ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղադրվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по собому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ ЦЕНА 50 Կ. К. Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of types script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been caried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barckamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 5, 1980 Математика

Э. П. МЕЛИКСЕТЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ В ОБЛАСТИ $|z|>1$

Введение

В настоящей работе рассматривается следующая граничная задача:

Найти в области $\{D^+: |z|>1\}$ дважды непрерывно дифференцируемое решение эллиптической системы

$$AU_{xx}+BU_{xy}+CU_{yy}=0, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$U(x, y)|_\Gamma=f(x, y), \ \{\Gamma: |z|=1\}, \tag{2}$$

где A, B и C — постоянные, вещественные квадратные матрицы n-го порядка, $f(z)=\{f_1(z), \cdots, f_n(z)\}$, заданная на Γ, вещественная вектор-функция, $U(z)=\{U_1(z), \cdots, U_n(z)\}$ — искомое, ограниченное в окрестности бесконечности решение; $z=x+iy$.

Задача (1)—(2) рассматривается в случаях, когда

1) $f(x, y)$ принадлежит классу непрерывных функций и
2) $f(x, y)\in L_1(\Gamma)$.

В первом случае граничное условие (2) понимается поточечно, то есть

$$\lim_{\substack{z\to t\\ |z|>1}} U(z)=f(t), \ t\in\Gamma, \tag{3}$$

а во втором случае условие (2) понимается в смысле L_1, то есть

$$\lim_{\substack{R\to 1\\ R>1}} \int_{-\pi}^{\pi} |U(Rz)-f(z)|\, d\varphi=0, \ z=e^{i\varphi}. \tag{4}$$

В обоих случаях доказывается следующая

Теорема 1. *Если задача Дирихле для системы* (1) *удовлетворяет условию Я. Б. Лопатинского, то задача* (1)—(2) *имеет и притом единственное решение.*

Получена формула для решения задачи.

В § 1 доказывается лемма и приводится решение задачи (1)—(2) в классе непрерывных функций, а также показывается единственность полученного решения.

В § 2 задача (1)—(2) решается в случае, когда граничное условие понимается в смысле (4), то есть $f(x, y) \in L_1(\Gamma)$.

§ 1. Решение задачи (1)—(2) в классе непрерывных функций

Напомним, что система (1) называется эллиптической, если $\det C \neq 0$ и характеристическое уравнение

$$\det (A + B\lambda + C\lambda^2) = 0 \tag{5}$$

системы (1) не имеет действительных корней (см. [1], [2]).

Первоначально рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение (5) системы (1) имеет только простые корни.

Обозначим через $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения (5) с положительными мнимыми частями: т. е. $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$ $(j = 1, \cdots, n)$. Напишем общее решение системы (1) в случае простых корней (см. [2])

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \delta_j \varphi_j (x + \lambda_j y) + \alpha, \tag{6}$$

где $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$—корни характеристического уравнения (5) с положительными мнимыми частями, $\varphi_j (x + \lambda_j y)$— произвольные аналитические функции относительно аргумента $x + \lambda_j y$ при $|z| > 1$, исчезающие в бесконечности, а именно $\varphi_j (\xi)$ — аналитические функции относительно аргумента ξ в области D_j, являющейся образом D^+ при отображении $\xi = x + \lambda_j y$, а α — произвольный действительный постоянный вектор.

Векторы $\delta_1, \cdots, \delta_n$ являются решением алгебраического уравнения (см. [2])

$$(A + B\lambda_j + C\lambda_j^2)\, \delta_j = 0 \quad (j = 1, \cdots, n). \tag{7}$$

Условие же Лопатинского для задачи Дирихле в этом случае совпадает с условием линейной независимости векторов $\delta_1, \cdots, \delta_n$.

Представим общее решение $U(x, y)$, заданное формулой (6), в следующем виде:

$$U(z) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \delta_j \omega_j (z + \mu_j \bar{z}) + \alpha, \tag{8}$$

где $\mu_j = \dfrac{i - \lambda_j}{i + \lambda_j}$, причем из условия $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$ следует, что $|\mu_j| < 1$, а $\omega_j (z + \mu_j \bar{z})$—произвольные аналитические функции относительно аргумента $z + \mu_j \bar{z}$ при $|z| > 1$, исчезающие в бесконечности, а именно $\omega_j (\xi)$— аналитические функции в области D_j, являющейся образом D^+ при отображении $\xi = z + \mu_j \bar{z}$.

Предположим сначала, что функции $\omega_j(z+\mu_j\bar{z})$ и $f(z)$ бесконечно дифференцируемые, соответственно, в области $D^+ + \Gamma$ и на Γ.

Используя граничное условие (2) из формулы (8) получим

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\,\omega_j(z+\mu_j\bar{z})+\alpha=f(z),\ |z|=1. \tag{9}$$

Так как $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$ на $|z|=1$, то из (9) имеем

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\,\omega_j\left(z+\frac{\mu_j}{z}\right)+\alpha=f(z),\ |z|=1, \tag{10}$$

где $\omega_j(z+\mu_j/z)$ — аналитические функции в области $|z|>1$ относительно переменной $z=x+iy$.

Далее из (10) имеем (см. [3]), что

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_j\,\omega_j\left(z+\frac{\mu_j}{z}\right)+\alpha=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(t+z)f(t)}{(t-z)\cdot t}\,dt+iC, \tag{11}$$

где C — некоторый действительный постоянный вектор.

Из формулы (11), так как $\omega_j(\infty)=0$, получим

$$\alpha=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t}+iC. \tag{12}$$

Поскольку α и $f(t)$—действительные выражения, то отсюда будем иметь, что $C=0$.

Подставляя значение α из выражения (12) в формулу (11), получим

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_j\,\omega_j\left(z+\frac{\mu_j}{z}\right)=-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}. \tag{13}$$

Обозначим через δ матрицу со столбцами $\delta_1,\cdots,\delta_n$, а через $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ строки матрицы δ^{-1}. Тогда из выражения (13) имеем

$$\omega_j\left(z+\frac{\mu_j}{z}\right)=-\frac{\alpha_j}{\pi_j}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}, \tag{14}$$

где α_j есть j-ая строка матрицы δ^{-1}.

Решим уравнение

$$z+\frac{\mu_j}{z}=\theta,\ \theta\in D_j \tag{15}$$

относительно z, где z ищется в области $|z|>1$.

Из уравнения (15) получим

$$z=\frac{\theta+\sqrt{\theta^2-4\mu_j}}{2}\equiv\beta_j(\theta),\ \text{а}\ \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sqrt{\theta^2-4\mu_j}}{\theta}=1, \tag{16}$$

где для выражения $\sqrt{\theta^2-4\mu_j}$ выбирается та ветвь, которая непрерывна вне отрезка $(2\sqrt{\mu_j}, -2\sqrt{\mu_j})$.

Подставляя (16) в формулу (14), получим

$$\omega_j(\theta)=-\frac{\alpha_j}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t-\hat{\beta}_j(\theta)}, \text{ где } \{\beta_j(\theta): D_j^- \to D^+\}. \tag{17}$$

Используя (12) и (17), из формулы (8) имеем

$$U(z)=-\operatorname{Re}\sum_{j=1}^n \delta_j\frac{\alpha_j}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t-\beta_j(z+\mu_j\bar{z})}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t}. \tag{18}$$

Представим выражение (18) следующим образом:

$$U(z)=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t+z)\,f(t)\,dt}{(z-t)\,t}-\operatorname{Re}\sum_{j=1}^n\frac{\delta_j\alpha_j}{\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{1}{t-\beta_j(z+\mu_j\bar{z})}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t-z}\right)f(t)\,dt. \tag{19}$$

Покажем, что вектор-функция $U(z)$, заданная формулой (19), является решением задачи (1)—(2), когда $f(t)$ является непрерывной функцией.

Обозначим

$$V(z)\overset{\text{def}}{\equiv}\omega(z+\mu_j\bar{z})-\omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{1}{t-\beta_j(z+\mu_j\bar{z})}-\frac{1}{t-z}\right)f(t)\,dt. \tag{20}$$

Покажем, что

$$V(z)\to 0 \text{ при } z\to t_0, \text{ где } |z|>1 \text{ и } t_0\in\Gamma. \tag{21}$$

Из теоремы Коши о вычетах очевидно имеем

$$\int_\Gamma\left(\frac{1}{t-\beta_j(z+\mu_j\bar{z})}-\frac{1}{t-z}\right)f(t_0)\,dt=0. \tag{22}$$

Легко проверить также, что имеют место следующие оценки:

$$|\beta_j(z+\mu_j\bar{z})-z|\leqslant \text{const}\cdot(|z|^2-1) \tag{23}$$

и

$$|t-\beta_j(z+\mu_j\bar{z})|>\text{const}\cdot|t-z| \tag{24}$$

при $1\leqslant|z|\leqslant 2$, $|t|=1$.

Ясно, что (см. [3])

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|z|^2-1}{|t-z|^2}\,d\varphi=\operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{(t+z)\,dt}{(t-z)\,t}\right)=1,\ t=e^{i\varphi}. \tag{25}$$

Теперь разобьем интеграл (20) на два, из которых первый распространен на дугу γ_Δ контура Γ, для точек которой $|t-t_0|\leqslant\Delta$, где Δ некоторое число, подбор которого мы уточним далее, а второй интеграл распространен на оставшуюся часть Γ.

В результате из (20), используя (22), получим

$$V(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{t-\beta_j(z+\mu_j\bar{z})}-\frac{1}{t-z}\right)(f(t)-f(t_0))\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_\Delta}\left(\frac{1}{t-\beta_j(z+\mu_j\bar{z})}-\frac{1}{t-z}\right)(f(t)-f(t_0))\,dt+ \tag{26}$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma-\gamma_\Delta}\left(\frac{1}{t-\beta_j(z+\mu_j\bar{z})}-\frac{1}{t-z}\right)(f(t)-f(t_0))\,dt=J_1(z)+J_2(z).$$

Зададимся числом $\varepsilon>0$ и, пользуясь непрерывностью функции $f(t)$ в точке t_0, выберем $\Delta>0$ так, чтобы при $|t-t_0|<\Delta$ было $|f(t)-f(t_0)|<\varepsilon$. Имея в виду это, оценки (23), (24) и равенство (25), для интеграла $J_1(z)$ из (26) получим

$$|J_1(z)|\leqslant\frac{\text{const}}{\pi}\int\limits_{\gamma_\Delta}\frac{|f(t)-f(t_0)|\cdot(|z|^2-1)}{|t-z|^2}\,|dt|\leqslant C\varepsilon, \tag{27}$$

где $C>0$—некоторая постоянная.

С другой стороны, ясно, что $J_2(z)$ при таком фиксированном Δ стремится к нулю, при $z\to t_0\in\Gamma$. Следовательно, можно указать такое $\delta>0$, что

$$|J_2(z)|\leqslant\varepsilon \text{ при } |z-t_0|<\delta,\ |z|>1. \tag{28}$$

Итак, из (27) и (28) следует справедливость (21). С другой стороны, известно (см. [3]), что

$$\text{Re}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(t+z)\,f(t)\,dt}{(t-z)\cdot t}\right)\to f(t_0) \text{ при } z\to t_0,\ |z|>1. \tag{29}$$

Следовательно, из (21) и (29) имеем, что

$$U(z)\to f(t_0) \text{ при } z\to t_0\in\Gamma,\ |z|>1, \tag{30}$$

где вектор-функция $U(z)$ задается формулой (19).

Рассмотрим случай кратных корней характеристического уравнения (5).

Общее решение при кратных корнях дается формулой (см. [2])

$$U(x,y)=\text{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{jr}\left[\omega_{jr}(x+\lambda_j y)+\sum_{p=1}^{r-1}\beta_{jr}^{(p)}y^p\,\omega_{j,r-p}^{(p)}(x+\lambda_j y)\right]+\alpha, \tag{31}$$

где $\lambda_1, \cdots, \lambda_{\nu_0}$ — корни характеристического уравнения (5) с положительными мнимыми частями, $k_1, \cdots, k_{\nu_0}$ — их кратность, $\omega_{jr}(x+\lambda_j y)$ — произвольные аналитические функции относительно аргумента $x+\lambda_j y$, а a — произвольный действительный постоянный вектор.

В формуле (31) n-мерные векторы δ_{jr} и числа $\beta_{jr}^{(p)}$ определяются через коэффициенты системы (1). Условие Лопатинского для системы (1) совпадает с условием линейной независимости векторов δ_{jr} ($j=1, \cdots, \nu_0$; $r=1, \cdots, k_j$). Числа $\beta_{jr}^{(p)}$ равны либо нулю, либо $1/p!$ (см. [2]).

Сначала рассмотрим случай, когда $\nu_0=1$ и $\beta_{jr}^{(p)}=\frac{1}{p!}$.

Тогда общее решение, заданное формулой (31), будет иметь следующий вид:

$$U(x, y)=\operatorname{Re}\sum_{r=1}^{n}\delta_r\left[\omega_r(x+\lambda y)+\sum_{p=1}^{r-1}\frac{y^p}{p!}\omega_{r-p}^{(p)}(x+\lambda y)\right]+a, \tag{32}$$

где $\operatorname{Im}\lambda>0$, а верхний индекс функции $\omega_{r-p}(x+\lambda y)$ указывает порядок производной в точке $\xi=x+\lambda y$.

Отметим, что

$$x+\lambda y=\frac{z+\bar z}{2}+\lambda\frac{z-\bar z}{2i}=(z+\mu\bar z)\,d, \text{ где } d=\frac{1-\lambda i}{2}, \tag{33}$$

а $\mu=\frac{i-\lambda}{i+\lambda}$, причем из условия $\operatorname{Im}\lambda>0$ имеем, что $|\mu|<1$.

Построим аналитическую функцию $\beta(x+\lambda y)$ относительно $x+\lambda y$ в области $|z|>1$, удовлетворяющую условию

$$\beta(x+\lambda y)=y \text{ на } |z|=1. \tag{34}$$

Так как на $|z|=1$ имеем $\bar z=\frac{1}{z}$, то

$$\beta\left(zd+\frac{\mu d}{z}\right)=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) \text{ при } |z|=1,$$

где

$$d=\frac{1-\lambda i}{2}, \quad \mu=\frac{i-\lambda}{i+\lambda}. \tag{35}$$

Отсюда получим

$$\beta\left(zd+\frac{\mu d}{z}\right)=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) \text{ при } |z|>1. \tag{36}$$

Положим

$$zd+\frac{\mu d}{z}=x+\lambda y, \ |z|=1, \tag{37}$$

тогда

$$z=\alpha(x+\lambda y), \tag{38}$$

где

$$\alpha(\tau)=\frac{\tau+\sqrt{\tau^2-4\mu d^2}}{2d},\quad \tau=x+\lambda y,\ \text{а}\ \lim_{\tau\to\infty}\frac{\sqrt{\tau^2-4\mu d^2}}{\tau}=1 \tag{39}$$

и для выражения $\sqrt{\tau^2-4\mu d^2}$ выбирается та ветвь, которая непрерывна вне отрезка $(2d\sqrt{\mu},\ -2d\sqrt{\mu})$. Подставив значение z из (38) в (36), получим

$$\beta(x+\lambda y)=\frac{1}{2i}\left(\alpha(x+\lambda y)-\frac{1}{\alpha(x+\lambda y)}\right),\quad |z|>1. \tag{40}$$

Отметим, что $\beta(x+\lambda y)$—аналитическая функция относительно $x+\lambda y$ при $|z|>1$.

Обозначим

$$\gamma(z)=y-\beta(x+\lambda y),\quad z=x+iy. \tag{41}$$

Ясно, что

$$\gamma(z)=0\ \text{на}\ |z|=1, \tag{42}$$

$$|\gamma(z)|\leqslant \text{const}\cdot(|z|^2-1),\quad |t-\alpha(x+\lambda y)|\geqslant \text{const}\cdot|t-z|. \tag{43}$$

Из (41) имеем

$$y=\beta(x+\lambda y)+\gamma(z). \tag{44}$$

Подставим значение y из (44) в формулу (32), получим

$$U(z)=\operatorname{Re}\sum_{r=1}^{n}\delta_r\left[\omega_r(x+\lambda y)+\sum_{p=1}^{r-1}\frac{(\beta(x+\lambda y)+\gamma(z))^p}{p!}\,\omega^{(p)}_{r-p}(x+\lambda y)\right]+a. \tag{45}$$

Обозначим

$$\beta\overset{\text{def}}{=}\beta(x+\lambda y)\ \text{и}\ \gamma\overset{\text{def}}{=}\gamma(z). \tag{46}$$

Ясно, что

$$\frac{(\beta+\gamma)^p}{p!}=\frac{\beta^p}{p!}+\frac{\beta^{p-1}\cdot\gamma}{(p-1)!}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{\beta^{p-2}\cdot\gamma^2}{(p-2)!}+\cdots+\frac{\gamma^p}{p!}. \tag{47}$$

Имея в виду (47), представим формулу (45) в виде

$$U(z)=\operatorname{Re}\sum_{r=1}^{n}\delta_r\left[\left(\omega_r(x+\lambda y)+\sum_{p=1}^{r-1}\frac{\beta^p}{p!}\,\omega^{(p)}_{r-p}(x+\lambda y)\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{r-1}\frac{\gamma^j}{j!}\sum_{p=j}^{r-1}\frac{\beta^{p-j}}{(p-j)!}\,\omega^{(p)}_{r-p}(x+\lambda y)\right]+a. \tag{48}$$

Сделаем замену функций $\omega_1(x+\lambda y),\cdots,\omega_n(x+\lambda y)$ на функции $\psi_1(x+\lambda y),\cdots,\psi_n(x+\lambda y)$ по формуле

$$\psi_1(x+\lambda y)=\omega_1(x+\lambda y) \tag{49}$$

$$\psi_r(x+\lambda y)=\omega_r(x+\lambda y)+\sum_{p=1}^{r-1}\frac{\beta^p}{p!}\,\omega^{(p)}_{r-p}(x+\lambda y), \tag{50}$$

где $r=2,\cdots,n$.

Обозначим

$$\Phi_{jr}(x+\lambda y)=\sum_{p=j}^{r-1}\frac{\beta^{p-j}}{(p-j)!}\cdot\omega_{r-p}^{(p)}(x+\lambda y),\tag{51}$$

где $j=0,\cdots,n-1;\ r=1,\cdots,n;\ j<r$.

В такой форме записи функции $\Phi_{01}(x+\lambda y),\cdots,\Phi_{0n}(x+\lambda y)$ совпадают с функциями $\psi_1(x+\lambda y),\cdots,\psi_n(x+\lambda y)$. Имеет место следующая

Лемма 1. *При замене в выражении* (50) *функциями* (51), *функции* $\Phi_{j,r}(x+\lambda y)$, $(j<r,\ r\leqslant n)$, *линейно выражаются (с гладкими ограниченными коэффициентами) через функции* $\psi_m^{(l)}(x+\lambda y)$, *где* $m=1,\cdots,n;\ l=0,\cdots,j$.

Докажем это утверждение по индукции. Пусть утверждение верно для функций $\Phi_{k,r}(x+\lambda y)$, где k фиксировано, а $r=k+1,\cdots,n$.

Докажем, что оно верно и для функций $\Phi_{k+1,r}(x+\lambda y)$, где $r=k+2,\cdots,n$.

Преобразуем функции $\Phi_{k+1,r}(x+\lambda y)$ следующим образом:

$$\Phi_{k+1,r}(x+\lambda y)\equiv\sum_{p=k+1}^{r-1}\frac{\beta^{p-k-1}}{(p-k-1)!}\cdot\omega_{r-p}^{(p)}(x+\lambda y)=$$

$$=\Bigg(\omega_{r-k-1}^{(k)}(x+\lambda y)+\frac{\beta}{1!}\omega_{r-k-2}^{(k+1)}(x+\lambda y)+\cdots+\frac{\beta^{r-k-2}}{(r-k-2)!}\times$$

$$\times\omega_1^{(r-2)}(x+\lambda y)\Bigg)'-\beta'\Bigg(\omega_{r-k-2}^{(k+1)}(x+\lambda y)+\cdots+$$

$$+\frac{\beta^{r-k-3}}{(r-k-3)!}\omega_1^{(r-2)}(x+\lambda y)\Bigg).\tag{52}$$

Из формулы (52) следует, что

$$\Phi_{k+1,r}(x+\lambda y)=\Phi_{k,r-1}'(x+\lambda y)-\beta'\,\Phi_{k+1,r-1}(x+\lambda y),\tag{53}$$

где $r=k+2,\cdots,n$ и производные всюду берутся по переменной $\xi=x+\lambda y$.

Из рекуррентной формулы (53) следует, что функции $\Phi_{k+1,r}(x+\lambda y)$ выражаются через функции $\Phi_{k,r+2}'(x+\lambda y),\cdots,\Phi_{k,r-1}'(x+\lambda y)$ следующим образом:

$$\Phi_{k+1,r}(x+\lambda y)=\sum_{j=k+2}^{r-1}\alpha_k(x+\lambda y)\cdot\Phi_{kj}'(x+\lambda y)+\alpha_0(x+\lambda y)\times$$

$$\times\Phi_{k+1,k+2}(x+\lambda y),\tag{54}$$

где $\alpha_k(x+\lambda y)$ — бесконечно дифференцируемые, ограниченные функции, являющиеся некоторыми степенями от функций $-\beta'(x+\lambda y)$.

Ясно, что

$$\Phi_{l,j+1}(x+\lambda y)=\omega_1^{(j)}(x+\lambda y)\equiv\psi_1^{(j)}(x+\lambda y),\tag{55}$$

где $j=0,\cdots,n-1$.

Следовательно, утверждение верно и для функций $\Phi_{k+1,\,r}(x+\lambda y)$. Утверждение для $j=0$ верно, так как функции $\Phi_{01}(x+\lambda y),\cdots,\Phi_{0n}(x+\lambda y)$ совпадают с функциями $\psi_1(x+\lambda y),\cdots,\psi_n(x+\lambda y)$, следовательно по индукции оно верно при любом $k<n$. Следовательно, функции $\Phi_{kr}(x+\lambda y)$ выражаются линейной комбинацией, с гладкими ограниченными коэффициентами, через производные от функций $\psi_1(x+\lambda y),\cdots$ $\cdots,\psi_n(x+\lambda y)$ до порядка k.

Итак, лемма 1 доказана.

Учитывая лемму 1 сделаем в формуле (48) замену (50) и представим общее решение $U(z)$ в виде

$$U(z)=\operatorname{Re}\sum_{r=1}^{n}\delta_r\left[\psi_r(x+\lambda y)+\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{j}\sum_{l=1}^{r-1}\frac{\gamma^j(z)}{j!}\,a_{jrlk}(z)\,\psi_l^{(k)}(x+\lambda y)\right]+\alpha, \tag{56}$$

где $\psi_r(x+\lambda y)$ — произвольные аналитические функции относительно аргумента $x+\lambda y$, исчезающие в бесконечности, $a_{jrlk}(z)$ — некоторые ограниченные бесконечно дифференцируемые функции, а $\gamma(z)$ определяется формулой (41).

Первоначально предположим, что функции $\psi_r(x+\lambda y)$ и граничная функция $f(z)$ бесконечно дифференцируемы, соответственно в $D^+ +\Gamma$ и на Γ. Используя граничное условие (2) и (42) из формулы (56) получим

$$\operatorname{Re}\sum_{r=1}^{n}\delta_r\,\psi_r(x+\lambda y)+\alpha=f(z),\ \ |z|=1. \tag{57}$$

Далее, из (57), аналогично случаю простых корней, имеем

$$\sum_{r=1}^{n}\delta_r\,\psi_r\left(zd+\frac{\mu d}{z}\right)+\alpha=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(t+z)\,f(t)}{(t-z)\cdot t}\,dt+iC. \tag{58}$$

Как и в случае простых корней из формул (12) и (13) при $\mu_j=\mu$ аналогично имеем

$$\psi_r\left(\left(z+\frac{\mu}{z}\right)d\right)=-\frac{\alpha_r}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}, \tag{59}$$

где α_r есть r-ая строка матрицы δ^{-1}.

Положив $\left(z+\dfrac{\mu}{z}\right)d=\theta$ из (59) получим

$$\psi_r(\theta)=-\frac{\alpha_r}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-\alpha(\theta)}, \tag{60}$$

где $\alpha(\theta)$ определяется формулой (39).

Используя (12) и (60), из формулы (56) имеем

$$U(z)=-\operatorname{Re}\sum_{r=1}^{n}\delta_r\left[\frac{\alpha_r}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-\alpha(x+\lambda y)}+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{j}\sum_{'=1}^{r-1}\frac{a_r}{j!}\,a_{jrek}(z)\cdot\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\gamma^k(z)\,f(t)\,dt}{[t-\alpha\,(x+\lambda y)]^{k+1}}\Bigg]+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t}\cdot \tag{61}$$

Тот факт, что вектор-функция $U(z)$, заданная формулой (61), является решением задачи (1)—(2), когда $f(t)$ непрерывная функция, доказывается аналогично случаю простых корней. Следовательно, функция $U(z)$, заданная формулой (61), является решением задачи (1)—(2) в случае кратных корней в классе непрерывных функций.

Следуя (39), (40) и (41) положим

$$\alpha_j(\tau)=\frac{\tau+\sqrt{\tau^2-4d_j^2\mu_j}}{2d_j};\ \beta_j(x+\lambda_j y)=\frac{1}{2i}\Bigg(\alpha_j(x+\lambda_j y)-$$

$$-\frac{1}{\alpha_j(x+\lambda_j y)}\Bigg),\ |z|>1,$$

$$\gamma_j(z)=y-\beta_j(x+\lambda y),\ \text{где}\ \mu_j=\frac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j},\ d_j=\frac{1-\lambda_j\cdot i}{2},\ z=x+iy. \tag{62}$$

В общем случае, делая в (31) замену функций $\omega_{jr}(x+\lambda_j y)$ на функции $\psi_{jr}(x+\lambda_j y)$ по формуле

$$\omega_{jr}(x+\lambda_j y)+\sum_{p=1}^{r-1}\beta_{jr}^{(p)}\gamma_j^p(z)\,\omega_{j,r-p}^{(p)}(x+\lambda_j y)=\psi_{jr}(x+\lambda_j y), \tag{63}$$

где $j=1,\cdots,\nu_0$; $r=1,\cdots,k_j$ — задача (1)—(2) исследуется аналогично случаю $\nu_0=1$ и доказывается справедливость теоремы 1.

