ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով՝ նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по собому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of types script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the, author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal,the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been caried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV. № 2, 1980 Математика

Г. Г. ЭМИН

МНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОДНИМ КОНЕЧНЫМ МОДУЛЕМ, И ЛОКАЛИЗАЦИИ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ НАД ВСЕМИ КОЛЬЦАМИ

В работе [4] были описаны многообразия, а в [5]—строгие радикалы категории **Mod** модулей над всеми кольцами. Объекты этой категории—всевозможные пары (A, U), где U—ассоциативное кольцо не обязательно с единицей, A—правый U-модуль. Множество морфизмов модуля (A, U) в модуль (B, V) состоит из пар (φ_A, φ_U), где φ_A—гомоморфизм абелевой группы A в абелеву группу B, а φ_U—гомоморфизм кольца U в кольцо V, причем $(a\cdot u)\varphi_A = a\varphi_A\cdot u\varphi_U$, $a\in A$, $u\in U$. Такая пара отображений называется гомоморфизмом модуля (A, U) в модуль (B, V).

В данной статье доказано, что многообразие категории **Mod**, порожденное одним конечным модулем, конечнобазируемо и имеет только конечное число подмногообразий. Многообразия категории **Mod**, порожденные конечным модулем, и только они, являются кроссовыми многообразиями этой категории. Кроме того, даны описания шпехтовых, кроссовых и почти кроссовых многообразий этой категории и доказано, что в категории **Mod** имеется лишь одна нетривиальная подкатегория локализации.

Настоящая статья содержит подробное изложение результатов, анонсированных в [10].

§ 1. Шпехтовы, кроссовы и почти кроссовы многообразия

В работе [4] дано следующее описание многообразий категории **Mod**.

Зафиксируем тройку вида (n, T, T'), где n — натуральное число или нуль, а T и T' — многообразия категории ассоциативных колец **As**, удовлетворяющие условию $T'\subseteq T\cap \mathrm{T}(n)$, где $T(n)$ — многообразие категории **As** с одним тождеством $nx=0$. Обозначим через $N(n, T, T')$ полную подкатегорию категории **Mod**, порожденную всеми теми модулями (A, U), для которых выполнены условия $na=0$ для любого $a\in A$, кольцо $U\in T$ и $a\cdot u=0$, для любого $a\in A$ и для любого $u\in V_{T'}(U)$, где $V_{T'}(U)$—значение вербала многообразия T' на кольце U.

$N(n, T, T')$—многообразие категории **Mod**, и для любого многообразия N категории **Mod** существует такая единственная тройка (n, T, T') что $N=N(n, T, T')$ ([4], теорема 2.2).

В категории Mod верна теорема Биркгофа о многообразиях ([4], теорема 2.1). Пусть $N = N(n, T, T')$ — многообразие категории Mod, а $(A(X), U(Y))$ — свободный модуль с системой свободных образующих (X, Y), где $X \cap Y = \varnothing$ и X и Y — счетные множества ([4], стр. 215). Значение вербала V_N на модуле $(A(X), U(Y))$ равно $(nA(X) + \mathbf{A}(X) \cdot V_{T'}(U(Y)), V_T(U(Y)))$, ([4], предложение 2.5), поэтому многообразие N состоит из всех таких модулей (A, U), что в кольце U выполнены тождества многообразия колец T, а в модуле (A, U) выполнены тождество $nx = 0$ и битождества ([7], стр. 103) $a \cdot u = 0$, где $a \in A(X)$ и $u \in V_{T'}(U(Y))$.

Многообразие будем называть конечнобазируемым, если его можно задать конечным числом тождеств и битождеств. Конечнобазируемое многообразие будем называть шпехтовым, если каждое его подмногообразие конечнобазируемо.

Лемма 1.1. *Многообразие $N_1 = N(n_1, T_1, T_1')$ тогда и только тогда является подмногообразием многообразия $N_2 = N(n_2, T_2, T_2')$, когда n_1 — делитель n_2, или $n_2 = 0$, $T_1 \subseteq T_2$ и $T_1' \subseteq T_2'$.*

Доказательство. Пусть многообразие $N_1 \subseteq N_2$, тогда любой модуль (A, U) многообразия N_1 лежит в многообразии N_2. Модуль $(Z_{n_1}, O) \in N_1$, следовательно, $n_2 Z_{n_1} = O$. Значит, или n_2 кратно n_1, или же $n_2 = 0$. Если ассоциативное кольцо $U \in T_1$, то модуль $(O, U) \in N_1$. Значит, модуль $(O, U) \in N_2$, следовательно кольцо $U \in T_2$. Получили, что $T_1 \subseteq T_2$. Далее, для любого модуля $(A, U) \in N_1$ из $A \cdot V_{T_1'}(U) = O$ следует $A \cdot V_{T_2'}(U) = O$. Поэтому ([4], доказательство теоремы 2.2) $V_{T_2'}(U) \subseteq V_{T_1'}(U)$ для любого кольца $U \in T_1$. Значит для любого кольца $U \in T_1$ $V_{T_1 \cap T_2'}(U) = V_{T_2'}(U) \subseteq V_{T_1'}(U) = V_{T_1 \cap T_1'}(U)$. Отсюда следует, что $T_1' = T_1 \cap T_1' \subseteq T_1 \cap T_2' \subseteq T_2'$.

Обратное утверждение леммы очевидно. Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Многообразие $N(n, T, T')$ категории* Mod *тогда и только тогда шпехтово, когда T — шпехтово многообразие категории ассоциативных колец.*

Доказательство дано в [10].

Модуль (A, U) будем называть конечным модулем, если A — конечная абелева группа и U — конечное кольцо.

Модуль (A, U) называется конечнопорожденным, если этот модуль порождается парой конечных множеств $(\overline{A}, \overline{U})$ $(\overline{A} \subseteq A, \overline{U} \subseteq U)$, то есть если кольцо U порождается конечным можеством $\overline{U}$ и U-модуль A порождается конечным множеством $\overline{A}$.

Модуль называется локально-конечным, если все его конечнопорожденные подмодули конечны.

Лемма 1.2. *Модуль (A, U) тогда и только тогда локально-конечен, когда A — локально-конечная абелева группа и U — локально-конечное кольцо.*

Доказательство. Пусть (A, U) — локально-конечный модуль. Если A_1 — конечнопорожденная подгруппа группы A, то (A_1, O) — конечнопорожденный подмодуль модуля (A, U). Значит, A_1 — конечная группа. Получили, что A — локально-конечная абелева группа. Аналогичные рассуждения показывают, что U — локально-конечное кольцо.

Обратно, пусть A — локально-конечная абелева группа, U — локально-конечное кольцо и (A_1, U_1) — произвольный конечнопорожденный подмодуль модуля (A, U), причем (A_1, U_1) порождается парой конечных множеств $(\overline{A}, \overline{U})$, $\overline{A} \subseteq A_1$, $\overline{U} \subseteq U_1$, U — локально-конечное кольцо, поэтому U_1 — конечное кольцо. Из того, что $|\overline{A}| < \infty$ и $|U_1| < \infty$ следует, что $|\overline{A} \cdot U_1| < \infty$, где $\overline{A} \cdot U_1 = \{a \cdot u \mid a \in \overline{A},\ u \in U_1\}$. Очевидно, что абелева группа A_1 порождается множеством $\overline{A} \cup \overline{A} \cdot U_1$, которое является конечным множеством. Поскольку A — локально-конечная абелева группа, то A_1 — конечная группа. Получили, что (A_1, U_1) — конечный модуль. Лемма доказана.

Многообразие категории **Mod** будем называть локально-конечным, если все его объекты являются локально-конечными модулями.

Предложение 1.1. Многообразие $N(n, T, T')$ тогда и только тогда локально-конечно, когда $n \neq 0$ и T — локально-конечное многообразие категории ассоциативных колец.

Следует из леммы 1.2.

Очевидно, что многообразие N категории **Mod** тогда и только тогда локально-конечно, когда каждый конечнопорожденный модуль многообразия N конечен. Легко видеть, что верна следующая

Лемма 1.3. (ср. [1], лемма 1.1). *Каждое локально-конечное многообразие категории* **Mod** *порождается своими конечными модулями.*

Модуль будем называть критическим модулем, если он конечен и не лежит в многообразии, порожденном своими собственными подмодулями и собственными гомоморфными образами.

Для дальнейшего нам необходимо доказать аналог теоремы 1.2 работы [1] для категории **Mod**. Поэтому надо доказать аналоги некоторых утверждений [1], необходимые для доказательства этой теоремы.

Лемма 1.4. *Пусть N — локально-конечное многообразие категории* **Mod**, *N' — его подмногообразие. Тогда существует критический модуль $(A, U) \in N$, не лежащий в N'.*

Доказательство. По лемме 1.3 существует конечный модуль $(B, V) \in N$, не лежащий в N'. Выберем такой модуль (A, U) с этим свойством, что сумма порядков $m = |A| + |U|$ наименьшая. Теперь остается дословно повторить доказательство леммы 1.2 работы [1].

Из леммы 1.4 вытекает (см. [1], предложение 1.1).

Предложение 1.2. Каждое локально-конечное многообразие категории **Mod** порождается своими критическими модулями.

Следствие 1.1. Если локально-конечное многообразие категории **Mod** содержит только конечное число критических модулей, то оно содержит только конечное число подмногообразий.

Лемма 1.5. *Многообразие категории* **Mod** *тогда и только тогда шпехтово, когда оно конечнобазируемо и для его подмногообразий выполнено условие минимальности.*

Доказательство. Пусть многообразие $N(n, T, T')$ конечнобазируемо и для его подмногообразий выполнено условие минимальности. Тогда T—конечнобазируемое многообразие ассоциативных колец и для подмногообразий подмногообразия $N(1, T, T(1))$, то есть для подмногообразий многообразия T выполнено условие минимальности. Из леммы 1.3 работы [1] следует, что T — шпехтово многообразие категории **Ав**. Значит, в силу теоремы 1.1, $N(n, T, T')$— шпехтово многообразие категории **Mod**.

Обратно, если $N(n, T, T')$ — шпехтово многообразие категории **Mod**, то T, следовательно и $T' \subseteq T$, шпехтовы многообразия категории **Ав**. Значит, в силу леммы 1.3 работы [1], для подмногообразий этих многообразий выполнено условие минимальности. Лемма доказана.

Следствие 1.2. Если многообразие конечнобазируемо и содержит только конечное число подмногообразий, то оно шпехтово.

Многообразие категории **Mod** будем называть кроссовым, если оно локально-конечно, конечнобазируемо и в нем существует только конечное число неизоморфных критических модулей.

Из следствий 1.1 и 1.2 получаем следующее предложение.

Предложение 1.3. Каждое кроссово многообразие категории **Mod** шпехтово. Подмногообразие кроссова многообразия кроссово.

Пусть M — многообразие категории **Mod**, $N = N(n, T, T')$ — его подмногообразие. Пусть i — натуральное число и $S[i]$— совокупность, состоящая из тождества $nx = 0$ и всех тождеств и битождеств многообразия N, содержащих не более i переменных из множества Y (см. начало параграфа). Эта совокупность тождеств и битождеств выделяет в многообразии M подмногообразие $N_M[i] \supseteq N$, причем пересечение таких многообразий по всем натуральным i совпадает с N. Если $N_M[i] = N$ для некоторого натурального i, то наименьшее такое i будем называть рангом многообразия N внутри M. Если $N_M[i] \neq N$ при всех i, то скажем, что N имеет внутри M бесконечный ранг.

Подмодуль (B, V) модуля (A, U) будем называть $(1, i)$-порожденным подмодулем, если V— i-порожденное подкольцо кольца U и V-модуль B порождается одним элементом $a \in A$.

Многообразие $N_M[i]$ содержит все такие модули (A, U) многообразия M, что все их $(1, i)$-порожденные подмодули лежат в многообразии N.

Повторив рассуждения, приведенные в работе [1] на стр. 276—277, мы получим аналоги соответствующих лемм, предложений и следствий. Они формулируются точно так же как и в [1], только вместо слов r-порожденная (алгебра, подалгебра) надо подставить слова $(1, r)$-порожденный (модуль подмодуль).

Из следствия 1.1 и аналогов следствий 1.4 и 1.6 работы [1] вытекает аналог теоремы 1.2 работы [1] для случая категории Mod.

Теорема 1.2. *Локально-конечное многообразие категории* Mod *тогда и только тогда имеет только конечное число подмногообразий, когда оно имеет только конечное число неизоморфных критических модулей.*

Теорема 1.3. *Многообразие $N(n, T, T')$ категории* **Mod** *тогда и только тогда кроссово, когда $n \neq 0$ и T— кроссово многообразие категории ассоциативных колец.*

Доказательство дано в [10].

Теорема 1.4. *Многообразие $N(n, T, T')$ категории* **Mod** *тогда и только тогда является кроссовым, когда оно содержит только конечное число подмногообразий.*

Доказательство. Если $N(n, T, T')$—кроссово многообразие категории **Mod**, то согласно теореме 1.3 и теореме 1.1 работы [1] $n \neq 0$ и T и T'—кроссовы многообразия категории **As**. Поэтому, в силу леммы 1.1 и теоремы 2.3 работы [1], многообразие $N(n, T, T')$ имеет только конечное число подмногообразий.

Обратно, если многообразие $N(n, T, T')$ содержит только конечное число подмногообразий, то его подмногообразия $N(n, T(1), T(1))$ ($T(1)$ —тривиальное многообразие категории **As**, состоящее из одного нулевого кольца) и $N(1, T, T(1))$ также содержат только конечное число подмногообразий. Значит, $n \neq 0$, и многообразие T содержит только конечное число подмногообразий. Из теоремы 2.3 работы [1] следует, что T — кроссово многообразие. Остается сослаться на теорему 1.3.

Теорема 1.5. *Многообразие $N(n, T, T')$ тогда и только тогда является кроссовым многообразием категории* **Mod**, *когда решетка его подмногообразий удовлетворяет условию максимальности.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.4.

Достаточность. Пусть решетка подмногообразий многообразия $N(n, T, T')$ удовлетворяет условию максимальности. Тогда $n \neq 0$. Действительно, если $n = 0$, то мы имеем бесконечную возрастающую цепочку $N(2, T(1), T(1)) \subset N(4, T(1), T(1)) \subset N(8, T(1), T(1)) \subset \cdots$ $\cdots$ подмногообразий многообразия $N(0, T, T')$. Получили противоречие. Аналогичным образом можно доказать, что решетка подмногообразий многообразия T удовлетворяет условию максимальности. Значит, в силу теоремы 2.4 работы [1], T — кроссово многообразие. Остается сослаться на теорему 1.3.

Теорема 1.6. *Многообразие категории* **Mod** *тогда и только тогда кроссово, когда оно порождается одним конечным модулем.*

Доказательство дано в [10].

Из теоремы 1.3, теоремы 1.6 и следствия 2.10 работы [1] следует

Теорема 1.7. *Для того чтобы многообразие категории* Mod *порождалось одним конечным модулем, необходимо и достаточно, чтобы в нем были выполнены тождества вида* $nx = 0$, $my = 0$ *и* $y_1, \cdots, y_k = f(y_1, \cdots, y_k)$, $\nu(f) > k$, *где* n, m *и* k*—целые числа,* $f(y_1, \cdots \cdots, y_k)$*— некоммутативный полином с целыми коэффициентами от* $y_1, \cdots, y_k$ *и* $\nu(f)$*—нижняя степень* f, *то есть минимум степеней одночленов, входящих в* f.

Теорема 1.8. *Многообразие категории* Mod, *порожденное одним таким модулем* (A, U), *что* U*—конечное кольцо, шпехтово.*

Доказательство. Пусть $Var(A, U) = N(n, T, T')$. При доказательстве теоремы 1.6 было показано, что $T = Var(U)$— кроссово многообразие категории Ав. Значит, T — шпехтово многообразие. Остается сослаться на теорему 1.1.

Из предложения 1.1, предложения 3.1 работы [2] и теоремы 2.3 работы [4] следует

Предложение 1.4. Произведение двух локально-конечных многообразий категории Mod является локально-конечным многообразием этой категории.

Из теоремы 1.3, теоремы 3.1 работы [2] и теоремы 2.3 работы [4] следует

Теорема 1.9. *Произведение двух кроссовых многообразий категории* Mod *является кроссовым многообразием этой категории.*

Многообразие категории Mod называется почти кроссовым, если оно не является кроссовым, но каждое его собственное подмногообразие кроссово.

Каждое некроссово многообразие содержит минимальное некроссово многообразие, то есть почти кроссово многообразие ([2], стр. 670).

Теорема 1.10. *Многообразие* $N(n, T, T')$ *категории* Mod *тогда и только тогда почти кроссово, когда или* $n = 0$ *и* $T = T' = T(1)$, *или же* $n = 1$, *следовательно,* $T' = T(1)$ *и* T *— почти кроссово многообразие категории* Ав.

Доказательство. Пусть $N(n, T, T')$ — почти кроссово многообразие. Так как $N(n, T, T')$ не является кроссовым многообразием категории Mod, то из теоремы 1.3 следует, что или $n = 0$ или же T — некроссово многообразие категории Ав. Пусть $n = 0$, если $T \neq T(1)$, то многообразие $N(0, T(1), T(1))$ является собственным подмногообразием многообразия $N(0, T, T')$ и не является кроссовым многообразием. Это противоречит почти кроссовости многообразия $N(0, T, T')$. Значит, $T = T(1)$, из чего следует, что и $T' = T(1)$.

Пусть теперь T — некроссово многообразие. Тогда $n = 1$, так как в противном случае многообразие $N(1, T, T(1))$ являлось бы собственным подмногообразием многообразия $N(n, T, T')$, не являющимся кроссовым многообразием. А это противоречило бы почти кроссовости многообразия $N(n, T, T')$.

Обратное утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

§ 2. Подкатегории локализаций

В работе [3] дано обобщение понятия подкатегории локализации абелевой категории, введенного Габриэлем [6], на широкий класс неабелевых категорий, удовлетворяющих некоторым условиям. Категория **Mod** удовлетворяет этим условиям ([4], условия 1—5), следовательно все результаты работы [3] верны для **Mod**. Напомним некоторые определения.

Мономорфизм $\mu: U \to A$, представимый в виде произведения $\mu = \mu_1, \cdots, \mu_n$ нормальных мономорфизмов μ_i называется достижимым мономорфизмом.

Пусть **L** — подкатегория категории **K**. Объекты категории **K**, принадлежащие подкатегории **L** будем называть **L**-объектами. Идеал $(U, \sigma]$ объекта A называется **L**-идеалом, если $U \in \mathbf{L}$.

Пусть зафиксирована некоторая вполне плотная подкатегория **L** категории **K** ([3], 1.17). Морфизм $\alpha: A \to B$, ядром которого служит **L**-идеал объекта A, называется морфизмом с **L**-ядром. Достижимый подобъект $(U, \mu]$ объекта A, для которого существует по крайней мере один такой нормальный ряд $(U, \mu] = (U_0, \mu_0] \lhd (U_1, \mu_1] \Delta \cdots \Delta (U_n, \mu_n] = A_1, 1_A]$, что для каждого $i = 0, 1, \cdots, n-1$, нормальный фактор-объект объекта U_{i+1} по идеалу $(U_i, \mu_i]$ является **L**-объектом, называется достижимым подобъектом с **L**-факторами, а мономорфизм μ называется достижимым мономорфизмом с **L**-факторами.

По вполне плотной подкатегории **L** строятся фактор-категория **K/L** и канонический функтор $T: \mathbf{K} \to \mathbf{K/L}$, соответствующий вполне плотной подкатегории **L** (см. [3], § 2).

Вполне плотная подкатегория **L** категории **K** называется подкатегорией локализации, если канонический функтор $T: \mathbf{K} \to \mathbf{K/L}$, соответствующий вполне плотной подкатегории **L**, обладает сопряженным справа функтором $F: \mathbf{K/L} \to \mathbf{K}$.

Мономорфизм $\tau: U \to A$ называется **L**-допустимым мономорфизмом, если $T(\tau)$ является изоморфизмом категории **K/L**.

Пусть R — радикал категории **K**. Подкатегорию категории **K**, порожденную всеми R-радикальными объектами, обозначим через **R**.

Объект Q категории **K** называется R-замкнутым для некоторого кручения (сильно наследственного строгого радикала) R ([3], 3.1), если он R-полупростой и если для любого **R**-допустимого мономорфизма $\tau: U \to A$ и любого морфизма $\alpha: U \to Q$ существует такой единственный морфизм $\alpha': A \to Q$, что $\alpha = \tau\alpha'$ (в силу [3], 3.3, **R** — вполне плотная подкатегория).

В [5] дано описание кручений (сильно наследственных строгих радикалов) категории **Mod** с помощью согласованных систем $\{R_{As}; R_{R(U)} | R(U) \in \mathrm{As}\}$ строгих радикалов.

Пусть R — кручение категории **Mod**, задаваемое согласованной системой строгих радикалов $\{R_{As}; R_{R(U)} | R(U) \in \mathrm{As}\}$. Тогда R_{As} — кручение категории ассоциативных колец As, и $R_0 = R_{R(0)}$ — кручение категории абелевых групп **Ab** ([5], § 3). Канонические функторы, соответствующие вполне плотным подкатегориям $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_{As}$ обозначим T и T_{As}.

Лемма 2.1. *Мономорфизм колец $\sigma: U \to V$ тогда и только тогда является $\mathbf{R}_{As}$-допустимым мономорфизмом в категории* $\mathbf{As}$, *когда мономорфизм* $(0, \sigma):(O, U) \to (O, V)$ *является* $\mathbf{R}$-*допустимым мономорфизмом катгегории* $\mathbf{Mod}$. *Мономорфизм абелевых групп* $\tau: A \to B$ *тогда и только тогда является* $\mathbf{R}_0$-*допустимым мономорфизмом категории* $\mathbf{Ab}$, *когда мономорфизм* $(\tau, 0):(A, O) \to (B, O)$ *является* $\mathbf{R}$-*допустимым мономорфизмом категории* $\mathbf{Mod}$.

Доказательство. Пусть $T_{As}(\sigma)$— изоморфизм категории $\mathbf{As}/\mathbf{R}_{As}$. Тогда в этой категории существует обратный изоморфизм $T_{As}(\sigma)^{-1}=\overline{\gamma}: V \to U$. Пусть $\gamma: V' \to U'$ — представитель изоморфизма $\overline{\gamma}$ ([3], 2.3) в категории $\mathbf{As}$. Построим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
U & & V & & U \arrow[d, "\theta"] \\
U \arrow[u, "1"] \arrow[r, "\sigma"] & V & & V' \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dl, "\xi"] & U' \arrow[d, "\theta"] \\
U''' \arrow[u, "\mu"] \arrow[rr, "\sigma'"] & & V'' \arrow[ul, "\gamma'"] \arrow[rr, "\gamma'"] & & U''
\arrow[from=1-3, to=2-2, "1"']
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

определяющую произведение $T_{As}(\sigma)\cdot T_{As}(\sigma)^{-1}$ ([3], диаграмма 2.2). Произведение $\sigma'\gamma'$ определяет единичный морфизм $1=T_{As}(\sigma)\cdot T_{As}(\sigma)^{-1}$ объекта U категории $\mathbf{As}/\mathbf{R}_{As}$, поэтому, в силу замечания, сделанного в начале п. 2.6 работы [3], $\sigma'\gamma'=\mu\nu$, где $\mu: U''' \to U$— достижимый мономорфизм с $\mathbf{R}_{As}$-факторами, а $\nu: U \to U''$—некоторый нормальный эпиморфизм с $\mathbf{R}_{As}$-ядром. Рассмотрим гомоморфизмы $(0, \sigma):(O, U) \to (O, V)$ и $(0, \gamma)$: $(O, V') \to (O, U')$ и построим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(0,U) & & (0,V) & & (0,U) \arrow[d, "(0,\theta)"] \\
(0,U) \arrow[u, "(0,1)"] \arrow[r, "(0,\sigma)"] & (0,V) & & (0,V') \arrow[ul, "(0,\gamma)"'] \arrow[r, "(0,\gamma)"] \arrow[dl, "(0,\xi)"] & (0,U') \arrow[d, "(0,\theta)"] \\
(0,U''') \arrow[u, "(0,\mu)"] \arrow[rr, "(0,\sigma')"] & & (0,V'') \arrow[ul, "(0,\gamma')"] \arrow[rr, "(0,\gamma')"] & & (0,U'')
\arrow[from=1-3, to=2-2, "(0,1)"']
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

определяющую произведение $T(0, \sigma)\cdot\overline{(0, \gamma)}$. Так как $\sigma'\gamma'=\mu\nu$, то $(0, \sigma')\cdot(0, \gamma')=(0, \mu)\cdot(0, \nu)$, где очевидно, что $(0, \mu)$: $(O, U''') \to (O, U)$— достижимый мономорфизм категории $\mathbf{Mod}$ с $\mathbf{R}$-факторами, а $(0, \nu):(O, U) \to (O, U'')$— нормальный эпиморфизм категории $\mathbf{Mod}$, с $\mathbf{R}$-ядром. Значит, в силу ([3], 2.6), $T(0, \sigma)\cdot\overline{(0, \gamma)}=1$. Аналогичным образом можно показать, что $\overline{(0, \gamma)} \cdot T(0, \sigma) = 1$. Получили, что $\overline{(0, \gamma)} = T(0, \sigma)^{-1}$, следовательно, $T(0, \sigma)$— изоморфизм категории Mod/R.

Обратное утверждение доказывается теми же рассуждениями, только проведенными в обратном порядке, исходя из диаграммы 2.2.

Вторая часть леммы доказывается аналогичным образом. Лемма доказана.

Пусть R— подкатегория локализация категории Mod, следовательно ([3], 4.12, следствие 1), R—класс радикальных объектов для некоторого кручения R категории Mod. Пусть кручение R задается системой $\{R_{As};\ R_{R(U)} | R(U) \in \mathrm{As}\}$.

Лемма 2.2. *Если* R — *подкатегория локализации категории* Mod, *то* $\mathbf{R}_{As}$—*подкатегория локализации категории* As.

Доказательство. Для того чтобы показать, что $\mathbf{R}_{As}$ — подкатегория локализации категории As, достаточно ([3], 4.19) доказать, что для любого R_{As}-полупростого кольца U существует $\mathbf{R}_{As}$-допустимый мономорфизм $\sigma: U \to V$ в некоторое R_{As}-замкнутое кольцо V. Кольцо U R_{As}-полупросто, значит, модуль (O, U) R-полупрост. По условию, R—подкатегория локализации категории Mod, поэтому, ([3], 4.19), существует R-допустимый мономорфизм $(0, \sigma): (O, U) \to (B, V)$ в некоторый R-замкнутый модуль (B, V). Покажем, что мономорфизм $\sigma: U \to V$—$\mathbf{R}_{As}$-допустимый мономорфизм и кольцо V— R_{As}-замкнутое кольцо. Действительно, мономорфизм $(0, \sigma): (O, U) \to (B, V)$ —R-допустимый мономорфизм и модуль (B, V)—R-замкнутый, следовательно R-полупростой модуль. Поэтому, в силу ([3], 4.14), существует такая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(O,U) \arrow[rr, "{(0,\sigma)}"] & & (B,V) \\
& (O,W) \arrow[ul, "{(0,\lambda')}"] \arrow[ur, "{(0,\lambda)}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

что $(0, \lambda')$ — мономорфизм, а $(0, \lambda)$ — достижимый мономорфизм категории Mod с R-факторами. Значит, существует такая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "\sigma"] & & V \\
& W \arrow[ul, "\lambda'"] \arrow[ur, "\lambda"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

что λ' — мономорфизм колец, V—R_{As}-полупростое кольцо и λ, как легко проверить, достижимый мономорфизм категории As с $\mathbf{R}_{As}$-факторами. В силу ([3], 4.14), мономорфизм σ является $\mathbf{R}_{As}$-допустимым мономорфизмом, Покажем теперь, что V—R_{As}-замкнутое кольцо. Пусть $\tau: L \to M$— любой $\mathbf{R}_{As}$-допустимый мономорфизм и $\alpha: L \to V$ —любой гомоморфизм категории **As**. Так как (B, V)—R-замкнутый модуль, а мономорфизм $(0, \tau)$—$\mathbf{R}$-допустимый мономорфизм категории **Mod** в силу леммы 2.1, то из определения R-замкнутости следует, что существует такой единственный гомоморфизм $(0, \alpha'): (0, M) \to (B, V)$ категории **Mod**, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(0,L) \arrow[rr, "{(0,\tau)}"] \arrow[dr, "{(0,\alpha)}"'] & & (0,M) \arrow[dl, "{(0,\alpha')}"] \\
& (B,V) &
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

коммутативна. Значит, для любого $\mathbf{R}_{As}$-допустимого мономорфизма $\tau: L \to M$ и для любого гомоморфизма колец $\alpha: L \to V$ существует такой единственный гомоморфизм α', что $\alpha = \tau\alpha'$. Следовательно, V— R_{As}-замкнутое кольцо. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Известно ([8], теорема 4.3), что категория **As** не имеет нетривиальных подкатегорий локализаций. Поэтому из леммы 2.2 следует, что если $\mathbf{R}$—подкатегория локализации категории **Mod**, то соответствующая ей система строгих радикалов—это или система вида $\{1_{As}; R_U | U \in \mathbf{As}\}$, где $1_{As}(U) = U$, для любого кольца U, или где пара ([5], замечание 38) $\{O_{As}; R_0\}$, где $O_{As}(U) = 0$ для любого кольца U, а R_0—кручение категории **Ab**.

Л е м м а 2.3. *Пусть R — такое кручение катггории* **Mod**, *что соответствующая ей согласованная система строгих радикалов имеет вид* $\{1_{As}; R_U | U \in \mathbf{As}\}$. *Тогда радикальный класс* $\mathbf{R} = \mathbf{Mod}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любой унитарный модуль (B, V) R-радикален, так как в силу условия $(R1)$ работы [5], $B = B \cdot V \subseteq R_V(B) \subseteq \subseteq B$ и, следовательно, $R_V(B) = B$. Значит если мы покажем, что любой модуль (A, U) категории **Mod** вкладывается как подмодуль в некоторый унитарный модуль, то, так как R-кручение, получится, что любой модуль (A, U) категории **Mod** R-радикален.

Пусть (A, U) — любой модуль категории **Mod**. Вложим кольцо U в кольцо с единицей $U^{(1)} = \{U, 1\}$, элементами которого являются всевозможные пары вида (n, u), где n — натуральное число или нуль, $u \in U$. Превратим U-модуль A в $U^{(1)}$-модуль $(A, U^{(1)})$, определяя операцию $A \times U^{(1)} \to A$ следующим образом: для любого $a \in A$ и для любого $(n, u) \in U^{(1)}$, $a\circ(n, u) = na + a \cdot u$. Очевидно, что $(A, U^{(1)})$—унитарный модуль и (A, U)—подмодуль модуля $(A, U^{(1)})$. Лемма доказана.

В работе [5] доказано, что полная подкатегория $\mathbf{Mod}_0$ категории **Mod**, состоящая из всех модулей вида (A, O), является подкатегорией локализации категории **Mod**. Возникает вопрос, существуют ли другие нетривиальные подкатегории локализаций в категории **Mod**? Если да, то из леммы 2.2, замечания 2.1 и леммы 2.3 следует, что кручения, соответствующие этим подкатегориям локализаций, определяются согласованными системами строгих радикалов вида $\{O_{As}; R_0\}$, где O_{As}—тривиальный радикал категории **As**, а R_0—кручение категории **Ab**.

Лемма 2.4. *Пусть* $\mathbf{R}$ — *подкатегория локализации категории* **Mod** *и* $\{O_{As}; R_0\}$ — *соответствующая ей согласованная система строгих радикалов. Пусть* $(\tau, \tau_U) : (A, U) \to (B, V)$ — $\mathbf{R}$-*допустимый мономорфизм категории* **Mod** *в* R-*полупростой модуль* (B, V). *Тогда кольцо* $U = V$, $\tau_U = 1_U$ *и* $\tau : A \to B$ — $\mathbf{R}_0$-*допустимый мономорфизм категории* **Ab**.

Доказательство. В силу ([3], 4.14) модуль (A, U) содержит некоторый достижимый подмодуль (C, W) с $\mathbf{R}$-факторами модуля (B, V). Поэтому, так как O_{As}— тривиальный радикал категории **As** и W—достижимое подкольцо с O_{As}-факторами кольца V, то $W = V$. Значит, $V = U$, так как W—подкольцо кольца U и τ_U — мономорфизм колец. Далее R—кручение в категории **Mod**, следовательно R_0—кручение в категории **Ab** ([5], замечание 3.6). $\mathbf{R}_0$—вполне плотная подкатегория категории **Ab** ([3], 3.3). Значит, $B/C \in \mathbf{R}_0$, так как в силу ([3], 4.14), мы имеем такую цепочку

$$C = C_0 \xrightarrow{\mu_1} C_1 \xrightarrow{\mu_2} C_2 \xrightarrow{\mu_3} \cdots \xrightarrow{\mu_n} C_n = B$$

абелевых групп, что μ_i, $i=1, 2, \cdots, n$ — вложение подгруппы C_{i-1} в группу C_i и $C_i/C_{i-1} \in \mathbf{R}_0$. Из [3], (4.14) следует, что $\tau : A \to B$ — $\mathbf{R}_0$-допустимый мономорфизм категории **Ab**. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Если* (Q, U)— R-*замкнутый модуль, то* Q — R_0-*замкнутая абелева группа.*

Доказательство. Пусть $\sigma : A \to B$ — $\mathbf{R}_0$-допустимый мономорфизм категории **Ab** и $\alpha : A \to Q$ — любой гомоморфизм абелевых групп. Тогда, в силу леммы 2.1, $(\sigma, 0) : (A, O) \to (B, O)$ — $\mathbf{R}$-допустимый мономорфизм категории **Mod**. Так как (Q, U) — R-замкнутый модуль, то для гомоморфизма $(\alpha, 0)$: $(A, O) \to (Q, U)$ существует такой единственный гомоморфизм $(\alpha', 0) : (B, O) \to (Q, U)$, что $(\alpha, 0) = (\sigma, 0) \cdot (\alpha', 0)$. Значит, $\alpha = \sigma\, \alpha'$. Единственность гомоморфизма α' следует из единственности гомоморфизма $(\alpha', 0)$. Лемма доказана.

Замечание 2.2. Известно ([9], теорема 2.17), что нетривиальные кручения в категории **Ab** описываются с помощью наборов простых чисел $\Pi = (p_1, \cdots, p_k, \cdots)$. Кручение категории **Ab**, определенное набором простых чисел Π будем обозначать R_Π.

Лемма 2.6. *Мономорфизм* $\tau : A \to B$ *абелевой группы* A *в* R_Π-*полупростую абелеву группу* B *тогда и только тогда будет* $\mathbf{R}_\Pi$-*допустимым, когда* $B/A\tau \in \mathbf{R}_\Pi$.

Доказана в [6].

Замечание 2.3. Пусть R_Π — кручение в категории **Ab**, A — любая R_Π-полупростая абелева группа и E— минимальная Π-полная абелева группа, содержащая группу A. Напомним, что абелева группа E называется Π-полной, если для любого Π-числа

$$m = p_{i_1}^{\alpha_1} \cdots p_{i_k}^{\alpha_k}, \ p_{i_1}, \cdots, p_{i_k} \in \Pi, \ \alpha_j > 0, \ j = 1, \cdots, k$$

и для любого элемента $e \in E$ существует такой элемент $e' \in E$, что $e = me'$. Элементами группы E будут всевозможные пары (a, n), где $a \in A$ и n — П-число, причем $(a_1, n_1) = (a_2, n_2)$ тогда и только тогда, когда $n_2a_1 = n_1a_2$. Операция сложения в группе E определена по следующему правилу, $(a_1, n_1) + (a_2, n_2) = (n_2a_1 + n_1a_2, n_1n_2)$. Отображение $a \to (a, 1)$ задает вложение группы A в группу E. Отметим, что фактор-группа E/A является R_Π-радикальной группой.

Лемма 2.7. *R_Π-полупростая абелева группа тогда и только тогда R_Π-замкнута, когда она П-полна.*

Доказательство. Пусть Q — R_Π-замкнутая абелева группа. Рассмотрим аддитивную группу целых чисел $\mathbf{Z}$. Она R_Π-полупроста. Возьмем любой элемент $q \in Q$ и любое П-число n и покажем, что элемент q делится на n. Для этого рассмотрим такой мономорфизм $\tau: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, что $1\tau = n$. Так как $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\tau = \mathbf{Z}_n \in \mathrm{R}_\Pi$, то в силу леммы 2.6, τ — R_Π-допустимый мономорфизм. Рассмотрим теперь такой гомоморфизм $\alpha: \mathbf{Z} \to Q$, что $1\alpha = q$. Так как Q — R_Π-замкнутая абелева группа, то существует такой единственный гомоморфизм $\alpha': \mathbf{Z} \to Q$, что $\alpha = \tau\alpha'$. Значит, $n\alpha' = (1\tau)\alpha' = 1\alpha = q$. С другой стороны, $q = n\alpha' = (n \cdot 1)\alpha' = n(1\alpha') = nq'$, где $\alpha' = 1q' \in Q$. Получили, что Q — П-полная абелева группа.

Обратно, пусть E — П-полная, R_Π-полупростая абелева группа и пусть $\sigma: B' \to B$ — любой R_Π-допустимый мономорфизм. Тогда согласно лемме 2.6 фактор-группа $B/B'\sigma$ является R_Π-радикальной группой. Пусть $\gamma': B' \to E$ — произвольный гоморфизм. Если мы покажем, что существует такой гомоморфизм $\gamma: B \to E$, что $\gamma' = \sigma\gamma$, то тем самым мы докажем, что группа E является R_Π-замкнутой группой.

Для любого элемента $b \in B$, так как $B/B'\sigma \in \mathrm{R}_\Pi$, существует такое наименьшее П-число n, что $nb \in B'\sigma$. Рассмотрим элемент $(nb)\sigma^{-1} \in B'$. Группа E является П-полной абелевой группой и $(nb)\sigma^{-1}\gamma' \in E$, поэтому существует такой единственный элемент $\hat{e} \in E$, что $(nb)\sigma^{-1}\gamma' = n\hat{e}$. По определению положим $b\gamma = \hat{e}$.

Для любого элемента $b' \in B'$, $b'\gamma' = b'(\sigma\sigma^{-1})\gamma' = (b'\sigma)\sigma^{-1}\gamma' = e$ и $(b'\sigma)\gamma = e$ по определению отображения γ. Значит, $b'\sigma\gamma = b'\gamma'$. Покажем, что γ — гомоморфизм групп. Прежде всего заметим, что $(nb)\gamma = (nb)\sigma^{-1}\gamma^1$, так как $nb \in B'\sigma$. Пусть b_1 и b_2 — любые два элемента группы B, n_1 и n_2 — такие наименьшие П-числа, что $n_1b_1 \in B'\sigma$ и $n_2b_2 \in B'\sigma$. Пусть m — такое наименьшее П-число, что $m(b_1 + b_2) \in B'\sigma$. Покажем, что $(b_1 + b_2)\gamma = b_1\gamma + b_2\gamma$. Действительно,

$$n_1n_2m[b_1\gamma + b_2\gamma - (b_1 + b_2)\gamma] = n_2m(n_1b_1\gamma) + n_1m(n_2b_2\gamma) -$$

$$- n_1n_2(m(b_1 + b_2)\gamma) = n_2m(n_1b_1\sigma^{-1}\gamma') + n_1m(n_2b_2\sigma^{-1}\gamma') -$$

$$- n_1n_2(m(b_1 + b_2)\sigma^{-1}\gamma') = (n_1n_2mb_1)\sigma^{-1}\gamma' + (n_1n_2mb_2)\sigma^{-1}\gamma' -$$

$$- (n_1n_2m(b_1 + b_2))\sigma^{-1}\gamma' = [n_1n_2mb_1 + n_1n_2mb_2 - n_1n_2m(b_1 + b_2)]\sigma^{-1}\gamma' = 0.$$

Поэтому, так как E — R_{Π}-полупростая абелева группа, то $b_1\gamma + b_2\gamma - (b_1 + b_2)\gamma = 0$. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *В категории* Mod *имеется ровно три подкатегории локализации: тривиальная подкатегория, состоящая из одного нулевого объекта* (O, O), *вся категория* Mod *и подкатегория* Mod_O, *состоящая из всех модулей вида* (A, O).

Доказательство. Пусть $\mathbf{R}$—отличная от Mod_O нетривиальная подкатегория локализации категории Mod и $\{O_{As}; R_{\Pi}\}$ — соответствующая ей пара кручений. Аддитивная группа целых чисел $\mathbf{Z}$ является, как легко проверить, R_{Π}-полупростой, но не П-полной абелевой группой. Рассмотрим модуль $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$. Ясно, что $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ — R-полупростой модуль категории Mod. Поэтому, так как $\mathbf{R}$ — подкатегория локализации, то в силу теоремы 4.19 работы [3] и леммы 2.4, существует $\mathbf{R}$-допустимый мономорфизм $(\sigma, 1): (\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \to (Q, \mathbf{Z})$ в некоторый R-замкнутый модуль $(Q, \mathbf{Z})$, причем $\sigma: \mathbf{Z} \to Q$ — $\mathbf{R}_{\Pi}$-допустимый мономорфизм.

Из леммы 2.5 следует, что Q—R_{Π}-замкнутая абелева группа. Из единственности, с точностью до изоморфизма, вложения $\sigma: \mathbf{Z} \to Q$ ([3], начало доказательства теоремы 4.19) и из того, что любую R_{Π}-полупростую абелеву группу можно вложить в минимальную П-полную абелеву группу, в силу леммы 2.6 и замечания 2.3 это вложение задается $\mathbf{R}_{\Pi}$-допустимым мономорфизмом, следует, что Q— минимальная П-полная абелева группа, содержащая $\mathbf{Z}$ и $z\sigma = (z, 1) \in Q$ для любого элемента $z \in \mathbf{Z}$. Так как $(\sigma, 1): (\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \to (Q, \mathbf{Z})$—гомоморфизм категории Mod, то $(z \cdot 1)\sigma = (z\sigma) \cdot 1$ для любого $z \in \mathbf{Z}$ и единицы 1 кольца $\mathbf{Z}$, то есть $(z, 1) = (z, 1) \cdot 1$. Значит, $m((z, m) \cdot 1) = (m(z, m)) \cdot 1 = (mz, m) \times \times 1 = (z, 1) \cdot 1 = (z, 1) = m \cdot (z, m)$ для любого элемента $(z, m) \in Q$. Отсюда следует, что $m[(z, m) \cdot 1 - (z, m)] = 0$. Значит, $(z, m) \cdot 1 = (z, m)$, так как Q—R_{Π}-полупростая абелева группа и m— П-число. Получили, что $(Q, \mathbf{Z})$—унитарный модуль. С другой стороны, в силу ([3], 4.14) и рассуждений, сделанных в доказательстве леммы 2.4, подмодуль $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ должен содержать некоторый достижимый подмодуль (C, Z) с R-факторами модуля (Q, Z). Это невозможно, так как $Z \neq Q$ в силу того, что Z не является П-полной абелевой группой и (Q, Z) — унитарный модуль, следовательно не существует Z-подмодуля модуля (Q, Z), отличного от самого (Q, Z), который являлся бы идеалом в модуле (Q, Z). Получили противоречие. Теорема доказана.

Лемма 2.8. *Совокупность всех строгих радикалов категории ассоциативных колец не является множеством.*

Доказательство. Введем в классе всех ассоциативных простых колец отношение $\sim$, полагая $U \sim V$ если существуют кольцевые мономорфизмы $\sigma: U \to V$ и $\tau: V \to U$, т. е. если простое кольцо U изоморфно некоторому подкольцу кольца V, а простое кольцо V изоморфно некоторому подкольцу кольца U. Легко проверить, что это отношение является рефлексивным, симметричным и транзитивным, т. е. является эквивалентностью. Поскольку каждое кольцо имеет лишь множество подколец, каждый класс эквивалентности по отношению $\sim$ содержит лишь множество попарно неизоморфных простых колец. Но так как совокупность всех попарно неизоморфных простых колец не является множеством, то совокупность всех классов эквивалентности по отношению $\sim$ также не является множеством.

Возьмем простые кольца P и Q из различных классов эквивалентности по отношению $\sim$ и рассмотрим совокупности колец $\mathbf{P}_S$ и $\mathbf{Q}_S$, где $\mathbf{P}_S$ $(\mathbf{Q}_S)$—это совокупность всех таких ассоциативных колец W, что любой ненулевой гомоморфный образ кольца W содержит подкольцо, изоморфное кольцу $P(Q)$. Из теоремы 2.1 работы [8] следует, что $\mathbf{P}_S$ и $\mathbf{Q}_S$ являются радикальными классами для некоторых строгих радикалов категории $\mathbf{As}$. Так как простые кольца P и Q брались из различных классов эквивалентности по отношению $\sim$, то не нарушая общности можно считать, что кольцо P не изоморфно никакому подкольцу кольца Q. Отсюда следует, что $Q \overline{\in} \mathbf{P}_S$. Однако очевидно, что $Q \in \mathbf{Q}_S$. Получили, что $\mathbf{P}_S$ и $\mathbf{Q}_S$ — различные строго радикальные классы. Лемма доказана.

Из этой леммы, в силу замечания 3.5 работы [5], следует.

Предложение 2.1. *Совокупность всех строгих радикалов категории* **Mod** *не является множеством.*

Автор благодарен М. Ш. Цаленко за руководство в работе над статьей и Е. Г. Шульгейферу—за ценные замечания.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 11.X.1978

Գ. Գ. ԷՄԻՆ. Վերջավոր մոդուլից առաջացած բազմաձևությունները և լոկալիզացիաները բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում (*ամփոփում*)

Նկարագրված են Mod *կատեգորիայի՝ բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի շպեխտյան, կրոսյան և համարյա կրոսյան բազմաձևությունները։ Ապացուցված է, որ* Mod *կատեգորիայում կա միայն մեկ ոչ տրիվիալ լոկալիզացիայի ենթակատեգորիա։*

G. G. EMIN. *The varieties, generated by a finite module, and lokalizations in the category of modules over all rings* (sunmary)

The Mod category is considered, whose objects are all possible pairs (A, U) (A is the right U — module over associative ring U) and the morphisms are the pairs of homomorphisms (φ_A, φ_U), under the condition $(a \cdot u)\varphi_A = a\varphi_A \cdot u\varphi_U$.

It is proved that any variety generated by one finite module can be given by a finite number of identities and has only finite number of subvarieties. The varieties generated by one finite module and only those are the Cross varieties.

It is proved that in the category Mod there is only one proper localizing subcategory in the sence of Shulgeifer.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. В. Львов*. О многообразиях ассоциативных колец, I. Алгебра и логика, 12, № 3, 1973, 269—297.

2. *И. В. Львов.* О многообразиях ассоциативных колец, II. Алгебра и логика, 12, № 6, 1973, 667—688.
3. *Е. Г. Шульгейфер.* Локализации и сильно наследственные строгие радикалы в категориях, Труды ММО, 19, 1968, 271—301.
4. *Г. Г. Эмин.* Многообразия и бимногообразия в категории модулей над всеми кольцами, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 3, 1974, 212—235.
5. *Г. Г. Эмин.* Предмногообразия, группоид многообразий и строгие радикалы в категории модулей над всеми кольцами, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XIV, № 3, 1979, 211—232.
6. *P. Gabriel.* Des catègories abeliennes, Bull. Soc. Math. France, 90, № 3, 1962, 323—448.
7. *Б. И. Плоткин.* Радикалы и многообразия в представлениях групп, Латв. матем. ежегодник, 10, 1972, 75—132.
8. *Stewart Patrick N.* Strict radical classes of associative rings, Proc. Amer. Math. Soc., 39, № 2, 1973, 273—278.
9. *А. П. Мишина, Л. А. Скорняков.* Абелевы группы и модули, М., изд. «Наука», 1969.
10. *Г. Г. Эмин.* Конечнобазируемые многообразия и локализации в категории модулей над всеми кольцами, ДАН Арм. ССР, 68, № 4, 1979, 193—197.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 2, 1980 Математика

А. Е. АВЕТИСЯН

О ПОПОЛНЕНИИ НЕЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Известна следующая теорема Мюнца-Сасса (см., например, [1], [2]).

Теорема. *Для замкнутости сисмемы функций* $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$ *в* $L_2(0, \infty)$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2} = +\infty,$$

где $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность комплексных чисел из области $\operatorname{Re}\lambda>0$, а $s_k \geqslant 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$.

М. М. Джрбашян [2] исследовал вопрос о замкнутости системы функций, порожденных целой функцией типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})} \quad (\mu>0,\ \rho>0).$$

Обозначим через $L_{2,\omega}(0, \infty)$ $(-1<\omega<1)$ множество измеримых на $(0, +\infty)$ функций f, для которых

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 x^\omega\, dx < +\infty.$$

Полагая

$$\rho = \frac{\alpha}{2\alpha-1},\ \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho},\ |\arg\lambda_k| < \frac{\pi}{2\alpha},\ k=1, 2, \cdots,\ \frac{1}{2}<\alpha<\infty,$$

рассмотрим систему функций

$$\{E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x; \mu)\ x^{s_k-1}\}_1^\infty \tag{1}$$

(s_k — имеет вышеприведенный смысл).

Следующая теорема является обобщением приведенной теоремы Мюнца-Сасса.

Теорема. (М. М. Джрбашян). *Для замкнутости системы* (1) *в метрике* $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_k^\alpha}{1+|\lambda_k|^{2\alpha}}.$$

М. М. Джрбашяном и В. М. Мартиросяном исследованы вопросы замкнутости систем $\{e^{-\lambda_k z} z^{s_k - 1}\}$ и $\{E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k\zeta;\mu)\zeta^{s_k-1}\}$ в различных пространствах функций, определенных на двух лучах [3, 4]. Для конечной системы лучей аналогичный вопрос рассмотрен в работе [5]. В работе [4] при установлении критерия замкнутости системы функций типа (1) на $L_{2,\omega}(\Gamma)$, где Γ — совокупность лучей $\arg z = \pm\frac{\pi}{2\gamma}\left(\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho}\right)$, естественно предполагается, что

$$\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha - 1}. \tag{2}$$

Нетрудно убедиться в том, что при нарушении условия (2) система

$$\{E_\rho^{(s_k-1)}(\lambda_k\zeta;\mu)\zeta^{s_k-1}\}_1^\infty \tag{3}$$

не может быть замкнутой в $L_{2,\omega}(\Gamma)$ ни при каком расположении и плотности точек $\{\lambda_k\}$.

В настоящей работе исследуется система (3) в $L_{2,\omega}(\Gamma)$, именно, при условии $\rho < \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$. Доказывается, что если к незамкнутой системе (3) присоединить другую систему того же типа с удобно выбранными параметрами ρ_1 и μ_1, то полученная совокупность систем при определенных условиях будет замкнутой в $L_{2,\omega}(\Gamma)$.

В первой части работы приводятся некоторые известные вспомогательные результаты. Во второй части выводится новая формула обращения для интегрального преобразования, рассмотренного ранее М. М. Джрбашяном и автором. В третьей части доказывается теорема о пополнении незамкнутой системы функций.

§ 1. Вспомогательные результаты

а) Пусть Γ—совокупность лучей $\arg z = \pm\frac{\pi}{2\gamma}$. Этим контуром плоскость разделяется на две области Δ_γ и Δ_γ^*:

$$\Delta_\gamma = \left\{z;\ |\arg z| < \frac{\pi}{2\gamma},\ 0 < |z| < \infty\right\},$$

$$\Delta_\gamma^* = \left\{z;\ |\arg z| > \frac{\pi}{2\gamma},\ 0 < |z| < \infty\right\}.$$

В работе [6] М. М. Джрбашяна и автора был введен класс функций $H_{2,\omega}[\Delta_\alpha]\left(\frac{1}{2} < \alpha < \infty,\ -1 < \omega < 1\right)$. Это — совокупность функций, голоморфных в области Δ_α и удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\infty}|F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}\,dr < M_F < +\infty, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha},$$

где M_F не зависит от φ.

Для функций $F(z) \in H_{2,\omega}[\Delta_\alpha]$ строится преобразование типа Бореля $G_{\rho,\mu}(\zeta; F)$ следующим образом. Полагая $\rho > \frac{\alpha}{2\alpha-1}$, $\mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$, для каждого значения $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ образуем функцию

$$g_\theta(\zeta; F) = \rho\,(e^{-i\theta}\zeta)^{\mu\rho}\,\zeta^{-1}\int_0^{\infty} F(e^{-i\theta}r)\,e^{-(e^{-i\theta}\zeta)^{\rho}r^{\rho}}\,r^{\mu\rho-1}\,dr, \tag{1.1}$$

рассматривая ее в области

$$\Delta(\rho; \theta) = \left\{\zeta: |\operatorname{Arg}\zeta - \theta| < \frac{\pi}{2\rho},\ 0 < |\zeta| < +\infty\right\}.$$

При этом рассматриваются те ветви функций $(e^{-i\theta}\zeta)^{\mu\rho}$ и $(e^{-i\theta}\zeta)^{\rho}$, которые на луче $\arg\zeta = 0$ принимают положительные значения. О свойствах функции $g_\theta(\zeta; F)$ справедлива следующая теорема (см. [7], теорема 7.6).

Теорема А. *Пусть* $F(z) \in H_{2,\omega}[\Delta_\alpha]$ $\left(\frac{1}{2} < \alpha < \infty,\ -1 < \omega < 1\right)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *Для каждого значения* $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ *функция* (1.1), *где* $\rho \geqslant \frac{\alpha}{2\alpha-1}$ *и* $\mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}$, *голоморфна в области* $\Delta(\rho; \theta)$.

2. *Существует функция* $G_{\rho,\mu}(\zeta; F)$, *голоморфная в области* Δ_γ, *где* $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho}$ *и такая, что для любого* $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$

$$g_\theta(\zeta; F) \equiv G_{\rho,\mu}(\zeta; F), \quad \zeta \in \Delta(\rho; \theta).$$

3. *Функция* $G_{\rho,\mu}(\zeta; F)$ *принадлежит классу* $H_{2,-\omega}[\Delta_\gamma]$.

Отметим также, что $G_{\rho,\mu}(\zeta; F)$, как функция класса $H_{2,-\omega}[\Delta_\gamma]$, почти всюду на Γ имеет граничные значения:

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2\gamma}-0} G_{\rho,\mu}(re^{i\varphi}; F) = G_{\rho,\mu}(re^{i\frac{\pi}{2\gamma}}; F),$$

$$\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{2\gamma}+0} G_{\rho,\mu}(re^{i\varphi}; F) = G_{\rho,\mu}(re^{-i\frac{\pi}{2\gamma}}; F),$$

при этом граничная функция принадлежит классу $L_{2,-\omega}(\Gamma)$, т. е.

$$\int_{\Gamma} |G_{\rho,\mu}(\zeta; F)|^2 \, |\zeta|^{-\omega} \, |d\zeta| < \infty. \tag{1.2}$$

Этими граничными значениями на Γ функция $G_{\rho,\mu}(\zeta; F)$ представима интегралом Коши (см. [7], теорема 7.5).

Далее о функциях класса $H_{2,\omega}[\Delta_\alpha]$ справедливы теоремы, которые могут быть сформулированы в следующей удобной для наших, целей форме (см. [6], теорема 3 и [7], теоремы 7.7 и 7.9).

Теорема Б. *Если* $F(z) \in H_{2,\omega}[\Delta_\alpha]$, *то для любого* $\rho \geqslant \frac{\alpha}{2\alpha-1}$ $\mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}$ *справедливо интегральное представление*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_\rho(z\zeta; \mu) \, G_{\rho,\mu}(\zeta; F) \, d\zeta, \quad z \in \Delta_\alpha$$

(Γ — пробегается в положительном направлении относительно области Δ_γ^*).

Теорема В. *Если* $U(\zeta) \in L_{2,-\omega}(\Gamma)$ *и*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_\rho(z\zeta; \mu) \, U(\zeta) \, d\zeta,$$

то $F(z) \in H_{2,\omega}[\Delta_\alpha]$.

б) Из теоремы 3 работы [8] в частном случае, когда $n = 2$, следует такой результат.

Теорема Г. *Для данной функции* $U(\zeta) \in L_{2,-\omega}(\Gamma)$ *существуют единственные функции* $U_{(+)}(\zeta) \in H_{2,-\omega}[\Delta_\gamma]$ *и* $U_{(-)}(\zeta) \in H_{2,-\omega}[\Delta_\gamma^*]$ *такие, что*

$$U(\zeta) = U_{(+)}(\zeta) + U_{(-)}(\zeta).$$

в) В работе [2] М. М. Джрбашяна содержится теорема единственности для класса $H_{2,-\omega}[\Delta_\alpha]$. Приведем формулировки теорем единственности для классов

$$H_{2,\omega}[\Delta_\alpha] \text{ и } H_{2,\omega}[\Delta_\beta^*] \left(\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1}\right).$$

Теорема Д. а) *Если функция* $\Phi(z) \in H_{2,\omega}[\Delta_\alpha]$ *обращается в нуль в точках* $\lambda_k \in \Delta_\alpha$ *(с кратностью s_k) и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k^\alpha}{1+|\lambda_k|^{2\alpha}} = \infty, \tag{1.3}$$

то $\Phi(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\alpha$.

б) *Если функция* $\Phi_1(z) \in H_{2,\omega}[\Delta_\beta^*]$ *обращается в нуль в точках* $\nu_j \in \Delta_\beta^*$ *(с кратностью q_j) и*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\nu_j e^{i\varkappa})^{\sigma}}{1+|\nu_j|^{2\sigma}} = +\infty, \tag{1.4}$$

где $\sigma = \dfrac{\alpha\rho\rho_1}{2\alpha\rho\rho_1 - \rho\rho_1 - \alpha\rho_1 - \alpha\rho}$, то $\Phi_1(z) \equiv 0,\ z \in \Delta_\rho^*$.

Если же, например, сходится ряд (1.3) (случай а)), то существует произведение Бляшке для угловой области Δ_α:

$$B_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z^\alpha - \lambda_k^\alpha}{z^\alpha + \bar{\lambda}_k^\alpha} \cdot \frac{|1-\lambda_k^{2\alpha}|}{1-\lambda_k^{2\alpha}},$$

причем $B_\alpha(z) \not\equiv 0$, $|B_\alpha(z)| \leqslant 1$, $\lambda \in \bar{\Delta}_\alpha$. Аналогичное утверждение имеет место в случае б), если сходится ряд (1.4).

§ 2. Новая формула обращения

Пусть $U(\zeta)$ — произвольная функция из класса $L_{2,-\omega}(\Gamma)$ (см. (1.2)). Составим функцию

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_\rho(z\zeta;\ \mu)\, U(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.1}$$

где

$$\frac{\alpha}{2\alpha-1} < \rho < \frac{2\alpha}{2\alpha-1},\quad \mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}. \tag{2.2}$$

Как и прежде Γ означает контур, составленный из лучей $\arg z = \pm \dfrac{\pi}{2\gamma}\left(\dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\rho}\right)$ и взятый в положительном направлении относительно области Δ_γ^*.

В работе [8] автора при условии

$$\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1} \tag{2.3}$$

получена формула обращения для преобразования (2.1). В этом случае формула (2.1) определяет голоморфные функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ соответственно в областях Δ_α и $\Delta_{\alpha'}^*$ $\left(\dfrac{1}{\alpha'} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{2}{\rho}\right)$ и $U(\zeta)$ выражается через граничные значения этих функций. Особенностью данного случая заключается то, что когда ρ удовлетворяет условию (2.2), формула (2.1) определяет голоморфную функцию $F(z)$ только в области Δ_α. Восстановить $U(\zeta)$ через значения $F(z)$ в Δ_α принципиально невозможно (ввиду отсутствия единственности, см. [8]). В этом пункте мы выведем новую формулу обращения для (2.1), используя при этом, помимо значений $F(z)$, еще значения некоторой вспомогательной функции $F_1(z)$, которая строится по функции $U(\zeta)$.

Предполагая, что

$$\rho_1 > \frac{\alpha\rho}{2\alpha\rho - \rho - \alpha}, \quad \mu_1 = \frac{1 + \rho_1 + \omega}{2\rho_1}, \quad -1 < \omega < 1, \tag{2.4}$$

рассмотрим функцию

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)\ U(\zeta)\,d\zeta. \tag{2.5}$$

Ввиду условия (2.4), формула (2.5) определяет голоморфные функции в двух угловых областях:

$$\Delta^*_\beta, \text{ где } \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \text{ и } \Delta_{\beta'}, \text{ где } \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1},$$

при этом $F_1(z) \in H_{2,\infty}[\Delta^*_\beta]$ и $F_1(z) \in H_{2,\infty}[\Delta_{\beta'}]$ (см. [6], [7]). Рассмотрим $F_1(z)$ в области Δ^*_β. Применяя к этой функции теорему Б, получим представление

$$F_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)\ G_{\rho_1,\mu_1}(\zeta;\ F_1)\ d\zeta, \quad z \in \Delta^*_\beta, \tag{2.6}$$

где

$$G_{\rho_1,\mu_1}(\zeta;\ F_1) \in H_{2,-\infty}[\Delta^*_\gamma]$$

—преобразование типа Бореля функции $F_1(z)$, а в (2.6) участвуют граничные значения этой функции на Г. Преобразование типа Бореля $G_{\rho_1,\mu_1}(\zeta;\ F_1)$ строится для функции $F_1(z)$ так, как это сделано для $F(z)$ в § 1 (см. теорему А).

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если по произвольной функции $U(\zeta) \in L_{2,-\infty}(\Gamma)$ составить интеграл*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} E_\rho(z\zeta;\ \mu)\ U(\zeta)\ d\zeta, \tag{2.7}$$

где

$$\frac{\alpha}{2\alpha-1} < \rho < \frac{2\alpha}{2\alpha-1}, \quad \mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}, \quad -1 < \omega < 1,$$

то имеет место следующая формула обращения:

$$U(\zeta) = G_{\rho,\mu}(\zeta;\ F) - G_{\rho_1,\mu_1}(\zeta;\ F_1), \tag{2.8}$$

где функции $G_{\rho,\mu}(\zeta, F)$, $G_{\rho_1,\mu_1}(\zeta;\ F_1)$— преобразования типа Бореля функций $F(z)$ и $F_1(z)$, а параметры ρ_1 и μ_1 подчинены условиям (2.4).

Заметим, что в (2.8) участвуют граничные значения указанных преобразований типа Бореля на Г с разных сторон.

Доказательство. По теореме Г функцию $U(\zeta)$ можно представить в виде

$$U(\zeta) = U_{(+)}(\zeta) + U_{(-)}(\zeta), \tag{2.9}$$

где

$$U_{(+)}(\zeta) \in H_{2,-\infty}[\Delta_\gamma], \quad U_{(-)}(\zeta) \in H_{2,-\infty}[\Delta_\gamma^*].$$

Из (2.7) и (2.9) имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_\rho(z\zeta;\ \mu)\ U_{(+)}(\zeta)\ d\zeta + \tag{2.10}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_\rho(z\zeta;\ \mu)\ U_{(-)}(\zeta)\ d\zeta.$$

При $z \in \Delta_\alpha$ целая функция $E_\rho(z\zeta;\ \mu)$ как функция от ζ в замкнутой области $\overline{\Delta_\gamma^*}$ удовлетворяет неравенству $|E_\rho(z\zeta;\ \mu)| < \frac{c}{|\zeta|}$ (c — постоянная). С другой стороны, $U_{(-)}(\zeta) \in H_{2,-\infty}[\Delta_\gamma^*]$. Отсюда по интегральной теореме Коши следует, что второй интеграл в (2.10) равен нулю, и мы получим при $z \in \Delta_\alpha$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_\rho(z\zeta;\ \mu)\ U_{(+)}(\zeta)\ d\zeta. \tag{2.11}$$

Но по теореме В $F(z) \in H_{2,\infty}[\Delta_\alpha]$ и согласно теореме Б имеет представление

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_\rho(z\zeta;\ \mu)\ G_{\rho,\mu}(\zeta;\ F)\ d\zeta, \quad z \in \Delta_\alpha. \tag{2.12}$$

Вычитая (2.12) из (2.11) при $z \in \Delta_\alpha$ будем иметь

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_\rho(z\zeta;\ \mu)\ [U_{(+)}(\zeta) - G_{\rho,\mu}(\zeta;\ F)]\ d\zeta.$$

Полагая $z = x$ $(x > 0)$ и применяя обобщенное преобразование Лапласа получим

$$0 = \rho x^{\mu\rho-1}\int_0^\infty e^{-x^\rho t^\rho}\, t^{\mu\rho-1}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_\rho(x\zeta;\ \mu)[U_{(+)}(\zeta) - G_{\rho,\mu}(\zeta;\ F)]\ d\zeta\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [U_{(+)}(\zeta) - G_{\rho,\mu}(\zeta;\ F)]\cdot \rho x^{\mu\rho-1}\int_0^\infty e^{-x^\rho t^\rho} E_\rho(x\zeta;\ \mu)\, t^{\mu\rho-1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{U_{(+)}(\zeta) - G_{\rho,\mu}(\zeta;F)}{\zeta - x}\, d\zeta. \tag{2.13}$$

Здесь мы поменяли порядок интегрирования, что допустимо ввиду абсолютной сходимости рассмотренных интегралов, и применили известную формулу (см. [7])

$$\int_0^{\infty} e^{-x^\rho t^\rho} E_\rho(x\zeta;\ \mu)\, t^{\mu\rho-1}\, dt = \frac{1}{\rho}\, \frac{x^{1-\mu\rho}}{\zeta - x} \quad (\zeta\in\Gamma).$$

Функция $U_{(+)}(\zeta) - G_{\rho,\mu}(\zeta;\ F)$ принадлежит классу $H_{2,-\infty}[\Delta_\gamma]$ и поэтому представима интегралом Коши своими граничными значениями (т. е. значениями на Г). Учитывая это и направление контура Г, из (2.13) получим

$$0 = -[U_{(+)}(x) - G_{\rho,\mu}(x;\ F)].$$

Отсюда

$$U_{(+)}(\zeta) - G_{\rho,\mu}(\zeta;\ F) = 0, \quad \zeta\in\Delta_\gamma$$

и значит почти всюду на Г

$$U_{(+)}(\zeta) = G_{\rho,\mu}(\zeta;\ F), \quad \zeta\in\Gamma. \tag{2.14}$$

Аналогично, полагая $z\in\Delta_\beta^*$, рассмотрим интеграл

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)\, U(\zeta)\, d\zeta, \quad z\in\Delta_\beta^*, \tag{2.15}$$

где

$$\rho_1 > \frac{\alpha\rho}{2\alpha\rho - \rho - \alpha}, \quad \mu_1 = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho_1}.$$

Из (2.9) и (2.15) имеем

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)\, U_{(+)}(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)\, U_{(-)}(\zeta)\, d\zeta.$$

При $z\in\Delta_\beta^*$ целая функция $E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)$ как функция от ζ в замкнутой области $\bar{\Delta}_\gamma$ удовлетворяет неравенству $|E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)| < \frac{c_1}{|\zeta|}$ (c_1 — постоянная). С другой стороны, $U_{(+)}(\zeta)\in H_{2,-\infty}[\Delta_\gamma]$ и поэтому по теореме Коши здесь исчезает первый интеграл и получаем

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)\, U_{(-)}(\zeta)\, d\zeta, \quad z\in\Delta_\beta^*. \tag{2.16}$$

С другой стороны, $F_1(z)\in H_{2,\infty}[\Delta_\beta^*]$ и по теореме Б имеет представление

$$F_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu)\, G_{\rho_1,\mu_1}(\zeta;\ F_1)\, d\zeta. \tag{2.17}$$

Из (2.16) и (2.17) при $z\in\Delta_\beta^*$ имеем

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)\ [U_{(-)}(\zeta)+G_{\rho_1,\mu_1}(\zeta;\ F_1)]\ d\zeta.$$

Отсюда, повторяя уже проведенные рассуждения, получим, что почти всюду на Γ

$$U_{(-)}(\zeta)=-G_{\rho_1,\mu_1}(\zeta;\ F_1). \tag{2.18}$$

Отсюда и из (2.14) следует утверждение (2.8).

Теорема 1 доказана.

§ 3. Пополнение незамкнутой системы

Рассмотрим на Γ ($\zeta\in\Gamma$) систему функций

$$\{E_{\rho}^{(s_k-1)}(\lambda_k\zeta;\ \mu)\,\zeta^{s_k-1}\}_{k=1}^{\infty}, \tag{3.1}$$

где

$$\frac{\alpha}{2\alpha-1}<\rho<\frac{2\alpha}{2\alpha-1},\ \mu=\frac{1+\rho+\omega}{2\rho},\ -1<\omega<1,$$

$\lambda_k\in\Delta_\alpha$ ($k=1, 2\cdots$), а $s_k\geqslant1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_l\}_1^k$.

Как уже было отмечено, система (3.1) не может быть замкнутой в $L_{2,\omega}(\Gamma)$ ни при каком расположении и плотности точек λ_k. Наряду с (3.1) рассмотрим другую систему

$$\{E_{\rho_1}^{(q_j-1)}(\nu_j\zeta;\ \mu_1)\,\zeta^{q_j-1}\}_{j=1}^{\infty}, \tag{3.2}$$

где

$$\rho_1>\frac{\rho\alpha}{2\alpha\rho-\alpha-\rho},\quad \mu_1=\frac{1+\rho_1+\omega}{2\rho_1},\ -1<\omega<1,$$

$\nu_j\in\Delta_\beta^*$, а $q_j\geqslant1$ — кратность появления ν_j на отрезке $\{\nu_l\}_1^j$.

При сделанных предположениях все функции систем (3.1) и (3.2) принадлежат классу $L_{2,\omega}(\Gamma)$.

Теорема 2. *Для замкнутости совокупности систем* (3,1) *и* (3.2) *в* $L_{2,\omega}(\Gamma)$ *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k^{\alpha}}{1+|\lambda_k|^{2\alpha}}=\infty, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}(\nu_j\,e^{i\pi})^{\sigma}}{1+|\nu_j|^{2\sigma}}=\infty, \tag{3.4}$$

где $\sigma=\dfrac{\alpha\rho\rho_1}{2\alpha\rho\rho_1-\rho\rho_1-\alpha\rho_1-\alpha\rho}$.

Доказательство. Пусть $U_0(\zeta)$ — произвольная функция из класса $L_{2,\omega}(\Gamma)$ и

$$\int_{\Gamma} E_{\rho}^{(s_k-1)}(\lambda_k\zeta;\ \mu)\zeta^{s_k-1}\,\overline{U_0(\zeta)}\,|\zeta|^{\omega}\,d|\zeta| = 0 \tag{3.5}$$

$$k=1,\ 2,\ 3\cdots,$$

$$\int_{\Gamma} E_{\rho_1}^{(q_j-1)}(\nu_j\zeta;\ \mu_1)\zeta^{q_j-1}\,\overline{U_0(\zeta)}\,|\zeta|^{\omega}\,d|\zeta| = 0 \tag{3.6}$$

$$j=1,\ 2,\ 3,\cdots.$$

Введем обозначение

$$U(\zeta) = \begin{cases} 2\pi i\,\overline{U_0(\zeta)}\,|\zeta|^{\omega}\,e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}}, & \text{при } \zeta = \tau e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} \\ -2\pi i\,\overline{U_0(\zeta)}\,|\zeta|^{\omega}\,e^{i\frac{\pi}{2\gamma}}, & \text{при } \zeta = \tau e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}}. \end{cases}$$

Легко видеть, что $U(\zeta)\in L_{2,-\omega}(\Gamma)$. Тогда условия (3.5) и (3.6) могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} E_{\rho}^{(s_k-1)}(\lambda_k\zeta;\ \mu)\,\zeta^{s_k-1}\,U(\zeta)\,d\zeta = 0\ (k=1,\ 2,\cdots), \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} E_{\rho_1}^{(q_j-1)}(\nu_j\zeta;\ \mu)\,\zeta^{q_j-1}\,U(\zeta)\,d\zeta = 0\ (j=1,\ 2,\cdots). \tag{3.8}$$

Рассмотрим функции

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} E_{\rho}(z\zeta;\ \mu)\,U(\zeta)\,d\zeta,$$

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)\,U(\zeta)\,d\zeta.$$

Как уже неоднократно замечали

$$F(z)\in H_{2,\omega}[\Delta_\alpha],\ F_1(z)\in H_{2,\omega}[\Delta_\beta^*]. \tag{3.9}$$

Условия (3.7) и (3.8) означают

$$F^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0,\ k=1,\ 2,\cdots, \tag{3.10}$$

$$F_1^{(q_j-1)}(\nu_j) = 0,\ j=1,\ 2,\cdots,. \tag{3.11}$$

По теореме единственности для классов (3.9) (теорема *Д*), имеем

$$F(z)\equiv 0,\ z\in\Delta_\alpha,\ F_1(z)\equiv 0,\ z\in\Delta_\beta^*.$$

Отсюда

$$G_{\rho,\mu}(\zeta;\ F)\equiv 0,\ \zeta\in\Delta_\gamma, \tag{3.12}$$

$$G_{\rho_1,\mu_1}(\zeta;\ F_1)\equiv 0,\ \zeta\in\Delta_\gamma^*. \tag{3.13}$$

Ясно, что эти соотношения имеют место почти всюду и на контуре Γ (на границе областей Δ_γ и Δ_γ^*).

Но по теореме 1 при $\zeta \in \Gamma$

$$U(\zeta) = G_{\rho,\mu}(\zeta;\ F) - G_{\rho_1,\mu_1}(\zeta;\ F_1).$$

Значит почти всюду на Γ $U(\zeta)=0$, отсюда ввиду наших обозначений и $U_0(\zeta)=0$ почти всюду на Γ. Достаточность условий (3.3) и (3.4) доказана.

Для доказательства необходимости допустим, что хотя бы одно из условий (3.3) и (3.4) нарушено. Для определенности предположим, что сходится ряд (3.3). Тогда существует произведение Бляшке $B_\alpha(z) \not\equiv 0$ для области Δ_α:

$$B_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z^\alpha - \lambda_k^\alpha}{z^\alpha + \overline{\lambda}_k^\alpha} \cdot \frac{|1-\lambda_k|^{2\alpha}}{1-\lambda_k^{2\alpha}}.$$

При этом $|B_\alpha(z)| \leqslant 1$, при $z \in \overline{\Delta}_\alpha$.

Легко видеть, что функция $\varphi(z) = \dfrac{B_\alpha(z)}{1+z}$ принадлежит классу $H_{2,\omega}[\Delta_\alpha]$ и, следовательно, по теореме Б имеет представление

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma E_\rho(z\zeta;\ \mu)\, G_{\rho,\mu}(\zeta;\ \varphi)\, d\zeta, \tag{3.14}$$

где $G_{\rho,\mu}(\zeta;\ \varphi)$ — преобразование типа Бореля для функции $\varphi(z)$: $G_{\rho,\mu}(\zeta;\ \varphi) \not\equiv \theta$ и по теореме А $G_{\rho,\mu}(\zeta;\ \varphi) \in H_{2,-\omega}[\Delta_\gamma]$. Под знаком интеграла (3.14) фигурируют граничные значения этой функции на Γ.

Обозначим

$$\psi(\zeta) = \begin{cases} \overline{G_{\rho,\mu}(\zeta;\ \varphi)}\, |\zeta|^{-\omega} e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}}, & \text{при } \zeta = \tau e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} \\ -\overline{G_{\rho,\mu}(\zeta;\ \varphi)}\, |\zeta|^{-\omega} e^{i\frac{\pi}{2\gamma}}, & \text{при } \zeta = \tau e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}}. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\psi(\zeta) \in L_{2,\omega}(\Gamma)$, при этом $\psi(\zeta) \not\equiv 0$ на Γ. В этих обозначениях имеем

$$\int_\Gamma E_\rho(z\zeta;\ \mu)\, \overline{\psi(\zeta)}\, |\zeta|^\omega\, d|\zeta| = \int_\Gamma E_\rho(z\zeta;\ \mu)\, G_{\rho,\mu}(\zeta;\ \varphi)\, d\zeta, \tag{3.15}$$

$$\int_\Gamma E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)\, \overline{\psi(\zeta)}\, |\zeta|^\omega\, d|\zeta| = \int_\Gamma E_{\rho_1}(z\zeta;\ \mu_1)\, G_{\rho,\mu}(\zeta;\ \varphi)\, d\zeta. \tag{3.16}$$

Из (3.14) и (3.15) следует, что

$$\int_\Gamma E_\rho^{(s_k-1)}(\lambda_k\zeta;\ \mu)\, \zeta^{s_k-1}\, \overline{\psi(\zeta)}\, |\zeta|^\omega\, d|\zeta| = 0,\ k = 1, 2, \cdots. \tag{3.17}$$

С другой стороны, когда $z \in \Delta_\beta^*$, целые функции $E_{\rho_1}^{(q_j-1)}(z\zeta;\ \mu_1)\, \zeta^{q_j-1}$ как функции от ζ, в замкнутой области Δ_γ удовлетворяют неравеству

$$|E_{\rho_1}^{(q_j-1)}(z\zeta;\ \mu_1)\, \zeta^{q_j-1}| < \frac{c_2}{|\zeta|}\ (c_2 \text{ — постоянная}).$$

По теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma} E_{\rho_1}^{(q_j-1)}(z\zeta;\ \mu_1)\ \zeta^{q_j-1} G_{\rho,\mu}(\zeta;\ \varphi)\ d\zeta \equiv 0,\ \ z \in \Delta_{\beta}^{*}.$$

Отсюда имея ввиду (3.16) получим, в частности

$$\int\limits_{\Gamma} E_{\rho_1}^{(q_j-1)}(\nu_j\zeta;\ \mu_1)\ \zeta^{q_j-1}\ \overline{\psi(\zeta)}\ |\zeta|^{\omega}\ d|\zeta| = 0,\ j=1, 2, \cdots \tag{3.18}$$

Таким образом, $\psi(\zeta) \in L_{2,\omega}(\Gamma)$, $\psi(\zeta) \not\equiv 0$ и в метрике пространства $L_{2,\omega}(\Gamma)$ ортогональна всем функциям систем (3.1) и (3.2) (см. (3.17) и (3.18)). Это доказывает необходимость условий (3.3)и (3.4).

Теорема 2 полностью доказана.

Особо отметим частный случай теоремы 2, когда $\alpha>1$, $\rho=\mu=1$, $\omega=0$. Тогда система (3.1) превращается в систему

$$\{e^{\lambda_k\zeta}\ \zeta^{s_k-1}\}_1^{\infty},\ \lambda_k \in \Delta_{\alpha}. \tag{3.19}$$

В этом случае Γ представляет собой пару лучей $\arg z = \pm\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2}\right)$, $L_2(\Gamma) = L_{2,0}(\Gamma)$ — пространство функций $f(\zeta)$, определенных на Γ и удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\Gamma} |f(\zeta)|^2\ |d\zeta| < \infty.$$

Все функции системы (3.19) и системы

$$\{E_{\rho_1}^{(q_j-1)}(\nu_j\zeta;\ \mu_1)\ \zeta^{q_j-1}\}_1^{\infty},\ \nu_j \in \Delta_{\beta}^{*}\left(\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho_1} + 1\right),$$

где $\rho_1 > \frac{\alpha}{\alpha-1}$, $\mu_1 = \frac{1+\rho_1}{2\rho_1}$, принадлежат пространству $L_2(\Gamma)$. В этом частном случае теорема 2 формулируется в следующем виде.

Теорема 2'. *Для замкнутости совокупности систем*

$$\{e^{\lambda_k\zeta}\ \zeta^{s_k-1}\}_1^{\infty},\ \ \{E_{\rho_1}^{(q_j-1)}(\nu_j\zeta;\ \mu_1)\ \zeta^{q_j-1}\}_1^{\infty}$$

в $L_2(\Gamma)$ *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_k^{\alpha}}{1+|\lambda_k|^{2\alpha}} = \infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\nu_j e^{i\pi})^{\sigma}}{1+|\nu_j|^{2\sigma}} = \infty, \qquad \text{где } \sigma = \frac{\alpha\rho_1}{\alpha\rho_1 - \rho_1 - \alpha}.$$

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 20.I.1979

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների ոչ փակ սիստեմի լրիվացման մասին (*ամփոփում*)

Հայտնի է, որ

$$\frac{\alpha}{2\alpha-1} < \rho < \frac{2\alpha}{2\alpha-1} \left(\frac{1}{2} < \alpha < \infty\right)$$

պայմանի դեպքում ֆունկցիաների

$$\{E_\rho^{(s_k-1)}(\lambda_k \zeta;\ \mu)\, \zeta^{s_k-1}\}_{k=1}^{\infty} \qquad (1)$$

սիստեմը չի կարող փակ լինել $L_{2,\omega}(\Gamma)$ *-ում,* λ_k *-երի ցանկացած դասավորության և խտության դեպքում։*

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ եթե (1) սիստեմը լրացվի

$$\{E_{\rho_1}^{(q_j-1)}(\nu_j \zeta;\ \mu_1)\, \zeta^{q_j-1}\}_{j=1}^{\infty} \qquad (2)$$

սիստեմով, որտեղ ρ_1 *և* μ_1 *պարամետրերը ընտրված են հարմար ձևով, ապա որոշակի պայմանների դեպքում (1) և (2) սիստեմների համախումբը կլինի փակ* $L_{2,\omega}(\Gamma)$ *-ում։ Նախապես ստացվում է Մ. Մ. Ջրբաշյանի և հեղինակի կողմից նախկինում դիտարկված մի ինտեգրալ ձևափոխության համար նոր շրջման բանաձև։*

A. E. AVETISSIAN. *On the completion of non-closed system of Mittag-Leffler's type functions* (summary)

It is known, that for

$$\frac{\alpha}{2\alpha-1} < \rho < \frac{2\alpha}{2\alpha-1} \left(\frac{1}{2} < \alpha < \infty\right)$$

the system of functions

$$\{E_\rho^{(s_k-1)}(\lambda_k \zeta;\ \mu)\, \zeta^{s_k-1}\}_{k=1}^{\infty}$$

cannot be closed in $L_{2,\omega}(\Gamma)$ for any position and density of λ_k.

In this paper we show that if (1) is complemented by the system

$$\{E_{\rho_1}^{(q_j-1)}(\nu_j \zeta;\ \mu_1)\, \zeta^{q_j-1}\}_{j=1}^{\infty}$$

with parameters ρ_1 and μ_1 suitably chosen, then under certain conditions, the resultant system turns to be closed in $L_{2,\omega}(\Gamma)$. At first we obtain a new inversion formula of the integral transformation considered by M. M. Djrbashian and the author.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О пополнении и замыкании неполной системы $\{e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\}$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
2. *М. М. Джрбашян.* О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера, ДАН СССР, 219, № 6, 1974, 1302—1305.
3. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян.* Теоремы типа Винера—Пэли и Мюнца—Сасса, ДАН СССР, 225, № 5, 1975, 1001—1004.
4. *В. М. Мартиросян.* О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера и систем простейших рациональных дробей, ДАН Арм. ССР, XII, № 5, 1976, 269—273.

5. *А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, И. О. Хачатрян.* О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера на произвольной конечной системе лучей, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 389—395.
6. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. мат. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
7. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. «Наука», 1966.
8. *А. Е. Аветисян.* К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 376—388.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 2, 1980 Математика

В. Я. ЭЙДЕРМАН

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В работах И. В. Ушаковой [2], С. Я. Хавинсона [4] и Н. Н. Меймана [7] рассмотрен вопрос об убывании мероморфных функций ограниченного вида на последовательности точек. Эти результаты развивали работу А. А. Шагиняна [1], рассмотревшего аналогичный вопрос для убывания вдоль линии. В статье И. В. Ушаковой [3] получена оценка скорости убывания произвольной мероморфной функции, когда аргумент стремится к границе области вне некоторого исключительного множества.

В настоящей работе также рассматривается убывание произвольной мероморфной функции на последовательности точек. Полученный результат применяется к функциям ограниченного вида.

Прежде чем привести формулировки названных теорем, введем некоторые обозначения:

G—односвязная область с жордановой границей, содержащей более одной точки;

$g(z, z_0, G)$—функция Грина области G с полюсом в точке z_0;

G_ρ—область, определяемая неравенством $g(z, z_0, G)>\rho$;

$\omega(z, \alpha, G_\rho)$— значение гармонической меры множества $\alpha\subset\partial G_\rho$ относительно области G_ρ в точке z;

$P_{z_0}(z, \xi, G_\rho)$— ядро Пуассона области G_ρ (см. [5]):

$$P_{z_0}(z, \xi, G_\rho)=\lim\frac{\omega(z, \xi\xi_1, G_\rho)}{\omega(z_0, \xi\xi_1, G_\rho)} \quad \text{при} \quad \omega(z, \xi\xi_1, G_\rho)\to 0. \tag{1}$$

В области G_ρ имеет место формула Пуассона—Иенсена:

$$\ln|f(z)|=\int\limits_{\partial G_\rho}\ln|f(\xi)|\cdot P_{z_0}(z, \xi, G_\rho)\,\omega(z_0, d\xi, G_\rho)+$$

$$+\sum_{b_\nu\in G_\rho}g(b_\nu, z, G_\rho)-\sum_{a_\nu\in G_\rho}g(a_\nu, z, G_\rho), \tag{2}$$

где $\{a_\nu\}$ и $\{b_\nu\}$—соответственно нули и полюсы функции $f(z)$.

Определим характеристическую функцию $T_\rho(f, z_0)$ симметричным образом ($f(z_0)\neq 0, \infty$):

$$T_\rho(f, z_0)=\int\limits_{\partial G_\rho}\ln^+|f(\xi)|\,\omega(z_0, d\xi, G_\rho)+\sum_{b_\nu\in G_\rho}g(b_\nu, z_0, G_\rho)+\ln^-|f(z_0)|. \tag{3}$$

Положив в (2) $z_0 = z$, из (1) получим $P_z(z, \xi, G_\rho) \equiv 1$, и (2) перепишется в виде:

$$\ln|f(z)| = \int\limits_{\partial G_\rho} \ln|f(\xi)|\, \omega(z, d\xi, G_\rho) + \sum_{b_\nu \in G_\rho} g(b_\nu, z, G_\rho) -$$

$$- \sum_{a_\nu \in G_\rho} g(a_\nu, z, G_\rho),$$

откуда следует, что

$$T_\rho(f, z_0) = T_\rho(1/f, z_0) =$$

$$= \int\limits_{\partial G_\rho} \ln^- |f(\xi)|\, \omega(z_0, d\xi, G_\rho) + \sum_{a_\nu \in G_\rho} g(a_\nu, z_0, G_\rho) + \ln^+ |f(z_0)|. \tag{4}$$

Обозначим $\theta_0 = \varliminf\limits_{\rho \to 0} \theta_{0,\rho}$,

$$0 \leqslant \theta_{0,\rho} = \left[\sum_{a_\nu \in G_\rho} g(a_\nu, z_0, G_\rho) + \ln^+ |f(z_0)| \right] \Big/ T_\rho(f, z_0) \leqslant 1; \tag{5}$$

$$T_0 = \lim_{\rho \to 0} T_\rho(f, z_0);\ \textstyle\sum_1 = \max(\sum, 1);\ g(z) = g(z, z_0, G).$$

Если область G—круг $|z| < 1$, для характеристики будем использовать также обозначение $T(r) = T_{-\ln r}(f, 0)$.

Теорема 1. [2]. Пусть $\{z_n\}$—последовательность точек единичного круга, лежащих внутри сектора с вершиной в точке $z=1$, образованнного двумя хордами окружности $|z| = 1$, причем $z_n \to 1$ и выполнены условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) = \infty, \tag{6}$$

$$\left| \frac{1+z_k}{1-z_k} \right| - \left| \frac{1+z_{k+1}}{1-z_{k+1}} \right| \geqslant \delta > 0, \tag{7}$$

где δ не зависит от k. Если для голоморфной и ограниченной внутри единичного круга D функции $f(z)$ справедливо соотношение

$$\lim_{k \to \infty} |1 - z_k| \cdot \ln|f(z_k)| = -\infty, \tag{8}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Теорема 2. [4]. Пусть последовательность $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, удовлетворяет условию (6) и

$$\frac{|z_k| - |z_{k-1}|}{(1 - |z_k|) \cdot (1 - |z_{k-1}|)} \geqslant \delta > 0, \tag{9}$$

где δ не зависит от k. Если голоморфная и ограниченная в D функция $f(z)$ такова, что

$$\lim_{k\to\infty} (1-|z_k|)\cdot \ln |f(z_k)| = -\infty, \tag{10}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Теоремы 1 и 2 справедливы и для функций ограниченного вида.

Теорема 3 [7]. Пусть $f(z)$— функция ограниченного вида и последовательность $\{z_n\}$ такова, что для некоторого $\sigma > 0$ существует такое число M, что любой неэвклидов диск радиуса $\chi \leqslant \sigma$ содержит не более M точек $\{z_n\}$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(z_k) = \infty. \tag{11}$$

Если при этих условиях для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ g(z_k)\cdot \ln |f(z_k)| < -2(1-\theta_0+\varepsilon)\cdot T_0, \tag{12}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Под неэвклидовой здесь, как обычно, понимается метрика, определяемая формулой

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\exp[-g(z_1, z_2, G)]}{1-\exp[-g(z_1, z_2, G)]}. \tag{13}$$

Как показывает пример функции $f(z) = \exp(i/z)$ в $G = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, приведенный в [7], неравенство (12) точное.

Для доказательства теоремы 3 вначале показывается, что нули функции $f(z)$ можно поместить в некоторую совокупность C неэвклидовых дисков, вне которых справедливо неравенство, обратное (12), причем условия на последовательность $\{z_n\}$ гарантируют существование подпоследовательности, лежащей вне C. Отсюда, очевидно, следует заключение теоремы.

В работе [3] строится иное исключительное множество.

Теорема 4. [3]. Пусть $\sigma(r)$—такая монотонная функция, что

$$\int_0^1 T(r)\sigma(r)\,dr < M.$$

Положим

$$x(t) = \int_t^1 \sigma(\tau)\,d\tau;\quad \mu(t) = \int_t^1 x(\tau)\,d\tau.$$

Найдется множество C, состоящее из кружков с конечной суммой неэвклидовых радиусов, такое что

$$\ln |f(z)| > -\frac{N_\theta}{\mu(|z|+\theta(1-|z|))} \quad (z \,\overline{\in}\, C,\ 0<\theta<1).$$

Если последовательность $\{z_n\}$, $|z_n|<1$, такова, что ее нельзя поместить ни в какое множество C такое, что $\sum \mu(R_i) < \infty$ (R_j—модули центров кружков C_j, составляющих C), то из соотношения

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \mu(|z_k|+\theta(1-|z_k|))\cdot\ln|f(z_k)|=-\infty$$

при каком-нибудь $\theta\in(0, 1)$ следует, что $f(z)\equiv 0$.

В [3] приводится несколько конкретных примеров условий на последовательность $\{z_n\}$, достаточных для выполнения указанного свойства; это условие $\sum_k \mu(|z_k|)=\infty$ в сочетании с каким-либо из приведенных ниже условий несгущаемости последовательности:

$$\chi(z_n, z_m)\geqslant\delta\,|n-m|\quad(\delta>0);\tag{14}$$

$$\frac{|z_n-z_m|}{\sqrt{(1-|z_n|)(1-|z_m|)}}\geqslant\delta\sqrt{|n-m|}\quad(\delta>0);\tag{15}$$

$$\left[\frac{1}{\mu(|z_{k+1}|)}-\frac{1}{\mu(|z_k|)}\right]\cdot\frac{\mu(|z_k|)}{(1-|z_k|)\cdot(-\mu'(|z_k|))}\geqslant\delta>0.$$

Последнее условие обобщает теорему 2, так как указывается в [3], для функций ограниченного вида можно положить $\mu(|z|)=1-|z|$. В [3] замечено также, что выбрав $\sigma(t)=T^{-1}(t)\cdot(1-t)^{\varepsilon-1}$, будем иметь оценку $|f(z)|$ прямо через ее характеристику:

$$\ln|f(z)|>-\frac{N_{0,\varepsilon}\cdot T(|z|+\theta(1-|z|))}{(1-|z|)^{1+\varepsilon}}(z\,\overline{\in}\,C).\tag{16}$$

При доказательстве нашей теоремы мы поступим аналогично: оценим $|f(z)|$ вне некоторого исключительного множества C и наложим на $\{z_n\}$ условия, влекущие существование подпоследовательности, лежащей вне C. Полученная оценка будет точнее (16), но сумма неэвклидовых радиусов дисков, составляющих C, будет не обязательно конечной.

Теорема 5. *Пусть $\{a_\nu\}$, как и раньше, последовательность нулей мероморфной в области G функции $f(z)$, а числа M, $\sigma_0<\infty$, δ_1, $\delta_2\in(0, 1)$ и последовательность $\{z_n\}$, $z_n\in G$, таковы, что*

1. *В любом диске с неэвклидовым центром z и радиусом $\sigma<\sigma_0$ содержится не более*

$$M\cdot\left[\frac{\sigma}{g(z)}\cdot\sum_{a_\nu\in O_{\delta_1 g(z)}}{}_1\, g(a_\nu)+1\right]\tag{17}$$

точек последовательности $\{z_n\}$ (M не зависит от z);

2. $$\overline{\lim_{\rho\to 0}}\left[\sum_{z_n\in O_\rho} g(z_n)\Big/\sum_{a_\nu\in O_{\delta_2\rho}} g(a_\nu)\right]=\infty.\tag{18}$$

(Если $f(z)$ не имеет нулей или имеет их конечное число, достаточно потребовать $g(z_n)\to 0$).

Тогда для любого числа $0<\delta_3<\delta_1$ найдется число $0<A<\infty$, такое, что если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[g(z_n)\cdot\ln|f(z_n)|/T_{\delta_3 g(z_n)}(f, z_0)]<-A,\tag{19}$$

то $f(z) \equiv 0$, *причем для* A *справедлива оценка:*

$$A < \frac{4}{\sigma_1 \cdot (\delta_1 - \delta_3)} + \frac{4}{1-\delta_1}, \quad \sigma_1 = \min\left(\sigma_0, \delta_1, \frac{1-\delta_1^{1/m}}{5}, \frac{1-\delta_2}{5}\right),$$

$$m = \left[2 \ln \frac{1}{\delta_1} \Big/ \ln \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_3}\right] + 1, \tag{20}$$

где [ ] *означает целую часть.*

Замечание. Для любой последовательности $\{a_\nu\}$ и любых чисел M, σ_0, $\delta_1 \leqslant \delta_2$, δ_1, $\delta_2 \in (0, 1)$ нетрудно построить последовательность $\{z_n\}$, удовлетворяющую условиям (17), (18).

В случае, когда G есть единичный круг, теорема 5 примет вид:

Теорема 5'. *Пусть числа* M, $\sigma_0 < \infty$; θ_1, $\theta_2 \in (0, 1)$ *и последовательность* $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, *таковы что:*

1. *В любом диске с неэвклидовым центром* z *и радиусом* $\sigma < \sigma_0$ *содержится не более*

$$\left[M \cdot \frac{\sigma}{1-|z|} \cdot \sum_{|a_\nu| < |z| + \theta_1 (1-|z|)} (1-|a_\nu|) + 1\right] \tag{17'}$$

точек последовательности $\{z_n\}$;

$$2. \quad \overline{\lim_{r \to 1}} \left[\sum_{|z_n| < r} (1-|z_n|) \Big/ \sum_{|a_\nu| < r + \theta_2 (1-r)} (1-|a_\nu|)\right] = \infty. \tag{18'}$$

Тогда для любого числа $1 > \theta_3 > \theta_1$ *найдется число* $0 < A < \infty$, *такое, что если*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left[(1-|z_n|) \ln |f(z_n)| / T(|z_n| + \theta_3 (1-|z_n|))\right] < -A, \tag{19'}$$

то $f(z) \equiv 0$, *причем для* A *справедлива оценка*

$$A < \frac{4}{\sigma_1 (\theta_3 - \theta_1)} + \frac{4}{\theta_1}, \quad \sigma_1 = \min\left(\sigma_0, 1-\theta_1, \frac{1-(1-\theta_1)^{1/m}}{5}, \frac{\theta_2}{5}\right),$$

$$m = \left[2 \ln \frac{1}{1-\theta_1} \Big/ \ln \frac{2(1-\theta_1)}{2-\theta_1-\theta_3}\right] + 1. \tag{20'}$$

Пример. $f(z) = \exp[-1/(1-z)^2]$, тогда $T(r) = O(1/1-r)$. На действительной оси $\ln |f(z)|$ убывает как $-1/(1-r)^2$. Отсюда видно, что в (19') нельзя $T(|z| + \theta_3 (1-|z|))$ заменить на более медленно растущую величину.

Перейдем к доказательству теоремы 5, после чего обсудим ее применение к функциям ограниченного вида.

Наряду с метрикой χ, определяемой (13), будем рассматривать метрику $d(z_1, z_2) = \exp[-g(z_1, z_2, G)]$. Тогда $\chi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+d}{1-d}$. Так как

$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\sim x$ при $x\to 0$, то для любого числа $\sigma_0<\infty$ можно подобрать такие числа k_1, k_2 и $\theta<1$, что при $\chi(z_1, z_2)<\sigma_0$

$$k_1\, d(z_1, z_2)<\chi(z_1, z_2)<k_2\, d(z_1, z_2),\quad d(z_1, z_2)<\theta.$$

Поэтому под неэвклидовой в теоремах 5 и 5′ можно понимать как метрику χ, так и метрику d (в последнем случае надо положить $\sigma_0<1$ вместо $\sigma_0<\infty$). Для доказательства будет использоваться метрика d.

Лемма 1. *Пусть точки z_1 и z_2 лежат в диске с неэвклидовым радиусом $\sigma<1$ и $g(z_1)<\rho$, $g(z_2)<\rho$. Тогда найдутся числа a_1, a_2, зависящие от ρ, σ, такие, что $a_1\, g(z_1)<g(z_2)<a_2\, g(z_1)$.*

Доказательство. Отобразим G на $D=\{z: |z|<1\}$ так, чтобы точка z_0 перешла в 0. Пусть ω_1, ω_2 — образы точек z_1, z_2. Тогда $-\ln|\omega_1|=g(z_1)$; $-\ln|\omega_2|=g(z_2)$. При $|\omega_1|\to 1$ также и $|\omega_2|\to 1$. Так как $-\ln|\omega|\sim 1-|\omega|$ при $|\omega|\to 1$, то достаточно доказать существование чисел a_1, a_2, таких, что $a_1(1-|\omega_1|)<1-|\omega_2|<a_2(1-|\omega_1|)$. Будем полагать для определенности $|\omega_1|>|\omega_2|$. Легко показать, что $|\omega_1-\omega_2|\leqslant 2\sigma(1-|\omega'|^2)/(1-\sigma^2|\omega'|^2)$, где ω' — центр неэвклидова диска, содержащего ω_1, ω_2. Достаточно рассмотреть случай $|\omega_1|\leqslant|\omega'|$.

$$1-|\omega_2|\leqslant 1-|\omega_1|+|\omega_1-\omega_2|\leqslant(1-|\omega_1|)\,[1+2\sigma(1+|\omega'|)/(1-\sigma^2|\omega'|^2)]<$$

$$<(1-|\omega_1|)\left(1+\frac{4\sigma}{1-\sigma^2}\right)=a_2(1-|\omega_1|),\quad a_2=1+\frac{4\sigma}{1-\sigma^2}\cdot$$

Теперь предположение $|\omega_1|>|\omega_2|$ можно отбросить, если положить $a_1=\frac{1}{a_2}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\delta\in(0,1)$, $\sigma=\frac{1-\delta}{5}\cdot$ Найдется такое $\rho>0$, что неэвклидов диск радиуса σ не может содержать точек z и z_1, таких что*

$$g(z)<\rho\ \text{и}\ g(z_1)\leqslant\delta\cdot g(z).$$

Доказательство. Отобразим G на D так, чтобы z_0 перешла в 0. Тогда множества точек $\{\omega: g(\omega)=g(z)\}$ и $\{\omega_1: g(\omega_1)=g(z_1)\}$ перейдут в концентрические окружности с радиусами r и r_1, для которых $-\ln r=g(z)$, $-\ln r_1=g(z_1)\leqslant-\delta\ln r$. Очевидно, для любого $\varepsilon>0$ найдется $R<1$, такое, что при $r>R$ $(1-\delta-\varepsilon)(1-r)<r_1-r$. Выберем ε достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство $4(1-\delta)/[(1-\delta-\varepsilon)(4+\delta)]<1$. Тогда

$$r_1-r>\frac{4(1-\delta)(r_1-r)}{(1-\delta-\varepsilon)(4+\delta)}=\frac{4\sigma(r_1-r)}{(1-\delta-\varepsilon)(1-\sigma)}>\frac{4\sigma}{1-\sigma}(1-r)>\frac{2\sigma(1-r^2)}{1-r^2\cdot\sigma^2}.$$

Нетрудно убедиться, что правая часть последнего неравенства равна эвклидовому диаметру диска неэвклидового радиуса σ с центром в точке r. Так как эвклидово расстояние между образами точек z и z_1

не меньше, чем $r_1 - r$, то из полученного неравенства следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть* σ_0, δ_1, $\delta_3 < \delta_1$ — *любые фиксированные числа из интервала* (0,1); $\{a_\nu\}$, $a_\nu \in G$ — *последовательность, не имеющая предельных точек в* G. *Тогда найдется система неэвклидовых дисков* C *в области* G *и числа* $1 < M_1 < \infty$, $\rho_1 > 0$ *и* $A_1 > 0$, *такие, что при* $z \in G \setminus C$, $g(z) < \rho_1$

$$\text{а)}\quad g(z)\cdot \sum_{a_\nu \in G_{\delta_3 g(z)}} g(z, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)}) < A_1 \cdot \sum_{a_\nu \in G_{\delta_3 g(z)}} g(z_0, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)}), \tag{21}$$

$$A_1 < \frac{4}{(\delta_1 - \delta_3)\cdot \sigma_3} + \frac{2}{1-\delta_1},\quad \sigma_3 = \min\left(\sigma_0,\ \delta_1,\ \frac{1-\delta_1^{1/m}}{5}\right), \tag{22}$$

m *определяется в* (20);

б) *в каждом диске множества* C *с радиусом* σ *и центром* z *содержится не менее*

$$M_1 \cdot \frac{\sigma}{g(z)} \cdot \sum_{g(a_\nu) > \delta_1 g(z)} {}_1\ g(a_\nu)$$

точек последовательности $\{a_\nu\}$, *причем каждая точка учитывается не более, чем трижды;*

в) *радиусы дисков, составляющих* C, *не превосходят* σ_0.

Доказательство. Возьмем $\delta_4 = (\delta_1 + \delta_3)/2$, $\delta_5 = \delta_1^{1/m}$, где m определено в (20). Нетрудно убедиться, что $\delta_5^{m+2} \geqslant \delta_4$. Построим последовательность точек $\{\omega_n\}$ следующим образом: $g(\omega_1) = \delta_5$; $g(\omega_{n+1}) = \delta_5 \cdot g(\omega_n)$. Множество $\{z\colon g(\omega_l) \geqslant g(z) > g(\omega_{l+1})\}$ будем называть l-м слоем. В силу (22) и леммы 2 диск радиуса σ_3 может пересекаться не более чем с двумя слоями. Приступим к построению множества C.

Возьмем любое $l > 2$. Согласно теореме Н. Н. Меймана [6], для любого заданного $H_l \in (0, 1/2)$ существует исключительное множество C_l, состоящее из совокупности неэвклидовых дисков $C_{l,k}$, с суммой радиусов $\leqslant 2H_l$, такое что при $z \in G \setminus C_l$

$$\sum_{g(a_\nu) > g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G) \leqslant n_{g(\omega_{l+m+1})} \cdot (1 - \ln H_l) \tag{23}$$

(здесь и далее n_ρ — количество точек $\{a_\nu\}$ в области G_ρ). Возьмем

$$2H_l = \sigma_3 \frac{n_{g(\omega_{l+m+1})} \cdot g(\omega_{l+m+1})}{\sum\limits_{g(a_\nu) > g(\omega_{l+m+1})} {}_1\ g(a_\nu)}. \tag{24}$$

Согласно [6] радиус любого диска $C_{l,k} \subset C_l$ равен $2H_l \cdot \lambda_{l,k} / n_{g(\omega_{l+m+1})}$, где $\lambda_{l,k}$ не превосходит числа точек из $\{a_\nu\}$, лежащих в $C_{l,k} \cap G_{g(\omega_{l+m+1})}$, причем $\lambda_{l,k}$ выбирается так, что точки, находящиеся в нескольких дисках из C_i, учитываются лишь однажды. Применяя (24) получим, что радиус $\sigma_{i,k}$ диска $C_{i,k}$ равен

$$\sigma_{i,k}=\frac{2H_i\cdot\lambda_{i,k}}{n_{g(\omega_{i+m+1})}}=\sigma_3\cdot\frac{\lambda_{i,k}\cdot g(\omega_{i+m+1})}{\sum_{g(a_\nu)>g(\omega_{i+m+1})}^{1} g(a_\nu)}\cdot \tag{25}$$

Из множества C_i присоединим к C те диски, которые пересекаются с $(i-1)$-м слоем. Применяя эту конструкцию для любого i, получим искомое множество C. Покажем, что C удовлетворяет условиям а), б) (условие в) выполнено, так как в силу (25) и (22) $\sigma_{i,k}<\sigma_3<\sigma_0$). Возьмем любой диск $C_{i,k}$. Из (25) получаем

$$\lambda_{i,k}=\frac{\sigma_{i,k}}{\sigma_3\cdot g(\omega_{i+m+1})}\cdot\sum_{g(a_\nu)>g(\omega_{i+m+1})}^{1} g(a_\nu). \tag{26}$$

Так как диск $C_{i,k}$ пересекается с $(i-1)$-м слоем, то он не пересекается с $(i+1)$-м слоем. Следовательно, $\forall z\in C_{i,k}$ (в частности, для центра) $g(z)>g(\omega_{i+1})$, и $\delta_1 g(z)>\delta_1\cdot g(\omega_{i+1})=\delta_5^m\cdot g(\omega_{i+1})=g(\omega_{i+m+1})$. Отсюда и из (26) следует, что в каждом диске множества C содержится не менее точек $\{a_\nu\}$, чем указано в условии б), если положить $M_1=\delta_1/\sigma_3>1$. Возьмем любую точку $a_n\in\{a_\nu\}$. Пусть она лежит в $(i-1)$-м слое. Тогда она может принадлежать дискам из множеств C_{i-1}, C_i и C_{i+1} (включенные в множество C диски из остальных множеств C_j с $(i-1)$-м слоем не пересекаются). Так как в число $\lambda_{i,k}$ при фиксированном i каждая точка из $\{a_\nu\}$ входит однажды, то всего мы можем ее учесть не более трех раз. Осталось показать выполнимость условия а).

Возьмем любую точку z. Пусть она лежит в $(i-1)$-м слое. Так как все диски из множества C_i, пересекающиеся с $(i-1)$-м слоем, лежат в C, то из условия $z\in G\setminus C$ следует, что $z\in G\setminus C_i$. Поэтому справедливо (23), откуда получим, заметив, что

$$g(z)\leqslant g(\omega_{i-1})=g(\omega_{i+m+1})/\delta_5^{m+2}:$$

$$g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{i+m+1})} g(z,a_\nu,G)}{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{i+m+1})} g(a_\nu)}<\frac{g(\omega_{i+m+1})\cdot n_{g(\omega_{i+m+1})}}{\delta_5^{m+2}\cdot\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{i+m+1})}^{1} g(a_\nu)}\times$$

$$\times\ln\frac{e}{H_i}=\frac{2H_i}{\sigma_3\cdot\delta_5^{m+2}}\cdot\ln\frac{e}{H_i}<\frac{2}{\sigma_3\cdot\delta_5^{m+2}}<\frac{2}{\sigma_3\cdot\delta_4}=A_2. \tag{27}$$

$$g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{a_\nu\in O_{\delta_3 g(z)}} g(z,a_\nu,G_{\delta_3\cdot g(z)})}{\sum\limits_{a_\nu\in O_{\delta_3 g(z)}} g(z_0,a_\nu,G_{\delta_3\cdot g(z)})}=$$

$$=g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)})+\sum\limits_{g(\omega_{l+m+1})>g(a_\nu)>\delta_3 g(z)} g(z, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)})}{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z_0, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)})+\sum\limits_{g(\omega_{l+m+1})>g(a_\nu)>\delta_3 g(z)} g(z_0, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)})}<$$

$$<g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G_{\delta_3\cdot g(z)})}{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z_0, a_\nu, G_{\delta_3\cdot g(z)})}+$$

$$+g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(\omega_{l+m+1})>g(a_\nu)>\delta_3\cdot g(z)} g(z, a_\nu, G_{\delta_3\cdot g(z)})}{\sum\limits_{g(\omega_{l+m+1})>g(a_\nu)>\delta_3\cdot g(z)} g(z_0, a_\nu, G_{\delta_3\cdot g(z)})}. \qquad (28)$$

Оценим в (28) каждое слагаемое отдельно. Первое слагаемое не превосходит

$$g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G)}{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(a_\nu)-n_{g(\omega_{l+m+1})}\cdot\delta_3\cdot g(z)}.$$

Так как $\delta_5^{m+2}\geqslant\delta_4$, то $g(\omega_{l+m+1})>\delta_5^{m+2}\cdot g(z)\geqslant\delta_4\cdot g(z)$, следовательно, при $g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})$ $g(a_\nu)>\delta_4\cdot g(z)$, поэтому

$$n_{g(\omega_{l+m+1})}\cdot\delta_3\cdot g(z)<\frac{\delta_3}{\delta_4}\cdot\sum_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(a_\nu).$$

Будем полагать $\sum g(a_\nu)=\infty$ и $g(z)$ достаточно малым, чтобы в (27) $\sum_1=\sum$ (случай $\sum g(a_\nu)<\infty$ разобран в замечании в конце доказательства). Отсюда и из (27) получим, что первое слагаемое в (28) не превосходит

$$g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G)}{\left(1-\frac{\delta_3}{\delta_4}\right)\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(a_\nu)}<\frac{\delta_4}{\delta_4-\delta_3}\cdot A_2=\frac{4}{\sigma_3\cdot(\delta_1-\delta_3)}. \qquad (29)$$

Так как $\delta_1\cdot g(z)\geqslant g(\omega_{l+m+1})$, то для оценки второго слагаемого в (28) достаточно показать, что $\forall\varepsilon>0$ найдется $\rho_1>0$, такое что при

$$g(z)<\rho_1,\ \delta_1\cdot g(z)\geqslant g(a)>\delta_3\cdot g(z)$$

справедливо неравенство

$$g(z)\cdot g(z, a, G_{\delta_3\cdot g(z)})<\left(\frac{2}{1-\delta_1}+\varepsilon\right)\cdot g(z_0, a, G_{\delta_3\cdot g(z)}). \qquad (30)$$

Отобразим область G на единичный круг D так, чтобы точка z_0 перешла в 0, а z—в действительную точку r. Тогда область $G_{\delta_3\cdot g(z)}$

отобразится на область $\{\omega: -\ln|\omega| > -\delta_3 \cdot \ln r\}$, то есть на круг $|\omega| < r^{\delta_3}$, $G_{\delta_1, g(z)}$ отобразится на круг $|\omega| < r^{\delta_1}$. Множество $\{a: g(z, a, G_{\delta_3 \cdot g(z)}) = \mathrm{const}\}$ очевидно, также переходит в окружность с центром на действительной оси. Поэтому при фиксированной const точка a, для которой $g(z_0, a, G_{\delta_3 \cdot g(z)})$ минимально, должна переходить также в действительную точку x. Если обозначить z' и a' образы точек z и a при отображении G на D, то

$$g(z, a, G_{\delta_3, g(z)}) = \ln\left|\frac{|z'|^{2\delta_3} - \bar{a}' \cdot z'}{|z'|^{\delta_3} \cdot (z' - a')}\right|.$$

В силу сказанного выше достаточно доказать (30) при $z' = r$, $a' = x$, r и x—действительные числа, $r^{\delta_1} \leqslant x < r^{\delta_3}$. Для единичного круга неравенство (30) примет вид

$$\ln\frac{1}{r} \cdot \ln\frac{r^{2\delta_3} - xr}{r^{\delta_3} \cdot (x - r)} < \left(\frac{2}{1-\delta_1} + \varepsilon\right) \cdot \ln\frac{r^{\delta_3}}{x}.$$

В дальнейшем удобно положить $x = r^\delta$, $\delta_1 \geqslant \delta > \delta_3$. Тогда для доказательства (30) достаточно показать, что найдется $r_1 < 1$, такое что в прямоугольнике $r_1 < r < 1$, $\delta_3 < \delta \leqslant \delta_1$

$$\Phi(r, \delta) = \ln\frac{1}{r} \cdot \ln\frac{r^{2\delta_3} - r^{1+\delta}}{r^{\delta_3}(r^\delta - r)} \Big/ \ln\frac{r^{\delta_3}}{r^\delta} < \frac{2}{1-\delta_1} + \varepsilon. \tag{31}$$

Элементарными преобразованиями находим, что

$$\Phi(r, \delta) < \frac{2}{r^{\delta + \delta_3}} \cdot \frac{1}{\delta - \delta_3} \cdot \frac{1 - r^{\delta - \delta_3}}{1 - r^{1-\delta}} = \Phi_1(r, \delta).$$

Из разложения функции Φ_1 в ряд Тейлора по r, δ в точке $(1, \delta_0)$, $\delta_1 \geqslant \delta_0 \geqslant \delta_3$, видно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность точки $(1, \delta_0)$ такая, что в ней Φ не превосходит $\dfrac{2}{1-\delta_1} + \varepsilon$. Отсюда следует справедливость неравенства (31), следовательно и (30). Объединяя (30) с (29), получим (21) и (22).

Замечания. 1. В случае, если $\sum_\nu g(a_\nu) < \infty$, условие а) можно уточнить, а именно:

а′) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\rho > 0$, такое что при $z \in G \setminus C$ и $g(z) < \rho$

$$g(z) \cdot \sum_{a_\nu \in G_{\delta_1, g(z)}} g(z, a_\nu, G) < \varepsilon.$$

Действительно, в этом случае $\rho \cdot n_\rho \to 0$ при $\rho \to 0$, следовательно, $H_l \to 0$ при $l \to \infty$, и из (27) получим

$$g(z) \cdot \sum_{g(a_\nu) > g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G) \to 0 \quad \text{при } g(z) \to 0.$$

$$\sum_{a_\nu \in G_{\delta_3 \cdot g(z)}} g(z, a_\nu, G) = \sum_{g(a_\nu) > g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G) +$$

$$+ \sum_{g(\omega_{l+m+1}) > g(a_\nu) > \delta_3 \cdot g(z)} g(z, a_\nu, G).$$

Так как $g(z) > g(\omega_l)$, то в силу выбора σ_3 вторая сумма не превосходит $n_{\delta_3 g(z)} \cdot \ln \frac{1}{\sigma_3}$. Заметив теперь, что $g(z) \cdot n_{\delta_3 \cdot g(z)} \to 0$ при $g(z) \to 0$, получим оценку а′).

2. Из (25) следует, что при $\sum\limits_\nu g(a_\nu) < \infty$ сумма радиусов дисков, составляющих C, будет конечной. В общем случае нетрудно построить последовательность $\{a_\nu\}$, для которой не существует системы дисков C с конечной суммой радиусов, удовлетворяющей условию а).

Доказательство теоремы 5. Возьмем σ_1, определенное в (20). Согласно лемме 2 неэвклидов диск радиуса $\sigma < \sigma_1$, пересекающийся с областью G_ρ, целиком лежит в области $G_{\delta,\rho}$. Покажем теперь, что при $z \in G \setminus C$, $g(z) < \rho_1$ справедливо неравенство, обратное неравенству (19). Здесь C—исключительное множество, построенное в лемме 3. При получении оценки $|f(z)|$ используются рассмотрения работы [7].

Из (2) следует неравенство:

$$\ln|f(z)| > -\int\limits_{\partial G_\rho} P_{z_0}(z, \xi, G_\rho) \cdot \ln^-|f(\xi)|\, \omega(z_0, d\xi, G_\rho) -$$

$$- \sum_{a_\nu \in G_\rho} g(a_\nu, z, G_\rho). \tag{32}$$

Согласно [7]

$$P_{z_0}(z, \xi, G) \leqslant \frac{1 + \exp[-g(z, z_0, G)]}{1 - \exp[-g(z, z_0, G)]}.$$

Отсюда и из (4)

$$-\int\limits_{\partial G_\rho} P_{z_0}(z, \xi, G_\rho) \cdot \ln^-|f(\xi)|\, \omega(z_0, d\xi, G_\rho) \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1 + \exp[-g(z, z_0, G_\rho)]}{1 - \exp[-g(z, z_0, G_\rho)]} \cdot \int\limits_{\partial G_\rho} \ln^-|f(\xi)|\, \omega(z_0, d\xi, G_\rho) =$$

$$= -\frac{1 + \exp[-g(z, z_0, G_\rho)]}{1 - \exp[-g(z, z_0, G_\rho)]} \cdot \Big[T_\rho(f, z_0) -$$

$$- \sum_{a_\nu \in G_\rho} g(a_\nu, z_0, G_\rho) - \ln^+|f(z_0)| \Big].$$

Возьмем $\rho = \delta_3 g(z)$. Тогда $g(z, z_0, G_\rho) = g(z) - \rho = (1-\delta_3)\cdot g(z)$. Так как $(1+e^{-x})/(1-e^{-x}) \sim 2/x$ при $x \to 0$, то

$$\frac{1+\exp[-g(z, z_0, G_\rho)]}{1-\exp[-g(z, z_0, G_\rho)]} > -\frac{2(1+\varepsilon)}{(1-\delta_3)\cdot g(z)}$$

при любом $\varepsilon > 0$ для достаточно малого ρ.

Таким образом, для интеграла в (32) получаем оценку

$$-\int\limits_{\partial G_\rho} > -\frac{2(1+\varepsilon)(1-\theta_0)}{(1-\delta_3)\cdot g(z)}\cdot T_{\delta_3 g(z)}(f, z_0). \tag{33}$$

Положив в лемме 3 $\sigma_0 = \sigma_1$, из свойства а) получим

$$g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{a_\nu \in G_{\delta_3 g(z)}} g(a_\nu, z, G_{\delta_3 g(z)})}{T_{\delta_3 g(z)}(f, z_0)} <$$

$$< g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{a_\nu \in G_{\delta_3 g(z)}} g(a_\nu, z, G_{\delta_3 g(z)})}{\sum\limits_{a_\nu \in G_{\delta_3 g(z)}} g(a_\nu, z_0, G_{\delta_3 g(z)})} < A_1.$$

Отсюда, из (32) и (33) заключаем: для любого $\varepsilon > 0$ найдется ρ, такое что при $g(z) < \rho$, $z \in G \setminus C$

$$g(z)\cdot\ln|f(z)| > -\left[\frac{2(1+\varepsilon)(1-\theta_0)}{1-\delta_3} + A_1\right]\cdot T_{\delta_3 g(z)}(f, z_0). \tag{34}$$

Итак, вне C неравенство, обратное (19), установлено. Покажем, что условия (17), (18) влекут существование подпоследовательности $\{z_n\}$, лежащей вне C. Пусть это неверно, т. е. $\{z_n\}$ удовлетворяет (17), (18) и лежит целиком в C. Из сравнения (17) и условия б) леммы 3 видно, что в каждом диске множества C содержится не более чем в $2M$ раз больше точек $\{z_n\}$, чем точек $\{a_\nu\}$, причем каждая точка $\{a_\nu\}$ учитывается не более, чем трижды. Поэтому можно построить соответствие между точками $\{z_n\}$ и $\{a_\nu\}$, такое, что каждой точке z_n будет соответствовать по крайней мере одна точка из $\{a_\nu\}$, лежащая в том же диске, и каждой точке a_ν будет соответствовать не более $6M$ точек из $\{z_n\}$. Возьмем произвольное $0 < \rho < \rho_1$. В силу выбора σ_1 и условия в) леммы 3 все точки из $\{a_\nu\}$, соответствующие точкам из $\{z_n\}$, лежащим в G_ρ, будут лежать в $G_{\delta_3 \rho}$. Применяя лемму 2, получим

$$\sum_{z_n \in G_\rho} g(z_n) < 6\cdot M\cdot a_2\cdot \sum_{a_\nu \in G_{\delta_3 \rho}} g(a_\nu),\ \rho < \rho_1,\ n > N,$$

что противоречит (18). Теорема 5 доказана.

Перейдем к применению теоремы 5 к функциям ограниченного вида.

Теорема 6. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция ограниченного вида в области G, а числа M, σ_0 и последовательность $\{z_n\}$ таковы, что*

1) *в любом неэвклидовом диске с центром z и радиусом $\sigma < \sigma_0$ содержится не более*

$$M \cdot \left[\frac{\sigma}{g(z)} + 1\right] \tag{34}$$

точек последовательности $\{z_n\}$;

2) $$\sum_n g(z_n) = \infty. \tag{35}$$

Если при некотором $\varepsilon > 0$

$$g(z_n) \cdot \ln |f(z_n)| < -2(1-\theta_0+\varepsilon) \cdot T_0,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Для функций ограниченного вида $\sum g(a_\nu) < < \infty$, поэтому в силу сделанного замечания число A_1 может быть выбрано сколь угодно малым. Взяв в неравенстве (34) число δ_3 достаточно малым, получим утверждение теоремы.

Условие 1 теоремы 6 означает, что максимальное число точек из $\{z_n\}$, находящихся в диске, зависит не только от радиуса диска, но и от его положения в области G.

Очевидно, выполнение условий теоремы 3 влечет выполнение условий теоремы 6.

Если G есть единичный круг, условия (34), (35) примут вид:

$$M \cdot \left[\frac{\sigma}{1-|z|} + 1\right] \tag{34'}$$

$$\sum_n (1-|z_n|) = \infty. \tag{35'}$$

Сравним условие (34) с условиями (7), (9), (14), (15).

1. Пусть последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условию (9). Подсчитаем, сколько точек может находиться в этом случае в круге D' радиуса $\sigma < \sigma_0$. Так как D' есть также и эвклидов круг, а условие (9) накладывает ограничение только на модули z_n, то максимальное число точек будет лежать в D' в том случае, если все они будут находиться на прямой, содержащей центр D', без ограничения общности, на действительной прямой. В этом случае (9) примет вид:

$$z_n - z_{n-1} \geqslant \delta(1-z_n)(1-z_{n-1}), \ \delta > 0, \ \operatorname{Im} z_n = 0.$$

Эвклидов диаметр круга D' равен $2\sigma(1-z^2)/(1-\sigma^2 z^2)$, где z — неэвклидов центр D'. Поэтому в D' может находиться не более

$$2\sigma \cdot \frac{1-z^2}{1-\sigma^2 z^2} \cdot \frac{1}{\delta(1-z_n)(1-z_{n-1})} + 1 \text{ точек } \{z_n\}.$$

Согласно леме 1 $(1-z_n)(1-z_{n-1})>a_1^2\cdot(1-z)^2$. Поэтому в D' находится не более $\dfrac{4}{(1-\sigma_0^2)\,\delta\cdot a_1^2}\cdot\dfrac{\sigma}{1-z}+1$ точек $\{z_n\}$. Таким образом, условие (34′) выполнено.

II. Пусть последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условию (7). Линии $l_n=z$: $|1+z|/|1-z|=|1+z_n|/|1-z_n|\}$ являются дугами окружностей, перпендикулярных кругу $|z|=1$ и симметричных относительно действительной оси. Результат этот легко получить, если заметить, что $\omega=(1+z)/(1-z)$ есть отображение D на правую полуплоскость, на которой $\{\omega$: $\omega=\mathrm{const}\}$ есть полукруг, и воспользоваться свойствами дробно-линейных отображений. Возьмем теперь кружок D' с неэвклидовым радиусом σ и центром z'. Очевидно, эвклидов радиус D' убывает при движении z' к границе $|z|=1$ по линиям $\{\omega=\mathrm{const}\}$. Отсюда ясно, что число линий l_n, с которыми пересекается D' (а значит, и число точек $\{z_n\}$, лежащих в D') не превосходит числа линий l_n, с которыми пересекается кружок радиуса σ с центром r, $\mathrm{Im}\,r=0$, $(1+r)/(1-r)=(1+|z'|)/(|1-|z'|)$. Для оценки этого числа следует положить в (7) $\mathrm{Im}\,z_k=0$, и (7) сведется к (9). Аналогично предыдущему примеру получим, что в D' находится не более $M\cdot\dfrac{\sigma}{1-r}+1$ точек $\{z_n\}$. Так как $1-r\geqslant 1-|z'|$, то (34) выполнено.

III. Последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условию

$$\frac{|z_n-z_m|}{|1-z_n\cdot\bar{z}_m|\cdot(1-|z_n|)}\geqslant\delta\cdot|n-m|,\ \delta>0. \tag{36}$$

Возьмем произвольный кружок D' с неэвклидовым центром z и радиусом $\sigma<\sigma_0$. Выберем точки z_n, $z_m\in D'$ с наибольшей разностью номеров. Тогда в D' содержится не более $|n-m|$ точек последовательности $\{z_n\}$. Из неравенства треугольника для метрики d следует, что

$$|z_n-z_m|/|1-z_n\cdot\bar{z}_m|<2\sigma.\ \text{Отсюда}$$

$$|n-m|\leqslant\frac{2}{\delta}\cdot\frac{\sigma}{1-|z_n|}<\frac{2}{\delta\cdot a_1}\cdot\frac{\sigma}{1-|z|}.$$

IV. Пусть выполнено (14). Тогда для любых z_n, $z_m\in D'$ $\chi(z_n, z_m)<\chi_0=\chi_0(\sigma_0)$. Поэтому в (14) метрику χ можно заменить на d. Очевидно, тогда из (14) следует (36), следовательно, и (34′). Заметим, что неравенство (14) означает, что в D' может находиться не более M точек, где M не зависит от σ, z.

V. Пусть выполнено (15). Тогда $\forall z_n$, $z_m\in D'$

$$|z_n-z_m|\leqslant\frac{2\sigma\,(1-|z|^2)}{1-\sigma^2\,|z|^2}\leqslant\frac{4\sigma_0}{1-\sigma_0}(1-|z|)<\frac{4\sigma_0\,a_2}{1-\sigma_0}(1-|z_n|),$$

и аналогично для $1-|z_m|$. Из (15) получим, что

$$|n-m| < \left[\frac{(4\sigma_0\cdot a_2}{(1-\sigma_0)\cdot\delta}\right]^2 = M.$$

Следовательно, в D' может содержаться не более M точек $\{z_n\}$.

Таким образом, теоремы 1, 2 и теоремы единственности с условиями (14), (15) для функций ограниченного вида могут быть легко получены из теоремы 6, причем в теореме 1 можно опустить условие о нахождении $\{z_n\}$ внутри сектора, если условие (8) заменить на (10) (очевидно, если $\{z_n\}$ лежит внутри сектора, эти условия эквивалентны).

Можно указать и другие условия несгущаемости типа (7), (9), (14), (15) (например, условие (36)).

В заключение покажем, что условие (34′) является в некотором смысле точным.

Теорема 7. *Пусть $\varphi_1(x)$ — непрерывная функция на интервале (0,1), такая что $\varphi_1(x)>0$ и $\varphi_1(x)\to 0$ при $x\to 0$. Тогда найдутся ограниченная аналитическая функция $B(z)\not\equiv 0$, последовательность точек $\{z_n\}$, $|z_n|<1$, и число $M<\infty$, такие что*:

1. $\sum\limits_n (1-|z_n|)=\infty$;

2. *в круге радиуса $\sigma<\sigma_0$ с центром z содержится не более*

$$M\cdot\left[\frac{\sigma}{(1-|z|)\cdot\varphi_1(1-|z|)}+1\right] \text{ *точек* } \{z_n\};$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-|z_n|)\cdot\ln|B(z_n)|=-\infty$.

Доказательство. Возьмем функцию $\varphi(x)$, такую что $\varphi(x)>\varphi_1(x)$, $\varphi(x)$ непрерывна на интервале (0,1), $\varphi(x)\to 0$ при $x\to 0$, $\varphi(x)$ выпукла вверх, $\varphi(x)\nearrow$. Очевидно, подобрать такую $\varphi(x)$ всегда можно. Достаточно доказать теорему для $\varphi(x)$, так как $\varphi(x)\geqslant\varphi_1(x)$. Возьмем произвольную последовательность чисел $\{p_i\}$, $p_i>0$, $p_i\nearrow\infty$ и $\{\omega_i\}\nearrow 1$, такую что

а) $\sum\limits_i \frac{p_i}{-\ln\varphi(1-\omega_i)}<\infty$; б) $\sum\limits_i (1-\omega_i)<\infty$;

в) расстояния (неэвклидовы) между дисками C_i с центрами в точках ω_i и радиусами $\sigma_i=\varphi(1-\omega_i)$ были больше σ_0.

Обозначим $h_i=p_i/-\ln\varphi(1-\omega_i)$. Поместим в точку ω_i $[h_i/(1-\omega_i)]+1$ точек $a_\nu^{(i)}$ (здесь и далее [ ] означает целую часть); полученную последовательность обозначим $\{a_\nu\}$.

$$\sum_\nu(1-a_\nu)=\sum_i\left(\left[\frac{h_i}{1-\omega_i}\right]+1\right)(1-\omega_i)\leqslant\sum_i h_i+\sum_i(1-\omega_i)<\infty.$$

Поэтому произведение Бляшке $B(z)$ по нулям $\{a_\nu\}$ будет ограниченной аналитической функцией $\not\equiv 0$. Возьмем теперь в каждом диске C_i действительные точки z_n так, чтобы любой диск с неэвклидовым радиусом $\sigma<\sigma_i$ и центром ω_i содержал

$\left[\frac{\sigma}{(1-\omega_l)\cdot\varphi(1-\omega_l)}\right]+1$ точку $\{z_n\}$. Покажем, что тогда и любой диск D' с центром z и радиусом $\sigma<\sigma_0$ содержит не более

$$M\cdot\left\{\frac{\sigma}{(1-|z|)\cdot\varphi(1-|z|)}+1\right\} \text{ точек } \{z_n\}.$$

Очевидно, достаточно рассмотреть лишь те диски, для которых $\operatorname{Im} z=0$. Пусть d_l — неэвклидова длина отрезка действительной оси, лежащего в пересечении $C_l \cap D'$, $d_l<2\sigma$. На этом отрезке может находиться не более $\frac{d_l}{(1-\omega_l)\cdot\varphi(1-\omega_l)}+1$ точек $\{z_n\}$. По построению C_l, D' может пересекаться не более чем с двумя дисками, пусть с C_j и C_k, $\omega_j<z<\omega_k$. По лемме 1 $1-\omega_k>a_1^2\cdot(1-z)$. Так как точки z_n могут лежать лишь на отрезках действительной оси их число в D' не превосходит

$$\frac{d_j}{(1-\omega_j)\cdot\varphi(1-\omega_j)}+1+\frac{d_k}{(1-\omega_k)\cdot\varphi(1-\omega_k)}+$$

$$+1\leqslant 2+\frac{2\sigma}{(1-z)\cdot\varphi(1-z)}+\frac{2\sigma}{a_1^2\cdot(1-z)\cdot\varphi(a_1^2\cdot(1-z))}<$$

$$<\frac{\sigma}{(1-z)\cdot\varphi(1-z)}\cdot\left(2+\frac{2}{a_1^4}\right)+2$$

(мы воспользовались свойством выпуклости вверх: $\varphi(\delta\cdot x)>\delta\cdot\varphi(x)$, $\delta<1$). Таким образом, условие 2 в формулировке теоремы выполнено. Проверим выполнимость условия 1. Так как по лемме 1

$$\forall z_n\in C_j\ 1-z_n>a_1\cdot(1-\omega_j), \text{ то}$$

$$\sum_n(1-z_n)>a_1\cdot\sum_l\left\{\left[\frac{\sigma_l}{(1-\omega_l)\cdot\varphi(1-\omega_l)}\right]+1\right\}\cdot(1-\omega_l)\geqslant$$

$$\geqslant a_1\cdot\sum_l\frac{\sigma_l}{\varphi(1-\omega_l)}=a_1\cdot\sum_l 1=\infty.$$

Осталось проверить выполнимость условия 3. Пусть $z_n\in C_l$.

$$\ln|B(z_n)|=\sum_\nu\ln\left|\frac{z_n-a_\nu}{1-z_n\cdot a_\nu}\right|<\sum_{a_\nu\in C_l}\ln\left|\frac{z_n-a_\nu}{1-z_n\cdot a_\nu}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\left[\frac{h_l}{1-\omega_l}\right]+1\right\}\cdot\ln\sigma_l\leqslant\frac{p_l}{-\ln\varphi(1-\omega_l)}\cdot\frac{1}{1-\omega_l}\cdot\ln\varphi(1-\omega_l)=$$

$$=-\frac{p_l}{1-\omega_l}<-\frac{p_l}{a_2\cdot(1-z_n)}.$$

Теорема доказана.

Автор искренне благодарен С. Я. Хавинсону за обсуждение работы.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила 26.VII.1977

Վ. Յա. ԷՅԴԵՐՄԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների միակության թեորեմ *(ամփոփում)*

Ենթադրենք f (z)-ը մերոմորֆ ֆունկցիա է միակապ բաց բազմության վրա, Tρ-ն f(z)-ի Նևանլիննայի խարակտերիստիկան է, g-ն Գրինի ֆունկցիա է։

Ցույց է տրված, ինչպիսի բավարար պայմաններ կարելի է դնել $\{z_n\}$ հաջորդականության վրա, որ հետևյալ անհավասարությունից՝

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ g(z_0, z_n, G) \ln |f(z_n)|/T_{\lambda, g(z_0, z_n)} < -A, \quad 0 < \lambda < 1,$$

հետևի, որ $f(z) \equiv 0$, A-ն գնահատված է։
Սահմանափակ ֆունկցիաների համար ստացված է թեորեմ, որը ընդգրկում է [1]—[4], [7]-ը։
Հետազոտվում է այդ թեորեմների ճշգրտությունը։

V. Ja. AJDERMAN. *Uniqueness theorem for meromorphic functions*
(summary)

Let $f(z)$ be a meromorphic function in a single-connected domain G, T_l be Nevanlinna's characteristic of $f(z)$, g be Green's function.

Sufficient conditions on the sequence $\{z_n\}$ are found which garantee that

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ [g(z_0, z_n, G) \cdot \ln |f(z_n)|/T_{\lambda g(z_0, z_n)}] < -A, \quad 0 < \lambda < 1,$$

implies $f(z) \equiv 0$. The value of A is estimated. For functions of bounded characteristic a theorem, which includes results from [1]—[4], [7], is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Шагинян*. Об одном основном неравенстве в теории функций и ее приложениях, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, XII, № 1, 1959, 3—25.
2. *И. В. Ушакова*. Теорема единственности для функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге, ДАН СССР, 130, № 1, 1960, 29—32.
3. *И. В. Ушакова*. Некоторые теоремы единственности для функций, субгармонических и мероморфных в единичном круге, ДАН СССР, 137, № 6, 1961, 1319—1322.
4. *С. Я. Хавинсон*. Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН, XVIII, вып. 2 (110), 1964, 25—98.
5. *Н. Н. Мейман*. Интеграл Пуассона—Стилтьеса для конечносвязной жордановой области, ДАН СССР, 197, № 6, 1971, 1272—1275.
6. *Н. Н. Мейман*. Об оценке сверху потенциала плоского электростатического поля, ДАН СССР, 202, № 6, 1972, 1268—1270.
7. *Н. Н. Мейман*. К теории функций ограниченного вида, ДАН СССР, 204, № 1, 1972, 34—37.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 2, 1980 Математика

Б. Л. ГОЛИНСКИЙ

О СВЯЗИ МЕЖДУ ПОРЯДКОМ УБЫВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И СВОЙСТВАМИ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Введение

Известно (см. [1], стр. 160, 161), что произвольная последов а тельность комплексных чисел $\{a_n\}_0^\infty$, подчиненная единственному условию $|a_n|<1$, $n=0, 1, 2,\cdots$ определяет систему ортогональных на единичной окружности многочленов $\{\Phi_n(z)\}_0^\infty$ со старшими коэффициентами, равными единице:

$$\Phi_0(z)=1,\ \Phi_{n+1}(z)=z\Phi_n(z)-\bar{a}_n\Phi_n^*(z),\ \ \Phi_n^*(z)=z^n\bar{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right). \quad (0.1)$$
$$n=1, 2,\cdots$$

и систему ортонормальных на единичной окружности многочленов $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$ с распределением $d\sigma(\theta)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(e^{i\theta})\,\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta)=\delta_{nm},\ n, m=0, 1, 2\cdots, \quad (0.2)$$

где

$$\varphi_n(z)=\varkappa_n\Phi_n(z),\ \varkappa_n^2=c_0^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2)^{-1},\ \varkappa_0=\frac{1}{\sqrt{c_0}},\ c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\sigma(t), \quad (0.3)$$

$\sigma(\theta)$— функция распределения (ф.р.) — ограниченная неубывающая функция с бесчисленным множеством точек роста на отрезке $[-\pi, \pi]\equiv I$, которая определяется однозначно по числам $\{a_n\}_0^\infty$, если считать, что $\sigma(\theta-0)=\sigma(\theta)$ (см. [1], стр. 161).

Почти всюду (п.в.) существующую 2π-периодическую $\sigma'(\theta)$ обозначим через $\varphi(\theta)$ и назовем плотностью распределения (п.р.). Если $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна $(:\sigma(\theta)\in AC(I))$, то п.р. $\varphi(\theta)$ называют весовой функцией (в.ф.). Функция $\varphi(\theta)$ суммируема. Комплексные числа $\{a_n\}_0^\infty$ называют параметрами ортогональной системы $\{\Phi_n(z)\}_0^\infty$, а соотношения (0.1)—ее параметрическим представлением. В настоящей работе определены свойства ф.р. или в.ф. по известному порядку убывания параметров и, наоборот, по известным свойствам в.ф. определен порядок убывания параметров. Этого типа задачи решены для следующих случаев:

(A): $\{a_n\}_0^\infty \in A_2$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Тогда

$$-\infty < \int\limits_{-\pi}^{\pi} l_\varphi(t)\, dt < \infty: (l_\varphi(t) \in L(I)),\ l_\varphi(t) = \ln \varphi(t). \tag{0.4}$$

Наоборот, из (0.4) следует, что $\{a_n\}_0^\infty \in A_2$. Это было доказано Г. Сегё (см. [2], § 12.3) для случая, когда $\sigma(\theta) \in AC(-\pi, \pi)$, С. Верблюнским (см. [3]) и Я. Л. Геронимусом (см. [1], гл. I) (независимо друг от друга) в общем случае.

(Б): $\{a_n\}_0^\infty \in A_1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$. Тогда (см. [1], стр. 167):

1) $\sigma(\theta) \in AC(-\pi, \pi)$, 2) $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$, 3) $C_1 \leqslant |\varphi_n(e^{i\theta})| \leqslant C_2$,

$$n = 0, 1, 2, \cdots;\ \theta \in I.$$

Здесь C_1, C_2, в дальнейшем C_3, $C_4, \cdots$ — различные положительные постоянные, $C_{2\pi}$—класс 2π-периодических непрерывных на всей оси функций.

В связи со случаем (Б) естествен вопрос: известен порядок убывания остатка ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$, что можно сказать о дифференциальных свойствах в.ф.?

Ответ на него дает теорема 1. В § 2 рассмотрен случай (В):

$$\{a_n\}_0^\infty \in A_{2,1}: \sum_{n=1}^{\infty} n\, |a_n|^2 < \infty.$$

Очевидно $A_{2,1} \subset A_2$, $A_{2,1}$, вообще говоря, не совпадает с A_1. Полученные в § 1 результаты имеют окончательный характер, некоторые из них являются вспомогательными для § 2, который дополняет результаты из [4]. В § 2 доказана также теорема 4 о вложении классов функций. Прямое ее доказательство автору не известно.

В работе потребуются некоторые предельные соотношения (см. [1], стр. 19, 26, 159, 163), которые для удобства здесь приведены.

(I) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^*(z) = \pi(z) = \exp\left\{-\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_z(\theta)\, l_\varphi(\theta)\, d\theta\right\}$, $l_\varphi(\theta) = \ln \varphi(\theta)$,

$$S_z(\theta) = \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$$

равномерно для $|z| \leqslant r < 1$, $\pi(z)$ регулярна и отлична от нуля в области $|z| < 1$.

(II) $\lim\limits_{n\to\infty} \varkappa_n = \varkappa = \pi(0),\ \dfrac{1}{\sqrt{c_0}} = \varkappa_0 \leqslant \varkappa_n \leqslant \varkappa,$

$$G_n = \varkappa_n^{-2} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = c_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 - |a_k|^2),\ \lim_{n\to\infty} G_n = G = c_0 \prod_{k=0}^{\infty} (1 - |a_k|^2).$$

(III) $D(z) = \pi^{-1}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} D_n(z),\ D_n(z) = \exp\left\{\dfrac{d_0}{2} + \sum\limits_{k=0}^{n} d_k z^k\right\},\ |z| < 1,$

$$d_k = c_k(l_\varphi),\ c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\,dt,\ k = 0, 1, 2, \cdots;\ |z| = R < 1.$$

Обозначим $P_n(z) = \ln D_n(z),\ P(z) = \ln D(z)$.

(IV) Существуют радиальные граничные значения для $\theta \in E_0$,

$$\lim_{\rho\to 1-0} D(\rho e^{i\theta}) = D(e^{i\theta}),\ |D(e^{i\theta})|^2 = \varphi(\theta) = |\pi(e^{i\theta})|^{-2},\ \text{mes}\, E_0 = 2\pi.$$

(V) Если в (0.1) $\{a_n\}_0^\infty$ заменить на $\{-a_n\}_0^\infty$, то получим многочлены $\{\Psi_n(z)\}_0^\infty$, ортогональные на единичной окружности относительно обложения $ds(\theta)$, где $s(\theta)$ аналогична $\sigma(\theta)$, $\Psi(\theta) = s'(\theta)$ (см. [1], стр. 161).

Многочлены $\Psi_n(z) = \varkappa_n \Psi_n(z)$ называют о.н.м. второго рода. Обозначим через $\chi(z)$ функцию, аналогичную $\pi(z)$.

Также как в случае (IV) имеем п.в. в I

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n^*(z) = \chi(z),\ |z| \leqslant r < 1,\ \Psi(\theta) = |\chi(e^{i\theta})|^{-2}.$$

Введем некоторые обозначения. Пространство 2π-периодических непрерывных на всей оси функций обозначим через $C_{2\pi}$, $\omega(\delta, f)$ и $E_n(f)$ соответственно: модуль непрерывности и наилучшие приближения функции $f(\theta) \in C_{2\pi}$ с помощью тригонометрических сумм $T_n(\theta)$ порядка $\leqslant n$.

Будем считать, что $g(t) \in L^p(I)$, $1 \leqslant p < \infty$, если

$$\|g\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Под обобщенным модулем непрерывности понимаем, как обычно,

$$\omega_p^{(m)}(\delta, g) = \sup_{|h|<\delta} \|\Delta_h^{(m)} g(\theta)\|_p,\ \Delta_h^{(m)} g(\theta) = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{m-\nu} \binom{m}{\nu} g(\theta + \nu h),$$

$$m > 1 \text{ целое},\ \omega_p^{(1)}(\delta, g) \equiv \omega_p(\delta, g).$$

§ 1. Случай (Б)

Лемма 1. *Между п.р. $\varphi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$, соответствующими многочленам первого и второго рода, существует п.в. следующая зависимость:*

$$\Psi(\theta)=C_0^2\frac{\varphi(\theta)}{\varphi^2(\theta)+\tilde{\varphi}_\sigma^2(\theta)},\quad \tilde{\varphi}_\sigma(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\,d\sigma(t). \tag{1.1}$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$F(z)=\frac{1}{2\pi c_0}\int_{-\pi}^{\pi}S_z(\theta)\,d\sigma(\theta),\quad G(z)=\frac{1}{2\pi b_0}\int_{-\pi}^{\pi}S_z(\theta)\,ds(\theta).$$

Для $|z|<1$ имеем

$$\frac{c_0}{2}F(z)=\frac{c_0}{2}+c_1z+\cdots;\quad \frac{b_0}{2}G(z)=\frac{b_0}{2}+b_1z+\cdots,$$

где

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}\,d\sigma(t),\quad b_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}\,ds(t),\quad k=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

Связь между моментами $\{c_n\}_0^\infty$ и $\{b_n\}_0^\infty$ определяется из соотношений (см. [5], § 7):

$$b_0=c_0,\ b_1=-c_1,\ b_k=-c_k-\frac{2}{c_0}\sum_{l=1}^{n-1}c_l\,b_{k-l},\quad k=2,\cdots,\ n. \tag{1.2}$$

Легко показать, что

$$F(z)\,G(z)=1,\ |z|<1. \tag{1.3}$$

Действительно, применяя соотношения (1.2), получим

$$-\frac{2}{c_0}\left[\frac{c_0}{2}F(z)-\frac{c_0}{2}\right]\left[\frac{c_0}{2}G(z)-\frac{c_0}{2}\right]=\frac{c_0}{2}\,[F(z)+G(z)]-c_0,$$

откуда следует (1.3). Поскольку функции $F(z)$ и $G(z)$ принадлежат классу Харди H_1, то они имеют п.в. на единичной окружности радиальные граничные значения (см. [6], стр. 97, 98, 82) $F(e^{i\theta})$ и $G(e^{i\theta})$ По формуле И. И. Привалова (см. [1], стр. 219) имеем п.в.

$$F(e^{i\theta})=\lim_{R\to1-0}F(Re^{i\theta})=\frac{1}{c_0}\{\varphi(\theta)-i\tilde{\varphi}_\sigma(\theta)\},$$

$$G(e^{i\theta})=\lim_{R\to1-0}G(Re^{i\theta})=\frac{1}{c_0}\{\Psi(\theta)-i\tilde{\Psi}_s(\theta)\}, \tag{1.4}$$

где

$$\tilde{\Psi}_s(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\,ds(t),\quad \tilde{\varphi}_\sigma(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\,d\sigma(t).$$

При $\sigma(\theta)\in AC\,(-\pi,\ \pi)$ пишем $\bar{\varphi}(\theta)$ и называем ее тригонометрически сопряженной с $\varphi(\theta)$. В силу сказанного, соотношение (1.3) справедливо п.в. на единичной окружности. Применяя (1.4), получим (1.1).

Соотношение (1.3) получим иначе. Известно, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)}=F(z)\ (z=Re^{i\theta},\ R<1).$$

значит $\chi(z) = F(z)\pi(z)$. Применяя свойство (V), можно считать понятия о.н.м. первого и второго рода взаимными и поэтому $\pi(z) = G(z)\chi(z)$. Сравниваем теперь два последних равенства.

Лемма 2. (см. [7])

$$\delta_n = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = O\{n^{-(m+\alpha)}\},\ 0<\alpha<1,$$

(m — *целое, при* $m=0$ *считаем* $\alpha>\frac{1}{2}$ *и* $\varphi^{(-1)}(\theta)=\varphi(\theta)$) *тогда и только тогда, когда п.р.* $\varphi(\theta)$ *совпадает п.в. с непрерывной положительной функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную* $\varphi^{(m-1)}(\theta)$ *и* $\omega_2(\delta, \varphi^{(m)}) = O(\delta^\alpha)$.

Теорема 1. *При* $\{a_n\}_0^\infty \in A_1$ *имеем*

$$\omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right), \omega\left(\frac{1}{n}, \bar{\varphi}^2\right) \leqslant \frac{C_3}{n}\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_{\left[\frac{\nu}{2}\right]}\left(\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty}|a_k|\right). \tag{1.5}$$

Если параметры $\{a_n\}_0^\infty$ *убывают так, что*

(a) $$\lambda_n = O\{n^{-(m+\alpha)}\},\ 0<\alpha<1,\ m\geqslant 0, \tag{1.6}$$

то

$$\omega(\delta, \varphi^{(m)}(\theta)) = \begin{cases} O(\delta^\alpha),\ 0<\alpha<1\ (m\geqslant 0), & (1.7)\\ O\left(\delta \ln \dfrac{1}{\delta}\right),\ \alpha=1. & (1.8)\end{cases}$$

Наоборот, если в.ф. такова, что выполняется (1.7) (*при* $m=0$ *считаем* $\alpha>\frac{1}{2}$), *то*

$$\lambda_n = O\left\{n^{-\left(m+\alpha-\frac{1}{2}\right)}\right\}. \tag{1.9}$$

(б) $\lambda_n = O(q^n)$, $q=\exp(-c)$, $c>0$, $n=1, 2,$ *тогда и только тогда, когда* $0<\frac{1}{\varphi(\theta)}\in A_c$: $\frac{1}{\varphi(\theta)}$ *допускает аналитическое продолжение в полосу* $\zeta = x+i\tau$, $-\infty<x<\infty$, $-c<\tau<c$, *а продолженная функция непрерывна на ее границе.*

Доказательство. Имеем (см. [1], стр. 167)

$$r_n(\theta) = |\varphi_n^*(e^{i\theta}) - \pi(e^{i\theta})| \leqslant C_4 \sum_{k=n}^{\infty}|a_k|. \tag{1.10}$$

Поэтому с учетом свойства (IV) и 3) случая (Б) получим

$$\left|\frac{1}{\varphi(\theta)} - |\varphi_n^*(e^{i\theta})|^2\right| = \left|\frac{1}{\varphi(\theta)} - T_{2n}(\theta)\right| = \left||\pi(e^{i\theta})|^2 - |\varphi_n^*(e^{i\theta})|^2\right| \leqslant$$

$$\leqslant |[\pi(e^{i\theta})]^2 - [\varphi_n^*(e^{i\theta})]^2| \leqslant |\pi(e^{i\theta}) - \varphi_n^*(e^{i\theta})| \, [|\pi(e^{i\theta})| + |\varphi_n^*(e^{i\theta})|] < C_5 r_n(\theta). \tag{1.11}$$

По (1.11), (1.10) и свойству (V) будем иметь

$$E_{2n}\left(\frac{1}{\Psi}\right),\ E_{2n}\left(\frac{1}{\varphi}\right) \leqslant C_6 r_n(\theta) < C_7 \sum_{k=n}^{\infty} |\alpha_k|.$$

Так как $E_{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi}\right) \leqslant E_{2n}\left(\frac{1}{\varphi}\right)$, то

$$E_n\left(\frac{1}{\Psi}\right),\ E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) \leqslant C_8 \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} |a_k|. \tag{1.12}$$

По теореме С. Б. Стечкина (см. [8], стр. 274) и (1.12)

$$\omega\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\Psi}\right),\ \omega\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right) \leqslant \frac{C_9}{n} \sum_{k=0}^{n} E_k\left(\frac{1}{\varphi}\right) \leqslant \frac{C_{10}}{n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=\left[\frac{k}{2}\right]}^{\infty} |a_\nu|. \tag{1.13}$$

При $\varphi(\theta) \leqslant M$ имеем $\omega(\delta, \varphi) \leqslant M^2 \omega\left(\delta, \frac{1}{\varphi}\right)$. Отсюда из (1.13) следует первая из оценок (1.5) и такая же оценка для $\omega(\delta, \Psi)$. В силу (1.1) и свойства 2) случая (Б) получим

$$\omega(\delta, \widetilde{\varphi^2}) \leqslant C_{11}\, \omega(\delta, \varphi) + C_{12}\, \omega(\delta, \Psi),$$

то есть вторую из оценок (1.5).

Перейдем к доказательству (1.7) и (1.8). Из условия (1.6) и неравенства (1.12) следует, что

$$E_n(f) = O\{n^{-(m+\alpha)}\},\ f(\theta) = \varphi^{-1}(\theta). \tag{1.14}$$

По известной теореме (см. [8], стр. 350) $f(\theta)$ имеет абсолютно непрерывную производную $f^{(m-1)}(\theta)$ и

$$\omega(\delta, f^{(m)}(\theta)) = \begin{cases} O(\delta^\alpha), & 0 < \alpha < 1, \\ O\left(\delta \ln \frac{1}{\delta}\right), & \alpha = 1. \end{cases} \tag{1.15}$$

Легко показать, что при $\varphi(\theta) > 0$, $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\omega(\delta, \varphi^{(m)}(\theta)) = O\{\omega(\delta, f^{(m)}(\theta))\},\ f(\theta) = \varphi^{-1}(\theta). \tag{1.16}$$

Действительно, $\varphi(\theta + h)\, \Delta f + \Delta\varphi\, f(\theta) = 0$ и

$$\sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} \{\varphi^{(\nu)}(\theta+h)\, \Delta f^{(m-\nu)}(\theta) + f^{(m-\nu)}(\theta)\, \Delta\varphi^{(\nu)}(\theta)\} = 0,\ \binom{m}{0} = 1.$$

При $m = 0$ $\omega(\delta, \varphi) \leqslant M^2 \omega(\delta, f)$. При $m = 1$ имеем $\varphi'(\theta+h)\, \Delta f + \varphi(\theta+h)\, \Delta f' + \Delta\varphi' f(\theta) + \Delta\varphi f'(\theta) = 0$ и так как $f'(\theta),\ \varphi'(\theta) \in C_{2\pi}$, то $\omega(\delta,$

$\varphi') \leqslant C_{13}\,\omega(\delta, f')$. Аналогично рассматриваем случаи $m=2, 3, \cdots$ и получаем (1.16), а вместе с тем (1.7) и (1.8).

Докажем (1.9). При условии (1.7) ряд Фурье в.ф. $\varphi(\theta)$ абсолютно сходится: по теореме С. Н. Бернштейна при $m=0$ и $\alpha > \frac{1}{2}$ и теореме А. Зигмунда при $m=1$ и $0 < \alpha < 1$ (см. [9], стр. 608, 614). По свойству 2) случая (Б) имеем $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ и поэтому применима теорема Г. Бакстер (см. [10]), по которой следует, что ряд из модулей параметров о.н.м., соответствующих в.ф. $\varphi(\theta)$ сходится, то есть $\{a_n\}_0^\infty \in A_1$.

Воспользуемся следующим числовым неравенством (см. [1], стр. 230):

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\beta_k| \leqslant C_{14} \sum_{\nu=\left[\frac{n}{4}\right]}^{\infty} \frac{B_\nu}{\sqrt{\nu}},\quad B_\nu = \left\{\sum_{k=\nu}^{\infty} |\beta_k|^2\right\}^{1/2}. \tag{1.17}$$

Так как при $f(\theta) \in C_{2\pi}\ \omega_2(\delta, f) \leqslant \omega(\delta, f)$, то полагая $f(\theta) = \varphi^{(m)}(\theta)$, получим в силу (1.17) при $\beta_\nu = a_\nu$ и леммы 2, что

$$\lambda_n \leqslant C_{15} \sum_{\nu=\left[\frac{n}{4}\right]}^{\infty} \frac{\delta_\nu}{\sqrt{\nu}} = O\left\{n^{-\left(m+\alpha-\frac{1}{2}\right)}\right\}.$$

Случай (б) рассмотрен в [11].

Замечание 1. Случай (а) (при $m=0$) и (б) аналогичны теоремам (см. [9], стр. 209 и [8], стр. 181) о порядке убывания остатка ряда из модулей коэффициентов Фурье функций из классов Lip α $(:\omega(\delta, f)) = O(\delta^\alpha)$ и A_c, то есть параметры ортогональных многочленов в указанных случаях характеризуют структурные особенности так же, как его коэффициенты Фурье.

§ 2. Случай (В)

Лемма 3. (см. [10], [4]). *Существование конечного предела*

$$\lim_{n\to\infty} G^{-n-1}\Delta_n = h$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\{a_n\}_0^\infty \in A_{2,1}$.

Лемма 4 (см. [10], [4]). *Справедливо тождество*

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1-|a_k|^2)^{-k-1} = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1} \left|\frac{\varphi_n^{**}(z)}{\varphi_n^{*}(z)}\right|^2 ds\right\},$$

где ds — элемент площади круга $|z| \leqslant 1$.

Лемма 5. *Из включения $\{a_n\}_0^\infty \in A_{2,1}$ следует такое же включение для $\{d_n\}_0^\infty$. Обратное утверждение верно при $\sigma(\theta) \in AC(I)$ и $l_\varphi^{(\theta)} \in L(I)$.*

Доказательство. Обозначим

$$\mu(R) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<R<1}\left|\frac{D'(z)}{D(z)}\right|^2 ds\right\}. \qquad (2.1)$$

По свойству (I) имеем равномерно для $|z|\leqslant R<1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n^*(z)=D^{-1}(z)$. Поэтому

$$\mu(R) = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<R<1}\left|\frac{\varphi_n^{*\prime}(z)}{\varphi_n^*(z)}\right|^2 ds\right\}\leqslant \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\left|\frac{\varphi_n^{*\prime}(z)}{\varphi_n^*(z)}\right|^2 ds\right\}. \qquad (2.2)$$

Но $0<\mu(R)\uparrow$ при $R\to 1-0$, значит существует $\lim\limits_{R\to 1-0}\mu(R)=\mu(1)>0$. По (2.1), (2.2) и лемме 4 получим

$$\mu(1)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\left|\frac{D'(z)}{D(z)}\right|^2 ds\right\}\leqslant\prod_{k=0}^{\infty}(1-|a_k|^2)^{-k-1}. \qquad (2.3)$$

По свойству (II) имеем $G\prod\limits_{k=n}^{\infty}(1-|a_k|^2)^{-1}=G_n$ и

$$\Delta_n = G^{n+1}\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2)^{-k-1}\left\{\prod_{k=n}^{\infty}(1-|a_k|^2)\right\}^{-n-1}. \qquad (2.4)$$

Поскольку $n\sum\limits_{k=n}^{\infty}|a_k|^2=o(1)$, то из (2.4) следует существование предельного соотношения $\lim\limits_{n\to\infty}G^{n+1}\Delta_n^{-1}=\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1-|a_k|^2)^{k+1}$. По (2.3) и лемме 3 получим $0<\mu(1)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}G^{-n-1}\Delta_n=h<\infty$. Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} n|d_n|^2=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|z|<1}\left|\frac{D'(z)}{D(z)}\right|^2 ds=\ln\mu((1),$$

то $\{d_n\}_0^{\infty}\in A_{2,1}$. Доказательство обратного утверждения см. в [4].

Лемма 6. (*см.* [4]). *Если* $l_\varphi(t)\in L(I)$ *и* $\{d_n\}_0^{\infty}\in A_{2,1}$, *то*

$$\|D_m(e^{i\theta})\|_p\leqslant C_{14}(p)<\infty \qquad (2.5)$$

для всех $-\infty<p<\infty$ *и* $m\leqslant\infty$, $D_n(z)$ *определено в* (III), $D(z)=D_\infty(z)$.

Лемма 7. *Если* $l_\varphi(\theta)\in L(I)$ *и* $\{d_k\}_0^{\infty}\in A_{2,1}$, *то для всех* $-\infty<p<\infty$ *имеем*

$$\varphi(\theta)\in L^p(I). \qquad (2.6)$$

Доказательство. В силу известной теоремы Фейера-Рисса из существования для $\theta\in E_0$ ($\mathrm{mes}\,E_0=2\pi$) радиального граничного значения $\lim\limits_{R\to 1-0}P(Re^{i\theta})=P(e^{i\theta})$ (см. (III) следует сходимость ряда

$\frac{d_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{ik\theta}$ и равенство $P(e^{i\theta})=\frac{d_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{ik\theta}$, $\theta\in E_0$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} P_n(e^{i\theta})=P(e^{i\theta})$, значит $\lim_{n\to\infty} D_n(e^{i\theta})=D(e^{i\theta})$. Применяя лемму Фату и (2.5), получим $\|D(e^{i\theta})\|_{2p}\leqslant C_{14}(p)$, $-\infty<p<\infty$. По (IV) имеем $\varphi(\theta)\in L^p(I)$.

Теорема 2. *При* $\{a_n\}_0^\infty\in A_{2,1}$ *ф. р.* $\sigma(\theta)\in AC(I)$.

Доказательство. В [4] доказано, что если $\{a_n\}_0^\infty\in A_{2,1}$, то для соответствующих о. н. м. имеем оценку

$$|\varphi_n(e^{i\theta})|\geqslant C_{21}\exp\{-C_{22}\sqrt{n}\},\ -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\ n=1,2,\cdots. \tag{2.7}$$

Поэтому

$$K_n(\theta)=\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(e^{i\theta})|^2\geqslant C_{23}+C_{21}^2\sum_{k=1}^{n}\exp\{-2C_{23}\sqrt{\ln k}\}.$$

Рассмотрим функцию $y(x)=\exp\{-2C_{22}\sqrt{\ln x}\}$, $x\geqslant 1$. Очевидно $y(x)$ убывает и $y''(x)>0$. Значит график функции $y(x)$ вогнут кверху и

$$\sum_{k=1}^{n}\exp\{-2C_{32}\sqrt{\ln k}\}\geqslant\int_1^n\exp\{-2C_{22}\sqrt{\ln x}\}\,dx=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{\ln n}}\exp\{t^2-2C_{22}t\}\,tdt=A(n)\to\infty,\ n\to\infty.$$

Поэтому $\lim_{n\to\infty}K_n(\theta)=K(\theta)=\infty$ для всех θ. Каково бы ни было достаточно большое Λ можно найти такое $n\geqslant N(\Lambda)$, что

$$\mu_n=\mu_n(\theta)=\operatorname*{Min}_{-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}K_n(\theta)=K_n(\theta_0)\geqslant\Lambda.$$

Известно, что любая ф. р. может быть представлена в виде суммы трех слагаемых $\sigma(\theta)=\sigma_1(\theta)+\sigma_2(\theta)+\sigma_3(\theta)$, где $\sigma_1(\theta)$ — абсолютно непрерывная компонента, $\sigma_2(\theta)$ — функция скачков, $\sigma_3(\theta)$ — сингулярная компонента. Так как (см. [5]) $\sigma_2(\theta+0)-\sigma_2(\theta-0)=2\pi:K(\theta)$, то из $K(\theta)=\infty$ следует, что $\sigma_2(\theta)=\text{const}$. Функция $\sigma_3(\theta)$ непрерывна, но не абсолютно непрерывна, то есть имеет положительную вариацию на множестве E_3 нулевой лебеговой меры и (см. [1], стр. 34)

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(e^{i\theta})|^2\,d\sigma_3(\theta)=C_{24}\delta_n^2. \tag{2.8}$$

Из условия теоремы следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n^2=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\sum_{\nu=1}^{n}1=\sum_{n=0}^{\infty}n|a_n|^2<\infty.$$

Применяя (2.8) получим

$$\mu_n v \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\, d\sigma_3(\theta) \leqslant C_{24} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^2 \leqslant C_{25}, \tag{2.9}$$

где $\operatorname*{var}_{\{E_2\}} \sigma_3(\theta) = v\ (>0)$. В силу (2.9) $v\Lambda \leqslant C_{26}$, но это противоречит тому, что Λ сколь угодно большое число. Поэтому $\sigma_3(\theta) = \text{const}$ и мы приходим к тому, что $d\sigma(\theta) \equiv d\sigma_1(\theta)$, то есть $\sigma_3(\theta) \in AC(I)$.

Приведем еще одно доказательство теоремы 2, основанное на применении соотношения (1.4) и одной теоремы из функционального анализа.

Имеем

$$u(Re^{i\theta}) = \operatorname{Re} F(z) \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re} G(z)},\ \operatorname{Re} G(z) = \frac{1}{2\pi c_0} \int_{-\pi}^{\pi} P(R, t-\theta)\, ds(t) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi c_0} \int_{-\pi}^{\pi} P(R, t-\theta)\, \Psi(t)\, dt,\ P(R, t) = \frac{1-R^2}{1-2R\cos t + R^2},\ z = Re^{i\theta}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi c_0} \int_{-\pi}^{\pi} P(R, t-\theta)\, \Psi(t)\, dt \leqslant \frac{1}{u(Re^{i\theta})}.$$

Так как

$$1 = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(R, t-\theta) \sqrt{\Psi(t)} \frac{1}{\sqrt{\Psi(t)}}\, dt \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi c_0} \int_{-\pi}^{\pi} P(R, t-\theta)\, \Psi(t)\, dt\ \frac{2c_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(R, t-\theta) \frac{dt}{\Psi(t)},$$

то

$$0 < u(Re^{i\theta}) \leqslant \frac{2c_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P(R, t)}{\Psi(t+\theta)}\, dt.$$

В силу обобщенного неравенства Минковского, лемм 5 и 7, примененных к о.н.м. второго рода, получим

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [u(Re^{i\theta})]^p\, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{2c_0}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{P(R, t)}{\Psi(t+\theta)}\, dt \right]^p d\theta \leqslant \right.$$

$$\leqslant \frac{2c_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{P(R, t)}{\Psi(t+\theta)} \right]^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} dt = \frac{2c_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(R, t)\, dt \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{[\Psi(\theta)]^p} \right\}^{1/p} = 2c_0\,(2\pi)^{\frac{1}{p}} \left\| \frac{1}{\Psi} \right\|_p = B_p < \infty.$$

Таким образом, функции $B_p^{-1}\, u(R_n e^{i\theta}) \equiv u_n(e^{i\theta})$, $n = 1, 2, \cdots$, $R_n \to 0$, $n \to \infty$ являются элементами пространства $L^p(\alpha, \beta)$, $[\alpha, \beta] \subseteq [-\pi, \pi]$ и принадлежат его единичной сфере. В силу второй из формул (1.4) п.в. в $[-\pi, \pi]$ $\lim\limits_{R \to 1-0} u(R\, e^{i\theta}) = \frac{1}{c_0} \Psi(\theta)$. На основании слабой компактности единичной сферы в пространстве $L^p(\alpha, \beta)$ с $p > 1$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{c_0} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(\theta)\, d\theta, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

По формуле Перрона-Стилтьеса и найденного предельного соотношения имеем

$$\frac{\sigma(\theta + 0) + \sigma(\theta - 0)}{2} = \mathrm{const} + c_0 \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\theta} u_n(t)\, dt = \mathrm{const} + \int_{-\pi}^{\theta} \Psi(t)\, dt.$$

Так как правая часть последнего равенства—абсолютно непрерывная функция, то $\sigma(\theta) \in AC(I)$. Второе доказательство с новых позиций освещает теорему 2, которая была впервые доказана в [4] технически сложнее

Замечание 2. Пусть $\pi_0(\theta) = \pi(e^{i\theta})\,\gamma(\theta)$, где $\gamma(\theta)$ — характеристическая функция множества точек, где $0 < \sigma'(\theta) < \infty$. Известно (см. [1], стр. 26), что

$$\Delta_n = \operatorname*{Inf}_{\{G_n\}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\pi_0(\theta) - G_n(e^{i\theta})|^2\, d\sigma(\theta) \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} |\varphi_{k+1}(0)|^2},$$

$\{G_n(z)\}$ — многочлены n-ой степени.

Поэтому $\frac{\varkappa_0}{\varkappa}\, \delta_n \leqslant \Delta_n \leqslant \delta_n$ и значит δ_n — конструктивная характеристика распределения $d\sigma(\theta)$. Так как $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\, |a_k|^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k^2$, то из условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 < \infty$ вытекает, что $\sigma(\theta) \in AC(-\pi, \pi)$. Из сказанного следует, что лемма 2 может быть уточнена: при условии $\delta_n = O(n^{-m-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$ $\left(m \text{— целое, при } m = 0 \text{ считаем } \alpha > \frac{1}{2}\right)$ ф.р. абсолютно непрерывна и в.ф. совпадает п.в. с непрерывной положительной функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную $\varphi^{(m-1)}(\theta)$ и $\omega_2^{(m-1)}(\delta, \varphi^{(m)}) =$

$= O(\delta^{\alpha})$. Заметим, что первая часть леммы 2 вытекает из теоремы о том, что если $\sum \frac{\tilde{a}_n}{\sqrt{n}} < \infty$, то $\sigma(\theta) \in AC(I)$ (см. [1], стр. 169).

Теорема 3. *Если* $\{a_n\}_0^{\infty} \in A_{2,1}$*, *то соответствующая в. ф.* $\varphi(\theta)$ *и ее тригонометрически сопряженная функция* $\tilde{\varphi}(\theta)$ *принадлежат всем классам* $L^p(I)$ *с* $-\infty < p < \infty$:

$$\varphi(\theta),\ \tilde{\varphi}(\theta) \in L^p(I). \tag{2.10}$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Доказательство. Справедливость первого из включений (2.10), а значит (в силу свойства (V)) и включения $\Psi(\theta) \in L^p(I)$, следует из лемм 5, 7 и теоремы 2.

Для доказательства второго из включений применим лемму 1. Имеем

$$\varphi(\theta) + \frac{\tilde{\varphi}^2(\theta)}{\varphi(\theta)} = \frac{c_0^2}{\Psi(\theta)} \in L^p(I),\ -\infty < p < \infty. \tag{2.11}$$

По неравенству Минковского

$$\mathfrak{M}_p^{\alpha}[f+g] \leqslant \mathfrak{M}_p^{\alpha}[f] + \mathfrak{M}_p^{\alpha}[g],\ \mathfrak{M}_p[f] = \left\{ \int_a^b |f(t)|^p\, dt \right\}^{1/p}, \tag{2.12}$$

где $\alpha = 1$ при $p > 1$ и $\alpha = p$ при $0 < p < 1$.

Исходя из (2.12) и (2.11), получим: $\varphi^{-1}(\theta)$, $\tilde{\varphi}^2(\theta) \in L^p(I), 0 < p < \infty$. По неравенству Гельдера и доказанным выше включениям имеем

$$\|\tilde{\varphi}\|_p \leqslant \left\| \frac{\tilde{\varphi}^2}{\varphi} \right\|_{\frac{sp}{2}} \|\varphi\|_{\frac{s'p}{2}} < \infty,\ \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,$$

то есть

$$\tilde{\varphi}(\theta) \in L^p(I),\ 0 < p < \infty.$$

По лемме 1 имеем, что если $\varphi(\theta) \not\equiv 1$ ($\tilde{\varphi}(\theta) \not\equiv 0$) п. в. то п. в.

$$\frac{\tilde{\varphi}^2(\theta)}{\varphi(\theta)} \geqslant \frac{c_0^2}{\Psi(\theta)},\ \frac{1}{|\tilde{\varphi}(\theta)|} \leqslant \frac{1}{c_0}\sqrt{\frac{\Psi(\theta)}{\varphi(\theta)}},$$

а так как $\Psi(\theta)$, $\varphi(\theta) \in L^p(I)(-\infty < p < \infty)$, то, применяя снова неравенство Гельдера, получим, что $[\tilde{\varphi}(\theta)]^{-1} \in L^p(I)$. Итак, справедливость включения (2.10) доказана.

---

* Случай $\{a_n\}_0^{\infty} \equiv \{0\}_0^{\infty}$ исключается из рассмотрения, а тем самым и случай $\varphi(\theta) = 1$ ($\tilde{\varphi}(\theta) = 0$) п.в. в $(-\pi, \pi)$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в.ф.

$$\varphi_1(\theta) = \exp\left\{ \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos k\theta \right\}, \quad \alpha_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k}}, & k = m^{2\nu}, \ \nu > 1, \ m = 1, 2, \cdots, \\ 0, & k \neq m^{2\nu}. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\nu}, \quad \alpha_n = c_n(l_{\varphi_1}(\theta)), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

По теореме Леви (см. [9], стр. 640) $\{c_n(\varphi_1)\}_0^{\infty} \in A_1$. Так как $\varphi_1(\theta) > 0$, то по теореме Г. Бакстера (см. [10]) следует сходимость ряда из модулей параметров о.н.м., соответствующих в.ф. $\varphi_1(\theta)$, то есть $\{a_n^1\}_0^{\infty} \in$

$\in A_1$. Но $\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$. Известно (см. [4], 1-е замечание), что в

этом случае $\{a_n^{(1)}\}_0^{\infty} \overline{\in} A_{2,1}$, хотя, как это видно, $\varphi_1(\theta)$, $\tilde{\varphi}_1(\theta) \in L^p(I)$ для всех $-\infty < p < \infty$ и соответствующая ф.р. $\sigma_1(\theta) \in AC(-\pi, \pi)$. Приведенный пример показывает также, что классы A_1 и $A_{2,1}$, вообще говоря, не совпадают между собой.

Замечание 3. Если хотя бы в одной точке $\theta = \theta_0$ $\sigma(\theta_0 + 0) - \sigma(\theta_0) = \mu_0 > 0$ или для какого-нибудь

$$-\infty < p < \infty \quad \varphi(\theta) \overline{\in} L^p(I), \quad \text{то} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\, |a_n|^2 = \infty.$$

Теорема 4. *Пусть $\varphi(\theta)$—суммируемая, 2π-периодическая, неотрицательная и не равная единице п.в. в I функция, для которой*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\omega_2^{(m)}\left(\frac{1}{n}, l_\varphi\right) \right]^2 < \infty. \tag{2.13}$$

Тогда для всех $-\infty < p < \infty$ имеют место вллючения

$$\varphi(\theta), \ \tilde{\varphi}(\theta) \in L^p(I). \tag{2.14}$$

Доказательство. А. А. Конюшков доказал* (см. [12]) теоремы 11.1 (б), 11.2 (б), 12 при $p = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$), что при $f(\theta) \in L^2(I)$ из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n(f)|^2$ вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\omega_2^{(m)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \right]^2$$

и наоборот**.

Применим эту теорему для $f(\theta) = l_\varphi(\theta)$. Тогда $c_n(f) = d_n$. Это возможно, так как из условия (2.13) следует, что $l_\varphi(\theta) \in L^2(I)$. По лемме

* В условии (3.3) в [12] имеется описка: вместо $\dfrac{\gamma - \beta}{p'}$ должно стоять $\gamma - \dfrac{\beta}{p'}$.

** Эта теорема была передоказана И. А. Ибрагимовым в [13]. Я. Л. Геронимус доказал ее в [14], но при дополнительных условиях:

$$0 < m_0 < f(\theta) < M, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

5 параметры о.н.м. соответствующие в.ф. удовлетворяют условию $\{a_n\}_0^\infty \in A_{3,1}$. Теперь применяем теорему 3.

Приведенное доказательство теоремы 4 является косвенным: оно связано с применением теории ортогональных многочленов. Прямое ее доказательство нам не известно. Первое из включений (2.14) для $p>0$ вытекает из теоремы Э. А. Стороженко (см. [15]).

Теорема 5. *При условии $\{a_n\}_0^\infty \in A_{2,1}$ имеем п.в. асимптотическое представление (а.п.) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^*(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta})$, причем утверждение „почти всюду" нельзя заменить утверждением „всюду".*

Доказательство. В [4] доказано, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \frac{1}{\varkappa^2}\sum_{n=0}^{\infty} n\,|\varphi_n(0)|^2,$$

где

$$U_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\pi_0(\theta) - \frac{\varkappa_n}{\varkappa}\varphi_n^*(e^{i\theta})\right|^2 d\sigma(\theta) = \frac{1}{\varkappa^2}\sum_{k=0}^{\infty} k\,|\varphi_k(0)|^2.$$

Так как при условии $\{a_n\}_0^\infty \in A_{2,1}$ $\sigma(\theta) \in AC(I)$, то в силу (IV)

$$U_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1 - \frac{\varkappa_n}{\varkappa}\,\frac{\varphi_n^*(e^{i\theta})}{\pi(e^{i\theta})}\right|^2 d\theta.$$

Далее имеем $a_n = -\overline{\varphi_{n+1}(0)}/\varkappa_{n+1}$, значит

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,|\varphi_n(0)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,\varkappa_{n+1}^2|\varphi_{n+1}(0)|^2 < \varkappa^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,|a_n|^2 < \infty.$$

Поэтому $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n < \infty$, то есть $U_n = o(1)$ $(n\to\infty)$ и п.в. в I справедливо а.п. Если рассмотреть параметры

$$a_0 = a_1 = 0,\; a_k = -\frac{1}{k}(\ln k)^{-\frac{1+\varepsilon}{2}},\; 0<\varepsilon<1,\; k=2,3,\cdots, \tag{2.15}$$

то $\{a_n\}_0^\infty \in A_{2,1}$. Вместе с тем

$$\Lambda_n = \ln\prod_{k=2}^{n-1}\frac{1+|a_k|}{1-|a_k|} > 2\sum_{k=2}^{n-1}|a_k| > 2\left\{(\ln n)^{\frac{1-\varepsilon}{2}} - (\ln 2)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\right\}. \tag{2.16}$$

Так как $-1<a_k\leqslant 0$, $k=0,1,2,\cdots$, то (см. [1], стр. 165—166) $\varphi_n(1) = \frac{1}{\sqrt{c_0}}\exp\Lambda_n$. Применяя (2.16), получим

$$\varphi_n(1) > C_{26}\exp 2(\ln n)^{\frac{1-\varepsilon}{2}},\; \varphi_n(1)\to\infty\; (n\to\infty) \tag{2.17}$$

и а.п. в точке $\theta=0$ быть не может, Теорема 6. *Необходимое и достаточное условие, чтобы*

$$\rho_n = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k |a_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = O\left(n^{\frac{1}{2}-m-\alpha}\right), \quad 0<\alpha<1 \tag{2.18}$$

$\left(m\right.$ — *целое при* $m=0$ *считаем* $\left.\alpha > \frac{1}{2}\right)$ *состоит в том, чтобы в.ф. совпадала с непрерывной положительной функцией, имеющей абсолютно напрерывную производную* $\varphi^{(m-1)}(\theta)$ *и*

$$\omega_2(\delta, \varphi^{(m)}) = O(\delta^{\alpha}). \tag{2.19}$$

Доказательство. Пусть выполняется условие (2.18). Так как

$$\delta_n = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} k |a_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = O\left(n^{-(m+\alpha)}\right), \tag{2.20}$$

то по лемме 2 выполняется условие (2.19). Наоборот, при выполнении (2.19) имеем (2.20). Для этого докажем справедливость (2.18). Известно (см. [16], стр. 78), что

$$\sum_{k=n}^{N} v_k u_k = \sum_{k=n+1}^{N} (v_k - v_{k-1}) \sum_{\nu=k}^{\infty} u_\nu + v_n \sum_{\nu=n}^{\infty} u_\nu - v_N \sum_{\nu=N+1}^{\infty} u_\nu. \tag{2.21}$$

Здесь $\{v_k\}_0^{\infty}$ — произвольная числовая последовательность,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu < \infty \quad (u_\nu \geqslant 0).$$

Полагая в (2.21) $v_k = k$, $u_k = |a_k|^2$ и устремляя $N \to \infty$, получим

$$\sum_{k=n}^{\infty} k |a_k|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{\nu=k}^{\infty} |a_\nu|^2 + n \sum_{\nu=n}^{\infty} |a_\nu|^2 - \lim_{N\to\infty} \left(N \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |a_\nu|^2 \right).$$

Так как $\{a_n\}_0^{\infty} \in A_{2,1}$, то

$$\lim_{N\to\infty} \left(N \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |a_\nu|^2 \right) \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 = 0$$

и значит

$$\rho_n^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k^2 + n\delta_n^2.$$

В силу (2.20) имеем (2.18).

Замечание 4. Известно (см. [17], стр. 222): если $f(\theta) \in L^2(I)$, то $\omega_2(\delta, f) = O(\delta^{\alpha})$, $0<\alpha<1$ тогда и только тогда, когда

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = O(n^{-\alpha}).$$

Лемма 2 при $m=0$ является аналогом приведенной теоремы для $\alpha > \frac{1}{2}$. Если применить преобразование (2.21), полагая в нем $v_k = k$, $u_k = |c_k(f)|^2$, то воспроизведя прежние рассуждения, получим, что

$$\left\{\sum_{k=n}^{\infty} k\,|c_k\ (f)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = O\,(n^{\frac{1}{2}-\alpha})\quad \alpha > \frac{1}{2}$$

тогда и только тогда, когда $\omega_2(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$. Таким образом, теорема 6 имеет свой аналог в гармоническом анализе.

Теорема 7. *Пусть* $\{a_n\}_0^\infty \in A_2$. *Тогда п.в. в* $(-\pi, \pi)$

$$|\varphi_n(e^{i\theta_0})| = o\,(\ln n),\ n \geqslant 2,\ \theta_0 \in E\ (\text{mes}\, E = 2\pi), \tag{2.22}$$

причем „п.в." заменить на „всюду" нельзя.

Доказательство. Рассмотрим ортогональный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k\, \varphi_{k+1}(e^{i\theta})(b_{-1} = b_0 = b_1 = 0),$$

где $b_k = a_k\,\varkappa_{k+1}(\ln k)^{-1}\ (k > 2)$, $\varkappa_0 \leqslant \varkappa_k \leqslant \varkappa$. Очевидно

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 \ln^2 k < \infty$$

и по теореме Г. Радемахера и Д. Е. Меньшова (см. [16], стр. 87), которая справедлива и для комплекснозначных многочленов $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$, ортогональных в смысле (0.2), следует сходимость п.в. в I ряда $\sum_{k=0}^{\infty} b_k\,\varphi_{k+1}(e^{i\theta})$. Известна теорема Кронекера (см. [16], стр. 78): если $0 < \lambda_n \uparrow$, то из сходимости числового ряда $\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k \lambda_k^{-1}$ с вещественными u_k следует оценка $s_n = \sum_{k=k_0}^{n} u_k = o(\lambda_n)$. Если $u_k = \alpha_k + i\beta_k$, то применяя вышеприведенную теорему для рядов с членами α_k и β_k, получим ее справедливость для комплексных u_k. Положим

$$\lambda_k = \ln k,\ k_0 = 2,\ u_k = a_k\,\varkappa_{k+1}\,\varphi_{k+1}(e^{i\theta_0}),\ \theta_0 \in E.$$

Тогда

$$s_n(\theta_0) = \left|\sum_{k=2}^{n} a_k\,\varkappa_{k+1}\,\varphi_{k+1}\ (e^{i\theta_0})\right| = o\,(\ln n),\ n > 2. \tag{2.23}$$

Поэтому, применяя (2.23), будем иметь

$$|\varphi_n(e^{i\theta_0})| \leqslant C_{23} + \frac{1}{\varkappa_0}\left|\sum_{k=2}^{n+1} a_k\,\varkappa_{k+1}\,\varphi_{k+1}\,(e^{i\theta_0})\right| = o\,(\ln(n+1)).$$

Итак, (2.22) доказано. Рассмотрим $a_n = -(n+\beta)^{-1}$, $\beta > 1$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Очевидно $\{a_n\}_0^\infty \in A_2$. Применяя первое из неравенств (2.16) и равенство $\varphi_n(1) = \frac{1}{\sqrt{c_0}} \exp \Lambda_n$, получим

$$\varphi_n(1) = \frac{1}{\sqrt{c_0}} \exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+\beta}\right\} > \frac{1}{\sqrt{c_0}} \exp\left\{\int_0^n \frac{dx}{x+\beta}\right\} = \frac{1}{\sqrt{c_0}}\left(1+\frac{n}{\beta}\right).$$

Значит для $\theta_0 = 0$ (2.22) не имеет места при $a_n = -(n+\beta)^{-1}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Если рассмотреть $\{a_n\}_0^\infty$, определяемое (2.15), то $\{a_n\}_0^\infty \in A_{2,1} \subset A_2$ и для соответствующих о. н. м. оценка (2.16) дает

$$\varphi_n(1) \geqslant C_{22} \varepsilon_n \ln n, \quad \varepsilon_n = (\ln n)^{-\frac{1}{2}}.$$

Харьковский авиационный институт

Поступила 19.XI.1977

Բ. Լ. ԳՈԼԻՆՍԿԻ. Օրթոգոնալ բազմանդամների պարամետրերի նվազման կարգի և համապատասխան բաշխման ֆունկցիայի միջև եղած կապի մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկված են միավոր շրջանի վրա օրթոգոնալ բազմանդամներ, պարամետրական տեսքով տրված.

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \bar{a}_n \Phi_n^*(z), \quad \Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\Phi_0(z) = 1; \quad n = 1, 2, \cdots,$$

որտեղ $\{a_n\}_0^\infty$ *կոմպլեքս թվեր են, որոնք բավարարում են միայն* $|a_n| < 1$, $n = 0, 1, \cdots$ *պայմանին։*

Այն դեպքերում, երբ $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ *և* $\sum_{n=0}^\infty n|a_n|^2$ *շարքերը զուգամետ են, աշխատանքում ուսումնասիրվել են համապատասխան բաշխման ֆունկցիաների հատկությունները։ Այդ շարքերի մնացորդների նվազման որոշակի կարգերի դեպքում ստացվել են կշռային ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հատկությունները։ Կողմնակի եղանակով ապացուցվել է մի նոր թեորեմ ֆունկցիաների դասերի ներդրման մասին։*

B. L. GOLINSKII. *A relation between the decreasing of the orthogonal polynomials parametrs and properties of corresponding distribution* (summary)

Let $\Phi_n(z)$ be the polynomials orthogonal on the unit circle

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \bar{a}_n \Phi_n^*(z), \quad \Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\Phi_0(z) = 1, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

where $\{a_n\}_0^\infty$ can be any complex numbers satisfying the only condition $|a_n| < 1$ $n = 0, 1, 2, \cdots$. In the cases where $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ and $\sum_{n=0}^\infty n|a_n|^2$ converge, the properties of corresponding distributions are studied.

Dependence of the differential properties of Weight fuuctions of the rate of convergence of the above series is studied.

One new theorem concerning embedding of classes of functions is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Я. Л. Геронимус.* Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Физматгиз, М., 1958.
2. *Г. Сегё.* Ортогональные многочлены, Физматгиз, М., 1962.
3. S. *Verblunsky.* On positive harmonic functions, Proc. Lond. Math. Soc., 40, 1935, 290—320.
4. *Б. Л. Голинский, И. А. Ибрагимов.* О предельной теореме Г. Сегё, Изв. АН СССР, сер. матем., 35, № 2, 1971, 408—427.
5. *Я. Л. Геронимус.* Полиномы, ортогональные на круге и их приложения, Зап. н.-иссл. ин-та математ. и мех-ки и ХМО, XIX, с. 4, 1948, 35—118.
6. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, ГОНТИ, М.—Л., 1950.
7. *И. А. Ибрагимов.* Об асимптотическом поведении ошибки прогноза, Теория вероятностей и ее применение, IX, вып. 4, 1964, 695—703.
8. *А. Ф. Тиман.* Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
9. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961.
10. *G. Baxter.* A convergence equivalence related to polynomials orthogonal on the unit circle, Trans. Amer. Math. Soc., 99, № 3, 1961, 471—487.
11. *Б. Л. Голинский.* Об асимптотическом поведении ошибки прогноза, Теория вероятностей и ее применения, XIX, вып. 4, 1974, 724—739.
12. *А. А. Конюшков.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье, Мат. сб., 44 (86), 1, 1958, 53—84.
13. *И. А. Ибрагимов.* Об одной теореме Г. Сегё, Матем. заметки, 3, № 6, 1968, 693—702.
14. *Я. Л. Геронимус.* Об одной задаче Г. Сегё, М. Каца, Г. Бакстера и Дж. Гиршмана, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, вып. 2, 1967, 289—304.
15. *Э. А. Стороженко.* О вложении в класс e^{L}, Матем. заметки, 10, № 1, 1971, 17—24.
16. *Г. Алексич.* Проблемы сходимости ортогональных рядов, И.—Л., М., 1963.
17. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимаций, Изд. «Наука», М., 1965.

Մաթեմատիկա XV, № 2, 1980 Математика

О. С. АСАТРЯН

О КРЕАТИВНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЯХ

В данной статье рассматриваются классы эквивалентностей, заданных на N, замкнутые относительно некоторых специальным образом выбранных операций. Изучаются свойства креативности в таких классах. В частности, доказывается теорема о том, что всякая предполная позитивная эквивалентность креативна в соответствующем замкнутом классе. Эта теорема показывает, что понятие креативности *шире*, чем понятие полноты. Здесь существенно используются идеи из [1].

Обозначения:

E — множество всех эквивалентностей, заданных на N,
E^p — класс всех предполных эквивалентностей из E,
E^c — класс всех полных эквивалентностей из E^p,
P — класс всех позитивных эквивалентностей,
P^p — класс всех предполных эквивалентностей из P,
$\mathfrak{M}$ — множество всех частично рекурсивных функций (ч.р.ф.),
F — множество всех общерекурсивных функций из $\mathfrak{M}$ (о.р.ф.),
F_1 — множество всех 1—1 функций из F.

Далее мы напомним некоторые хорошо известные определения из [1] и введем новые.

Определение 1. Пусть $\eta \in E$ и $\varphi \in \mathfrak{M}$. Через η^φ обозначим эквивалентность:

$$\langle x, y\rangle \in \eta^\varphi \Longleftrightarrow \langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle \in \eta \vee x = y.$$

2. Для $\eta_0, \eta_1 \in E$ будем говорить, что η_0 *m-сводится* (*1—сводится*) к η_1, если существует $f \in F$ $(f \in F_1)$ такая, что

$$\langle x, y\rangle \in \eta_0 \Longleftrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle \in \eta_1 .$$

Это отношение будем записывать следующим образом: $\eta_0 \leqslant_m^f \eta_1$.

3. Класс эквивалентностей $Q \subseteq E$ назовем *замкнутым*, если выполнено условие: $\forall \eta \, \forall \varphi \, (\eta \in Q \,\&\, \varphi \in \mathfrak{M} \Rightarrow \eta^\varphi \in Q)$.

Заметим, что в каждом замкнутом классе Q, для произвольного $\eta \in Q$ и нигде не определенной функции φ, $\eta^\varphi \in Q$ и $\forall x \, ([x]_{\eta^\varphi} = x)$, где $[x]_{\eta^\varphi}$ — обозначение класса эквивалентности, содержащего x в эквивалентности η^φ. Такую эквивалентность будем обозначать через O.

4. Эквивалентность $\eta_0 \in E$ *m-универсальна* для класса $Q \leqslant E$, если

$$\forall \eta (\eta \in O \Rightarrow \exists f (f \in F \& \eta \leqslant^{f}_{m} \eta_0)).$$

5. Класс $Q \subseteq$ Е назовем *С-классом*, если Q—замкнутый класс и существует m-универсальная $\eta_0 \in Q$.

Известно, что для $\eta \in E^p$ ($\eta \in E^c$) существует $x_\eta \in F$ ($x'_\eta \in F$) такая, что

$$6а) \ \forall x (\varphi_{x_\eta(x)} \in F_1 \& \forall y (y \in \delta\varphi_x \Rightarrow [\varphi_x (y)]_\eta = [\varphi_{x_\eta(x)} (y)]_\eta));$$

$$6б) \ (\forall x (\varphi_{x'_\eta(x)} \in F_1 \& \forall y (y \in \delta\varphi_x \Rightarrow [\varphi_x (y)]_\eta = [\varphi_{x_\eta(x)} (y)]_\eta \ \&$$
$$\& \ y \overline{\in} \delta\varphi_x \Rightarrow [\varphi_{x_\eta(x)} (y)]_\eta = \varnothing))).$$

Здесь $\varnothing$ — *особый класс* полной эквивалентности $\eta \in E^c$ ([1], [2], [3]). Известно также, что всякая предполная эквивалентность изоморфна некоторому фактору $\eta^* \in P^p$:

$$< x, y > \in \eta^* \Leftrightarrow \exists n \exists m (k^n (x) = k^m (y)), \tag{1}$$

где $k^0 (x) = x$, $k^1 (x) = k (x)$, $\cdots$, $k^n (x) = k k^{n-1} (x), \cdots$, $k \in \mathfrak{M}$ — *универсальная функция* (см. [1] и [3]).

С другой стороны, из критерия Ершова [1] для универсальности полной эквивалентности в классе E^c легко получить, что всякая полная эквивалентность $\eta \in E^c$ является фактором $k^{-1}(O) \in E^c$, где

$$< x, y > \in k^{-1} (O) \Leftrightarrow (k (x) = k (y) \vee x, y \in N \setminus \delta k). \tag{2}$$

Из этих двух факторов непосредственно следует

Лемма 1. *Для произвольной $\eta \in E^p$, ($\eta \in E^c$) существует рекурсивная перестановка g (g') такая, что*

$$\varphi_{x_\eta} = g\varphi_{x_{\eta^*}} \ (\varphi_{x'_\eta} = g' \varphi_{x_{k^{-1}(O)}}),$$

где x_η, x_{η^*} (x'_η, $x_{k^{-1}(O)}$) *из определения* 6а) *и* 6б).

Доказательство. Если $\eta \in E^p$, то η изоморфна некоторому фактору $\eta^* — \eta^*/\_$. Пусть g: $\eta \to \eta^*/\_$ этот изоморфизм, тогда, очевидно, что g—требуемая перестановка.

Аналогично убеждаемся для $\eta \in E^c$.

Для удобства функции x_{η^*} и $x_{k^{-1}(O)}$ обозначим через x_p и x_c соответственно и, при необходимости, для $\eta \in E^p$ и $\eta \in E^c$ вместо обозначений x_η и x'_η всегда будем брать обозначения x_p и x_c соответственно.

По аналогии со свойствами замкнутых классов вычислимых последовательностей из работы [1] можно указать некоторые свойства C-классов.

Свойство 1. *Если Q—C-класс, то существует $\eta_0 \in Q$ такая, что* $Q = \{\eta_0^\varphi / \varphi \in \mathfrak{M}\}$.

Действительно, пусть η_0 — m-универсальная в Q. Тогда верны следующие отношения:

$$Q \subseteq \{\eta_0^f / f \in F\} \rightleftarrows Q' \subseteq Q'' \rightleftarrows \{\eta_0^\varphi / \varphi \in \mathfrak{M}\}.$$

В силу универсальности η_0 в Q, для любого η выполнено условие: $\eta \in Q \rightarrow \eta \leqslant^f_m \eta_0$ посредством $f \in F$. Это означает, что $\eta = \eta_0^f$, т. е. $\eta \in Q'$. Включение $Q' \subseteq Q''$ следует из того, что $F \subset \mathfrak{M}$. В силу замкнутости Q имеем: $Q'' \subseteq Q' \subseteq Q$.

Таким образом, любой C-класс Q можно представить в виде Q' или Q''.

Класс F не имеет вычислимой нумерации. Поэтому естественнее C-класс Q занумеровать следующим образом:

$$\nu(x) = \eta_0^{\varphi_x}, \tag{3}$$

где η_0 — m-универсальная в Q эквивалентность. Такую нумерацию будем называть канонической. Легко убедиться, что $\nu(x)$ есть фактор нумерации Клини для $\mathfrak{M}$, поэтому ν—полная нумерация.

Свойство 2. *Из представимости класса Q в виде $Q = \{\eta_0^f / f \in F\}$ не следует замкнутость класса Q.*

Действительно. Класс $Q = \{O^f / f \in F\}$ состоит только из разрешимых эквивалентностей. Поэтому никакая эквивалентность из Q не может иметь креативного класса. С другой стороны, каждый замкнутый класс вместе с O-ем содержит и O^k, где k—универсальная в $\mathfrak{M}$. Любой неодноэлементный класс O^k креативен. Свойство 2 доказано.

Теорема 1. *Для любого C-класса Q и любой m-универсальной $\eta_0 \in Q$, существует $\beta \in F$ такая, что*

$$\forall x \in N\,(\varphi_{\beta(x)} \in F \;\&\; \nu(x) = \nu(\beta(x))).$$

Доказательство. Пусть Q C-класс. Тогда по свойству 1 $Q = \{\eta_0^{\varphi_x} / \varphi_x \in \mathfrak{M}\}$. Для универсальной функции k $\eta_0^k \in Q$ и $\eta_0^k \leqslant^f_m \eta_0$, для некоторой $f \in F$. С другой стороны, эквивалентность

$$F_\varkappa(\eta_0) \rightleftharpoons \{\langle x, y\rangle / \langle k(x), k(y)\rangle \in \eta_0 \vee x, y \in N \setminus \delta k\} \tag{4}$$

принадлежит E^c.

Поэтому можно найти $\varkappa_c \in F$, удовлетворяющую условиям леммы 1. Заметим, что $\forall x\,(\varphi_{\varkappa_c(x)} \in F_1)$.

Пусть $f, \alpha \in F$ такие, что $\eta_0^k \leqslant^f_m \eta_0$ и $\varphi_{\alpha(x)}(y) = k' \varphi_x(y)$, $(kk'(x) = x \;\&\; k' \in F_1)$. По лемме 1 $\forall x\,(\varphi_{\varkappa_c(\alpha(x))} \in F_1)$, поэтому

$$\forall x\,(\varphi_{\beta(x)} \rightleftharpoons f\varphi_{\varkappa_c(\alpha(x))} \in F_1).$$

Покажем теперь, что $\beta(x) \in F$—требуемая о.р.ф. Действительно,

$$\langle u, v\rangle \in \nu(x) \Longleftrightarrow \langle u, v\rangle \in \eta_0^{\varphi_x} \Longleftrightarrow (!\,\varphi_x(u) \;\&!\, \varphi_x(v) \;\&$$

$$\langle \varphi_x(u), \varphi_x(v)\rangle \in \eta_0) \vee u = v \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (!\,\varphi_x(u) \&!\, \varphi_x(v) \;\&\; (\langle \varphi_{\alpha(x)}(u), \varphi_{\alpha(x)}(v)\rangle \in F_\varkappa(\eta_0))) \vee u = v \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \langle \varphi_{\varkappa_c(\alpha(x))}(u), \varphi_{\varkappa_c(\alpha(x))}(v)\rangle \in \eta_0^k \text{ (так как } \varphi_{\varkappa_c(\alpha(x))} \in F_1)$$

$$\Longleftrightarrow \langle \varphi_{\beta(x)}(u), \varphi_{\beta(x)}(v)\rangle \in \eta_0 \Longleftrightarrow \langle v, v\rangle \in \eta_0^{\varphi_{\beta(x)}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \langle u, v\rangle \in \nu(\beta(x)).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть Q—C-класс, ν — каноническая нумерация Q. Тогда существует двуместная о.р.ф. f такая, что*

$$\forall xy\, (\nu (y)^{\varphi_x} = \nu (f (x, y)).$$

Доказательство. Пусть β выбрана по теореме 1. Тогда $\nu (y)^{\varphi_x} = (\eta_0^{\varphi_y})^{\varphi_x} = (\eta_0^{\varphi_{\beta(y)}})^{\varphi_x}$. По $(s - m - n)$-теореме найдем $\alpha \in F$ такую, что $(\eta_0^{\varphi_x})^{\varphi_{\beta(y)}} = \eta_0^{\varphi_{\alpha(x, y)}}$. Обозначим через $f (x, y)$ суперпозицию $(\alpha (x, y)$. Тогда получим: $\eta_0^{\varphi_{\alpha (x, y)}} = \eta_0^{\varphi_{\beta (\alpha (x, y))}} = \nu (f (x, y))$, что и требовалось доказать.

Теорема 1 показывает, что для каждого C-класса Q можно найти некоторый вычислимый класс о.р.ф. $G \subseteq F$ и с его помощью задать нумерацию Q.

В [1] изучен класс P всех позитивных эквивалентностей. В частности, доказано: η^* m—универсальная в P и можно задать нумерацию ν' класса P следукщим образом:

$$< u, v > \in \nu' (x) <-> \exists n\, \exists m\, (\varphi_x^n (u) = \varphi_x^m (v)). \tag{5}$$

Теорема 2. *Класс P является C-классом и каноническая нумерация ν C-класса P изоморфна ν'.*

Доказательство. $\eta^* \in P m$-универсальная в P и очевидно, что

$$\eta \in P \,\&\, \varphi \in \mathfrak{M} -> \eta^\varphi \in P.$$

Покажем теперь, что ν и ν' — изоморфные нумерации P.

Заметим, что используя теорему о рекурсии, можно найти $\alpha \in F$ такую, что

$$\forall x\, (\nu' (x) \leqslant_m^{\varphi_{\alpha(x)}} \eta^*). \tag{6}$$

С другой стороны, по свойству 1, C-класс P представим в виде $P = \{\eta^{*f} / f \in F\}$. Поэтому $\nu' (x) = \eta^{*\varphi_{\alpha (x)}} = \nu (\alpha (x))$. Пусть теперь $x \in N$ и $\nu (x) = \eta^{*\varphi_x}$, где $\varphi_x \in \mathfrak{M}$. Из результатов [1] известно, что для $\nu (x)$ можно эффективно найти $\varphi_{\beta (x)} \in \mathfrak{M}$ такую, что

$$\nu' (\beta (x)) = \nu (x). \tag{7}$$

Таким образом, мы увидели, что две полные нумерации ν и ν' эквивалентны. Поэтому они изоморфны. Теорема доказана.

Рассматриваемые в [1] m-универсальные λ-последовательности в замкнутых классах λ-последовательностей *были всегда полными*. Теорема 2 показывает, что при определении C-класса такого, как в данной статье, *можно получить C-класс P с предполной, не полной* m-универсальной эквивалентностью. Но с другой стороны, m-универсальность и предполнота в P не совпадают.

Возникают естественные вопросы:

Каким дополнительным требованиям должна удовлетворять m-универсальная в Q эквивалентность, чтобы быть предполной, и всякая ли предполная эквивалентность m-универсальна в некотором подходящем C-классе?

Пусть $Q \subseteq \mathrm{E}$ — C-класс и $\{\gamma^f / f \in F\}$ — его представление, $\nu(x)$ — каноническая нумерация Q.

Определение. $\eta_0 \in Q$ назовем *креативной* в Q, если существует о.р.ф. $\psi(x)$ такая, что

$$\varphi_x \in F \Rightarrow \psi(x) \in \bigcap_y ([y]_{\nu(x)} \nabla [\varphi_x(y)]_{\eta_0}), \qquad (8)$$

где ∇ — дополнение симметрической разности множеств.

Лемма 2. *Всякая креативная в C-классе эквивалентность — предполная.*

Доказательство. Пусть Q — C-класс, η_0 — креативная в Q, и ψ — функция креативности η_0. Покажем, что

$$\varphi_x \in F \Rightarrow \langle \varphi_x(\psi(x)), \psi(x) \rangle \in \eta_0,$$

т. е. η_0 эффективно обладает свойством неподвижной точки и $\psi(x)$ — требуемая о.р.ф. То, что $\psi(x) \in [\psi(x)]_{\nu(x)}$, очевидно.

Поэтому $\psi(x) \overline{\in} [\overline{\psi(x)]}_{\nu(x)}$. Пусть $\varphi_x \in F$. Если предположить, что $\psi(x) \in \overline{[\varphi_x(\psi(x))]}_{\nu(x)}$, то из (8) и из того, что $\psi(x) \in [\psi(x)]_{\nu(x)}$, следует, что $\psi(x)$ должен принадлежать

$$[\psi(x)]_{\nu(x)} \cap [\varphi_x(\psi(x))]_{\eta_0}. \quad \text{Противоречие.}$$

Поэтому $\psi(x) \in [\varphi_x(\psi(x))]_{\eta_0}$, т. е. $\langle \psi(x), \varphi_x(\psi(x)) \rangle \in \eta_0$.

Из [3] известно, что всякая эквивалентность, эффективно обладающая свойством неподвижной точки, предполная. Лемма доказана.

Далее объектами наших рассмотрений будут: нумерованное множество Π всех р.п. множеств с постовской нумерацией $\pi_x = \delta\varphi_x$, Π' — множество всех вычислимых последовательностей р.п. множеств ($\pi'_x = \{\pi_{x,y}\}_{y \in N} = \{\{z / \langle y, z \rangle \in \pi_x\}_{y \in N}\}$) и сопряженные с π'_x последовательности $(\pi^*_x)_z = \{y / z \in \pi^*_{x,y}\}$.

Все эти объекты и их элементарные свойства определены и изучены в [1], гл. 3.

Пусть $\eta \in P^p$. Известно, что нумерованное множество $\gamma_\eta = (S, \nu)$, где $S = \{[x]_\eta\}_{x \in N}$, $\nu(x) = [x]_\eta$ есть n—подобъект Π с тождественным вложением.

Обозначим через $\hat{\eta}$ множество всех вычислимых подпоследовательностей из γ_η и через $(\hat{\eta})^*$ — множество сопряженных с элементами $\hat{\eta}$ последовательностей. Семейство $Q \subseteq \Pi'$ назовем F-замкнутым, если

$$\forall f \in F \, \forall A \in Q [f^{-1}(A) \in Q],$$

где $(f^{-1}(A))_y = f^{-1}(A_y)$. Если $A, B \in \Pi'$, то

$$A \leqslant_m B \Leftrightarrow \exists f \in F \, (x \in A_y \Leftrightarrow f(x) \in B_y).$$

Последовательность $\{R_y\}_{y\in N}$ *креативна для класса* $Q\subseteq\Pi'$, если существует ч.р.ф. $\psi(x)$ такая, что

$$\forall x\in N(\pi'(x)\in Q \Rightarrow x\in \delta\psi \,\&\, \psi(x)\in \bigcap_{y\in N}(R_y \nabla \pi'_{(x),y}).$$

(Это определение тоже из [1], стр. 250).

Теорема 3. *Для любого $\eta\in P^p$ класс $(\hat{\eta})^*$ F-замкнут и содержит креактивную последовательность.*

Доказательство. Пусть $\eta\in P^p$, тогда γ_η есть n-подобъект Π, и пусть $h\in F$ такая, что $\pi_x\in S \Rightarrow \pi_{h(x)}=\pi_x \,\&\, \forall x\,(\pi_{h(x)}\in S)$. Точно так, как в доказательстве теоремы из § 8 [1], покажем, что $(\hat{\eta})^*$ есть n-подмножество Π'. То есть построим гомоморфизм $\mu\colon \Pi' \xrightarrow{b} \Pi'$ такой что для μ все элементы из $(\hat{\eta})^*$ и только они неподвижны и $\mu(\Pi')=(\hat{\eta})^*$. Для этого рассмотрим цепочку преобразований р.п. множеств:

$$\pi_x \to \pi_{x,y}=\pi_{a(x,y)}\ (\cdot a\in F \text{ по } (s-m-n)\text{-теореме})$$

$$\pi_x \to \pi_{x,z}=\{y/z\in\pi_{x,y}\}=\pi_{f(x,z)}\to$$

$$\pi_{\lambda z[hf(x,z)]}=\pi_{\lambda z[h_1(x,z)]}\quad (h_1=hf)\to$$

$$\to(\pi_{\lambda z[h_1(x,z)]})^*=\pi_{\lambda y[h_2(x,y)]}\ (\text{сопряжение эффективно})\to$$

$$\to\{<y,\pi_{\lambda y[h_2(x,y)]}>\}_{y\in N}=\pi_{h_0(x)}.$$

Преобразование $\pi_x\to\pi_{h_0(x)}$ вычислимое и задает нужный гомоморфизм

$$\mu\colon \Pi' \xrightarrow{b} \Pi'.$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$R_y=\{x/x\in\pi'\,h_0(x),\,y\}$$

и проверим следующие ее свойства.

1. $R\in(\hat{\eta})^*$. Действительно,

$$R^*_x=\{y/x\in R_y\}=\{y/x\in\pi'_{h_0(x),\,y}\}=\{z/y\in\pi_{hf\,x,z)}\}=$$

$$=\{y/y\in\pi_{hf(x,x)}\}=\pi_{hf(x,x)}.$$

Но $\forall x\,(\pi_{h(f(x,x))})\in S)$, поэтому $R=(R^*)^*\in(\hat{\eta})^*$, и потому $\forall x\,(R^*_x\neq\varnothing)$.

2. $\forall y\,(R_y\neq\varnothing)$. Действительно. Пусть $y_0\in N$, рассмотрим класс $[y_0]_\eta$, где η—выбранная из P^p эквивалентность, построим $\pi_{x_0}=[y_0]_\eta\times N$. Это р.п. множество и $\pi_{x_0,y_0}=\pi'_{x_0}\in(\hat{\eta})^*$, так как $\pi'_{x_0}=\pi'_{h_0(x_0)}$, кроме того имеем

$$\forall y\,(y\in[y_0]_\eta \Rightarrow [\pi'_{(x_0),\,y}=N]),\ \text{поэтому}$$

$$x_0\in N=\pi'_{h_0(x_0),\,y_0}.$$

3. $\forall x \exists y\, (x \in R_y)$. Пусть $x \in N$, рассмотрим $\pi'_{h_0(x),\, y}$. Из того, что $x \in \pi'_{h_0(x),\, y_0}$ следует существование y_0 такого, что $x \in \pi^*_{h_0(x),\, y_0}$, поэтому для такого y_0 $x \in R_{y_0}$.

4. $\{R_y\}_{y \in N}$ нумерует эквивалентность,

$$\text{т. е.} \quad [y_1]_\eta \neq [y_2]_\eta \Rightarrow R_{y_1} \cap R_{y_2} = \varnothing.$$

Это следует из того, что $R^* \in \hat{\eta}$.

Свойства 1—4 показывают, что R_y есть вычислимая нумерация семейства $S = \{[x]_\eta\}_{x \in N}$ и нумерационная эквивалентность R изоморфна нумерационной эквивалентности γ_η.

Покажем теперь, что R_y креативна в $(\hat{\eta})^*$ с тождественной функцией креативности.

Т. е. из того, что $\pi'(x) \in (\hat{\eta})^*$, следует

$$\forall y\, (x \in R_y \triangledown \pi'_{(x),\, y}).$$

Пусть $\pi'(x) \in (\hat{\eta})^*$, тогда $\forall y\, (\pi'_{x,\, y} = (\pi'_{h_0(x),\, y})$.

Если $x \in \pi'_{x,\, y} = \pi'_{h_0(x),\, y}$, то $x \in R_y$ и $x \in R_y \cap \pi'(x),\, y$.

Если $x \bar{\in} \pi' x,\, y = \pi_{h_0(x),\, y}$, то $x \bar{\in} R_y$ и $x \in \overline{R}_y \cap \overline{\pi'(x),\, y}$

и поэтому $x \in \bigcap\limits_y R_y \triangledown \pi'_{x,\, y}$.

Теорема доказана.

Теорема 3 показывает, что всякая позитивная эквивалентность с тождественной нумерацией креативна в подходящем F-классе и m-универсальна в этом классе.

С л е д с т в и е. *Если в условиях теоремы последовательность* $B = \{B_y\}_{y \in N}$ *креативна в* $(\hat{\eta})^*$, *то* $\{R_y\}_{y \in N}$ *и* $\{B_y\}_{y \in N}$ *изоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{B_y\}_{y \in N} \in (\hat{\eta})^*$ и ψ функция креативности $\{B_y\}_{y \in N}$. Тогда, в силу универсальности γ_η, существует $f \in F$ такая, что $B = f^{-1}(\gamma_\eta)$. Достаточно показать, что для такой $f\, [f\, (N)]_\eta = N$ и тогда f будет осуществлять требуемый мономорфизм B на γ_η. Предположим противное, т. е., что для некоторого $y_0 \in N$ $B_{y_0} = \varnothing$. Тогда последовательность $\pi'_{x_0} \rightleftharpoons [y_0]_\eta\, x N$ принадлежит $(\hat{\eta})^*$ и в силу креативности B имеем:

$$\psi(x_0) \in \bigcap_{y \in N} (B_y \triangledown \pi'_{x_0,\, y}).$$

Но $$y \in [y_0]_\eta \Rightarrow B_{y_0} \cap \pi'(x_0),\, y_0 = \varnothing \cap N = \varnothing,$$

$$y \in \overline{[y_0]}_\eta \Rightarrow \overline{B}_{y_0} \cap \overline{\pi'}(x_0),\, y_0 = \overline{B}_{y_0} \cap \varnothing = \varnothing,$$

т. е. для такого y_0 $B_{y_0} \triangledown \pi'_{x_0,\, y_0} = \varnothing$ и $\psi(x_0) \in \bigcap\limits_{y \in N} (B_y \Delta \pi'_{x_0,\, y}) = \varnothing$. Противоречие.

Поэтому $\forall y\, (B_y \neq \varnothing)$. B изоморфна γ_η. Таким образом, если ограничимся только функциями из F при определении замкнутых классов, то свойства креативности и m-универсальности в таких классах остаются такими, как в $\mathfrak{M}$-замкнутых классах, где для операций замыкания используются все частично рекурсивные функции [1]. С другой стороны, *всякий $\mathfrak{M}$-заткнутый класс с универсальной последовательностью является F-заткнутым классом.* Поэтому возникает естественная необходимость изучения F-замкнутых классов и вопросов, связанных с m-универсальностью и креативностью в этих классах. И наконец, изучения связей F-замкнутых и $\mathfrak{M}$-замкнутых классов.

В заключение дадим некоторые необходимые и достаточные условия того, чтобы фактор позитивной эквивалентности был позитивным. Для этого введем некоторые определения.

Определение. Вычислимая последовательность $\pi'_z \in \Pi'$ *согласована с эквивалентностью* $\eta \in E$, если выполнено следующее условие:

$$\forall x\, \forall y\, ([\pi_{z,x}]_\eta \cap [\pi_{z,y}]_\eta \neq \varnothing \Rightarrow \pi_{z,x} = \pi_{z,y}).$$

Определение. $\eta' \in E$ есть π_z*-фактор* $\eta \in E$, если π_z согласована с η и

$$\eta' = \{\langle x, y\rangle / \exists u \exists x', y' \, (x' \in \pi_{z,u} \,\&\, y' \in \pi_{z,u} \,\&\, \langle x\, x'\rangle \in \eta \,\&\, \langle y\, y'\rangle \in \eta)\}.$$

Лемма. *Для любого $\eta \in P$ семейство всех согласованных с η последовательностей (обозначим Π'_η) есть r-подмножество Π'.*

Доказательство. Для каждых $z, x \in N$ определим р.п. множество

$$A_{z,x} = \{y / [\pi_{z,x}]_\eta \cap [\pi_{z,y}]_\eta \neq \varnothing\}.$$

Пусть $\alpha(x) \in F$ такая, что

$$\pi_{z,\alpha(z)} = \bigcup_{y \in A_{z,x}} \pi_{z,y},$$

определим $f \in F$ следующим образом:

$$\pi'_{f(z)} = \{\langle x, u\rangle / u \in \pi_{z,\alpha(x)}\}.$$

Очевидно, что $\forall z\, (\pi'_{f(z)} \in \Pi'_\eta)$,

$$\pi'_z = \pi'_v \Rightarrow \pi'_{f(z)} = \pi'_{f(v)}$$

и

$$\pi'_z \in \Pi'_\eta \Rightarrow \pi'_z = \pi'_{f(z)}.$$

Приведем без доказательства следующие теоремы и следствия.

Теорема 4. *$\eta' \in E$ есть позитивный фактор $\eta \in P$ тогда и только тогда, когда η' есть π_z-фактор η.*

Пусть Φ_η—это множество всех позитивных факторов η.

Следствие 1. *Для любого $\eta \in P$ Φ_η есть r-подмножество* Π. *(В частности, если $\eta = O$, то $\Phi_\eta = P$ и P есть r-подмножество* Π).

Следствие 2. *Если $\eta \in P^p$, то Φ_η имеет счетную мощность и $\Phi_\eta \setminus 1 \subset P^p$.*

Пусть $\eta \in P^r$ и $f \in F$ такая, что

$$\forall x\, \forall y\, (x \neq y \Rightarrow [f(x)]_{\tau_1} \neq [f(y)]_{\tau_1}).$$

Определим

$$h(x) = \begin{cases} y, & \text{если } \exists z\, (< z, f(y) > \in \tau_1) \\ \text{не определена в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 5. *$k(x)$—универсальная функция для $\mathfrak{M}$.*

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступила 18.XI.1978

Հ. Ս. ԱՍԱՏՐՅԱՆ. Կրեատիվ էկվիվալենտությունների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում են ալգորիթմների տեսության այնպիսի հասկացություններ, ինչպիսիք են կրեատիվությունը և նախալրիվությունը [1], [3]։ Ապացուցված է, որ կրեատիվության և լրիվության հասկացությունները տարբերվում են իրարից։

Հոդվածի վերջում բերվում են մի քանի պնդումներ, որոնք ըստ հեղինակի կարծիքի, օգտակար կլինեն վերոհիշյալ հասկացությունների հետագա հետազոտություններում։

H. S. ASATRIAN. On *creative equivalences* (summary)

Creative λ-sequences for the class of λ-sequences were introduced by Ershov, Y. L. in [1]. Here he proved that every such sequence is m-universal and complete. In this paper we consider classes of sequences, named C-classes for which creativity implies precompleteness, but not necessarily completeness. This result shows that the notion of creativity is wider than completeness is recursion theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. Л. Ершов.* Теория нумераций, М., „Наука", 1977.
2. *А. Н. Мальцев.* Алгоритмы и рекурсивные функции, „Наука", 1965.
3. *T. H. Payne.* Sequences having an effective fixed-point property, Transactions of the American Mathematical Society, 165, 1972, 1—506.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 2, 1980 Математика

А. А. АНДРЯН

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим систему уравнений составного типа вида

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0, \tag{1}$$

где A, B и C—действительные постоянные квадратные матрицы n-го порядка, причем $\det C \neq 0$, а $u = (u_1, \cdots, u_n)$ — искомая вектор-функция.

Пусть $\lambda_1, \cdots, \lambda_{\nu_0}$ — корни характеристического уравнения системы (1) с положительными мнимыми частями, а $k_1, \cdots, k_{\nu_0}$ — соответственно, кратности этих корней. Действительные корни обозначим через $\mu_1, \cdots, \mu_k$. Предположим, что $\mu_i \neq \mu_j$ $(i \neq j)$.

Выпишем общее решение системы (1), полученное в работе [1]:

$$u(x, y) = 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{\nu_0} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{jr} \left(w_{jr}(x + \lambda_j y) + \sum_{p=0}^{r-1} \beta_{jr}^{(p)} y^p w_{j,r-p}^{(p)}(x + \lambda_j y) \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \psi_j (x + \mu_j y) + \alpha, \tag{2}$$

где $w_{jr}(x + \lambda_j y)$ — произвольные аналитические функции от своих аргументов, $\psi_j(x + \mu_j y)$— произвольные действительные дифференцируемые функции, α —произвольный действительный вектор, δ_{jr} и γ_j—постоянные векторы, а $\beta_{jr}^{(p)}$ — постоянные числа, которые определяются при помощи коэффициентов системы (1), причем $\beta_{jr}^{(0)} = 0$. Векторы γ_j являются действительными.

Не ограничивая общности, положим $w_{jr}(0) = 0$, $\psi_j(0) = 0$.

В работе, пользуясь представлением (2) общего решения системы (1), изучаются граничные задачи в верхней полуплоскости $y > 0$. Аналогичные задачи в других классах функций и несколько другим методом рассматривались автором в работе [2].

§ 1. Граничная задача типа задачи Коши

Из предположения, что $\det C \neq 0$ следует, что ось x-ов является нехарактеристической линией для системы (1). Поэтому задача Коши

$$u(x, 0) = f(x), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = g(x), \tag{1.2}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — n-мерные аналитические вектор-функции, имеет решение в классе аналитических функций и оно единственно (теорема Коши—Ковалевской). Подставим u из (2) в (1.1) и (1.2), после чего продифференцируем (1.1), получим систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{\nu_0} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{jr} w_{jr}^{(1)}(x)+\sum_{j=1}^{\nu_0} \sum_{r=1}^{k_j} \bar{\delta}_{jr} \overline{w}_{jr}^{(1)}(x)+\sum_{j=1}^{k} \gamma_j \psi_j^{(1)}(x)=f^{(1)}(x), \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{\nu_0} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{jr}(\lambda_j w_{jr}^{(1)}(x)+\beta_{jr}^{(1)} w_{j,r-1}^{(1)})+\sum_{j=1}^{\nu_0} \sum_{r=1}^{k_j} \bar{\delta}_{jr}(\bar{\lambda}_j \overline{w}_{jr}^{(1)}(x)+\bar{\beta}_{jr}^{(1)} \overline{w}_{j,r-1}^{(1)}(x))+$$

$$+\sum_{j=1}^{k} \mu_j \gamma_j \psi_j^{(1)}(x)=g(x) \tag{1.4}$$

относительно функций $w_{jr}^{(1)}(x)$, $\overline{w}_{jr}^{(1)}(x)$ и $\psi_j^{(1)}(x)$.

Из теоремы Коши—Ковалевской легко следует невырожденность матрицы системы (1.3), (1.4). Через G обозначим матрицу, составленную из коэффициентов при $w_{jr}^{(1)}(x)$ и $\psi_j^{(1)}(x)$. Очевидно ранг G равен $m+k$, где m — число комплексных корней с положительными мнимыми частями (с учетом их кратностей), а k—число всех действительных корней. В матрице G отметим отличный от нуля минор порядка $m+k$. Номера строк этого минора обозначим через $i_1,\cdots, i_{p_1}, j_1,\cdots, j_{p_2}$ (первые p_1 номеров соответствуют уравнению (1.3), а остальные номера— уравнению (1.4)).

Пусть D — верхняя полуплоскость $y>0$, а Γ — ее граница. Через $M(D+\Gamma)$ обозначим класс функций, непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе со своими первыми производными в $D+\Gamma$. $C^2(D)$ как обычно — класс дважды непрерывно дифференцируемых функций в D.

Граничная задача H. Требуется найти решение системы (1), принадлежащее классу $C^2(D) \cap M(D+\Gamma)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$u_{i_l}(x, 0)=f_l(x), \quad l=1,\cdots, p_1, \quad -\infty<x<+\infty, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_{j_l}(x, 0)=g_l(x), \quad l=1,\cdots, p_2, \quad -\infty<x<+\infty, \tag{1.6}$$

где $f_l, g_l \in C_0^{\infty}(-\infty, +\infty)$.

Прежде, чем перейти к исследованию задачи H, докажем две простые леммы.

Лемма 1. *Пусть $w(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $y>0$ и ограничена при $y \geqslant 0$. Тогда*

$$|y^n w^{(n)}(z)|<c_n, \quad y>0, \quad n=1, 2,\cdots.$$

Доказательство. Представим $w(q)$ в виде

$$w(z)=\frac{z+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w(t)}{(t-z)(t+i)}\,dt. \tag{1.7}$$

Имеем

$$|y^n w^{(n)}(z)|=\left|y^n\frac{n!}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt\right|\leqslant \text{const}\, y^n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{(\tau^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\cdot$$

Сделав в последнем интеграле замену $\tau=\eta y$ получим

$$|y^n w^{(n)}(z)|\leqslant \text{const}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 *справедлива формула*

$$\lim_{y\to+0} y^n w^{(n)}(z)=0,\ n=1,\ 2,\cdots\ (w(x)\in C(-\infty,+\infty)).$$

Доказательство. Представляя $w(z)$ в виде (1.7), для $n=1$ будем иметь

$$yw'(z)=\frac{y}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w(t)-w(x)}{(t-x-iy)^2}\,dt=\frac{y}{2\pi i}\int_{|t-x|<\delta}\frac{w(t)-w(x)}{(t-x-iy)^2}\,dt+$$

$$+\frac{y}{2\pi i}\int_{|t-x|>\delta}\frac{w(t)-w(x)}{(t-x-iy)^2}\,dt=J_1+J_2.$$

Для любого фиксированного $\delta>0$, очевидно $\lim\limits_{y\to+0} J_2=0$. Оценим интеграл J_1:

$$|J_1|\leqslant\max_{|t-x|<\delta}|w(t)-w(x)|\frac{y}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{d\tau}{\tau^2+y^2}\leqslant\text{const}\max_{|t-x|<\delta}|w(t)-w(x)|.$$

В силу непрерывности $w(x)$ последнее выражение может быть сделано сколь угодно малым, если δ достаточно мало. Таким образом

$$\lim_{y\to+0} y\,w'(z)=0.$$

Для $n=2,\ 3,\cdots$ доказательство аналогично.

Исследование задачи H. Вначале исследуем однородную задачу H $(f_l=0,\ g_l=0)$. Предварительно заметим, что на основании лемм 1 и 2 и невырожденности матрицы системы (1.3), (1.4)

$$|w'_{jr}(z_j)|+|\psi'_j(x+\mu_j y)|<\text{const},\ z_j=x+\lambda_j z.$$

Далее подставим общее решение (2) системы (1) в граничные условия (1.5), (1.6), на основании леммы 2 получим

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{jr}^{l}w_{jr}(x)+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j^{l}\psi_j(x)=0,\ l=1,\cdots,p_1, \tag{1.8}$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{jr}^{l}(\alpha_j\,w'_{jr}(x)+\beta_{jr}^{(1)}w'_{j,r-1}(x))+\sum_{j=1}^{k}\mu_j\,\gamma_j^{l}\,\psi'(x)=0,$$

$$l=1,\cdots,p_2. \tag{1.9}$$

Продифференцируем уравнения (1.8) по x, после чего из системы (1.8), (1.9) исключим действительные функции $\psi'_1,\cdots,\psi'_k$ (что возможно благодаря выбору номеров $i_1,\cdots,i_{p_1},\ j_1,\cdots,j_{p_2}$), получим

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\tilde{\delta}_{jr}^{l}w'_{jr}(x)=0,\ l=1,\cdots,m,$$

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\bar{\delta}_{jr}^{l}w'_{jr}(x)+\sum_{j=1}^{k}\bar{\gamma}_j^{l}\psi'_j(x)=0,\ l=1,\cdots,k.$$

Отсюда, ввиду ограниченности функций $w'_{jr}(z_j)$ и $\psi'_j(x+\mu_j y)$, следует $w'_{jr}(z_j)=\mathrm{const}$, $\psi'_j(x+\mu_j y)=\mathrm{const}$. То есть $w_{jr}(z_j)$ и $\psi_j(x+\mu_j y)$— многочлены первой степени. Подставляя $w_{jr}(z_j)$ и $\psi_j(x+\mu_j y)$ в формулу (2) и учитывая ограниченность искомого решения, получим $u(x,y)=\mathrm{const}$. Таким образом, однородная задача H имеет конечное число линейно независимых решений, которые суть постоянные векторы.

Теперь найдем некоторое частное решение неоднородной задачи H. Для этого мы поступим так же, как и при исследовании однородной задачи H с той лишь разницей, что на этот раз мы проинтегрируем результат подстановки общего решения (2) системы (1) в граничное условие (1.6). Будем иметь

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\tilde{\delta}_{jr}^{l}w_{jr}(x)=F_l(x),\ l=1,\cdots,m, \tag{1.10}$$

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\bar{\delta}_{jr}^{l}w_{jr}(x)+\sum_{j=1}^{k}\bar{\gamma}_j^{l}\psi_j(x)=G_l(x),\ l=1,\cdots,k, \tag{1.11}$$

где $F_l-\mathrm{const}\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$ и $G_l-\mathrm{const}\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$.

Из (1.10) имеем

$$w_{jr}(z_j)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sum_{l=1}^{m}\frac{\tilde{\tilde{\delta}}_{jr}^{l}F_l(t)}{t-z_j}}{t-z_j}\,dt, \tag{1.12}$$

где $(\tilde{\tilde{\delta}}_{jr}^{l})=(\tilde{\delta}_{jr}^{l})^{-1}$ (выписанный интеграл, понимаемый в смысле главного значения, сходится). Из (1.11) и (1.12) легко выразить функцич

$\psi_j(x)$ через правую часть. Откуда заменой $x \to x+\mu_j y$ мы определим функции $\psi_j(x+\mu_j y)$. Далее, функции $w_{jr}(z_j)$ из (1.12) и $\psi_j(x+ +\mu_j y)$ подставим в формулу (2). Легко проверить, что так определенная функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (1.5), (1.6), системе (1) и принадлежит классу $C^2(D)\cap M(D+\Gamma)$.

§ 2. Общая граничная задача

В этом параграфе для системы (1) рассмотрим следующую граничную задачу: требуется найти решение $u(x, y)$ системы (1), принадлежащее классу $C^2(D)\cap M(D+\Gamma)$ и удовлетворяющее условию

$$(au_x + bu_y + cu)|_{y=0} = f, \tag{2.1}$$

где a, b, c — постоянные действительные матрицы размерности $(n, m+k)$, а $f=(f_1,\cdots, f_{m+k})$—вектор-функция, компоненты которой принадлежат классу $C_0^\infty(-\infty, +\infty)$.

Пусть $\varphi(z)$ — аналитическая функция в области $y>0$ такая, что $\varphi'(z)<\text{const}$ при $y\geqslant 0$. Далее, пусть F обозначает переход к образу Фурье, а $\theta(x)$ — основная функция, носитель которой лежит в области $x<0$.

Тогда по теореме Коши имеем

$$\left(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x}, F^{-1}[\theta]\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x} F^{-1}[\theta]\, dx = 0. \tag{2.2}$$

Отсюда (см. [3], стр. 160)

$$\left(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x}, F^{-1}[\theta]\right) = -\left(\bar\varphi, \frac{\partial}{\partial x} F^{-1}[\theta]\right) = (\xi F[\bar\varphi], \theta) = 0.$$

То есть, в смысле обобщенных функций,

$$F[\bar\varphi](\xi) = 0,\ \xi<0. \tag{2.3}$$

Переходя в (2.3) к комплексно сопряженным значениям, получим

$$F[\varphi](\xi) = 0,\ \xi>0. \tag{2.4}$$

Подставляя общее решение (2) системы (1) в граничные условия (2.1) и применяя затем преобразование Фурье, будем иметь

$$L_1(\xi)\, F[w](\xi) + \bar L_1(\xi)\, F[\bar w](\xi) + L_2(\xi)\, F[\psi](\xi) = F[f](\xi) + c\cdot\delta(\xi), \tag{2.5}$$

где c — постоянный действительный $m+k$-мерный вектор, $\delta(\xi)$—дельта-функция, $F[w](\xi) = (F[w_{11}](\xi),\cdots, F[w_{s,r_s}](\xi))$, $F[\psi](\xi) = (F[\psi_1](\xi),\cdots, F[\psi_k](\xi))$, $F[f](\xi) = (F[f_1](\xi),\cdots, F[f_{m+k}](\xi))$, причем на основании (2.3), (2.4)

$$F[w](\xi) = 0,\ \xi>0, \tag{2.6}$$

$$F[\bar w](\xi) = 0,\ \xi<0, \tag{2.7}$$

$L_1(\xi)$, $L_2(\xi)$—матрицы-функции размерности, соответственно $(m, m+k)$, $(k, m+k)$, элементы которых многочлены от ξ не выше первой степени, причем $L_2(\xi)$—действительная матрица-функция.

Предположим, что

$$\det \| L_1(\xi);\ L_2(\xi) \| \neq 0, \quad -\infty < \xi < +\infty. \tag{2.8}$$

Имея в виду (2.7), уравнение (2.5) перепишем в виде

$$L_1(\xi)\, F[w](\xi) + L_2(\xi)\, F[\psi](\xi) = F[f](\xi), \quad \xi < 0. \tag{2.9}$$

Учитывая (2.8), уравнение (2.9) решим относительно вектор-функции $(F[w];\ F[\psi])$, получим

$$F[w](\xi) = \Lambda_1(\xi)\, F[f](\xi), \quad \xi < 0, \tag{2.10}$$

$$F[\psi](\xi) = \Lambda_2(\xi)\, F[f](\xi), \quad \xi < 0, \tag{2.11}$$

где $\Lambda_1(\xi)$, $\Lambda_2(\xi)$—вполне определенные матрицы-функции.

Рассматривая (2.5) при $\xi < 0$ и имея в виду (2.7), аналогичным образом получим

$$F[\psi](\xi) = \overline{\Lambda}_2(\xi)\, F[f](\xi), \quad \xi > 0. \tag{2.12}$$

Объединяя (2.6) с (2.10), а (2.11) с (2.12), будем иметь

$$F[w](\xi) = \Lambda_3(\xi)\, F[f](\xi) + \omega_1(\xi), \tag{2.13}$$

$$F[\psi](\xi) = \Lambda_4(\xi)\, F[f](\xi) + \omega_2(\xi), \tag{2.14}$$

где ω_1, ω_2—функционалы, сосредоточенные в нуле

$$\Lambda_3(\xi) = \begin{cases} \Lambda_1(\xi), & \text{если } \xi < 0, \\ 0, & \text{если } \xi > 0, \end{cases} \qquad \Lambda_4(\xi) = \begin{cases} \Lambda_2(\xi), & \text{если } \xi < 0, \\ \overline{\Lambda}_2(\xi), & \text{если } \xi > 0. \end{cases}$$

Применяя к (2.13) и (2.14) обратное преобразование Фурье, найдем

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi}\, \Lambda_1(\xi)\, F[f](\xi)\, d\xi + \sum_{j=0}^{m_1} c_j x^j, \tag{2.15}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\, \Lambda_4(\xi)\, F[f](\xi)\, d\xi + \sum_{j=0}^{m_2} d_j x^j, \tag{2.16}$$

где $c_0, \cdots, c_{m_1}$, $d_0, \cdots, d_{m_2}$ — произвольные постоянные.

Рассматривая однородную задачу (1), (2.1) из формул (2.15), (2.16) найдем, что она имеет конечное число линейно независимых решений, которые являются постоянными векторами.

Частное решение неоднородной задачи (1), (2.1) получается из тех же формул (2.15), (2.16), где $c_0 = \cdots = c_{m_1} = d_0 = \cdots = d_{m_2} = 0$, причем значения аналитических функций $w_{jr}(z_j)$ внутри D определяются из формулы (2.15) с заменой x на соответствующий аргумент $x + \lambda_j y$ ($\operatorname{Im} \lambda_j > 0$), а действительные функции $\psi_j(x + \mu_j y)$—из формулы (2.16) с заменой x на $x + \mu_j y$.

Принимая во внимание (2.8), легко проверить, что найденное частное решение принадлежит классу $C^2(D) \cap M(D+\Gamma)$.

Таким образом, при выполнении условия нормальности (2.8), однородная граничная задача (1), (2.1) имеет конечное число линейно независимых решений, являющихся постоянными векторами, а неоднородная—имеет решение для любой функции f.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 8.XII.1978

Ա. Ա. ԱՆԴՐՅԱՆ. Եզրային խնդիրներ երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով բաղադրյալ տիպի սիստեմի համար (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկված է Կոշու տիպի խնդիր և ընդհանուր եզրային խնդիր երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով բաղադրյալ տիպի սիստեմի համար։

Ստացված են պայմաններ, որոնց դեպքում այդ խնդիրները նորմալ լուծելի են։

A. A. ANDRIAN *Boundary value problems for second order systems of composite tyde with constant coefficients* (summary)

For second order systems of composite type with constant coefficients the Coushy type problem and the general boundary value problem are considered.

The normal solvability conditions are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Е. Товмасян*. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифф. уравнения, 11, № 1, 1966, 3—23.
2. *А. А. Андрян*. Граничные задачи для систем уравнений второго порядка составного типа, Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию И. Г. Петровского, Москва, январь, 1976 г.
3. *В. С. Владимиров*. Уравнения математической физики, М., Изд. «Наука», 1971.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS