

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

ԽՄԲԱԴՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Ինքնավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ

Ք. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Ի. Գ. ԶԱՌԱՎԱԶՍԿԻ

Ա. Ա. ՔԱԼԱՆՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոգվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի հեղինակալի սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոգվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոգվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոգվածները պետք է ներկայացվեն գրամանրակազմով, երկու օրինակով՝ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոգվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ, հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոգվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համասնուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզիան սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոգվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոգվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոգվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված թիչ թիչ շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոգվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոգվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոգվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չղրազվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոգվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոգվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոգվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամություն 24, Գիտությունների ակադեմիայի հեղինակալի, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Издается преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKII

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika” are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika”
Academy of Sciences of Armenian, SSR
24, Berekamutlan St.,
Yerevan, Armenian, SSR, USSR

Э. П. МЕЛИКСЕТЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Обозначим через $\bar{L}_1$ класс n -мерных вектор-функций, определенных в полуплоскости $y > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x, y)| dx \leq \text{const.} \quad (1)$$

В работе рассматривается следующая задача.

Найти в области $y > 0$ дважды непрерывно дифференцируемое решение $U(x, y) = \{U_1(x, y), \dots, U_n(x, y)\}$ эллиптической системы

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0, \quad (2)$$

принадлежащее классу $\bar{L}_1$ и удовлетворяющее граничному условию

$$U(x, y)|_{\Gamma} = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (3)$$

которое понимается в следующем смысле:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |U(x, y) - f(x)| dx = 0, \quad (4)$$

где A , B и C — постоянные действительные квадратные матрицы n -го порядка, а $f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \in L_1(-\infty, \infty)$.

В работе установлена следующая

Теорема. Если задача Дирихле для системы (2) удовлетворяет условию Я. Б. Лопатинского, то задача (2) — (3) имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим первоначально случай, когда характеристическое уравнение

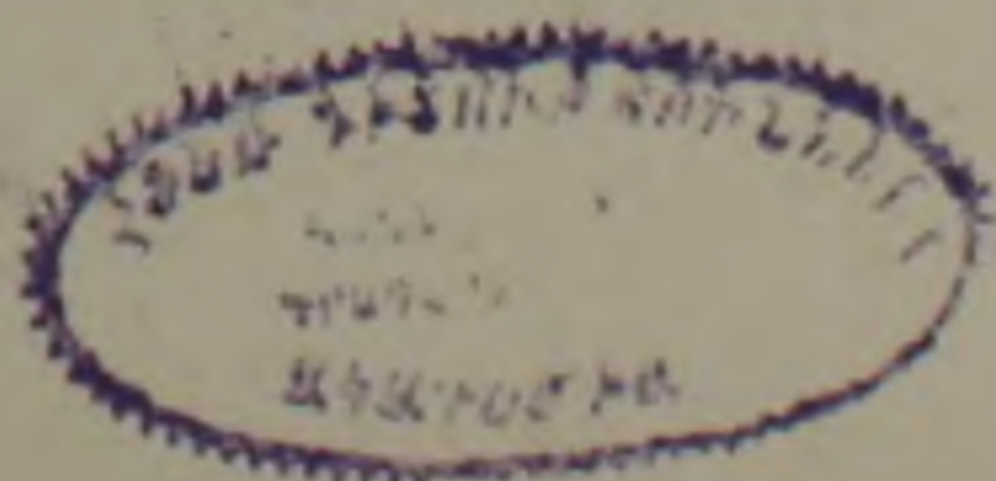
$$\det(A + 2B\lambda + C\lambda^2) = 0 \quad (5)$$

системы (2) имеет только простые корни.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни уравнения (5) с положительными мнимыми частями.

Тогда общее решение системы (2) дается формулой (см. [1])

$$U(x, y) = \text{Re} \sum_{j=1}^n \alpha_j \omega_j(x + \lambda_j y),$$



где $\omega_j(x + \lambda_j y)$ — произвольные аналитические функции относительно $x + \lambda_j y$ в верхней полуплоскости, а $\delta_1, \dots, \delta_n$ — постоянные l -мерные векторы, которые определяются через коэффициенты системы (2). Условие Лопатинского совпадает с условием линейной независимости l -мерных векторов $\delta_1, \dots, \delta_n$.

Построим частное решение задачи (2)–(3), пока в предположении, что $\omega_j(z)$ непрерывны и ограничены в $\operatorname{Im} z \geq 0$, а $f(x)$ — финитная, бесконечно дифференцируемая функция. Под $\omega_j(x)$ понимаем предельное значение $\omega_j(z)$ при $z \rightarrow x$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Подставляя общее решение (6) в граничное условие (3), получим

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j \omega_j(x) = f(x), \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n \delta_j \omega_j(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t - z} + ic, \quad (8)$$

$$\omega(t) = \delta^{-1} \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t - z} + iC \right), \quad (9)$$

где δ — матрица, состоящая из столбцов $\delta_1, \dots, \delta_n$.

Общее решение (6) представим в виде

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j \omega_j(z) + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j [\omega_j(x + \lambda_j y) - \omega_j(z)]. \quad (10)$$

Из (8) и (9) имеем

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t - z} \right) + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j \left[a_j \cdot \frac{1}{\pi i} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t - x - \lambda_{jy}} - \frac{1}{t - x - iy} \right) f(t) dt \right], \quad (11)$$

где $a_1, \dots, a_n$ — строки матрицы δ^{-1} .

Формулу (11) запишем в виде

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(t) dt}{(t - x)^2 + y^2} + \\ + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j \left[\frac{a_j}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t - x - \lambda_{jy}} - \frac{1}{t - x - iy} \right) f(t) dt \right]. \quad (12)$$

Теперь в формуле (12) возьмем $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ и покажем, что $U(x, y) \in \tilde{L}_1$ и удовлетворяет условию (4).

Ясно, что $U(x, y)$, заданная формулой (12), можно записать в виде (6), где $\omega_j(z)$ определяются из (9). Поэтому $U(x, y)$ удовлет-

воряет системе (2). Покажем принадлежность классу $\tilde{L}_1$ первого слагаемого в правой части выражения (12).

Действительно

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(t) dt}{(t-x)^2 + y^2} \right| dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y dx}{(t-x)^2 + y^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \text{const} < \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Воспользовавшись оценкой

$$C_2 |x + iy| \leq |x + iy| \leq C_1 |x + iy|, \quad (14)$$

где C_1 и C_2 — некоторые положительные постоянные, аналогично можно показать, что второе слагаемое правой части (12) также принадлежит классу $\tilde{L}_1$. Следовательно $U(x, y) \in \tilde{L}_1$.

Теперь покажем, что имеет место условие (4). Ясно, что

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(x) dt}{(t-x)^2 + y^2} \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-x-\lambda_j y} - \frac{1}{t-x-iy} \right) f(x) dt = 0. \quad (15)$$

Используя равенства (15) и формулу (12), получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |U(x, y) - f(x)| dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y [f(t) - f(x)] dt}{(t-x)^2 + y^2} + \right. \\ &+ \text{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j \left[\frac{a_j}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-x-\lambda_j y} - \frac{1}{t-x-iy} \right) (f(t) - f(x)) dt \right] \Big| dx \leq \\ &\leq V_1(y) + V_2(y), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$V_1(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y |f(t) - f(x)| dt}{(t-x)^2 + y^2} \right\} dx, \quad (17)$$

а

$$V_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \text{Re} \sum_{j=1}^n \left| \delta_j \cdot \frac{a_j}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda_j - i) y [f(t) - f(x)]}{(t-x-\lambda_j y)(t-x-iy)} \right| \right\} dx. \quad (18)$$

Покажем, что $V_1(y)$ и $V_2(y)$ стремятся к нулю при $y \rightarrow 0$. Обозначим $t - x = y\tau$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
V_1(y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x+\tau y) - f(x)|}{\tau^2 + 1} d\tau dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^2 + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\tau y) - f(x)| dx = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{d\tau}{\tau^2 + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\tau y) - \\
&\quad - f(x)| dx + \frac{1}{\pi} \int_{|\tau| > R} \frac{d\tau}{\tau^2 + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\tau y) - f(x)| dx.
\end{aligned} \tag{19}$$

Ясно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\tau y) - f(x)| dx \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx. \tag{20}$$

Так как $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, то (см. [2])

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\tau y) - f(x)| dx = 0. \tag{21}$$

Из (20) следует, что для любого $\frac{\varepsilon}{2}$ можно указать такое число $R > 0$,

что второе слагаемое в правой части выражения (19) меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть число R выбрано таким образом. Тогда из равенства (21) следует, что существует такое $\delta > 0$, что при $0 < y < \delta$ первое слагаемое правой части выражения (19) можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Следовательно, $V_1(y) < \varepsilon$ при $0 < y < \delta$, это и означает, что $V_1(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$.

Используя оценку (14) можно заметить, что

$$V_2(y) \leq C V_1(y), \tag{22}$$

где C -- некоторая постоянная.

Так как $V_1(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$, то из (22) вытекает, что $V_2(y)$ также стремится к нулю при $y \rightarrow 0$.

Итак показано, что формула (12) является решением задачи (2)–(3) в классе суммируемых функций, когда характеристическое уравнение (5) системы (2) имеет только простые корни.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение (5) системы (2) имеет кратные корни. Общее решение при кратных корнях дается формулой (см. [1])

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{k_j} \tilde{\alpha}_{jr} [\omega_{jr}(x + \lambda_j y) + \sum_{p=1}^{r-1} \beta_{jr}^{(p)} y^p \omega_{jr}^{(p)}(x + \lambda_j y)] + \alpha, \tag{23}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_{v_0}$ — корни характеристического уравнения (5) с положительными мнимыми частями, а $k_1, \dots, k_{v_0}$ — их кратность. $\omega_{jr}(x + i_j y)$ — произвольные аналитические функции относительно $x + i_j y$, а α — произвольный действительный вектор.

В формуле (23) n -мерные векторы δ_{jr} и числа $\beta_{jr}^{(p)}$ определяются через коэффициенты системы (2), а условие Я. Б. Лопатинского совпадает с условием линейной независимости векторов

$$\delta_{jr} (j = 1, \dots, v_0; r = 1, \dots, k_j).$$

Подставляя общее решение (23) в граничное условие (3), получим

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{v_0} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{jr} \omega_{jr}(x) + \alpha \right] = f(x), \quad (24)$$

где пока допускается непрерывность и ограниченность производных функций $\omega_{jr}(z)$ в $\operatorname{Im} z \geq 0$, а $f(x)$ считается финитной, бесконечно дифференцируемой вектор-функцией.

Из (24) имеем

$$\sum_{j=1}^{v_0} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{jr} \omega_{jr}(z) + \alpha = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t - z} + ic, \quad (25)$$

$$\omega(z) = \delta^{-1} \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t - z} + ic - \alpha \right). \quad (26)$$

Подставляя $\omega(z)$ из (26) в (23) и используя равенство (25), получим

$$\begin{aligned} I(x, y) = & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(t) dt}{(t-x)^2 + y^2} + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{v_0} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{jr} \left[\frac{\alpha_{jr}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-x-\lambda_j y} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{t-x-iy} \right) f(t) dt \right] + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{v_0} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{jr} \left[\sum_{p=1}^{r-1} \beta_{jr}^{(p)} \frac{\alpha_{j,r-p}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^p f_1(t) dt}{(t-x-\lambda_j y)^{p+1}} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Покажем, что вектор-функция (27) есть решение задачи (2) — (3).

Обозначим

$$I(x, y) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^p f_1(t) dt}{(t-x-\lambda_j y)^{p+1}} \quad (p = 1, 2, \dots, r-1). \quad (28)$$

Представим интеграл (28) следующим образом:

$$I(x, y) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^p [f_1(t) - f_1(x)] dt}{(t-x-\lambda_j y)^{p+1}} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^p f_1(x) dt}{(t-x-\lambda_j y)^{p+1}}. \quad (29)$$

Второе слагаемое правой части (29) равно нулю по теореме о вычетах.

То обстоятельство, что $I(x, y) \in \bar{L}_1$, доказывается аналогично оценке (13). Теперь покажем, что имеет место условие (4)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^p [f_j(t) - f_j(x)] dt}{(t-x-\lambda_j y)^{p+1}} \right| dx \leq \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^p |f_j(t) - f_j(x)| dt}{[(t-x)^2 + y^2]^{\frac{p+1}{2}}} \right\} dx \leq \\ & \leq \frac{C_1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + 1)^{\frac{p+1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_j(x + \tau y) - f_j(x)| dx. \end{aligned} \quad (30)$$

Отсюда следует, что $I(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$ в классе $L_1(-\infty, \infty)$. Следовательно, вектор-функция $U(x, y)$, заданная формулой (27), является решением задачи (2) — (3) в классе $\bar{L}_1$.

Докажем единственность решения задачи (2) — (3). Для этого достаточно показать, что однородная задача (2) — (3), ($f(x) \equiv 0$) имеет только тривиальное решение.

Пусть вектор-функция $U(x, y)$ является решением однородной задачи (2) — (3). Покажем, что вектор-функция $U(x, y)$ ограничена в любой полуплоскости $y > h$, где $h > 0$.

Пусть $P(x, y)$ является фундаментальной матрицей решения системы (2), а $\rho(x, y)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x^2 + y^2 \leq 1/4, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \quad (31)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} L(U) &= AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy}, \\ L^*(U) &= U_{xx}A + U_{xy}B + U_{yy}C. \end{aligned} \quad (32)$$

Пусть (x_0, y_0) — точка в верхней полуплоскости $y > 0$; $y_0 > h$. Удалим из области $y > 0$ круг $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq \varepsilon^2$ достаточно малого радиуса ε и для оставшейся части D_ε области $y > 0$, применяя формулу Грина для интеграла

$$\begin{aligned} & \iint_{D_\varepsilon} \left[L(U) \rho \left(\frac{x-x_0}{h}, \frac{y-y_0}{h} \right) P(x-x_0, y-y_0) - \right. \\ & \left. - U(x, y) L^* \left(\rho \left(\frac{x-x_0}{h}, \frac{y-y_0}{h} \right) P(x-x_0, y-y_0) \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (33)$$

и устремляя ε к нулю, получим (см. [3]) из (33)

$$U(x_0, y_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} U(x, y) L^* \left(\rho \left(\frac{x-x_0}{h}, \frac{y-y_0}{h} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times P(x-x_0, y-y_0) \right) dy \right\} dx. \quad (34)$$

Обозначим

$$L^* \left(\rho \left(\frac{x-x_0}{h}, \frac{y-y_0}{h} \right) P(x-x_0, y-y_0) \right) \equiv M(x, y, x_0, y_0). \quad (35)$$

Так как $L(U) \equiv 0$, $L^*(P) \equiv 0$ при $y > 0$, то из (31) имеем

$$|M(x, y, x_0, y_0)| \leq C, \text{ при } (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq h^2, \quad (36)$$

$$M(x, y, x_0, y_0) = 0, \text{ при } (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \geq h^2, \quad (37)$$

где C — некоторая постоянная. Поэтому формулу (34) можно написать в виде

$$U(x_0, y_0) = \int_{y_0-h}^{y_0+h} dy \int_{x_0-h}^{x_0+h} U(x, y) M(x, y, x_0, y_0) dx. \quad (38)$$

Из (36), (37) и (38) получим

$$|U(x_0, y_0)| \leq C \int_{y_0-h}^{y_0+h} dy \int_{x_0-h}^{x_0+h} |U(x, y)| dx \leq C \int_{y_0-h}^{y_0+h} dy \int_{-\infty}^{+\infty} |U(x, y)| dx. \quad (39)$$

Так как $U(x, y) \in \tilde{L}$, то из (39) вытекает, что

$$|U(x_0, y_0)| \leq C_1 \text{ при } y_0 > h, -\infty < x_0 < \infty,$$

где C_1 — некоторая постоянная.

Следовательно, функция $U(x_0, y_0)$ ограничена в полуплоскости $y > h$.

Пусть

$$W_h(x, y) = U(x, y+h). \quad (40)$$

Ясно, что $W_h(x, y)$ удовлетворяет системе

$$A \frac{\partial^2 W_h}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 W_h}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 W_h}{\partial y^2} = 0 \quad (41)$$

и граничному условию

$$W_h(x, 0) = U(x, h), \quad (42)$$

а также ограничена в полуплоскости $y > 0$.

В работе [4] доказано, что решение задачи (41) — (42) в классе ограниченных функций единственно и дается формулой

$$W_h(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y U(t, h) dt}{(t-x)^2 + y^2} + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{jr} \left[\frac{a_{jr}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-x-\lambda_j y} - \right. \right.$$

$$- \frac{1}{t-x-iy} \Big) U(t, h) dt \Big] + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{jr} \left[\sum_{p=1}^{r-1} \beta_{jr}^{(p)} \frac{\alpha_{j, r-p}}{\pi i} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^p U_j(t, h) dt}{(t-x-\lambda_j y)^{p+1}} \right]. \quad (43)$$

Имея в виду, что $U(x, h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ в смысле $L_1(-\infty, \infty)$, из (43) следует

$$\lim_{h \rightarrow 0} W_h(x, y) = 0. \quad (44)$$

Из (40) и (44) получим

$$U(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} U(x, y+h) = \lim_{h \rightarrow 0} W_h(x, y) = 0. \quad (45)$$

Тем самым единственность решения задачи (2) — (3) установлена. Таким образом, теорема полностью доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 25.1.1978

Է. Պ. ՄԵԼԻՔՍԵՏԻԱՆ. Դիրիխլեի խնդիրը երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտիկ սխեմաների համար ինտեգրալի ֆունկցիաների դասում (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը. վերին կիսահարթությունում գտնվող $AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0$ էլիպտիկ սխեմանի լուծումը, որը բավարարում է $U(x, y)/r = f(x)$ եզրային պայմանին, որտեղ

$$U(x, y) = \{U_1(x, y), \dots, U_n(x, y)\} \in \bar{L}, \text{ և } f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \in L(-\infty, \infty).$$

$\bar{L}$ դասը վերին կիսահարթությունում n -չափանի վեկտոր-ֆունկցիաների դաս է որոշված և բավարարում է հետևյալ պայմանին

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x, y)| dx \leq \text{const.}$$

Ստացված է խնդրի լուծման բանաձևը:

E. P. MELIKSETIAN. The Dirichley's problem for elliptic systems of second order differential equations in the class $L_1(-\infty, \infty)$ (summary)

Let $\bar{L}_1$ be the class of n -dimensional vector-functions, defined for $y > 0$ and satisfying the inequality:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x, y)| dx \leq \text{const.}$$

The following problem is considered: Find in the halfplane $y > 0$ the solution of the system

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0$$

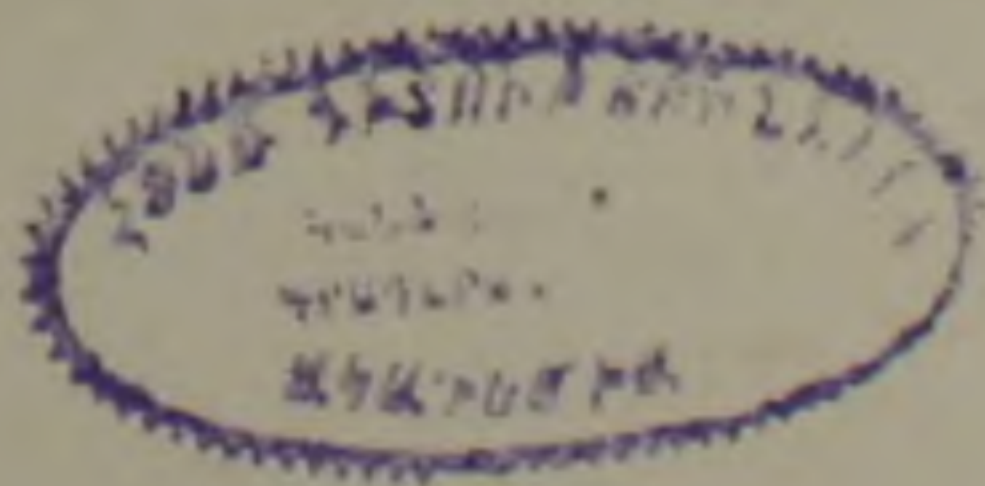
which belongs to the class L and satisfies the boundary condition

$$U(x, y)|_r = f(x),$$

where the vector-function $f(x) = |f_1(x), \dots, f_n(x)| \in L_1(-\infty, \infty)$. Theorem: under Lopatinsky conditions the Dirichley's problem has a unie solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Товмасян. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Диф. уравнения, II, №№ 1, 2, 1966.
2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, Изд. «Наука», 1976, 375—380.
3. А. В. Бицадзе. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. Изд. «Наука», 1966, 87—120.
4. Э. П. Меликсетян. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка верхней полуплоскости. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XIV, № 5, 1979, 391—402.



Г. У. МАТЕВОСЯН

ФАКТОРИЗАЦИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С РАЗДЕЛЕНИЕМ МНОЖЕСТВА ИХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Рассмотрим функцию f , мероморфную вне непустого компактного множества e в расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$. Предположим, что множество e разбито на сумму двух компактных множеств

$$e = e_1 \cup e_2, \text{ где } e_1 \neq \emptyset, e_2 \neq \emptyset.$$

Спрашивается, можно ли найти функции f_1 и f_2 , мероморфные соответственно вне множеств e_1 и e_2 так, чтобы выполнялось равенство

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \text{ для } z \in \bar{C} \setminus e? \quad (1)$$

Аналогичный вопрос можно поставить и в том случае, когда множество e является объединением конечного либо счетного числа компактных множеств. В этом случае правую часть выражения (1) следует заменить, соответственно, конечным либо бесконечным произведением.

Отметим, что в исследованиях, посвященных вопросам разделения особенностей, обычно функция f представляется не в виде произведения, а в виде суммы двух функций. Однако при исследовании распределения значений мероморфных функций применение факторизации вида (1) имеет определенные преимущества.

Частично это можно объяснить, например, тем что в этом случае логарифмическая производная функции f легко выражается через логарифмические производные функций f_1 и f_2 . Несколько таких приложений приведено в статьях [1] и [2].

В настоящей статье вопрос о факторизации вида (1) устанавливается при некоторых дополнительных предположениях относительно множеств e , e_1 и e_2 . Рассматривается также конечный и счетный аналоги представления (1). Возможность конечной факторизации при несколько более сильных предположениях установлена нами в работе [1].

В настоящей статье дается принципиально новое решение этой задачи. Часть результатов статьи была сформулирована в кандидатской диссертации автора [3].

Теорема факторизации в случае счетносвязной области публикуется впервые и в отличие от [3] доказывается без привлечения теоремы о приближении простыми дробями специального вида [4].

Следующее определение полезно для дальнейшего изложения.

Определение. Пусть область Ω в $\bar{C}$ является дополнением компактных множеств A и B без общих точек.

Функцию f_A назовем A -компонентой мероморфной в Ω функции f , $f \neq 0$, если

- а) функция f_A мероморфна в области $\bar{C} \setminus A$;
- б) функция f/f_A допускает мероморфное продолжение из области Ω в область $\Omega \cup A = \bar{C} \setminus B$.

Легко заметить, что отношение двух A -компонент f_A и φ_A функции f является рациональной функцией.

В самом деле, функция $Q = f_A/\varphi_A$ мероморфна в $\bar{C} \setminus A$ в силу а). С другой стороны, так как в области Ω

$$Q = \left(\frac{f}{\varphi_A} \right) \left(\frac{f_A}{f} \right),$$

то в силу б) функцию Q можно считать мероморфной в некоторой окрестности множества A . Таким образом, функция Q мероморфна в $\bar{C}$ и, следовательно, рациональна.

Заметим также, что имея A -компоненту f_A функции f , мы получим также некоторую B -компоненту этой функции, полагая $f_B = f/f_A$. Кроме того, произведение $f_A f_B$ произвольных двух A и B -компонент представляет собой функцию, отличающуюся от f рациональным множителем.

§ 1. Теорема существования

Пусть область Ω в $\bar{C}$ является дополнением двух компактных множеств A и B без общих точек, а функция $f \neq 0$ мероморфна в Ω .

В настоящем пункте мы докажем существование A -компоненты f_A функции f и найдем для нее явные выражения.

Рассмотрим сначала случай, когда $\infty \notin A$. Пусть $\gamma = \gamma_A$ — гладкий путь Жордана в Ω , $\infty \notin \gamma$, удовлетворяющий условиям

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} -1 & \text{для } z \in A, \\ 0 & \text{для } z \in B, \end{cases} \quad (2)$$

так что γ отделяет множества A и B .

Будем также считать, что функция f не имеет нулей либо полюсов, лежащих на γ . Положим

$$m = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}(\zeta) d(\zeta)$$

и возьмем точку $z_0 \in A$. Тогда для $f(z)/(z - z_0)^m$ в достаточно малой окрестности γ существует однозначная ветвь логарифма. Через $\log [f(z)(z - z_0)^{-m}]$ обозначим одну из них и рассмотрим интеграл типа Коши

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \log \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^m} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

для всех $z \in \bar{C}$. При $z \in \gamma$ интеграл рассматривается в смысле главного значения. Пусть D_A и D_B означают компоненты множества $\bar{C} \setminus \gamma$, для которых $A \subset D_A$, $B \subset D_B$. Функция $I(z)$ голоморфна в областях D_A и D_B . Кроме того, в силу аналитичности функции $\log [f(z)(z - z_0)^{-m}]$ на γ и с учетом теоремы Коши имеем, что $I(z)$ допускает аналитические продолжения $I_A(z)$ и $I_B(z)$ соответственно на $\bar{D}_A$ и $\bar{D}_B$, не совпадающие, вообще говоря, на γ . Из хорошо известной формулы Сохоцкого [5] имеем для $z \in \gamma$:

$$I_A(z) = I(z) - \frac{1}{2} \log [f(z)(z - z_0)^{-m}], \quad (3)$$

$$I_B(z) = I(z) + \frac{1}{2} \log [f(z)(z - z_0)^{-m}]. \quad (4)$$

Отсюда следует формула

$$I_B(z) = I_A(z) + \log [f(z)(z - z_0)^{-m}] \text{ для } z \in \gamma, \quad (4')$$

которая, впрочем, в нашем случае легко следует из формулы Коши.

Из этой формулы следует, что голоморфная на $\bar{D}_B \setminus \bar{B}$ функция $\exp \{I_B(z)\}$ и мероморфная на $\bar{D}_A \setminus A$ функция $\frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \exp \{I_A(z)\}$ совпадают на γ .

Теперь искомую мероморфную вне множества A функцию f_A мы можем определить формулой

$$f_A(z) = \psi(z) \begin{cases} 1 & \text{для } z \in D_B \\ f(z)(z - z_0)^{-m} & \text{для } z \in \bar{D}_A \setminus A, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\psi(z) = \exp [I(z)] \text{ для } z \in \bar{C} \setminus \gamma.$$

Очевидно, что f_A является A -компонентой функции f . Кроме того, полюса и нули функции f_A совпадают с полюсами и нулями функции f , лежащими в D_A (т. е. внутри γ). Отметим, что с помощью формул (3) и (4) можно написать явное выражение функции $f_A(z)$ также для $z \in \gamma$.

Теперь мы можем определить также некоторую B -компоненту функции f , полагая $f_B = f/f_A$, так что

$$f_B(z) = \frac{1}{\psi(z)} \begin{cases} f(z) & \text{для } z \in D_B \setminus B \\ (z - z_0)^m & \text{для } z \in D_A. \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что здесь случай $z \in B$ не исключается и что компонента f_B может иметь нуль либо полюс в точке z_0 (в зависимости от числа

m), лежащий вне множества нулей и полюсов функции f . Очевидно, произведение компонент f_A и f_B дает факторизацию функции f в области Ω . Прежде чем сформулировать полученный результат проведем некоторые преобразования, упрощающие формулы (5) и (6) для компонент f_A и f_B .

