ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով՝ նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը. հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24բ։ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Статьи публикуются преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер), год издания, страницы. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24-б, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

1980 r. 13 № 2

ԳԻՆԸ 50 կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series "Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of types script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal,the volume, the number and the date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right not to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been caried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series "Matematika"
Academy of Sciences of Armenian SSR
24-b, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 1, 1980 Математика

Г. М. АЙРАПЕТЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ПОДКЛАССОВ КЛАССА H^1 ХАРДИ ПОСРЕДСТВОМ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

(а) Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — последовательность попарно различных точек единичного круга $D^{(+)} = \{z;\ |z|<1\}$, удовлетворяющих условию Бляшке

$$\sum_{n=1}^\infty (1-|\alpha_k|)<\infty, \tag{1}$$

а $B_\alpha(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{\alpha_k\}_1^\infty$

$$B_\alpha(z) = \prod_{k=1}^\infty \frac{\alpha_k - z}{1-\bar\alpha_k z}\ \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}.$$

Обозначим через $H^p(D^{(+)})$ $(0<p\leqslant\infty)$ множество аналитических в $D^{(+)}$ функций, принадлежащих известному классу H^p Харди. Аналогично, через $H_p(D^{(-)})$ будем обозначать множество голоморфных в $D^{(-)} = \{z;\ |z|>1\}$ функций $f(z)$, представимых в виде $f(z) = F(1/z)$, где $F(z)\in H^p(D^{(+)})$.

Следуя М. М. Джрбашяну [1], обозначим через $\lambda_p\{D^{(+)}, \alpha_k\}$ $(0< <p<\infty)$ класс функций, определенных вне точек окружности $|z|=1$ и удовлетворяющих условиям:

1. $f(z)\in H^p(D^{(+)})$ при $z\in D^{(-)}$;

2. $f(z) = \dfrac{1}{z} B_\alpha(z)\tilde f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ при $z\in D^{(-)}$, причем $\tilde f(z)\in H^p(D^{(+)})$;

3. Угловые граничные значения функции $f(z)$ изнутри и извне окружности $|z|=1$ почти всюду совпадают.

Как известно (см. [2], [3], а также [1]), при $1<p<\infty$ замыкание линейной оболочки системы

$$r_k(z) = \frac{1}{1-z\bar\alpha_k}\quad (k=1, 2, \cdots),$$

совпадает с классом $\lambda_p\{D^{(+)}; \alpha_k\}$.

(б) Хорошо известно, что условие Л. Карлесона [4]

$$\inf_{k\geq 1}\prod_{\substack{\nu\neq k\\ \nu=1}}^\infty \left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar\alpha_j\ \alpha_k}\right| = \delta>0 \tag{2}$$

(это будем записывать так: $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_1$) необходимо и достаточно для того, чтобы система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ образовывала безусловный базис в $\lambda_p\{D^{(+)}, \alpha_k\}$ $(1<p<\infty)$ (см. [5]—[8]).

В настоящей работе рассматривается аналогичный вопрос в пространстве H^1. Доказывается, что условие (2) не достаточно для того, чтобы система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ образовывала базис в замыкании своей линейной оболочки по метрике $H^1(D^{(+)})$. Наряду с этим, устанавливается, что любую функцию $f(z) \in \lambda_1 \{D^{(+)}; \alpha_k\}$ можно представить в виде функционального ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z), \tag{3}$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{B'_\alpha(\alpha_k)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_\alpha(\zeta)} \frac{|d\zeta|}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}_k}.$$

Далее, используя одну теорему В. П. Хавина [9] о слабой секвенциальной полноте подпространства правильных функционалов в $(H^\infty)^*$ устанавливается, что для любой функции $g(z) \in L^\infty$, $g(z) = g_1(z) + g_2(z)$, $g_1(z) \in H^\infty(D^{(+)})$, $g_2(z) \in H^\infty(D^{(-)})$ справедливо соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \int_{|\zeta|=1} S_n(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta = \int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta,$$

где $S_n(z)$ $(n = 1, 2, \cdots)$—частичные суммы ряда (3).

1. (a) Обозначим через $\lambda_1^0 \{D^{(+)}; \alpha_k\}$ замыкание линейной оболочки системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ по норме $H^1(D^{(+)})$. Так как для любого $k > 0$ $r_k(z) \in \lambda_1 \{D^{(+)}; \alpha_k\}$, то $\lambda_1^0 \{D^{(+)}; \alpha_k\} \subset \lambda_1 \{D^{(+)}; \alpha_k\}$. Всюду в этом пункте будем считать, что $0 < \alpha_k < 1$ и $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_1$. Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $\Gamma \subset D^{(+)}$ — некоторая гладкая кривая такая, что $\Gamma \cap [-1, 1] = 1$ и угол между Γ и отрезком $[-1, 1]$ положителен. Тогда справедливо неравенство*

$$|B_\alpha(z)| > \rho > 0, \quad z \in \Gamma,$$

где ρ не зависит от z.

Доказательство. Согласно лемме 9 работы [10], если обозначить через G_k $(k = 1, 2, \cdots)$ окружность $|z - \alpha_k| / |1 - \bar{\alpha}_k z| = \delta/4$, то в силу условия леммы на $G = \bigcup G_k$ будем иметь

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left| \frac{\alpha_j - z}{1 - \bar{\alpha}_j z} \right| > \frac{\delta}{4} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

так что на G имеет место неравенство

$$|B_\alpha(z)| > \left(\frac{\delta}{4}\right)^2. \tag{4}$$

Пусть теперь γ есть угол между Γ и отрезком $[-1, 1]$. Легко проверить, что последовательность непересекающихся окружностей G_k $(k = 1, 2, \cdots)$ попадет в угол с вершиной в точке $+1$ и раствора $\delta/(1-\delta/4)^2$, биссектриса которого есть $(-\infty, 1]$. Так что, если заранее взять $\delta/(1-\delta/4)^2 < \gamma$, то учитывая (4), на Γ будем иметь $|B(z)| > (\delta/4)^2$ и лемма доказана.

(б) Обозначим через $H^p([-1, 1])$ класс аналитических, вне отрезка $[-1, 1]$ функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{1<\rho<\rho_0} \int_{\Gamma_\rho} |f(\zeta)|^p |d\zeta| < \infty \quad (0<p<\infty),\ \rho_0<\infty,$$

где Γ_ρ — эллипс с фокусами -1 и $+1$, определяемый равенством

$$\Gamma_\rho = \left\{\zeta;\ \frac{1}{2}\left|\zeta+\frac{1}{\zeta}\right| = \rho\right\}.$$

Пусть далее $\psi(z) = z - \sqrt{z^2-1}$ — функция, отображающая внешность отрезка $[-1, 1]$ в $D^{(+)}$, а

$$\omega_k = \psi\left(\frac{1}{\alpha_k}\right) = \frac{1}{\alpha_k} - \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^2 - 1},\ k=1, 2, \cdots$$

— последовательность из единичного круга. Так как $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_1$ и $0 < \alpha_k < 1$, то из результата Хеймана и Ньюмана (см. [11], стр. 289) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-\omega_k) < \infty.$$

Тем самым доказано существование произведения Бляшке $B_\infty(z)$ с нулями $\{\omega_k\}_1^\infty$:

$$B_\infty(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k - z}{1-\omega_k z},\ z \in D^{(+)}.$$

Заметим также, что

$$\frac{B_\infty(\psi(z))}{1 - z\alpha_k} \in H^p([-1, 1]) \tag{5}$$

и почти всюду

$$|B_\infty(\psi(x))| = 1,\ -1 < x < 1. \tag{6}$$

Лемма 2. *Для любой функции $f(z) \in H^p([-1, 1])$, $(0 < p < \infty)$ справедливо неравенство*

$$A \int_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|^p |d\zeta| < \int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx, \tag{7}$$

где $A>0$ — постоянная, не зависящая от f.

Доказательство. Пусть Γ есть образ окружности $|\zeta| = 1$ при отображении $w = \psi(z)$, а $m(|dz|)$ — мера Лебега на Γ. Легко проверить, что мера $\mu(E) = m(E \cap \Gamma)$, $E \subset D^{(+)}$ будет карлесоновой мерой (см. Л. Карлесон [4]). Применяя теперь теорему Карлесона (из той же работы) к функции $f(\varphi(z))[\psi'(z)]^{1/p} \in H^p(D^{(+)})$, где $\varphi(z)$ есть функция, обратная к $\psi(w)$, будем иметь

$$A\int\limits_{\Gamma}|f(\varphi(z))|^p\,|\varphi'(z)|\,|dz|<\int\limits_{|z|=1}|f(\varphi(z))|^p\,|\varphi'(z)|\,|dz|. \tag{8}$$

Теперь, подставив в (8) $z=\psi(\zeta)$, получим неравенство (7).

(в) Приведем, наконец, лемму, на которую мы будем существенно опираться.

Лемма 3. *Для любого набора $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ $(n\geqslant 1)$ комплексных чисел справедливы неравенства*

$$C_1\int\limits_{|\zeta|=1}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-\alpha_k\zeta}\right|^p|d\zeta|<\int\limits_{-1}^{1}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-\alpha_k x}\right|^p dx<$$

$$<C_2\int\limits_{|\zeta|=1}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-\alpha_k\zeta}\right|^p|d\zeta|, \tag{9}$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные, не зависящие от n и $\{a_k\}_1^n$.

Доказательство. Так как

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-\alpha_k\zeta}\in H^p\ (0<p<\infty),$$

то правое неравенство следует из известного неравенства Феера—Рисса (см. [12], стр. 46).

Учитывая, что образ Γ окружности $|z|=1$ при отображении $\zeta=\psi(z)$ удовлетворяет условиям леммы 1, согласно этой лемме будем иметь

$$\inf_{|z|=1}|B_\infty(\psi(z))|=\inf_{\zeta\in\Gamma}|B(\zeta)|>\rho>0.$$

Отсюда, с учетом (5), (6) и леммы 2, получим

$$\int\limits_{-1}^{1}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-\alpha_k x}\right|^p dx=\int\limits_{-1}^{1}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{B_\infty(\psi(x))}{1-\alpha_k x}\right|dx\geqslant$$

$$\geqslant C\int\limits_{|\zeta|=1}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{B_\infty(\psi(\zeta))}{1-\alpha_k\zeta}\right|^p|d\zeta|>C\cdot\rho\int\limits_{|\zeta|=1}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-\alpha_k\zeta}\right|^p|d\zeta|.$$

Лемма доказана.

(г) Обозначим через $\lambda_p^0\{[-1,1],\alpha_k\}$ замыкание линейной оболочки системы функций

$$r_k(x)=\frac{1}{1-\alpha_k x}\quad(k=1,2,\cdots)$$

по метрике $L^p([-1,1])$ $(1\leqslant p<\infty)$. Тогда, так как условие (3) при $0<\alpha_k<1$ равносильно условию

$$\frac{1-\alpha_{k+1}}{1-\alpha_k}\leqslant c<1 \tag{10}$$

(см. [11], стр. 289), то из леммы 3 получаем

Следствие. Если последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(0<\alpha_k<1)$ удовлетворяет условию (10), то подпространства $\lambda_1^0\{D^{(+)};\ \alpha_k\}$ и $\lambda_1^0\{[-1,1];\ \alpha_k\}$ совпадают.

Следующая теорема также непосредственно следует из леммы 3.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность функций $\{r_k(x)\}_1^\infty$ образовывала безусловный базис в $\lambda_p^0\{[-1,1],\ \alpha_k\}$ $(1<p<\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы $\{\alpha_k\}_1^\infty$ удовлетворяла условию* (10).

Действительно, так как система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ при условии (12) образует безусловный базис в $\lambda_p\{D^{(+)};\ \alpha_k\}$, то остается применить лемму 3.

(д). Теорема 2. *Если последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию $1-\alpha_k=c^k$, где $0<c<1$, то система функций $\{r_k(x)\}_1^\infty$ не является базисом в $\lambda_1^0\{[-1,1];\ \alpha_k\}$.*

Доказательство. Обозначив $a_k=1/\alpha_k$ $(k=1,2,\cdots)$, рассмотрим последовательность функций

$$r_k^*(x)=\frac{1}{a_k-x}\quad(k=1,2,\cdots).$$

Очевидно, что $r_k(x)=a_k r_k^*(x)$. Пусть теперь $\{w_k\}_1^\infty$ — некоторая последовательность положительных чисел из класса l^1. Выделим последовательность функций $\{r_{n_k}^*(x),\ r_{n_k+1}(x)\}_{k>1}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$w_k\left\|\frac{1}{a_{n_k}-x}\right\|_1>k+\left\|\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{w_j}{a_{n_j}-x}-\frac{w_j}{a_{n_j+1}-x}\right)\right\|_1\ (k=1,2,\cdots), \tag{11}$$

$$\left\|\frac{1}{a_{n_j}-x}-\frac{1}{a_{n_j+1}-x}\right\|_1<C_1<\infty\quad(j=1,2,\cdots). \tag{12}$$

Легко видеть, что неравенства (12) сразу следуют из того, что $r_k^*(x)>r_{k-1}(x)$, так как

$$\left\|\frac{1}{a_k-x}-\frac{1}{a_{k+1}-x}\right\|_1=\left\|\frac{1}{a_{k+1}-x}\right\|_1-\left\|\frac{1}{a_k-x}\right\|_1=$$

$$=\log\frac{a_k-1}{a_{k+1}-1}+\log\frac{a_k+1}{a_{k+1}+1}=c+\log\frac{a_k+1}{a_{k+1}+1}<c+1.$$

Возможность выбора последовательности $\{n_k\}_1^\infty$ натуральных чисел для выполнения неравенств (11) следует из того, что $\|r_k^*(x)\|_1\to\infty$, при $k\to\infty$. Теперь рассмотрим функцию $S(x)$, представимую в виде суммы ряда

$$S(x)=\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{w_k}{a_{n_k}-x}-\frac{w_k}{a_{n_k+1}-x}\right)=\sum_{k=1}^\infty\frac{u_k}{a_k-x},$$

где

$$u_k=\begin{cases}0, & \text{если } k\neq n_j \text{ и } k\neq n_j+1\ (j=1,2,\cdots)\\ w_j, & \text{если } k=n_j \text{ и } k=n_j+1.\end{cases}$$

Ввиду того, что $\{w_k\}_1^\infty \in l^1$, этот ряд равномерно сходится в интервале $(-1, 1)$ к функции $S(x)$. Из (12) следует, что $S(x) \in \lambda_1^0\{[-1, 1], a_k\}$ и $\|S_{n_k+1}(x) - S(x)\|_1 \to 0$ при $k \to \infty$, где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{a_k - x}.$$

Теперь, если система $\{r_k(x)\}_1^\infty$ образует базис в $\lambda_1^0\{[-1, 1], a_k\}$, то числа u_k $(k = 1, 2, \cdots)$ являются коэффициентами разложения функции $S(x)$. Но из (11) имеем

$$\|S_{n_k}(x)\|_1 \geqslant w_k \left\| \frac{1}{a_{n_k} - x} \right\|_1 - \left\| \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{w_j}{a_{n_j} - x} - \frac{w_j}{a_{n_j+1} - x} \right) \right\|_1 > k$$

для любого $k > 1$. Тем самым $\|S_{n_k}(x)\|_1 \to \infty$ и теорема доказана.

Из этой теоремы и леммы 3 следует аналогичный результат для класса $\lambda_1^0\{D^{(+)}; a_k\}$.

Теорема 2′. *Если последовательность* $\{a_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* $1 - a_k = c^k$ $(0 < c < 1)$, *то система функций* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *не образует базиса в* $\lambda_1^0\{D^{(+)}, a_k\}$.

2 (а) Пусть $\{\beta_k\}_1^\infty$, $\beta_k \in D^{(-)}$, $(k = 1, 2, \cdots)$ — последовательность чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - 1/|\beta_k|) < \infty. \tag{13}$$

Обозначим через $B_\beta(z)$ соответствующее произведение Бляшке с нулями $\{1/\bar{\beta}_k\}_1^\infty$.

Лемма 4. *Пусть* $\{1/\bar{\beta}_k\}_1^\infty \in \Delta_1$. *Тогда для любой функции* $F(z) \in H_1(D^{(-)})$, $F(\infty) = 0$ *имеет место тождество*

$$F(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} F(\beta_k) \frac{|\beta_k|^2 - 1}{(\beta_k - z)\,\delta_k^*} \cdot \frac{1}{B_\beta(z)} - \frac{1}{B_\beta(z)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta)\, B_\beta(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{14}$$

при этом ряд сходится равномерно вне замыкания множества $E = \{1/\bar{\beta}_k\}_1^\infty$ *и*

$$\delta_k^* = \frac{|\beta_k|}{\beta_k} \prod_{\substack{j=1\\ j \neq k}}^{\infty} \frac{\beta_j - \beta_k}{\bar{\beta}_j \beta_k - 1} \frac{|\beta_j|}{\beta_j} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{15}$$

Доказательство. В силу теоремы Шапиро и Шилдса [13] для любой функции $F(z) \in H^p(D^{(-)})$ имеем $\{F(\beta_k)(|\beta_k|^2 - 1)\}_1^\infty \in l^1$. Поэтому равномерная сходимость ряда в (14) следует из того, что $|\delta_k^*|>\delta>0$ $(k=1, 2,\cdots)$.

Пусть теперь $F(z)$ удовлетворяет условиям леммы. Тогда $F(z)=\frac{1}{z}F_1(z)$, где $F_1(z)\in H^1(D^{(-)})$. Применяя лемму 4 работы [14] к функции $\overline{F_1(1/\bar z)}\in H_1^1(D^{(+)})$, для $z\in D^{(+)}$ будем иметь

$$z\,\overline{F_1(1/\bar z)}=-z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{F_1(\beta_k)}}{z-\frac{1}{\bar\beta_k}}\cdot\frac{1-1/|\beta_k|^2}{\bar{\tilde\delta}_k}B_\beta(z)+z\frac{B_\beta(z)}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{F_1\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)}}{B_\beta(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z},\tag{16}$$

где

$$\tilde\delta_k=\frac{\bar\beta_k}{|\beta_k|}\prod_{\substack{j\neq k\\ j=1}}^{\infty}\frac{\frac{1}{\bar\beta_j}-\frac{1}{\bar\beta_k}}{1-\frac{1}{\beta_j}\cdot\frac{1}{\bar\beta_k}}\cdot\frac{\bar\beta_j}{|\beta_j|}\quad(k=1, 2,\cdots).$$

Заменив $1/z$ на z и переходя к сопряженным величинам, из (16) получим

$$\frac{F_1(z)}{z}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_1(\beta_k)(|\beta_k|^2-1)}{\beta_k(\beta_k-z)\,\delta_k^*}\overline{B_\beta\left(\frac{1}{\bar z}\right)}-\frac{\overline{B_\beta\left(\frac{1}{\bar z}\right)}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}z\frac{F_1(\zeta)}{B_\beta\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

Теперь, если учесть, что $F(z)=1/z\,F_1(z)$, $\overline{B_\beta(1/\bar z)}=B_\beta^{-1}(z)$, то получим (14).

(б) Нам понадобится следующая

Лемма 5. *Пусть $\beta_k\in D^{(-)}$ $(k=1, 2,\cdots)$, $\{1/\beta_k\}_1^\infty\in\Delta_1$ и $\{A_k\}_1^\infty\in l^1$. Тогда функциональный ряд*

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\beta_k-z}\tag{17}$$

равномерно сходится вне замыкания множества $F=\{\beta_k\}_1^\infty$, определяя для любого p $(0<p<1)$ функцию из класса $\lambda_p\{D^{(+)};1/\bar\beta_k\}$.

Доказательство. Равномерная сходимость ряда (17) сразу следует из того, что $\{A_k\}_1^\infty\in l^1$. Так как $\{1/\beta_k\}_1^\infty\in\Delta_1$, то согласно теореме Шапиро и Шилдса [13] существует функция $F(z)\in H^1(D^{(-)})$ такая, что

$$F(\beta_k)=\frac{A_k}{|\beta_k|^2-1}\cdot\delta_k^*\quad(k=1, 2,\cdots),$$

где числа δ_k^* определяются формулами (15). Применяя лемму 4 к функции $F(z)$, будем иметь

$$F(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{B_\beta(z)} \frac{F(\beta_k)}{\beta_k - z} \cdot \frac{|\beta_k|^2 - 1}{\delta_k^*} - \frac{1}{B_\beta(z)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta)\, B_\beta(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \quad (18)$$

Обозначая теперь

$$\varphi_+(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\beta_k - z},\ z \in D^{(+)},$$

$$\varphi_-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\beta_k - z},\ z \in D^{(-)},$$

тогда из (18) получим $\varphi_-(z)/B_\beta(z) \in H^p\,(D^{(-)})(0<p<1)$, так как согласно теореме В. И. Смирнова

$$F^{(-)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{B_\beta(z)} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta)\, B_\beta(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \in H^p\,(D^{(-)})(0<p<1).$$

Рассмотрим функцию

$$F^{(+)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{B_\beta(z)} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta)\, B_\beta(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\ z \in D^{(+)}.$$

Из (18) на основании формулы Сохоцкого—Привалова следует, что радиальные предельные значения функций $F^{(+)}(z)$ и $\varphi_-(z)/B_\beta(z)$ почти всюду совпадают. Теперь, если предположить, что некоторая дуга единичной окружности не входит в $\overline{F}$, то на этой дуге будем иметь

$$\varphi_+(z) = F^{(+)}(z)\, B_\beta(z),$$

так что

$$\varphi_+(z) = F^{(+)}(z)\, B_\beta(z),\ z \in D^{(+)},$$

тем самым лемма при условии, что $\partial D^{(+)} = \{z;\ |z|=1\}$ не входит в $\overline{F}$, доказана.

Пусть теперь $\partial D^{(+)} \subset \overline{F}$. Тогда функцию $\varphi(z)$ можно представить в виде $\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$, где

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{k'}}{\beta_{k'} - z},\ \operatorname{Re} \beta_{k'} > 0$$

и

$$\varphi_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{k^*}}{\beta_{k^*} - z},\quad \operatorname{Re} \beta_{k^*} \leqslant 0.$$

Так как $\varphi_1(z) \in \lambda_p\,\{D^{(+)},\ 1/\overline{\beta}_k\}$, $\varphi_2(z) \in \lambda_p\,\{D^{(+)};\ 1/\overline{\beta}_k\}$, то $\varphi(z) \in \lambda_p\,\{D^{(+)};\ 1/\overline{\beta}_k\}$ и лемма доказана.

(г) Предположим, что $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_1$ и

$$\Omega_k(z) = \frac{B_\alpha(z)}{z - \alpha_k} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{\delta_k}\quad (k=1,\ 2, \cdots),$$

где

$$\delta_k = \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \prod_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{\infty} \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} \quad (k=1, 2, \cdots)$$

— система, биортогональная с системой $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в смысле

$$\int\limits_{|\zeta|=1} \Omega_k(\zeta) \overline{r_j(\zeta)} \, |d\zeta| = \delta_{k,j} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j. \end{cases}$$

С каждой функцией $f(z) \in \lambda_1 \{D^{(+)}, \alpha_k\}$ ассоциируем формальный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z)$, где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, \overline{\Omega_k(\zeta)}\, |d\zeta|.$$

Лемма 6. *Пусть $f(z) \in \lambda_1 \{D^{(+)}; \alpha_k\}$ и $\tilde{f}(z)$ — ассоциированная с нею функция в определении класса $\lambda_1 \{D^{(+)}; \alpha_k\}$. Тогда*

$$c_k(f) = - \frac{\tilde{f}(\bar{\alpha}_k)(1 - |\alpha_k|^2)}{\bar{\delta}_k}.$$

Действительно, так как почти всюду на $|z| = 1$

$$f(z) = B_\alpha(z) \frac{1}{z} \tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right),$$

то

$$c_k(f) = \frac{1 - |\alpha_k|^2}{\bar{\delta}_k} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_\alpha(\zeta)} \frac{|d\zeta|}{\zeta - \alpha_k} = \frac{1 - |\alpha_k|^2}{\bar{\delta}_k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\frac{1}{\zeta} \tilde{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{1 - \zeta \bar{\alpha}_k} d\zeta =$$

$$= - \frac{1 - |\alpha_k|^2}{\bar{\delta}_k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\tilde{f}(\zeta)}{\zeta - \bar{\alpha}_k} d\zeta = - \frac{1 - |\alpha_k|^2}{\bar{\delta}_k} \tilde{f}(\bar{\alpha}_k).$$

Теорема 3. *Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_1$ и $f(z) \in \lambda_1 \{D^{(+)}; \alpha_k\}$, тогда для любой функции $g(z) = g_1(z) + g_2(z)$, $g_2(z) \in H^\infty(D^{(+)})$, $g_2(z) \in H^\infty(D^{(-)})$, справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{|\zeta|=1} S_n(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta,$$

где

$$S_n(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\, r_k(z).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $1/z \tilde{f}(1/z) \in H^1(D^{(-)})$. Так как при $z \in D^{(-)}$

$$\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta} \bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right) B_\alpha(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

то из леммы 4 (здесь $\beta_k = 1/\bar{\alpha}_k$) следует равенство

$$\frac{1}{z}\tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\bar{\alpha}_k)}{1 - \bar{\alpha}_k z} \cdot \frac{1 - |\alpha_k|^2}{\delta_k} \cdot \frac{1}{B_\alpha(z)}.$$

Если обозначить

$$f_-(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\bar{\alpha}_k)(1 - |\alpha_k|^2)}{(1 - z\bar{\alpha}_k)\,\delta_k} \cdot \frac{1}{B_\alpha(z)}, \quad z \in D^{(-)},$$

то будем иметь $f_1(z) \in H^1(D^{(-)})$ и $f_-(e^{i\theta}) \in L^1$. Учитывая затем лемму 5 и определение класса $\lambda_1\{D^{(+)}; \alpha_k\}$, получим

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\bar{\alpha}_k)(1 - |\alpha_k|^2)}{(1 - z\bar{\alpha}_k)\,\delta_k}. \tag{19}$$

Но так как для любой функции $g_2(z) \in H^\infty(D^{(-)})$ существует конечный предел

$$\lim \int\limits_{|\zeta|=1} S_n(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\bar{\alpha}_k)(1 - |\alpha_k|^2) \frac{g_2(1/\alpha_k)}{\bar{\delta}_k} \tag{20}$$

(ряд, стоящий в правой части (20), сходится), то применяя теорему В. П. Хавина [9], заключаем, что существует функция $f_1(z) \in L^1$, для которой выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{|\zeta|=1} S_n(\zeta)\, g_2(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{|\zeta|=1} f_1(\zeta)\, g_2(\zeta)\, d\zeta \tag{21}$$

для любой функции $g_2(\zeta) \in H^\infty(D^{(-)})$. Но если взять $g_2(\zeta) = 1/(\zeta - z)$, $z \in D^{(+)}$, то из (19) получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D^{(+)}$$

или

$$f_1(\zeta) = f(\zeta) + f_2(\zeta), \text{ где } f_2(\zeta) \in H_1(D^{(-)}),\ f_2(\infty) = 0.$$

Наконец, так как

$$\int\limits_{|\zeta|=1} f_1(\zeta)\, g_2(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, g_2(\zeta)\, d\zeta,$$

то теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19.I.1978

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Հարդիի H^1 դասի որոշ ենթադասերի ֆունկցիաների ըստ ռացիոնալ կոտորակների սիստեմի վերլուծության մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ կետերի հաջորդականություն է միավոր շրջանից։ Ինչպես հայտնի է, որպեսզի $r_k(z) = 1/1 - z\bar{\alpha}_k$, $k=1, 2, \dots$ սիստեմը H_p $(1<p<\infty)$-ում իր գծային թաղանթի մեջ կազմի բազիս, անհրաժեշտ է և բավարար, որ հաջորդականությունը բավարարի Կառլեսոնի պայմանին։

Հոդվածում ուսումնասիրվում է H^1 տարածության դեպքը։ Ցույց է տրվում, որ Կառլեսոնի պայմանը բավարար չէ $p=1$ դեպքում։ Բերվում է նաև մի թեորեմ $\lambda_1\{\alpha_k\}$ դասի ֆունկցիաները $\{r_k(z)\}_1^\infty$ սիստեմով վերլուծությունների մասին։

H. M. HAIRAPETIAN. *About representation by the system of rational functions for some subclasses of class H^1 of Hardy* (summary)

Let $\{\alpha_\nu\}_1^\infty$ is the sequence of points from unit disk. Well known Carl esons condition on the $\{\alpha_k\}_1^\infty$ sequences is necessary and sufficient for a system of function $r_k(z) = 1/1 - z\bar{\alpha}_k)$ to form a basis in their linear hulle with respect to the metric of H^p $(1 < p < \infty)$.