Докажем единственность решения задачи (1)—(2). Для этого достаточно показать, что однородная задача (1)—(2) имеет только нулевое решение, а именно при $f(z)=0$, $U(z)\equiv 0$.

Пусть $U(z)$ удовлетворяет системе (1) и граничному условию

$$U(z)=0\ \text{при}\ |z|=1, \tag{64}$$

которое понимается в смысле (3).

Рассмотрим вектор-функцию

$$V_h(z)=U(hz)\ \text{при}\ h>1. \tag{65}$$

Вектор-функция $V_h(z)$ в области $|z|\geqslant 1$ имеет ограниченные производные, удовлетворяет системе (1) и граничному условию

$$V_h(z)=U(hz)\ \text{при}\ |z|=1. \tag{66}$$

Тогда $V_h(z)$ через свое граничное условие определяется единственным образом некоторой формулой (см.[4])

$$V_h(z)=\int_{|t|=1}K(z,t)\,U(ht)\,dt, \tag{67}$$

где $K(z,t)$—непрерывная функция по t и z при $t\neq z$ и не зависит от граничного условия. Переходя в (67) к пределу при $h\to 1$ и имея в виду (64) и (65), получим, что $U(z)\equiv 0$ при $|z|>1$.

Тем самым единственность доказана, а вместе с ней и полностью теорема 1. Если же нарушается условие Лопатинского, то в работе (см. [4]) показано, что однородная задача (1)—(2) имеет бесконечное число линейно независимых решений.

Замечание. Скажем, что $f(t)$ имеет в граничной точке t_0 слабую особенность, если в окрестности этой точки имеет место оценка

$$|f(t)| \leqslant \frac{\text{const}}{|t-t_0|^\alpha}, \text{ где } 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{68}$$

Аналогично доказывается справедливость теоремы 1 и формулы решения задачи (1)—(2), если граничная функция $f(t)$ имеет в конечном числе точек границы слабую особенность.

Тогда допускается, чтобы решение $U(z)$ в этих точках также имело бы слабую особенность.

Теперь рассмотрим задачу (1)—(2), когда $f(t) \in L_1(\Gamma)$ в смысле определения (4).

§ 2. Решение задачи (1)—(2) в случае, когда граничная функция $f(t)$ принадлежит $L_1(\Gamma)$

Пусть $f(t) \in L_1(\Gamma)$ и характеристическое уравнение (5) имеет только простые корни.

Докажем, что вектор-функция $U(z)$, определенная формулой (19), также является решением задачи (1)—(2) в этом случае, где граничное условие (2) понимается в смысле определения (4).

Из формулы (19) имеем

$$U(Rz) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t+Rz)f(t)\,dt}{(t-Rz)\cdot t}\right) + $$

$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta_j a_j}{\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{1}{t-\beta_j(Rz+\mu_j R\bar z)} - \frac{1}{t-Rz}\right)f(t)\,dt. \tag{69}$$

В силу теоремы Коши

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta_j a_j}{\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{1}{t-\beta_j(Rz+\mu_j R\bar z)} - \frac{1}{t-Rz}\right)f(z)\,dt = 0. \tag{70}$$

Ясно также, что

$$f(z) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t+Rz)f(z)}{(t-Rz)\cdot t}dt\right). \tag{71}$$

Используя (70) и (71), из (69) получим

$$U(Rz) - f(z) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(f(t)-f(z))(t+Rz)\,dt}{(t-Rz)\,t} + \right.$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\frac{\alpha_j}{\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{t-\beta_j(Rz+\mu_j R\bar{z})}-\frac{1}{t-Rz}\right)(f(t)-f(z))\,dt. \tag{72}$$

Из (72) имеем

$$U(Rz)-f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{R^2|z|^2-1}{|t-Rz|^2}(f(t)-f(z))\,d\varphi+$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta_j\alpha_j}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\beta_j(Rz+\mu_j R\bar{z})-Rz)(f(t)-f(z))}{(t-Rz)(t-\beta_j(Rz+\mu_j R\bar{z}))}\,dt, \tag{73}$$

Из (23) и (24) следует, что

$$|\beta_j(Rz+\mu_j R\bar{z})-Rz|\leqslant \mathrm{const}\cdot(R^2-1)\ \text{при}\ |z|=1 \tag{74}$$

и

$$|t-\beta_j(Rz+\mu_j R\bar{z})|\geqslant \mathrm{const}\cdot|t-Rz|\ \text{при}\ |t|=1. \tag{75}$$

Используя оценки (74) и (75), из (73) получим

$$|U(Rz)-f(z)|\leqslant C\int_0^{2\pi}\frac{R^2-1}{|t-Rz|^2}|f(t)-f(z)|\,d\varphi, \tag{76}$$

при $|z|=1$ и $t=e^{i\varphi}$, где C — некоторая постоянная. Пусть $z=e^{i\psi}$. Сделаем в (76) замену переменной, положим

$$\varphi=\psi+\theta. \tag{77}$$

Тогда из (76) получим

$$|U(Rz)-f(z)|\leqslant C\int_0^{2\pi}\frac{R^2-1}{|\zeta-R|^2}|f(z\zeta)-f(z)|\,d\theta, \tag{78}$$

где $\zeta=e^{i\theta}$.

Используя (78), имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}|U(Rz)-f(z)|\,d\psi\leqslant C\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^2-1}{|\zeta-R|^2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(z\zeta)-f(z)|\,d\psi\right)d\theta, \tag{79}$$

где $z=e^{i\psi}$, $\zeta=e^{i\theta}$.

Так как $f(z)\in L_1(\Gamma)$, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое число $\delta>0$, что если $|\theta|\leqslant\delta$ и ($\zeta=e^{i\theta}$), то (см. [5])

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(z\zeta)-f(z)|\,d\psi<\varepsilon. \tag{80}$$

С другой стороны мы имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-1}{|\zeta-R|^2}\,d\theta=1,\ \zeta=e^{i\theta}. \tag{81}$$

Представим выражение (79) следующим образом:

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^2-1}{|\zeta-R|^2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(z\zeta)-f(z)|\,d\psi\right)d\theta=$$

$$=\int_{-\delta}^{\delta}\left(\frac{R^2-1}{|\zeta-R|^2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(z\zeta)-f(z)|\,d\psi\right)d\theta+$$

$$+\int_{\delta<|\theta|<\pi}\left(\frac{R^2-1}{|\zeta-R|^2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(z\zeta)-f(z)|\,d\psi\right)d\theta=J_1(R)+J_2(R). \quad (82)$$

Ясно, что при фиксированном δ интеграл $J_2(R)\to 0$ при $R\to 1$. Поэтому для $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta_1>0$, что

$$|J_2(R)|<\varepsilon \text{ при } |R-1|<\delta_1. \quad (83)$$

Из неравенства (80) и равенства (81) следует, что

$$|J_1(R)|<2\pi\varepsilon. \quad (84)$$

Итак, из (79), (83) и (84) вытекает (4).

Следовательно, утверждение о том, что вектор-функция $U(z)$, определенная формулой (19), является решением задачи (1)—(2) при $f(t)\in \in L_1(\Gamma)$, доказано.

Аналогично доказывается, что формула (61) при $f(t)\in L_1(\Gamma)$ является решением задачи (1)—(2) в общем случае.

Единственность решения задачи при $f(t)\in L_1(\Gamma)$ доказывается аналогично § 1, только с учетом того, что граничное условие (64) понимается в смысле (4).

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 15.IV.1978

Է. Գ. ՄԵԼԻՔՍԵԹՅԱՆ. Դիրիխլեի խնդիրը էլիպտական սիստեմի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար որոշ, $|z|>1$ տիրույթում *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը. գտնել $|z|>1$ տիրույթում

$$AU_{xx}+BU_{xy}+CU_{yy}=0 \quad (1)$$

էլիպտական սիստեմի երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի լուծումը, որը բավարարում է

$$U(x, y)|_\Gamma=f(x, y), \ \{\Gamma: |z|=1\} \quad (2)$$

եզրային պայմանին։

Խնդիր (1)—(2)-ը դիտարկվում է, երբ $f(x, y)\in C$ և $f(x, y)\in L_1(\Gamma)$ ։ Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը։

Եթե Դիրիխլեի խնդիրը (1) սիստեմի համար բավարարում է Լոպատինսկու պայմանին, ապա (1)—(2) խնդիրը ունի լուծում և այդ լուծումը միակն է։ Ստացված է լուծման բանաձևը։

E. P. MELIKSETIAN. *On Dirichlet problem for second order elliptical systems of differential equations in the unit disk* (summary)

In the article the following problem is considered. In the unit disk $|z| > 1$ find the solution of the system

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0 \tag{1}$$

satisfying the boundary condition

$$U(x, y)|_\Gamma = f(x, y), \ \{\Gamma: |z| = 1\} \tag{2}$$

where the vector function $f(x, y) \in L_1(\Gamma)$ and $f(x, y) \in C$.

Theorem: if the Lopatinsky conditions are satisfied then the Dirichlet problem has a unique solution. A formula for solution is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Г. Петровский.* Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, М., 1961.
2. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., «Наука», 1966.
3. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1973.
4. *Н. Е. Товмасян.* Об одном методе решения дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сб., 89 (131), № 4 (12), 1972.
5. *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1976.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 5, 1980 Математика

Э. А. МИРЗАХАНЯН

О СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ ПОДМНОЖЕСТВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

В этой статье проводится дальнейшее изучение введенного В. Г. Болтянским класса K_0 непрерывных отображений $f\colon M \to H$ подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства H. Определение и доказательства основных свойств класса K_0 содержатся в [1].

Приведем определение этого класса. Пусть G — открытое подмножество пространства H и $f\colon G \to H$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f принадлежит классу K_0, если оно обладает следующим свойством: для любой точки $x_0 \in G$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такая окрестность $U \subset G$ точки x_0 в H и такие действительные числа λ и $\delta > 0$ $(0 < \delta < \pi/2)$, что если $x, y \in U$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\pi/_2$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|.$$

Пусть теперь M — произвольное бесконечномерное подмножество пространства H. Мы будем говорить, что непрерывное отображение $f\colon M \to H$ принадлежит классу K_0, если существует открытое в H множество $G \supset M$ и непрерывное отображение $g\colon G \to H$, которое принадлежит классу K_0 и совпадает на M с отображением f. Фигурирующее в приведенном выше определении действительное число можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой x_0 и было пригодно для любого числа $\varepsilon > 0$. В этом случае число λ однозначно определяется точкой $x_0 \in G$. Получающаяся таким образом действительная функция $\lambda(x) = \lambda_f(x)$, заданная на G, непрерывна; она называется терминальной производной отображения f. Одним из важных свойств отображений $f\colon M \to H$, принадлежащих классу K_0, является локальное выполнение условия Липшица: для всякой точки $x_0 \in M$ существуют такие числа $r > 0$ и $c > 0$, что при $x, y \in M$, $\|x - x_0\| < r$, $\|y - x_0\| < r$ выполнено соотношение $\|f(x) - f(y)\| \leqslant c\,\|x - y\|$.

Лемма. *Пусть G — открытое подмножество пространства H, а $f\colon G \to H$ — отображение, принадлежащее классу K_0. Если точка $x_0 \in G$ обладает такой окрестностью $U_0 \subset G$, что $f(U_0) \subset X$, где множество X конечномерно или локально компактно, то терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f в точке x_0 равна нулю.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda_f(x_0) \neq 0$, и выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось соотношение $\varepsilon < |\lambda_f(x_0)|$. Так как f принадлежит классу K_0, то существуют такое конечномерное подпространствво $L \subset H$ и такая окрестность $U \subset G$ точки x_0, что если $x, y \in U$, $x - y \perp L$, то выполняется соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon \|x-y\|.$$

Из этого соотношения вытекает, что

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x-y) + \lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \|f(x) - f(y) - \\ - \lambda_f(x_0)(x-y)\| + \|\lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon\|x-y\| + |\lambda_f(x_0)|\,\|(x-y)\| = \\ = (\varepsilon + |\lambda_f(x_0|)\,\|x-y\|.$$

С другой стороны

$$\|\lambda_f(x_0)(x-y)\| = \|f(x) - f(y) - (f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x-y))\| \leqslant \\ \leqslant \|f(x) - f(y)\| + \|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \|f(x) - \\ - f(y)\| + \varepsilon\|x-y\|,$$

и потому

$$\|f(x) - f(y)\| \geqslant |\lambda_f(x_0)|\,\|(x-y)\| - \varepsilon\|x-y\| = (|\lambda_f(x_0)| - \varepsilon)\|x-y\|.$$

Итак, при $x, y \in U$, $x - y \perp L$ справедливы неравенства

$$(|\lambda_f(x_0)| - \varepsilon)\|x-y\| \leqslant \|f(x) - f(y)\| \leqslant (|\lambda_f(x_0)| + \varepsilon)\|x-y\|. \qquad (*)$$

Положим $V = U_0 \cap U$, тогда V является окрестностью точки x_0 в H и $f(V) \subset X$, причем если $x, y \in V$, $x - y \perp L$, то выполнены неравенства (*). Таким образом, если через H^* обозначать плоскость, проходящую через точку x_0 и параллельную ортогональному дополнению подпространства L, то отображение f будет отображать множество $W = V \cap H^*$ гомеморфно на некоторое подмножество множества X.

В частности, если B—шар в плоскости H^*, имеюший центр x_0 и такой радиус r, что $B \subset W$, то f гомеоморфно отображает шар B на подмножество $f(B) \subset X$. Иными словами, множество X содержит подмножество, гомеморфное шару конечного дефекта, что однако невозможно, если множество X конечномерно или если оно локально компактно. Полученное противоречие показывает, что $\lambda_f(x_0) = 0$. Итак лемма полностью доказана.

Из доказанной леммы непосредственно следует, что если G — открытое подмножество пространства H, f: $G \to X$—отображение класса K_0 и множество X конечномерно или локально компактно, то терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f тождественно равна нулю на множестве G.

Следствие 1. *Если G открыто в H и отображение $f: G \to H$, принадлежащее классу K_0, является вполне непрерывным или локально конечномерным, то терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f тождественно равна нулю на G.*

В самом деле, если отображение f вполне непрерывно, то для каждой точки $x_0 \in G$ существует такая шаровая окрестность $U \subset G$, что $f(U)$ содержится в компактном множестве, если же f—локально конечномерно, то для каждой точки $x_0 \in G$ существует такая окрестность $U \subset G$, что $f(U)$ конечномерно.

Следствие 2. *Пусть $f: M \to H$ — отображение, принадлежащее классу K_0, а $x_0 \in M$ — точка, обладающая такой окрестностью $U_0 \subset M$, относительно H, что $f(U_0) \subset X$, где множество X конечномерно или локально компактно. Тогда терминальная производная $\lambda_f(x)$ равна нулю в x_0.*

В самом деле, пусть $g: G \to H$ — отображение, принадлежащее классу K_0 и являющееся продолжением отображения f на открытое в H множество G. Поскольку $g(U_0) \subset X$, то, согласно доказанной лемме, $\lambda_g(x_0) = 0$ и потому $\lambda_f(x_0) = \lambda_g(x_0) = 0$.

Замечание. Утверждение доказанной леммы остается справедливым, если открытое в H множество G заменить открытым подмножеством подпространства $H' \subset H$, имеющего конечный дефект. Аналогичным образом, утверждение следствия 2 остается справедливым, если считать M множеством, лежащим в подпространстве H' конечного дефекта, а окрестность $U_0 \subset M$ точки x_0 рассматривать относительно H'.

Предложение 1. *Пусть $p: H \to M$ — ортогональный проектор пространства H на его замкнутое подпространство M. Отображение p принадлежит классу K_0 тогда и только тогда, когда подпространство M конечномерно или является подпространством конечного дефекта.*

Доказательство. Предположим, что M — конечномерное подпространство; из соотношения $\|p(x) - p(y)\| \leqslant \|x - y\|$ следует, что отображение p удовлетворяет условию Липшица на H, поэтому для доказательства принадлежности отображения p к классу K_0 достаточно, согласно [1], показать, что для любой точки $x_0 \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такая окрестность $U \subset H$ точки x_0 и такое число λ, что если $x, y \in U$ и $x - y \perp L$, то выполнено соотношение $\|p(x) - p(y) - \lambda(x - y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|$. Ясно, что если за U возьмем произвольную окрестность точки x_0 в H и положим $L = M$, $\lambda = 0$, то при $x, y \in U$, $x - y \perp L$ будем иметь $\|p(x) - p(y) - \lambda(x - y)\| = \|p(x - y)\| = \|0\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|$. Таким образом, если M — конечномерное подпространство, то отображение p принадлежит классу K_0 (причем, согласно лемме, производная $\lambda_p(x)$ тождественно равна нулю на H.

Предположим теперь, что M является подпространством конечного дефекта. Как и в предыдущем случае заключаем, что отображение p удовлетворяет условию Липшица на H. Пусть $x_0 \in H$, а $\varepsilon > 0$ произвольное; пусть, далее, U — произвольная окрестность точки x_0

в H; обозначим через L ортогональное дополнение подпространства M в H и положим $\lambda=1$. Тогда, если $x, y\in U$, $x-y\perp L$, будем иметь $\|p(x)-p(y)-\lambda(x-y)\|=\|(x-y)-(x-y)\|=\|0\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|$. Итак, отображение p принадлежит классу K_0 и его терминальная производная $\lambda_p(x)$ тождественно равна 1 на H.

Пусть, наконец, M является бесконечномерным подпространством бесконечного дефекта и пусть N его ортогональное дополнение в H, а $q: H\to N$ — ортогональное проектирование на N. Предположим, что $p\in K_0$. Возьмем произвольную точку $x_0\in H$ и положим $\varepsilon=\frac{1}{3}$. Тогда существует такое конечномерное подпространство $L\subset H$ и такая окрестность U точки x_0 в H, что если $x, y\in U$ и $x-y\perp L$, то

$$\|p(x)-p(y)-\lambda(x_0)(x-y)\|<\varepsilon\|x-y\|. \tag{**}$$

Положим теперь $L_1=p(L)$, $L_2=q(L)$. Легко видеть, что если вектор e ортогонален каждому из подпространств L_1, L_2, то он ортогонален и подпространству L. В самом деле, если вектор f принадлежит L, то $f=p(f)+q(f)$; при этом $e\perp p(f)$ (поскольку $p(f)\in L_1$, а $e\perp L_1$), т. е. $e\cdot p(f)=0$ и, точно так же, $e\cdot q(f)=0$; следовательно, $e\cdot f=0$, т. е. вектор e ортогонален каждому вектору $f\in L$ и потому $e\perp L$.

Пусть теперь $e_1\neq 0$ — вектор, принадлежащий подпространству M и ортогональный подпространству L_1 (такой вектор существует, поскольку подпространство M бесконечномерно, а L_1 конечномерно). Пусть, аналогично, $e_2\neq 0$ — вектор, принадлежащий подпространству M и ортогональный подпространству L_2. Так как $e_1\in M$, то $e_1\perp N$ и, в частности, $e_1\perp L_2$ (поскольку $L_2\subset N$). Следовательно, вектор e_1 ортогонален каждому из подпространств L_1, L_2 и потому $e_1\perp L$. Точно так же $e_2\perp L$. Мы можем при этом предполагать длины векторов e_1, e_2 настолько малыми, что точка $x'=x_0+e_1$, $x''=x_0+e_2$ принадлежат окрестности U. Ясно, что $p(x')-p(x_0)=p(x_0+e_1)-p(x_0)=p(x_0)+e_1-p(x_0)=e_1$; $p(x'')-p(x_0)=p(x_0+e_2)-p(x_0)=p_0(x_0)-p(x_0)=0$.

Применяя соотношение (**) к точкам $x=x'$, $y=x_0$, получаем

$$\|p(x')-p(x_0)-\lambda(x_0)(x'-x_0)\|\leqslant\varepsilon\|x'-x_0\|,$$

т. е. $\|e_1-\lambda(x_0)e_1\|\leqslant\varepsilon\|e_1\|$, и потому $|1-\lambda(x_0)|\leqslant\frac{1}{3}$ $\left(\text{поскольку } \varepsilon=\frac{1}{3}\right)$.

С другой стороны, применяя соотношение (**) к точкам $x=x''$, $y=x_0$, получаем

$$\|p(x'')-p(x_0)-\lambda(x_0)(x''-x_0)\|\leqslant\varepsilon\|x''-x_0\|,$$

т. е. $\|\lambda(x_0)e_2\|\leqslant\varepsilon\|e_2\|$, и потому $|\lambda(x_0)|\leqslant\frac{1}{3}$.

Теперь получаем

$$1=|(1-\lambda(x_0))+\lambda(x_0)|\leqslant|1-\lambda(x_0)|+|\lambda(x_0)|\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

что противоречиво. Полученное противоречие показывает, что отображение p в рассмотренном случае не может принадлежать классу K_0.

Предложение 2. *Два замкнутых шара B_1 и B_2 одного и того же конечного дефекта q гильбертова пространства H гомеоморфны между собой в классе K_0.*

Доказательство. Обозначим через H_i несущую плоскость шара B_i, а через O_i — его центр, $i=1, 2$. Рассмотрим параллельный перенос $\varphi: H\to H$ на вектор $a=O_2-O_1$ и положим $H_1^*=\varphi(H_1)$ и $B_1^*=\varphi(B_1)$. Тогда B_1^* есть шар с центром O_2, имеющий H_1^* своей несущей плоскостью. Пусть $H_3=H_1^*\cap H_2$; ясно, что подпространство H_3 имеет в каждом из подпространств H_1^*, H_2 один и тот же конечный дефект $s\geqslant 0$, и потому в H оно имеет дефект $q+s$. При $s=0$ плоскости H_1^* и H_2 совпадают, а шары B_1^* и B_2 являются концентричными с общим центром O_2. Рассмотрим гомотетию ψ в плоскости H_2 с центром в точке O_2 и коэффициентом $\lambda=\frac{r_2}{r_1}$, где r_1 и r_2 — радиусы шаров B_1 и B_2 соответственно. Отображения φ и ψ принадлежат классу K_0 и отображение $f=\psi\circ\varphi$ является искомым: оно принадлежит классу K_0 и гомеоморфно отображает шар B_1 на B_2.

Пусть теперь $s>0$. Тогда H_3 является собственным подпространством пространств H_1^* и H_2. Выберем произвольный ортонормированный базис $\{a_1, a_2,\cdots, a_n,\cdots\}$ пространства H_3 и дополним его до ортонормированного базиса $\{b_1, b_2,\cdots, b_s, a_1, a_2,\cdots\}$ пространства H_1^* и до ортонормированного базиса $\{b_1', b_2',\cdots, b_s', a_1, a_2,\cdots, a_n,\cdots\}$ подпространства H_2. Далее, базис $\{b_1, b_2,\cdots, b_s, a_1, a_2,\cdots\}$ пространства H дополним до ортонормированного базиса $\{c_1,\cdots, c_q, b_1,\cdots, b_s, a_1, a_2,\cdots\}$ всего пространства H, а базис $\{b_1',\cdots,b_s', a_1,\cdots\}$ пространства H_2 дополним до ортонормированного базиса $\{c_1',\cdots, c_q', b_1',\cdots, b_s', a_1,\cdots\}$ всего пространства H. Пусть $g: H\to H$ — линейное отображение, определяемое соотношениями

$$\begin{cases} g(c_i)=c_i', & i=1, 2,\cdots, q\\ g(b_j)=b_j', & j=1, 2,\cdots, s\\ g(a_k)=a_k, & k=1, 2,\cdots. \end{cases}$$

Отображение g принадлежит классу K_0 и отображение $f=\psi\circ g\circ\varphi$ является искомым (т. е. оно гомеоморфно отображает шар B_1 на B_2), чем и завершается доказательство.

Из доказанного предложения непосредственно следует, что два открытых шара, (а также две сферы), имеющих один и тот же конечный дефект в H, гомеоморфны друг другу в классе K_0.

Ниже приводятся два утверждения о принадлежности композиции двух отображений к классу K_0.

Предложение 3. *Пусть G и G' — открытые подмножества пространства H, $f: G \to G'$ — отображение, принадлежащее классу K_0, терминальная производная $\lambda_f(x)$ которого всюду на G равна нулю, а $g: G' \to H$ — отображение, локально удовлетворяющее на G' условию Липшица. Тогда композиция $h = g \circ f: G \to H$ принадлежит классу K_0 и терминальная производная $\lambda_h(x)$ всюду на G равна нулю.*

Доказательство. Пусть выбраны произвольная точка x_0 множества G и произвольное положительное число ε. По предположению существуют такая окрестность $V \subset G'$ точки $y_0 = f(x_0)$ и такое число $c > 0$, что для любых точек y_1, y_2 из V имеет место соотношение

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leqslant c\|y_1 - y_2\|.$$

В силу непрерывности отображения f существует такая окрестность $U_0 \subset G$ точки x_0, что $f(U_0) \subset V$. Поскольку $f \in K_0$, то существуют такая окрестность $U \subset G$ точки x_0, такое конечномерное подпространство $L \subset H$ и такое число $\delta > 0 \left(\delta < \frac{\pi}{2}\right)$, что если x, $y \in U$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, то

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x-y)\| = \|f(x) - f(y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{c}\|x - y\|.$$

Положим $W = U \cap U_0$ и пусть x, $y \in W$ — такие точки, что угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$. Тогда будем иметь

$$\|h(x) - h(y) - 0\cdot(x - y)\| = \|g(f(x)) - g(f(y))\| \leqslant$$

$$\leqslant c\|f(x) - f(y)\| \leqslant c\cdot\frac{\varepsilon}{c}\|x - y\| = \varepsilon\|x - y\|.$$

Итак, отображение h принадлежит классу K_0 и терминальная производная $\lambda_h(x)$ всюду на G равна нулю.

Следствие 3. *Если f — линейный вполне непрерывный оператор, а g — линейный ограниченный оператор, то композиция $h = g \circ f$ принадлежит классу K_0 и $\lambda_h(x) \equiv 0$ на H.*

В самом деле, $f \in K_0$ и $\lambda_f(x) \equiv 0$ на G, а оператор g удовлетворяет условию Липшица на H.