С этой целью возьмем произвольную точку $\zeta_0 \in \gamma$ и для непрерывной на γ функции φ , не обращающейся в нуль, обозначим через $\log_{(\zeta_0)} \varphi$ какую-нибудь непрерывную ветвь логарифма на $\gamma \setminus \{\zeta_0\}$. Тогда для функции $I(z)$ можно написать формулу

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \log_{(\zeta_0)} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - m I_1(z) \quad \text{для } z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \gamma, \quad (7)$$

где

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \log_{(\zeta_0)} (\zeta - z_0) \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Функцию $\log_{(\zeta_0)} (\zeta - z_0)$ можно считать голоморфной в любой области $D_A(l)$, получаемой из области D_A проведением там некоторого гладкого разреза l , соединяющего точки ζ_0 и z_0 .

С учетом (2) отрицательно ориентированная граница области $D_A(l)$ состоит из пути γ и из двух противоположно ориентированных дуг l_1 и l_2 , лежащих на l , причем l_1 имеет начало ζ_0 и конец z_0 .

По формуле Коши имеем

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1 \cup l_2} \log_{(\zeta_0)} (\zeta - z) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} -\log_{(\zeta_0)} (z - z_0) & \text{для } z \in D_A(l), \\ 0 & \text{для } z \in D_B. \end{cases}$$

С учетом того, что при положительном обходе точки z_0 на кривой l функция $\log_{(\zeta_0)} (z - z_0)$ получает приращение $2\pi i$, имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l_1 \cup l_2} \log_{(\zeta_0)} (\zeta - z_0) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = - \int_{l_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = - \log \frac{z - z_0}{z - \zeta_0}.$$

Из последних двух формул получим

$$-I_1(z) = \begin{cases} \log_{(\zeta_0)} (z - \zeta_0) & \text{для } z \in D_A(l) \\ -\log_{(\zeta_0)} \left(\frac{z - z_0}{z - \zeta_0} \right) & \text{для } z \in D_B. \end{cases}$$

Отсюда и из (7), варьируя l , для ψ получим выражение:

$$\psi(z) = \varphi(z) \begin{cases} (z - \zeta_0)^m & \text{для } z \in D_A \\ \left(\frac{z - \zeta_0}{z - z_0} \right)^m & \text{для } z \in D_B, \end{cases}$$

где

$$\varphi(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \log_{(\zeta_0)} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right\} \quad \text{для } z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \gamma.$$

С учетом этих двух формул выражение (5) для функции f_A можно представить в виде:

$$f_A(z) = \varphi(z) \left(\frac{z - \zeta_0}{z - z_0} \right)^m \begin{cases} 1 & \text{для } z \in D_B \\ f(z) & \text{для } z \in D_A \setminus A. \end{cases} \quad (5')$$

Поскольку любая A -компонента функции f определяется с точностью до рационального множителя, то разделяя в (5') функцию f_A на $\left(\frac{z - \zeta_0}{z - z_0} \right)^m$, мы получим новую A -компоненту функции f , которую для простоты тоже обозначим через f_A .

Имеем

$$f_A(z) = \varphi(z) \begin{cases} 1 & \text{для } z \in D_B \\ f(z) & \text{для } z \in D_A \setminus A, \end{cases} \quad (8)$$

$$f_B(z) = \frac{1}{\varphi(z)} \begin{cases} f(z) & \text{для } z \in D_B \setminus B \\ 1 & \text{для } z \in D_A. \end{cases} \quad (9)$$

Следует отметить, что в отличие от формулы (5) формула (8) при $m \neq 0$ определяет такую A -компоненту функции f , которая, кроме нулей и полюсов, лежащих в $D_A \setminus A$, имеет в точке ζ_0 нуль либо полюс порядка m (соответственно при $m < 0$ и $m > 0$).

Функция же f_B из (9) в точке ζ_0 будет иметь нуль либо полюс порядка m (соответственно при $m > 0$ и $m < 0$).

Основным итогом построений настоящего пункта является следующая

Теорема 1. (существования). Пусть A и B — компакты в $\bar{C}$ со связным дополнением, причем $A \cap B = \emptyset$ и $\infty \notin A$. Тогда любая мероморфная в области $\Omega = \bar{C} \setminus (A \cup B)$ функция f , $f \neq 0$, допускает факторизацию

$$f(z) = f_A(z) f_B(z) \text{ для } z \in \Omega,$$

где f_A и f_B являются соответственно A и B -компонентами функции f и могут быть определены либо формулами (5) и (6), либо — (8) и (9).

В дальнейшем полезно множество всех мероморфных в данной области D функций обозначить через $M(D)$. Применяя конечное число раз теорему 1, мы получим следующее

Утверждение. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — компакты в $\bar{C}$ со связным дополнением, $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $f \in M(\Omega)$, где

$$\Omega = \bigcap_{j=1}^n \Omega_j, \quad \Omega_j = \bar{C} \setminus A_j. \quad (10)$$

Тогда существуют функции $f_j \in M(\Omega_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ такие, что

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z) \text{ для } z \in \Omega. \quad (11)$$

Отметим, что функция f_j будет A_j -компонентой функции f и для нее мы можем, как и в теореме 1, найти явные формулы. Кроме этого можно считать, что множества нулей (полюсов) функций f_j попарно не пересекаются и их объединение совпадает с множеством нулей (полюсов) функции f с добавлением одной произвольной фиксированной точки области Ω .

В следующем пункте обсуждается вопрос о счетном аналоге теоремы 1.

§ 2. Счетная факторизация мероморфных функций

Определение. Последовательность $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ компактных подмножеств открытого множества $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ назовем дискретной в D , если каждое множество e_j имеет такую окрестность $V_j \subset D$, что $V_j \cap e_k = \emptyset$ при $j \neq k$.

Теорема 2. Пусть $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ — дискретная последовательность в области Ω_0 компактных множеств A_j со связными дополнениями $\Omega_j = \bar{\mathbb{C}} \setminus A_j$, $\Omega = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ — область.

Тогда любая функция $f \in M(\Omega)$ допускает представление

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} f_j(z) \text{ для } z \in \Omega,$$

где $f_j \in M(\Omega_j)$ и бесконечное произведение сходится локально-равномерно в Ω .

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $f \not\equiv 0$ и $\infty \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega_0$.

Пусть V_j^* — такая окрестность компакта A_j , что последовательность $(\bar{V}_j^*)_{j=1}^{\infty}$ замыканий множеств V_j^* является дискретной в Ω . Далее, пусть V_j — окрестность компакта $\bar{V}_j^*$, ограниченная гладкой кривой Жордана γ_j , не содержащая нулей либо полюсов функции f . При этом можно считать, что $(\bar{V}_j)_{j=1}^{\infty}$ — дискретная последовательность в Ω_0 .

Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ и пусть $\varphi_j \in M(\Omega_j)$ — некоторая A_j -компонента функции f . Можно считать, что φ_j не имеет нулей либо полюсов, лежащих вне V_j^* и что $\varphi_j(z_0) = 1$.

По теореме Рунге [6] для произвольного $\varepsilon_j > 0$ существует рациональная функция Q_j , $Q_j(z_0) = 1$, такая, что

$$|\varphi_j(z) - Q_j(z)| < \varepsilon_j, \quad z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus V_j.$$

Тогда из неравенств Коши [5] имеем

$$|\varphi_j'(z) - Q_j'(z)| < \frac{\varepsilon_j \Delta \lambda_j \gamma_j}{2\pi d_j^2}; \quad z \in \bar{C} \setminus V_j,$$

где d_j — расстояние между V_j и γ_j .

Обозначая

$$\alpha_j = \min_{z \in \bar{C} \setminus V_j} |\varphi_j(z)|, \quad \beta_j = \max_{z \in \bar{C} \setminus V_j} |\varphi_j'(z)|,$$

получим

$$\left| \frac{\varphi_j'(z)}{\varphi_j(z)} - \frac{Q_j'(z)}{Q_j(z)} \right| \leq \frac{|\varphi_j'(z)|}{|\varphi_j(z)| |Q_j(z)|} |\varphi_j(z) - Q_j(z)| + \frac{1}{|Q_j(z)|} |\varphi_j'(z) - Q_j'(z)| \leq \frac{\beta_j \varepsilon_j}{\alpha_j (\alpha_j - \varepsilon_j)} + \frac{1}{\alpha_j - \varepsilon_j} + \frac{\varepsilon_j \Delta \lambda_j \gamma_j}{2\pi d_j}, \quad z \in \bar{C} \setminus V_j.$$

За счет выбора числа ε_j правую часть этого неравенства можно сделать меньше, чем $\frac{1}{2^j}$, т. е.

$$\left| \frac{\varphi_j'(z)}{\varphi_j(z)} - \frac{Q_j'(z)}{Q_j(z)} \right| < \frac{1}{2^j} \quad \text{при } z \in \bar{C} \setminus V_j. \quad (12)$$

Положим $f_j = \varphi_j / Q_j \in M(\Omega_j)$, так что $f_j(z_0) = 1$ и для любого натурального m рассмотрим бесконечное произведение

$$F_m(z) = \prod_{j=m}^{\infty} f_j(z) \quad \text{для } z \in D_m, \quad (13)$$

где $D_m = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=m}^{\infty} A_j$, так что $D_1 = \Omega$. Равномерная сходимость произведения (13) на любом компакте $K \subset D_m$ гарантируется сходимостью в точке $z = z_0$ и, с учетом (12), равномерной сходимостью ряда

$$\sum_{j=p}^{\infty} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} \quad \text{для } z \in \bar{C} \setminus \bigcup_{j=p}^{\infty} V_j,$$

где, в силу дискретности последовательности $\{V_j\}$, число $p = p(K)$ выбрано так, что $K \subset \bar{C} \setminus \bigcup_{j=p}^{\infty} V_j$.

Теорема 2 будет доказана, если, полагая $f_0 = \frac{f}{F_1} \in M(D_1)$ заметить, что f_0 допускает „мероморфное“ продолжение на область Ω_0 . Так как $\Omega_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$, то для этого достаточно убедиться, что $f_0 \in M(D_m)$ для любого натурального m .

Последнее утверждение, с учетом (13), следует из представления

$$f_0(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^m f_j(z)} \frac{1}{F_m(z)}, \quad z \in \Omega$$

и из свойств а) и б) компонент функции f .

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 28.II.1979

Հ. Հ. ՄԱՏԵՎՈՍՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների փակտորիզացիան նրանց եզակիությունների բազմության անջատմամբ (ամփոփում)

Վերջավոր կամ հաշվի կապանի տիրույթում մերոմորֆ ֆունկցիան տիրույթի վրա որոշակի սահմանափակումների դեպքում ներկայացվում է մերոմորֆ ֆունկցիաների համապատասխանաբար վերջավոր կամ հաշվի արտադրյալի միջոցով, որի արտադրիչներից յուրաքանչյուրը մերոմորֆ է որոշակի միակապ տիրույթում:

H. H. MATEVOSSIAN. *The factorization of meromorphic functions with separation of their singularity set (summary)*

A meromorphic in a finitely-connected or countably-connected region function is represented in the form a product, of factors meromorphic in simply-connected domains.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. У. Матевосян. Об одной факторизации функций, мероморфных в многосвязных областях и о некоторых ее приложениях. Изв. АН Арм.ССР. «Математика», IX, № 5, 1974.
2. Г. У. Матевосян. Аналог классов $\Lambda\{\omega\}$ в случае кругового кольца, Мат. заметки, 21, № 2, 1977.
3. Г. У. Матевосян. Факторизация и распределение значений мероморфных функций в многосвязных областях, Канд. диссертация, Ереван, 1975.
4. Г. У. Матевосян. Равномерное приближение рациональными дробями специального вида, Мат. заметки, 17, № 3, 1975.
5. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного, М., 1967.
6. W. Rudin. Real and complex analysis, N—Y., 1966.

И. Г. ХАЧАТРЯН

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПЕРАТОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, СОХРАНЯЮЩЕГО АСИМПТОТИКУ РЕШЕНИЙ

В настоящей работе рассматриваются следующие дифференциальные уравнения порядка $n \geq 2$:

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_{n-2-k}(x) y^{(k)} = \lambda^n y, \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

$$\varphi^{(n)} = \lambda^n \varphi. \quad (2)$$

При некоторых ограничениях на коэффициенты $p_k(x)$ выводится формула

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \int_0^x e^{\lambda t} L(x, t) dt, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (3)$$

выражающая решение $y(x, \lambda)$ уравнения (1) через решение $e^{\lambda x}$ уравнения (2), где ядро $L(x, t)$ не зависит от параметра λ . В случае $n=2$ формула (3) была получена Б. Я. Левиным [1] (см. также [2]). При выводе формулы (3) здесь применяется метод, который был использован автором в работе [3] для получения оператора преобразования другого вида.

Введем следующие обозначения:

$$q_k(x) = \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} C_{n-2-v}^{k-v} p_{n-2-v}^{(k-v)}(x), \quad k=0, 1, \dots, n-2, \quad (4)$$

$$\omega_s = e^{i \frac{2\pi}{n} s}, \quad s=0, 1, \dots, n-1, \quad (5)$$

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} e^{\omega_s \lambda x}. \quad (6)$$

Функция $\varphi(x, \lambda)$ — решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi^{(v)}(0, \lambda) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n-1. \quad (7)$$

Лемма. Пусть коэффициенты уравнения (1) такие, что функции $q_k(x)$, определенные формулой (4), удовлетворяют условиям

$$\int_0^{\infty} x^{k+1} |q_k(x)| dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \quad (8)$$

Тогда при всех значениях параметра λ из сектора

$$S = \left\{ \lambda; |\arg \lambda| \geq \pi - \frac{\pi}{n} \right\} \quad (9)$$

уравнение (1) имеет решение $y(x, \lambda)$, удовлетворяющее интегральному уравнению

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_x^{\infty} \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) q_k(t) y(t, \lambda) dt. \quad (10)$$

Функция $y(x, \lambda)$ при каждом фиксированном x ($0 \leq x < \infty$) регулярна по λ в секторе S и непрерывна вплоть до границы. Кроме того, равномерно относительно $\lambda \in S$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, \lambda) e^{-\lambda x} = 1. \quad (11)$$

Доказательство. Применив метод последовательных приближений к уравнению (10), получим

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(x, \lambda), \quad (12)$$

где функции $R_j(x, \lambda)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$R_0(x, \lambda) = e^{\lambda x},$$

$$R_{j+1}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_x^{\infty} \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) q_k(t) R_j(t, \lambda) dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Покажем, что ряд (12) сходится равномерно в области $0 \leq x < \infty$, $\lambda \in S$. Если обозначить

$$\bar{R}_j(x, \lambda) = e^{-\lambda x} R_j(x, \lambda), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

и учесть формулы

$$\frac{1}{\lambda^n} \varphi^{(n-1-k)}(x, \lambda) = \frac{1}{k!} \int_0^x (x-u)^k \varphi(u, \lambda) du, \quad k = 0, 1, \dots, n-2,$$

то из (13) получим

$$\bar{R}_{j+1}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \int_x^{\infty} q_k(t) \bar{R}_j(t, \lambda) e^{\lambda(t-x)} \int_0^{x-t} (x-t-u)^k \varphi(u, \lambda) du dt. \quad (14)$$

Однако при $0 \leq v \leq x$ и $\lambda \in S$

$$\operatorname{Re} [\lambda (x - \varepsilon^{\kappa v_s})] \leq 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1,$$

поэтому в (14)

$$|\tilde{r}_j(u, \lambda) e^{\lambda(u-x)}| \leq 1. \quad (15)$$

В силу (15) из формулы (14) находим

$$|\tilde{R}_{j+1}(x, \lambda)| \leq \int_x^\infty q(t) |\tilde{R}_j(t, \lambda)| dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} |q_k(x)|.$$

Поскольку $\tilde{R}_0(x, \lambda) = 1$, то из (16) по индукции получим

$$|\tilde{R}_j(x, \lambda)| \leq \frac{1}{j!} \left\{ \int_x^\infty q(t) dt \right\}^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому ряд (12) сходится равномерно и определяет решение $y(x, \lambda)$ интегрального уравнения (10), которое удовлетворяет также соотношению (11). Теперь убедимся, что функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1). Действительно, если тождество (10) продифференцировать n раз и учесть, что функция $\varphi(x, \lambda)$ является решением уравнения (2) с начальными условиями (7), то получим формулу

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x, \lambda) = & - \sum_{k=0}^{n-2} y^{(n-2-k)}(x, \lambda) \sum_{v=0}^k C_{n-2-v}^{k-v} q_v^{(k-v)}(x) + \\ & + \lambda^n e^{\lambda x} + \sum_{k=0}^{n-2} \int_x^\infty \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) q_k(t) y(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Однако

$$p_k(x) = \sum_{v=0}^k C_{n-2-v}^{k-v} q_v^{(k-v)}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \quad (18)$$

В силу (10) и (18) формула (17) принимает вид (1). Лемма доказана.

Пусть T — открытый сектор на комплексной плоскости, а l — луч, лежащий в T и проходящий через вершину сектора. Обозначим через $H_1(T)$ класс функций $f(z)$, регулярных в секторе T и удовлетворяющих условию

$$\sup \int |f(z)| |dz| < \infty.$$

Ниже используются следующие свойства функций класса $H_1(T)$ (см. [4] -- [7]): пусть $f(z) \in H_1(T)$, тогда почти всюду на границе Γ сектора T существуют граничные значения функции $f(z)$, которые на Γ определяют суммируемую функцию $f(\zeta)$ ($\zeta \in \Gamma$), причем

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (19)$$

кроме того, справедлива интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in T. \quad (20)$$

Предположим теперь, что функции $q_k(z)$, определенные формулой (4), регулярны в секторе

$$D = \left\{ z; |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right\} \quad (21)$$

и удовлетворяют условиям

$$\int_0^{\infty} \sigma_k(x) dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \quad (22)$$

где

$$\sigma_k(x) = \sup_{\tau \in D; \operatorname{Re} \tau = 1} \int_x^{\infty} (u-x)^k |q_k(u\tau)| du.$$

Введем монотонно убывающие функции

$$\sigma(x) = \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{k+1}}{k! \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^{k+1}} \sigma_k(x),$$

$$\bar{\sigma}(x) = \int_x^{\infty} \sigma(u) du.$$

Некоторые утверждения будут установлены при более ограничительных условиях

$$\int_0^{\infty} x^{k+1} \beta_k(x) dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \quad (23)$$

где

$$\beta_k(x) = \sup_{\tau \in D; \operatorname{Re} \tau = 1} |q_k(x\tau)|. \quad (24)$$

Очевидно, что имеют место неравенства

$$\sigma_k(x) \leq \int_x^{\infty} (u-x)^k \beta_k(u) du, \quad (25)$$

$$\sup_{\tau \in D; \operatorname{Re} \tau = 1} \int_0^{\infty} x^{k+1} |q_k(x\tau)| dx \leq (k+1) \int_0^{\infty} \sigma_k(x) dx \leq \int_0^{\infty} x^{k+1} \beta_k(x) dx,$$

$$k=0, 1, \dots, n-2,$$

поэтому при условиях (22) или (23) условия (8) доказанной леммы заведомо выполнены.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. Пусть коэффициенты уравнения (1) такие, что функции $q_k(x)$, определенные формулой (4), регулярны в секторе D и удовлетворяют условиям (22). Тогда при всех значениях параметра λ из полуплоскости $\Lambda = \{\lambda; \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$ уравнение (1) имеет решение $y(x, \lambda)$, представимое в виде

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \int_x^{\infty} e^{\lambda t} K(x, t-x) dt, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (26)$$

где ядро $K(z, \xi)$ ($z \in D$; $0 \leq \xi < \infty$) при каждом фиксированном ξ регулярно по z в секторе D и удовлетворяет неравенству

$$|K(z, \xi)| \leq \frac{1}{2} \sigma \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \exp \left\{ \tilde{\sigma}(\operatorname{Re} z) - \tilde{\sigma} \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \right\}. \quad (27)$$

Если же выполнены условия (23), то функция $y(x, \lambda)$ при каждом фиксированном x ($0 \leq x < \infty$) имеет непрерывную производную по λ во всех точках полуплоскости Λ за исключением, быть может, точки $\lambda = 0$.

Замечание 1. Согласно вышеуказанным свойствам ядра $K(z, \xi)$ формулу (26) можно написать в виде

$$y(z, \lambda) = e^{\lambda z} \left\{ 1 + \int_0^{\infty} e^{\lambda \xi} K(z, \xi) d\xi \right\}, \quad z \in D. \quad (28)$$

В силу условий (22) из оценки (27) следует, что

$$\int_0^{\infty} |K(z, \xi)| d\xi < \infty. \quad (29)$$

Ниже, при условиях (23), устанавливается также неравенство

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(z, \xi) \right| \xi d\xi < \infty. \quad (30)$$

Доказывается, что равномерно относительно $z \in D$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi K(z, \xi) = 0, \quad (31)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi K(z, \xi) = 0. \quad (32)$$

Кроме того, используя неравенства (29), (30) и соотношения (31), (32), из (28) выводится формула

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} y(z, \lambda) = & z e^{\lambda z} \left\{ 1 + \int_0^{\infty} e^{\lambda \xi} K(z, \xi) d\xi \right\} - \\ & - \frac{1}{\lambda} e^{\lambda z} \int_0^{\infty} e^{\lambda \xi} \left\{ K(z, \xi) + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} K(z, \xi) \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (33)$$

Отметим, что последнее утверждение теоремы непосредственно следует из формулы (33).

Замечание 2. При $n = 2$ сектор D превращается в полуось $[0, \infty)$, а уравнение (1) и условия (22), (23) соответственно принимают вид

$$y'' + p(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (*)$$

$$\int_0^{\infty} x |p(x)| dx < \infty. \quad (**)$$

Для уравнения (*) при условии (**) вывод формулы (26) и неравенства (27) содержится также в монографии В. А. Марченко [2]. Однако здесь дополнительно устанавливается неравенство (30) и выводится формула (33).

Замечание 3. При $\lambda \in S$ в виде (26) представляется именно то решение уравнения (1), которое удовлетворяет также интегральному уравнению (10). В связи с этим отметим, что представление (26) достаточно установить для $\lambda \in S$ (при $n = 2$ сектор S и полуплоскость Λ совпадают). Действительно, тогда в силу (29) правая часть формулы (26) определяет функцию $y(x, \lambda)$, регулярную по λ в Λ и непрерывную вплоть до границы. Однако функция $K(z, \xi)$ по переменной z принадлежит классу $H_1(D)$, поэтому, согласно (20), при $n > 2$ имеем

$$K(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K(\zeta, t)}{\zeta - x} d\zeta, \quad 0 < x < \infty, \quad (34)$$

где Γ — граница сектора D . Используя неравенство (27), из формулы (34) легко получаются оценки

$$\left| \frac{\partial^v}{\partial x^v} K(x, t) \right| \leq \frac{c_v}{x^v} \sigma\left(\frac{t}{2}\right), \quad v = 1, 2, 3, \dots,$$

где c_v — некоторые постоянные. Следовательно, при $x > 0$

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\partial^v}{\partial x^v} K(x, t) \right| dt < \infty, \quad v = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

В силу (35) из формулы (28) следует, что функции $y^{(j)}(x, \lambda)$ при $0 < x < \infty$ тоже регулярны по λ в Λ и непрерывны вплоть до границы. Поэтому так определенная функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1) при всех $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство теоремы. Пусть $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее интегральному уравнению (10). Тогда функцию $y(x, \lambda)$ можно представить в виде ряда (12). Методом индукции докажем, что функции $R_j(x, \lambda)$ допускают представление

$$R_j(x, \lambda) = \int_x^\infty e^{\lambda t} K_j(x, t-x) dt, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (36)$$

где ядра $K_j(z, \xi)$ ($z \in D$; $0 \leq \xi < \infty$) регулярны по z в секторе D и удовлетворяют неравенствам

$$|K_j(z, \xi)| \leq \frac{1}{2} \sigma \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \bar{\sigma}(\operatorname{Re} z) - \bar{\sigma} \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \right\}^{j-1}, \quad (37)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

С учетом формул

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j!} e^{\lambda t} \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) = \\ &= \frac{1}{k! n} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1 \right)^{k+1} \int_x^t (t-u)^k e^{\lambda[x\omega_s + u(1-\omega_s)]} du, \\ & \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (38)$$

из (13) при $j = 0$ имеем

$$\begin{aligned} R_1(x, \lambda) &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k! n} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1 \right)^{k+1} \times \\ &\times \int_x^\infty q_k(t) \int_x^t (t-u)^k e^{\lambda[x\omega_s + u(1-\omega_s)]} du dt. \end{aligned} \quad (39)$$

Если в (39) поменять порядок интегрирования и сделать замену переменного $\zeta = x\omega_s + u(1-\omega_s)$, то получим

$$\begin{aligned} R_1(x, \lambda) &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k! n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}} \times \\ &\times \int_{I_s(x)} e^{\lambda \zeta} \int_{\frac{\zeta - x\omega_s}{1-\omega_s}}^\infty \left(t - \frac{\zeta - x\omega_s}{1-\omega_s} \right)^k q_k(t) dt d\zeta, \end{aligned} \quad (40)$$

где $l_s(x)$ — луч $\zeta = x + z(1 - \omega_s)$ ($0 \leq z < \infty$). Заметим, что лучи $l_s(x)$ ($s = 1, 2, \dots, n-1$) содержатся в секторе D . Обозначим через $T_s(x)$ сектор, содержащийся в D , ограниченный лучом $l_s(x)$ и частью $[x, \infty)$ вещественной оси. Если $\zeta \in D$ и $\lambda \in S$, то $\operatorname{Re}(\lambda \zeta) \leq 0$. Кроме того, если $\zeta \in T_s(x)$, то $(1 - \omega_s)^{-1}(\zeta - x\omega_s) \in T_{n-1}(x)$. Поэтому, в силу (22), относительно переменной ζ имеем*

$$\left\{ e^{\lambda \zeta} \int_{\frac{\zeta - x\omega_s}{1 - \omega_s}}^{\infty} \left(t - \frac{\zeta - x\omega_s}{1 - \omega_s} \right)^k q_k(t) dt \right\} \in H_1(T_s(x)).$$

Но тогда, согласно (19), формулу (40) можно привести к виду

$$R_1(x, \lambda) = \int_x^{\infty} e^{\lambda t} K_1(x, t-x) dt,$$

где ядро $K_1(z, \xi)$ ($z \in D$; $0 \leq \xi < \infty$) определяется по формуле

$$K_1(z, \xi) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1 - \omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}} \int_{\frac{\xi}{1 - \omega_s} + z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1 - \omega_s} \right)^k q_k(\zeta) d\zeta. \quad (41)$$

Заметим, что $|1 - \omega_s| \leq 2$, $\operatorname{Re}(1 - \omega_s)^{-1} = \frac{1}{2}$ и при $z \in D$, $0 \leq \xi < \infty$

$$\left| z + \frac{\xi}{1 - \omega_s} \right| \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right)^{-1} \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}, \quad s = 1, 2, \dots, n-1. \quad (42)$$

Поэтому из (41) заменой переменного

$$\zeta = u \left(z + \frac{\xi}{1 - \omega_s} \right) \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right)^{-1}$$

легко получается оценка

$$|K_1(z, \xi)| \leq \frac{1}{2} \sigma \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right).$$

Предположим теперь, что при некотором j ($j \geq 1$) формула (36) и неравенство (37) верны. Тогда, согласно (13), (36) и (38) имеем

$$R_{j+1}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1 \right)^{k+1} G_{k,s}(x, \lambda), \quad (43)$$

* Впредь в интегралах вида $\int_{\gamma} f(w) dw$ переменная интегрирования w движется вдоль луча $w = xz$ ($1 \leq z < \infty$).

где

$$G_{k,s}(x, \lambda) = \int_x^\infty q_k(t) \int_0^\infty K_j(t, v) \int_x^t (t-u)^k e^{\lambda[x\omega_s + u(1-\omega_s) + v]} du dv dt. \quad (44)$$

Меняя в (44) порядок интегрирования, получим

$$G_{k,s}(x, \lambda) = \int_0^\infty \int_x^\infty e^{\lambda[x\omega_s + u(1-\omega_s) + v]} \int_u^\infty (t-u)^k q_k(t) K_j(t, v) dt du dv. \quad (45)$$

Если в (45) сделать замену переменного $\zeta = x\omega_s + u(1-\omega_s) + v$ и повторить сделанные выше рассуждения, то формула (45) приводится к виду

$$G_{k,s}(x, \lambda) = \frac{1}{1-\omega_s} \int_0^\infty \int_{x+v}^\infty e^{\lambda\zeta} \int_{\frac{\zeta-v-x\omega_s}{1-\omega_s}}^\infty \left(t - \frac{\zeta-v-x\omega_s}{1-\omega_s}\right)^k q_k(t) K_j(t, v) dt d\zeta dv. \quad (46)$$

Меняя в (46) порядок интегрирования и учитывая (43), для функции $R_{j+1}(x, \lambda)$ получим формулу

$$R_{j+1}(x, \lambda) = \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{j+1}(x, t-x) dt.$$

где ядро $K_{j+1}(z, \xi)$ ($z \in D$; $0 \leq \xi < \infty$) определяется по формуле

$$K_{j+1}(z, \xi) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}} \int_0^\xi \int_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^\infty \left(\zeta - z - \frac{\xi-u}{1-\omega_s}\right)^k \times \\ \times q_k(\zeta) K_j(u, \tau) d\zeta du. \quad (47)$$

Согласно предположению, функция $K_j(z, \xi)$ удовлетворяет неравенству (37), поэтому при $v \geq \operatorname{Re} z + \frac{1}{2}$ ($\xi - u$) и $\tau \in D$, $\operatorname{Re} \tau = 1$ имеем

$$|K_j(v\tau, u)| \leq \frac{1}{2} \sigma\left(v + \frac{u}{2}\right) \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \bar{\sigma}(v) - \bar{\sigma}\left(v + \frac{u}{2}\right) \right\}^{j-1} \leq \\ \leq \frac{1}{2} \sigma\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right) \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \bar{\sigma}\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi-u}{2}\right) - \bar{\sigma}\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right) \right\}^{j-1}. \quad (48)$$

Если в (47) сделать замену переменного

$$\zeta = v \left(z + \frac{\xi-u}{1-\omega_s} \right) \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi-u}{2} \right)^{-1}$$

и учесть неравенства (42), (48), то для функции $K_{j+1}(z, \xi)$ получим оценку

$$|K_{j+1}(z, \xi)| \leq \frac{1}{2} \sigma \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \frac{1}{(j-1)!} \int_{\operatorname{Re} z}^{\frac{\xi}{2} + \operatorname{Re} z} \sigma(u) \left\{ \tilde{\sigma}(u) - \right. \\ \left. - \tilde{\sigma} \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \right\}^{j-1} du = \frac{1}{2} \sigma \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \frac{1}{j!} \times \\ \times \left\{ \tilde{\sigma}(\operatorname{Re} z) - \tilde{\sigma} \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \right\}^j.$$

Таким образом, формулы (36) и неравенства (37) доказаны. Если формулы (36) просуммировать по значениям j и положить

$$K(z, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(z, \xi), \quad (49)$$

а также учесть (12), то получим формулу (26). Неравенство (27) получается суммированием неравенств (37). Суммируя также формулы (47) и учитывая (41), (49), для функции $K(z, \xi)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$K(z, \xi) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}} \int_{\frac{\xi}{1-\omega_s} + z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s} \right)^k q_k(\zeta) d\zeta + \\ + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}} \int_0^{\xi} \int_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s} + z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi-u}{1-\omega_s} \right)^k q_k(\zeta) K(\zeta, u) d\zeta du. \quad (50)$$

Теперь установим неравенство (30), предполагая, что выполнены условия (23). Обозначим

$$M(z, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} K(z, \xi) + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{\omega_s (1-\omega_s)} q_0 \left(z + \frac{\xi}{1-\omega_s} \right). \quad (51)$$

Если в уравнении (50) в повторном интеграле сделать замену переменного $u = \xi - v$ и полученную формулу продифференцировать по ξ , а затем снова сделать замену переменного $v = \xi - u$, то для функции $M(z, \xi)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$M(z, \xi) = N(z, \xi) + \\ + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}} \int_0^{\xi} \int_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s} + z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi-u}{1-\omega_s} \right)^k q_k(\zeta) M(\zeta, u) d\zeta du, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned}
 N(z, \xi) = & \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{(k-1)! n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^{k-1}}{\omega_s^{k+1}} \int_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s} \right)^{k-1} q_k(\zeta) d\zeta + \\
 & + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k! n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}} \left\{ \int_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s} \right)^k q_k(\zeta) K(\zeta, 0) d\zeta - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\omega_j (1-\omega_j)} \int_0^{\xi} \int_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi-u}{1-\omega_s} \right)^k q_k(\zeta) q_0 \left(\zeta + \frac{u}{1-\omega_j} \right) d\zeta du \right\}.
 \end{aligned} \quad (53)$$

Функцию $\alpha(x, t)$ ($0 \leq t \leq 2x$; $0 < x < \infty$) определим по формуле

$$\begin{aligned}
 \alpha(x, t) = & \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{2^{k-1}}{(k-1)! \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^k} \int_x^{\infty} (u-x)^{k-1} \beta_k(u) du + \\
 & + \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{k-1}}{k! \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^{k+1}} \int_x^{\infty} (u-x)^k \beta_k(u) \sigma(u) du + \\
 & + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{k-1}}{k! \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^{k+2}} \int_0^t \int_x^{\infty} (u-x)^k \beta_k \left(u - \frac{v}{2} \right) \beta_0(u) dudv, \quad (54)
 \end{aligned}$$

где функции $\beta_k(x)$ определены в (24). Очевидно, что функция $\alpha(x, t)$ по первому аргументу монотонно убывает, а по второму аргументу монотонно возрастает. Используя неравенства (27), (42) и

$$|1 - \omega_j| = 2 \sin \frac{\pi}{n} j \geq 2 \sin \frac{\pi}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

из (53) получим

$$|N(z, \xi)| \leq \alpha \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}, \xi \right).$$

Если к уравнению (52) применить метод последовательных приближений, то, как и при выводе неравенства (27), для функции $M(z, \xi)$ получим оценку

$$|M(z, \xi)| \leq \alpha \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}, \xi \right) \exp \left\{ \tilde{\sigma}(\operatorname{Re} z) - \tilde{\sigma} \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \right\}.$$

Отсюда, с учетом (51), имеем

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} K(z, \xi) \right| \leq \frac{n-1}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \beta_0 \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) + a \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}, \frac{\xi}{2} \right) e^{\bar{\sigma}(\operatorname{Re} z)}. \quad (55)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих формул:

$$\int_0^{\xi} \int_{\frac{\xi}{2}+x}^u \left(u-x-\frac{\xi}{2} \right)^{k-1} \beta_k(u) du d\bar{z} = \frac{4}{k(k+1)} \int_x^{\infty} (u-x)^{k+1} \beta_k^*(u) du, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi} \int_{\frac{\xi}{2}+x}^u \left(u-x-\frac{\xi}{2} \right)^k \beta_k(u) \tau(u) du d\bar{z} = \\ & = \frac{4}{(k+1)(k+2)} \int_x^{\infty} (u-x)^{k+2} \beta_k(u) \tau(u) du, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi} \int_0^{\xi} \int_{\frac{\xi}{2}+x}^u \left(u-x-\frac{\xi}{2} \right)^k \beta_k \left(u-\frac{v}{2} \right) \beta_0(u) du dv d\bar{z} = \\ & = \frac{8}{k+1} \int_0^{\infty} \beta_0(u+x) \int_0^u \beta_k(v+x) v^{k+1} \left(u-\frac{k+1}{k+2} v \right) dv du \leq \\ & \leq \frac{8}{k+1} \left\{ \int_x^{\infty} (u-x)^{k+1} \beta_k(u) du \right\} \left\{ \int_x^{\infty} (u-x) \beta_0(u) du \right\}. \end{aligned} \quad (58)$$

Из неравенств (25) и

$$(u-x) \int_u^x (v-u)^k \beta_k(v) dv \leq \int_x^{\infty} (v-x)^{k+1} \beta_k(v) dv$$

следует, что

$$(u-x) \tau(u) \leq \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \bar{\beta}_k(x), \quad (59)$$

где

$$\bar{\beta}_k(x) = \frac{n-1}{n} \frac{2^{k+1}}{(k+1)! \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^{k+1}} \int_x^{\infty} (u-x)^{k+1} \beta_k(u) du, \quad k=0, 1, \dots, n-2.$$

Из соотношений (57) и (59) имеем

$$\int_0^{\xi} \int_{\frac{\xi}{2}+x}^{\infty} \left(u-x-\frac{\xi}{2}\right)^k \beta_k(u) \sigma(u) du d\xi \leq$$

$$\leq \frac{4}{(k+1)(k+2)} \left\{ \sum_{v=0}^{n-2} (v+1) \tilde{\beta}_v(x) \right\} \int_1^{\infty} (u-x)^{k+1} \beta_k(u) du. \quad (60)$$

Используя соотношения (54), (56), (58) и (60), из (55) получим оценку

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(z, \xi) \right| \xi d\xi \leq \tilde{\beta}_0(x) + e^{\tilde{\sigma}(x)} \left\{ \left(\sin \frac{\pi}{n} \right) \sum_{k=1}^{n-2} \tilde{\beta}_k(x) + \right.$$

$$\left. + \tilde{\beta}_0(x) \sum_{k=0}^{n-2} \tilde{\beta}_k(x) + \left[\sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \tilde{\beta}_k(x) \right] \left[\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+2} \tilde{\beta}_k(x) \right] \right\},$$

где $x = \operatorname{Re} z$. Отсюда, в силу условий (23), следует неравенство (30).

Убедимся также в справедливости соотношений (31), (32). Соотношение (31) непосредственно следует из очевидных неравенств

$$\xi \sigma_k \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \leq 2 \int_{\frac{\xi}{2}}^{\infty} u^{k+1} \beta_k(u) du, \quad k=0, 1, \dots, n-2.$$

Для доказательства (32) используем неравенства

$$\xi \sigma_k \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \leq \int_0^{\xi} \frac{\xi}{u} \gamma_{\xi}(u) u^{k+1} \beta_k(u) du, \quad k=0, 1, \dots, n-2, \quad (61)$$

где $\gamma_{\xi}(u)$ — характеристическая функция интервала $\left(\frac{\xi}{2}, \infty\right)$. Поскольку

$$\frac{\xi}{u} \gamma_{\xi}(u) \leq 2, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi}{u} \gamma_{\xi}(u) = 0,$$

то, согласно теореме Лебега, из (61) имеем

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \sigma_k \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) = 0, \quad k=0, 1, \dots, n-2.$$

Отсюда, в силу (27), получаем соотношение (32).

Выведем формулу (33). Из (28) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \eta} y(z, \eta) = z e^{i\eta} \left\{ 1 + \int_0^{\infty} e^{i\xi} K(z, \xi) d\xi \right\} +$$

$$+ e^{\lambda z} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} e^{\lambda \xi} K(z, \xi) d\xi. \quad (62)$$

Однако

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} e^{\lambda \xi} K(z, \xi) d\xi = \lim_{\rho \in \Lambda; \rho \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} (e^{\rho \xi} - 1) e^{\lambda \xi} K(z, \xi) d\xi. \quad (63)$$

Если интеграл, стоящий в правой части (63), проинтегрировать по частям и учесть соотношения (31), (32), то получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} (e^{\rho \xi} - 1) e^{\lambda \xi} K(z, \xi) d\xi &= - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{(\lambda + \rho) \xi} K(z, \xi) d\xi - \\ &- \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} (e^{\rho \xi} - 1) e^{\lambda \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} K(z, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (64)$$

Заметим, что при $\rho \xi \in \Lambda$

$$\left| \frac{1}{\rho \xi} (e^{\rho \xi} - 1) \right| \leq 1, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho \xi} (e^{\rho \xi} - 1) = 1.$$

Поэтому, согласно теореме Лебега, из (63) и (64) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} e^{\lambda \xi} K(z, \xi) d\xi = - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{\lambda \xi} \left\{ K(z, \xi) + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} K(z, \xi) \right\} d\xi. \quad (65)$$

Из (62) и (65) получаем формулу (33). Теорема 1 доказана.

Замечание 4. Если обозначить $L(x, t) = K(x, t - x)$, то функция $L(x, t)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} L(x, t) + \sum_{k=0}^{n-2} p_{n-2-k}(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k} L(x, t) - (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} L(x, t) = 0, \quad (66)$$

$$p_0(x) = n \frac{d}{dx} L(x, x), \quad (67)$$

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x) &= \sum_{s=0}^k p_s(x) \sum_{j=0}^k C_{n-3-s}^{k-j} \left\{ \frac{\partial^{k-j}}{\partial x^{k-j}} L(x, t) \Big|_{t=x} \right\}^{(k-j)} + \\ &+ \sum_{v=0}^{k+2} C_{n-1-v}^{k+2-v} \left\{ \frac{\partial^v}{\partial x^v} L(x, t) \Big|_{t=x} \right\}^{(k+2-v)} - (-1)^k \frac{\partial^{k+2}}{\partial t^{k+2}} L(x, t) \Big|_{t=x}, \end{aligned} \quad (68)$$

$$k=0, 1, \dots, n-3.$$

Эти формулы можно получить из интегрального уравнения (50) или же подстановкой функции $y(x, \lambda)$ из (26) в уравнение (1) (при $n=2$ формула (66) имеет смысл, когда коэффициент уравнения является дифференцируемым).

Замечание 5. Условие регулярности коэффициентов в секторе D не является необходимым условием для того, чтобы уравнение порядка $n > 2$ имело решение, представимое в виде (26). Действительно, пусть $Ly \equiv y'' + p(x)y$, где $p(x)$ удовлетворяет условию $x p(x) \in L_1(0, \infty)$ и не является аналитической функцией. Согласно теореме 1 уравнение $Ly = \lambda^2 y$ имеет решение $y(x, \lambda)$, представимое в виде (26). Однако функция $y(x, \lambda)$ одновременно является решением уравнения $L^k y = \lambda^{2k} y$ при $k > 1$.

Приведем еще пример уравнения, коэффициенты которого имеют особенности в секторе D , но решение допускает представление (26). Пусть $\omega \neq 1$ — некоторый корень n -ой степени из единицы. Выберем число a так, чтобы $\operatorname{Re} a > 0$ и

$$\frac{\pi}{2} < |\arg(1 - \omega)a| < \pi - \frac{\pi}{n}. \quad (*)$$

Положим

$$F(x, t) = e^{a(t - \omega x)},$$

а функцию $L(x, t)$ определим из уравнения

$$L(x, t) + F(x, t) + \int_x^\infty L(x, u) F(u, t) du = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$L(x, t) = -e^{a(t - \omega x)} \left\{ 1 - \frac{1}{a(1 - \omega)} e^{(1 - \omega)a x} \right\}^{-1}.$$

Теперь из соотношений (67), (68) определим коэффициенты $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n - 2$) и составим уравнение (1). Тогда функция

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \int_x^\infty e^{\lambda t} L(x, t) dt$$

является решением построенного уравнения (1) (это легко проверить в случае $n = 3$). Однако

$$p_0(x) = -n a (1 - \omega) e^{(1 - \omega)a x} \left\{ 1 - \frac{1}{a(1 - \omega)} e^{(1 - \omega)a x} \right\}^{-1},$$

поэтому функция $p_0(z)$ имеет полюсы

$$z_m = \frac{1}{a(1 - \omega)} [\ln |a(1 - \omega)| + i[2\pi m + \arg(1 - \omega)a]], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

которые, в силу неравенства (*), при достаточно больших по абсолютной величине значениях m , имеющих одинаковый знак с $\arg(1 - \omega)a$, находятся в секторе D .

Замечание 6. Как было показано выше, при условиях (22) решение $y(x, \lambda)$ уравнения (1), представимое в виде (25), в точке $x=0$ имеет конечное значение $y(0, \lambda)$, которое является регулярной функцией по λ в Λ , непрерывной вплоть до границы. Однако при условиях (22) или (23) существование конечных производных по x функции $y(x, \lambda)$ в точке $x=0$ гарантировать нельзя. Ниже приводятся условия, которые обеспечивают существование производных $y^{(v)}(0, \lambda)$ ($v=0, 1, \dots, n-2$), регулярных в Λ и непрерывных вплоть до границы.

Предположим теперь, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$\int_0^\infty x \gamma_k(x) dx < \infty, \quad \int_0^\infty x^{n-1} \gamma_k(x) dx < \infty, \quad (69)$$

$$k=0, 1, \dots, n-2,$$

где

$$\gamma_k(x) = \sup_{z \in D; |\operatorname{Re} z|=1} |p_k(xz)|.$$

Обозначим

$$\gamma(x) = \frac{n-1}{n} \sum_{k,v=0}^{n-2} \frac{2^{v+1}}{v! \left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^{v+1}} \int_x^\infty (u-x)^v \gamma_k(u) du,$$

$$\tilde{\gamma}(x) = \int_x^\infty \gamma(u) du.$$

Теорема 2. Пусть коэффициенты уравнения (1) регулярны в секторе D и удовлетворяют условиям (69). Тогда при всех значениях $\lambda \in \Lambda$ уравнение (1) имеет решение $y(x, \lambda)$ такое, что функции $y^{(v)}(x, \lambda)$ ($v=0, 1, \dots, n-2$) представляются в виде

$$y^{(v)}(x, \lambda) = \lambda^v e^{-\lambda x} + \sum_{m=0}^v \lambda^m \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{v,m}(x, t-x) dt, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (70)$$

где ядра $K_{v,m}(z, \xi)$ ($z \in D; 0 \leq \xi < \infty$) при каждом фиксированном ξ регулярны по z в секторе D и удовлетворяют неравенствам

$$|K_{v,m}(z, \xi)| \leq \frac{1}{2} \gamma \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \exp \left\{ \tilde{\gamma}(\operatorname{Re} z) - \tilde{\gamma} \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \right\}.$$

Кроме того, функции $y^{(v)}(x, \lambda)$ ($v=0, 1, \dots, n-2$) при каждом фиксированном x ($0 \leq x < \infty$) имеют непрерывную производную по λ во всех точках полуплоскости Λ за исключением, быть может, точки $\lambda=0$.

Доказательство. Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений для функций $y^{(v)}(x, \lambda)$ ($\lambda \in S$):

$$y^{(\nu)}(x, \lambda) =: \lambda^\nu e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-\nu} \int_x^\infty \varphi^{(\nu+1)}(x-t, \lambda) p_{n-2-k}(t) y^{(k)}(t, \lambda) dt, \quad (71)$$

$$\nu = 0, 1, \dots, n-2.$$

Применив метод последовательных приближений к системе уравнений (71), получим

$$y^{(\nu)}(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{(\nu)}(x, \lambda), \quad \nu = 0, 1, \dots, n-2,$$

где функции $R_j^{(\nu)}(x, \lambda)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$R_0^{(\nu)}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{\lambda x},$$

$$R_{j+1}^{(\nu)}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^\infty \varphi^{(\nu+1)}(x-t, \lambda) p_{n-2-k}(t) R_j^{(k)}(t, \lambda) dt,$$

$$j = 0, 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, \dots, n-2. \quad (72)$$

Методом индукции можно показать, что функции $R_j^{(\nu)}(x, \lambda)$ допускают представление

$$R_j^{(\nu)}(x, \lambda) = \sum_{m=0}^j \lambda^m \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{\nu, m}^{(j)}(x, t-x) dt, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (73)$$

$$\nu = 0, 1, \dots, n-2,$$

где ядра $K_{\nu, m}^{(j)}(z, \xi)$ ($z \in D; 0 \leq \xi < \infty$) регулярны по z в секторе D и удовлетворяют неравенствам

$$|K_{\nu, m}^{(j)}(z, \xi)| \leq \frac{1}{2} \gamma \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \gamma(\operatorname{Re} z) - \gamma \left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2} \right) \right\}^{j-1}.$$

$$m = 0, 1, \dots, \nu; \nu = 0, 1, \dots, n-2; j = 1, 2, 3, \dots.$$

Действительно, из (72) при $j = 0$ имеем

$$R_1^{(\nu)}(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{\nu-1} \lambda^m G_m^{(\nu)}(x, \lambda) + \lambda^\nu \sum_{m=\nu}^{n-2} \lambda^{m-\nu} G_m^{(\nu)}(x, \lambda), \quad (74)$$

где

$$G_m^{(\nu)}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \int_x^\infty e^{\lambda t} \varphi^{(\nu+1)}(x-t, \lambda) p_{n-2-m}(t) dt.$$

Используя формулы

$$\frac{1}{\lambda^{n-k}} e^{\lambda t} \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{(v-k)! n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^{v-k+1}}{\omega_s^{v+1}} \int_x^t (t-u)^{v-k} e^{i\{\tau\omega_s + u(1-\omega_s)\}} du,$$

$$k = 0, 1, \dots, v; \quad v = 0, 1, \dots, n-2.$$

и повторяя рассуждения, сделанные в доказательстве теоремы 1, получим

$$G_m^{(v)}(x, i) = \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{v, m}^{(1)}(x, t-x) dt, \quad 0 \leq m \leq v-1,$$

$$\sum_{m=v}^{n-2} \lambda^{m-v} G_m^{(v)}(x, i) = \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{v, v}^{(1)}(x, t-x) dt.$$

Поэтому формула (74) приводится к виду (73) при $j=1$. Предполагая, что при некотором j формулы (73) верны, функцию $R_{j+1}^{(v)}(x, i)$ запишем в виде

$$R_{j+1}^{(v)}(x, \lambda) = \sum_{r=0}^{v-1} \lambda^r \sum_{k=m}^{n-2} G_{k, m}^{(v)}(x, i) + \lambda^v \sum_{m=v}^{n-2} \lambda^{m-v} \sum_{k=m}^{n-2} G_{k, m}^{(v)}(x, i), \quad (75)$$

где

$$G_{k, m}^{(v)}(x, i) = \frac{1}{\lambda^n} \int_1^\infty e^{i' t} \tau^{(v+1)}(x-t, i) p_{n-2-k}(t) \int_0^\infty e^{i' v} K_{k, m}^{(i)}(t, v) dv dt.$$

Если вышеуказанным способом вывести также формулы

$$\sum_{k=m}^{n-2} G_{k, m}^{(v)}(x, \lambda) = \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{v, m}^{(v+1)}(x, t-x) dt, \quad 0 \leq m \leq v-1,$$

$$\sum_{m=v}^{n-2} \lambda^{m-v} \sum_{k=m}^{n-2} G_{k, m}^{(v)}(x, i) = \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{v, v}^{(v+1)}(x, t-x) dt,$$

то из (75) получим представление (73) для функции $R_{j+1}^{(v)}(x, i)$. Далее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. Приведем лишь систему интегральных уравнений, которой удовлетворяют функции $\bar{K}_{v, m}(z, \bar{z}) = K_{n-2-v, n-2-m}(z, \bar{z})$:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{v, v}(z, \bar{z}) = & \sum_{k=0}^v \frac{1}{k! n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}} \int_{\frac{\bar{z}}{1-\omega_s} + z}^\infty \left(\zeta - z - \frac{\bar{z}}{1-\omega_s} \right)^k p_k(\zeta) d\zeta + \\ & + \sum_{j=0}^v \frac{1}{j! n} \sum_{k=0}^j \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^j}{\omega_s^{j+1}} \int_0^{\bar{z}} \int_{\frac{\bar{z}-u}{1-\omega_s} + z}^\infty \left(\zeta - z - \frac{\bar{z}-u}{1-\omega_s} \right)^j p_k(\zeta) \bar{K}_{k, j}(\zeta, u) d\zeta du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\nu, m}(z, \xi) = & \frac{1}{\nu! n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^\nu}{\omega_s^{\nu+1}} \int_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s} \right)^\nu p_m(\zeta) d\zeta + \\ & + \frac{1}{\nu! n} \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_j)^\nu}{\omega_j^{\nu+1}} \int_0^{\xi} \int_{\frac{\xi-u}{1-\omega_j}+z}^x \left(\zeta - z - \frac{\xi-u}{1-\omega_j} \right)^\nu p_k(\zeta) \tilde{K}_{k, m}(\zeta, u) d\zeta du, \end{aligned} \quad (76)$$

$$m = \nu + 1, \nu + 2, \dots, n-2; \nu = 0, 1, \dots, n-2.$$

Замечание 7. Из системы интегральных уравнений (76) видно, что формулы (70) справедливы также при условиях

$$\int_0^\infty x^\nu \left\{ \sup_{\tau \in D; \operatorname{Re} \tau = 1} \int_x^\infty |p_k(u\tau)| du \right\} dx < \infty, \quad k, \nu = 0, 1, \dots, n-2.$$

Замечание 8. Очевидно, что имеют место формулы

$$y^{(\nu)}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{\lambda x} + \sum_{m=0}^{\nu} \lambda^m \int_x^\infty e^{\lambda t} \left\{ C_\nu^m \frac{\partial^{\nu-m}}{\partial z^{\nu-m}} K_{0,0}(x, t-x) \right\} dt, \quad 0 < x < \infty.$$

Однако при $\nu + m \neq 0$ функции $K_{\nu, m}(z, \xi)$ и

$$C_\nu^m \frac{\partial^{\nu-m}}{\partial z^{\nu-m}} K_{0,0}(z, \xi),$$

вообще говоря, не совпадают.

Сформулируем аналогичную теорему также для уравнений

$$(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [p_{n-1-k}(x) y^{(k)}]^{(k)} = i^{2n} y, \quad 0 < x < \infty, \quad (77)$$

$$(-1)^n \varphi^{(2n)} = i^{2n} \varphi.$$

Обозначения $\omega_s, \varphi(x, i), S, D$ будем использовать и в этом случае, только в соответствующих формулах (5), (6), (9), (21) число n нужно заменить на $2n$. На коэффициенты $p_k(x)$ накладываются следующие условия:

$$\int_0^\infty x^{k+1} \gamma_{lk}(x) dx < \infty, \quad \int_0^\infty x^{k+n} \gamma_{lk}(x) dx < \infty, \quad (78)$$

$$k=0, 1, \dots, n-1,$$

где

$$\gamma_{lk}(x) = \sup_{\tau \in D, \operatorname{Re} \tau = 1} |p_k(x\tau)|.$$

Обозначим

$$\eta(x) = \frac{2n-1}{n} \sum_{k, \nu=0}^{n-1} \frac{2^{\nu+k}}{(\nu+k)! \left(\sin \frac{\pi}{2n}\right)^{\nu+k+1}} \int_x^{\infty} (u-x)^{\nu+k} \eta_k(u) du,$$

$$\tilde{\eta}(x) = \int_x^{\infty} \eta(u) du.$$

Теорема 3. Пусть коэффициенты уравнения (77) регулярны в секторе D и удовлетворяют условиям (78). Тогда при всех значениях параметра λ из замкнутой верхней полуплоскости уравнение (77) имеет решение $y(x, \lambda)$ такое, что функции $y^{(\nu)}(x, \lambda)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$) представляются в виде

$$y^{(\nu)}(x, \lambda) = (i\lambda)^{\nu} e^{i\lambda x} + \sum_{m=0}^{\nu} (i\lambda)^m \int_x^{\infty} e^{i\lambda t} K_{\nu, m}(x, t-x) dt, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (79)$$

где ядра $K_{\nu, m}(z, \xi)$ ($z \in D; 0 \leq \xi < \infty$) при каждом фиксированном ξ регулярны по z в секторе D и удовлетворяют неравенствам

$$|K_{\nu, m}(z, \xi)| \leq \frac{1}{2} \eta\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right) \exp \left\{ \tilde{\eta}(\operatorname{Re} z) - \tilde{\eta}\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right) \right\}.$$

Кроме того, функции $y^{(\nu)}(x, \lambda)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$) при каждом фиксированном x ($0 \leq x < \infty$) имеют непрерывную производную по λ во всех точках замкнутой верхней полуплоскости за исключением, быть может, точки $\lambda = 0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2, только в этом случае нужно исходить из следующей системы интегральных уравнений для функций $y^{(\nu)}(x, \lambda)$ ($i\lambda \in S$):

$$\begin{aligned} y^{(\nu)}(x, \lambda) &= (i\lambda)^{\nu} e^{i\lambda x} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(i\lambda)^{2n}} \int_x^{\infty} \varphi^{(\nu+k+1)}(x-t, i\lambda) \times \\ &\quad \times p_{n-1-k}(t) y^{(k)}(t, \lambda) dt, \\ &\quad \nu = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Функции $\tilde{K}_{\nu, m}(z, \xi) = K_{n-1-\nu, n-1-m}(z, \xi)$ удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\nu, m}(z, \xi) &= - \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^k}{(2k)! 2n} \sum_{s=1}^{2n-1} \frac{(1-\omega_s)^{2k}}{\omega_s^{\nu+k+1}} \times \\ &\quad \times \int_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s} \right)^{2k} p_k(\zeta) d\zeta - \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{(j+k)! 2n} \sum_{s=1}^{2n-1} \frac{(1-\omega_s)^{j+k}}{\omega_s^{\nu+k+1}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{\xi} \int_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi-u}{1-\omega_s} \right)^{j+k} p_k(\zeta) \tilde{K}_{k,j}(\zeta, u) d\zeta du, \\
& \tilde{K}_{\lambda,m}(z, \xi) = - \frac{(-1)^m}{(\nu+m)!} \frac{1}{2n} \sum_{s=1}^{2n-1} \frac{(1-\omega_s)^{\nu+m}}{\omega_s^{\nu+m+1}} \times \\
& \times \int_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s} \right)^{\nu+m} p_m(\zeta) d\zeta - \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(\nu+k)!} \frac{1}{2n} \sum_{s=1}^{2n-1} \frac{(1-\omega_s)^{\nu+k}}{\omega_s^{\nu+k+1}} \times \\
& \times \int_0^{\xi} \int_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s} \right)^{\nu+k} p_k(\zeta) \tilde{K}_{\lambda,m}(\zeta, u) d\zeta du, \quad (80)
\end{aligned}$$

$$m = \nu + 1, \nu + 2, \dots, n-1; \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Замечание 9. Формулы (79) справедливы также при условиях

$$\int_0^{\infty} x^{\nu} \left\{ \sup_{-x \in D; \operatorname{Re} z = 1} \int_x^{\infty} (u-x)^k |p_k(u\tau)| du \right\} dx < \infty, \quad k, \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Это видно из системы интегральных уравнений (80).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 24.IV.1978

Ի. Դ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար լուծումների ասիմպտոտիկան պահպանող ձևափոխության ռադիալի գոյությունը մասին (ամփոփում)

Անալիտիկ գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար կառուցվում է ձևափոխության ռադիալի, որը անվերջությունում պահպանում է լուծումների ասիմպտոտիկան:

I. G. KHACHATRIAN. On the existence of a transformation operator for high order differential equations, which preserves the asymptotics of solutions (summary)

For ordinary differential equations with analytic coefficients the transformation operator, preserving the asymptotic behaviour of solutions at infinity, is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, 106, № 2, 1956, 187—190.
2. В. А. Марченко. Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля, Киев, 1972.

3. И. Г. Хачатрян. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 13, № 3, 1978, 215—237.
4. А. М. Седлецкий. Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сб., 96, № 1, 1975, 75—82.
5. К. Гoffman. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
6. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.
7. P. L. Duren. Theory of H^p spaces, New York, 1970.

М. М. ДЖРБАШЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ЗАМКНУТОСТЬ НЕКОТОРЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Еще Винер и Пэли в своей знаменитой монографии привели несколько интересных приложений следующего простого, но важного положения:

Свойства замкнутости и ортогональности инвариантны при любом линейном преобразовании всего L_2 в себя, которое сохраняет величину интеграла от квадрата модуля каждой функции (см. [1], гл. II).

Настоящая статья посвящена дальнейшим систематическим приложениям указанного рода подхода к исследованию вопросов представления и замкнутости ряда важных систем аналитических функций. Именно с этой точки зрения здесь излагается ряд результатов автора, анонсированных им без доказательств в двух его ранних заметках ([2], [3]). Кроме того, с той же точки зрения, излагаются некоторые давние результаты и других авторов, по возможности в наиболее общей формулировке, начиная от классической теоремы Мюнца-Сасса ([4], [1]) и кончая некоторыми результатами Поллачека о полиномах, ортогональных с весом на всей вещественной оси ([5], [6]).

Что касается результатов, установленных ранее другими авторами, то в данной статье их изложение, в основном, значительно отличается от первоначального.

Поскольку, таким образом, данная статья частично имеет обзорный характер, то мы сочли необходимым в конце параграфов 1 и 2 привести подробные литературные ссылки, освещающие историю вопроса в хронологическом порядке. Не претендуя на полноту в этих ссылках, мы постарались, иногда довольно подробно, останавливаться также на сущности и методах, примененных в предшествующих работах и их взаимосвязи.

В § 1 сначала приводятся формулировки ряда общеизвестных результатов гармонического анализа, которыми мы будем систематически пользоваться во всем дальнейшем изложении. Здесь приводятся также определенные ортонормальные на всей оси $(-\infty, +\infty)$ системы рациональных функций Мальмквиста и Такенака (теорема 1). На основе отмеченного выше общего положения об инвариантности свойств ортогональности и замкнутости при линейных преобразованиях в L_2 , сохраняющих норму, теорема 1 по существу является основой при установлении ряда теорем, приводимых в последующем изложении.

В § 2 приводится интегральное представление ортогонализированной на $(0, +\infty)$ системы Мюнца-Сасса $|e^{-ik^2t} x^{k-1}|_1^\infty$ (теорема 2), а также критерий замкнутости этой системы в $L_2(0, +\infty)$ и эквивалентной ей системы $|u^{j'} (\log u)^{j'-1}|_0^\infty$ в $L_2(0, 1)$ (теоремы 3 и 3').

В § 3 устанавливается эффективная ортогонализация систем функций вида $|x_{j-1}(t) e^{-it}|_0^\infty$, где

$$x_j(t) = \Gamma\left(j + \frac{1}{2} + it\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \quad (j \geq 0) \text{ в виде ее ин-}$$

тегрального представления (теорема 4). Критерий замкнутости этой системы с весом $\text{ch}^{-1} \pi t$ в $L_2(-\infty, +\infty)$ является существенным обобщением одной известной теоремы Винера и Пэли (теорема 5). Приводимые здесь же специальные случаи этих теорем — об интегральном представлении и замкнутости систем полиномов $|P_n(t)|_0^\infty$, ортонормальных на $(-\infty, +\infty)$ с весом $\text{ch}^{-1} \pi t$ — имеют самостоятельный интерес (теоремы 6 и 7). Они по существу служат основой для последующих важных результатов такого же рода, излагаемых дальше.

Наконец, заключительный § 4 посвящен изложению теории систем полиномов Ф. Поллачека $|P_n^{(\alpha)}(t; \varphi)|_0^\infty$, ортонормальных на $(-\infty, +\infty)$ с весовой функцией вида

$$\omega^{(\alpha)}(t; \varphi) = \frac{2^\alpha}{\pi} (\sin \varphi)^{1+\alpha} \left| \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it\right) \right|^2 e^{-(\pi-2\varphi)t}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

где $\alpha \in (-1, +\infty)$ и $\varphi \in (0, \pi)$ — произвольные параметры.

Отметим, однако, что Поллачек построил теорию своих полиномов совершенно отличным от приводимого нами методом, позволившем ему установить лишь их замкнутость (теорема 9), производящую функцию (теорема 11) и рекуррентные уравнения (теорема 12).

Развитый здесь метод построения теории полиномов Поллачека, анонсированный автором в его заметке [2], позволил установить новый важный факт — интегральное представление этих полиномов (теоремы 8 и 10). Кроме того, в конце мы приводим также построение родственных ортогональных полиномов для полуоси $(0, +\infty)$ с установлением всех соответствующих результатов для них (теоремы 13, 14, 15 и 16).

§ 1. Предварительные сведения

1.1. (а). Как обычно, обозначим через $L_2(a, b)$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ класс измеримых на промежутке (a, b) комплекснозначных функций, для которых существует конечный интеграл Лебега

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

при этом число

$$\|f(x)\|_{L_2(a,b)} = \left\{ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

называется нормой элемента $f(x) \in L_2(a,b)$.

Если понятно о каком промежутке идет речь, то будем пользоваться более краткими обозначениями L_2 и $\|f\|$.

Элемент $f(x) \in L_2(a,b)$ называется пределом последовательности элементов $\{f_n(x)\}_1^\infty$, $f_n(x) \in L_2(a,b)$ по норме, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Этот предел $f(x)$ называется также пределом в среднем последовательности элементов $\{f_n(x)\}_1^\infty$, и применяется также краткая запись

$$f(x) = l.i.m. f_n(x).$$

(6) Для произвольной функции $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ интеграл Фурье

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} dt$$

в смысле Лебега, вообще говоря, не существует.

Как известно, Планшерель впервые построил оператор Фурье $F[f]$ для класса $L_2(-\infty, +\infty)$, доказав теорему, устанавливающую полное равноправие между функцией и ее преобразованием Фурье.

Теорема А (Планшерель). Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $L_2(-\infty, +\infty)$. Тогда

1°. Преобразование Фурье $F(u) = F[f]$ и его обращение $f(x) = F^{-1}[f]$ могут быть определены предельными соотношениями

$$F(u) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{(-\infty, +\infty)}{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} f(t) e^{-iut} dt, \quad (1.1)$$

$$f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{(-\infty, +\infty)}{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(u) e^{ixu} du, \quad (1.2)$$

причем имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (1.3)$$

2°. Для любой пары функций $f(x)$ и $g(x)$ из $L_2(-\infty, +\infty)$ и их преобразований Фурье $F(u) = F[f]$ и $G(u) = F[g]$ имеет место обобщенное равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \overline{G(u)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (1.4)$$

(в) Следующее предложение о преобразованиях Меллина в классах L_2 непосредственно следует из теоремы Планшереля.

Теорема Б. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная функция из класса $L_2(0, +\infty)$. Тогда

1°. Преобразование Меллина

$$\Phi(t) = M[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/\sigma}^{+\infty} \varphi(x) x^{-\frac{1}{2}-it} dx \quad (1.5)$$

и его обращение

$$\varphi(x) = M^{-1}[\Phi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(t) x^{-\frac{1}{2}+it} dt \quad (1.6)$$

осуществляют взаимно-однозначные отображения семейств функций $L_2(0, +\infty)$ и $L_2(-\infty, +\infty)$ друг на друга с сохранением норм

$$\int_0^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 dt. \quad (1.7)$$

2°. Для произвольных пар функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ из $L_2(0, +\infty)$ и их преобразований Меллина $\Phi_1(t) = M[\varphi_1], \Phi_2(t) = M[\varphi_2]$ имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(t) \overline{\Phi_2(t)} dt. \quad (1.8)$$

(г) Напомним теперь определение класса H_+^2 аналитических функций Харди-Тамаркина. А именно, класс H_+^2 — суть множество аналитических в верхней полуплоскости

$$G^{(+)} = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$$

функций $f(z)$, для которых

$$\|f\| = \sup_{0 < y < +\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^2 dx \right\} < +\infty. \quad (1.9)$$

Отметим, что, как впервые было установлено в совместной с А. Е. Аветисяном работе автора (см. [7], стр. 417, а также [8], стр. 448), класс H_+^2 совпадает с множеством аналитических в области $G^{(+)}$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0 < \varphi < \pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 dr \right\} < +\infty. \quad (1.9')$$

Как известно, если $f(z) \in H^2$, то почти для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ существует предельная функция

$$\lim_{y \rightarrow +0} f(x + iy) = f(x) \in L_2(-\infty, +\infty),$$

посредством которой сама функция $f(z)$ представима интегральной формулой Коши (см., например, [16])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z), & z \in G^{(+)} \\ 0, & z \in G^{(-)} = \{z: \operatorname{Im} z < 0\}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Для функций класса H^2_+ справедлива следующая фундаментальная

Теорема В (Винер-Пэли). 1°. Для граничных значений $f(x)$ любой функции $f(z) \in H^2_+$ почти всюду

$$F(u) = F[f] = 0, \quad -\infty < u < 0. \quad (1.11)$$

Обратно, если функция $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ обладает свойством (1.11), то она почти всюду на $(-\infty, +\infty)$ совпадает с граничными значениями некоторой функции $f(z) \in H^2_+$.

2°. Класс H^2_+ совпадает с множеством функций представимых в виде

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{izt} \varphi(t) dt, \quad z \in G^{(+)}, \quad (1.12)$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция из $L_2(0, +\infty)$, причем

$$\int_0^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (1.13)$$

Отсюда и из формулы (1.4) теоремы А вытекает

Следствие. Пусть $f_j(z) \in H^2_+$ ($j = 1, 2$) и $F_j(u) = F[f_j]$ ($j = 1, 2$) — преобразования Фурье их граничных значений $f_j(x)$ ($j = 1, 2$).

Тогда справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx = \int_0^{+\infty} F_1(u) \overline{F_2(u)} du. \quad (1.14)$$

* Отметим, что значительно позже этот же результат был повторен в работе [9].

(д) Система функций $\{f_n(x)\}_1^\infty$, $f_n(x) \in L_2(a, b)$ ($-\infty < a < b < +\infty$) называется *замкнутой* в $L_2(a, b)$, если из условий

$$f(x) \in L_2(a, b), \int_a^b f(x) \overline{f_n(x)} dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

вытекает, что $f(x) = 0$ почти всюду на (a, b) .

Если для любой функции $f(x) \in L_2(a, b)$

$$\inf_{\{P_n\}} \int_a^b |f(x) - P_n(x)|^2 dx = 0,$$

где P_n — всевозможные „полиномы“ вида

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(x),$$

то система функций $\{f_n(x)\}_1^\infty$ называется *полной* в $L_2(a, b)$.

Общеизвестно, что как в случае ортонормальной системы функций $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$

$$\int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \dots), \quad (1.15)$$

так и в общем случае произвольной счетной системы функций $\{f_n(x)\}_1^\infty$, свойства замкнутости и полноты эквивалентны.

В заключение сформулируем следующее предложение, которое непосредственно следует из обобщенных равенств Парсеваля (1.4), (1.8) и (1.12) теорем А, Б и следствия теоремы В.

Теорема Г. *Нижеследующие последовательности функций в соответствующих классах обладают одинаковыми свойствами полноты и замкнутости, а также ортонормальности.*

1°.

$$\begin{aligned} & \{f_n(x)\}_1^\infty, f_n(x) \in L_2(-\infty, +\infty), \\ & \{F_n(u)\}_1^\infty, F_n(u) = F[f_n] \in L_2(-\infty, +\infty), \end{aligned} \quad (1.16)$$

2°.

$$\begin{aligned} & \{\varphi_n(x)\}_1^\infty, \varphi_n(x) \in L_2(0, +\infty), \\ & \{\Phi_n(t)\}_1^\infty, \Phi_n(t) = M[\varphi_n] \in L_2(-\infty, +\infty), \end{aligned} \quad (1.17)$$

3°.

$$\begin{aligned} & \{\omega_n(z)\}_1^\infty, \omega_n(z) \in H_2^+, \\ & \{\Omega_n(u)\}_1^\infty, \Omega_n(u) = F[\omega_n] \in L_2(0, +\infty). \end{aligned} \quad (1.18)$$

(е) Наконец, о функции Бляшке для верхней полуплоскости.

Пусть $\{\mu_j\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, расположенных в верхней полуплоскости $G^{(+)}$.

Как известно, условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{1 + |\lambda_j|^2} < +\infty \quad (1.19)$$

необходимо и достаточно для сходимости произведения Бляшке

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{z - \lambda_j}{z - \bar{\lambda}_j} x_j, \quad x_j = \frac{|1 + \lambda_j|^2}{1 + |\lambda_j|^2} \quad (1.20)$$

к аналитической в $G^{(+)}$ функции $B(z) \neq 0$, обращающейся в нуль в точках последовательности $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$.

Функция Бляшке $B(z)$ обладает свойствами:

$$1) \quad |B(z)| \leq 1, \quad z \in G^{(+)}, \quad (1.21)$$

2) почти всюду на $(-\infty, +\infty)$ существуют ее граничные значения

$$B(x) = \lim_{y \rightarrow +0} B(x + iy), \quad \text{причем } |B(x)| = 1. \quad (1.22)$$

Отметим также, что если для любого k ($1 \leq k < +\infty$) обозначить через p_k кратность появления числа λ_k во всей последовательности $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$, то при условии (1.19) всегда будем иметь $1 \leq p_k < +\infty$.

Поэтому для любого k ($1 \leq k < +\infty$) точка $z = \lambda_k$ для функции $B(z)$ будет нулем кратности $p_k < +\infty$.

1.2. (а) Пусть $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$, $\lambda_j \in G^{(+)}$ — произвольная последовательность комплексных чисел. Впредь для каждого k ($1 \leq k < +\infty$) мы будем обозначать через $s_k \geq 1$ кратность появления числа λ_k на отрезке $|\lambda_j|_1^k$, а через p_k — кратность его появления во всей последовательности $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$. Очевидно, что, вообще говоря,

$$1 \leq s_k \leq p_k \leq +\infty \quad (1 \leq k < +\infty),$$

причем, как отмечалось выше, при условии (1.19) всегда $p_k < +\infty$.

С последовательностью чисел $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ будем ассоциировать систему рациональных функций $\{\Phi_n(z)\}_1^{\infty}$, где

$$\Phi_1(z) = \frac{\sqrt{\operatorname{Im} \lambda_1}}{z - \lambda_1}, \quad \Phi_n(z) = \frac{\sqrt{\operatorname{Im} \lambda_n}}{z - \lambda_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z - \lambda_k}{z - \bar{\lambda}_k} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (1.23)$$

Множество полюсов системы $\{\Phi_n(z)\}_1^{\infty}$ лежит на последовательности точек $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$, принадлежащих нижней полуплоскости $G^{(-)}$.

Отметим, что дробно-линейное преобразование $z = i \frac{1+w}{1-w}$ переводит систему $\{\Phi_n(z)\}_1^{\infty}$ в давно известную, ортогональную на окружности $|w|=1$, систему рациональных функций $\{\varphi_n(w)\}_1^{\infty}$ с полюсами, лежащими в области $|w|_r > 1$. Эта система была открыта Ф. Мальмквистом — С. Такенака (см. [10] и [11], а также [12], стр. 363 и [13]).

* При этом условимся полагать $x_j = 1$ при $\lambda_j = i$.

В связи со сказанным, ортонормальность системы функций $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi_n(z) \right\}_1^\infty$, на всей оси $(-\infty, +\infty)$, т. е. справедливость соотношений

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) \overline{\Phi_m(x)} dx = \delta_{nm} \quad (n; m = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.24)$$

является простой переформулировкой замечательного факта ортогональности на окружности $|w|=1$ системы $\{\varphi_n(w)\}_1^\infty$, установленной указанными авторами.

Впрочем, соотношения ортонормальности (1.24) легко установить и непосредственно (см. [14], лемму 1).

Наконец, отметим очевидное свойство функций системы (1.24), а именно

$$\Phi_n(z) \in H^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.25)$$

(б) Приведем теперь две простые леммы.

Лемма 1. Для любого n ($1 \leq n < +\infty$) справедливы представления вида

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^n \frac{c_{nj}}{(z - \bar{\lambda}_j)^{s_j}}, \quad \text{где } c_{nn} \neq 0, \quad (1.26')$$

$$\frac{1}{(z - \bar{\lambda}_n)^{s_n}} = \sum_{j=1}^n c_{jn} \Phi_j(z), \quad \text{где } c_{nn}^* = c_{nn}^{-1}. \quad (1.26'')$$

Действительно, $\Phi_n(z)$ является правильной рациональной дробью со знаменателем $\prod_{j=1}^n (z - \bar{\lambda}_j)$. Поэтому, принимая во внимание определе-

ние чисел s_j ($1 \leq j \leq n$), очевидно, что формулы (1.26') представляют собой обычное разложение нашей правильной дроби на простейшие. При этом, поскольку сама точка $z = \bar{\lambda}_n$ является для $\Phi_n(z)$ полюсом в точности порядка s_n , то заведомо $c_{nn} \neq 0$.

Что же касается формулы (1.26'') и того, что в ней $c_{nn}^* = c_{nn}^{-1}$, то она непосредственно следует из первых n формул вида (1.26').

Лемма 2. При любых $z \in G^{(+)}$ и $\lambda \in G^{(-)}$ имеет место оценка сверху

$$\left| \frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right| \leq \exp \left\{ -\rho(z) \frac{\operatorname{Im} \lambda}{1 + |\lambda|^2} \right\}, \quad (1.27)$$

где

$$\rho(z) = \frac{2 \operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}. \quad (1.27')$$

* Если $s_j = 1$ ($1 \leq j < +\infty$), то из (1.23) и (1.26') легко следует формула (2) для коэффициентов $\{c_{jn}\}_1^\infty$ примечания [1.3].

Доказательство. Непосредственно проверяется, что справедливо тождество

$$1 - \left| \frac{z - \bar{\lambda}}{z - \lambda} \right|^2 = \frac{4 \operatorname{Im} \lambda \cdot \operatorname{Im} z}{|z - \bar{\lambda}|^2}; \quad z \in G^{(+)}, \lambda \in G^{(+)}.$$

Далее, из очевидного неравенства

$$1 + |\lambda z|^2 \geq -2 \operatorname{Re} \{\lambda z\}$$

следует, что

$$|z - \bar{\lambda}|^2 \leq (1 + |\lambda|^2)(1 + |z|^2).$$

Отсюда и из нашего тождества приходим к оценке

$$1 - \left| \frac{z - \bar{\lambda}}{z - \lambda} \right|^2 \geq 4 \frac{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \lambda}{(1 + |z|^2)(1 + |\lambda|^2)}; \quad z, \lambda \in G^{(+)}. \quad (1.28)$$

Наконец, поскольку

$$\left| \frac{z - \bar{\lambda}}{z - \lambda} \right| = \exp \left\{ \frac{1}{2} \log \left| \frac{z - \bar{\lambda}}{z - \lambda} \right|^2 \right\}$$

и $\log(1-x) \leq -x$ ($0 < x < 1$), из (1.28) получим неравенство (1.27) леммы.

(в) Докажем теперь теорему о полноте—замкнутости системы функций Мальмквиста-Такенака в подклассе $L_2^*(-\infty, +\infty) \subset L_2(-\infty, +\infty)$ граничных значений функций класса H_+^2 .

Теорема 1. Для замкнутости системы $\{\Phi_n(z)\}_1^\infty$, или, что то же самое, системы $\{(z - \bar{\lambda}_j)^{-s_j}\}_1^\infty$, в подклассе $L_2^*(-\infty, +\infty)$ граничных значений функций из H_+^2 , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{1 + |\lambda_j|^2} = +\infty. \quad (1.29)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение систему $\{r_n(z)\}_1^\infty$ простейших рациональных дробей

$$r_n(z) = \frac{(s_n - 1)!}{(z - \bar{\lambda}_n)^{s_n}} \in H_+^2. \quad (1.30)$$

Ввиду линейных соотношений (1.26') и (1.26'') леммы 1, системы функций $\{\Phi_n(x)\}_1^\infty$ и $\{r_n(x)\}_1^\infty$, будучи сами из класса $L_2^*(-\infty, +\infty)$, могут быть замкнутыми во всем этом классе только одновременно. Поэтому доказательство мы будем проводить для системы $\{r_n(x)\}_1^\infty$.

Необходимость. Предположив, что ряд (1.29) сходится, докажем незамкнутость системы $\{r_n(x)\}_1^\infty$ в классе $L_2^*(-\infty, +\infty)$. Действительно, при условии (1.19) рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \frac{B(z)}{i + z}, \quad (1.31)$$

где $B(z)$ — функция Бляшке (1.20), имеющая, как уже отмечалось, в каждой точке $z = \lambda_k$ нуль кратности $p_k < +\infty$ ($1 \leq k < +\infty$).

В силу свойств (1.21) — (1.22) функции $B(z)$, очевидно, что $f_0(z) \in H_+^2$ и, следовательно, согласно интегральной формуле Коши (1.10)

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^{(+)}. \quad (1.32)$$

Но функция $f_0(z) \neq 0$ и для каждого k ($1 \leq k < +\infty$) в точке $z = \lambda_k$ также имеет нуль конечной кратности $p_k \geq s_k \geq 1$. Следовательно, справедливы равенства

$$f_0^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Отсюда $(s_k + 1)$ -кратным дифференцированием (1.32) по параметру z получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) \frac{(s_k-1)!}{(t-\lambda_k)^{s_k}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) \overline{r_k(t)} dt = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Поскольку почти всюду на оси $-\infty < t < +\infty$ $|f_0(t)| = |t+i|^{-1} \neq 0$ то из наших равенств следует, что система $\{r_k(x)\}_1^\infty$ не замкнута в классе $L_2^*(-\infty, +\infty)$.

Достаточность. Нам нужно убедиться в том, что если для граничных значений $f(x) \in L_2^*(-\infty, +\infty)$ некоторой функции $f(z) \in H_+^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{r_k(t)} dt = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.33)$$

то при условии (1.29) $f(x) = 0$ почти всюду на всей оси $-\infty < x < +\infty$. Но поскольку функция $f(z)$ представима интегралом Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^{(+)},$$

то отсюда, ввиду равенств (1.33) и формул (1.30), заключаем, что

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.34)$$

Для любого n ($1 \leq n < +\infty$) введем в рассмотрение конечное произведение Бляшке

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - \lambda_j}{z - \bar{\lambda}_j} \chi_j$$

а также функцию $F_n(z) = f(z) B_n(z)$.

Поскольку для любого k ($1 \leq k < +\infty$) кратность появления числа λ_k во всей последовательности $\{\lambda_j\}_1^\infty$ равна $p_k < +\infty$, а в ее

отрезке $|\lambda_j|_1^n$ она равна $\rho_k(n) \leq \rho_k$, то легко видеть, что функция $F_n(z)$ аналитична в полуплоскости $G^{(+)}$, и кроме того, $F_n(z) \in H_+^2$. Поэтому $F_n(z)$ также представима интегральной формулой Коши, и таким образом, мы будем иметь

$$f(z) = \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{B_n(t)} \cdot \frac{dt}{t-z}, \quad z \in G^{(+)}$$

для любого $n > 1$.

Заметив, что $|B_n(t)| = 1$ при $t \in (-\infty, +\infty)$ и применив неравенство Шварца, получим

$$|f(z)| \leq \frac{|B_n(z)|}{2 \sqrt{\pi \operatorname{Im} z}} \|f\|, \quad z \in G^{(+)}, \quad (1.35)$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|t-z|^2} = \frac{\pi}{\operatorname{Im} z} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \|f\|^2.$$

Наконец, пользуясь оценкой (1.27) леммы 2, мы будем иметь

$$|B_n(z)| \leq \exp \left\{ -\rho(z) \sum_{j=1}^n \frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{1 + |\lambda_j|^2} \right\}. \quad (1.27'')$$

Отсюда, переходя к пределу в неравенстве (1.35) при $n \rightarrow +\infty$, в силу условия (1.29) теоремы мы получим $f(z) \equiv 0$, т. е. $f(x) = 0$ почти всюду на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

Примечания к § 1

[1.1]. По поводу сформулированных теорем А, Б, В и Г из п. 1.1 см. [1] (введение и гл. II), а также [8] (гл. I и гл. VII, теорему 7.4').

[1.2]. Относительно функции Бляшке в полуплоскости см., напр., [15], гл. VIII, а также [16], гл. XI.

[1.3]. В случае, когда $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$, но $s_j = 1$ ($1 \leq j < +\infty$) система $|\Phi_n(z)|_1^\infty$ была получена в работе Ердели [17], однако они были записаны не в виде (1.23), а в виде их явных разложений на простые дроби

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^n \frac{c_{jn}}{z - \lambda_j} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

где

$$c_{jn} = \sqrt{\operatorname{Im} \lambda_n} \prod_{k=1}^{n-1} (\bar{\lambda}_j - \lambda_k) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_k)^{-1}. \quad (2)$$

Формулы (1)–(2) были получены косвенным путем, как результат преобразования Фурье ортонормальной системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$, полученной им же посредством эффективной ортогонализации системы функций $\{e^{-i\lambda_k x}\}_1^\infty$ на полуоси $(0, +\infty)$ методом Грамма-Шмидта.

[1.4]. Запись системы $\{\Phi_n(z)\}_1^\infty$ в форме, эквивалентной (1.23), которую, как уже отмечалось, непосредственно можно получить отображением круга $|\omega| < 1$ на полуплоскость $G^{(+)}$, по-видимому, впервые была приведена в работе [18] для случая, когда $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ и $s_j \geq 1$ ($1 \leq j < +\infty$). Она также была получена, по существу тем же косвенным путем, как результат преобразования Лапласа-Фурье ортонормальной системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$, получаемой при ортогонализации на $(0, +\infty)$ более общей, чем у Ердели системы функций $\{e^{-i\lambda_k x} x^{\lambda_k^{-1}}\}_1^\infty$, методом Сасса, дополненным затем А. О. Гельфондом [19]. Подробнее об этих системах речь будет идти в § 2.

[1.5]. По поводу теоремы 1.

При $s_j = 1$ ($1 \leq j < +\infty$) утверждение теоремы 1 является переформулировкой для полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и класса H_+^2 давно известного результата Такенака [11], установленного им для системы $\{\varphi_n(\omega)\}_1^\infty$ Мальмквиста-Такенака для области круга $D = \{\omega; |\omega| < 1\}$ и аналитических в D функций из класса H_2 Харди.

В том же случае $s_j = 1$ и $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$ ($1 \leq j < +\infty$) теорема 1 содержится в работе Ердели [17] и была установлена им применением преобразования Лапласа над полной в $L_2(0, +\infty)$ системой Мюнца-Сасса $\{e^{-i\lambda_n x}\}_1^\infty$ и полученной из соответствующей ортогонализованной им же и полной в $L_2(0, +\infty)$ системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ (подробнее об этой системе см. в примечаниях [2.1] и [2.2] к § 2).

В случае, когда $s_j \geq 1$, но $\operatorname{Im} \lambda_j = 0$ ($1 \leq j < +\infty$) теорема 1 в терминах системы, эквивалентной $\{\Phi_n(z)\}_1^\infty$ была доказана в работе [18] также применением преобразования Лапласа над полной в $L_2(0, +\infty)$ обобщенной там же ортогональной системой $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ Ердели-Гельфонда (подробнее об этих более общих системах см. в примечаниях [2.3] и [2.4] к § 2).

В общем случае, когда $s_j \geq 1$ и $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$ ($1 \leq j < +\infty$) приведенный нами прямой способ доказательства теоремы 1 существенно отличается от предыдущих и публикуется автором впервые.

§ 2. Ортогонализация и замкнутость обобщенной системы Мюнца и Сасса

2.1. (а) Пусть $\{\mu_j\}_1^\infty$ ($\operatorname{Re} \mu_j > 0$) — произвольная последовательность комплексных чисел из правой полуплоскости $D^{(+)} = \{z; \operatorname{Re} z > 0\}$. Как и в § 1, для любого k ($1 \leq k < +\infty$) через $s_k \geq 1$ обозначаем кратность появления числа μ_k на отрезке $\{\mu_j\}_1^k$ нашей последовательности.

С последовательностью чисел $\{\mu_j\}_1^\infty$ мы будем ассоциировать последовательность функций

$$\{e^{-\mu_j/x} x^{s_j-1}\}_1^\infty, \quad e^{-\mu_j/x} x^{s_j-1} \in L_2(0, +\infty) \quad (2.1)$$

и через $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ будем обозначать ортогонализацию на $(0, +\infty)$ системы (2.1) по известному методу Грамма—Шмидта.

Итак, мы будем иметь

$$\int_0^\infty \gamma_n(x) \overline{\gamma_m(x)} dx = \delta_{nm} \quad (n, m = 1, 2, \dots),$$

при этом каждая функция $\gamma_n(x)$ является конечной линейной комбинацией первых n функций системы (2.1) и однозначно определяется с точностью до множителя вида $e^{i\alpha_n}$ ($\text{Im } \alpha_n = 0$).

Эффективная ортогонализация систем вида (2.1) и представление функций системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ в качестве интегралов Фурье осуществляется с помощью систем функций Мальмквиста—Такенака. Заметим сперва, что система функций

$$\psi_1(z) = \sqrt{\frac{\text{Re } \mu_1}{\pi}} \frac{i}{z + i\mu_1}, \quad \psi_n(z) = \sqrt{\frac{\text{Re } \mu_n}{\pi}} \frac{i}{z + i\mu_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{z - i\bar{\mu}_j}{z + i\mu_j}, \quad (2.2)$$

$$(n = 2, 3, \dots),$$

является системой Мальмквиста—Такенака $\left\{ \frac{i \Phi_n(z)}{\sqrt{\pi}} \right\}_1^\infty$, ассоциированной с последовательностью чисел $\{\lambda_j\}_1^\infty$, где $\lambda_j = i\bar{\mu}_j$ и т. о. $\text{Im } \lambda_j = \text{Re } \mu_j > 0$ ($1 \leq j < +\infty$).

Теорема 2. При надлежащем выборе множителя $e^{i\alpha_n}$ для функций системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ справедливо интегральное представление

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t) e^{-ixt} dt = \begin{cases} \gamma_n(x), & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0). \end{cases} \quad (2.3)$$

Доказательство. Так как, очевидно, $\psi_n(z) \in H_+^2$, то по теореме Винера—Пэли (В)

$$F[\psi_n] = 0, \quad x \in (-\infty, 0) \quad (2.4)$$

и в силу равенства Парсеваля (1.14)—следствия теоремы В, мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \gamma_n(x) \overline{\gamma_m(x)} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t) \overline{\psi_m(t)} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(t) \overline{\Phi_m(t)} dt = \delta_{nm} \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для завершения доказательства теоремы нам, таким образом, остается убедиться в том, что при любом $n \geq 1$ функция $\gamma_n(x)$ является линейной комбинацией совокупности функций $\{e^{-\mu_j x} x^{s_j-1}\}_1^n$.

В самом деле, в силу формулы (1.26') леммы 1 для любого $n \geq 1$ будем иметь представление вида

$$\psi_n(z) = \sum_{j=1}^n \frac{c_{jn}}{(z + i\mu_j)^{s_j}} c_{jn} \neq 0.$$

где $\{c_{jn}\}_1^n$ — вполне определенные числа. Следовательно, из (2.3) имеем при $x \in (0, +\infty)$

$$\gamma_n(x) = i \frac{\sqrt{\operatorname{Re} \mu_n}}{\pi \sqrt{2}} \sum_{j=1}^n c_{jn} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(t + i\mu_j)^{s_j}} dt. \quad (2.6)$$

Однако, по теореме вычетов при $x \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(t + i\mu_j)^{s_j}} dt &= e^{-i \frac{\pi}{2}(s_j+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(it - \mu_j)^{s_j}} d(it) = \\ &= \frac{2\pi e^{-i \frac{\pi}{2}s_j}}{(s_j-1)!} \left\{ \frac{d^{s_j-1}}{dw^{s_j-1}} [e^{-xw}] \right\}_{w=\mu_j} = \frac{2\pi e^{-i \frac{\pi}{2}s_j}}{(s_j-1)!} e^{-\mu_j x} x^{s_j-1}, \quad (j \geq 1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.6) следует требуемое утверждение.

(б) Приведем теперь критерий замкнутости системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$.

Теорема 3. Для замкнутости в $L_2(0, +\infty)$ ортонормальной системы $\{\gamma_j(x)\}_1^\infty$, или, что то же самое, системы функций $\{e^{-\mu_j x} x^{s_j-1}\}_1^\infty$, выполнение условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \mu_j}{1 + |\mu_j|^2} = +\infty \quad (2.7)$$

необходимо и достаточно.

Доказательство. Поскольку по теореме 2

$$\gamma_n(x) = F[\psi_n] = F \left[\frac{i\Phi_n}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то в силу теоремы Г (3) система $\{\gamma_j(x)\}_1^\infty$ в классе $L_2(0, +\infty)$ и система $\{\Phi_n(x)\}_1^\infty$ в классе $L_2(-\infty, +\infty)$ граничных значений функций из H^2 обладают одинаковыми свойствами замкнутости. Поэтому утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1.

Считаем не лишним привести здесь и второе, близкое по методу но независимое от теоремы 1, доказательство этой теоремы.

Необходимость. Как и в теореме 1, если

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \mu_j}{1 + |\mu_j|^2} < +\infty,$$

то рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \frac{B(z)}{i+z} \in H_+^2,$$

где $B(z)$ — функция Бляшке (1.20), ассоциированная с последовательностью комплексных чисел $\{\lambda_j\}_1^\infty$, где $\lambda_j = i\bar{\mu}_j$.

Далее, как уже отмечалось в ходе доказательства теоремы 1, функция $f_0(z) \equiv 0$, но

$$f_0^{(k-1)}(i\bar{\mu}_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.8)$$

Но согласно теореме В (2°) функция $f_0(z)$ допускает представление

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{izt} \varphi_0(t) dt, \quad z \in G^{(+)}, \quad (2.9)$$

где $\varphi_0(t) \in L_2(0, +\infty)$ и, очевидно, почти всюду на $(0, +\infty)$ отлична от нуля.

Наконец, из (2.8) и (2.9) следуют равенства

$$\int_0^{+\infty} \varphi_0(t) \overline{e^{-i\mu_k t} t^{k-1}} dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

т. е. незамкнутость системы $\{e^{-i\mu_k t} t^{k-1}\}_1^\infty$.

Достаточность. Пусть для некоторой функции $f_0(x) \in L_2(0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} f_0(t) \overline{e^{-i\mu_k t} t^{k-1}} dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.10)$$

Согласно теореме В (2°) функция

$$F_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f_0(t) e^{izt} dt, \quad z \in G^{(+)} \quad (2.11)$$

принадлежит классу H_+^2 , причем в силу условий (2.10)

$$F_0^{(k-1)}(i\bar{\mu}_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Аналогично доказательству достаточной части теоремы 1 можно утверждать, что для любого n ($1 \leq n < +\infty$) функция

$$F_0(z) B_n^{-1}(z), \quad B_n(z) = \sum_{j=1}^n \frac{z - i\bar{\mu}_j}{z + i\mu_j}$$

аналитична в полуплоскости $G^{(+)}$ и также принадлежит классу H_+^2 . Поэтому вновь по теореме В (2°) справедливо представление вида

$$F_0(z) B_n^{-1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{izt} f_n(t) dt, \quad z \in G^{(+)}, \quad (2.12)$$

где $f_n(t) \in L_2(0, +\infty)$, причем, так как при $\operatorname{Im} z = 0$ $|B_n(z)| = 1$, то по равенству Парсеваля

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x)|^2 dx = M_0 < +\infty \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.13)$$

Но из (2.11) по неравенству Шварца и по (2.12) получим оценку

$$|F_0(z)| \leq \left\{ \frac{M_0}{4\pi \operatorname{Im} z} \right\}^{1/2} |B_n(z)| \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.14)$$

Наконец, пользуясь оценкой (1.27''), вытекающей из леммы 2,

$$|B_n(z)| \leq \exp \left\{ -\rho(z) \sum_{j=1}^n \frac{\operatorname{Re} \mu_j}{1 + |\mu_j|^2} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и переходя к пределу в неравенстве (2.14) при $n \rightarrow +\infty$, в силу условия (2.7) нашей теоремы, мы получим, что $F_0(z) \equiv 0$, $z \in G^{(+)}$. Но тогда из (2.11) по равенству Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} |f_0(t)|^2 dt = 0.$$

Следовательно, $f_0(x) = 0$ почти всюду на полуоси $(0, +\infty)$, что в силу условий (2.10) и означает замкнутость нашей системы.

(в) Приведем переформулировку теоремы 3 для отрезка $(0,1)$.

Теорема 3'. Пусть $\{a_j\}_0^\infty$ $\left(\operatorname{Re} a_j > -\frac{1}{2}\right)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, и для данного k ($1 \leq k < +\infty$) $r_k \geq 1$ — кратность появления числа a_k на отрезке $\{a_j\}_0^k$.

Тогда для замкнутости в $L_2(0,1)$ системы функций

$$\{u^{a_j} (\log u)^{r_j-1}\}_0^\infty \quad (2.1')$$

или, что то же самое, обобщенной ортонормальной системы $\{E_n^{(a)}(u)\}_0^\infty$ Ердели — Гельфонда, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{j=0}^\infty \frac{1 + 2 \operatorname{Re} a_j}{1 + |a_j|^2} = +\infty. \quad (2.15)$$

Доказательство. Линейное преобразование

$$g(x) = E[f(u)] = e^{-\frac{x}{2}} f(e^{-x})$$

* См. примечание [2.5] к теореме 2.

и его обращение

$$f(u) = E^{-1}[g(x)] = u^{-\frac{1}{2}} g(-\log u)$$

устанавливают взаимно-однозначные соответствия между функциями классов $L_2(0,1)$ и $L_2(0, +\infty)$ с сохранением норм

$$\int_0^1 |f(u)|^2 du = \int_0^{+\infty} |g(x)|^2 dx.$$

Легко видеть также, что для

$$g_k(x) = E[f_k(u)] \text{ и } f_k(u) = E^{-1}[g_k(x)] \quad (k=1, 2)$$

будем иметь также

$$\int_0^1 f_1(u) \overline{f_2(u)} du = \int_0^{+\infty} g_1(x) \overline{g_2(x)} dx. \quad (2.16)$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} u^{x_j} (-\log u)^{r_j-1} &= E^{-1} [e^{-(x_j + \frac{1}{2})x} x^{r_j-1}] \in L_2(0,1), \\ e^{-(x_j + \frac{1}{2})x} x^{r_j-1} &= E[u^{x_j} (-\log u)^{r_j-1}] \in L_2(0, +\infty), \end{aligned} \quad (j=0, 1, 2, \dots),$$

то из общего равенства (2.16) легко следует (как и в теореме Г), что системы функций (2.1') и $|e^{-(x_j + \frac{1}{2})x} x^{r_j-1}|_0^\infty$ могут быть замкнуты соответственно в $L_2(0,1)$ и $L_2(0, +\infty)$ только одновременно.

Поэтому, согласно теореме 3, система (2.1') замкнута в $L_2(0,1)$ лишь в том случае, когда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \left(x_j + \frac{1}{2} \right)}{1 + \left| x_j + \frac{1}{2} \right|^2} = +\infty. \quad (2.15')$$

Но нетрудно убедиться, что при условии $\operatorname{Re} x_j > -\frac{1}{2}$ ($1 \leq j < +\infty$) имеют место двусторонние оценки

$$\frac{1}{2}(1 + |x_j|^2) \leq 1 + \left| x_j + \frac{1}{2} \right|^2 \leq 2(1 + |x_j|^2) \quad (1 \leq j < +\infty).$$

Поэтому условия (2.15) и (2.15') эквивалентны, и теорема доказана.

(г) В теоремах 3 и 3' в качестве весьма частного случая содержатся следующие хорошо известные утверждения:

1°. Система функций $\{e^{-\frac{x}{2}} x^n\}_0^\infty$, или, что то же самое, система функций Лаггера $\{e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)\}_0^\infty$ замкнута в $L_2(0, +\infty)$.

2°. Система степеней $\{u^n\}_0^\infty$ замкнута в $L_2(0, 1)$.

В самом деле, общая система, $\{e^{-\mu_j u} x^{s_j-1}\}_1^\infty$ в случае, когда $\mu_j = \frac{1}{2} (1 \leq j < +\infty)$ и, тем самым, $s_j = j (1 \leq j < +\infty)$ сводится к

рассматриваемой — $\{e^{-\frac{x}{2}} x^n\}_0^\infty$. Очевидно, что при этом условие (2.7) замкнутости теоремы 3 выполняемо.

Аналогично, при $\mu_j = j (0 \leq j < +\infty)$ имеем $r_j = 1 (0 \leq j < +\infty)$ и система $\{u^j (\log u)^{r_j-1}\}_0^\infty$ переходит в систему степеней $\{u^j\}_0^\infty$ и условие (2.14) замкнутости теоремы 3' также выполняется.

Таким образом, замкнутость обеих систем $\{e^{-\frac{x}{2}} x^n\}_0^\infty$ и $\{u^n\}_0^\infty$ в $L_2(0, +\infty)$ и в $L_2(0, 1)$, соответственно, следует из теорем 3 и 3'.

Заметим теперь, что в случае, когда $\mu_j = \frac{1}{2}, s_j = 1 (1 \leq j < +\infty)$, из формулы (2.2) и из представления (2.3) ортонормальной на $(0, +\infty)$, системы функций $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ теоремы 2 следует:

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}(x) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \frac{\left(t - \frac{i}{2}\right)^n}{\left(t + \frac{i}{2}\right)^{n+1}} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \frac{\left(t + \frac{i}{2}\right)^n}{\left(t - \frac{i}{2}\right)^{n+1}} dt \quad (0 < x < +\infty, 0 \leq n < +\infty). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Убедимся теперь, что для этих функций справедливы формулы

$$\gamma_{n+1}(x) = e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.18)$$

где $\{L_n(x)\}_0^\infty$ — ортонормальные на $(0, +\infty)$ с весом e^{-x} полиномы Лаггера

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}] = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)! (k!)^2} x^k, \quad (2.19)$$

Действительно, как хорошо известно, справедлива формула (см., например, [6], стр. 383)

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} L_n(x) dx = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}, \operatorname{Re} s > 0, \quad (2.20)$$

которую нетрудно получить лишь на основе определения (2.19) полинома $L_n(x)$.

Положив здесь $s = \frac{1}{2} + it$ ($-\infty < t < +\infty$), мы получим

$$\int_0^{\infty} e^{-ixt} \left\{ e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) \right\} dx = \frac{\left(t + \frac{i}{2}\right)^n}{i \left(t - \frac{i}{2}\right)^{n+1}}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

откуда по формуле обращения Фурье мы приходим к требуемым соотношениям (2.18).

Отметим, наконец, что заодно по теореме 2 из (2.18) следуют формулы ортонормальности системы функций Лаггера

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

П р и м е ч а н и я к § 2

По поводу теоремы 2.

[2.1]. В случае, когда все числа последовательности $\{\mu_j\}_1^{\infty}$ отличны друг от друга, т. е. когда $s_j = 1$ ($1 \leq j < +\infty$), систему функций $\{\gamma_n(x)\}_1^{\infty}$ впервые в явной форме построил Ердели [17]. В этом случае функции этой системы, очевидно, представимы в виде

$$\gamma_n(x) = \sum_{j=1}^n c_{jn} e^{-\mu_j x} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1)$$

Путем прямого вычисления соответствующих определителей Грама им были получены явные значения для коэффициентов $\{c_{jn}\}_1^n$ а именно

$$c_{jn} = \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re} \mu_n}} \prod_{k=1}^{n-1} (\mu_j + \bar{\mu}_k) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\mu_j - \mu_k)^{-1} \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

[2.2]. Несколько позже, в другом частном случае, когда $\operatorname{Im} \mu_j = 0$, $s_j = 1$ ($1 \leq j < +\infty$) эквивалентная с $\{\gamma_n(x)\}_1^{\infty}$ система была построена А. О. Гельфондом [19]. Им была рассмотрена последовательность функций Мюнца $\{u^{a_j}\}_0^{\infty}$ на отрезке $[0,1]$, ассоциированная с последовательностью чисел

$$a_0 < a_1 < \dots < a_j < a_{j+1} < \dots \quad \left(a_j > -\frac{1+a}{2}, a > -1 \right).$$

для которой кратность r_k появления числа x_k на отрезке $[1, 1]_0^k$ равна единице. Затем путем явного вычисления решения экстремальной задачи Сасса [4], лежащего в основе доказательства известной теоремы Мюнца—Сасса, им по существу было установлено, что квазиполиномы

$$P_n^{(\alpha)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2x_n + \alpha + 1}} \sum_{j=0}^n \frac{Q_n(x_j)}{R_n(x_j)} \frac{u^{\alpha_j}}{x_n + x_j + \alpha + 1} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

где

$$R_n(u) = \prod_{k=0}^n (u - x_k), \quad Q_n(u) = \prod_{k=0}^n (u + x_k + \alpha + 1) \quad (4)$$

составляют ортонормальную систему на отрезке $[0, 1]$ с весом u^α , т. е.

$$\int_0^1 u^\alpha P_n^{(\alpha)}(u) P_m^{(\alpha)}(u) du = \delta_{nm} \quad (n, m=0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

[2.3]. Заметим, что формула (3) может быть записана также в виде контурного интеграла

$$P_n^{(\alpha)}(u) = \frac{\sqrt{2x_n + \alpha + 1}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{Q_n(\zeta)}{R_n(\zeta)} \frac{u^\alpha}{\zeta + x_n + \alpha + 1} d\zeta, \quad (3')$$

где C_n — замкнутый контур, охватывающий все точки $\{x_j\}_0^n$.

Простым предельным переходом в (3') можно легко убедиться в том, что если

$$-\frac{1+\alpha}{2} < x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_j \leq \dots,$$

т. е. если, вообще говоря, $r_k \geq 1$ ($k \geq 0$), то интеграл (3') определяет некоторый квазиполином $P_n^{(\alpha)}(u)$ из системы функций $\{u^{\alpha_j} (\log u)^{r_j-1}\}_0^\infty$, причем очевидно, что свойство ортонормальности (5) системы $\{P_n^{(\alpha)}(u)\}_0^\infty$ при этом сохраняет силу. Отметим, что в менее компактной записи системы функций вида $\{u^{\alpha_j} (\log u)^{r_j-1}\}_0^\infty$ были рассмотрены в работе [20] в связи с обобщением известных полиномов С. Н. Бернштейна и Хаусдорфа [21]. Отметим также, что интегральная запись (3') системы $\{P_n^{(\alpha)}(u)\}_0^\infty$ и возможность снятия ограничения $r_j = 1$ ($j \geq 0$) впервые была указана в работе [18]. Вместе с тем отметим, что все приводимые в § 1 указанной работы вычисления, имеющие целью заново доказывать формулы ортонормальности (5) системы $\{P_n^{(\alpha)}(u)\}_0^\infty$ на основе их интегральной записи (3'), как и случае, рассмотренном А. О. Гельфондом ($r_j = 1, 1 \leq j < +\infty$), так и в общем случае, когда $r_j \geq 1$ ($1 \leq j < +\infty$), ввиду сказанного выше, разумеется, излишни.

[2.4]. Приводимое в теореме 2 представление системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ в общем случае, когда $\operatorname{Re} \mu_j > 0$ и $s_j \geq 1$ ($1 \leq j < +\infty$) впервые было предложено в заметке автора [2]. Там же впервые были введены целочисленные параметры $|s_j|_1^\infty$, характеризующие кратности чисел данной последовательности $\{\mu_j\}_1^\infty$ и позволяющие ввести единую нумерацию и компактную запись для обеих систем

$$\{e^{-\mu_j x} x^{s_j-1}\}_1^\infty \text{ и } \{\gamma_n(x)\}_1^\infty.$$

[2.5]. Наконец, отметим, что в последующей работе [22] в случае комплексных, но *отличных друг от друга показателей*

$$\{\alpha_j\}_0^\infty \left(\operatorname{Re} \alpha_j > -\frac{1+\alpha}{2} \right),$$

способом Сасса—Гельфонда были получены аналогичные (3)—(4) и (3')—(4) формулы

$$E_n^{(\alpha)}(u) = \sqrt{1+\alpha+2\operatorname{Re} \alpha_n} \sum_{j=0}^n \frac{\bar{Q}_n(\alpha_j)}{\bar{R}_n(\alpha_j)} \frac{u^{\alpha_j}}{\alpha_n + \bar{\alpha}_j + \alpha + 1}, \quad (6)$$

$$E_n^{(\alpha)}(u) = \frac{\sqrt{1+\alpha+2\operatorname{Re} \alpha_n}}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{\bar{Q}_n(\zeta)}{\bar{R}_n(\zeta)} \frac{u^\zeta}{\zeta + \bar{\alpha}_n + \alpha + 1} d\zeta, \quad (6')$$

для квазиполиномов, ортонормальных на $[0,1]$ в смысле

$$\int_0^1 u^\alpha E_n^{(\alpha)}(u) \overline{E_m^{(\alpha)}(u)} du = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

По соображению, приведенному в [2,3] очевидно, что в записи (6') свойство (7) ортонормальности системы $\{E_n^{(\alpha)}(u)\}_0^\infty$ сохраняет силу для любой последовательности показателей $\{\alpha_j\}_0^\infty \left(\operatorname{Re} \alpha_j > -\frac{1+\alpha}{2} \right)$, т. е. если, вообще говоря, $r_j \geq 1$ ($0 \leq j < +\infty$).

В заключение укажем еще, что переход от системы $\{E_n^{(\alpha)}(u)\}_0^\infty$ к обобщенной системе Ердели—Гельфонда $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ в общем случае, когда $\operatorname{Re} \mu_j > 0$ и $s_j \geq 1$ ($1 \leq j < +\infty$), легко осуществить простой заменой

$$\mu_j = \frac{1+\alpha}{2} + (s_j-1) \quad (j \geq 1) \text{ и } \gamma_{n+1}(x) = e^{-\frac{1+\alpha}{2}x} E_n^{(\alpha)}(x) \quad (0 \leq n < +\infty). \quad (8)$$

По поводу теорем 3 и 3'.

[2.6]. Необходимое и достаточное условие

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\alpha_j} = +\infty$$

аппроксимируемости непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций квазиполиномами вида

$$\sum_{j=0}^n c_j u^{a_j} (\log u)^{r_j-1}$$

в предположении, что порождающая их последовательность чисел $\{a_j\}_0^\infty$ удовлетворяет условию

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$$

и, таким образом, $r_j = 1$ ($1 \leq j < +\infty$), впервые было получено Мюнцем [23].

Затем в своей работе Сасс [4] дал другое доказательство теоремы Мюнца, обобщив ее на случай комплексных, но вновь отличных друг от друга показателей $\{a_j\}_0^\infty$ ($\operatorname{Re} a_j > -\frac{1}{2}$), т. е. когда $r_j = 1$ ($0 \leq j < +\infty$). При этом теоремы Сасса об аппроксимации линейными агрегатами от множества функций $\{u^{a_j}\}_0^\infty$ относились как к классу $C[0,1]$ непрерывных на $[0,1]$ функций (при условии $a_0 = 0$, $\operatorname{Re} a_j > 0$, $1 \leq j < +\infty$), так и к классу $L_2(0,1)$ (при условии $\operatorname{Re} a_j > -\frac{1}{2}$, $0 \leq j < +\infty$). Отметим еще, что значительно позже Сасс вновь вернулся к этому кругу вопросов в своей работе [24], распространив свой метод, основанный на решении экстремальной задачи, на другие семейства аппроксимирующих линейных агрегатов от рациональных функций.

[2.7]. Винер и Пэли предложили другой метод доказательства теорем Мюнца—Сасса и ряда других теорем того же рода [1]. Их метод был основан на сведении задачи замкнутости к теореме единственности Бляшке для аналитических в круге функций из класса H_2 Харди, а также на теореме Г. На этом же методе основаны приведенные выше доказательства теорем замкнутости. Однако, достаточность утверждения теоремы устанавливается нами существенно другим способом, близким доказательству достаточной части теоремы 1. Отметим, что у них также как и у Мюнца и Сасса, ставилось то же ограничение на последовательность показателей $\{a_j\}_0^\infty$, что все они отличны друг от друга, т. е. что $r_j = 1$ ($0 \leq j < +\infty$). Но для развитого ими метода это ограничение было совершенно лишним, что видно хотя бы из приведенного нами второго доказательства теоремы 3.

В случае, когда, вообще говоря, $r_j \geq 1$, но $\operatorname{Im} a_j = 0$ ($0 \leq j < +\infty$), как в классе $C[0,1]$, так и в классе $L_2(0,1)$ теорема Мюнца—Сасса была обобщена в работах [20] и [18] другими способами.

[2.8]. Отметим, что метод Сасса легко применить также и в общем случае комплексных показателей $\{a_j\}_0^\infty$, когда, вообще говоря, $r_j > 1$ ($0 \leq j < +\infty$). В самом деле, прежде всего очевидно, что для данного n ($0 \leq n < +\infty$) среди всех квазиполиномов вида

$$\Omega_n(u) = \sum_{j=0}^n c_j u^{r_j} (\log u)^{r_j-1}, \left(\operatorname{Re} \alpha_j > -\frac{1}{2} \right) \quad (9)$$

минимум $M_n^{(k)}$ обобщенных функционалов Сасса

$$J_n^{(k)} = \int_0^1 |u^k - \Omega_n(u)|^2 du \quad (0 \leq k < +\infty) \quad (10)$$

реализует квазиполином

$$\Omega_n^*(u) = \sum_{j=0}^n a_j^{(k)} E_j^{(0)}(u), \quad a_j^{(k)} = \int_0^1 u^k \overline{E_j^{(0)}(u)} du \quad (0 \leq j \leq n), \quad (11)$$

т. е. n -ый отрезок ряда Фурье функции u^k по системе $\{E_j^{(0)}(u)\}_0^\infty$.

Итак

$$M_n^{(k)} = \int_0^1 |u^k - \Omega_n^*(u)|^2 du, \quad (12)$$

причем из формул (3), а также из представления (6') для системы функций $|E_j^{(0)}(u)|_0^\infty$ очевидно, что числа $M_n^{(k)} \equiv M_n^{(k)}\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ непрерывно зависят от показателей $\{\alpha_j\}_0^n$.

Однако, в случае, когда показатели $\{\alpha_j\}_0^\infty$ отличны друг от друга, т. е. когда $r_j = 1$ ($0 \leq j < +\infty$), как впервые доказал Сасс [4]

$$M_n^{(k)} = \frac{1}{1+2k} \prod_{j=0}^n \left| \frac{k - \alpha_j}{k + \bar{\alpha}_j + 1} \right|^2. \quad (13)$$

Отсюда ввиду отмеченной непрерывной зависимости $M_n^{(k)}$ от параметров $\{\alpha_j\}_0^n$, легко заключаем, что формула (13) сохраняет силу и в общем случае, когда для показателей $\{\alpha_j\}_0^\infty$, вообще говоря, $r_j \geq 1$ ($0 \leq j < +\infty$).

Но из формулы (13), как у Сасса, во-первых, следует, что для справедливости предельных соотношений

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

выполнение условия (2.15) теоремы 3' необходимо и достаточно. И, во-вторых, в силу теоремы Вейерштрасса о замкнутости в $L_2(0,1)$ системы целых степеней $|u^k|_0^\infty$ вновь приходим к утверждению этой теоремы.

[2.9]. В заключении своей статьи [17] Ердели, не входя в подробности, отмечает: „Наиболее интересным является случай равностоящих α_j . В этом случае $\gamma_n(x)$ может быть выражено через полиномы Якоби“.

Кроме того, хотя в его построении системы $\{\gamma_n(x)\}_1^n$ предполагалось, что все числа α_j отличны друг от друга (см. примечание к

теореме 2), далее он пишет: "... в предельном случае, когда все μ_k равны, $\gamma_n(x)$ сводится к полиномам Лаггера".

Оба эти утверждения были детально рассмотрены в работе [18] с помощью интегрального представления (3'), приведенного в примечании [2.3] к теореме 2.

§ 3. Ортогонализация и замкнутость обобщенной системы Винера-Пэли

3.1. (а). Пусть $\{\sigma_j\}_0^\infty$ ($|\operatorname{Im} \sigma_j| < \frac{\pi}{2}$) — произвольная последовательность комплексных чисел и для данного k ($0 \leq k < +\infty$) обозначим через ν_k k -кратность появления числа σ_k на отрезке $|\sigma_j|_0^k$ нашей последовательности.

Введем в рассмотрение последовательность полиномов $x_0(t) \equiv 1$,

$$x_j(t) = \left(\frac{1}{2} + it\right) \left(\frac{3}{2} + it\right) \cdots \left(\frac{2j-1}{2} + it\right) \quad (1 \leq j < +\infty) \quad (3.1)$$

и с нашей последовательностью чисел $\{\sigma_j\}_0^\infty$ будем ассоциировать следующую последовательность квазиполиномов:

$$\{x_{p_j-1}(t) e^{-i\sigma_j t}\}_0^\infty. \quad (3.2)$$

Заметим, что ввиду условия $|\operatorname{Im} \sigma_j| < \frac{\pi}{2}$ ($0 \leq j < +\infty$), очевидно, будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} x_{p_j-1}(t) e^{-i\sigma_j t} \in L_2(-\infty, +\infty) \quad (0 \leq j < +\infty). \quad (3.3)$$

Обозначим далее через $\{p_j(t)\}_0^\infty$ ортогонализацию на всей оси $(-\infty, +\infty)$ с весом

$$w(t) = \pi^{-1} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi t} \quad (3.4)$$

последовательности функций (3.2).

Итак, по определению системы функций $\{p_j(t)\}_0^\infty$ мы имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) p_n(t) \overline{p_m(t)} dt = \delta_{nm} \quad (n; m = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.5)$$

причем наши функции $p_n(t)$ однозначно определяются с точностью до множителей вида $e^{i\alpha_n}$ ($\operatorname{Im} \alpha_n = 0$).

(б) Эффективное построение и интегральное представление системы $\{p_n(t)\}_0^\infty$ может быть получено прямым путем с помощью системы функций $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ и ее интегрального представления, установленного в § 2.

С этой целью обозначим через $\{\omega_n(x)\}_1^\infty$ указанную систему в том случае, когда она ассоциирована с последовательностью чисел $\{\mu_j\}_1^\infty$, положив

$$\mu_j = \exp \{\sigma_{j-1}\} \quad (1 \leq j < +\infty)$$

и заметив, что ввиду условия $|\operatorname{Im} \sigma_j| < \frac{\pi}{2}$, мы будем иметь $\operatorname{Re} \mu_j > 0$ ($1 \leq j < +\infty$).

Согласно теореме 2 функции системы $\{\omega_n(x)\}_1^\infty$, ассоциированные с последовательностью чисел $\{\exp \sigma_{j-1}\}_1^\infty$, имеют интегральное представление

$$\omega_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\operatorname{Re} e^{\sigma_n}}{\pi}} \frac{i}{u + ie^{\sigma_n}} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{u - ie^{\sigma_j}}{u + ie^{\sigma_j}} e^{-ixu} du \quad (3.6)$$

$$(0 \leq n < +\infty).$$

Докажем теорему.

Теорема 4. Функции системы $\{\rho_n(t)\}_0^\infty$ допускают интегральное представление

$$\rho_n(t) = \left\{ \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \right\}^{-1} \int_0^{+\infty} \omega_{n+1}(x) x^{-\frac{1}{2} + it} dx \quad (-\infty < t < +\infty), \quad (3.7)$$

а также представление

$$\rho_n(t) = \frac{\sqrt{\operatorname{Re} e^{\sigma_n}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{u + ie^{\sigma_n}} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{u - ie^{\sigma_j}}{u + ie^{\sigma_j}} (e^{i\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} u} |u|)^{-\frac{1}{2} - it} du \quad (3.8)$$

$$(0 \leq n < +\infty).$$

где при $n = 0$ следует положить $\prod_{j=1}^{n-1} \equiv 1$.

Доказательство. Положим

$$\rho_n^*(t) \equiv M[\omega_{n+1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \omega_{n+1}(x) x^{-\frac{1}{2} + it} dx \quad (0 \leq n < +\infty) \quad (3.9)$$

и заметим, что в рассматриваемом случае $\mu_j = \exp \{\sigma_{j-1}\}$ ($1 \leq j < +\infty$) мы имеем $\omega_n(x) \equiv \gamma_{n+1}(x)$. Поэтому, согласно теореме Б (1° и 2°), а также в силу условий ортонормальности (2.1) нашей системы $\{\omega_n(x)\}_1^\infty \equiv \{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ мы будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n^*(t) \overline{\rho_m^*(t)} dt = \int_0^{+\infty} \omega_{n+1}(x) \overline{\omega_{m+1}(x)} dx = \delta_{n,m} \quad (3.10)$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \dots),$$

т. е. система функций $\{\rho_n^*(t)\}_0^\infty$ ортонормальна на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

Отметим теперь, что в рассматриваемом нами случае, поскольку $p_j = \exp |\tau_{j-1}|$ ($1 \leq j < +\infty$), очевидно, что кратность $s_k \geq 1$ появления числа p_k на отрезке $[p_j]_1^k$, равна кратности p_{k-1} появления числа p_{k-1} на отрезке $[\tau_j]_0^{k-1}$, т. е. мы будем иметь $s_k = p_{k-1}$ ($1 \leq k < +\infty$).

Отметим также, что как было установлено нами в 2.1 (а) при любом n ($1 \leq n < +\infty$) функция $\gamma_n(x)$ является линейной комбинацией от совокупности функций $\{e^{-\tau_j x} x^{p_j-1}\}_0^n$.

Из сказанного выше следует, очевидно, что в нашем случае мы будем иметь

$$\omega_{n+1}(x) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{n+1,j} e^{-\tau_j x} x^{p_j-1} = \sum_{j=0}^n b_{j,n} \exp \{-e^{\tau_j} x\} x^{p_j-1}, \quad (3.11)$$

$$(0 \leq n < +\infty),$$

где $b_{j,n} = a_{j+1,n+1}$ ($0 \leq j \leq n$) — вполне определенные постоянные.

Заметим теперь, что поскольку $|\operatorname{Im} \tau_j| < \frac{\pi}{2}$, т. е. $\operatorname{Re} \exp |\tau_j| > 0$ то

$$\int_0^\infty \exp \{-e^{\tau_j} x\} x^{p_j-3/2+it} dx = \Gamma \left(p_j - \frac{1}{2} + it \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ - \left(p_j - \frac{1}{2} + it \right) \tau_j \right\}.$$

Поэтому из (3.9) и (3.11), а также в силу определения (3.1) полинома $\gamma_n(t)$, вытекает, что функция $\rho_n^*(t)$ представима в виде суммы

$$\rho_n^*(t) = \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} \Gamma \left(p_j - \frac{1}{2} + it \right) \exp \left\{ - \left(p_j - \frac{1}{2} + it \right) \tau_j \right\} =$$

$$= \Gamma \left(\frac{1}{2} + it \right) \sum_{j=0}^n b_{j,n} x_{p_j-1}(t) \exp \{-i\tau_j t\},$$

где

$$b_{j,n} = a_{j+1,n+1} \exp \left\{ - \left(p_j - \frac{1}{2} \right) e^{\tau_j} \right\} \quad (0 \leq j \leq n).$$

Таким образом, функция $\rho_n^*(t)$ является линейной комбинацией от совокупности функций $\{x_{p_j-1}(t) e^{-i\tau_j t}\}_0^n$ при любом n ($0 \leq n < +\infty$).

Следовательно, обозначив

$$\rho_n(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma \left(\frac{1}{2} + it \right)} \rho_n^*(t) = \sqrt{\pi} \sum_{j=0}^n b_{j,n} x_{p_j-1} e^{-i\tau_j t} \quad (3.12)$$

$$(0 \leq n < +\infty),$$

ввиду ортонормальности (3.10) системы $\{\rho_n^*(t)\}_{n=0}^\infty$ мы заключаем, что система квазиполиномов (3.12) действительно ортонормальна на всей

оси $(-\infty, +\infty)$ с весом $\pi^{-1} \left| \Gamma \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2$. В силу (3.9) и (3.12) приходим к представлению (3.7) теоремы.

Перейдем теперь к установлению второго интегрального представления (3.8) теоремы. С этой целью для данного n ($0 \leq n < +\infty$) выберем числа $0 < \varepsilon < R < +\infty$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ таким образом, чтобы точки нижней полуплоскости $\{-ie^{i\sigma_j}\}_0^n$ лежали бы внутри замкнутого контура $L_\alpha(\varepsilon; R)$, образованного отрезками

$$L_\alpha^{(1)}(\varepsilon; R) = \{\arg w = -\alpha; \varepsilon \leq |w| \leq R\};$$

$$L_\alpha^{(2)}(\varepsilon; R) = \{\arg w = -(\pi - \alpha); \varepsilon \leq |w| \leq R\}.$$

и соединяющими их концы дугами окружностей

$$C_\varepsilon(\varepsilon) = \{-(\pi - \alpha) \leq \arg w \leq -\alpha; |w| = \varepsilon\},$$

$$C_R(R) = \{-(\pi - \alpha) \leq \arg w \leq -\alpha; |w| = R\}.$$

Заметим далее, что функция

$$\Omega_n(w) = \frac{1}{w + ie^{\sigma_n}} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{w - ie^{\bar{\sigma}_j}}{w + ie^{\sigma_j}} e^{-ixw}, \quad x \in (0, +\infty)$$

аналитична везде в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} w < 0$, кроме отличных друг от друга точек $\{-ie^{i\sigma_j}\}_0^n$, где она имеет лишь полюсы и, очевидно, при $|w| \rightarrow \infty$

$$\Omega_n(w) = O(|w|^{-1} e^{-|\operatorname{Im} w| x}), \quad x \in (0, +\infty).$$

Поэтому, пользуясь теоремой Коши, а также леммой Жордана, нетрудно убедиться в том, что представление (3.6) функции $\omega_{n+1}(x)$ может быть записано также в виде контурного интеграла

$$\omega_{n+1}(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{Re} e^{\sigma_n}}}{\pi \sqrt{2}} \int_{L_\alpha(\varepsilon; R)} \frac{i}{w + ie^{\sigma_n}} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{w - ie^{\bar{\sigma}_j}}{w + ie^{\sigma_j}} e^{-ixw} dw, \quad x \in (0, +\infty). \quad (3.6')$$

Но поскольку

$$\min_{w \in L_\alpha(\varepsilon; R)} \operatorname{Re} [iw] = \min_{w \in L_\alpha(\varepsilon; R)} |\operatorname{Im} w| = \varepsilon \sin \alpha > 0,$$

очевидно, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-ixw} x^{-\frac{1}{2}-it} dx = \Gamma \left(\frac{1}{2} + it \right) (iw)^{-\frac{1}{2}-it}, \quad x \in (0, +\infty) \quad (3.13)$$

равномерно сходится относительно $w \in L_\alpha(\varepsilon; R)$. Поэтому из (3.7), (3.6') и (3.13) получим для $t \in (-\infty, +\infty)$

$$\rho_n(t) = \frac{\sqrt{\operatorname{Re} e^{\tau_n}}}{2\pi} \int_{L_2(\alpha; R)} \frac{i}{w + i e^{\tau_n}} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{w - i e^{\bar{\tau}_j}}{w + i e^{\tau_j}} (i w)^{-\frac{1}{2} - it} dw. \quad (3.14)$$

Заметим, наконец, что подынтегральная функция в (3.14) при $|w| \rightarrow 0$ имеет порядок $O(|w|^{-\frac{1}{2}})$ и при $|w| \rightarrow \infty$ — порядок $O(|w|^{-\frac{3}{2}})$. Поэтому последовательными предельными переходами в (3.14), сначала при $\alpha \rightarrow +0$, затем при $R \rightarrow +\infty$ и, наконец, когда $R \rightarrow +\infty$, мы приходим к требуемому представлению (3.8) теоремы.

3.2. (а) Отметим, что когда все числа $\{\tau_j\}_0^\infty$ отличны друг от друга, и тем самым, очевидно, будем иметь

$$\rho_j = 1, \quad x_{\rho_j-1}(t) = x_0(t) \equiv 1 \quad (0 \leq j < +\infty),$$

наша система (3.2) перейдет в систему вида $\{e^{-i\tau_j t}\}_0^\infty$.

В этом случае систему функций

$$\left\{ e^{-\frac{\pi}{2}|t|} e^{-i\tau_j t} \right\}_0^\infty \left(|\operatorname{Im} \tau_j| < \frac{\pi}{2} \right)$$

впервые ввели Винер и Пэли, установившие критерий ее замкнутости в $L_2(-\infty, +\infty)$. Приводимая ниже теорема является существенным обобщением теоремы Винера—Пэли.

Теорема 5. Для замкнутости в $L_2(-\infty, +\infty)$ ортонормальной системы $\left\{ \frac{\rho_j(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} \right\}_0^\infty$ или, что то же самое, системы функций

$$\left\{ \frac{x_{\rho_j-1}(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} e^{-i\tau_j t} \right\}_0^\infty \text{ выполнение условия} \quad \sum_{j=0}^\infty \frac{\cos(\operatorname{Im} \tau_j)}{\operatorname{ch}(\operatorname{Re} \tau_j)} = +\infty \quad (3.15)$$

необходимо и достаточно.

Доказательство. Из формул (3.9) и (3.12) имеем

$$\rho_n^*(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\sqrt{\pi}} \rho_n(t) = M[\omega_{n+1}] \quad (0 \leq n < +\infty),$$

где $\{\omega_j(x)\}_1^\infty \equiv \{\gamma_j(x)\}_1^\infty$ — ортонормальная на полуоси $[0, +\infty)$ система, ассоциированная с последовательностью комплексных чисел $\{e^{\tau_j-1}\}_1^\infty \equiv \{\mu_j\}_1^\infty$, $(\operatorname{Re} \mu_j > 0)$. Поэтому, согласно теореме $\Gamma(2^\circ)$, ортонормальные системы $\{\rho_j^*(t)\}_0^\infty$ и $\{\omega_j(x)\}_1^\infty$ соответственно в пространствах $L_2(-\infty, +\infty)$ и $L_2(0, +\infty)$ могут быть замкнутыми только одновременно. Очевидно, что то же самое утверждение справедливо также

для систем $\left\{ \frac{\rho_j(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} \right\}_0^\infty$ и $\{\omega_j(x)\}_1^\infty$, так как

$$\exp\left\{-i \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right)\right\} \rho_j^*(t) = \frac{\rho_j(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} \quad (0 \leq n < +\infty).$$

Наконец, заметив, что в рассматриваемом нами случае

$$\frac{\operatorname{Re} \mu_{j+1}}{1 + |\mu_{j+1}|^2} = \frac{\operatorname{Re} e^{\sigma_j}}{1 + e^{2 \operatorname{Re} \sigma_j}} = \frac{1 \cos (\operatorname{Im} \sigma_j)}{2 \operatorname{ch} (\operatorname{Re} \sigma_j)} \quad (0 \leq j < +\infty)$$

на основании теоремы 3 мы завершим доказательство нашей теоремы

(б) Особо остановимся теперь на одном частном, но важном случае введенной нами выше общей ортонормальной на $(-\infty, +\infty)$ системы $\left\{ \frac{\rho_j(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} \right\}_0^\infty$, которую мы получим при специальном выборе порождающей ее последовательности параметров $\{\sigma_j\}_0^\infty \left(|\operatorname{Im} \sigma_j| < \frac{\pi}{2} \right)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$w(t; \varphi) = \frac{\sin \varphi}{\pi} \left| \Gamma \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 e^{-(\pi - 2\varphi)t} = \sin \varphi \frac{e^{-(\pi - 2\varphi)t}}{\operatorname{ch} \pi t}, \quad (3.16)$$

полагая, что значение φ ($0 < \varphi < \pi$) фиксировано и $-\infty < t < +\infty$. Очевидно, что функция $w(t; \varphi) > 0$ экспоненциально убывает при $|t| \rightarrow +\infty$, при этом

$$w(t; \varphi) \sim \begin{cases} 2 \sin \varphi e^{-2(\pi - \varphi)t}, & \text{при } t \rightarrow +\infty \\ 2 \sin \varphi e^{2\varphi t}, & \text{при } t \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.17)$$

Обозначим далее через $\{P_k(t)\}_0^\infty$ систему полиномов, которую мы получим путем ортогонализации последовательности степеней $\{t^k\}_0^\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ с весом $w(t; \varphi)$. При этом мы будем полагать, что для любого k ($0 \leq k < +\infty$) у полинома $P_k(t; \varphi)$ степени k коэффициент при старшем его члене t^k имеет положительный знак, что, как известно, обеспечивает единственность всей нашей системы $\{P_k(t)\}_0^\infty$.

Итак, по определению мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t; \varphi) P_n(t; \varphi) \overline{P_m(t; \varphi)} dt = \delta_{nm} \quad (n; m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.18)$$

для любого $0 < \varphi < \pi$.

Полиномы нашей системы допускают интегральное представление. А именно, справедлива следующая

Теорема 6. Для ортонормальных в смысле (3.18) полиномов $P_n(t; \varphi)$ справедливо интегральное представление

$$P_n(t; \varphi) = e^{in\varphi} \frac{[2^{-1}(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)]^{\frac{1}{2} + it}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)x} L_n(x) x^{-\frac{1}{2} + it} dx$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.19)$$

где $L_n(x)$ — полином Лагера (2.19).

Доказательство. Пусть значение $\varphi (0 < \varphi < \pi)$ фиксировано и

$$\sigma_j = -\log 2 - i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \quad (0 \leq j < +\infty). \quad (3.20)$$

Тогда очевидно, что $|\operatorname{Im} \sigma_j| < \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq j < +\infty)$,

$$p_j = j + 1, \quad x_{p_j-1}(t) = x_j(t) \quad (0 \leq j < +\infty)$$

и, тем самым, в рассматриваемом случае из (3.12) получим

$$\begin{aligned} \rho_n(t) \equiv \rho_n(t, \varphi) &= V_{\pi} 2^n e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)t} \sum_{j=1}^n b_{j,n} x_j(t) = \\ &= 2^n e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)t} \sum_{j=0}^n c_{j,n} t^j, \end{aligned} \quad (3.21)$$

при этом, очевидно, что совокупность коэффициентов $\{b_{j,n}\}_0^n$ и $\{c_{j,n}\}_0^n$ зависят от параметра φ .

Далее, в нашем случае из общей формулы (3.6) вытекает, что при $x \in (0, +\infty)$

$$\omega_{n+1}(x) \equiv \omega_{n+1}(x; \varphi) =$$

$$= i \frac{V_{\sin \varphi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(u + \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{i}{2} \sin \varphi\right)^n}{\left(u + \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{i}{2} \sin \varphi\right)^{n+1}} e^{-ixu} du \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда, после замены переменного интегрирования

$$u = v \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi$$

следует

$$\omega_{n+1}(x; \varphi) = i \frac{V_{\sin \varphi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(v - \frac{i}{2}\right)^n}{\left(v + \frac{i}{2}\right)^{n+1}} \exp\left\{-i\left(v \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi\right)x\right\} dv$$

и поэтому

$$e^{-i \frac{x}{2} \cos \varphi} \omega_{n+1}(x; \varphi) = \frac{V_{\sin \varphi}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(v + \frac{i}{2}\right)^n}{\left(v - \frac{i}{2}\right)^{n+1}} e^{i(x \sin \varphi)v} dv.$$

Далее, пользуясь представлением (2.17)—(2.18) полиномов Лаггера, мы получим

$$\omega_{n+1}(x; \varphi) = \sqrt{\sin \varphi} \exp \left\{ \frac{i}{2} e^{i\varphi} x \right\} L_n(x \sin \varphi). \quad (3.22)$$

Наконец, отсюда в силу формулы (3.7) теоремы 4 приходим к представлению

$$\begin{aligned} \rho_n(t; \varphi) &= \frac{\sqrt{2^{-1} \sin \varphi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right)} \int_0^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{2} e^{i\varphi} x \right\} L_n(x \sin \varphi) x^{-\frac{1}{2} + it} dx = \\ &= \frac{\left\{ \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \right\}^{-1}}{(\sin \varphi)^{it}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{x}{2} (1 - i \operatorname{ctg} \varphi) \right\} \times \\ &\quad \times L_n(x) x^{-\frac{1}{2} + it} dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Теперь нам необходимо вычислить аргумент старшего коэффициента $c_{n,n}$ в сумме (3.21). С этой целью, заметив, что в силу явного представления (2.19) полиномов Лаггера и ввиду того, что при $0 < \varphi < \pi$ и $-\infty < t < \infty$

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{x}{2} (1 - i \operatorname{ctg} \varphi) \right\} x^{k - \frac{1}{2} + it} dt = \\ &= [2^{-1} (1 - i \operatorname{ctg} \varphi)]^{-k - \frac{1}{2} - it} x_k(t) \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \quad (0 \leq k < +\infty) \end{aligned}$$

из (3.23) мы будем иметь

$$\begin{aligned} \rho_n(t; \varphi) &= \sqrt{\sin \varphi} 2^{it} \times \\ &\times \exp \left\{ i \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \left(\frac{1}{2} + it \right) \right\} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2 \sin \varphi)^k}{k!} \binom{n}{k} e^{i \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) k} x_k(t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае (3.20) наряду с общей формулой (3.21) для функции $\rho_n(t; \varphi)$ имеет место явное представление в виде суммы (3.24).

Но поскольку по (3.1) у полинома $x_k(t)$ коэффициент при старшем члене t^k равен $e^{i \frac{\pi}{2} k}$, то сравнением наших формул (3.21) и (3.24) легко видеть, что в (3.21)

$$c_{n,n} = 2^n (\sin \varphi)^{n + \frac{1}{2}} e^{-in\varphi + \frac{i}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

т. е.

$$\arg c_{n,n} = -n\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right).$$

Отсюда и из (3.21) следует, что для полинома степени n

$$Q_n(t; \varphi) = 2^{-it} e^{in\varphi} \exp \left\{ -i \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \left(\frac{1}{2} + it \right) \right\} \rho_n(t; \varphi) \quad (3.25)$$

коэффициент $q_n(\varphi)$ при старшем члене t^n положителен и равен

$$q_n(\varphi) = |c_{n,n}| = 2^n (\sin \varphi)^{n+\frac{1}{2}} > 0. \quad (3.26)$$

Система полиномов $\{Q_n(t; \varphi)\}_0^\infty$ ввиду свойства (3.5) системы $\{\rho_n(t)\}_0^\infty \equiv \{\rho_n(t; \varphi)\}_0^\infty$ и формулы (3.25) ортонормальна на $(-\infty, +\infty)$ уже с весом $\exp \{-(\pi - 2\varphi)t\} (\operatorname{ch} \pi t)^{-1}$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \{-(\pi - 2\varphi)t\}}{\operatorname{ch} \pi t} Q_n(t; \varphi) \overline{Q_m(t; \varphi)} dt = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.27)$$

Но в силу (3.26) легко видеть, что у полиномов $\{Q_n(t; \varphi)\}_0^\infty$ вообще все коэффициенты будут вещественными.

Поэтому, если обозначить

$$P_n(t; \varphi) = (\sin \varphi)^{-1/2} Q_n(t; \varphi) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.28)$$

и пользоваться определением (3.16) весовой функции $w(t; \varphi)$, то из (3.27) вытекает, что для $\{P_n(t; \varphi)\}_0^\infty$ выполняются условия ортонормальности (3.18).

Наконец, пользуясь соотношениями (3.28), (3.25) и (3.23), мы получим утверждение (3.19) об интегральном представлении полиномов $\{P_n(t; \varphi)\}_0^\infty$, ортонормальных на всей оси $(-\infty, +\infty)$ с весом $w(t; \varphi)$.

(в) В рассматриваемом нами случае по (3.20)

$$\cos(\operatorname{Im} \tau_j) = \sin \varphi, \quad \operatorname{ch}(\operatorname{Re} \tau_j) = 5/2 \quad (0 \leq j < +\infty).$$

Поэтому из теоремы 5 о замкнутости общей системы $\{(\operatorname{ch} \pi t)^{-1/2} \times \times \rho_n(t)\}_0^\infty$, в частности, вытекает

Теорема 7.1°. Ортонормальная на $(-\infty, +\infty)$ система функций $\{\sqrt{w(t; \varphi)} P_n(t; \varphi)\}_0^\infty$ замкнута в $L_2(-\infty, +\infty)$.

2°. Система полиномов $\{P_n(t; \varphi)\}_0^\infty$ замкнута в классе $L_1[(-\infty, +\infty); w(t; \varphi) dt]$ функций, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t; \varphi) |f(t)|^2 dt < +\infty. \quad (3.29)$$

Иначе говоря, положив для любой функции $f(t)$ из этого класса

$$c_k(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t; \varphi) f(t) P_k(t; \varphi) dt \quad (0 \leq k < +\infty) \quad (3.30)$$

и

$$S_n(t; f) = \sum_{k=0}^n c_k(f) P_k(t; \varphi) \quad (0 \leq n < +\infty)$$

будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t; \varphi) |f(t) - S_n(t; \varphi)|^2 dt = 0. \quad (3.31)$$

В заключение отметим, что, как мы увидим в следующем параграфе, полученная нами система $|P_n(t; \varphi)|_0^\infty$ представляет собой специальный случай более общей системы полиномов $|P_n^{(\alpha)}(t; \varphi)|_0^\infty$, зависящих кроме $\varphi \in (0, \pi)$ еще от одного параметра $\alpha \in (-1, +\infty)$. Указанные системы, совпадающие с нашей системой лишь при значении параметра $\alpha = 0$, были впервые открыты Ф. Поллачеком [5] совершенно иным методом. Однако, как в его работе, так и в других источниках ([6], [25]), где полностью приводятся формулировки его результатов, не содержится одного из важнейших свойств этих полиномов, установленного нами в теореме 6.

§ 4. Система полиномов Поллачека и родственные системы для полуоси $(0, +\infty)$

4.1. В § 3 система $|P_n(t; \varphi)|_0^\infty$, во-первых, была получена рассмотрением весьма частного случая другой системы $\{\rho_n(t)\}_0^\infty$, когда порождающая ее последовательность параметров $\{\sigma_j\}_0^\infty$ была выбрана нами специальным образом (3.20).

Во-вторых, уже на основе общих интегральных представлений теоремы 5 той же системы $\{\rho_n(t)\}_0^\infty$ мы естественным путем пришли к теореме 6 об интегральном представлении нашей системы $|P_n(t; \varphi)|_0^\infty$. Таким образом, лишь этим путем в теореме 6 было установлено, что полиномы $|P_n(t; \varphi)|_0^\infty$ могут быть порождены также в результате интег-

рального преобразования Меллина над системой функций $|e^{-\frac{1}{2}(1-\operatorname{ctg} \varphi)x} L_n(x)|_0^\infty$ также, очевидно, ортонормальной на $(0, +\infty)$.

Предлагаемый нами в данном параграфе метод построения общей ортонормальной системы Поллачека $|P_n^{(\alpha)}(t; \varphi)|_0^\infty$, зависящей от двух параметров $\varphi \in (0, \pi)$ и $\alpha \in (-1, +\infty)$, основан уже именно на прямом применении преобразования Меллина над системой функций

$$\left\{ e^{-\frac{1}{2}(1-\operatorname{ctg} \varphi)x} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) \right\}_0^\infty, \quad (4.1)$$

где $|L_n^{(\alpha)}(x)|_0^\infty$ — обобщенные полиномы Лаггера.

(а) Обобщенные полиномы Лаггера, как хорошо известно, определяются посредством формул*

* Теория полиномов Лаггера, а также других ортогональных систем полиномов, наиболее полно изложены в монографиях Г. Сеге [6], G. Sansone [26].

$$L_0^{(\alpha)}(x) \equiv 1, \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} \quad (1 \leq n < +\infty) \quad (4.2)$$

для любого значения параметра $\alpha \in (-1, +\infty)$. [Кроме того, они ортогональны на $(0, +\infty)$ с весом вида $e^{-x} x^\alpha$ для любого значения параметра $\alpha > -1$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)} \delta_{nm} \quad (n; m=0, 1, 2, \dots), \quad (4.3)$$

допускают явное представление

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{k!(n-k)! \Gamma(1+\alpha+k)} x^k \quad (0 \leq n < +\infty) \quad (4.2')$$

и очевидно также, что $L_n^{(0)}(x) \equiv L_n(x)$ $(0 \leq n < +\infty)$.

Далее, наряду с системой $\{e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)\}_{n=0}^\infty$ система обобщенных функций Лапера

$$\{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^\infty \quad (-1 < \alpha < +\infty) \quad (4.4)$$

также замкнута в $L_2(0, +\infty)$.

Приведем одно из простейших доказательств этого известного утверждения.

Пусть для некоторой функции $f_0(t) \in L_2(0, +\infty)$

$$\int_0^\infty f_0(x) \{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)\} dx = 0 \quad (0 \leq n < +\infty).$$

Ввиду формул (4.3) эти равенства эквивалентны следующим:

$$\int_0^\infty f_0(x) e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}+\alpha} dx = 0 \quad (0 \leq n < +\infty).$$

Отсюда после замены переменного интегрирования получим

$$\int_0^\infty F_0(t) e^{-\frac{t}{2}} t^{n-1} dt = 0 \quad (1 \leq n < +\infty), \quad (4.5)$$

где
$$F_0(t) = e^{-\frac{t}{2}} t^{1+\frac{\alpha}{2}} f_0(2t) \in L_2(0, +\infty).$$

Но теперь уже равенства (4.5) эквивалентны следующим:

$$\int_0^\infty F_0(t) \{e^{-\frac{t}{2}} L_n(t)\} dt = 0 \quad (0 \leq n < +\infty). \quad (4.5')$$

Поэтому из замкнутости системы функций Лаггера $\{e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)\}_0^\infty$ вытекает, что почти всюду на $(0, +\infty)$, $F_0(t) = f_0(t) = 0$, т. е. замкнутость системы (4.1).

(6) Заметив, что при любых значениях параметров $\alpha \in (-1, +\infty)$ и $\varphi \in (0, \pi)$

$$l_n(\tau; \varphi) \equiv e^{-\frac{1}{2}(1-i \operatorname{ctg} \varphi) \tau} \tau^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(\tau) \in L_2(0, +\infty) \quad (0 \leq n < +\infty),$$

введем в рассмотрение последовательность функций $\{\Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_0^\infty$ — их преобразований Меллина

$$\begin{aligned} \Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi) &\equiv M[l_n] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(1-i \operatorname{ctg} \varphi) \tau} \tau^{\frac{\alpha-1}{2}+it} L_n^{(\alpha)}(\tau) d\tau \quad (0 \leq n < +\infty). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Лемма 3. 1°. Система функций $\{\Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_0^\infty$ замкнута в $L_2(-\infty, +\infty)$ и ортогональна на $(-\infty, +\infty)$, причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi) \overline{\Omega_m^{(\alpha)}(t; \varphi)} dt = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)} \delta_{nm} \quad (n; m = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.7)$$

2°. Функция $\Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi)$ представима в следующем виде:

$$\Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi) = \frac{[2^{-1}(1-i \operatorname{ctg} \varphi)]^{-\frac{1+\alpha}{2}-it}}{\sqrt{2\pi}} U_n^{(\alpha)}(t; \varphi), \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} U_n^{(\alpha)}(t; \varphi) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2 \sin \varphi)^k \Gamma(1+\alpha+n)}{k! (n-k)! \Gamma(1+\alpha+k)} e^{i(\frac{\pi}{2}-\varphi)k} \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + k + it\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Доказательство. 1°. Ввиду свойств замкнутости и формул ортогональности (4.3) системы функций Лаггера (4.4), имеющих место, очевидно, и для системы $\{l_n^{(\alpha)}(\tau; \varphi)\}_0^\infty$, наши утверждения непосредственно следуют из теорем Б и Г (2°).

2°. Заметив, что

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{2}(1-i \operatorname{ctg} \varphi)} \tau^{\frac{\alpha-1}{2}+k+it} d\tau = \\ &= [2^{-1}(1-i \operatorname{ctg} \varphi)]^{-\frac{1+\alpha}{2}-k-it} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + k + it\right), \quad -\infty < t < +\infty, \end{aligned}$$

из представления (4.3) полинома $L_n^{(\alpha)}(x)$ легко получим представление (4.8)—(4.9) леммы.

(в) Теперь введем в рассмотрение последовательность полиномов $\{x_k^{(\alpha)}(t)\}_{k=0}^{\infty}$

$$x_0^{(\alpha)}(t) \equiv 1, \quad x_k^{(\alpha)}(t) = \prod_{j=1}^k \left(\frac{2j-1+\alpha}{2} + it \right) \quad (0 \leq k < +\infty), \quad (4.10)$$

заметив, что

$$x_k^{(\alpha)}(t) = e^{i \frac{\pi}{2} k} i_k^{(\alpha)}(t) \quad (1 \leq k < +\infty), \quad (4.10')$$

где

$$i_0^{(\alpha)}(t) \equiv 1, \quad i_k^{(\alpha)}(t) = \prod_{j=1}^k \left(t - i \frac{2j-1+\alpha}{2} \right) \quad (1 \leq k < +\infty) \quad (4.11)$$

— полином степени k со старшим коэффициентом при t^k , равным единице.

Но тогда в силу формул

$$\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + k + it\right) = \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it\right) x_k^{(\alpha)}(t) \quad (0 \leq k < +\infty),$$

а также (4.10') и (4.11), функцию (4.9) леммы 3 мы можем записать также в виде

$$U_n^{(\alpha)}(t; \varphi) = e^{-in\varphi} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it\right) R_n^{(\alpha)}(t; \varphi), \quad (4.9')$$

где

$$R_n^{(\alpha)}(t; \varphi) = \sum_{k=0}^n (2 \sin \varphi)^k \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{k! (n-k)!} e^{i(n-k)\varphi} i_k^{(\alpha)}(t) \quad (4.9'')$$

— полином степени n с положительным старшим коэффициентом, равным $(2 \sin \varphi)^n (\Gamma(1+\alpha+n)/\Gamma(1+n))$.

Лемма 4. Система полиномов $\{R_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна на $(-\infty, +\infty)$, причем

$$\begin{aligned} (2 \sin \varphi)^{1+n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it\right) \right|^2 e^{-(\pi-2\varphi)t} R_n^{(\alpha)}(t; \varphi) R_m^{(\alpha)}(t; \varphi) dt = \\ = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)} \delta_{nm} \quad (n; m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Доказательство. Согласно формулам ортогональности (4.7) леммы 3

$$\begin{aligned} (2 \sin \varphi)^{1+n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\pi-2\varphi)t} U_n^{(\alpha)}(t; \varphi) \overline{U_m^{(\alpha)}(t; \varphi)} dt = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)} \delta_{nm} \\ (n; m = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

откуда ввиду (4.9) и (4.10) получим требуемые соотношения (4.11), если учтем то обстоятельство, что будучи с весом ортогональными, полиномы $\{R_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_0^\infty$, наряду со старшими должны иметь только вещественные коэффициенты.

(г) Введем теперь в рассмотрение функцию

$$w^{(\alpha)}(t; \varphi) = \frac{2^\alpha}{\pi} (\sin \varphi)^{1+\alpha} \left| \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it\right) \right|^2 e^{-(\pi - 2\varphi)t}, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (4.12)$$

предполагая, что $\varphi \in (0, \pi)$ и $\alpha \in (-1, +\infty)$ — произвольные параметры. Пользуясь формулой Стирлинга нетрудно убедиться в том, что при $t \rightarrow \pm \infty$

$$\log w^{(\alpha)}(t; \varphi) \sim -C_\pm(\varphi; \alpha) |t|, \quad (4.13)$$

притом значения постоянных $C_+(\varphi; \alpha) > 0$ и $C_-(\varphi; \alpha) > 0$ могут быть записаны в явной форме.

Следуя Поллачеку, обозначим через $\{P_k^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_0^\infty$ систему полиномов, являющуюся результатом ортогонализации с весом $w^{(\alpha)}(t; \varphi)$ на $(-\infty, +\infty)$ последовательности степеней аргумента $\{t^k\}_0^\infty$ по известному методу Грамма-Шмидта, с условиями нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^{(\alpha)}(t; \varphi) P_n^{(\alpha)}(t; \varphi) P_m^{(\alpha)}(t; \varphi) dt = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)} \delta_{nm} \quad (4.14)$$

($n, m = 0, 1, 2, \dots$).

Как хорошо известно, если предположить еще, что при любом k ($0 \leq k < +\infty$) у полинома $P_k^{(\alpha)}(t; \varphi)$ коэффициент при старшем его члене имеет положительный знак, то тогда наша система определится единственным образом.

Докажем теперь теорему об интегральном представлении полиномов Поллачека.

Теорема 8. Полиномы $P_n^{(\alpha)}(t; \varphi)$ допускают интегральное представление в виде

$$P_n^{(\alpha)}(t; \varphi) = e^{i n \varphi} \frac{[2^{-1}(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)]^{\frac{1+\alpha}{2} + it}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)x} L_n^{(\alpha)}(x) x^{\frac{\alpha-1}{2} + it} dx \quad (4.15)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$),

где $L_n^{(\alpha)}(x)$ — обобщенный полином Лапера (4.1).

Доказательство. Во-первых, убедимся в том, что полиномы Поллачека допускают явное представление вида

$$P_n^{(\alpha)}(t; \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R_n^{(\alpha)}(t; \varphi) =$$

$$= \frac{\Gamma(1 + \alpha + n)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n (2 \sin \varphi)^k \frac{e^{t(n-k)\pi}}{k! (n-k)!} \lambda_k^{(\alpha)}(t; \varphi). \quad (4.16)$$

Действительно, пользуясь обозначением (4.12) весовой функции $w^{(\alpha)}(t; \varphi)$, формулы (4.11) леммы 4 запишутся именно в виде (4.14), и, кроме того, коэффициент при старшей степени t^n у полинома $P_n^{(\alpha)}(t; \varphi)$ имеет положительный знак.

Во-вторых, из соотношений и формул (4.16), (4.9) и (4.8) вытекает представление (4.15) теоремы.

Приведем теперь теорему о замкнутости.

Теорема 9. 1°. Система функций $\{ \overline{w^{(\alpha)}(t; \varphi)} P_n^{(\alpha)}(t; \varphi) \}_0^\infty$ замкнута в $L_2(-\infty, +\infty)$.

2°. Система полиномов $\{ P_n^{(\alpha)}(t; \varphi) \}_0^\infty$ замкнута в классе $L_2((-\infty, +\infty); w^{(\alpha)}(t; \varphi) dt)$ функций, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^{(\alpha)}(t; \varphi) |f(t)|^2 dt < +\infty. \quad (4.17)$$

Иначе говоря, для любой функции $f(t)$ из указанного класса, положив

$$c_k^{(\alpha)}(f) = \left\{ \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+\alpha+k)} \right\}^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} w^{(\alpha)}(\tau; \varphi) f(\tau) P_k^{(\alpha)}(\tau; \varphi) d\tau \quad (4.18)$$

$$(0 \leq k < +\infty)$$

и

$$S_n^{(\alpha)}(t; f) = \sum_{k=0}^n c_k(f) \frac{\Gamma(1+k)!}{\Gamma(1+\alpha+k)} P_k^{(\alpha)}(t; \varphi) \quad (0 \leq n < +\infty),$$

будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w^{(\alpha)}(t; \varphi) |f(t) - S_n^{(\alpha)}(t; f)|^2 dt = 0. \quad (4.19)$$

Доказательство. Оба утверждения непосредственно следуют из леммы 3 (1°) на основании введенных нами в последующем изложении обозначений (4.8), (4.9), (4.9'), а затем (4.12) и (4.16).

В заключение этого пункта отметим, что сопоставляя, например, теоремы 6 и 8, легко видеть, что система полиномов $\{ P_n(t; \varphi) \}_0^\infty$, построенная в § 3, и система Поллачека при значении параметра $\alpha = 0$, т. е. система $\{ P_n^{(0)}(t; \varphi) \}_0^\infty$ просто тождественны.

4.2. (а) Установим теперь формулу типа Радрига для полиномов $\{ P_n^{(\alpha)}(t; \varphi) \}_0^\infty$.

Из самого определения (4.2) обобщенных полиномов Лаггера $\{ L_n^{(\alpha)}(x) \}_0^\infty$ следует представление

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{2\pi i} \int_{l(x)} \frac{\zeta^{n+\alpha} e^{-\zeta}}{(\zeta - x)^{n+1}} d\zeta, \quad x \in (0, +\infty) (0 \leq n < +\infty), \quad (4.20)$$

где $l(x)$ — произвольный замкнутый контур, охватывающий точку x и лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > 0$, а $\zeta^{n+\alpha}$ — главная ветвь этой, вообще говоря, многозначной функции.

Заменой переменного $\zeta = (1/2 + w)x$ формулу (4.20) можно записать также в виде

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{x/2}}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\left(w + \frac{1}{2}\right)^{n+\alpha}}{\left(w - \frac{1}{2}\right)^{n+1}} e^{-xw} dw \quad (0 \leq n < +\infty), \quad (4.20')$$

где за контур C_ρ можно брать любую окружность $|w - 1/2| = \rho < 1/2$.

Из (4.20') имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(1-i \operatorname{ctg} \varphi)x} L_n^{(\alpha)}(x) x^{\frac{\alpha-1}{2}+it} dx = \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(1-i \operatorname{ctg} \varphi)x} x^{\frac{\alpha-1}{2}+it} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\left(w + \frac{1}{2}\right)^{n+\alpha}}{\left(w - \frac{1}{2}\right)^{n+1}} e^{-\left(w - \frac{1}{2}\right)x} dw \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\left(w + \frac{1}{2}\right)^{n+\alpha}}{\left(w - \frac{1}{2}\right)^{n+1}} \left\{ \int_0^\infty e^{-x\left(w - \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \varphi\right)} x^{\frac{\alpha-1}{2}+it} dx \right\} dw. \end{aligned} \quad (4.21)$$

при этом замена порядка интегрирования, как легко видеть, допустима ввиду того, что

$$\left| \exp \left\{ -\left(w - \frac{1}{2}\right)x \right\} \right| \leq \exp \left\{ \left(\frac{1}{2} - \rho\right)x \right\}, \quad w \in C_\rho.$$

Далее, поскольку

$$\operatorname{Re} \left\{ w + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \varphi \right\} = \operatorname{Re} w \geq \frac{1}{2} - \rho > 0, \quad w \in C_\rho,$$

то справедлива формула

$$\int_0^\infty e^{-x\left(w - \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \varphi\right)} x^{\frac{\alpha-1}{2}+it} dx = \Gamma \left(\frac{1+\alpha}{2} + it \right) \left(w - \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \varphi \right)^{-\frac{1+\alpha}{2}-it}. \quad (4.22)$$

На основании интегрального представления (4.15) теоремы 8 и в силу формул (4.21)—(4.22) мы приходим к следующей теореме.

Теорема 10. Для полиномов $\{P_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_0^\infty$ имеет место представление

$$P_n^{(\alpha)}(t; \varphi) = e^{in\varphi} \frac{[2^{-1}(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)]^{\frac{1+\alpha}{2} - it}}{2\pi i} \times \\ \times \int_{|w - \frac{1}{2}| = \rho} \frac{\left(w + \frac{1}{2}\right)^{n+\alpha} \left(w - \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \varphi\right)^{-\frac{1+\alpha}{2} - it}}{\left(w - \frac{1}{2}\right)^{n+1}} dw, \quad (4.23) \\ (n=0, 1, 2, \dots)$$

где $\rho \in (0, 1/2)$ любое

(б) Установим теперь формулу Ф. Поллачека для производящей функции

$$G^{(\alpha)}(t, z; \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n^{(\alpha)}(t; \varphi) \quad (4.24)$$

системы $\{P_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_0^\infty$.

Теорема 11. При любых $\alpha \in (-1, +\infty)$, $\varphi \in (0, \pi)$ и $t \in (-\infty, +\infty)$

$$G^{(\alpha)}(t, z; \varphi) = (1 - ze^{i\varphi})^{-\frac{1+\alpha}{2} - it} (1 - ze^{-i\varphi})^{-\frac{1+\alpha}{2} - it}, \quad |z| < 1. \quad (4.25)$$

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\left| \left(w + \frac{1}{2}\right) \left(w - \frac{1}{2}\right)^{-1} \right| < \frac{3}{2\rho}, \quad \text{при } \left|w - \frac{1}{2}\right| = \rho.$$

Поэтому при условии $w \in C_\rho$ и $|z| < 2\rho/3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{i\varphi} z \frac{w + \frac{1}{2}}{w - \frac{1}{2}} \right]^n = \frac{w - \frac{1}{2}}{w(1 - ze^{i\varphi}) - 1/2(1 + ze^{i\varphi})},$$

при этом ряд снова будет равномерно сходящимся относительно обеих переменных w и z на каждом компакте из областей их изменения.

Отсюда ввиду (4.23) получим следующее представление для производящей функции

$$G^{(\alpha)}(t; z; \varphi) = \frac{[2^{-1}(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)]^{\frac{1+\alpha}{2} - it}}{2\pi i} \times \\ \times \int_{C_\rho} \frac{\left(w + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(w - \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \varphi\right)^{-\frac{1+\alpha}{2} - it}}{w(1 - ze^{i\varphi}) - 1/2(1 + ze^{i\varphi})} dw, \quad |z| \leq \frac{2\rho}{3}. \quad (4.26)$$

Однако, в замкнутом круге $\left|w - \frac{1}{2}\right| \leq \rho < \frac{1}{2}$ мы имеем

$$\left|w + \frac{1}{2}\right| > 1 - \rho, \text{ а также } \left|w - \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \varphi\right| \geq \frac{1/2 - \rho}{\sin \varphi} > 0.$$

Поэтому подынтегральная функция в (4.26) однозначна и аналитична в круге $|w - 1/2| \leq \rho$, кроме единственной особой точки — полюса первого порядка в точке $w_0 = (1 + ze^{i\varphi})/2$ ($1 - ze^{i\varphi}$). Впрочем то обстоятельство, что точка w_0 при условии $|z| \leq \frac{2\rho}{3}$ лежит внутри окружности C , очевидно, так как при $\rho < \frac{1}{2}$

$$|w_0 - 1/2| = |ze^{i\varphi} (1 - ze^{i\varphi})^{-1}| \leq \frac{2\rho}{3 - 2\rho} < \rho.$$

Но простым подсчетом получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{x=w_0} \left\{ \frac{\left(w + \frac{1}{2}\right)^a (w - i/2 \operatorname{ctg} \varphi)^{-\frac{1+a}{2}-it}}{w(1 - ze^{i\varphi}) - 1/2(1 + ze^{i\varphi})} \right\} &= \\ &= \frac{(w_0 + 1/2)^a (w_0 - i/2 \operatorname{ctg} \varphi)^{-\frac{1+a}{2}-it}}{1 - ze^{i\varphi}} = \\ &= \frac{(1 - ze^{i\varphi})^{-\frac{1+a}{2}-it} (1 - ze^{-i\varphi})^{-\frac{1+a}{2}-it}}{[2^{-1}(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)]^{\frac{1+a}{2}+it}}, \end{aligned}$$

откуда и из (4.26) следует формула (4.25), но пока при условии $|z| \leq \frac{2\rho}{3}$.

Наконец, так как сама производящая функция $\tilde{G}^{(a)}(t, z; \varphi)$ аналитична во всем единичном круге, то очевидно, что и разложение (4.24) в степенной ряд справедливо не только при $|z| \leq 2\rho/3$, но и при $|z| < 1$.

(в) Приведем теперь рекуррентные соотношения для системы полиномов, также установленные Ф. Поллачеком.

Теорема 12. Для системы полиномов $\{P_n^{(a)}(t; \varphi)\}_0^\infty$ имеют место рекуррентные уравнения

$$\begin{aligned} n P_n^{(a)}(t; \varphi) - \{(2n + a - 1) \cos \varphi + 2t \sin \varphi\} P_{n-1}^{(a)}(t; \varphi) + \\ + (n + a - 1) P_{n-2}^{(a)}(t; \varphi) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где следует положить $P_{-1}^{(a)}(t; \varphi) \equiv 0$, $P_0^{(a)}(t; \varphi) = 1$.

Доказательство. Из явного выражения (4.25) производящей функции $G^{(\alpha)}(t; z; \varphi)$ системы непосредственно следует, что справедливо тождество

$$(1 - 2z \cos \varphi + z^2) \frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial z} = \{(1 - z) \cos \varphi + 2t \sin \varphi - (1 + z) z\} G^{(\alpha)}.$$

Подставляя сюда значения

$$G^{(\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n^{(\alpha)}(t; \varphi) \text{ и } \frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} P_n^{(\alpha)}(t; \varphi)$$

и приравнявая коэффициенты при z^{n-1} в обеих частях полученного таким образом тождества для степенных рядов, мы приходим к соотношениям (4.27). При этом, $P_0^{(\alpha)}(t; \varphi) \equiv 1$, что следует, например, из (4.24) — (4.25) и поэтому мы должны положить $P_{-1}^{(\alpha)}(t; \varphi) \equiv 0$.

4.3. Перейдем теперь к теории родственных с $\{P_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_{n=0}^{\infty}$ систем полиномов для полуоси $(0, +\infty)$.

(а) Из явного выражения (4.25) производящей функции $G^{(\alpha)}(t, z; \varphi)$ следует, что справедливо тождество

$$G^{(\alpha)}(-t, -z; \pi - \varphi) \equiv G^{(\alpha)}(t, z; \varphi).$$

Подставляя сюда значения этих функций из (4.24) и приравнявая коэффициенты при z^n в обеих степенных рядах, мы приходим к тождествам

$$P_n^{(\alpha)}(-t, \pi - \varphi) = (-1)^n P_n^{(\alpha)}(t, \varphi) \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда при $\varphi = \pi/2$, в частности, вытекает

$$P_n^{(\alpha)}\left(-t, \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n P_n^{(\alpha)}\left(t, \frac{\pi}{2}\right) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

и, следовательно, можно утверждать, что

$$P_{2n}^{(\alpha)}\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = A_n^{(\alpha)}(t^2), \quad P_{2n+1}^{(\alpha)}\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = t B_n^{(\alpha)}(t^2) \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (4.28)$$

где $A_n^{(\alpha)}(x)$ и $B_n^{(\alpha)}(x)$ — полиномы степени n с положительным старшим коэффициентом.

Докажем теперь теорему.

Теорема 13.1. Системы полиномов $\{A_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{B_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормальны на полуоси $(0, +\infty)$ в смысле

$$\int_0^{\infty} w_1^{(\alpha)}(t) A_n^{(\alpha)}(t) A_m^{(\alpha)}(t) dt = \frac{\Gamma(2n+1+\alpha)}{\Gamma(2n+1)} \delta_{nm} \quad (n, m=0, 1, 2, \dots), \quad (4.29)$$

где

$$w_1^{(\alpha)}(t) = \frac{2^\alpha}{\pi} \left| \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}\right) \right|^2 t^{-\frac{1}{2}} \quad (4.29')$$

и

$$\int_0^x w_2^{(\alpha)}(t) B_n^{(\alpha)}(t) B_m^{(\alpha)}(t) dt = \frac{\Gamma(2n+2+\alpha)}{\Gamma(2n+2)} \delta_{nm} \quad (n; m = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.30)$$

где

$$w_2^{(\alpha)}(t) = \frac{2^\alpha}{\pi} \left| \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}\right) \right|^2 t^{1/2}. \quad (4.30')$$

2°. Справедливы интегральные представления

$$A_n^{(\alpha)}(t) = e^{i\pi n} \frac{2^{-\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} L_{2n}^{(\alpha)}(x) x^{\frac{\alpha-1}{2} + i\sqrt{t}} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.31)$$

$$B_n^{(\alpha)}(t) = e^{i\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)} \frac{2^{-\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}}}{\sqrt{t} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + i\sqrt{t}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} L_{2n+1}^{(\alpha)}(x) x^{\frac{\alpha-1}{2} + i\sqrt{t}} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.32)$$

Доказательство. 1°. Согласно (4.12) и (4.14)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 2^\alpha \pi^{-1} \left| \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it\right) \right|^2 \right\} P_n^{(\alpha)}\left(t; \frac{\pi}{2}\right) P_m^{(\alpha)}\left(t; \frac{\pi}{2}\right) dt = \\ = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)} \delta_{nm} \quad (n; m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду определения (4.28) систем полиномов $\{A_n^{(\alpha)}(t)\}_0^\infty$ и $\{B_n^{(\alpha)}(t)\}_0^\infty$ следует наше утверждение.

2°. Интегральные представления наших систем непосредственно вытекают из теоремы 8 в силу их определений (4.28).

(б) Теперь введем в рассмотрение производящие функции наших систем

$$G_A^{(\alpha)}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n A_n^{(\alpha)}(t) \quad \text{и} \quad G_B^{(\alpha)}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n B_n^{(\alpha)}(t). \quad (4.33)$$

Теорема 14. При любом $z \in (-1, +\infty)$

$$\begin{aligned} G_A^{(\alpha)}(t, z) &= \frac{1}{2} (1+z)^{-\frac{1+\alpha}{2} - i\sqrt{t}} \left| (1-i\sqrt{z})^{2i\sqrt{t}} + (1+i\sqrt{z})^{2i\sqrt{t}} \right|, \\ G_B^{(\alpha)}(t, z) &= \frac{1}{2\sqrt{tz}} (1+z)^{-\frac{1+\alpha}{2} - i\sqrt{t}} \left\{ (1+i\sqrt{z})^{2i\sqrt{t}} - (1-i\sqrt{z})^{2i\sqrt{t}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Доказательство. В силу определения (4.28) наших полиномов из (4.24) и (4.25), заменив t на $\sqrt{t}$ и положив $\varphi = \pi/2$, мы получим при $|z| < 1$

$$(1+iz)^{-\frac{1+\alpha}{2}+i\sqrt{t}}(1-iz)^{-\frac{1+\alpha}{2}-i\sqrt{t}}=G^{(\alpha)}\left(\sqrt{t}, z; \frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} A_k^{(\alpha)}(t) + \sqrt{t} \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} B_k^{(\alpha)}(t), \quad 0 < t < +\infty. \quad (4.35')$$

Заменяя здесь z на $-z$, при $|z| < 1$ имеем также

$$(1-iz)^{-\frac{1+\alpha}{2}+i\sqrt{t}}(1+iz)^{-\frac{1+\alpha}{2}-i\sqrt{t}}=G^{(\alpha)}\left(\sqrt{t}, -z; \frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} A_k^{(\alpha)}(t) - \sqrt{t} \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} B_k^{(\alpha)}(t), \quad 0 < t < +\infty. \quad (4.35'')$$

Наконец, заменив в (4.35') и (4.35'') z на $\sqrt{z}$, и затем сложением и вычитанием полученных таким образом тождеств мы приходим к формулам (4.34) теоремы.

(в) Теорема 15. Справедливы рекуррентные формулы

$$2k(2k-1)A_k^{(\alpha)}(t) + [8k^2 + 4k(\alpha-3) - 3\alpha + 5 - 4t]A_{k-1}^{(\alpha)}(t) +$$

$$+ (2k + \alpha - 2)(2k + \alpha - 3)A_{k-2}^{(\alpha)}(t) = 0 \quad (4.36)$$

$$(n=0, 1, 2, \dots),$$

$$2k(2k+1)B_k^{(\alpha)}(t) + [8k^2 + 4k(\alpha-1) - \alpha + 1 - 4t]B_{k-1}^{(\alpha)}(t) +$$

$$+ (2k + \alpha - 1)(2k + \alpha - 2)B_{k-2}^{(\alpha)}(t) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (4.37)$$

где следует положить

$$A_{-1}^{(0)}(t) = B_{-1}^{(0)}(t) \equiv 0, \quad A_0^{(\alpha)}(t) = 1, \quad B_0^{(\alpha)}(t) = 2.$$

Доказательство. Запишем рекуррентную формулу (4.27) теоремы 12 для значения параметра $\varphi = \pi/2$, заменив в ней t на $\sqrt{t}$

$$nP_n^{(\alpha)}\left(\sqrt{t}, \frac{\pi}{2}\right) - 2\sqrt{t}P_{n-1}^{(\alpha)}\left(\sqrt{t}, \frac{\pi}{2}\right) + (n + \alpha - 1)P_{n-2}^{(\alpha)}\left(\sqrt{t}, \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$(4.27')$$

$$(n=0, 1, 2, \dots).$$

Теперь, заметив, что согласно (4.28)

$$A_k^{(\alpha)}(t) = P_{2k}^{(\alpha)}\left(\sqrt{t}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \sqrt{t}B_k^{(\alpha)}(t) = P_{2k+1}^{(\alpha)}\left(\sqrt{t}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots) \quad (4.28'')$$

из (4.27') соответственно положив $n = 2k$, $n = 2(k-1)$, $n = 2k+1$ и $n = 2k-1$ приходим к следующим соотношениям:

$$2kA_k^{(\alpha)}(t) - 2tB_{k-1}^{(\alpha)}(t) + (2k + \alpha - 1)A_{k-1}^{(\alpha)}(t) = 0, \quad (4.38)$$

$$(2k-2)A_{k-1}^{(\alpha)}(t) - 2tB_{k-2}^{(\alpha)}(t) + (2k + \alpha - 3)A_{k-2}^{(\alpha)}(t) = 0, \quad (4.39)$$

$$(2k+1)B_k^{(\alpha)}(t) - 2A_k^{(\alpha)}(t) + (2k + \alpha)B_{k-1}^{(\alpha)}(t) = 0, \quad (4.40)$$

$$(2k-1)B_{k-1}^{(\alpha)}(t) - 2A_{k-1}^{(\alpha)}(t) + (2k + \alpha - 2)B_{k-2}^{(\alpha)}(t) = 0. \quad (4.41)$$

Но из (4.38) и (4.39) находим значения

$$B_{k-1}(t) = \frac{1}{2t} \{2k A_k^{(\alpha)}(t) + (2k + \alpha - 1) A_{k-1}^{(\alpha)}(t)\},$$

$$B_{k-2}(t) = \frac{1}{2t} \{(2k - 2) A_{k-1}^{(\alpha)}(t) + (2k + \alpha - 3) A_{k-2}^{(\alpha)}(t)\}.$$

Подставляя эти значения в (4.41) после надлежащей группировки его членов приходим к формулам (4.36).

Аналогично из (4.40) и (4.41) находим

$$A_k^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2} \{(2k + 1) B_k^{(\alpha)}(t) + (2k + \alpha) B_{k-1}^{(\alpha)}(t)\},$$

$$A_{k-1}^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2} \{(2k - 1) B_{k-1}^{(\alpha)}(t) + (2k + \alpha - 2) B_{k-2}^{(\alpha)}(t)\}$$

и подстановкой в (4.38) после необходимых упрощений получим формулу (4.37).

Наконец, ввиду того, что $P_{-1}^{(\alpha)}\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $P_0^{(\alpha)}\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = 1$, из (4.28) имеем $A_0^{(\alpha)}(t) \equiv 1$ и $B_{-1}^{(\alpha)}(t) \equiv 0$.

Далее, из соотношений (4.38) и (4.40), положив $k = 0$, мы получим еще $A_{-1}^{(\alpha)}(t) \equiv 0$ и $B_0^{(\alpha)}(t) \equiv 2$.

(г) В заключение докажем теорему о замкнутости наших систем. Теорема 16. Системы функций

$$\left| \sqrt{w^{(\alpha)}(x)} A_n^{(\alpha)}(x) \right|_0^\infty \text{ и } \left| \sqrt{w^{(\alpha)}(x)} B_n^{(\alpha)}(x) \right|_0^\infty$$

замкнуты в $L_2(0, +\infty)$.

Доказательство. Из теоремы 9 при $\varphi = \pi/2$, в частности, следует, что система $\left| \sqrt{w^{(\alpha)}(t; \pi/2)} P_n^{(\alpha)}(x; \pi/2) \right|_0^\infty$ замкнута в $L_2(-\infty, +\infty)$, где по (4.12)

$$w^{(\alpha)}\left(x; \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2^\alpha}{\pi} \left| \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + ix\right) \right|^2, \quad (4.42)$$

очевидно является четной функцией на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

Далее, поскольку согласно (4.28) полиномы $\{P_{2n}^{(\alpha)}(x; \pi/2)\}_0^\infty$ и $\{P_{2n+1}^{(\alpha)}(x; \pi/2)\}_0^\infty$, соответственно, четной и нечетной степени, то легко видеть, что системы функций

$$\left| \sqrt{w^{(\alpha)}(x; \pi/2)} P_{2n}^{(\alpha)}\left(x; \frac{\pi}{2}\right) \right|_0^\infty \text{ и } \left| \sqrt{w^{(\alpha)}(x; \pi/2)} P_{2n+1}^{(\alpha)}(x; \pi/2) \right|_0^\infty$$

замкнуты в отдельности, соответственно, в классах четных и нечетных функций из $L_2(-\infty, +\infty)$.

Пусть теперь $F(x) \in L_2(0, +\infty)$. Определим на всей оси $(-\infty, +\infty)$ две функции — четную и нечетную, соответственно, положив

$$f_{\pm}(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{2}} F(t^2), & t \in (0, +\infty) \\ \pm |t|^{\frac{1}{2}} F(t^2), & t \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

и заметив при этом, что $f_{\pm}(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$, поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_{\pm}(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} |F(x)|^2 dx.$$

Отметим далее, что в силу (4.29'), (4.30') и (4.44)

$w^{(2)}(t; \pi/2) = w_1^{(2)}(t^2) |t| = w_2^{(2)}(t) |t|^{-1}$, $-\infty < t < +\infty$ и принимая во внимание формулы (4.28), будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f_{+}(t) - \sum_{k=0}^n a_k V \overline{w^{(2)}(t; \pi/2)} P_{2k}^{(2)}\left(t; \frac{\pi}{2}\right) \right|^2 dt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F(x) - \sum_{k=0}^n a_k V \overline{w_1^{(2)}(x)} A_k^{(2)}(x) \right|^2 dx \end{aligned} \quad (4.43')$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f_{-}(t) - \sum_{k=0}^n b_k V \overline{w^{(2)}(t; \pi/2)} P_{2k+1}^{(2)}\left(t; \frac{\pi}{2}\right) \right|^2 dt = \\ = \int_0^{+\infty} \left| F(x) - \sum_{k=0}^n b_k V \overline{w_2^{(2)}(x)} B_k^{(2)}(x) \right|^2 dx \end{aligned} \quad (4.43'')$$

для произвольных значений коэффициентов $\{a_k\}_0^n$ и $\{b_k\}_0^n$.

Наконец, поскольку нижние грани интегралов, стоящих в левых частях (4.43') и (4.43'') равны нулю, то теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 29.XI.1979

ԻՐ. ԻՐ. ԶՐԹԱՇՅԱՆ, Որոշ օրթոգոնալ սխեմաների ներկայացման և փակօրթյան մասին (ամփոփում)

Ինչպես լավ հայտնի է (տես [1], գլ. 2-րդ), փակօրթյան և օրթոգոնալության հատկությունները մենում են ինվարիանտ ամբողջ L_2 տարածության այնպիսի ձևափոխությունների մասնակի, որոնց դեպքում պահպանվում է ցանկացած ֆունկցիայի մոդուլի բառակուսու ինտեգրալը:

Ներկա հոդվածը նվիրված է անալիտիկ ֆունկցիաների մի թանի սխեմաների ներկայացման և փակօրթյան հարցերի ուսումնասիրությանը նված մոտեցմամբ:

Հատկապես, այդ եղանակի օգնությամբ այստեղ շարադրվում են հեղինակի մի թանի արդյունքները, որոնք չրապարակված են եղել առանց ապացույցի նրա երկու վաղ հոդվածներում [2], [3]:

Բազի դրանից միևնույն եղանակով շարադրվում են նաև այլ հեղինակների մի թանի վազեմի արդյունքներ. նախաժողովին շափ ամենարեղձանուր ձևակերպումներով, սկսած Մյունց-Սասսի դասական թեորեմից ([4], [1]) և վերջացրած Պոլլաչեկի արդյունքներով ամրագր իրական առանցքի վրա կշռի ներկայությամբ օրթոգոնալ բազմանդամների մասին ([5], [6]):

Վերջապես, նշենք, որ այլ հեղինակներին պատկանող արդյունքների ապացույցները, այստեղ շարադրված են հիմնականում զգալիորեն այլ եղանակներով:

M. M. DJRBASHIAN. *Representation and closedness of some orthogonal systems* (summary)

It is well known ([1], chapter II) that the closedness and orthogonality properties are invariant with respect to any linear map of L_2 in itself, provided the modul square integral of each function is preserved.

The paper is devoted to further systematic applications of this approach to the study of the questions of representation and of closedness of a number of analytic functions systems. A number of results announced earlier ([2], [3]) without proofs is presented from this point of view. A number of other results ranging from the classical Muntz—Sass theorem ([4], [1]) to the results of Pollatchek on polynoms which are weighted—orthogonal on real axis are also presented from the same standpoint. The results of other authors are proved in the paper mainly by different methods.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964.
2. М. М. Джрбашян. О пополнении и замыкании неполной системы функций $[e^{-\alpha x} x^k k^{-1}]$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961.
3. М. М. Джрбашян. О пополнении и замыкании неполной системы функций, ДАН Арм. ССР, 35, № 1, 1962.
4. Q. Szasz. Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, Math. Annalen, Bd. 77, 1916.
5. F. Pollaczek. Sur une famille de polynomes orthogonaux qui continent les polynomes d'Hermite et de Laguerre comme cas limites, Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, 230, 1950.
6. Л. Сеїд. Ортогональные многочлены. Добавление, т. 396, М., 1962.
7. М. М. Джрбашян и А. Е. Аветисян. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. мат. журнал, 1, № 3, 1960, 383—426.
8. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
9. Clasine van Winter. Fredholm equations on a Hilbert space of analytical functions, Trans. of the Amer. Math. Soc., 162, 104—124.
10. F. Malmquist. Sur la d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donne de points. Comptes rendus sixieme congres (1925) des math Scand., Kopenhagen, 1926, 253—259.
11. S. Takenaker. On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, Japan. J. Math., 2, 1925, 129—145.
12. Дж. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., 1961.
13. М. М. Джрбашян. О пополнении неполной системы Мальмквиста на вещественной оси, ДАН Арм. ССР, 35, № 2, 1962.

14. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси, Мат. сб., 95 (137), № 3 (11), 1974, 418—444.
15. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций. М., 1975.
16. P. Duren. Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York—London, 1970.
17. A. Erdely. Note on inversion formula for the Laplace transformation, The Journal of the London Math. Soc., 38, 1943, 72—77.
18. Г. В. Бадалян. Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, VIII, № 5, 1955, и IX, № 1, 1956.
19. А. О. Гельфонд. О квазиполиномах наименее отклоняющихся от нуля на отрезке $[0, 1]$. Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 1951, 9—16.
20. А. О. Гельфонд. К вопросу об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 1950, 413—420.
21. F. Hausdorff. Summationmethoden und Momentenfolgen, 11, Math. Zeitschrift, 9, 1921, 11 280—299.
22. Э. Апарасио Бернардо. О наименьшем отклонении от нуля квазиполиномов с целыми алгебраическими коэффициентами, Вест. Московского ун-та, № 2, 1962, 21—32.
23. С. Н. Müntz. Über Approximation von Weierstrass, Schwarz's Festschrift, Berlin, 1914, 303—312.
24. O. Szasz. On closed sets of rational functions, Annali di Matematica, 34, 1953, 422—445.
25. H. Bateman. Higher transcendental functions. 2, New York—Toronto—London, 1953, 220—221.
26. G. Sansone. Orthogonal Functions. Interscience publishers, LTD., London, 1959.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Է. Պ. Մելիքսեթյան. Դիրիխլեի խնդիրը երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների լիպոտիկ սխտեմների համար ինտեգրելի ֆունկցիաների դասում	407
Հ. Հ. Մաթևոսյան. Մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացիան նրանց հզակիու- թյունների բազմության անջատմամբ	416
Ի. Կ. Խաչատրյան. Խառն կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար լուծումների ասիմպտոտական պահպանող ձևափոխության օպերատորի գոյության մասին	424
Ն. Մ. Զեբաշյան. Որոշ օրթոգոնալ սխտեմների ներկայացման և փակության մասին	446

СОДЕРЖАНИЕ

Э. П. Меликсетян. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциаль- ных уравнений второго порядка в классе суммируемых функций	407
Г. З. Матевосян. Факторизация мероморфных функции с разделением множе- ства их особенностей	416
И. Г. Хачатрян. О существовании оператора преобразования для дифферен- циальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений	424
М. М. Дзрбашян. Представление и замкнутость некоторых ортогональных систем	446

CONTENTS

E. P. Meliksetian. The Dirichleys problem for elliptic systems of second order differential equations in the class $L_1(-\infty, +\infty)$	407
H. H. Matevosian. The factorization of meromorphic functions with separation of their singularity set	416
I. G. Khachatryan. On the existence of a transformation operator for high order differential equations, which preserves the asymptotics of solutions	424
M. M. Dzrbashtan. Representation and closedness of some orthogonal systems	446

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր
«Մաթեմատիկա» ամսագրի 1979 թ., №№ 1—6

Վ. Ա. Արզաբյան. Մինգոյայտ գրգռված բազմատեսակային համակարգի տրոհումը	5, 327
Վ. Հ. Ավագյան. Շտուրմ-Լիովիլի խնդիրը սպեկտրալ պարամետրով եզրային պայմանի մեջ	2, 91
Յու. Մ. Առլինսկի. Հանդերձված հիլբերտյան տարածություններում քվադրմիտյան օպերատորների ռեզոլյար (*)-ընդլայնումները	4, 297
Շ. Խ. Բոգոյան, Բ. Ե. Թոռոսյան. Տրամարանության հանրահաշվի ֆունկցիաների հետազոտումը փոփոխականների համախմբության ակտիվության տեսակետից	2, 124
Լ. Ջ. Կեռքյան. Որոշ դասի խիստ ցիկլիկ օպերատորների ֆունկցիոնալ մոդելը և ինվարիանտ ենթատարածությունները	1, 42
Լ. Ջ. Կեռքյան. Ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների որոշ դասի ալգեբրայի կազմությունը	4, 263
Ս. Ա. Կրիզոսյան. Կոմպակտ խմբի վրա սահմանված վերջավոր տիպ ունեցող հանրահաշիվների մասին	3, 169
Ս. Հ. Կալայան. Կարևոր աշտարակներ և Պրիմի բազմաձևություններ	1, 49
Ա. Է. Իրյոմենկո. Քո տարածությունում սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների ասիմպտոտական կորերի մասին	4, 275
Վ. Ս. Զախարյան. և Լ. Ա. Սեխապոսյան. Ածի գնահատական $N\{w\}$ դասի մերոմորֆ ֆունկցիաների համար	5, 348
Գ. Գ. Էմին. Մինչրազմաձևությունները, բազմաձևությունների խմբից և խիստ ուղիկային բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում	3, 211
Ի. Գ. Խաչատրյան. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար լուծումների ասիմպտոտական պահպանող ձևափոխության օպերատորի գոյության մասին	6, 426
Մ. Յ. Խոսոյանց. Քվարկության օպերատորների որոշ բնութագրեր	2, 142
Ս. Վ. Խոսլյչով. Բրենանի ալտերնատիվ վերջավոր էնտրոպիայով չափերի համար	3, 184
Յ. Ա. Կուտոյանց. Հոկալ ասիմպտոտիկ նորմալությունը Պուսսոնի տիպի պրոցեսների համար	1, 3
Հ. Յ. Հակոբյան. Հ. Հ. Դուլսոյան. Ծածկույթների նկատմամբ կրիտիկական գրաֆների դասերը	2, 150
Գ. Հ. Հովհաննիսյան. Բառերի հավասարության պրոբլեմի լուծելիությունը $A=BtC$ տեսքի որոշիչ հարաբերություն ունեցող կիսախմբերի համար	4, 288
Դ. Խ. Հովհաննիսյան. Խառը խնդիրներ բարձր կարգի թույլ հիպերոլական հավասարումների համար երկու անկախ փոփոխականների դեպքում	5, 369
Հ. Հ. Մարեոսյան. Մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացիան նրանց եզակիությունների բազմության անջատմամբ	6, 416
Հ. Մալոնևկ. Ֆրագմենտ-Լինդելյոֆի տիպի թեորեմների ճշտությունը կոմպլեքս դիֆերենցիալ անհավասարությունների լուծումների համար	3, 192
Գ. Հ. Մառտիրոսյան. Գիրսի սահմանային պարբերական բաշխումները ամբողջաթիվ ցանցի վրա որոշված մոդելների համար	1, 21
Ե. Յա. Մելամուղ. Հստ Դարլինգտոնի դրական մատրից-ֆունկցիաների իրազործումը Բազմանդամային իրազործումը վերասերման դեպքում	4, 237

Է. Պ. Մելիքեան. Դիմապատկեր խնդիրը իրապիկ սիստեմի երկրորդ կարգի դիմապատկերներին	5, 391
Է. Պ. Մելիքեան. Դիմապատկեր խնդիրը երկրորդ կարգի դիմապատկերներին իրապիկ սիստեմների համար ինտեգրացիոն ֆունկցիաների դասում	6, 407
Թ. Ջ. Մկրտչյան. Ինքնահամայնությունը օպերատորի սեփական ֆունկցիոնալների լրիվ սիստեմի անընդհատությունը քննարկող մի նոր հայտանիշի մասին	2, 75
Վ. Ս. Յամբյան. Ըրոշ ինտեգրացիոն օպերատորների սեփական արժեքների ասիմպտոտիկայի և հետքի մասին	3, 201
Բ. Յուրիև. Մեկ կոմպլեքս փոփոխականի բազմանդամի պայմանավորվածության չափի մասին	4, 275
Ա. Յու. Շահվերյան. Սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների դասի մասին	3, 157
Ա. Ա. Սեկանյան. Լեմբոզ անհանգրվան վրա մոտավորությունների տեսության մի քանի լքատրեմայի խնդիրների մասին	2, 107
Ա. Է. Ջրբաշյան. Կշռային անհամասարտություն ջ ֆունկցիայի համար	3, 338
Մ. Մ. Ջրբաշյան. Որոշ օրթոգոնալ սիստեմների ներկայացման և փակույթի մասին	6, 446
Բ. Ս. Թուրին. Նամակ խմբագրությանը	1, 70
Լ. Ա. Սեյդախյան. Բլաշկե-Ջրբաշյանի B_{∞} և Π_{∞} արտադրյալների շառավղային փոփոխությունը	4, 256

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия «Математика»
за 1979 г., XIV, №№ 1—6

К. А. Абгарян. Расщепление сингулярно возмущенной многотемповой системы	5, 327
В. А. Авакян. Задача Штурма—Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии	2, 91
Г. Ц. Акопян, О. А. Галстян. Классы графов, критических относительно покрытий	2, 150
Ю. М. Аримский. Регулярные (*)-расширения квазиэрмитовых операторов в оснащенных гильбертовых пространствах	4, 297
Ш. Е. Бозоян, Б. Е. Торосян. Исследование функций алгебры логики с точки зрения активности совокупности переменных	2, 124
А. А. Восканян. О некоторых экстремальных задачах теории приближения на всей вещественной оси	2, 107
А. З. Геворкян. Функциональная модель и инвариантные подпространства некоторого класса строго циклических операторов	1, 42
А. З. Геворкян. Об алгебраической структуре некоторого класса несамосопряженных операторов	1, 268
С. А. Григорян. Об алгебрах конечного типа на компактной группе	3, 168
С. Г. Далалян. Башни кривых и многообразия Прима	1, 49
А. Э. Джрбашян. Весовая оценка для функции χ_q	5, 338
М. М. Джрбашян. Представление и замкнутость некоторых ортогональных систем	6, 446
А. Э. Еременко. Об асимптотических кривых субгармонических функций в пространстве R^m	4, 292
Б. Ерикке. О мере обусловленности многочлена от одной комплексной переменной	4, 275
В. С. Захарян, А. А. Сехпосян. Оценка роста для мероморфных функций класса $\Lambda\{\omega\}$	5, 348
Ю. А. Кутоянц. Локальная асимптотическая нормальность для процессов пуассоновского типа	1, 3
Х. Малонек. К вопросу о справедливости теорем типа Фрагмена—Линделёфа для решений некоторых комплексных дифференциальных неравенств	3, 192
Д. Г. Мартиросян. Периодические гиббсовские состояния для классических решетчатых моделей	1, 21
Г. У. Матевосян. Факторизация мероморфных функций с разделением множества их особенностей	6, 416
Е. Я. Меламуд. Реализация позитивных матриц-функций по Дарлингтону. Полиномиальная реализация в случае вырождения	4, 237
Э. П. Меликсетян. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в верхней полуплоскости	5, 391
Э. П. Меликсетян. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в классе суммируемых функций	6, 407

Р. З. Мкртчян. Об одном новом признаке, характеризующем непрерывность полной системы собственных функционалов самосопряженного оператора	2, 75
Г. У. Оганесян. Разрешимость проблемы равенства слов для полугрупп с определяющим соотношением вида $A = B^i C$	4, 288
Г. Р. Оганесян. Смешанные задачи для слабо гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными	5, 369
Б. С. Рубин. Письмо в редакцию	1, 70
Л. А. Сехпосян. Радикальные изменения произведений $B_{(n)}$ и $P_{(n)}$ Бляшке—Джрбашяна	4, 251
И. Г. Хачатрян. О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений	6, 426
М. Ю. Ходжаянц. Некоторые характеристики операторов перечисления	2, 142
С. В. Хрущев. Альтернатива Бреннана для m -р с конечной энтропией	3, 184
А. Ю. Шахвердян. К граничному поведению ограниченных аналитических функций	3, 157
Г. Г. Эмин. Предмногообразия, группоид многообразий и строгие радикалы в категории модулей над всеми кольцами	3, 211
В. А. Яврян. Об асимптотике собственных значений и следе некоторых интегральных операторов	3, 201

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR
 seria "Matematika", 1979, vol. XIV, №№ 1—6

<i>K. A. Abgarian</i> . Splitting of a singular excited multitemp system	4, 327
<i>V. A. Avakian</i> . The Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary condition	2, 91
<i>Yu. M. Arlinsky</i> . Regular (•)-extensions of quasihermitian operators in the equipped Hilbert spaces	3, 297
<i>Sh. E. Bozajan, B. E. Torosyan</i> . Investigation of functions of the algebra of logic in terms of activity of joint variables	2, 124
<i>S. H. Dalaltan</i> . Galois towers and Prym varieties	1, 49
<i>A. E. Djrbashian</i> . Weight norm estimate for the function g_q	4, 338
<i>M. M. Djrbashian</i> . Representation and closedness of some orthogonal systems	6, 447
<i>G. G. Emln</i> . Prevarieties the groupoid of varieties and strict radicals in the category of modules over all rings	3, 211
<i>A. E. Eremenko</i> . On asymptotic curves of subharmonic functions in R^n	4, 292
<i>L. Z. Gevorkian</i> . On the functional model and the invariant subspaces of a class of strictly cyclic operators	1, 42
<i>L. Z. Gevorkian</i> . On the algebraic structure of a certain class of non self-ad- joint operators	4, 268
<i>S. A. Grigorian</i> . On algebras of finite type on compact group	3, 168
<i>H. Ts. Hakobian, H. H. Galustian</i> . Classes of critical graphs in reference to coverings	2, 150
<i>G. R. Hovhannistan</i> . Mixed problems for high order weakly hyperbolic equ- ations in two independent variables	5, 369
<i>V. A. Javrian</i> . On the asymptotics of eigenvalues and the spur on the some integral operators	3, 201
<i>B. Jorlicke</i> . On the rate of the conditionedness of a complex variable	4, 275
<i>S. V. Kchrushev</i> . The Brennan alternative for measures with finite entropy	3, 184
<i>I. G. Khachatryan</i> . On the existence of a transformation operator for high order differential equations, which preserves the asymptotics of solutions	6, 424
<i>M. Yu. Khodjalants</i> . Some characteristic of enumeration operators	2, 124
<i>Yu. A. Kutoyants</i> . Local asymptotical normality for the Polsson type processes	1, 3
<i>H. Malonek</i> . On the question of validity of theorems of Phragmen-Lindelof type for solutions of complex differential inequalities	3, 192
<i>D. H. Martirostan</i> . Equilibrium states for classical lattice models	1, 21
<i>H. H. Matevosyan</i> . The factorization of meromorphic functions with separation of their singularity set	6, 416
<i>E. Y. Melamud</i> . Realization of positive matrix-functions after Darlington. Po- lynomial realization in case of degeneration	4, 237
<i>E. P. Meliksetian</i> . Dirikhley's problem of elliptic system about the second series of differential equation in the upper half levelness	5, 391
<i>E. P. Meliksetian</i> . The Dirikhley's problem for elliptic systems of second order differential equations in the class $L_1(-\infty, \infty)$	6, 407

-
- R. Z. Mkrtchian.* On a new criterion characterizing the continuity of the full system of eigenfunctionals of a self-adjoint operator 2, 75
- G. U. Oganessian.* The solvability of the word problem for semigroups with a defining relation of the form $A = BIC$ 4, 288
- B. S. Rubin.* Letter to the Editor 1, 70
- L. A. Sekhposyan.* Radical variations of B_∞ and Π_∞ Blaschke-Djrbashian products 4, 251
- A. Yu. Shahverdian.* On the boundary behavior of bounded analytical functions 3, 157
- A. A. Voskuntan.* On some extremal problems in the theory of approximations on the real axis 2, 107
- V. S. Zakharian, L. A. Sekhposyan.* A bound for the growth of functions from the $N(\omega)$ class 5, 318