In the paper an analogues question for H^1 is investigated. It is proved that the Carleson condition is not sufficient in this case $(p=1)$. Also a theorem about, representation by system for functions from the class $\lambda_1\{\alpha_k\}$ is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
2. *Г. Ц. Тумаркин*. Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 4, № 1, 1969, 9—31.
3. *М. М. Джрбашян*. Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, 143, № 1, 1962, 17—20.
4. *L. Carleson*. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem Ann. of Math., 76; 1962, 547—559.
5. *Э. Кацнельсон*. Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов, Функц. анализ и его прил., 1, вып. 2, 1967, 39—54.
6. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов*. Базисы из собственных векторов вполне неунитарных сжатий и характеристическая функция, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 1, 1970, 90—133.
7. *Г. М. Айрапетян*. О базисе рациональных функций в подпространствах классов Харди $H_p(1 < p < \infty)$. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 429—450.
8. *С. А. Виноградов*. Базисы из показательных функций и свободная интерполяция в банаховых пространствах с L^p-нормой, Труды ЛОМИ, т. 65, VII, 1976, 17—68.
9. *В. П. Хавин*. Пространства H^∞ и L^1/H^1_0. Записки научных сем. ЛОМИ, т. 39 1974, 120—161.
10. *С. А. Виноградов, В. П. Хавин*. Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций, Записки научных сем. ЛОМИ, т. 47, 1974, 15—44.

11. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.

12. *P. L. Duren*. Theory of H^p spaces, *NY* — London Academic Press., 1970.

13. *H. S. Shapiro, A. L. Shilds*. On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., vol. 83, 1961, 513—532.

14. *Г. М. Айрапетян*. Об интерполяции в подклассах H^1 и H^∞ и некоторые вопросы, связанные с интегралом Коши, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XIII, №№ 5—6, 1978, 448—459.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 1, 1980 Математика

М. Ж. ГРИГОРЯН

О СХОДИМОСТИ В МЕТРИКЕ L_p, $0>p>1$, ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Как известно, до сих пор остается нерешенной следующая задача:

Сходится ли в метрике L_p; $0<p<1$ или хотя бы по мере двойной ряд Фурье любой суммируемой функции (см. [1], стр. 34)3 В связи с этим в настоящей работе рассматривается вопрос о сходимости двойных рядов Фурье суммируемых функций $f(x; y)$ в зависимости от изменения их значений на множествах сколь угодно малой меры. При этом требуется, чтобы значения функций $f(x; y)$ сохранялись на одном и том же не зависящем от функции множестве.

Идея улучшения сходимости ряда Фурье путем изменения разлагаемой функции на множествах малой меры принадлежит Д. Е. Меньшову. Он рассматривал этот вопрос в двух постановках:

1) когда значения функций изменяются вне заданного совершенного нигде не плотного множества;

2) когда значения функции $f(x)$ изменяются на зависящем от функции множестве сколь угодно малой меры.

В соответствии с этими постановками им были установлены следующие теоремы (см. [3], стр. 448—471).

Теорема I. (Д. Е. Меньшов). *Пусть $f(x)$—любая суммируемая на $[0; 2\pi]$ функция и Q—любое совершенное нигде не плотное множество на $[0; 2\pi]$. Можно найти такую суммируемую функцию $g(x)$, что*

$$g(x)=f(x) \text{ на } Q$$

и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду.

Теорема II. (Д. Е. Меньшов). *Пусть $f(x)$—измеримая функция, конечная почти всюду на $[0; 2\pi]$: каково бы ни было $\varepsilon>0$ можно построить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E, $\operatorname{mes} E>2\pi-\varepsilon$ и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0; 2\pi]$.*

В работах [3] и [4] отмечено, что теорема II в той же формулировке переносится на двойные тригонометрические ряды как в случае сходимости по Прингсгейму [3], так и при требовании сходимости сферических частных сумм [4].

Неизвестно, верен ли аналог теоремы I для двойных рядов при каком-нибудь понятии их сходимости (почти всюду, по Прингсхейму, по сферам или же по квадратам). Тем не менее, рассматривая аналогичный вопрос при требовании сходимости в метрике L_p, $0<p<1$ двойного ряда и используя некоторые элементы конструкции Меньшова, примененной им при доказательстве теоремы I, можно установить следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* Q_i; $Q_i \subset [0;\ 2\pi]$, $i = 1, 2$, *совершенные, нигде не плотные множества и* N_0 *натуральное число. Тогда для любой суммируемой на* $T = [0;\ 2\pi] \times [0;\ 2\pi]$ *функции* $f(x;\ y)$ *можно определить суммируемую на* T *функцию* $F(x;\ y)$ *такую, что*

1) $F(x;\ y) = f(x;\ y)$ на Q, $Q = Q_1 \times Q_2$;

2) *двойной ряд Фурье функции* $F(x;\ y)$ *сходится к ней по Прингсхейму в метрике* L_p; $0 < p < 1$, *т. е.*

$$\lim_{n, m \to \infty} \iint_T |S_{n_m}[F] - F(x;\ y)|^p\, dxdy = 0;\ 0 < p < 1,$$

где

$$S_{n_m}[F] = \sum_{k=0,\, l=0}^{n,\, m} \lambda_{kl} (a_{kl} \cos kx \cdot \cos ly + b_{kl} \sin kx \cdot \cos ly +$$

$$+ c_{kl} \cos kx \cdot \sin ly + d_{kl} \sin kx \cdot \sin ly),$$

$$\lambda_{kl} = \begin{cases} 1/4 \ \textit{при}\ k = l = 0 \\ 1/2 \ \textit{при}\ k = 0;\ l > 0 \text{ или } k > 0,\ l = 0 \\ 1 \quad \textit{при}\ k > 0;\ l > 0 \end{cases}$$

$$a_{kl} = \frac{1}{\pi^2} \iint_T F(x;\ y) \cos kx \cos bydxdy,$$

$$b_{kl} = \frac{1}{\pi^2} \iint_T F(x;\ y) \sin kx \cdot \cos lydx \cdot dy, \qquad (1.1)$$

$$c_{kl} = \frac{1}{\pi^2} \iint_T F(x;\ y) \cos kx \cdot \sin lydxdy,$$

$$d_{kl} = \frac{1}{\pi^2} \iint_T F(x;\ y) \sin kx \sin lydxdy;$$

3) $a_{kl} = b_{kl} = c_{kl} = d_{kl} = 0$ *при* $\min(k;\ l) < N_0$.

Теорема 2. *Пусть* $f(x;\ y)$—*любая суммируемая функция и* $Q \subset T$ — *любое совершенное нигде не плотное множество. Тогда можно определить суммируемую функцию* $F(x;\ y)$ *такую, что*

1) $F(x;\ y) = f(x;\ y)$ *на* Q;

2) *двойной ряд Фурье функции* $F(x;\ y)$ *сходится к ней по квадратам в метрике* L_p, $0 < p < 1$, *т. е.*

$$\lim_{n \to \infty} \iint_T |S_{n_n}[F] - F(x;\ y)|^p\, dxdy = 0,\ 0 < p < 1.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими свойствами частных сумм (см. [2], стр. 595 и [5], стр. 455)

$$\int_0^{2\pi} |S_n[g]|^p\, dx \leqslant B(p) \left[\int_0^{2\pi} |g(x)|\, dx \right]^p; \; 0 < p < 1; \; g(x) \in L_1[0; 2\pi],$$

$$n = 1, 2, \cdots, \tag{1.2}$$

где $B(p)$ зависит только от p.

Если $F(x; y) = f(x) \cdot g(y)$, где $f(x);\ g(y) \in L_1[0; 2\pi]$, то частную сумму

$$S_{nm}[F] = \frac{1}{4\pi^2} \iint_T F(t; \tau) \cdot \frac{\sin(n+1/2)(t-x)}{\sin 1/2\,(t-x)} \cdot \frac{\sin(m+1/2)(\tau-y)}{\sin 1/2\,(\tau-y)}\, dt d\tau$$

можно записать в виде

$$S_{nm}[F] = S_n(f) \cdot S_m(g). \tag{1.3}$$

§ 2. Доказательство основных лемм

Для краткости обозначим тригонометрическую систему

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \cdots \text{ через } \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}.$$

Лемма 1. *Пусть даны отрезок* $[c; d] \subset [0; 2\pi]$, *совершенное нигде не плотное множество* $Q \subset [0; 2\pi]$, *действительное число* $\gamma \neq 0$ *и натуральное число* N. *Тогда существует ограниченная функция* $\varphi(x)$ *такая, что*

а) $$\varphi(x) = \begin{cases} \gamma & \text{при } x \in Q \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} [c; d], \end{cases}$$

б) $$\int_0^{2\pi} \varphi(x) \cdot \varphi_k(x)\, dx = 0 \quad k \leqslant N,$$

в) $$\int_c^d |\varphi(x)|\, dx < 3\,|\gamma|\,(d-c).$$

Доказательство. Обозначим через $D[CQ; \varphi_1, \cdots, \varphi_N]$ определитель Грамма на множестве $CQ = [c; d] \setminus Q$ системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$, т. е.

$$D[CQ; \varphi_1, \cdots, \varphi_N] = \|\alpha_{kl}\|, \text{ где } \alpha_{kl} = \int_{CQ} \varphi_k(x) \cdot \varphi_l(x)\, dx. \tag{2.1}$$

Так как функции $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)$ линейно независимы на CQ, то (см. [6], стр. 77)

$$D[CQ; \varphi_1, \cdots, \varphi_N] > 0. \tag{2.2}$$

Возьмем натуральное число m настолько большим, чтобы

$$\frac{2(d-c)}{m} < \frac{D[CQ; \varphi_1, \cdots, \varphi_N]}{(2\pi)^{N+1}\cdot(N+2)!}. \tag{2.3}$$

Пусть

$$c_s = c + s\cdot\frac{d-c}{m}, \quad s = 0, 1, \cdots, m. \tag{2.4}$$

Так как Q — совершенное нигде не плотное множество, то как легко видеть (см. [2], стр. 460) можно найти интервалы $\{\delta_k\}_{k=1}^{m}$ одинаковой длины $|\delta_k| = \delta$, $k=1, \cdots, m$ такие, что

$$\delta_k \subset [c_{k-1}; c_k], \; k=1, \cdots, m \quad \text{и} \quad Q \cap \bigcup_{k=1}^{m} \delta_k = \varnothing. \tag{2.5}$$

Определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \gamma & \text{при} \quad x \in [c; d] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} \delta_k \\ \gamma\left(1 - \dfrac{d-c}{m\cdot\delta}\right) & \text{при} \quad x \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} \delta_k \\ 0 & \text{вне} \quad [c; d]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in Q \\ f(x) - \sum\limits_{k=1}^{N} \beta_k\cdot\varphi_k(x) & \text{при} \quad x \in CQ = [c; d] \setminus Q \\ 0 & \text{вне} \quad [c; d] \end{cases} \tag{2.7}$$

и покажем, что константы β_k можно подобрать так, чтобы $\varphi(x)$ была ортогональна ко всем $\varphi_k(x)$; $k=1, \cdots, N$. Действительно, это равносильно равенствам

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\varphi_k\,dx = 0, \quad k = 1, \cdots, N \tag{2.8}$$

или

$$\int_Q f(x)\varphi_k(x)\,dx + \int_{CQ}\left[f(x) - \sum_{l=1}^{N}\beta_l\varphi_l(x)\right]\varphi_k(x)\,dx = 0, \quad k = 1, \cdots, N, \tag{2.9}$$

$$\sum_{l=1}^{N}\beta_l\cdot\int_{CQ}\varphi_l(x)\cdot\varphi_k(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot\varphi_k(x)\,dx, \quad k = 1, \cdots, N. \tag{2.10}$$

В силу (2.2) и (2.10) имеем

$$\beta_l = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1l-1} & \varepsilon_1 & \alpha_{1l+1} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{N1} & \cdots & \alpha_{Nl-1} & \varepsilon_N & \alpha_{Nl+1} & \cdots & \alpha_{NN} \end{vmatrix}}{D[CQ;\ \varphi_1 - \varphi_N]}, \quad l = 1, \cdots, N, \tag{2.11}$$

где

$$\varepsilon_k = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \int\limits_c^d f(x)\,\varphi_k(x)\,dx, \quad k = 1, \cdots, N. \tag{2.12}$$

Определенная равенствами (2.6) и (2.7) функция $\varphi(x)$ ограничена и очевидно удовлетворяет условиям а) и б) леммы 1. Остается проверить выполнение условия в).

Заметим, что

$$|\varepsilon_k| < \frac{|\gamma|}{(2\pi)^N \cdot (N+1)!} D[CQ\cdot \varphi_1, \cdots, \varphi_N], \ k = 1, \cdots, N. \tag{2.13}$$

В самом деле, из (2.4), (2.6) имеем

$$\int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx = 0, \ k = 1, \cdots, m. \tag{2.14}$$

Если $c < t \leqslant d$, то $c_{k_0} < t \leqslant c_{k_0+1}$ для некоторого $0 < k_0 \leqslant m-1$. Из (2.6) и (2.14) следует

$$\left|\int\limits_c^t f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{k_0} \int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx\right| + \int\limits_{c_{k_0}}^t |f(x)|\,dx < 2\,|\gamma|\,\frac{d-c}{m}, \tag{2.15}$$

откуда, учитывая (2.3), получаем

$$\left|\int\limits_c^t f(x)\,dx\right| < \frac{|\gamma|\cdot D[CQ;\varphi_1,\cdots,\varphi_N]}{(2\pi)^{N+1}\cdot(N+2)!}, \quad t \in [c;\ d]. \tag{2.16}$$

Из (2.16) и из того, что

$$\int\limits_{[c;\,d]} f(x)\,dx = 0 \ \text{и} \ |\varphi_k'(x)| \leqslant N$$

при $k \leqslant N$ интегрированием по частям получим

$$|\varepsilon_k| = \left|\int\limits_c^d f(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right| \leqslant k\ 2\pi\cdot\max_{c<t<d}\left|\int\limits_c^t f(x)\,dx\right| < \frac{|\gamma|\cdot D[CQ;\varphi_1,\cdots,\varphi_N]}{(2\pi)^N\ (N+1)!}. \tag{2.17}$$

С другой стороны, согласно (2.6) и (2.7) имеем

$$\int_c^d |\varphi(x)|\,dx \leqslant \int_c^d |f(x)|\,dx + \int_c^d \left|\sum_{k=1}^{N} \beta_k \varphi_k(x)\right| dx \leqslant 2\,|\gamma|\,(d-c) + (d-c)\cdot \sum_{k=1}^{N} |\beta_k|. \tag{2.18}$$

Из (2.11) и из того, что $|z_{kl}| \leqslant 2\pi$ следует, чт о

$$\beta_k \leqslant \frac{(2\pi)^N \cdot N! \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} |z_k|}{D[CQ; \varphi_1, \cdots, \varphi_N]}, \quad k = 1, \cdots, N. \tag{2.19}$$

Учитывая (2.17), (2.18) и (2.19) п олучаем

$$\int_c^d |\varphi(x)|\,dx < 3\,|\gamma|\,(d-c). \tag{2.20}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть даны квадрат* $\Delta = [a;\, b] \times [c;\, d] \subset T$, *совершенное нигде не плотное множество* $Q \subset \Delta$, *натуральное число* N, *действительное число* $\gamma \neq 0$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует ограниченная функция* $\varphi\,(x;\, y)$, *такая, что*

A) $$\varphi(x;\, y) = \begin{cases} \gamma & \text{при } (x;\, y) \in Q \\ 0 & \text{при } (x;\, y) \overline{\in} \Delta, \end{cases}$$

B) $$\iint_\Delta |\varphi(x;\, y)|\,dxdy \leqslant 2\,|\gamma| \cdot |\Delta|,$$

C) $$|S_{n_n}[\varphi]| \leqslant \varepsilon, \quad n < N \ (x;\, y) \in T,$$

D) $$\iint |S_{nn}[\varphi]|^p\,dxdy \leqslant A\,(p)\,[\gamma| \cdot |\Delta|]^p, \quad 0 < p < 1; \ n = 1, 2, \cdots,$$

(*где* $A\,(p)$ *зависит только от* p).

Доказательство. Возьмем натуральное число m настолько большим, чтобы

$$|\gamma| \cdot \frac{|\Delta|}{m} < \frac{\varepsilon}{16 \cdot N}\,. \tag{2.21}$$

Пусть

$$c_s = c + s \cdot \frac{d-c}{m}; \quad a_s = a + s \cdot \frac{b-a}{m}, \quad s = 0, 1, \cdots, m. \tag{2.22}$$

Поскольку Q — совершенное нигде не плотное множество, то, как легко видеть, существуют интервалы $\delta_k^{(1)} \subset [a_{k-1};\, a_k]$ и $\delta_k^{(2)} \subset [c_{k-1};\, c_k]$, $k = 1, \cdots, m$ одинаковой длины $|\delta_k^{(i)}| = \delta$, $i = 1, 2$, $k = 1, \cdots, m$ такие, что

$$Q \cap \bigcup_{k,\,l=1}^{m} \delta_{kl} = \varnothing, \text{ где } \delta_{kl} = \delta_k^{(1)} \times \delta_l^{(2)}: \; k, \; l = 1, \cdots, m. \tag{2.23}$$

Обозначим через

$$\Delta_{kl} = [a_{k-1};\; a_k] \times [c_{l-1};\; c_l], \; k, \; l = 1, \cdots, m. \tag{2.24}$$

Положим

$$\varphi(x;\, y) = \begin{cases} \gamma & \text{при} \quad (x;\, y) \in \Delta \setminus \bigcup\limits_{k,\,l=1}^{m} \delta_{kl} \\ \gamma\left(1 - \dfrac{|\Delta|}{m^2 \cdot \delta^2}\right) & (x;\, y) \in \bigcup\limits_{k,\,l=1}^{m} \delta_{kl} \\ 0 & \text{вне} \quad \Delta. \end{cases} \tag{2.25}$$

Определенная равенством (2.25) функция $\varphi(x;\, y)$ удовлетворяет условию А) леммы 2. Из (2.24) и (2.25) следует

$$\iint\limits_{\Delta} |\varphi(x;\, y)|\, dxdy = \sum_{k,\,l=1}^{m} \iint\limits_{\Delta_{kl}} |\varphi(x;\, y)|\, dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k;\,l=1}^{m} \left[|\gamma|\, |\Delta_{kl}| + |\gamma| \frac{|\Delta|}{m^2 \delta^2} \delta^2 \right] = 2\, |\gamma|\, |\Delta| \tag{2.26}$$

и, следовательно, условие В) тоже выполнено. Чтобы доказать утверждение C заметим, что для любой ограниченной функции $\varphi(x;\, y)$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^{2\pi}\!\! \int_0^{2\pi} \varphi(t;\, \tau) \cdot f_1(t) \cdot f_2(\tau)\, dt d\tau \right| \leqslant (4\pi \cdot N)^2 \cdot \max_{0 < t,\, \tau < 2\pi} \left| \int_0^{t}\!\! \int_0^{\tau} \varphi(x;\, y)\, dxdy \right|, \tag{2.27}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(\tau)$ — дифференцируемые функции со следующими свойствами:

$$|f_k(x)| \leqslant 1, \; |f_k'(x)| < N, \; k = 1, 2, \; N > 1. \tag{2.28}$$

В самом деле, используя теорему Фубини и интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{2\pi}\!\! \int_0^{2\pi} \varphi(t;\, \tau) \cdot f_1(t) \cdot f_2(\tau)\, dt d\tau = \int_0^{2\pi} f_2(\tau) \left[\int_0^{2\pi} f_1(t)\, d\left(\int_0^{t} \varphi(x;\, \tau)\, dx \right) \right] d\tau =$$

$$= \int_0^{2\pi} f_2(\tau) \left[f_1(t) \cdot \int_0^{t} \varphi(x;\, \tau)\, dx \Big|_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t} \varphi(x;\, \tau)\, dx \right) \cdot f_1'(t)\, dt \right] d\tau =$$

$$= f_1(2\pi) \cdot \int_0^{2\pi} f_2(\tau) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \varphi(x;\, \tau)\, dx \right) d\tau - \int_0^{2\pi} f_1'(t) \times$$

$$\times\left[f_2(\tau)\cdot\left(\int_0^t \varphi(x;\tau)\,dx\right)d\tau\right]dt = f_1(2\pi)\times$$

$$\times\left[f_2(\tau)\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\,\Big|_{\tau=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f_2'(\tau)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\right)d\tau\right] -$$

$$-\int_0^{2\pi} f_1'(t)\left[f_2(\tau)\cdot\int_0^{t}\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\,\Big|_{\tau=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f_2'(\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^t\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\right)d\tau\right]dt. \tag{2.29}$$

Откуда, учитывая (2.28), получаем (2.27). Из (2.27) и (1.1) при $k, l < N$ находим

$$|a_{kl}| + |b_{kl}| + |c_{kl}| + |d_{kl}| < 4\cdot N^2\cdot \max_{0<t;\ \tau<2\pi}\left|\int_0^t\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\right|. \tag{2.30}$$

Теперь докажем, что

$$\left|\int_0^t\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\right| < \frac{\varepsilon}{4\cdot N^4} \quad \text{для всех } 0<t,\ \tau\leqslant 2\pi. \tag{2.31}$$

Действительно, из (2.24) и (2.25) вытекает

$$\iint_{\Delta_{kl}}\varphi(x;y)\,dxdy = 0 \quad \text{для всех } 1\leqslant k,\ l\leqslant m. \tag{2.32}$$

Пусть $(t;\tau)\in\Delta$. Тогда для некоторых k_0 и l_0 имеем $a_{k_0} < t \leqslant a_{k_0+1}$, $c_{l_0} < \tau \leqslant c_{l_0+1}$. Отсюда и из (2.32), (2.25) получаем

$$\left|\int_0^t\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\right| \leqslant \sum_{k;\ l=1}^{k_0;\ l_0}\left|\iint_{\Delta_{kl}}\varphi(x;y)\,dxdy\right| + \int_a^b\int_{c_{l_0}}^{\tau}|\varphi(x;y)|\,dxdy +$$

$$+\int_{a_{k_0}}^t\int_0^d|\varphi(x;y)|\,dxdy \leqslant 2\left[|\gamma|\frac{|\Delta|}{m} + |\gamma|\frac{|\Delta|}{m^2\delta^2}\cdot m\cdot\delta^2\right] =$$

$$= 4|\gamma|\cdot\frac{|\Delta|}{m} < \frac{\varepsilon}{4\cdot N^4}. \tag{2.33}$$

Аналогично можно доказать неравенство (2.31) при $(t;\tau)\notin\Delta$. Учитывая (2.30) и (2.31), получаем

$$|S_{nn}[\varphi]| < \varepsilon \text{ при } n < N, \ (x; y) \in T \tag{2.34}$$

и утверждение C) доказано.

Остается доказать выполнение утверждения D).

Положим

$$E_1 = \bigcup_{k=1}^{m} \delta_k^{(1)}; \ E_2 = \bigcup_{k=1}^{m} \delta_k^{(2)} \text{ и } E = E_1 \times E_2. \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x; y) &= \gamma \cdot \chi_\Delta(x; y) - \frac{\gamma \cdot |\Delta|}{m^2 \cdot \delta^2} \cdot \chi_E(x; y) = \\ &= \operatorname{sgn} \gamma \cdot |\gamma|^{1/2} \cdot \chi_{[a;\, b]}(x) \cdot |\gamma|^{1/2} \cdot \chi_{[c;\, d]}(y) - \\ &- \operatorname{sgn} \gamma \cdot \frac{(|\gamma|\, |\Delta|)^{1/2}}{m \cdot \delta} \chi_{E_1}(x) \cdot \frac{(|\gamma| \cdot |\Delta|)^{1/2}}{m \cdot \delta} \chi_{E_2}(y). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Таким образом, $\varphi(x; y)$ представляется в виде

$$\varphi(x; y) = \alpha_1(x) \cdot \alpha_2(y) - \alpha_3(x) \cdot \alpha_4(y) \tag{2.37}$$

где, как легко видеть

$$\int_0^{2\pi} |\alpha_k(t)|\, dt < (|\gamma|\, |\Delta|)^{1/2}. \tag{2.38}$$

В силу (1.2), (2.36), (2.37) и (2.38) имеем

$$\iint_T S_{nn}[\varphi]|^p\, dxdy \leqslant 2\,[B(p)]^2 \cdot [|\gamma| \cdot |\Delta|]^p, \ 0 < p < 1; \ n = 1, 2, \cdots. \tag{2.39}$$

Лемма 2 доказана.

