ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of types script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal,the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been caried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 4, 1980 Математика

А. А. НЕРСЕСЯН

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ С ОДНОВРЕМЕННОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Введение

В заметке [1] Л. А. Рубель и С. Венкатесваран доказали возможность равномерной аппроксимации с одновременной интерполяцией ограниченной кратности на последовательности точек множества $F\subset \mathbf{C}$, $F^\circ=\varnothing$, являющегося множеством равномерной аппроксимации. В статье [2] П. М. Готье и У. Хенгартнер делают то же для множеств F, $F^\circ\neq\varnothing$, но с интерполяцией произвольной кратности в последовательности точек $\{z_k\}\subset F\diagdown\overline{F^\circ}$*. В статье [3] Л. Хойшена осуществляется касательная аппроксимация на действительной оси функций класса $C^\infty(-\infty, +\infty)$ и их производных целыми функциями и их соответствующими производными с одновременной интерполяцией произвольной кратности на последовательности точек. В статье автора [4] рассматривается такая же аппроксимация с одновременной интерполяцией аналитическими в круге функциями на радиусах круга, оканчивающихся на подмножестве типа F_σ первой бэровской категории на окружности.

В настоящей статье показано, что в упомянутом результате [2] можно опустить требования $z_k\notin\overline{F^\circ}$. Введено понятие последовательности интерполяции на множестве и охарактеризованы множества со связным дополнением, произвольная последовательность (без „конечных" предельных точек) граничных точек которых является интерполяционной.

1°. Определения и формулировки результатов

Пусть D — область из расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C}^*$ $\partial D\neq\varnothing$, D^* — одноточечная компактификация D, F — подмножество D, замкнутое в D, $F^c=D^*\diagdown F$, H — класс функций, аналитических в D, $H(F)$ — равномерное на F замыкание H. Если $X\subset\mathbf{C}$, то $A(X)$ — класс функций, непрерывных на X и аналитических на X°. Далее, $\|f\|_X=\sup\{|f(z)|, z\in X\}$, $\|f\|_F=\|f\|$. Через $\{z_k\}'$ обозначено множество предельных точек последовательности $\{z_k\}$.

Определение 1. Скажем, что множество F обладает свойством (α), если F^c связно и локально связно.

---

* В реферате 3Б196 РЖ Мат. № 3, 1978, допущена неточность: Утверждается, что $\{z_k\}\subset F\diagdown F^\circ$, т. е. $\{z_k\}\subset\partial F$.

Хорошо известна следующая

Теорема (А). (Н. У. Аракелян, [5]). $A(F)=H(F)$ тогда и только тогда, когда F обладает свойством (α).

Ниже будет доказано следующее усиление теоремы (А):

Теорема 1. *Пусть F обладает свойством* (α). *Тогда для произвольных $f\in A(F)$, $\varepsilon>0$, последовательностей $\{z_k\}\subset\partial F$, $\{z_k\}'\cap D=\varnothing$ $\{\nu_k\}$; $\{\alpha_k^s,\ s=1, 2,\cdots, \nu_k\}$ существует такая $\lambda\in H$, что*

$$\|f-\lambda\|<\varepsilon, \lambda(z_k)=f(z_k),\ \lambda^{(s)}(z_k)=\alpha_k^s,\ s=1, 2,\cdots, \nu_k,\ k=1, 2,\cdots.$$

Доказательство теоремы 1 проведем с помощью теоремы (А) и следующего предложения.

Предложение 1. *Если F обладает свойством* (α), *то для произвольных последовательностей $\{z_k\}\subset\partial F$, $\{z_k\}'\cap D=\varnothing$, $\{\nu_k\}$, $\{\alpha_k^s,\ s=0, 1,\cdots, \nu_k\}$, причем $\alpha=\sup\{|\alpha_k^0|\}<\infty$ и числа $\varepsilon>0$, существует $\lambda\in H$, удовлетворяющая условиям:*

$$\|\lambda\|<\alpha+\varepsilon,\ \lambda^{(s)}(z_k)=\alpha_k^s,\ s=0, 1,\cdots, \nu_k;\ k=1, 2,\cdots.$$

В частности, если $\delta_k>0$, $k=1, 2,\cdots$, произвольная последовательность, то существует λ, представимая в виде

$$\lambda(z)=\prod_{k=1}^{\infty}(z-z_k)^{\nu_k}\mu_k(z),$$

где $\mu_k\in H$, произведение сходится равномерно внутри D, $\|\lambda\|<1+\varepsilon$, $\|\lambda-1\|_{F\setminus\bigcup\Delta_k}<\varepsilon$ $(\Delta_k=\{z:|z-z_k|<\delta_k\})$.

Сформулируем также следующий результат:

Теорема 1′. *Пусть $X\subset\mathbf{C}$ — компакт со связным дополнением, $a_1,\cdots, a_k\in X^0$ $(k\geqslant 0)$; $b_1,\cdots, b_l\in\partial X$ $(l>0)$; $\nu_1,\cdots, \nu_{k+l}$ — неотрицательные целые α_j^s, $s=1, 2,\cdots, \nu_{k+j}$, $j=1, 2,\cdots, l$ — произвольные комплексные числа. Тогда для произвольных $f\in A(X)$ и $\varepsilon>0$ существует полином p, удовлетворяющий условиям*

$$\|f-p\|_X<\varepsilon,$$

$$p^{(s)}(a_j)=f^{(s)}(a_j),\ s=0, 1,\cdots, \nu_j;\ j=1, 2,\cdots, k,$$

$$p(b_j)=f(b_j),\ p^{(s)}(b_j)=\alpha_j^s,\ s=1, 2,\cdots, \nu_{k+j};$$
$$j=1, 2,\cdots, l.$$

Теорема 1′ не является следствием теоремы 1, однако ее доказательство можно получить упрощением доказательства теоремы 1 с применением известной техники для интерполяции во внутренних точках.

Пусть K_n, $n=1, 2,\cdots,$ — последовательность компактов, удовлетворяющих условиям:

i) ∂K_n состоит из конечного числа замкнутых гладких кривых, $n=1, 2,\cdots,$

ii) $K_n\subset K_{n+1}^0$, $n=1, 2,\cdots,$ (1)

iii) $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

Обозначим через O_n компоненту связности $(K_n \cup F)^c$, содержащую „точку“ $D^* \setminus D$.

Из определения 1 следует, что свойство (α) может быть сформулировано в следующем виде, удобном для дальнейшего.

Определение 1′. F обладает свойством (α), если существует последовательность компактов K_n, $n=1, 2,\cdots$, удовлетворяющая условиям (1) *i*) — *iii*), $K_1=\varnothing$, для которой

$$F^c \setminus K_n = O_n, \quad n=1, 2,\cdots.$$

Определение 2. F обладает свойством (β), если существует последовательность компактов K_n, $n=1, 2,\cdots$, удовлетворяющая условиям (1) *i*) — *iii*), для которой

$$\partial F \setminus K_n \subset \overline{O}_n, \quad n=1, 2,\cdots.$$

Определение 3. Последовательность $\{z_k\} \subset F$, $\{z_k\}' \cap D=\varnothing$, назовем интерполяционной последовательностью на F, если существует такая не тривиальная $\lambda \in H$, что $\|\lambda\| \leqslant 1$ и $\lambda(z_k)=0$, $k=1, 2,\cdots$.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть F — замкнутое в D множество без изолированных точек со связным дополнением в D^*. Следующие утверждения эквивалентны:*

a) *Произвольная последовательность $\{z_k\} \subset \partial F$, $\{z_k\}' \cap D=\varnothing$ является интерполяционной на F.*

b) *F удовлетворяет условию* (β).

В п. 2° приведены доказательства предложения 1 и теоремы 1. В п. 3° доказана теорема 2.

2°. В доказательстве предположения 1 будет использован ряд вспомогательных лемм. Пусть $P \subset D$ замкнуто в D, P^c обладает свойством (α).

Лемма 1. *Для произвольной точки $x \in \partial P$ существует такая $f \in A(P)$, что $f(x)=1$, $|f(y)|<1$, $y \in P$, $y \neq x$.*

Это означает, что точки ∂P являются „точками пика“ для $A(P)$. Не делая здесь попыток дать наиболее общий результат, относящийся к распространению понятия точки пика на случай алгебры $A(P)$ на некомпакте P, ограничимся замечанием, что доказательство леммы 1 можно провести, скажем, по схеме доказательства критерия Кертиса (см. [6]). Заметим также, что упоминаемая в этой схеме теорема II, 11.1, [6] (лемма А. А. Гончара) справедлива и в случае алгебры $A(P)$.

Не нарушая общности можно считать что, $\infty \in \partial D$ и существует простая гладкая кривая L, делящая $\mathbf{C}$ на две бесконечные области таким образом, что множество $P \subset D$ целиком содержится в одной из них, пусть в области G ($P \subset G$, $\partial G=L$). В противном случае выберем точку $x \in \partial D$, предельную для P^c и с помощью дробно-линейного отображения приведем ее в ∞. Такое отображение является конформно гомеоморфным на D, а свойство (α) — топологическое.

Как показал М. В. Келдыш (см. [7]), для произвольных $\sigma, \tau>0$ существует целая функция ω, отличная от нуля в G и удовлетворяющая оценке

$$|\omega(z)|<\sigma \exp\{-|z|^{(1/2)-\tau}\}, \quad z \in G. \tag{1}$$

Лемма 2. *Для произвольной точки $x \in \partial P$, натурального числа ν, полинома Q и чисел $\varepsilon, \delta>0$ существует такая $\varphi \in H$, что $\varphi(x)=1$, $\varphi^{(s)}(x)=0$, $s=1, 2, \cdots, \nu$, $\|\varphi\|_P<1+\varepsilon$,*

$$\|\varphi Q\|_{P \setminus \Delta}<\varepsilon \quad (\Delta=\{z: |z-x|<\delta\}).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ — некоторое число, ψ—такая рациональная функция с полюсами вне P, что $\psi(x)=1$ и $\|\psi Q\|_P<\infty$.

Существует такое число $\delta'<\delta$, что $|\psi(z)|<1+\varepsilon$, $z \in P \cap \Delta'$ $(\Delta'=\{z: |z-x|<\delta'\})$. По лемме 1 существует $\chi \in A(P)$ со свойствами

$$\chi(x)=1, \ |\chi(z)|<1, \ z \in P, \ z \neq x, \ \|\psi\chi\|_P<1+\varepsilon_1,$$

$$\|\psi\chi\|_{P \setminus \Delta}<\varepsilon_1, \ \|\psi\chi Q\|_{P \setminus \Delta}<\varepsilon_1. \tag{2}$$

Выберем в (1) σ и τ таким образом, чтобы $\|\omega Q\|_P<\varepsilon_1$ и $\|\omega\|_P<\varepsilon_1$. Тогда по теореме (A) существует такая $\xi \in H$, что

$$\|\psi\chi\omega^{-1}-\xi\|_P<1. \tag{3}$$

Пусть $\eta=c\omega\xi$, $c=[\omega(x)\xi(x)]^{-1}$ и можно считать, что σ настолько мало, что $|c|<1+\varepsilon_1$. Тогда для функция η будем иметь

$$\eta(x)=1, \ \|\eta\|_P<1+2\varepsilon_1, \ \|\eta\|_{P \setminus \Delta}<2\varepsilon_1(1+\varepsilon_1),$$

$$\|\eta Q\|_{P \setminus \Delta}=\|[(\eta-\psi\chi)+\psi\chi] Q\|_{P \setminus \Delta}<\varepsilon_1+\varepsilon_1=2\varepsilon_1. \tag{4}$$

В окрестности точки x функция η допускает разложение

$$\eta(z)=1+a_1(z-x)+\cdots+a_\nu(z-x)^\nu+(z-x)^{\nu+1}\theta(z), \tag{5}$$

где $\theta \in H$.

Теперь докажем, что для $k=1, 2, \cdots, \nu$ существуют функции $\zeta_k \in H$ удовлетворяющие условиям

$$|(z-x)^k-(z-x)^{\nu+1}\zeta_k(z)|<c_1\varepsilon_1, \quad z \in P, \tag{6}$$

$$|(z-x)^k-(z-x)^{\nu+1}\zeta_k(z)||Q(z)|<c_2\varepsilon_1, \quad z \in P,$$

где c_1 и c_2 обозначают константы, не зависящие от ε_1.

Пусть ψ_k — рациональная функция с полюсами вне P и

$$\psi_k(x)=1, \ \sup_P|\psi_k(z)(z-x)^k|<\infty, \ \sup_P|\psi_k(z)\, Q(z)\,(z-x)^k|<\infty \ (1<k<\infty).$$

В силу леммы 1 существует $\chi_k \in A(P)$ со свойствами

$$\chi_k(x)=1, \ |\psi_k(z)\,\chi_k(z)\,(z-x)^k|<\varepsilon_1, \ z \in P,$$

$$|\psi_k(z)\,\chi_k(z)\, Q(z)\,(z-x)^k|<\varepsilon_1, \ z \in P.$$

Выбирая σ и τ в (1) надлежащим образом, с помощью приближения вида (3) и умножением на подходящую константу можно найти $\xi_k \in H$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered}\xi_k(x)=1,\ \|\xi_k\|_P<2,\\ |\xi_k(z)(z-x)^k|<\varepsilon_1,\ z\in P,\ |\xi_k(z)Q(z)(z-x)^k|<\varepsilon_1,\ z\in P.\end{gathered} \tag{7}$$

Положим

$$(z-x)^{\nu+1}\zeta_k(z)=(z-x)^k(1-\xi_k(z))^{\nu+1-k}.$$

Тогда будем иметь согласно (7)

$$|(z-x)^k-(z-x)^{\nu+1}\zeta_k(z)|=|z-x|^k|1-(1-\xi_k(z))^{\nu+1-k}|\leqslant$$
$$\leqslant|z-x|^k|\xi_k(z)||1+3+\cdots+3^{\nu-k}|<\varepsilon_1(3^{\nu-k+1}-1)$$

и

$$|(z-x)^k-(z-x)^{\nu+1}\zeta_k(z)||Q(z)|=$$
$$=|z-x|^k|\xi_k(z)||Q(z)||1+3+\cdots+3^{\nu-k}|<\varepsilon_1(3^{\nu-k+1}-1).$$

Теперь нетрудно убедиться, что при подходящем выборе $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon)$, функция

$$\varphi(z)=1+(z-x)^{\nu+1}\left(\sum_{k=1}^{\nu}a_k\zeta_k(z)+\vartheta(z)\right) \tag{8}$$

удовлетворяет условиям леммы ввиду (4), (5) и (6).

Пусть K_n, $n=1, 2,\cdots$ — последовательность компактов, фигурирующая в определении 1′. Обозначим $P_n=K_n\cup F$ и заметим, что при всех $n=1, 2,\cdots$, P_n обладает свойством (α).

Обозначим $\varepsilon_k=\varepsilon/2^k(\alpha+2)$, $k=1, 2,\cdots$.

Пусть

$$n_k=\max\{j;\ z_k\in K_j\},\ k=1, 2,\cdots. \tag{9}$$

Положим

$$Q_1(z)=\alpha_1^0+\alpha_1^1(z-z_1)+\cdots+\frac{1}{\nu_1!}\alpha_1^{\nu_1}(z-z_1)^{\nu_1}. \tag{10}$$

Выберем $\delta_1>0$ таким, чтобы $z_k\overline{\in}\Delta_1$, $k\geqslant 2$ и

$$\|Q_1-\alpha_1^0\|_{\Delta_1}<\varepsilon_1. \tag{11}$$

В силу леммы 2, примененной к полиному Q_1, числам ε_1, δ_1, ν_1, множеству P_{n_1} и точке $z_1\in\partial P_{n_1}$ (см. (9)) получаем существование такой $\varphi_1\in H$, что

$$\begin{gathered}\varphi_1(z_1)=1,\ \varphi_1^{(s)}(z_1)=0,\ s=1, 2,\cdots,\nu_1,\\ \|\varphi_1\|_{P_{n_1}}<1+\varepsilon_1,\ \|\varphi_1Q_1\|_{P_{n_1}\setminus\Delta_1}<\varepsilon_1.\end{gathered} \tag{12}$$

Положим $\eta_1=\varphi_1Q_1$ и $G_1=\eta_1$.

В силу (10), (11) и (12) имеем

$$G_1 \in H,\ \eta_1^{(s)}(z_1) = \alpha_1^s,\ s = 0,\ 1, \cdots, \nu_1;\ \|\eta_1\|_{P_{n_1} \setminus \Delta_1} < \varepsilon/2;$$
$$\|\eta_1\|_{P_{n_1}} \leqslant (1+\varepsilon_1)(|\alpha_1^0| + \varepsilon_1) < |\alpha_1^0| + \varepsilon/2. \tag{13}$$

Пусть теперь для некоторого $m > 1$ построены функции $\eta_1, \cdots, \eta_m$ и $G_m = \sum\limits_1^m \eta_k$, удовлетворяющие условиям

$$G_m^{(s)}(z_k) = \alpha_k^{(s)},\ s = 0,\ 1, \cdots, \nu_k;\ k = 1,\ 2, \cdots, m, \tag{14}$$

$$\|G_m\|_{P_{n_m}} \leqslant \alpha + \sum_1^m \varepsilon_k.$$

Пусть полином q_{m+1} обладает свойствами

$$q_{m+1}^{(s)}(z_k) = 0,\ s = 0,\ 1, \cdots, \nu_k,\ k = 1,\ 2, \cdots, m,$$
$$q_{m+1}(z_{m+1}) = 1,\ q^{(s)}(z_{m+1}) = 0,\ s = 1,\ 2, \cdots, \nu_{m+1}. \tag{15}$$

Обозначим

$$Q_{m+1}(z) = \alpha_{m+1}^0 - G_m(z_{m+1}) + \cdots + \frac{1}{\nu_{m+1}!}(\alpha_{m+1}^{\nu_{m+1}} -$$
$$- G_m^{(\nu_{m+1})}(z_{m+1}))(z - z_{m+1})^{\nu_{m+1}}. \tag{16}$$

Выберем $\delta_{m+1} > 0$ таким образом, чтобы $\Delta_{m+1} \cap \Delta_k = \varnothing$ $k = 1, 2, \cdots, m$ и

$$\|q_{m+1} Q_{m+1} - \alpha_{m+1}^0 + G_m(z_{m+1})\|_{\Delta_{m+1}} < \varepsilon_{m+1}. \tag{17}$$

Применив лемму 2 к полиному $q_{m+1} Q_{m+1}$, числам ε_{m+1}, δ_{m+1}, ν_{m+1}, множеству $P_{n_{m+1}}$ и точке $z_{m+1} \in \partial P_{n_{m+1}}$ (см. (9)), получим функцию $\varphi_{m+1} \in H$, удовлетворяющую условиям

$$\varphi_{m+1}(z_{m+1}) = 1,\ \varphi_{m+1}^{(s)}(z_{m+1}) = 0,\ s = 1,\ 2, \cdots, \nu_{m+1},$$
$$\|\varphi_{m+1}\|_{P_{n_{m+1}}} < 1 + \varepsilon_{m+1},\ \|\varphi_{m+1} q_{m+1} Q_{m+1}\|_{P_{n_{m+1}} \setminus \Delta_{m+1}} < \varepsilon_{m+1}. \tag{18}$$

Положим

$$\eta_{m+1} = \varphi_{m+1} q_{m+1} Q_{m+1} \text{ и } G_{m+1} = G_m + \eta_{m+1}.$$

Будем иметь в силу (14—18)

$$G_{m+1}^{(s)}(z_k) = \alpha_k^{(s)},\ s = 0,\ 1, \cdots, \nu_k,\ k = 1,\ 2, \cdots, m+1,$$

$$\|G_{m+1}\|_{P_{n_{m+1}}} \leqslant \alpha + \sum_1^{m+1} \varepsilon_k.$$

Из этих свойств вытекает равномерная внутри D сходимость последовательности $\{G_m\}$ к функции $\lambda \in H$, удовлетворяющей требованиям первой части предложения 1.

Чтобы доказать вторую часть предложения 1 воспользуемся следующим упрощением леммы 2.

Лемма 2'. *Пусть P, x, ε, δ, ν — параметры леммы 2. Существует такая $\varphi \in H$, что*

$$\varphi(x) = -1, \ \varphi^{(s)}(x) = 0, \ s = 1, 2, \cdots, \nu,$$

$$\|\varphi\| < 1 + \varepsilon, \ \|\varphi\|_{P \setminus \Delta} < \varepsilon.$$

Выберем теперь для $\varepsilon > 0$ такую последовательность $\{\varepsilon_k\}$, что

$$\left|1 - \prod_{k=1}^{\infty} (1 \pm \varepsilon_k)\right| < \varepsilon. \tag{19}$$

Для точки z_k возьмем

$$(z - z_k)^{\nu_k} \mu_k(z) = \varphi_k(z) + 1,$$

где φ_k — функция леммы 2' для $P = P_{n_k}$, $\varepsilon = \varepsilon_k$, $\nu = \nu_k$, $x = z_k$, $\delta = \delta_k$ (выбор δ_k — как в (17)). Будем иметь

$$\|(z - x)^{\nu_k} \mu_k(z) - 1\|_{P_{n_k} \setminus \Delta_k} < \varepsilon_k;$$

тем самым в силу (19) обеспечена равномерная внутри D сходимость произведения $\{\lambda(z) = \Pi (z - z_k)^{\nu_k} \mu_k(z)$ и выполняется неравенство

$$\|1 - \lambda\|_{F \setminus \Delta_k} < \varepsilon.$$

Докажем теперь теорему 1. В силу теоремы (A) существует такая $\mu_1 \in H$, что $\|f - \mu_1\| < \varepsilon/3$. Так как $\sup \{|f(z_k) - \mu_1(z_k)|\} < \varepsilon/3$, то по предложению 1 существует такая $\mu_2 \in H$, что $\|\mu_2\| < 2\varepsilon/3$, $\mu_2(z_k) = f(z_k) - \mu_1(z_k)$, $\mu_2^{(s)}(z_k) = a_k^s - \mu_1^{(s)}(z_k)$, $s = 1, 2, \cdots, \nu_k$; $k = 1, 2, \cdots$. Функция $\lambda = \mu_1 + \mu_2$ удовлетворяет требованиям теоремы 1.

3°. Доказательство теоремы 2

a) -> b). Предположим, что для F не верно b). Тогда существует компакт K, последовательность областей $D_n \subset D$ с компактным замыканием, $\partial D_n \subset K \cup F$, $\partial D_n \cap K \neq \emptyset$, $n = 1, 2, \cdots$ и последовательность невырожденных континуумов $\gamma_n \subset D_n \cap \partial F, n = 1, 2, \cdots$, сгущающихся к ∂D, т. е. существует такая последовательность компактов $\{K_n\}$ со свойствами (1) п. 1°, что $\gamma_n \subset K_{n+1}^0 \setminus K_n$, $n = 1, 2, \cdots$, $K_1 = K$.

Пусть $x_n \subset D_n$, $n = 1, 2, \cdots$, — гладкие дуги, соединяющие K_n с K_n. Число $\varepsilon_n > 0$ выберем настолько малым, чтобы функция φ, аналитическая в D_n и подчиненная оценкам

$$\|\varphi\|_{\bar{D}} < n, \ \|\varphi\|_{\gamma_n} \leqslant \varepsilon_n,$$

удовлетворяла бы неравенству

$$\|\varphi\|_{x_n} < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Этого можно достичь с помощью теоремы о двух константах, примененной к надлежащей подобласти D_n, содержащей x_n и континуум из γ_n на границе.

Теперь, если $\rho = \mathrm{dist}\,(\gamma_n, D_n^c)$ $(\rho > 0)$, то используя формулу Коши, получим

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| < |z_1 - z_2|\, 2n/\rho, \tag{2}$$

если $|z_1 - z_2| < \rho/2$, $z_1 \in \gamma_n$.

Благодаря (2) можно на γ_n так расположить конечное число точек $z_1^{(n)}, \cdots, z_{k_n}^{(n)}$, чтобы функция φ, аналитическая в D_n, $\|\varphi\|_{\bar{D}_n} \leqslant n$, $\varphi(z_j^{(n)}) = 0$, $j = 1, 2, \cdots, k_n$, удовлетворяла оценке $\|\varphi\|_{\gamma_n} < \varepsilon_n$.

Пусть теперь $\lambda \in H$, $\|\lambda\| \leqslant 1$ и $\lambda(z_j^{(n)}) = 0$, $j = 1, 2, \cdots, k_n$, $n = 1, 2, \cdots,$. Тогда при $n > \|\lambda\|_K$, будем иметь $\|\lambda\|_{\bar{D}_n} \leqslant n$, $\|\lambda\|_{\gamma_n} < \varepsilon_n$, и, в силу (1), $\|\lambda\|_{x_n} < 1/n$. Однако это возможно лишь если $\lambda = 0$.

Теперь докажем, что b) => a).

Пусть $\{K_n\}$ и $\{O_n\}$ те же, что и в определении 2, причем $K_1 = \varnothing$. Обозначим через R_k^n, $k = 1, 2, \cdots$, последовательность ограниченных компонент дополнения $F \cup K_n$, $n = 2, 3, \cdots$.

Положим

$$F_1 = F \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k^n. \tag{3}$$

Тогда имеем $F \subset F_1$, $\partial F \subset \partial F_1$, и F_1 обладает свойством (α), так как

$$F_1^c \setminus K_n = O_n^*, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

где

$$O_n^* = O_n \setminus \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k^m, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

является связной компонентой $F_1^c \setminus K$, содержащей $D^* \setminus D$.

Если теперь задана последовательность $\{z_k\} \subset \partial F$, $\{z_k\}' \cap D = \varnothing$, то по предложению 1 существует $\lambda \in H$, имеющая нули произвольной кратности в точках z_k, $\|\lambda\|_{F_1} \leqslant 1$ и $\lambda \neq 0$.

Теорема 2 доказана.

Ереванский государственный университет

Поступила 27.IV.1979

Ա. Հ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Անալիտիկ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկում միաժամանակյա ինտերպոլյացիայով *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ստացված է անալիտիկ ֆունկցիաները ոչ-կոմպակտների վրա հավասարաչափ մոտարկման մասին Ն. Հ. Առաքելյանի հայտնի թեորեմի մի ընդհանրացում։ Ցույց է տրված, որ բազմության եզրային կետերի հաջորդականության վրա մոտարկող ֆունկցիան կարող է ինտերպոլյացնել մոտարկվող ֆունկցիայի արժեքները, իսկ նրա վերջավոր թվով ածանցյալների արժեքները կարող են տրվել կամայական կերպով։

Այնուհետև, մտցված է բազմության վրա ինտերպոլյացիոն հաջորդականության գաղափարը և տոպոլոգիապես բնորոշված են այն բազմությունները, որոնց եզրային կետերի կամայական հաջորդականություն հանդիսանում է ինտերպոլյացիոն։

A. H. NERSESIAN. *Uniform approximation with simultaneous interpolation by analytic functions* (summary)

Let D be a domain in C and $F \subset D$ be relatively closed subset of D. Let D^* stand for the one-point compactification of D.

The following generalization of N. H. Arakelian's well known theorem is obtained.

Theorem 1. Let $D^* \setminus F$ be connected and locally connected. Then for any $f \in A(F)$, $\varepsilon > 0$, and sequences

$$\{z_k\} \subset \partial F(\{z_k\}' \cap D = \varnothing); \ \{\nu_k\}; \ \{a_k^s, s = 1, 2, \cdots, \nu_k\}$$

there exists a $\lambda \in H(D)$ such that

$$\|f - \lambda\|_F < \varepsilon, \ \lambda(z_k) = f(z_k), \ \lambda^{(s)}(z_k) = a_k^s,$$

$$s = 1, 2, \cdots, \nu_k, \ k = 1, 2, \cdots.$$

The notion of an interpolatory sequence on a set is introduced and the noncompacts are topologically characterized, for which any sequence of boundary points is interpolatory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. A. Rubel, S. Venkateswaran.* Simultaneous approximation and interpolation by entire functions, Arch. Math. 27, 1976, 526—529.
2. *P. M. Gauthier, W. Hengartner.* Complex approximation and simultaneous interpolation on closed sets, Can, J. Math. 29, 1977, 701—706.
3. *L. Hoischen.* Approximation und Interpolation durch ganze Funktionen, J. Approx. Theory, 15, 1975, 116—123.
4. *А. А. Нерсесян.* Кратная касательная аппроксимация с одновременной интерполяцией в круге, Ученые записки, ЕрГУ, 3, 1979, 3—8.
5. *Н. У. Аракелян* Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 3, 4—5, 1968, 273—285.
6. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, М., «Мир», 1973.
7. *С. Н. Мергелян.* Равномерное приближение функций комплексного переменного, УМН, 7, 2, 1952, 31—122.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 4, 1980 Математика

Р. Г. САФАРЯН

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И СООТВЕТСТВУЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как известно, каждому диффузионному процессу соответствует некоторый эллиптический, быть может вырождающийся, дифференциальный оператор второго порядка. Решения основных краевых задач для этого оператора могут быть представлены в виде средних значений подходящих функционалов от траекторий соответствующего процесса. В этой работе мы прямыми вероятностными методами изучаем траектории диффузионного процесса, зависящего от малого параметра ε. Соответствующие задачи для дифференциальных уравнений относятся к случаю так называемого нерегулярного вырождения, т. е. к случаю, когда решение вырожденной задачи неединственно. Применение современной техники теорем о больших уклонениях [6], позволяет найти главный член асимптотики функционалов от траекторий процесса при $\varepsilon \to 0$, и, следовательно, асимптотику решений соответствующих краевых задач.

В заметке содержатся доказательства некоторых теорем, сформулированных в [4] и ряд новых результатов.

Пусть $D=\{(x, y): |x|<1, |y|<1\}$.

Рассмотрим в D краевую задачу

$$L^\varepsilon u^\varepsilon (x, y)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u^\varepsilon (x, y)}{\partial x^2}+b^1(x, y)\frac{\partial u^\varepsilon(x, y)}{\partial x}+$$

$$+\varepsilon b^2(x, y)\frac{\partial u^\varepsilon(x, y)}{\partial y}, \tag{1}$$

$$u^\varepsilon(x, 1)|_{\Gamma_+}=\psi(x, 1),\ u^\varepsilon(x, -1)|_{\Gamma_-}=\psi(x, -1),\ \left.\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=\pm 1}=0,$$

где

$$\Gamma_+=\{x:\ b^2(x, 1)>0\},\ \Gamma_-=\{x:\ b^2(x, -1)<0\},$$

$\psi(x, 1),\ \psi(x, -1)$ — непрерывные функции на $[-1, 1]$.

Решение задачи (1). по крайней мере, обобщенное, всегда существует, но без дополнительных предположений оно неединственно (см. [4]).

Потребуем, чтобы для каждого $y_0\in[-1, 1]$ нашлось $x_0=x_0(y_0)$ такое, что либо $b^2(x_0, y)>0$ при $y>y_0$, либо $b^2(x_0, y)<0$ при $y\leqslant y_0$.

Это условие обеспечивает единственность решения задачи (1). Если $z_t^\varepsilon = (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)$ — процесс в D с отражением по нормали к границе $|x| = 1$, управляемый оператором L^ε, $\tau^\varepsilon = \min\{t: |y_t^\varepsilon| = 1\}$, то доказывается, что единственное решение задачи (1) можно записать в виде $u^\varepsilon(x, y) = M_{x,y}\psi(x_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon, y_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)$.

В заметке изучается поведение решения $u^\varepsilon(0, y)$ задачи (1) при $\varepsilon \to 0$.

На отрезке $[-1, 1]$ рассмотрим диффузионный процесс x_t, управляемый оператором

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + b^1(x, y)\frac{d}{dx} = L_y$$

с отражением в концах отрезка, $y \in R_1$ — параметр. Пусть $m_y(x)$ — плотность инвариантной меры этого процесса.

Обозначим

$$\bar{b}(y) = \int_{-1}^{1} b^2(x, y)\, m_y(x)\, dx.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{\bar{y}}_t = \bar{b}(\bar{y}_t(z)),\quad \bar{y}_t(z) = z. \tag{2}$$

Для y_t^ε будет справедлив принцип усреднения: для любого $\delta > 0$, $T \in [0, \infty)$, для любых $x, z \in [-1, 1]$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_{x,z}^\varepsilon\{\rho_{0T}(y^\varepsilon, \bar{y}) > \delta\} = 0,$$

где $\bar{y}_t$ — траектория динамической системы (2), $\rho(\varphi, \psi)$ определяется как $\sup\limits_{0 < s < T}|\varphi_s - \psi_s|$, где φ и ψ элементы пространства $C_{0T}(R^1)$ непрерывных функций на $[0, T]$ со значениями в R^1 (см. [6]).

Введем в рассмотрение функционал действия ([6]). Пусть $\mu = \mu(y, \beta)$ — собственное значение задачи

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2} + b^1(x, y)\frac{dv}{dx} + \beta b^2(x, y)\, v = \mu \cdot v,$$

$$x \in (-1, 1),\quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x = \pm 1} = 0$$

с наибольшей вещественной частью.

Здесь $y \in R^1$ и $\beta \in R^1$ — параметры.

Имеет место ([6])

Теорема А. *Собственное значение* $\mu = \mu(y, \beta)$ *однократно дифференцируемо по параметрам и выпукло по* β. *Для произвольных ступенчатых функций* z_s: $[0, T] \to R^1$, β_s: $[0, T] \to R^1$ *равномерно по* x, y

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \ln M^{\varepsilon}_{x,y} \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \beta_s b^2(x_{s/\varepsilon}, z_s)\, ds\right\} \equiv \int_0^T \mu(z_s, \beta_s)\, ds.$$

Определим функцию $L(z, \lambda)$ как преобразование Лежандра от $\mu(z, \beta)$ по параметру β:

$$L(z, \lambda) = \sup_{\beta} [\lambda\beta - \mu(z, \beta)].$$

Функция $L(z, \lambda)$ выпукла вниз по λ и неотрицательна. Там, где $L(z, \lambda) < \infty$ эта функция непрерывна по λ. Действительно, имеем $\lambda\cdot 0 - \mu(z, 0) = 0$ и тем, самым, $\sup\limits_{\beta} [\lambda\beta - \mu(z, \beta)] \geqslant 0$. Выпуклость вниз $L(z, \lambda)$ по λ следует из того, что $\mu(z, \beta)$ выпукла вниз и из свойств преобразования Лежандра.

Для абсолютно непрерывных функций $\varphi \in C_{0T}(R^1)$ положим

$$S_{0T}(\varphi) = \int_0^T L(\varphi_s, \dot{\varphi}_s)\, ds,$$

для остальных $\varphi \in C_{0T}(R^1)$ положим $S_{0T}(\varphi) = +\infty$. Отметим два свойства функционала $S_{0T}(\varphi)$, которые нам в дальнейшем понадобятся.

1. В пространстве $C_{0T}(R^1)$ функционал $S_{0T}(\varphi)$ полунепрерывен снизу, что вытекает из результатов главы 9 монографии [5].

2. Множество $\Phi_a = \{\varphi \in C_{0T}(R^1),\ S_{0T}(\varphi) \leqslant a,\ \varphi_0 = x_0\}$ компактно в пространстве $C_{0T}(R^1)$.

Доказательство. Из ограниченности коэффициентов $b^1(x, y)$ и $b^2(x, y)$ вытекает существование $R_0 > 0$ такого, что $L(z, \lambda) = +\infty$ при $|\beta| > R_0$. Поэтому множеству Φ_a могут принадлежать только те функции φ, у которых $|\dot{\varphi}_s| < R_0$ для почти всех $z \in [0, T]$. Отсюда следует равностепенная непрерывность и равномерная ограниченность функций $\varphi \in \Phi_a$. Теперь компактность Φ_a следует из полунепрерывности функционала и теоремы Арцела.

Нам понадобится также следующая

Теорема В (см. [6]). *Пусть выполнены условия теоремы А. Тогда функционал $S_{0T}(\varphi)$ будет функционалом действия для семейства процессов y^{ε}_t в пространстве $C_{0T}(R^1)$ при $\varepsilon \to 0$, то есть для всех $a, \delta, h > 0$ и $\varphi \in C_{0T}(R^1)$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$*

$$P_y^{\varepsilon} \{\rho_{0T}(y^{\varepsilon}, \varphi) < \delta\} > \exp\{-\varepsilon^{-1}(S_{0T}(\varphi) + h)\},$$

$$P_y^{\varepsilon} \{\rho_{0T}(y^{\varepsilon}, \Phi_a) > \delta\} < \exp\{\varepsilon^{-1}(a - h)\}.$$

Для каждого $\delta > 0$ найдется $a > 0$ такое, что

$$P_{y^{\varepsilon}} \{\rho_{0T}(y^{\varepsilon}, \bar{y}) > \delta\} < \exp\left\{-\frac{a}{\varepsilon}\right\}.$$

Рассмотрим теперь усредненную динамическую систему (2) на прямой.

Предположим, что траектории усредненного уравнения, исходя из любой точки $y \in [-1,1]$, выходят из этого отрезка. Тогда, очевидно, функция $b\,(y)$ не меняет знака. Этот случай рассмотрен в работе [4].

Пусть теперь траектории усредненного движения не выходят из интервала $(-1, 1)$. Пусть $\bar{b}\,(1) < 0$, $\bar{b}\,(-1) > 0$ и функция $\bar{b}\,(y)$ обращается в нуль в точке $q \in (-1, 1)$, отрицательна при $y > q$ и положительна при $y < q$. Обозначим

$$V(y) = \inf\{S_{0T}(\varphi)\colon \varphi(0) = q,\ \varphi_T = y,\ T > 0\}.$$

Из условия, наложенного нами для обеспечения единственности решения задачи (1) вытекает, что $\min\,(V(1), V(-1)) < \infty$, $V(q) = 0$ и $V(y)$ непрерывна.

Теорема 1. *Пусть* $V(1) < V(-1)$ *и* $\psi(x, 1) = \psi_1 = \text{const}$. *Тогда* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon(x, y) = \psi_1$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма а) *Для любого* $\alpha > 0$ *существуют такие положительные константы* a *и* T_0, *что для любой функции* φ_s, *принимающей при* $s \in [0, T]$ *значения в множестве* $D \setminus N$, *где* $N = \{[-1, 1] \times [q - \alpha, q + \alpha]\}$, *имеет место неравенство* $S_{0T}(\varphi) > a\,(T - T_0)$;

б) *для любого* $\alpha > 0$ *существуют положительные константы* c, T_0 *такие, что при всех достаточно малых* ε *для любого* $(x, y) \in D \setminus N$

$$P^\varepsilon_{xy}\{\tau_\alpha > T\} < \exp\left\{-\frac{c\,(T - T_0)}{\varepsilon}\right\},$$

где

$$\tau_\alpha = \inf\{t\colon (x^\varepsilon_t, y^\varepsilon_t) \,\bar{\in}\, D \setminus N\}.$$

Доказательство. Для $(x, y) \in D \setminus N$ обозначим через $\tau(y)$ момент первого выхода решения $\bar{y}^t(y)$ из $D \setminus N$. Так как q — устойчивое положение равновесия динамической системы, то $\tau(y) < \infty$ для всех $(x, y) \in D \setminus N$.

Так как $\bar{y}_t(y)$ непрерывно зависит от y, то функция $\tau(y)$ полунепрерывна сверху. Значит она принимает где-то свое наибольшее значение $\max \tau(y) = T_1$. Положим $T_0 = T_1 + 1$ и рассмотрим все функции φ_t, определенные при $0 \leqslant t \leqslant T_0$, принимающие значения только в $D \setminus N$, для которых $S_{0T}(\varphi) < \infty$. Множество таких функций замкнуто и в силу полунепревывности снизу функционала действия на этом множестве достигает минимума A, который положителен, так как среди рассматриваемых функций φ нет траекторий динамической системы. Итак, для всех таких функций $S_{0T_0}(\varphi) \geqslant A > 0$, для функций, проводящих в $D \setminus N$ время $T > 2T_0$, $S_{0T}(\varphi) \geqslant 2A$ и т. д.

Вообще

$$S_{0T}(\varphi) \geqslant A\left[\frac{T}{T_0}\right] > A\left(\frac{T}{T_0} - 1\right) = a\,(T - T_0).$$

Пусть константы a и T_0 выбраны. Для произвольной точки $(x, y) \in D \setminus N$ и $T > T_0$ обозначим через $\Phi_0(y)$ множество функций φ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\varphi_0 = y$, для которых $S_{0T}(\varphi) \leqslant a(T - T_0)$. Все функции из $\Phi_0(y)$ выходят из $D \setminus N$ на протяжении отрезка $[0, T]$. Применяя второе утверждение теоремы В, получаем

$$P\{\tau_a > T\} \leqslant P\{\rho_{0T}(y^\varepsilon, \Phi_0) > \delta\} < \exp\{-\varepsilon^{-1}[a(T - T_0) - h]\} = \\ = \exp\left\{-\frac{c(T - T_0)}{\varepsilon}\right\}.$$

Этим заканчивается доказательство леммы.

Перейдем к доказательству теоремы. По условию $d = V(-1) - V(1) > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $V(-1) - V(1+\delta) > \frac{d}{2}$. Обозначим через Φ совокупность всех функций φ, соединяющих отрезок $\Gamma_q = \{[-1, 1] \times (y = q)\}$ с отрезком $\Gamma_{+\delta} = \{[-1, 1] \times (y = 1 + \delta)\}$. Ясно, что траектории y_t^ε, лежащие в δ-оркестности кривых $\varphi \in \Phi$, выходят на $\Gamma_1 = \{[-1, 1] \times (y = 1)\}$. Выберем число μ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) существует функция φ_s, $\varphi_{T_1} \in \Gamma_q$, $\varphi_{T_2} \in Q_+ \cup Q_-$, где $Q_+ = \{[-1, 1] \times (y = q + \mu)\}$, $Q_- = \{[-1, 1] \times (y = q - \mu)\}$, такая, что $S_{T_1 T_2}(\varphi) < d$;

2) $$Q = \{[-1, 1] \times [q - \mu, q + \mu]\} \subset D.$$

Введем случайные моменты времени

$$\tau^0 = 0, \ \sigma^1 = \min\{t: t > \tau^0, (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in Q_+ \cup Q_-\},$$

$$\sigma^n = \min\{t: t > \tau^{n-1}, (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in Q_+ \cup Q_-\},$$

$$\tau^n = \min\{t: t > \sigma^{n-1}, (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in Q_+ \cup Q_- \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$$

и рассмотрим цепь Маркова $z_n = (x_{\tau n}^\varepsilon, y_{\tau n}^\varepsilon)$ на фазовом пространстве $Q_+ \cup Q_- \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Теперь рассмотрим цепь $\tilde{z}_n$, которая получается из z_n путем остановки на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Обозначим через $\tilde{A}$ событие: цепь $\tilde{z}_n$ достигает множества $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ за один шаг; A_1-цепь достигает множества Γ_1 за один шаг; A_2 = цепь достигает множества Γ_2 за один шаг. Для любого $h > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что вероятность $P_{x,y}(A_1)$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$, $(x, y) \in Q_+ \cup Q_-$ удовлетворяет неравенствам

$$e^{-\frac{v_3}{\varepsilon} - h} \leqslant P_{x,y}(A_1) \leqslant e^{-\frac{v_3}{\varepsilon} + h}, \text{ где } v_3 = V(1 + \delta).$$

Аналогично для $P_{x,y}(A_2)$ имеет место

$$e^{-\frac{v_2}{\varepsilon} - h} \leqslant P_{x,y}(A_2) \leqslant e^{-\frac{v_2}{\varepsilon} + h}, \text{ где } v_2 = V(-1) \text{ (см. [1])}.$$

Ясно, что $P_{x,y}(A_1 / \tilde{A}) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 1$, $P_{x,y}(A_2 \setminus \tilde{A}) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$, так как $v_3 < v_2$. Обозначим через τ — момент достижения множества

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 : \tau = \min \{t : (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$$

и оценим вероятность

$$P_{x,y}^\varepsilon \{y_\tau = -1\} \quad (x, y) \in Q_+ \cup Q_-$$

$$P_{x,y}^\varepsilon \{y_\tau = -1\} = \sum_k P_{x,y}^\varepsilon \{y_\tau = -1, \ \tau = \tau^k\} =$$

$$= \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \ P_{x,y}^\varepsilon \{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_+ \cup Q_-, \ y_k = -1/F_{<\tau^{k-1}}\} =$$

$$= \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \chi_{\{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_+\}} P_{x,y}^\varepsilon \{y_k = -1/F_{<\tau^{k-1}}\} +$$

$$+ \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \chi_{\{y_1 \in Q_- \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_-\}} P_{x,y}^\varepsilon \{y_k = -1/F_{<\tau^{k-1}}\} =$$

$$= \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \ \chi_{\{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_+\}} P^\varepsilon_{x^\varepsilon_{\tau^{k-1}} y^\varepsilon_{\tau^{k-1}}} \{y_1 = -1\} +$$

$$+ \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \ \chi_{\{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_-\}} P^\varepsilon_{x^\varepsilon_{\tau^{k-1}} y^\varepsilon_{\tau^{k-1}}} \{y_1 = -1\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{\varphi_2}{\varepsilon} + h} \Big(\sum_k M_{x,y}^\varepsilon \chi_{\{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_+\}} +$$

$$+ \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \chi_{\{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_-\}}\Big) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

Итак, имеем $P_{x,y}^\varepsilon \{y_\tau = -1\} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$ и значит $P_{x,y} \{y_\tau = 1\} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 1$. Теперь уже утверждение теоремы следует из формулы $u^\varepsilon(y) = M_y^\varepsilon \psi (y_\tau^\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь случай, когда усредненная система имеет несколько положений равновесия на интервале $(-1, 1)$. Пусть $y_1, y_2, \cdots, y_l \in (-1, 1)$, занумерованные в порядке возрастания устойчивые положения равновесия системы (2). Мы считаем, что в точках y_k поле $\bar b(y)$ меняет знак с плюса на минус. Между любыми соседними точками y_k, y_{k+1} имеется неустойчивое положение равновесия z_k, в котором $\bar b(y)$ меняет знак с минуса на плюс. В остальных точках $\bar b(y) \neq 0$.

Обозначим $y_0 = -1$, $y_{l+1} = 1$, $L = \{0, 1, \cdots, l\}$, $\bar L = \{0, 1, \cdots, l + 1\}$. Положим $V_{ij} = \inf \{S_{0T}(\varphi) : \varphi \in C_{0T}(R^1), \ \varphi_0 = y_i, \ \varphi_T = y_j, \ T > 0\}$ при $i \in L$, $j \in \bar L$; $V_{0,1} = V_{l+1,l} = +\infty$, $V_{0,-1} = 0$. Первый момент выхода процесса y_t^ε из $(-1, 1)$ обозначим $\tau^\varepsilon : \tau^\varepsilon = \inf \{t : |y_t^\varepsilon| = 1\}$.

Теорема 2. *Предположим, что*

$$\min_{k = 0, 1, \cdots, l} \left(\sum_{m=k+1}^{l} V_{m,m+1} + \sum_{m=1}^{k} V_{m,m-1} \right)$$

достигается при единственном значении $k = k^*$. Пусть z_{k^*} — неустойчивое положение равновесия, разделяющее точки y_{k^*} и y_{k^*+1}. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_{x,y}\{y^{\varepsilon}_{\tau_\varepsilon}=-1\}=1, \text{ при } x\in(-1,1),\ y<z_{k^*},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_{x,y}\{y^{\varepsilon}_{\tau_\varepsilon}=-1\}=0, \text{ при } x\in(-1,1),\ y>z_{k^*}.$$

Если $\psi_+(x)=\psi_+=\text{const}$, $\psi_-(x)=\psi_-=\text{const}$, *то* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^{\varepsilon}(x,y)=\psi_-$, *при* $y<z_{k^*}$ *и* $=\psi_+$ *при* $y>z_{k^*}$.

Замечание 1. *Легко видеть, что точку* z_{k^*} *можно определить из условия* $\min\limits_{-1<z<1}\Phi(z)=\Phi(z_{k^*})$, где

$$\Phi(z)=\inf\{S_{0T}(\varphi);\varphi\in C_{0T}(R^1):\varphi_0=z,\ \varphi_T=-1\}+$$
$$+\inf\{S_{0T}(\varphi);\varphi\in C_{0T}(R^1),\ \varphi_0=z,\ \varphi_T=1\}.$$

Замечание 2. *Если* $b(x,-1)<0$ *и* $b(x,1)>0$ *при всех* $x\in[-1,1]$, *то можно не предполагать, что* $\psi_+(x)$ *и* $\psi_-(x)$ — *константы. В этом случае*

$$\psi_+=\int_{-1}^{1}\psi_+(x)\,m_1(x)\,dx,\quad \psi_-=\int_{-1}^{1}\psi_-(x)\,m_{-1}(x)\,dx.$$

Наметим доказательство теоремы 2. Опишем разбиение множества L на иерархию циклов. Определим j_B, где B — отрезок множества L $B=(i,i+1,\cdots,k)$ $B\subset L$ следующим образом:

$$j_B=\begin{cases} i-1 & V_{k,k-1}+\cdots+V_{l+1,l}<V_{l,l+1}+\cdots+V_{k-1,k}\\ k+1 & V_{k,k-1}+\cdots+V_{l+1,l}>V_{l,l+1}+\cdots+V_{k-1,k}.\end{cases}$$

Введем еще функцию $j^n(i)$, $i\in L$, $n=0,1,2,\cdots$ с помощью равенств $j^0(i)=i$, $j^1(i)=j_{\{i\}},\cdots j^n(i)=j_{\{j^{n-1}(i)\}}$. Для каждого $i\in L$ рассмотрим последовательность $i, j^1(i),\cdots,j^k(i),\cdots$. Пусть n—наименьшее число, при котором в этой последовательности начнутся повторения: $n=\min\{k: j^k(i)=j^{k+2}(i)\}$. В этом случае циклами первого ранга, порожденными состоянием i, назовем упорядоченные группы

$$\{i\},\ \{j^1(i)\},\cdots,\ \{j^{n-1}(i)\},\ \{j^n(i)\cup j^{n+1}(i)\}.$$

Если же такого n не существует, т. е. при некотором m $j^m(i)=l+1$, или $j^m(i)=0$, то циклами первого ранга, порожденными состоянием i, назовем $\{i\}$, $\{j^1(i)\},\cdots,\{j^{m-1}(i)\}$.

Циклы k-го ранга или короче k-циклы определяются рекуррентно Пусть $\pi_1^{k-1},\cdots,\pi_{n_{k-1}}^{k-1}$ — все циклы ранга $k-1$. Будем говорить, что цикл π_j^{k-1} следует за циклом π_i^{k-1} и писать $\pi_i^{k-1}\to\pi_j^{k-1}$, если $j_{\Pi_i^{k-1}}\in$ $\in\Pi_j^{k-1}$, где Π_m^{k-1} — множество точек из L, принадлежащих циклу π_m^{k-1}. Рассмотрим какой-то цикл π_i^{k-1} и последовательность $\pi_i^{k-1}\to\pi_{i_1}^{k-1}\to$ $\to\cdots\to\pi_{i_n}^{n-1}\to\cdots$. Пусть m — наименьший номер, при котором $\pi_{i_m}^{k-1}=\pi_{i_{m+2}}^{k-1}$. Тогда будем говорить, что цикл π_i^{k-1} порождает циклы

k-го ранга $\{\pi^{k-1}_{i_1}\}, \cdots, \{\pi^{k-1}_{i_{m-1}}\}, \{\pi^{k-1}_{i_m}, \pi^{k-1}_{i_{m+1}}\}$. Если же такого m не существует, т. е. для какого-то m $j_{\Pi^{k-1}_m} = l+1$ или $j_{\Pi^{k-1}_m} = 0$, то будем говорить, что цикл π^{k-1}_i порождает циклы k-го ранга $\{\pi^{k-1}_{i_1}\}$, $\{\pi^{k-1}_{i_2}\}, \cdots, \{\pi^{k-1}_{m-1}\}$ $\{\pi^{k-1}_m\}$. Отдельные точки множества L будем называть циклами нулевого ранга. Пусть π — какой-то цикл, $\Pi = \{i, i+1, \cdots, k\}$. Назовем основным состоянием цикла π такую точку $d(\pi)$:

$$d(\pi) = \begin{cases} i & j_\Pi = i-1 \\ k & j_\Pi = k+1. \end{cases}$$

В случае общего положения это состояние единственно.

Обозначим $\pi^k(i)$ k-цикл, содержащий точку i. С увеличением k $\Pi^k(i)$ не убывают. Существует такое s, что для всех $i \in L$ $\pi^s(i) = \pi^{s+1}(i)$. Пусть $\pi^s_1, \pi^s_2, \cdots, \pi^s_m$ — всевозможные s-циклы. На множестве $\Pi = \{i, i+1, \cdots, k\}$ каждого такого s-цикла (содержащего больше одной точки), рассмотрим последовательность стрелок $(j \to j+1)$, соединяющих i с $k+1$, если $d(\pi) = k$ или $(j \to j-1)$, соединяющих k с $i-1$, если $d(\pi) = i$. Тогда для любого $i \in L$ мы будем иметь последовательность стрелок, ведущих либо в 0, либо в $l+1$.

Пусть $\min\limits_i (y_i - y_{i-1}) > 2\mu$.

Обозначим $\Gamma_i = \{(y_i - \mu) \times [-1, 1]\} \cup \{(y_i + \mu) \times [-1, 1]\}$,

$$Y_i = \{y_i \times [-1, 1]\}.$$

Рассмотрим марковский процесс $\{x^\varepsilon_t, y^\varepsilon_t\}$. Этот процесс порождает марковскую цепь z_n на фазовом пространстве $Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_e$. Для определения цепи z_n введем случайные моменты τ_n и σ_n

$$\tau_0 = \min\{t;\ (x^\varepsilon_t, y^\varepsilon_t) \in \cup Y_i\},$$

$$\sigma_1 = \min\{t:\ t > \tau_0\ (x^\varepsilon_t, y^\varepsilon_t) \in \cup \Gamma_i\},$$

$$\sigma_n = \min\{t : t > \tau_{n-1}\ (x^\varepsilon_t, y^\varepsilon_t) \in \cup \Gamma_i\},$$

$$\tau_n = \min\{t : t > \sigma_{n-1}\ (x^\varepsilon_t, y^\varepsilon_t) \in \cup Y_i\}.$$

Положим $z_n = (x^\varepsilon_{\tau_n}, y^\varepsilon_{\tau_n})$. Если в какой-то момент цепь находится в множестве Y_i и μ выбрано достаточно малым, то вероятность перехода за один шаг в множество Y_j $(j = i+1, i-1)$ близка к $\exp\left\{-\frac{V_{ij}}{\varepsilon}\right\}$ (см. [1]). Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть $\{i, i+1, \cdots, k\}$ — цикл.*

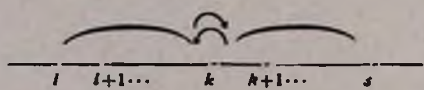
$$S_1 = V_{i,\,i+1} + \cdots + V_{k,\,k+1},\quad S_2 = V_{i,\,i-1} + \cdots + V_{k,\,k-1}.$$

Если $S_1 < S_2$, то исходя из любой точки множества Y_j $i \leqslant j \leqslant k$ цепь z_n сойдет на множество Y_{k+1} с вероятностью, стремящейся к 1, а на множество Y_{i-1} с вероятностью, заключенной при малых ε между величинами $\exp\{\varepsilon^{-1}[S_1 - S_2 \pm (k-i+1)h]\}$. *Если*

$S_1 > S_2$, то цепь z_n сойдет на Y_{l-1} с вероятностью, стремящейся к 1, а на Y_{k+1} с вероятностью, заключенной при малых ε между величинами $\exp\{\varepsilon^{-1}[S_2 - S_1 \pm (k-ih]\}$, *где h — наперед заданное малое положительное число.*

Доказательство проведем по индукции $\overline{\overline{{}_{i-1}\quad {}_{i}\quad {}_{i+1}}}$. Из точки i за один шаг z_n сойдет на $i+1$ с вероятностью заключенной при малых ε между величинами $\exp\left\{-\varepsilon^{-1}\left(V_{i,\,i+1} \pm \frac{h}{2}\right)\right\}$, а в точку $i-1$ — с вероятностью, заключенной между величинами

$\exp\left\{-\varepsilon^{-1} \times \left(V_{i,\,i-1} \pm \frac{h}{2}\right)\right\}$ (см. [1]).



Шаг индукции.

$$S_1 < S_2,\quad S_3 < S_4,\ \text{где}\ S_1 = V_{l,\,l+1} + \cdots + V_{k,\,k+1}$$
$$S_2 = V_{l,\,l-1} + \cdots + V_{k,\,k-1},\ S_3 = V_{k+1,\,k} + \cdots + V_{s,\,s-1},$$
$$S_4 = V_{k+1,\,k+2} + \cdots + V_{s,\,s+1}.$$

Переход в $(s+1)$-е состояние каждый раз будет происходить с вероятностью, заключенной при малых ε между величинами $\exp\{-\varepsilon^{-1}(S_4 - S_3 \pm k_1 h)\}$, а в $(i-1)$-е состояние каждый раз с вероятностью, заключенной при малых ε между величинами $\exp\{-\varepsilon^{-1}(S_2 - S_1 \pm k_2 h)\}$. Ясно, что если $S_2 - S_1 < S_4 - S_3$, то переход влево происходит с вероятностью, стремящейся к 1, при малых ε, а вправо — с вероятностью, заключенной между величинами

$$\exp\{-\varepsilon^{-1}(S_4 - S_3 - S_2 + S_1 \pm k_3 h)\},\ \text{где}\ S_4 + S_1 = V_{l,\,l+1} + \cdots + V_{s,\,s+1},$$
$$S_2 + S_3 = V_{l,\,l-1} + \cdots + V_{s,\,s-1}.$$

Итак, лемма доказана.

Теперь на основании доказанной леммы легко понять, что цепь z_n из множества $\bigcup\limits_{l \in \Pi} Y_l$ перейдет в множество $Y_{l(\kappa)}$. Ясно также, что для всех k, $k < k^*$ последовательность стрелок, введенных выше, ведет в 0, а для всех m, $m > k^* + 1$ последовательность стрелок ведет в $l+1$.

Вернемся к поведению процесса $(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)$. Прежде всего из точки (x, y) траектория процесса с вероятностью, близкой к 1 при малых, ε, следуя вдоль решения $\overline{y}_t(y)$, достигнет множества $Y_l(y)$: затем будут совершаться переходы в соответствии с введенной нами цепью Маркова. И в конце концов выйдет за границу.

Автор приносит благодарность В. В. Сарафяну за обсуждение рассматриваемых задач и ценные замечания.

Армянский государственный
педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 10.VI.1979

Ռ. Գ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ. Որոշ եզրային խնդիրներ փոքր պարամետրով՝ վերածվող դիֆուզիոն պրոցեսների և համապատասխան դիֆերենցիալ հավասարումների համար *(ամփոփում)*

Հավանականության ուղղակի մեթոդներով ուսումնասիրվում են փոքր պարամետրից կախված դիֆուզիոն պրոցեսի հետագծերը։

R. G. SAFARIAN. *Some boundary value problems with small parameter for degenerate difusion processes and corresponding differential equations* (summary)

The orbites of difusion processes depending on a small parameter are considered by direct probability methods.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин.* О малых случайных возмущениях динамических систем, УМН, 25:1, 1970, 9—55.
2. *Р. З. Хасьминский.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью. Теория вероятн. и ее примен., 11:3, 1966, 444—462.
3. *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., «Наука», 1979.
4. *В. В. Сарафян, Р. Г. Сафарян, М. И. Фрейдлин.* Вырождающиеся диффузионные процессы и дифференциальные уравнения с малым параметром, УМН, 33:6, 1978, 233—234.
5. *А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров.* Теория экстремальных задач, М., «Наука», 1974.
6. *М. И. Фрейдлин.* Принцип усреднения и теоремы о больших уклонениях, УМН, 33:5, 1978, 107—160.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 4, 1980 Математика

Р. А. АЛИХАНЯН

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В БЕСКОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ имеем окружности $|z-a|=R$, $|z+a|=R$, $|z-a|=r$, $|z+a|=r$, которые обозначим соответственно через Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4, причем $r<R<a$.

Рассмотрим круговые кольцеобразные области D_1 и D_2, ограниченные окружностями Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4 и бесконечную двусвязную область D_3, ограниченную окружностями Γ_1 и Γ_2.

В настоящей работе изучается смешанная краевая задача для уравнения Лапласа в следующей постановке: найти гармонические в D_n функции $u_n(z)$, принадлежащие классу Гельдера $C'_\alpha(\bar{D}_n)$ и удовлетворяющие краевым условиям:

$$u_1(z)=f_1(z),\ z\in\Gamma_3, \tag{1}$$

$$u_2(z)=f_2(z),\ z\in\Gamma_4, \tag{2}$$

$$u_1(z)=u_3(z)+f_3(z),\ z\in\Gamma_1, \tag{3}$$

$$u_2(z)=u_3(z)+f_4(z),\ z\in\Gamma_2, \tag{4}$$

$$\lambda\frac{\partial u_1(z)}{\partial n_1}=\frac{\partial u_3(z)}{\partial n_1}+f_5(z),\ z\in\Gamma_1, \tag{5}$$

$$\lambda\frac{\partial u_2(z)}{\partial n_2}=\frac{\partial u_3(z)}{\partial n_2}+f_6(z),\ z\in\Gamma_2, \tag{6}$$

$$|u_3(z)|\leqslant \text{const}, \tag{7}$$

где $f_n(z)$ — заданные на Γ_j действительные функции, первые производные которых удовлетворяют условию Гельдера на соответствующей окружности, $\frac{\partial u_n}{\partial n_j}$ — нормальные производные $u_n(z)$ в точках Γ_j $(j=1, 2)$, λ — положительное число.

В случае односвязной конечной или бесконечной области задачи Дирихле, Неймана, Пуанкаре и смешанная краевая задача для эллиптических уравнений изучены, например, в работах [1]—[4].

Перейдем к исследованию задачи (1)—(7). Вначале докажем, что она имеет единственное решение.

Предположим, что функции $u_1(z)$, $u_2(z)$ и $u_3(z)$ являются решением однородной задачи. В силу условия (7) первые производные

$u_3(z)$ в бесконечности имеют порядок $|z|^{-2}$. Поэтому формула Грина (см. [1]) для функций $u_1(z)$, $u_2(z)$ $u_3(z)$ в областях D_1, D_2 и D_3 имеет следующий вид:

$$\iint\limits_{D_1}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma=\int\limits_{\Gamma_1}u_1\frac{\partial u_1}{\partial n_1}ds, \tag{8}$$

$$\iint\limits_{D_2}\left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma=\int\limits_{\Gamma_2}u_2\frac{\partial u_2}{\partial n_2}ds, \tag{9}$$

$$\iint\limits_{D_3}\left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma=-\int\limits_{\Gamma_1}u_3\frac{\partial u_3}{\partial n_1}ds-\int\limits_{\Gamma_2}u_3\frac{\partial u_3}{\partial n_2}ds. \tag{10}$$

Умножая (8) и (9) на λ, суммируя с (10) и пользуясь условиями (3)(6—), находим, что

$$\lambda\iint\limits_{D_1}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma+\lambda\iint\limits_{D_2}\left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma+$$

$$+\iint\limits_{D_3}\left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma=0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}=\frac{\partial u_n}{\partial y}\equiv 0\quad(n=1,\ 2,\ 3),$$

т. е.

$$u_n(z)\equiv\text{const}\quad(n=1,\ 2,\ 3).$$

Так как $u_1(z)=0$ на Γ_3, $u_2(z)=0$ на Γ_4, $u_3(z)=u_1(z)$ на Γ_1, то

$$u_n(z)\equiv 0\quad(n=1,\ 2,\ 3).$$

Единственность задачи доказана.

Перейдем к доказательству существования решения.

Решение задачи (1)—(7) будем искать в виде

$$u_1(z)=\operatorname{Re}\left[\varphi_1\left(\frac{z-a}{R}\right)+\psi_1\left(\frac{r}{z-a}\right)\right]+c_1\ln|z-a|+c_2, \tag{11}$$

$$u_2(z)=\operatorname{Re}\left[\varphi_2\left(\frac{z+a}{R}\right)+\psi_2\left(\frac{r}{z+a}\right)\right]+c_3\ln|z+a|+c_4, \tag{12}$$

$$u_3(z)=\operatorname{Re}\left[\varphi_3\left(\frac{R}{z-a}\right)+\psi_3\left(\frac{R}{z+a}\right)\right]+c_5\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|+c_6, \tag{13}$$

где $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ — аналитические функции в круге $|z|<1$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_n(0)=\psi_n(0)=0\quad(n=1,\ 2,\ 3), \tag{14}$$

а c_n — действительные постоянные.

Нетрудно убедиться, что такое представление решения единственно в том смысле, что из равенства нулю $u_n(z)$ следует, что все $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ и c_n также равны нулю.

Введем следующие функции:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_1(\tau)=f_1(r\tau+a), \quad \tilde{f}_2(\tau)=f_2(r\tau-a), \\ &\tilde{f}_3(\tau)=f_3(R\tau+a), \quad \tilde{f}_4(\tau)=f_4(R\tau-a), \\ &\tilde{f}_5(\tau)=f_5(R\tau+a), \quad \tilde{f}_6(\tau)=f_6(R\tau-a), \end{aligned} \tag{15}$$

$$F_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\tilde{f}_n(\tau)\;\frac{\tau+z}{\tau-z}\cdot\frac{d\tau}{\tau}\quad(n=1,\cdots,6). \tag{16}$$

Если сделать замену переменной $\tau=\dfrac{z-a}{r}$ и положить $r_0=\dfrac{r}{R}$, то граничное условие (1) можно переписать так:

$$\operatorname{Re}\left[\varphi_1(r_0\tau)+\psi_1\left(\frac{1}{\tau}\right)+c_1\ln r+c_2\right]=\tilde{f}_1(\tau),\ |\tau|=1.$$

При $|\tau|=1$ имеет место соотношение

$$\operatorname{Re}\psi_1\left(\frac{1}{\tau}\right)=\operatorname{Re}\psi_1(\bar{\tau})=\operatorname{Re}\overline{\psi_1(\bar{\tau})}.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\left[\varphi_1(r_0\tau)+\overline{\psi_1(\bar{\tau})}+c_1\ln r+c_2\right]=\tilde{f}_1(\tau),\ |\tau|=1. \tag{17}$$

Ясно, что в левой части (17) в квадратных скобках стоит аналитическая функция в круге $|\tau|<1$. Из (17) по формуле Шварца восстанавливая аналитическую функцию в $|z|<1$ по значению ее действительной части на границе, получим

$$\varphi_1(r_0z)+\overline{\psi_1(\bar{z})})+c_1\ln r+c_2=F_1(z)+ic,\ |z|<1, \tag{18}$$

где $F_1(z)$ определяется формулой (16), а c—действительная постоянная. Так как при $z=0$ функции $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ и $F_1(z)$ принимают действительные значения, то в (18) $c=0$, следовательно

$$\varphi_1(r_0z)+\overline{\psi_1(\bar{z})}+c_1\ln r+c_2=F_1(z),\ |z|<1. \tag{19}$$

Рассуждая аналогично, из условия (2) будем иметь

$$\varphi_2(r_0z)+\overline{\psi_2(\bar{z})}+c_3\ln r+c_4=F_2(z),\ |z|<1. \tag{20}$$

Подставим теперь (11) и (13) в граничное условие (3):

$$\operatorname{Re}\left[\varphi_1(\tau)+\psi_1\left(\frac{r_0}{\tau}\right)+c_1\ln R+c_2\right]=$$

$$=\operatorname{Re}\left[\varphi_3\left(\frac{1}{\tau}\right)+\psi_3\left(\frac{1}{\tau+a_0}\right)+c_5\ln(\tau+a_0)+c_6\right]+\tilde{f}_3(\tau), \tag{21}$$

$$\tau=\frac{z-a}{R},\quad a_0=\frac{2a}{R},\ |\tau|=1.$$

При $|\tau|=1$ справедливы соотношения:

$$\operatorname{Re}\psi_1\left(\frac{r_0}{\tau}\right)=\operatorname{Re}\overline{\psi_1(r_0\bar{\tau})},\ \operatorname{Re}\varphi_3\left(\frac{1}{\tau}\right)=\operatorname{Re}\overline{\varphi_3(\bar{\tau})}. \tag{22}$$

Учитывая (22), уравнение (21) перепишем в виде

$$\operatorname{Re}\left[\varphi_1(\tau)+\overline{\psi_1(r_0\bar{\tau})}-\overline{\varphi_3(\bar{\tau})}-\psi_3\left(\frac{1}{\tau+a_0}\right)-c_5\ln(\tau+a_0)+\right.$$

$$\left.+c_1\ln R+c_2-c_6\right]=\tilde{f}_3(\tau),\ |\tau|=1.$$

Отсюда по формуле Шварца (см. [5])

$$\varphi_1(z)+\overline{\psi_1(r_0\bar{z})}-\overline{\varphi_3(\bar{z})}-\psi_3\left(\frac{1}{z+a_0}\right)-c_5\ln(z+a_0)+$$

$$+c_1\ln R+c_2-c_6=F_3(z)+ic,\ |z|<1. \tag{23}$$

При $z=0$ из (23) имеем

$$c_1\ln R+c_2-\psi_3\left(\frac{1}{a_0}\right)-c_5\ln a_0-c_6=F_3(0)+ic,$$

откуда

$$c=-\operatorname{Im}\psi_3\left(\frac{1}{a_0}\right).$$

Следовательно, условие (3) окончательно переписывается в виде

$$\varphi_1(z)+\overline{\psi_1(r_0\bar{z})}-\overline{\varphi_3(\bar{z})}-\psi_3\left(\frac{1}{z+a_0}\right)-c_5\ln(z+a_0)+$$

$$+c_1\ln R+c_2-c_6=F_3(z)-i\operatorname{Im}\psi_3\left(\frac{1}{a_0}\right),\ |z|<1. \tag{24}$$

Подставим (11) и (13) в (5):

$$\lambda\operatorname{Re}\left[\varphi_1'(\tau)\ \tau-\psi_1'\left(\frac{r_0}{\tau}\right)\frac{r_0}{\tau}+c_1\right]=$$

$$=\operatorname{Re}\left[-\varphi_3'\left(\frac{1}{\tau}\right)\frac{1}{\tau}-\psi_3'\left(\frac{1}{\tau+a_0}\right)\frac{\tau}{(\tau+a_0)^2}-\frac{c_5a_0}{\tau+a_0}\right]+\tilde{f}_5(\tau),\ |\tau|=1.$$

Ясно, что при $|\tau|=1$

$$\operatorname{Re}\psi_1'\left(\frac{r_0}{\tau}\right)\frac{1}{\tau}=\operatorname{Re}\psi_1'(r_0\bar{\tau})\bar{\tau}=\operatorname{Re}\overline{\psi_1'(r_0\bar{\tau})}\ \tau,$$

$$\operatorname{Re} \varphi_3'\left(\frac{1}{\tau}\right)\frac{1}{\tau} = \operatorname{Re} \overline{\varphi_3'(\bar{\tau})}\ \tau.$$

Следовательно

$$\lambda \operatorname{Re}[\varphi_1'(\tau)\tau - \overline{\psi_1'(r_0\bar{\tau})}\, r_0 \tau + c_1] +$$

$$+ \operatorname{Re}\left[\overline{\varphi_3'(\bar{\tau})}\,\tau + \psi_3'\left(\frac{1}{\tau+a_0}\right)\frac{\tau}{(\tau+a_0)^2} + \frac{c_5 a_0}{\tau+a_0}\right] = \bar{f}_5(\tau), \ |\tau|=1.$$

Поэтому

$$\lambda[\varphi_1'(z) z - r_0 z\overline{\psi_1'(r_0\bar{z})} + c_1] + z\overline{\varphi_3'(\bar{z})} +$$

$$+\frac{z}{(z+a_0)^2}\psi_3'\left(\frac{1}{z+a_0}\right) + \frac{c_5 a_0}{z+a_0} = F_5(z) + ic, \ |z|<1. \qquad (25)$$

При $z=0$ из (25) имеем

$$c=0, \qquad (26)$$

$$\lambda c_1 + c_5 = F_5(0). \qquad (27)$$

Те же рассуждения при подстановке (12) и (13) в (4) и (6) приводят к следующим уравнениям в круге $|z|<1$:

$$\varphi_2(z) + \overline{\psi_2(r_0\bar{z})} - \varphi_3\left(\frac{1}{z-a_0}\right) - \overline{\psi_3(\bar{z})} + c_5 \ln(a_0 - z) +$$

$$+ c_3 \ln R + c_4 - c_6 = F_4(z) - i \operatorname{Im} \varphi_3\left(-\frac{1}{a_0}\right), \qquad (28)$$

$$\lambda[\varphi_2'(z) z - \overline{\psi_2'(r_0\bar{z})}\, r_0 z + c_3] + \frac{z}{(z-a_0)^2}\varphi_3'\left(\frac{1}{z-a_0}\right) +$$

$$+\overline{\psi_3'(\bar{z})}\, z + \frac{a_0 c_5}{z-a_0} = F_6(z). \qquad (29)$$

Из (29) при $z=0$ имеем

$$\lambda c_3 - c_5 = F_6(0). \qquad (30)$$

Разделив уравнения (25) и (29) на z и учитывая соотношения (26), (27) и (30), получим

$$\lambda[\varphi_1'(z) - r_0\overline{\psi_1'(r_0\bar{z})}] + \overline{\varphi_3'(\bar{z})}\ \frac{1}{(z+a_0)^2}\psi_3'\left(\frac{1}{z+a_0}\right) -$$

$$-\frac{c_5}{z+a_0} = \frac{F_5(z) - F_5(0)}{z}, \qquad (31)$$

$$\lambda[\varphi_2'(z) - r_0\overline{\psi_2'(r_0\bar{z})}] + \overline{\psi_3'(\bar{z})} + \frac{1}{(z-a_0)^2}\varphi_3'\left(\frac{1}{z-a_0}\right) +$$

$$+\frac{c_5}{z-a_0} = \frac{F_6(z) - F_6(0)}{z}. \qquad (32)$$

Полагая в (19), (20), (24) и (28) $z=0$, будем иметь

$$
\begin{gathered}
c_1 \ln r + c_2 = F_1(0),\\
c_3 \ln r + c_4 = F_2(0), \qquad (33)\\
c_1 \ln R + c_2 - \operatorname{Re} \psi_3\left(\frac{1}{a_0}\right) - c_5 \ln a_0 - c_6 = F_3(0),\\
c_3 \ln R + c_4 - \operatorname{Re} \varphi_3\left(-\frac{1}{a_0}\right) + c_5 \ln a_0 - c_6 = F_4(0).
\end{gathered}
$$

Из соотношений (27), (30) и (33) находим, что

$$
c_5 = \frac{\lambda}{2\lambda \ln a_0 - 2\ln r_0}\left\{\operatorname{Re}\left[\varphi_3\left(-\frac{1}{a_0}\right) - \psi_3\left(\frac{1}{a_0}\right)\right] - \right.
$$

$$
\left. - \frac{\ln r_0}{\lambda}\,[F_5(0) - F_6(0)] + F_1(0) - F_2(0) - F_3(0) + F_4(0)\right\}. \qquad (34)
$$

Продифференцировав по z обе части уравнений (19), (20), (24) и (28) и решая полученные уравнения совместно с (31) и (32) относительно

$$
\varphi_1'(z),\ \varphi_2'(z),\ \overline{\varphi_3'(\bar z)},\ \overline{\psi_1'(\bar z)},\ \psi_2'(z),\ \overline{\psi_3'(\bar z)},
$$

получим

$$
\begin{gathered}
\varphi_1'(z) = \frac{1}{\lambda+1}\left[(\lambda-1) r_0 \overline{\psi_1'(r_0 \bar z)} - \frac{2}{(z+a_0)^2}\psi_3'\left(\frac{1}{z+a_0}\right) + \right.\\
\left. + \frac{2c_5}{z+a_0} + F_3'(z) + \frac{F_5(z) - F_5(0)}{z}\right],\\
\varphi_2'(z) = \frac{1}{\lambda+1}\left[(\lambda-1) r_0 \overline{\psi_2'(r_0 \bar z)} - \frac{2}{(z-a_0)^2}\varphi_3'\left(\frac{1}{z-a_0}\right) - \right.\\
\left. - \frac{2c_5}{z-a_0} + F_4'(z) + \frac{F_6(z) - F_6(0)}{z}\right],\\
\overline{\varphi_3'(\bar z)} = \frac{1}{\lambda+1}\left[2\lambda r_0 \overline{\psi_1'(r_0 \bar z)} + \frac{\lambda-1}{(z+a_0)^2}\psi_3'\left(\frac{1}{z+a_0}\right) + \right.\\
\left. + \frac{1-\lambda}{z+a_0}c_5 - \lambda F_3'(z) + \frac{F_5(z) - F_5(0)}{z}\right], \qquad (35)\\
\overline{\psi_1'(\bar z)} = -r_0 \varphi_1'(r_0 z) + F_1'(z),\\
\overline{\psi_2'(\bar z)} = -r_0 \varphi_2'(r_0 z) + F_2'(z),\\
\overline{\psi_3'(\bar z)} = \frac{1}{\lambda+1}\left[2\lambda r_0 \overline{\psi_2'(r_0 \bar z)} + \frac{\lambda-1}{(z-a_0)^2}\varphi_3'\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \right.
\end{gathered}
$$

$$+\frac{1-\lambda}{a_0-z}c_5-\lambda F_4'(z)+\frac{F_6(z)-F_6(0)}{z}\Bigg],$$

где c_5 определяется формулой (34).

Введем банахово пространство B вектор-функций

$$\Phi=(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4,\ \Phi_5,\ \Phi_6), \tag{36}$$

аналитических в $|z|<1$, непрерывных в $|z|\leqslant 1$, с нормой

$$\|\Phi\|=\sum_{m=1}^{6}\|\Phi_m\|,\ \|\Phi_m\|=\max_{|z|=1}|\Phi_m(z)|.$$

Тогда система (35) в B запишется в виде

$$\Phi=K\Phi+G,$$

где K — некоторый линейный вполне непрерывный оператор в B, $G(z)$ — известная вектор-функция, выражающаяся через $F_m(z)$ $(m=1,\cdots,6)$, а

$$\Phi(z)=\left(\varphi_1'(z),\ \varphi_2'(z),\ \overline{\varphi_3'(\bar z)},\ \overline{\psi_1'(\bar z)},\ \overline{\psi_2'(\bar z)},\ \overline{\psi_3'(\bar z)}\right)$$

— искомая вектор-функция.

Так как однородная задача имеет только нулевое решение, то однородная система (35) (при $F_m(z)=0$) также будет иметь только нулевое решение. Следовательно, уравнение (36) всегда разрешимо. Таким образом, доказано существование решения задачи (1) — (7).

З а м е ч а н и е. Пусть Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, D_1 и D_2 те же, что и в рассмотренной задаче, а D_3—трехсвязная область, ограниченная окружностями Γ_1, Γ_2 и $|z|=\rho$ $(\rho>a+R)$. Изложенный выше метод можно применить и для решения следующей краевой задачи: найти решение уравнения Лапласа в областях D_1, D_2 и D_3 удовлетворяющее условиям (1)—(6) и условию

$$u_3(z)=f_7(z),\quad |z|=\rho.$$

Решения $u_1(z)$ и $u_2(z)$ данной задачи ищем в виде (11) и (12), а $u_3(z)$—в виде

$$u_3(z)=\mathrm{Re}\left[\varphi_3\left(\frac{R}{z-a}\right)+\psi_3\left(\frac{R}{z+a}\right)+\varphi_4\left(\frac{z}{\rho}\right)\right]+$$

$$+c_5\ln|z+a|+c_6\ln|z-a|+c_7.$$

За постановку задачи и постоянное внимание автор выражает искреннюю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 20.XII.1978

Ռ. Ա. ԱԼԻԽԱՆՅԱՆ. Խառը եզրային խնդիր Լապլասի հավասարման համար անվերջ բազմակապ տիրույթում (ամփոփում)

Աշխատանքում հետազոտված են խառը եզրային խնդիրներ Լապլասի հավասարման համար կոնցենտրիկ և էքսցենտրիկ շրջանային օղակաձև տիրույթներում։ Ապացուցված են դրված խնդիրների լուծման գոյությունն ու միակությունը։

R. A. ALIKHANYAN. *The mixed boundary problem for infinite and multiconnected domains for Laplace equation* (summary)

The mixed boundary problems for Laplace equation is studied for concentric and excentric circular ring domains.

The existance and uniqueness of the solution of the mentioned problems is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе*. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, «Наука», М., 1966.
2. *Н. Е. Товмасян*. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Диф. уравнения, 2, № 1, 1966, 3—23, 163—171.
3. *Н. Е. Товмасян*. Об одном методе решения краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сб., 89 (131), 1972, № 4 (12), 599—615.
4. *Г. А. Мартиросян*. Смешанные краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XI, № 2, 1976, 158—182.
5. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат*. Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», М., 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 4, 1980 Математика

В. М. МАРТИРОСЯН

О ЗАМЫКАНИИ, МИНИМАЛЬНОСТИ И БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ ПРОСТЕЙШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ НА СИСТЕМЕ ЛУЧЕЙ

Введение

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\gamma; \delta) = \{z : \gamma < \operatorname{Arg} z < \delta\}$. Следуя М. М. Джрбашяну обозначим через s_k кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$. С этой последовательностью ассоциируем систему простейших рациональных дробей $\{r_k(z) = (s_k - 1)!\ (z - \lambda_k)^{-s_k}\}_1^\infty$. Если $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p - 1$, то элементы системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ принадлежат пространству $H_{p,\omega}[\Delta^*(\gamma; \delta)]$ функций f, голоморфных в $\Delta^*(\gamma; \delta) = \mathbf{C} \setminus \overline{\Delta(\gamma; \delta)}$ и таких, что

$$\|F\|^*_{H_{p,\omega}[\Delta^*(\gamma;\delta)]} = \sup_{\delta < \varphi < \gamma + 2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

В работе автора [1] были установлены критерии полноты (в $H_{p,\omega}[\Delta^*(\gamma; \delta)]$), минимальности и базисности в своем замыкании системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$. В случае неполноты там же было дано полное внутреннее описание замыкания системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$, а в случае минимальности была построена биортогональная с ней система.

В настоящей работе рассматриваются системы простейших рациональных дробей вида $\{r(\zeta; \lambda_k) = (\zeta - \lambda_k)^{-s_k}\}_1^\infty$, где $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — уже последовательность, элементы которой расположены вне системы лучей Γ, где

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{N} \{\zeta : \operatorname{Arg} \zeta = \vartheta_n,\ 0 \leqslant |\zeta| < +\infty\},\quad 0 \leqslant \vartheta_1 < \cdots < \vartheta_N < 2\pi.$$

Ввиду такого выбора последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ элементы системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ принадлежат пространству $L_{p,\omega}(\Gamma)$ измеримых на Γ функций f, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{p,\omega} = \left\{ \int_\Gamma |f(\zeta)|^p |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{1/p} < +\infty.$$

В данной работе устанавливаются критерии полноты и минимальности (в $L_{p,\omega}(\Gamma)$) системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$. В случае неполноты системы

$\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ дается полное внутреннее описание ее замыкания, а в случае минимальности строится биортогональная с ней система. Устанавливается также критерий базисности (в своем замыкании) системы $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$.

Эти результаты получаются на основании описанных выше результатов из работы автора [1]. Именно, вопросы полноты, минимальности, описания замыкания и базисности в $L_{p,\omega}(\Gamma)$ сводятся к соответствующим вопросам в пространствах $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]\equiv H_{p,\omega}[\Delta^*(\vartheta_n;\vartheta_{n+1})]$, $n=1,\cdots,N$ (здесь положено $\vartheta_{N+1}=\vartheta_N+2\pi$). Это становится возможным благодаря установленному в настоящей работе факту о представимости $L_{p,\omega}(\Gamma)$ в виде прямой суммы своих подпространств $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$, $n=1,\cdots,N$.

Обозначения и напоминания

(а) Пусть $N\geqslant 2$ и

$$0\leqslant\vartheta_1<\cdots<\vartheta_N,\ \vartheta_{N+1}=\vartheta_N+2\pi.$$

Для значений $n=1,\cdots,N$ обозначим через

$$\Delta_n=\{z:\ \vartheta_n<\operatorname{Arg} z<\vartheta_{n+1},\ 0<|z|<+\infty\},$$
$$\Delta_n^*=\{z:\ \vartheta_{n+1}<\operatorname{Arg} z<\vartheta_n+2\pi,\ 0<|z|<+\infty\},$$

взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и положим

$$\alpha_n=\frac{\pi}{\vartheta_{n+1}-\vartheta_n},\quad \eta_n=\frac{\vartheta_{n+1}+\vartheta_n}{2}.$$

Очевидно, что π/α_n это раствор угла Δ_n, а луч $\{re^{i\eta_n}:r>0\}$ является его биссектрисой.

Далее, обозначим через

$$\Gamma=\bigcup_{n=1}^N\Gamma_{\vartheta_n}$$

систему N лучей Γ_{ϑ_n}, исходящих из точки $\zeta=0$, где

$$\Gamma_{\vartheta_n}=\{\zeta:\ \operatorname{Arg}\zeta=\vartheta_n,\ 0\leqslant|\zeta|<+\infty\}.$$

Очевидно, что области Δ_n не пересекаются, и если положить

$$\Delta=\bigcup_{n=1}^N\Delta_n,$$

то будем иметь

$$\Gamma\cap\Delta=\varnothing,\ \Gamma\cup\Delta=\mathbf{C}. \tag{1}$$

Очевидно также, что $\Gamma=\partial\Delta$.

(б) Пусть $\Lambda\equiv\{\lambda_k\}_1^\infty\subset\Delta$ — произвольная последовательность, подчиненная лишь тому условию, что в каждой области Δ_n содержится бесконечное число ее членов. (Это последнее ограничение не диктуется существом дела и мы его накладываем лишь для упрощения формулировок наших теорем).

Для произвольного целого $j \geqslant 1$ обозначим через s_j кратность появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_j\}$, а через p_j обозначим кратность появления числа λ_j во всей последовательности $\Lambda \equiv \{\lambda_k\}_1^\infty$. Очевидно, что

$$1 \leqslant s_j \leqslant p_j \leqslant +\infty \quad (j=1, 2, \cdots).$$

Для данного n $(n=1, \cdots, N)$ обозначим через $\Lambda^{(n)} \equiv \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ ту подпоследовательность последовательности $\Lambda \equiv \{\lambda_k\}_1^\infty$, элементы которой лежат в Δ_n.

Далее, для любого целого $j \geqslant 1$ обозначим через $s_j^{(n)}$ кратность появления числа $\lambda_j^{(n)}$ на отрезке $\{\lambda_1^{(n)}, \cdots, \lambda_j^{(n)}\}$, а через $p_j^{(n)}$ обозначим кратность появления числа $\lambda_j^{(n)}$ во всей последовательности $\Lambda^{(n)} \equiv \equiv \{\lambda_k^{(n)}\}_1^\infty$.

Легко видеть, что если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1+|\lambda_k^{(n)}|^{2\alpha_n})^{-1} \operatorname{Re} [\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n} \,*, \tag{2}$$

то число $p_k^{(n)}$ конечно при любом $k \geqslant 1$.

При условии сходимости ряда (2) бесконечное произведение

$$B_{\Delta_n}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{[z \exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n} - [\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n}}{[z \exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n} + [\overline{\lambda_k^{(n)}} \exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n}} \varkappa_k,$$

$$\varkappa_k = |1-[\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{2\alpha_n}| / (1-[\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{2\alpha_n}),$$

сходится в области Δ_n и определяет там ограниченную единицей аналитическую функцию $B_{\Delta_n}(z)$. При этом $B_{\Delta_n}(z)$ обращается в нуль лишь в точках последовательности $\Lambda^{(n)} \equiv \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ и точка $z=\lambda_k^{(n)}$ является для нее нулем кратности $p_k^{(n)}$ (см. [2]).

(в) Всюду ниже будем полагать, что

$$1<p<+\infty, \quad -1<\omega<p-1. \tag{3}$$

Обозначим через $L_{p,\omega}(\Gamma)$ класс измеримых на Γ функций f таких, что

$$\|f\|_{p,\omega} = \left\{ \int_\Gamma |f(\zeta)|^p |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Далее, обозначим через $H_{p,\omega}[\Delta_n]$ класс голоморфных в Δ_n функций F, удовлетворяющих условию

---

* Здесь и ниже под z^α понимаем ту ветвь этой функции, которая на полуоси $(0, +\infty)$ принимает положительные значения.

$$\|F\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n]} = \sup_{\vartheta_n<\varphi<\vartheta_{n+1}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega dr \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{4}$$

Аналогично, $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$— это класс голоморфных в Δ_n^* функций F, для которых

$$\|F\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n^*]} = \sup_{\vartheta_{n+1}<\varphi<\vartheta_n+2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega dr \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{4'}$$

Следует отметить, что такие классы в угловых областях при $p=2$ и $-1<\omega<1$ были введены и исследованы М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [3] (см. также гл. VII монографии [4]), а в случае (3)—автором [1]. Эти классы являются естественными обобщениями на произвольные угловые области классов H_p в полуплоскости. Поэтому они обладают многими свойствами классов H_p. В частности, справедлива следующая теорема (см. [4], теорему 7.5, а также [1], теорему 1).

Теорема А. *Если* $F \in H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$, *то*:

1°. *Почти всюду на* $\partial\Delta_n^*$ *функция* F *имеет некасательные граничные значения* $F(\zeta)$, *причем*

$$\|F\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n^*]} = \left\{ \int_{\partial\Delta_n^*} |F(\zeta)|^p |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{1/p} < +\infty \tag{5}$$

и справедливы равенства.

$$\lim_{\varphi\to\vartheta_j} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi}) - F(re^{i\vartheta_j})|^p r^\omega dr = 0 \ (j=n, n+1); \tag{6}$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_n^*} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} F(z), & \text{при } z \in \Delta_n^*, \\ 0, & \text{при } z \in \Delta_n, \end{cases}$$

где направление на $\partial\Delta_n^*$ *совпадает с направлением положительного обхода области* Δ_n^*.

Аналогичная теорема справедлива и для $H_{p,\omega}[\Delta_n]$.

Нам необходимо ввести еще один класс функций. Именно, при условии сходимости ряда (2) обозначим через $H_{p,\omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ класс тех F, которые удовлетворяют условиям:

1) $F \in H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$,

2) $F(\zeta) B_{\Delta_n}(\zeta)$, $\zeta \in \partial\Delta_n^*$, является граничной функцией некоторой функции из $H_{p,\omega}[\Delta_n]$.

Грубо говоря, $H_{p,\omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ — это подкласс тех F из $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$, которые в определенном смысле допускают мероморфное продолжение в область Δ_n, с возможными полюсами в точках последовательности $\Lambda^{(n)}$. Кроме того, если это продолжение умножить на B_{Δ_n}, то полученная функция будет из $H_{p,\omega}[\Delta_n]$.

(г) Для удобства читателя мы здесь напомним также определения базисных и минимальных систем.

Пусть $\{x_k\}_1^\infty$ — система элементов банахова пространства X.

Обозначим через $(\{x_k\}_1^\infty; X)$ замыкание в топологии X линейной оболочки системы $\{x_k\}_1^\infty$.

По определению, $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом $(\{x_k\}_1^\infty; X)$ если любой элемент $x \in (\{x_k\}_1^\infty; X)$ единственным образом представим в виде суммы ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\, x_k,$$

сходящегося в топологии X. Здесь $c_k(x)$ — комплексные коэффициенты, единственным образом определяемые по элементу x.

Скажем, что система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом $(\{x_k\}_1^\infty; X)$, изоморфным стандартному базису пространства l_p, если существует ограниченный обратимый линейный оператор R: $(\{x_k\}_1^\infty; X) \to l_p$ такой, что

$$R(x_k) = \{\delta_{k,m}\}_{m=1}^{\infty} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

где $\delta_{k,m}$ — символ Кронекера. В этом определении мы через l_p обозначили пространство суммируемых со степенью p комплексных последовательностей.

Далее, система $\{x_k\}_1^\infty$ называется минимальной (или топологически свободной) в X, если ни один ее член нельзя приблизить в топологии X линейными комбинациями остальных членов. Минимальность системы $\{x_k\}_1^\infty$ необходима и достаточна для существования биортогональной с ней системы, т. е. такой системы ограниченных линейных функционалов $\{x_k^*\}_1^\infty \subset X^*$, что

$$x_k^*(x_m) = \delta_{k,m} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad (k, m = 1, 2, \cdots).$$

Формулировки результатов

(а) Важную роль при доказательстве результатов этой работы играет теорема о представлении пространства $L_{p,\omega}(\Gamma)$ в виде прямой суммы ее „хороших" подпространств. Прежде чем сформулировать эту теорему, сделаем несколько замечаний.

В пространстве $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ можно задать норму как равенством (4′), так и равенством (5). Более того, справедливы следующие утверждения (см. [1], теорему 2):

1°. $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ *с нормой* (4′) *является банаховым пространством*;

2°. *Для любого* $F \in H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ *справедливы неравенства*

$$2^{-1/p}\|\dot F\|_{H_{p,\infty}[\Delta_n^*]}\leqslant\|F\|^*_{H_{p,\infty}[\Delta_n^*]}\leqslant\|F\|_{H_{p,\infty}[\Delta_n^*]}\,. \tag{7}$$

Пусть теперь $F\in H_{p,\infty}[\Delta_n^*]$. Так как система лучей Γ лежит в замкнутой области $\overline{\Delta_n^*}$, то мы можем рассмотреть сужение функции F на Γ (на $\partial\Delta_n^*$ берем граничные значения F). Легко видеть, что F полностью определяется своим сужением на Γ (см. утверждение 2 теоремы А) и ввиду (4′) и (5) это сужение принадлежит $L_{p,\infty}(\Gamma)$. При этом, если учесть также (6), получим неравенства

$$N^{-1/p}\|F\|_{p,\infty}\leqslant\|F\|_{H_{p,\infty}[\Delta_n^*]}\leqslant\|F\|_{p,\infty}. \tag{8}$$

Таким образом, $H_{p,\infty}[\Delta_n^*]$ *можно рассматривать как замкнутое подпространство банахова пространства* $L_{p,\infty}(\Gamma)$.

Замечание. Из неравенств (7) и (8) следует, что нормы $\|\cdot\|_{H_{p,\infty}[\Delta_n^*]}$, $\|\cdot\|^*_{H_{p,\infty}[\Delta_n^*]}$ и $\|\cdot\|_{p,\infty}$ определяют в $H_{p,\infty}[\Delta_n^*]$ одну и ту же топологию. Этим фактом мы часто будем пользоваться без напоминания.

Справедлива следующая теорема о разложении пространства $L_{p,\infty}(\Gamma)$ в прямую сумму ее подпространств $H_{p,\infty}[\Delta_n^*]$ $(n=1,\cdots,N)$.

Теорема 1. *Пусть* $f\in L_{p,\infty}(\Gamma)$ *произвольна. Тогда функция* f *единственным образом представима в виде*

$$f(\zeta)=\sum_{n=1}^{N}f_n(\zeta)\ \textit{почти всюду на}\ \Gamma, \tag{9}$$

где $f_n\in H_{p,\infty}[\Delta_n^*]$ $(n=1,\cdots,N)$. *При этом*

$$\|f_n\|_{p,\infty}\leqslant A_{p,\infty}\|f\|_{p,\infty}\ (n=1,\cdots,N), \tag{10}$$

где постоянная $A_{p,\infty}\in(0,+\infty)$ *не зависит от* f.

(б) С последовательностью $\Lambda=\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем систему простейших рациональных дробей $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$, положив

$$r(\zeta;\lambda_k)=(\zeta-\lambda_k)^{-s_k}\ (k=1,2,\cdots).$$

Так как $\{\lambda_k\}_1^\infty\subset\Delta$, то ввиду (1) полюсы функций $r(\zeta;\lambda_k)$ расположены вне Γ. Следовательно, $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty\subset L_{p,\infty}(\Gamma)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для полноты в* $L_{p,\infty}(\Gamma)$ *системы* $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ *необходимо и достаточно, чтобы ряды* (2) *расходились при всех* $n=1,\cdots,N$.

В частном случае, когда $N=2$, $\vartheta_1=0$, $\vartheta_2=\pi$, $\omega=0$ и члены последовательности $\Lambda\equiv\{\lambda_k\}_1^\infty$ попарно различны, утверждение теоремы 2 было установлено С. Н. Бернштейном [5] (см. также [6], стр. 264).

Следует также отметить, что утверждения, аналогичные утверждениям теоремы 2 и приводимой ниже теоремы 3, отличными от приведенных в этой работе методами установлены И. О. Хачатряном (сообщение на II конференции по применениям методов комплексного анализа, Черноголовка, 1979 г.).

Теперь обозначим через

$$(\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty;\ L_{p,\omega}(\Gamma))$$

замыкание в топологии $L_{p,\omega}(\Gamma)$ линейной оболочки системы $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$.

Из теоремы 2 следует, что если хоть при одном $n=n_0$ ряд (2) сходится, то система $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ не полна в $L_{p,\omega}(\Gamma)$ и, следовательно, $(\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty;\ L_{p,\omega}(\Gamma))$ не совпадает с $L_{p,\omega}(\Gamma)$. В следующей теореме содержится как теорема 2 (в чем мы убедимся ниже), так и дается полное внутреннее описание пространства $(\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty;\ L_{p,\omega}(\Gamma))$ в случае неполноты системы $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$.

Теорема 3. *Класс* $(\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty;\ L_{p,\omega}(\Gamma))$ *совпадает с множеством функций* φ, *допускающих представление вида*

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(\zeta),\ \zeta\in\Gamma, \tag{11}$$

где $\varphi_n\in H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$, *когда при данном* n *ряд* (2) *расходится, и* $\varphi_n\in H_{p,\omega}[\Delta_n^*;\ \Lambda^{(n)}]$, *когда при данном* n *ряд* (2) *сходится.*

Сформулируем теперь критерий минимальности системы $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$.

Теорема 4. *Система* $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ *минимальна в* $L_{p,\omega}(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда ряды* (2) *сходятся при всех* $n=1,\cdots,N$.

В случае, когда ряды (2) сходятся при всех $n=1,\cdots,N$, мы построим систему $\{\Omega(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty\subset L_{q,\omega}(\Gamma)$ $(1/p+1/q=1)$, биортогональную с $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ в смысле

$$\int_\Gamma r(\zeta;\lambda_k)\,\overline{\Omega(\zeta;\lambda_m)}\,|\zeta|^\omega\,|d\zeta|=\begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m,\end{cases}\quad (k,\ m\geqslant 1). \tag{12}$$

Наконец, сформулируем последний результат этой работы. Для этого введем еще одно обозначение. Если $\lambda_k\in\Delta_n$ при данных k и n $(k\geqslant 1,\ 1\leqslant n\leqslant N)$, то положим

$$\beta_k=\{|\lambda_k|^{\tilde\omega+(1-\alpha_n)(2-q)}\ [|\lambda_k|^{1-\alpha_n}\,\mathrm{Re}\,(e^{-i\eta_n}\lambda_k)^{\alpha_n}]^{q(s_k-1)+1}\}^{1/q},$$

где $1/p+1/q=1$, $\tilde\omega=(1-q)\,\omega$.

Теорема 5. *Если выполняются условия*

$$\inf_{k\geqslant 1}\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j^{(n)}\neq\lambda_k^{(n)}}}^{\infty}\left|\frac{[\lambda_k^{(n)}\exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n}-[\lambda_j^{(n)}\exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n}}{[\lambda_k^{(n)}\exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n}+\overline{[\lambda_j^{(n)}\exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n}}}\right|>0\ (n=1,\cdots,N), \tag{13}$$

$$\sup_{k\geqslant 1}|p_k|<+\infty, \tag{14}$$

то система $\{\beta_k r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ *является базисом пространства* $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p,\omega}(\Gamma))$, *изоморфным стандарному базису пространства* l_p.

Если же хоть одно из условий (13), (14) *нарушается, то система* $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ *ни при какой перестановке членов не является базисом пространства* $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p,\omega}(\Gamma))$.

Результаты, лежащие в основе доказательств сформулированных теорем

Пусть $f \in L_{p,\omega}(\Gamma)$. Очевидно, что при всех $n = 1, \cdots, N$ имеем $f(re^{i\vartheta_n})\, r^{\omega/p} \in L_p(0, +\infty)$. Следовательно, справедливо следующее утверждение (см. [1], лемму 1).

Лемма А. *При всех* n $(n=1, \cdots, N)$ *функция*

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\vartheta_n}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in \mathbf{C}\setminus\Gamma_{\vartheta_n}\,^*,$$

аналитична в области $\mathbf{C}\setminus\Gamma_{\vartheta_n}$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{\vartheta_n < \varphi < \vartheta_n + 2\pi} \left\{\int\limits_0^{+\infty} |F_n(re^{i\varphi})|^p\, r^\omega\, dr\right\}^{1/p} \leqslant B_{p,\omega} \|f\|_{p,\omega}, \tag{15}$$

где $B_{p,\omega} \in (0, +\infty)$ *не зависит от* f. *Более того, функция* F_n *почти всюду на* Γ_{ϑ_n} *имеет угловые граничные значения* $F_n^{(-)}(\zeta)$, $F_n^{(+)}(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma_{\vartheta_n}$, *соответственно слева и справа от луча* Γ_{ϑ_n}, *причем* $F_n^{(\pm)}(re^{i\vartheta_n})\, r^{\omega/p} \in L_p(0, +\infty)$ *и*

$$f(\zeta) = F_n^{(-)}(\zeta) + F_n^{(+)}(\zeta) \ \text{ почти всюду на } \Gamma_{\vartheta_n}. \tag{16}$$

В следующих четырех теоремах $n=1, \cdots, N$. Эти утверждения также были установлены в работе автора [1].

Теорема В. *Для полноты в* $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ *системы* $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ *необходимо и достаточно, чтобы ряд* (2) *расходился.*

Теорема С. *Если ряд* (2) *сходится, то*

$$(\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty; H_{p,\omega}[\Delta_n^*]) = H_{p,\omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}].$$

Через $(\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty; H_{p,\omega}[\Delta_n^*])$ мы обозначили замыкание в топологии $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ линейной оболочки системы $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$.

Теорема Д. *Система* $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ *минимальна в* $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ *тогда и только тогда, когда ряд* (2) *сходится.*

Теорема Е. *Если выполняются условия*

---

* Полагаем, что направление на Γ_{ϑ_n} совпадает с направлением возрастания $|\zeta|$.

$$\inf_{k\geq 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j^{(n)} \neq \lambda_k^{(n)}}}^{\infty} \left| \frac{[\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\epsilon_n} - \overline{[\lambda_j^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\epsilon_n}}}{[\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\epsilon_n} + \overline{[\lambda_j^{(n)} \exp(-i\eta_n)}^{\epsilon_n}} \right| > 0, \qquad (13')$$

$$\sup_{k\geq 1} \{p_k^{(n)}\} < +\infty, \qquad (14'),$$

то система $\{\beta_k^{(n)}\, r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}$, *где*

$$\beta_k^{(n)} = \{|\lambda_k^{(n)}|^{\widetilde{\omega} + (1-\epsilon_n)(2-q)} [|\lambda_k^{(n)}|^{1-\epsilon_n} \operatorname{Re}(e^{-i\eta_n} \lambda_k^{(n)})^{\epsilon_n}]^{q(s_k^{(n)}-1)+1}\}^{1/q},$$

является базисом пространства $\{(r)\, \zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}; H_{p,\omega}[\Delta_n^*])$, *изоморфным стандартному базису пространства* l_p.

Если же хоть одно из условий (13′), (14′) *нарушается, то система* $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}$ *ни при какой перестановке членов не является базисом пространства* $(\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}; H_{p,\omega}[\Delta_n^*])$.

Предположим теперь, что при данном n $(n=1,\cdots, N)$ ряд (2) сходится. Положим

$$\widetilde{\Omega}(\zeta; \lambda_k^{(n)}) = \frac{B_{\Delta_n}(\zeta)}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{p_k^{(n)}-s_k^{(n)}} \frac{a_\nu(\lambda_k^{(n)})}{(\zeta - \lambda_k^{(n)})^{p_k^{(n)}+s_k^{(n)}-\nu+1}} \quad (k\geq 1), \qquad (17)$$

где

$$a_\nu(\lambda_k^{(n)}) = \frac{1}{\nu!} \frac{d}{dz^\nu} \frac{(z-\lambda_k^{(n)})^{p_k^{(n)}}}{B_{\Delta_n}(z)} \Bigg|_{z=\lambda_k^{(n)}} \quad (0\leq \nu \leq p_k^{(n)}-1;\ k\geq 1).$$

Тогда будем иметь

$$\int_{\partial\Delta_n} r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\, \widetilde{\Omega}(\zeta; \lambda_m^{(n)})\, d\zeta = \begin{cases} 1, & k=m, \\ 0, & k\neq m, \end{cases} \quad (k, m\geq 1), \qquad (18)$$

где направление на $\partial\Delta_n$ совпадает с направлением положительного обхода области Δ_n (см. [1], теорему 8).

Доказательства теорем 1—5

Доказательство теоремы 1. Пусть $f_n \in L_{p,\omega}(\Gamma)$. Для данного n $(n=1,\cdots, N)$ положим

$$f_n^{(+)}(z) = \begin{cases} F_n(z), & \text{при } z\in \mathbb{C}\setminus\Gamma_{\vartheta_n}, \\ F_n^{(+)}(z), & \text{при } z\in\Gamma_{\vartheta_n}; \end{cases} \qquad (19)$$

$$f_n^{(-)}(z) = \begin{cases} F_n(z), & \text{при } z\in \mathbb{C}\setminus\Gamma_{\vartheta_n}, \\ F_n^{(-)}(z), & \text{при } z\in\Gamma_{\vartheta_n}, \end{cases} \qquad (19')$$

где функции F_n, $F_n^{(+)}$ и $F_n^{(-)}$ определяются по лемме А. Тогда, в силу (16), почти всюду на Γ справедливо равенство

$$f(\zeta)=\sum_{n=1}^{N}[f_n^{(-)}(\zeta)-f_n^{(+)}(\zeta)]. \tag{20}$$

Определим теперь функции $f_n\,(n=1,\cdots,N)$ следующим образом:

$$f_n(\zeta)=f_{n+1}^{(-)}(\zeta)-f_n^{(+)}(\zeta),\ \text{при}\ n=1,\cdots,N-1;$$

$$f_N(\zeta)=f_1^{(-)}(\zeta)-f_N^{(+)}(\zeta).$$

Тогда равенство (20) можно переписать в виде (9), а из (19), (19′) и (15) для всех $n=1,\cdots,N$ будем иметь

$$f_n\in H_{p,\infty}[\overset{*}{\Delta}_n],\quad \|f_n\|_{H_{p,\infty}[\overset{*}{\Delta}_n]}\leqslant 2B_{p,\infty}\|f\|_{p,\infty}.$$

Таким образом, представление (9) доказано, и, если учесть (7) и (8), из последних неравенств получим также неравенства (10).

Докажем единственность представления (9).

Пусть $f_n\in H_{p,\infty}[\overset{*}{\Delta}_n]\ (n=1,\cdots,N)$ и

$$f_1(\zeta)+\cdots+f_N(\zeta)=0\ \text{почти всюду на}\ \Gamma.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$f_1(\zeta)=-\sum_{n=2}^{N}f_n(\zeta)\ \text{почти всюду на}\ \Gamma. \tag{21}$$

Далее, поскольку $f_1\in H_{p,\infty}[\overset{*}{\Delta}_1]$, то в силу теоремы А можем написать

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_1}\frac{f_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,\quad z\in\Delta_1. \tag{22}$$

С другой стороны, $\bigcap_{n=2}^{N}\overset{*}{\Delta}_n=\Delta_1$ и $f_n\in H_{p,\infty}[\overset{*}{\Delta}_n]$. Значит сужение каждой функции $f_n\,(n=2,\cdots,N)$ на область Δ_1 принадлежит классу $H_{p,\infty}[\Delta_1]$. Следовательно, $f_2+\cdots+f_N\in H_{p,\infty}[\Delta_1]$, и по теореме А

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_1}\frac{-[f_2(\zeta)+\cdots+f_N(\zeta)]}{\zeta-z}\,d\zeta=-\sum_{n=2}^{N}f_n(z),\quad z\in\Delta_1. \tag{23}$$

Из этого представления на основании (21) и (22) получаем:

$$f_1(\zeta)=0\ \text{почти всюду на}\ \partial\Delta_1=\partial\overset{*}{\Delta}_1. \tag{24}$$

Но так как функция f_1 в области $\overset{*}{\Delta}_1$ представима интегралом Коши по своим граничным значениям на $\partial\overset{*}{\Delta}_1$, то $f_1(z)=0$ при $z\in\overset{*}{\Delta}_1$. Из этого тождества, включения $\Gamma\in\overline{\overset{*}{\Delta}_1}$ и (24) окончательно получаем: $f_1(\zeta)=0$ почти всюду на Γ.

Аналогично можно доказать, что $f_n(\zeta)=0\ (n=2,\cdots,N)$ почти всюду на Γ. Отсюда следует единственность представления (9), и теорема доказана.

Доказательства теорем 2 и 3. Докажем сначала теорему 3. Пусть $\{Q_j\}_1^\infty$ — некоторая последовательность линейных комбинаций элементов системы $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$. Так как эта система распадается на N подсистем $\{r(\zeta;\lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ $(n=1,\cdots,N)$, то каждое Q_j представимо в виде

$$Q_j=\sum_{n=1}^{N} Q_{j,n}\ (j=1,\ 2,\cdots), \tag{25}$$

где $Q_{j,n}$ — линейная комбинация элементов системы $\{r(\zeta;\lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$. При этом $Q_{j,n}\in H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$, поскольку $\{r(\zeta;\lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty\subset H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$.

Если теперь $\varphi\in L_{p,\omega}(\Gamma)$, то по теореме 1

$$\varphi=\sum_{n=1}^{N}\varphi_n\ (\varphi_n\in H_{p,\omega}[\Delta_n^*]),$$

и согласно (25) получаем

$$\varphi-Q_j=\sum_{n=1}^{N}(\varphi_n-Q_{j,n})\ (j=1,\ 2,\cdots).$$

Следовательно, в силу той же теоремы 1 для всех $n=1,\cdots,N$ справедливы неравенства

$$\|\varphi_n-Q_{j,n}\|_{p,\omega}\leqslant A_{p,\omega}\|\varphi-Q_j\|_{p,\omega}\ (j=1,\ 2,\cdots).$$

Кроме того, очевидны неравенства

$$\|\varphi-Q_j\|_{p,\omega}\leqslant\sum_{n=1}^{N}\|\varphi_n-Q_{j,n}\|_{p,\omega}\ (j=1,\ 2,\cdots).$$

Из последних неравенств заключаем, что последовательность $\{Q_j\}_1^\infty$ сходится в топологии $L_{p,\omega}(\Gamma)$ к функции $\varphi\in L_{p,\omega}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда при каждом $n=1,\cdots,N$ последовательность компонент $\{Q_{j,n}\}_{j=1}^\infty$ сходится в топологии $L_{p,\omega}(\Gamma)$ к соответствующей компоненте φ_n функции φ.

Таким образом, замыкание в топологии $L_{p,\omega}(\Gamma)$ системы $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ совпадает с множеством функций φ, допускающих представление вида $\varphi=\varphi_1+\cdots+\varphi_N$, где при каждом $n=1,\cdots,N$ функция φ_n принадлежит замыканию в топологии $L_{p,\omega}(\Gamma)$ (или, что то же, — в топологии $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$) системы $\{r(\zeta;\lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$.

Отсюда на основании теорем B и C получаем утверждение теоремы 3.

Теперь уже легко доказать и теорему 2. Действительно, если ряды (2) расходятся при всех $n=1,\cdots,N$, то из теорем 3 и 1 следует, что замыкание в топологии $L_{p,\omega}(\Gamma)$ системы $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ совпадает с $L_{p,\omega}(\Gamma)$, то есть эта система полна в $L_{p,\omega}(\Gamma)$.

Предположим теперь, что при некотором $n=n_0$ ряд (2) сходится. Тогда, как следует из теорем B и C, класс $H_{p,\omega}[\Delta_{n_0}^*;\ \Lambda^{(n_0)}]$ лежит в

$H_{p,\infty}[\Delta^*_{n_0}]$, не совпадая с ним. Пусть φ_{n_0} — функция, лежащая во втором из этих классов и не лежащая в первом, и пусть $\varphi_n \in H_{p,\infty}[\Delta^*_n]$, где $n \neq n_0$. Тогда функция $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_N$ лежит в $L_{p,\infty}(\Gamma)$, а по теореме 3 она не принадлежит замыканию в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$ системы $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$. Значит в этом случае система $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ не полна в $L_{p,\infty}(\Gamma)$. Этим теорема 2 также доказана.

Доказательство теоремы 4. Если при некотором $n=n_0$ ряд (2) расходится, то система $\{r(\zeta;\lambda_k^{(n_0)})\}_{k=1}^\infty$ не минимальна в $H_{p,\infty}[\Delta^*_{n_0}]$ (см. теорему Д). Иначе говоря, существует элемент системы $\{r(\zeta;\lambda_k^{(n_0)})\}_{k=1}^\infty$, принадлежащий замыканию в топологии $H_{p,\infty}[\Delta^*_{n_0}]$ (или, что то же, —в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$) линейной оболочки остальных элементов этой системы. Следовательно, для минимальности в $L_{p,\infty}(\Gamma)$ системы $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ необходимо, чтобы все ряды (2) сходились.

Предположим теперь, что ряды (2) сходятся при всех $n=1,\cdots,N$.

Построим систему $\{\Omega(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty \subset L_{p,\infty}(\Gamma)$, $1/p+1/q=1$, биортогональную с системой $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ в смысле (12). Отсюда уже будет следовать минимальность в $L_{p,\infty}(\Gamma)$ системы $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$.

Определим на Γ функции $\Omega(\zeta;\lambda_k^{(n)})$ $(n=1,\cdots,N;\ k=1,2,\cdots)$ следующим образом:

$$\Omega(\zeta;\lambda_k^{(n)}) = \begin{cases} \overline{\tilde{\Omega}(\zeta;\lambda_k^{(n)})\,\zeta}\,|\zeta|^{-\infty-1}, & \zeta\in\Gamma_{\vartheta_n}, \\ -\overline{\tilde{\Omega}(\zeta;\lambda_k^{(n)})\,\zeta}\,|\zeta|^{-\infty-1}, & \zeta\in\Gamma_{\vartheta_{n+1}}, \\ 0, & \zeta\in\Gamma\setminus\{\Gamma_{\vartheta_n}\cup\Gamma_{\vartheta_{n+1}}\}, \end{cases} \tag{26}$$

где $\tilde{\Omega}(\zeta;\lambda_k^{(n)})$ — функции из (17).

Далее, определим систему $\{\Omega(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$, как объединение систем $\{\Omega(\zeta;\lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ $(n=1,\cdots,N)$ и покажем, что она биортогональна с системой $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ в смысле (12). Для этого сначала заметим, что система $\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^\infty$ есть объединение систем $\{r(\zeta;\lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ $(n=1,\cdots,N)$. В силу этого, нам надо доказать, что объединение систем $\{\Omega(\zeta;\lambda_m^{(l)})\}_{m=1}^\infty$ $(l=1,\cdots,N)$ и объединение систем $\{r(\zeta;\lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ $(n=1,\cdots,N)$ биортогональны.

Возможны 3 случая: 1) $k=m,\ n=l$; 2) $k\neq m,\ n=l$; 3) $n\neq l$.

Ввиду (18) и (26) в первых двух случаях имеем:

$$\int_\Gamma r(\zeta;\lambda_k^{(n)})\,\overline{\Omega(\zeta;\lambda_m^{(l)})}\,|\zeta|^\infty\,|d\zeta| =$$

$$= \int_{\partial\Delta_n} r(\zeta;\lambda_k^{(n)})\,\tilde{\Omega}(\zeta;\lambda_m^{(n)})\,d\zeta = \begin{cases} 1, & k=m, \\ 0, & k\neq m, \end{cases} \quad (k,\ m\geqslant 1). \tag{27}$$

Пусть теперь $n\neq l$. Тогда при всех $k\geqslant 1$ точка $z=\lambda_k^{(n)}$ лежит в области Δ_l^*. Кроме того, $\tilde{\Omega}(\zeta;\lambda_m^{(l)})\in H_{p,\infty}[\Delta_l]$. Следовательно, в силу теоремы А

$$\int_{\partial\Delta_l} \frac{\widetilde{\Omega}(\zeta;\lambda_m^{(l)})}{(\zeta-\lambda_k^{(n)})^s} \bar{\beta}_k^{(n)} d\zeta = 0.$$

Учитывая (26) это равенство можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma} r(\zeta;\lambda_k^{(n)})\,\overline{\Omega(\zeta;\lambda_m^{(l)})}\,|\zeta|^{\omega}\,|d\zeta| = 0 \quad (k, m \geqslant 1).$$

Отсюда и из (27) следует биортогональность в смысле (12) систем

$$\{r(\zeta;\lambda_k)\}_1^{\infty} \quad \text{и} \quad \{\Omega(\zeta;\lambda_k)\}_1^{\infty}.$$

Наконец, поскольку функции $\widetilde{\Omega}(\zeta;\lambda_k^{(n)})$ ограничены и при $|\zeta|\to$ $\to+\infty$ имеют порядок $O(|\zeta|^{-1})$, то $\widetilde{\Omega}(\zeta;\lambda_k^{(n)}) \in H_{q,\tilde{\omega}}[\Delta_n]$ $(1/p+1/q=1,$ $\tilde{\omega}=(1-q)\,\omega)$. Отсюда и из (26) заключаем, что $\{\Omega(\zeta;\lambda_k)\}_1^{\infty} \subset L_{q,\tilde{\omega}}(\Gamma)$. Этим завершается доказательство теоремы 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. Пусть условия (13) и (14) выполняются.

По теореме E, при каждом $n=1,\cdots,N$ система $\{\beta_k^{(n)} r(\zeta;\lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом пространства $H_{p,\omega}[\Delta_n^*;\Lambda^{(n)}]$, изоморфным стандартному базису пространства l_p. В частности, если $\{\gamma_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty} \in l_p$, то ряд

$$f_n(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(n)} \{\beta_k^{(n)} r(\zeta;\lambda_k^{(n)})\} \tag{28}$$

безусловно сходится в топологии $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ и определяет функцию $f_n \in$ $\in H_{p,\omega}[\Delta_n^*;\Lambda^{(n)}]$. При этом справедливо неравенство

$$\|f_n\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n^*]} \leqslant C\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k^{(n)}|^p\right\}^{1/p},$$

где $C \in (0,+\infty)$ не зависит от $\{\gamma_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$. Отсюда на основании неравенств (8) заключаем, что ряд (28) безусловно сходится в топологии $L_{p,\omega}(\Gamma)$ к функции f_n и справедливо неравенство

$$\|f_n\|_{p,\omega} \leqslant N^{1/p}\, C\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k^{(n)}|^p\right\}^{1/p}.$$

Пусть теперь $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^{\infty}$ — произвольная последовательность из l_p. Рассмотрим ряд

$$R[\gamma] = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \{\beta_k r(\zeta;\lambda_k)\}. \tag{29}$$

Представив его в виде

$$R[\gamma] = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(n)} \{\beta_k^{(n)} (r(\zeta;\ \lambda_k^{(n)})\},$$

на основании вышесказанного заключаем, что ряд (29) безусловно сходится в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$ к функции $f_\gamma = R[\gamma]$, причем $f_\gamma \in (\{r(\zeta;\ \lambda_k)\}_1^\infty;\ L_{p,\infty}(\Gamma))$ и

$$\|f_\gamma\|_{p,\infty} \leqslant B \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p},$$

где $B \in (0, +\infty)$ не зависит от $\gamma = \{\gamma_k\}_1^\infty$.

Таким образом, равенством (29) определяется ограниченный линейный оператор R, отображающий l_p в $(\{r(\zeta;\ \lambda_k)\}_1^\infty;\ L_{p,\infty}(\Gamma))$. При этом очевидно, что R переводит стандартный базис пространства l_p в систему $\{\beta_k r(\zeta;\ \lambda_k)\}_1^\infty$. Более того, так как из условий (13) вытекает сходимость рядов (2) при всех $n = 1, \cdots, N$, то система $\{\beta_k r(\zeta;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ минимальна и, следовательно, имеет биортогональное дополнение (см. теорему 4). Отсюда вытекает, что разным элементам из l_p, оператор R ставит в соответствие разные элементы пространства $(\{r(\zeta;\ \lambda_k)\}_1^\infty;\ L_{p,\infty}(\Gamma))$.

Покажем, что $R[l_p]$ совпадает с пространством $(\{r(\zeta;\ \lambda_k)\}_1^\infty;\ L_{p,\infty}(\Gamma))$.

Пусть φ—произвольный элемент из этого пространства. В силу теоремы 3 имеем: $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_N$, где $\varphi_n \in H_{p,\infty}[\Delta_n^*;\ \Lambda^{(n)}]$ $(n = 1, \cdots, N)$. При этом, согласно теореме 1, справедливы неравенства

$$\|\varphi_n\|_{p,\infty} \leqslant A_{p,\infty} \|\varphi\|_{p,\infty} \quad (n = 1, \cdots, N), \tag{30}$$

где $A_{p,\infty} \in (0, +\infty)$ не зависит от φ.

Далее, поскольку при каждом $n = 1, \cdots, N$ система $\{\beta_k^{(n)} r(\zeta;\ \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ является базисом $H_{p,\infty}[\Delta_n^*;\ \Lambda^{(n)}]$, изоморфным стандартному базису пространства l_p (см. теорему E), то справедливо разложение

$$\varphi_n(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(n)} \{\beta_k^{(n)} r(\zeta;\ \lambda_k^{(n)})\},$$

где $\{\gamma_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty \in l_p$, а ряд безусловно сходится к φ_n в топологии $H_{p,\infty}[\Delta_n^*]$ (или, в силу (8), в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$). Следовательно

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(n)} \{\beta_k^{(n)} r(\zeta;\ \lambda_k^{(n)})\} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \{\beta_k r(\zeta;\ \lambda_k)\}, \tag{31}$$

где $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty$ — объединение последовательностей $\{\gamma_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty (n = 1, \cdots, N)$. Очевидно, что $\{\gamma_k\}_1^\infty \in l_p$ и ряд в (31) безусловно сходится в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$ к φ. Значит $R[\gamma] = \varphi$.

Итак, мы доказали, что ограниченный линейный оператор R взаимно-однозначно отображает l_p на $(\{r(\zeta;\ \lambda_k)\}_1^\infty;\ L_{p,\infty}(\Gamma))$ и переводит стандартный базис пространства l_p в систему $\{\beta_k r(\zeta;\ \lambda_k)\}_1^\infty$. Следовательно, при условиях (13) и (14) система $\{\beta_k r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ является базисом $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p,\omega}(\Gamma))$, изоморфным стандартному базису пространства l_p.

Обратно, предположим, что система $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ при некоторой перестановке σ является базисом пространства $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p,\omega}(\Gamma))$. Тогда эта же система минимальна в $L_{p,\omega}(\Gamma)$ (см. [7], стр. 164—171). Следовательно, в силу теоремы 4, ряды (2) сходятся при всех $n=1, \cdots, N$. При этом существует система $\{\Omega(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$, биортогональная с системой $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ в смысле (12). Одновременно при всех $n=1,\cdots$ $\cdots, N$ имеем

$$(\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty; L_{p,\omega}(\Gamma)) = H_{p,\omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}].$$

(см. теорему C и неравенства (8)).

Из приведенных фактов следует, что для любой функции $\varphi \in$ $\in H_{p,\omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ справедливы равенства

$$\int_\Gamma \varphi(\zeta) \overline{\Omega(\zeta; \lambda_k^{(m)})} \, |\zeta|^\omega \, |d\zeta| = 0 \quad (n \neq m, \ k \geqslant 1). \tag{32}$$

Кроме того, по предположению $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ при перестановке σ является базисом пространства $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p,\omega}(\Gamma))$, а по теореме 3 $H_{p,\omega}[\Delta_n^*;$ $\Lambda^{(n)}]$ является подпространством этого пространства. Следовательно, любая функция $\varphi \in H_{p,\omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ разлагается в сходящийся в топологии $L_{p,\omega}(\Gamma)$ ряд

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty}{}_\sigma \, c_k \, r(\zeta; \lambda_k) \tag{33}$$

(индекс σ означает, что члены ряда σ перестановлены). При этом коэффициенты c_k единственным образом определяются по формулам

$$c_k = \int_\Gamma \varphi(\zeta) \overline{\Omega(\zeta; \lambda_k)} \, |\zeta|^\omega \, |d\zeta| \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{34}$$

С учетом (32) из (33) и (34) получаем, что любая функция $\varphi \in$ $\in H_{p,\omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ единственным образом разлагается в сходящийся в топологии $L_{p,\omega}(\Gamma)$ (или, в силу (8), в топологии $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$) ряд по некоторой перестановке системы $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$.

Таким образом, для всех $n=1,\cdots, N$ система $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ при надлежащей расстановке членов является базисом пространства $H_{p,\omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$. Следовательно, при всех $n=1,\cdots, N$ должны выполняться условия (13), а также условия

$$\sup_{k \geqslant 1} \{p_k^{(n)}\} < +\infty$$

(см. теорему E).

Но так как

$$\max_{1<n<N} \sup_{k>1} |p_k^{(n)}| = \sup_{k>1} |p_k|,$$

то выполняется также условие (14). Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.VI.1979

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Ճառագայթների համակարգի վրա պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների փակության, մինիմալության ու բազիսության մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ստացվել են պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներից կազմված սիստեմների փակության, մինիմալության ու բազիսության հայտանիշները. կոմպլեքս հարթության $z = 0$ կետից դուրս եկող վերջավոր թվով ճառագայթների վրա միջին կշռային մոտարկման դեպքում։

Այդպիսի սիստեմի ոչ լրիվության դեպքում տրված է նրա փակույթի լիակատար ներքին նկարագիրը, իսկ մինիմալության դեպքում կառուցված է նրա բիօրթոգոնալ սիստեմը։

V. M. MARTIROSIAN. *On the closure, minimality and basisness of systems of symplest rational fractions on a system of rays* (summary)

A criterian of closeness, minimality and basisness on a system of rays for systems of rational fractions are established in this paper.

A complete inner description of the closure of such nonclosed systems of rational fractions is given. In the case of minimality of such a system its biorthogonal system is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. М. Мартиросян*. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем, и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIII, №№ 5—6, 1978.
2. *М. М. Джрбашян*. О замкнутости системы типа Миттаг-Леффлера, ДАН СССР 219, № 6, 1974, 1302—1305.
3. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
4. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, „Наука", М., 1966.
5. *С. Н. Бернштейн*. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réele, 1926.
6. *Н. И. Ахиезер*. Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947.
7. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев*. Элементы функционального анализа, „Наука", М., 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV. № 4, 1980 Математика

Г. Р. ОГАНЕСЯН

О НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ЗАДАННЫМИ ВРОНСКИАНАМИ

Рассмотрим задачу Коши для функции $u(t, x)$:

$$[\partial_t^2 + b(t, x)\,\partial_x^2 + q(t, x)]\, u(t, x) = f(t, x),\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(0, x) = f_1(x),\ \partial_t u(0, x) = f_2(x), \tag{2}$$

здесь

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\ \partial_x = \frac{\partial}{\partial x};\ t,\ x \in R^1.$$

Если функции b, q, f_1, f_2 и f аналитичны по всем своим аргументам, то теорема Коши—Ковалевской гарантирует существование единственного аналитического решения в окрестности любой начальной точки $(0, x_0)$. Известно также (см. [1]), что требование аналитичности по временной переменной t можно ослабить. Именно, если, например, в (1)—(2) b, q и f—непрерывные функции от t, значения которых суть аналитические функции от x, то в окрестности точки $(0, x_0)$ существует единственное решение u, представляющее собой непрерывно дифференцируемую функцию от t, значения которых—аналитические функции от x. Если коэффициент q уравнения (1) имеет особенность при $t = 0$, точнее нарушается условие

$$\int_0^T |\tau q(\tau, x)|\, d\tau < \infty, \tag{3}$$

то задача Коши (1)—(2) плохо поставлена. Это объясняется тем, что задача (1)—(2) становится существенно сингулярной и решения уравнения (1) могут себя плохо вести при $t \to 0$ (обращаться в нуль или вообще не иметь следа на отрезке прямой $t = 0$).

Для таких задач Бицадзе [2] предложил ставить задачу Коши с весом. Для уравнений и систем первого порядка с коэффициентами, имеющими фуксовы (регулярные) особенности варианты теоремы Коши—Ковалевской были доказаны в работах Бауенди и Галауика [3], [4].

В настоящей статье предлагается постановка начальной задачи (на начальной гиперплоскости вместо данных Коши задаются некоторые вронскианы), которая позволяет методом последовательных приближений доказать аналог теоремы Коши—Ковалевской для уравнений и систем с произвольными (регулярными или нерегулярными) особенностями при $t=0$. Отметим, что аналогичная постановка задачи встречалась у Коропа [5] и Марченко [6] при изучении обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с особенностью, а также у Нерсесяна [7] при изучении корректности задачи Коши для симметрических систем. Однако, в отличие от [7], мы не делаем никаких упрощающих предположений относительно структуры матрицы A (см. 22)).

§ 1. Обозначения

Обозначим некоторую малую окрестность начала координат через $V=V_t\{(x_0, x),\ 0<x_0<t,\ x\in S\subset R^n\}$, а через S_t — сечение этой окрестности гиперплоскостью $x_0=t$. Если $f(t, x_1,\cdots, x_n)$ — комплекснозначная бесконечно дифференцируемая по пространственным переменным x функция, то шкала банаховых пространств Жевре определяется следующим образом:

$$G_\gamma = G(\gamma, s) = \{f,\ \|f\|_{\gamma, s}<\infty\},$$
$$\|f\|_s = \|f\|_{\gamma, s} \equiv \left\{\sum_\alpha [s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-\gamma}\|\partial_x^\alpha f\|]^2\right\}^{1/2}, \tag{4}$$

где α — мультииндекс, $\alpha\in Z_+^n$, $\|f\|$ — L_2-норма по переменным x. Нормы вектор-функций F размерности l и матричных функций A размера $l\times l$ определяются, как обычно, формулами

$$\|F\|^2 = \sum_{i=1}^{l}|F_i|^2,\quad \|A\| = \sup_{\|F\|=1}\|AF\|.$$

Через $GS(\gamma, \rho, m)$ мы обозначим класс символов Жевре, состоящий из множества функций $h(t, x, \xi)$, представимых в виде

$$h(t, x, \xi) = h_1(t, \xi) + h_2(t, x, \xi),\quad \xi\in R^n, \tag{5}$$

и таких, что

$$N(h, \gamma, \rho, m, q, l)<\infty,\quad q, l\in Z_+^n, \tag{6}$$

где

$$N = N_1 + N_2,$$
$$N_1 = \sup_\xi \{(1+|\xi|^2)^{\frac{|q|-m}{2}}|\partial_\xi^q h_1|\},$$
$$N_2 = \sup_{x, \xi, p}\{\rho^{|p|}|p|!\,(1+|\xi|^2)^{\frac{|q|-m}{2}}|x^l\partial_x^p\partial_\xi^q h_2|\}.$$

Обозначим через $C_t^m(B)$ множество m раз дифференцируемых функций от t со значениями в банаховом пространстве B.

§ 2. Постановка задачи и основные результаты

Если известна фундаментальная система решений $\{\psi_k(t, x)\}_1^m$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$L\psi = \sum_{k=0}^{m} l_k(t, x)\, \partial_t^k \psi = 0, \ l_m \equiv 1, \ l_j(t) \in C^m(0, T], \tag{7}$$

то общее решение неоднородного уравнения

$$Lu = g(t, x) \tag{8}$$

можно найти, например, методом вариации произвольных постоянных (см. [8]):

$$u(t, x) = \hat{u}(t, x) + \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\, \psi_k(t, x), \tag{9}$$

где $f_k(x)$—произвольные функции

$$\hat{u}(t, x) = \int_0^t K(t, \tau, \psi)\, g(\tau, x)\, d\tau, \tag{10}$$

$$K(t, \tau, \psi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{W_j(\tau, \psi)}{W(\tau, \psi)}\, \psi(t, x),$$

$$K_j(t, \tau) \equiv \partial_t^j K(t, \tau), \ j = 0, 1, \cdots, m-1,$$

вронскиан $W(t, \psi)$ представляет собой определитель матрицы, первая строка которой состоит из элементов $\psi_1, \cdots, \psi_m$, а последующие строки являются последовательными производными первой строки до порядка $m-1$ включительно, т. е.

$$W(t, \psi) = W(t, \psi_1, \cdots, \psi_m) = \det\left(\partial_t^{p-1} \psi_q\right)_{p,\, q=1}^{m},$$

а $W_j(t, \psi)$—определитель, получаемый из $W(t, \psi)$ в результате замены j-го столбца на $(0, \cdots, 0, 1)$.

Пусть K^n—интегральные операторы, определяемые формулой

$$K^n f = \int_0^t \|K(t, t_1)\|_{s_1} \int_0^{t_1} \|K(t_1, t_2)\|_{s_2} \cdots$$

$$\cdots \int_0^{t_{n-1}} \|K(t_{n-1}, t_n)\, f(t_n, x, r_\alpha)\|_{s_n}\, dt_n \cdots dt_1, \tag{11}$$

где

$$r_\alpha = r_\alpha(t_n) = \sum_{k=1}^{m} \partial_x^\alpha [\psi_k(t_n; x)\, f_k(x)], \ |\alpha| \leqslant \beta. \tag{12}$$

Введем обозначение

$$V_k(t, u, \psi) = \frac{W(t, \psi_1, \cdots, \psi_{k-1}, u, \psi_{k+1}, \cdots, \psi_m)}{W(t, \psi)}. \tag{13}$$

Рассмотрим начальную нелинейную задачу

$$Lu = f(t, x, \partial_x^\alpha u), \ |\alpha| \leqslant \beta, \ t > 0, \tag{14}$$

$$\lim_{t\to 0} V_k(t, u, \psi) = f_k(x), \ k = 1, 2, \cdots, m, \tag{15}$$

при следующих условиях:

Существуют постоянные γ, $M > 0$ такие, что для всех s', s $(0 < s' < s < 1)$, $t \in [0, T]$ и $\omega_{1,2} \in G(\gamma, s)$ справедливы неравенства

$$\|f(t, x, \partial_x^\alpha \omega_1) - f(t, x, \partial_x^\alpha \omega_2)\|_{s'} \leqslant \frac{c}{(s-s')^{\beta\gamma}} \|\omega_1 - \omega_2\|_s, \tag{16}$$

$$K_j K^{n-1} f(t, x, r_\alpha) \leqslant \frac{(tM)^{nm}}{nm!}, \ j = 0, \cdots, m-1, \ n = 1, 2, \cdots, \tag{17}$$

$$\int_0^T \frac{W_k(\tau, \psi)}{W(\tau, \psi)} f(\tau, x, r_\alpha)\, d\tau < \infty, \ k = 1, \cdots, m. \tag{18}$$

Справедлива

Теорема 1. *Если выполнены условия* (16)—(18) *и*

$$0 < \gamma \leqslant \frac{m}{\beta}, \tag{19}$$

то для некоторого положительного числа T существует единственная функция $u(t, x)$, которая для любого s $(0 < s < 1)$ принадлежит $C^m(G_{\gamma,s})$ в области V_T и является решением задачи (14)—(15), *причем*

$$\sum_{j=0}^{m-1} \|\partial_t^j u\|_s \leqslant \text{const}.$$

Замечание. Вместо условия (17) достаточно потребовать, чтобы

$$f \in C^\infty(G_\gamma), \ f_k \in G_\gamma, \ K_j K^{n-1}(1) \leqslant \frac{(tM)^{nm}}{nm!}. \tag{17'}$$

Перейдем к рассмотрению начальной задачи для систем уравнений. Рассмотрим начальную задачу для нелинейной системы

$$[\partial_t - A(t, x)]\, v(t, x) = F(t, x, \partial_x v), \ (t, x) \in V_{t_0}, \tag{20}$$

$$\lim_{t\to 0} Qv = v_0(x), \tag{21}$$

где F, v, v_0—вектор-функции размерности l, А — заданная матричная функция размера $l \times l$, а матричная функция Q является решением задачи Коши

$$\partial_t Q(t, x) + Q(t, x) A(t, x) = 0, \tag{22}$$

$$\lim_{t\to t_0} Q = E \ \text{(единичная матрица)}. \tag{23}$$

Из формулы Лиувилля

$$\det Q(t, x) = \exp\left\{\int_t^{t_0} S_p A(\tau, x)\, d\tau\right\} \tag{24}$$

следует, что условие $A(\tau) \in C(0, t_0]$ влечет

$$\left|\int_t^{t_0} Sp\, A(\tau)\, d\tau\right| < \infty,$$

что обеспечивает невырожденность матрицы Q ($\det Q \neq 0$) при $t > 0$.

Мы будем предполагать, что при $A \in C_t\,(G_\gamma)$ в области V_{t_0} существует невырожденное решение $Q \in C_t\,(G_\gamma)$ задачи (22)—(23).

Вариант такого типа теоремы существования решения Q уравнения (22), когда матричная функция $A(t)$ имеет особенность при $t = 0$ (точнее, когда $A(t)$ —однозначная аналитическая в кольце $0 < t < t_0$ матричная функция) был доказан Гамбургером (см. [9], теорема 10.1).

Введем следующие вспомогательные интегральные операторы

$$\tilde{R}(s_1, s_2, Q)\, f = \int_0^t \|Q(\tau)\|_{s_1} \|Q^{-1}(\tau)\|_{s_2} f(\tau)\, d\tau,$$

$$\tilde{R}_1(s, Q)\, f = \int_0^t \|Q f\|_s(\tau)\, d\tau, \tag{25}$$

$$R_n(Q) = \tilde{R}(s_1, s_2, Q) \cdots \tilde{R}(s_{n-1}, s_n, Q)\, \tilde{R}_1(s_n, Q).$$

Теорема 2. *Если для всех* s', s_1, s_2 $(0 < s_1 < s_2 < 1)$, $v_{1,2} \in G(\gamma, s_2)$ *выполнены условия*

$$\int_0^{t_0} \|Q(\tau)\, F(\tau, x, \partial_x(Q^{-1} v_0))\|_{s'}\, d\tau < \infty, \tag{26}$$

$$\|F(t, x, \partial_x v_1) - F(t, x, \partial_x v_2)\|_{s_1} \leqslant \frac{c}{(s_2 - s_1)^{\beta\gamma}} \|v_1 - v_2\|_{s_2}, \tag{27}$$

$$\gamma > 0, \quad \beta\gamma \leqslant 1, \tag{28}$$

$$\|Q^{-1}(t)\|_{s_1} R_n F(t, x, \partial_x(Q^{-1} v_0)) \leqslant \frac{(tM)^n}{n!}, \tag{29}$$

то начальная задача (20)—(21) *имеет единственное решение* $v \in C_t(G(\gamma, s))$ $(0 < s < 1)$, *причем*

$$\|v\|_s \leqslant \text{const}.$$

В некоторых случаях при постановке начальной задачи вместо точного решения Q уравнения (22) возможно использование приближенного асимптотического решения Q_1. Пусть $A_1(t, x)$ — матричная функция, близкая (в некотором смысле см. приводимое ниже условие (34)) к $A(t, x)$, а Q_1 — матричная функция, являющаяся решением задачи Коши

$$\partial_t Q_1(t, x) + Q_1 A_1(t, x) = 0, \tag{30}$$

$$\lim_{t \to t_0} Q_1 = E \text{ (единичная матрица)}. \tag{31}$$

Пусть выполнены следующие условия:

$$\int_0^{t_0} \| Q_1(\tau) \{ F(\tau, x, \partial_x(Q_1^{-1} v_0)) + (A_1 - A) Q_1^{-1} v_0 \} \|_s \, d\tau < \infty, \tag{32}$$

$$\| Q_1^{-1}(t) \|_{s_1} R_n \{ F(t, x, \partial_x(Q_1^{-1} v_0)) + (A_1 - A) Q_1^{-1} v_0 \} \leqslant \frac{(tM)^n}{n!}, \tag{33}$$

$$\int_0^{t_0} \| Q_1(\tau) [A(\tau) - A_1(\tau)] Q_1^{-1}(\tau) \|_s \, d\tau < \infty. \tag{34}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *В условиях* (27), (28), (32)—(34) *начальная задача*

$$(\partial_t - A) v = F(t, x, \partial_x v), \tag{35}$$

$$\lim_{t \to 0} Q_1 v = v_0(x) \tag{36}$$

имеет единственное решение $v \in C_t(G(\gamma, s))$, $0 < s < 1$, *причем*

$$\| v \|_s \leqslant \text{const}.$$

Замечание. Вместо условий (33) достаточно потребовать условий

$$F(\tau, x, \partial_x(Q_1^{-1} v_0)) + (A_1 - A) Q_1^{-1} v_0 \in C_t(G_\gamma), \tag{33}$$

$$\| Q_1^{-1}(t) \|_{s_1} R_n(1) \leqslant \frac{(tM)^n}{n!}. \tag{33''}$$

Отметим, что теорема 3 отвечает также на вопрос о том какие возмущения оператора A не влияют на постановку начальной задачи.

Приведем линейные варианты теорем 1.3.

Теорема 4. *Если* $\lambda_j(t, x, D_x)$ — *псевдодифференциальные операторы с символами классов* $GS\left(\gamma, \rho, \frac{\beta j}{m}\right)$, $j = 1, \cdots, m$ *и*

$$0 < \gamma \leqslant \frac{m}{\beta}, \tag{19}$$

$$K_p^n \left| f(t, x) + \sum_{k, j=1}^{m} \lambda_j [f_k(\partial_t^{m-j} \psi)] \right| \leqslant \frac{(tM)^{n(m-p)}}{(n(m-p))!}, \tag{37}$$

$p = 1, \cdots, m-1$; $n = 1, 2, \cdots,$

то начальная задача

$$Lu = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t, x, D_x)\, \partial_t^{m-j} u + f(t, x), \tag{38}$$

$$\lim_{t\to 0} V_k(t, u, \psi) = f_k(x), \ k = 1, \cdots, m \tag{39}$$

имеет (при некотором $T>0$) *единственное решение* $u \in C_t^m(G_\gamma)$ *при* $(t, x) \in V_T$.

Замечание. Вместо (37) достаточно потребовать, чтобы

$$f \in C_t(G_\gamma), \ f_k \in G_\gamma, \ K_p^n(1) \leqslant \frac{(tM)^{n(m-p)}}{[n(m-p)]!}. \tag{37'}$$

При этом для решений задачи (38)—(39) справедлива оценка ($0<s'<$ $<s<1$)

$$\|u\|_{s'} \leqslant c \left\| f(t, x) + \sum_{k,\, j=1}^{m} \lambda_j \left[f_k (\partial_t^{m-j} \psi_k)\right] \right\|_{s, \infty}. \tag{40}$$

Теорема 5. *В условиях* (28), (34) *и*

$$\|Bv\|_{s_1} \leqslant \frac{c}{(s_2 - s_1)^{\beta\gamma}} \|v\|_{s_2}, \ 0 < s_1 < s_2 < 1, \tag{41}$$

$$\|Q_1^{-1}(t)\|_{s_1} R_n [F(t, x) + (B + A_1 - A)\, Q^{-1} v_0] \leqslant \frac{(tM)^n}{n!}, \tag{42}$$

начальная задача

$$(\partial_t - A)\, v = B(t, x, D_x)\, v + F(t, x), \ (t, x) \in V_{t_0}, \tag{43}$$

$$\lim_{t\to 0} Q_1 v = v_0(x), \tag{44}$$

имеет единственное решение $v \in C_t(G(\gamma, s))$, $(t, x) \in V_T$ *[при некотором* $T>0$, $0<s<1$.

Замечание. Теорема 5 остается справедливой, если вместо (41), (42) выполнены условия

$$b(t, x, \xi) \in GS(\gamma, \rho, \beta) \ \ \text{(см. [10])}, \tag{41'}$$

$$\|Q_1^{-1}(t)\|_{s_1} = R_n(Q_1)(1) \leqslant \frac{(tM)^n}{n!}, \ F + (B + A_1 - A)\, Q_1^{-1} v_0 \in C_t(G_\gamma). \tag{42'}$$

При этом имеет место оценка ($0< s' < s <1$)

$$\|v\|_{s'} \leqslant c\, \|F + (B + A_1 - A)\, Q_1^{-1} v_0\|_{s, \infty}. \tag{45}$$

§ 3. Сведение к однородным начальным условиям

Основные неравенства

Лемма 1. *Заменой неизвестной функции*

$$u(t,x)=\omega(t,x)+\sum_{j=1}^{m}\psi_j(t,x)f_j(x) \tag{46}$$

начальные однородные задачи (14)—(15), (38)—(39) *сводятся, соответственно, к однородным задачам*

$$L\omega=f\left(t,x,\partial_x^{\alpha}\omega+\sum_{k=1}^{m}\partial_x^{\alpha}(\psi_k f_k)\right)\equiv\tilde f(t,x,\partial_x^{\alpha}\omega), \tag{14'}$$

$$\lim_{t\to 0}V_k(t,\omega,\psi)=0,\ k=1,\cdots,m; \tag{15'}$$

$$L\omega=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t,x,D_x)\,\partial_t^{m-j}\omega+\hat f(t,x), \tag{38'}$$

$$\lim_{t\to 0}V_k(t,\omega,\psi)=0,\ k=1,\cdots,m, \tag{39'}$$

где

$$\hat f(t,x)=f(t,x)+\sum_{k,\,j=1}^{m}\lambda_j\left[f_k(x)\,(\partial_t^{m-j}\psi_k)\right].$$

Доказательство леммы 1 проводится непосредственной подстановкой выражения (46) в соответствующие уравнения и начальные условия.

Лемма 2. *Заменой вектор-функции*

$$v=v_1+Q_1^{-1}v_0 \tag{47}$$

неоднородные начальные задачи (35)—(36), (43)—(44) *сводятся, соответственно, к однородным задачам*

$$(\partial_t-A)\,v_1=F(t,x,\partial_x(v_1+Q_1^{-1}v_0))+(A_1-A)\,Q_1^{-1}v_0\equiv\bar F(t,x,\partial_x v_1), \tag{35'}$$

$$\lim_{t\to 0}Q_1v_1(t,x)=0; \tag{36'}$$

$$(\partial_t-A)\,v_1=B(t,x,D_x)\,v_1+F(t,x)+(B+A_1-A)\,Q_1^{-1}v_0, \tag{43'}$$

$$\lim_{t\to 0}Q_1v_1=0. \tag{44'}$$

Доказательство леммы 2 проводится непосредственной подстановкой с учетом правила дифференцирования обратной матрицы:

$$\partial_t(Q^{-1})=-Q^{-1}(\partial_t Q)\,Q^{-1}.$$

Лемма 3. *При условии* (18) *для решений* $\omega\in C_t^m(G_T)$ *начальной задачи*

$$L\omega=\tilde f(t,x,\partial_x^{\alpha}\omega), \tag{48}$$

$$\lim_{t\to 0}V_k(t,\omega,\psi)=0,\ k=1,2,\cdots,m \tag{49}$$

справедливы оценки $(j=0, 1,\cdots, m-1)$

$$\|\partial_t^j \omega\|_s \leqslant c \int_0^t \|K_j(t, \tau, \psi) \tilde{f}(\tau, x, \partial_x^* \omega)\|_s \, d\tau \tag{50}$$

с постоянной c, *не зависящей от* ω, s.

Доказательство. Из представления решения (9)—(10) и условия (18) следует, что

$$V_k(t, \hat{\omega}, \psi) = \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \frac{W(t, \psi_1,\cdots, \psi_{k-1}, \psi_j, \psi_{k+1},\cdots, \psi_m) W_j(\tau, \psi)}{W(t, \psi) W(\tau, \psi)} \tilde{f}(\tau) =$$

$$= \int_0^t \frac{W_k(\tau, \psi)}{W(\tau, \psi)} \tilde{f}(\tau) \, d\tau \to 0, \text{ при } t \to 0.$$

Поэтому, при однородных начальных условиях (49) имеем также

$$\lim_{t\to 0} V_k(t, \omega - \hat{\omega}, \psi) = 0, \ k=1,\cdots, m. \tag{51}$$

Дифференцируя равенство (9) $(j-1)$ раз по t получаем систему уравнений

$$\partial_t^{j-1}(\omega - \hat{\omega}) = \sum_{k=1}^m f_k(x) \partial_t^{k-1} \psi_k, \ j=1,\cdots, m.$$

Из этих уравнений, по правилу Крамера, получаем

$$f_k(x) = V_k(t, \omega - \hat{\omega}, \psi) \equiv 0, \ k=1,\cdots, m,$$

ввиду (51).

Итак, для решения ω задачи (48)—(49) справедливо представление

$$\omega = \hat{\omega} = \int_0^t K(t, \tau, \psi) \tilde{f}(\tau, x, \partial_x^* \omega] \, d\tau.$$

Пользуясь определением (10) функции K нетрудно доказать, что

$$\lim_{\tau\to t} \partial_t^{j-1} K(t, \tau, \psi) = \delta_{mj}, \ j=1,\cdots, m. \tag{52}$$

Поэтому

$$\partial_t^j \omega = \int_0^t K_j(t, \tau, \psi) \tilde{f}(\tau, x, \partial_x^* \omega) \, d\tau, \tag{53}$$

откуда и следуют оценки (50).

Приведем аналог леммы 3 для систем.

Лемма 4. *Для решений* $v \in C_t(G_T)$ *начальной задачи*

$$(\partial_t - A) v = F(t, x), \ (t, x) \in V_T, \tag{54}$$

$$\lim_{t\to 0} Q(v - \overset{\blacktriangle}{v}) = 0, \tag{55}$$

где

$$\overset{\blacktriangle}{v}(t, x) = \int_0^t Q^{-1}(t, x) Q(\tau, x) F(\tau, x)\, d\tau,$$

справедлива оценка

$$\|Qv\|_s < c \int_0^t \|Q(\tau) F(\tau)\|_s\, d\tau \tag{56}$$

с постоянной c, не зависящей от v и s.

Так как далее мы приводим более общий вариант леммы 4, то доказательство этой леммы мы опускаем.

Лемма 5. *При условиях* (34) *и*

$$\int_0^t \|Q F(\tau)\|_s\, d\tau < \infty \tag{57}$$

для решений $v \in C_t(G_T)$ начальной задачи

$$(\partial_t - A)\, v = F(t, x) \tag{58}$$

$$\lim_{t\to 0} Q_1 v = 0 \tag{59}$$

справедлива оценка

$$\|Q_1 v(t)\|_s \leqslant c \int_0^t \|Q_1 (\partial_t - A)\, v\|_s\, d\tau, \quad 0 < s < 1, \tag{60}$$

с постоянной c, не зависящей от v и s.

Доказательство. По предположению матрица Q_1 является решением уравнения (30), поэтому подействовав слева на уравнение (58) матрицей Q_1, мы получим

$$Q_1 (\partial_t - A)\, v = Q_1 F$$

или

$$\partial_t (Q_1 v) = Q_1 F + Q_1 (A - A_1)\, v.$$

После интегрирования

$$Q_1 v = v_0(x) + \int_0^t \{Q_1 F(\tau) + Q_1 (A - A_1) v\}\, d\tau. \tag{61}$$

Из условий (34), (57) леммы следует, что

$$v_0(x) = \lim_{t\to 0} Q_1 v = 0.$$

Поэтому из (61) получаем следующее интегральное неравенство

$$\|Q_1 v\|_s \leqslant \int_0^t \{\|Q_1 F\|_s + \|Q_1 (A - A_1) Q_1^{-1}\|_s \|Q_1 v\|_s\} d\tau,$$

обращая которое с помощью леммы Гронуолла (см. [9]), получаем оценку (60).

§ 4. Доказательство теоремы 1

Введем последовательные приближения для задачи (14′)—(15′)

$$\omega_0 = 0, \quad L\omega_1 = \tilde{f}(t, x, 0),$$

$$L\omega_n = \tilde{f}(t, x, \partial_x^\alpha \omega_{n-1}), \quad n = 2, 3, \cdots \tag{62}$$

с начальными нулевыми условиями

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, \omega_n, \psi) = 0, \quad k = 1, \cdots, m, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{62′}$$

Для разностей

$$u_1 = \omega_1, \quad u_n = \omega_n - \omega_{n-1}, \quad n = 2, 3 \cdots$$

получаем уравнения

$$Lu_1 = \tilde{f}(t, x, 0),$$

$$Lu_n = \tilde{f}(t, x, \partial_x^\alpha \omega_{n-1}) - \tilde{f}(t, x, \partial_x^\alpha \omega_{n-2}) \tag{63}$$

с нулевыми начальными условиями

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, u_n, \psi) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{63′}$$

Пусть задана возрастающая последовательность чисел

$$0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < 1, \quad s_i - s_{i-1} = \frac{1 - s_n}{n}, \quad n = 2, 3, \cdots. \tag{64}$$

В условиях теоремы 1 для задач (63)—(63′) применением оценки (50) имеем

$$\|\partial_t^j u_n\|_{s_1} \leqslant c \int_0^t \|K_j(t, t_1) L u_n\|_{s_1} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^t \|K_j(t, t_1)\|_{s_1} \cdot \|\tilde{f}(\partial_x^\alpha \omega_{n-1}) - \tilde{f}(\partial_x^\alpha \omega_{n-2})\| dt_1.$$

Ввиду (16) имеем далее

$$\|\partial_t^j u_n\|_{s_1} \leqslant \frac{c}{(s_2 - s_1)^{\beta_1}} \int_0^t \|K_j(t, t_1)\|_{s_1} \|u_{n-1}\|_{s_1} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{[(s_2-s_1)(s_3-s_2)]^{\beta\gamma}} \int_0^t \|K_j(t,\ t_1)\|_{s_1} \int_0^{t_1} \|K(t_1,\ t_2)\|_{s_2} \|u_{n-2}\|_{s_3}\, dt_2 dt_1.$$

В результате многократного применения этих оценок получаем

$$\|\partial_t^j u_n\|_{s_1} \leqslant \frac{c}{[(s_2-s_1)\cdots(s_n-s_{n-1})]^{\beta\gamma}} K_j K^{n-1} \tilde{f}(t,\ x,\ 0) \leqslant$$

$$\leqslant c^n n^{n\beta\gamma} \frac{(tM)^{nm}}{(nm)!} \leqslant n^{n(\beta\gamma-m)} (tM_1)^n \leqslant (tM_1)^n,$$

ввиду условий (17), (19), (64).

Итак

$$\|\partial_t^j u_n\|_{s_1} \leqslant (t\ M_1)^n,\ j=0,\ 1,\cdots,\ m-1.$$

Из последней оценки следует сходимость ряда $\omega_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n\to\infty$ по норме $\sum_{j=0}^{m-1} \|\partial_t^j(\cdot)\|_s$ к решению $\omega \in C_t^{m-1}(G_\gamma)$ задачи (14′)—(15′).

§ 5. Доказательство теоремы 3

Введем последовательные приближения

$$z_0 \equiv 0,\ (\partial_t - A)\, z_1(t,\ x) = \tilde{F}(t,\ x,\ 0),$$

$$(\partial_t - A)\, z_n = \tilde{F}(t,\ x,\ \partial_x z_{n-1}) \tag{65}$$

для задач (35)—(36) с нулевыми начальными условиями

$$\lim_{t\to 0} Q_1 z_n(t,\ x) = 0. \tag{65′}$$

Для разностей

$$y_1 = z_1,\ y_n = z_n - z_{n-1}$$

получаем системы уравнений

$$(\partial_t - A)\, y_1 = \tilde{F}(t,\ x,\ 0),$$

$$(\partial_t - A)\, y_n = \tilde{F}(t,\ x,\ z_{n-1}) - \tilde{F}(t,\ x,\ z_{n-2}) \tag{66}$$

с начальными условиями

$$\lim_{t\to 0} Q_1\, y_n = 0,\ n=1,\ 2,\cdots. \tag{66′}$$

С помощью оценки (60) леммы 5 имеем

$$\|y_n\|_{s_1} \leqslant \|Q^{-1}(t)\|_{s_1} \|Q_1 y_n\|_{s_1} <$$

$$\leqslant \|Q_l^{-1}(t)\|_{s_1} \int_0^t \|Q_1(t_1)\,(\partial_t - A)\, y_n\|_{s_1} dt_1$$

или

$$\|y_n\|_{s_1} \leqslant \|Q_1^{-1}(t)\|_{s_1} \cdot \frac{c}{(s_2 - s_1)^{\beta\gamma}} \cdot \int_0^t \|Q_1(t_1)\|_{s_1} \|y_{n-1}\|_{s_1} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{(s_2 - s_1)^{\beta\gamma}} \|Q_1^{-1}(t)\|_{s_1} \int_0^t \|Q_1(t_1)\|_{s_1} \|Q_1^{-1}(t_1)\|_{s_1} \|Q_1 y_{n-1}\|_{s_1} dt_1$$

ввиду условия (27). Многократным применением этих оценок получаем

$$\|y_n\|_{s_1} \leqslant \frac{c}{[(s_2 - s_1) \cdots (s_n - s_{n-1})]^{\beta\gamma}} \|Q_1^{-1}(t)\|_{s_1} R_n \widetilde{F}(t, x, 0) <$$

$$\leqslant n^{n\beta\gamma} \frac{(tM_1)^n}{n!} \leqslant n^{n(\beta\gamma - 1)} (tM_2)^n \leqslant (tM_2)^n$$

ввиду (28), (33). Итак ряд $\sum\limits_1^\infty y_k$ сходится к решению $v_1 \in C_t(G_\gamma)$ задачи (35′)—(36′). Применение леммы 2 завершает доказательство теоремы 3.

§ 6. Доказательство теоремы 4

Введем на первом этапе последовательные приближения

$$Lu_1 = \mathring{f}(t, x), \ Lu_n = \lambda_1(t, x, D_x)\, \partial_t^{m-1} u_{n-1}, \tag{67}$$

с нулевыми начальными условиями

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, u_n, \psi) = 0, \ k = 1, \cdots, m, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{67′}$$

Для псевдодифференциальных операторов $\lambda_j(t, x, D_x)$, $j = 1, \cdots, m$, с символами $\lambda_j(t, x, \xi) \in GS\left(\gamma, \rho, \frac{\beta j}{m}\right)$ справедливы оценки (см. [10])

$$\|\lambda_j(t, x, D_x) f\|_{s'} \leqslant c(s - s')^{-\frac{\gamma\beta j}{m}} \|f\|_s \tag{68}$$

для произвольной функции $f \in G(\gamma, s)$, $0 < s' < s < 1$.

Поэтому применяя оценки (50) имеем

$$\|\partial_t^{m-2} u_n\|_{s_1} \leqslant \int_0^t \|K_{m-2}(t, t_1) Lu_n\|_{s_1} dt_1 <$$

$$\leqslant \int_0^t \|K_{m-2}(t, t_1)\|_{s_1} \|\lambda_1 \partial_{t_1}^{m-1} u_{n-1}\|_{s_1} dt_1 <$$

$$\leqslant \frac{c}{(s_2-s_1)^{\beta\gamma/m}} \int_0^t \|K_{m-2}(t,\ t_1)\|_{s_1} \|\partial_{t_1}^{m-1} u_{n-1}\|_{s_2}\, dt_1 \leqslant \cdots \leqslant$$

$$\leqslant c\,[(s_2-s_1)\cdots(s_n-s_{n-1})]^{-\frac{\beta\gamma}{m}}\, K_{m-2}\, K_{m-1}^{n-1}\, \hat{f}(t,\ x).$$

Учитывая далее условия (19), (37) теоремы 4, получаем

$$\|\partial_t^{m-2} u_n\|_{s_1} \leqslant (tc)^n \int_0^t \|K_{m-2}(t,\ t_1)\|_{s_1} \|\hat{f}\|_{s_n,\infty}\, dt_1,$$

откуда следует сходимость ряда $\sum\limits_1^{\infty} u_n$ к решению u задачи

$$Lu = f + \lambda_1\, \partial_t^{m-1} u, \tag{69}$$

$$\lim_{t\to 0} V_k(t,\ u,\ \psi) = 0,\ k=1,\cdots,\ m, \tag{69'}$$

причем для решений u этой задачи справедлива оценка

$$\|\partial_t^{m-2} u\|_s \leqslant \int_0^t \|K_{m-2}(t,\ t_1)\|_s \|(L-\lambda_1\, \partial_{t_1}^{m-1})\, u\|_{s',\infty}\, dt_1. \tag{70}$$

На втором этапе введем последовательные приближения

$$(L-\lambda_1\, \partial_t^{m-1})\, u_1 = \hat{f}(t,\ x),\ (L-\lambda_1\, \partial_t^{m-1})\, u_n = \lambda_2\, \partial_t^{m-2}\, u_{n-1} \tag{71}$$

с нулевыми начальными условиями (67′).

С помощью оценок (70) имеем $(s < s_1 < s_2 < \cdots)$

$$\|\partial_t^{m-3} u_n\|_s \leqslant \int_0^t \|K_{m-3}(t,\ t_1)\|_{s_1} \|(L-\lambda_1\, \partial_{t_1}^{m-1})\, u_n\|_{s_1}\, dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{(s_2-s_1)^{2\beta\gamma/m}} \int_0^t \|K_{m-3}(t,\ t_1)\|_{s_1} \|\partial_{t_1}^{m-1} u_{n-1}\|_{s_2}\, dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant c\,(s_2-s_1)^{-\frac{2\beta\gamma}{m}} \int_0^t K_{m-3}(t,\ t_1)\|_{s_1} \int_0^t \|K_{m-2}(t_1,\ t_2)\|_{s_1} \times$$

$$\times \|(L-\lambda_1\, \partial_{t_2}^{m-1})\, u_{n-1}\|_{s_2} \|dt_2 dt_1 \leqslant c n^{\frac{2n\beta\gamma}{m}} \int_0^t \|K_{m-3}\|_{s_1}\, K_{m-2}^{n-1}\, \hat{f}\, dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant (t^2 c)^n\, n^{2n\left(\frac{\beta\gamma}{m}-1\right)} \int_0^t \|K_{m-3}(t,\ t_1)\|_{s_1} \|\hat{f}\|_{s_n,\infty}\, dt_1$$

или

$$\|\partial_t^{m-3} u_n\|_s \leqslant (tM)^n \int_0^t \|K_{m-3}(t, t_1)\|_{s_1} \|\hat{f}\|_{s_n.} - dt_1,$$

откуда следует существование решения $u = \sum_1^{\infty} u_n$ задачи

$$Lu = \lambda_1 \partial_t^{m-1} u + \lambda_2 \partial_t^{m-2} u + \hat{f}(t, x), \tag{72}$$

$$\lim_{t\to 0} V_k(t, u, \psi) = 0, \ k = 1, \cdots, m, \tag{72'}$$

причем для решений этой задачи справедлива оценка $(0 < s < s_1 < 1)$

$$\|\partial_t^{m-3} u\|_s \leqslant \int_0^t \|K_{m-3}(t, t_1)\|_{s_1} \|(L - \lambda_1 \partial_{t_1}^{m-1} - \lambda_2 \partial_{t_1}^{m-2}) u\|_{s_1,} - dt_1. \tag{73}$$

Продолжая эту процедуру по индукции, на последнем этапе введем последовательные приближения

$$\left(L - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \partial_t^{m-j}\right) u_1 = \hat{f}, \ \left(L - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \partial_t^{m-j}\right) u_n = \lambda_m u_{n-1} \tag{74}$$

с нулевыми начальными условиями (67′), причем по индуктивному предположению существует решение задачи

$$\left(L - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \partial_t^{m-j}\right) u = \hat{f}(t, x), \tag{75}$$

$$\lim_{t\to 0} V_k(t, u, \psi) = 0, \ k = 1, \cdots, m, \tag{75'}$$

причем каждое решение задачи (75)—(75′) удовлетворяет оценке $(s < s_1)$

$$\|\partial_t u\|_s \leqslant c \int_0^t \|K_1(t, t_1)\|_{s_1} \left\| \left(L - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \partial_{t_1}^{m-j}\right) u \right\|_{s_1,} - dt_1. \tag{76}$$

Итак для задач (74) справедливы оценки

$$\|u_n\|_s \leqslant \int_0^t \|K(t, t_1)\|_{s_1} \|L - \sum_j \lambda_j \partial_{t_1}^{m-1}) u_n\|_{s_1} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{(s_2 - s_1)^{\beta\gamma}} \int_0^t \|K(t, t_1)\|_{s_1} \|u_{n-1}\|_{s_2} dt_1$$

ввиду (50) и (76). Далее как и раньше с учетом условий (19), (37) получаем

$$\|u_n\|_s \leqslant c^n\, n^{n/3\gamma}\, K^n\, \hat{f} \leqslant (Mt)^n, \tag{77}$$

откуда и следует сходимость ряда $\sum_{1}^{\infty} u_n$ к решению u задачи (38′) — (39′). Теорема 4 доказана.

§ 7. Примеры

Пример 1. Для оператора второго порядка

$$P_2 = \partial_t^2 + b\,(t,\ x)\ \partial_x^2 + \frac{d}{4\,t^2},\ d \neq 0,\ d \in R \tag{78}$$

фундаментальная система $\psi_{1,\,2} \in \operatorname{Ker}\left(\partial_t^2 + \dfrac{d}{4t^2}\right)$ имеет вид

$$\psi_1(t) = t^{\sigma},\ \psi_2(t) = \begin{cases} t^{1-\sigma}, & d \neq 1 \\ \sqrt{t}\,\ln t, & d = 1, \end{cases}$$

где

$$\sigma = \frac{1 - \sqrt{1-d}}{2},$$

$$W(t,\ \psi) = \begin{cases} 1 - 2\sigma, & d \neq 1 \\ 1, & d = 1. \end{cases}$$

Для начальной задачи

$$P_2\, u = f, \tag{79}$$

$$\lim_{t \to 0} W(t,\ \psi_1, u) = f_1(x),\ \lim_{t \to 0} W(t,\ u,\ \psi_2) = f_2(x) \tag{80}$$

справедлива теорема 1. Если $d > -8$, то непосредственный подсчет показывает, что третье из условий (17′) выполнено, поэтому для задачи (79)—(80) справедлив вариант теоремы 1 с условиями

$$f \in C_t^0(G_T),\ f_{-,\,2} \in G_T \tag{81}$$

вместо условий (17) (см. замечание к теореме 1).

Замечание. Если для уравнения (1) выполнено условие (3), то энергетическим методом нетрудно доказать существование решений задач Коши

$$[\partial_t^2 + q(t,\ x)]\,\psi_1(t,\ x) = 0, \tag{82}$$

$$\psi_1(0,\ x) = 0,\quad \psi_{1t}(0,\ x) = -1; \tag{83}$$

$$[\partial_t^2 + q(t,\ x)]\,\psi_2(t,\ x) = 0, \tag{84}$$

$$\psi_2(0,\ x) = -1,\quad \psi_{2t}(0,\ x) = 0. \tag{85}$$

Выбирая в качестве фундаментальной системы $(\psi_1,\ \psi_2)$ эти решения, начальная задача с заданными вронскианами

$$[\partial_t^2 + b(t, x)\,\partial_x^2 + q(t, x)]\,u = f(t, x) \tag{86}$$

$$\lim_{t\to 0} W(t, \psi_1, u) = f_1(x), \ \lim_{t\to 0} W(t, u, \psi_2) = f_2(x) \tag{87}$$

переходит в обычную задачу Коши (1)—(2).

Если же условие (3) нарушено, то из вышеприведенного примера 1 видно, что ядро оператора $\partial_t^2 + q$ может не содержать функции $\psi(t, x)$ с ненулевым конечным следом на отрезке прямой $t = 0$.

Пример 2. Рассмотрим начальную задачу для системы первого порядка

$$(\partial_t - A)\,v = B\,\partial_x v + F, \tag{88}$$

$$\lim_{t\to 0} Q_1 v = 0, \tag{89}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ q_0 = \frac{n(n-1)}{t^2} + b(t), \ n > 1$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{t^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{90}$$

$${}^t v = (v_1, v_2, v_3).$$

Матрица Q_1 находится из уравнения (30) и имеет вид

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & -\varphi_{1t} \\ 0 & 1 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & -\varphi_{2t} \end{pmatrix}, \ Q_1^{-1} = \frac{1}{2n-1} \begin{pmatrix} -\varphi_{2t} & 0 & \varphi_{1t} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 0 & \varphi_1 \end{pmatrix}, \tag{91}$$

$$\varphi_1 = t^n, \ \varphi_2 = t^{1-n}, \ \det Q_1 = 2n - 1.$$

Для начальной задачи (88)—(89) справедлива теорема 5, причем условие (34) упрощается и имеет вид

$$\int_0^T \frac{b(t)}{t^{2(n-1)}}\,dt < \infty. \tag{92}$$

Это условие указывает класс возможных возмущений матрицы A_1.

Отметим, что остается открытым вопрос о том может ли показатель γ (класса Жевре, которому принадлежит решение) зависить от весовых функций $\psi_1, \cdots, \psi_m$. Это было бы так, если можно было бы выбрать функции f, $\psi_1, \cdots, \psi_m$ так, чтобы вместо (17) имели место неравенства

$$K_j K^{n-1} f(t, x, r_\alpha) \leqslant \frac{(tM)^p}{p!} \tag{93}$$

с $p \neq mn$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.III.1979

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Վրոնսկիաններով սկզբնական խնդրի մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում առաջարկվում է Կոշու խնդրի ընդհանրացում (սկզբնական մակերևույթի վրա Կոշու տվյալների փոխարեն տրվում են որոշակի վրոնսկիաններ), որի համար ապացուցվում է Կոշի-Կովալևսկայայի թեորեմ անսահմանափակ (սկզբնական մակերևույթի վրա) գործակից-ներով հավասարումների և համակարգերի համար։

G. R. HOVHANISIAN. *On the initial value problem with given wronskians* (summary)

In the paper the generalization of Cauchy problem is proposed. In this initial value problem the wronskians are given on the initial hyperplane instead of Cauchy data. A Cauchy—Kowalevska type theorem for differential equations and systems with unbounded coefficients (on initial hyperplane) is proved for this problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Ниренберг.* Лекции по нелинейному функциональному анализу, „Мир", М., 1977.
2. *А. В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа, Итоги науки, М., 1959.
3. *M. S. Baouendi, G. Goulaouic.* Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math., 26:4, 1973, 455—475.
4. *M. S. Baouendi, G. Goulaouic.* Remarks on the abstract form of nonlinear Cauchy—Kovalevska theorem, Comm. in Partial Differential Equations, 2:11, 1977, 1151—1162.
5. *В. Ф. Короп.* Обратная задача рассеяния для уравнений с особенностью, Сиб. мат. журнал 2:5, 1961, 672—693.
6. *В. А. Марченко.* Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля, „Наукова думка", Киев, 1972.
7. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196:2, 1971, 289—292.
8. *Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.
9. *Ф. Хартман.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, „Мир", М., 1970.
10. *S. Steinberg.* Existence and uniqueness of hyperbolic equations which are not necessarely strictely hyperbolic, J. of Different. Equat., 17:1, 1975, 119—153.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 4, 1980 Математика

Р. С. ГАЛОЯН

О ПОЛНОТЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Предварительные замечания

1.1. В статье [1] была исследована краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма—Лиувилля на конечном отрезке. Приведем постановку этой краевой задачи.

Пусть $0<\gamma_i<1$ $(i=0, 1, 2)$. Обозначим

$$\sigma_k=\sum_{i=0}^{k}\gamma_i-1;\ \mu_k=\sigma_k+1=\sum_{i=0}^{k}\gamma_i\ (k=0,\ 1,\ 2), \tag{1}$$

и предположим, что

$$\frac{1}{\rho}=\sum_{i=0}^{2}\gamma_i-1=\sigma_2=\mu_2-1>0. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение дифференциальные операторы

$$D^{(\sigma_0)}f(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}f(x);\ D^{(\sigma_1)}f(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}f(x),$$

$$D^{(\sigma_2)}f(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_2)}}{dx^{-(1-\gamma_2)}}\frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}}\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}f(x), \tag{3}$$

вообще говоря, дробных порядков. Здесь $\dfrac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ интегро-дифференциальный оператор дробного порядка, который определяется следующим образом (см., например, [2]):

а) при $\alpha>0$

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt,\ x\in(0;\ l),$$

б) при $-1<\alpha<0$

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{d^{-(1+\alpha)}}{dx^{-(1+\alpha)}}f(x)\right\},\ x\in(0;\ l),$$

в предположении, что правая часть существует почти всюду,

в) при $\alpha=0$

$$\frac{d^0}{dx^0} f(x) = f(x), \quad x \in (0;\ l).$$

Рассмотрим теперь задачу типа Коши

$$D^{(\sigma_2)} y - \{\lambda + q(x)\}\, y = 0, \quad x \in (0;\ l), \tag{4}$$

$$D^{(\sigma_0)} y|_{x=0} = \sin\alpha, \quad D^{(\sigma_1)} y|_{x=0} = -\cos\alpha, \tag{5}$$

где λ и α ($\mathrm{Im}\,\alpha = 0$)—произвольные параметры, а функция $q(x)$ (вообще говоря, комплекснозначная) определена и принадлежит классу Lip 1 на отрезке $[0;\ l]$.

В [1] доказывается, что если функция $y(x;\lambda)$ есть решение задачи типа Коши (4)—(5), то она одновременно является единственным решением следующего интегрального уравнения Вольтерра

$$y(x;\lambda) = \sin\alpha\ x^{\mu_0-1} E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ \mu_0) - \cos\alpha\ x^{\mu_1-1} E_\rho(x^{1/\rho};\ \mu_1) +$$

$$+ \int_0^x (x-\tau)^{\frac{1}{\rho}-1} E_\rho\left(\lambda (x-\tau)^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) q(\tau)\, y(\tau;\lambda)\, d\tau, \quad x \in (0;\ l], \tag{6}$$

где

$$E_\rho(z;\ \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \tag{7}$$

функция типа Миттаг—Леффлера.

Доказывается также, что решение задачи (4)—(5) $y(x;\lambda)$ как функция параметра λ, является целой функцией порядка ρ и типа x при любом $x \in (0;\ l]$, а как функция от x оно непрерывно, причем

$$y(x;\ \lambda) \in L_2(0;\ l) \text{ при } \gamma_0 > \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 > \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Вводя далее в рассмотрение функцию

$$\omega_\rho(\lambda) = D^{(\sigma_0)} y(x;\lambda)|_{x=l} \cdot \cos\beta + D^{(\sigma_1)} y(x;\lambda)|_{x=l} \cdot \sin\beta,$$

в [1] устанавливаются следующие утверждения относительно $\omega_\rho(\lambda)$:

а) $\omega_\rho(\lambda)$ есть целая функция от λ порядка ρ и типа l.

б) множество нулей функции $\omega_\rho(\lambda)$ совпадает с множеством собственных значений задачи (4)—(5).

в) функция $\omega_\rho(\lambda)$ допускает представление вида

$$\omega_\rho(\lambda) = \sin(\alpha-\beta)\, E_\rho(\lambda l^{1/\rho};\ 1) - \cos\alpha\cos\beta\ l^{\mu_1-\mu_0} E_\rho \lambda(l^{1/\rho};\ 1+\mu_1-\mu_0) +$$

$$+ \sin\alpha\ \sin\beta\ l^{\mu_2-\mu_1+\mu_0-1}\, \lambda E_\rho(\lambda l^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_1+\mu_0) +$$

$$+ \cos\beta \int_0^l (l-t)^{\mu_2-\mu_1-1} E_\rho(\lambda (l-t)^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_0)\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt + \tag{9}$$

$$+ \sin\beta \int_0^l (l-t)^{\mu_2-\mu_1-1} E_\rho(\lambda (l-t)^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_1)\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt.$$

Рассмотрим последовательность функций $\{y_n(x)\}_1^\infty$, построенную следующим образом [1].

Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ — последовательность всех нулей функции $\omega_\rho(\lambda)-\omega_0$ ($\operatorname{Im}\omega_0=0$), причем

$$0\leqslant|\lambda_1|<|\lambda_2|\leqslant\cdots<|\lambda_n|\leqslant\cdots,$$

с условием, что каждый нуль записывается столько раз, какова его кратность.

Для данного натурального числа $n\geqslant 1$ обозначим через $s_n\geqslant 1$ кратность появления числа λ_n в группе чисел $\{\lambda_k\}_1^n$.

Далее положим

$$y_n(x)=\left\{\frac{\partial^{s_n-1}y(x;\lambda)}{\partial\lambda^{s_n-1}}\right\}_{\lambda=\lambda_n}\quad(n=1,2,\cdots). \tag{10}$$

В работе [1] ставился вопрос о полноте системы $\{y_n(x)\}_1^\infty$ в пространстве $L_2(0;l)$.

В настоящей статье дается положительный ответ на этот вопрос в случае $q(x)\equiv 0$.

1.2. Вводя обозначения

$$a_0=\sin\alpha,\ a_1=-\cos\alpha,\ b_0=\sin\beta,\ b_1=\cos\beta$$

и применяя очевидное тождество

$$F_\rho(z;\mu)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}+zE_\rho\left(z;\mu+\frac{1}{\rho}\right),$$

из (6) и (9) при $q(x)\equiv 0$, получим

$$y(x;\lambda)=\sum_{l=0}^{1}a_l\,x^{\mu_l-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_l) \tag{11}$$

и

$$\omega_\rho(\lambda)=\lambda\sum_{l,\,j=0}^{1}a_l\,b_j\,l^{\mu_l+\tilde{\mu}_j-1}E_\rho(\lambda\,l^{1/\rho};\mu_l+\tilde{\mu}_j)+\omega_0, \tag{12}$$

где

$$\tilde{\mu}_k=\sum_{l=0}^{k}\gamma_{2-l}\ (k=0,1,2),\ \omega_0=a_0b_1+a_1b_0+\frac{a_1b_1l^{\gamma_1}}{\Gamma(1+\gamma_1)}.$$

В дальнейшем, ради простоты изложения, предположим, что $a_l b_j\neq 0$. Приведем асимптотические формулы и оценки для выражения (11), которые получаются применением соответствующих формул для функций типа Миттаг—Леффелра $E_\rho(z;\mu)$ [2].

Пусть $\varepsilon\,(0<\varepsilon<l)$ и $\alpha_0\left(\frac{\pi}{2\rho}<\alpha_0<\min\left\{\pi;\frac{\pi}{\rho}\right\}\right)$ — фиксированные числа. При $|\lambda|\to+\infty$ равномерно относительно $x\in[\varepsilon;l]$ справедливы следующие асимптотические формулы [3]:

а) при $|\arg\lambda|\leqslant\alpha_0$

$$y\ (x;\ \lambda)=\rho\, e^{x\lambda^{\rho}}\left\{\sum_{l=0}^{1} a_l\,\lambda^{\rho\,(1-\mu_l)}\right\}+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \tag{13}$$

б) при $\pi > |\arg\lambda| \geqslant \alpha_0$

$$y\ (x;\ \lambda)=-\left\{\sum_{l=0}^{1}\frac{a_l\,x^{\mu_l-\rho^{-1}}-1}{\Gamma\,(\mu_l-\rho^{-1})}\right\}\frac{1}{\lambda}+O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right). \tag{14}$$

При любом $x\in(0;\ l)$, $|\lambda|>1$ имеют место оценки:

а) при $|\arg\lambda|\leqslant\alpha_0$

$$|y\ (x;\ \lambda)|\leqslant M_1\,(1+|\lambda|\ x^{1/\rho})^{\rho\,(1-\mu_0)}\ x^{\mu_0-1}\,e^{x\,\mathrm{Re}\,\lambda^{\rho}}+\frac{M_2\,x^{\mu_0-1}}{1+|\lambda|x^{1/\rho}}, \tag{15}$$

б) при $\pi\geqslant|\arg\lambda|\geqslant\alpha_0$

$$|y\ (x;\ \lambda)|\leqslant M_3\,\frac{x^{\mu_0-1}}{1+|\lambda|\ x^{1/\rho}}, \tag{16}$$

где через $M_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ обозначены постоянные, не зависящие от x и λ.

Отметим одну лемму из статьи [4], которой будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Лемма А. Для любого $\rho>\frac{1}{2}$ существуют последовательности $R_n\uparrow+\infty$ и $\vartheta_n\to\frac{\pi}{2\rho}$ такие, что для любого A_0, при $|\lambda|=R_n$, справедливы оценки

а) при $|\arg\lambda|\leqslant\vartheta_n$

$$|\omega_\rho'\ (\lambda)-A_0|\geqslant K_1\,(|c_\rho|+|c_\rho^{*}|)\ |\lambda|^{\rho\tau_1}\ e^{l\,\mathrm{Re}\,\lambda^{\rho}}>K_2\left(|c_\rho|+\frac{|c_\rho^{*}|}{|\lambda|}\right); \tag{17}$$

б) при $\vartheta_n\leqslant|\arg\lambda|\leqslant\pi$

$$|\omega_\rho\ (\lambda)-A_0|\geqslant K_3\left(|c_\rho|+\frac{|c_\rho^{*}|}{|\lambda|}\right), \tag{18}$$

где $K_i\,(i=1,\ 2,\ 3),\ c_\rho,\ c_\mu^{*}$ — некоторые постоянные, не зависящие от λ, причем

$$|c_\rho|+|c_\rho^{*}|\neq 0. \tag{19}$$

Нам потребуется также конкретное определение последовательности $\{\vartheta_n\}$, поэтому мы вкратце укажем как это делается.

Сначала определяется функция $\vartheta\,(r;\ x)$ как единственный корень уравнения

$$l\,r^{\rho}\cos\rho\vartheta+\omega\ln r+\ln|1+\varphi\,(re^{i\vartheta})|-\ln c_0\,e^{x}=0 \tag{20}$$

на отрезке

$$\left[\frac{\pi}{2\rho}-\delta;\ \frac{\pi}{2\rho}+\delta\right],\ |x|<\ln 3=\gamma,$$

где ω и c_0 не зависят от r и ϑ, $\delta > 0$ — достаточно малое число, а

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i,\, j=0}^{1}{}^{(0,0)} a_i b_j \lambda^{1+\rho(1-\nu_i-\mu_j)-\rho\tau_i} = \sum_{k=0}^{2} c_k \lambda^{-\alpha_k}, \tag{21}$$

причем $\min|c_k| > 0$, $\min \alpha_k = \alpha > 0$, а значок $(0, 0)$ при знаке суммы означает, что слагаемое, соответствующее паре $i=0$, $j=0$ отсутствует. Далее полагается

$$\vartheta_n = \vartheta(R_n; \gamma),$$

причем справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r\to+\infty} \vartheta(r; x) = \frac{\pi}{2\rho} \tag{22}$$

равномерно относительно $x \in [-\gamma, \gamma]$.

§ 2. Доказательство полноты системы $\{y_n(x)\}$ в $L_2(0; l)$

2.1. Докажем сначала основную лемму.

Лемма. *Пусть $f(x) \in L_2(0; l)$. Для любого $\rho > \frac{1}{2}$ существуют последовательность $R_n \uparrow +\infty$ и номер n_0 такие, что при $|\lambda| = R_n$, $n > n_0$*

$$\left| \int_0^l \frac{y(x; \lambda)}{\omega_\rho(\lambda)} \overline{f(x)}\, dx \right| \leqslant C R_n^{\tau}, \tag{23}$$

где τ и C не зависят от n, и

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y(x; R_n)}{\omega_\rho(R_n)} \overline{f(x)}\, dx = 0. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть сначала $x \in [R^{-\delta}, l]$, где R — любое положительное число, удовлетворяющее условию $0 < R^{-\delta} < l$ и δ $\left(\frac{1}{2} < \delta < \rho\right)$ некоторое число. При $\pi > |\arg \lambda| \geqslant \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ достаточно малое число) из (14) имеем оценку

$$|y(x; \lambda)| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|} R^{c_1},$$

для достаточно больших по модулю λ*.

Отсюда, учитывая (18), при $|\lambda| = R_n$, где $\{R_n\}$ — последовательность, указанная в лемме A, получим

---

* Здесь и далее через c_i и A_i обозначены постоянные, не зависящие от переменных, фигурирующих в соответствующих неравенствах.

$$\max_{|\lambda|=R_n} \left|\frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)}\right| \leqslant \text{const}\, R_n^{c_1},\ n > n_1,\ x \in [R_n^{-\delta};\ l]. \tag{25}$$

Теперь, если $f(x) \in L_2(0;\ l)$, то применением неравенства Шварца, с учетом (25) получим, что

$$\left|\int_{R_n^{-\delta}}^{l} \frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)} \overline{f(x)}\, dx\right| \leqslant \left(\int_{R_n^{-\delta}}^{l} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{R_n^{-\delta}}^{l} \left|\frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)}\right|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant A_1 R_n^{c_1} \tag{26}$$

при

$$\pi \geqslant |\arg\lambda| \geqslant \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon,\ |\lambda| = R_n,\ n > n_1.$$

Пусть $\{\vartheta_n\}$—последовательность, указанная в лемме А. При $|\lambda| = R_n$, $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \vartheta_n$ из формул (13) и (17) имеем следующую оценку:

$$\max_{|\lambda|=R_n} \left|\frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)}\right| \leqslant A_2 \frac{R_n^{\rho(1-\mu_0)} e^{R_n^{-\delta}\operatorname{Re}\lambda^\rho}}{|c_\rho| + \frac{|c_\rho^*|}{R_n}} \leqslant A_3 R_n^{c_2},\ n > n_2,\ x \in [R_n^{-\delta};\ l], \tag{27}$$

так как в рассматриваемом случае $\operatorname{Re}\lambda^\rho \leqslant 0$.

Отсюда, опять с помощью неравенства Шварца, получим

$$\left|\int_{R_n^{-\delta}}^{l} \frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)} \overline{f}(x)\, dx\right| < A_4 R_n^{c_2},\ n > n_2 \tag{28}$$

при $\frac{\pi}{2\lambda} \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \vartheta_n$, $|\lambda| = R_n$.

Если $|\arg\lambda| \leqslant \vartheta_n < \frac{\pi}{2\rho}$, то при $|\lambda| = R_n$ из (13) и (17) следует, что

$$\max_{|\lambda|=R_n} \left|\frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)}\right| \leqslant A_5 R_n^{\rho(1-\mu_0)-\rho\gamma_1} e^{-(l-x)\operatorname{Re}\lambda^\rho},\ n > n_3, \tag{29}$$

для всех $x \in [R_n^{-\delta};\ l]$.

Далее, заметив, что в рассматриваемом случае $\operatorname{Re}\lambda^\rho > 0$, из (29) как и выше, имеем

$$\left|\int_{R_n^{-\delta}}^{l} \frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)} \overline{f}(x)\, dx\right| \leqslant A_6 R_n^{c_3},\ n > n_3, \tag{30}$$

при $|\arg\lambda| \leqslant \vartheta_n < \frac{\pi}{2\rho}$, $|\lambda| = R_n$.

Из (29) при $\lambda = R_n$, в частности, следует, что

$$\left|\frac{y(x;\ R_n)}{\omega_\rho(R_n)}\right| \leqslant A_5 R_n^{\rho(1-\mu_0)-\rho\gamma_1}\ e^{-(l-x)R_n^\rho},\ n > n_3,$$

для всех $x \in [R_n^{-\delta};\ l]$.

Применение неравенства Шварца приводит к оценке

$$\left|\int\limits_{R_n^{-\delta}}^{l} \frac{y(x;\ R_n)}{\omega_\rho(R_n)} \overline{f(x)}\,dx\right| \leqslant A_7 R_n^{\rho(1-\mu_0)-\rho\gamma_1}\left(\frac{1-e^{-2(l-R_n^{-\delta})R_n^\rho}}{2R_n^\rho}\right)^{1/2} <$$

$$< A_8 R_n^{\rho(1-\mu_0)-\rho\gamma_1-\frac{\rho}{2}};\ n > n_3. \tag{31}$$

Но

$$\mu_0 = \gamma_0 > \frac{1}{2} \text{ и } \rho(1-\mu_0) - \rho\gamma_1 - \frac{\rho}{2} = -\rho\left(\mu_0 - \frac{1}{2}\right) - \rho\gamma_1 < 0,$$

и поэтому из (31) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{R_n^{-\delta}}^{l} \frac{y(x;\ R_n)}{\omega_\rho(R_n)} \overline{f}(x)\,dx = 0. \tag{32}$$

Пусть теперь $\vartheta_n \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$. Отметим сначала необходимую нам оценку [4]. Из (20) при $r = R_n$ с учетом (21) получим

$$l R_n^\rho \cos\rho\vartheta(R_n;\ x) + \omega \ln R_n + \ln|1 + O(R_n^{-a})| - \ln c_0 e^x = 0.$$

Отсюда и из (22) вытекают соотношения

$$\cos\rho\vartheta(R_n;\ x) = O\left(\frac{\ln R_n}{R_n^\rho}\right);\ \sin\rho\vartheta(R_n;\ x) = 1 + O\left(\frac{\ln R_n}{R_n^\rho}\right);\ n\to\infty, \tag{33}$$

откуда следует, что равномерно относительно $x \in (-\gamma;\ \gamma)$

$$\vartheta(R_n;\ x) = \frac{\pi}{2\rho} + O\left(\frac{\ln R_n}{R_n^\rho}\right),\ n\to\infty. \tag{34}$$

Из (33) и (34) при $|\lambda| = R_n$, $\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon \geqslant |\arg\lambda| \geqslant \vartheta_n$, $x \in [R_n^{-\delta};\ l]$ получим неравенство

$$e^{x\,\mathrm{Re}\,\lambda^\rho} = e^{x R_n^\rho \cos\rho\arg\lambda} \leqslant A_9 e^{x\ln R_n} \leqslant A_9 R_n^l. \tag{35}$$

С учетом этой оценки, из (13) и (18) имеем, что

$$\left|\frac{y(x;\ \lambda)}{\omega_\rho(\lambda)}\right| < A_{10} R^{l+\rho(1-\mu_0)+1} = A_{10} R_n^{c_1},\ n > n_4$$

при всех $x \in [R_n^{-\delta};\ l]$.

Отсюда, как и выше, следует неравенство

$$\left|\int\limits_{R_n^{-\delta}}^{l} \frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)}\,\bar f(x)\,dx\right| \leqslant A_{11} R_n^{c_4}, \tag{36}$$

при $\vartheta_n \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$, $|\lambda| = R_n$, $n > n_4$.

Объединяя разобранные случаи, (26), (28), (30) и (36) имеем, что при $|\lambda| = R_n$ справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{R_n^{-\delta}}^{l} \frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)}\,\bar f(x)\,dx\right| < A_{12} R_n^{c_5},\ n > n_5, \tag{37}$$

где $c_5 = \max\limits_{1<l<4}\{c_l\}$, $n_5 = \max\limits_{1<l<4}\{n_l\}$.

Теперь при $|\lambda| = R_n$ оценим по модулю сверху интеграл

$$\int\limits_0^{R_n^{-\delta}} \frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)}\,\bar f(x)\,dx.$$

Если $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \vartheta_n$, то при $|\lambda| = R_n$ из (15) следует неравенство

$$\left|\int\limits_0^{R_n^{-\delta}} y(x;\lambda)\,\bar f(x)\,dx\right| \leqslant A_{13}\Bigg\{\Bigg(\int\limits_0^{R_n^{-\delta}} e^{2x\,\mathrm{Re}\,\lambda^\rho}\, x^{2(\mu_0-1)} \times$$

$$\times (1+R_n x^{1/\rho})^{2\rho(1-\mu_0)}\,dx\Bigg)^{1/2} + \Bigg(\int\limits_0^{R_n^{-\delta}} x^{2(\mu_0-1)}(1+R_n x^{1/\rho})^{-2}\,dx\Bigg)^{1/2}\Bigg\}. \tag{38}$$

Но как легко видеть, справедливы оценки

$$\int\limits_0^{R_n^{-\delta}} x^{2(\mu_0-1)}(1+R_n x^{1/\rho})^{2\rho(1-\mu_0)}\,dx \leqslant A_{14} R_n^{-\delta+2\rho(1-\mu_0)}, \tag{39}$$

$$\int\limits_0^{R_n^{-\delta}} x^{2(\mu_0-1)}(1+R_n x^{1/\rho})^{-2}\,dx \leqslant A_{15} R_n^{-\delta(2\mu_0-1)}. \tag{40}$$

Следовательно, заметив также, что если $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \vartheta_n$, то $\mathrm{Re}\,\lambda^\rho \leqslant 0$, из (38) имеем, что

$$\left|\int\limits_0^{R_n^{-\delta}} y(x;\lambda)\,\bar f(x)\,dx\right| \leqslant A_{16}\left(R_n^{-\delta\left(\mu_0-\frac{1}{2}\right)}\right) + R_n^{-\frac{\delta}{2}+\rho(1-\mu_0)}.$$

Отсюда и из (17) непосредственно следует оценка

$$\left|\int_0^{R_n^{-\delta}} \frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)} \bar{f}(x)\,dx\right| < A_{17} R_n^{c_6}, \quad n > n_6, \tag{41}$$

при $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \vartheta_n$, $|\lambda| = R_n$.

Далее, при $\pi > |\arg\lambda| > \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$, $|\lambda| = R_n$, используя оценки (16), (18) и (40), получим, что

$$\left|\int_0^{R_n^{-\delta}} \frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)} \bar{f}(x)\,dx\right| < \frac{A_{18}}{|c_\rho| + |c_\rho^*| R_n^{-1}} \left(\int_0^{R_n^{-\delta}} x^{2(\mu_0-1)}(1+R_n x^{1/\rho})^{-2}\,dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant A_{19} R_n^{c_7}; \quad n > n_7. \tag{42}$$

Если же $\lambda = R_n e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leqslant \vartheta_n \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$, то ввиду оценок (15), (39) и (40) имеем неравенство

$$\left|\int_0^{R_n^{-\delta}} y(x;\lambda)\bar{f}(x)\,dx\right| \leqslant A_{20}\left\{ e^{R_n^{-\delta} R_n^{\rho}\cos\rho\varphi} \left(\int_0^{R_n^{-\delta}} x^{2(\mu_0-1)}(1+R_n x^{1/\rho})^{2\rho(1-\mu_0)} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\, dx\right)^{1/2} + \left(\int_0^{R_n^{-\delta}} x^{2(\mu_0-1)}(1+R_n x^{1/\rho})^{-2}\,dx\right)^{1/2}\right\} \leqslant A_{21}\left(R_n^{-\frac{\delta}{2}+\rho(1-\mu_0)} \times\right.$$

$$\left.\times\, e^{R_n^{\rho-\delta}\cos\rho\varphi} + R_n^{-\rho\left(\mu_0-\frac{1}{2}\right)}\right) \leqslant A_{22} R_n^{-\frac{\delta}{2}+\rho(1-\mu_0)} e^{R_n^{\rho-\delta}\cos\rho\varphi} \qquad (R_n > 1).$$

Применяя неравенство Шварца и учитывая оценки (17) и (43) получим, что

$$\left|\int_0^{R_n^{-\delta}} \frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)} \bar{f}(x)\,dx\right| \leqslant A_{23} R_n^{-\frac{\delta}{2}+\rho(1-\mu_0)-\rho\gamma_1} e^{-\left(1-R_n^{-\delta}\right)\operatorname{Re}\lambda^\rho} < A_{23} R_n^{c_8} \tag{44}$$

при $|\arg\lambda| \leqslant \vartheta_n \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$, $|\lambda| = R_n$, $n > n_8$.

Если же $\vartheta_n \leqslant |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$, то, как и в (43) будем иметь

$$\left|\int_0^{R_n^{-\delta}} y(x;\lambda)\overline{f(x)}\,dx\right| \leqslant A_{24} R_n^{-\frac{\delta}{2}+\rho(1-\mu_0)} e^{R_n^{-\delta}\operatorname{Re}\lambda^\rho}. \tag{45}$$

Заметив, что, согласно (35), при $\vartheta_n \leqslant |\arg \lambda| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$

$$e^{R_n^{-\delta} \operatorname{Re} \lambda^\rho} < A_9 R_n^l,$$

для достаточно больших n, из (45) следует, что

$$\left| \int_0^{R_n^{-\delta}} y(x; \lambda) \bar{f}(x)\, dx \right| \leqslant A_{25} R_n^{c_9}, \quad n \geqslant n_9.$$

Далее, учитывая (18), имеем неравенство

$$\left| \int_0^{R_n^{-\delta}} \frac{y(x; \lambda)}{\omega_\rho(\lambda)} \bar{f}(x)\, dx \right| \leqslant A_{26} R_n^{c_{10}}, \tag{46}$$

при $\vartheta_n \leqslant |\arg \lambda| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$, $|\lambda| = R_n$, $n > n_{10}$.

Таким образом, объединяя (41), (42), (44) и (46), получим, что при $|\lambda| = R_n$, $n > n_{11} = \max \{n_i\}$

$$\left| \int_0^{R_n^{-\delta}} \frac{y(x; \lambda)}{\omega_\rho(\lambda)} \bar{f}(x)\, dx \right| \leqslant A_{27} R_n^{c_{11}}. \tag{47}$$

Из (44) дополнительно устанавливаем соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{R_n^{-\delta}} \frac{y(x; R_n)}{\omega_\rho(R_n)} \bar{f}(x)\, dx = 0. \tag{48}$$

Наконец, полагая $\tau = \max\{c_5; c_{11}\}$, $n_0 = \max\{n_5; n_{11}\}$, из (37) (47), (32) и (48) получаем утверждение леммы.

2.2. Докажем теперь теорему о полноте системы $\{y_n(x)\}_1^\infty$ в пространстве $L_2(0; l)$.

Теорема. *Система функций $\{y_n(x)\}_1^\infty$ полна в $L_2(0; l)$.*

Доказательство. Предположим, что существует функция $f(x) \in L_2(0; l)$ такая, что

$$\int_0^l y_n(x) \bar{f}(x)\, dx = 0, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{49}$$

Согласно способу построения системы $\{y_n(x)\}_1^\infty$, условие (49) означает, что все нули функции $\omega_\rho(\lambda)$ одновременно являются нулями функции

$$G(\lambda) = \int_0^l y(x; \lambda) \bar{f}(x)\, dx \tag{50}$$

соответствующей кратности.

Следовательно, отношение

$$F(\lambda)=\frac{G(\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)} \tag{51}$$

будет целой функцией от λ.

По доказанной лемме имеем, что при $|\lambda|=R_n$

$$|F(\lambda)|=\left|\int_0^l \frac{y(x;\lambda)}{\omega_\rho(\lambda)}\bar{f}(x)\,dx\right|\leqslant C\cdot R_n^{\cdot}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}F(R_n)=\lim_{n\to\infty}\int_0^l \frac{y(x;R_n)}{\omega_\rho(R_n)}\bar{f}(x)\,dx=0.$$

Отсюда следует, что функция $F(\lambda)$ тождественно равна нулю, то есть

$$\int_0^l y(x;\lambda)\bar{f}(x)\,dx\equiv 0. \tag{52}$$

Интегрируя почленно разложение (7) функции $E_\rho(z;\mu)$, приходим к формуле

$$\frac{d^{-\gamma_1}}{dx^{-\gamma_1}}x^{\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_0)=x^{\mu_1-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_1), \tag{53}$$

где $\frac{d^{-\gamma}}{dx^{-\gamma}}$ $(\gamma>0)$—интегральный оператор дробного порядка.

С учетом (53) из (11) получим следующее выражение для функции $y(x;\lambda)$:

$$y(x;\lambda)=a_0\,x^{\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_0)+a_1\frac{d^{-\gamma_1}}{dx^{-\gamma_1}}x^{\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_0). \tag{54}$$

Теперь соотношение (52) запишется в виде

$$a_0\int_0^l \bar{f}(x)\,x^{\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho},\mu_0)\,dx+a_1\int_0^l \bar{f}(x)\left\{\frac{d^{-\gamma_1}}{dx^{-\gamma_1}}x^{\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_0)\right\}\times$$
$$\times\,dx\equiv 0. \tag{55}$$

Но используя формулу интегрирования по частям в применении к дробным производным, получим

$$\int_0^l \bar{f}(x)\left\{\frac{dx^{-\gamma_1}}{dx^{-\gamma_1}}x^{\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_0)\right\}dx=\int_0^l x^{\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_0)\times$$
$$\times\left\{\frac{d^{-\gamma_1}\overline{f(x)}}{d(l-x)^{-\gamma_1}}\right\}dx, \tag{56}$$

где

$$\frac{d^{-\gamma_1}\overline{f(x)}}{d(l-x)^{-\gamma_1}}=\frac{1}{\Gamma(\gamma_1)}\int_x^l (t-x)^{\gamma_1-1}\overline{f(t)}\,dt$$

есть интегральный оператор дробного порядка $\gamma_1>0$ с концом в точке $x=l$ [2].

С учетом (56) из (55) приходим к тождеству

$$\int_0^l x^{\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_0)\left\{a_0\overline{f}(x)+a_1\frac{d^{-\gamma_1}\overline{f(x)}}{d(l-x)^{-\gamma_1}}\right\}dx\equiv 0.$$

Однако из теории интегральных преобразований с ядром типа Миттаг—Леффлера [2] известно, что отсюда следует тождество

$$a_0\overline{f}(x)+a_1\frac{d^{-\gamma_1}\overline{f}(x)}{d(l-x)^{-\gamma_1}}=a_0\overline{f}(x)+\frac{a_1}{\Gamma(\gamma_1)}\int_x^l(t-x)^{\gamma_1-1}\overline{f}(t)\,dt=0.$$

Но единственным решением этого интегрального уравнения типа Вольтерра ($a_0\neq 0$) в пространстве $L_2(0;\ l)$ является функция $f(x)\equiv 0$.

Итак, из (49) следует, что $f(x)\equiv 0$ почти всюду на $(0;\ l)$.

Таким образом, система функций $\{y_n(x)\}_1^\infty$ полна в $L_2(0;\ l)$. Теорема доказана.

Отметим, что вопрос о том, является ли система (10) базисом в $L_2(0;\ l)$, поставленный также в работе [1], пока остается открытым.

В заключение выражаю глубокую благодарность академику АН Армянской ССР, профессору М. М. Джрбашяну за ценные советы и постоянное внимание при выполнении данной работы.

Ереванский институт народного хозяйства Поступила 20.IV.1979

Ռ. Ս. ԳԱԼՈՅԱՆ. Սեփական և միակցված ֆունկցիաների մի սիստեմի լրիվության մասին (*ամփոփում*)

Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից [1] հետազոտված էր Շտուրմ-Լիուվիլի տիպի կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորի համար եզրային խնդիր։ Նույն աշխատանքում հարց էր առաջադրված այդ խնդրի սեփական և միակցված ֆունկցիաների սիստեմի լրիվության մասին։ Ներկա հոդվածում մի կարևոր դեպքի համար ապացուցված է այդ ֆունկցիաների սիստեմի լրիվությունը $L_2\ (0;l)$ դասում։

R. S. GALOJAN. *On completeness of a system of eigen and associated functions* (summary)

M. M. Jrbashian in [1] has investigated the boundary problem for differential operators of fractional order of Sturm—Liuville type. There the question of completeness of the system of eigen and associated functions of this problem was raised.

The present paper proves the completeness of this system in the class $L_2\ (0;\ l)$ for an important special case.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма—Лиувилля, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", V, № 2, 1970, 71—96.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука", 1966.
3. *М. М. Джрбашян и А. Б. Нерсесян.* О построении некоторых специальных биортогональных систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 12, 1959.
4. *М. М. Джрбашян и А. Б. Нерсесян.* Разложение по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, Труды ММО, т. 10, 1961, 89—179.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 1, 1980 Математика

Ф. А. ШАМОЯН

ТЕОРЕМЫ ДЕЛЕНИЯ И ЗАМКНУТЫЕ ИДЕАЛЫ В АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАЖОРАНТОЙ КОНЕЧНОГО РОСТА

Введение

1°. Пусть $A(D)$ — множество всех аналитических функций в единичном круге $D=\{z : |z|<1\}$ и

$$X_\varphi^\infty=\left\{ f\in A(D)\colon \log|f(z)|=O\left[\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right],\ |z|\to 1\right\},$$

где φ — положительный растущий вес на полуоси $(0, +\infty)$.

При некоторых ограничениях на мажоранту φ в статье получена главность всех замкнутых идеалов алгебры X_φ^∞.

2°. Следуя М. М. Джрбашяну [1] обозначим через A_α^*, $(\alpha>-1)$ класс аналитических в круге D функций f, для которых

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(1-r^2)^\alpha \log^+|f(re^{i\theta})|\, rdrd\theta<+\infty.$$

В работе [2] автором было доказано, что при следующих предположениях:

$$\alpha_\varphi=\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}<+\infty,\ \beta_\varphi=\lim_{x\to\infty}\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}>1, \qquad (0,1)$$

факторизация, предложенная М. М. Джрбашяном в [1]), сохраняет рост функций класса X_φ^∞, то есть, если $f\in X_\varphi^\infty$ и α такие, что $X_\varphi^\infty\subset A_\alpha^*$ (например, $\alpha>\alpha_\varphi-1$), то при факторизации

$$f=\pi_\alpha^f \exp\{g_\alpha^f\}$$

функции π_α^f и $\exp\{\pm g_\alpha^f\}$ тоже принадлежат классу X_φ^∞, где π_α^f произведение М. М. Джрбашяна:

$$\pi_\alpha^f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left\{-\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\alpha\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}\right|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\theta\right\},$$

$$g_\alpha^f(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\alpha\log|f(\rho e^{i\theta})|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\theta.$$

Кроме того, в указанной работе была получена полная характеристика нулей функций класса X_φ^∞ при условии (0.1).

В § 1 мы исследуем случай $0 \leqslant \alpha_\varphi \leqslant 1$. Несмотря на то, что мы не получим характеристику нулевых множеств функций класса X_φ^∞, но тем не менее, мы докажем, что функции из этих классов можно разделить на специальные произведения, не выходя из этих классов (теорема 1.1).

Теорема 1.1 вместе с вышеуказанными результатами работы [2] позволяют окончательно выяснить структуру замкнутых идеалов в алгебрах X_φ^∞ при условии Бёрлинга—Никольского и $\alpha_\varphi < +\infty$ (теорема 2.2). Отметим, что теорема 1.1 одновременно является окончательным усилением результатов работы [3], где рассматривается только случай $\varphi(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha < 2$.

3°. В работе [4] доказана дивизориальность замкнутых идеалов алгебры X_φ^∞ при условии $\alpha_\varphi = \beta_\varphi > 1$, там же поставлен вопрос о главности этих идеалов. Теорема 2.2 дает положительный ответ на указанный вопрос при условии $\alpha_\varphi < +\infty$.

Кроме того из теоремы 2.2 следует, что необходимые условия, найденные А. Берлингом [5] и Н. К. Никольским в [6] для дивизориальности замкнутых идеалов алгебры X_φ^∞, являются также достаточными.

4°. Эта статья является продолжением статьи [2]. Результаты, изложенные здесь, в основном были получены зимой 1978 г. и тогда же докладывались на семинаре по теории функций комплексного переменного Института математики АН Армянской ССР.

§ 1. Деление в классах X_φ^∞ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 1)$

Пусть $0 < \alpha < +\infty$ и $\{z_k\}_1^\infty$ — последовательность точек из единичного круга D.

Предположим, что

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |z_k|)^\alpha < +\infty. \tag{1.1}$$

Легко видеть, что при этом условии бесконечное произведение

$$h_\alpha(z) = \prod_{k=1}^\infty \{1 - (1 - B_{z_k}(z))^\alpha\}, \quad B_{z_k}(z) = \frac{\overline{z}_k}{|z_k|} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z}, \tag{1.2}$$

равномерно сходится внутри единичного круга D.

Отметим, что произведения такого типа впервые были введены в [3].

Поскольку при условии $f \in X_\varphi^\infty$, $f \not\equiv 0$ и $\alpha > \alpha_\varphi + 1$ множество нулей функций удовлетворяет условию (1.1) (см. [1]), то по этим нулям можем составить произведение h_α. Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть* $f \in X_\varphi^\infty$, $f \not\equiv 0$, $0 \leqslant \alpha_\varphi \leqslant 1$ *и* $f(z_k)=0$, $k = 1, 2, \cdots$. $\alpha_\varphi + 1 < \alpha \leqslant 3$. *Предположим далее, что* h_α — *произведение* (1.2) *с нулями* $\{z_k\}_1^\infty$, *тогда*

$$g_\alpha(z) = \frac{f(z)}{h_\alpha(z)} \in X_\varphi^\infty.$$

Доказательству теоремы предпошлем следующие леммы.

Лемма 1.1. *Пусть* $f \in X_\varphi^\infty$ *и* $f(0) \neq 0$, $\alpha_\varphi + 1 < \alpha < +\infty$, *тогда имеет место следующее равенство*:

$$\alpha \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)^{\alpha-2}[r\alpha - 1 + (1-r)^\alpha (1-r^2\alpha)] \log|f(re^{i\theta})|}{[1-(1-r)^\alpha]^2} d\theta\, dr =$$

$$= \log|f(0)| + \alpha \int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha-1} n(r)}{1-(1-r)^\alpha} dr,$$

где $n(r)$ — *число нулей функции* f *в круге* $|z| < r$.

Доказательство. Из равенства Иенсена непосредственно следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \psi(r) \log|f(re^{i\theta})| d\theta dr = \left(\int_0^1 \psi(r)\, dr\right) \log|f(0)| +$$

$$+ \int_0^1 \psi(r) \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt dr. \tag{1.3}$$

Функцию ψ определим из следующего равенства

$$\frac{1}{r} \int_r^1 \psi(t)\, dt = \frac{\alpha(1-r)^{\alpha-1}}{1-(1-r)^\alpha}. \tag{1.4}$$

Интегрируя в (1.3) по частям, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \psi(r) \log|f(re^{i\varphi})| d\varphi dr = \int_0^1 \psi(t)\, dt \log|f(0)| +$$

$$+ \alpha \int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha-1} n(r)}{1-(1-r)^\alpha} dr.$$

Из равенства (1.4) следует, что

$$\int_0^1 \psi(t)\, dt = 1$$

и

$$\psi(r)=\frac{\alpha(1-r)^{\alpha-2}[r\alpha-1+(1-r)^{\alpha}(1-r^{2}\alpha)]}{[1-(1-r)^{\alpha}]^{2}}. \tag{1.5}$$

Лемма 1.2. *Пусть* $f\in X_{\varphi}^{\infty}$, $f(0)\neq 0$, $\alpha_{\varphi}+1<\alpha<+\infty$, $\{z_k\}_1^{\infty}$ *—подмножество нулей функции* f. *Тогда имеет место равенство*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-(1-|z_k|)^{\alpha})}=\exp\left\{\alpha\int_0^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{1-(1-t)^{\alpha}}n(t)\,dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{|f(0)|}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\psi(r)\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta dr\right\}, \tag{1.6}$$

где ψ *определяется из равенства* (1.5), $n(t)$*—число точек* $\{z_k\}$ *в круге* $|z|<t$.

Доказательство. Имеем

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\log(1-(1-|z_k|)^{\alpha})=-\int_0^1\log(1-(1-t)^{\alpha})\,dn(t)=$$

$$=\int_0^1\frac{\alpha(1-t)^{\alpha-1}n(t)\,dt}{1-(1-t)^{\alpha}},$$

поскольку

$$n(t)\log(1-(1-t)^{\alpha})\to 0,\ \text{при}\ t\to 1-0.$$

Остается применить лемму 1.1. ●

Следующая лемма доказана в [3].

Лемма 1.3. *Пусть* $0<\alpha\leqslant 3$, *тогда имеет место неравенство*

$$|1-(1-w)^{\alpha}|\geqslant(1-(1-|w|)^{\alpha}),\quad w\in D.$$

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $w\in D$, $f(w)\neq 0$, положим

$$f_w(z)=f\left(\frac{w-z}{1-\bar{w}z}\right)$$

и обозначим

$$c_k(w)=\frac{w-z_k}{1-\bar{z}_k w}.$$

Легко видеть, что $f_w(c_k(w))=0$, $k=1,2,\cdots$. Поэтому, используя тот факт, что $|B_{z_k}(w)|=|c_k(w)|$, а также леммы 1.1—1.3, получим

$$|h_{\alpha}^{-1}(w)|\leqslant\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[1-(1-|B_{z_k}(w)|)^{\alpha}]}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[1-(1-|c_k(w)|)^{\alpha}]}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{|f_w(0)|}\exp\left\{\mathrm{const}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^{2})^{\alpha}}{r}\log^{+}|f_w(re^{i\theta})|\,r\,d\theta dr\right\}.$$

Далее положим $v(z)=\rho e^{i\theta}=\dfrac{w-re^{i\varphi}}{1-\overline{w}re^{i\varphi}}$ и заметим, что

$$rdrd\varphi=\left(\frac{1-|w|^2}{|1-w\rho e^{-i\theta}|^2}\right)^2\rho d\rho d\theta.$$

Тогда, учитывая это, легко видеть, что последний интеграл не превосходит const I, где

$$I=\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-\left|\frac{w-\rho e^{i\theta}}{1-\overline{w}\rho e^{i\theta}}\right|^2\right)^{\alpha-2}\left(\frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}\rho e^{i\theta}|^2}\right)^2\log^-|f(\rho e^{i\theta})|\rho d\rho p\theta.$$

Теперь, поскольку

$$1-\left|\frac{w-\rho e^{i\theta}}{1-\overline{w}\rho e^{i\theta}}\right|^2=\frac{(1-|w|^2)(1-\rho^2)}{|1-w\rho e^{-i\theta}|^2},$$

для I получаем оценку

$$I\leqslant\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\frac{(1-|w|^2)^\alpha(1-\rho^2)^{\alpha-2}}{|1-w\rho e^{-i\theta}|^{2\alpha}}\rho d\rho d\theta.$$

Но ввиду оценки

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|1-w\rho e^{-i\theta}|^{2\alpha}}\leqslant\frac{\text{const}}{(1-|w|\rho)^{2\alpha-1}}\qquad(2\alpha>1)$$

имеем

$$I\leqslant\text{const}\,(1-|w|)^\alpha\left\{\int\limits_0^{|w|}\varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\frac{(1-\rho)^{\alpha-2}}{(1-\rho|w|)^{2\alpha-1}}+\int\limits_{|w|}^1\left(\qquad\right)d\rho\right\}\stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}\text{const}\,(1-|w|)^\alpha(I_1+I_2).$$

Используя монотонность φ, сразу получим

$$I_1\leqslant\frac{1}{(1-|w|)^\alpha}\varphi\left(\frac{1}{1-|w|}\right).\tag{1.6}$$

Для оценки интеграла I_2 произведем в нем замену $\dfrac{1-|w|}{1-\rho}=u$. Получим

$$I_2=\frac{1}{(1-|w|)^\alpha}\int\limits_1^{+\infty}\varphi\left(\frac{u}{1-|w|}\right)\frac{du}{u^\alpha}.$$

Но так как

$$\varphi\left(\frac{u}{1-|w|}\right)\leqslant u^{\alpha_\varphi}\varphi\left(\frac{1}{1-|w|}\right),$$

то

$$I_2\leqslant\frac{1}{(\alpha-\alpha_\varphi^\varepsilon-1)(1-|w|)^\alpha}\varphi\left(\frac{1}{1-|w|}\right).\tag{1.7}$$

Из оценок (1.6′) и (1.7) вытекает неравенство

$$I \leqslant \mathrm{const}\, \varphi\left(\frac{1}{1-|w|}\right).$$

Следовательно

$$|g(w)| = \frac{|f(w)|}{|h_\alpha(w)|} = \frac{|f_w(0)|}{|h_\alpha(w)|} \leqslant \exp\left\{\mathrm{const}\, \varphi\left(\frac{1}{1-|w|}\right)\right\}.$$

Замечание 1.1. Отметим, что утверждение теоремы имеет место и в случае $1 < \alpha_\varphi < \infty$ но этот случай следует уже из результатов работы [2], где вместе h_α участвует произведение М. М. Джрбашяна.

Символом $E(f)$ мы будем обозначать множество нулей функции f в D.

Следствие 1.1. Пусть $f \in X_\varphi^\infty$, $0 \leqslant \alpha_\varphi \leqslant 1$, тогда для любого подмножества $E_0 \subset E(f)$ существует функция $f_0 \in X_\varphi^\infty$ такая, что $E(f_0) = E_0$.

§ 2. Замкнутые идеалы алгебры X_φ^∞

Пусть $\sigma > 0$, положим

$$X_\varphi^\sigma = \left\{ f \in A(D) : \sup_{z \in D} \left[|f(z)| \exp\left\{-\sigma\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right\}\right] < +\infty \right\}.$$

Тогда

$$X_\varphi^\infty = \bigcup_{\sigma > 0} X_\varphi^\sigma.$$

Введём в X_φ^∞ топологию индуктивного предела банаховых пространств X_φ^σ. Легко видеть, что X_φ^∞ превращается в топологическую алгебру относительно поточечного умножения и сложения.

Здесь мы докажем, что каждый замкнутый идеал алгебры X_φ^∞ главный и определяется своими нулями при условии, что φ имеет конечный степенной порядок и удовлетворяет условию Бёрлинга—Никольского, т. е.

$$\int^{\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{x^3}\right)^{1/2} dx = +\infty. \tag{2.1}$$

При доказательстве этого утверждения мы применим теорему 1.1 и результаты работы [2].

Пусть X — некоторая алгебра аналитических функций в круге D, в котором плотно множество всех многочленов от z.

Определение. Пусть $f \in X$, $f(z) \neq 0$, $z \in D$. Мы скажем, что f слабо обратима в X, если существует последовательность многочленов $\{p_n(z)\}_1^\infty$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} p_n f = 1,$$

причем сходимость имеет место в топологии алгебры X.

Определение 2. 2. Скажем, что в X имеет место деление, если для произвольного $f \in X$ с нулевым подмножеством $\{z_k\}_1^\infty$ существует „стандартное" произведение

$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} G_{z_k}(z),\ z \in D, \tag{2.2}$$

равномерно сходящееся в D, с нулями в точках $\{z_k\}_1^\infty$, так что

$$\frac{f}{\prod_{k=1}^{n} G_{z_k}} \in X,\ n = 1, 2, \cdots;\ \lim_{n\to\infty} \frac{f}{\prod_{k=1}^{n} G_{z_k}} = \frac{f}{G} \in X,$$

причем $G_{z_k} \in X$ и обращаются в нуль только в точке z_k, $k = 1, 2, \cdots$ и сходимость имеет место в X.

Теорема 2.1. *Пусть в топологической алгебре X имеет место деление и каждая ее не анулирующая функция в D слабо обратима. Тогда каждый замкнутый идеал в X — главный.*

Доказательство. Пусть I — замкнутый идеал в X. Обозначим через $E(I)$ множество нулей идеала I:

$$E(I) = \bigcap_{f \in I} E(f).$$

Сначала докажем дивизориальность I, т. е. что

$$I = I_0(E(I)), \tag{2.3}$$

где $I_0(E(I))$ — идеал тех функций из X, которые обращаются в нуль на множестве $E(I)$.

Пусть

$$I^* = \{f \in X : fI_0 \subset I\}.$$

Очевидно, что I^* — замкнутый идеал в X. Для доказательства (2.3) достаточно показать, что $I^* = X$.

Пусть $f \in I^*$ и $g \in I_0$, тогда по определению $fg \in I$. Предположим $f(z_0) = 0$, $z_0 \in D$. Докажем, что

$$\frac{f}{G_{z_0}} \in I^*.$$

Действительно, для этого применим стандартный прием (см. [7]).

Предположим, что $z_0 \overline{\in} E(I)$ (случай $z_0 \in E(I)$ проверяется аналогичным образом) и $h \in I$, $h(z_0) \neq 0$. По условию теоремы

$$\frac{h(z) - h(z_0)}{G_{z_0}} \in X.$$

Поэтому

$$\psi(z) = f(z)\frac{h(z) - h(z_0)}{G_{z_0}(z)}\, g(z) \in I.$$

Отсюда

$$g\frac{f}{G_{z_0}} = \frac{1}{h(z_0)}\left[\frac{fgh}{G_{z_0}} - \psi\right] \in I. \tag{2.4}$$

Но так как g — произвольная функция из I_0, то $\frac{f}{G_{z_0}} \in I^*$. Аналогичным образом докажем, что

$$\frac{f}{\prod\limits_{k=1}^{n} G_{z_k}} \in I^*, \tag{2.5}$$

где $\{z_k\}_1^\infty$ — множество нулей функции f в D. Поскольку (2.5) выполняется при всех n, то используя замкнутость I^*, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{\prod\limits_{k=1}^{n} G_{z_k}} = \frac{f}{G} = F \in I^*.$$

Однако $F(z) \neq 0$, $z \in D$, следовательно ввиду слабой обратимости функции F, получим $I^* = X$ и (2.3) доказано. Теперь докажем главность I.

Предположим, что $f \in I$ и $f \not\equiv 0$, $E_0 = E(f) \setminus E(I)$. Используя вышеуказанные рассуждения, получаем

$$f_1 = \frac{f}{\prod\limits_{z_k \in E_0} G_{z_k}} \in I$$

и потому $I = f_1 X$.●

Из доказанной теоремы и результатов Н. К. Никольского (см. [6], стр. 150) непосредственно следует

Теорема 2.2. *Пусть φ удовлетворяет условию (2.1) и кроме того $\alpha_\varphi = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} < +\infty$. Тогда каждый замкнутый идеал I в X_φ^∞ определяется своими нулями и порождается одной функцией*

$$I = \begin{cases} \Pi_\alpha X_\varphi^\infty, & \text{если } \alpha > \alpha_\varphi - 1, \quad \alpha_\varphi > 1 \\ f_1 X_\varphi^\infty, & \text{если } \alpha_\varphi \leqslant 1, \end{cases}$$

где Π_α — произведение М. М. Джрбашяна с нулями $E(I)$, а f_1 — некоторая функция из X_φ^∞ с нулевым множеством $E(f_1) = E(I)$.

Действительно, в указанных алгебрах имеет место деление (см. [2] и теорему 1.1), и каждая функция $f \in X_\varphi^\infty$, $f(z) \neq 0$, $z \in D$ слабо обратима (см. [6], стр. 150).

Замечание. Утверждение теоремы 2.2 при условии $\varphi(x) = x^\beta$, $1 < \beta < +\infty$ и целых α доказано в [8].

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.X.1979

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Բաժանման թեորեմներ և փակ իդեալների նկարագրությունը վերջավոր կարգ ունեցող անալիտիկ ֆունկցիաների հանրահաշիվներում *(ամփոփում)*

Դիցուք $D=\{z:|z|<1\}$, X_φ^∞*-ն այն* f *անալիտիկ ֆունկցիաների բազմությունն է* D*-ում, որոնց համար*

$$\log|f(z)| = O\left(\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right), \quad |z|\to 1-0,$$

որտեղ φ*-ն* $\varphi>0$ *և մոնոտոն աճող է* $(0, \infty)$, *որոշ հայտնի սահմանափակումներ դնելով* φ*-ի վրա ապացուցվում է, որ յուրաքանչյուր փակ իդեալ* X_φ^∞ *գլխավոր է։*

F. A, SHAMOJAN. *Division theorems and the discription of the closed ideals in algebra of analytical functions of finite order* (summary)

Let $D=\{z\in C^1:|z|<1\}$, X_φ^∞ be the algebra of analytic functions f on D_φ^∞, for which

$$\log|f(z)| = 0\left(\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right), \quad |z|\to 1-0$$

where $\varphi > 0$, $\varphi\uparrow\infty$ on $(0, +\infty)$.

The paper describes the closed ideals in X_φ^∞.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщения ин-та математики и механики АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—35.
2. *Ф. А. Шамоян.* Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIII, № 5—6, 1978, 405—421.
3. *E. Beller.* Factorisation for non-Nevanlina classes of analytic functions, Israel Journ. Math, 27, № 3—4, 1977, 320—330.
4. *С. А. Апресян.* Локализация идеалов и асимтотические теоремы единственности для функций с ограничениями на рост, Мат. сб., 106 (148), № 1 (5), 4—34.
5. *A. Beurling.* A critical topology in harmonic analysis on semigroups, Acta Math., 112, № 3—4, 1964, 215—228.
6. *Н. К. Никольский.* Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, CXX, 1974.
7. *Ф. А. Шамоян.* Описание замкнутых идеалов и некоторые вопросы факторизации в алгебрах растущих функций в круге, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1970, V, № 5, 419—433.
8. *В. И. Мацаев, Е. З. Могульский.* Теорема деления для аналитических функций с заданной мажорантой и некоторые ее приложения, Зап. научн. семин. ЛОМИ 56, 1976, 73—90.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS