու խնդրի կորեկտության մասին 6, 475

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия «Математика» за 1980 г., XV, №№ 1—6

А. Е. Аветисян. О пополнении незамкнутой системы функций типа Миттаг—Леффлера 2, 96

Г. М. Айрапетян. О представлении некоторых подклассов класса H^1 Харди посредством систем рациональных дробей 1, 3

Р. В. Акопян. О регулярности на бесконечности спектральной функции J-неотрицательного оператора 5, 357

Г. С. Акопян. Об однородной задаче Дирихле для пучка дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций 6, 488

Р. А. Алиханян. Смешанная краевая задача для уравнения Лапласа в бесконечной многосвязной области 4, 268

А. А. Андрян. Граничные задачи для систем уравнений второго порядка составного типа с постоянными коэффициентами 2, 154

С. А. Антонян. Ретракты в категориях G-пространств 5, 365

О. С. Асатрян. О креативных эквивалентностях 2, 145

Р. А. Багиян. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна и полиномов Б. М. Левитана 3, 191

С. Л. Берберян. О граничных свойствах субгармонических функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах автоморфизмов единичного круга 5, 395

Д. Л. Берман. К теории интерполяции в комплексной области 3, 209

Г. В. Вирабян. О спектральном разложении голоморфной оператор-функции с непрерывным спектром 3, 176

Р. С. Галоян. О полноте одной системы собственных и присоединенных функций 4, 310

Б. Л. Голинский. О связи между порядком убывания параметров ортогональных многочленов и свойствами соответствующей функции распределения 2, 127

М. Ж. Григорян. О сходимости в метрике Lp, $0<p<1$, двойных рядов Фурье суммируемых функций 1, 15

А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян. Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости 6, 461

Н. Б. Енгибарян. Факторизация матриц-функций и нелинейные интегральные уравнения 3, 233

Б. С. Кашин. О некоторых свойствах ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m 5, 379

А. Н. Кочубей. О характеристических функциях симметрических операторов и их расширений 3, 219

Л. С. Маергойз. Об одном аналоге теоремы Полна и его приложениях . . 1, 45

В. Н. Маркарян. Добавление младших членов, сохраняющих гипоэллиптичность оператора 6, 443

В. М. Мартиросян. О замыкании, минимальности и базисности систем простейших рациональных дробей на системе лучей 4, 276

В. А. Мартиросян. О росте коэффициентов многочленов, осуществляющих равномерное приближение на комплексной плоскости 6, 419
Э. П. Меликсетян. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в некоторых классах в области $|z| > 1$ 5, 336
Э. А. Мирзаханян. О свойствах одного класса отображений подмножеств гильбертова пространства 5, 349
А. А. Нерсесян. Равномерная аппроксимация с одновременной интерполяцией аналитическими функциями 4, 249
Г. Р. Оганесян. О начальной задаче с заданными вронскианами 4, 292
Р. Г. Сафарян. Некоторые краевые задачи с малым параметром для вырождающихся диффузионных процессов и соответствующих дифференциальных уравнений 4, 258
Л. А. Сехпосян. Об одном обобщении теоремы Литтльвуда 5, 403
С. А. Терзиян, Д. Т. Дочев. Существование, единственность и ограниченность решений смешанной задачи для параболических уравнений с запаздыванием по времени 6, 433
И. Г. Хачатрян. Операторы преобразования для краевых задач 1, 30
М. Ю. Ходжаянц. О структуре c-степеней 3, 165
Ф. А. Шамоян. Теоремы деления и замкнутые идеалы в алгебрах аналитических функций с мажорантой конечного роста 4, 323
Н. А. Широков. Оценки в $L^p(C)$ некоторых сингулярных интегральных операторов 1, 63
В. Я. Эйдерман. Теорема единственности для мероморфных функций . . . 2, 110
Г. Г. Эмин. Многообразия, порожденные одним конечным модулем, и локализации в категории модулей над всеми кольцами 2, 81
К. А. Ягджян. О корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений 6, 475

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR
seria "Mathematika", 1980, vol. XV, №№ 1—6

V. Ja. Ajderman. Uniqueness theorem for meromorphic functions 2, 110
G. S. Akopian. On the homogenous Dirichlet problem for a bundle of differential operators in a space of vector functions 6, 488
R. A. Alikhanyan. The mixed boundary problems for infinite and muticonnected domains for Laplace equation 4, 268
A. A. Andrian. Boundary value problems for second order systems of composite type with constant coefficients 2, 154
S. A. Antonian. Retracts in the category of *G*-spaces 5, 365
H. S. Asatrian. On creative equivalences 2, 145
A. E. Avetisian. On the completion of non-closed system of Mittag—Leffler's type functions 2, 96
R. A. Bagian. Generalized S. N. Bernstein inequalities and B. M. Levitan polynomials 3, 191
D. L. Berman. To the interpolation theory of complex domain 3, 209
S. L. Berberian. On boundary properties of subharmonic functions which generate normal families on subgroups of automorphisms in the unit disk 5, 395
G. G. Emin. The varieties, generated by a finite module, and lokalizations in the category of modules over all rings 2, 81
R. S. Galojan. On completeness of a system of eigen and associated functions 4, 310
B. L. Golinskii. A relation between the decreazing of the orthogonal polynomials parameters and properties of corresponding distribution . . . 2, 127
M. G. Grigorian. On the L_p, $0<p<1$ metric convergence of Fourie multiple series of integrable functions 1, 15
H. M. Hatrapetian. About representation by the system of rational functions for some subclasses of class H^1 of Hardy 1, 3
R. V. Hakopian. On the regularity of spectral function of *J*-nonnegative operator in the infinity 5, 357
G. R. Hovhannisian. On the initial value problem with given wronskians . 4, 292
A. M. Jerbashian, G. V. Mikaelian. Construction and main properties of a family of Blaschke type functions for a half-plane 6, 461
B. S. Kashin. On certain properties of matrices of bounded operators from l_2^n into l_2^m 5, 379
A. N. Kochubei. On characteristic functions of symmetric operators and their extensions 3, 219
I. G. Khachatrian. The transformation operators for the boundary problems 1, 30
M. J. Khodjaints. On structure of *s*-degrees 3, 165
I. S. Maergoiz. On an analogue of Polya theorem and its applications . . . 1, 63
V. N. Margaryan. Addition of junior terms preserving hypoellipticity of an operator 6, 443
V. A. Martirosjan. On the growth of coefficients of polynomials, which realize uniform approximation in the complex plane 6, 419

V. M. Martirosjan. On the closure, minimality and basisness of systems of symplest rational fractions on a system of rays 4, 276
E. P. Meliksetian. On Dirichlet problem for second order elliptical systems of differential equations in the unit disk 5, 335
E. A. Mirzakhanian. On some properties of a class of mappings of subsets of a Hilbert space 5, 349
A. H. Nersesstan. Uniform approximation with simulteneous interpolation by analytic functions 4, 249
R. G. Safarian. Some boundary value problems with small parameter for degenerate difusion processes and corresponding differential equations 4, 258
L. A. Sekpostan. A generalization of a theorem of Littlewood 5, 403
F. A. Shamojan. Division theorems and the discription of the closed ideals in algebra of analytical functions of finite order 4, 323
N. A. Shirokov. Estimates in L^p (C) of some singular integral operators 1, 445
S. A. Terstan, D. T. Dochev. Existence, unicity and boundedness of the solutions of a mixed problem for parabolic equations with time delay 6, 433
G. V. Virabian. On spectral decomposition of a holomorphic operator-function with continuous spectrum 3, 176
K. H. Yagdjian. On correctness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations 6, 475
N. B. Yengibarian. Factorization of matrix-functions and non-linear integral equations 3. 233