§ 3. Доказательство теорем

Пусть $f(x; y)$ — заданная суммируемая функция. Как легко видеть, можно определить последовательность функций $f_q(x; y)$, $q = 1, 2, \cdots$, каждая из которых принимает постоянные значения на квадратах, полученных разбиением квадрата T на конечное число частей, обладающую следующими свойствами:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_T \left| f(x, y) - \sum_{q=1}^{n} f_q(x; y) \right| dxdy = 0, \tag{3.1}$$

$$\iint_T |f_q(x; y)|\, dxdy < \frac{1}{2^q}, \ q = 2, 3, \cdots. \tag{3.2}$$

Для выбранной последовательности $f_q(x; y)$ определяются возрастающая последовательность натуральных чисел $\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty}$, квадраты $\Delta_k \subset T$, числа γ_k такие, что

$$f_q(x;\ y)=\gamma_k \text{ при } (x;\ y)\in\Delta_k\ \ \nu_{q-1}<k\leqslant\nu_q, \tag{3.3}$$

где

$$\bigcup_{k=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q}\Delta_k=T \text{ и } \Delta_k\cap\Delta_{k'}=\varnothing,\ k\neq k';\ \nu_{q-1}<k;\ k'\leqslant\nu_q. \tag{3.4}$$

Сначала докажем теорему 1. Обозначим через $[a_k^{(1)};\ b_k^{(1)}]$ и $[a_k^{(2)};\ b_k^{(2)}]$ (при фиксированном k) проекции квадрата Δ_k на координатные оси, т. е.

$$\Delta_k=[a_k^{(1)};\ b_k^{(1)}]\times[a_k^{(2)};\ b_k^{(2)}] \tag{3.5}$$

и положим

$$l_k^{(1)}=|\gamma_k|^{1/2},\quad l_k^{(2)}=\operatorname{sgn}\gamma_k\,|\gamma_k|^{1/2}, \tag{3.6}$$

$$Q_k^{(1)}=Q_1\cap[a_k^{(1)};\ b_k^{(1)}];\ Q_k^{(2)}=Q_2\cap[a_k^{(2)};\ b_k^{(2)}], \tag{3.7}$$

где Q_1 и Q_2 — множества, входящие в формулировку теоремы 1.

Применим лемму 1, полагая в ее формулировке

$$[c;\ d]=[a_k^{(i)};\ b_k^{(i)}];\quad Q=Q_k^{(i)};\quad \gamma=l_k^{(i)};\ N=N_k, \text{ где } i=1 \text{ или } 2.$$

Возрастающая последовательность натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет определена позже.

Определим ограниченную функцию $\varphi_k^{(i)}(t)$, удовлетворяющую

$$\varphi_k^{(i)}(t)=\begin{cases} l_k^{(i)} \text{ при } t\in Q_k^{(i)}\\ 0 \quad \text{при } t\,\overline{\in}\,[a_k^{(i)};\ b_k^{(i)}],\end{cases} \tag{3.8}$$

$$\int_0^{2\pi}\varphi_k^{(i)}(t)\,\varphi_n(t)\,dt=0 \text{ при } n\leqslant N_k, \tag{3.9}$$

$$\int_{a_k^{(i)}}^{b_k^{(i)}}|\varphi_k^{(i)}(t)|\,dt\leqslant 3\,|l_k^{(i)}|\,(b_k^{(i)}-a_k^{(i)})=3\,(|\gamma_k|\,|\Delta_k|)^{1/2}. \tag{3.10}$$

Положим

$$\psi_k(x;\ y)=\varphi_k^{(1)}(x)\cdot\varphi_k^{(2)}(y), \tag{3.11}$$

$$Q_k=Q_k^{(1)}\times Q_k^{(2)}. \tag{3.12}$$

Очевидно (см. 3.6) и (3.8))

$$\psi_k(x;\ y)=\begin{cases}\gamma_k \text{ при } (x;\ y)\in Q_k\\ 0 \text{ при } (x;\ y)\,\overline{\in}\,\Delta_k.\end{cases} \tag{3.13}$$

Согласно (3.10) и (3.11) имеет место неравенство

$$\iint_{\Delta_k}|\psi_k(x;\ y)|\,dxdy\leqslant 9\,|\gamma_k|\cdot|\Delta_k|. \tag{3.14}$$

Из (3.2), (3.3), (3.4) и (3.14) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty}\iint_T|\psi_k(x;y)|\,dxdy=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q}\iint_{\Delta_k}|\psi_k(x;y)|\,dxdy<\infty. \tag{3.15}$$

Положим

$$F(x;y)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x;y). \tag{3.16}$$

Функция $F(x;y)$ суммируема.

Из (3.13) вытекает, что

$$F(x;y)=f(x;y)\ \text{при}\ (x;y)\in Q=Q_1\times Q_2. \tag{3.17}$$

При этом отметим, что соотношения (3.15), (3.16) и (3.17) имеют место независимо от выбора последовательности $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$. Теперь покажем, что при подходящем выборе последовательности $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующая функция $F(x;y)$, будет удовлетворять также требованиям 2) и 3) теоремы 1.

Заметим, что $\psi_k(x;y)\in L_2(T)$ для любого k и поэтому

$$\lim_{n,m\to\infty}\iint_T\left|S_{nm}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l\right]-\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l(x;y)\right|^p dxdy=0,\ 0<p<1. \tag{3.18}$$

Полагая $N_1=2(N_0+1)$ и допуская, что определены числа $N_1<N_2<<\cdots<N_{k-1}$ и функции $\psi_1,\cdots,\psi_{k-1}$, выберем $N_k>N_{k-1}$ таким образом, чтобы

$$\iint_T\left|S_{nm}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l\right]-\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l(x;y)\right|^p dxdy<\frac{1}{k}\ \text{при}\ n,\ m>N_k. \tag{3.19}$$

Тем самым возрастающая последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ определена. Из (3.15) и (3.16) следует, что

$$S_{nm}[F]=\sum_{k=1}^{\infty}S_{nm}[\psi_k], \tag{3.20}$$

причем ряд сходится равномерно.

Покажем, что

$$\lim_{n,\,m\to\infty}\iint_T|S_{nm}[F]-F(x,y)|^p\,dxdy=0,\ 0<p<1. \tag{3.21}$$

Пусть $0<p<1$ и $\varepsilon>0$ — произвольное положительное число. Возьмем k_0 настолько большим, чтобы

$$\iint_T\left|\sum_{l=s}^{\infty}\psi_l(x;y)\right|^p dxdy<\frac{\varepsilon}{3},\ s>k_0, \tag{3.22}$$

$$\max\left[\frac{9\,[B(p)]^2}{2^{q_0\cdot p}};\ \frac{1}{k_0}\right]<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.23}$$

где $B(p)$ константа неравенства (1.2) и число q_0 определено неравенством

$$\nu_{q_0-1}<k_0\leqslant\nu_{q_0}. \tag{3.24}$$

Возьмем n и m настолько большими, чтобы

$$k=\min(i;\ j)>k_0, \tag{3.25}$$

где i и j определяются из условий

$$N_i<n\leqslant N_{i+1},\ N_j<m\leqslant N_{j+1}. \tag{3.26}$$

Из (3.16) и (3.20) следует, что

$$\iint\limits_T|S_{nm}[F]-F(x;y)|^p\,dxdy\leqslant\iint\limits_T\left|S_{nm}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l\right]-\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l(x;y)\right|^p dxdy+$$

$$+\iint\limits_T\left|\sum_{l=k}^{\infty}\psi_l\right|^p dxdy+\iint\limits_T\left|\sum_{l=k+1}^{\infty}S_{nm}[\psi_l]\right|^p dxdy+\iint\limits_T|S_{nm}[\psi_k]|^p=$$

$$=J_1+J_2+J_3+J_4. \tag{3.27}$$

Из (3.19), (3.22), (3.23), (3.25), (3.26) вытекает

$$J_1<\frac{1}{k}<\frac{1}{k_0}<\frac{\varepsilon}{3},\quad J_2<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.28}$$

В силу (3.9), (3.11), (3.25) и (3.26) получаем

$$S_{nm}[\psi_l]=S_n(\varphi_l^{(1)})\cdot S_m(\varphi_l^{(2)})\ \text{при}\ l\geqslant k+1, \tag{3.29}$$

так как $\min(n;\ m)\leqslant N_{k+1}$.

Следовательно

$$J_3=0. \tag{3.30}$$

Теперь оценим J_4.

Из (1.2) и (3.11) следует, что

$$\iint\limits_T|S_{nm}[\psi_k]|^p\,dxdy=\int_0^{2\pi}|S_n(\varphi_k^{(1)})|^p\,dx\cdot\int_0^{2\pi}|S_m(\varphi_k^{(2)})|^p\,dy\leqslant(B(p))^2\times$$

$$\times\left(\iint\limits_T|\psi_k|\,dxdy\right)^p. \tag{3.31}$$

Пусть $\nu_{q-1}<k<\nu_q$, так как $k>k_0$, то из (3.14) и (3.31) имеем

$$J_4\leqslant(B(p))^2\left(\iint\limits_T|\psi_k|\,dxdy\right)^p\leqslant 9\,(B(p))^2\left(\iint\limits_T|f_q(x;y)|\right)^p<$$

$$<\frac{9\,(B(p))^2}{2^{q\cdot p}}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.32}$$

Учитывая (3.27), (3.28), (3.30) и (3.32), получаем

$$\iint_T |S_{nm}[F] - F(x;\ y)|^p\, dxdy = 0 \text{ при } n,\ m > N_k. \tag{3.33}$$

Выполнение утверждения 2) теоремы 1 доказано.

Если $\min(k;\ l) \leqslant N_1$, то из (3.9) и (3.11) следует, что

$$\iint_T \psi_i(x;\ y)\cdot\varphi_k(x)\cdot\varphi_l(y)\, dxdy = 0 \text{ для всех } i = 1,\ 2, \cdots. \tag{3.34}$$

С другой стороны

$$\iint_T F(x;\ y)\,\varphi_k(x)\,\varphi_l(y)\, dxdy = \sum_{s=1}^{\infty} \iint_T \psi_s(x;\ y)\cdot\varphi_k(x)\cdot\varphi_l(y)\, dxdy. \tag{3.35}$$

Из (3.34) и (3.35) и из того, что $N_1 > 2N_0 + 1$, вытекает выполнение условия 3) теоремы 1. Теорема доказана.

Теперь докажем теорему 2. Пусть $f(x;\ y)$ — произвольная суммируемая функция. Тогда существует последовательность ступенчатых функций $f_q(x;\ y)$, удовлетворяющая условиям (3.1), (3.2), (3.3) и (3.4). Обозначим $Q_k = Q \cap \Delta_k$, где Q — множество, входящее в формулировку теоремы 2.

Пусть далее $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ и $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел.

На основании леммы 2, в формулировке которой полагается

$$\Delta = \Delta_k,\ Q = Q_k,\ \gamma = \gamma_k,\ \varepsilon = \varepsilon_k,\ N = N_k.$$

Мы можем для каждого k найти ограниченную функцию $\varphi_k(x,\ y)$ такую, что

$$\varphi_k(x;\ y) = \begin{cases} \gamma_k \text{ при } (x;\ y) \in Q_k \\ 0 \text{ при } (x;\ y) \overline{\in} \Delta_k, \end{cases} \tag{3.36}$$

$$\iint_{\Delta_k} |\varphi_k(x;\ y)|\, dxdy < 2\,|\gamma_k|\cdot|\Delta_k|, \tag{3.37}$$

$$|S_{nn}[\varphi_k]| < \varepsilon_k = \frac{1}{2^k};\ n \leqslant N_k, \tag{3.38}$$

$$\iint_T |S_{nn}[\varphi_k]|^p\, dxdy \leqslant A(p)\,[|\gamma_k|\cdot|\Delta_k|]^p,\ 0 < p < 1,\ n = 1,\ 2, \cdots. \tag{3.39}$$

Функция

$$g(x;\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x;\ y) \tag{3.40}$$

суммируема и равна $f(x; y)$ на Q.

Точно таким рассуждением, как при доказательстве теоремы 1, можно убедиться, что при подходящем выборе последовательности $\{N'_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующая функция $g(x; y)$ будет удовлетворять также требованиям 2) теоремы 2.

Полагая $N_1=1$ и допуская, что определены числа $N_1<\cdots<N_{k-1}$ и функции $\varphi_1(x; y), \cdots, \varphi_{k-1}$, выберем $N_k>N_{k-1}$ таким образом, чтобы

$$\iint_T \left| S_{nn}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_l\right]-\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_l(x; y)\right|^p dxdy<\frac{1}{k} \text{ при } n>N_k. \tag{3.41}$$

Очевидно

$$S_{nn}[g]=\sum_{k=1}^{\infty} S_{nn}[\varphi_k]. \tag{3.42}$$

Пусть $0<p<1$ и $\varepsilon>0$ — произвольное положительное число. Возьмем k_0 такое, чтобы

$$\iint_T \left|\sum_{l=s}^{\infty}\varphi_l(x; y)\right|^p dxdy<\frac{\varepsilon}{4},\ s>k_0 \text{ и } \max\left[\frac{A(p)}{2^{q_0\cdot p}};\ \frac{(2\pi)^2}{2^{k_0\cdot p}}\cdot\frac{1}{k_0}\right]<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{3.43}$$

где q_0 определяется из условия

$$\nu_{q_0-1}<k_0\leqslant\nu_{q_0}. \tag{3.44}$$

Возьмем n настолько большим, чтобы

$$k>k_0, \tag{3.45}$$

где k определяется из условия

$$N_k<n\leqslant N_{k+1}. \tag{3.46}$$

В силу (3.40) и (3.42) получаем

$$\iint_T |S_{nn}[g]-g(x; y)|^p dxdy\leqslant\iint_T \left|S_{nn}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_l\right]-\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_l(x; y)\right|^p dxdy+$$
$$+\iint_T \left|\sum_{k}^{\infty}\varphi_l\right|^p dxdy+\iint_T \left|\sum_{l=k+1}^{\infty} S_{nn}(\varphi_l)\right|^p dxdy+\iint_T |S_{nn}[\varphi_k]|^p dxdy. \tag{3.47}$$

Учитывая (3.39), (3.41), (3.43), (3.38), (3.46) и (3.47) имеем

$$\iint_T |S_{nn}[g]-g(x; y)|^p dxdy<\varepsilon. \tag{3.48}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание. Доказанные теоремы верны для n-кратных тригонометрических рядов, а также для таких рядов по системе Уолша.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный университет

Поступила 27.XII.1978

Մ. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Ինտեգրելի ֆունկցիաների Ֆուրյեի կրկնակի շարքերի մետրիկայով զուգամիտության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում է, որ յուրաքանչյուր երկու փոփոխականի ինտեգրալի ֆունկցիան, տրված կատարյալ բազմությունից դուրս, կարելի է փոխել այնպես, որ նոր ստացված ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը ըստ կրկնակի եռանկյունաչափական սիստեմի զուգամիտի L_p, $0 < p < 1$ *մետրիկայով։*

M. G. GRIGORIAN. *On the* L_p; $0 < p < 1$ *metric convergence of Fourie multiple series of integrable functions* (summary)

It is proved in the paper that an integralable function of two variable function from a certain set may be changed so that the Fourie series by the double trigonometric system of the new function convergence by metriecs Lp, $0<p<1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ш. А. Алимов, В. А. Ильин, Е. М. Никитин.* Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, УМН, XXXI, вып. 6 (192), 1976, 34—35.
2. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961, 448—471.
3. *Г. М. Черномашинцев.* Об «исправлении» функций нескольких переменных, заданных на торе, ДАН СССР, № 2, 1976, 277—278.
4. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление функций кратными рядами, ДАН Арм. ССР, XIV, № 2, 1977, 72—75.
5. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. 2, 1965, 453—455.
6. *И. М. Гельфанд.* Лекции по линейной алгебре, 1971, 77—78.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 1, 1980 Математика

И. Г. ХАЧАТРЯН

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В настоящей работе рассматриваются следующие дифференциальные уравнения порядка $n>2$:

$$y^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-2} p_k(x)\, y^{(k)}=\lambda^n y,\ 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1}$$

$$u^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-2} g_k(x)\, u^{(k)}=\lambda^n u,\ 0\leqslant x\leqslant l, \tag{2}$$

коэффициенты которых регулярны в четырехугольнике D_l с вершинами $0,\ l,\ l(1-\omega_1)^{-1},\ l(1-\omega_{n-1})^{-1}$, где

$$\omega_s=e^{i\frac{2\pi}{n}s},\ s=0,\ 1,\cdots,\ n-1, \tag{3}$$

и, кроме того, удовлетворяют условиям*

$$p_k^{(k)}(z),\ g_k^{(k)}(z)\in H_1(D_l),\ k=0,\ 1,\cdots,\ n-2. \tag{4}$$

В работе автора [14] была доказана следующая

Теорема А. *Пусть коэффициенты уравнений* (1) *и* (2) *удовлетворяют условиям* (4), *а функции* $y(x,\lambda)$ *и* $u(x,\lambda)$ *являются, соответственно, решениями уравнений* (1) *и* (2), *удовлетворяющими начальным условиям*

$$y^{(\nu)}(0,\lambda)=a_\nu,\ \nu=0,\ 1,\cdots,\ n-1, \tag{5}$$

$$u^{(\nu)}(0,\lambda)=b_\nu,\ \nu=0,\ 1,\cdots,\ n-1, \tag{6}$$

где a_ν, b_ν — *некоторые постоянные, причем если* $b_\nu=0$ $(\nu=0,\ 1,\cdots,\ k-1;\ 0\leqslant k\leqslant n-1)$ *и* $b_k\neq 0$, *то* $a_\nu=b_\nu$ $(\nu=0,\ 1,\cdots,\ k)$. *Тогда существует функция* $L(x,t)$ $(0\leqslant t\leqslant x\leqslant l)$, *не зависящая от параметра* λ, *такая, что при всех значениях* λ *имеет место формула***

---

* Определение класса H_1 (или E_1) аналитических функций содержится в книге И. И. Привалова [16].

** Для уравнений порядка $n>2$ формулу (7) впервые получил А. А. Сахнович [5], однако в работе [5] требуется аналитичность коэффициентов уравнений в круге $|z|<R$ $(R>l)$.

В работе В. И. Мацаева [9] (см. также [6]) показано, что для существования ядра $L(x,t)$ требование аналитичности коэффициентов является существенным.

$$y(x, \lambda) = u(x, \lambda) + \int_0^x L(x, t)\, u(t, \lambda)\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{7}$$

При этом функция $L(x, t)$ имеет все частные производные до порядка $n-2$ включительно, которые непрерывны по совокупности аргументов и абсолютно непрерывны по каждому аргументу. Кроме того, $L(x, t) = \tilde{L}(x - t, t)$, где функция $\tilde{L}(\xi, z)$ определена в области $(z \in D_{l-\xi};\ 0 \leqslant \xi \leqslant l)$ и все ее частные производные порядка $n-1$ при фиксированном ξ принадлежат классу $H_1(D_{l-\xi})$.

Формула (7) показывает, что оператор $I + L$, определенный формулой

$$(I + L) f = f(x) + \int_0^x L(x, t) f(t)\, dt, \quad 0 \leqslant x < l, \tag{8}$$

преобразует решение $u(x, \lambda)$ задачи Коши (2), (6) в решение $y(x, \lambda)$ задачи (1), (5). Очевидно, что каждая из функций $u(x, \lambda)$ и $y(x, \lambda)$ удовлетворяет некоторым $n-1$ линейно независимым краевым условиям вида

$$V(f) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu f^{(\nu)}(0) = 0. \tag{9}$$

Однако если рассматривать краевые задачи с $n-m$ $(1 < m \leqslant n)$ краевыми условиями вида (9), то, как показано в работе Л. А. Сахновича [7] (см. также [8]), может и не существовать оператора $I+L$ вида (8), преобразующего все решения одной краевой задачи в решения другой.

Цель настоящей работы—привести для уравнений высших порядков другие* возможные обобщения известных формул (операторов преобразования), полученных для дифференциальных уравнений второго порядка (см. [1]—[4]). Здесь приводятся операторы (формулы (19), (23)), которые строятся при помощи m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ ядер и преобразуют решения уравнения (2), удовлетворяющие $n-m$ краевым условиям вида (9), в решения уравнения (1), удовлетворяющие также некоторым $n-m$ краевым условиям вида (9). Далее вместе с уравнением (1) рассматривается простейшее уравнение

$$\psi^{(n)} = \lambda^n \psi \tag{10}$$

и выведенная в общем случае формула (19) приводится к другому виду (формулы (30), (31)). Эти формулы, полученные при условиях (4), являются простыми следствиями теоремы А. Еще один вариант оператора (формула (32)), преобразующего всякое решение уравнения (10) в решение уравнения (1), приводится при условиях

---

* В случае $n > 2$ существование оператора преобразования, сохраняющего на бесконечности асимптотическое поведение решений, установлено в работе автора [15].

$$p_k^{(k)}(z) \in H_1(\Delta_l),\ k = 0, 1, \cdots, n-2, \tag{11}$$

где область Δ_l представляет собой $4(n-2)$-угольник (при $n = 4$ — шестиугольник) и определяется следующим образом:

$$\Delta_l = \bigcup_{s=1}^{n-1} \Delta_s(l), \tag{12}$$

где $\Delta_s(l)$—треугольник с вершинами $l,\ l\,\sigma_{s,s-1}^{-1},\ l\,\sigma_{s,s+1}^{-1}$, причем $\sigma_{1,0}^{-1} = \sigma_{n-1,n}^{-1} = 0$ и

$$\sigma_{s,\nu} = \frac{\omega_s - \omega_\nu}{1 - \omega_\nu} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}(\nu - s)}{\sin\frac{\pi}{n}\nu}\, e^{i\frac{\pi}{n}s},\ s, \nu = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{13}$$

Треугольник $\Delta_s(l)$ является равнобедренным, причем углы у вершин $l\,\sigma_{s,s-1}^{-1}$ и $l\,\sigma_{s,s+1}^{-1}$ имеют раствор $\frac{\pi}{n}$, кроме того, сторона треугольника, соединяющая эти вершины, проходит через начало координат. Для многоугольника Δ_l точка $l/2$ и вещественная ось являются, соответственно, центром и осью симметрии. Отметим, что $D_l \subset \Delta_l$ (области $\Delta_s(l)$, Δ_l и D_l удобно считать замкнутыми). Здесь используются те же свойства функций класса H_1, что и в работе [14] при выводе формулы (7).

Если уравнения (1) и (2) рассматривать в полуинтервале $0 \leqslant x < a$ $(0 < a \leqslant \infty)$ и предполагать, что условия (4) и (11) выполняются при каждом l $(0 < l < a)$, то формула (7), а также полученные формулы справедливы при $0 \leqslant x < a$. Область D_∞ представляет собой сектор $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, а область Δ_∞ — сектор $|\arg z| \leqslant \pi - \frac{2\pi}{n}$.

При $n = 2$ области D_l и Δ_l превращаются в отрезок $[0, l]$, и тогда условия (4) и (11) естественно понимать как суммируемость коэффициентов на отрезке $[0, l]$.

Операторы преобразования для дифференциальных уравнений порядка $n > 2$ (без требования аналитичности коэффициентов) изучались в работах [10]—[13], однако полученные в этих работах формулы имеют более сложный вид, чем выведенные здесь формулы.

1°. Приведем два простых следствия теоремы А. Обозначим через $w_j(x, \lambda)$ и $v_j(x, \lambda)$ $(j = 1, 2, \cdots, m;\ 1 \leqslant m \leqslant n)$, соответственно, решения уравнений (1) и (2), удовлетворяющие начальным условиям

$$w_j^{(\nu)}(0, \lambda) = a_{\nu, j},\ \nu = 0, 1, \cdots, n-1,$$

$$v_j^{(\nu)}(0, \lambda) = b_{\nu, j},\ \nu = 0, 1, \cdots, n-1,$$

где $a_{\nu, j}$, $b_{\nu, j}$ — некоторые постоянные, причем числа $a_{\nu, j}$ при каждом j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ удовлетворяют следующему условию: если

$b_{\nu,j}=0$ $(\nu=0, 1,\cdots, k_j-1;\ 0\leqslant k_j\leqslant n-1)$ и $b_{k_j,j}\neq 0$, то

$$a_{\nu,j}=b_{\nu,j}\quad (\nu=0, 1,\cdots, k_j).$$

Введем следующие функции:

$$y(x, \lambda)=\sum_{j=1}^{m} c_j(\lambda)\, w_j(x, \lambda), \tag{14}$$

$$y_s(x, \lambda)=\sum_{j=1}^{m} \gamma_{s,j} c_j(\lambda)\, w_j(x, \lambda),\ s=1, 2,\cdots, m, \tag{15}$$

$$u(x, \lambda)=\sum_{j=1}^{m} c_j(\lambda)\, v_j(x, \lambda), \tag{16}$$

$$u_s(x, \lambda)=\sum_{j=1}^{m} \gamma_{s,j} c_j(\lambda)\, v_j(x, \lambda),\ s=1, 2,\cdots, m, \tag{17}$$

где числа $c_j(\lambda)$—произвольные, а числа $\gamma_{s,j}$ такие, что определитель матрицы

$$\Gamma=\left\|\begin{matrix}\gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots & \gamma_{1,m}\\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \cdots & \gamma_{2,m}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \gamma_{m,1} & \gamma_{m,2} & \cdots & \gamma_{m,m}\end{matrix}\right\| \tag{18}$$

отличен от нуля: $\det\Gamma\neq 0$. Очевидно, что решения $y(x, \lambda)$, $y_s(x, \lambda)$ $(s=1, 2,\cdots, m)$ уравнения (1) удовлетворяют таким же краевым условиям вида (9), каким удовлетворяют решения $w_j(x, \lambda)$ $(j=1, 2,\cdots, m)$. Аналогичным свойством обладают и решения $u(x, \lambda)$, $u_s(x,\lambda)$ $(s=1, 2,\cdots, m)$ уравнения (2) вместе с решениями $v_j(x, \lambda)$ $(j=1, 2,\cdots, m)$.

Следствие 1. *Имеет место представление*

$$y(x, \lambda)=u(x, \lambda)+\sum_{s=1}^{m}\int_0^x K_s(x, t)\, u_s(t, \lambda)\, dt,\ 0\leqslant x\leqslant l, \tag{19}$$

где ядра $K_s(x, t)$ не зависят от чисел $c_j(\lambda)$.

Действительно, согласно теореме А, существуют функции $L_j(x, t)$ $(j=1, 2,\cdots, m)$ такие, что имеют место формулы

$$w_j(x, \lambda)=v_j(x, \lambda)+\int_0^x L_j(x, t)\, v_j(t, \lambda)\, dt,\ j=1, 2,\cdots, m. \tag{20}$$

Функции $K_s(x, t)$ $(s=1, 2,\cdots, m)$ определим из системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{m}\gamma_{s,j} K_s(x, t)=L_j(x, t),\ j=1, 2,\cdots, m. \tag{21}$$

В силу $\det\Gamma\neq 0$ система (21) имеет единственное решение.

Из формул (20) и (21) имеем

$$w_j(x, \lambda) = v_j(x, \lambda) + \sum_{s=1}^{m} \gamma_{s,j} \int_0^x K_s(x, t)\, v_j(t, \lambda)\, dt, \tag{22}$$

$$j = 1, 2, \cdots, m.$$

Если равенства (22) умножить, соответственно, на $c_j(\lambda)$ и просуммировать по значениям j, а также учесть формулы (14), (16), (17), то получим представление (19).

