ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по собому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of types script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal,the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been caried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 3, 1980 Математика

М. Ю. ХОДЖАЯНЦ

О СТРУКТУРЕ e-СТЕПЕНЕЙ

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с разбиением произвольных e-степеней на степени неразрешимости. Поскольку e-сводимость является самой общей из сводимостей по перечислимости, а T-сводимость—самой общей из сводимостей по разрешимости, то вводится понятие eT-сводимости—конъюнкции этих сводимостей, которое будет самым общим для сводимостей, являющихся одновременно и сводимостями по перечислимости и сводимостями по разрешимости. Поэтому изучается структура произвольных e-степеней относительно eT-сводимости. Рассматриваются также вопросы разбиения e-степеней относительно более сильной сводимости по перечислимости—pc-сводимости. Все эти сводимости, за исключением eT-сводимости, изучаются в [1] и [2]. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в [1].

Пусть φ и W—стандартные нумерации частичнорекурсивных функций и рекурсивно перечислимых множеств, φ^X—стандартная нумерация частичнорекурсивных функций с оракулом X, а D—каноническая нумерация конечных множеств [1].

Рассмотрим следующие отношения на множествах:

$A \leqslant_c B \Longleftrightarrow \exists f$—общерекурсивная функция $\forall x\, (x \in A \Longleftrightarrow D_{f(x)} \subseteq B)$,

$A \leqslant_T B \Longleftrightarrow \exists z\ (c_A = \varphi_z^B)$, где c_A—характеристическая функция множества A.

$$A \leqslant_{pc} B \Longleftrightarrow \exists z \forall x\, (x \in A \Longleftrightarrow !\, \varphi_z(x) \,\&\, D_{\varphi_z(x)} \subseteq B),$$

$$A \leqslant_e B \Longleftrightarrow \exists z \forall x\, (x \in A \Longleftrightarrow \exists u\, (\langle x, u \rangle \in W_z \,\&\, D_u \subseteq B)),$$

$$A \leqslant_{eT} B \Longleftrightarrow A \leqslant_e B \,\&\, A \leqslant_T B.$$

Все эти отношения мы будем называть сводимостями. Пусть a—некоторая сводимость. Тогда

$$A \equiv_a B \Longleftrightarrow A \leqslant_a B \,\&\, B \leqslant_a A$$

и множество $d_a(A) = \{B \mid B \equiv_a A\}$ называется a-степенью множества A.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$—произвольные a-степени. Тогда

$$\mathbf{a} \leqslant_a \mathbf{b} \Longleftrightarrow \exists A \exists B\, (A \in \mathbf{a} \,\&\, B \in \mathbf{b} \,\&\, A \leqslant_a B).$$

Через $\mathbf{O}$ мы будем обозначать e-степень множества $\varnothing$. Очевидно, что $\mathbf{O}$ совпадает с множеством всех рекурсивно перечислимых множеств. Заметим, что для произвольных множеств A и B

$$A \leqslant_e B \supset A \leqslant_{eT} B,$$

$$A \leqslant_e B \supset A \leqslant_{pc} \bar{B},$$

$$A \leqslant_{pc} B \supset A \leqslant_e B.$$

Определение 1. е-степень называется тотальной, если она содержит график некоторой всюду определенной функции.

Определение 2. e-степень $\mathbf{a}$ называется квазиминимальной, если $\mathbf{a} \neq \mathbf{O} \& \forall \mathbf{b}$ ($\mathbf{b}$ — тотальная e-степень $\& \mathbf{b} \leqslant_e \mathbf{a} \supset \mathbf{b} = \mathbf{O}$). Очевидно, что любая квазиминимальная e-степень не является тотальной.

Пусть $\Phi_z[B] = \{x | \exists u (\langle x, u \rangle \in W_z \& D_u \subseteq B)\}$ и

$$\Psi_z[B] = \{x | ! \varphi_z(x) \& D_{\varphi_z(x)} \subseteq B\}, \text{ т. е.}$$

$$A \leqslant_e B \Longleftrightarrow \exists z (A = \Phi_z[B]) \text{ и } A \leqslant_{pc} B \Longleftrightarrow \exists z (A = \Psi_z[B]).$$

Отметим, что произвольная e-степень $\mathbf{a}$ содержит наибольшую eT— и pc-степень. Таковыми являются eT— и pc-степени множества

$$\{\langle x, y \rangle | y \in \Phi_x[A]\}, \text{ где } A \in \mathbf{a}.$$

Предложение 1. а) $\mathbf{a}$ — *тотальная е-степень* $\Longleftrightarrow \exists A (A \in \mathbf{a} \& \bar{A} \leqslant_e A)$.

в) *Пусть* $\mathbf{a}$ — *тотальная е-степень*, $A \in \mathbf{a}$ *и* $\bar{A} \leqslant_e A$. *Тогда* $\forall B (B \in \mathbf{a} \Longleftrightarrow A \leqslant_e B \& B$ *рекурсивно перечислимо относительно* A).

Доказательство очевидно.

Предложение 2. *Любая тотальная е-степень содержит наименьшую* eT*-степень.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}$ — тотальная e-степень. Тогда существует множество $A \in \mathbf{a}$ такое, что $\bar{A} \leqslant_e A$. Нетрудно проверить, что $d_e(A)$ и будет искомой eT-степенью.

Предложение 3. *Любая тотальная е-степень содержит бесконечную антицепь* eT*-степеней**.

Доказательство проводится с помощью небольшого изменения в доказательстве теоремы Мучника—Фридберга (см., например, [1]) и предложения 1.

Предложение 4. *Множество всех* eT*-степеней, содержащихся в произвольной тотальной е-степени, является плотным.*

Это утверждение доказывается с помощью небольшого изменения в доказательстве теоремы Сакса о плотности множества рекурсивно перечислимых T-степеней (см., например, [3]) и предложения 1.

Теорема 1. *Существует квазиминимальная е-степень, содержащая наименьшую с-степень.*

Доказательство. Мы построим множество A, удовлетворяющее следующим условиям:

---

* Определение понятия „антицепь" имеется в [2] на стр. 6.

1. $d_e(A)$ — квазиминимальная e-степень,

2. $\forall B\,(B \equiv_e A \supset A \leqslant_c B)$.

Построение множества A будет производиться по шагам. Параллельно мы будем строить вспомогательное множество B такое, что $B \subseteq \overline{A}$. Для любого шага s множества A_s и B_s, полученные на этом шаге, должны быть рекурсивными и удовлетворять условиям

$$A_{s-1} \subseteq A_s \text{ и } B_{s-1} \subseteq B_s.$$

Шаг 0. $A_0 = B_0 = \varnothing$. Переходим к шагу 1.

Шаг $3n+1$. Пусть $n = \langle k, s \rangle$. Проверяем, выполняется ли условие:

$$\exists m \exists l\,(m \overline{\in} A_{3n}\ \&\ D_l \cap B_{3n} = \varnothing\ \&\ m \in \Phi_k \Phi_s [D_l]\ \&\ m \overline{\in} D_l). \qquad (1)$$

Пусть m_0 и l_0 — наименьшие числа, удовлетворяющие этому условию. Тогда $A_{3n+1} = A_{3n} \cup D_{l_0}$, $B_{3n+1} = B_{3n} \cup \{m_0\}$ и переходим к следующему шагу.

Если таких чисел не существует, т. е.

$$\forall m \forall l\,(m \overline{\in} A_{3n}\ \&\ D_l \cap B_{3n} = \varnothing\ \&\ m \in \Phi_k \Phi_s [D_l] \supset m \in D_l), \qquad (2)$$

то проверяем, выполняется ли условие:

$$\exists p\, \forall^\infty t\, (D_p \cap A_{3n} = \varnothing\ \&\ (t \overline{\in} A_{3n} \supset \forall u\, (t \in \Phi_k \Phi_s [D_u] \supset$$
$$\supset D_u \cap (D_p \cup B_{3n}) \neq \varnothing))). \qquad (3)$$

Пусть p_0 — наименьшее число, удовлетворяющее этому условию. Тогда $A_{3n+1} = A_{3n}$, $B_{3n+1} = B_{3n} \cup D_{p_0}$ и переходим к следующему шагу.

Если такого числа не существует, т. е.

$$\forall p\, \exists^\infty t\, (D_p \cap A_{3n} = \varnothing \supset (t \overline{\in} A_{3n}\ \&\ \exists u\, (t \in \Phi_k \Phi_s [D_u]\ \&$$
$$\&\ D_u \cap (D_p \cup B_{3n}) = \varnothing))), \qquad (4)$$

то выбираем рекурсивно перечислимую последовательность $\{\langle z_l, u_l \rangle\}$ со следующими свойствами:

1. $z_l \in \Phi_k \Phi_s [D_{u_l}]$,
2. $z_l \overline{\in} A_{3n}$,
3. $D_{u_l} \cap B_{3n} = \varnothing$,
4. $z_l \in D_{u_l}$,
5. $\max D_{u_l} < \min D_{u_{l+1}}$.

Существование такой последовательности следует из (2) и (4). В этом случае положим $A_{3n+1} = A_{3n} \cup (\bigcup_l D_{u_l} - \{z_0, z_1, \cdots\})$,

$$B_{3n+1} = N - A_{3n} \cup (\bigcup_l D_{u_l}).$$

Так как множества $\{z_0, z_1, \cdots\}$, $\bigcup_i D_{u_i}$, A_{3n} и B_{3n} рекурсивны, то и множества A_{3n+1} и B_{3n+1} будут рекурсивными. Переходим к шагу $3n+2$.

Шаг $3n+2$. Пусть m — наименьшее число, не принадлежащее $A_{3n+1} \cup B_{3n+1}$.

Если $m \bar{\in} W_n$, то $A_{3n+2} = A_{3n+1} \cup \{m\}$, $B_{3n+2} = B_{3n+1}$ и переходим к шагу $3n+3$.

Если $m \in W_n$, то $A_{3n+2} = A_{3n+1}$. $B_{3n+2} = B_{3n+1} \cup \{m\}$ и переходим к шагу $3n+3$.

Шаг $3n+3$. Проверяем, выполняется ли условие:

$$\exists l\,(D_l \cap B_{3n+2} = \varnothing \;\&\; \Phi_n[D_l] \text{— неоднозначно}). \qquad (5)$$

Пусть l_0 — наименьшее число, удовлетворяющее этому условию.

Тогда $A_{3n+3} = A_{3n+2} \cup D_{l_0}$, $B_{3n+3} = B_{3n+2}$ и переходим к следующему шагу.

Если такого числа не существует, то $A_{3n+3} = A_{3n+2}$, $B_{3n+3} = B_{3n+2}$ и переходим к шагу $3n+4$.

Пусть $A = \bigcup_i A_i$. Покажем, что

а) A не рекурсивно перечислимо. Действительно, для каждого n на шаге $3n+2$ выполняется условие: $m \in W_n \iff m \bar{\in} A_{3n+2}$, где m — наименьшее число, не принадлежащее $A_{3n+1} \cup B_{3n+1}$.

в) $d_e(A)$ — квазиминимальная степень. Так как множество A не является рекурсивно перечислимым, то нам нужно только показать, что для любого n

$\Phi_n[A]$ — всюду определенное, однозначное $\supset \Phi_n[A]$ — рекурсивно перечислимо. (6)

Рассмотрим шаг $3n+3$. Если выполняется условие (5), то множество $\Phi_n[A_{3n+3}]$, а, следовательно, и множество $\Phi_n[A]$ окажется неоднозначным. Таким образом, условие (6) выполняется.

Пусть на шаге $3n+3$ условие (5) не выполняется и существует всюду определенная функция f такая, что $\Phi_n[A] = \tau f$. Покажем, что в этом случае $\Phi_n[A]$ — рекурсивно перечислимо. Заметим, что $\Phi_n[\overline{B}_{3n+2}]$ — однозначное множество. В самом деле, допустим противное, т. е. для некоторых $x, y_1, y_2\,(y_1 \neq y_2)$ $\langle x, y_1\rangle \in \Phi_n[\overline{B}_{3n+2}]$ и $\langle x, y_2\rangle \in \Phi_n[\overline{B}_{3n+2}]$. Тогда в силу непрерывности Φ_n, существуют такие конечные множества $D_k \subseteq \overline{B}_{3n+2}$ и $D_m \subseteq \overline{B}_{3n+2}$, что $\langle x, y_1\rangle \in \Phi_n[D_k]$ и $\langle x, y_2\rangle \in \Phi_n[D_m]$. Но тогда, в силу монотонности Φ_n, $\Phi_n[D_k \cup D_m]$ — неоднозначное множество, причем $(D_k \cup D_m) \cap B_{3n+2} = \varnothing$, что невозможно, так как условие (5) не выполняется. Итак, $\Phi_n[\overline{B}_{3n+2}]$ — однозначное множество. Так как $B_{3n+2} \subseteq \overline{A}$, то $A \subseteq \overline{B}_{3n+2}$ и, следовательно, $\tau f = \Phi_n[A] \subseteq \Phi_n[\overline{B}_{3n+2}]$. Но, очевидно, график всюду определенной функции f не имеет однозначных надмножеств, отличных от τf, поэтому $\Phi_n[\overline{B}_{3n+2}] = \tau f = \Phi_n[A]$. Однако B_{3n+2} — рекурсивное множество, поэтому $\overline{B}_{3n+2}$ также рекурсивно и, следовательно, $\Phi_n[A]$ — рекурсивно перечислимо. Таким образом, и в этом случае условие (6) выполняется

c) $\forall C\,(C \equiv_e A \supset A \leqslant_c C)$. Пусть $C \equiv_e A$, т. е.

$$\exists s\, \exists k\, (C = \Phi_s[A]\,\&\, A = \Phi_k \Phi_s[A]).$$

В этом случае на шаге $3n+1$ ($n = \langle k, s \rangle$) выполняются условия (2) и (4).

Действительно, если выполняется условие (1), то $A \neq \Phi_k \Phi_s[A]$. Допустим выполняется условие (3). Тогда $\Phi_k\Phi_s[A] - A_{3n} =_* \varnothing$ ($A =_* B$ означает, что симметрическая разность множеств A и B конечна). Так как $\Phi_k\Phi_s[A] = A$ и $A_{3n} \subseteq A$, то $A = (A - A_{3n}) \cup A_{3n} =_* A_{3n}$. Множество A_{3n} — рекурсивно и, следовательно, A также будет рекурсивным, что противоречит a).

Пусть функция f определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \text{каноническому номеру } \varnothing, \text{ если } x \in A_{3n+1} \\ \text{каноническому номеру } \{a\}, \text{ если } x \in B_{3n+1} \\ \nu t\,(z_i \in \Phi_k[D_t]\,\&\, D_t \subseteq \Phi_s[D_{u_i}]), \text{ если } x = z_i \\ \text{для некоторого } i. \end{cases}$$

Здесь a — некоторое число, не принадлежащее $\Phi_s[A]$. Такое число существует, так как A не рекурсивно перечислимо и $A = \Phi_k\Phi_s[A]$.

Символ ν определяется в [4], § 65.

Очевидно, что функция f общерекурсивна. Покажем, что $A \leqslant_c \Phi_s[A]$ с помощью f. Если $x \in A_{3n+1} \cup B_{3n+1}$, то это очевидно. Пусть $x = z_i$ для некоторого i. Тогда

$$z_i \in A \supset (D_{u_i} \subseteq A) \supset (\Phi_s[D_{u_i}] \subseteq \Phi_s[A]) \supset (D_{f(z_i)} \subseteq \Phi_s[A])$$

и

$$(D_{f(z_i)} \subseteq \Phi_s[A]) \supset (\Phi_k[D_{f(z_i)}] \subseteq \Phi_k\Phi_s[A]) \supset (\Phi_k[D_{f(z_i)}] \subseteq A) \supset z_i \in A.$$

Следовательно, $d_c(A)$ и будет наименьшей c-степенью e-степени $d_e(A)$.

Следствие 1. Существует квазиминимальная e-степень, содержащая наименьшую eT-степень.

Следствие 2. Существует квазиминимальная e-степень, содержащая наименьшую pc-степень.

Теорема 2. *Существует квазиминимальная e-степень, не содержащая наименьшей eT-степени.*

Доказательство. Мы построим множества A и B, удовлетворяющие следующим условиям:

1. A и B не рекурсивно перечислимы,
2. $A \equiv_e B$,
3. $\forall C\,(C \leqslant_T A\,\&\, C \leqslant_T B \supset C$ рекурсивно).

Покажем, что $d_e(A)$ удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, пусть c — тотальная e-степень и $c \leqslant_e d_e(A)$. Следовательно, существует множество $C \in$ c такое, что $\overline{C} \leqslant_e C$ и $C \leqslant_e A$. Тогда $C \leqslant_T A$ и

$C \leqslant_T B$. Из условия 3 вытекает, что C рекурсивно и, следовательно, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Таким образом, $d_e(A)$—квазиминимальная e-степень.

Допустим, что существует такое множество C, что $C \in d_e(A)$ и $d_{eT}(C)$ — eT-степень, наименьшая в $d_e(A)$. Тогда $C \leqslant_T A$ и $C \leqslant_T B$ и, следовательно, C рекурсивно, что противоречит условиям 1 и 2.

Прежде, чем перейти к построению множеств A и B, определим некоторые вспомогательные множества и функции. Пусть φ, ψ, α и β—некоторые функции. Определим функцию $h_{\varphi\psi}(x, y)$ следующим образом:

$$h_{\varphi\psi}(x, 0) = x,$$

$$h_{\varphi\psi}(x, 1) = \langle x, \mu t(\psi(\langle x, t\rangle) \neq 0)\rangle,$$

$$h_{\varphi\psi}(x, 2n+1) = \langle h_{\varphi\psi}(x, 2n), \mu t(\varphi(\langle h_{\varphi\psi}(x, 2n), t\rangle) \neq 0)\rangle,$$

$$h_{\varphi\psi}(x, 2n+2) = \langle h_{\varphi\psi}(x, 2n+1), \mu t(\varphi(\langle h_{\varphi\psi}(x, 2n+1), t\rangle) \neq 0)\rangle.$$

Обозначим через $\{G(x, y)\}$ последовательность следующих множеств:

$$G(x, 0) = \{x\},$$

$$G(x, n+1) = \{\langle y, z\rangle \mid y \in G(x, n) \,\&\, z \in N\}.$$

Тогда

$$F(\varphi, \psi, \alpha, \beta) = \{\langle h_{\varphi'\psi'}(x, 2n), 1\rangle \mid \alpha(x) = 1 \,\&\, n \in N\} \cup$$

$$\cup \{\langle h_{\psi'\varphi'}(x, 2n+1), 1\rangle \mid \beta(x) = 1 \,\&\, n \in N\} \cup \Big(\bigcup_{\substack{\alpha(x)=0\\ n\in N}} G(x, 2n) \times \{0\}\Big) \cup$$

$$\cup \Big(\bigcup_{\substack{\beta(x)=0\\ n\in N}} G(x, 2n+1) \times \{0\}\Big) \cup \bigcup_{n\in N} \{\langle \pi_1^{2n+1}(x), 1\rangle \mid \alpha(x) = 1\} \cup$$

$$\cup \bigcup_{n\in N} \{\langle \pi_1^{2n}(x), 1\rangle \mid \beta(x) = 1\},$$

где $\pi_1^n(\langle x_1, \cdots, x_n\rangle) = x_1$, $\varphi' = \varphi \cup \alpha$ и $\psi' = \psi \cup \beta$.

Заметим, что если графики φ, ψ, α и β рекурсивны, то множество $F(\varphi, \psi, \alpha, \beta)$ также рекурсивно.

Пару функций α и β назовем *совместной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\forall x \Big(\alpha(x) = 0 \supset \bigcup\limits_{n\in N} G(x, 2n) \cap \{y \mid \alpha(y) = 1\} = \varnothing \,\&$
$\& \bigcup\limits_{n\in N} G(x, 2n+1) \cap \{y \mid \beta(y) = 1\} = \varnothing\Big)$,
2. $\forall x \Big(\beta(x) = 0 \supset \bigcup\limits_{n\in N} G(x, 2n) \cap \{y \mid \beta(y) = 1\} = \varnothing \,\&$
$\& \bigcup\limits_{n\in N} G(x, 2n+1) \cap \{y \mid \alpha(y) = 1\} = \varnothing\Big)$.

Пара конечных функций α и β, принимающих значения 0 и 1, называется *конечным приращением* пары функций φ и ψ, если $\tau\varphi \cup \tau\alpha$ и $\tau\psi \cup \tau\beta$—однозначные множества. Заметим, что если и $\tau\varphi$ и $\tau\psi$ рекурсивны, то и множество пар канонических номеров всех совместных конечных приращений φ и ψ рекурсивно.

Вместо множеств A и B мы построим всюду определенные функции f и g такие, что $A = \{x \mid f(x) = 1\}$ и $B = \{x \mid g(x) = 1\}$.

Построение будет производиться по шагам. Для каждого s необходимо, чтобы построенные на шаге s функции f_s и g_s имели рекурсивный график, были совместными и удовлетворяли условиям: $\tau f_{s-1} \subseteq \tau f_s$ и $\tau g_{s-1} \subseteq \tau g_s$.

Шаг 0. $f_0 = g_0 = \varnothing$. Переходим к шагу 1.

Шаг $2s+1$. Пусть $s = \langle x, y \rangle$. Проверяем, существует ли совместное конечное приращение α, β функций f_{2s} и g_{2s} такое, что для некоторого z $\varphi_x^{[f_{2s} \cup \alpha]}(z)$ и $\varphi_y^{[g_{2s} \cup \beta]}(z)$ были бы определены и не совпадали. Если такие продолжения существуют, то пусть α_0 и β_0 — одно из них. Тогда берем

$$f_{2s+1} = f_{2s} \cup F(f_{2s}, g_{2s}, \alpha_0, \beta_0) \quad g_{2s+1} = g_{2s} \cup F(g_{2s}, f_{2s}, \beta_0, \alpha_0)$$

и переходим к шагу $2s+2$.

Если таких α и β не существует, то $f_{2s+1} = f_{2s}$, $g_{2s+1} = g_{2s}$ и переходим к шагу $2s+2$.

Шаг $2s+2$. Пусть u — наименьшее число такое, что $f_{2s+1}(u)$ не определена. Рассмотрим два случая:

1. $u \in W_s$. Тогда $\tilde{f}_{2s+2} = f_{2s+1} \cup F(f_{2s+1}, g_{2s+1}, \{\langle u, 0 \rangle\}, \varnothing)$ и $\tilde{g}_{2s+2} = g_{2s+1} \cup F(g_{2s+1}, f_{2s+1}, \varnothing, \{\langle u, 0 \rangle\})$. Обозначим через β функцию с графиком $\{\langle x, 1 \rangle | x \leqslant s \;\&\; \tilde{g}_{2s+2}(x) \neq 0\}$. Тогда

$$f_{2s+2} = \tilde{f}_{2s+2} \cup F(\tilde{f}_{2s+2}, \tilde{f}_{2s+2}, \varnothing, \beta) \text{ и } g_{2s+2} = \tilde{g}_{2s+2} \cup F(\tilde{g}_{2s+2}, \tilde{f}_{2s+2}, \beta, \varnothing).$$

Переходим к следующему шагу.

2. $u \notin W_s$. Тогда $\tau\beta = \{\langle x, 1 \rangle | x \leqslant s \;\&\; g_{2s+1}(x) \neq 0\}$,

$$f_{2s+2} = f_{2s+1} \cup F[f_{2s+1}, g_{2s+1}, \{\langle u, 1 \rangle\}, \beta) \quad \text{и} \quad g_{2s+2} = g_{2s+1} \cup$$
$$\cup F(g_{2s+1}, f_{2s+1}, \beta, \{\langle u, 1 \rangle\}).$$

Переходим к следующему шагу.

Нетрудно убедиться, что A не рекурсивно перечислимо, $A \leqslant_e B$ и $B \leqslant_e A$ с помощью множества $\{\langle x, d(x, y) \rangle | x, y \in N\}$, где $d(x, y)$ — канонический номер множества $\{\langle x, y \rangle\}$.

Покажем, что $\forall C (C \leqslant_T A \;\&\; C \leqslant_T B \supset C$ рекурсивно).

Пусть c — характеристическая функция некоторого множества C, $C \leqslant_T A$ и $C \leqslant_T B$. Тогда существуют такие числа x и y, что $c = \varphi_x^f$ и $c = \varphi_y^g$. Пусть $s = \langle x, y \rangle$. Тогда на шаге $2s+1$ выполняется условие:

$\forall\alpha \forall\beta \forall z$ (α и β — совместное конечное приращение для

$$f_{2s} \text{ и } g_{2s} \;\&!\; \varphi_x^{[f_{2s} \cup \alpha]}(z) \;\&!\; \varphi_y^{[g_{2s} \cup \beta]}(z) \supset \varphi_x^{[f_{2s} \cup \alpha]}(z) = \varphi_y^{[g_{2s} \cup \beta]}(z)).$$

Пользуясь этим условием и рекурсивностью графиков f_{2s} и g_{2s}, мы можем рекурсивно перечислить τc. Следовательно, C — рекурсивно. Теперь перейдем к рассмотрению структур произвольных e-степеней относительно pe-сводимости. Мы уже показали (следствие 2), что существует квазиминимальная e-степень, содержащая наименьшую pe-степень. Теперь мы докажем теорему, аналогичную теореме 2.

Теорема 3. *Существует квазиминимальная е-степень, не содержащая наименьшей рс-степени.*

Доказательство. Так же, как и в теореме 2, мы построим два множества A и B такие, что

1. A и B не рекурсивно перечислимы,
2. $A \equiv_e B$,
3. $d_e(A)$— квазиминимальная e-степень,
4. $\forall C\ (C \leqslant_{pc} A\ \&\ C \leqslant_{pc} B \supset C$ рекурсивно перечислимо).

Вместо множеств A и B мы построим их характеристические функции f и g, пользуясь при этом функциями и множествами, введенными в теореме 2.

Шаг 0. $f_0 = g_0 = \varnothing$. Переходим к шагу 1.

Шаг $3s+1$. Пусть $s = \langle i, j \rangle$. Проверяем, выполняется ли условие:

$$\exists k \exists n\ (D_n \cap \{x \mid f_{3s}(x) = 0\} = \varnothing\ \&\ k \in \Psi_i[\{x \mid f_{3s}(x) = 1\} \cup D_n]\ \&$$
$$\&\ k \overline{\in} \Psi_j[\{x \mid g_{3s}(x) = 1\}]\ \&\ \forall m\ (k \overline{\in} \Psi_j\ [D_m])).$$

Допустим, что оно выполняется и k_0 и n_0 — наименьшие числа, удовлетворяющие этому условию. Тогда $\tau\alpha = \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in D_{n_0}\}$ и $\tau\beta = \varnothing$. Допустим, что это условие не выполняется. Тогда проверяем условие:

$$\exists k \exists n \exists m \exists t\ (D_n \cap \{x \mid f_{3s}(x) = 0\} = \varnothing\ \&\ k \in \Psi_i[\{x \mid f_{3s}(x) = 1\} \cup D_n]\ \&$$
$$\&\ k \overline{\in} \Psi_j[\{x \mid g_{3s}(x) = 1\}]\ \&\ k \in \Psi_j\ [D_m]\ \&\ t \in D_m\ \&\ g_{3s}(t) \neq 1\ \&\ \{\langle t, 0 \rangle\}$$
$$\text{и } \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in D_n\} \text{ совместны}).$$

Допустим, что оно выполняется и k_0, n_0, m_0, и t_0 — наименьшие числа, удовлетворяющие этому условию. В этом случае $\tau\alpha = \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in D_{n_0}\}$, $\tau\beta = \{\langle t_0, 0 \rangle\}$. Если и это условие не выполняется, то $\tau\alpha = \tau\beta = \varnothing$. Берем $f_{3s+1} = f_{3s} \cup F(f_{3s}, g_{3s}, \alpha, \beta)$, $g_{3s+1} = g_{s3} \cup F(g_{3s}, f_{3s}, \beta, \alpha)$ и переходим к шагу $3s+2$:

Шаг $3s+2$. Проверяем, выполняется ли условие:

$$\exists n\ (D_n \cap \{x \mid f_{3s+1}(x) = 0\} = \varnothing\ \&\ \Phi_s\ [D_n] \text{—неоднозначно}).$$

Пусть n_0 — наименьшее число, удовлетворяющее этому условию. Тогда

$$\tau\alpha = \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in D_{n_0}\},\ f_{3s+2} = f_{3s+1} \cup F\ (f_{3s+1}, g_{3s+1}, \alpha, \varnothing),$$
$$g_{3s+2} = g_{3s+1} \cup F\ (g_{3s+1}, f_{3s+1}, \varnothing, \alpha).$$

Переходим к шагу $3s+3$. Если такого числа не существует, то берем $f_{3s+2} = f_{3s+1}$, $g_{3s+2} = g_{3s+1}$ и переходим к шагу $3s+3$.

Шаг $3s+3$. Пусть u—наименьшее число такое, что $f_{3s+2}(u)$ не определена. Рассмотрим два случая:

1. $u \in W_s$. Тогда $\tilde{f}_{3s+3} = f_{3s+2} \cup F(f_{3s+2}, g_{3s+2}, \{<u, 0>\}, \varnothing)$ и $\tilde{g}_{3s+3} = g_{3s+2} \cup F(g_{3s+2}, f_{3s+2}, \varnothing, \{<u, 0>\})$.

Обозначим через β функцию с графиком $\{<x, 1> \mid x \leqslant s \& \tilde{g}_{3s+3}(x) \neq 0\}$. Тогда

$$f_{3s+3} = \tilde{f}_{3s+3} \cup F(\tilde{f}_{3s+3}, g_{3s+3}, \varnothing, \beta) \text{ и } g_{3s+3} = \tilde{g}_{3s+3} \cup$$
$$\cup F(\tilde{g}_{3s+3}, \tilde{f}_{3s+3}, \beta, \varnothing).$$

Переходим к шагу $3s+4$.

2. $u \notin W_s$. Тогда $\beta = \{<x, 1> \mid x \leqslant s \& g_{3s+2}(x) \neq 0\}$,

$$f_{3s+3} = f_{3s+2} \cup F(f_{3s+2}, g_{3s+2}, \{<u, 1>\}, \beta) \text{ и } g_{3s+3} = g_{3s+2} \cup$$
$$\cup F(g_{3s+2}, f_{3s+2}, \beta, \{<u, 1>\}).$$

Переходим к шагу $3s+4$.

Пусть $f = \bigcup_s f_s$, $g = \bigcup_s g_s$, $A = \{x \mid f(x) = 1\}$ и $B = \{x \mid g(x) = 1\}$.

Нетрудно убедиться, что A не рекурсивно перечислимо и $A \equiv_e B$. Доказательство квазиминимальности $d_e(A)$ проводится также, как и в теореме 1.

Покажем, что $\forall C\,(C \leqslant_{pc} A \& C \leqslant_{pc} B \supset C$ рекурсивно перечислимо). Допустим $C = \Psi_i[A] = \Psi_j[B]$ и $s = <i, j>$. Тогда на шаге $3s+1$ условие (1) не выполняется, иначе не было бы $\Psi_i[A] = \Psi_j[B]$. При этом $\forall k\,(k \in \Psi_i[A] \supset \exists n\,(k \in \Psi_i[\{x \mid f_{3s}(x) = 1\} \cup D_n] \& D_n \cap \{x \mid f_{3s}(x) = 0\} = \varnothing))$, а отсюда следует, что $\forall k\,(k \in \Psi_i[A] \supset k \in \Psi_j[\{x \mid g_{3s+1}(x) = 1\}]$, т. е. $\Psi_i[A] \subseteq \Psi_j[\{x \mid g_{3s+1}(x) = 1\}]$. С другой стороны, $\Psi_j[\{x \mid g_{3s+1}(x) = 1\}] \subseteq \Psi_j[B] = \Psi_i[A]$.

Таким образом, $\Psi_i[A] = \Psi_j[\{x \mid g_{3s+1}(x) = 1\}]$ и, так как $\{x \mid g_{3s+1}(x) = 1\}$ рекурсивно, то $\Psi_i[A] = C$ рекурсивно перечислимо. Учитывая, что A и B не являются рекурсивно перечислимыми, заключаем, что $d_e(A)$ не может содержать наименьшей pc-степени.

Пусть $\mathbf{a}$ — некоторая e-степень. Введем следующее обозначение $B \leqslant_T \mathbf{a} \Longleftrightarrow \forall A\,(A \in \mathbf{a} \supset B \leqslant_T \mathbf{a})$.

Тогда из предложения 2 следует, что если $\mathbf{a}$—тотальная e-степень и множество $A \in \mathbf{a}$ таково, что $\overline{A} \leqslant_e A$, то

$$\forall B\,(B \leqslant_T \mathbf{a} \Longleftrightarrow B \leqslant_T A).$$

Теорема 4. *Для произвольного множества C существуют множества A и B, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. $C \nleqslant_e A$ *и* $C \nleqslant_e B$,
2. $\forall R\,(R \leqslant_{pc} A \& R \leqslant_{pc} B \supset R$ *рекурсивно перечислимо*),
3. $\varnothing'' \leqslant_T C \supset A$ *и* B *рекурсивно перечислимы относительно* C.

Доказательство.

Шаг 0. $f_0 = g_0 = \{<<x, y>, 0> \mid x \notin C \& y \in N\}$. Переходим к шагу 1.

Шаг $2s+1$. Пусть $s=\langle i, j\rangle$. Проверям, выполняется ли условие:

$$\exists k\, \exists n\, (D_n \cap \{x \mid f_{2s}(x)=0\} = \varnothing \,\&\, k \in \Psi_i\, [\{x \mid f_{2s}(x)=1\} \cup D_n]] \,\&$$
$$\& \, k \notin \Psi_j[\{x \mid g_{2s}(x)=1\}]). \qquad (1)$$

Пусть k_0 и n_0 — наименьшие числа, удовлетворяющие этому условию, а m такое число, что $k_0 \in \Psi_j\, [D_m]$. Тогда берем

$$f_{2s+1} = f_{2s} \cup \{\langle x, 1\rangle \mid x \in D_{n_0}\},\ g_{2s+1} = g_{2s} \cup \{\langle \mu t\, (t \in D_m \,\&\, g_{2s}(t) \neq 1), 0\rangle\}$$

и переходим к шагу $2s+2$.

Если такого m не существует, то берем $f_{2s+1} = f_{2s} \cup \{\langle x, 1\rangle \mid x \in D_{n_0}\}$, $g_{2s+1} = g_{2s}$ и переходим к шагу $2s+2$.

Если условие (1) не выполняется, то берем $f_{2s+1} = f_{2s}$, $g_{2s+1} = g_{2s}$ и переходим к шагу $2s+2$.

Шаг $2s+2$. Рассмотрим два случая:

1. $s \in C$. Пусть x и y — наименьшие числа такие, что $f_{2s+1}(\langle s, x\rangle) \neq 0$ и $g_{2s+1}(\langle s, y\rangle) \neq 0$. Тогда берем

$$f_{2s+2} = f_{2s+1} \cup \{\langle\langle s, x\rangle, 1\rangle\} \cup \{\langle\langle s, z\rangle, 0\rangle \mid z \neq x \,\&\, f_{2s+1}(\langle t, z\rangle) \neq 1\},\ g_{2s+2} = g_{2s+1} \cup \{\langle\langle s, y\rangle, 1\rangle\} \cup \{\langle\langle s, z\rangle, 0\rangle \mid z \neq y \,\&\, g_{2s+1}(\langle s, z\rangle) \neq 1\}$$

и переходим к шагу $2s+3$.

2. $s \notin C$. Тогда $f_{2s+2} = f_{2s+1}$ и $g_{2s+2} = g_{2s+1}$. Переходим к шагу $2s+3$.

Пусть $f = \bigcup_s f_s$, $g = \bigcup_s g_s$, $A = \{x \mid f(x) = 1$ и $B = \{x \mid g(x) = 1\}$

Нетрудно убедиться, что все условия теоремы выполняются.

Следствие 3. Если $\mathbf{a}$ — тотальная e-степень такая, что $\varnothing'' \leqslant_T \mathbf{a}$, то $\mathbf{a}$ не содержит наименьшей pc-степени.

Доказательство. Так как $\mathbf{a}$ — тотальная e-степень, то существует такое множество $C \in \mathbf{a}$, что $\bar{C} \leqslant_e C$ и, следовательно, $\varnothing'' \leqslant_T C$. Применив теорему 4, мы получим множества A и B, рекурсивно перечислимые относительно C и удовлетворяющие условиям 1 и 2. Отсюда следует, что A и B принадлежат $\mathbf{a}$, и $\mathbf{a}$ не содержит наименьшей pc-степени.

Теорема 5. *Пусть множество A таково, что $\bar{A} \leqslant_e A$ и $\varnothing' \leqslant_T A$. Тогда существует множество B, обладающее следующими свойствами:*

1. $A <_{pc} B$,
2. $B \not\leqslant_{pc} A$,
3. $B \leqslant_T A$.

Доказательство. Пусть $B = \{2i \mid 2i \notin \Psi_i[A]\} \cup \{2i+1 \mid i \in A\}$. Нетрудно убедиться, что все условия теоремы удовлетворяются.

Следствие 4. Если а—тотальная e-степень такая, что $\varnothing' \leqslant_T A$, то а содержит бесконечную цепь pc-степеней, упорядоченную по типу натуральных чисел.

Доказательство следует из теоремы 5 и предложения 1.

Теорема 6. *Если* а — *тотальная е-степень такая, что* $\varnothing' \leqslant_T$ а, *то* а *содержит бесконечную антицепь рс-степеней.*

Доказательство. Легко убедиться, что если множество B таково, что $\varnothing' \leqslant_T B$, то $\forall A \ (A \leqslant_{pc} B \supset A \leqslant_{eT} B)$. Пользуясь этим условием из предложения 3 получаем требуемый результат.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступила 25.XI.1978

Մ. Յու. ԽՈՋԱՅԱՆՑ. e-աստիճանների կառուցվածքի մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում հետազոտվում է e-աստիճանների կառուցվածքը տարբեր տիպերի հանգեցումների նկատմամբ։

M. J. KHODJAIANTS. *On structure of e-degrees* (summary)

In the article the structure of e-degrees with respect to some types of reducibility is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Х. Роджерс.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., «Мир», 1972.
2. *Е. А. Поляков, М. Г. Розинас.* Теория алгоритмов, Иваново, 1976.
3. *R. I. Soare.* The infinite injury priority method, J. Symb. Log., 41, 2, 1976, 513—529.
4. *С. К. Клини.* Введение в метаматематику, М., ИИЛ, 1957.
5. *Ю. Т. Медведев.* Степени трудности массовых проблем, ДАН СССР, 104, 1955, 501—504.
6. *Д. Г. Скордев.* О частичной конъюнктивной сводимости, II Всесоюзная конференция по мат. логике, Тезисы, М., 1972, 43—44.
7. *L. P. Sasso.* A survey of partial degrees, J. Symb. Log., 40, 2, 1975, 130—140.
8. *J. Case.* Enumeration reducibility and partial degrees, Ann. Math. Log., 2, 4, 1971, 419—439.
9. *S. C. Kleene, E. L. Post.* The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability, Ann. Math., ser. 2, 59, 1954, 379—407.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 3, 1980 Математика

Г. В. ВИРАБЯН

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ГОЛОМОРФНОЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

В работах [1, 2] нами был рассмотрен один класс самосопряженных квадратичных операторных пучков при наличии чисто непрерывного спектра.

В настоящей работе изучаются спектральные разложения голоморфной оператор-функции и полиномиального операторного пучка на изолированной части непрерывного спектра, а также устанавливаются формулы построения системы собственных функционалов через резольвенты соответствующих операторов.

§ 1. Спектральное разложение голоморфной оператор-функции

Пусть H—сепарабельное комплексное гильбертово пространство и R—алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в H.

Пусть G—некоторая односвязная область комплексной плоскости, симметричная относительно вещественной оси. В области G рассмотрим голоморфную оператор-функцию со значениями из R, относительно которой предположим, что она является самосопряженной, т. е. $[L(\lambda)]^* = L(\lambda)$, $\lambda \in G$.

Спектром $L(\lambda)$ называется множество $\sigma(L)$ таких $\lambda_0 \in G$, для которых $L(\lambda_0)$ необратим.

Определение. Точка $\lambda_0 \in \sigma(L)$ называется точкой непрерывного спектра, если область значений оператора $L(\lambda_0)$ всюду плотна в H, а обратный оператор $L^{-1}(\lambda_0)$ неограничен.

Относительно самосопряженной оператор-функции $L(\lambda)$ сделаем следующие предположения:

1. Спектр $L(\lambda)$ непрерывен и совпадает с некоторым отрезком $[a, b] \subset G$ вещественной оси.

2. $L(a) \ll 0$, $L(b) \gg 0$, т. е. существует такое число $\rho > 0$, что $(L(a)f, f) \leqslant -\rho(f, f)$, $(L(b)f, f) \geqslant \rho(f, f)$ для всех $f \in H$.

3. Уравнение $(L(\lambda)f, f) = 0$ для любого отличного от нуля элемента $f \in H$ имеет ровно один, и притом простой, корень в G.

Здесь $(\cdot, \cdot)$—означает скалярное произведение гильбертова пространства H.

При сделанных выше предположениях 2 и 3 согласно теореме А. И. Вирозуба и В. И. Мацаева [3] существует подобный самосопряженному оператор $Z \in R$ так, что оператор функция $L(\lambda)$ допускает представление

$$L(\lambda) = L_{-}(\lambda) \cdot (Z - \lambda I), \quad (\lambda \in G), \tag{1}$$

где $L_{-}(\lambda)$ голоморфна и обратима в G, а спектр $\sigma(Z) \subset [a, b]$. Из представления (1) сразу вытекает, что если при некотором $c \in [a, b]$ оператор $L(c)$ вполне непрерывен, то собственные векторы оператор-функции $L(\lambda)$, отвечающие собственным значениям из отрезка $[a, b]$, образуют безусловный базис в H.

Лемма 1. *При предположениях* 1—3 *оператор* Z *имеет непрерывный спектр.*

Доказательство. Из представления (1) имеем

$$\left.\begin{aligned} (Z - \lambda I) &= L_{+}^{-1}(\lambda) \cdot L(\lambda), \\ (Z - \lambda I)^{-1} &= L^{-1}(\lambda) \cdot L_{+}(\lambda) \end{aligned}\right\} \lambda \in G, \tag{2}$$

откуда видно, что если $\lambda \in \sigma(Z)$, то область значений оператора $Z - \lambda I$ всюду плотна в H, а оператор $(Z - \lambda I)^{-1}$ неограниченный. Это означает, что точка λ является точкой непрерывного спектра оператора Z. Лемма доказана.

Обозначим через Y самосопряженный оператор, подобный оператору Z, так что

$$\begin{aligned} &Z = T^{-1} Y T; \quad Y = T Z T^{-1}; \\ &Z^{*} = T^{*} Y T^{*-1}; \quad Y^{*} = T^{*-1} Z^{*} T^{*}, \end{aligned} \tag{3}$$

где T — обратимый оператор из R.

Отсюда имеем

$$\begin{gathered} (Z - \lambda I) = T^{-1} (Y - \lambda I)\, T, \ (Y - \lambda I) = T (Z - \lambda I)\, T^{-1}, \\ (Z^{*} - \lambda I) = T^{*} (Y - \bar{\lambda} I)\, T^{*-1}, \ (Y^{*} - \lambda I) = T^{*-1} (Z^{*} - \bar{\lambda} I)\, T^{*}. \end{gathered} \tag{4}$$

Из этих равенств легко усмотреть, что спектр самосопряженного оператора Y совпадает со спектром оператора Z и также является непрерывным. Согласно общей теореме Р. А. Александряна [4] о спектральном разложении общих самосопряженных операторов, существует всюду плотное в H, инвариантное относительно оператора Y линейное топологическое пространство Ω_Y с более сильной топологией, чем исходная сходимость в H, так что имеет место вложение

$$\Omega_Y \subset H \subset \Omega_Y^{*}. \tag{5}$$

У оператора Y имеется полная система собственных функционалов $\{t_\lambda\}$ из сопряженного пространства Ω_Y^{*} и имеет место следующая формула разложения

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} t_\lambda(\varphi) \cdot \overline{t_\lambda(\psi)}\, d\rho(\lambda), \quad \varphi, \psi \in \Omega_Y, \tag{6}$$

где $\rho(\lambda)$ — спектральная мера оператора Y.

Рассмотрим в H новое линейное многообразие

$$\Omega_Z = T^*\Omega_Y \ (\Omega_Y = T^{*-1}\Omega_Z). \tag{7}$$

Сходимость в Ω_Z вводим следующим образом. Мы скажем, что $\psi_n \xrightarrow{\Omega_Z} 0$ ($\psi_n = T^* \varphi_n \in \Omega_Z$), если $\varphi_n = T^{*-1} \psi_n \xrightarrow{\Omega_Y} 0$ при $n \to \infty$. Ясно, что введенная таким образом топология более сильная, чем сходимость в H и что линейное пространство Ω_Z также всюду плотно расположено в исходном гильбертовом пространстве H. В самом деле, пусть $\psi_n \xrightarrow{\Omega_Z} 0$ ($\psi_n = T^* \varphi_n \in \Omega_Z$, $\varphi_n \in \Omega_Y$) тогда $T^{*-1} \psi_n \xrightarrow{\Omega_Y} 0$ и следовательно $T^{*-1} \psi_n \xrightarrow{H} 0$. Отсюда в силу непрерывности оператора T^* имеем $\psi_n \xrightarrow{H} 0$. Далее, пусть $f = T^* g$ — произвольный элемент из H, где $g \in H$. В силу плотности пространства Ω_Y существует последовательность $\varphi_n \in \Omega_Y$, так что $\varphi_n \xrightarrow{H} g$. Но тогда $\psi_n = T^* \varphi_n \xrightarrow{H} T^* g = f$, $\psi_n \in \Omega_Z$.

Рассмотрим вложение

$$\Omega_Z \subset H \subset \Omega_Z^*, \tag{8}$$

где Ω_Z^* — сопряженное пространство линейных ограниченных функционалов над линейным топологическим пространством Ω_Z.

Построим новую систему функционалов по формуле

$$l_\lambda(\psi) = t_\lambda(T^{*-1}\psi), \ \psi \in \Omega_Z. \tag{9}$$

Функционалы (9) являются линейными непрерывными функционалами над Ω_Z. Действительно, линейность очевидна, а непрерывность следует из того, что если $\psi_n \xrightarrow{\Omega_Z} 0$, то $T^{*-1} \psi_n \xrightarrow{\Omega_Y} 0$ и следовательно в силу непрерывности функционалов t_λ, $l_\lambda(\psi_n) = t_\lambda(T^{*-1}\psi_n) \to 0$.

Пространство Ω_Z инвариантно относительно оператора Z^*. В самом деле, пусть $\psi \in \Omega_Z$, тогда из (3) имеем $Z^* \psi = T^* Y T^{*-1} \psi$, где $T^{*-1} \psi \in \Omega_Y$, а из соотношения $Y\Omega_Y \subset \Omega_Y$ и (7) заключаем $Z^*\psi \in \Omega_Z$. Вышепостроенные линейные функционалы l_λ являются собственными функционалами для оператора Z. Действительно, для любого $\psi \in \Omega_Z$ имеем

$$l_\lambda((Z^* - \lambda I)\psi) = l_\lambda(T^*(Y - \lambda I)\ T^{*-1}\psi) = t_\lambda((Y - \lambda I)\ T^{*-1}\psi) = 0. \tag{10}$$

Здесь мы использовали соотношение (4) и тот факт, что t_λ есть собственный функционал оператора Y.

Рассмотрим новое линейное многообразие $\Omega_{L(\lambda)}$, которое задается по формуле

$$\Omega_{L(\lambda)} = L_+^{*-1}(\lambda)\ \Omega_Z. \tag{11}$$

Мы скажем, что $\varphi_n \xrightarrow{\Omega_{L(\lambda)}} 0$ ($\varphi_n \in \Omega_{L(\lambda)}$), если $\psi_n = L_+^*(\lambda)\ \varphi_n \xrightarrow{\Omega_Z} 0$.

Таким образом, определенная сходимость сильнее чем сходимость гильбертова пространства H. В самом деле, пусть $\varphi_n \xrightarrow{\Omega_{L(\lambda)}} 0$ $(\varphi_n \in \Omega_{L(\lambda)})$, тогда $L_+^{\bullet} \varphi_n \xrightarrow{H} 0$ и следовательно в силу обратимости оператор-функции $L_+^{\bullet}(\lambda)$ имеем $\varphi_n \xrightarrow{H} 0$. $\Omega_{L(\lambda)}$ плотно в H. Пусть $f \in H$, тогда существует последовательность $\psi_n \in \Omega_Z$, так что $\psi_n \xrightarrow{H} L_+^{\bullet}(\lambda) f$ и поэтому

$$L_+^{\bullet -1}(\lambda)\,\psi_n \xrightarrow{H} f \quad (L_+^{\bullet -1}(\lambda)\,\psi_n \in \Omega_{L(\lambda)}).$$

Покажем, что оператор-функция $L(\lambda)$ отображает линейное пространство $\Omega_{L(\lambda)}$ в линейное пространство Ω_Z. Пусть ω — произвольный элемент из пространства $\Omega_{L(\lambda)}$. Тогда в силу (11) $\omega = L_+^{\bullet -1}(\lambda)\,\psi$, где $\psi \in \Omega_Z$. Поскольку $L(\lambda) = (Z^* - \lambda I)\,L_+^{\bullet}(\lambda)$, то имеем

$$L(\lambda)\,\omega = L(\lambda) L_+^{\bullet -1}(\lambda)\,\psi = (Z^* - \lambda_I)\,\psi \in \Omega_Z. \tag{12}$$

Лемма 2. *Собственные функционалы l_λ оператора Z являются собственными функционалами для оператор-функции $L(\lambda)$.*

Доказательство этой леммы сразу следует из соотношения (12) и из следующего равенства:

$$l_\lambda(L(\lambda)\,\omega) = l_\lambda((Z^* - \lambda I)\,\psi) = 0, \quad \omega \in \Omega_{L(\lambda)},\ \psi \in \Omega_Z. \tag{13}$$

Перейдем теперь к установлению формулы разложения для оператор-функции $L(\lambda)$.

Пусть $\psi_1, \psi_2 \in \Omega_Z$, тогда

$$\psi_1 = T^* \varphi_1, \quad \varphi_1 = T^{\bullet -1}\,\psi_1 \in \Omega_Y, \tag{14}$$

$$\psi_2 = T^* \varphi_2, \quad \varphi_2 = T^{\bullet -1}\,\psi_2 \in \Omega_Y.$$

Согласно формуле разложения (6) для оператора Y имеем

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (T^{\bullet -1}\psi_1,\ T^{\bullet -1}\psi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t_\lambda(T^{\bullet -1}\psi_1)\cdot \overline{t_\lambda(T^{\bullet -1}\psi_2}\, d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} l_\lambda(\psi_1)\, l_\lambda(\psi_2)\, d\rho(\lambda). \tag{15}$$

Вводим в гильбертовом пространстве H новое скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g\rangle (T^{-1}\, T^{\bullet -1} f,\ g),\ f;\ g \in H. \tag{16}$$

Тогда формула разложения для оператора Z принимает вид

$$\langle \psi_1, \psi_2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} l_\lambda(\psi_1)\cdot \overline{l_\lambda(\psi_2)}\, d\rho(\lambda),\quad \psi_1, \psi_2 \in \Omega_Z. \tag{17}$$

Поскольку собственные функционалы l_λ оператора Z одновременно являются и собственными функционалами оператор-функции $L(\lambda)$, то полученную формулу (17) можно считать и формулой разложения для голоморфной оператор-функции $L(\lambda)$. Таким образом, нами установлена следующая

Теорема (о разложении). *Если голоморфная самосопряженная оператор-функция $L(\lambda)$ удовлетворяет вышеприведенным условиям 1.—3., то у нее имеется система собственных функционалов $\{l_\lambda\}$, соответствующая части непрерывного спектра $L(\lambda)$ и имеет место формула разложения*

$$<\psi_1, \psi_2> = \int_{-\infty}^{+\infty} \{l_\lambda(\psi_1) \cdot \overline{l_\lambda(\psi_2)}\, d\rho(\lambda), \quad \psi_1, \psi_2 \in \Omega_Z. \tag{18}$$

Замечание 1. В качестве оператора подобия T, фигурирующего в вышеприведенных построениях, можно взять следующий оператор [3]:

$$T = S_0^{-1/2}, S_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^{-1}(\lambda)\, d\lambda, \tag{19}$$

где $\Gamma \subset G$ — произвольный контур, охватывающий спектр $\sigma(Z)$ оператора Z. При наших предположениях оператор S_0 равномерно положительный. Обратный оператор S_0^{-1} имеет вид [3]

$$S_0^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (Z^* - \lambda I)^{-1} L(\lambda)(Z - \lambda I)^{-1}\, d\lambda. \tag{20}$$

Замечание 2. Оператор Z, фигурирующий в представлении (1), удовлетворяет операторному уравнению [3]

$$L(Z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L(\lambda) \cdot (Z - \lambda I)^{-1}\, d\lambda = 0. \tag{21}$$

§ 2. Построение собственных функционалов голоморфной оператор-функции

Цель настоящего параграфа—получить формулу для построения собственных функционалов голоморфной оператор-функции $L(\lambda)$, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Из представления оператор-функции $L(\lambda)$ (1) для резольвенты оператора Z имеем

$$R_\lambda(Z) = (Z - \lambda I)^{-1} = L^{-1}(\lambda)\, L_+(\lambda), \quad \lambda \in G \diagdown [a, b]. \tag{22}$$

Резольвента самосопряженного оператора Y в силу отношения (4) имеет вид

$$R_\lambda(Y) = (Y - \lambda I)^{-1} = T(Z - \lambda I)^{-1} T^{-1} = TR_\lambda(Z) \cdot T^{-1}, \quad \lambda \in G \diagdown [a, b]. \tag{23}$$

Собственные функционалы t_λ самосопряженного оператора Y получаются по формуле Р. А. Александряна [5]

$$t_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \to +0} \frac{((R_{\lambda+i\tau}(Y) - R_{\lambda-i\tau}(Y))\, g, \varphi)}{((R_{\lambda+i\tau}(Y) - R_{\lambda-i\tau}(Y))\, g, g)}, \quad \varphi \in \Omega_Y, \tag{24}$$

g—порождающий элемент оператора Y в H, $\lambda \in \sigma(Z)$.

Предел существует почти всюду по спектральной мере $\rho(\lambda)$ оператора Y.

Пусть теперь $\psi \in \Omega_Z$, тогда $\varphi = T^{*-1}\psi \in \Omega_Y$ и в силу (23), (24) для собственных функционалов (9) оператора Z имеем

$$l_\lambda(\psi) = t_\lambda(T^{*-1}\psi) = \lim_{\tau\to+0} \frac{(T(R_{\lambda+i\tau}(Z) - R_{\lambda-i\tau}(Z))\,T^{-1}g,\ T^{*-1}\psi)}{(T\ (R_{\lambda+i\tau}(Z) - R_{\lambda-i\tau}(Z))\,T^{-1}g,\ g)} =$$

$$= \lim_{\tau\to+0} \frac{((R_{\lambda+i\tau}(Z) - R_{\lambda-i\tau}(Z))\,g_0,\ \psi)}{((R_{\lambda+i\tau}(Z) - R_{\lambda-i\tau}(Z))\,g_0,\ g_1)}\ \psi \in \Omega_Z, \tag{25}$$

где $g_0 = T^{-1}g$, $g_1 = T^{*}g$.

Подставляя выражение (22) для резольвенты оператора Z в (25), мы получаем следующую формулу для построения собственных функционалов голоморфной оператор-функции $L(\lambda)$

$$l_\lambda(\psi) = \lim_{\tau\to+0} \times$$

$$\times \frac{((L^{-1}(\lambda+i\tau)\,L_+(\lambda+i\tau) - L^{-1}(\lambda-i\tau)\,L_+(\lambda-i\tau))\,g_0,\ \psi)}{(L^{-1}(\lambda+i\tau)\,L_+(\lambda+i\tau) - L^{-1}(\lambda-i\tau)\,L_+(\lambda-i\tau))\,g_0,\ g_1)},\ \psi\in\Omega_Z. \tag{26}$$

§ 3. Спектральное разложение полиномиального операторного пучка

Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$\mathrm{L}(\lambda) = \lambda^n A_n + \lambda^{n-1}A_{n-1} + \cdots + \lambda A_1 + A_0, \tag{27}$$

где A_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ — линейные ограниченные операторы из R, причем $A_n = I$ — единичный оператор. Полиномиальный пучок $\mathrm{L}(\lambda)$ есть частный случай голоморфной оператор-функции и если он удовлетворяет условиям 1—3 первого параграфа, то для него выполняются вышеприведенные построения и более того, оказывается, что в этом случае голоморфную оператор-функцию $L_+(\lambda)$, которая фигурирует в представлении (1), можно написать в явном виде через оператор Z, а именно

$$L_+(\lambda) = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{j} \lambda^{j-m} A_{n-m+1} Z^{n-j}. \tag{28}$$

Однако специфический вид полиномиального пучка позволяет более детально изучить спектральное разложение по собственным функционалам. Полиномиальный пучок $L(\lambda)$, при его линеаризации, порождает матричный оператор

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} -A_{n-1} & -A_{n-2} & \cdots & -A_1 & -A_0 \\ I & O & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & I & O \end{pmatrix}, \tag{29}$$

который действует в ортогональной сумме n копий исходного гильбертова пространства H

$$\hat{H} = \underbrace{H \oplus \cdots \oplus H}_{n}. \tag{30}$$

Скалярное произведение в $\hat{H}$ определяется через скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$ — пространства H по формуле

$$< \hat{u}, \hat{v} > = (u_1, v_1) + \cdots + (u_n, v_n);$$
$$\hat{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \hat{H}. \tag{31}$$

Между спектральными свойствами полиномиального пучка $L(\lambda)$ у матричного оператора N имеется тесная связь. В частности, существование полной системы корневых векторов оператора N в $\hat{H}$ эквивалентно n-кратной полноте системы собственных и присоединенных элементов полиномиального пучка в гильбертовом пространстве H.

Мы скажем, что полиномиальный операторный пучок $L(\lambda)$ имеет чисто непрерывный спектр, если спектр матричного оператора N в гильбертовом пространстве $\hat{H}$ является чисто непрерывным.

Относительно пучка $L(\lambda)$ сделаем следующие предположения:

Условие 1. Линейные ограниченные операторы A_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ являются самосопряженными операторами в H.

Условие 2. Существуют вещественные числа $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_n$ такие, что $(-1)^k L(\gamma_k)$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ — равномерный положительный оператор.

Условие 3. Пучок $L(\lambda)$ имеет чисто непрерывный спектр.

При сделанных предположениях 1—2 оператор N оказывается подобным самосопряженному оператору $\tilde{N}$. Это означает, что существует линейный ограниченный обратимый оператор S и самосопряженный в $\hat{H}$ оператор $\tilde{N}$, так что

$$N = S^{-1} \tilde{N} S, \quad \tilde{N} = SNS^{-1}. \tag{32}$$

Повторяя те же построения, что уже было сделано в § 1, мы установим следующую теорему.

Теорема 2. *При выполнении условий 1—3 существует инвариантное относительно матричного оператора N, состоящего из всюду плотного множества векторов $\hat{H}$, линейное топологическое пространство $\hat{\Omega}_N$, сходимость в котором влечет сходимость в $\hat{H}$, такое что в сопряженном пространстве $\hat{\Omega}^*_N$ у матричного опе-*

ратора N *имеется полная система собственных функционалов* $\{l_\lambda\}$ *и имеет место формула разложения*

$$[\hat{\varphi}, \hat{\psi}] = \int_{-\infty}^{+\infty} l_\lambda(\hat{\varphi}) \cdot \overline{l_\lambda(\hat{\psi})}\, d\rho(\lambda), \quad \hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \hat{\Omega}_N, \tag{33}$$

где $[\cdot\ ,\ \cdot]$ означает новое скалярное произведение, заданное в форме

$$[\hat{\varphi}, \hat{\psi}] = \langle S^{*-1} \hat{\varphi}, S^{*-1} \hat{\psi} \rangle, \quad \hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \hat{\Omega}_N. \tag{34}$$

Перейдем теперь к построению спектрального разложения полиномиального пучка $L(\lambda)$. Обозначим через Ω_k $(k=1,\cdots, n)$ множество k-ых компонент всевозможных векторов из линейного пространства $\hat{\Omega}_N$. Очевидно, что Ω_k $(k=1,\cdots, n)$ является линейным многообразием в гильбертовом пространстве H.

Положим

$$\hat{\Omega}_k = \left\{ \hat{\varphi}_k : \hat{\varphi}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varphi_k \in \Omega_k \right\} \quad (k=1,\cdots, n). \tag{35}$$

Относительно линейного пространства $\hat{\Omega}_N$ предположим, что оно представляется как ортогональная сумма подпространств $\hat{\Omega}_k$ $(k=1,\cdots$ $\cdots, n)$

$$\hat{\Omega}_N = \hat{\Omega}_1 \oplus \cdots \oplus \hat{\Omega}_n. \text{ (Условие 4).} \tag{36}$$

В пространстве Ω_1 определим сходимость следующим образом. Мы скажем что

$$\varphi_1^{(m)} \to 0 \text{ в } \Omega_1\ (\varphi_1^{(m)} \in \Omega), \text{ если } \hat{\varphi}_k^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi_k \\ \vdots \end{pmatrix} \to \hat{0}$$

в $\hat{\Omega}_N$ $(k=1,\cdots, n)$ при $n \to \infty$. В векторе $\hat{\varphi}_k^{(m)}$ элемент $\varphi_1^{(m)}$ стоит на k-ой строке. Пространство Ω_1 с такой сходимостью обозначим через Ω_L. Сходимость в Ω_L влечет сходимость в H и поэтому имеет место оснащение

$$\Omega_L \subset H \subset \Omega_L^*, \tag{37}$$

где Ω_L^* — сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов над Ω_L.

Сопряженный к N оператор N^* в гильбертовом пространстве $\hat{H}$ имеет вид

$$\mathbf{N}^*=\begin{pmatrix} -A_{n-1} & I & O & \cdots & O & O \\ -A_{n-2} & O & I & \cdots & O & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_1 & O & O & \cdots & O & I \\ -A_0 & O & O & \cdots & O & O \end{pmatrix}. \tag{38}$$

В самом деле, имеет место равенство

$$\langle \mathbf{N}\hat{\varphi}, \hat{\psi}\rangle=(-A_{n-1}\varphi_1-A_{n-2}\varphi_2-\cdots-A_1\varphi_{n-1}-A_0\varphi_n, \psi_1)+$$
$$+(\varphi_1, \psi_2)+\cdots+(\varphi_{n-1}, \psi_n)=(\varphi_1, -A_{n-1}\psi_1+\psi_2)+$$
$$+(\varphi_2, -A_{n-2}\psi_1+\psi_3)+\cdots+(\varphi_{n-1}, -A_1\psi_1+\psi_n)+(\varphi_n, -A_0\psi_1)=$$
$$=\langle\hat{\varphi}, \mathbf{N}^*\hat{\psi}\rangle), \tag{39}$$

для любых $\hat{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix}$ и $\hat{\psi}=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}$ из $\hat{H}$.

Между линейными пространствами $\Omega_k\ (k=1,\cdots, n)$ имеют место следующие включения:

$$\Omega_{\mathrm{L}}=\Omega_1\supseteq\Omega_2\supseteq\cdots\supseteq\Omega_n. \tag{40}$$

Действительно, пусть $\psi\in\Omega_n$, тогда вектор $\hat{\psi}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \psi\end{pmatrix}\in\hat{\Omega}_{\mathrm{N}}$ и следовательно в силу инвариантности $\hat{\Omega}_{\mathrm{N}}$ относительно оператора $\mathbf{N}^*$, вектор $\mathbf{N}^*\hat{\psi}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \psi\\ 0\end{pmatrix}\in\hat{\Omega}_{\mathrm{N}}$, откуда следует $\psi\in\Omega_{n-1}$. Далее, имеем $\mathbf{N}^{*2}\hat{\psi}=$ $=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \psi\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\in\Omega_{\mathrm{N}}$ $\psi\in\Omega_{n-2}$. Продолжая этот процесс, из $N^{*n-1}\hat{\psi}=\begin{pmatrix}\psi\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in\Omega_N$ окончательно получим $\psi\in\Omega_{\mathrm{L}}$.

Покажем, что линейное пространство Ω_{L} инвариантно относительно полиномиального операторного пучка $\mathrm{L}(\lambda)$. Пусть $\varphi\in\Omega_{\mathrm{L}}$, тогда вектор $\hat{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in\hat{\Omega}_{\mathrm{N}}$ и следовательно

$$\mathbf{N}^*\hat{\varphi}=\begin{pmatrix}-A_{n-1}\varphi\\ -A_{n-2}\varphi\\ \vdots\\ -A_1\varphi\\ -A_0\varphi\end{pmatrix}\in\hat{\Omega}_{\mathrm{N}}. \tag{41}$$

Отсюда в силу включений (40) заключаем

$$A_{n-1}\varphi\in\Omega_L,\ A_{n-2}\varphi\in\Omega_2\subset\Omega_L,\ \cdots$$
$$\cdots,\ A_1\varphi\in\Omega_{n-1}\subset\Omega_L,\ A_0\varphi\in\Omega_n\subset\Omega_L. \tag{42}$$

Таким образом, пространство Ω_L инвариантно относительно оператора A_k $(k=0, 1,\cdots, n)$ и следовательно инвариантно относительно операторного пучка $L(\lambda)$.

Определение. Отличный от нулевого линейный непрерывный функционал t_{λ_0} из Ω_L^* называется собственным функционалом, соответствующим собственному значению λ_0 для полиномиального операторного пучка, если для любого элемента $\varphi\in\Omega_L$ выполняется соотношение

$$t_{\lambda_0}(L(\lambda_0)\varphi)=0. \tag{43}$$

Относительно линейного многообразия $\hat{\Omega}_N$, кроме (36), сделаем еще одно предположение, что все Ω_k $(k=1,\cdots, n)$ состоят из одних и тех же элементов, т. е. в соотношениях (40) имеет место знак равенства, а именно предположим, что

$$\Omega_L=\Omega_1=\cdots=\Omega_n \qquad \text{(Условие 5).}$$

Пусть φ—произвольный элемент из Ω_L, тогда вектор $\hat{\varphi}_k=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \varphi\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$,

для которого элемент φ является k-ой компонентой, принадлежит $\hat{\Omega}_N$. Рассмотрим функционалы, заданные по формуле

$$t_\lambda^{(k)}(\varphi)=l_\lambda(\hat{\varphi}_k)\ (k=1,\cdots, n),\ \varphi\in\Omega_L,\ \hat{\varphi}_k\in\hat{\Omega}_N. \tag{44}$$

Здесь l_λ — собственный функционал матричного оператора N.

Таким образом, построенный функционал $t_\lambda^{(k)}$ $(k=1,\cdots, n)$ является линейным непрерывным (в смысле топологии Ω_L) функционалом над Ω_L. В самом деле, для любых элементов φ и ψ из Ω_k $(k=1,\cdots, n)$ и произвольных чисел α и β имеем

$$t_\lambda^{(k)}(\alpha\varphi+\beta\psi)=l_\lambda\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \alpha\varphi+\beta\psi\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\alpha\cdot l_\lambda\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \varphi\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \psi\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\alpha\cdot t_\lambda^{(k)}(\varphi)+\beta t_\lambda^{(k)}(\psi)$$
$$(k=1,\cdots, n). \tag{45}$$

Далее, если

$$\varphi^{(n)}\xrightarrow{\Omega_L}0\ (\varphi^{(n)}\in\Omega_L),\ \text{то}\ \hat{\varphi}_k^{(n)}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \varphi^{(n)}\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\hat{\Omega}_N}\hat{0}\ (\hat{\varphi}_k^{(n)}\in\hat{\Omega}_N)$$

при $n \to \infty$, $(k=1,\cdots,n)$ и в силу непрерывности функционала l_λ заключаем

$$t_\lambda^{(k)}(\varphi^{(n)}) = l_\lambda(\overset{\wedge}{\varphi}{}_k^{(n)}) \to 0,\ (k=1,\cdots,n). \tag{46}$$

Покажем, что для любого элемента $\varphi \in \Omega_L$ функционал $t_\lambda^{(k)}$ $(k=1,\cdots$ $\cdots,n)$ удовлетворяет соотношению

$$t_\lambda^{(k)}(L(\lambda)\varphi) = 0. \tag{47}$$

Пусть φ — произвольный элемент из Ω_L. С помощью элемента φ образуем вектор $\overset{\wedge}{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ следующим образом:

$$\overset{\wedge}{\psi} = \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = -\lambda^{n-k}\varphi; \\ \psi_2 = A_{n-1}\psi_1 + \lambda\psi_1; \\ \psi_3 = A_{n-2}\psi_1 + \lambda\psi_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_k = A_{n-k+1}\psi_1 + \lambda\psi_{k-1}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_n = A_1\psi_1 + \lambda\psi_{n-1}. \end{array} \right. \tag{48}$$

Так как $\overset{\wedge}{\psi} \in \overset{\wedge}{\Omega}_N$, то применяя к нему оператор $N^* - \lambda \widetilde{I}$, где $\widetilde{I}$ — единичный матричный оператор в $\hat{H}$, мы получим элемент $(N^* - \lambda \widehat{I})\overset{\wedge}{\psi}$ того же пространства $\overset{\wedge}{\Omega}_N$. Нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$(N^* - \lambda \widetilde{I})\overset{\wedge}{\psi} = \left\{ \begin{array}{l} -A_{n-1}\psi_1 + \psi_2 - \lambda\psi_1 \\ -A_{n-2}\psi_1 + \psi_3 - \lambda\psi_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -A_{n-k+1}\psi_1 + \psi_{k+1} - \lambda\psi_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -A_1\psi_1 + \psi_n - \lambda\psi_{n-1} \\ -A_0\psi_0 - \lambda\psi_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ L(\lambda)\varphi \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}. \tag{49}$$

Наконец, имеем

$$t_\lambda^{(k)}(L(\lambda)\varphi) = l_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ L(\lambda)\varphi \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = l_\lambda((N^* - \lambda \widetilde{I})\overset{\wedge}{\psi}) = 0, \tag{50}$$

для любого $\varphi \in \Omega_L$ и $k=1,\cdots,n$.

Таким образом, вышепостроенные функционалы (44) являются собственными функционалами полиномиального операторного пучка $L(\lambda)$ из пространства $\mathfrak{L}_L^*$.

Пусть теперь $\{\varphi_j\}_1^n$ и $\{\psi_j\}_1^n$ — произвольные наборы из n элементов линейного пространства $\mathfrak{L}_L$. Тогда векторы

$$\hat{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix} \text{ и } \hat{\psi}=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}$$

принадлежат пространству $\mathfrak{L}_N$. Поэтому на основании формулы разложения (33) выполняются следующие равенства:

$$(\varphi_1, \psi_1)+\cdots+(\varphi_n, \psi_n)=\langle\hat{\varphi}, \hat{\psi}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} l_\lambda(\hat{\varphi})\cdot\overline{l_\lambda(\hat{\psi})}\,d\rho(\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[l_\lambda\begin{pmatrix}\varphi_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+l_\lambda\begin{pmatrix}0\\ \varphi_2\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+l_\lambda\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix}\right]\left[\overline{l_\lambda\begin{pmatrix}\psi_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}+\overline{l_\lambda\begin{pmatrix}0\\ \psi_2\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}+\right.$$

$$\left.+\cdots+\overline{l_\lambda\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}}\right]d\rho(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} l_\lambda(\hat{\varphi}_k)\cdot\sum_{k=1}^{n}\overline{l_\lambda(\hat{\psi}_k)}\,d\rho(\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} t_\lambda^{(k)}(\varphi_k)\cdot\sum_{k=1}^{n}\overline{t_\lambda(\psi_k)}\,d\rho(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_\lambda^{(l)}(\varphi_l)\cdot\overline{t_\lambda^{(j)}(\psi_j)}\,d\rho(\lambda). \tag{51}$$

Таким образом, мы установили справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Если выполняются условия 1—5, то существует инвариантное относительно полиномиального операторного пучка $L(\lambda)$ линейное топологическое пространство $\mathfrak{L}_L$, состоящее из всюду плотного множества элементов из H, сходимость в котором влечет сходимость в H, такое, что у полиномиального пучка имеются системы собственных функционалов $\{t_\lambda^{(k)}\}$ $(k=1,\cdots,n)$ из сопряженного пространства и имеет место следующая формула разложения:*

$$(\varphi_1, \psi_1)+\cdots+(\varphi_n, \psi_n)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} t_\lambda^{(l)}(\varphi_l)\cdot\overline{t_\lambda^{(j)}(\psi_j)}\,d\rho(\lambda), \tag{52}$$

где φ_i и ψ_i $(i=1,\cdots,n)$ — произвольные элементы из линейного пространства $\mathfrak{L}_L$.

Замечание. При выполнении условий 1—4 системой собственных функционалов для полиномиального операторного пучка является $t_\lambda^{(1)}$ $(k=1)$, и в этом случае формула разложения (52) принимает вид

$$(\varphi_1, \psi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} t_\lambda^{(1)}(\varphi_1) \cdot \overline{t_\lambda^{(1)}(\psi_1)}\, d\rho(\lambda) \tag{53}$$

для произвольных элементов φ_1, ψ_1 из Ω_L.

§ 4. Построение собственных функционалов полиномиального операторного пучка

Как уже отмечалось в § 3 между спектральными свойствами полиномиального операторного пучка $\mathbf{L}(\lambda)$ и матричного оператора $\mathbf{N}$ имеется тесная связь. Эту связь хорошо усмотреть из соотношения [6].

$$\mathbf{N} - \lambda \widetilde{I} = B(\lambda)\, \mathrm{diag}\,(\mathbf{L}(\lambda), I, \cdots, I)\, C(\lambda). \tag{54}$$

Здесь

$$\widetilde{I} = \|\delta_{jk}\|_{j,k=1}^{n}, \quad B(\lambda) = \|B_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^{n}, \quad C(\lambda) = \|c_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^{n},$$

$$B_{11}(\lambda) = -I, \quad B_{1k}(\lambda) = -\sum_{j=k-1}^{n} \lambda^{j-k+1} A_j \ (k>1), \quad B_{jk}(\lambda) = I \ (j+k=n+2),$$

$$B_{jk}(\lambda) = 0 \ (j>1,\ j+k \neq n+2), \quad C_{jk} = I \ (j+k=n+1),$$

$$C_{jk}(\lambda) = -\lambda I \ (j+k=n+2), \quad C_{jk}(\lambda) = 0 \ (j+k \neq n+1,\ n+2). \tag{55}$$

Матричные операторы $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$ обратимы при всех комплексных λ. Поэтому вне спектра $\sigma(\mathbf{L})$, который совпадает со спектром $\sigma(\mathbf{N})$ из (54), для резольвенты оператора $\mathbf{N}$ имеем

$$R_\lambda(\mathbf{N}) = (\mathbf{N} - \lambda \widetilde{I})^{-1} = C^{-1}(\lambda)\, \mathrm{diag}\,(\mathbf{L}^{-1}(\lambda), I, \cdots, I)\, B^{-1}(\lambda). \tag{56}$$

Оператор $\mathbf{N}$ подобен самосопряженному оператору

$$\widetilde{\mathbf{N}} = S \cdot \mathbf{N} \cdot S^{-1}. \tag{57}$$

Между резольвентами этих операторов имеется связь

$$R_\lambda(\widetilde{\mathbf{N}}) = S R_\lambda(\mathbf{N})\, S^{-1}. \tag{58}$$

Полная система собственных функционалов оператора $\widetilde{\mathbf{N}}$ получается по формуле Р. А. Александряна [5] ·

$$T_\lambda(\hat{\varphi}) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{((R_{\lambda+i\varepsilon}(\widetilde{\mathbf{N}}) - R_{\lambda-i\varepsilon}(\widetilde{\mathbf{N}}))\, \hat{g}, \hat{\varphi})}{((R_{\lambda+i\varepsilon}(\widetilde{\mathbf{N}}) - R_{\lambda-i\varepsilon}(\widetilde{\mathbf{N}}))\, \hat{g}, \hat{g})}, \quad \hat{\varphi} \in \hat{\Omega}_{\widetilde{\mathbf{N}}}. \tag{59}$$

Отсюда для полной системы собственных функционалсв $\{l_\lambda\}$ матричного оператора $\mathbf{N}$ будем иметь

$$l_\lambda(\hat{\psi}) = T_\lambda (S^{*-1} \hat{\psi}) = \lim_{\tau\to+0} \frac{((R_{\lambda+i\tau}(\mathbf{N}) - R_{\lambda-i\tau}(\mathbf{N}))\, \hat{g}_0, \hat{\psi})}{((R_{\lambda+i\tau}(\mathbf{N}) - R_{\lambda-i\tau}(\mathbf{N}))\, \hat{g}_0, \hat{g}_1)}, \quad \hat{\psi} \in \hat{\Omega}_{\mathbf{N}}, \tag{60}$$

где $\hat{g}_0 = S^{-1}\hat{g}$, $\hat{g}_1 = S^* \hat{g}$.

Из (44), (56) и (60) для построения семейства собственных функционалов полиномиального операторного пучка $\mathbf{L}(\lambda)$ окончательно получаем следующую формулу:

$$l_\lambda^{(k)}(\varphi) = \lim_{\tau\to+0} \frac{([C^{-1}(\lambda+i\tau)\operatorname{diag}(\mathbf{L}^{-1}(\lambda+i\tau), I,\cdots, I)\, B^{-1}(\lambda+i\tau) - C^{-1}(\lambda-i\tau)\operatorname{diag}(\mathbf{L}^{-1}(\lambda-i\tau), I,\cdots, I)\, B^{-1}(\lambda-i\tau)]\, \hat{g}_0, \hat{\varphi}_k)}{([C^{-1}(\lambda+i\tau)\operatorname{diag}(\mathbf{L}^{-1}(\lambda+i\tau), I,\cdots, I)\, B^{-1}(\lambda+i\tau) - C^{-1}(\lambda-i\tau)\operatorname{diag}(\mathbf{L}^{-1}(\lambda-i\tau), I,\cdots, I)\, B^{-1}(\lambda-i\tau)]\, \hat{g}_0, \hat{g}_1)}, \tag{61}$$

где φ—произвольный элемент из $\Omega_{\mathbf{L}}$, вектор $\hat{\varphi}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (φ стоит в k-ой строке) из $\hat{\Omega}_{\mathbf{N}}$, $\hat{g}_0 = S^{-1}\hat{g}$, $\hat{g}_1 = S^* \hat{g}$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 5.XII.1978

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ. Անընդհատ սպեկտրով հոլոմորֆ օպերատոր ֆունկցիայի սպեկտրալ վերլուծության մասին *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում ինքնահամալուծ հոլոմորֆ օպերատոր-ֆունկցիաների և բազմանդամային օպերատորային փնջերի որոշակի դասերի համար հետազոտվում են ըստ սեփական ֆունկցիոնալների սպեկտրալ վերլուծության հարցերը անընդհատ սպեկտրի մեկուսացված մասի համար։

Ստացված են նաև բանաձևեր համապատասխան օպերատորների ռեզոլվենտաների միջոցով սեփական ֆունկցիոնալների լրիվ համակարգը կառուցելու համար։

G. V. VIRABIAN. *On spectral decomposition of a holomorphic operator-function with continuous spectrum* (summary)

The paper studies some questions of spectral decomposition by eigenfunctionals of certain classes of operator functions and operator bundles. Formulae for construction of a complete system of eigenfunctionals in terms of resolvent kernels of the operators are obtainet.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. В. Вирабян.* О квадратичных операторных пучках с непрерывным спектром. Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 6, 1977.
2. *Г. В. Вирабян.* О спектре одного класса самосопряженных квадратичных операторных пучков, ДАН Арм. ССР.

3. *А. И. Вировуб, В. И. Мацаев.* О спектральных свойствах одного класса самосопряженных оператор-функций, Функц. анализ и его прилож., 8, вып. 1, 1974.
4. *Р. А. Александрян.* Об одном способе построения полной системы собственных функционалов самосопряженных операторов с лебеговым спектром, ДАН Арм. ССР, X, № 5, 1965.
5. *Р. А. Александрян.* О спектральном разложении произвольных самосопряженных операторов по собственным функционалам, ДАН СССР, 162, № 1, 1965.
6. *А. С. Маркус, И. В. Мереуца.* О полном наборе корней операторного уравнения, соответствующего полиномиальному операторному пучку, Изв. АН СССР, сер. матем., 37, 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 3, 1980 Математика

Р. А. БАГИЯН

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА С. Н. БЕРНШТЕЙНА И ПОЛИНОМОВ Б. М. ЛЕВИТАНА

Введение

Тонкие асимптотические свойства целых функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \quad (\rho > 0, \ -\infty < \mu < \infty) \tag{1}$$

послужили основой для построения гармонического анализа в комплексной области и теории представлений целых и аналитических функций конечного роста [1].

В совместных с М. М. Джрбашяном статьях автора [2, 3] были получены новые результаты о свойствах и интегральных представлениях функций $E_\rho(z, \mu)$, позволяющие получить новые применения функций типа Миттаг-Леффлера [4].

Настоящая статья посвящена еще одному применению функций (1).

В § 1 статьи, имеющем вспомогательный характер, приводятся некоторые предварительные сведения, необходимые нам для дальнейшего изложения. Здесь приводится также одна лемма, в которой на основании асимптотических свойств функций (1) устанавливается конечность величин некоторых интегралов.

В § 2 прежде всего устанавливается теорема 1, согласно которой любая целая функция $F(z)$ роста (ρ, σ) $(1 < \rho < +\infty, \ 0 < \sigma < \infty)$ во всей комплексной плоскости представляется в следующем виде:

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(zt)\, \Phi_{\rho, \mu}(t)\, dt \quad (-\infty < \mu < +\infty), \tag{2}$$

где $f(zt)$ — целая функция порядка 1 и типа $\sigma^{1/\rho}$, а $\Phi_{\rho, \mu}(t)$ — известная функция, введенная в работах [2, 3].

Затем устанавливается основная теорема 2, с помощью которой при некоторых ограничениях на функцию $F(z)$ роста (ρ, σ), $1 < \rho < 2$ в представлении (2), утверждается ограниченность функций $f(z)$ на всей вещественной оси.

Эти две теоремы позволяют перенести известные факты из теории целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси, на случай целых функций конечного роста (ρ, σ) $(1<$ $<\rho<2)$, ограниченных уже в специальных угловых областях. В качестве непосредственного применения этих теорем приводятся теоремы 3 и 4, которые соответственно обобщают неравенство Бернштейна [5] и теорему Н. И. Ахиезера [6], а также строятся квазиполиномы типа Левитана, ассоциированные с функциями типа (1) и устанавливается их сходимость на всей вещественной оси.

§ 1. Предварительные сведения

1°. Приведем некоторые определения и сведения из монографии М. М. Джрбашяна [1] об интегральном и параметрическом представлении целых функций конечного роста, осуществляемых посредством функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z, \mu)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)} \quad (\rho>0, -\infty<\mu<+\infty), \tag{1.1}$$

которая, как известно, имеет порядок ρ и тип, равный единице. Пусть

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

— целая функция порядка ρ $(0<\rho<\infty)$ и типа σ $(0<\sigma<\infty)$. Тогда, следуя [1], функцию

$$g_{\rho, \mu}(\zeta, F)=\sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right) a_k \zeta^{-1-k} \tag{1.2}$$

будем называть обобщенным преобразованием Бореля или $B_{\rho, \mu}$-преобразованием целой функции $F(z)$.

Будем говорить, что целая функция $F(z)$ имеет рост (ρ, σ), если ее порядок $\leqslant\rho$, причем, если ее порядок равен ρ, то тип не превосходит σ.

Известна (см. [1], теорему 6.3).

Теорема А. *Пусть $F(z)$ — целая функция роста (ρ, σ), где*

$$0<\rho<+\infty \text{ и } 0\leqslant\sigma<+\infty.$$

Тогда справедлива интегральная формула

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L E_\rho(z\zeta, \mu)\, g_{\rho, \mu}(\zeta, F)\, d\zeta \quad (|z|<\infty),$$

где L—произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая, внутри которой лежат все особенности функции $g_{\rho, \mu}(\zeta, F)$.

Для значений параметров ρ и σ, $1\leqslant\rho<2$, $0<\sigma<\infty$ введен класс $C_\sigma^{(\rho)}$ целых функций $f(z)$ роста (ρ, σ), удовлетворяющих условиям

$$\int_0^{\infty} |f(te^{-i\vartheta})|^2 \, dt < +\infty$$

при

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \text{ и } \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Полное описание класса $C_\sigma^{(\rho)}$ дается следующей теоремой (см. [1], частный случай теоремы 6.16 при $p=1$, $\omega=0$).

Теорема Б. *Класс* $C_\sigma^{(\rho)}$ $(1 \leqslant \rho < 2,\ \sigma > 0)$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *допускающих представление вида*

$$f(z) = \int_0^{\sigma} E_\rho(iz\tau^{1/\rho}, \mu)\, \varphi_0(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau + \int_0^{\sigma} E_\rho(-iz\tau^{1/\rho}, \mu)\, \varphi_1(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau,$$

где

$$\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho},\ 1 \leqslant \rho < 2,\ \varphi_k(\tau) \in L^2(0;\sigma)$$

и единственным образом определяющихся из формул

$$\varphi_0(\tau) = \frac{1}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i(-iv)^{1/\rho})\, \frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv} (-iv)^{\mu-1} dv,$$

$$\varphi_1(\tau) = \frac{1}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-i(iv)^{1/\rho})\, \frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv} (iv)^{\mu-1}\, dv$$

почти всюду на $(0, \sigma)$.

2°. В дальнейшем мы будем существенно опираться на некоторые основные результаты работ [2, 3]. С этой целью приведем эти результаты в виде одной теоремы.

Теорема В. а) *Пусть*

$$1 < \rho < +\infty \text{ и } -\infty < \mu < +\infty.$$

Тогда во всей конечной плоскости

$$E_\rho(z, \mu) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{z\tau}\, \Phi_{\rho,\mu}(\tau)\, d\tau & \text{при } 1 < \rho < \infty,\ \dfrac{1}{\rho} \leqslant \mu < \infty \\ \displaystyle\int_0^{\infty} e^{z\tau}\, d\,\alpha_\mu(\tau) & \text{при } \rho = 1,\ 1 \leqslant \mu < +\infty, \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$\Phi_{\rho,\mu}(\tau) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(1-\mu+\dfrac{k+1}{\rho}\right)}{\Gamma(1+k)} \sin\pi\left(\frac{k+1}{\rho}-\mu\right) \tau^k, \tag{1.4}$$

— целая функция порядка $\rho/\rho-1$ *типа* $\sigma=(1-\rho^{-1})\rho^{-\frac{1}{\rho-1}}$, *обладающая свойствами*

$$\Phi_{\rho,\mu}(\tau)\geqslant 0,\ \tau\in[0,+\infty),\ \Phi_{\rho,\mu}(\tau)\in L(0,+\infty),$$

а

$$a_\mu(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1-(1-\tau)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, & 0\leqslant\tau\leqslant 1\\[2mm] \dfrac{1}{\Gamma(\mu)}, & 1<\tau<+\infty.\end{cases}$$

б) *Функция* $\Phi_{\rho,\mu}(\tau)$ *является решением следующей проблемы моментов Стилтьеса:*

$$\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{n}{\rho}\right)}=\int\limits_0^\infty\tau^n\Phi_{\rho,\mu}(\tau)\,d\tau\ \ (n=0,1,2,\cdots). \tag{1.5}$$

в) *При условии* $1<\rho<+\infty$, $\dfrac{1}{\rho}\leqslant\mu<+\infty$ *справедливы неравенства*

$$|E_\rho^{(n)}(-z,\mu)|\leqslant\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{n}{\rho}\right)},\ \operatorname{Re}z\geqslant 0 \tag{1.6}$$

и все они достижимы в точке $z=0$.

3°. Напомним некоторые сведения о характере роста в комплексной области целой функции типа Миттаг-Леффлера.

Для любого $\varepsilon>0$ и β $(0<\beta<\pi)$ обозначим через $\gamma(\varepsilon,\beta)$ бесконечный контур плоскости ζ, пробегаемый в направлении неубывания $\arg\zeta$ и состоящий из следующих составных частей: двух лучей, $\arg\zeta=\pm\beta$, $\varepsilon\leqslant|\zeta|<+\infty$ и дуги окружности $|\arg\zeta|\leqslant\beta$, $|\zeta|=\varepsilon$, соединяющей концы $\varepsilon\exp\{\pm i\beta\}$ этих лучей. Очевидно, что контур $\gamma(\varepsilon,\beta)$ служит общей границей двух взаимнодополнительных областей — $G^{(-)}(\varepsilon,\beta)$ и $G^{(+)}(\varepsilon,\beta)$, лежащих, соответственно, слева и справа от него.

Всюду в дальнейшем для любого $\rho>\dfrac{1}{2}$ мы положим, что параметр β удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{2\rho}<\beta\leqslant\varkappa=\min\left\{\pi,\frac{\pi}{\rho}\right\}.$$

В этом случае справедливы (см. [1], стр. 127) следующие интегральные представления: если $z\in G^{(-)}(\varepsilon,\beta)$, то

$$E_\rho(z,\mu)=\frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\varepsilon,\beta)}\frac{e^{\zeta^\rho}\zeta^{\rho(1-\mu)}d\zeta}{\zeta-z}\,d\zeta,\ \rho>\frac{1}{2};\ \mu>0,$$

если $z \in G^{(+)}(\varepsilon, \beta)$, то

$$E_\rho(z, \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} + \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\varepsilon, \beta)} \frac{e^{\zeta^\rho} \zeta^{\rho(1-\mu)}}{\zeta - z} d\zeta.$$

Из этих формул вытекают следующие оценки:

для $|\arg z| \leqslant \beta$, $|z| \geqslant 0$,

$$|E_\rho'(z, \mu)| \leqslant M_1 (1+|z|)^{2\rho-\rho\mu-1} e^{\operatorname{Re} z^\rho} + \frac{M_2}{(1+|z|)^2}, \tag{1.7}$$

для $\beta \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$, $|z| \geqslant 0$

$$|E_\rho'(z, \mu)| \leqslant \frac{M_2}{(1+|z|)^2}, \tag{1.8}$$

где M_1 и M_2 не зависят от z, а $E_\rho'(z, \mu)$ — производная функции типа Миттаг-Леффлера.

С помощью оценок (1.7) и (1.8) легко устанавливается следующая

Лемма. *Пусть* $1 \leqslant \rho < 2$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ и μ_0 — произвольный параметр. *Если* $\mu_0 > 2 - \frac{1}{2\rho}$, *то*

$$\int\limits_0^{+\infty} |E_\rho'(te^{-i\vartheta}, \mu_0)|^2 dt < +\infty, \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\vartheta| \leqslant \pi. \tag{1.9}$$

Если $\mu_0 > 2 - \frac{1}{\rho} + \mu$, *то*

$$J_\rho^{(\mp)}(\mu_0, \mu) \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |E_\rho'(\mp(-iv)^{1/\rho}, \mu_0)| \cdot |v|^{\mu-1} dv < +\infty. \tag{1.10}$$

Доказательство. Если $\frac{\pi}{2\rho} < |\vartheta| \leqslant \pi$, то из (1.8) следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} |E_\rho'(te^{-i\vartheta}, \mu_0)|^2 dt < M_2^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^4} < +\infty.$$

При $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2\rho}$ в силу (1.7) и выбора параметра μ_0 будем иметь.

$$\int\limits_0^{\infty} |E_\rho'(te^{\pm\pi/2\rho}, \mu_0)|^2 dt < M_1^2 \int\limits_0^{+\infty} (1+t)^{4\rho-2\rho\mu_0-2} dt + C < +\infty,$$

так как $4\rho - 2\rho\mu_0 - 2 < -1$.

Аналогичным образом, из (1.7) получим

$$J_\rho^{(\mp)}(\mu_0, \mu) \equiv \frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\infty}^{+\infty} |E_\rho'(\mp(-iv)^{1/\rho}, \mu_0)| \cdot |\,|v|^{\mu-1}\,dv <$$

$$< \frac{M_1}{2\pi\rho}\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|v|)^{2-\mu_0-\frac{1}{\rho}} |v|^{\mu-1}\,dv + C_1 < +\infty,$$

так как $2-\mu_0-\dfrac{1}{\rho}+\mu<0$.

С другой стороны, поскольку $2-\dfrac{1}{\rho}+\mu>2-\dfrac{1}{2\rho}$ при рассматриваемых значениях параметров ρ и μ, то для одновременного выполнения условий (1.9) и (1.10) достаточно потребовать, чтобы $\mu_0>2-\dfrac{1}{\rho}+\mu$, например, если $\mu_0>2{,}5$, то утверждения (1.9) и (1.10) имеют место одновременно.

4°. В заключение параграфа приведем некоторые хорошо известные сведения [6] об одном классе целых функций. Имеется в виду класс целых функций B_σ экспоненциального типа $\leqslant\sigma$, для которых

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)| < +\infty.$$

Если $f(z)\in B_\sigma$, то она допускает представление

$$f(z)=f(0)+\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izu}\,\Psi(u)\,du,$$

где $\Psi(u)\in L^2(-\sigma, \sigma)$.

Наряду с функцией $f(z)\in B_\sigma$ часто рассматривается ([6], стр. 183) сопряженная функция, которая определяется с помощью формулы

$$\tilde{f}(z)=\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izu}\, i\,\mathrm{sgn}\, u\,\Psi(u)\,du, \tag{1.11}$$

где $\Psi(u)\in L^2(-\sigma, \sigma)$.

Отметим, что сопряженная функция также является целой функцией экспоненциального типа $\leqslant\sigma$.

Относительно класса B_σ С. Бернштейну [5] принадлежит одна замечательная теорема, которая гласит:

Если $f(z)\in B_\sigma$, то

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f'(x)| \leqslant \sigma \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)|. \tag{1.12}$$

Следующая теорема Н. И. Ахиезера ([6], стр. 186) содержит неравенство С. Бернштейна в качестве специального случая.

Теорема Г. *Если $f(z) \in B_\sigma$, то при любом вещественном α и любом $x \in (-\infty, +\infty)$*

$$\text{а) } |\sin\alpha f'(x) - \sigma\cos\alpha f(x)| \leqslant \sigma \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)|, \tag{1.13}$$

$$\text{б) } |\sin\alpha f'(x) + \cos\alpha \tilde{f}'(x)| \leqslant \sigma \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)|. \tag{1.14}$$

В своей заметке [7] Б. М. Левитан показал, что функции класса B_σ являются пределами определенным образом сходящихся к ним тригонометрических периодических полиномов.

Позднее М. Г. Крейн [8] дал существенно иное доказательство теоремы Левитана.

Упомянутые полиномы Левитана строятся следующим образом. Для функции $f(z) \in B_\sigma$ положим

$$S_n(f;\ x) \equiv \sum_{k=-n}^{n} h\, E_h(kh)\, e^{ikhx}, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{1.15}$$

где при $h = \sigma/n$, n — натуральное число

$$E_h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \left(\frac{2\sin\frac{hu}{2}}{hu}\right) f(u)\, du, \tag{1.16}$$

$$E_h(x) = 0, \quad |x| > \sigma + h.$$

Справедлива

Теорема. (М. Г. Крейн [8]). *Если $f(z) \in B_\sigma$, то тригонометрические суммы $S_n(f;\ x)$ $(n \to \infty)$ сходятся к $f(x)$, притом равномерно в каждом конечном интервале. Кроме того*

$$S_n(f;\ x) \leqslant \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)| \quad (-\infty < x < +\infty,\ n = 1, 2, \cdots),$$

и если $f(x)$ всюду неотрицательна, то и суммы $S_n(f,\ x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ обладают этим свойством.

§ 2. Основные результаты

Нижеследующая теорема устанавливает связь между целыми функциями любого конечного роста и целыми функциями экспоненциального типа.

Теорема 1. *Каждая целая функция порядка ρ $(1 < \rho < \infty)$ и нормального типа σ представляется во всей плоскости в виде*

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(zt)\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt, \quad -\infty < \mu < +\infty, \tag{2.1}$$

где $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа $\sigma^{1/\rho}$, а $\Phi_{\rho,\mu}(t)$ определяется из (1.4).

Доказательство. В силу теоремы A имеем

$$F(z)=\int_L E_\rho(z\zeta,\ \mu)\ g_{\rho,\mu}(\zeta,\ F)\ d\zeta\ (|z|<\infty), \tag{2.2}$$

где L — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая, внутри которой лежат все особенности $B_{\rho,\mu}$ —преобразования (1, 2) целой функции $F(z)$.

С другой стороны, из (1.3) теоремы B вытекает следующее интегральное представление, имеющее место на всей комплексной плоскости

$$E_\rho(z\zeta,\ \mu)=\int_0^\infty e^{z\zeta t}\ \Phi_{\rho,\mu}(t)\ dt. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и меняя порядок интегрирования получим

$$F(z)=\int_L\left\{\int_0^\infty e^{z\zeta t}\ \Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt\right\}g_{\rho,\mu}(\zeta,\ F)\ d\zeta=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left\{\int_L e^{z\zeta t}\ g_{\rho,\mu}(\zeta,\ F)\ d\zeta\right\}\Phi_{\rho,\mu}(t)\ dt=\int_0^\infty f(zt)\ \Phi_{\rho,\mu}(t)\ dt,$$

где

$$f(zt)=\int_L e^{z\zeta t}\ g_{\rho,\mu}(\zeta,\ F)\ d\zeta.$$

Для завершения доказательства нам остается вычислить порядок ρ_0 и тип σ_0 функции $f(z)$.

Пусть

$$F(z)=\sum_{k=0}^\infty a_k z^k,\ f(z)=\sum_{k=0}^\infty b_k z^k.$$

Подставив эти выражения в (2.1), почленно проинтегрировав и используя равенства (1.5) теоремы B, получим

$$\sum_{k=0}^\infty a_k z^k=\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty b_k z^k t^k\ \Phi_{\rho,\mu}(t)\ dt=$$

$$=\sum_{k=0}^\infty b_k z^k\int_0^\infty t^k\ \Phi_{\rho,\mu}(t)\ dt=\sum_{k=0}^\infty b_k\ \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\ z^k.$$

Таким образом, между коэффициентами степенных разложений функций $F(z)$ и $f(z)$ мы получили следующую связь:

$$a_k = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} b_k \ (k = 0, 1, 2, \cdots), \ \underset{-\infty<\mu<\infty}{1 < \rho < \infty}. \tag{2.4}$$

Пользуясь известными соотношениями между коэффициентами степенного разложения целой функции $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$ и ее ростом (см. [9], стр. 13)

$$\rho_H = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{k \ln k}{\ln \frac{1}{|h_k|}}, \ \sigma_H = \frac{1}{\rho e} \varlimsup_{k\to\infty} k |h_k|^{\rho/k} \tag{2.5}$$

для функции $f(z)$ соответственно будем иметь

$$\rho_0 = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{k \ln k}{\ln \frac{1}{|b_k|}}, \ \sigma_0 = \frac{1}{\rho_0 e} \varlimsup_{k\to\infty} k |b_k|^{\rho_0/k}. \tag{2.6}$$

Из (2.6) и (2.4) следует

$$\rho_0 = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{k \ln k}{\ln \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(\mu + k/\rho)} + \ln \frac{1}{|a_k|}} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{k \ln k}{\ln \frac{1}{|a_k|}\left[1 + \ln \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(\mu + k/\rho)} \Big/ \ln \frac{1}{|a_k|}\right]},$$

Пользуясь асимптотическими формулами

$$\Gamma(1+k) \sim k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k}, \ k \to \infty$$

и

$$\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right) \sim \left(\mu + \frac{k}{\rho} - 1\right)^{\mu + \frac{k}{\rho} - \frac{1}{2}} e^{-\mu - \frac{k}{\rho} + 1}, \tag{2.7}$$

а также формулой (2.5), простым вычислением получим, что $\rho_0 = 1$ и

$$\sigma_0 = \frac{1}{e} \varlimsup_{k\to\infty} k |b_k|^{1/k} = \frac{1}{e} \varlimsup_{k\to\infty} k \left| \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}{\Gamma(1+k)} \right|^{1/k} |a_k|^{1/k} = \sigma^{1/\rho},$$

ввиду (2.7) и (2.5)

В связи с представлением (2.1) теоремы 1 отметим следующее. Пусть

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(zt)\, \Phi_{\rho, \mu}(t)\, dt, \tag{2.1}$$

где $f(z) \in B_{\sigma^{1/\rho}}$.

В этом случае целая функция $F(z)$ имеет рост (ρ, σ) $(1 < \rho < \infty$, $0 < \sigma < \infty)$ и, разумеется, будет ограниченной на вещественной оси $-\infty < x < +\infty$.

Отсюда непосредственно следует, что все свойства для функций класса B_σ, т. е. теоремы о неравенстве С. Н. Бернштейна—Н. И. Ахиезера и полиномах Б. М. Левитана перенесутся на целые функции роста (ρ, σ) $(\rho > 1,\ 0 < \sigma < \infty)$ и ограниченные на всей оси. Для этого достаточно в теоремах В и Г вместо x записать xt, $0 < t < \infty$, умножить на функцию $\Phi_{\rho, \mu}(t)$ и проинтегрировать по t вдоль промежутка $(0, \infty)$.

Иначе говоря, если мы имеем некоторую дополнительную информацию о функции $f(z)$, то мы будем иметь соответствующую информацию о $F(z)$. Но интересно поставить обратную задачу. Если известна информация о $F(z)$, то что можно сказать о $f(z)$? Еслее конкретно. При каких условиях, наложенных на $F(z)$, функция $f(z)$ из (2.1) будет принадлежать классу B_σ? Мы сейчас займемся решением именно этого вопроса.

2°. Пусть параметры ρ и β подчинены условиям

$$1 \leqslant \rho < 2,\ \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\rho} = 1,$$

а M обозначает следующее множество:

$$M \equiv \left\{\varphi;\ |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\beta}\right\} U \left\{\varphi;\ |\varphi - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2\beta}\right\}.$$

Обозначим через $\Delta(\beta)$ объединение угловых областей

$$\Delta(\beta) \equiv \left\{z;\ |\arg z| < \frac{\pi}{2\beta}\right\} U \left\{z;\ |\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2\beta}\right\}.$$

Впредь всюду будем предполагать, что параметры ρ, $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$ и μ_0 лежат в пределах

$$1 \leqslant \rho < 2,\ \mu_0 > 2 - \frac{1}{\rho} + \mu. \tag{2.8}$$

Определение. Целая функция $F(z)$ принадлежит классу $B_\sigma^{(\rho)}$, если она имеет порядок ρ, конечный тип σ и удовлетворяет условиям

$$\sup_{\theta \in M} |F(re^{-i\theta})| \leqslant C,\ r \in [0, +\infty). \tag{2.9}$$

Ясно, что при $\rho = 1$ это известный класс $B_\sigma^{(1)} \equiv B_\sigma$ целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси. С помощью теоремы 1, а также теоремы, которую мы сейчас докажем, устанавливается связь между этими двумя классами целых функций.

Теорема 2. *Пусть $F(z) \in B_\sigma^{(\rho)}$. Тогда целая функция $f(z)$ экспоненциального типа $\sigma^{1/\rho}$, фигурирующая в представлении* (2.1) *функции $F(z)$, удовлетворяет на всей действительной оси неравенству*

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)| \leqslant CK(\rho), \tag{2.10}$$

где $K(\rho)$ — постоянная, т. е. $f(z) \in B_{\sigma^{1/\rho}}$.

Доказательство. Для значений параметров ρ и μ_0, удовлетворяющих условиям (2.8), введем в рассмотрение следующую вспомогательную функцию:

$$G(z) \overset{\text{def}}{\equiv} F(z)\, E'_\rho(iz, \mu_0), \tag{2.11}$$

где $F(z)$ удовлетворяет условию (2.9), а $E'_\rho(iz, \mu_0)$ — производная функции типа Миттаг-Леффлера, заданной формулой (1.1).

Используя асимптотическую оценку (1.8) для $E'_\rho(z, \mu_0)$, убеждаемся, что в области $\Delta(\beta)$ функция $E'_\rho(iz, \mu_0)$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$. Поскольку параметры ρ, μ и μ_0 удовлетворяют условию леммы, то вместе с (2.9) будем иметь

1°.

$$\int_0^\infty |E'_\rho(te^{-i\vartheta}, \mu_0)|^2\, dt < +\infty, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\vartheta| \leqslant \pi, \tag{2.12}$$

2°. Интегралы

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\pm(-iv)^{1/\rho})\, E'_\rho(\mp(-iv)^{1/\rho};\ \mu_0)\, e^{-i\tau v}(iv)^{\mu-1}\, dv \tag{2.13}$$

$$\tau \in (0, +\infty)$$

абсолютно и равномерно сходятся и не превосходят $CJ_\rho^{(\mp)}(\mu_0, \mu)$ для указанных значений параметров.

Так как $F(z)$ имеет рост (ρ, σ) $(1 < \rho < 2,\ 0 < \sigma < +\infty)$, а $E'_\rho(iz, \mu_0)$ порядок ρ и тип 1, то $G(z)$ имеет порядок ρ и тип $\sigma+1$.

Из условий (2.9) и (2.12) следует, что функция $G(z)$, определенная формулой (2.11), принадлежит классу $C_{\sigma+1}^{(\rho)}$. Следовательно, в силу теоремы Б для нее имеет место представление вида

$$G(z) = F(z)\, E'_\rho(iz, \mu_0) = \int_0^{\sigma+1} E_\rho(iz\tau^{1/\rho}, \mu)\, \varphi_0(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty E_\rho(-iz\tau^{1/\rho}, \mu)\, \varphi_1(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau, \tag{2.14}$$

где

$$\varphi_0(\tau) = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} F(i(-iv)^{1/\rho})\, E'_\rho(-(-iv)^{1/\rho}, \mu_0)\frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv}(iv)^{\mu-1}\, dv,$$

$$\varphi_1(\tau) = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} F(-i(-iv)^{1/\rho})\, E'_\rho((-iv)^{1/\rho}, \mu_0)\, \frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv}\, (iv)^{\mu-1}\, dv.$$

Далее имеем

$$\varphi_0(\tau)=\frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}F(i(-iv)^{1/\rho})\,E'_\rho(-(-iv)^{1/\rho},\mu_0)\,e^{-i\tau v}(iv)^{\mu-1}\,dv$$

и

$$\varphi_1(\tau)=\frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}F(-i(-iv)^{1/\rho})\,E'_\rho((-iv)^{1/\rho},\mu_0)\,e^{-i\tau v}(iv)^{\mu-1}\,dv.$$

Из (2.13) вытекает, что

$$|\varphi_0(\tau)|\leqslant CJ_\rho^{(-)}(\mu_0,\mu)\text{ и }|\varphi_1(\tau)|<CJ_\rho^{(+)}(\mu_0,\mu),\tag{2.15}$$

при $\tau\in(0,\sigma+1)$.

Теперь в силу представления (2.1) мы можем переписать равенство (2.14) в следующей эквивалентной форме:

$$F(z)\,E'_\rho(iz,\mu_0)=\int_0^\infty\{f(zt)\,E'_\rho(iz,\mu_0)\}\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt=$$

$$=\int_0^{\sigma+1}E_\rho(iz\tau^{1/\rho},\mu)\,\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau+\int_0^{\sigma+1}E_\rho(-iz\tau^{1/\rho},\mu)\,\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau.\tag{2.14'}$$

Положив здесь $z\equiv x$ и используя представление (1.3) теоремы В, получим для $-\infty<x<+\infty$

$$\int_0^\infty\{f(xt)\,E'_\rho(ix,\mu_0)\}\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt=\int_0^{\sigma+1}E_\rho(ix\tau^{1/\rho},\mu)\,\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau+$$

$$\int_0^{\sigma+1}E_\rho(-ix\tau^{1/\rho},\mu)\,\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau=\int_0^{\sigma+1}\left\{\int_0^\infty e^{ix\tau^{1/\rho}t}\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt\right\}\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau+$$

$$+\int_0^{\sigma+1}\left\{\int_0^\infty e^{-ix\tau^{1/\rho}t}\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt\right\}\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau.$$

В последнем выражении, поменяв порядок интегрирования и объединив слагаемые, будем иметь

$$\int_0^\infty\{f(xt)\,E'_\rho(ix,\mu_0)\}\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^{\sigma+1}e^{ix\tau^{1/\rho}t}\,\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau+\int_0^{\sigma+1}e^{-ix\tau^{1/\rho}t}\,\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\right\}\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt.$$

Отсюда следует формула

$$f(xt)\, E_\rho'(ix, \mu_0)=\int\limits_0^{\sigma+1} e^{ix\tau^{1/\rho}t}\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau+\int\limits_0^{\sigma+1} e^{-ix\tau^{1/\rho}t}\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau. \tag{2.16}$$

Для сколь угодно малого $\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{1}{\Gamma\left(\mu_0+\dfrac{1}{\rho}\right)}\right)$ мы можем выбрать такое $\gamma>0$, что

$$|E_\rho'(\pm i\gamma, \mu_0)|>\frac{1}{\Gamma\left(\mu_0+\dfrac{1}{\rho}\right)}-\varepsilon. \tag{2.17}$$

Положив в (2.16) $x=\pm\gamma$ и используя последнее неравенство, соответственно будем иметь

$$f(\pm\gamma t)=\frac{1}{E_\rho'(\pm i\gamma, \mu_0)}\left\{\int\limits_0^{\sigma+1} e^{\pm i\gamma\tau^{1/\rho}t}\varphi_0(\tau)\tau^{\mu-1}\,d\tau+\int\limits_0^{\sigma+1} e^{\mp i\gamma\tau^{1/\rho}t}\varphi_1(\tau)\tau^{\mu-1}\,d\tau\right\}. \tag{2.18}$$

Если оценить (2.18) сверху и учесть (2.15) и (2.17), то получим при $-\infty<x<+\infty$

$$|f(x)|<\frac{C}{\left[\Gamma\left(\mu_0+\dfrac{1}{\rho}\right)\right]^{-1}-\varepsilon}\cdot\frac{(\sigma+1)^\mu}{\mu}\left[J_\rho^{(-)}(\mu_0, \mu)+J_\rho^{(+)}(\mu_0, \mu)\right],$$

где $\mu=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\rho}$.

Наконец, обозначив правую часть последнего неравенства через $K(\rho)$, приходим к утверждению (2.10) теоремы.

В заключение отметим, что вопрос о точном определении константы $K(\rho)$ в неравенстве (2.10), представляющий несомненный интерес, остается открытым.

Теорема 2 позволяет обобщить известные теоремы для класса B_σ на классы $B_\sigma^{(\rho)}$ $(1<\rho<2)$, а именно, обобщить неравенство Бернштейна, построить обобщенные полиномы Левитана, ассоциированные с функциями типа Миттаг-Леффлера и т. д. Приступим к решению этих вопросов.

Введем понятие сопряженной функции роста (ρ, σ) по формуле

$$\widetilde{F}(z)=\int\limits_0^{\infty}\widetilde{f}(zt)\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt,$$

где $\widetilde{f}(z)$ — сопряженная функция экспоненциального типа, определяемая по формуле (1.11). Отсюда следует, что

$$\widetilde{F}(z)=\int_0^{+\infty}\left\{\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izut}\, i\operatorname{sgn}u\,\Psi(u)\,du\right\}\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt=$$

$$=\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}E_\rho(izu,\ \mu)\,i\operatorname{sgn}u\,\Psi(u)\,du,\quad \Psi(u)\in L^2(-\sigma,\sigma).$$

Обозначив через

$$m_f=\sup|f(x)|,\quad C=\sup_{\theta\in M}|F(re^{-i\theta})|,\quad r\in(0,+\infty),$$

докажем теорему, которая является обобщением теоремы Г на случай класса целых функций $B_\sigma^{(\rho)}$.

Теорема 3. *Если* $F(z)\in B_\sigma^{(\rho)}$ $(1<\rho<2,\ 0<\sigma<\infty)$, *то при любом вещественном* α *и* $-\infty<x<+\infty$

$$\text{а)}\ |\sin\alpha F'(x)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha F(x)|\leqslant\sigma^{1/\rho}\frac{m_f}{\Gamma(\mu)}\leqslant\sigma^{1/\rho}\frac{CK(\rho)}{\Gamma(\mu)},\tag{2.19}$$

$$\text{б)}\ |\sin\alpha F'(x)+\cos\alpha\widetilde{F}'(x)|\leqslant\sigma^{1/\rho}\frac{m_f}{\Gamma(\mu)}\leqslant\sigma^{1/\rho}\frac{CK(\rho)}{\Gamma(\mu)},\quad \mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\rho}.$$

Доказательство. а) Легко видеть, что

$$\sin\alpha F'(x)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha F(x)=\sin\alpha\int_0^\infty f_x'(xt)\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt-$$

$$-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha\int_0^\infty f(xt)\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt=\int_0^\infty[\sin\alpha f_x'(xt)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha f(xt)]\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt.$$

Отсюда имеем

$$|\sin\alpha F_x'(x)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha F(x)|\leqslant\int_0^\infty|\sin\alpha f_x'(xt)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha f(xt)|\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt.$$

Согласно неравенству (1.13) теоремы 1

$$|\sin\alpha f_x'(xt)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha f(xt)|\leqslant\sigma^{1/\rho}\cdot m_f,$$

откуда следует, что на всей оси $-\infty<x<+\infty$

$$|\sin\alpha F'(x)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha F(\alpha)|\leqslant\sigma^{1/\rho}m_f\int_0^\infty|\Phi_{\rho,\mu}(t)|\,dt\leqslant\sigma^{1/\rho}\frac{m_f}{\Gamma(\mu)}.$$

Утверждение а) теоремы получено, поскольку в силу теоремы 2 $m_f\leqslant CK(\rho)$.

Не останавливаясь на доказательстве пункта (б), поскольку оно осуществляется аналогичным образом, рассмотрим частные случаи этой теоремы.

Положив в (2.19) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ будем иметь

$$|F'(x)| \leqslant \sigma^{1/\rho} \frac{m_f}{\Gamma(\mu)}, \quad m_f = \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)|, \quad \mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}.$$

Далее из представления (2.1) следует, что при любом натуральном k

$$F^{(k)}(x) = \int_0^\infty f^{(k)}(xt)\, t^k \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Но так как

$$\sup |f^{(k)}(xt)| \leqslant \sigma^{k/\rho} \sup |f(xt)| = \sigma^{k/\rho} m_f,$$

то, учитывая равенство (1.5) теоремы А, получим

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F^{(k)}(x)| \leqslant \sigma^{k/\rho} m_f \int_0^\infty t^k \Phi_{\rho,\mu}(t) dt = \sigma^{k/\rho} m_f \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}. \tag{2.20}$$

Теперь покажем, что если некоторое семейство функций $F(z) \in B_\sigma^{(\rho)}$ равномерно ограничено на вещественной оси, то оно равномерно ограничено также в каждой конечной части комплексной плоскости. Это следует из таких рассуждений ([6], стр. 183—184).

Из теоремы (2.20) и разложения в ряд Тейлора функции

$$F(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{F^{(k)}(x)}{k!} (iy)^k,$$

имеем

$$|F(z)| \leqslant m_f \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(\mu + k/\rho)\, k!} \sigma^{k/\rho} |y|^k = m_f E_\rho(\sigma^{1/\rho}|y|, \mu).$$

Отсюда следует также, что

$$|F'(z)| \leqslant \sigma^{1/\rho} \frac{m_f}{\Gamma(\mu)} E_\rho(\sigma^{1/\rho}|y|, \mu).$$

3°. Также без труда мы можем построить обобщенные полиномы Левитана, ассоциированные с функциями типа Миттаг-Леффлера. Если в формуле (1.15) вместо z положить zt, умножить обе ее части на $\Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt$ и проинтегрировать вдоль промежутка $0 < t < \infty$, то, используя опять представление (1.3) теоремы В, получим

$$S_n^{(\rho)}(F;\, z) \equiv \int_0^\infty S_n(f;\, zt)\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh) \int_0^\infty e^{ikhzt} \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)\, E_\rho(ikhz, \mu), \tag{2.21}$$

причем $E_h(kh)$ определяются из формулы (1.16),

Функции $S_n^{(\rho)}(F, z)$ будем называть полиномами типа Левитана, ассоциированными с функциями типа Миттаг-Леффлера.

Из определения (2.21) вытекает ряд свойств полиномов типа Левитана.

1°. Если $f(x)$ — вещественна $(-\infty < x < \infty)$, то и полиномы типа Левитана $S_n^{(\rho)}(F, x)$ вещественны.

2°. Если $f(x) \geqslant 0 \, (-\infty < x < \infty)$, то $S_n^{(\rho)}(F, x) \geqslant 0$, $\mu \geqslant \frac{1}{\rho}$.

3°. Если $f(z) \equiv 1$, то $S_n^{(\rho)}(F; z) \equiv 1/\Gamma(\mu)$.

4°. Если $|f(x)| \leqslant A \, (-\infty < x < \infty)$, где A — не зависящая от x постоянная, то $|S_n^{(\rho)}(F; x)| \leqslant A/\Gamma(\mu)$.

Таким образом, эти свойства являются следствием аналогичных свойств классических полиномов Левитана ([6], стр. 194—195) и равенства (2.21).

Теорема, которую мы сейчас приведем, обобщает теорему Левитана.

Теорема 4. *Если $F(z) \in B_\sigma^{(\rho)}$ $(1 < \rho < 2,\ \sigma > 0)$, то полиномы типа Левитана, ассоциированные с функциями типа Миттаг-Леффлера $S_n^{(\rho)}(F, x)$ при $n \to \infty$ сходятся к $F(x)$, притом равномерно в конечном интервале.*

Доказательство. Составим разность

$$F(x) - S_n^{(\rho)}(F; x) = \int_0^\infty f(xt)\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt - \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)\, E_\rho(ikhx, \mu) =$$

$$= \int_0^\infty f(xt)\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt - \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh) \int_0^\infty e^{ikhxt}\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty [f(xt) - \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)^{ikhxt}]\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty [f(xt) - S_n(f; xt)]\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt.$$

По теореме Левитана в каждой конечной части вещественной оси имеет место оценка

$$|f(xt) - S_n(f;\ xt)| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon).$$

Следовательно

$$|F(x) - S_n^{(\rho)}(F;\ x)| \leqslant \varepsilon/\Gamma(\mu),$$

что и требовалось доказать.

Автор выражает глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задачи и внимание к работе.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 26.IX.1978

Ռ. Ա. ԲԱՂԻՅԱՆ. Ս. Ն. Բեռնշտեյնի անհավասարության և Բ. Մ. Լևիտանի պոլինոմների ընդհանրացումը *(ամփոփում)*

Հիմնվելով Մ. Մ. Ջրբաշյանի մի շարք ընդհանուր արդյունքների վրա ամբողջ ֆունկցիաների տարբեր լայն դասերի ինտեգրալ ներկայացումների վերաբերյալ, այստեղ ապացուցվում է ինտեգրալ ներկայացում ամբողջ ֆունկցիաների $B_\sigma^{(\rho)}$ $(1 < \rho < 2,\ \sigma > 0)$ *դասի համար, որոնք ունեն աճում և բավարարում են*

$$\sup_{z \in G_\rho} |F(z)| \leqslant M_F < +\infty$$

պայմանին որտեղ G_ρ — *հետևյալ անկյունային տիրույթների միավորումն է*

$$|\operatorname{Arg} z| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \text{ և } |\operatorname{Arg} z - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right).$$

Դա թույլ է տալիս ընդհանրացնել Ս. Ն. Բեռնշտեյնի լավ հայտնի անհավասարությունը վերաբերվող $B_\sigma^{(1)}$ *դասին, այսինքն σ-էքսպոնենցիալ տիպի և սահմանափակ իրական առանցքի վրա ամբողջ ֆունկցիայի ածանցյալի գնահատականի մասին։*

R. A. BAGIAN. *Generalized S. N. Bernstein inequalities and B. M. Levitan polinomials* (summary)

Bazing upon a number of general results of M. M. Jrbashian on integral representations of classes of entire functions, integral representations of entire functions meeting the requirment

$$\sup_{z \in G_\rho} |F(z)| \leqslant M_F < +\infty$$

is found, where G_ρ is a colection of angular domains

$$|\operatorname{Arg} z| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \text{and } |\operatorname{Arg} z - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right).$$

This enables to generalize a well known Bernstein inequality referring to the class $B_\sigma^{(1)}$, i. e. to evaluation of the derivative of an exponential type entire function bounded on the real axis.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.
2. *М. М. Джрбашян* и *Р. А. Багиян.* Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг—Леффлера, ДАН СССР, 223, № 6, 1975.
3. *М. М. Джрбашян* и *Р. А. Багиян.* Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг—Леффлера, Изв. АН Арм. ССР, сер. «Математика», 10, № 6, 1975.
4. *Р. А. Багиян.* Квазиполиномы типа Бернштейна—Хаусдорфа, ассоциированные с функциями типа Миттаг—Леффлера и $<\rho, \mu>$-проблема моментов, ДАН Арм. ССР, 61, № 3, 1975.
5. *С. Н. Бернштейн.* Экстремальные свойства полиномов, ОНТИ, 1937, стр. 134. гл. III, § 10.
6. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации, М., 1965, гл. 4.
7. *Б. М. Левитан.* Об одном обобщении неравенства С. Н. Бернштейна и Н. Bohr'a, ДАН СССР, 15, № 4, 1937.
8. *М. Г. Крейн.* О представлении функций интегралами Фурье—Стилтьеса. Ученые записки Куйбышевского пединститута, вып. 7, 1943.
9. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, 1958, гл. I.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 3, 1980 Математика

Д. А. БЕРМАН

К ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

1°. Обозначим через C множество всех непрерывных в сегменте $[-1, 1]$ функций $f(x)$. Через $L_n(f, x)$ обозначим интерполяционный многочлен Лагранжа степени $(n-1)$, построенный для n-ой строчки матрицы чисел $\{x_k^{(n)}\}$

$$-1 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leqslant 1, \; n=1, 2, \cdots. \qquad (m)$$

Теорема Бернштейна—Фабера [1], [2] утверждает, что нет такой матрицы узлов вида (m), при которой для любой $f \in C$ выполняется равномерно соотношение $L_n(f, x) \to f(x)$, $n \to \infty$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Для узлов Чебышева

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{(2n-2k+1)\pi}{2n}, \; k=1, 2, \cdots, n, \; n=1, 2, \cdots, \qquad (1)$$

которые в теории интерполяции функции действительного переменного являются в некотором смысле наилучшими, Г. Грюнвальд [3] и И. Марцинкевич [4] построили такую $f \in C$, что в каждой точке $x \in [-1, 1]$ выполняется равенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n(f, x) = \infty$.

В связи с этими отрицательными результатами представляет значительный интерес теорема Фейера [5], которая формулируется следующим образом. Пусть матрица (m) составлена из чисел (1), и пусть $H_n(f, x)$— многочлен степени $2n-1$, построенный для $f \in C$ и узлов (1) и однозначно определяющийся из условий

$$H_n(f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \; H_n'(f, x_k^{(n)}) = 0, \; k=1, 2, \cdots, n.$$

Тогда для любой $f \in C$ выполняется равномерно в $[-1, 1]$ соотношение

$$H_n(f, x) \to f(x), \; n \to \infty. \qquad (2)$$

Как известно

$$H_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \, V_k^{(n)}(x) \, [l_k^{(n)}(x)]^2, \qquad (3)$$

где

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k^{(n)}) \, \omega_n'(x_k^{(n)})},$$

$$V_k^{(n)}(x) = 1 - \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}(x - x_k^{(n)}),$$

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k^{(n)}).$$

Фейер [6] обнаружил, что линейные функции $\{V_k^{(n)}(x)\}_{k=1}^{n}$, $n=1, 2, \cdots$ играют важную роль в теории интерполяции. Матрицы узлов, для которых $V_k^{(n)}(x) \geqslant 0, -1 \leqslant x \leqslant 1$, $k=1, 2, \cdots, n$, $n=1, 2, \cdots$, он назвал нормальными, а матрицы узлов, для которых существует некоторое $\rho > 0$ такое, что $V_k^{(n)}(x) \geqslant \rho > 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $k=1, 2, \cdots, n$, $n=1, 2, \cdots$, он назвал строго нормальными. Фейер [6] доказал, что при нормальной матрице для любой $f \in C$ $H_n(f, x) \to f(x)$, $n \to \infty$, $-1 < x < 1$. Наряду с полиномами (3) естественно рассматривать полиномы

$$R_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) [l_k^{(n)}(x)]^2,$$

которые по своей структуре проще полиномов (3). Очевидно, что степень $R_n(f, x)$ равна $2n-2$ и $R_n(f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)})$, $k=\overline{1, n}$. Грюнвальд [7] доказал, что при строго нормальной матрице для любой $\in C$ $R_n(f, x) \to f(x)$, $n \to \infty$, $-1 < x < 1$.

Настоящая статья посвящена изучению полиномов $H_n(f, z)$ и $R_n(f, z)$ в комплексной области. Узлами интерполяции служат точки

$$z_k^{(n)} = e^{i\theta_k^{(n)}}, \quad \theta_k^{(n)} = \frac{(2k-1)\pi}{n} \pi, \quad k=1, 2, \cdots, n, \; n=1, 2, \cdots, \tag{4}$$

или точки

$$z_k^{(n)} = e^{i\theta_k^{(n)}}, \; \theta_k^{(n)} = \frac{(2k-1)\pi}{n}, \quad k=1, 2, \cdots, n, \; z=1, \; n=1, 2, \cdots, \tag{5}$$

которые получаются из точек (4) добавлением в качестве узла точки $z=1$. Отрезок $[-1, 1]$ вещественной оси заменяется кругом $|z| \leqslant 1$ Статья примыкает к работе [8].

2°. Пусть $p(z)$—произвольный многочлен и многочлен $H_n(p, z)$ построен при узлах (4) для $p(z)$. Положим, что степень $p(z)$ равна m и $m < n$. В [8] (см. стр. 792, формула (15)) было доказано, что

$$H_n(\zeta^s, z) - z^s = s\,\frac{z^s(1+z^n)}{n}, \quad s=0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$H_n(p, z) = p(z) + \frac{z(1+z^n)}{n} p'(z), \quad m < n. \tag{6}$$

Из (6) вытекают любопытные следствия, которые в [8] не были отмечены.

1. Для любого многочлена $p(z)$ имеет место при достаточно большом n неравенство

$$|H_n(p, z) - p(z)| \leqslant \frac{2|p'(z)|}{n}, \quad |z| \leqslant 1.$$

Отсюда, в частности, следует, равномерно в $|z|\leqslant 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(p, z)=p(z)$. В связи с этим полезно отметить, что существуют такие $f(z)$, аналитические в $|z|<1$ и непрерывные в $|z|\leqslant 1$, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} H_n(f, 1)=\infty$ (см. [9]).

2. При любом натуральном k имеет место равномерно внутри круга $|z|\leqslant 1$ равенство $\lim\limits_{n\to\infty} H_n^{(k)}(p, z)=p^{(k)}(z)$. При $z=1$ процесс $\{H_n'(p, z)\}$ расходится, ибо из (6) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} H_n'(p, 1)=2p'(1)$.

3. Пусть степень m многочлена $p(z)$ не превосходит $(n-1)$, тогда из (6) следует, что $H_n(p, z)$ — многочлен степени $(n+m)$. В случае отрезка $[-1, 1]$ и узлов Чебышева (1) это свойство не имеет места, ибо в этом случае даже при $p(x)=x$

$$H_n(z, x)=x-\frac{T_{n-1}(x)\,T_n(x)}{n},\quad T_n(x)=\cos n\arccos x,$$

то есть, $H_n(z, x)$ — многочлен степени $2n-1$.

3°. Известно [9], что если $f(z)$ регулярна в $|z|<1$ и непрерывна в $|z|\leqslant 1$, то $H_n(f, z)\to f(z)$, $n\to\infty$, $|z|<1$, причем сходимость равномерная внутри круга $|z|\leqslant 1$. Рассмотрим теперь случай дробно-рациональной функции $f(z)$. Пусть $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где некоторые корни многочлена $Q(z)$ находятся внутри круга $|z|\leqslant 1$. Положим

$$Q(z)=a_0\prod_{l=1}^{q}(z-a_l)^{k_l},$$

где корни $\{a_l\}_{l=1}^{s}$ находятся внутри круга $|z|\leqslant 1$, а корни $\{a_l\}_{l=s+1}^{q}$ находятся вне круга $|z|\leqslant 1$. Пусть

$$[Q(z)\,p(\zeta)-P(z)\,Q(\zeta)]:(z-\zeta)=K(z, \zeta). \qquad (7)$$

Ясно, что $K(z, \zeta)$ есть многочлен, как относительно z, так и относительно ζ. Справедлива

Теорема 1. *Для любой дробно-рациональной функции $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ в точках z, удовлетворяющих условиям $|z|<1$, $Q(z)\neq 0$ имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} H_n(f, z)=f(z)-\frac{1}{Q(z)}\sum_{l=1}^{s} r_{a_l}, \qquad (8)$$

где $\{r_{a_l}\}_{l=1}^{s}$ — вычеты функции $\dfrac{K(z, \zeta)}{Q(\zeta)}$ относительно корней $\{a_l\}_{l=1}^{s}$, расположенных внутри круга $|z|\leqslant 1$.

Доказательство. Известно [9], что при узлах (4)

$$H_n(f, z) = \left(\frac{1+z^n}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\left(n - \frac{n-1}{z^k} z\right)\frac{z_k^2}{(z-z_k)^2}. \tag{9}$$

Так как при $f(z) \equiv 1$ $H_n(f, z) \equiv 1$, то из (9) следует, что

$$1 = \left(\frac{1+z^n}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n}\left(n - \frac{n-1}{z_k} z\right)\frac{z_k^2}{(z-z_k)^2}. \tag{10}$$

В силу (9) и (10) имеем, что

$$H_n(f, z) - f(z) = \left(\frac{1+z^n}{n}\right)^2 \frac{z}{Q(z)} \sum_{k=1}^{n} \frac{K(z, z_k)\, z_k}{Q(z_k)(z-z_k)} -$$

$$-\frac{(1+z^n)^2}{nQ(z)} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k K(z, z_k)}{Q(z_k)}. \tag{11}$$

Согласно (4) $\theta_{k+1}^{(n)} - \theta_k^{(n)} = \frac{2\pi}{n}$. Поэтому равенство (11) можно записать в виде

$$H_n(f, z) - f(z) = -\frac{(1+z^n)^2}{2\pi\, Q(z)} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k^{(n)}} K(z, e^{i\theta_k^{(n)}})}{Q(e^{i\theta_k^{(n)}})} (\theta_{k+1}^{(n)} - \theta_k^{(n)}) +$$

$$+\frac{z(1+z^n)^2}{2\pi\, Q(z)\, n} \sum_{k=1}^{n} \frac{K(z, e^{i\theta_k^{(n)}})\, e^{i\theta_k^{(n)}}}{Q(e^{i\theta_k^{(n)}})(z - e^{i\theta_k^{(n)}})} (\theta_{k+1}^{(n)} - \theta_k^{(n)}). \tag{12}$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k^{(n)}} K(z, e^{i\theta_k^{(n)}})}{Q(e^{i\theta_k^{(n)}})} (\theta_{k+1}^{(n)} - \theta_k^{(n)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{K(z, \zeta)}{Q(\zeta)}\, d\zeta, \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{K(z, e^{i\theta_k^{(n)}})\, e^{i\theta_k^{(n)}}}{Q(e^{i\theta_k^{(n)}})(z - e^{i\theta_k^{(n)}})} (\theta_{k+1}^{(n)} - \theta_k^{(n)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{K(z, \zeta)\, d\zeta}{Q(\zeta)(z-\zeta)}. \tag{14}$$

Интеграл (13) равен сумме вычетов функции $\frac{K(z, \zeta)}{Q(\zeta)}$, а интеграл (14) равен сумме вычетов функции $\frac{K(z, \zeta)}{Q(\zeta)(z-\zeta)}$.

Так как упомянутые суммы вычетов конечны и во втором слагаемом из (12) присутствует множитель $\frac{1}{n}$, то из (12), (13) и (14) вытекает (8).

Замечание 1. В равенстве (8) можно r_{a_l} заменить выражением

$$r_{a_l} = \frac{1}{(\lambda_l - 1)!} \frac{d^{\lambda_l - 1}}{d\zeta^{\lambda_l - 1}} \left(\frac{(\zeta - a_l)^{\lambda_l} K(z, \zeta)}{Q(\zeta)}\right).$$

Поэтому, если корни $\{a_i\}_{i=1}^{s}$, расположенные в $|z|<1$, первой кратности, то из (8) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} H_n(f, z)=f(z)-\frac{1}{Q(z)}\sum_{i=1}^{s}\frac{K(z, a_i)}{Q'(a_i)}. \tag{15}$$

Из (7) получаем, что

$$K(z, a_i)=\frac{Q(z)P(a_i)}{z-a_i}. \tag{16}$$

Стало быть, в силу (15) и (16)

$$\lim_{n\to\infty} H_n(f, z)=f(z)-\frac{1}{Q(z)}\sum_{i=1}^{s}p(a_i)\frac{Q(z)}{(z-a_i)Q'(a_i)}. \tag{17}$$

Известно, что

$$\sum_{i=1}^{s}p(a_i)\frac{Q(z)}{(z-a_i)Q'(a_i)}=L_s(p, z),$$

где $L_s(p, z)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени $(s-1)$, построенный при узлах $\{a_i\}_{i=1}^{s}$. Поэтому равенство (17) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty} H_n(f, z)=f(z)-\frac{L_s(p, z)}{Q(z)}, \tag{18}$$

где $f(z)=\dfrac{p(z)}{Q(z)}$. Если степень многочлена $p(z)\leqslant s-1$, то $L_s(p, z)=$ $=p(z)$, а тогда из (18) получим, что в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(f, z)=0$, $|z|<1$.

4°. Как уже отмечалось, при узлах Чебышева (1) для любой $f\in C$ выполняется в $[-1, 1]$ равномерно соотношение (2). С другой стороны, в [10] было обнаружено, что если процесс $\{H_n(f, x)\}$ построить при узлах

$$x_0^{(n+2)}=1,\ x_k^{(n+2)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\ k=1, 2,\cdots, n,\ x_{n+1}^{(n+2)}=-1,$$
$$n=1, 2,\cdots, \tag{19}$$

полученных расширением узлов матрицы (1), добавлением в качестве узлов точек ± 1, то даже для $f(x)=|x|$ процесс $\{H_n(f, x)\}$ расходится при $x=0$. Более того, в [11], [12] доказано, что процесс $\{H_n(f, x)\}$, построенный при расширенной матрице узлов (19) для $f(x)=x^2$, расходится всюду в $(-1, 1)$. При $f(x)=x$ этот процесс расходится во всех точках $x\neq 0$ из $(-1, 1)$. Указанные результаты приводят к постановке вопроса о поведении процесса $\{H_n(f, z)\}$ в комплексной области при расширении матрицы узлов (4). Ради простоты вычислений, рассмотрим матрицу узлов (5), которая получается расширением матрицы (4), добавлением в качестве узла точки

$z=1$. Обозначим через $\widetilde{H}_n(f, z)$ многочлен степени $2n+1$, однозначно определяющийся из условий

$$\widetilde{H}_n(f, z_k^{(n)})=f(z_k^{(n)}),\ \widetilde{H}_n'(f, z_k^{(n)})=0,\ 1\leqslant k\leqslant n,\ \widetilde{H}_n(f, 1)=f(1),$$
$$\widetilde{H}_n'(f, 1)=0.$$

Процесс $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}$ естественно назвать расширенным интерполяционным процессом Эрмита-Фейера. Из пункта 2° известно, что процесс $\{H_n(f, z)\}$, построенный при матрице (4) для многочлена, равномерно сходится к этому многочлену. При этом порядок остатка $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Как уже отмечалось, в действительной области, при расширении матрицы узлов может наступить резкое ухудшение сходимости процесса $\{H_n(f, x)\}$. Поэтому интересно изучить этот вопрос в комплексной области. Мы изучим поведение процесса $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}$, построенного при узлах (5) для случая, когда $p(z)$—многочлен. Выведем сперва формулу для $\widetilde{H}_n(p, z)$, где $p(z)$ — заданный многочлен. Пусть

$$p(z)=\sum_{s=0}^{m} a_s z^s. \tag{20}$$

Можно считать, что $m<n$. Это ограничение не является существенным, ибо в дальнейшем $n\to\infty$. Известно, что в таком случае справедливо тождество

$$p(z)=\widetilde{H}_n(p, z)+\sum_{k=1}^{n} p'(z_k)\, l_k^2(z)(z-z_k)+p'(1)\left(\frac{1+z^n}{2}\right)^2(z-1), \tag{21}$$

где $\{l_k(z)\}$— фундаментальные полиномы Лагранжа узлов (5). В частности, при $p(z)=z^s$, $0\leqslant s\leqslant m$, после простых вычислений, из (21) получим

$$z^s-\widetilde{H}_n(\zeta^s, z)=\frac{s(z^n+1)^2(z-1)}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{(1-z_k)^2(z-z_k)}+s\left(\frac{1+z^n}{2}\right)^2(z-1). \tag{22}$$

Заметим, что справедливо тождество

$$\frac{1}{(1-z_k)^2(z-z_k)}=\frac{1}{(z-1)^2(z-z_k)}+\frac{1}{(z-1)(z_k-1)^2}+$$
$$+\frac{1}{(z-1)^2(z_k-1)}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) получим, что

$$z^s - \widetilde{H}_n(\zeta^s, z) = \frac{s(z^n+1)^2(z-1)^2}{n^2}\left[\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{z-z_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{z-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{(z_k-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{z_k-1}\right] + s\left(\frac{1+z^n}{2}\right)^2(z-1). \qquad (24)$$

Так как $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ — корни многочлена $\omega_n(z) = 1 + z^n$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k} = \frac{nz^{n-1}}{1+z^n}. \qquad (25)$$

Далее, $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k^v = 0$, $v = 1, 2, \cdots, (n-1)$. Поэтому из (25) выводим, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{z-z_k} = -\frac{nz^s}{1+z^n},\quad 0 \leqslant s < n. \qquad (26)$$

В частности

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{z_k-1} = \frac{n}{2}. \qquad (27)$$

Дифференцируя (26) по z, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{(z-z_k)^2} = n\frac{sz^{s-1} + z^{n+s-1}(s-n)}{(1+z^n)^2}. \qquad (28)$$

Стало быть

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{(z_k-1)^2} = \frac{n(2s-n)}{4}. \qquad (29)$$

Поэтому из (24) следует, что

$$z^s - \widetilde{H}_n(\zeta^s, z) = \frac{s(1+z^n)}{2n}(1+z^n-2z^s) + \frac{s^2}{2n}(1+z^n)^2(z-1).$$

Отсюда и из (20) вытекает, что

$$p(z) - \widetilde{H}_n(p, z) = \frac{(1+z^n)^2}{2n}p'(1) - \frac{1+z^n}{n}zp'(z) +$$

$$+ \frac{(1+z^n)^2(z-1)}{2n}(zp'(z))'_{z=1}. \qquad (30)$$

Из (30) непосредственно получается

Теорема 2. *Расширенный интерполяционный процесс Эрмита-Фейера $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}$, построенный при узлах (5) для многочлена $p(z)$ степени m, удовлетворяет в круге $|z| \leqslant 1$ при $m < n$ неравенству*

$$|p(z) - \widetilde{H}_n(p, z)| \leqslant \frac{2}{n}|p'(1)| + \frac{2}{n}|zp'(z)| + \frac{4}{n}|(zp'(z))_{z=1}|.$$

Следствие. При $|z| \leqslant 1$

$$|p(z) - \widetilde{H}_n(p, z)| \leqslant \frac{C}{n}, \qquad (31)$$

где константа C зависит лишь от многочлена p. Из (31), в частности, следует, что равномерно в $|z|\leqslant 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{H}_n(p, z)=p(z)$.

Замечание 2. Формулу (30) можно также вывести с помощью формулы (6). Для этого достаточно заметить, что

$$\widetilde{H}_n(f, z)-H_n(f, z)=\omega_n^2(z)(az+b),\quad \omega_n(z)=1+z^n,$$

где коэффициенты a и b однозначно определяются из системы уравнений

$$f(1)-H_n(f, 1)=4(a+b);\quad -H_n'(f, 1)=4a(n+1)+4nb.$$

Мы предпочли дать здесь независимый вывод формулы (30).

Замечание 3. В пункте 2 отмечалось, что оператор $H_n(f, z)$, построенный при узлах (4), есть многочлен степени $n+m$, если $p(z)$ — многочлен степени m. Оператор $\widetilde{H}_n(f, z)$, построенный при расширенной системе узлов (5), вообще говоря, этим свойством не обладает. Из (30) видно, что $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}$ — многочлен степени $n+m$, если выполняются дополнительные условия $p'(1)=p''(1)=0$.

5°. Рассмотрим теперь процесс $\{R_n(f, z)\}$ из пункта 1°, построенный при расширенной системе узлов (5). После простых вычислений получим, что в этом случае

$$R_n(\zeta^s,z)=\left(\frac{(z^n+1)(z-1)}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{2+s}}{(1-z_k)^2(z-z_k)^2}+\left(\frac{1+z^n}{2}\right)^2. \tag{32}$$

Так как

$$\frac{1}{(1-z_k)^2(z-z_k)^2}=\frac{1}{(z-1)^2(z-z_k)^2}+\frac{1}{(z-1)^3(z-z_k)}+$$
$$+\frac{1}{(z-1)^2(z_k-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3(z_k-1)},$$

то из (32) следует, что

$$R_n(\zeta^s, z)=\left[\frac{(z^n+1)(z-1)}{n}\right]^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z_k^{2+s}}{(z-1)^2(z-z_k)^2}+\frac{z_k^{2+s}}{(z-1)^3(z-z_k)}+\right.$$
$$\left.+\frac{z_k^{2+s}}{(z-1)^2(z_k-1)^2}+\frac{2z_k^{2+s}}{(z-1)^3(z_k-1)}\right)+\left(\frac{1+z^n}{2}\right)^2.$$

Отсюда, с помощью равенства (26—29), получим, что

$$R_n(\zeta^s, z)=\frac{(s+1)z^s+z^{n+s}(s+1-n)}{n}+\frac{(z^n+1)(z^n-2z^{s+1}+1)}{n(z-1)}+$$
$$+\frac{2s+2}{n}\left(\frac{z^n+1}{2}\right)^2. \tag{33}$$

Из (33) видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(\zeta^s, z)=0$, $|z|\leqslant 1$, $z\neq 1$, $s=1, 2,\cdots$. Итак, процесс $\{R_n(\zeta^s, z)\}$, $s=1, 2,\cdots$, расходится всюду в $|z|\leqslant 1$, кроме точек $z=1$ и $z=0$. Из (33) также видно, что процесс $\{R_n(1, z)\}$ расходится всюду в $|z|\leqslant 1$, кроме $z=1$.

Ленинградское ордена Октябрьской революции
высшее инженерное училище
имени адмирала С. О. Макарова

Поступила 17.IV.1978

Դ. Լ. ԲԵՐՄԱՆ. Կոմպլեքս տիրույթում ինտերպոլյացիայի տեսության վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է

$$z_k^{(n)}=e^{i\theta_k^{(n)}},\ \theta_k^{(n)}=\frac{(2k-1)\pi}{n},\ k=1, 2,\cdots, n,\ n=1,2,\cdots$$

հանգույցների դեպքում կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիաների համար Հերմիտ-Ֆեյերի ինտերպոլյացիան պրոցեսը: Ուսումնասիրվում է նաև Հերմիտ-Ֆեյերի $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}_{n=1}^{\infty}$ պրոցեսը այնպիսի հանգույցների դեպքում, որոնք ստացվում են նախորդ հանգույցներին ավելացնելով $z=1$ կետը, երբ $f(z)$ ֆունկցիան կամայական բազմանդամ է:

Ապացուցվում է, որ վերջին պրոցեսը զուգամիտում է $|z|<1$ շրջանում $O\left(\frac{1}{n}\right)$ արագությամբ:

D. L. BERMAN. *To the interpolation theory in complex domain* (summary)

In the paper the Hermit—Feier interpolation process for fraction-rational functions in the nodes

$$z_k^{(n)}=e^{i\theta_k^{(n)}},\ \theta_k^{(n)}=\frac{(2k-1)\pi}{n},\ k=1, 2,\cdots, n,\ n=1, 2,\cdots$$

is investigated.

When $f(z)$ is an arbitrary polynom, the Hermit-Feier process $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}_{n=1}^{\infty}$ at the nodes which are obtained by adding the $z=1$ point to the system of former nodes is also studied. It is proved that the latter process converges at a rate $O\left(\frac{1}{n}\right)$ for $|z|<1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. *Н. Бернштейн.* Несколько замечаний об интерполировании, Собр. соч., 1, М., Изд. АН СССР, 1952.
2. *G. Faber.* Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen, Jahresber. DMV, 23, 1914, 192—210.
3. *G. Grünwald.* Über Divergenzerscheinungen, Ann. Math., 37 1936, 908—918.
4. *J. Mancinkiewicz.* Sur la divergence des polynômes d'interpolation, Acta Litt as Sc. Szeged, 8, 1937, 131—135.
5. *L. Fejèr.* Über Interpolation, Gött. Nach., 1916, 66–91.
6. *L Fejèr.* Lagrangesche Interpolation und die Zugekörigen konjugierten Punkte, Math. Ann., 106, 1932, 1—55.

7. *G. Grünwald*. On the theory of interpolation, Acta Mathem., 75, 1943, 219—245.
8. *Д. Л. Берман*. К теории интерполяции в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., 36, № 4, 1972, 789—794.
9. *В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев*. Конструктивная теория функций комплексного переменного, М., «Наука», 1964.
10. *Д. Л. Берман*. К теории интерполяции, ДАН СССР, 163, № 3, 1965, 551—554.
11. *Д. Л. Берман*. Исследование интерполяционного процесса Эрмита—Фейера, ДАН СССР, 187, № 2, 1969, 241—244.
12. *Д. Л. Берман*. Об одном всюду расходящемся интерполяционном процессе Эрмита—Фейера, Известия вузов, сер. матем., № 1, 1970, 3—8.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 3, 1980 Математика

А. Н. КОЧУБЕЙ

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ РАСШИРЕНИЙ

§ 1. Введение

1. Пусть A — замкнутый симметрический оператор с плотной областью определения $D(A)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий равные дефектные числа (n, n), $n \leqslant \infty$. Характеристическая функция оператора A в случае $n < \infty$ была построена М. С. Лившицем [1—3], в общем случае — А. В. Штраусом [4, 5].

Напомним определение А. В. Штрауса. Положим

$$\mathfrak{M}_z = (A - zE)\, D(A),\ \ \mathrm{N}_z = \mathrm{N}_z(A) = H \ominus \mathfrak{M}_z$$

(E — тождественный оператор, $\operatorname{Im} z \neq 0$).

При любом невещественном λ обозначим через A_λ расширение оператора A, заданное равенствами:

$$D(A_\lambda) = D(A) \dotplus \mathrm{N}_{\bar\lambda},$$

$$A_\lambda (f + \varphi) = Af + \lambda\varphi \ \ (f \in D(A),\ \varphi \in \mathrm{N}_{\bar\lambda}). \tag{1}$$

Как показано в [5], при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ ($\operatorname{Im}\lambda < 0$) A_λ является максимальным диссипативным (аккумулятивным) оператором*.

Зафиксируем произвольное невещественное число λ_0 и обозначим через Π открытую полуплоскость (верхнюю или нижнюю), содержащую λ_0. Из результатов работы [5] следует, что существует линейный оператор $C_0(\lambda)\colon \mathrm{N}_{\bar\lambda_0} \to \mathrm{N}_{\lambda_0}$ такой, что $D(A_\lambda) = D(A) + [C_0(\lambda) - E]\mathrm{N}_{\bar\lambda_0}$ и

$$A_\lambda (f + C_0(\lambda)\psi - \psi) = Af + \bar\lambda_0 C_0(\lambda)\psi - \lambda_0\psi \ \ (f \in D(A),\ \psi \in \mathrm{N}_{\bar\lambda_0}).$$

Оператор-функцию $C_0(\lambda)$ ($\lambda \in \Pi$) мы будем называть ***характеристической функцией Штрауса*** оператора A. Отметим, что всякий элемент $h \in \mathrm{N}_{\bar\lambda}$ однозначно представим в виде:

$$h = f + \varphi - C_0(\lambda)\varphi, \tag{2}$$

где $f \in D(A)$, $\varphi \in \mathrm{N}_{\bar\lambda_0}$, причем, когда h пробегает все $\mathrm{N}_{\bar\lambda}$, φ пробегает все $\mathrm{N}_{\bar\lambda_0}$.

В работах [4, 5] показано, что $\|C_0(\lambda)\| < 1$ ($\lambda \in \Pi$), и оператор-функция $C_0(\lambda)$ аналитична в Π. Если оператор A прост, то он определяется по $C_0(\lambda)$ с точностью до унитарной эквивалентности.

---

* Оператор B в H называется диссипативным (аккумулятивным), если при всех $g \in D(B)$ $(Bg, g)_H \geqslant 0$ ($(Bg, g)_H \leqslant 0$). Диссипативный (аккумулятивный) оператор называется максимальным диссипативным (аккумулятивным), если он не имеет в H собственных диссипативных (аккумулятивных) расширений.

Как видно из приведенного определения, вычисление характеристической функции Штрауса дифференциального оператора и, в особенности, применение ее к исследованию спектров граничных задач вызывает значительные трудности. В настоящей работе введено новое определение характеристической функции оператора A, обладающее в этом отношении определенными преимуществами. Это определение основано на построенном в статье автора [6]* описании расширений симметрического оператора в терминах абстрактных *граничных условий*. Характеристическая функция Штрауса оказывается по существу частным случаем характеристической функции, вводимой ниже. Следует, однако, заметить, что результаты А. В. Штрауса [4, 5] использованы при доказательстве основных теорем настоящей работы.

2. Приведем некоторые результаты из [6].

Определение. *Тройка* $(\mathrm{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, *где* H — *сепарабельное гильбертово пространство,* Γ_1 *и* Γ_2 — *линейные отображения* $D(A^*)$ *в* H, *называется пространством граничных значений оператора* A, *если*:

1) *для любых* $y, z \in D(A^*)$

$$(A^* y, z)_{\mathrm{H}} - (y, A^* z)_{\mathrm{H}} = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathrm{H}} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathrm{H}};$$

2) *для любых* $Y_1, Y_2 \in \mathrm{H}$ *существует такой вектор* $y \in D(A^*)$, *что* $\Gamma_1 y = Y_1$, $\Gamma_2 y = Y_2$.

Как показано в [25], $y \in D(A)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 y = \Gamma_2 y = 0$. Если $(\mathrm{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — некоторое пространство граничных значений оператора A, то, каково бы ни было сжатие K в H, сужение оператора A^* на множество векторов $y \in D(A^*)$, удовлетворяющих условию

$$K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, y = (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, y \tag{3}$$

или

$$K(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, y = (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, y, \tag{4}$$

представляют собой соответственно максимальное диссипативное (аккумулятивное) расширение оператора A. Обратно, всякое максимальное диссипативное (аккумулятивное) расширение оператора A представляет собой сужение оператора A^* на множество всех $y \in D(A^*)$, удовлетворяющих [3] ([4]), причем сжатие K определяется однозначно. Эти расширения мы будем обозначать через A_K и A^K соответственно.

Из тождества

$$(A^* f, g)_H - (f, A^* g)_H = \frac{1}{2i} \{((\Gamma_1 - i\Gamma_2) f, (\Gamma_1 - i\Gamma_2) g)_{\mathrm{H}} - ((\Gamma_1 + i\Gamma_2) f, (\Gamma_1 + i\Gamma_2) g)_{\mathrm{H}}\} \tag{5}$$

($f, g \in D(A^*)$) нетрудно получить соотношение

$$(A_K)^* = A^{K^*}. \tag{6}$$

---

* И независимо — в статье В. М. Брука [25].

В [6] построено следующее пространство граничных значений, которое мы будем обозначать $(\mathbf{H}^0, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0)$: $\mathbf{H}^0 = \mathbf{N}_{-i}$ (со скалярным произведением, индуцированным из H),

$$\Gamma_1^0 = P_{-i} + VP_i,\ \Gamma_2^0 = -iP_{-i} + iVP_i,$$

где

P_{-i} — проектор $D(A^*)$ на $\mathbf{N}_{-i}$ параллельно $D(A) \dotplus \mathbf{N}_i$,

P_i — проектор $D(A^*)$ на $\mathbf{N}_i$ параллельно $D(A) \dotplus \mathbf{N}_{-i}$,

V — изометрическое отображение $\mathbf{N}_i$ на $\mathbf{N}_{-i}$.

§ 2. Определение и свойства характеристической функции

1. Пусть A_λ — расширение оператора A вида (1) ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$). Согласно (3), (4), оператор A_λ равен сужению A^* на множество $y \in \in D(A^*)$, удовлетворяющих условию

$$C(\lambda)(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, y = (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, y \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0),$$
$$C(\lambda)(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, y = (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, y \quad (\operatorname{Im}\lambda < 0),$$

где $C(\lambda)$ — сжимающая ($\|C(\lambda)\| \leqslant 1$) оператор-функция в $\mathbf{H}$. Оператор-функция $C(\lambda)$ называется *характеристической функцией оператора* A.

Из (6) следует, что $C(\bar{\lambda}) = [C(\lambda)]^*$. Введенная выше характеристическая функция зависит, очевидно от выбора пространства граничных значений оператора A. Рассмотрим, в частности, пространство граничных значений $(\mathbf{H}^0, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0)$ (см. § 1).

Имеем $\Gamma_1^0 + i\Gamma_2^0 = 2P_{-i}$, $\Gamma_1^0 - i\Gamma_2^0 = 2VP_i$. Пусть $y \in \mathbf{N}_{\bar{\lambda}}$. Тогда $y = y_0 + \varphi + \psi$ ($y_0 \in D(A)$, $\varphi \in \mathbf{N}_{-i}$, $\psi \in \mathbf{N}_i$), откуда

$$(\Gamma_1^0 + i\Gamma_2^0)\, y = 2\varphi,\ (\Gamma_1^0 - i\Gamma_2^0)\, y = 2V\psi.$$

Если $C^0(\lambda)$ — характеристическая функция оператора A, соответствующая $(\mathbf{H}^0, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0)$ и $\operatorname{Im}\lambda > 0$, то $C^0(\lambda)\varphi = V\psi$. Но в силу (2)* $\psi = C_0(\lambda)\varphi$ Из произвольности $y \in \mathbf{N}_{\bar{\lambda}}$ находим

$$C^0(\lambda) = VC_0(\lambda),\ \operatorname{Im}\lambda > 0. \tag{7}$$

Таким образом, $C^0(\lambda)$ лишь несущественно отличается от характеристической функции Штрауса. Из результатов А. В. Штрауса [4] и формулы (7) получаем, что $\|C^0(\lambda)\| < 1$, и $C^0(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Im}\lambda > 0$.

2. Выясним, как связаны между собой характеристические функции $C^1(\lambda)$ и $C^2(\lambda)$ оператора A, соответствующие пространствам гра-

---

* Здесь и ниже мы полагаем в определении характеристической функции Штрауса $C_0(\lambda)$ $\lambda_0 = i$.

ничных значений $(\mathrm{H}^1, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ и $(\mathrm{H}^2, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2)$. Заметим прежде всего, что $\dim \mathrm{H}^1 = \dim \mathrm{H}^2$. Действительно, отображение $\Gamma_1^1 \oplus \Gamma_2^1 \colon D(A^*) \to \mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$ индуцирует биективное отображение $D(A^*)/D(A) \to \mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$, откуда $\dim(\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1) = \dim [D(A^*)/D(A)]$, и аналогично $\dim(\mathrm{H}^2 \oplus \mathrm{H}^2) = \dim [D(A^*)/D(A)]$, откуда $\dim(\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1) = \dim(\mathrm{H}^2 \oplus \mathrm{H}^2)$ и $\dim \mathrm{H}^1 = \dim \mathrm{H}^2$. Пусть U — изометрическое отображение H^2 на H^1. Обозначим J оператор в $\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$ вида $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$.

Теорема 1. *Имеет место соотношение*

$$C^1(\lambda) = [X_{21} + X_{22}\, UC^2(\lambda)\, U^{-1}]\, [X_{11} + X_{12}\, UC^2(\lambda)\, U^{-1}]^{-1}, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0, \tag{8}$$

где $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ — *J-унитарный оператор в* $\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$.

Доказательство. Определим пространство граничных значений $(\mathrm{H}^1, \tilde{\Gamma}_1^1, \tilde{\Gamma}_2^1)$, полагая $\tilde{\Gamma}_1^1 = U\Gamma_1^2$, $\tilde{\Gamma}_2^1 = U\Gamma_2^2$. Построим в пространстве $\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$ линейный оператор X следующим образом. Если $(Y', Y'') \in \mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$, выберем $y \in D(A^*)$ так, чтобы

$$\left.\begin{aligned} (\tilde{\Gamma}_1^1 + i\tilde{\Gamma}_2^1) y &= Y' \\ (\tilde{\Gamma}_1^1 - i\tilde{\Gamma}_2^1) y &= Y'' \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Положим $Z' = (\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1) y$, $Z'' = (\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1) y$. Эти векторы не зависят от выбора y, удовлетворяющего (9), так как последний определяется однозначно с точностью до слагаемого из $D(A)$. Положим $X(Y', Y'') = (Z', Z'')$. Очевидно, X — сюръективный линейный оператор в $\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$. Из формулы (5), примененной при $f = g$ к каждому из пространств $(\mathrm{H}^1, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ и $(\mathrm{H}^1, \tilde{\Gamma}_1^1, \tilde{\Gamma}_2^1)$, следует, что оператор X является J-унитарным. В частности, X ограничен [7], и следовательно, представим в виде $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, где X_{jk} $(j, k = 1, 2)$ — ограниченные операторы в H^1.

Теперь Γ_1^1, Γ_2^1 выражаются через $\tilde{\Gamma}_1^1$, $\tilde{\Gamma}_2^1$ по формулам:

$$\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1 = X_{11}(\tilde{\Gamma}_1^1 + i\tilde{\Gamma}_2^1) + X_{12}(\tilde{\Gamma}_1^1 - i\tilde{\Gamma}_2^1);$$

$$\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1 = X_{21}(\tilde{\Gamma}_1^1 + i\tilde{\Gamma}_2^1) + X_{22}(\tilde{\Gamma}_1^1 - i\tilde{\Gamma}_2^1).$$

Пусть $\tilde{C}^1(\lambda)$ — характеристическая функция оператора A, соответствующая пространству граничных значений $(\mathrm{H}^1, \tilde{\Gamma}_1^1, \tilde{\Gamma}_2^1)$. Тогда для всех $y \in \mathrm{N}_{\bar{\lambda}}$ $(\tilde{\Gamma}_1^1 - i\tilde{\Gamma}_2^1)\, y = \tilde{C}^1(\lambda)(\tilde{\Gamma}_1^1 + i\tilde{\Gamma}_2^1)\, y$, откуда

$$(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)\, y = [X_{11} + X_{12}\, \tilde{C}^1(\lambda)](\tilde{\Gamma}_1^1 + i\tilde{\Gamma}_2^1)\, y;$$

$$(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)\, y = [X_{21} + X_{22}\, \widetilde{C}^1(\lambda)]\ (\widetilde{\Gamma}_1^1 + i\widetilde{\Gamma}_2^1)\, y.$$

С другой стороны, $(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)\, y = C^1(\lambda)(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)\, y$. По теореме М. Г. Крейна—Ю. Л. Шмульяна [8] из J-унитарности оператора X следует, что при каждом λ оператор $[X_{11} + X_{12}\, \widetilde{C}^1(\lambda)]$ имеет в $\mathbf{H}^1$ ограниченный обратный. Таким образом

$$C^1(\lambda) = [X_{21} + X_{22}\, \widetilde{C}^1(\lambda)]\, [X_{11} + X_{12}\, \widetilde{C}^1(\lambda)]^{-1}\,.$$

Замечая, что $\widetilde{C}^1(\lambda) = U\, C^2(\lambda)\, U^{-1}$, приходим к (8).

Теорема доказана.

Полагая $(\mathbf{H}^2, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2) = (\mathbf{H}^0, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0)$, получаем такое следствие.

Следствие 1. *Каково бы ни было пространство граничных значений* $(\mathbf{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ *оператора* A, *соответствующая характеристическая функция* $C(\lambda)$ *аналитична при* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, *причем* $\|C_1(\lambda)\| < 1$.

Аналитичность $C(\lambda)$ очевидна. Неравенство $\|C(\lambda)\| < 1$ следует из того, что, согласно [8], дробно-линейное преобразование $[X_{21} + X_{22} K]\, [X_{11} + X_{12} K]^{-1}$ с J-унитарным оператором $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ переводит множество всех операторов K, для которых $\|K\| < 1$, в себя.

§ 3. Характеристическая функция и унитарная эквивалентность

Цель данного параграфа—доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Для того чтобы простые симметрические операторы* A_1 *и* A_2 *в пространстве* H *были унитарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы для* A_1 *и* A_2 *существовали соответственно пространства граничных значений* $(\mathbf{H}, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ *и* $(\mathbf{H}, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2)$ ($\mathbf{H}$ *одно и то же*), *такие, что соответствующие характеристические функции совпадают*: $C^1(\lambda) \equiv C^2(\lambda)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть U — унитарный оператор в H, такой, что $UA_1\, U^{-1} = A_2$. Тогда (см., например, [9]), $UA_1^*\, U^{-1} = A_2^*$.

Пусть $(\mathbf{H}, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ — произвольное пространство граничных значений оператора A_1. Положим $\Gamma_1^2 = \Gamma_1^1\, U^{-1}$, $\Gamma_2^2 = \Gamma_2^1\, U^{-1}$. Непосредственно проверяется, что $(\mathbf{H}, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2)$ — пространство граничных значений оператора A_2 (нужно только учесть, что U^{-1} переводит $D(A_2)$ на $D(A_1)$ и $D(A_2^*)$ на $D(A_1^*)$).

Если $A_1^*\, y = \lambda y$, то $A_2^*\, Uy = UA_1^*\, y = \lambda Uy$. Аналогично, если $A_2^*\, z = \lambda z$, то $A_1^*\, U^{-1} z = \lambda U^{-1} z$. Таким образом, U переводит $\mathbf{N}_\lambda^-(A_1)$ на $\mathbf{N}_\lambda^-(A_2)$. Теперь из сопоставления равенств

$$(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)\, y = C^1(\lambda)\,(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)\, y,$$

$$(\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)\, Uy = C^2(\lambda)\,(\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)\, Uy$$

($y \in \mathbf{N}_{\bar\lambda}(A_1)$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$) и определения отображений Γ_1^2, Γ_2^2 следует, что $C^1(\lambda) \equiv C^2(\lambda)$.

Достаточность. Построим сюръективное отображение $\chi: D(A_1^*)/D(A_1) \to D(A_2^*)/D(A_2)$ следующим образом. Пусть $y_1 \in \hat{y}_1 \in D(A_1^*)/D(A_1)$ ($y_1 \in D(A_1^*)$). По классу $\hat{y}_1$ построим вектор $(y', y'') \in \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$, полагая $y' = (\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)\, y_1$, $y'' = (\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)\, y_1$. Выберем $y_2 \in D(A_2^*)$ так, чтобы $y' = (\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)\, y_2$, $Y'' = (\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)\, y_2$. Пусть $\hat{y}_2$ — класс из $D(A_2^*)/D(A_2)$, содержащий y_2. Очевидно, y_2 определяется по $\hat{y}_1$ однозначно с точностью до слагаемого из $D(A_2)$, т. е. имеет смысл определение χ формулой $\chi\hat{y}_1 = \hat{y}_2$.

Очевидно, отображение χ линейно. Пусть $\hat{\mathbf{N}}_{\bar\lambda}(A_j)$ — образ $\mathbf{N}_{\bar\lambda}(A_j)$ ($j = 1, 2$) при естественном отображении $D(A_j^*) \to D(A_j^*)/D(A_j)$. Покажем, что отображение χ переводит $\hat{\mathbf{N}}_{\bar\lambda}(A_1)$ в $\hat{\mathbf{N}}_{\bar\lambda}(A_2)$. Пусть, например, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ (случай $\operatorname{Im}\lambda < 0$ рассматривается аналогично). Если $\hat{y}_1 \in \hat{\mathbf{N}}_{\bar\lambda}(A_1)$, то для любого представителя $y_1 \in \hat{y}_1$

$$(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)\, y_1 = C^1(\lambda)\,(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)\, y_1.$$

Если $y_2 \in \hat{y}_2 = \chi\hat{y}_1$, то из построения χ видно, что

$$(\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)\, y_2 = C^1(\lambda)\,(\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)\, y_2,$$

и поскольку $C^1(\lambda) = C^2(\lambda)$, получаем

$$(\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)\, y_2 = C^2(\lambda)\,(\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)\, y_2,$$

а это означает (см. § 2), что $y_2 \in D(A_2) \dot{+} \mathbf{N}_{\bar\lambda}(A_2)$, т. е. $\hat{y}_2 \in \hat{\mathbf{N}}_{\bar\lambda}(A_2)$ и, следовательно,

$$\chi: \hat{\mathbf{N}}_{\bar\lambda}(A_1) \to \hat{\mathbf{N}}_{\bar\lambda}(A_2).$$

Если $y^{(1)} \in \mathbf{N}_{\bar\lambda}(A_1)$, то $y^{(1)} = y_0^{(1)} + y_{-i}^{(1)} + y_i^{(1)}$, где $y_0^{(1)} \in D(A_1)$, $y_{-i}^{(1)} \in \mathbf{N}_{-i}(A_1)$, $y_i^{(1)} \in \mathbf{N}_i(A_1)$. Переходя к образам в $D(A_1^*)/D(A_1)$, имеем

$$\hat{y}^{(1)} = \hat{y}_{-i}^{(1)} + \hat{y}_i^{(1)},$$

где

$$y^{(1)} \in \hat{y}^{(1)} \in \hat{\mathbf{N}}_{\bar\lambda}(A_1),\ \hat{y}_{-i}^{(1)} \in \hat{\mathbf{N}}_{-i}(A_1),\ \hat{y}_i^{(1)} \in \hat{\mathbf{N}}_i(A_1).$$

Пусть $\hat{y}^{(2)} = \chi\hat{y}^{(1)}$. Имеем

$$\hat{y}^{(2)} = \chi\hat{y}_{-i}^{(1)} + \chi\hat{y}_i^{(1)}. \tag{10}$$

При любом λ ($\operatorname{Im}\lambda\neq 0$) отображение $\chi:\hat{N}_\lambda-(A_1)\to\hat{N}_{\bar\lambda}(A_2)$ индуцирует отображение χ_λ: $N_{\bar\lambda}(A_1)\to N_{\bar\lambda}(A_2)$ следующим образом. Пусть $f\in N_{\bar\lambda}(A_1)$, $f\in\hat{f}\in\hat{N}_{\bar\lambda}(A_1)$. Выберем $g\in\chi\hat{f}$ так, чтобы $g\in N_{\bar\lambda}(A_2)$. Очевидно, такой вектор g существует и определяется однозначно (если $g_1, g_2\in\chi\hat{f}$, $g_1, g_2\in N_{\bar\lambda}(A_2)$, то $g_1-g_2\in D(A_2)\cap N_{\bar\lambda}(A_2)=\{0\}$). Положим $\chi_\lambda f=g$. Отображение χ_λ линейно и сюръективно. Покажем, что оно изометрично.

В самом деле, пользуясь (5), для любого $f\in N_{\bar\lambda}(A_1)$ получим:

$$\|f\|_H^2=\frac{1}{2i\operatorname{Im}\lambda}[(A_1^*f,f)_H-(f,A_1^*f)_H]=$$

$$=-\frac{1}{4\operatorname{Im}\lambda}[\|(\Gamma_1^1-i\Gamma_2^1)f\|_{\mathrm{H}}^2-\|(\Gamma_1^1+i\Gamma_2^1)f\|_{\mathrm{H}}^2]=$$

$$=-\frac{1}{4\operatorname{Im}\lambda}[\|(\Gamma_1^2-i\Gamma_2^2)\chi_\lambda f\|_{\mathrm{H}}^2-\|(\Gamma_1^2+i\Gamma_2^2)\chi_\lambda f\|_{\mathrm{H}}^2]=$$

$$=\frac{1}{2i\operatorname{Im}\lambda}[(A_2^*\chi_\lambda f,\chi_\lambda f)_H-(\chi_\lambda f,A_2^*\chi_\lambda f)_H]=\|\chi_\lambda f\|_H^2,$$

и изометричность χ_λ доказана.

Пусть $C_0^1(\lambda)$ и $C_0^2(\lambda)$ — характеристические функции Штрауса операторов A_1 и A_2 соответственно. Из (10) следует, что для $y^{(2)}\in\hat{y}^{(2)}=\chi\hat{y}^{(1)}$

$$y^{(2)}=y_0^{(2)}+\chi_{-i}+y_{-i}^{(1)}+\chi_i y_i^{(1)},$$

где $y_0^{(2)}\in D(A_2)$. По определению характеристической функции Штрауса $y_i^{(1)}=C_0^1(\lambda)y_{-i}^{(1)}$ и, с другой стороны, $\chi_i y_i^{(1)}=C_0^2(\lambda)\chi_{-i}y_{-i}^{(1)}$ или $y_i^{(1)}=$ $=\chi_i^{-1}C_0^2(\lambda)\chi_{-i}y_{-i}^{(1)}$. Из сравнения этих соотношений, учитывая произвольность $y^{(1)}\in N_{\bar\lambda}(A_1)$, находим

$$C_0^1(\lambda)=\chi_i^{-1}C_0^2(\lambda)\chi_{-i}, \qquad (11$$

причем в (11) изометрии χ_i и χ_{-i} не зависят от λ. Теперь утверждение теоремы следует из результатов А. В. Штрауса [4]. Теорема доказана.

§ 4. Характеристическая функция и спектры расширений

1. Мы будем пользоваться классификацией точек спектра замкнутого оператора, изложенной в [10]. Если B—замкнутый оператор в H, будем обозначать его резольвентное множество, точечный, непрерывный и остаточный спектры соответственно через $\rho(B)$, $\sigma_p(B)$, $\sigma_c(B)$, $\sigma_r(B)$.

Пусть A_K — максимальное диссипативное расширение* оператора A, заданное условием (3), и пусть λ — комплексное число с $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Обозначим через $C(\mu)$ характеристическую функцию оператора A, соответствующую произвольному пространству граничных значений (H, Γ_1, Γ_2).

Теорема 3. 1°. *Для того чтобы λ было собственным значением кратности $\nu \leqslant \infty$ оператора A_K, необходимо и достаточно, чтобы 0 был собственным значением кратности ν оператора $C(\lambda)-K$.* 2°. *Для того чтобы $\lambda \in \sigma_r(A_k)$ необходимо и достаточно, чтобы $0 \in \sigma_r(C(\lambda)-K)$.*

3°. *Для того чтобы $\lambda \in \sigma_c(A_K)$, необходимо и достаточно чтобы $0 \in \sigma_c(C(\lambda)-K)$.*

Доказательство. 1°. Если $A_K f=\lambda f$, то $f \in N_{\bar\lambda}(A)$, т. е.

$$C(\lambda)(\Gamma_1+i\Gamma_2) f=(\Gamma_1-i\Gamma_2) f. \tag{12}$$

С другой стороны, $f \in D(A_K)$, т. е.

$$K(\Gamma_1+i\Gamma_2) f=(\Gamma_1-i\Gamma_2) f. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем

$$[C(\lambda)-K](\Gamma_1+i\Gamma_2) f=0.$$

Обратно, если $[C(\lambda)-K] g=0$, то, выбирая $f \in D(A^*)$ так, чтобы

$$(\Gamma_1+i\Gamma_2) f=g, \quad (\Gamma_1-i\Gamma_2) f=Kg,$$

находим, что $f \in D(A_K)$ и $C(\lambda)(\Gamma_1+i\Gamma_2) f=C(\lambda) g=Kg=(\Gamma_1-i\Gamma_2) f$, т. е. $f \in N_{\bar\lambda}(A) \dotplus D(A)$, и компонента f в $N_{\bar\lambda}$ — собственный вектор A_K.

Таким образом, имеем отображение $f \to (\Gamma_1+i\Gamma_2) f$ собственных подпространств, которое линейно и биективно.

2°. Пусть $\lambda \in \sigma_r(A_K)$. Тогда $\bar\lambda \in \sigma_p((A_K)^*)=\sigma_p(A^{K^*})$. Рассуждая, как в п. 1°, мы докажем, что $0 \in \sigma_p(C(\bar\lambda)-K^*)$. Учитывая, что (см. § 2) $C(\bar\lambda)=[C(\lambda)]^*$, получим $0 \in \sigma_r(C(\lambda)-K)$.

Обратное утверждение получается, если провести те же рассуждения в обратном порядке.

3°. Пусть $\lambda \in \sigma_c(A_K)$, но $0 \bar\in \sigma_c(C(\lambda)-K)$. Согласно 1°, 2°, в этом случае $0 \in \rho(C(\lambda)-K)$. Покажем, что отсюда следует разрешимость уравнения

$$(A_K-\lambda E) x=h \tag{14}$$

при любом $h \in H$. Будем искать x в виде

$$x=f+g, \tag{15}$$

где $f \in N_{\bar\lambda}(A)$ — искомый вектор, g — фиксированное решение уравнения $(A^*-\lambda E) g=h$ (такой вектор g существует, например, в области определения произвольного самосопряженного расширения оператора A).

* Результаты этого и следующего параграфов легко переносятся на случай максимальных аккумуляторных расширений.

Очевидно, для x вида (15) $(A^* - \lambda E)\, x = h$. Обозначим $G_1 = K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, g - (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, g$ $(G_1 \in \mathrm{H})$. Поскольку $0 \in \rho(C(\lambda) - K)$, существует вектор $G_2 \in \mathrm{H}$, для которого $[C(\lambda) - K]\, G_2 = G_1$. Выберем $\bar{f} \in D(A^*)$ так, чтобы

$$(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, \bar{f} = G_2,\ (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, \bar{f} = C(\lambda)\, G_2.$$

Тогда ясно, что $\bar{f} \in D(A) \dot{+} \mathrm{N}_{\bar{\lambda}}^{-}(A)$. Пусть f — компонента $\bar{f}$ в $\mathrm{N}_{\bar{\lambda}}^{-}(A)$. Тогда

$$(\Gamma_1 - i\Gamma_2)(f + g) = C(\lambda)\, G_2 + K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, g - G_1 =$$
$$= C(\lambda)\, G_2 + K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, g - C(\lambda)\, G_2 + KG_2 =$$
$$= K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, (f + g),$$

т. е. $f + g \in D(A_K)$ и x вида (15)—решение уравнения (14). Это означает, что $\lambda \bar{\in} \sigma_c(A_K)$.

Обратно, пусть $0 \in \sigma_c(C(\lambda) - K)$. Тогда, если $\lambda \bar{\in} \sigma_c(A_K)$, то $\lambda \in \rho(A_K)$. Покажем, что уравнение

$$[C(\lambda) - K]\, G = G_1$$

разрешимо при любом $G_1 \in \mathrm{H}$.

Будем искать решение в виде

$$G = (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, f, \tag{16}$$

где $f \in \mathrm{N}_{\bar{\lambda}}^{-}(A)$.

Выберем $d \in D(A^*)$ так, чтобы

$$(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, d = G_1,\ (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, d = 0. \tag{17}$$

Пусть $c \in D(A_K)$ – решение уравнения

$$(A_K - \lambda E)\, c = \lambda d - A^* d.$$

Тогда $(A^* - \lambda E)(c + d) = 0$; т. е. $c + d \in \mathrm{N}_{\bar{\lambda}}^{-}(A)$. Положим в (16) $f = c + d$. Имеем

$$[C(\lambda) - K]\, G = (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, f - K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, f;$$

поскольку $c \in D(A_K)$, $(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, c = K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, c$. Учитывая (17), получаем

$$[C(\lambda) - K]\, G = G_1.$$

Теорема доказана.

Воспользовавшись известной теоремой о возмущениях фредгольмовых операторов (см. [24], стр. 300), приходим к такому следствию.

Следствие 2. *Если сжатие K таково, что для некоторого унитарного в H оператора U оператор $K - U$ вполне непрерывен, то невещественная часть спектра оператора A_K может состоять только из собственных значений конечной кратности, причем для любого* λ $(\mathrm{Im}\,\lambda > 0)$ $\mathrm{ind}\,(A_K - \lambda E) = 0$*.

* $\mathrm{ind}\,(A_K - \lambda E) \overset{\mathrm{def}}{=} \dim \mathrm{Ker}\,(A_K - \lambda E) - \dim \mathrm{Ker}\,(A_K^* - \bar{\lambda} E)$.

Пользуясь теоремой 3, можно получить еще одно условие дискретности невещественной части спектра оператора A_K.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:*

1) *оператор K имеет в* H *ограниченный обратный;*

2) *в* H *существует такое сжатие S, что оператор $KS+E$ вполне непрерывен.*

Тогда невещественная часть спектра оператора A_K может состоять только из собственных значений конечной кратности.

Если, кроме того, выполнено условие: 3) *оператор A_k имеет в верхней полуплоскости регулярную точку, то невещественная часть спектра оператора A_K состоит из не более, чем счетного множества изолированных собственных значений конечной кратности, не имеющего конечных невещественных предельных точек.*

Доказательство. Если P — оператор в H, а Q — оператор в H, имеющий ограниченный обратный, то точка 0 принадлежит точечному, непрерывному или остаточному спектру оператора P тогда и только тогда, когда то же имеет место для оператора QP. Поэтому утверждение теоремы 3 остается справедливым, если заменить $C(\lambda)-K$ на оператор-функцию

$$\Phi(\lambda)=[E+SC(\lambda)]^{-1}K^{-1}[C(\lambda)-K].$$

При этом оператор

$$\Phi(\lambda)+E=[E+SC(\lambda)]^{-1}[K^{-1}C(\lambda)-E]+E=$$
$$=[E+SC(\lambda)]^{-1}[E+SC(\lambda)+K^{-1}C(\lambda)-E]=$$
$$=[E+SC(\lambda)]^{-1}[SC(\lambda)+K^{-1}C(\lambda)]=$$
$$=[E+SC(\lambda)]^{-1}K^{-1}(KS+E)\,C(\lambda)$$

($\operatorname{Im}\lambda>0$) вполне непрерывен в H. Это, в частности, означает, что 0—либо регулярная точка, либо собственное значение конечной кратности для $\Phi(\lambda)$, а значит, и для $C(\lambda)-K$.

Если же выполнено 3), то соответствующее утверждение теоремы следует из аналитичности $\Phi(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda>0$ и теоремы о спектре аналитической оператор-функции [11, стр. 39].

Теорема доказана.

2. Проиллюстрируем полученные результаты на примере. Пусть H_1—сепарабельное гильбертово пространство, $H=L_2(H_1, a, b))$ ($-\infty<a<b<\infty$), A—минимальный оператор, порожденный в H дифференциальным выражением $-\frac{d^2}{dt^2}+B$, где B— самосопряженный положительно определенный оператор в H_1. Из результатов М. Л. Горбачука [12] следует, что пространство граничных значений оператора A может быть выбрано так: $\mathsf{H}=H_1\oplus H_1$,

$$\Gamma_1 y=\{\tilde{B}^{1/4}(y'(a)+\tilde{B}^{1/2}y(a)),\ \tilde{B}^{1/4}(y'(b)-\tilde{B}^{1/2}y(b))\},$$

$$\Gamma_2 y = \{\tilde{B}^{-\frac{1}{4}} y(a),\ -\bar{B}^{-\frac{1}{4}} y(b)\} \quad (y \in D(A^*)),$$

где оператор B действует в негативном пространстве, построенном (см. [13]) по пространствам $D(B)$ (с нормой графика) и H_1, и равен сопряженному оператору коператору $B{:}D(B) \to H_1$.

Максимальные диссипативные расширения оператора A описываются формулой (3) (впервые это было доказано в [14]). Из следствия 2 и теоремы 4 теперь получаются результаты о спектрах расширений оператора A. Пользуясь интегральным представлением вектор-функции из $D(A^*)$, доказанным в [12], можно найти явный вид характеристической функции $C(\lambda)$:

$$C(\lambda) = [\Omega'(\lambda) - i\Omega(\lambda)]\,(\Omega'(\lambda) + i\Omega(\lambda))^{-1}$$

(формулы для оператор-функций $\Omega(\lambda)$, $\Omega'(\lambda)$, действующих в $H_1 \oplus H_1$, приведены в [15]).

Аналогично можно рассмотреть дифференциальное выражение $(-1)^n \dfrac{d^{2n}}{dt^{2n}} + B$ (см. [16]) и другие дифференциальные операторы, для которых известно пространство граничных значений, связанное с краевыми задачами [17—19].

§ 5. Характеристическая функция расширения

1. Характеристическая функция максимального диссипативного оператора (как и всякого оператора с непустым резольвентным множеством) была определена А. В. Штраусом [20].

Определение (см. [20]). Предгильбертово пространство L со скалярным произведением $[.\,,.]$ называется граничным пространством максимального диссипативного оператора T в гильбертовом пространстве H, если существует линейный оператор Γ, отображающий $D(T)$ на L, такой, что для любых f, $g \in D(T)$

$$[\Gamma f, \Gamma g] = \frac{1}{i}\{(Tf, g)_H - (f, Tg)_H\}.$$

Оператор Γ называется граничным.

Пусть L' — граничное пространство оператора $-T^*$ и Γ' — соответствующий граничный оператор. Для любого $f \in D(T)$ существует единственный вектор $g \in D(T^*)$, такой, что $Tf - T^*g = \lambda(f - g)$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Обозначим $\varphi = \Gamma f$, $\psi = \Gamma' g$. Тогда равенством $\psi = X(\lambda)\varphi$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ определена характеристическая функция оператора T.

Вычислим характеристическую функцию $C_K(\lambda)$ оператора A_K в смысле приведенного определения, исходя из характеристической функции $C(\lambda)$ симметрического оператора A. Обозначим $R_K = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(E - K^*K)^{1/2}$, $R_K = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(E - KK^*)^{1/2}$. Пользуясь тождеством (5), нетрудно проверить, что, исходя из пространства граничных значений $(\mathrm{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ оператора A, можно определить граничные пространства операторов A_K и $-A_K^*$ формулами:

$$L = R_K \mathrm{H},\ \Gamma = R_K(\Gamma_1 + i\Gamma_2),$$

$$L' = R_K' \mathrm{H},\ \Gamma' = R_K'(\Gamma_1 - i\Gamma_2)$$

(скалярные произведения в L и L' индуцированы из H).

Пусть $f \in D(A_K)$, $g \in D(A_K^*)$, $A_K f - A_K^* g = \lambda(f - g)$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$. Элементарные выкладки приводят к соотношению

$$(\Gamma_1 - i\Gamma_2) g = [E - C(\lambda) K^*]^{-1} [K - C(\lambda)] (\Gamma_1 + i\Gamma_2) f. \tag{18}$$

Если оператор K таков, что оператор R_K имеет ограниченный обратный (например, если $\|K\| < 1$), то из (18) сразу находим

$$C_K(\lambda) = R_K' [E - C(\lambda) K^*]^{-1} [K - C(\lambda)] R_K^{-1}. \tag{19}$$

В общем случае из (18) видно, что

$$C_K(\lambda) R_K = R_K' [E - C(\lambda) K^*]^{-1} [K - C(\lambda)]. \tag{20}$$

Заметим, что $K - C(\lambda) = [E - C(\lambda) K^*] K - C(\lambda)(E - K^* K) = [E - C(\lambda) K^*] K - 2C(\lambda) R_K^2$.

Подставляя в (20), получаем

$$C_K(\lambda) R_K = R_K' K - 2R_K' [E - C(\lambda) K^*]^{-1} C(\lambda) R_K^2.$$

Известно [21, стр. 19], что $R_K' K = K R_K$. Отсюда

$$C_K(\lambda) = \{K - 2R_K' [E - C(\lambda) K^*]^{-1} C(\lambda) R_K\} | R_K \mathrm{H}. \tag{21}$$

2. Пусть T — максимальный диссипативный оператор, L и L' — граничные пространства операторов T и $-T^*$ соответственно. Пусть L_1 и L_1' — еще одна аналогичная пара граничных пространств. Обозначим $X(\lambda)$ и $X_1(\lambda)$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ соответствующие характеристические функции оператора T. Элементарно доказывается, что существуют такие изометрчиеские отображения $U: L \to L_1$ и $U': L' \to L_1'$, что

$$X_1(\lambda) \equiv U' X(\lambda) U^{-1}. \tag{22}$$

Возвратимся к оператору $T = A_K$. Выше мы полагали $L = R_K \mathrm{H}$, $L' = R_K' \mathrm{H}$. Пусть T_K — преобразование Кэли оператора A_K. В [20] показано, что, полагая

$$L_1 = (E - T_K^* T_K)^{1/2} H,\ L_1' = (E - T_K T_K^*)^{1/2} H$$

(со скалярными произведениями, индуцированными из H),

$$\Gamma_1 = \sqrt{2}(E - T_K^* T_K)^{1/2} (E - T_K)^{-1},$$

$$\Gamma_2 = \sqrt{2}(E - T_K T_K^*)^{1/2} (E - T_K^*)^{-1},$$

мы получаем такую характеристическую функцию $X_1(\lambda)$ оператора

A_K, что оператор-функция $\theta(\zeta) = -\overline{X_1\left(i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)}$ $(|\zeta|<1)$ совпадает с характеристической функцией сжатия T_K в смысле [22; 21].

Таким образом, формулы (19), (21), (22) приводят к явному выражению характеристической функции оператора T_K через $C(\lambda)$ и K. Интересно отметить, что получающиеся формулы по виду в точности совпадают с известными формулами М. С. Лившица—В. П. Потапова [23] для характеристической функции квазиунитарного оператора, хотя смысл характеристической функции $C(\lambda)$ и сжатия K в [23] совершенно иной.

Киевский отдел института
„Энергосетьпроект"

Поступила 25.X.1977

Ա. Ն. ԿՈՉՈՒԲԵՅ. Սիմետրիկ օպերատորների և նրանց լայնացման բնութագրող ֆունկցիաները (*ամփոփում*)

Ներբերվում է սիմետրիկ օպերատորի բնութագրող ֆունկցիայի նոր բնորոշում։

Ստացվել են տվյալներ սիմետրիկ օպերատորի լայնացման սպեկտրի մասին, որոնք դիֆերենցիալ օպերատորի դեպքում բնորոշվում են սահմանային պայմանների տերմիններում։

A. N. KOCHUBEI. *On characteristic functions of operators and their extensions* (summary)

A new definition of characteristic function of a symmetric operator is introduced. Some results concerning spectra of extensions of symmetric operators are obtained, which in case of a differential operator are formulated in terms of boundary conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Лившиц*. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сб., 19, № 2, 1946, 239—260.
2. *М. С. Лившиц*. К теории изометрических операторов с равными дефектными числами, ДАН СССР, 58, № 1, 1947, 13—15.
3. *М. С. Лившиц*. Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы, Матем. сб., 26, № 2, 1950, 247—264.
4. *А. В. Штраус*. К теории эрмитовых операторов, ДАН СССР, 67, № 4, 1949, 611—614.
5. *А. В. Штраус*. О расширениях и характеристической функции симметрического оператора, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 1, 1968, 186—207.
6. *А. Н. Кочубей*. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений, Матем. заметки, № 17, № 1, 1975, 41—48.
7. *И. С. Иохвидов*. Об ограниченности J-изометрических операторов, УМН, 16, № 4, 1961, 167—170.
8. *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян*. О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, Матем. иссл., 2, № 3, 1967, 64—96.
9. *K. Gustafson*. On projections of self-adjoint operators and operator product adjoints, Bull. Amer. Math. Soc., 75, № 4, 1969, 739—741.
10. *Н. Данфорд, Дж. Шварц*. Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.
10. *Н. Данфорд, Дж. Шварц*. Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.
раторов, «Наука», М., 1965.

12. *М. Л. Горбачук.* Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом, Функ. анализ, 5, № 1, 1971, 10—21.
13. *Ю. М. Березанский.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», Киев, 1965.
14. *М. Л. Горбачук, А. Н. Кочубей, М. А. Рыбак.* Диссипативные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, ДАН СССР, 205, № 5, 1972, 1029—1932.
15. *В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук.* О спектре самосопряженных расширений минимального оператора, порожденного уравнением Штурма—Лиувилля с операторным потенциалом, Укр. матем. ж., 24, № 6, 1972, 726—734.
16. *М. Л. Горбачук, А. Н. Кочубей.* Самосопряженные граничные задачи для некоторых классов дифференциально-операторных уравнений высокого порядка. ДАН СССР, 201, № 5, 1971, 1029—1032.
17. *М. И. Вишик.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Труды ММО, 1, 1952, 187—246.
18. *Ф. С. Рофе-Бекетов.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, Теория функций, функц. анализ и их приложения, 8, 1969, 3—24.
19. *Л. И. Вайнерман.* Самосопряженные граничные задачи для сильно эллиптических и гиперболических уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 218, № 4, 1974, 745—748.
20. *А. В. Штраус.* Характеристические функции линейных операторов, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, № 1, 1960, 43—74.
21. *Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, «Мир», М., 1970.
22. *Ю. Л. Шмульян.* Операторы с вырожденной характеристической функцией, ДАН СССР, 93, № 6, 1953, 985—988.
23. *М. С. Лившиц, В. П. Потапов.* Теорема умножения характеристических матриц-функций, ДАН СССР, 72, № 4 ,1950, 625—628.
24. *Т. Като.* Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972.
25. *В. М. Брук.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии, Матем. сб., 100, № 2, 1976, 210—216.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 3, 1980 Математика

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Введение

Задача факторизации в винеровской алгебре преобразований Фурье от суммируемых функций относится к сложным и важным краевым задачам теории аналитических функций. Метод Винера—Хопфа раскрыл органическую связь этой задачи с факторизацией интегральных операторов Винера-Хопфа [1, 2].

На основании теоремы Винера—Леви построена достаточно полная теория этой задачи в скалярном неособом случае [1]. Теория факторизации матриц-функций развита менее полно.

В работе [3] установлена связь отмеченных выше факторизационных задач с одним новым нелинейным интегральным уравнением. Дальнейшее развитие методов работы [3] приводит к новым результатам по этим факторизационным задачам как в неособом, так и в особом случаях, а также по системам интегральных уравнений Винера—Хопфа. Изложению этих вопросов посвящена настоящая работа.

§ 1 Вспомогательные предложения; уравнение факторизации

1°. Пусть $\mathfrak{M} = \mathbf{C}^{m\times m}$—алгебра комплексных $m\times m$ матриц с нулем 0 и с единицей I, снабженная топологией покомпонентной сходимости. Пусть $K\subset\mathfrak{M}$ — конус матриц с неотрицательными компонентами [4], вводящий частичный порядок $\geqslant$ в $\mathfrak{M}$, а $K_1\subset K$ состоит из матриц с положительными компонентами. Пусть $A, B\in\mathfrak{M}$. Запись $A>B$ означает, что $A-B\in K_1$, а $A\succ B$ означает, что $A\geqslant B$ и $A\neq B$. Запись $A_n\uparrow$ означает, что последовательность $A_n\in\mathfrak{M}$ возрастает по конусу K.

Пусть $K_p\subset K$—класс примитивных матриц: если $A\in K_p$, то $A\in K$ и $\exists k\in\mathbf{N}$, что $A^k>0$. Класс K_p совпадает с классом неотрицательных неразложимых матриц [5].

Пусть $\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)$ — некоторый набор чисел, принимающих значения ± 1. Пусть I_ε — диогональная матрица: $I_\varepsilon=(\varepsilon_i\,\delta_{ij})$. Наряду с конусом K мы будем рассматривать также следующий конусK (ε): если $A=(a_{ij})\in K(\varepsilon)$, то $a_{ij}\,\varepsilon_i\,\varepsilon_j\geqslant 0$. Элементы $K(\varepsilon)$ представляются в виде $I_\varepsilon\,B\,I_\varepsilon$, где $B\in K$. Очевидно, $K(\varepsilon)$ замкнут относительно умножения.

Пусть $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A (см. [5]), $r(A)$ непрерывным образом зависит от A. Если $A > B \geqslant 0$, то

$$r(A) > r(B). \tag{1}$$

Лемма 1. *Если $A_n \in K_\rho$, $A_n \uparrow$ и $r(A_n) \leqslant \rho$, то*

$$\exists \lim A_n = A, \ r(A) \leqslant \rho.$$

Доказательство. Пусть $B_1 \equiv A_1^k > 0$. Тогда $B_q \equiv A_q^k > 0$, $q = 1, 2, \cdots$ и $r(B_q) \leqslant \rho^k$. Пусть $a_{ij}^{(s)}(q)$ — элементы матрицы A_q^s. Имеем $0 \leqslant a_{ii}^{(2k)}(q) \leqslant \rho^{2k}$. С другой стороны

$$a_{ij}^{(k)}(q)\, a_{ji}^{(k)}(q) \leqslant a_{ii}^{(2k)}(q) \leqslant \rho^{2k}, \quad i, j = 1, \cdots, m,$$

откуда

$$a_{ij}^{(k)}(q) \leqslant \frac{\rho^{2k}}{a_{ji}^{(k)}(q)} \leqslant \frac{\rho^{2k}}{a_{ji}^{(k)}(1)}. \tag{2}$$

Из возрастания последовательностей $\{a_{ij}^{(k)}(q)\}_{q=1}^{\infty}$ и из оценок (2) следует сходимость этих последовательностей. Докажем теперь сходимость последовательностей $a_{ij}(q)$. Воспользуемся очевидным неравенством

$$a_{i\nu}(q)\, a_{\nu j}^{(k-1)}(q) \leqslant a_{ij}^{(k)}(q) \leqslant \frac{\rho^{2k}}{a_{ji}^{(k)}(q)}, \tag{3}$$

$$i, j, \nu = 1, \cdots, m.$$

Легко убедиться, что $a_{\nu j}^{(k-1)}(q) > 0$ для некоторого $j \in \{1, \cdots, m\}$. В противном случае нарушалось бы неравенство $A_1^k > 0$. Поэтому из (3) получаем оценку

$$a_{i\nu}(q) \leqslant \frac{\rho^{2k}}{a_{\nu j}^{(k-1)}(1)\, a_{ji}^{(k)}(1)},$$

что и доказывает лемму. ▶

2°. Пусть E^+ — одно из пространств $L_p^+ \equiv L_p(0, \infty)$ $(p \geqslant 1)$,

$$M(0, \infty),\ C_0[0, \infty), \text{ а } E_+^m = E^+ \times \cdots \times E^+.$$

Пусть $L = L^{m\times m}$ и $L^+ = L_+^{m\times m}$ пространства $m \times m$-матриц-функций с элементами из $L_1(-\infty, \infty)$ и L_1^+ соответственно. Если в L ввести умножение $*$ посредством свертки

$$(T_1 * T_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} T_1(x-t)\, T_2(t)\, dt,$$

то L обращается в алгебру, причем произведение $T_1 * T_2$ непрерывным образом зависит от сомножителей.

Конус $\bar{K} \subset L$ матриц-функций со значениями из K вполне правильный [4], то есть монотонная по конусу и ограниченная по норме (покомпонентно) последовательность из L сходится.

Введем винеровскую алгебру W преобразований Фурье элементов из L и его подалгебры $W_\pm \subset W$:

$$\bar{T} \in W, \text{ если } \bar{T}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} T(x)\, dx, \ T \in L, \ ims = 0;$$

$$\bar{U} \in W_+, \text{ если } \bar{U}(s) = \int_0^{\infty} U(x) e^{isx} dx, \ U \in L^+, \ ims > 0;$$

$$\bar{V} \in W_-, \quad \text{если } \bar{V}(s) = \int_0^{\infty} V(x) e^{-isx} dx, \ V \in L^+, \ ims \leqslant 0.$$

Матрицы-функции $\bar{U}$ и $\bar{V}$ голоморфны в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, комплексной плоскости и непрерывны вплоть до вещественной оси, а $\bar{T}$ непрерывна на вещественной оси.

Рассмотрим следующую задачу: для $\bar{T} \in W$ найти $\bar{U} \in W_+$ и $\bar{V} \in W_-$ так, чтобы имела место факторизация

$$I - \bar{T}(s) = [I - \bar{V}(s)]\,[I - \bar{U}(s)], \ ims = 0. \tag{4}$$

Сформулируем вторую факторизационную задачу.

Пусть Ω и $\Omega^\pm \subset \Omega$ — следующие классы интегральных операторов, действующих в E_+^m: $\hat{T} \in \Omega$, если

$$(\hat{T}f)(x) = \int_0^{\infty} T(x-t)\, f(t)\, dt, \ T \in L, \ f \in E_+^m;$$

$\hat{U} \in \Omega^+$, $\hat{V} \in \Omega^-$, если

$$(\hat{U}f)(x) = \int_0^{x} U(x-t) f(t)\, dt; \ (\hat{V}f)(x) = \int_x^{\infty} V(t-x) f(t)\, dt,$$

$U, V \in L^+$, $f \in E_+^m$.

Рассмотрим факторизацию

$$J - \hat{T} = [J - \hat{V}]\,[J - \hat{U}]. \tag{5}$$

где J — единичный оператор. (5) понимается как равенство операторов, действующих в E_+^m.

В [3] показано, что факторизации (4) и (5) имеют место тогда и только тогда, когда (U, V) удовлетворяет уравнениям

$$U(x)=T_+(x)+\int_0^\infty V(t)\,U(x+t)\,dt,\tag{6}$$

$$V(x)=T_-(x)+\int_0^\infty V(x+t)\,U(t)\,dt,$$

где $T_\pm(x)=T(\pm x)$, $x\geqslant 0$, U, V, $T_\pm \in L^+$.

Если T удовлетворяет условию $T_-(x)=T^\#(x)$, где знаком $\#$ отмечается переход к транспонированной матрице, то система (6) сводится к уравнению

$$U(x)=T(x)+\int_0^\infty U^\#(t)\,U(x+t)\,dt,\tag{7}$$

$$V=U^\#.$$

§ 2 Основная теорема

1°. Исследуем уравнение (5). Построим следующий итерационный процесс для (5). Пусть $\tau\in[0,1]$. Обозначим

$$U_\tau(x)=\tau T_+(x),\quad V_\tau(x)=\tau T_-(x).\tag{8}$$

Определим U_τ и V_τ на промежутке $\tau\in[0,n]$ рекуррентно по n, согласно равенствам.

$$U_{\tau+1}(x)=T_+(x)+\int_0^\infty V_\tau(t)\,U_\tau(x+t)\,dt,$$

$$U_{\tau+1}(x)=T_-(x)+\int_0^\infty V_\tau(x+t)\,U_\tau(t)\,dt,\tag{9}$$

$$\tau\in(n,n+1].$$

Очевидно, U_τ и V_τ — непрерывные функции от τ на $[0,\infty)$ со значениями из L^+. Обозначим

$$M_\pm=\int_0^\infty T_\pm(x)\,dx,\quad M=M_+ + M_- =\int_{-\infty}^\infty T(x)\,dx;$$

$$\alpha_\tau=\int_0^\infty U_\tau(x)\,dx,\quad \beta_\tau=\int_0^\infty V_\tau(x)\,dx,$$

$$r_1(\tau)=r(\alpha_\tau),\quad r_2(\tau)=r(\beta_\tau).$$

Матрицы-функции α_τ и β_τ непрерывно зависят от τ. Поэтому их спектральные радиусы $r_1(\tau)$ и $r_2(\tau)$ суть непрерывные функции от τ.

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$\alpha_{\tau+1} + \beta_{\tau+1} = M + \beta_\tau \alpha_\tau, \quad \tau \geqslant 0. \tag{10}$$

Доказательство. Интегрируя соотношения (9) по x от 0 до ∞ получаем

$$\alpha_{\tau+1} = M_+ + \int\limits_0^\infty V_\tau(t)\,dt \int\limits_t^\infty U_\tau(x)\,dx; \quad \beta_{\tau+1} = M_- +$$

$$+ \int\limits_0^\infty V_\tau(t)\,dt \int\limits_0^t U_\tau(x)\,dx,$$

складывая которые приходим к (10).▶

Очевидно, если T принимает значения из K, то U_τ, V_τ, α_τ, β_τ также неотрицательны и являются неубывающими функциями от τ.

Лемма 3. *Пусть* $T \in \tilde{K}$ *и* $M_\pm \in K_p$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\beta_{\tau+1}\alpha_{\tau+1} - \beta_\tau \alpha_\tau \succ 0. \tag{11}$$

Доказательство. Для $\tau \in [0,1]$ из (10) и (9) имеем

$$(\beta_{\tau+1} - \beta_\tau) + (\alpha_{\tau+1} - \alpha_\tau) = (1-\tau)\,M + \beta_\tau \alpha_\tau \succ 0,$$

поэтому выполняется хотя бы одно из неравенств $\beta_{\tau+1} \succ \beta_\tau$, или $\alpha_{\tau+1} \succ \alpha_\tau$. Из примитивности матриц $M_\pm$ следует, что $\alpha_{\tau+1}$ и $\beta_{\tau+1}$ неразложимы, поэтому

$$\beta_{\tau+1}\alpha_{\tau+1} - \beta_\tau\alpha_\tau = (\beta_{\tau+1} - \beta_\tau)\,\alpha_{\tau+1} + \beta_\tau\,(\alpha_{\tau+1} - \alpha_\tau) \succ 0,$$

что и доказывает (11) при $\tau \in [0, 1]$. Пусть $\tau \in (n, n+1]$. Докажем (11) индукцией по n. Из (10) имеем

$$(\beta_{\tau+2} - \beta_{\tau+1}) + (\alpha_{\tau+2} - \alpha_{\tau+1}) = \beta_{\tau+1}\alpha_{\tau+1} - \beta_\tau \alpha_\tau \succ 0.$$

Поэтому либо $\beta_{\tau+2} \succ \beta_{\tau+1}$, либо $\alpha_{\tau+2} \succ \alpha_{\tau+1}$. Аналогично случаю $\tau \in [0, 1]$ убеждаемся, что $\beta_{\tau+2}\alpha_{\tau+2} - \beta_{\tau+1}\alpha_{\tau+1} \succ 0$. ▶

Лемма 4. *Пусть* $T \in \tilde{K}$; $M_\pm \in K_p$; $r(M) \leqslant 1$. *Тогда* а) *справедливы оценки*

$$r_1(\tau) < 1, \quad r_2(\tau) < 1, \quad \tau \in [0, \infty); \tag{12}$$

б) *существуют пределы* $\lim\limits_{\tau\to\infty} \alpha_\tau = \alpha$, $\lim\limits_{\tau\to\infty} \beta_\tau = \beta$, *причем*

$$\alpha, \ \beta \in K_p; \ r(\alpha) \leqslant 1; \ r(\beta) \leqslant 1; \tag{13}$$

в) *справедливо соотношение*

$$\alpha + \beta = M + \beta\alpha; \ (I-\beta)(I-\alpha) = I - M. \tag{14}$$

Доказательство. Докажем (12) от противного. Пусть хотя бы одно из неравенств (12) нарушается. Тогда $\exists s > 0$ такое, что

$$\begin{array}{ll} \text{либо} & r_1(s+1) = 1, \ r_1(\tau+1) < 1 \ (\tau < s), \ r_2(s+1) \leqslant 1, \\ \text{либо} & r_2(s+1) = 1, \ r_2(\tau+1) < 1 \ (\tau < s), \ r_1(s+1) \leqslant 1. \end{array} \tag{15}$$

Из (10) имеем

$$[I-\beta_{s+1}][I-\alpha_{s+1}]=I-M+\delta, \tag{16}$$

где $\delta=\beta_{s+1}\alpha_{s+1}-\beta_s\alpha_s\succ 0$.

Покажем, что существует положительный вектор $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_m)>0$, такой, что

$$[I-\beta_{s+1}][I-\alpha_{s+1}]\xi=0.$$

Действительно, при выполнении первого из условий (15) в качестве ξ возьмем неподвижный положительный вектор матрицы α_{s+1}, существование которого следует из теоремы Перрона [6]. Если же $r_1(s+1)<1$ и $r_2(s+1)=1$, то в качестве ξ возьмем $\xi=[I-\alpha_{s+1}]^{-1}\eta$, где η — положительный неподвижный вектор матрицы β_{s+1}. Положительность ξ следует из положительности $[I-\alpha_{s+1}]^{-1}\in K_p$.

Из (16) имеем ($\nu=\delta\xi\succ 0$)

$$(I-M)\xi=-\nu. \tag{7}$$

Покажем, что это равенство противоречивое. Действительно, при $r(M)<1$ из $-\nu\prec 0$ и из $(I-M)^{-1}\in K_p$ следует $\xi\prec 0$. Если же $r(M)=1$, то уравнение (17) не имеет решения ξ, поскольку ν не ортогонален положительному решению $\tilde{\xi}$ сопряженного уравнения $(I-\tilde{M})\tilde{\xi}=0$. Полученное противоречие приводит к оценкам (12).

Так как при $\tau>0$ матрицы α_τ и β_τ принимают значения из K_p, возрастают по τ и удовлетворяют условиям (12), то из леммы 1 следует второе утверждение леммы. Совершая предельный переход в (10) при $\tau\to\infty$ получаем (14).

На основании теоремы Б. Леви заключаем, что при выполнении условия леммы 4, существуют пределы: $\alpha_\tau\to\alpha\in K_p$ и $\beta_\tau\to\beta\in K_p$ в $L^+_{m\times m}$.

С учетом леммы о мажоранте, аналогичной теореме 2.2 работы [3], приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $T\in L$, матрицы $M_\pm=\int\limits_0^\infty|T_\pm(x)|\,dx$ примитивны и $r(M_+ + M_-)\leqslant 1$. Тогда существует каноническое решение (U,V) уравнения* (6), *причем $r(\alpha)\leqslant 1$, $r(\beta)\leqslant 1$, где*

$$\alpha=\int\limits_0^\infty|U(x)|\,dx,\quad \beta=\int\limits_0^\infty|V(x)|\,dx.$$

Из (12) и (14) видно, что если $T\in\tilde{K}$ и $r(M)<1$, то $r(\alpha)<1$ и $r(\beta)<1$. Если же $r(M)=1$, то выполняется хотя бы одно из равенств $r(\alpha)=1$, $r(\beta)=1$. В симметрическом случае $T(-x)=T^*(x)$ имеем $V=U^*$ и $\beta=\alpha^*$. Тогда из условия $r(M)=0$ следует, что

$$r(\alpha)=r(\beta)=1. \tag{18}$$

2°. Полученные выше леммы 1—4 легко распространяются на тот случай, когда конус K заменяется конусом $K(\varepsilon)$. Рассмотрим уравнение (6), где T принимает значения из $K(\varepsilon)$. Исходя из связи между конусами K и $K(\varepsilon)$, нетрудно свести этот случай к случаю, когда T принимает значения из K. Действительно, применяя к уравнениям (6) слева и справа матрицу I_ε, с учетом $I_\varepsilon^2=I$ получаем новое уравнение относительно $I_\varepsilon U I_\varepsilon$ и $I_\varepsilon V I_\varepsilon$, где матрица-функция T заменена матрицей-функцией $I_\varepsilon T I_\varepsilon$ со значениями из K.

3°. Ранее известные результаты по факторизации (4) относятся к случаю, когда выполяется условие

$$\det [I-\overline{T}(s)] \neq 0, \ -\infty < s < +\infty \tag{19}$$

и так называемые частные индексы равны нулю (см. [12]). Из теоремы 1 следует новый результат по факторизации (4), относящийся к случаю, когда нарушается условие (19). Так обстоит дело, когда

$$T \in \overline{K}, \ M_\pm \in K_p, \ r(M)=1,$$

или тогда, когда $I_\varepsilon T I_\varepsilon \in \overline{K}$, $I_\varepsilon M_\pm I_\varepsilon \in K_p$, $r(M)=1$. В обоих случаях имеем $\det[I-\overline{T}(0)]=\det[I-M]=0$.

В случае же, когда $r(M)<1$, теорема 1 приводит к новому результату по факторизации (4), заключающемуся в оценках $r(\alpha)<1$ и $r(\beta)<1$.

§ 3. Частные случаи

В настоящем параграфе будем рассматривать уравнение (6) в двух важных частных случаях.

1°. Рассмотрим уравнение (6) в том частном случае, когда $T \in \overline{K}$ и матрица M принадлежит классу K_2 матриц Минковского—Леонтьева (см. [6]), то есть удовлетворяет условиям

$$\mu_{ij} \equiv (M)_{ij} \geqslant 0, \ \mu = \max_j \ \mu_j \leqslant 1, \text{ где } \mu_j = \sum_i \mu_{ij}. \tag{20}$$

Класс K_2 включает в себя класс стохастических матриц, для которых выполняется условие $\mu_j=1$ $(j=1,\cdots,m)$.

В рассматриваемом частном случае удается получить важную дополнительную информацию о матрицах β_- и β.

Перепишем (9) в матричных элементах и положим $\tau=n$:

$$\alpha_{ij}(n+1)+\beta_{ij}(n+1)=\mu_{ij}+\sum_{k=1}^{m} \beta_{ik}(n)\,\alpha_{kj}(n), \tag{21}$$

где

$$\alpha_n=(\alpha_{ij}(n)), \beta_n=(\beta_{ij}(n)).$$

Введем обозначения

$$\nu_i = \sum_j \mu_{ij}, \quad \nu = \max \nu_i,$$

$$\varkappa_i(n) = \sum_j \alpha_{ij}(n), \quad \alpha_j(n) = \sum_i \alpha_{ij}(n), \quad \beta_j(n) = \sum_i \beta_{ij}(n).$$

Лемма 5. *При $\mu \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\beta_j(n) \leqslant \mu_j \ (j = 1, \cdots, m). \tag{22}$$

Доказательство. Суммируя (21) по i получаем

$$\alpha_j(n+1) + \beta_j(n+1) = \mu_j + \sum_s \beta_s^n(n)\, \alpha_{sj}(n),$$

откуда

$$\beta_j(n+1) = \mu_j - [\alpha_j(n+1) - \alpha_j(n)] - \sum_s [1 - \beta_s(n)]\, \alpha_{sj}(n),$$

откуда следует (22) индукцией по n.

Аналогично

$$\nu \leqslant 1 \Rightarrow \varkappa_i(n) \leqslant \nu_i \ (i = 1, \cdots, m). \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует существование канонического решения (предела итерационного процесса (9)) уравнения (6) в том случае, когда матрица M дважды стохастическая или мажорируется такой матрицей.

В симметрическом случае, когда M стохастическая, то β и α также являются стохастическими. Этот факт следует из равенства (18) и из оценок (22), (23).

В том случае, когда выполняются условия

$$\mu \leqslant 1, \quad M_+ \in K_p, \tag{24}$$

из результатов предыдущего и настоящего параграфов следует существование канонического решения уравнения (6), причем выполняется условие

$$\beta_j = \sum_i \overset{0}{\beta}_{ij} \leqslant \mu_j. \tag{25}$$

Результаты настоящего пункта получены совместно с Р. Г. Бадалян.

2°. В работах [3, 7] было показано, что существует простая связь между уравнениями (6) и обобщенными уравнениями Амбарцумяна. Эта связь заключается в следующем. Пусть матрицы-функции $T_\pm$ имеют представление

$$T_\pm(x) = \int_a^b e^{-xs}\, G_\pm(s)\, d\sigma(s), \quad (a, b) \subset (0, \infty), \tag{26}$$

где σ — неубывающая функция, а $G_\pm > 0$ — суть $m \times m$ матрицы-функции, удовлетворяющие условиям

$$g_{\pm} \in K_p, \ r(g_+ + g_-) \leqslant 1, \text{ где } g_{\pm} = \int_a^b G_{\pm}(s) \frac{d\sigma(s)}{s}. \tag{27}$$

Пусть матрицы-функции $H_{\pm}$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} H_+(s) &= G_+(s) + \int_a^b \frac{H_-(p) H_+(s)}{s+p} d\sigma(p), \\ H_-(s) &= G_-(s) + \int_a^b \frac{H_-(s) H_+(p)}{s+p} d\sigma(p) \end{aligned} \tag{28}$$

и условиям

$$H_+ \geqslant 0, \ \int H_{\pm}(s) \frac{d\sigma(s)}{s} < +\infty. \tag{29}$$

Тогда уравнение (6) обладает решением вида

$$U(x) = \int_a^b e^{-xs} H_+(s) \, d\sigma(s), \ V(x) = \int_a^b e^{-xs} H_-(s) \, d\sigma(s). \tag{30}$$

Уравнение (28) представляет собой обобщение известного уравнения Амбарцумяна в теории переноса [8] на несимметрический матричный случай. Применение метода предыдущего параграфа („непрерывизация" итерационного процесса, оценка спектральных радиусов) в сочетании с методом изучения уравнения (28), изложнннымв [3], приводит к новым результатам по уравнению (28). Таким путем получается

Теорема 2. *При выполнении условий* (27) *уравнение* (28) *имеет каноническое решение (в смысле работы* [3]), *причем*

$$r\left[\int H_{\pm}(s) \frac{d\sigma(s)}{s}\right] \leqslant 1. \tag{31}$$

По формуле (30) каноническое решение уравнения (28) переходит в каноническое решение уравнения (6). ▶

§ 4. Однородное уравнение Винера-Хопфа

В качестве приложения результатов § 2 в настоящем параграфе будет рассмотрено уравнение

$$S(x) = \int_0^{\infty} T(x-t) \, S(t) \, dt. \tag{32}$$

Здесь T — заданная матрица-функция, удовлетворяющая условиям

$$T \in \widetilde{K}, \ T_+^{\#}(x) = T_-(x), \ M_+ \in K_p, \ r(M) = 1, \tag{33}$$

а S—искомая положительная вектор-функция медленного (полиномиального) роста. Этой задаче в скалярном случае посвящено большое число исследований (см. [10—12]).

В § 2 было показано, что при выполнении условий (33) существует факторизация (5), где U является каноническим решением уравнения (7) и $V=U^*$, причем выполняются условия

$$U \in \widetilde{K}, \quad \alpha \equiv \int\limits_0^{\infty} U(x)\,dx \in K_p, \quad r(\alpha)=1. \tag{34}$$

Согласно теореме Перрона, существуют положительные неподвижные векторы f и $\widetilde{f}$ матриц α^* и α соответственно.

$$\widetilde{f}=\alpha\widetilde{f}, \quad f=\alpha^* f.$$

Наряду с (32) рассмотрим факторизованное уравнение

$$(J-\hat{V})(J-\hat{U})\,S=0. \tag{35}$$

Оно сводится к системе

$$(J-\hat{V})\,F=0, \tag{36}$$

$$(J-\hat{U})\,S=F. \tag{37}$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что уравнение (36) обладает решением

$$F(x)=f=\text{const}, \tag{38}$$

поэтому уравнение (35) имеет решение S, определяемое из уравнения восстановления

$$S(x)=f+\int\limits_0^x U(x-t)\,S(t)\,dt. \tag{39}$$

Существование решения (39) следует из результатов книги [9]. Это решение единственно в классе локально интегрируемых вектор-функций и обладает свойствами

$$0<S(x)\uparrow \text{ по } x; \quad \sum_{k=1}^{m} S_k(x)\uparrow\infty \text{ при } x\to\infty; \tag{40}$$

S—абсолютно непрерывна на $[0, \infty)$. Эти свойства легко следуют из формулы

$$S(x)=\left[I+\int\limits_0^x \Phi(t)\,dt\right]f, \tag{41}$$

где Φ — локально интегрируемая матрица-функция, определяемая из матричного уравнения восстановления

$$\Phi(x)=U(x)+\int_0^x U(x-t)\,\Phi(t)\,dt. \tag{42}$$

Пусть ядро T удовлетворяет условию

$$\exists r_0>0 \quad \text{такое, что} \quad \int_0^{r_0} T(x)\,dx\in K_p, \quad \int_{r_0}^{\infty} T(x)\,dx\in K_p. \tag{43}$$

Так как $U\geqslant T$, то

$$\sigma_1\equiv\int_0^{r_0} xU(x)\,dx\in K_p, \quad \sigma_2\equiv\int_{r_0}^{\infty} U(x)\,dx\in K_p.$$

Из неразложимости матриц σ_1 и σ_2 следует, что векторы $\sigma_1\tilde{f}$ и $\sigma_2\tilde{f}$ положительны. Поэтому $\exists a,\ b>0$ такие, что

$$f\leqslant a\sigma_1\tilde{f}, \quad f<b\sigma_2\tilde{f}. \tag{44}$$

Лемма 6. *Пусть выполняется условие* (43) *и* a, b *удовлетворяют условию* (44). *Тогда выполняется неравенство*

$$S(x)<(ax+b)\tilde{f}. \tag{45}$$

Доказательство. Из (44) следует неравенство

$$f\leqslant a\left[\int_0^x U(t)\,t\,dt\right]\tilde{f}+(ax+b)\left[\int_x^{\infty} U(t)\,dt\right]\tilde{f}. \tag{46}$$

С учетом $\tilde{f}=\alpha f$, (46) можно переписать в виде

$$f+\int_0^x U(x-t)[at+b]\,\tilde{f}\,dt\leqslant(ax+b)\,\tilde{f}. \tag{47}$$

Путем рассмотрения итерационного процесса для (39) легко убедиться, что из неравенства (47) следует (45).

Аналогично скалярному случаю (см. [10]) можно убедиться, что вектор-функция S, определяемая из (39), удовлетворяет уравнению (32). Поэтому справедлива

Теорема 3. *Существует положительное решение* S *уравнения* (32), (33). *Оно обладает свойствами* (40). *Справедлива формула* (41). *При выполнении условия* (43) *имеет место асимптотика*

$$S(x)=O(x), \quad x\to\infty. \tag{48}$$

Этот результат в скалярном случае получен Ф. Спитцером [11], причем для построения S была предложена другая процедура.

НИИ ФКС ЕГУ

Поступила 15.IV.1979

Ն. Բ. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ. Մատրից-ֆունկցիաների ֆակտորիզացիան և ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումները *(ամփոփում)*

Աշխատանքում լուծվել է Վիների հանրահաշվում մատրից-ֆունկցիաների ֆակտորիզացիայի մի խնդիր՝ հատուկ դեպքում, օժանդակ ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման ուսումնասիրման միջոցով։ Բերված է ստացված արդյունքի մի կիրառություն Վիներ-Հոպֆի ինտեգրալ հավասարումների տեսության մեջ։

N. B. YENGIBARIAN. *Factorization of matrix-functions and nonlinear integral equations* (summary)

In this paper a factorization problem in Wiener algebra of matrix-functions is solved in a special case, by use of an auxiliary nonlinear integral equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, 5 (83), 1958.
2. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, 2, 1958.
3. *Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян.* Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения, Мат. сб., 97 (139), 1 (5), 1975, 35—58.
4. *М. А. Красносельский.* Положительные решения операторных уравнений, ГИФМЛ, М., 1962.
5. *С. Г. Крейн* (ред.). Функциональный анализ, «Наука», М., 1972.
6. *Р. Беллман.* Введение в теорию матриц, «Наука», М., 1969.
7. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян.* О факторизации интегральных операторов, ДАН СССР, 206, 4, 1972.
8. *В. А. Амбарцумян.* Научные труды, т. 1, Ер., 1960.
9. *Р. Беллман, К. Кук.* Дифференциально-разностные уравнения, «Мир», М., 1967.
10. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Арабаджян.* О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера—Хопфа, препринт НИИ ФКС ЕГУ, 79—1, 1979.
11. *F. Spitzer.* The Wiener-Hopf equation... Duke Math. Journ., 24, 327, 1957.
12. *В. В. Соболев.* Курс теоретической астрофизики, М., «Наука», 1967.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

675—6