Замечание. В предложении 3 условие $\lambda_f(x)\equiv 0$ на G существенно, т. е. из того, что отображение $f: G\to G'$ (где G, G' — открытые в H множества) принадлежит классу K_0, а $g: G'\to H$ локально удовлетворяет условию Липшица, вообще говоря (без наложения требования $\lambda_f(x)\equiv 0$), не вытекает, что $g\circ f\in K_0$. В самом деле, пусть f — тождественное отображение пространства H (так что $f\in K_0$ и $\lambda_f(x)\equiv 1$, т. е. условие $\lambda_f(x)\equiv 0$ не выполнено). Далее, пусть $g: H\to H$ — ортогональное проектирование на некоторое бесконечномерное замкнутое подпространство M, имеющее бесконечный дефект в H (так что g удовлетворяет условию Липшица). Тогда отображение $h=g\circ f=g$ не принадлежит классу K_0 (см. предлож. 1).

Автору неизвестно, будет ли композиция $f\circ g$ отображений $g: G\to G'$ и $f: G'\to H$ принадлежать классу K_0, если (как и в предложении 3) f принадлежит классу K_0 и $\lambda_f(x)\equiv 0$, а отображение g локально удовлетворяет условию Липшица. Однако при наложении на g некоторых дополнительных условий включение $f\circ g\in K_0$ может быть доказано. В частности, нетрудно доказать, что справедливо следующее утверждение: если $f: G'\to H$ принадлежит классу K_0 и $\lambda_f(x)\equiv 0$, а отображение $g: G\to G'$ является ортогональным преобразованием, то отображение $f\circ g$ принадлежит классу K_0 и его терминальная производная тождественно равна нулю.

Автор выражает признательность В. Г. Болтянскому за сделанные им полезные замечания.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 6.VII.1979

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ. Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների արտապատկերումների մի դասի հատկությունների մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում տրվում է իրական սեպարաբել H *հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների Վ. Գ. Բոլտյանսկու կողմից մտցված* K_0 *դասի հետագա հետազոտումը։*

K_0 *դասի սահմանումը և մի շարք հիմնական հատկությունների ապացույցը պարունակվում են (I)-ում։*

Ներկա հոդվածում բերվում են այդ դասի մի քանի նոր հատկություններ։ Մասնավորապես, ապացուցվում է, որ H *տարածության մի* M *փակ ենթաբազմության վրա օրթոգոնալ պրոեկտման օպերատորը պատկանում է* K_0 *դասին այն և միայն այն դեպքում, երբ* M*-ը վերջավոր չափանի է կամ ունի վերջավոր դեֆեկտ* H *տարածությունում։*

E. A. MIRZAKHANIAN. *On some properties of a class of mappings of subsets of a Hilbert space* (summary)

The paper deals with the class K_0, introduced by V. G. Boltyanski, of continuous mappings of subsets of a real separable Hilbert space H. The definition of the class K_0 and its main properties can be found in (1). In the present paper some

other properties of this class are presented. Particularly, it is proved that an operator which carries out an orthogonal projection of the space H on its closed subspace M belongs to K_0 if and only if M is finite-dimensional or the defect of M in H is finite.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Болтянский*. Об одном классе отображений подмножеств гильбертова пространства, Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, IX, № 2, 1974, 107—120.
2. *Н. Бурбаки*. Топологические векторные пространства, ИИЛ, М., 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 5, 1980 Математика

Р. В. АКОПЯН

О РЕГУЛЯРНОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ J-НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В этой работе вводится спектральное разложение J-неотрицательного оператора и изучается регулярность его спектральной функции на бесконечности.

Пусть H—гильбертово пространство, в котором наряду с обычным скалярным произведением (f, g) $(f, g \in H)$ введено индефинитное скалярное произведение

$$[f, g] = (Jf, g), \quad J = P_+ - P_-,$$

где $P_\pm$ — взаимно дополнительные ортопроекторы в H.

Для любого линейного оператора A, действующего в плотной области определения $D(A)$, соответствующий J-сопряженный оператор однозначно определяется при помощи равенства (см. [1])

$$[Af, g] = [f, A^+ g], \quad f \in D(A).$$

Оператор A называется *J-самосопряженным*, если $A^+ = A$. В дальнейшем под *J-неотрицательным* оператором понимается J-самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию

$$[Af, f] \geq 0, \quad f \in D(A).$$

1°. Пусть A — J-неотрицательный оператор, имеющий хотя бы одну регулярную точку внутри верхней полуплоскости, тогда, как известно [1], все точки в верхней и нижней полуплоскости входят в резольвентное множество оператора A, кроме того оператор-функция

$$zR_z(A) = z(A - zI)^{-1}$$

является R-функцией, т. е.

$$\operatorname{Im}[zR_z(A)f, f] \geqslant 0$$

для $\operatorname{Im} z > 0$ и $f \in H$. Действительно

$$[z(A-zI)^{-1}f, f] - \overline{[z(A-zI)^{-1}f, f]} = [z(A-zI)^{-1}f, f] -$$

$$-[\bar{z}f, (A-zI)^{-1}f] = [z(A-zI)^{-1}f, f] - [\bar{z}(A-\bar{z}I)^{-1}f, f] =$$

$$= [(z-\bar{z})(A-zI)^{-1}A(A-\bar{z}I)^{-1}f, f] = (z-\bar{z})[A(A-\bar{z}I)^{-1}f,$$

$$(A-\bar{z}I)^{-1}f].$$

Поэтому имеет место представление [2]:

$$zR_z(A) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) dF(\lambda), \tag{1}$$

где α — ограниченный J-самосопряженный оператор, β — ограниченный J-неотрицательный оператор, а $[F(\lambda)f, f]$, $f \in H$ — неубывающая функция, такая что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d[F(\lambda)f, f]}{1+\lambda^2} < \infty.$$

Из представления (1) следует, что если провести простой замкнутый контур $\Gamma(\nu, \mu)$, где $0 < \nu < \mu$ или $\nu < \mu < 0$, пересекающий точки ν, μ под прямым углом, то сингулярный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\nu, \mu)} R_z(A)\, dz$$

существует.

Положим

$$E(\nu, \mu) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\nu, \mu)}' R_z(A)\, dz,$$

Легко подсчитать, что

$$E(\nu, \mu) = \int_{\nu}^{\mu}{}' \frac{dF(\lambda)}{\lambda}.$$

$E(\nu, \mu)$ будем называть спектральной мерой.

Если существуют пределы

$$s - \lim_{\substack{0<\nu<\mu \\ \mu \to +\infty}} E(\nu, \mu), \quad s - \lim_{\substack{\nu<\mu<0 \\ \nu \to -\infty}} E(\nu, \mu),$$

то спектральная мера $E(\nu, \mu)$ называется *регулярной на бесконечности* (см. [7]).

Очевидно, что для регулярности спектральной меры $E(\nu, \mu)$ на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_{|\lambda|>1} \frac{d[F(\lambda)f, f]}{|\lambda|}, f \in H.$$

Спектральная мера $E(\nu, \mu)$ называется *регулярной в точке нуль*, [7], если существуют пределы

$$s - \lim_{\substack{0<\nu<\mu \\ \nu \to 0}} E(\nu, \mu), \quad s - \lim_{\substack{\nu<\mu<0 \\ \mu \to 0}} E(\nu, \mu).$$

Очевидно, что спектральная мера регулярна в точке нуль тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_{0<|\lambda|<1} \frac{d[F(\lambda)f, f]}{|\lambda|}, f \in H.$$

Спектральная мера $E(\nu, \mu)$ называется регулярной, если она одновременно регулярна и в точке нуль и на бесконечности.

Введем на $D(A)$ новое скалярное произведение

$$(f, g)_1 = [Af, g]^*.$$

Легко убедиться, что в этом скалярном произведении оператор A является обычным самосопряженным оператором, и поэтому на $D(A)$ имеем представление

$$A(A - zI)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda)}{\lambda - z}.$$

Отсюда на $D(A)$ имеем

$$z(A - zI)^{-1} = -I + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda)}{\lambda - z}. \tag{2}$$

Предположим, что спектральная мера регулярна на бесконечности. Тогда операторы

$$\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dF(\lambda)}{1 + \lambda^2} \quad \text{и} \quad \beta$$

являются ограниченными операторами и сравнивая представление (1) и (2), получаем

$$\beta = O, \ \alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dF(\lambda)}{1 + \lambda^2} = -I.$$

Итак, в случае регулярности спектральной меры на бесконечности для резольвенты оператора A имеем представление

$$(A - zI)^{-1} = -\frac{I}{z} + \frac{1}{z}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda)}{\lambda - z}. \tag{3}$$

Отметим, что в работах [3], [4] условия регулярности на бесконечности по ошибке пропущены.

Пусть спектральная мера оператора A регулярна на бесконечности. Определим функцию $E_1(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ следующим образом:

$$E_1(\lambda) = s - \lim_{\mu \to -\infty} E(\mu, \lambda).$$

Легко подсчитать, что

$$E_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{dF(t)}{t} \quad \text{при} \quad \lambda < 0 \tag{4}$$

* Если Ker A содержит ненулевые элементы, надо рассматривать фактор пространство по Ker A.

и

$$E_1(\lambda)=I-\int_{\lambda}^{\infty}\frac{dF(t)}{t} \quad \text{при} \quad \lambda>0. \tag{5}$$

Положим

$$E(\lambda)=E_1(\lambda-0).$$

Как и в работе [5] устанавливается, что $E(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1. $E(\lambda)$ — J — ортогональный проектор, при $\lambda\neq 0$,
2. $E(\lambda)\cdot E(\mu)=E(\min(\lambda,\mu))$, $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$,
3. $E(\lambda-0)=E(\lambda)$, $\lambda\neq 0$,
4. $s-\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E(\lambda)=0$, $s-\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=I$.

Пусть $E(\Delta)=E(\beta)-E(\alpha)$, где $\Delta=(\alpha,\beta)$, $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, тогда интегрируя (2) вдоль замкнутого контура, проходящего через точки α и β, получим

$$AE(\Delta)=F(\beta)-F(\alpha). \tag{6}$$

Заметим, что для $f\in D(A)$ существует $s-\lim\limits_{\lambda\to+\infty}F(\lambda)f=F(+\infty)f$, а функцию $F(\lambda)$ можно нормировать так, что

$$s-\lim_{\lambda\to+\infty}F(\lambda)=0.$$

Таким образом, из (6) следует, что для $f\in D(A)$

$$Af=F(+\infty)f. \tag{7}$$

Из (4) и (5) для $f\in D(A)$ имеем

$$F(-0)f=\int_{-\infty}^{0}\lambda dE(\lambda)f, \tag{8}$$

$$F(+\infty)f-F(+0)f=\int_{0}^{\infty}\lambda dE(\lambda)f. \tag{9}$$

Складывая (8) и (9) и учитывая (7), получим спектральное разложение оператора A

$$Af=Sf+\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)f,\ f\in D(A), \tag{10}$$

где

$$S=F(+0)-F(-0).$$

Аналогично работе [5] доказывается, что

1. S — J-неотрицательный ограниченный оператор,
2. $S^2=O$,
3. $SE(\Delta)=E(\Delta)S=O$, $(0\overline{\in}\Delta)$,
4. $ASf=SAf=0$, для $f\in D(A)$.

2°. Имеет место следующая

Теорема 1. *Для того чтобы спектральная мера J-неотрицательного оператора A была регулярной на бесконечности необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл*

$$\int_1^\infty \mathrm{Re}\,[R_{iy}(A)f, f]\,dy, \quad \text{при} \quad f \in H. \tag{11}$$

Доказательство. Из (1) имеем

$$[iy\,R_{iy}(A)f, f] = [\alpha f, f] + iy\,[\beta f, f] + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - iy} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\,[F(\lambda)f, f],$$

откуда

$$[R_{iy}(A)f, f] = -\frac{i\,[\alpha f, f]}{y} + [\beta f, f] + \frac{1}{iy}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda + iy}{\lambda^2 + y^2} - \frac{\lambda}{1+y^2}\right) d\,[F(\lambda)f, f],$$

поэтому

$$\mathrm{Re}\,[R_{iy}(A)f, f] = [\beta f, f] + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + y^2}, \tag{12}$$

где

$$\sigma(\lambda) = [F(\lambda)f, f].$$

Из неотрицательности слагаемых в (12) следует, что интеграл в (11) сходится тогда и только тогда, когда $\beta = O$ и сходится интеграл

$$\int_1^\infty dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + y^2}. \tag{13}$$

Очевидно, что интеграл в (13) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\lambda) \int_1^\infty \frac{dy}{\lambda^2 + y^2}. \tag{14}$$

Легко убедиться, что функция

$$\int_1^\infty \frac{dy}{\lambda^2 + y^2} = \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

на сегменте $|\lambda| \leqslant 1$ ограничена, а при $|\lambda| > 1$

$$\frac{\pi}{4|\lambda|} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{|\lambda|}\right) \leqslant \frac{\pi}{2|\lambda|}.$$

Поэтому интеграл в (14) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_{|\lambda|>1} \frac{d\sigma(\lambda)}{|\lambda|}.$$

Отметим, что техника, используемая при доказательстве этой теоремы незначительно отличается от доказательства известного признака И. С. Каца принадлежности функций классу R_1 [6].

Теорема 2. *Для того чтобы спектральная мера J-неотрицательного оператора A была регулярной в точке нуль необходимо и достаточно, чтобы при любом $f \in H$ сходился интеграл**

$$\int\limits_0^1 \operatorname{Re}\,[R_{iy}(A)\,f,\ f]\,dy. \tag{15}$$

Доказательство. Из (12) имеем

$$\operatorname{Re}\,[R_{iy}(A)\,f,\ f] = [\beta f,\ f] + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2},$$

и, следовательно, интеграл (15) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\lambda) \int\limits_0^1 \frac{dy}{\lambda^2+y^2}. \tag{16}$$

Функция

$$\int\limits_0^1 \frac{dy}{\lambda^2+y^2} = \frac{1}{|\lambda|}\ \operatorname{arctg}\ \frac{1}{|\lambda|}$$

при $|\lambda| \geqslant 1$ удовлетворяет оценке

$$\frac{1}{|\lambda|} \operatorname{arctg} \frac{1}{|\lambda|} \leqslant \frac{1}{\lambda^2},$$

а при $0 < |\lambda| < 1$

$$\frac{\pi}{4|\lambda|} \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \operatorname{arctg} \frac{1}{|\lambda|} < \frac{\pi}{2|\lambda|}.$$

Поэтому интеграл в (16) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_{0<|\lambda|<1} \frac{d\sigma(\lambda)}{|\lambda|}.$$

---

*При $S \neq 0$ интеграл $\int\limits_0^1 \operatorname{Re}\,[R_{iy}(A)\,f,\ f]\,dy$ должен сходится на всех f, для которых $Sf = 0$.

Объединяя теоремы 1 и 2, сформулируем теорему.

Теорема 3. *Для того чтобы спектральная мера J-неотрицательного оператора A была регулярной необходимо и достаточно, чтобы при любом $f \in H$ сходился интеграл*

$$\int_0^\infty \mathrm{Re}\,[R_{iy}(A)\,f,\,f]\,dy.$$

В работе [7] было доказано, что регулярность в нуле спектральной меры может нарушаться уже при одномерных возмущениях. Здесь будет доказано, что регулярность на бесконечности сохраняется при любых ограниченных возмущениях.

Если спектральная мера J-неотрицательного оператора A регулярна на бесконечности, то из (3) при $y > 1$ следует, что

$$\|R_{iy}(A)\| \leqslant \frac{M}{y}. \tag{17}$$

Поэтому, если $\tilde{A} = A + K$, где K — ограниченный J-неотрицательный оператор, то

$$\|R_{iy}(\tilde{A})\| \leqslant \frac{M_1}{y}, \text{ при } y > a > 0. \tag{18}$$

Действительно

$$(\tilde{A} - iy)^{-1} = (A + K - iy)^{-1} = (A - iy)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[(A - iy)^{-1}K]^n,$$

при $M\|K\| < y$.

Таким образом, при $y > 2M\|K\| = a$ имеем

$$\|(\tilde{A} - iy)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{y}\cdot\frac{1}{1 - \frac{M\|K\|}{y}} \leqslant \frac{2M}{y}.$$

Теорема 4. *Пусть A — J-неотрицательный оператор, спектральная мера которого регулярна на бесконечности, K — любой J-неотрицательный ограниченный оператор и $\tilde{A} = A + K$. Тогда спектральная мера оператора $\tilde{A}$ также регулярна на бесконечности.*

Доказательство. Имеем

$$(\tilde{A} - iy)^{-1} = (A - iy)^{-1} - (\tilde{A} - iy)^{-1}K(A - iy)^{-1}.$$

Для второго слагаемого, используя (17), (18) при $y > b > 0$, получим:

$$\|(\tilde{A} - iy)^{-1}K(A - iy)^{-1}\| \leqslant \frac{M_2}{y^2}.$$

Следовательно, для любого $f \in H$

$$\int_{1}^{\infty} \operatorname{Re}\,[R_{iy}(\tilde{A})\,f,\,f]\,dy$$

сходится.

В заключение выражаю благодарность М. Г. Крейну за обсуждение результатов этой работы.

Ереванский государственный университет Поступила 10.XI.1979

Ռ. Վ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ. *J-ոչ բացասական օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի ռեգուլյարությունը անվերջությունում (ամփոփում)*

Աշխատանքում ստացվում է J-ոչ բացասական օպերատորի սպեկտրալ վերլուծությունը և ուսումնասիրվում է նրա սպեկտրալ ֆունկցիայի ռեգուլյարությունը։

Ապացուցվում է, որ սպեկտրալ ֆունկցիայի ռեգուլյարությունը անվերջությունում կայուն է ցանկացած սահմանափակ գրգռումների նկատմամբ։

R. V. HAKOPIAN. *On the regularity of spectral function of J—nonnegative operator in the infinity* (summary)

The spectral resolution of J—nonnegative operator is obtained and the regularity of its spectral function is studied.

It is proved that fhe regularity of spectral function in the infinity is stable with respect to all bounded perturbation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Langer*. Spektraltheorie J-Selbstadjugierter Operatoren und einige Anwendungen auf die Schar $\lambda^2 I + \lambda B + C$, Habiltationsschrift Technische Universität, Dresden, 1965.
2. *Н. И. Ахиезер* и *И. М. Глазман*. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1966.
3. *Р. В. Акопян*. О формуле следов в теории возмущений для J-неотрицательных операторов, ДАН Арм. ССР, 57, № 4, 1973, 193—199.
4. *Р. В. Акопян*. К теории возмущений J-положительного оператора, Функ. анализ и его прилож., 9, № 2, 1975, 61—62.
5. *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмулян*. J-полярные представления плюс-операторов, Мат. исслед., 1—1, 1966, 172—210.
6. *Ф. Аткинсон*. Дискретные и непрерывные граничные задачи, М., 1968.
7. *Р. В. Акопян*. К теории спектральной функции J-неотрицательного оператора, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем, 13, № 2, 1978, 114—121.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV. № 5, 1980 Математика

С. А. АНТОНЯН

РЕТРАКТЫ В КАТЕГОРИЯХ G-ПРОСТРАНСТВ

Введение

В настоящей статье основные факты теории ретрактов распространяются на категорию MG всех метризуемых G-пространств, т. е. метризуемых пространств, рассматриваемых со всевозможными действиями* как правило, компактной группы G.

Большинство доказываемых здесь результатов анонсировано нами в [1].

Частным случаем основной теоремы 1 является

Теорема 2. *Всякое полное выпуклое инвариантное множество V локально выпуклого пространства Z, на котором линейно действует компактная группа G, является абсолютным экстензором для категории MG.*

Если кроме того пространство Z метрическое, а множество V сепарабельное, то V является абсолютным экстензором даже для категории NG всех нормальных G-пространств.

Как показывают примеры 1 и 2, условия компактности группы G и полноты множества V в этой теореме существенны. Лишь в случаях, либо конечности группы G, либо конечномерности пространства Z, нам удается освободиться от условия полноты множества V. Как показал Майкл [6], сепарабельность множества V во второй части теоремы 2 необходима даже в случае тривиальной группы G.

Взяв группу G, состоящую из одного элемента, мы получим первый частный случай теоремы 2 — известную теорему Дугунджи ([3], стр. 86), о том, что всякое выпуклое множество локально выпуклого пространства является абсолютным экстензором для категории M всех метризуемых пространств.

Взяв $G = Z_p$ — циклическую группу простого порядка p, мы получим второй частный случай – теорему Яворовского [13].

Положив $V = \mathbf{R}^n$ — евклидово пространство и взяв группу Ли G, ортогонально действующую на $\mathbf{R}^n$, мы получим третий частный случай — известную теорему Глисона [7]. Естественно полагать, что теорема 2 подобно теоремам Дугунджи и Глисона может иметь многочисленные применения. Во всяком случае последующее изложение нашей работы существенно на нее опирается.

Статья делится на 4 параграфа. В § 1 приводятся основные определения теории G-пространств, рассматривается естественное дей-

* Все основные определения см. в § 1.

ствие группы G на пространстве отображений и приводится нужная для дальнейшего теорема Ю. М. Смирнова [11] в несколько уточненном виде. В § 2 доказывается необходимая для основной теоремы

Основная лемма 2. *Пусть V—полное выпуклое инвариантное множество локально выпуклого пространства Z, на котором линейно и непрерывно действует компактная группа G, а $C(G, V)$ — пространство непрерывных отображений $f: G \to V$, рассматриваемое с компактно-открытой топологией и с действием группы G, заданным формулой $(gf)(g') = gf(g')$ (см. лемму 1).*

Тогда существует непрерывное отображение $\int: C(G, V) \to V$, удовлетворяющее трем условиям:

инвариантность) $\int_h f = \int f = \int f_h$,

где $_hf(g) = f(hg)$, *а* $f_h(g) = f(gh)$ *для любого* h *из* G,

эквивариантность) $\int g * f = g \int f$ *для любого* g *из* G,

нормировка) $\int f = v_0$, *если* $f(G) = v_0 \in V$.

Условия компактности группы G и полноты множества V здесь существенны. В случаях либо конечности группы G либо конечномерности пространства Z от полноты множества V можно отказаться. § 3 посвящен основной теореме 1 и примерам.

В § 4 главные факты теории ретрактов переносятся на G-пространства.

Например, теорема об эквивалентности понятий быть абсолютным (окрестностным) ретрактом и быть абсолютным (соотв., окрестностным) экстензором [6] переносится на категорию G-пространств, метризуемых полной метрикой, при условии, что группа G компактна (теорема 3). Теорема суммы [3] оказывается верной и в категории MG при том же условии компактности группы G (теорема 4). В том же предположении о группе G остается верной и теорема Борсука о продолжении гомотопии [3].

Теорема 5. *Пусть Y — абсолютный экстензор категории MG, а $h: A \times I \to Y$ — эквивариантная гомотопия между отображениями h_0 и h_1. Если h_0 имеет эквивариантное продолжение $H_0: X \to Y$, где A замкнуто и инвариантно в $X \in MG$, то h имеет такое эквивариантное продолжение $H: X \times I \to Y$, что $H_0(x) \equiv \equiv H(x, 0)$.*

Следует уточнить, что отрезок I здесь рассматривается лишь с тривиальным действием группы G, а действие группы на произведении определяется обычным покоординатным способом. На самом деле, в тексте эта теорема доказана в значительно более широком случае, а именно, для такой полной подкатегории KG категория нормальных G-пространств, которая вместе с каждым объектом содержит любое его замкнутое инвариантное множество, а также и произведение $X \times I$. Таких категорий KG достаточно много.

Далее для категорий MG, CG и т. п доказывается теорема 6 о том, что G-пространство является абсолютным экстензором в точности тогда, когда оно G-стягиваемо и является абсолютным окрестностным экстензором.

Теорема 7 дает простое необходимое условие для того, чтобы G-пространство Y было абсолютным (окрестностным) ретрактом категории MG, где G—локально компактная σ-компактная группа. На этом основано построение примеров 1 и 2.

Аналогичные теоремы были ранее доказаны Яворовским [13] (в случае группы $G = Z_p$ и конечномерного компактного метризуемого пространства Y) и Ю. М. Смирновым [10] (для метризуемой группы G).

§ 1. Основные определения и факты

1. Действием группы G на пространстве X* называют всякое непрерывное отображение $(g, x) \to gx$ топологического произведения $G \times X$ в пространство X, удовлетворяющее условиям

A) $$g(g'x) = (gg')x,$$

B) $$ex = x^{**}$$

для любых $g, g' \in G$, $x \in X$,

2. Если G — группа, а X — линейное пространство, то действие $(g, x) \to gx$ называют линейным, если выполнено условие

C) $$g(\lambda x + \mu y) = \lambda gx + \mu gy$$

для любого $g \in G$, любых чисел λ, μ и любых $x, y \in X$.

3. Если G — группа, а (X, ρ) — метрическое пространство, то действие gx называют изометрическим, если $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$ для всех $g \in G$, $x, y \in X$. Метрика ρ в этом случае называется инвариантной (относительно действия gx).

4. (Линейное) пространство X с фиксированным на нем (линейным) непрерывным действием группы G называют (линейным) G-пространством.

5. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ G-пространств называют эквивариантным или G-отображением, если оно коммутирует с данными действиями, т. е. если $f(gx) = gf(x)$ для любых $x \in X$ и $g \in G$. Легко видеть, что все G-пространства и все G-отображения составляют категорию.

Легко также проверить, что если G состоит из одного элемента, то категория G-пространств и G-отображений изоморфна категории топологических пространств и непрерывных отображений.

(Другие примеры G-пространств см. в [10]).

---

* Группой называем мультипликативную топологическую группу, а пространством — топологическое пространство.

** e — единица группы G.

6. Множество A G-пространства X называют инвариантным, или G-множеством, если $ga \in A$ для любых $g \in G$ и $a \in A$. Ясно, что каждое инвариантное множество A G-пространства X само является G-пространством, если его рассматривать с ограничением действия группы G на A.

7. Произведением $X \times Y$ G-пространств называют топологическое произведение $X \times Y$, рассматриваемое вместе с покоординатным действием $g(x, y) = (gx, gy)$ группы G.

8. Эквивариантную гомотопию или G-гомотопию $H: X \times I \to Y$ определяют как обычно, требуя естественно, чтобы H было эквивариантным отображением, но при непременном условии, что группа G действует на отрезке I тривиально, т. е. $gt = t$ для любых $g \in G$ и $t \in I$. Стало быть, $H(gx, t) = gH(x, t)$ для любых

$$x \in X, \ t \in I, \ g \in G.$$

9. G-пространство Y называют G-стягиваемым, если его тождественное отображение гомотопно некоторому эквивариантному постоянному отображению $f: Y \to Y$.

10. G-пространство Y называют абсолютным (окрестностным) экстензором для некоторой категории KG G-пространств (сокращенно $AE(KG)$, соотв. $ANE(KG)$), если для любого объекта X из KG всякий морфизм $f: A \to Y$, где A замкнуто и инвариантно в X, имеет продолжение $F: X \to Y$ из категории KG (соотв. $F: O \to Y$, где O—некоторая инвариантная окрестность множества A в X, а $F \in KG$).

Мы будем рассматривать лишь такие категории KG, которые содержат все инвариантные замкнутые подпространства своих объектов, а также содержат все эквивариантные отображения своих объектов. Поэтому следующие два определения мы соответственно упростим.

11. Множество A G-пространства X называется G-ретрактом пространства X, если существует эквивариантная ретракция $r: X \to A$ (т. е. $r(a) = a$ для любого $a \in A$).

12. G-пространство Y называется абсолютным (окресностным) ретрактом категории KG (сокращенно $AR(KG)$, соотв. $ANR(KG)$), если $Y \in KG$ и при всяком замкнутом эквивариантном вложении $i: Y \to Z$ пространства Y в пространство Z из категории KG образ $i(Y)$ является G-ретрактом пространства Z (соотв. G-ретрактом некоторой своей инвариантной окрестности).

Нетрудно проверить, что если $Y \in KG$ и $Y \in AE(KG)$, то $Y \in AR(KG)$ (соотв., если $Y \in KG$ и $Y \in ANE(KG)$), то $Y \in ANR(KG)$).

Пусть X и Y—произвольные топологические пространства. Через $C(X, Y)$ обозначим пространство всех непрерывных отображений $f: X \to Y$, взятое с компактно-открытой топологией ([5], стр. 84).

Лемма 1. *Пусть X и Y—топологические пространства.* Тогда *каждое действие gy группы G на Y порождает действие $g * f$ группы G на $C(X, Y)$ согласно формуле*

D) $$(g * f)(x) = gf(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Причем, если Y — топологическое линейное пространство, то действие $g * f$ линейно, как только линейно действие gy.

Доказательство. Условия A) и B) из определения действия и линейность действия $g * f$ в случае линейности действия gy легко проверяются. Далее из определения действия $g * f$ видно, что $g * f \in C(X, Y)$ для всех $g \in G$, $f \in C(X, Y)$. Остается только показать непрерывность отображения $(g, f) \to g * f$.

Пусть $g_0 \in G$, $f_0 \in C(X, Y)$, $g_0 * f_0 \in \Gamma_{K, V}$, где K компактно в X, V открыто в Y, а $\Gamma_{K, V} = \{f \in C(X, Y);\ f(K) \subset V\}$ — элемент псевдобазы компактно-открытой топологии пространства $C(X, Y)$. Тогда $g_0 f_0(x) \in V$ для любого $x \in K$. В силу непрерывности действия gy для каждой точки $x \in K$ существуют такие окрестности U_x точки g_0 в G и окрестность W_x точки $f_0(x)$ в Y, что $U_x \cdot W_x \subset V$*.

В силу компактности множества $f_0(K)$ существует конечное число множеств $W_{x_1}, \dots, W_{x_n}$, покрывающих множество $f_0(K)$. Положим $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$ и $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Тогда если $g \in U$ и $y \in W$, то существует такой индекс j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $g \in U_{x_j}$ и $y \in W_{x_j}$, и следовательно, $gy \in U_{x_j} \times W_{x_j} \subset V$. Итак, $U \cdot W \subset V$. Теперь заметим, что U — окрестность точки g_0 в G, а $\Gamma_{K, W}$ — окрестность точки f_0 в $C(X, Y)$.

Утверждаем, что $U * \Gamma_{K, W} \subset \Gamma_{K, V}$.

Действительно, если $g \in U$ и $f \in \Gamma_{K, W}$, то $(g * f)(x) = gf(x) \in UW \subset V$ для каждого $x \in K$, т. е. $g * f \in \Gamma_{K, V}$. Так как множества $\Gamma_{K, V}$ образуют псевдобазу топологии пространства $C(X, Y)$, то отображение $(g, f) \to g * f$ непрерывно в точке (g_0, f_0). Поскольку эта точка была выбрана произвольно, то отображение $g * f$ непрерывно. ■

Теорема C. *Любое метризуемое G-пространство X с компактной действующей группой G можно эквивариантно и замкнуто вложить в нормированное линейное G-пространство Z, на котором G действует линейно и изометрически. Причем, если X полно в некоторой метрике, то Z полно***.

Доказательство. Пусть X и Y — топологические пространства, а группа G действует на X. На пространстве $C(G, Y)$ имеется действие $g_S f$, определенное формулой

E) $$(g_S f)(g') = f(g'g),\quad g,\ g' \in G,\ f \in C(G, Y),$$

линейное, если Y — линейное пространство [11]. Если Y — нормированное линейное пространство, а группа G — компактная, то $C(G, Y)$ относительно Sup-нормы будет нормированным линейным пространством, причем полным, если полно Y.

---

* Если $A \subset G$, $B \subset Y$, то через AB обозначим множество $\{gy;\ g \in A,\ y \in B\}$.

** Эта теорема по существу принадлежит Ю. М. Смирнову [11]. Мною замечено лишь то, что группа G действует на Z изометрически, т. е. что метрика, определенная на Z, инвариантна.

Известно ([2], стр. 49), что если X метрическое пространство, то существует замкнутое изометрическое вложение $i: X \to Y$ в некоторое нормированное линейное пространство Y, полное, если полно X. Искомое вложение $i_S: X \to Z = C(G, Y)$ Ю. М. Смирнов определяет формулой $i_S(x)(g) = i(gx)$. В [11] им доказано, что i_S является замкнутым эквивариантным вложением. Легко проверить, что метрика супремума инвариантна, т. е., что

$$\|g_S f - g_S \varphi\| = \|f - \varphi\|, \ g \in G, \ f, \ \varphi \in Z.$$

В самом деле

$$\|g_S f - g_S \varphi\| = \|g_S (f - \varphi)\| = \sup_{g' \in G} \|g_S (f - \varphi)(g')\| =$$

$$= \sup_{g' \in G} \|(f - \varphi)(g'g)\| = \sup_{h \in G} \|(f - \varphi)(h)\| = \|f - \varphi\| \blacksquare$$

Отметим необходимый для дальнейшего известный факт, непосредственно следующий из теоремы C.

Лемма 0. *Для любого метризуемого пространства X с непрерывным действием компактной группы G на X существует инвариантная метрика.*

§ 2. Основная лемма

Лемма 2. *Пусть V—полное*) выпуклое инвариантное множество локально выпуклого пространства Z, на котором линейно действует компактная группа G. Тогда существует непрерывное отображение $\int : C(G, V) \to V$, удовлетворяющее условиям*

F) $\int_h f = \int f = \int f_h$ *для любого $f \in C(G, V)$ и любого $h \in G$, где ${}_h f(g) = f(hg)$, $f_h(g) = f(gh)$ для всех $g \in G$.*

G) $\int g * f = g \int f$ *для любого $f \in C(G, V)$ и любого $g \in G$, где действие $g * f$ определяется формулой D) из леммы 1.*

H) $\int f = v_0$, *если $f(G) = v_0$, $v_0 \in V$. При этом если либо группа G конечна, либо пространство Z конечномерно, то от полноты множества V можно отказаться.*

Доказательство. Известно [4], [9], что на группе G существует (единственный) интеграл по мере Хаара, т. е. такое непрерывное линейное отображение $\int : C(G, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — действительная прямая, которое удовлетворяет условиям F), H) и условию положительности:

I) $\int f > 0$, если $f \geqslant 0$.

Пусть $f \in C(G, V)$. Так как G компактна, а f непрерывно, то $f(G)$ компактно в V. Поэтому в силу выпуклости и полноты множества V, замыкание $\overline{\operatorname{conv} f(G)}$ выпуклой оболочки $\operatorname{conv} f(G)$ компактно (и лежит в V) ([8], стр. 92). Следовательно, мы находимся в условиях теоремы 3. 27 из [9]. По этой причине существует интеграл

* Полное в смысле индуцированной из Z естественной равномерности.

$\int f \in \overline{\operatorname{conv} f(G)} \subset V$ однозначно определяемый формулой

$$J) \qquad z^*(\int f) = \int z^* \circ f,$$

где z^* — произвольный элемент сопряженного к Z пространства Z^*, слева стоит искомый интеграл от отображения f, а справа — интеграл по мере Хаара от непрерывной функции

$$z^* \circ f : G \to \mathbf{R}.$$

Покажем, что так определенное отображение $\int : C(G, V) \to \hat{V}$ искомое.

Оно непрерывно ([4], стр. 67).

Проверим условия F), G) и H).

F). Пусть $h \in G$, $f \in C(G, V)$, а $z^* \in Z^*$. Легко видеть, что $z^* \circ {}_h f = {}_h(z^* \circ f)$ и $z^* \circ f_h = (z^* \circ f)_h$.

Поэтому в силу формулы J) имеем

$$z^*(\int_h f) = \int z^* \circ {}_h f = \int_h (z^* \circ f) = \int z^* \circ f = z^*(\int f) \text{ и}$$

$$z^*(\int f_h) = \int z^* \circ f_h = \int (z^* \circ f)_h = \int z^* \circ f = z^*(\int f).$$

Отсюда, в силу единственности интеграла, определяемого формулой J), заключаем, что $\int_h f = \int f = \int f_h$.

G). Пусть gz—линейное действие группы G на пространстве Z. Для каждого $g \in G$ через g^* обозначим линейное непрерывное отображение пространства Z в себя, определенное формулой $g^*(z) = gz$ Ясно, что $z^* \circ g^* \in Z^*$ для любого $z^* \in Z^*$. Поэтому для каждого $\in C(G, V)$, $z^*(g \int f) = (z^* \circ g^*)(\int f) = \int (z^* \circ g^*) \circ f$. Но заметим, что $(z^* \circ g^*) \circ f = z^* \circ (g * f)$.

Следовательно, $z^*(g \int f) = \int z^* \circ (g * f) = z^*(\int g * f)$.

Поэтому из формулы J) и из единственности интеграла следует, что $g \int f = \int g * f$.

H). Пусть f — постоянное отображение группы G в точку v_0. Тогда для любого $z^* \in Z^*$, $z^* \circ f$ — постоянная функция, равная $z^*(v_0) \in \mathbf{R}$, поэтому $\int z^* \circ f = z^*(v_0)$. Следовательно, $z^*(\int f) = \int z^* \circ f = z^*(v_0)$. Как и выше, отсюда следует, что $\int f = v_0$.

Для завершения доказательства отметим, что если либо группа G конечна, либо пространство Z конечномерно, то множество $\overline{\operatorname{conv} f(G)} = \operatorname{conv} f(G)$ компактно и без предположения полноты множества V. Поэтому в этом случае в лемме 2 от полноты множества V можно отказаться. ■

§ 3. Основная теорема

Основная теорема 1. *Пусть V — полное выпуклое инвариантное множество локально выпуклого пространства Z, на котором линейно действует компактная группа G, а A — замкнутое инвариантное множество G-пространства X. Тогда всякое эквивариантное отображение $f : A \to V$, которое продолжается до непрерывного отображения $F : X \to V$, можно продолжить до экви-*

вариантного отображения $f: X \to V$. Если либо группа G конечна, либо пространство Z конечномерно, то от полноты множества V можно отказаться.

Доказательство. Пусть $F: X \to V$ — произвольное непрерывное продолжение отображения f. Рассмотрим отображение $\varphi: G \times X \to V$, определенное формулой $\varphi(g, x) = g^{-1} F(gx)$, $g \in G$, $x \in X$. Оно непрерывно в силу непрерывности отображения F и действий группы G на пространствах X и Z.

Отображение $\psi: X \to C(G, V)$ определим формулой

$$\psi(x)(g) = \varphi(g, x), \quad x \in X, \quad g \in G,$$

Оно непрерывно ([5], стр. 95).

Наконец, положим $\bar{f} = \int \circ \psi$, где $\int$ — отображение из леммы 2. Покажем, что $\bar{f}$ — искомое отображение из X в V. Во-первых $\bar{f}$ — непрерывно, как композиция двух непрерывных отображений.

Пусть $a \in A$. Тогда для любого $g \in G$

$$\psi(a)(g) = \varphi(g, a) = g^{-1} F(ga) = g^{-1} f(ga) = g^{-1} g f(a) = f(a),$$

т. е. $\psi(a)$ — постоянное отображение группы G в точку $f(a) \in V$. Поэтому, согласно условию H) из леммы 2 имеем $\bar{f}(a) = \int \psi(a) = f(a)$, т. е. $\bar{f}$ есть продолжение отображения f. Покажем эквивариантность отображения $\bar{f}: X \to V$. Пусть g, $h \in G$ и $x \in X$. Тогда

$$\psi(hx)(g) = \varphi(g, hx) = g^{-1} F(ghx) = h(gh)^{-1} F(ghx) =$$
$$= h\varphi(gh, x) = h(\psi(x)(gh)) = (h * \psi(x))(gh),$$

где $h * \psi(x)$ — действие группы G на пространстве $C(G, Z)$ определенное формулой D).

Таким образом $\psi(hx) = (h * \psi(x))_h$. Поэтому согласно условиям F) и G) из леммы 2 имеем

$$\bar{f}(hx) = \int \psi(hx) = \int (h * \psi(x))_h =$$

$$= \int h * \psi(x) = h \int \psi(x) = h\bar{f}(x),$$

чем и доказана эквивариантность отображения $\bar{f}$.

Если либо группа G конечна, либо пространство Z конечномерно, то в лемме 2, а значит и в теореме 1, от полноты множества V можно отказаться. ■

Теорема 2. *Всякое полное выпуклое инвариантное множество V локально выпуклого пространства Z, на котором линейно действует компактная группа G, является абсолютным экстензором для категории MG.*

Если кроме того пространство Z метрическое, а множество V сепарабельное, то V является абсолютным экстензором даже для категории NG всех нормальных G-пространств.

Доказательство первой части теоремы 2 следует из основной теоремы 1 и из упомянутой во введении теоремы Дугунджи ([3], стр. 86).

Вторая же часть теоремы 2 следует из основной теоремы 1 и из теоремы Майкла [6] о том, что полное сепарабельное выпуклое множество V локально выпуклого метрического пространства Z является абсолютным экстензором для категории N всех нормальных пространств. ■

Условия компактности группы G и полноты множества V в теореме 2, а значит и в теореме 1, существенны. Приведем соответствующие примеры.

Пример 1. Пусть $G = \mathbf{R}$ — аддитивная группа действительных чисел. Пространство $Z = C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ является локально выпуклым топологическим линейным пространством. Более того, оно полно ([8], стр. 96) и метризуемо ([8], стр. 34).

Формулой

$$(gf)(s) = f(g + s), \; g, \; s \in \mathbf{R}, \; f \in Z$$

определяется линейное действие $(g, f) \to gf$ группы $\mathbf{R}$ на пространстве Z [11].

Пусть далее $f_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — тождественное отображение. В качестве множества V возьмем орбиту $\mathbf{R}(f_0) = \{gf_0;\ g \in \mathbf{R}\}$ точки f_0 в Z. Ясно, что V полно, выпукло и инвариантно в Z. Легко заметить, что V не имеет неподвижных относительно действия gf точек, т. е. таких точек $\varphi \in V$, что $g\varphi = \varphi$ для всех $g \in \mathbf{R}$. Поэтому, согласно теореме 7 V не является $AE(M\mathbf{R})$. ■

Пример 2. Пусть $\mathbf{C}$ — пространство комплексных чисел, S — мультипликативная группа всех комплексных чисел по модулю равных единице, S — компактная группа. Пространство $Z = C(S, \mathbf{C})$ является вещественным банаховым пространством.

Как и выше формулой

$$(gf)(s) = f(gs), \; g, \; s \in S, \; f \in Z$$

определяется линейное действие группы S на банаховом пространстве Z [11].

Пусть $f_0(z) = e^z$, $z \in S$, а V — выпуклая оболочка орбиты

$$S(f_0) = \{gf_0;\ g \in S\},$$

V — выпуклое, инвариантное и неполное множество в Z. Как и в примере 1, легко показать, что V не содержит неподвижных относительно действия gf точек.

Поэтому согласно теореме 7 V не является $AE(MS)$. ■

§ 4. Ретракты и экстензоры в категории MG

Теорема 3. *Пусть группа G компактна, а Y — G-пространство, обладающее полной метрикой. Тогда Y является абсолютным (окрестностным) экстензором для MG в точности тогда, когда он является абсолютным (соотв., окрестностным) ретрактом для MG.*

Доказательство. Так как Y обладает полной метрикой, то согласно теореме C можно считать, что Y является замкнутым G-подмножеством некоторого банахова пространства Z, на котором группа G действует линейно.

Пусть Y — абсолютный (окрестностный) ретракт для MG. Тогда существует G-ретракция $r: Z \to Y$ (соотв. $r: U \to Y$, где U — некоторая инвариантная окрестность множества Y в Z). Пусть теперь $f: A \to Y$, G — отображение, где A замкнуто и инвариантно в $X \in MG$.

По теореме 2 существует G-продолжение $\bar{f}: X \to Z$ отображения f. Взяв $V = \bar{f}^{-1}(U)$ мы получим инвариантную окрестность множества A в X и полагая $f' = r \circ \bar{f}$, получим G-продолжение $f': X \to Y$ (соотв. $f': V \to Y$) отображения f. Значит Y — абсолютный (соотв., окрестностный) экстензор для MG.

Обратное верно всегда и доказывается без труда. ■

Теорема 4. *Пусть группа G компактна, $X = X_1 \cup X_2$ и $X_0 = X_1 \cap X_2$, где X_1 и X_2 — инвариантные замкнутые множества метризуемого G-пространства X. Тогда*

1) *если* $X_0, X_1, X_2 \in AR(MG)$, *то* $X \in AR(MG)$;

2) *если* $X_0, X_1, X_2 \in ANR(MG)$, *то* $X \in ANR(MG)$;

3) *если* $X, X_0 \in AR(MG)$, *то* $X_1, X_2 \in AR(MG)$;

4) *если* $X, X_0 \in ANR(MG)$, *то* $X_1, X_2 \in ANR(MG)$.

Доказательство идейно не отличается от доказательства соответствующей теоремы в теории ретрактов ([3], стр. 101), поэтому мы приведем здесь лишь доказательство пункта 2).

Для доказательства пункта 2) достаточно показать, что если X есть замкнутое G-подмножество метризуемого G-пространства Y и $X_0, X_1, X_2 \in ANR(MG)$, то существует в Y такая G-окрестность U множества X, что X является ее G-ретрактом.

В силу леммы 0 возьмем на Y инвариантную метрику ρ и положим

$$Y_0 = \{y \in Y;\ \rho(y, X_1) = \rho(y, X_2)\},$$

$$Y_1 = \{y \in Y;\ \rho(y, X_1) < \rho(y, X_2)\},$$

$$Y_2 = \{y \in Y;\ \rho(y, X_1) > \rho(y, X_2)\}.$$

В силу инвариантности метрики ρ множества Y_0, Y_1 и Y_2 инвариантны в Y и ясно, что $Y = Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2$. Очевидно, что X_0 замкнуто и инвариантно в Y_0 и $X_i \cap Y_0 = X_0$, $i = 1, 2$.

Следовательно, существуют G-окрестность W_0 множества X_0 в пространстве Y_0 и замкнутая в Y_0, и G-ретракция

$$r_0: W_0 \to X_0.$$

Полагая

$$r_i(y) = \begin{cases} r_0(y), & \text{если } y \in W_0 \\ y, & \text{если } y \in X_i \end{cases}$$

мы получаем G-ретракцию r_i замкнутого в $Y_0 \cup Y_i$ G-множества $X_i \cup W_0$ на множество X_i, $i=1, 2$. Так как $X_i \in ANR(MG)$, то $X_i \in ANE(MG)$ [12], и следовательно, существует непрерывное G-продолжение $r_i': V_i \to X_i$ G-отображения r_i на некоторую инвариантную окрестность V_i множества $X_i \cup W_0$ в $Y_0 \cup Y_i$.

Ясно, что в V_i найдется такая замкнутая инвариантная окрестность U_i множества X_i в пространстве $Y_0 \cup Y_i$, что $U_i \cap Y_0 \subset W_0$. Поскольку $U_1 \cap U_2 \subset U_1 \cap Y_0 \subset W_0$, то формула $r(y) = r_i'(y)$ для $y \in U_i$, $i=1, 2$ определяет G-ретракцию r инвариантной окрестности $U = U_1 \cup U_2$ множества X в пространстве Y на множество X. Таким образом, доказательство пункта 2) закончено. ■

K). Пусть KG — такая полная подкатегория категории всех нормальных G-пространств, что вместе с каждым своим объектом X она содержит и всякое его замкнутое инвариантное подпространство A, а также и произведение $X \times I$, где отрезок I рассматривается лишь с тривиальным действием группы G, т. е. $gt = t$ для всех g и t.

Теорема 5. *Пусть группа G компактна, $Y \in ANE(KG)$, а $h: A \times I \to Y$ — эквивариантная гомотопия между отображениями $f_0, f_1: A \to Y$, а $F: X \to Y$ — эквивариантное продолжение отображения f_0. Тогда существует такое эквивариантное продолжение $H: X \times I \to Y$ гомотопии h, что $H(x, 0) = F(x)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Очевидно, что множество $Z = X \times \{0\} \cup A \times I$ замкнуто и инвариантно в $X \times I$, а отображение $f: Z \to Y$, определенное формулами $f(x, 0) = F(x)$ для $x \in X$, $f(x, t) = h(x, t)$ для $x \in A$ и $t \in I$ — эквивариантно и непрерывно.

Так как $Y \in ANE(KG)$ и $X \times I \in KG$, то существует G-продолжение $\varphi: V \to Y$ отображения f на некоторую инвариантную окрестность V множества Z в $X \times I$. В силу компактности отрезка I, существует такая окрестность U множества A в X, что $U \times I \subset V$. Так как группа G компактна, то в силу предложения 1.14 из [7] окрестность U можно взять инвариантной.

Поскольку X — нормальное пространство, то существует такая непрерывная функция $\psi': X \to [0, 1]$, что $\psi'(x) = 0$ для $x \in X \setminus U$ и $\psi'(x) = 1$ для $x \in A$. Положим $\psi(x) = \sup\{\psi'(gx);\ g \in G\}$.

Легко проверить, что функция $\psi: X \to [0, 1]$ непрерывна, причем $\psi(x) = 0$ для $x \in X \setminus U$ и $\psi(x) = 1$ для $x \in A$. К тому же ψ инвариантна в том смысле, что $\psi(sx) = \psi(x)$ для любых $x \in X$ и $s \in G$. Действительно

$$\psi(sx) = \sup_{g \in G} \psi'(gsx) = \sup_{\sigma \in G} \psi'(\sigma x) = \psi(x).$$

Полагая $H(x, t) = \varphi(x, \psi(x) \cdot t)$, $x \in X$, $t \in I$ мы получим искомую, G-гомотопию.

Действительно, H непрерывно в силу непрерывности φ и ψ. Коммутирование с действиями следует из эквивариантности отображения φ и инвариантности функции ψ. Значит H эквивариантно. Остальное — простая проверка. ■

L) Пусть категория G-пространств K удовлетворяет условию K) и вместе с каждым своим объектом X содержит топологическую сумму (дискретное объединение) $X'=X\cup\{*\}$ пространства X и одноточечного пространства $\{*\}$. Следует уточнить, что пространство X' здесь рассматривается с действием $g\circ x'$ группы G на нем, однозначно определенным действием gx группы G на X по формуле

$$g\circ x=gx \text{ и } g\circ *=*,\ g\in G,\ x\in X.$$

Предложение 1. *Всякий абсолютный экстензор категории KG G-стягиваем.*

Доказательство. Пусть $X\in KG$. Так как $X'\in KG$, X замкнуто и инвариантно в X' и $X\in AE(KG)$, то существует G-ретракция $r:X'\to X$. Положим $x_0=r(*)$. Ясно, что $gx_0=x_0$ для любого $g\in G$.

Пусть $A=X\times\{0\}\cup X\times\{1\}$. Отображение $h:A\to X$ определим формулами

$$h(x,0)=x_0 \text{ и } h(x,1)=x \text{ для всех } x\in X.$$

Ясно, что множество A замкнуто и инвариантно в $X\times I$, а отображение h непрерывно и эквивариантно (ведь $gx_0=x_0$, $\forall g\in G$). Так как $X\in AE(KG)$, то существует G-продолжение $H:X\times I\to X$ отображения h, которое является G-гомотопией между тождественным отображением $i:X\to X$ и постоянным G-отображением $h_0:X\to X$, где $h_0(x)=x_0$. Значит X G-стягиваемо. ■

Предложение 2. *Пусть группа G компактна, а KG—категория G-пространств, удовлетворяющая условию K). Тогда всякое G-стягиваемое $ANE(KG)$ есть $AE(KG)$.*

Доказательство. Пусть Y G-стягиваемо и принадлежит $ANE(KG)$. Тогда существует G-гомотопия $H:Y\times I\to Y$ такая, что для любого $y\in Y$, $H(y,1)=y$ и $H(y,0)=y_0$, где y_0—некоторая точка из Y.

Пусть $f:A\to Y$ G-отображение, где A замкнуто и инвариантно в $X\in KG$. Так как $Y\in ANE(KG)$, то существует G-продолжение $F:O\to Y$ отображения f, где O — некоторая открытая инвариантная окрестность множества A в X. В силу компактности группы G и нормальности пространства X, как и в доказательстве теоремы 4 можно построить такую функцию $\psi:X\to[0,1]$, что $\psi(gx)=\psi(x)$ для $g\in G$, $x\in X$, $\psi(x)=1$ для $x\in A$ и $\psi(x)=0$ для $x\in U$, где U — некоторая открытая инвариантная окрестность множества A в X, содержащаяся во множестве O.

Отображение $\bar f:X\to Y$ определим формулами $\bar f(x)=H(F(x),\psi(x))$ для $x\in O$ и $\bar f(x)=y_0$ для $x\in X\setminus O$. Легко видеть, что $\bar f$ — искомое продолжение.

Заметим, что категорий KG, удовлетворяющих условию L), достаточно много: это уже упоминавшиеся категории MG, CG, а также категория CMG всех компактных метризуемых G-пространств и т. п.

Пусть KG — одна из этих категорий. Из предложений 1 и 2 следует

Теорема 6. *Пусть группа G компактна. Тогда G-пространство $Y \in KG$ принадлежит $AE(KG)$ в точности тогда, когда оно G-стягиваемо и принадлежит $ANE(KG)$.*

Теорема 7. *Пусть группа G локально компактна и σ-компактна*, а Y является абсолютным (окрестностным) ретрактом категории MG. Тогда для любого непустого множества H из группы G множество $Y[H] = \{y \in Y;\ hy = y,\ \forall h \in H\}$ не пусто (соотв. может быть пустым) и является абсолютным (соотв. окрестностным) ретрактом категории M всех метризуемых пространств.*

Доказательство. Так как группа G локально компактна и σ-компактна, то можно считать [12], что Y — замкнутое инвариантное множество некоторого линейного локально выпуклого метризуемого пространства Z, на котором группа G действует линейно. В силу последнего для любого множества H из G, множество $Z[H]$ является линейным подпространством пространства Z и следовательно не пусто.

Так как $Y \in AR(MG)$ (соотв. $Y \in ANR(MG)$), то существует G-ретракция $r: Z \to Y$ (соотв. $r: U \to Y$, где U — некоторая инвариантная окрестность множества Y в Z). Ясно, что $Y[H] \subset Z[H]$ (соотв. $Y[H] \subset U[H] = U \cap Z[H]$). Так как r — G-ретракция, то ограничение $r' = r/Z[H]$ (соотв. $r' = r/U[H]$), является ретракцией $r': Z[H] \to Y[H]$ (соотв. $r': U[H] \to Y[H]$) и следовательно $Y[H]$ не пусто (соот. может быть пустым).

Но $Z[H]$ как линейное подпространство локально выпуклого метризуемого пространства Z тоже локально выпукло и метризуемо, а множество $U[H] = U \cap Z[H]$ является инвариантной окрестностью множества $Y[H]$ в $Z[H]$. Следовательно, $Y[H]$ будучи ретрактом (соотв. окрестностным ретрактом) пространства $Z[H]$, является абсолютным (соотв. окрестностным) ретрактом категории M всех метризуемых пространств ([3], стр. 95). ■

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Ю. М. Смирнову за постоянное внимание к настоящей работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 15.VI.1979

Ս. Հ. Անտոնյան. Ռետրակտները G-տարածությունների կատեգորիաներում *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում են ռետրակտների տեսության հիմնական փաստերը մետրիզացվող G-տարածությունների կատեգորիայի համար։

* Т. е. G является счетным объединением своих компактных подмножеств.

S. A. ANTONIAN. *Retracts in the category of G-spaces* (summary)

In the paper the main results of the retract's theory for the category of all metrizable G-spaces are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. А. Антонян*. Ретракты в категории G-пространств, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math., Astr., Phys.. 26, № 3, 1980, 764—780.
2. *C. Bessaga, A. Pelczynski*. Selected topics in infinite-dimensional topolody, Warszawa, 1975.
3. *К. Борсук*. Теория ретрактов, М., «Мир», 1971.
4. *Н. Бурбаки*. Интегрирование. Меры на локально компактных множествах, М., «Мир», 1977.
5. *К. Куратовский*. Топология, т. 2, М., «Мир», 1969.
6. *E. Michael*. Some extension theorems for continuons functions, Pac. J. Math., 3 1953, 789—806.
7. *R. Palais*. The classification of G-spaces, Mem. Amer. Math. Soc., 36, 1960.
8. *А. Робертсон, В. Робертсон*. Топологические векторные пространства, М., «Мир», 1967.
9. *У. Рудин*. Функциональный анализ, М., «Мир», 1975.
10. *Ю. М. Смирнов*. Множества H-неподвижных точек—абсолютные экстензоры, Мат. сб., 98 (140), 1975, 93—101.
11. *Ю. М. Смирнов*. Об эквивариантных вложениях G-пространств, УМН, 5 (191), 1976, 137—147.
12. *Yu. M. Smirnov*. Retracts in the categories of topological transformation groups Proc. Top. in Budapest, 1978.
13. *J. W. Jaworowski*. Equivariant extension of maps, Pac. J. Math., 45, 1, 1973, 229—244.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 5, 1980 Математика

Б. С. КАШИН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МАТРИЦ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ИЗ ПРОСТРАНСТВА l_2^n в l_2^m

Введение. Пусть l_p^n, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $n=1, 2, \cdots$ — пространство векторов $x=\{x_i\}_{i=1}^n$ с нормой $\|x\|_{l_p^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $\|x\|_{l_\infty^n} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, а B_p^n — единичный шар в l_p^n. Для каждого линейного оператора $T: R^n \to R^m$ положим $\|T\|_{(p, q)} = \sup_{y \in B_p^n} \|T(y)\|_{l_q^m}$. Если рассмотреть в R^n базис $\{z_j\}_{j=1}^n$ с $z_j = \{0, \cdots, 1, \cdots, 0\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то очевидно возникает взаимно-однозначное соответствие, при котором каждому линейному оператору T отвечает его матрица $T' = \{t_{ij}\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ в базисе $\{z_j\}$, т. е. матрица с n строками и m столбцами, $j^{\text{тая}}$ строка которой совпадает с вектором $T(z_j) \in R^m$.

Для матрицы T' положим по определению

$$\|T'\|_{(p, q)} \equiv \|T\|_{(p, q)} = \sup_{\{y_j\} \in B_p^n, \{x_i\} \in B_{q'}^m} \left|\sum_{i, j} t_{ij} x_i y_j\right|, \tag{1}$$

где $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Отметим, что введенная норма матрицы $T' - \|T'\|_{(p, q)}$ совпадает с (p, q') нормой билинейной $\sum t_{ij} x_i y_j$, определенной в [1]. Данная работа, состоящая из трех параграфов, является развитием заметки автора [2] и содержит доказательства тех утверждений, которые в [2] только сформулированы. В п° 1 и 2 изучаются некоторые свойства матриц операторов $T: l_2^n \to l_2^m$ с нормой $\|T\|_{(2, 2)} \leqslant 1$, в частности, некоторые свойства ортонормированных матриц. В п° 3 рассматриваются свойства $m \times n$ матриц, связанные с оценками поперечников и оцениваются поперечники октаэдра B_1^m, $1 \leqslant m < \infty$, в метрике l_q^m, $2 < q < \infty$.

Укажем еще некоторые обозначения, использованные ниже: через E_m^n, $n \leqslant m$ обозначается множество всех n-элементных наборов чисел $\{i_\nu\}_{\nu=1}^n$ с $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant m$. Для каждой матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i, j=1}^n$ определим матрицу $A^* = \{a_{ij}^*\}_{i, j=1}^n$, положив

$$a_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}, & \text{при } i > j \\ 0, & \text{при } i < j \end{cases} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Для данного конечного множества G через $|G|$ будем обозначать число элементов в нем. Наконец, если S^n — множество всех перестановок набора чисел $1, 2, \cdots, n$ и $\{k_j\}_{j=1}^n = \sigma \in S^n$, то через A_σ обозначается матрица $\{a_{i, k_j}\}_{i, j=1}^n$, т. е. матрица, полученная путем перестановки в порядке σ строк матрицы A.

1°. Для матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ с $\|A\|_{(2, 2)} \leqslant 1$ и набора $\Omega \in E_m^n$, через $A(\Omega)$ будем обозначать квадратную матрицу порядка $n - \{a_{ij}\}$, $i \in \Omega$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Нас будет интересовать поведение норм $\|A(\Omega)\|_{(2, 2)}$ и $\|A(\Omega)\|_{(2, q)}$, $1 \leqslant q < 2$.

Легко видеть, что матрица $A_n = \{a_{ij}\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2n-1$, $1 \leqslant j \leqslant n$ с $a_{ij}=1$ при $1 \leqslant i=j \leqslant n$ и $a_{ij}=0$—в остальных случаях обладает тем свойством, что

1) $\|A_n\|_{(2, 2)}=1$; 2) для любого набора $\Omega \in E_{2n-1}^n$, $\|A_n(\Omega)\|_{(2, 2)}=1$.

Вместе с тем в [2] доказана

Теорема А. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $\rho(\varepsilon) > 0$, что для любой матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ с $\frac{n}{m} < \rho(\varepsilon)$ найдется набор целых чисел $\Omega \in E_m^n$, для которого $\|A(\Omega)\|_{(2, 2)} \leqslant \varepsilon$.

При этом, в доказательстве теоремы A в [2] не давалась оценка величины $\rho(\varepsilon)$ в зависимости от ε. В этом параграфе будет, в частности, получена такая оценка.

Отметим, что если для $m \times n$ матрицы A с $\|A\|_{(2, 2)} \leqslant 1$ рассмотреть среднее значение нормы $\|A(\Omega)\|_{(2, q)}$ по всем наборам Ω:

$$E_1(A, q) = \frac{1}{C_m^n} \sum_{\Omega \in E_m^n} \|A(\Omega)\|_{(2, q)},$$

то очевидно, что, при $q=2$, $E_1(A, 2) \leqslant 1$, но для того, чтобы получить для каждой $m \times n$ матрицы A с $\|A\|_{(2, 2)} \leqslant 1$ оценку $E_1(A, 2) \leqslant \gamma < 1$, где γ — абсолютная постоянная необходимо, чтобы число n было гораздо меньше m. Это следует из того, что как нетрудно проверить, для матриц $A_{n, \varepsilon} = \{a_{ij}\}$, $1 \leqslant i \leqslant [n^{2-\varepsilon}]$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\varepsilon > 0$, где $a_{ij} = 1$ при $1 \leqslant i=j \leqslant n$ и $a_{ij} = 0$ — остальных случаях, справедливо соотношение:

$$\lim_{n \to \infty} E_1(A_{n, \varepsilon}, 2) = 1.$$

Если при q, $1 \leqslant q < 2$ для данной $m \times n$ матрицы A и набора $\Omega \in E_m^n$ рассмотреть величину $\|A(\Omega)\|_{(2, q)}$, то так как $\|x\|_{l_q^n} \leqslant n^{1/q-1/2} \|x\|_{l_2^n}$ при $x \in R^n$, то $\|A(\Omega)\|_{(2, q)} \leqslant n^{1/q-1/2} \|A\|_{(2, 2)}$, поэтому

$$E_1(A, q) \leqslant \max_{\Omega \in E_m^n} \|A(\Omega)\|_{(2, q)} \leqslant n^{1/q-1/2} \|A\|_{(2, 2)}. \tag{2}$$

В отличие от величины $E_1(A, 2)$ для $E_1(A, q)$, $1\leqslant q<2$ уже при $m\geqslant Cn$* можно получить нетривиальную, т. е. лучшую чем $\gamma n^{1/q-1/2}\|A\|_{(2,2)}$, $\gamma<1$, оценку. Исходя из этой оценки доказывается и уточнение теоремы А (см. теорему 2 этой работы). Справедлива

Теорема 1. *Для q, $1\leqslant q<2$ существует постоянная B_q, такая, что для любой $m\times n$ матрицы A с $\|A\|_{(2,2)}\leqslant 1$ и любого $y<1$ имеет место оценка*

$$|\{\Omega\in E_m^n : \|A(\Omega)\|_{(2,q)}\geqslant yn^{1/q-1/2}\}|\leqslant C_m^n\cdot B_q^n\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^{n\cdot\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2q}{2-q}}}.$$

Из теоремы 1 вытекают

Следствие 1. *Для любой пары чисел q, $1\leqslant q<2$ и $K>0$ найдется постоянная $C(q, K)$, для которой, в предположениях теоремы 1*

$$f(y)=\left|\left\{\Omega\in E_m^n : \|A(\Omega)\|_{(2,q)}\geqslant C(q, K)\cdot\ln^{\frac{q-2}{2q}}\left(\frac{m}{n}\right)\cdot n^{1/q-1/2}\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_m^n\cdot K^{-n}.$$

Следствие 2. *Для $r\geqslant 1$ и $q\in[1, 2)$, в предположениях теоремы 1*

$$E_r(A, q)\equiv\Big((C_m^n)^{-1}\sum_{\Omega\in E_m^n}\|A(\Omega)\|_{(2,q)}^r\Big)^{1/r}<C'(r, q)\cdot\left(\ln\frac{m}{n}\right)^{\frac{q-2}{2q}}\cdot n^{1/q-1/2}.$$

Лемма 1. *Для любой функции $f(x)\in L^2(0, 1)$ с $\|f\|_{L^2}\leqslant 1$, $\|f\|_{L^q}>y$, $1\leqslant q<2$ при любом $z<y$ справедлива оценка меры*

$$mE\equiv m\{x\in(0, 1) : |f|>z\}\geqslant(y^q-z^q)^{\frac{2}{2-q}}.$$

Доказательство. Ясно, что

$$y^q\leqslant\|f\|_{L^q}^q=\int_E|f|^q\,dx+\int_{[0,1]\setminus E}|f|^q\,dx\leqslant\int_0^1\chi_E|f|^q\,dx+z^q, \tag{3}$$

где χ_E — характеристическая функция множества E. Применяя неравенство Гельдера (с показателями $2/2-q$ и $2/q$) находим

$$\int_0^1\chi_E\cdot|f|^q\,dx\leqslant\left(\int_0^1\chi_E^{\frac{2}{2-q}}\,dx\right)^{\frac{2-q}{2}}\cdot\left(\int_0^1 f^2dx\right)^{1/2}\leqslant(mE)^{\frac{2-q}{2}}.$$

Из последнего неравенства и (3) следует, что $y^q\leqslant z^q+(mE)^{\frac{2-q}{2}}$.

---

* Через K, C, C_1, $\cdots$ в дальнейшем обозначаются положительные абсолютные постоянные.

Лемма 1 доказана.

Лемма 1′. *Если для* q, $1 \leqslant q < 2$ *и* $y \in (0, 1)$ *для вектора* $x = \{x_i\} \in R^n$ *имеем* $\|x\|_{l_2^n} \leqslant 1$, $\|x\|_{l_q^n} \geqslant y n^{1/q - 1/2}$, *то*

$$\left|\left\{i : |x_i| \geqslant \frac{1}{2} y n^{-1/2}\right\}\right| > n\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2q}{2-q}}.$$

В самом деле, рассмотрим функцию $f(x)$ с $f(x) = x_i \sqrt{n}$ при $\frac{i-1}{n} < x \leqslant \frac{i}{n}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $\|f\|_{L^2} \leqslant 1$, а

$$\|f\|_{L^q} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \, n^{q/2}\right)^{1/q} = \|x\|_{l_q^n} \cdot n^{1/2 - 1/q} \geqslant y.$$

Поэтому по лемме 1

$$\left|\left\{i : |x_i| \geqslant \frac{1}{2} y n^{-1/2}\right\}\right| = n \cdot m\left\{x \in (0, 1) : |f(x)| \geqslant \frac{y}{2}\right\} > \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2q}{2-q}}.$$

Лемма 2. *Для* $x = \{x_i\} \in R^m$ *с* $\|x\|_{l_2^m} \leqslant 1$, $1 \leqslant q < 2$ *и* $y \in (0, 1)$ *справедливо неравенство*

$$|G_y| \equiv \left|\left\{\Omega \in E_m^n : \left(\sum_{i \in \Omega} |x_i|^q\right)^{1/q} \geqslant y n^{1/q - 1/2}\right\}\right| \leqslant C_m^n \cdot (B_q')^n \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{n \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2q}{2-q}}}.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $Q_y = \left\{i \in [1, m] : |x_i| \geqslant \frac{1}{2} y \cdot n^{-1/2}\right\}$. Так как $\|x\|_{l_2^m} \leqslant 1$, то

$$|Q_y| \leqslant \frac{4n}{y^2}. \tag{4}$$

В силу леммы 1′ справедливо соотношение

$$G_y \subset \left\{\Omega \in E_m^n : |\Omega \cap Q_y| > n\left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q}\right\} \equiv G_y'. \tag{5}$$

Для оценки $|G_y'|$ для данной четверки чисел m, n, r, p с $m \geqslant 2n$, $r \leqslant n$, $r \leqslant p$, $m \geqslant p \cdot 2$ оценим количество $|G(m, n, r, p)|$ наборов $\Omega \in E_m^n$ таких, что $|\Omega \cap [1, p]| \geqslant r$.

Имеем

$$|G\, m\, (n, r, p)| = \sum_{s=r}^{\min(p, n)} C_p^s \cdot C_{m-p}^{n-s}.$$

Пользуясь оценкой $C_p^s < K^s\left(\frac{p}{s}\right)^s$, из последнего равенства находим,

$$|G(m, n, r, p)| < K^n \sum_{s=r}^{\min(p, n)} \left(\frac{p}{s}\right)^s \left(\frac{m-p}{n-s}\right)^{n-s} \leqslant$$

$$\leqslant K_1^n p^r (m-p)^{n-r} \cdot \max_{1<s<n} \left(\frac{1}{s^s} \cdot \frac{1}{(n-s)^{n-s}}\right) \leqslant C^n n^{-n} p^r m^{n-r}. \qquad (6)$$

В силу (4) и (5) $|G_y^{'}|$ не превосходит $|G(m, n, r, p)|$ с

$$r = \left[n \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q} \right], \; p = \left[\frac{4n}{y^2}\right].$$

Поэтому из (6) вытекает, что

$$\frac{1}{C_m^n} |G_y^{'}| \leqslant \frac{1}{C_m^n} C^n n^{-n} \left[\frac{4n}{y^2}\right]^{n \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2q}{2-q}}} \cdot m^{n-n\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2q}{2-q}}}. \qquad (7)$$

Так как $C_m^n \geqslant C_1^{-n} \left(\frac{m}{n}\right)^n$, то правая часть в (7) не превосходит

$$C_1^n \exp\left\{ \ln\left(\frac{n}{my^2}\right) \cdot n \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q} \right\}. \qquad (8)$$

В силу соотношения (5) и неравенства (7), учитывая (8) и тот факт, что $\sup\limits_{0<y<1} y^{-2\left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q}} \leqslant C_q$, находим

$$|G_y| \leqslant (B_q^{'})^n \cdot \exp\left[n \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q} \ln\frac{n}{m} \right] \cdot C_m^n; \; B_q^{'} = C_q \cdot C_1.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Хорошо известно, (см., напр., [3]), что при $n=1, 2, \cdots$ на сфере $\{x : \|x\|_{l_2^n} = 1\}$ существует набор векторов $\Delta_n = \{e\}$ с $|\Delta_n| < C^n$ такой, что для всякого вектора x, $\|x\|_{l_2^n} = 1$, найдется вектор $e \in \Delta_n$ с $\|x - e\|_{l_2^n} \leqslant \frac{1}{4}$. Легко видеть, что для любого набора $\Omega \in E_m^n$

$$\|A(\Omega)\|_{(2, q)} \leqslant 2 \max_{\{e_j\} = e \in \Delta_n} \left(\sum_{i \in \Omega} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \right)^q \right)^{1/q}, \qquad (9)$$

Поэтому

$$\{\Omega \in E_m^n : \|A(\Omega)\|_{(2, q)} \geqslant y n^{1/q - 1/2}\} \subset \bigcup_{\{e_j\} = e \in \Delta_n} \left\{ \Omega \in E_m^n ; \left(\sum_{i \in \Omega} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \right)^q \right)^{1/q} \geqslant \frac{1}{2} y n^{1/q - 1/2} \right\}, \qquad (10)$$

следовательно

$$f(y) \leqslant C^n \max_{\{e_j\}-e\in\Delta_n} \left|\left\{\Omega\in E_m^n: \left(\sum_{i\in\Omega}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j\right)^q\right)^{1/q} \geqslant \frac{1}{2}\, yn^{1/q-1/2}\right\}\right|. \quad (11)$$

Так как $\|A\|_{(2,2)} \leqslant 1$, то для любого вектора

$$e=\{e_j\}, \left(\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \|e\|_{l_2^n},$$

и оценивая правую часть в(11) с помощью леммы 2, получим (см. (11)):

$$f(y) \leqslant C^n \cdot (B_q')^n\, C_m^n \left(\frac{n}{m}\right)^{-n\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2q}{2-q}}} = C_m^n B_q^n \left(\frac{n}{m}\right)^{n\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2q}{2-q}}}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Существует такая абсолютная постоянная $B>0$, что для любой $m\times n$ матрицы $A=\{a_{ij}\}$ с $\|A\|_{(2,2)} \leqslant 1$ найдется набор $\Omega\in E_m^n$, для которого $\|A(\Omega)\|_{(2,2)} \leqslant B\left(\ln\frac{m}{n}\right)^{-1/2}$.*

В доказательстве теоремы 2 используется, кроме следствия 1, следующий результат Гротендика [4], сформулированный здесь в нужном нам частном случае.

Теорема В. (Гротендик). Существует абсолютная постоянная C, такая, что для любого линейного оператора $T: l_2^n \to L^1(0, 1)$ найдется множество

$$E\subset(0,1),\ mE > \frac{3}{4} \quad \text{с} \quad \sup_{y\in B_2^n}\|T(y)\|_{L^2(E)} \leqslant C\cdot\|T\|.$$

Следствие В. Для любой матрицы $B=\{b_{ij}\}_{j=1}^n{}_{i=1}^{2n}$ найдется набор Ω, $\Omega\subset[1,2n]$, $|\Omega|\geqslant n$ такой, что

$$\|\{b_{ij}\}\ i\in\Omega,\ 1\leqslant j\leqslant n\|_{(2,2)} \leqslant \frac{4C}{n^{1/2}}\|B\|_{(2,1)}. \quad (12)$$

Для доказательства следствия В рассмотрим оператор $T: l_2^n\to L^1$, переводящий вектор $y=\{y_j\}\in l_2^n$ в функцию $f(z)$, где

$$f(z) = \sum_{j=1}^n y_j b_{ij} \quad \text{при} \quad \frac{i-1}{n} < z \leqslant \frac{i}{n},\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

Найдем, пользуясь теоремой В, множество $E\subset[0,1]$, $mE\geqslant\frac{3}{4}$, для которого $\|T(y)\|_{L^2(E)} \leqslant C \sup_{y\in B_2^n}\|T(y)\|_{L^1(0,1)}$ и положим

$$\Omega=\left\{i\in[1,2n]; m\left(E\cap\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2n}\right\}.$$

Легко видеть, что $|\Omega|\geqslant n$ и что для набора Ω выполнено (12).

Доказательство теоремы 2. Ясно, что можно считать, что $m \geqslant 4n$. Из следствия 1 (при $q=1$, $k=2$) вытекает существование такой постоянной C, что для матрицы $A' = \{a'_{ij}\}$ $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, где $a'_{ij} = a_{ij}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$ и $a'_{ij} = 0$ при $j > n$, найдется набор $\Omega' \in E_m^{2n}$ с

$$\|A'(\Omega')\|_{(2,1)} \leqslant \frac{C_1 n^{1/2}}{\ln^{1/2} \frac{m}{n}}. \tag{13}$$

Применяя теперь следствие В к матрице $A(\Omega') = \{a_{ij}\}$ $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \in \Omega'$, для которой, в силу (13), $\|A(\Omega')\|_{(2,1)} \leqslant C_1 n^{1/2} \ln^{1/2} \frac{m}{n}$, найдем набор $\Omega \subset \Omega'$, $\Omega \subset E_m^n$ с $\|A(\Omega)\|_{(2,2)} \leqslant \dfrac{4CC'}{\ln^{1/2} \frac{m}{n}}$. Теорема 2 доказана.

2°. В теории ортогональных рядов весьма давно известна следующая задача, восходящая к А. Н. Колмогорову: пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$ — ортонормированная система функций. Существует ли перестановка натурального ряда $\sigma = \{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой система $\{\varphi_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой сходимости (т. е. всякий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_{k_n}(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

сходится почти всюду)? „Конечномерный" вариант этой задачи имеет следующий вид: существует ли абсолютная постоянная C такая, что для любого ортонормированного набора $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{N}$, $x \in (0, 1)$ найдется такая перестановка $\{k_n\} = \sigma \in S^N$, что

$$\sup_{\{a_n\} \in B_2^N} \ \sup_{N(x),\, 1 < N(x) < N} \ \sup_{y > 0} \frac{1}{y^2} m\left\{x : \left|\sum_{n=1}^{N(x)} a_n \varphi_{k_n}(x)\right| > y\right\} \leqslant C? \tag{14}$$

А. Гарсиа в книге [5] высказывает гипотезу о справедливости оценки, более сильной чем (14), а именно, что

$$\inf_{\{k_n\} = \sigma(\Phi) \in S^N} \ \sup_{\{a_n\} \in B_2^n} \ \sup_{N(x),\, 1 < N(x) < N} \left\| \sum_{n=1}^{N(x)} a_n \varphi_{k_n}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \leqslant C. \tag{15}$$

Напомним, что в силу леммы Меньшова—Радемахера (см. [6], стр. 188) для любого ортонормированного набора

$$\sup_{\{a_n\} \in B_2^N} \ \sup_{N(x),\, 1 < N(x) < N} \left\| \sum_{k=1}^{N(x)} a_n \varphi_n(x) \right\|_{L^2(0,1)} \leqslant C \ln N. \tag{16}$$

Сам А. Гарсиа в работе [7] доказал следующий результат:

Теорема С (Гарсиа). *Для любого ортонормированного набора $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{N}$ и любого набора $\{a_n\} \in B_2^N$ найдется перестановка $\{k_n\} = \sigma = \sigma(\Phi, \{a_n\})$, для которой*

$$\sup_{N(x),\,1\le N(x)\le N}\left\|\sum_{n=1}^{N(x)} a_{k_n}\varphi_{k_n}(x)\right\|_{L^2(0,1)}\leqslant C. \qquad (17)$$

(Заметим, что доказательство этого результата основано на оценке для данного набора чисел

$$\{b_n\}_{n=1}^N,\ \sum_{n=1}^N b_n^2=1,\ \sum_{n=1}^N b_n=0$$

среднего

$$S_p(\{b_n\})=\left(\frac{1}{N!}\sum_{\sigma=\{k_n\}\in S^N}\sup_{1\le s\le N}\left|\sum_{N=1}^{s} b_{k_n}\right|^p\right)^{1/p}.$$

Первоначально рассуждение А. Гарсиа были сложными, в [5] им было дано простое доказательство оценок для $S_p(\{b_n\})$, вполне аналогичное доказательству классического неравенства А. Н. Колмогорова для мажоранты частных сумм ряда по системе независимых функций (см. [8], стр. 68).

Функция распределения

$$f(y,\ \{b_n\})=\left|\left\{\sigma\in S^n:\sup_{1\le s\le N}\left|\sum_{n=1}^{s} b_{k_n}\right|>y\right\}\right|$$

ведет себя во многом сходно с функцией распределения суммы независимых случайных величин. Можно показать, например, что для любого набора $\{b_n\}_{n=1}^N$, $\sum_{n=1}^N b_n=0$

$$\frac{1}{N!}f(y,\{b_n\})\leqslant Cm\left\{x\in(0,1):\left|\sum_{1}^{N} b_n r_n(x)\right|>C_1 y\right\};\ y>0,$$

где $\{r_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — система Радемахера.

Из сравнения задачи А. Н. Колмогорова или предположения Гарсиа (14) с теоремой Гарсиа (см. (17)) видно, что оценка (17) дает решение более простой задачи. Другим возможным упрощением задачи Колмогорова является получение для данного ортонормированного набора $\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ и данной функции $N(x), 1\leqslant N(x)\leqslant N$ оценок величины

$$\inf_{\{k_n\}=\sigma(\varphi,N(x))}\ \sup_{\{a_n\}\in B_2^N}\left\|\sum_{1}^{N(x)} a_n\varphi_{k_n}(x)\right\|_{L^p(0,1)}. \qquad (18)$$

В п° 2 получены результаты, связанные с оценкой величины (18). Рассматривается модельная задача об оценке для данной матрицы $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ величины

$$\inf_{\sigma\in S^n}\|(A_\sigma)^*\|_{(2,q)}$$

(обозначения A_σ и A^* введены в начале этой работы).

Теорема 3. *Для любой матрицы* $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *с* $\|A\|_{(2,2)}\leqslant 1$ *и числа* q *с* $1\leqslant q<2$ *найдется такая перестановка строк* σ_0, *что*

$$\|(A_\sigma)^*\|_{(2,q)}\leqslant C_q\, n^{1/q-1/2}.$$

Прежде чем доказывать теорему 3 отметим, что из (16) следует (см. также [9]), что для любой $n\times n$ матрицы A

$$\|A^*\|_{(2,2)}\leqslant C\ln n\,\|A\|_{(2,2)}. \tag{19}$$

Поэтому для любой $n\times n$ матрицы A и $q\in[1,2)$

$$\|A^*\|_{(2,q)}\leqslant n^{1/q-1/2}\|A^*\|_{(2,2)}\leqslant C(\ln n)\cdot n^{1/q-1/2}\,\|A\|_{(2,2)}. \tag{20}$$

Обычный в этих вопросах пример матрицы Гильберта $H_n=\{h_{ij}\}$ с $h_{ij}=\dfrac{1}{i-j}$ при $1\leqslant i,\ j\leqslant n,\ i\neq j$ и $h_{ii}=0,\ 1\leqslant i\leqslant n$, для которой $\|H_n\|_{(2,2)}\leqslant 2\pi$ (см. [1]), показывает, что оценка (20) неулучшаема.

Лемма 3 (см., напр., [8], стр. 76, п. 8). *Пусть* $\{f_i(x)\}_{i=1}^{s}$ — *набор независимых функций, заданных на отрезке* $[0,1]$ *и таких, что* $m\{x:f_i(x)=1\}=\lambda>0,\ m\{x:f_i(x)=0\}=1-\lambda,\ 1\leqslant i\leqslant s$. *Тогда*

$$m\left\{x:\left|\sum_{1}^{s}f_i(x)\right|\leqslant\frac{\lambda s}{4}\right\}<\gamma^s;\ 0<\gamma<\gamma(\lambda)<1.$$

Из леммы 1 непосредственно вытекает

Лемма 3′. *Пусть* $\{f_i(x)\}_{i=1}^{s},\ x\in(0,1)$, — *такой набор функций, принимающих только значения* 0 *и* 1, *что для каждого набора* $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{k}$ $1\leqslant k<s$ *с* $\varepsilon_i=0$ *или* 1

$$m\{(x:f_i(x)=\varepsilon_i,\ 1\leqslant i\leqslant k\}\cap\{x:f_{k+1}(x)=1\})>$$
$$\geqslant\lambda m\{x:f_i=\varepsilon_i,\ 1\leqslant i\leqslant k\},$$

где $\lambda>0$. *Тогда*

$$m\left\{x:\sum_{1}^{s}f_i(x)\leqslant\frac{\lambda}{4}s\right\}<\gamma^s,\ 0<\gamma=\gamma(\lambda)<1.$$

Доказательство теоремы 3. 1. Обозначим через ρ абсолютную постоянную $\rho(1/2)$ (см. теорему А). Для каждой матрицы $B=\{a_{ij}\},\ b_1\leqslant i,\ j\leqslant b_2$ с $1\leqslant b_1<b_2\leqslant n$ и $b_2-b_1>\rho^{-1}$ определим ее разбиение на четыре подматрицы $(\hat{B})_r,\ r=1,2,3,4$, положив

$$(\hat{B})_1=\{a_{ij}\},\ q+1\leqslant i,\ j\leqslant b_2;\ (\hat{B})_2=\{a_{ij}\},\ q+1\leqslant i\leqslant b_2,\ b_1\leqslant j\leqslant q,$$
$$(\hat{B})_3=\{a_{ij}\},\ b_1\leqslant i,\ j\leqslant q,\ (\hat{B})_4=\{a_{ij}\},\ b_1\leqslant i\leqslant q,\ q+1\leqslant j\leqslant b_2,$$

где число $q=q(b)$ определяется из соотношений

$$b_2-q\leqslant\rho(b_2-b_1+1),\ b_2-q+1>\rho(b_2-b_1+1).$$

2. Построим последовательность разбиений $\Delta_s=\Delta_s(A),\ s=0,1,\cdots,s_0$ данной матрицы A на подматрицы. Нулевое разбиение Δ_0

состоит из самой матрицы $A = B^0_1$. Если разбиение Δ_{s-1}, $s > 1$ построено и состоит из подматриц $\{B^{s-1}_\nu\}^{\nu_{s-1}}_{\nu=1}$, то для построения разбиения Δ_s, те из матриц разбиения Δ_{s-1}, которые пересекают диагональ $i=j$ матрицы A (все они по построению будут квадратными) и имеют порядок $\geqslant 1+\rho^{-1}$ делятся на четыре части $\widehat{(B^{s-1}_\nu)}_r$, $1 \leqslant r \leqslant 4$ по правилу, описанному в п. 1. На каком-то шаге с номером $s_0 \leqslant C \ln n$ указанный процесс остановится. Разбиение Δ_{s_0} обозначим через Δ.

3. Укажем искомую перестановку $\{k_j\}^n_{j=1} = \sigma_0 = \sigma_0(A) \in S^n$. Для этого предварительно построим набор перестановок σ_r, $1 \leqslant r \leqslant s_0$, причем σ_0 будет совпадать с σ_{s_0}. Для построения σ_1, воспользовавшись теоремой А, примененной к матрице $\{a_{ij}\}$, $q+1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ с $q = q(A)$ (см п. 1°), найдем такой набор $\Omega \subset [1, n]$, $|\Omega| = n-q$, что

$$\|\{a_{ij}\},\ q+1 \leqslant i \leqslant n,\ j \leqslant \Omega\|_{(2,\,2)} \leqslant \frac{1}{2}$$

и в качестве σ_1 возьмем любую перестановку σ, для которой $\sigma(\Omega) = [q+1, n]$.

Если перестановки $\sigma_1, \sigma_2 \cdots, \sigma_{s-1}$ $s \leqslant s_0$ построены, то для построения σ_s рассмотрим все подматрицы $A^{s-1}_\mu = \{a_{i,\,\sigma_{s-1}(j)},\}$ $i_\mu + 1 \leqslant i$, $j \leqslant i_{\mu+1}$, $1 \leqslant \mu \leqslant \mu_{s-1}$ разбиения Δ_{s-1} матрицы $\{a_{i,\,\sigma_{s-1}(j)}\}^n_{i,\,j=1}$, которые пересекают диагональ $i=j$ и имеют порядок $\geqslant 1+\rho^{-1}$ и, также как при построении перестановки σ_1, найдем, пользуясь теоремой А, такие наборы целых чисел $\Omega_\mu \subset [i_\mu + 1, i_{\mu+1}]$, $1 \leqslant \mu \leqslant \mu_{s-1}$, что

$$|\Omega| = i_{\mu+1} - q\ (A^{s-1}_\mu) \quad \text{(см. п. 1) и}$$

$$\|\{a_{i,\,\sigma_{s-1}(j)}\},\ q\ (A^{s-1}_\mu)+1 \leqslant i \leqslant i_{\mu+1},\ j \in \Omega\|_{(2,\,2)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|A^{s-1}_\mu\|_{(2,\,2)};\ 1 \leqslant \mu \leqslant \mu_{s-1}. \tag{21}$$

Затем возьмем такую перестановку σ, что

$$\left.\begin{aligned} &1) \quad \sigma([i_\mu+1,\ i_{\mu+1}]) = [i_\mu+1,\ i_{\mu+1}],\ 1 \leqslant \mu \leqslant \mu_{s-1},\\ &2) \quad \sigma(\Omega_\mu) = [q\ (A^{s-1}_\mu)+1,\ i_{\mu+1}],\ 1 \leqslant \mu \leqslant \mu_{s-1} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

и положим $\sigma_s = \sigma \cdot \sigma_{s-1}$.

4. Докажем, что перестановка $\sigma_{s_0} = \sigma_0 = \{k_j\}$ искомая, для этого оценим норму $\|\{a_{ik_j}\}.\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n\|_{(2,\,q)}$. Пусть $\{(\hat{R}^s_\mu)_2\}^{\mu_s}_{\mu=1}$ — набор матриц, построенных по правилу, описанному в п. 1 для каждой, пересекающей главную диагональ и имеющей порядок $\geqslant 1+\rho^{-1}$, матрицы R^s_μ разбиения Δ_s матрицы $\{a_{i\sigma_0(j)}\}$ $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. Тогда легко видеть что матрица

$$Q = \bigcup_{s=1}^{s_0-1} \bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} (\hat{R}^s_\mu)_2$$

имеет вид

$$Q = \{a_{i\sigma_0(j)}\},\ 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant j_i,\ \text{где}\ |j_i - i| \leqslant \frac{1}{\rho},\ 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{23}$$

Из (23) и оценки $\|A\|_{(2,2)} \leqslant 1$ следует, что

$$\|Q - (A_{\sigma_0})^{*}\|_{(2,2)} \leqslant C,$$

а поэтому

$$\|Q - (A_{\sigma_0})^{*}\|_{(2,q)} \leqslant Cn^{1/q-1/2}. \tag{24}$$

Оценим норму $\|Q\|_{(2,q)}$. Для этого сначала оценим $\left\|\bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} (\hat{R}_\mu^s)_2\right\|_{(2,q)}$ при данном s, $1 \leqslant s \leqslant s_0 - 1$. Если для каждой матрицы R_μ^s через $(\hat{R}^k_{\mu\,(k)})_{\alpha_k}$ (где $\alpha_k = \alpha_k(\mu, s) = 1$ или 3) обозначить ту матрицу разбиения Δ_{k+1}, $0 \leqslant k \leqslant s-2$, которая содержит матрицу R_μ^s, то по построению перестановки σ_0

$$\|(\hat{R}_\mu^s)_2\|_{(2,2)} \leqslant \|R_\mu^s\|_{(2,2)} \leqslant 2^{-p(\mu,s)}, \tag{25}$$

где $p(\mu, s) = \sum\limits_{k\in[0,\, s-2]:\ \alpha_k=1} 1.$

Из леммы 3′ нетрудно вывести, что при некоторых постоянных γ, $0<\gamma<1$ и $c_0>0$ сумма порядков матриц

$$\sum_{\mu\,:\,p(\mu,s)<c_0 s} \operatorname{rank}(R_\mu^s) \leqslant n\gamma^s. \tag{26}$$

Очевидно, что

$$\left\|\bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} (\hat{R}_\mu^s)_2\right\|_{(2,q)} \leqslant \|R_s'\|_{(2,q)} + \|R_s''\|_{(2,q)}, \tag{27}$$

где

$$R_s' = \bigcup_{\mu\in[1,\,\mu_s]:\ p(\mu,s)<c_0 s} R_\mu^s\,;\quad R_s'' = \bigcup_{\mu\in[1,\,\mu_s]:\ p(\mu,s)>c_0 s} R_\mu^s.$$

Пользуясь для оценки нормы $\|R_s'\|_{(2,q)}$ неравенством

$$\|B\|_{(2,q)} \leqslant (\operatorname{rank} B)^{1/q-1/2}\|B\|_{(2,2)}, \tag{28}$$

неравенством $\|R_s'\|_{(2,2)} \leqslant 1$ (вытекающим из того, что $\|R_s'\|_{(2,2)} \leqslant \max\limits_\mu \|A_\mu^s\|_{(2,2)} \leqslant \|A\|_{(2,2)} < 1$) и оценкой (26), получим

$$\|R_s'\|_{(2,q)} \leqslant n^{1/q-1/2}\gamma^{s(1/q-1/2)};\ 0<\gamma<1. \tag{29}$$

Для оценки $\|R_s''\|_{(2,q)}$ используем неравенства (25) и (28) и найдем

$$\|R_s''\|_{(2,q)} \leqslant n^{1/q-1/2}\|R_s''\|_{(2,2)} \leqslant n^{1/q-1/2} \max_{\mu:p(\mu,s)>c_0 s} \|(\hat{R}_\mu^s)_2\|_{(2,2)} \leqslant$$

$$\leqslant n^{1/q-1/2} \max_{\mu:p(\mu,s)>c_0 s} \|R_\mu^s\|_{(2,2)} \leqslant 2\,n^{1/q-1/2}\cdot 2^{-c_0 s}. \tag{30}$$

Из оценок (29), (30) и (27) следует, что

$$r_s = \left\| \bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} (\hat{R}^s_\mu)_2 \right\|_{(2,\,q)} < 3 \cdot n^{1/q-1/2} \gamma_1^{s\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}; \quad 0 < \gamma_1 < 1, \tag{31}$$

а следовательно и

$$\|Q\|_{(2,\,q)} \leqslant \sum_{s=1}^{s_0-1} r_s \leqslant 3n^{1/q-1/2} \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_1^{s\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \leqslant \frac{3n^{1/q-1/2}}{1-\gamma_1^{1/q-1/2}}. \tag{32}$$

Соединяя неравенства (32) и (24), получаем нужную оценку для $\|(A_{n_0})^{\#}\|_{(2,\,q)}$. Теорема 3 доказана.

В заключение п. 2° сформулируем одно утверждение, которое можно доказать, используя следствие 2 и разбиение матрицы $\{a_{k_{i}j}\}$ на двоичные блоки.

Утверждение. *Для любой матрицы* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ с $\|A\|_{(2,\,2)} \leqslant 1$

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma=\{k_i\}\in S^n} \|(\{a_{k_i j}\})^{\#}\|_{(2,\,q)} \leqslant C_q\, (\ln^{3q\,\#\,/2q} n) \cdot n^{1/q-1/2}.$$

Утверждение дает для среднего значения по всем перестановкам столбцов матрицы A величины $\|A^{\#}\|_{(2,\,q)}$ лучшую оценку, чем тривиально вытекающая из (19) оценка $C(\ln n)\, n^{1/q-1/2}$.

3°. В этом параграфе дается оценка n-поперечника по Колмогорову $d_n(B_1^m, l_q^m)$ октаэдра B_1^m в пространстве l_q^m, при этом метод доказательства имеет общие черты с использованным в п. 1°. Определение поперечника и ряд результатов об оценках поперечников конечномерных множеств содержится в работах [10] и [11].

Хорошо известно ([12], см. также [10], стр. 237), что справедливо равенство

$$d_n(B_1^m, l_2^m) = \left(\frac{m-n}{m}\right)^{1/2}. \tag{33}$$

Из равенства (33) следует, что при $m \geqslant 2n$ и $1 \leqslant q \leqslant 2$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant d_n(B_1^m, l_q^m) \leqslant 1. \tag{34}$$

Здесь мы получим равномерную по n и $m \geqslant 2n$ оценку для поперечника $d_n(B_1^m, l_q^m)$, $2 < q < \infty$. Рассуждения, приведенные в этом параграфе, применимы и если $m < 2n$, но мы ограничиваемся важным для приложений к оценкам поперечников функциональных классов случаем $m \geqslant 2n$.

Теорема 4. *При* $n = 1, 2, \cdots$, $m \geqslant 2n$ *и* $2 < q < \infty$ *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{4}\min(1,\, m^{1/q} n^{-1/2}) \leqslant d_n(B_1^m, l_q^m) \leqslant C'(q) \cdot \min(1,\, m^{1/q} \cdot n^{-1/2}). \tag{35}$$

Доказательство. а) Оценка сверху. При $m > n^{q/2}$ оценка сверху очевидна, так как в этом случае $\min(1, m^{1/q} n^{-1/2}) = 1$, а поперечник $d_n(B_1^m, l_q^m) \leqslant 1$ для любых чисел m, n, q. При $m \leqslant n^{q/2}$, пользуясь очевидным неравенством $\|x\|_{l_q^m} \leqslant m^{1/q} \|x\|_{l_\infty^m}$ и оценкой поперечника $d_n(B_1^m, l_\infty^m)$, полученной в заметке автора [13], согласно которой, при $m \leqslant n^\lambda$, $d_n(B_1^m, l_\infty^m) \leqslant n^{-1/2} C(\lambda)$, имеем

$$d_n(B_1^m, l_q^m) \leqslant m^{1/q} d_n(B_1^m, l_\infty^m) < C(q) \cdot m^{1/q} \cdot n^{-1/2}.$$

б) Оценка снизу. При $n = 1$ оценка легко проверяется непосредственно, поэтому в дальнейшем считаем, что $n > 1$, $m \geqslant 2n$.

Лемма 4. ([14], *см. также* [10], *стр.* 237). *Для любой плоскости $L \subset R^m$, $\dim L = n$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_{l_2}^2(L, z_i) \geqslant m - n,$$

где при

$$1 \leqslant i \leqslant m,\ z_i = \left\{ 0, \cdots, \frac{1}{i}, \cdots, 0 \right\},\ \text{а}\ \rho_{l_q}(L, z) = \inf_{x \in L} \|x - z\|_{l_q^m}.$$

Доказательство леммы очень просто, тем не менее она часто оказывается весьма полезной, в частности, из нее следует оценка снизу для $d_n(B_1^m, l_2^m)$ (см. (33)).

Лемма 4′. *Для любых наборов векторов $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ и $\{\xi_i\}_{i=1}^{2n}$ e_i, $\xi_i \in R^n$ таких, что скалярное произведение $(e_i, \xi_i) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant 2n$, справедливо неравенство*

$$\sum_{i \neq j} |(e_i, \xi_j)|^2 \geqslant n. \tag{36}$$

В самом деле, рассмотрим матрицу A с $2n$ столбцами и n строками, при этом i-ый столбец этой матрицы совпадает с вектором e_i. Предположив, что оценка (36) не верна, мы получим, что для подпространства $L \subset R^{2n}$, натянутого на вектора—строки матрицы A $\sum\limits_{i=1}^{2n} \rho_{l_2}^2(L, z_i) < n$, что противоречит лемме 4.

Пусть теперь число q, $2 < q < \infty$ фиксировано. Если для пары чисел (n, m) имеет место неравенство $d_n(B_1^m, l_q^m) > \frac{1}{4}$, то

$$\frac{1}{4} \min(1, m^{1/q - 1/2}) \leqslant \frac{1}{4} < d_n(B_1^m, l_\infty^m),$$

т. е. в этом случае оценка снизу в (35) верна.

В случае, если $d_n(B_1^m, l_q^m) \leqslant \frac{1}{4}$, рассмотрим плоскость $L \subset R^m$, $\dim L = n$, для которой

$$\sup_{x\in B_1^m} \rho_{l_q}(L,\ x)=\max_{1<l<m} \rho_{l_q}(L,\ z_l)=d_n(B_1^m,\ l_q^m). \tag{37}$$

Выбрав в L базис $\{y_\nu\}_{\nu=1}^n$, $y_\nu\in R_\nu^m$, плоскость L зададим матрицей с n строками $\{y_\nu\}_{\nu=1}^n$ и m столбцами $\{l_l\}_{l=1}^m$. Из (37) и неравенства $d_n(B_1^m,\ l_q^m)\leqslant\frac{1}{4}$ следует, что найдется набор векторов $\{\tilde\xi_l\}_{l=1}^m$, $\tilde\xi_l\in R^n$, такой, что

а) $$\sum_{j\neq i}|(\tilde\xi_i,e_j)|^q< d_n^q(B_1^m,\ l_q^m),$$

$$1\leqslant i\leqslant m.$$

б) $$\frac{3}{4}\leqslant(\tilde\xi_i,\ e_i)=r_i\leqslant\frac{5}{4},$$

Следовательно, для набора векторов $\xi_l=\frac{1}{r_l}\tilde\xi_l$ справедливы оценки

а) $$\sum_{j\neq i}|(\xi_i,\ e_j)|^q\leqslant\left(\frac{4}{3}\right)^q d_n^q(B_1^m,\ l_q^m);$$

$$1\leqslant i\leqslant m, \tag{38}$$

б) $$(\xi_i,\ e_i)=1.$$

Рассмотрим сумму

$$S=\sum_{\substack{1\leqslant i,\ j\leqslant m\\ i\neq j}}|(\xi_i,\ e_j)|^q.$$

Из (38) следует, что

$$S\leqslant m\left(\frac{4}{3}\right)^q d_n^q(B_1^m,\ l_q^m). \tag{39}$$

Теперь рассмотрим сумму

$$T=\sum_{\Omega}\sum_{\substack{i,\ j\in\Omega\\ i\neq j}}|(\xi_i,\ e_j)|^q,$$

где в сумме T внешнее суммирование производится по всем наборам $\Omega\in E_m^{2n}$. Член $|(\xi_i,\ e_j)|^q$ войдет в сумму T C_{m-2}^{2n-2} раз, поэтому

$$T\leqslant C_{m-2}^{2n-2}\cdot S\leqslant C_{m-2}^{2n-2}\cdot m\left(\frac{4}{3}\right)^q\cdot d_n^q(B_1^m,\ l_q^m). \tag{40}$$

Из (40) следует, что можно найти такой набор $\Omega^0\in E_m^n$, что

$$P\equiv\sum_{\substack{i,\ j\in\Omega^0\\ i\neq j}}|(\xi_i,\ e_j)|^q\leqslant T\cdot(C_m^{2n})^{-1}<\left(\frac{4}{3}\right)^q\cdot d_n^q\cdot(B_1^m,\ l_q^m)\cdot m\cdot\frac{C_{m-2}^{2n-2}}{C_m^{2n}}. \tag{41}$$

Так как $C_{m-2}^{2n-2}\cdot(C_m^{2n})^{-1}=2n(2n-1)\cdot(m(m-1))^{-1}$, то правая часть в (41) не превосходит

$$\left(\frac{4}{3}\right)^q d_n^q(B_1^m,\ l_q^m)\cdot\frac{4n^2}{m-1}. \tag{42}$$

Оценим теперь левую часть в (41) снизу. Пользуясь неравенством $\|x\|_{l_q^r}\geqslant r^{1/q-1/2}\|x\|_{l_2^r}$, $q>2$, $r=1, 2,\cdots$, равенством (38) п. 6) и леммой 4, получим:

$$P^{1/q}\geqslant(4n^2)^{1/q-1/2}\Big(\sum_{\substack{i,\ j\in 2^*\\ i\neq j}}(\xi_i,\ e_j)^2\Big)^{1/2}\geqslant(4\,n^2)^{1/q-1/2}\cdot n^{1/2}=4^{1/q-1/2}\cdot n^{2/q-1/2}, \tag{43}$$

$$P\geqslant 4^{1-q/2}\cdot n^{2-q/2}.$$

Из соотношений (41) и (43) выводим, учитывая (42), что

$$\left(\frac{4}{3}\right)^q\cdot d_n^q(B_1^m,\ l_q^m)\,\frac{4\,n^2}{m-1}\geqslant 4^{1-q/2}\cdot n^{2-q/2},$$

т. е.

$$d_n^q(B_1^m,\ l_q^m)\geqslant(m-1)\,n^{-q/2}4^{-q/2}\left(\frac{3}{4}\right)^q;\ d_n(B_1^m,\ l_q^m)\geqslant n^{-1/2}\times$$

$$\times(m-1)^{1/q}\cdot\frac{3}{8}\geqslant\frac{1}{4}\,n^{-1/2}\cdot m^{q/2}.$$

Теорема 4 доказана.

Математический институт
АН СССР им. В. А. Стеклова

Поступила 1.IX.1979

Բ. Ս. ԿԱՇԻՆ. l_2^n տարածությունից l_2^m տարածություն գործող սահմանափակ օպերատորների որոշ հատկությունների մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում մասնավորապես տրվում են Հիլբերտյան նորմի գնահատականներ տրված օրթոգոնալ մատրիցի ենթամատրիցների համար։ Բերվում են նաև գնահատականներ բազմաչափ օկտաեդրերի «լայնականների» համար։

B. S. KASHIN. *On certain properties of matrices of bounded operators from* l_2^n *into* l_2^m (summary)

Estimates of the Hilbert norm of the submatrices of a given orthogonal matrix are presented. Estimates of the diameters of multidimentional octahedra are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Харди, Д. Литтльвуд, Г. Полиа.* Неравенства, М., ИИЛ, 1948.
2. *Б. С. Кашин.* Об одном свойстве билинейных форм, Сообщ. АН Груз. ССР, 93.
3. *Л. Ф. Тот.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., Физматгиз, 1958.
4. *A. Grothendieck.* Resume de la theorie metrique des produits tenzoriels topologiques, Bol. Sŏc. Mat. Sao Paulo, 8, № 1—2, 1956, 1—79.
5. *A. Garsia.* Topics an almost everywhere convergence, Chicago, Markham, 1970.
6. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958.
7. *A. Garsia.* Rearrangements for Fourier series, Ann. of Math., 79, № 3, 1964, 623—629.

8. *В. В. Петров.* Суммы независимых случайных величин, М., Изд. «Наука», 1972.
9. *Д. Е. Меньшов.* Sur les series des fonctions orthogonales III, Fung. Math., 10, 1927, 375—420.
10. *В. М. Тихомиров.* Некоторые вопросы теории приближений, М., Изд. МГУ, 1976.
11. *Б. С. Кашин.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 41, № 2, 1977, 334—351.
12. *С. Б. Стечкин.* О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами, УМН, 9, № 1, 1954, 133—134.
13. *Б. С. Кашин.* О поперечниках октаэдров, УМН, 30, № 4, 1975, 251—252.
14. *А. Н. Колмогоров, А. А. Петров, Ю. М. Смирнов.* Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов, Изв. АН СССР, сер. матем, 14, 1947, 561—566.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 5, 1980 Математика

С. Л. БЕРБЕРЯН

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДАЮЩИХ НОРМАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА НА ПОДГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

1°. Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции. В случае единичного круга $D: |z| < 1$ группа T состоит из элементов $T: \{S(z) = e^{i\alpha}(z+a)(1+\bar{a}z)^{-1}$, a — произвольная точка в $D: |z| < 1$, α — произвольное действительное число$\}$. В статье [1] была сформулирована общая задача об изучении граничных свойств мероморфных функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах группы T, и в качестве первого примера была рассмотрена подгруппа $T^{\theta}: \{S_a^{\theta}(z) = (z + ae^{i\theta})(1 + ae^{-i\theta}\cdot z)^{-1}$, a изменяется в интервале $(-1, 1)$ и θ, $0 \leqslant \theta < \pi$ — фиксировано$\}$. Исследования были продолжены в статье [2]. Придерживаясь терминологии и обозначений из [1] и [2], обозначим через $\mathfrak{M}$ множество действительных функций $u(z)$, порождающих на группе T конформных автоморфизмов круга D семейство $\Phi: \{u(S(z))$; $S \in T\}$, нормальное в D в смысле Монтеля, т. е. из любой последовательности семейства Φ можно извлечь последовательность, равномерно сходящуюся на любом компакте в D или равномерно расходящуюся к $\pm\infty$.

Действительную функцию $u(z)$ отнесем к классу $\mathfrak{M}^{\theta}$ (θ, $0 \leqslant \theta < \pi$ — фиксировано), если порождаемое ею семейство $\Phi^{\theta}: \{u(S_a^{\theta}(z))$; $S_a^{\theta} \in T^{\theta}\}$ нормально в D. Обозначим для любой точки $\tau = e^{i\theta} \in C: |z| = 1$ через $H(\tau, \beta)$, $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$ область, ограниченную двумя гиперциклами, проходящими через точки $\tau = e^{i\theta}$ и $-\tau$ и образующими углы $-\beta$ и β с диаметром Λ^{θ}, проходящим через $\pm\tau$. Обозначим через $\rho(z_1, z_2)$ неевклидово расстояние между точками $z_1, z_2 \in D$.

2°. Рассмотрим граничные свойства субгармонических функций класса $\mathfrak{M}^{\theta}$ (θ, $0 \leqslant \theta < \pi$ — фиксировано).

Теорема 1. *Пусть субгармоническая функция $u(z) \in \mathfrak{M}^{\theta}$, где $0 \leqslant \theta < \pi$ — фиксировано. Пусть последовательность точек $\{z_n\}$ лежит в некоторой области $H(\theta, \beta_0)$, $-\frac{\pi}{2} < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$ и $\rho(z_n, z_{n+1}) < M$, где M — фиксированное конечное число. Если в некоторой окрестности $N_{\delta}(\tau)$ $\{z; |z - e^{i\theta}| < \delta\}$ точки $\tau = e^{i\theta}$ имеем $u(z) \leqslant a$ и*

$\lim\limits_{n\to\infty} u(z_n)=\alpha$, *то* α *является угловым граничным значением функции* $u(z)$ *в точке* $\tau=e^{i\theta}$.

Доказательство. Мы можем считать, что $\alpha>-\infty$, так как в противном случае имели бы, что $u(z)\equiv-\infty$. Без нарушения общности можно предположить, что $\tau=1$. Пусть $\{q_n\}$ — произвольная последовательность точек, лежащая в некоторой области $H(1, \beta)$ такая, что $q_n\to 1$ при $n\to\infty$. Нужно доказать, что $u(q_n)\to\alpha$ при $n\to\infty$. Для всякого $n=1, 2,\cdots$ обозначим через E_n неевклидовый перпендикуляр, опущенный из точки z_n на диаметр Λ^0 и через E'_n — неевклидовый перпендикуляр из точки q_n на диаметр Λ^0. Обозначим точки пересечения Λ^0 с E_n и E'_n, соответственно, через r_n и r'_n. Так как q_n лежат в $H(1, \beta)$ при любом $n=1, 2,\cdots$, то

$$\rho(q_n, r'_n)\leqslant M_1=\rho(0, \operatorname{arctg}\beta/2),$$

где $\rho(z, \omega)$—гиперболическое расстояние между точками z, ω круга

$$D: |z|<1,\ \rho(z, \omega)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u},\quad u=\left|\frac{z-\omega}{1-\bar{z}\omega}\right|.$$

Аналогично $\rho(z_n, r_n)\leqslant M_2=\rho(0, \operatorname{arctg}\beta_0/2)$. В силу того, что $\rho(z_n, z_{n+1})<M$ при $n=1, 2,\cdots$, имеем, что и $\rho(r_n, r_{n+1})<M'$. Не нарушая общности допустим, что последовательность точек $\{r'_k\}_1^\infty$ отлична от последовательности $\{r_k\}_1^\infty$ и что r'_k при любом k лежит между r_{n_k} и r_{n_k+1}. Следовательно

$$\rho(r_{n_k}, r'_k)\leqslant\rho(r_{n_k}, r_{n_k+1})\leqslant M'$$

и в силу неравенства треугольника имеем

$$\rho(r_{n_k}, q_k)\leqslant\rho(r_{n_k}, q'_k)+\rho(r'_k, q_k)\leqslant M'+M_1.$$

Обозначим $K: \{z\in D, |z|\leqslant th(M'+M_1+M_2+1)\}$ и для произвольного $k=1, 2,\cdots$ рассмотрим отображение

$$S_k(z)=\frac{z+r_{n_k}}{1+r_{n_k}\cdot z}.$$

При достаточно больших k имеем $S_k(z)\subset N_\delta(\tau)$, если $z\in K$. Поэтому $u(S_k(z))\leqslant\alpha$ для всех $z\in K$ и $k>K_1$. Определим последовательности точек $\{z'_{n_k}\}$ и $\{q'_k\}$ из условий $S_k(z'_{n_k})=z_{n_k}$ и $S_k(q'_k)=q_k$, $k=1, 2,\cdots$. В силу инвариантности метрики ρ при отображении $S(z)\in T$ и условия $S_k(0)=r_{n_k}$ будем иметь, что последовательности $\{z'_{n_k}\}$ и $\{q'_k\}$ лежат в K. Так как $u(z)\in\mathfrak{M}^0$, то существует подпоследовательность $u(S_{k_\mu}(z))$, равномерно сходящаяся на K к субгармонической функции $U(z)$ или равномерно расходящаяся к $\pm\infty$ на K. Подпоследовательности $\{z_{n_{k_\mu}}\}$ и $\{q_{k_\mu}\}$ имеют по крайней мере по одной предельной точке K, которые обозначим соответственно z'_0 и q'_0 и $\lim\limits_{\mu\to\infty} u(S_{k_\mu}(z_{n_{k_\mu}}))=\alpha$.

Допустим, что α—конечное число. Тогда предельная функция $U(z) \neq \neq \pm\infty$ субгармоническая в K и $U(z_0') = \alpha$. В силу принципа максимума для субгармонических функций имеем, что $U(z) \equiv \alpha$. Отсюда получаем, что $\lim\limits_{\mu\to\infty} u(q_{k_\mu}) = \alpha$.

В случае $\alpha = +\infty$ имеем, что предельная функция $U(z) \equiv +\infty$, откуда и $\lim\limits_{\mu\to+\infty} u(q_{k_\mu}) = +\infty$. Итак, каждая последовательность точек $\{q_n\}$, принадлежащая некоторой области $H(1, \beta)$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ и имеющая $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$, содержит подпоследовательность $\{q_{n_\mu}\}$, по которой $\lim\limits_{\mu\to\infty} u(q_{n_\mu}) = \alpha$. Если бы $\lim\limits_{n\to\infty} u(q_n) \neq \alpha$, то существовала бы некоторая подпоследовательность $\{q_{n_\nu}\}$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} q_{n_\nu} = 1$, по которой $\lim\limits_{\nu\to\infty} u(q_{n_\nu}) = \beta$, $\beta \neq \alpha$. Последовательность $\{q_{n_\nu}\}$ обязана содержать подпоследовательность, по которой $u(z)$ стремится к α. Противоречие показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} u(q_n) = \alpha$ для любой последовательности $\{q_n\}$ в произвольной области $H(1, \beta)$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$. Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 для функций класса $\mathfrak{M}$ в случае, когда вместо последовательности $\{z_n\}$ берется некасательная кривая, доказано Миком другим способом.

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 без предположения ограниченности сверху неверно даже в случае некасательных кривых. Для функций класса $\mathfrak{M}$ соответствующий пример приведен Миком [см. 3].

Следствие 1. Пустч $u(z)$ — супергармоническая функция в $D: |z| < 1$, принадлежащая $\mathfrak{M}^\theta$ ($0 \leqslant \theta < \pi$ — фиксировано). Если $u(z)$ имеет асимптотическое значение α на кривой L, некасательной к $C: |z| = 1$ в точке $\tau = e^{i\theta}$ и если $u(z) > \alpha$ в окрестности $N_\delta(\tau)$, то α является угловым пределом функции $u(z)$ в точке τ.

Следствие 2. Пусть $u(z)$ — гармоническая функция в D, принадлежащая $\mathfrak{M}^\theta$, $0 \leqslant \theta < \pi$. Если $u(z)$ имеет асимптотическое значение α вдоль кривой L, некасательной к $C: |z| = 1$ в точке $\tau = e^{i\theta}$ и если α исключительное значение $u(z)$, то α является угловым пределом $u(z)$ в точке τ.

Действительно, так как $u(z)$ непрерывна в D, то исключительное значение α является либо верхней, либо нижней границей для функции $u(z)$ и соответственно с этим применяем либо теорему 1 либо следствие 1.

3°. В этом пункте мы рассмотрим граничное поведение полигармонических функций n-го порядка, принадлежащих классам $\mathfrak{M}^\theta$, $0 \leqslant \leqslant \theta < \pi$. По определению, функцию $u(z)$ называют полигармонической функцией n-го порядка, если она удовлетворяет уравнению $\Delta^n u = 0$, где Δ^n обозначает n раз примененный оператор Лапласа (см. [4]). Свойство полигармоничности инвариантно относительно конформных отображений. Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть полигармоническая функция $u(z)$ принадлежит $\mathfrak{M}^\theta$, $0 \leqslant \theta < \pi$. Если существует β_0, $0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$ такое, что $u(z) \to \alpha$ при $z \to \tau = e^{i\theta}$ (или $\tau = -e^{i\theta}$) внутри $H(\tau, \beta_0)$, то α будет угловым граничным значением функции $u(z)$ в точке $\tau = e^{i\theta}$ (или $\tau = -e^{i\theta}$).*

Доказательство. Пусть $(\tau = 1$ и $\beta_0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ такое, что $H(1, \beta_0) \subset H(1, \beta)$, а $\{z_n\}$ — произвольная последовательность точек в $H(1, \beta)$ такая, что $z_n \to 1$ при $n \to \infty$. Для произвольного n, $n = 1, 2, \cdots$ опустим из точки z_n на диаметр Λ° неэвклидовый перпендикуляр E_n и обозначим через A_n и B_n два гиперцикла неевклидового расстояния $\rho = 1$ от E_n. Определим G_{n, β_0} $(G_{n, \beta})$ — открытов множество в D, ограниченное A_n, B_n и двумя граничными гиперциклами $H(1, \beta_0)(H(1, \beta))$. Пусть r_n — пересечение E_n с Λ° и для любого n, $n = 1, 2, \cdots$ обозначим

$$S_n(\omega) = \frac{\omega + r_n}{1 + r_n \omega}.$$

Прообраз $S_n^{-1}(G_{n, \beta_0}) = G'_{n, \beta_0}$ при любом n, $n = 1, 2, \cdots$ есть область в D, ограниченная 4 гиперциклами, 2 из которых симметричны относительно Λ° и 2 других симметричны относительно $-1 < iy < 1$, где $\omega = x + iy = S_n^{-1}(z)$. Аналогичное заключение справедливо и для $S_n^{-1}(G_{n, \beta}) = G_{n, \beta}$. Таким образом,

$$G'_{n, \beta_0} = G'_{n+1, \beta_0} = G'_{\beta_0}\ G'_{n, \beta} = G'_{n+1, \beta} = G'_\beta,\ n = 1, 2, \cdots \text{ и}$$

$$\overline{G}'_{\beta_0} = \overline{G}'_\beta \subset D.$$

Так как $u(z) \in \mathfrak{M}^\theta$, то существует подпоследовательность $[u(S_{n_j}(z))]$, которая сходится равномерно на $\overline{G}'_\beta$ или сходится равномерно к $\pm\infty$ на G'_β. Если α конечно, то подпоследовательность не может расходиться равномерно на G'_β, так как $u(S_{n_j}(0)) = u(r_{n_j})$ и при $n_j \to \infty$ $u(r_{n_j}) \to \alpha$. Равномерный предел полигармонических функций n-го порядка есть также полигармоническая функция n-го порядка (см. [4], § 3, теорему 1). Поэтому предельная функция $U(z)$ будет полигармонической функцией n-го порядка в G'_β. Для произвольной точки $\omega_0 \in G'_\beta$ и для любого j, $j = 1, 2, \cdots$, имеем $S_{n_j}(\omega_0) \in G_{n_j, \beta_0}$ и $S_{n_j}(\omega_0) \to 1$ при $j \to \infty$. Из условия теоремы 2 следует, что $u(S_{n_j}(\omega_0))) \to \alpha$ при $j \to \infty$, откуда $U(\omega_0) = \alpha$ и следовательно $U = \alpha$ на G'_{β_0}. Так как G'_{β_0} есть открытое непустое множество в G'_β, то и в силу принципа единственности для полигармонических функций $u(z) \equiv a$ на G'_δ. Равномерная сходимость $[u(S_{n_j}(z))]$ к a на G'_δ дает $u(z_{n_j}) \to a$ при $j \to \infty$, откуда и следует, что $u(z_n) \to a$ при $n \to \infty$. Теорема полностью доказана.

Замечание 3. Теорема 2 верна, в частности, для субгармонических функций $u(z)$, являющихся одновременно и полигармоническими функциями n-го порядка. Для всех нормальных субгармонических функций теорема 2 неверна. Соответствующий пример построил Мик (см. [3]).

Замечание 4. Теорема 2 содержит в себе один результат Мика [3], полученный для гармонических функций класса $\mathfrak{M}$.

4°. В работе [6] рассматривалось асимптотическое поведение неотрицательных субгармонических функций $u(z)$ класса $\mathfrak{M}$, для которых $\log u(z)$ также является субгармонической функцией (короче, логарифмически субгармонических функций класса $\mathfrak{M}$). Анализируя доказательство теоремы 1 из [6] можно заключить, что оно останется справедливым для функций классов $\mathfrak{M}^\theta$. Сформулируем этот результат в виде следующего утверждения.

Теорема 3. *Если логарифмически субгармоническая функция* $u(z)$ *класса* $\mathfrak{M}^\theta$, $0 < \theta < \pi$, *имеет асимптотическое значение* 0 (*или* ∞) *вдоль некоторой жордановой дуги* γ, *лежащей в* D *и стремящейся к точке* $\tau \in C$: $|z| = 1$ *некасательным образом, то* $u(z)$ *имеет угловой предел* 0 (*или* ∞) *в точке* τ.

5°. Обозначим $\mathfrak{M}^* = \bigcap\limits_{\theta \in (0,\pi)}$. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^*$, и рассмотрим граничное поведение субгармонических функций $u(z)$ класса $\mathfrak{M}^*$, удовлетворяющих интегральному условию

$$\int\limits_0^{2\pi} |u(e^{i\theta})|\, d\theta = O(1), \text{ при } r \to 1. \tag{1}$$

Согласно классическому результату Дж. Литтльвуда субгармоническая функция $u(z)$ при условии (1) представима в виде разности

$$u(z) = v(z) - \omega(z) \tag{2}$$

гармонической функции $v(z)$, удовлетворяющей условию (1) и потенциала Грина $\omega(z)$

$$\omega(z) = \iint\limits_{|a|<1} \log \left| \frac{1 - a \cdot z}{z - a} \right| d\mu(a).$$

При условии (1) Миком [8] доказано существование конечных угловых пределов почти всюду на $\Gamma: |z| = 1$ у субгармонических функций $u(z)$ класса $\mathfrak{M}$. По существу Мик доказал утверждение, которое сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма. *Пусть субгармоническая функция* $u(z)$ *класса* $\mathfrak{M}$ *представима в виде* (2). *Тогда в каждой точке* $\tau = e^{i\theta} \in C$: $|z| = 1$, *в кото-*

рой $v(z)$ имеет угловой предел, а $\omega(z)$ радиальный предел, существует конечный угловой предел у функции $u(z)$.

В основе доказательства леммы лежит свойство нормальности $u(z)$ на последовательностях вида

$$S_n^{\theta}(z)=\frac{z+r_n e^{i\theta}}{1+r_n e^{-i\theta}\cdot z},\ n=1,\ 2,\cdots,$$

где $\{r_n\}$—произвольная последовательность, стремящаяся к 1 и что, согласно (2) $u(z)\leqslant v(z)$ в D. Принимая во внимание предыдущие рассуждения получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $u(z)$ – субгармоническая в D функция, принадлежащая $\mathfrak{M}^*$ и удовлетворяющая условию* (1). *Тогда $u(z)$ имеет конечные угловые граничные значения почти всюду на* $\Gamma: |z|=1$.

Следствие 1. Если функция $u(z)$, принадлежащая $\mathfrak{M}^*$ ограничена сверху, то она имеет почти всюду на $\Gamma: |z|=1$ конечные угловые граничные значения. Действительно, в силу субгармоничности $u(z)$ $e^{u(z)}$ также субгармоническая функция, причем $e^{u(z)}\in\mathfrak{M}^*$ и $e^{u(z)}$ — ограниченная функция. Остается применить теорему 4.

Следствие 2. Если функция $u(z)$, принадлежащая $\mathfrak{M}^*$ ограничена снизу и имеет гармоническую мажоранту в D, то $u(z)$ имеет почти всюду на $\Gamma: |z|=1$ угловые граничные значения.

Можно допустить без нарушения общности, что $u(z)>0$ в $|z|<1$ Тогда для гармонической мажоранты $v(z)$ имеем, что

$$0\leqslant\int\limits_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\,d\theta\leqslant\int\limits_0^{2\pi}v(re^{i\theta})\,d\theta=2\pi v(0),\ 0\leqslant r<1$$

и применяя теорему 4, получим утверждение следствия 2.

6°. Теорема 5. *Если субгармоническая функция $u(z)$ из класса $\mathfrak{M}^*$, $0\leqslant\theta<\pi$, имеет ограниченное сверху множество $C(u, \{z_n\})$ на некоторой некасательной к $\Gamma: |z|=1$ в точке $\tau=e^{i\theta}\in\Gamma$ последовательности $\{z_n\}$, $z_n\in D$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=e^{i\theta}$ (или $-e^{i\theta}$), обладающей свойством $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(z_n, z_{n+1})\leqslant M<\infty$, то $u(z)$ ограничена сверху в любом угле с вершиной в точке $\tau=e^{i\theta}$ (или $-e^{i\theta}$).*

Доказательство. Не нарушая общности допустим, что $\tau=1$. Поскольку $\{z_n\}$ — некасательная последовательность, то найдется угол Δ, содержащий эту последовательность. Допустим, что $u(z)$ неограниченна сверху в Δ. Тогда существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что при $n\to\infty$ $u(a_n)\to+\infty$. Для всякого $n=1, 2,\cdots$, обозначим через E_n неевклидовый перпендикуляр, опущенный из точки z_n на диаметр Λ° и через E_n'— неевклидовый перпендикуляр из точки a_n на диаметр Λ°. Обозначим точки пересечения Λ° с E_n и E_n' через r_n и r_n'. Проведя те же рассуждения, что и в теореме 1 получаем, что предельная функция $U(z) = +\infty$ на компакте K. Но в силу условия при достаточно больших $n_k u(S_k(z'_{n_k}))$, где z'_{n_k}—прообразы точек z_{n_k} при отображении $S_k(z)$, ограничены. Полученное противоречие доказывает ограниченность сверху $u(z)$ в любом угле, содержащем последовательность $\{z_n\}$. Пусть Δ_0 — произвольный угол с вершиной в точке $\tau = e^{i\theta}$. Можно найти угол Δ' с вершиной в τ такой, что все точки Δ_0 и Δ, где Δ — угол, содержащий $\{z_n\}$, в некоторой окрестности τ будут лежать в Δ'. Так как $\Delta' \supset \Delta$, то $u(z)$ ограничена сверху в Δ' и следовательно в $\Delta_0 \cap \Delta'$. В силу субгармоничности $u(z)$ и того, что $\overline{\Delta_0 \setminus \Delta'}$ есть замкнутое подмножество в D, следует ограниченность сверху $u(z)$ в $\overline{\Delta_0 \setminus \Delta'}$. Значит $u(z)$ ограничена сверху в Δ_0, что и требовалось доказать.

Замечание 5. Теорема 5 не была известна и для субгармонических функций класса $\mathfrak{M}$.

Анализируя доказательство теоремы 5 заключаем, что справедлива следующая

Теорема 6. *Пусть непрерывная в* $D: |z| < 1$ *функция* $u(z) \in \mathfrak{M}^{\theta}$, $0 < \theta < \pi$ *фиксировано, имеет ограниченное множгство* $C(u, \{z_n\})$ *на некоторой некасательной к* $\Gamma: |z| = 1$ *в точке* $\tau = e^{i\theta} \in \Gamma$ *последовательности* $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = e^{i\theta}$ *(или* $-e^{i\theta}$*), для которой* $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(z_n, z_{n+1}) \leqslant M < \infty$, *тогда* $u(z)$ *ограничена в любом угле с вершиной в точке* $\tau = e^{i\theta}$, *(или* $-e^{i\theta}$*).*

В заключение приношу благодарность В. И. Гаврилову за постоянное внимание к работе.

Армянский государственный педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 10.VI.1979

Ս. Լ. ԲԵՐԲԵՐՅԱՆ. Միավոր շրջանի ավտոմորֆիզմների վրա նորմալ ընտանիքներ առաջացնող սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների եզրային հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է եզրային վարքը այն սուբհարմոնիկ և պոլիհարմոնիկ ֆունկցիաների, որոնք առաջացնում են նորմալ ընտանիքներ միավոր շրջանի ավտոմորֆիզմների ենթախմբերի վրա։ Տրվում են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում գոյություն ունեն անկյունային սահմաններ։ Քննարկվում է այն հարցը, թե երբ սուբհարմոնիկ ֆունկցիան կլինի սահմանափակ վերևից ցանկացած Շտոլցի անկյան մեջ։

S. L. BERBERIAN. *On boundarg properties of subharmonic functions which generate normal families on subgroups of automorphisms in the unit disk*
(summary)

The paper deals with the boundary behaviour of subharmonic and polyharmonic functions generate vhich generate normal families on subgroups of automorphisms in the unit disk. Some sufficient conditions for the existence of angular limits are investigated. A sufficient condition for a subharmonic function to be bounded in Stolz angles is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Гаврилов.* Нормальные функции и почти-периодические функции, ДАН СССР, 240, № 4, 1978.

2. *Е. Ф. Буркова, В. И. Гаврилов*. О мероморфных функциях, порождающих нормальные семейства на подгруппах автоморфизмов единичного круга, ДАН СССР (в печати).

3. *J. Meek*. Of Fatous points of normal subharmonic functions, Mathematica Japonica, 22, № 3, 1977, 309—314.

4. *И. И. Привалов* и *Б. Пчелин*. К общей теории полигармонических функций, Мат. сб., 2, № 4, 1937, 745—758.

5. *F. Bagemihl, W. Seidel*. Sequential and continuous limits of meromorphic functions, Annal. Acad. Scin. Fenn., Ser. AI, № 280, 1960.

6. *D. Rung*. Asymptotic values of normal subharmonic functions, Math. Zeitsehr., Bd. 84, Hf. 1, 1964, 9—14.

7. *В. С. Захарян*. О радиальных предельных значениях одного класса функций, мероморфных в круге, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, № 4, 1969, 801—818.

8. *J. Meek*. Subharmonic versions of Fatcus theorem, Proc. of the Amer. Math. Soc., 30, № 2, 1971, 313—317.

9. *В. И. Гаврилов*. О голоморфных функциях, ограниченных на последовательностях точек, Сибир. матем. журн., VI, № 6, 1965.

10. *F. Bagemihl*. Some boundary properties of normal functions bounded on nontangential arcs., Arch. Math., 14. № 6, 1963, 399—406.

11. *И. И. Привалов*, Субгармонические функции, М.—Л., 1937.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 5, 1980 Математика

Л. А. СЕХПОСЯН

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЛИТТЛЬВУДА

1°. **Введение.** Пусть D открытый единичный круг. Рассмотрим при $z, \zeta \in D$ функцию, введенную М. М. Джрбашяном [1] при построении им теории факторизации классов N_α $(-1 < \alpha < \infty)$, мероморфных в единичном круге функций

$$A_\alpha(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp[-W_\alpha(z; \zeta)], \quad (-1 < \alpha < \infty), \tag{1}$$

где

$$W_\alpha(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \Big[\zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx -$$

$$- \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{1} (1-x)^\alpha x^{-k-1} dx\Big] z^k.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$u_\alpha(z; \zeta) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |A_\alpha(z; \zeta)|, \tag{2}$$

где функция $A_\alpha(z; \zeta)$ имеет вид (1), а $D^{-\alpha}$ — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля, т. е. если $\varphi(r) \in L_1(0, 1)$, то

$$D^{-\alpha} \varphi(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \quad (0 < \alpha < \infty),$$

$$D^{-\alpha} \varphi(r) = \frac{d}{dr} \{D^{-(1+\alpha)} \varphi(r)\} \quad (-1 < \alpha < 0),$$

причем поскольку почти всюду на (0, 1)

$$\lim_{\alpha \to +0} D^{-\alpha} \varphi(r) = \varphi(r),$$

то естественно полагается, что

$$D^0 \varphi(r) = \varphi(r), \quad r \in (0, 1).$$

Следующую функцию назовем функцией типа Грина

$$G_\alpha(z; \zeta) = -u_\alpha(z; \zeta). \tag{3}$$

Некоторые свойства функции $G_\alpha(z; \zeta)$ при $-1 < \alpha < 0$ получены в работах [1], [2].

Заметим, что при $\alpha = 0$ имеем

$$A_0(z;\zeta)=\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\,\frac{|\zeta|}{\zeta}. \tag{4}$$

Следовательно

$$G_0(z;\zeta)=-\log\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\right|=\log\left|\frac{1-\bar{\zeta}z}{z-\zeta}\right| \tag{5}$$

совпадает с обычной функцией Грина для D.

Известная теорема Литтльвуда о граничных значениях субгармонических функций ([3], стр. 170) гласит:

Теорема (Литтльвуд). Пусть

$$\omega(z)=\int\limits_{|a|<1}\log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right|d\mu(a),$$

где $\mu(a)$ — неотрицательное распределение массы на единичном круге D, удовлетворяющее условию

$$\int\limits_{|a|<1}(1-|a|)\,d\mu(a)<+\infty.$$

Тогда

$$\lim_{r\to 1}\omega(re^{i\theta})=0 \text{ почти для всех } e^{i\theta}$$

и

$$\lim_{r\to 1}\int\limits_0^{2\pi}\omega(re^{i\theta})\,d\theta=0.$$

В настоящей статье приводится теорема, которая является обобщением теоремы Литтльвуда и совпадает с ней при $\alpha=0$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В. С. Захаряну за постановку задач и руководство.

2°. Результаты вспомогательного характера. При доказательстве теоремы Литтльвуда важную роль играли две леммы. Приведем эти леммы без доказательств. Доказательства можно найти в работе [3] (стр. 169 и 170).

Лемма 1. *Пусть* $\frac{1}{2}\leqslant r<1$, $a=\rho e^{i\varphi}$ $(0\leqslant\rho<1)$, *тогда*

$$\log\left|\frac{1-\bar{a}r}{r-a}\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{A(1-\rho)(1-r)}{\varphi^2}, & \text{вообще},\\[2ex] \dfrac{A(1-\rho)(1-r)}{(1-r)^2+\varphi^2}, & \text{когда } \dfrac{1+r}{2}\leqslant\rho<1,\\[2ex] \dfrac{A(1-\rho)}{1-r}\log\dfrac{1-r}{|\varphi|}, & \text{когда } \rho<\dfrac{1+r}{2},\ |\varphi|\leqslant\dfrac{1-r}{2},\end{cases}$$

где A — положительная абсолютная постоянная.

Лемма 2. *Пусть функция* $\lambda(\theta)$ *монотонно возрастает на сегменте* $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $\lambda(0)=0$ *и удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{\theta\to 0}}\frac{\lambda(\theta)}{\theta}\leqslant m.$$

Тогда имеют место соотношения

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\int_{\delta}^{\pi}\frac{d\lambda(\theta)}{\theta^2}\leqslant 2m, \tag{6}$$

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\int_{0}^{\delta}\frac{d\lambda(\theta)}{\delta^2+\theta^2}\leqslant\frac{\pi}{4}m, \tag{7}$$

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{1}{\delta}\int_{0}^{\delta}\log\frac{\delta}{\theta}\,d\lambda(\theta)\leqslant m. \tag{8}$$

В дальнейшем через $A_k(\alpha)$ и $A'_k(\alpha)$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от α, которые, вообще говоря, различны. Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* $\frac{1}{2}\leqslant r<1$, $\zeta=\rho e^{i\theta}$ $(0\leqslant\rho<1)$, *тогда*

$$G_\alpha(r;\zeta)\leqslant\begin{cases}\dfrac{A_1(\alpha)(1-\rho)^{1+\alpha}(1-r)}{\theta^2}, \text{ вообще } (-1<\alpha<\infty), & (9)\\[2ex] \dfrac{A_2(\alpha)(1-\rho)^{1+\alpha}(1-r)}{(1-r)^2+\theta^2}, \text{ при } \dfrac{1+r}{2}\leqslant\rho<1,\ |\theta|\leqslant\dfrac{1-r}{2}, & (10)\\ \qquad (-1<\alpha<\infty), & \\[2ex] \dfrac{A_3(\alpha)(1-\rho)^{1+\alpha}}{1-r}\log\dfrac{1-r}{|\theta|}\left\{1+A_4(\alpha)\left[\dfrac{(r-|\zeta|)^\alpha}{(1-|\zeta|)^\alpha}+1\right]\right\} \text{ при } \rho<\dfrac{1+r}{2}, & \\ \qquad |\theta|\leqslant\dfrac{1-r}{2},\ (-1<\alpha\leqslant 0), & (11)\\[2ex] \dfrac{A_5(\alpha)(1-\rho)^{1+\alpha}}{1-r}\log\dfrac{1-r}{|\theta|}, \text{ при } \rho\leqslant\dfrac{1+r}{2},\ |\theta|\leqslant\dfrac{1-r}{2}, & (12).\\ \qquad (0<\alpha<\infty). & \end{cases}$$

Доказательство. Известно, что при $-1<\alpha<\infty$ ([1], стр. 628)

$$U_\alpha(re^{i\varphi};\zeta)=-\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{|\zeta|}^{1}\frac{1-r\left(\dfrac{|\zeta|}{x}+\dfrac{x}{|\zeta|}\right)\cos(\varphi-\theta)+r^2}{\left|1-\dfrac{re^{-i\varphi}}{x}\zeta\right|^2\left|1-\dfrac{re^{i\varphi}}{\zeta}x\right|^2}\times$$

$$\times\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx. \tag{13}$$

Имея в виду (3) из (13) при $-1<\alpha<\infty$ получим

$$G_\alpha(r;\zeta)=\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta+r^2}{\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2}\;\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx. \tag{14}$$

а) Введем следующие обозначения:

$$G_\alpha^{(1)}(r;\zeta)=2\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{r\,(|\zeta|\,x)^{-1}\,(|\zeta|^2+x^2)\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2\cdot\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2}\,\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx, \tag{15}$$

$$G_\alpha^{(2)}(r;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)+r^2}{\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2}\,\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx, \tag{16}$$

с помощью которых запишем формулу (14) в виде

$$G_\alpha(r;\zeta)=\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)}\,\{G_\alpha^{(1)}(r;\zeta)+G_\alpha^{(2)}(r;\zeta)\}. \tag{17}$$

Перейдем к оценкам $G_\alpha^{(1)}(r;\zeta)$ и $G_\alpha^{(2)}(r;\zeta)$. Из (15) получим при $\theta\neq 0$

$$G_\alpha^{(1)}(r;\zeta)\leqslant\frac{r\theta^2}{|\zeta|^3\,\delta^2(\zeta)}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2}\,dx,$$

где

$$\delta(\zeta)=\min_{|\zeta|<x<1}\left|1-\frac{r}{\zeta}\,x\right|=\min_{|\zeta|<x<1}\frac{r}{|\zeta|}\left|x-\frac{\zeta}{r}\right|\geqslant\min_{0<x<1}\frac{r}{|\zeta|}\left|x-\frac{\zeta}{r}\right|,$$

откуда

$$\delta(\zeta)\geqslant\begin{cases}|\sin\theta|, & \text{при } |\theta|<\frac{\pi}{2}\\ 1, & \text{при } \frac{\pi}{2}\leqslant|\theta|\leqslant\pi.\end{cases} \tag{18}$$

Следовательно, для любого r $(0\leqslant r<1)$ и ζ $(0<|\zeta|<1)$ имеет место оценка:

$$G_\alpha^{(1)}(r;\zeta)\leqslant\frac{\pi^2}{|\zeta|^3}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2}\,dx\quad(-1<\alpha<\infty).$$

Легко можно доказать, что при $|\zeta|\leqslant x\leqslant 1$

$$\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2=\frac{1}{x^2}\,|x-r\zeta|^2\geqslant(x-r\,|\zeta|\cos\theta)^2+r^2|\zeta|^2\sin^2\theta\geqslant$$

$$\geqslant (|\zeta| - r|\zeta|\cos\theta)^2 + r^2|\zeta|^2\sin^2\theta = |\zeta|^2\cdot|1 - re^{i\theta}|^2. \tag{19}$$

Учитывая (19) для $G_*^{(1)}(r;\zeta)$ получим

$$G_*^{(1)}(r;\zeta) \leqslant \frac{\pi^2(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1+\alpha)|\zeta|^5\cdot|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{\pi^2}{|\zeta|^5(1+\alpha)}\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1-r)^2+4r\sin^2\dfrac{\theta}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_1'(\alpha)(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{\theta^2}. \tag{20}$$

В силу очевидных неравенств:

$$1 - r\left(\frac{|\zeta|}{x} + \frac{x}{|\zeta|}\right) + r^2 \leqslant 1 - 2r + r^2 = (1-r)^2 \tag{21}$$

и

$$\left|1 - \frac{r\zeta}{x}\right| \geqslant 1 - \frac{|\zeta|}{x}r \geqslant 1 - r, \tag{22}$$

из (16) для $G_*^{(2)}(r;\zeta)$ получим

$$G_*^{(2)}(r;\zeta) \leqslant \frac{1}{|\zeta|}\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left|1-\dfrac{rx}{\zeta}\right|^2}dx \leqslant \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|\zeta|(1+\alpha)\,\delta^2(\zeta)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|\zeta|(1+\alpha)\sin^2\theta} \leqslant \frac{A_1''(\alpha)(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{\theta^2}. \tag{23}$$

Из (20) и (23) согласно (17) вытекает неравенство (9).

б) Докажем несколько неравенств, которые понадобятся для вывода оценки (10):

$$1 - r\left(\frac{|\zeta|}{x} + \frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta + r^2 \leqslant 1 - 2r\cos\theta + r^2 = |1 - re^{i\theta}|^2. \tag{24}$$

Это неравенство очевидно, поскольку $|\theta| < \dfrac{1-r}{2}$

$\cos\theta \geqslant 0$. Справедливо также следующее неравенство:

$$\left|1 - \frac{rx}{\zeta}\right|^2 = (r - |\zeta|)^2 + 4r|\zeta|^2\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{25}$$

Неравенство (25) вытекает из следующего неравенства:

$$(rx - |\zeta|)^2 > (r - |\zeta|)^2 \quad (|\zeta| < x \leqslant 1).$$

Преобразуя последнее неравенство, получим, что

$$|\zeta| > \frac{r(1+x)}{2} \geqslant r.$$

Поскольку по условию имеем

$$|\zeta|\geqslant\frac{1+r}{2}>\sqrt{r}>r\geqslant\frac{r(1+x)}{2}\quad(|\zeta|\leqslant x\leqslant 1),$$

откуда следует неравенство (25).

Согласно неравенствам (22), (24) и (25) из (14) для $G_\alpha(r;\zeta)$ получим

$$G_\alpha(r;\zeta)\leqslant\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)|\zeta|^3(1+\alpha)}\cdot\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(r-|\zeta|)^2+4r|\zeta|\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Поскольку $\frac{1+r}{2}\leqslant|\zeta|<1$, то $|\zeta|-r\geqslant\frac{1-r}{2}$, тогда

$$G_\alpha(r;\zeta)\leqslant\frac{A_2(\alpha)(1-r)(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1-r)^2+\theta^2},$$

что и требовалось доказать.

в) Имея в виду (5) и (14) при $\alpha=0$ получим

$$G_0(r;\zeta)=(1-r^2)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta+r^2}{\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2\cdot\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2}\frac{dx}{x}=\log\left|\frac{1-\bar\zeta r}{r-\zeta}\right|.\tag{26}$$

В работе [1], стр. 631 доказано следующее неравенство:

$$|u_\alpha(z;\zeta)|\leqslant C_\alpha(\nu_0)\{|z-\zeta|^\alpha+(1-|\zeta|)^\gamma\},\tag{27}$$

где $-1<\gamma<0$, $0<\nu$, $0\leqslant|\zeta|\leqslant r\leqslant 1$, а постоянная $C_\alpha(\nu_0)$ не зависит от z и ζ.

Учитывая (26), (24), (19) и (27) из (14) для $G_\alpha(r;\zeta)$ имеем

$$G_\alpha(r;\zeta)=\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\int\limits_{|\zeta|}^{\frac{1+|\zeta|}{2}}\frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta+r^2}{\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2\cdot\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{1+|\zeta|}{2}}^{1}\frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta+r^2}{\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2\cdot\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{2^\alpha\Gamma(1+\alpha)}\log\left|\frac{1-\bar\zeta r}{r-\zeta}\right|+C_\alpha(\nu_0)\cdot\{|r-\zeta|^\alpha+(1-|\zeta|)^\alpha\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{2^\alpha\Gamma(1+\alpha)}\log\left|\frac{1-\bar\zeta r}{r-\zeta}\right|+C_\alpha(\nu_0)(1-|\zeta|)^\alpha\left\{\frac{(r-|\zeta|)^\alpha}{(1-|\zeta|)^\alpha}+1\right\}.$$

В силу леммы 1 и условия $|\zeta|\leqslant\frac{1+r}{2}$, отсюда будем иметь

$$G_\alpha(r;\zeta)\leqslant\frac{A(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{2^\alpha\Gamma(1+\alpha)(1-r)}\log\frac{1-r}{|\theta|}+C_\alpha(\nu_0)(1-|\zeta|)^\alpha\left\{\frac{(r-|\zeta|)^\alpha}{(1-|\zeta|)^\alpha}+1\right\}\times$$

$$\times \log\left(\frac{1-r}{\theta}\right)^2 \leqslant \frac{A_3(\alpha)(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{1-r}\log\frac{1-r}{|\theta|}\left\{1 + A_1(\alpha)\left(\frac{(r-|\zeta|)^\alpha}{(1-|\zeta|)^\alpha}+1\right)\right\}.$$

т. е. неравенство (11).

г) Для случая $0<\alpha<+\infty$ доказательство леммы просто. Оценивая (14) и учитывая (26) сразу получим

$$G_\alpha(r;\zeta) \leqslant \frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}(1-r^2)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-r^2)\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta + r^2}{\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2\cdot\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\log\left|\frac{1-\bar\zeta r}{r-\zeta}\right|.$$

Неравенства (19), (10), (12) вытекают из леммы 1.

3°. Обобщение теоремы Литтльвуда.

Теорема. *Пусть*

$$\omega_\alpha(z) = \int\limits_{|\zeta|<1} G_\alpha(z;\zeta)\,d\mu(\zeta) \quad (-1<\alpha<+\infty), \tag{28}$$

где

$$G_\alpha(z;\zeta) = -u_\alpha(z;\zeta) = -r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|A_\alpha(z;\zeta)|,$$

а $\mu(\zeta)$*—неотрицательное распределение массы на единичном круге, удовлетворяющее условию*

$$\int\limits_{|\zeta|<1}(1-|\zeta|)^{1+\alpha}\,d\mu(\zeta) < +\infty \quad (-1<\alpha<+\infty). \tag{29}$$

Тогда

$$\lim_{r\to 1}\omega_\alpha(re^{i\varphi}) = 0, \quad \textit{почти для всех } e^{i\varphi}$$

и

$$\lim_{r\to 1}\int\limits_0^{2\pi}\omega_\alpha(re^{i\varphi})\,d\varphi = 0.$$

Доказательство. а) Сначала докажем теорему для случая $-1<\alpha\leqslant 0$. Заметим, что из теоремы Литтльвуда вытекает, что наше утверждение справедливо при $\alpha=0$.

Положим $d\sigma(\zeta) = (1-|\zeta|)^{1+\alpha}\,d\mu(\zeta)$, тогда согласно (28)

$$\int\limits_{|\zeta|<1} d\sigma(\zeta) < +\infty$$

и

$$\omega_\alpha(z) = \int\limits_{|\zeta|<1} G_\alpha(z;\zeta)\cdot\frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}. \tag{30}$$

Возьмем $0<\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_\nu<\cdots<1$ так, чтобы

$$\int\limits_{\rho_\nu<|\zeta|<1} d\sigma(\zeta)\leqslant\frac{1}{4^\nu}\quad(\nu=1,\,2,\cdots).\tag{31}$$

Пусть $\lambda_\nu(\varphi)$ содержит σ-массу в следующих областях: $\rho_\nu\leqslant|z|<1$, $-\pi<\arg z<\varphi$. Поскольку $\lambda_\nu(\varphi)$ —возрастающая функция от φ, то $\lambda'_\nu(\varphi)$ существует почти всюду и из (20) получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\lambda'_\nu(\varphi)\,d\varphi\leqslant\lambda_\nu(\pi)\leqslant\frac{1}{4^\nu}\cdot\tag{32}$$

Пусть E^*_ν такое множество $e^{i\varphi}$, для которого $\lambda'_\nu(\varphi)$ либо не существует, либо существует и $\lambda'_\nu(\varphi)>\frac{1}{2^\nu}$, тогда $mE^*_\nu\leqslant\frac{1}{2^\nu}$. Если положим

$$E^*=\lim(E^*_\nu+E^*_{\nu+1}+\cdots),\ \text{то}\ mE^*=0.$$

Следовательно, обозначая через $C(E^*)$ дополнение множества E^* на $|z|=1$, то $mE=2\pi$.

Если $e^{i\varphi}\in E$ и $e^{i\varphi}\in C(E^*_\nu)$ $(\nu\geqslant\nu_0)$, то

$$\lambda'_\nu(\varphi)\leqslant\frac{1}{2^\nu}\quad(\nu>\nu_0).\tag{33}$$

Мы должны доказать, что если $e^{i\varphi}\in E$, то

$$\lim_{r\to1}\omega_a(re^{i\varphi})=0.$$

Предположим, что точка $z=1$ принадлежит E и докажем, что

$$\lim_{r\to1}\omega_a(r)=0.$$

Пусть $\rho_\nu<r<1$ и рассмотрим следующие области Δ_i $(i=1,\,2,\,3,\,4)$:

$\Delta_1:|z|<\rho_\nu$, $\Delta_2:\rho_\nu\leqslant|z|<1$,

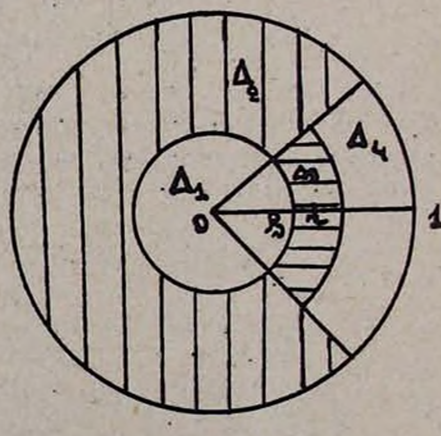
$\frac{1-r}{2}\leqslant|\arg z|\leqslant\pi$,

$\Delta_3:\rho\leqslant|z|\leqslant\frac{1+r}{2}$,

$|\arg z|\leqslant\frac{1-r}{2}$,

$\Delta_4:\frac{1+r}{2}\leqslant|z|<1$,

$|\arg z|\leqslant\frac{1-r}{2}$.



Тогда получим

$$\omega_\alpha(r) = \int_{\Delta_1} G_\alpha(r;\zeta)\frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}} + \int_{\Delta_2} + \int_{\Delta_3} + \int_{\Delta_4} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (34)$$

Имеем

$$\lim_{r\to 1} I_1 = 0.$$

Положим $\varkappa_\nu(\varphi) = \lambda_\nu(\varphi) - \lambda_\nu(0)$, поскольку $\lambda'_\nu(0)$ существует и действительная положительная ось не содержит положительную σ-массу, то

$$\varkappa_\nu(0) = 0, \ \lim_{\varphi\to 0} \varkappa_\nu(\varphi) = 0$$

и

$$\varkappa'_\nu(0) = \varkappa'_\nu(0) \leqslant \frac{1}{2^\nu}\ (\nu > \nu_0). \quad (35)$$

Согласно лемме 3 получим

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ I_2 \leqslant \text{const}\cdot(1-r)\int_{\frac{1-r}{2}<|\varphi|<\pi} \frac{d\varkappa_\nu(\varphi)}{\varphi^2},$$

отсюда, учитывая лемму 2 имеем

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ I_2 \leqslant \text{const}\cdot\varkappa'_\nu(0) \leqslant \text{const}\cdot\frac{1}{2^\nu}\ (\nu\geqslant\nu_0).$$

Точно также получим:

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ I_3 \leqslant \text{const}\cdot\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{1}{1-r}\int_{-\frac{1-r}{2}}^{\frac{1-r}{2}} \log\frac{1-r}{|\varphi|}\left\{1 + A_4(\alpha)\left[\frac{(r-|\zeta|)^\alpha}{(1-|\zeta|)^\alpha}+1\right]\right\} d\varkappa_\nu(\varphi) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\cdot\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{1}{1-r}\int_{-\frac{1-r}{2}}^{\frac{1-r}{2}} \log\frac{1-r}{|\varphi|}\, d\varkappa_\nu(\varphi) \leqslant \text{const}\cdot\varkappa'_\nu(0) \leqslant \text{const}\cdot\frac{1}{2^\nu},$$

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ I_4 \leqslant \text{const}\cdot\overline{\lim_{r\to 1}}\int_{-\frac{1-r}{2}}^{\frac{1-r}{2}} \frac{d\varkappa_\nu(\varphi)}{(1-r)^2+\varphi^2} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\ \varkappa'_0(0) \leqslant \text{const}\cdot\frac{1}{2^\nu}\ (\nu \geqslant \nu_0).$$

Поскольку ν произвольно, будем иметь

$$\lim_{r\to 1} \omega_\alpha(r) = 0. \quad (36)$$

Теорема доказана для случая $-1 < \alpha \leqslant 0$.

б) В случае $0 < \alpha < +\infty$ теорема доказывается аналогичным образом, поскольку неравенства (9), (10) и (12) будут верными и в этом случае.

в) Нам остается доказать второй пункт теоремы, т. е. мы должны показать, что

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{|\zeta|<1} G_\alpha (re^{i\varphi}; \zeta)\, d\mu(\zeta) \right\} d\varphi = 0. \tag{37}$$

В работе [1] (стр. 613) доказано следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| A_\alpha \left(\frac{r}{\rho} e^{i\varphi}; \frac{\zeta}{\rho}\right)\right|\right\} d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} W_\alpha\left(0; \frac{\zeta}{\rho}\right) + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} W_\alpha\left(0; \frac{\zeta}{r}\right),$$

$$(0 < |\zeta| \leqslant \rho,\ 0 < \rho \leqslant 1 \text{ и } 0 \leqslant r < \rho),$$

причем

$$W_\alpha\left(0; \frac{\zeta}{\rho}\right) = \int_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx.$$

Рассмотрим это равенство при $\rho = 1$, учитывая также (3), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_\alpha (re^{i\varphi}; \zeta)\, d\varphi = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{ W_\alpha\left(0; \frac{\zeta}{r}\right) - W_\alpha(0; \zeta)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{ \int_{|\zeta|/r}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx - \int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx\right\}. \tag{38}$$

Ввиду очевидных неравенств и из (29), (31)

$$\int_{|\zeta|/r}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx \leqslant \int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx \leqslant \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\,|\zeta|}$$

для любого $\varepsilon > 0$ при некотором $r_0 = r_0(\varepsilon)$ $(0 < r_0 < 1)$ имеем

$$\int_{|\zeta|<1}\left\{ \int_{|\zeta|/r}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx\right\} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}} \leqslant \int_{|\zeta|<1}\left\{ \int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx\right\} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+\alpha)|\zeta|} \int_{|\zeta|<1} d\sigma(\zeta) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{39}$$

Далее для того же $\varepsilon > 0$ при некотором $r_1 = r_1(\varepsilon)$ $(r_0 \leqslant r_1 < 1)$ имеем также

$$\left| \int\limits_{|\zeta|<r_1} \left\{ \int\limits_{|\zeta|/r}^{3} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx - \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx \right\} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{40}$$

как только $r_1 \leqslant |\zeta| < 1$.

Из неравенств (39) и (40) вытекает, что

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} G_\alpha(re^{i\varphi}; \zeta)\, d\varphi \right\} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}} \right| < \varepsilon,$$

как только $r_1 \leqslant r < 1$.

А это эквивалентно утверждению теоремы:

$$\lim_{r\to 1} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_{|\zeta|<1} G_\alpha(re^{i\varphi}; \zeta) \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}} \right\} d\varphi =$$

$$= \lim_{r\to 1} \int\limits_{|\zeta|<1} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} G_\alpha(re^{i\varphi}; \zeta)\, d\varphi \right\} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}} = 0.$$

Итак, теорема полностью доказана.

Армянский государственный
педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 15.VII.1979

Լ. Ա. ՍԵԿՊՈՍՅԱՆ. Լիտլվուդի թեորեմի մի ընդհանրացման մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից մուծված ֆունկցիայի միջոցով սահմանվում է Գրինի տիպի պոտենցիալ։ Այնուհետև ապացուցվում է լեմմա, որն անհրաժեշտ է Լիտլվուդի ընդհանրացված թեորեման ապացուցելու համար։ Դրանից հետո բերվում է Լիտլվուդի ընդհանրացման թեորեման միավոր շրջանի համար։

Ստացված արդյունքն այնպիսին է, որ պարամետրի մասնավոր արժեքի դեպքում համընկնում է Լիտլվուդի սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների եզրային արժեքների վերաբերյալ հայտնի թեորեմի հետ։

L. A. SEKPOSIAN. *A generalization of a theorem of Littlewood* (summary)

A Green-type potential is defined using M. M. Djrbashian's function and a generalization of Littlewood's theorem is proved. The result contains the classical theorem on boundary values of subharmonic function as a special case.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.

2. *В. С. Захарян*. О радиальных предельных значениях функции B_q, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, №№ 4—5, 1968, 287—300.
3. *M. Tsuji*. Potential theory in modern function theory. Maruzenco, L. T. D., Tokyo.
4. *В. С. Захарян*. Сегментные изменения потенциала типа Грина, ДАН Арм.ССР, XVI, № 4, 1978.
5. *И. И. Привалов*. Субгармонические функции, М.—Л., 1937.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

1098—6