Введем вектор-функции

$$\mathbf{w}(x, \lambda) = (w_1(x, \lambda),\ w_2(x, \lambda), \cdots, w_m(x, \lambda)),$$
$$\mathbf{v}(x, \lambda) = (v_1(x, \lambda),\ v_2(x, \lambda), \cdots, v_m(x, \lambda)),$$
$$\mathbf{y}(x, \lambda) = (y_1(x, \lambda),\ y_2(x, \lambda) \cdots, y_m(x, \lambda)),$$
$$\mathbf{u}(x, \lambda) = (u_1(x, \lambda),\ u_2(x, \lambda), \cdots, u_m(x, \lambda))$$

(эти векторы, написанные в виде строки, в нижеприводимых формулах нужно понимать как столбцы). Введем также диагональные матрицы

$$\mathbf{C}(\lambda) = \begin{Vmatrix} c_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2(\lambda) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & c_m(\lambda) \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{L}(x, t) = \begin{Vmatrix} L_1(x, t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2(x, t) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & L_m(x, t) \end{Vmatrix}.$$

Следствие 2. *Имеет место представление*

$$\mathbf{y}(x, \lambda) = \mathbf{u}(x, \lambda) + \int_0^x \mathbf{K}(x, t)\, \mathbf{u}(t, \lambda)\, dt,\ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{23}$$

где матрица $\mathbf{K}(x, t)$ *не зависит от* $\mathbf{C}(\lambda)$ *и имеет вид*

$$\mathbf{K}(x, t) = \Gamma \mathbf{L}(x, t)\, \Gamma^{-1}. \tag{24}$$

Действительно, формулы (20) запишем в виде

$$\mathbf{w}(x, \lambda) = \mathbf{v}(x, \lambda) + \int_0^x \mathbf{L}(x, t)\, \mathbf{v}(t, \lambda)\, dt.$$

Отсюда получаем

$$\Gamma \mathbf{C}(\lambda)\, \mathbf{w}(x, \lambda) = \Gamma \mathbf{C}(\lambda)\, \mathbf{v}(x, \lambda) + \int_0^x \Gamma \mathbf{L}(x, t)\, \mathbf{C}(\lambda)\, \mathbf{v}(t, \lambda)\, dt. \tag{25}$$

Однако

$$\mathbf{y}(x, \lambda) = \Gamma \mathbf{C}(\lambda)\, \mathbf{w}(x, \lambda),\ \mathbf{u}(x, \lambda) = \Gamma \mathbf{C}(\lambda)\, \mathbf{v}(x, \lambda),$$

поэтому формула (25) принимает вид (23), причем матрица $\mathbf{K}(x, t)$ определяется по формуле (24).

Замечание 1. Пусть

$$\gamma_{s,j} = \varepsilon_{s-1}^{j-1}, \quad s, j = 1, 2, \cdots, m,$$

где

$$\varepsilon_s = e^{i\frac{2\pi}{m}s}, \quad s = 0, 1, \cdots, m-1,$$

тогда в формуле (23) матрица $\mathbf{K}(x, t)$ представляет собой циркулянт

$$\mathbf{K}(x, t) = \left\| \begin{matrix} K_1(x, t), & K_2(x, t), \cdots, & K_{m-1}(x, t), & K_m(x, t) \\ K_m(x, t), & K_1(x, t), \cdots, & K_{m-2}(x, t), & K_{m-1}(x, t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_2(x, t), & K_3(x, t), \cdots, & K_m(x, t), & K_1(x, t) \end{matrix} \right\|,$$

причем

$$K_s(x, t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{s-1}^{1-j} L_j(x, t), \quad s = 1, 2, \cdots, m.$$

Если же порядок n — четное число и $m = \frac{n}{2}$, кроме того (см. (3)),

$$\gamma_{s,j} = \omega_{s-1}^{2j-1}, \quad s, j = 1, 2, \cdots, m,$$

то матрица $\mathbf{K}(x, t)$ имеет вид

$$\mathbf{K}(x, t) = \left\| \begin{matrix} K_1(x, t), & K_2(x, t), & \cdots, & K_{m-1}(x, t), & K_m(x, t) \\ -K_m(x, t), & K_1(x, t), & \cdots, & K_{m-2}(x, t), & K_{m-1}(x, t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -K_2(x, t), & -K_3(x, t), & \cdots, & -K_m(x, t), & K_1(x, t) \end{matrix} \right\|,$$

причем

$$K_s(x, t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \omega_{s-1}^{1-2j} L_j(x, t), \quad s = 1, 2, \cdots, m.$$

Замечание 2. Если числа $c_j(\lambda)$ обладают свойствами

$$c_j(\lambda\omega_{r_s}) = \gamma_{s,j} c_j(\lambda), \quad s, j = 1, 2, \cdots, m,$$

а это возможно, в частности, когда числа $\gamma_{s,j}$ имеют вид

$$\gamma_{s,j} = \omega_{r_s}^{\varkappa j}, \quad s, j = 1, 2, \cdots, m,$$

то вектор-функции $\mathbf{y}(x, \lambda)$ и $\mathbf{u}(x, \lambda)$ принимают вид

$$\mathbf{y}(x, \lambda) = (y(x, \lambda\omega_{r_1}), y(x, \lambda\omega_{r_2}), \cdots, y(x, \lambda\omega_{r_m})),$$

$$\mathbf{u}(x, \lambda) = (u(x, \lambda\omega_{r_1}), u(x, \lambda\omega_{r_2}), \cdots, u(x, \lambda\omega_{r_m})).$$

2°. Рассмотрим вместе с уравнением (1) простейшее уравнение (10) и в некоторых случаях формулу (19) приведем к другому виду. Пусть функции $w_j(x, \lambda)$ и $\varphi_j(x, \lambda)$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ являются со ответственно решениями уравнений (1) и (10), удовлетворяющими начальным условиям

$$w_j^{(\nu)}(0, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu < j, \\ a_{\nu, j} & \text{при } \nu \geq j, \end{cases} \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1,$$

$$\varphi_j^{(\nu)}(0, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq j, \\ 1 & \text{при } \nu = j, \end{cases} \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1,$$

$$j = 0, 1, \cdots, n-1,$$

где $a_{\nu, j}$ — некоторые постоянные, причем $a_{\nu,\nu} = 1$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$. Легко убедиться, что

$$\varphi_j(x, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} (\omega_s \lambda)^{-j} e^{\omega_s \lambda x}, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{26}$$

Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$ и $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqslant n-1$. Введем функции

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{m} c_j(\lambda) w_{k_j}(x, \lambda),$$

$$\psi(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{m} c_j(\lambda) \varphi_{k_j}(x, \lambda),$$

$$\psi_s(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{s, j} c_j(\lambda) \varphi_{k_j}(x, \lambda), \quad s = 1, 2, \cdots, m,$$

где числа $c_j(\lambda)$ — произвольные, а числа $\gamma_{s, j}$ имеют вид

$$\gamma_{s, j} = \omega_{r_s}^{k_j}, \quad s, j = 1, 2, \cdots, m, \tag{27}$$

причем $0 \leqslant r_1 < r_2 < \cdots < r_m \leqslant n-1$ и $\det \Gamma \neq 0$ (см. (18)).

Очевидно, что решения $\psi(x, \lambda)$ и $\psi_s(x, \lambda)$ $(s = 1, 2, \cdots, m)$ уравнения (10) удовлетворяют краевым условиям

$$U_\nu(f) \equiv f^{(\varkappa_\nu)}(0) = 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n-m, \tag{28}$$

где $0 \leqslant \varkappa_1 < \varkappa_2 < \cdots < \varkappa_{n-m} \leqslant n-1$ и $\varkappa_\nu \neq k_j$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n-m;$ $j = 1, 2, \cdots, m)$.

Учитывая (26) и (27), нетрудно убедиться, что

$$\psi_s(x, \lambda) = \psi(x\omega_{r_s}, \lambda), \quad s = 1, 2, \cdots, m.$$

Поэтому, согласно следствию 1, имеем

$$y(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + \sum_{s=1}^{m} \int_0^x K_s(x, t) \psi(t\omega_{r_s}, \lambda) \, dt. \tag{29}$$

Если в (29) сделать замену переменного $\tau = t\omega_{r_s}$ и обозначить

$$F_s(x, \tau) = \omega_{r_s}^{-1} K_s(x, \tau\omega_{r_s}^{-1}), \quad s = 1, 2, \cdots, m,$$

то получим формулу

$$y(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + \sum_{s=1}^{m} \int_0^{x r_s} F_s(x, \tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau, \quad 0 < x \leqslant l, \tag{30}$$

в которой $\psi(x, \lambda)$ — произвольное решение краевой задачи (10), (28), а $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{(\nu)}(0, \lambda) = \sum_{j=1}^{m} \psi^{(k_j)}(0, \lambda) w_{k_j}^{(\nu)}(0, \lambda), \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1,$$

при этом $y(x, \lambda)$ удовлетворяет $n-m$ линейно независимым краевым условиям вида

$$V_s(f) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{s,\nu} f^{(\nu)}(0) = 0, \quad s = 1, 2, \cdots, n-m,$$

которым удовлетворяют функции $w_{k_j}(x, \lambda)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$. Отметим, что ядра $F_s(x, \tau)$ не зависят от решения $\psi(x, \lambda)$.

В частности, когда $m = n$, формула (30) принимает вид

$$y(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + \sum_{s=0}^{n-1} \int_0^{x \omega_s} \tilde{F}_s(x, \tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau, \quad 0 < x \leqslant l, \tag{31}$$

где $\psi(x, \lambda)$ — произвольное решение уравнения (10) (в этом случае краевые условия отсутствуют), а $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{(\nu)}(0, \lambda) = \sum_{j=0}^{\nu} a_{\nu, j} \psi^{(j)}(0, \lambda), \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Имеют место также соотношения

$$\omega_s \tilde{F}_s(x, t\omega_s) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_s^{-j} L_j(x, t), \quad s = 0, 1, \cdots, n-1,$$

где функции $L_j(x, t)$, согласно теореме А, соответствуют решениям $w_j(x, \lambda)$ и $\varphi_j(x, \lambda)$ по формуле

$$w_j(x, \lambda) = \varphi_j(x, \lambda) + \int_0^x L_j(x, t) \varphi_j(t, \lambda) dt, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

3°. Приведем другой вариант формулы (31).

Теорема. *Пусть $\psi(x, \lambda)$ — произвольное решение уравнения* (10), *а $y(x, \lambda)$ — решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y^{(\nu)}(0, \lambda) = \sum_{j=0}^{\nu} a_{\nu, j} \psi^{(j)}(0, \lambda), \ \nu = 0, 1, \cdots, n-1,$$

где $a_{\nu, j}$ — некоторые постоянные, причем $a_{\nu, \nu} = 1$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$. Если коэффициенты уравнения (1) *удовлетворяют условиям* (11), *то имеет место представление*

$$y(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + \sum_{s=1}^{n-1} \int_x^{x\omega_s} M_s(x, \tau) \psi(\tau, \lambda) \, d\tau, \ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{32}$$

где ядра $M_s(x, \tau)$ не зависят от решения $\psi(x, \lambda)$.

Доказательство. Заметим, что формулу (32) достаточно установить для $\psi(x, \lambda) = e^{\lambda x}$ и $y(x, \lambda)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y^{(\nu)}(0, \lambda) = \sum_{j=0}^{\nu} a_{\nu, j} \lambda^j, \ \nu = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{33}$$

Введем обозначения (см. (26))

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} e^{\omega_s \lambda x}, \tag{34}$$

$$q_k(x) = -\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} C_{n-2-\nu}^{k-\nu} p_{n-2-\nu}^{(k-\nu)}(x), \ k = 0, 1, \cdots, n-2. \tag{35}$$

В силу условий теоремы из (35) следует, что

$$q_k^{(n-2-k)}(z) \in H_1(\Delta_l), \ k = 0, 1, \cdots, n-2. \tag{36}$$

Учитывая формулы

$$p_{n-2-k}(x) = -\sum_{\nu=0}^{k} C_{n-2-\nu}^{k-\nu} q_\nu^{(k-\nu)}(x), \ k = 0, 1, \cdots, n-2,$$

нетрудно убедиться, что $y(x, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x, \lambda) = R_0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_0^x \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) \, q_k(t) \, y(t, \lambda) \, dt, \tag{37}$$

где

$$R_0(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) \, y(0, \lambda) +$$

$$+ \int_0^x \varphi(t, \lambda) \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(x-t)^k}{k!} \left[y^{(k+1)}(0, \lambda) - \sum_{\nu=0}^{k-1} y^{(\nu)}(0, \lambda) \sum_{j=\nu}^{k-1} C_j^{\nu} q_{k-j-1}^{(j-\nu)}(0) \right] \right\} dt.$$

В силу (33) и (34) функция $R_0(x, \lambda)$ приводится к виду

$$R_0(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \sum_{s=1}^{n-1} \int_x^{x\omega_s} e^{\lambda\tau} N_s \left(\frac{\tau - x\omega_s}{1 - \omega_s}\right) d\tau, \tag{38}$$

где

$$N_s(\xi) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\xi^k}{k!\, n} \sum_{j=0}^{n-2-k} \frac{(\omega_s - 1)^k}{\omega_s^{k+j+1}} h_{k,j},$$

$$h_{k,j} = a_{k+j+1,j} - \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{\nu+j,j} \sum_{m=\nu}^{k-1} C_{m+j}^{m-\nu}\, q_{k-m-1}^{(m-\nu)}(0).$$

Применив метод последовательных приближений к уравнению (37), получим

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(x, \lambda), \tag{39}$$

где функции $R_j(x, \lambda)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$R_{j+1}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_0^x \varphi^{(n-1-k)}(x - t, \lambda)\, q_k(t)\, R_j(t, \lambda)\, dt,\ j = 0, 1, 2, \cdots. \tag{40}$$

Методом индукции докажем, что функции $R_j(x, \lambda)$ допускают представление

$$R_j(x, \lambda) = \sum_{s=1}^{n-1} \int_x^{x\omega_s} e^{\lambda\tau} G_{s,j}\left(\frac{\tau - x\omega_s}{1 - \omega_s}, \frac{x - \tau}{1 - \omega_s}\right) d\tau,\ j = 1, 2, \cdots, \tag{41}$$

где функции $G_{s,j}(\xi, z)$ $(j = 1, 2, \cdots)$ при каждом фиксированном ξ $(0 \leqslant \xi \leqslant l)$ регулярны и ограничены по переменной z в многоугольнике $\bar{\Delta}_s(\xi, l)$, который определяется следующим образом: $z \in \bar{\Delta}_s(\xi, l)$, если $(\alpha z + \zeta) \in \Delta_l$ при всех (см. (12)) $\zeta \in \Delta_s(\xi)$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Отметим, что $\Delta_s(l - \xi) \subseteq \tilde{\Delta}_s(\xi, l) \subseteq \Delta_l$.

Пусть при некотором j формула (41) верна. Тогда имеем

$$R_j(x, \lambda) = \sum_{s=1}^{n-1} (\omega_s - 1) \int_0^x e^{\lambda[x - (1 - \omega_s)v]}\, G_{s,j}(x - v, v)\, dv. \tag{42}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\lambda^n} \varphi^{(n-1-k)}(x, \lambda) = \frac{1}{k!\, n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\omega_\nu}\right)^{k+1} \int_0^x (x - u)^k e^{\lambda[x - (1 - \omega_\nu)u]}\, du, \tag{43}$$

$$k = 0, 1, \cdots, n - 2.$$

В силу (42) и (43) из (40) имеем

$$R_{j+1}(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s,\,\nu=1}^{n-1}(\omega_s-1)\left(1-\frac{1}{\omega_\nu}\right)^{k+1}e^{\lambda x}\,T_{k,\,s,\,\nu}(x,\lambda),\qquad(44)$$

где

$$T_{k,\,s,\,\nu}(x,\lambda)=$$
$$=\int_0^x q_k(t)\int_0^{x-t}(x-t-u)^k\int_0^t G_{s,\,j}(t-v,\,v)\,e^{\lambda[(\omega_\nu-1)u+(\omega_s-1)v]}\,dv\,du\,dt.\qquad(45)$$

Если в формуле (45) сделать замену переменных $u=u_1$, $t=t_1-u_1$, $v=v_1-u_1$ и опустить индексы у новых переменных, то получим

$$T_{k,\,s,\,\nu}(x,\lambda)=$$
$$=\int_0^x(x-t)^k\int_0^t\int_0^v e^{\lambda[(\omega_\nu-\omega_s)u+(\omega_s-1)v]}\,q_k(t-u)\,G_{s,\,j}(t-v,\,v-u)\,du\,dv\,dt.\qquad(46)$$

Из (46) при $\nu=s$ имеем

$$T_{k,\,s,\,s}(x,\lambda)=$$
$$=\int_0^x(x-t)^k\int_0^t e^{\lambda(\omega_s-1)v}\int_0^v q_k(t-u)\,G_{s,\,j}(t-v,\,v-u)\,du\,dv\,dt,\qquad(47)$$

Если в (46) при $\nu\neq s$ сделать замену переменного (см. (13)) $u=$ $=\zeta+v\sigma_{\nu,\,s}^{-1}$, то получим

$$T_{k,\,s,\,\nu}(x,\lambda)=\int_0^x(x-t)^k\int_0^t\int_{-v\sigma_{\nu,\,s}^{-1}}^{v\sigma_{s,\,\nu}^{-1}}e^{\lambda(\omega_\nu-\omega_s)\zeta}\times$$
$$\times\,q_k\left(t-\zeta-\frac{v}{\sigma_{\nu,\,s}}\right)G_{s,\,j}\left(t-v,\frac{v}{\sigma_{s,\,\nu}}-\zeta\right)d\zeta\,dv\,dt.\qquad(48)$$

Однако в силу (36) и согласно предположению относительно функций $G_{s,\,j}(\xi,\,z)$, формулу (48) можно записать в виде

$$T_{k,\,s,\,\nu}(x,\lambda)=\int_0^x(x-t)^k\int_0^t\int_0^{v\sigma_{s,\,\nu}^{-1}}e^{\lambda(\omega_\nu-\omega_s)\zeta}\times$$
$$\times\,q_k\left(t-\zeta-\frac{v}{\sigma_{\nu,\,s}}\right)G_{s,\,j}\left(t-v,\frac{v}{\sigma_{s,\,\nu}}-\zeta\right)d\zeta\,dv\,dt-$$
$$-\int_0^x(x-t)^k\int_0^t\int_0^{-v\sigma_{\nu,\,s}^{-1}}e^{\lambda(\omega_\nu-\omega_s)\zeta}\,q_k\left(t-\zeta-\frac{v}{\sigma_{\nu,\,s}}\right)G_{s,\,\nu}\left(t-v,\frac{v}{\sigma_{s,\,\nu}}-\zeta\right)d\zeta\,dv\,dt.$$
$$(49)$$

Из (49) имеем

$$T_{k,s,\nu}(x, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_{s,\nu}}\int_0^x (x-t)^k \int_0^t\int_0^v e^{\lambda(\omega_\nu - 1)u} q_k\left(t - v + \frac{v-u}{\sigma_{s,\nu}}\right) G_{s,j}\left(t-v, \frac{v-u}{\sigma_{s,\nu}}\right) du\,dv\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\sigma_{\nu,s}}\int_0^x (x-t)^k \int_0^t\int_0^v e^{\lambda(\omega_s - 1)u} q_k\left(t - \frac{v-u}{\sigma_{\nu,s}}\right) G_{s,j}\left(t-v, v - \frac{v-u}{\sigma_{\nu,s}}\right) du\,dv\,dt. \tag{50}$$

С помощью изменения порядка интегрирования и простых замен переменных из формул (44), (47) и (50) получим

$$R_{j+1}(x, \lambda) = \sum_{s=1}^{n-1} \int_x^{x\omega_s} e^{\lambda\tau} G_{s,j+1}\left(\frac{\tau - x\omega_s}{1-\omega_s}, \frac{x-\tau}{1-\omega_s}\right) d\tau, \tag{51}$$

где функция $G_{s,j+1}(\xi, z)$ определяется по формуле

$$G_{s,j+1}(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!\,n}\left\{\left(1 - \frac{1}{\omega_s}\right)^{k+1} \int_0^\xi (\xi - u)^k \int_0^z q_k(u+\zeta)\, G_{s,j}(u,\zeta)\, d\zeta\, du +\right.$$

$$+ \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{\nu,s}}\left(1 - \frac{\omega_s}{\omega_\nu}\right)^{k+1} \int_0^\xi \int_z^{\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z} \left(\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}} + z - \zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\, G_{s,j}(u,\zeta)\, d\zeta\, du -$$

$$\left. - \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{s,\nu}}\left(1 - \frac{\omega_\nu}{\omega_s}\right)^{k+1} \int_0^\xi \int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}}} \left(\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}} - \zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\, G_{\nu,j}(u,\zeta)\, d\zeta\, du \right\}. \tag{52}$$

Если учесть формулы

$$\left(1 - \frac{1}{\omega_s}\right)^{k+1} (\xi - u)^k = (1-\omega_s)^{k+1} (z-\zeta)^k +$$

$$+ \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{\nu,s}}\left(1 - \frac{\omega_s}{\omega_\nu}\right)^{k+1} \left(\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}} + z - \zeta\right)^k,$$

$$k = 0, 1, \cdots, n-2,$$

и аналитичность подынтегральных функций в (52), то соотношение (52) приводится к более удобному виду

$$G_{s,j+1}(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!\,n}\left\{(1-\omega_s)^{k+1} \int_0^\xi \int_0^z (z-\zeta)^k q_k(u+\zeta)\, G_{s,j}(u,\zeta)\, d\zeta\, du +\right.$$

$$+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{\nu,s}}\left(1-\frac{\omega_s}{\omega_\nu}\right)^{k+1}\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,G_{s,j}(u,\zeta)\,d\zeta du-$$

$$-\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{s,\nu}}\left(1-\frac{\omega_\nu}{\omega_s}\right)^{k+1}\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}}}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}}-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,G_{\nu,j}(u,\zeta)\,d\zeta du\Bigg\}. \tag{53}$$

Если приведенные выше рассуждения применить к формуле (40), соответствующей значению $j=0$, то получим представление (41), соответствующее значению $j=1$, при этом для функции $G_{s,1}(\xi, z)$ получим формулу

$$G_{s,1}(\xi, z)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\Bigg\{\frac{1}{\omega_s}\left(1-\frac{1}{\omega_s}\right)^k\int_0^{\xi}(\xi-u)^k q_k(u)\,du+$$

$$+(1-\omega_s)^{k+1}\int_0^{\xi}N_s(u)\int_0^{z}(z-\zeta)^k q_k(u+\zeta)\,d\zeta du+$$

$$+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{\nu,s}}\left(1-\frac{\omega_s}{\omega_\nu}\right)^{k+1}\int_0^{\xi}N_s(u)\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,d\zeta du-$$

$$-\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{s,\nu}}\left(1-\frac{\omega_\nu}{\omega_s}\right)^{k+1}\int_0^{\xi}N_\nu(u)\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}}}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}}-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,d\zeta du\Bigg\}. \tag{54}$$

Из формул (54) и (53) следует, что функции $G_{s,1}(\xi, z)$ и $G_{s,j+1}(\xi, z)$ регулярны и ограничены по переменной z в области $\bar{\Delta}_s(\xi, l)$. Формулы (41) доказаны.

Из (37) вытекает конечность величины

$$c=\frac{2n-3}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{2^{k+1}}{k!}\left\{\sup_{0<\xi<l;\ z\in\Delta_l}\int_{\xi}^{z}|z-\zeta|^k\,|q_k(\zeta)|\,|d\zeta|\right\}<\infty.$$

Учитывая это, из формулы (54) получим неравенство

$$|G_{s,1}(\xi, z)|\leqslant c\left\{\frac{1}{2(2n-3)}+\max_{1<s<n-1}\int_0^{l}|N_s(u)|\,du\right\}=c_1,$$

после чего, из формул (53) по индукции получаются оценки

$$|G_{s,\, j+1}(\xi,\ z)| \leqslant c_1 \frac{(c\xi)^j}{j!}, \quad j=1,\ 2, \cdots.$$

Положим

$$G_s(\xi,\ z) = N_s(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} G_{s,j}(\xi,\ z), \ s=1,\ 2, \cdots,\ n-1. \tag{55}$$

В силу равномерной сходимости ряда (55) функция $G_s(\xi,\ z)$ при фиксированном $\xi\ (0 \leqslant \xi \leqslant l)$ регулярна и ограничена по переменной z в области $\overline{\Delta}_s(\xi,\ l)$. Если формулы (54) просуммировать по значениям j и учесть (54), (55), то для функций $G_s(\xi,\ z)$ получим следующую систему интегральных уравнений:

$$G_s(\xi,\ z) = N_s(\xi) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!\, n} \frac{1}{\omega_s}\left(1-\frac{1}{\omega_s}\right)^k \int_0^{\xi} (\xi-u)^k q_k(u)\, du +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!\, n}\left\{(1-\omega_s)^{k+1} \int_0^{\xi}\int_0^{z} (z-\zeta)^k q_k(u+\zeta)\, G_s(u,\ \zeta)\, d\zeta du +\right.$$

$$+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{\nu,\, s}}\left(1-\frac{\omega_s}{\omega_\nu}\right)^{k+1} \int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\,\nu}}+z} \left(\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\,\nu}}+z-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\, G_s(u,\zeta)\, d\zeta du -$$

$$\left.-\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{s,\,\nu}}\left(1-\frac{\omega_\nu}{\omega_s}\right)^{k+1} \int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,\, s}}} \left(\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,\, s}}-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\, G_\nu(u,\ \zeta)\, d\zeta du \right\},$$

$$s=1,\ 2, \cdots,\ n-1.$$

В силу (38), (41) и (55) из (39) получим формулу

$$y(x,\ \lambda) = e^{\lambda x} + \sum_{s=1}^{n-1} \int_x^{x\omega_s} e^{\lambda\tau}\, G_s\left(\frac{\tau - x\omega_s}{1-\omega_s},\ \frac{x-\tau}{1-\omega_s}\right) d\tau.$$

Остается положить

$$M_s(x,\ \tau) = G_s\left(\frac{\tau - x\omega_s}{1-\omega_s},\ \frac{x-\tau}{1-\omega_s}\right),\ s=1,\ 2, \cdots,\ n-1.$$

Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.VI.1978

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Ձևափոխության օպերատորներ եզրային խնդիրների համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում երկու եզրային խնդիրների համար կառուցվում է սպեկտրալ պարամետրից անկախ վոլտերյան K ինտեգրալ օպերատոր այնպիսին, որ $I+K$ օպերատորը մի խնդրի լուծումները ձևափոխում է մյուսի լուծումներին։

J. G. KHACHATRIAN. *The transformation operators for the boundary problems* (summary)

For two boundary problems the Volterra's integral operator K uudepending on the spectral parameter and such that the operator $I+K$ transforms the solutions of one problem into the solutions of the other is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Я. Повзнер.* О дифференциальных уравнениях типа Штурма—Лиувилля на полуоси, Матем. сб., 23 (65), 1948, 3—52.
2. *Б. Я. Левин.* Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, 106, № 2, 1956, 187—190.
3. *В. А. Марченко.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, Труды ММО, 1, 1952, 327—420.
4. *В. А. Марченко.* Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля, Киев, 1972.
5. *Л. А. Сахнович.* Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами, Матем. сб., 46 (88), № 1, 1958, 61—76.
6. *Л. А. Сахнович.* Необходимые условия наличия оператора преобразования для уравнения четвертого порядка, УМН, 16, вып. 5, 1961, 199—204.
7. *Л. А. Сахнович.* Метод оператора преобразования для уравнений высших порядков, Матем. сб., 55 (97), № 3, 1961, 347—360.
8. *Л. А. Сахнович.* Об обратной задаче для уравнений четвертого порядка, Матем. сб., 56 (98), № 2, 1962, 137—146.
9. *В. И. Мацаев.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, ДАН СССР, 130, № 3, 1960, 499—502.
10. *М. К. Фаге.* Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной, Труды ММО, 8, 1959, 3—48.
11. *А. Ф. Леонтьев.* Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и ее применения к некоторым вопросам теории функций, Сиб. матем ж., 1, № 3, 1960, 456—487.
12. *Ю. Н. Валицкий.* Об операторе преобразования для интегро-дифференциольных операторов типа Вольтерра, Сб. «Матем. физика», Киев, 1965, 23—36.
13. *А. П. Хромов.* Об одном представлении ядер резольвент вольтерровских операторов и его применениях, Матем. сб., 89 (131), № 2 (10), 1972 207—226
14. *И. Г. Хачатрян.* Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, Изв. АН Арм. ССР, серия матем., XIII, № 3, 1979, 215—237
15. *И. Г. Хачатрян.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений, Изв. АН Арм. ССР, серия матем., XIV, № 6, 1979.
16. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 1, 1980 Математика

А. С. МАЕРГОЙЗ

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ПОЛИА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

Введение

Хорошо известна теорема Полиа о связи между индикаторной и сопряженной диаграммами целой функции экспоненциального типа ([1], стр. 114), давшая толчок многочисленным исследованиям, посвященным обобщениям этой теоремы на различные классы целых функций, ее приложениям в некоторых пограничных вопросах теории функций и функционального анализа (см., например, обзор в [2], стр. 17; [3], стр. 137; [4]). Что касается класса целых функций в $\mathbf{C}$ уточненного порядка, то в этом направлении известен „приближенный" аналог теоремы Полиа, принадлежащий В. Бернштейну [5]. Построенный в [6] ее полный аналог не нашел, однако, применения, поскольку „ассоциированная" функция рассматривалась на некоторой многолистной поверхности.

В данной работе предлагается обобщение теоремы Полиа в духе результатов М. Ф. Субботина, А. Е. Аветисяна, М. М. Джрбашяна ([2], стр. 17), для целых функций конечного порядка и нормального типа, причем „ассоциированная" функция, т. е. некоторый аналог преобразования Бореля целой функции экспоненциального типа, рассматривается как и в классическом случае, на комплексной плоскости. Это позволило, как и в [7], в случае целых функций порядка $\rho > 0$ и нормального типа, выяснить связь обобщенного индикатора целой функции уточненного порядка $\rho(r)$, где $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$, с ρ-выпуклым носителем аналитического функционала и „ρ-многоугольником Бореля" функции, голоморфной в окрестности O в C. Здесь мы отталкивались от подобных результатов Э. Бореля [8], Г. Полиа ([3], стр. 137), В. Бернштейна [5]. Результаты этой статьи частично анонсированы в [15].

Автор весьма признателен академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за внимание к этой работе, профессору Б. Я. Левину за постановку задачи и последующее всестороннее обсуждение центральных результатов этой статьи.

Список обозначений: L — риманова поверхность логарифма вместе с точкой $\Lambda = \{(0, \theta): \theta \in R^1\}$; $L(\beta; R) = \{(r, \varphi) \in L: r \geqslant R \geqslant 0; |\varphi| < \beta\}$; $L(\beta) = L(\beta, 0)$; $\alpha_\rho = \min\{\pi/2\rho, \pi\}$, $\rho > 0$; $\pi: L \to \mathbf{C}$ — отображение проектирования; $\pi(r, \theta) = re^{i\theta}$; $\pi(\Lambda) = 0$; $\Pi_\theta = \{(r, \varphi) \in L: r > 0; |\varphi - \theta| < \alpha_\rho\}$;

если $\omega=(r, \varphi)\in L$, или $\omega=re^{i\varphi}\in \mathbf{C}$, а $\alpha\in R^1$, то $\omega^\alpha=r^\alpha\cdot e^{i\alpha\varphi}$; $m\omega=$ $=(|m|\cdot|\omega|, \operatorname{Arg} m+\operatorname{Arg}\omega)$, где $m, \omega\in L$; если $(r, \varphi)\in L$, $\varphi\in(-\pi, \pi]$, то отождествляем (r, φ) и $re^{i\varphi}\in \mathbf{C}$;

$$\varphi_\rho(\omega)=\begin{cases}\operatorname{Re}\omega^\rho\cdot\exp\{-2\pi k\rho i\}, & \omega\in\overline{\Pi}_{2k\pi}\\ 0 & ,\omega=\Lambda;\ \rho>\dfrac{1}{2};\ \alpha_\rho\leqslant|\operatorname{Arg}\omega-2\pi k|\leqslant\pi\end{cases}$$

— 2π — периодическая функция относительно $\operatorname{Arg}\omega$ на L; $\Phi_\rho=\varphi_\rho\circ\pi^{-1}$; $D_\rho(\theta;\ b)=\{p\in\mathbf{C}\colon \Phi_\rho(pe^{i\theta})>b\}$, где $b>0$.

§ 1. Вспомогательный аппарат

1°. Пусть $\rho>0$; $\mathbf{B}_\rho=\{V\}$ — класс функций, заданных в $L(\gamma)$, где $\gamma>\pi(1+1/\rho)$ и таких, что

1) $V(t)$—положительная при $(t, 0)=t>0$, возрастающая строго выпуклая от $\ln t$ функция, причем $V(0)=0$;

2) функция $V(\omega)$ голоморфна в $L(\gamma)$, непрерывна в $\overline{L(\gamma)}$ и

$$\lim_{t\to\infty}[V(t)]^{-1}\cdot V(t\omega)=\omega^\rho, \tag{1}$$

причем стремление к пределу равномерное на любом компакте $K\subset L(\gamma)$.

Интерес к этому классу объясняет следующая

Теорема А ([9]; [5], стр. 349; [10], стр. 99; [6], стр. 114). Для любой целой функции f конечного порядка $\rho>0$ существует уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что $r^{\rho(r)}\in\mathbf{B}_\rho$.

Отметим свойства функций класса $\mathbf{B}_\rho$, которые понадобятся в дальнейшем (ср. [5], [6]). В нижеприводимых формулах, кроме (3), характер стремления к пределу такой же, как в (1), а K—любой компакт в $L(\gamma)$.

а) $$\lim_{t\to\infty}[V(t)]^{-1}\cdot t\cdot V'(t\omega)=\rho\omega^{\rho-1},\quad \omega\in K, \tag{2}$$

где $V'(r, \varphi)=[V\circ(\pi|_{\Pi_\varphi})^{-1}]'(re^{i\varphi})$. В частности, $(\ln t)^{-1}\cdot\ln V(t)$ — уточненный порядок:

$$\rho=\lim_{t\to\infty}[V(t)]^{-1}\cdot tV'(t)=\lim_{t\to\infty}(\ln t)^{-1}\cdot\ln V(t); \tag{3}$$

б) $$\lim_{|\omega|\to\infty}[V(\omega)]^{-1}\cdot\pi(\omega)\cdot V'(\omega)=\rho,\quad |\operatorname{Arg}\omega|\leqslant\beta<\gamma; \tag{4}$$

в) функция $v(\omega)=\omega^{-\rho}\cdot V(\omega)$—медленно изменяющаяся, т. е.

$$\lim_{t\to\infty}[v(t)]^{-1}\cdot v(t\omega)=1,\quad \omega\in K\subset L(\gamma);$$

г) $$\lim_{|\omega|\to\infty}[V(\omega)]^{-1}\cdot V(m\omega)=m^\rho;\ \lim_{|\omega|\to\infty}[v(\omega)]^{-1}v(m\omega)=1 \tag{5}$$

при $|\operatorname{Arg}\omega|\leqslant\beta<\gamma$ и $m\in L$, причем $|\omega|^{-1}\cdot\omega m\in K\subset L(\gamma)$.

Из (1), полагая, $K=\{(1, \varphi)\in L\colon |\varphi|\leqslant\beta<\gamma\}$, заключаем: для любого $\beta\in(0, \gamma)$ найдутся число $Q_\beta>0$ и значение аргумента функции

V такие, что $V(\omega) \neq 0$; $|\operatorname{Arg} V(\omega) - \rho \operatorname{Arg} \omega| < \frac{\pi}{2}$ при $\omega \in L(\beta; Q_\beta)$.

В соответствие с этим определим отображение

$$\tilde{V}\colon \bigcup_{0<\beta<\gamma} L(\beta; Q_\beta) \to L;\ V(\omega) = (|V(\omega)|,\ \operatorname{Arg} V(\omega)). \qquad (6)$$

Аналогом одного результата В. Бернштейна ([5], стр. 353) является

Предложение 1*. *Существует система чисел* $\{R_\beta, 0<\beta<\gamma\}$ $R_\beta \geqslant Q_\beta$ *такая, что* $\tilde{V}\colon \bigcup\limits_{0<\beta<\gamma} L(\beta; R_\beta) \to L$ *— взаимнооднозначное конформное отображение, причем обратное отображение* $\chi = \tilde{V}^{-1}$ *голоморфно в* $Y = \bigcup\limits_{0<\beta<\gamma} L(\rho\beta;\ T_\beta)$, *где* $\{T_\beta > 0,\ 0 < \beta < \gamma\}$ *— некоторая система чисел. Кроме того, функция* $U = \pi \circ \chi$ *обладает всеми свойствами следов функций класса* $\mathbf{B}_{\rho^{-1}}$ *на множестве* Y.

Доказательство. 1) Зафиксируем произвольно $\beta \in (0, \gamma)$. Полагая в (2) $K = \{(1, \varphi) \in L\colon |\varphi| \leqslant \beta\}$, получаем: $V'(\omega) \neq 0$, $\forall \omega \in L(\beta; P_1)$, если P_1 достаточно велико. Покажем, что для любого $c \in (0, 1)$ существует число $\alpha \in (0,1)$ такое, что при некотором $P \geqslant P_1$

$$|V(m) - V(\omega)| > c \cdot |V'(\omega)| \cdot |z - w|,\ \forall m \in \Omega_\alpha(\omega)\colon \omega \in L(\beta; P), \qquad (7)$$

где $z = \pi(m)$; $w = \pi(\omega)$; $\Omega_\alpha(\omega) = \{m \in \Pi_{\operatorname{Arg}\omega}\colon |z - w| \leqslant \alpha \cdot |w|\}$, причем $\Omega_\alpha(\omega) \subset L(\gamma)$. Рассмотрим функцию $G(\omega, m) = [(z - w) \cdot V'(\omega)]^{-1} \times [V(m) - V(\omega)]$, $\omega \in L(\beta; P_1)$; $m \in L(\gamma) \cap \Pi_{\operatorname{Arg}\omega}$. Пусть $A(\omega) = [w \times V'(\omega)]^{-1} \cdot V(\omega)$, $\tau = (z - w) \cdot w^{-1}$. Тогда $G(\omega, m) = G_1(\omega, m) + G_2(\omega, m)$, где $G_1(\omega, m) = A(\omega) \cdot [(1+\tau)^\rho - 1] \cdot \tau^{-1}$; $G_2(\omega, m) = A(\omega) \cdot (1+\tau)^\rho \times \tau^{-1} \cdot \{[v(\omega)]^{-1} v(m) - 1\}$, $v(\omega) = w^{-\rho} \cdot V(\omega)$. Используя (4), находим: для любого $\delta_1 \in (c, 1)$ существуют числа $\alpha \in (0,1)$ и $P_2 > P_1$, такие, что

$$|G_1(\omega, m)| > \delta_1,\ \forall \omega \in L(\beta, P_2);\ m \in \Omega_\alpha(\omega) \subset L(\gamma). \qquad (8)$$

Функция $X(\omega, \tau) = v((1+\tau)\omega)$ голоморфная по τ в окрестности круга $\{\tau \in \mathbf{C}\colon |\tau| \leqslant \alpha < 1\}$ при каждом $\omega \in L(\beta; P_2)$. По лемме Шварца

$$|G_2(\omega, m)| \leqslant |A(\omega)| \cdot (1+\alpha)^\rho \cdot \alpha^{-1} \cdot M_\alpha(\omega),\ \forall \omega \in L(\beta; P_2),\ m \in \Omega_\alpha(\omega),$$

где $M_\alpha(\omega) = \sup\limits_{|\tau|=\alpha} |[v(\omega)]^{-1} \cdot X(\omega, \tau) - 1|$. Отсюда и из (4), (5) получаем при некотором $P \geqslant P_2$

$$|G_2(\omega, m)| < \delta_1 - c,\ \forall \omega \in L(\beta; P),\ m \in \Omega_\alpha(\omega). \qquad (9)$$

Неравенство (7) вытекает теперь из (8), (9).

2) Пусть $A_\delta(r, \varphi) = \{(t, \theta) \in L;\ t \geqslant r;\ (1-\delta)\ V(t) \leqslant (1+\delta)\ V(r);\ |\theta - \varphi| \leqslant 2\delta\}$; $\Delta = (1+\delta) \cdot (1-\delta)^{-1}$. Выберем $\delta \in (0,1)$ так, чтобы $|1 - \Delta^{1/\rho} \times e^{i2\delta}| < \alpha$, $2\delta < \gamma - \beta$. Если $U(s)$ — функция, обратная к $V(t)$, то $y(s) = (\ln s)^{-1} \cdot \ln U(s) \to 1/\rho$ при $s \to \infty$, и $y(s)$ — уточненный порядок

---

* В (5) рассматривался плоский случай $\gamma < \min\{\pi, \pi/\rho\}$.

([5], [6], стр. 118). Поэтому $\lim_{r\to\infty} r^{-1} U(\Delta\cdot V(r)) = \Delta^{1/\rho}$ (см. [1], стр. 60) и существует $S_1 > P$ такое, что

$$|\operatorname{Arg} \tilde{V}(\omega) - \rho \operatorname{Arg} \omega| < \rho\delta; \quad A_\delta(\omega) \subset \Omega_\alpha(\omega), \ \forall \omega \in L(\beta; S_1). \tag{10}$$

3) Выберем число $\varkappa \in (0, 1)$ так, чтобы

$$(1-\delta)(1+\varkappa) < (1+\delta)\cdot(1-\varkappa). \tag{11}$$

Из (1) заключаем: найдется S_2 со свойством:

$$(1-\varkappa)\cdot|V(\omega)| < V(|\omega|) < (1+\varkappa)\cdot|V(\omega)|, \ \forall \omega \in L(\beta; S_2). \tag{12}$$

4) Отображение $\tilde{V}$ — взаимнооднозначное в $L(\beta; R_\beta)$, где $R_\beta = \max\{S_1, S_2\}$. Действительно, пусть $m, \omega \in L(\beta; R_\beta)$; $m \neq \omega$; $|m| \geqslant |\omega|$. Если $m \in \Omega_\alpha(\omega)$, то из (7) вытекает: $V(m) \neq V(\omega)$ и $\tilde{V}(m) \neq \tilde{V}(\omega)$. Если $m \in L(\beta; R_\beta)/\Omega_\alpha(\omega)$, то $m \in L(\beta; R_\beta)\setminus A_\delta(\omega)$. Тогда либо $|\operatorname{Arg} m - \operatorname{Arg}\omega| > 2\delta$ и из (10) находим: $\tilde{V}(m) \neq \tilde{V}(\omega)$ либо $(1-\delta)\ V(|m|) > (1+\delta)\ V(\omega)$ и из (12) имеем $(1-\varkappa)\cdot(1+\delta)\cdot|V(\omega)| < (1+\varkappa)\cdot(1-\delta)\times \times|V(m)|$. Согласно (11), это возможно, когда $|V(m)| > |V(\omega)|$, т. е. $\tilde{V}(m) \neq \tilde{V}(\omega)$. Итак, обратная функция $\tilde{V}^{-1} = \lambda$ существует в $\tilde{V}(L(\beta; R_\beta))$.

5) Образ B_β угла $L(\beta; R_\beta)$ при голоморфном отображении $\tilde{V}$ — односвязная область на L, содержащая бесконечный отрезок $\{(s, 0) \in L: s > V(R_\beta)\}$ — см. свойство 1) функции V. Из (10) следует, что при некоторых $T^{(i)} = T^{(i)}(\delta, \beta)$, $i=1, 2$ имеем: $L((\beta-\delta)\rho; T^{(1)}) \subset B_\beta \subset L(\rho(\beta+\delta); T^{(2)})$, причем δ можно взять как угодно малым. Остальные утверждения по существу доказаны в [5], стр. 354—357.

2^0. В дальнейшем потребуются следующие интегральные свойства функции класса $\mathbf{B}_\rho$:

Предложение 2. *Пусть* $\beta \in (\pi/\rho, \gamma)$; $a > 0$; $r > 0$; $\varphi_0 \in (\pi/2, \frac{\pi}{2} + \rho\alpha_\rho)$, *причем в обозначениях предложения* 1 *для всех* $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$

$$\Gamma_\varphi = \Gamma(\varphi; r; a) = \{V(r)(a + te^{i\varphi}), \ t > 0\} \subset L(\pi; T_\beta), \tag{13}$$

$$N_\varphi(\varphi) = \int_{\Gamma_\varphi} \exp\{w - V(\varphi\lambda(w))\}\, dw; \ 0 < \alpha < \alpha_\rho; \ G_\varphi = \{\varphi \in L(\alpha):$$

$\operatorname{Re}(\varphi^\rho - 1)\, e^{i\varphi} > 0\}$. *Тогда*

1) *при любом* $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ *функция* N_φ *голоморфна в области* G_φ;

2) *существует функция* N, *голоморфная в области* $D = L(\alpha)\setminus [0,1]$ *такая, что* $N(\varphi) = N_\varphi(\varphi)$, $\varphi \in D \cap G_\varphi$;

3) *функции* $N_+(\varphi) = \lim\limits_{z\to\varphi;\ \mathrm{Im}\, z>0} N(z)$; $N_-(\varphi) = \lim\limits_{z\to\varphi;\ \mathrm{Im}\, z<0} N(z)$ *непрерывны на полуинтервале* $[0,1)$, *причем* $N_+(0) = N_-(0)$.

4) *справедливо условие*

$$\lim_{\varphi\to 1} \rho(\varphi - 1)\cdot N(\varphi) = 1. \tag{14}$$

Доказательство. 1) Учитывая, что $w \equiv V(\chi(w))$, а множество

$$G_\varphi = \{\varphi \in L(\alpha)\colon \mathrm{Re}\,(\varphi^\rho - 1)\, e^{i\varphi} > 0\} \neq \varnothing, \tag{15}$$

имеем из (1)

$$B(w, \varphi) \overset{\text{опр}}{=} \exp\,\{w - V(\varphi\chi(w))\} = \exp\,\{w\,[(1 - \varphi^\rho) + \varepsilon(w)]\}, \tag{16}$$

где $\varepsilon(w) \to 0$ при $|w| \to \infty$ равномерно на любом компакте $K \subset \{\varphi \in L(\alpha)$ $\mathrm{Re}\,(\varphi^\rho - 1)\, e^{i\varphi} \geqslant b > 0\}$. Тогда существуют t_0, $A > 0$, такие, что

$$N_\varphi(\varphi) \leqslant \int_0^{t_0} |B((a + te^{i\varphi})\, V(r),\ \varphi)|\, dt + A\exp\,\{aV(r)\,\mathrm{Re}\,(1 - \varphi^\rho)\},\ \forall\varphi \in K.$$

Т. е. интеграл $N_\varphi(\varphi)$ сходится равномерно на K по φ. Поэтому функция $N_\varphi(\varphi)$ голоморфна в G_φ, $\forall\varphi \in [-\varphi_0,\ \varphi_0]$ (см. (15)). Если $0 \in G_\varphi$ (при $\varphi \in (\pi/2,\ \varphi_0)$), то функция $N_\varphi(\varphi)$ непрерывна в 0 относительно G_φ.

2) Пусть $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$; $\varphi \in G_{\varphi_1} \cap G_{\varphi_2}$; $C_t = \{w \in \mathbb{C}\colon\ w = V(r) \times (a + t\, e^{i\varphi}), \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\}$. Тогда $\varphi \in G_\varphi$, $\forall\varphi \in [\varphi_1,\ \varphi_2]$ и $\max\,\{\mathrm{Re}\,(1 - \varphi^\rho)\, e^{i\varphi}$, $\varphi \in [\varphi_1,\ \varphi_2]\}$. Проводя рассуждения, аналогичные описанным выше (см. (16)), заключаем, что $\int_{C_t} B(w, \varphi)\, dw \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда $N_{\varphi_1}(\varphi) \equiv N_{\varphi_2}(\varphi)$, $\varphi \in G_{\varphi_1} \cap G_{\varphi_2}$. Итак, утверждения 1) и 2) предложения 2 выполняются.

3) Представляя функцию $B(w, \varphi)$ (см. (16)) в виде $\exp\,\{w(1 - \varphi^\rho)\} \times \exp\,\{\varphi^\rho w - V(\varphi\chi(w))\}$, интегрируя по частям и используя формулу $U'(w) = [V'(\chi(w))]^{-1}$, $U = \pi \circ \chi$, находим

$$N_\varphi(\varphi) = (\varphi^\rho - 1)^{-1}\cdot[B(aV(r),\ \varphi) + J_\varphi(\varphi)],\ \varphi \in G_\varphi, \tag{17}$$

где

$$J_\varphi(\varphi) = \int_{\Gamma_\varphi} B(w, \varphi)\cdot H(w, \varphi)\, dw;\ H(w, \varphi) = \varphi^\rho - \varphi\cdot V'(\varphi\chi(w)) \times$$
$$\times\,[V'(\chi(w))]^{-1}.$$

Из (17) вытекает, что J_φ — голоморфная функция в G_φ,

$$\forall\,\varphi \in [-\varphi_0,\ \varphi_0] \text{ и } J_{\varphi_1}(\varphi) \equiv J_{\varphi_2}(\varphi),\ \varphi \in G_{\varphi_1} \cap G_{\varphi_2},\ 0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$$

(см. (2)). Для того чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{\varphi\to 1} \rho(\varphi - 1)\, N_\varphi(\varphi) = 1$, $\forall\varphi \in [-\varphi_0,\ \varphi_0]$, равносильное (14), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\varphi\to 1} J_\varphi(\varphi) = 0,\ |\varphi| \leqslant \varphi_0. \tag{18}$$

4) Пусть $K(w, \varphi) = w^{-1} \cdot V(\varphi \chi(w))$, $\delta \in (0, 1)$; $S_\delta = \{\varphi \in \mathbf{C}: |\varphi - 1| \leqslant \delta\}$; $M_\delta(w) = \sup_{\varphi \in S_\delta} |\varphi^\rho - K(w, \varphi)|$; $D_\delta = \sup \{|\varphi - 1| \cdot |\varphi^\rho - 1|^{-1}, \varphi \in S_\delta \setminus \{1\}\}$. Из (1) следует, что существует $t_1 = t_1(\delta)$ такое, что $M_\delta(V(r)(a + t e^{i\varphi})) < \delta^2 \cdot D_\delta^{-1}$, $t > t_1$, $|\varphi| \leqslant \varphi_0$. Из леммы Шварца имеем для $\varphi \in S_\delta \setminus \{1\}$; $|\varphi| \leqslant \varphi_0$

$$\left|\frac{1 - K(w, \varphi)}{1 - \varphi^\rho} - 1\right| = |\varphi^\rho - 1|^{-1} |\varphi^\rho - K(w, \varphi)| \leqslant \frac{M_\delta(w) \cdot |\varphi - 1|}{\delta |\varphi^\rho - 1|}, \tag{19}$$

где $w = V(r)(a + t e^{i\varphi})$, $t > t_1$. Из леммы Шварца получаем также

$$|H(w, \varphi)| \leqslant Q_\delta(w) \cdot |\varphi - 1| \cdot \delta^{-1}, \ \forall \varphi \in S_\delta; \quad Q_\delta(w) = \sup_{\varphi \in S_\delta} |H(w, \varphi)|.$$

Отсюда аналогично предыдущему, обнаруживаем:

$$|H(V(r)(a + t e^{i\varphi}); \varphi)| \leqslant \delta |\varphi - 1|, \ \forall t \geqslant t_2 = t_2(\delta), \ \varphi \in S_\delta; \ |\varphi| \leqslant \varphi_0. \tag{20}$$

Оценим теперь интеграл $J_\varphi(\varphi)$ при $|\varphi| \leqslant \varphi_0$ (см. (17)). Пусть $t_3 = \max\{t_1, t_2\}$; $\varepsilon \in (0, \pi/2)$; $G_\varphi(\varepsilon, \delta) = \{\varphi \in G_\varphi \cap S_\delta: |\varphi + \operatorname{Arg}(\varphi^\rho - 1)| < \varepsilon\}$; $\delta < \cos \varepsilon$. Из (19), (20) находим при

$$\varphi \in G_\varphi(\varepsilon, \delta): |J_\varphi(\varphi)| \leqslant \delta |\varphi - 1| \int_0^{t_3} |B(V(r)(a + te^{i\varphi}); \varphi)| \, dt + M e^{a V(r) \operatorname{Re}(1 - \varphi^\rho)} \times$$

$$\times \int_{t_3}^{\infty} \exp\{-t V(r) |\varphi^\rho - 1| (\cos \varepsilon - \delta)\} \, dt.$$

Здесь $M = M(t_3) = \mathrm{const}$. Учитывая, что δ можно взять как угодно малым, убеждаемся в справедливости (18) и, следовательно, (14). Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть* $0 < b < a$. *Существуют* $\alpha \in (0, \alpha_\rho)$, $A, B, C > 0$ *такие, что в обозначениях предложения* 2 *при* $r > A$*

$$|N(\varphi)| \leqslant B \exp\{-b V(|\varphi|)\}, \ \forall \varphi \in L(\alpha); \ |\varphi| > C. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $b < d < a$. Из предложения 1 и (1) получаем: существует $A > 0$ со свойством

$$r^{-\rho} \cdot [\chi(a V(r))]^\rho > d, \ \forall r > A. \tag{22}$$

Возьмем $\alpha \in (0, \alpha_\rho)$ такое, что $d \cos \alpha_\rho > b$. Рассмотрим функцию

$$y(|\varphi|, \lambda, w) = [V(|\varphi|)]^{-1} \cdot \operatorname{Re}[V(2\chi(w)) V(|\varphi| e^{i\lambda} \chi(w))],$$

где

$$|\lambda| \leqslant \alpha; \ |\varphi| e^{i\lambda} \in \{z \in L(\alpha): \operatorname{Re} z^\rho > 2^\rho\} \overset{\text{опр}}{=} D; \ w \in \Gamma_0,$$

(см. (13)). Из (1) имеем:

$$\lim_{w \to \infty} y(|\varphi|, \lambda, w) = -\infty, \ \forall \varphi \in D.$$

* Функция $N(\varphi)$ зависит от r, см. предложение 2.

Поэтому

$$z(|\varphi|) = \{(\mu, u) \in [-\alpha, \alpha] \times \Gamma_0 \colon x(|\varphi|) \overset{\text{опр}}{=} \sup\{y(|\varphi|, \lambda, w), |\lambda| \leqslant \alpha;$$

$$w \in \Gamma_0\} = y(|\varphi|, \mu, u)\} \neq \varnothing. \text{ Пусть } W(|z|) = \inf\{u\colon (\mu, u) \in Z(|z|).$$

Поскольку (см. (1))

$$\overline{\lim_{|\varphi| \to \infty}} x(|\varphi|) \lim_{|\varphi| \to \infty} y(|\varphi|, \lambda, w) = -\omega^\rho \cos \lambda\rho,$$

где $\omega = r^{-1} \cdot \chi(w)$, то $W(|\varphi|) \leqslant M < \infty$, $\forall |\varphi| > K$; $\varphi \in D$ при некоторых $M, K > 0$. Выберем $0 < \varepsilon < d \cos \alpha\rho - b$. Из (1) находим: существует $C > K$ со свойством:

$$y(|\varphi|, \lambda, w) \leqslant -\omega^\rho \cos \lambda\rho + \varepsilon, \ \forall |\varphi| > C; \ |\lambda| \leqslant \alpha; \ w \in [aV(r), M].$$

Учитывая, что при

$$|\varphi| > C \ x(|\varphi|) = \sup\{y(|\varphi|, \lambda, w)\colon |\lambda| \leqslant \alpha; \ w \in [aV(r), M]\}$$

и (22), выводим отсюда: $x(|\varphi|) \leqslant -d \cos \alpha\rho + \varepsilon < -b$, $\forall |\varphi| > C$.

Итак

$$\operatorname{Re}[V(2\chi(w)) - V(\varphi\chi(w))] \leqslant -bV(|\varphi|), \ \forall |\varphi| > C; \ \varphi \in L(\alpha); \ w \in \Gamma_0. \tag{23}$$

Имеем: $N(\varphi) = N_0(\varphi)$ при $\varphi \in D \subset G_0$ (см. предложение 2). Из (23) поэтому заключаем о справедливости (21)

$$\int_{\Gamma_0} \exp\{w - V(2\chi(w))\}\, dw = B(\varphi = 2 \in G_0).$$

3°. Некоторые свойства множества $\chi(\Gamma(\varphi, r, a))$ (см. (13)) выясняет

Предложение 4. *Пусть* $a > b > 0$;

$$Q_\rho(\lambda, b) = \left\{\omega \in L\colon \operatorname{Re} \omega^\rho e^{i\rho\lambda} > b; \ |\operatorname{Arg} \omega + \lambda| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}\right\}. \tag{24}$$

Существуют числа

$$S > 0; \ \alpha \in (0, \alpha_\rho); \ \varphi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \rho\alpha_\rho\right), \ \varphi_0 < \alpha\rho + \frac{\pi}{2},$$

такие, что

$$\tau^{-1}\chi(\Gamma(\varphi, |\tau|, a)) \subset Q_\rho(\theta - \alpha \operatorname{sgn} \varphi), \ \forall |\tau| > S; \ |\varphi| \leqslant \varphi_0, \tag{25}$$

где $\theta = \arg \tau$. *Если, кроме того,* $\operatorname{Arg} z = \theta - \alpha \operatorname{sgn} \varphi$, *то для любого* $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ *существует* $R_0 = R_0(|\tau|)$ *со свойством:*

$$\operatorname{Re} V(z/\tau\, \chi(w)) \geqslant b \cdot V(|z|), \ \forall |z| > R_0; \ w \in \Gamma(\varphi, |\tau|, a). \tag{26}$$

Доказательство. Возьмем $\alpha \in (0, \alpha_\rho)$, так, чтобы $a \cos \alpha\rho > b$. Выберем $\varphi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \rho\alpha_\rho\right)$ со свойством $\varphi_0 < \alpha\rho + \pi/2$. Из предложения 1, используя свойства функций класса $B_{\rho-1}$, находим: для всех $r > R_1 = R_1(\varepsilon)$; $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ $\Gamma_\varphi \subset \Pi(L(\pi, T_\beta))$ (см. (13)), где $\varepsilon > 0$, и $|\operatorname{Arg} \chi(w) - \rho^{-1} \arg w| < \varepsilon$, $\forall w \in \Gamma_\varphi$. С другой стороны, если, например, $\varphi > 0$, то $0 \leqslant \arg w \leqslant \varphi$, $\forall w \in \Gamma_\varphi$; $\varphi \in [0, \varphi_0]$; $r > R_1$. Поэтому при тех же предположениях $\varepsilon < \operatorname{Arg} \chi(w) < \varphi/\rho + \varepsilon$. Полагая, что

$$\varepsilon < \rho^{-1} \cdot \min \left\{ \alpha\rho + \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \ \pi/2 \right\},$$

заключаем отсюда: $|\operatorname{Arg} \chi(w) - \alpha| < \dfrac{\pi}{2\rho}$, $\forall w \in \Gamma_\varphi$; $r > R_1$, $0 < \varphi \leqslant \varphi_0$. Чтобы убедиться в справедливости (25) теперь достаточно заметить, что $r \equiv \chi(V(r))$

$$\varliminf_{r \to \infty} T_r \geqslant a \cos \rho\alpha > b, \tag{27}$$

где $T_r = \inf \{\operatorname{Re} r^{-\rho} \cdot [\chi(w)]^\rho - e^{i\rho\alpha \operatorname{sgn} \varphi}, \ w \in \Gamma_\varphi; \ |\varphi| \leqslant \varphi_0\}$ (см. доказательство предложения 3). По аналогичным причинам из (27) вытекает (26), поскольку

$$\varliminf_{s \to \infty} \inf_{w \in \Gamma_\varphi} \operatorname{Re} [V(s)]^{-1} \cdot V(s/r \ e^{-i\alpha \operatorname{sgn} \varphi})] > b.$$

§ 2. Аналог теоремы Полиа

1°. Пусть $\rho > 0$, $V \in B_\rho$. Рассмотрим класс $\mathfrak{M}_\rho(V) = \{f\}$ целых функций в $\mathbf{C}$, таких, что при некоторых $M = M(f)$, $m = m(f) > 0$

$$|f(z)| \leqslant M \exp\{mV(|z|)\}, \ \forall z \in \mathbf{C}. \tag{28}$$

Определение 1. ([5]; [11], стр. 324; [12]). Пусть

$$\Delta_k = \rho \cdot \int_0^\infty e^{-V(t)} \cdot t^k dt; \ f(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{\Delta_k} z^k$$

— целая функция класса $\mathfrak{M}_\rho(V)$. Ее V-преобразованием Бореля назовем функцию

$$F(p) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{p^{k+1}}. \tag{29}$$

Это преобразование осуществляет изоморфизм класса $\mathfrak{M}_\rho(V)$ и класса функций, голоморфных в окрестности ∞: целая функция f удовлетворяет условию (28) тогда и только тогда, когда ряд (29) сходится при всех $|p| > m^{1/\rho}$ ([1], стр. 61), поскольку $\chi(k) \cdot (\rho e)^{-1/\rho} \sim \sqrt[k]{\Delta_k}$, где $\chi(s)$ — функция, обратная к $V(t)$ ([5], стр. 370; [13], теорема 13.5).

Пусть $P_\rho = \{h\}$ — класс конечных неотрицательных тригонометрически—ρ-выпуклых 2π-периодических функций в R^1. Тогда $\mathfrak{M}_\rho(V) =$

$= \cup\, \mathbf{P}_\rho(V;\ h)|h \in \mathbf{P}_\rho$, где $\mathbf{P}_\rho(V;\ h) = \{f\}$—класс целых функций, таких, что при некотором $A = A(f, \varepsilon)$ и любом $\varepsilon > 0$

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant A \exp\{(h(\theta) + \varepsilon(V(r)\},\ \forall z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}. \tag{30}$$

Напомним некоторые факты, связанные с ρ-выпуклыми множествами.

Определение 2 ([11], стр. 333; [7]). Пусть $\rho > 0$; $0 \leqslant \theta_2 - \theta_1 \leqslant \leqslant 2\pi_\rho$; $\Delta(\theta_1, \theta_2) = \{z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}:\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}$. Множество E в $\mathbf{C}$ называется ρ-выпуклым, если $D \in E$ и при любых допустимых значениях θ_1, θ_2 образ $\Delta(\theta_1, \theta_2) \cap E$ при отображении $z \to z^\rho$ выпуклое множество.

Для любой функции $h \in p_\rho$

$$K_h = \{p \in \mathbf{C}:\ \Phi_\rho(pe^{i\theta}) \leqslant h(\theta),\ \forall \theta \in R^1\}^* \tag{31}$$

—единственный ρ-выпуклый компакт, ρ-опорной функцией которого является h, т. е.

$$h(\theta) = \sup_{p \in K_h} \Phi_\rho(pe^{i\theta})\ [7].$$

Нижеследующее интегральное представление функции $F(p)$ (29) в близкой форме есть в [5], стр. 379; [11], стр. 330 (случай $\Delta_k = = \Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \mu\right)$; [12]).

Лемма 1. *Пусть* $\rho > 0$; $V \in \mathbf{B}_3$; $h \in P_\rho$; $f \in \mathbf{P}_\rho(V;\ h)$. *Тогда* ($\operatorname{Arg} z = \theta$)

$$F_\theta(r, \varphi) \overset{\text{опр}}{=} \rho \cdot \int\limits_0^\infty \exp\{-V((rt, \theta + \varphi))\} f(te^{i\theta})\, d(te^{i\theta})$$

функция, голоморфная в области $Q_\rho = Q_\rho(\theta;\ h(\theta))$ (*см.* (24)) *при любом* $\theta \in R^1$, 2π-*периодическая по* φ, *когда* $\rho < 1/2$, *причем* $\{H_\theta(p),\ p \in D_\rho(\theta;\ h(\theta))^{**};\ \theta \in R^1\}$, *где* $H_\theta(p) = F_\theta \circ \pi^{-1}(p)$, $\pi^{-1}(p) \in Q_\rho$ — *аналитическое продолжение* V-*преобразования Бореля* $F(p)$ *функции* f *во внешность* ρ-*выпуклого компакта* K_h (31).

Доказательство. Голоморфность функции $F_\theta(\omega)$ объясняется равномерной сходимостью интеграла $F_\theta(\omega)$ на любом компакте $K \subset Q_\rho$ (см. доказательство предложения 2,1)). Обычным путем (см., например, [1], стр. 115) доказывается при некотором $R > 0$ тождество

$$F_\theta(r, -\theta) \equiv F(re^{i\theta}),\ \forall r > R. \tag{32}$$

При $\rho \geqslant 1/2$ из теоремы единственности получаем: $H_\theta(p)$—аналитическое продолжение функции $F(p)$ в $D_\rho(\theta;\ h(\theta))$.

При $\rho < 1/2$ ∞ — внутренняя точка $D_\rho(\theta;\ h(\theta))$. Функция $F \circ \pi$— голоморфная 2π-периодическая на $A = \{\omega \in L:\ |\omega| > m^{1/\rho}\}$, где

$$m = \max_{\psi \in R^1} h(\psi) = h(\theta_0) \geqslant 0,\ |\theta - \theta_0| \leqslant \pi \tag{33}$$

(см. (30), (28)). По теореме единственности для связных комплексно-одномерных аналитических многообразий из (32) выводим:

---

*, ** См. список обозначений.

$$F\circ\pi(\omega)\equiv F_0(\omega),\ \forall\omega\in A\cap Q_\rho. \tag{34}$$

Луч $\{(r, -\theta+\pi)\in L\colon r^\rho\cos\pi\rho>h(\theta)\}$, который проектируется в разрез области $D_\rho(\theta;\ h(\theta))$ по лучу $\operatorname{Arg} p=-\theta+\pi$, принадлежит $A\cap Q_\rho$: $h(\theta)\geqslant h(\theta_0)\cos\rho(\theta-\theta_0)\geqslant m\cos\pi\rho$ (см. (33); [1], стр. 78). Отсюда и из (32) вытекает аналогичное заключение относительно $H_0(p)$ и при $0<\rho<1/2$. По этой же причине $F_0(\omega)$ — 2π-периодическая функция в Q_ρ: если $\omega_1, \omega_2\in Q_\rho$, $\operatorname{Arg}\omega_2-\operatorname{Arg}\omega_1=2\pi$, то $\omega_1, \omega_2\in A$.

Так как K_h — звездный компакт, то $\mathbf{C}\diagdown K_h$ — односвязная область на сфере Римана ($F(\infty)=0$). Отсюда и из теоремы о монодромии заключаем о справедливости леммы.

2°. Рассмотрим иной вид связи между функциями, голоморфными в окрестности ∞ в $\mathbf{C}$ и целыми функциями класса $\mathfrak{M}_\rho(V)$, где $V\in\in\mathbf{B}_\rho$, $\rho>0$.

Предложение 5. *Пусть в обозначениях предложения* 2

$$\Phi(\varphi)=N_+(\varphi)-N_-(\varphi);\ R>1;\ L_R(\delta)=\{\varphi\in\mathbf{C}\colon |\arg\varphi|<\delta;\ |\varphi|<R\};$$

$\psi(z)$ — функция, голоморфная в секторе $L_R(\delta)$, непрерывная в его замыкании. Тогда

1) *справедлива формула*

$$\psi(1)=\frac{\rho}{2\pi i}\left[\int\limits_{\partial L_R}N(\varphi)\,\psi(\varphi)\,d\varphi+\int\limits_0^1\Phi(\varphi)\,\psi(\varphi)\,d\varphi\right], \tag{35}$$

где последний интеграл понимается в смысле Римана, а ∂L_R — граница сектора L_R, ориентированная в положительном направлении;

2) *если*

$$d_k=\frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_0^1\Phi(\varphi)\,\varphi^k\,d\varphi,\ k=0, 1,\cdots,$$

то $\lim\limits_{k\to\infty}d_k=0$.

Доказательство. Формула (35) вытекает из интегральной теоремы Коши. Достаточно рассмотреть контур, объединяющий множество ∂L_R, отрезок $[0, 1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$, дважды проходимый в противоположных направлениях и окружность $\{\varphi\in\mathbf{C}\colon |\varphi-1|=\varepsilon\}$, отрицательно ориентированную, а затем перейти к пределу при $\varepsilon\to0+$. Утверждение 2) объясняется равномерной сходимостью по переменной k интеграла d_k (признак Абеля) и непрерывностью подынтегральной функции.

Сопоставим теперь функции $F(p)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{p^{k+1}}$, голоморфной в окрестности ∞ в $\mathbf{C}$, целую функцию (см. определение 1 и предложение 5)

$$\hat{f}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\Delta_k}(1-d_k)z^k.$$

Аналогично предыдущему устанавливаем, что $\hat{f}\in\mathfrak{M}_\rho(V)$. Эта функция с функцией $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\Delta_k}z^k$, V-преобразование которой совпадает с F, связана соотношением (см. предложение 5)

$$\hat{f}(z)=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\partial L_R}f(\alpha z)\,N(\alpha)\,d\alpha,\ \forall R>1. \qquad (36)$$

Согласно (35), достаточно доказать, что

$$\hat{f}(z)=f(z)-\frac{\rho}{2\pi i}\int_0^1 f(\alpha z)\,\Phi(\alpha)\,d\alpha.$$

Интегрируя по частям последний интеграл, используя непрерывность функции $\int_0^{\alpha}\Phi(\beta)\,d\beta$ (Φ — функция, интегрируемая по Риману на [0,1]) и равномерную сходимость на любом компакте степенного ряда, в который разлагается целая функция, убеждаемся в том, что

$$\frac{\rho}{2\pi i}\int_0^1 f(\alpha z)\,\Phi(\alpha)\,d\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k\cdot a_k}{\Delta_k}z^k.$$

Отсюда и вытекает формула (36).

Другой вид ассоциации, отличный от данного, между целыми функциями класса $\mathfrak{M}_\rho(V)$ и функциями, голоморфными в окрестности ∞, рассматривали В. Бернштейн [5] и Ф. И. Гече [12] при построении „приближенных" аналогов теоремы Полиа.

Именно для функции $\hat{f}$, а не для f, существует удобное для дальнейших рассмотрений интегральное представление через голоморфную в окрестности ∞ функцию F. Соответствующая интегральная формула, полученная ниже, развивает результаты А. Макинтайра [14] и М. М. Джрбашяна ([11], стр. 327), рассматривавших $\Delta_k=\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+\mu\right)$ соответственно при $\mu=1/\rho$ и $\operatorname{Re}\mu>0$ (см. определение 1 — тогда $d_k\equiv 0$; $k=0, 1, 2,\cdots$). Ее доказательство проводится по схеме А. Макинтайра [14].

Теорема 1*. *Пусть* $\rho>0$; $V\in\mathfrak{M}_\rho$; χ — *отображение, обратное к* $\tilde{V}$ (6); F — *функция, голоморфная в окрестности* ∞; $U=\pi\circ\chi$.

---

* В [15] эта теорема анонсирована для случая $\hat{f}=f$; $d_k=d_k(V)\equiv 0$, $k=0$, 1, 2, $\cdots$, причем это условие в формулировке теоремы 1 в [15] опущено по недосмотру автора.

Существуют a, $R>0$; $\varphi_0 \in \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}+\rho\alpha_\rho\right)$ такие, что при $|\tau|>R$; $\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\varphi_0$

$$\hat{f}(\tau)=\frac{V(|\tau|)}{2\pi i\tau}\int\limits_{\lambda(a,\varphi)}\exp\{V(|\tau|)\varphi\}\cdot F(\tau^{-1}\cdot U(V(|\tau|\varphi))\,d\varphi, \tag{37}$$

где $\lambda(a,\varphi)=\{\varphi=a+te^{\pm i\varphi};\ t\geqslant 0\}$ — бесконечный контур, ориентированный в направлении возрастания $\arg\varphi$.

Доказательство. 1) Формула (37) эквивалентна формуле

$$\hat{f}(\tau)=(2\pi i\tau)^{-1}\cdot[J_\varphi-J_{-\varphi}],\quad J_\mu=\int\limits_{\Gamma_\mu}e^w\cdot F[\tau^{-1}\cdot U(w)]\,dw, \tag{38}$$

где $\Gamma_\mu=\Gamma(\mu,|\tau|,a)$ (см. (13)), $\mu=\pm\varphi$; $\varphi>\frac{\pi}{2}$. Выберем $a>m>\tau$, где m — связанная с f постоянная, согласно (28), и пусть $b\in(m,a)$ (f, $\hat{f}\in\mathfrak{M}_\rho(V)$ — см. выше). Из предложения 4 вытекает существование чисел $S>0$; $\alpha\in(0,\alpha_\rho)$, $\varphi_0\in(\pi/2,\pi/2+\rho\alpha_\rho)$, таких, что при $|\tau|>S$; $\pi/2<\varphi\leqslant\varphi_0$ (см, 24), (25))

$$\tau^{-1}U(\Gamma(\varphi,|\tau|,a))\subset\pi(Q_\rho(\theta-\alpha;\ b))=D_\rho(\theta-\alpha;\ b), \tag{39}$$

где $\theta=\arg\tau$; $U=\pi\circ\chi$. Так как $b>m$, то $D_\rho(\theta-\alpha;\ b)\subset\{p\in\mathbf{C}\colon|p|>>m^{1/r}\}$. Но на этом множестве ряд $F(p)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a}{p^{k+1}}$ сходится (см. выше). Так как $F(\infty)=0$, то при некотором $M>0$

$$|F(p)|<M,\ \forall p\in D_\rho(\theta-\alpha;\ b). \tag{40}$$

Поэтому интегралы $J_{\pm\varphi}$ сходятся абсолютно. Далее, согласно лемме 1, используя ее обозначения, имеем при $\rho<1/2$: $F_\theta(r,\psi+2\pi)=$ $=F_\theta(r,\psi)=F(\omega re^{i\psi})$, если (r,ψ), $(r,\psi+2\pi)\in Q_\rho(\theta-\alpha,b)$, а при любом $\rho<0$

$$J_\varphi=\int\limits_{\Gamma\varphi}e^w\cdot F_{\theta-\alpha}(\tau^{-1}\chi(w))\,dw=\rho\int\limits_{\Gamma_\varphi}dw\int\limits_0^{\infty\,(\mathrm{Arg}\,z=\theta-\alpha)}T(w,z)\,dz,$$

где $T(w,z)=f(z)\cdot\exp\left\{w-V\left(\frac{z}{\tau}\ \chi(w)\right)\right\}$.

2) Покажем, что возможна перемена порядка интегрирования. Интегралы

$$\int\limits_0^{\infty\,(\mathrm{Arg}\,z=\theta-\alpha)}T(w,z)dz,\ \int\limits_{\Gamma_\varphi}T(w,z)\,dw$$

сходятся равномерно по параметру на каждом компакте, принадлежащем соответственно $\{z \in \mathbf{C}: \operatorname{Arg} z = \theta - \alpha\}$ и Γ_φ (см. доказательства леммы 1 предложения 2, 1)). Пусть $Y(w, z) = \operatorname{Re} V\left(\frac{z}{\tau}\chi(w)\right)$. Тогда из (24), (26) (условия предложения 4 выполняются) находим: при некотором $R_0 > 0$

$$\int_{R_0}^{\infty(\operatorname{Arg} z = \theta - \alpha)} |f(z)| \exp\{-Y(w, z)\}\, d|z| \leqslant \int_{R_0}^{\infty(\operatorname{Arg} z = \theta - \alpha)} \exp\{(m - b)\, V(|z|)\}\, d|z| < \infty. \quad (41)$$

Функция $M(|z|) = \inf\limits_{w \in \Gamma_\varphi} Y(w, z)$ непрерывна на полуинтервале $(0, R_0]$, поскольку (см. (1))

$$Y(w, z) = V(|\chi(w)|)\left(\left|\frac{z}{\tau}\right|^{\rho} \cos(\rho\alpha - \varphi) + \varepsilon(w)\right),$$

где $\varepsilon(w) \to 0$ при

$$|w| \to \infty; \; w \in \Gamma_\varphi \text{ и } -\frac{\pi}{2} < \rho\alpha - \varphi_0 < \rho\alpha - \varphi < \rho\alpha < \frac{\pi}{2}$$

(предложение 4). Отсюда и из (41) выводим

$$\int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty(\operatorname{Arg} z = \theta - \alpha)} |T(V(|\tau|)(te^{i\varphi} + a), z)\, d|z| < \infty \quad (\pi/2 < \varphi < \pi).$$

Следовательно,

$$J_\varphi = \rho \int_0^{\infty(\operatorname{Arg} z = \theta - \alpha)} f(z)\, N_\varphi\left(\frac{z}{\tau}\right) dz = \rho\tau \cdot \int_0^{\infty(\operatorname{Arg} \varphi = -\alpha)} f(\tau\varphi)\, N_\varphi(\varphi)\, d\varphi$$

(см. предложение 2). Аналогично,

$$J_{-\varphi} = \rho \cdot \int_0^{\infty(\operatorname{Arg} z = \theta + \alpha)} f(z)\, N_\varphi\left(\frac{z}{\tau}\right) dz = \rho\tau \cdot \int_{\infty}^{\infty(\operatorname{Arg} \varphi = \alpha)} f(\tau\varphi)\, N_\varphi(\varphi)\, d\varphi.$$

3) Пусть $C_s = \{z = se^{i\psi}, |\psi| \leqslant \alpha\}$, $1 < s$; $N(\varphi)$ — функция, построенная в предложении 2. Из предложения 3 находим

$$\int_{C_s} f(\tau\varphi)\, N(\varphi)\, d\varphi \to 0 \text{ при } s \to \infty \; (b > m).$$

Поэтому

$$\rho(2\pi i\tau)^{-1} \cdot [J_\varphi - J_{-\varphi}] = \lim_{s \to \infty} \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\partial G_s} f(\tau\varphi)\, N(\varphi)\, d\varphi, \quad (42)$$

где G_s — ориентированная в положительном направлении область, ограниченная отрезками $\{\varphi = re^{\pm i\alpha}: 0 \leqslant r \leqslant s\}$ и дугой C_s. Для доказательства теоремы 1 достаточно теперь воспользоваться формулой (36) (см. (38)).

Лемма 2. *Если в условиях теоремы 2 функция F аналитически продолжается в $\mathbf{C} \setminus K_h$ (см. (31)), то $\hat{f} \in \mathbf{P}_\rho(V; h)$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что в (28) постоянная $m > \sup_{\psi \in R^1} h(\psi)$. Пусть $m > a_1 > b_1 > h(\theta)$. Согласно предложению 4 найдем α, $S > 0$; $\varphi \in (\pi/2, \pi/2 + \rho\alpha_\rho)$, такие, что

$$(re^{i\theta})^{-1} \cdot U(\Gamma(\pm\varphi, r, a_1)) \subset D_\rho(\theta \mp \alpha; b_1) \subset \mathbf{C} \setminus K_h, \ \forall r > S,$$

причем эти постоянные можно выбрать так, чтобы одновременно выполнялось (39) при $\arg \tau = \theta$. Но в (39) $a > b > m$, следовательно, в области, ограниченной контурами $\lambda(a_1, \varphi)$, $\lambda(a, \varphi)$ (см. (37)), определена голоморфная по φ функция $G(\varphi, r, \theta) = F[(re^{i\theta})^{-1} \cdot U(V(r)\varphi)] \times \exp\{V(r)\varphi\}$. Так как

$$F(\infty) = 0, \text{ то } \int_{B_y} G(\varphi, r, \theta)\, d\varphi \to 0$$

при $y \to \pm\infty$, где $B_y = \{\varphi = x + iy: a_1 \leqslant x \leqslant a\}$. Из теоремы Коши и (37) получаем

$$\hat{f}(re^{i\theta}) = \frac{V(r)}{2\pi i r\, e^{i\theta}} \int_{\lambda(a_1, \varphi)} G(\varphi, r, \theta)\, d\varphi.$$

Оценивая этот интеграл, как и ранее (см. 32)), находим: при некотором $M_1 > 0$ $|\hat{f}(re^{i\theta})| < M_1 \exp\{a_1 V(r)\}$, $\forall r > S$. Поэтому $h_{\hat{f}}^{+}(\theta) \leqslant h(\theta)$, $\forall \theta \in R^1$ (разность $a_1 - h(\theta)$ может быть произвольно мала). Это эквивалентно тому, что $\hat{f} \in \mathbf{P}_\rho(V; h)$, благодаря лемме Гартогса ([3], стр. 39) и непрерывности функции h.

3°. Как известно, [5], [12], справедлива и другая интегральная формула, связывающая функцию f из $\mathfrak{M}_\rho(V)$ и ее V-преобразование Бореля F:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} E_\rho(zp; V) \cdot F(p)\, dp; \ E_\rho(w; V) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{\Delta_k}, \tag{43}$$

где Γ — ориентированный в положительном направлении жорданов контур, охватывающий особенности F (см. определение 1).

Анализ исследований в [5] показывает, что одна из причин, помешавших В. Бернштейну получить полный аналог теоремы Полиа для класса целых функций уточненного порядка, исходя из (43), состоит в том, что обобщенный индикатор $h_E^+(\theta)$ у функции $E_\rho(w; V)$

не был известен (за исключением случая $V(t) = t^\rho$; $E_\rho(w;\ t^\rho)$ — функция Миттаг—Леффлера).

Лемма 3. *Пусть* $\rho > 0; V \in \mathfrak{M}_\rho$; $h_E^+(\theta) = \max\{0,\ h_E(\theta)\}$; $h_E(\theta) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\,[V(r)]^{-1}\cdot\ln|E_\rho(re^{i\theta};\ V)|$ — *обобщенный индикатор функции* $E_\rho(w;\ V)$ (*см.* (43)). *Тогда*

$$h_E^+(\theta) = \cos^+\rho\theta = \begin{cases}\cos\rho\theta, & |\theta| \leqslant \alpha_\rho \\ 0, & \rho > 1/2;\ \alpha_\rho \leqslant |\theta| \leqslant \pi.\end{cases}$$

Доказательство. Последовательность $\{d_k\}$ из предложения 5 обладает свойством: $|d_k| < 1$ при $k \geqslant k_0$. Рассмотрим функцию

$$F(p) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{(1 - d_k)\, p^{k+1}}.$$

Согласно предложению 5 имеем: $d_k = d(k)$, где

$$d(z) = \int_0^1 \Phi(\alpha)\,\alpha^z\,d\alpha = B(1) - z\int_0^1 B(\alpha)\,\alpha^{z-1}\,d\alpha =$$

$$= B(1) - z\int_0^\infty \tilde B(e^{-x})\,e^{-zx}\,dx,$$

$B(\alpha) = \int\limits_0^\alpha \Phi(\beta)\,d\beta$ — непрерывная функция на $[0,1]$. Отсюда используя лемму Ватсона ([16], стр. 33), находим: $d(z)$ — целая функция такая, что для любого $\varepsilon > 0$ $d(z) \to 0$ при $z \to \infty$; $z \in L\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Поэтому $A(z) = [1 - d(z)]^{-1}$ — функция, голоморфная в области $\bigcup\limits_{0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}} L\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon;\ R_\varepsilon\right)$. Применяя теперь теорему 7.3.6 из [17], стр. 215 заключаем: функция $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} A(k)\,z^{k+1}$ голоморфно продолжается в области $G_\varepsilon = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}:\ 0 \leqslant r < \exp\{\operatorname{ctg}\varepsilon\cdot\min\{\theta,\ 2\pi - \theta\}\},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому функция $F(p) = \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \frac{A(k)}{p^{k+1}}$ аналитически продолжается в $\mathbb{C}\setminus[0,1]$.

2) Отрезок $[0,1]$ — ρ-выпуклый компакт, для которого ρ-опорной функцией является функция $\cos^+\rho\theta$. По лемме 2 тогда у функции $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}$ и, следовательно, у функции $E_\rho(z;\ V)$ (см. 42)) срезка индикатора удовлетворяет условию: $h_E^+(\theta) \leqslant \cos^+\rho\theta$, $|\theta| \leqslant \pi$.

С другой стороны, по лемме 1 ρ-выпуклый компакт K_h (см. (31)) ассоциированный с неотрицательной срезкой h_E^+ обобщенного индикатора h_E целой функции $E_\rho(z;\ V)$, содержит точки $\{1\}$, $\{0\}$ и, следовательно, отрезок $[0,1]$. Отсюда $h_E^+(\theta) \geqslant \cos^+ \rho\theta$. Лемма доказана.

Аналогом теоремы Полиа для целых функций уточненного порядка является обобщающая результаты М. Ф. Субботина, А. Е. Аветисяна и М. М. Джрбашяна ([2], стр. 17).

Теорема 2 (*Ср.* [8], *теорема* 6). *Пусть* $\rho > 0$; $V \in \mathbf{B}_\rho$; $h \in P_\rho$; $f \in \mathfrak{M}_\rho(V)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *У целой функции f неотрицательная срезка ее обобщенного индикатора* $h_f^+ = h$;

2) *Наименьший ρ-выпуклый компакт, во внешность которого аналитически продолжается V-преобразование Бореля функции f, совпадает с K_h (см.* (31)).

3) *Если μ — аналитический функционал такой, что* $\mu_\rho(E_\rho(z;\ \varphi;\ V)) \equiv f(z)$* *(см.* 43)), *то K_h — единственный ρ-выпуклый носитель функционала* μ;

4) *В обозначениях определения* 1

$$H(z) = H(re^{i\theta}) \overset{\text{опр}}{=} r^\rho \cdot h(\theta) = \inf\{\alpha^\rho > 0\ \ \alpha^{-1} z \in B_\rho(b)\} -$$

ρ-функционал Минковского открытого ядра $B_\rho(b)$ *„ρ-многоугольника Бореля“ Δ функции* $b(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, *где Δ — множество точек абсолютной сходимости интеграла*

$$\int\limits_0^\infty \exp\{-V(t)\} \cdot f(tz)\, dt$$

или

$$B_\rho(b) = \{z \in \mathbf{C}:\ H(z) < 1\}.$$

Компакт, о котором говорится в условии 2), существует благодаря теореме о монодромии, поскольку пересечение T любого числа ρ-выпуклых компактов — ρ-выпуклый и, следовательно, звездный компакт, т. е. дополнение множества T—односвязная область на сфере Римана.

Доказательство теоремы 2 протекает по той же схеме, что и доказательство теоремы 6 в [8], исходя из лемм 1, 3 (в рассуждениях § 2 из 8 функцию Миттаг-Леффлера следует заменить на функцию $E_\rho(w;\ V)$, $K \in \mathbf{B}_\rho$ и использовать (42)).

Замечание 1. При $\rho \leqslant 1/2$ имеем: $h_f^+(\theta) \equiv h_f(\theta)$ ([1], стр. 78).

---

* Существование такого функционала доказывается путем ([3], стр. 137; [10], лемма 3).

Замечание 2. Поскольку ρ-выпуклые множества — это выпуклые множества в $\mathbf{C}$, содержащие 0, то при $\rho=1$ теорема 2 не является полным аналогом теоремы Полиа в классической формулировке. Вопрос о том, можно ли получить такой аналог, нуждается в дополнительном исследовании (функция V в Λ имеет особенность), на чем мы здесь не останавливаемся.

Институт физики им. Л. В. Киренского
СО АН СССР

Поступила 24.VII.1976

Լ. Ս. ՄԱՅԵՐԳՈՅԶ. Պոլիայի թեորեմի անալոգը և նրա մի քանի կիրառությունները (ամփոփում)

Լավ հայտնի է Պոլիայի թեորեմը էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիայի ինդիկատորի և համալուծ դիագրամայի միջև կապի մասին։ Տվյալ հոդվածում առաջարկվում է նրա ընդհանրացումը ճշգրտված կարգի ամբողջ ֆունկցիաների դասի վրա, որը նման է Մ. Ֆ. Սուբոտինի, Մ. Մ. Ջրբաշյանի, Ա. Ե. Ավետիսյանի ստացած արդյունքներին $\rho > 0$ կարգի և նորնի արդյունքների օգնությամբ պարզաբանել ճշգրտված կարգի $\rho(r)$ ամբողջ ֆունկցիայի ընդհանրացված ինդիկատորի կապը, որտեղ $\rho(r) \to \rho$ երբ $r \to \infty$, անալիտիկ ֆունկցիոնալի ρ-ուռուցիկ կրիչի և $\mathbf{C}^1$-ում O կետի շրջակայքում հոլոմորֆ ֆունկցիայի ρ-Բորելի բազմանկյան հետ։

L. S. MAERGOIZ. *On an analogue of Polya theorem and its applications* (summary)

Polya theorem on connections between indicator and conjugate diagrams of entire function of exponential type is well known. In the present paper its generalization for entire functions of proximate order is given. This is similar to M. F. Subotin, M. M. Jrbashian, A. E. Avetisian results for entire functions of finite order $\rho > 0$ and of normal type. With results by E. Borel, G. Polya, V. Bernstein it reveals the connection of generalized indicator of an entire function of proximate order $\rho(r)$ ($\rho(r) \to \rho > 0$, when $r \to \infty$) with ρ-convex support of analytic functional and "Borel ρ-polygon" of function which is analytic in a neighborhood of O in $\mathbf{C}^1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.
2. История отечественной математики, т. 4, книга 1, Киев, изд. «Наукова думка», 1970.
3. *Л. Хермандер*. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, Изд. «Мир», 1968.
4. *C. O. Kiselman*. Functionals on the space of solutions to a differential equation with constant coefficiants. The Fourier and Borel transformations, Math. Scand., 23, 1968, 27—53.
5. *V. Bernstein*. Sulla crescenza delle transendenti intere di ordine finito, Reale Accad. d'Italia, Memorie delle classe di scien. fis. matem. e natur., IV, 1933, 339—401.
6. *Л. С. Маергойз*. Аналог теоремы Полиа для целых функций уточненного порядка, в сб. «Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных», Красноярск, Изд. ИФ СО АН СССР, 1973, 109—121.
7. *Л. С. Маергойз*. Плоские ρ-выпуклые множества и некоторые их приложения, в сб. «Голоморфные функции многих комплексных переменных», Красноярск, Изд. ИФ СО АН СССР, 1972, 75—91.

8. *E. Borel.* Lecons sur les sèries divergentes, Paris, 1928.
9. *G. Valiron.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'orde fini et en particulier les fonctions à correspondance reguliere, Ann. fac. sci. Univ. Toulouse, 5, 1913, 117—257.
10. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., Изд. «Наука», 1970.
11. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. «Наука», 1966.
12. *Ф. И. Гече.* Об уточненных характеристиках роста целых функций многих комплексных переменных, Литовск. матем. сб., VIII, № 3, 1968, 461—488.
13. *М. А. Евграфов.* Асимптотические оценки и целые функции, М., Физматгиз. 1962.
14. *A. Macintyre.* Laplace's transformation and integral functions, Proc. London Math. Soc., (2), 45, 1938, 1—20.
15. *Л. С. Маергойз.* Аналог теоремы Полиа для целых функций уточненного порядка и некоторые его приложения, Функциональный анализ и его приложения, II, вып. 3, 1977, 84—85.
16. *М. В. Федорюк.* Метод перевала, М., Изд. «Наука», 1977.
17. *Л. Бибербах.* Аналитическое продолжение, М., Изд. «Наука», 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 1, 1980 Математика

Н. А. ШИРОКОВ

ОЦЕНКИ В L^p (C) НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В последние годы развитие теории функций побудило ввести и изучить важные сингулярные интегральные операторы несверточного типа. Первый пример подобных операторов рассмотрел Кальдерон [2]. Именно, пусть функции $v \in \mathrm{Lip}_{\mathbf{R}}\, 1$, $\|\nabla v\|_\infty \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{esssup}_{x\in\mathbf{R}} |v'(x)|$, $f \in L^p(\mathbf{R})$, $1 < p < \infty$. Положим

$$MTf(x) = MT_1 f(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|y-x|>\varepsilon} \frac{v(x)-v(y)}{x-y} \frac{f(y)}{x-y}\, dy \right|.$$

Кальдерон доказал (см. также Бенедек и Панзоне [3]), что оператор MT действует из пространства $L^p(\mathbf{R})$ в пространство $L^p(\mathbf{R})$. Затем Койфман и Мейер [1] обобщили определение оператора Кальдерона следующим образом:

$$MT_n f(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|y-x|>\varepsilon} \left(\frac{v(x)-v(y)}{x-y} \right)^n \frac{f(y)}{x-y}\, dy \right|,$$

$n = 1, 2, \cdots$. Они установили, что все операторы MT_n непрерывны в $L^p(\mathbf{R})$ и при фиксированном p, $1 < p < \infty$ и растущем n их нормы оцениваются так:

$$\|MT_n\|_{L^p(\mathbf{R})} \leqslant C_p \exp(cn^2) \|\nabla v\|_\infty^n$$

при некотором $c > 0$. Впоследствии Кальдероном было показано, что оценка Койфмана и Мейера завышена и справедливо неравенство

$$\|MT_n\|_{L^p(\mathbf{R})} \leqslant C_p \exp(cn) \|\nabla v\|_\infty^n, \quad c > 0.$$

Оказывается, что аналог операторов, рассмотренных в пространствах $L^p(\mathbf{R})$ Кальдероном, Койфманом и Мейером, можно изучать и в пространствах $L^p(\mathbf{C})$, и оценка нормы соответствующего n-ного оператора в $L^p(\mathbf{C})$ лучше, чем в $L^p(\mathbf{R})$.

Определение. Пусть функция $v \in \mathrm{Lip}_{\mathbf{C}}\, 1$,

$$\|\nabla v\|_\infty \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{esssup}_{z\in\mathbf{C}} \sqrt{\left|\frac{\partial v(z)}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial v(z)}{\partial y}\right|^2}.$$

Для натурального n и $f \in L^p(\mathbf{C})$, $1 < p < \infty$ положим

$$T_n f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \left(\frac{v(z) - v(\zeta)}{z - \zeta} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2} \, d\sigma_\zeta ,$$

$$MT_n f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \left(\frac{v(z) - v(\zeta)}{z - \zeta} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2} \, d\sigma_\zeta \right| ,$$

где $d\sigma_\zeta$ —плоская мера Лебега. Первый оператор рассматривается в тех точках z, для которых предел справа существует.

Теорема 1. *Пусть функция v такая, как в определении, $f \in L^p(\mathbf{C})$, $1 < p < \infty$. Тогда функции $T_n f$ и $MT_n f$ определены при п. в. $z \in \mathbf{C}$ и для их норм в $L^p(\mathbf{C})$ имеют место оценки:*

$$\|T_n f\|_p \leqslant C_p \|\nabla v\|_\infty^n \|f\|_p, \tag{1}$$

$$\|MT_n f\|_p \leqslant C_p n^2 \|\nabla v\|_\infty^n \|f\|_p. \tag{2}$$

Доказательство. Как следует из стандартных аргументов [4], стр. 50, достаточно установить оценку (2) для финитных бесконечно гладких функций f, затем для таких же функций установить существование п.в. функций $T_n f$, и затем доказать оценку (1). Итак, установим оценку (2), полагая до конца доказательства функцию f финитной и гладкой. Введем некоторые вспомогательные операторы:

$$MT_{n,\delta} f(z) = \sup_{\varepsilon > \delta > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \left(\frac{v(z) - v(\zeta)}{z - \zeta} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2} \, d\sigma_\zeta \right| ,$$

$$T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \left(\frac{v(z) - v(\zeta)}{z - \zeta} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2} \, d\sigma_\zeta ,$$

где $\varepsilon(z)$ — произвольная измеримая на $\mathbf{C}$ функция, удовлетворяющая условию $\varepsilon(z) > \delta$, $\delta > 0$,

$$L_{\lambda,\varepsilon(\cdot)\delta} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \lambda^n T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z),$$

где $|\lambda| < 1 | \|\nabla v\|_\infty$ — любое комплексное число. Функции $L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)$ определены для любого $z \in \mathbf{C}$, поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |\lambda|^n |T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |\lambda|^n \times$$

$$\times \int\limits_{|\zeta - z| > \delta} \left| \frac{v(z) - v(\zeta)}{z - \zeta} \right|^n \frac{|f(\zeta)|}{|z-\zeta|^2} \, d\sigma_\zeta \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|f\|_\infty \operatorname{mes} [\operatorname{supp} f] / (1 - |\lambda| \|\nabla v\|_\infty)^2.$$

Заметим также, что $MT_{n,\delta} f(z) \nearrow MT_n f(z)$ при $\delta \to 0$.

Далее имеем

$$L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{1}{\left(1 - \lambda \dfrac{v(z) - v(\zeta)}{z - \zeta} \right)^2} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2} \, d\sigma_\zeta =$$

$$= \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{(z - \zeta - \lambda(v(z) - v(\zeta)))^2} d\sigma_\zeta. \tag{3}$$

Положим $A_\lambda(z) = z - \lambda v(z)$. Имеем

$$|A_\lambda(z) - A_\lambda(\zeta)| \leqslant |z - \zeta| + |\lambda| |v(z) - v(\zeta)| \leqslant 2|z - \zeta|, \tag{4}$$

$$|A_\lambda(z) - A_\lambda(\zeta)| \geqslant |z - \zeta| + |\lambda| |v(z) - v(\zeta)| \geqslant (1 - |\lambda| \|\nabla v\|_\infty) |z - \zeta|. \tag{5}$$

Для краткости положим далее $\|\nabla v\|_\infty = w$.

Из соотношений (4) и (5) следует, что при $|\lambda| < 1/w$ функция $A_\lambda(z)$ есть липшицевский гомеоморфизм $\mathbf{C}$ на $\mathbf{C}$. Сделаем в интеграле (3) замену переменной $A_\lambda(\zeta) = t$; $\zeta = \alpha_\lambda(t)$—обратное к A_λ отображение. В таком случае

$$L_{\lambda, \varepsilon(\cdot), \delta} f(z) = \int\limits_{\{t \in \mathbf{C}: |\alpha_\lambda(t) - z| > \varepsilon(z)\}} \frac{f(\alpha_\lambda(t)) \mu_\lambda(t)}{(A_\lambda(z) - t)^2} d\sigma_t, \tag{6}$$

где μ_λ — якобиан замены координат. Положим $A_\lambda(z) = \tau$. Соотношения (4) и (5) дадут следующие включения:

$$\{t \in \mathbf{C}: |t - \tau| \geqslant 2\varepsilon\} \subset \{t \in \mathbf{C}: |\alpha_\lambda(t) - \alpha_\lambda(\tau)| > \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \{t \in \mathbf{C}: |t - \tau| > (1 - |\lambda| w) \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

поэтому

$$(6) = \int\limits_{\{t \in \mathbf{C}: |t - \tau| > (1 - |\lambda| w) \varepsilon(z)\}} \frac{f(\alpha_\lambda(t)) \mu_\lambda(t)}{(\tau - t)^2} d\sigma_t -$$

$$- \int\limits_{\substack{\{t \in \mathbf{C}: |t - \tau| > (1 - |\lambda| w) \varepsilon(z)\} / \\ \{t \in \mathbf{C}: |\alpha_\lambda(t) - \alpha_\lambda(\tau)| > \varepsilon(z)\} \cap \\ \cap \{|t - \tau| < 2\varepsilon(z)\}}} \frac{f(\alpha_\lambda(t)) \mu_\lambda(t)}{(\tau - t)^2} d\sigma_t. \tag{7}$$

Определим далее классические операторы S и M, ограниченные в $L^p(\mathbf{C})$:

$$(S\varphi)(\tau) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|t - \tau| > \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{(\tau - t)^2} d\sigma_t \right|,$$

$$(M\varphi)(\tau) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int\limits_{|t - \tau| < \varepsilon} |\varphi(t)| \, d\sigma_t.$$

. Тогда (7) влечет

$$|L_{\lambda, \varepsilon(\cdot), \delta} f(z)| \leqslant S(f(\alpha_\lambda) \mu_\lambda)(\tau) +$$

$$+ \int\limits_{(1 - |\lambda| w) \varepsilon(z) < |t - \tau| < 2\varepsilon(z)} \frac{|f(\alpha_\lambda(t))| \mu_\lambda(t)}{|\tau - t|^2} d\sigma_t \leqslant S(f(\alpha_\lambda) \mu_\lambda)(\tau) +$$

$$+ \frac{1}{(1 - |\lambda|(w))^2 \varepsilon^2(z)} \int\limits_{|t - \tau| < 2\varepsilon(z)} |f(\alpha_\lambda(t))| \mu_\lambda(t) \, d\sigma_t \leqslant S(f(\alpha_\lambda) \mu_\lambda)(\tau) +$$

$$+\frac{c}{(1-|\lambda|\,w)^2}\,M(f(\alpha_\lambda)\,\mu_\lambda)(\tau).$$

Поэтому

$$\int\limits_C |L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)|^p\,d\sigma_z \leqslant c_p \int\limits_C (S(f(\alpha_\lambda))\,\mu_\lambda)^p(\tau)\,d\sigma_z +$$

$$+\frac{c_p}{(1-|\lambda|\,w)^{2p}}\int\limits_C M^p(f(\alpha_\lambda)\,\mu_\lambda)(\tau)\,d\sigma_z, \tag{8}$$

где $1<p<\infty$, $\tau=A_\lambda(z)$. В правой части (8) опять сделаем замену $A_\lambda(z)=\tau$, тогда $d\sigma_z=\mu_\lambda(\tau)\,d\sigma_\tau$ и, пользуясь ограниченностью операторов S и M в $L^p(C)$, $1<p<\infty$, получим

$$\ldots (8)\leqslant c_p\,\|\mu_\lambda\|_\infty \int\limits_C S(f(\alpha_\lambda))\,\mu_\lambda)^p(\tau)\,d\sigma_\tau + c_p\,\|\mu_\lambda\|_\infty\,\frac{1}{(1-|\lambda|w)^{2p}}\times$$

$$\times\int\limits_C M(f(\alpha_\lambda)\,\mu_\lambda)^p(\tau)\,d\sigma_\tau \leqslant \frac{c_p\,\|\mu_\lambda\|_\infty}{(1-|\lambda|\,w)^{2p}}\int\limits_C |f(\alpha_\lambda(\tau))|^p\,\mu_\lambda^p(\tau)\,d\sigma_\tau \leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_p\,\|\mu_\lambda\|_\infty^p}{(1-|\lambda|\,w)^{2p}}\int\limits_C |f(\alpha_\lambda(\tau))|^p\,\mu_\lambda(\tau)\,d\sigma_\tau = \frac{c_p\,\|\mu_\lambda\|_\infty^p}{(1-|\lambda|\,w)^{2p}}\,\|f\|_p^p. \tag{9}$$

В выкладке (9) и далее c_p означают, вообще говоря, различные постоянные, зависящие лишь от p. В итоге

$$\|L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f\|_p \leqslant \frac{c_p\,\|\mu_\lambda\|_\infty}{(1-|\lambda|\,w)^2}\,\|f\|_p. \tag{10}$$

Проинтегрируем равенство (3) по λ по окружности $|\lambda|=\rho$, $\rho<\frac{1}{w}$, получим

$$T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)=\frac{1}{2\pi i\,(n+1)}\int\limits_{|\lambda|=\rho} L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}, \tag{3'}$$

тогда

$$T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) < \frac{1}{2\pi\,(n+1)\,\rho^{n+1}}\int\limits_{|\lambda|=\rho} |L_{\lambda,\varepsilon(\cdot)\delta} f(z)|\,d\lambda$$

откуда и в силу неравенства Минковского и (10)

$$\|T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f\|_p \leqslant \frac{1}{2\pi(n+1)\,\rho^{n+1}}\int\limits_{|\lambda|=\rho} \|L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f\|_p\,|d\lambda| <$$

$$\leqslant c_p\,(1-\rho w)^{-2}\,\rho^{-n}(n+1)^{-1}\sup_{|\lambda|=\rho}\|\mu_\lambda\|_\infty\,\|f\|_p. \tag{11}$$

Оценим теперь $\|\mu_\lambda\|_\infty$. Пусть $\nu_\lambda(z)$ — якобиан перехода от координат z к координатам τ, тогда

$$\mu_\lambda(\tau) = \frac{1}{\nu_\lambda(z)}, \quad z = \alpha_\lambda(\tau) \text{ и } \|\mu_\lambda\|_\infty = (\operatorname*{ess\,inf}_{C} \nu_\lambda(z))^{-1}.$$

Затем, если ввести операторы

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \bar\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \text{ то}$$

$$\nu_\lambda(z) = \left|\,|\partial A_\lambda(z)|^2 - |\bar\partial A_\lambda(z)|^2\right| = \left|\,|1 - \lambda\partial v(z)|^2 - |\lambda\bar\partial v(z)|^2\right| \geqslant$$

$$\geqslant |1 - \lambda\partial v(z)|^2 - \rho^2|\bar\partial v(z)|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}(\lambda\partial v(z)) + \rho^2(|\partial v(z)|^2 - |\bar\partial v(z)|^2) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - 2\rho|\partial v| + 2\rho^2|\partial v|^2 - \rho^2(|\partial v|^2 + |\bar\partial v|^2) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - 2\rho|\partial v| + 2\rho^2|\partial v|^2 - \frac{1}{2}\rho^2 w^2,$$

поскольку $|\partial v|^2 + |\bar\partial v|^2 = \frac{1}{2}|\nabla v|^2 \leqslant \frac{1}{2} w^2$.

Далее, $1 - 2\rho x + 2\rho^2x^2 \geqslant \frac{1}{2}$, поэтому $\nu_\lambda(z) \geqslant \frac{1}{2}(1-\rho^2w^2)$, а тогда при $|\lambda| = \rho < \frac{1}{w}$, $\|\mu_\lambda\|_\infty < \frac{2}{1-\rho^2w^2}$, а из (11) имеем

$$\|T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta}\|_p \leqslant \frac{c_p}{(1-\rho w)^3(n+1)\rho^n}.$$

Полагая $\rho = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{w}$, получим

$$\|T_{n;\varepsilon(\cdot),\delta}\|_p \leqslant c_p\, n^2 w^n. \tag{12}$$

Ясно, что для фиксированного n найдется такая измеримая функция $\varepsilon(z) = \varepsilon(z;\, n,\, \delta,\, f)$, что

$$|T_{n,\varepsilon(z),\delta} f(z)| > \frac{1}{2} MT_{n,\delta} f(z),$$

а тогда соотношение (12) даст $\|MT_{n,\delta}\|_p \leqslant c_p n^2 w^n$, т. е. $\|MT_n\|_p \leqslant c_p n^2 w^n$. Тем самым соотношение (2) установлено.

Перейдем теперь к доказательству существования п.в. значений у $T_n f$, $f \in L^p(C) \cap D_0(C)$. Для этого сначала установим еще одну максимальную теорему о сингулярных интегралах в $L^p(C)$.

Теорема 2. *Пусть функции $v_1, \cdots, v_n$ — липшицевы на C. Определим оператор $MT_{v_1,\ldots,v_n} f$ формулой*

$$MT_{v_1,\cdots,v_n} f(z) = \sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{(v_1(z)-v_1(\zeta))\cdots(v_n(z)-v_n(\zeta))}{(z-\zeta)^n}\frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\,d\sigma_\zeta\right|.$$

Тогда оператор $MT_{v_1,\cdots,v_n}$ действует из $L^p(C)$ в $L^p(C)$.

Доказательство. Опять рассмотрим произвольную функцию $\varepsilon(z) > \delta > 0$ и операторы

$$T_{v_1,\dots,v_n,\varepsilon(\cdot)} f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{(v_1(z)-v_1(\zeta))\cdots(v_n(z)-v_n(\zeta))}{(z-\zeta)^n} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\sigma_\zeta,$$

$$T_{v_1,\dots,v_n,\theta_1,\dots,\theta_n,\varepsilon(\cdot)} f(z) =$$

$$= \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \frac{[(e^{i\theta_1}v_1(z)+e^{i\theta_2}v_2(z)+\dots+e^{i\theta_n}v_n(z))-(e^{i\theta_1}v_1(\zeta)+\dots+e^{i\theta_n}v_n(\zeta))]^n}{(z-\zeta)^{n+2}} f(\zeta)\, d\sigma_\zeta.$$

Имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} e^{-i(\theta_1+\dots+\theta_n)}\, T_{v_1,\dots,v_n,\theta_1,\dots,\theta_n,\varepsilon(\cdot)} f(z)\, d\theta_1\cdots d\theta_n =$$

$$= \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{n+2}}\, d\sigma_\zeta\, \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} e^{-i(\theta_1+\dots+\theta_n)} \times$$

$$\times [e^{i\theta_1}(v_1(z)-v_1(\zeta))+\dots+e^{i\theta_n}(v_n(z)-v_n(\zeta))]^n\, d\theta_1\cdots d\theta_n =$$

$$= n! \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \frac{(v_1(z)-v_1(\zeta))\cdots(v_n(z)-v_n(\zeta))}{(z-\zeta)^n} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\sigma_\zeta = n!\, T_{v_1,\dots,v_n,\varepsilon(\cdot)} f(z). \tag{13}$$

Заметим, что

$$|T_{v_1,\dots,v_n,\theta_1,\dots,\theta_n,\varepsilon(\cdot)} f(z)| \leqslant M T_{e^{i\theta_1}v_1+\dots+e^{i\theta_n}v_n,\,n} f(z),$$

поэтому из (13)

$$|T_{v_1,\dots,v_n,\varepsilon(\cdot)} f(z)| \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} M T_{e^{i\theta_1}+\dots+e^{i\theta_n}v_n} f(z)\, d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{14}$$

А тогда, используя неравенство Минковского, доказанную оценку (2) и то, что

$$\|\nabla(e^{i\theta_1}v_1+\dots+e^{i\theta_n}v_n)\|_\infty \leqslant \|\nabla v_1\|_\infty + \|\nabla v_2\|_\infty + \dots + \|\nabla v_n\|_\infty$$

при всех $\theta_1,\dots,\theta_n \in [0, 2\pi)$, получим из (14):

$$\|T_{v_1,\dots,v_n,\varepsilon(\cdot)} f\|_p \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} \|M T_{e^{i\theta_1}v_1+\dots+e^{i\theta_n}v_n,\,n} f\|_p\, d\theta_1\cdots d\theta_n \leqslant$$

$$\leqslant c_p \frac{1}{(n-1)!} (\|\nabla v_1\|_\infty + \dots + \|\nabla v_n\|_\infty)^n \|f\|_p$$

и далее доказательство завершается, как в теореме 1.

Отметим важное для дальнейшего следствие из теоремы 2. Положим $v_{n+1}(z) = \cdots = v_{n+r}(z) = \bar{z}$, тогда

$$\|MT_{v_1,\ldots,v_n}{}_{(r)} f\|_p \overset{\text{def}}{=} \|MT_{v_1,\ldots,v_n,\underbrace{\bar z,\ldots,\bar z}_{r}} f(z)\| =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{(v_1(z)-v_1(\zeta))\cdots(v_n(z)-v_n(\zeta))}{(z-\zeta)^n} \frac{(\bar z-\bar\zeta)^r f(\zeta)}{(z-\zeta)^{r+2}} d\sigma_\zeta \right|$$

и

$$\|MT_{v_1,\ldots,v_n(r)} f\|_p \leqslant c_p \frac{n+r}{(n+r-1)!} (\|\nabla v_1\|_\infty + \cdots + \|\nabla v_n\|_\infty + r\sqrt{2})^{n+r} \|f\|_p.$$

Перейдем теперь к доказательству существования предела в операторах $T_n f$. Положим вначале

$$L^{(1)}_{n,r,K}(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\{\zeta:\, |\zeta-z|>\varepsilon,\, |\zeta|<K\}} \left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n \left(\frac{\bar z-\bar\zeta}{z-\zeta}\right)^r \frac{v_x(\zeta)}{(v-\zeta)^2} d\sigma_\zeta,$$

$$L^{(2)}_{n,r,K}(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\{\zeta:\, |\zeta-z|>\varepsilon,\, |\zeta|<K\}} \left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n \left(\frac{\bar z-\bar\zeta}{z-\zeta}\right)^r \frac{v_y(\zeta)}{(z-\zeta)^2} d\sigma_\zeta,$$

где $n, r = 0, 1, \cdots$ и $F_{n,r}$ — множество, на котором существуют и $L^{(1)}_{n,r,K}$ и $L^{(2)}_{n,r,K}$, $E_{n,r}$ — дополнительное к $F_{n,r}$ множество, $E = \bigcup\limits_{n,r>0} E_{n,r}$, $F = \mathbf{C} \setminus E$. Установим, что $\operatorname{mes} E = 0$. Для этого найдем, что $\operatorname{mes} E_{n,r} = 0$ при всех $n, r > 0$. Проведем доказательство индукцией по n. Если $n = 0$, то

$$L^{(1)}_{0,r,K}(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\{\zeta:\, |\zeta-z|>\varepsilon,\, |\zeta|<K\}} \frac{(\bar z-\bar\zeta)^r}{(z-\zeta)^{r+2}} v_x(\zeta)\, d\sigma_\zeta,$$

а также $L^{(2)}_{0,r,K}(z)$, существуют при п.в. z, поскольку $\dfrac{(\bar z-\bar\zeta)^r}{(z-\zeta)^{r+2}}$ при всех $r = 0, 1, \cdots$, суть ядра Кальдерона-Зигмунда [4], стр. 52, а функции v_x и v_y содержатся в $L^\infty(\mathbf{C})$. Произведем индуктивный переход. Рассмотрим, например, $L^{(1)}_{n,r,K}(z)$, $n \geqslant 1$. Операторы $MT_{\underbrace{v,\ldots,v}_{n},\underbrace{\bar z,\ldots,\bar z}_{r}}$ непрерывны в L^p, поэтому чтобы установить существование $L^{(1)}_{n,r,K}(z)$ т. е. результат применения соответствующего оператора к конкретной функции $v_x \cdot \chi(\{z \in \mathbf{C}: |z| < K\})$, согласно стандартному пути [4], стр. 58 достаточно теперь установить существование п.в. пределов в операторах

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\{\zeta:\, |\zeta-z|>\varepsilon,\, |\zeta|<K\}} \left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n \left(\frac{\bar z-\bar\zeta}{z-\zeta}\right)^r \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2} d\sigma_\zeta$$

для гладких и финитных f; поскольку для таких f $|f(z)-f(\zeta)| \leqslant c_f |z-\zeta|$, то вопрос сводится к существованию п.в. предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\{\zeta:\, |\zeta-z|>\varepsilon,\, |\zeta|<K\}} \left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n \left(\frac{\bar z-\bar\zeta}{z-\zeta}\right)^r \frac{d\sigma_\zeta}{(z-\zeta)^2}. \qquad (15)$$

Возьмем точку $z_0 \overline{\in} \bigcup\limits_{p=0}^{n-1} \bigcup\limits_{r=0}^{\infty} E_{p,r} \cup \mathrm{E}$, где E — множество, в котором функция v не дифференцируема. По теореме В. В. Степанова [5] $\mathrm{mes}\,\mathrm{E} = 0$. Не умаляя общности, считаем $v(z_0) = 0$, $z_0 = 0$, ибо иначе рассмотрели бы $u(z) = v(z) - v(z_0)$, $\zeta = z - z_0$. Ясно, что достаточно установить существование предела

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon < |\zeta| > 1} \left(\frac{v(\zeta)}{\zeta}\right)^n \left(\frac{\bar\zeta}{\zeta}\right)^r \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta^2}. \tag{15'}$$

Имеем

$$\int\limits_{\varepsilon<|\zeta|<1} \left(\frac{v(\zeta)}{\zeta}\right)^n \left(\frac{\bar\zeta}{\zeta}\right)^r \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta^2} = \int\limits_{\varepsilon}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{v^n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{\rho^{n+1} e^{i(n+2r+2)\theta}} d\rho\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{n} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{-i(n+2r+2)\theta} d\theta \int\limits_{\varepsilon}^{1} v^n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, d(\rho^{-n}) =$$

$$= \frac{1}{n} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{-i(n+2r+2)\theta} \frac{v^n(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)}{\varepsilon^n} d\theta -$$

$$- \frac{1}{n} \int\limits_{2}^{2\pi} e^{-i(n+2r+2)\theta} v^n(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta +$$

$$+ \int\limits_{0}^{2\pi} e^{-i(n+2r+2)\theta} d\theta \int\limits_{\varepsilon}^{1} v^{n-1}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)(v_x \cdot \cos\theta + v_y \sin\theta)\, \rho^{-n} d\rho =$$

$$= I_1(\varepsilon) - I + I_2(\varepsilon).$$

В силу дифференцируемости функции v в нуле $v(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta) = (v_x(0, 0)\cos\theta + v_y(0, 0)\sin\theta)\,\varepsilon + o(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, поэтому

$$I_1(\varepsilon) = \frac{1}{n} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{-i(n+2r+2)\theta} (v_x(0, 0)\cos\theta + v_y(0, o)\sin\theta)^n d\theta + o(1), \quad \varepsilon \to 0,$$

$$I_2(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon<|\zeta|<1} \frac{v^{n-1}(\zeta)}{\zeta^{n-1}} e^{-i(2r+1)\theta} (v_x(\zeta)\cos\theta + v_y(\zeta)\sin\theta) \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta^2} =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon<|\zeta|<1} \left(\frac{v(\zeta)}{\zeta}\right)^{n-1} \left(\frac{\bar\zeta}{\zeta}\right)^r \left(\frac{v_x(\zeta)}{2} + \frac{1}{2i} v_y(\zeta)\right) \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta^2} + \tag{16}$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon<|\zeta|<1} \left(\frac{v(\zeta)}{\zeta}\right)^{n-1} \left(\frac{\bar\zeta}{\zeta}\right)^{r+1} \left(\frac{v_x(\zeta)}{2} - \frac{1}{2i} v_y(\zeta)\right) \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta^2}.$$

По предположению, существуют пределы каждого из двух слагаемых в (16), т. е. при $z \bar{\in} \bigcup_{p=0}^{n-1} \bigcup_{r=0}^{\infty} E_{p,r} \cup e$ существует предел в (15). Поэтому, согласно общей методике [4], стр. 58, функции $L^{(1)}_{n,r,K}(z)$ и $L^{(2)}_{n,r,K}(z)$ существуют вне некоторого множества $E_{n,r}$ из $\operatorname{mes} E_{n,r}=0$. Индуктивный переход от $n-1$ к n в вопросе существования $L^{(j)}_{n,r,K}$, $j=1, 2$ осуществлен.

Тем самым установлено и существование предела в определении оператора $T_n f(z)$ при п.в. $z \in C$ при $\varepsilon \to 0$.

Установим теперь оценку (1). Положим для этого в соотношении (3) $\varepsilon(z) \equiv \varepsilon$, обозначим $L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\varepsilon} f(z)$ через $L_{\lambda,\varepsilon} f(z)$, тогда вновь выпишем соотношение (6):

$$L_{\lambda,\varepsilon} f(z) = \int\limits_{\{t:\, |\alpha_\lambda(t)-z|>\varepsilon\}} \frac{f(\alpha_\lambda(t))\, \mu_\lambda(t)}{(A_\lambda(z)-t)^2}\, d\sigma_t, \tag{6'}$$

$$ML_\lambda f(z) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\varepsilon>0} |L_{\lambda,\varepsilon} f(z)|.$$

Из оценок (10) и $\|\mu_\lambda\|_\infty$ получаем

$$\|ML_\lambda f\|_p \leqslant c_p (1-|\lambda|\, w)^{-3} \|f\|_p,\ 1<p<\infty,\ w=\|\nabla v\|_\infty,\ |\lambda|<\frac{1}{w}.$$

Установим, что существует множество E, mes E = 0, вне которого для данной финитной гладкой функции f существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} L_{\lambda,\varepsilon} f(z)$ для всех λ. Для этого, как видно из (6′), достаточно установить при всех λ, $|\lambda|<\frac{1}{w}$ существование

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\{t:\, \varepsilon<|\alpha_\lambda(t)-z|<1\}} \frac{\mu_\lambda(t)}{(A_\lambda(z)-t)^2}\, d\sigma_t. \tag{17}$$

Делая обратную замену $t=A_\lambda(\zeta)$, получим, что существование предела в (17) эквивалентно существованию предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\{\zeta:\, |\zeta-z|>\varepsilon,\, |\zeta|<K\}} \frac{d\sigma_\zeta}{(z-\zeta-\lambda(v(z)-v(\zeta)))^2}. \tag{18}$$

при всех λ, $|\lambda|<\frac{1}{w}$. Фиксируем λ. Пишем вновь, раскладывая по степеням λ:

$$\int\limits_{\{\zeta:\, |\zeta-z|>\varepsilon,\, |\zeta|<K\}} \frac{d\sigma_\zeta}{[z-\zeta-\lambda(v(z)-v(\zeta))]^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\lambda^n \int_{\{\zeta: |\zeta-z|>\varepsilon, |\zeta|<K\}} \left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n \frac{d\sigma_\zeta}{(z-\zeta)^2}. \tag{19}$$

Пусть $\chi = \chi(\{|\zeta|<K\})$. Тогда правая часть I в (19)

$$I \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|\lambda^n| MT_n \chi(z). \tag{20}$$

Поскольку по (2) $\|MT_n\chi\|_2 \leqslant c_2 (n+1)^2 w^n K$, то

$$\operatorname{mes} G_{n,A} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{mes}\{z\in \mathbf{C}: MT_n\chi(z) \geqslant A(n+1)^2 w^n R^n\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2^2 (n+1)^4 w^{2n} K^2}{A^2 (n+1)^4 w^{2n} R^{2n}} = \frac{c_2^2 K^2}{A^2 R^{2n}},$$

где $R>1$ фиксированное, но такое, что $|\lambda| wR < 1$. Поэтому

$$\operatorname{mes} \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{n,A} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{mes} G_{n,A} \leqslant \frac{c_2^2 K^2}{A^2}\, \frac{R^2}{R^2-1}. \tag{21}$$

Пусть $H_A = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{n,A}$. Если $z \overline{\in} H_A$, то при всех $n=0, 1, \cdots$ $MT_n\chi(z) \leqslant$ $\leqslant A(n+1)^2 w^n R^n$ и поэтому при таких z ряд (20) сходится. Если $z \overline{\in} H_A \cup \bigcup_{p=0}^{\infty} \bigcup_{r=0}^{\infty} E_{p,r} \cup \mathrm{E}$, то при $\varepsilon \to 0$ члены ряда (19) имеют предел и ограничены сходящимся рядом (20), поэтому при таких z и их сумма имеет предел, т. е. существование предела в (18) установлено при $z \overline{\in} H_A \cup \bigcup_{p,r\geqslant 0} E_{p,r} \cup \mathrm{E}$. Возьмем $A = 1, 2, \cdots$ и положим $H = \bigcap_{A=1}^{\infty} H_A$.

Из (21) следует, что $\operatorname{mes} H = 0$. Если $z \overline{\in} H$, то $z \overline{\in} H_A$ при некотором A и значит, если еще $z \overline{\in} \bigcup_{p,r>0} E_{p,r} \cup \mathrm{E}$, то предел в (18) существует. Итак можно положить $\mathbf{E} = H \cup \bigcup_{p,r>0} E_{p,r} \cup \mathrm{E}$.

Приступим теперь к доказательству оценки (1). Видоизменим соотношение (7) следующим образом:

$$L_{\lambda,\varepsilon} f(z) = \int_{|t-\tau|>\sigma(\varepsilon)} \frac{f(\alpha_\lambda(t))\,\mu_\lambda(t)}{(\tau-t)^2} d\sigma_t -$$

$$- \int_{\substack{\{|t-\tau|>\sigma(\varepsilon)\} \setminus \\ \{t: |\alpha_\lambda(t)-\alpha_\lambda(\tau)|>\varepsilon\} \cap \\ \cap \{|t-\tau|<2\varepsilon\}}} \frac{f(\alpha_\lambda(t))\,\mu_\lambda(t)}{(\tau-t)^2} d\sigma_t, \tag{22}$$

где $\quad \sigma(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon, \lambda, \tau) = \min\limits_{\{t: |\alpha_\lambda(t)-\alpha_\lambda(\tau)|=\varepsilon\}} |t-\tau|, \quad \tau = A_\lambda(z).$

Для краткости положим $U(\varepsilon) = (\{|t-\tau|>\sigma(\varepsilon)\} \setminus \{t: |\alpha_\lambda(t) - \alpha_\lambda(\tau)| > \varepsilon\}) \cap$ $\cap \{|t-\tau|<2\varepsilon\}$ (22) влечет с учетом (5):

$$|L_{\lambda,\varepsilon} f(z)| \leqslant S(f(\alpha_\lambda)\mu_\lambda)(\tau) + |f(z)|\,\|\mu_\lambda\|_\infty \times$$

$$\times \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|^2} + \|\mu_\lambda\|_\infty \int\limits_{|t-\tau|<2\varepsilon} \frac{f(\alpha_\lambda(t)) - f(\alpha_\lambda(\tau))}{|\tau - t|^2}\, d\sigma_t \leqslant$$

$$\leqslant S(f(\alpha_\lambda))\mu_\lambda(\tau) + |f(z)|\,\|\mu_\lambda\|_\infty \times$$

$$\times \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|^2} + c_f\|\mu_\lambda\|_\infty \frac{1}{1 - |\lambda| w} \int\limits_{|t-\tau|<2\varepsilon} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|} \leqslant \tag{23}$$

$$\leqslant S(f(\alpha_\lambda)\mu_\lambda)(\tau) + |f(z)|\,\|\mu_\lambda\|_\infty \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|^2} + \frac{c_f\,\varepsilon}{(1 - |\lambda| w)^2}.$$

Возьмем точку $z \overline{\in} \mathbf{E}$, тогда можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (23), что дает

$$|L_\lambda f(z)| \leqslant S(f(\alpha_\lambda)\mu_\lambda)(\tau) + \frac{c\,|f(z)|}{1 - |\lambda| w} \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|^2}. \tag{24}$$

Установим следующий вспомогательный результат.

Лемма. *Пусть* $z \overline{\in} \mathbf{E}$, *тогда при* $\tau = A_\lambda(z)$

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|^2} \leqslant c, \tag{25}$$

где постоянная c *не зависит от* λ *и* τ.

Доказательство. Пусть $\tau = z = 0 \overline{\in} E$, т. е. функция A_λ дифференцируема в 0, а тогда и α_λ дифференцируема в точке $\tau = 0$. Поэтому $\alpha_\lambda(t) = P_\lambda t + Q_\lambda \bar t + o(|t|)$, причем поскольку

$$|P_\lambda|^2 - |Q_\lambda|^2 = \mu_\lambda(t) = \frac{1}{\nu_\lambda(z)} \geqslant (1 + |\lambda|^2 w^2)^{-1},$$

то при t, описывающем окружность $\{|t| = \varepsilon\}$, точка $P_\lambda t + Q_\lambda \bar t$ описывает эллипс $e_\lambda(\varepsilon)$. Положим $o(t) = |t|\,\delta(t)$. Тогда при φ, пробегающем $[0, 2\pi)$, точка $\alpha_\lambda(\varepsilon e^{i\varphi})$ пробегает некоторую кривую $\gamma_\lambda(\varepsilon)$, минимальное расстояние которой до 0 есть $\sigma(\varepsilon)$ и $U(\varepsilon)$ есть область, ограниченная кривой $\gamma_\lambda(\varepsilon)$, пересеченная с кольцом $\{\sigma(\varepsilon) < |t| < 2\varepsilon\}$.

Отметим, что кривая γ_λ содержится в круге $\{|t| < 2\varepsilon\}$ в силу (4). Кроме того, $|\alpha_\lambda(t) - P_\lambda t - Q_\lambda \bar t| = |t|\,|\delta(t)|$, поэтому $\gamma_\lambda(\varepsilon)$ находится в $\varepsilon h(\varepsilon)$ окрестности эллипса $e_\lambda(\varepsilon)$, $h(\varepsilon) = \max\limits_{|t|=\varepsilon} |\delta(t)|$, т. е.

$$(|P_\lambda| - |Q_\lambda|)\,\varepsilon - \varepsilon h(\varepsilon) \leqslant \delta(\varepsilon) \leqslant (|P_\lambda| - |Q_\lambda|)\,\varepsilon + \varepsilon h(\varepsilon).$$

В интеграле (25) сделаем замену $t = \varepsilon T$, тогда область $U(\varepsilon)$ перейдет в область $U^*(\varepsilon)$, причем $d\sigma_t = \varepsilon^2 d\sigma_T$ и

$$\int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|t|^2} = \int\limits_{U^*(\varepsilon)} \frac{d\sigma_T}{|T|^2}.$$

При достаточно малых ε $h(\varepsilon) < \frac{1}{2}(|P_\lambda| - |Q_\lambda|)$, поэтому область $U^*(\varepsilon)$ лежит в кольце $\frac{1}{2}(|P_\lambda| - |Q_\lambda|) < |T| < 2$. Пусть χ_ε — характеристическая функция $U^*(\varepsilon)$, тогда

$$\int\limits_{U^*(\varepsilon)} \frac{d\sigma_T}{|T|^2} = \int\limits_{|T|<2} \chi_\varepsilon(T) \frac{d\sigma_T}{|T|^2}. \tag{26}$$

Теперь в (26) можно перейти к пределу под знаком интеграла, так как

$$\frac{\chi_\varepsilon(T)}{|T|^2} \leqslant \frac{4}{(|P_\lambda| - |Q_\lambda|)^2}.$$

Функция $\chi_\varepsilon(T)$ при $\varepsilon \to 0$ поточечно сходится к характеристической функции эллипса $\{T\colon T = P_\lambda y + Q_\lambda \bar{y},\ |y| \leqslant 1\} \overset{\mathrm{def}}{=} D_\lambda$, из которого выброшен круг $K_\lambda = |T| \leqslant \min\limits_{S \in \partial D_\lambda} |S|$.

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma}{|t|^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{U^*(\varepsilon)} \frac{d\sigma_T}{|T|^2} = \int\limits_{D_\lambda \setminus K_\lambda} \frac{d\sigma_T}{|T|^2}.$$

Но пусть $\sigma = |P_\lambda| - |Q_\lambda|$ и меньшая ось D_λ лежит на вещественной оси. Тогда эллипс D_λ лежит в полосе $\Pi = \{|\mathrm{Re}\,\zeta| < \sigma\}$, поэтому

$$\int\limits_{D_\lambda \setminus K_\lambda} \frac{d\sigma_T}{|T|^2} = \int\limits_{\Pi \setminus K_\lambda} \frac{d\sigma_T}{|T|^2} \leqslant \int\limits_{\{|T|<4\sigma\} \setminus K_\lambda} \frac{d\sigma}{|T|^2} + \int\limits_{\Pi \setminus \{|T|<4\sigma\}} \frac{d\sigma}{|T|^2} \leqslant$$

$$\leqslant c + c \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} dx \int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \leqslant c,$$

поскольку $K_\lambda = \{|T| < \sigma\}$, c — абсолютная постоянная. Лемма доказана.

Из леммы получим

$$|L_\lambda f(z)| \leqslant S(f(\alpha_\lambda)\,\mu_\lambda)(\tau) + c(1 - |\lambda|\,w)^{-1}|f(z)|, \tag{27}$$

поэтому, применяя к новой оценке (27) выкладки (8)—(10), получим

$$\|L_\lambda f\|_p \leqslant \frac{c_p}{1 - |\lambda|\,w} \|f\|_p. \tag{27'}$$

Теперь

$$T_{n,\varepsilon} f(z) = \frac{1}{2\pi i(n+1)} \int\limits_{|\lambda|=\rho} L_{\lambda,\varepsilon} f(z) \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}, \tag{28}$$

где $\rho = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{w}$, поэтому

$$|T_{n,\varepsilon} f(z)| < \frac{1}{2\pi (n+1)\, \rho^{n+1}} \int\limits_{|\lambda|=\rho} |L_{\lambda,\varepsilon} f(z)|\, |d\lambda|. \tag{29}$$

Из (16) следует, что

$$\left(\int\limits_{C} d\sigma_z \left(\int\limits_{|\lambda|=\rho} ML_\lambda f(z)|\, d\lambda| \right)^p \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|\lambda|=\rho} |d\lambda| \left(\int\limits_{C} (ML_\lambda f(z))^p\, d\sigma_z \right)^{1/p} \leqslant \frac{c_p\, \rho}{(1-\rho w)^3} \|f\|_p$$

и поэтому при

$$z \bar{\in} V,\ \operatorname{mes} V = 0,\ \int\limits_{|\lambda|=\rho} ML_\lambda f(z)\, |d\lambda| < \infty.$$

Поскольку $|L_{\lambda,\varepsilon} f(z)| \leqslant ML_\lambda f(z)$, то при $z \bar{\in} V \cup E$ можно перейти в неравенстве (29) к пределу при $\varepsilon \to 0$, причем справа под интегралом. В результате

$$|T_n f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi (n+1)\, \rho^{n+1}} \int\limits_{|\lambda|=\rho} |L_\lambda f(z)|\, |d\lambda|.$$

Затем следует выкладка (11) с новой оценкой (27), и соотношение (1) установлено.

Ленинградское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила 20.XI.1977

Ն. Ա. ՇԻՐՈԿՈՎ. Որոշ սինգուլյար ինտեգրալ օպերատորների գնահատականները $L_p(C)$-ում *(ամփոփում)*

Դիցուք $v \in Lip_C 1$: *Դիտարկվում են հետևյալ օպերատորները.*

$$MT_n f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\sigma_\zeta \right|, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Ապացուցվում է, որ MT_n *օպերատորները սահմանափակ են* $L^p(C)$, $1 < p < \infty$ *տարածությունում:*

N. A. SHIROKOV. *Estimates in* $L^p(C)$ *of some singular integral operators* (summary)

Let $v \in Lip_C 1$. The following operators are considered:

$$MT_n f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\sigma_\zeta \right|, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

It is proved that operators MT_n are bounded on the space $L^p(C)$, $1 < p < \infty$

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. R. Goifman, Y. Meyer.* Le double commutateur, Anal. Harm. d'Orsay, n° 180. 1976.
2. *A. P. Calderon.* Commutators of singular integral operators, Proc. Mat. Acad, Sci., USA. 53, 1965. 1092—1099.
3. *A. Benedek, R. Panzone.* Continuity properties of the Hilbert transform. J. Func. Anal., 7, № 2, 1971, 217—234.
4. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Изд. „Мир", М., 1973.
5. *W. Stepanoff.* Sur les conditions de l'existence de la differentielle totale, Мат. сб., 32, 1925, 511—526.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS