ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված ցիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Издается преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedins Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of types script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that woold call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been caried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenian, SSR
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian, SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

Е. Я. МЕЛАМУД

РЕАЛИЗАЦИЯ ПОЗИТИВНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ПО ДАРЛИНГТОНУ. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ

Эта работа примыкает к статье автора [1]. Пусть $z(\lambda)$ — рациональная матрица-функция n-го порядка класса $\mathbf{P}$ (см. [2]): $z(\lambda)+z^*(\lambda)\geqslant 0$ при $\operatorname{Re}\lambda>0$ (позитивная матрица-функция). В [1] доказано, что $z(\lambda)$ представима в виде дробно-линейного преобразования

$$z(\lambda)=[a(\lambda)R+b(\lambda)][c(\lambda)R+d(\lambda)]^{-1}, \tag{1}$$

где $R=\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0_{n-m}\end{pmatrix}$, $m=\operatorname{rang}[z(\lambda)+z^*(-\bar{\lambda})]$, а матрица коэффициентов $A(\lambda)=\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda)\end{pmatrix}$ — рациональная, J-растягивающая в правой полуплоскости и J-унитарная на мнимой оси, $J=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0\end{pmatrix}$. Такое представление $z(\lambda)$ называется реализацией по Дарлингтону (D-реализацией) ([3]).

В [1] построена одна из возможных D-реализаций $z(\lambda)$; в настоящей статье дается описание всего многообразия D-реализаций. Результат применяется, в частности, для получения необходимых и достаточных условий существования полиноминальной D-реализации.

Отметим, что в невырожденном случае ($m=n$) описание многообразия D-реализацией получено Д. З. Аровым [4]. Нас интересует случай вырождения ($0<m<n$) (при этом, как и в [1], не ограничивая общности, будем считать, что главный минор порядка m матрицы $z(\lambda)+z^*(-\bar{\lambda})$, отличный от тождественного нуля, находится в ее левом верхнем углу).

§ 1. D-реализации матриц-функций класса P

Пусть $z(\lambda)\in\mathbf{P}$ и (1) — ее D-реализация, то есть матрица коэффициентов $A(\lambda)$ удовлетворяет условиям:

$$A^*(\lambda)JA(\lambda)-J\geqslant 0 \quad (\operatorname{Re}\lambda>0), \tag{2_1}$$

$$A^*(i\tau)JA(i\tau)-J\equiv 0 \quad (\bar{\tau}=\tau). \tag{2_2}$$

Положим

$$a(\lambda)R+b(\lambda)=p_r(\lambda),\ c(\lambda)R+d(\lambda)=q_r(\lambda). \tag{3}$$

Поскольку

$$\frac{z(\lambda)+z^*(\lambda)}{2}-q_Y^{-1*}(\lambda)Rq_Y^{-1}(\lambda)=q_Y^{-1*}(\lambda)[RI]\frac{A^*(\lambda)JA(\lambda)-J}{2}\begin{vmatrix}R\\I\end{vmatrix}q_Y^{-1}(\lambda),$$

то из (2_1), (2_2) следует, что в правой полуплоскости

$$\frac{z(\lambda)+z^*(\lambda)}{2}\geqslant q_Y^{-1*}(\lambda)Rq_Y^{-1}(\lambda), \tag{4_1}$$

а на мнимой оси

$$\frac{z(i\tau)+z^*(i\tau)}{2}=q_Y^{-1*}(i\tau)Rq_Y^{-1}(i\tau). \tag{4_2}$$

Отсюда ясно, что матрица-функция $Y(\lambda)=[I_m\,0]\,q_Y^{-1}(\lambda)$ регулярна в правой полуплоскости и является решением факторизационной задачи ([6])

$$\frac{z(\lambda)+z^*(-\bar\lambda)}{2}=Y^*(-\bar\lambda)\,Y(\lambda). \tag{4_Y}$$

Рассмотрим матрицу $B(\lambda)=jJA^{-1}(\lambda)\,Jj$, $j=\begin{pmatrix}I_n&0\\0&-I_n\end{pmatrix}$ и положим

$$[p_X(\lambda)\,q_X(\lambda)]=[RI]\,B(\lambda).$$

Так как

$$[RI]\,B(\lambda)\,jJA(\lambda)\begin{bmatrix}R\\I\end{bmatrix}=[RI]\,jJ\begin{bmatrix}R\\I\end{bmatrix}=0,$$

то $q_X(\lambda)\,p_Y(\lambda)=p_X(\lambda)\,q_Y(\lambda)$; из обратимости $q_Y(\lambda)$ и $B(\lambda)$ вытекает, что $q_X(\lambda)$ обратима и

$$z(\lambda)=p_Y(\lambda)\,q_Y^{-1}(\lambda)=q_X^{-1}(\lambda)\,p_X(\lambda). \tag{5}$$

Далее, поскольку

$$\frac{z(\lambda)+z^*(\lambda)}{2}-q_X^{-1}(\lambda)Rq_X^{-1*}(\lambda)=q_X^{-1}(\lambda)[RI]\frac{B(\lambda)JB^*(\lambda)-J}{2}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}R\\I\end{vmatrix}q_X^{-1*}(\lambda),$$

то в правой полуплоскости

$$\frac{z(\lambda)+z^*(\lambda)}{2}\geqslant q_X^{-1}(\lambda)Rq_X^{-1*}(\lambda), \tag{4_3}$$

а на мнимой оси

$$\frac{z(i\tau)+z^*(i\tau)}{2}=q_X^{-1}(i\tau)Rq_X^{-1*}(i\tau), \tag{4_4}$$

из чего следует, что матрица $X(\lambda)=q_X^{-1}(\lambda)\begin{bmatrix}I_m\\0\end{bmatrix}$ регулярна в правой полуплоскости и является решением факторизационной задачи

$$\frac{z(\lambda)+z^*(-\bar{\lambda})}{2} - X(\lambda)X^*(-\bar{\lambda}). \tag{4_X}$$

Из (2_2) видно, что $JA^{-1}(\lambda)J = A^*(-\bar{\lambda},)$ следовательно $B^*(-\bar{\lambda}) = jA(\lambda)j$, поэтому

$$\overset{*}{p}_X(-\bar{\lambda}) = a(\lambda)R - b(\lambda),\quad \overset{*}{q}_X(-\bar{\lambda}) = -c(\lambda)R + d(\lambda). \tag{6}$$

Из (3) и (6) находим

$$a(\lambda)R = \frac{p_Y(\lambda)+\overset{*}{p}_X(-\bar{\lambda})}{2},\quad b(\lambda) = \frac{p_Y(\lambda)-\overset{*}{p}_X(-\bar{\lambda})}{2}, \tag{7}$$

$$c(\lambda)R = \frac{q_Y(\lambda)-\overset{*}{q}_X(-\bar{\lambda})}{2},\quad d(\lambda) = \frac{q_Y(\lambda)+\overset{*}{q}_X(-\bar{\lambda})}{2}.$$

Введем обозначения:

$$r(\lambda) = q_Y^{-1}(\lambda)\overset{*}{q}_X(-\bar{\lambda}),\quad L(\lambda) = \begin{pmatrix} q_Y^{-1}(\lambda) & -r(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix},\quad \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Тогда

$$L^*(\lambda)\mathbf{U}^*\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}[A^*(\lambda)JA(\lambda)-J]\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\mathbf{U}L(\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{z(\lambda)+z^*(\lambda)}{2} - q_Y^{-1*}(\lambda)Rq_Y^{-1}(\lambda) & q_Y^{-1*}(\lambda)Rr(\lambda) - q_X^{-1}(\lambda)R \\ r^*(\lambda)Rq_Y^{-1}(\lambda) - Rq_X^{-1*}(\lambda) & R - r^*(\lambda)Rr(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

и отсюда, в частности, вытекает

$$r^*(\lambda)Rr(\lambda) \leqslant R \quad (Re\,\lambda > 0), \tag{10_1}$$

$$r^*(i\tau)Rr(i\tau) = R \quad (\bar{\tau} = \tau). \tag{10_2}$$

Разобьем $q_X^{-1}(\lambda)$ и $q_Y^{-1}(\lambda)$ на блоки

$$q_X^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & X_{12}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) & X_{22}(\lambda) \end{pmatrix},\quad q_Y^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} Y_{11}(\lambda) & Y_{12}(\lambda) \\ Y_{21}(\lambda) & Y_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $X_{11}(\lambda)$, $Y_{11}(\lambda)$ — квадратные матрицы порядка m. Из (4_X) и (4_Y) следуют равенства

$$\overset{*}{Y}_{11}(-\bar{\lambda})\,Y_{11}(\lambda) = X_{11}(\lambda)\overset{*}{X}_{11}(-\bar{\lambda}), \tag{4_5}$$

$$\overset{*}{Y}_{11}(-\bar{\lambda})\,Y_{22}(\lambda) = X_{11}(\lambda)\overset{*}{X}_{21}(-\bar{\lambda}), \tag{4_6}$$

$$\overset{*}{Y}_{12}(-\bar{\lambda})\,Y_{12}(\lambda) = X_{21}(\lambda)\overset{*}{X}_{21}(-\bar{\lambda}). \tag{4_7}$$

Используя их и (10_2), находим

$$Rr(\lambda) = \begin{pmatrix} r_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{где } r_{11}(\lambda) = Y_{11}(\lambda)X_{11}^{-1*}(-\bar{\lambda}) = Y_{11}^{-1*}(-\bar{\lambda})X_{11}(\lambda).$$

Из (10_1) следует, что $r_{11}(\lambda)$ — сжимающая (следовательно, регулярная) в правой полуплоскости.

Впредь пару решений $X(\lambda) = \begin{vmatrix} X_{11}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) \end{vmatrix}$, $Y(\lambda) = [Y_{11}(\lambda) \quad Y_{12}(\lambda)]$ факторизационных задач (4_X), (4_Y), для которых $r_{11}(\lambda)$ регулярна при $Re\,\lambda > 0$, будем называть допустимой.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Если* $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ — *матрица коэффициентов D-реализации* (1) *матрицы-функции* $z(\lambda) \in \mathrm{P}$, *то матрицы* $X(\lambda) = [-Rc^*(-\bar\lambda) + d^*(-\bar\lambda)]^{-1} \begin{vmatrix} I_m \\ 0 \end{vmatrix}$ и $Y(\lambda) = [I_m\ 0][c(\lambda)R + d(\lambda)]$ — *допустимая пара решений факторизационных задач* (4_X) *и* (4_Y).

Дадим теперь описание всех матриц $A(\lambda)$, отвечающих произвольной допустимой паре $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ — произвольная допустимая пара решений факторизационных задач (4_X) и (4_Y). Каждая матрица коэффициентов $A(\lambda)$ D-реализации $z(\lambda)$, соответствующая этой паре, представима в виде*

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{p_Y(\lambda) + p_X^*(-\bar\lambda)}{2} + a(\lambda)(I-R) & \dfrac{p_Y(\lambda) - p_X^*(-\bar\lambda)}{2} \\ \dfrac{q_Y(\lambda) - q_X^*(-\bar\lambda)}{2} + c(\lambda)(I-R) & \dfrac{q_Y(\lambda) + q_X^*(-\bar\lambda)}{2} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где

$$p_X(\lambda) = q_X(\lambda)\,z(\lambda),\ p_Y(\lambda) = z(\lambda)\,q_Y(\lambda),\ q_X(\lambda) = \begin{pmatrix} I & \beta_X(\lambda) \\ 0 & \delta_X(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0 \\ X_{21}(\lambda) & I \end{pmatrix}^{-1},$$

$$q_Y(\lambda) = \begin{pmatrix} Y_{11}(\lambda) & Y_{12}(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \beta_Y(\lambda) & \delta_Y(\lambda) \end{pmatrix}, c(\lambda)(I-R) = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}(\lambda) \\ 0 & c_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$c_{12}(\lambda) = -Y_{11}^{-1}(\lambda)\,Y_{12}(\lambda)\,c_{22}(\lambda) + \frac{X_{11}^{-1*}(-\bar\lambda)\,\beta_X(\lambda) - Y_{11}^{-1}(\lambda)\,\beta_Y^*(-\bar\lambda)}{2}\,\delta_X^{-1}(\lambda), \tag{12}$$

$$a(\lambda)(I-R) = q_X^{-1}(\lambda)(I-R) + z(\lambda)\,c(\lambda)(I-R), \tag{13}$$

при этом выполнены следующие (необходимые и достаточные условия:

1) $\delta_X^*(-\bar\lambda) = \delta_Y(\lambda)$;

2) $c_{22}(\lambda)\,\delta_X(\lambda) + \delta_Y(\lambda)\,c_{22}^*(-\bar\lambda) + \dfrac{\beta_Y(\lambda)\,\beta_Y^*(-\bar\lambda) - \beta_X^*(-\bar\lambda)\beta_X(\lambda)}{2} = 0$;

3) $q_{IX}(\lambda) = q_X(\lambda) - (I-R)\,c^*(-\bar\lambda)$ и $q_{IY}(\lambda) = q_Y(\lambda) + c(\lambda)(I-R)$

таковы, что $q_{1X}^{-1}(\lambda)$, $q_{1Y}^{-1}(\lambda)$ *и* $r_1(\lambda)=q_{1Y}^{-1}(\lambda)\,q_{1X}^{*}(-\bar\lambda)$ *регулярны в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda>0$;

4) $z(\lambda)+q_X^{-1}(\lambda)(I-R)\,q_{1Y}^{-1}(\lambda)=z_1(\lambda)\in\mathbf{P}$.

Доказательство необходимости. Пусть $A(\lambda)=\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda)\\ c(\lambda) & d(\lambda)\end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов, отвечающая допустимой паре $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$. Определив $q_X(\lambda)$, $q_Y(\lambda)$ согласно (3) и (6), введем матрицы

$$h_X(\lambda)=q_X(\lambda)\begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0\\ X_{21}(\lambda) & I\end{pmatrix},\quad h_Y(\lambda)=\begin{pmatrix} Y_{11}(\lambda) & Y_{12}(\lambda)\\ 0 & I\end{pmatrix}q_Y(\lambda). \tag{14}$$

Так как

$$q_X^{-1}(\lambda)=\begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & X_{12}(\lambda)\\ X_{21}(\lambda) & X_{22}(\lambda)\end{pmatrix},\quad q_Y^{-1}(\lambda)=\begin{pmatrix} Y_{11}(\lambda) & Y_{12}(\lambda)\\ Y_{21}(\lambda) & Y_{22}(\lambda)\end{pmatrix},$$

то $h_X(\lambda)$, $h_Y(\lambda)$ обратимы и имеют блочно-треугольный вид

$$h_X(\lambda)=\begin{pmatrix} I & \beta_X(\lambda)\\ 0 & \delta_X(\lambda)\end{pmatrix},\quad h_Y(\lambda)=\begin{pmatrix} I & 0\\ \beta_Y(\lambda) & \delta_Y(\lambda)\end{pmatrix}, \tag{15}$$

поэтому $\delta_X(\lambda)$, $\delta_Y(\lambda)$ обратимы.

Так как

$$\frac{q_Y(\lambda)-q_X^{*}(-\bar\lambda)}{2}=c(\lambda)R,\ \text{то}\ \delta_X^{*}(-\bar\lambda)=\delta_Y(\lambda).$$

Разбив $c(\lambda)$ на блоки $c(\lambda)=\begin{pmatrix} c_{11}(\lambda) & c_{12}(\lambda)\\ c_{21}(\lambda) & c_{22}(\lambda)\end{pmatrix}$, где $c_{11}(\lambda)$ имеет порядок m, найдем выражения для $c_{12}(\lambda)$ и $a(\lambda)(I-R)$. Для этого перепишем условие (2_2) в виде $A^*(-\bar\lambda)JA(\lambda)=J$ и получим равенства:

$$(I-R)\,[a^*(-\bar\lambda)\,c(\lambda)+c^*(-\bar\lambda)\,a(\lambda)]\,(I-R)=0, \tag{16_1}$$

$$(I-R)\,[a^*(-\bar\lambda)\,c(\lambda)+c^*(-\bar\lambda)\,a(\lambda)]\,R=0, \tag{16_2}$$

$$(I-R)\,[a^*(-\bar\lambda)\,d(\lambda)+c^*(-\bar\lambda)\,b(\lambda)]=I-R. \tag{16_3}$$

Из (16_2) и (16_3), учитывая связь между $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$, получим:

$$(I-R)\,[a^*(-\bar\lambda)\,q_Y(\lambda)+c^*(-\bar\lambda)\,p_Y(\lambda)]=I-R,$$

$$[q_X(\lambda)\,a(\lambda)-p_X(\lambda)\,c(\lambda)](I-R)=I-R.$$

Приравнивая вытекающие отсюда два выражения для $a(\lambda)(I-R)$ (одно из них совпадает с (13)):

$$a(\lambda)(I-R)=[q_Y^{-1*}(-\bar\lambda)-z^*(-\bar\lambda)\,c(\lambda)](I-R)=[q_X^{-1}(\lambda)+ z(\lambda)\,c(\lambda)]\,(I-R), \tag{13_1}$$

получим

$$[z(\lambda)+z^*(-\bar\lambda)]\,c(\lambda)(I-R)=[q_Y^{-1*}(-\bar\lambda)-q_X^{-1}(\lambda)]\,(I-R),$$

а с учетом (4_X), (4_Y), (14) и (15) отсюда следует:

$$Y_{11}(\lambda)\,c_{12}(\lambda)+Y_{12}(\lambda)\,c_{22}(\lambda)=$$

$$=Y_{11}(\lambda)\,\frac{X_{11}^{-1*}(-\bar\lambda)\,\beta_X(\lambda)\,\delta_X^{-1}(\lambda)-Y_{11}^{-1}(\lambda)\,\beta_Y^*(-\bar\lambda)\,\delta_Y^{-1*}(-\bar\lambda)}{2},$$

откуда вытекает (12).

Из (16_1) и (13_1) получаем

$$(I-R)\,[q_Y^{-1}(\lambda)\;c(\lambda)+c^*(-\bar\lambda)\,q_X^{-1}(\lambda)](I-R)=0$$

или

$$[\,Y_{21}(\lambda)\;Y_{22}(\lambda)]\begin{vmatrix}c_{12}(\lambda)\\ c_{22}(\lambda)\end{vmatrix}+[c_{12}^*(-\bar\lambda)\;\;c_{22}^*(-\bar\lambda)]\begin{vmatrix}X_{12}(\lambda)\\ X_{22}(\lambda)\end{vmatrix}=0,$$

что с учетом (14), (15) и (12) перепишется так:

$$\delta_Y^{-1}(\lambda)[-\beta_Y(\lambda)\;I]\begin{vmatrix}Y_{11}(\lambda)\,c_{12}(\lambda)+Y_{12}(\lambda)\,c_{22}(\lambda)\\ c_{22}(\lambda)\end{vmatrix}+$$

$$+[c_{12}^*(-\bar\lambda)\,X_{11}(\lambda)+c_{22}^*(-\bar\lambda)\;\;X_{21}(\lambda)\,c_{22}^*(-\bar\lambda)]\begin{vmatrix}-\beta_X(\lambda)\\ I\end{vmatrix}\delta_X^{-1}(\lambda)=0$$

или с учетом (4_5), (4_6):

$$[-\beta_Y(\lambda)\,I]\left|\frac{Y_{11}(\lambda)\,X_{11}^{-1*}(-\bar\lambda)\,\beta_X(\lambda)-\beta_Y^*(-\bar\lambda)}{2}\right|+$$

$$+\left[\frac{\beta_X^*(-\bar\lambda)-\beta_Y(\lambda)\;Y_{11}^{-1*}(-\bar\lambda)\,X_{11}(\lambda)}{2}\;\delta_Y(\lambda)\,c_{22}^*(-\bar\lambda)\right]\left[\begin{matrix}-\beta_X(\lambda)\\ I\end{matrix}\right]=0.$$

Отсюда в виду (4_5) следует условие 2).

Учитывая (7), получаем для $A(\lambda)$ выражение (11), где $c_{12}(\lambda)$ и $a(\lambda)(I-R)$ определяются формулами (12), (13), а $c_{22}(\lambda)$ и блоки матриц $h_X(\lambda)$, $h_Y(\lambda)$ удовлетворяют условиям 1), 2).

Проверим теперь выполнение условий 3), 4).

Положим

$$A(\lambda)\begin{vmatrix}I\\ I\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}p_Y(\lambda)+a(\lambda)(I-R)\\ q_Y(\lambda)+c(\lambda)\,(I-R)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}p_{IY}(\lambda)\\ q_{IY}(\lambda)\end{vmatrix},$$

$$|I\;I]\,B(\lambda)=[p_X(\lambda)+(I-R)\,a^*(-\bar\lambda)\;\;q_X(\lambda)-(I-R)\,c^*(-\bar\lambda)]=$$

$$=[p_{IX}(\lambda)\;q_{IX}(\lambda)].$$

Очевидно, $q_{IX}(\lambda)\,p_{IY}(\lambda)=p_{IX}(\lambda)\,q_{IY}(\lambda)$. Из J-унитарности $A(\lambda)$ на мнимой оси вытекает, что $q_{IY}(\lambda)$ (а значит и $q_{IX}(\lambda)$) обратимз, поэтому существует

$$p_{IY}(\lambda)\,q_{IY}^{-1}(\lambda)=q_{IX}^{-1}(\lambda)\,p_{IX}(\lambda)=z_I(\lambda).$$

Легко убедиться, что $z_I(\lambda)$ связана с $z(\lambda)$ равенствами

$$z_I(\lambda) = z(\lambda) + q_X^{-1}(\lambda)(I - R)\, q_{IY}^{-1}(\lambda) = z(\lambda) + q_{IX}^{-1}(\lambda)(I - R)\, q_Y^{-1}(\lambda).$$

Так как

$$z_I(\lambda) = [a(\lambda) I + b(\lambda)][c(\lambda) I + d(\lambda)]^{-1}, \tag{17}$$

то

$$\frac{z_I(\lambda) + z_I^*(\lambda)}{2} - q_{IY}^{-1*}(\lambda)\, q_{IY}^{-1}(\lambda) = q_{IY}^{-1*}(\lambda)\, \frac{A^*(\lambda)\, J\, A(\lambda) - J}{2}\, q_{IY}^{-1}(\lambda).$$

и из (2_1) следует, что $z_I(\lambda)$—позитивная матрица-функция (условие 4)). Так как $\operatorname{rang}|z_I(\lambda) + z_I^*(-\bar\lambda)| = n$, то из (2_1) и (2_2) следует, что (17) — D-реализация для $z_I(\lambda)$.

Теперь, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, придем к выводу, что $q_{IX}^{-1}(\lambda)$ и $q_{IY}^{-1}(\lambda)$ регулярны в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ вместе с $r_I(\lambda) = q_{IY}^{-1}(\lambda)\, \overset{*}{q}_{IX}(-\bar\lambda)$ (условие 3)).

Доказательство достаточности. Пусть $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ определена формулами (11), (12), (13) и выполнены условия 1)—4). Равенство (1) очевидно, поэтому нам остается убедиться в том, что $A(\lambda)$ удовлетворяет условиям (2_1) и (2_2).

Так как $c(\lambda) + d(\lambda) = q_{IY}(\lambda)$, $d(\lambda) - c(\lambda) = \overset{*}{q}_{IX}(-\bar\lambda)$, то

$$c(\lambda) = \frac{q_{IY}(\lambda) - \overset{*}{q}_{IX}(-\bar\lambda)}{2},\quad d(\lambda) = \frac{q_{IY}(\lambda) + \overset{*}{q}_{IX}(-\bar\lambda)}{2}. \tag{7_1}$$

Обозначим $q_{IX}(\lambda)\, z_I(\lambda) = p_{IX}(\lambda)$, $z_I(\lambda)\, q_{IY}(\lambda) = p_{IY}(\lambda)$. Из условия 2) вытекает равенство $(I - R)[q_Y^{-1}(\lambda)\, c(\lambda) + c^*(-\bar\lambda) q_X^{-1}(\lambda)](I - R) = 0$, из которого следует, что $q_X^{-1}(\lambda)(I - R)\, q_{IY}^{-1}(\lambda) = q_{IX}^{-1}(\lambda)(I - R)\, q_Y^{-1}(\lambda)$; учитывая это, (12), (4_5), и (4_6), получим: $a(\lambda) - b(\lambda) = \overset{*}{p}_{IX}(-\bar\lambda)$. Совместно с очевидным равенством $a(\lambda) + b(\lambda) = p_{IY}(\lambda)$ это приводит к соотношениям

$$a(\lambda) = \frac{p_{IY}(\lambda) + \overset{*}{p}_{IX}(-\bar\lambda)}{2},\quad b(\lambda) = \frac{p_{IY}(\lambda) - \overset{*}{p}_{IX}(-\bar\lambda)}{2}. \tag{7_2}$$

Используя (7_1) и (7_2) и полагая $L_I(\lambda) = \begin{pmatrix} q_{IY}^{-1}(\lambda) & -r_I(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$, находим

$$L_I^*(\lambda)\, \mathbf{U}^*\, [A^*(\lambda)\, J A(\lambda) - J]\, \mathbf{U}\, L_I(\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{z_I(\lambda) + z_I^*(\lambda)}{2} - q_{IY}^{-1*}(\lambda)\, q_{IY}^{-1}(\lambda) & q_{IY}^{-1*}(\lambda)\, r_I(\lambda) - q_{IX}^{-1}(\lambda) \\ r_I^*(\lambda)\, q_{IY}^{-1}(\lambda) - q_{IX}^{-1*}(\lambda) & I - r_I^*(\lambda)\, r_I(\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= G(\lambda) - \Phi^*(\lambda) \cdot \Phi(\lambda),$$

где

$$G(\lambda) = Re\begin{pmatrix} z_I(\lambda) & -2q_{IX}^{-1}(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -q_{IY}^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & r_I(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Из условий 1), 2) и равенств (12), (4_5), (4_6) вытекают тождества

$$\frac{z_I(i\tau) + z_I^*(i\tau)}{2} \equiv q_{IY}^{-1*}(i\tau)\, q_{IY}^{-1}(i\tau) \equiv q_{IX}^{-1}(i\tau)\, q_{IX}^{-1*}(i\tau), \tag{18}$$

из которых следует, что

$$G(i\tau) - \Phi^*(i\tau)\,\Phi(i\tau) \equiv 0, \tag{19}$$

и поэтому выполняется условие (2_2), то есть $A(\lambda)$ J-унитарна на мнимой оси. Покажем теперь, что она J-растягивающая при $Re\,\lambda > 0$.

Допустим сначала, что $z_I(\lambda)$ не имеет мнимых полюсов. Тогда как видно из (18), их не имеют и матрицы-функции $q_X^{-1}(\lambda)$, $q_Y^{-1}(\lambda)$, $r_I(\lambda)$. Из условий 3) и 4) ясно, что $G(\lambda)$ — гармоническая, а $\Phi^*(\lambda) \times \Phi(\lambda)$ — субгармоническая в правой полуплоскости (при этом обе они непрерывны при $Re\,\lambda \geq 0$). Так как субгармоническая матрица-функция $\Phi^*(\lambda)\,\Phi(\lambda)$ на границе области совпадает с гармонической матрицей-функцией $G(\lambda)$ (см. (19)), то, согласно принципу максимума, внутри области справедливо неравенство $G(\lambda) \geq \Phi^*(\lambda)\;\Phi(\lambda)$, из которого следует, что $A(\lambda)$ является J-растягивающей в правой полуплоскости (условие (2_1)).

Если $z_I(\lambda)$ имеет полюсы на мнимой оси, то она, как известно, ([5]) представима в виде

$$z_I(\lambda) = z_0(\lambda) + \tilde{z}_I(\lambda),$$

где $z_0(\lambda)$ и $\tilde{z}_I(\lambda)$ — позитивные матрицы-функции, причем $\tilde{z}_I(\lambda)$ не имеет мнимых полюсов, а $z_0(\lambda) + z_0^*(-\bar{\lambda}) \equiv 0$.

Обозначим $\begin{pmatrix} I & z_0(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix} = A_0(\lambda)$ и рассмотрим матрицу $\tilde{A}(\lambda) = A_0^{-1}(\lambda)\, A(\lambda)$. Очевидно

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{p}_{IY}(\lambda) + \tilde{p}_{IX}^*(-\bar{\lambda})}{2} & \dfrac{\tilde{p}_{IY}(\lambda) - \tilde{p}_{IX}^*(-\bar{\lambda})}{2} \\ \dfrac{q_{IY}(\lambda) - q_{IX}^*(-\bar{\lambda})}{2} & \dfrac{q_{IY}(\lambda) + q_{IX}^*(-\bar{\lambda})}{2} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{p}_{IX}(\lambda) = q_{IX}(\lambda)\,\tilde{z}_I(\lambda)$, $\tilde{p}_{IY}(\lambda) = \tilde{z}_I(\lambda)\,q_{IY}(\lambda)$, при этом

$$\frac{\tilde{z}_I(i\tau) + \tilde{z}_I^*(i\tau)}{2} \equiv q_{IY}^{-1*}(i\tau)\,q_{IY}^{-1}(i\tau) \equiv q_{IX}^{-1}(i\tau)\,q_{IX}^{-1*}(i\tau).$$

Так как $\tilde{z}_I(\lambda)$ — позитивная без мнимых полюсов, то, по предыдущему, $\tilde{A}^*(\lambda)\, J\, \tilde{A}(\lambda) - J \geq 0$ при $Re\,\lambda > 0$. Остается заметить, что $A(\lambda) = A_0(\lambda)\;\tilde{A}(\lambda)$ — произведение двух J-растягивающих матриц-функций, и поэтому также является J-растягивающей при $Re\,\lambda > 0$.

Примечание. Из доказанного ясно, что каждой допустимой паре $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ отвечает столько D-реализаций $z(\lambda)$, сколько существует различных наборов матриц

$$c_{22}(\lambda),\ h_X(\lambda)=\begin{pmatrix} I & \beta_X(\lambda) \\ 0 & \delta_X(\lambda)\end{pmatrix},\ h_Y(\lambda)=\begin{pmatrix} I & 0 \\ \beta_Y(\lambda) & \delta_Y(\lambda)\end{pmatrix},$$

удовлетворяющих условиям 1)—4) теоремы 2. Впредь каждый такой набор матриц $c_{22}(\lambda)$, $h_X(\lambda)$, $h_Y(\lambda)$ будем называть реализующим набором.

§ 2. Полиномиальная D-реализация

Выясним условия, при которых среди D-реализаций рациональной позитивной матрицы-функции $z(\lambda)$ имеется реализация с полиномиальной матрицей коэффициентов $A(\lambda)$ (полиномиальная D-реализация). В невырожденном случае ($m=n$), как показано в [4], для существования полиномиальной D-реализации необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

1°. $[z(\lambda)+z^*(-\bar{\lambda})]^{-1}$ — полиноминальная;

2°. $z(\lambda)$ не имеет мнимых полюсов (здесь и в дальнейшем подразумеваются полюсы в *конечных* точках мнимой оси).

Мы рассмотрим случай вырождения ($0<m<n$). Теперь условие 1° теряет смысл, а условие 2° не является необходимым. Так, например, позитивная матрица-функция $z(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}\end{pmatrix}$ имеет полиномиальную D-реализацию

$$z(\lambda)=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda^2+1\end{pmatrix}\right]^{-1}.$$

Далее, в невырожденном случае полиномиальная D-реализация в существенном единственна (если $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ — матрицы двух полиномиальных D-реализаций, то $A_2(\lambda)=A_1(\lambda)T$, где T — постоянная матрица). В случае же вырождения это не так. Например

$$z(\lambda)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda+1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

допускает две существенно различные полиномиальные D-реализации с матрицами

$$A_1(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\lambda&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{и}\quad A_2(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\lambda&\lambda&1&0\\\lambda&\lambda&0&1\end{pmatrix}.$$

Последнее объясняется тем, что если при $m = n$ матрица $A(\lambda)$ однозначно определяется допустимой парой решений $q_X^{-1}(\lambda)$, $q_Y^{-1}(\lambda)$ факторизационных задач (4_1) и (4_2) (при $R = I$), то в случае вырождения одной допустимой паре решений $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ факторизационных задач (4_X), (4_Y) отвечает множество матриц $A(\lambda)$.

Теорема 3. *Если $z(\lambda)$ допускает полиномиальную D-реализацию* (1), *то* $q_X^{-1}(\lambda) = [-Rc^*(-\bar{\lambda}) + d^*(-\bar{\lambda})]^{-1}$ *и* $q_Y^{-1}(\lambda) = [c(\lambda)R + d(\lambda)]^{-1}$ *не вырождаются ни в одной точке правой полуплоскости (и, следовательно*

$$X(\lambda) = q_X^{-1}(\lambda)\begin{vmatrix} I_m \\ 0 \end{vmatrix} \text{ и } Y(\lambda) = [I_m\ 0]\, q_Y^{-1}(\lambda)$$

имеют полный ранг).

Действительно, так как $c(\lambda)$ и $d(\lambda)$ полиномиальные, то $q_X^{-1}(\lambda)$ и $q_Y^{-1}(\lambda)$ не вырождаются в точках, где они регулярны. По теореме 1 $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ регулярны при $Re\,\lambda > 0$, поэтому регулярны $q_X^{-1}(\lambda)R$ и $Rq_Y^{-1}(\lambda)$. Регулярность же $q_X^{-1}(\lambda)(I-R)$ и $(I-R)\,q_Y^{-1}(\lambda)$ при $Re\,\lambda > 0$ непосредственно следует из (13_1).

Решения факторизационных задач (4_X), (4_Y), имеющие полный ранг в каждой точке правой полуплоскости, называются экстремальными. Экстремальное решение единственно с точностью до унитарного множителя ([6]).

Замечание. Имея в виду дальнейшее, отметим, что в случае $m = n$ условие $1°$ можно заменить таким равносильным условием:

$1°°$. Экстремальные решения $q_X^{-1}(\lambda)$, $q_Y^{-1}(\lambda)$ факторизационных задач (4_1), (4_2) (при $R = I$) таковы, что $q_X(\lambda)$ и $q_Y(\lambda)$ — полиномиальные матрицы.

В случае вырождения имеет место

Теорема 4. *Для того чтобы $z(\lambda) \in$* P *допускала полиномиальную D-реализацию, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере для одной * пары экстремальных решений $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ факторизационных задач (4_X), (4_Y) существовал такой регуляющий набор полиномиальных матриц $c_{22}(\lambda)$, $h_X(\lambda)$, $h_Y(\lambda)$, что:*

I. $c_{12}(\lambda)$, $q_X(\lambda)$, $q_Y(\lambda)$ — *полиномиальные;*

II. $z_I(\lambda) = z(\lambda) + q_X^{-1}(\lambda)\,(I - R)\,q_Y^{-1}(\lambda)$ *не имеет мнимых полюсов.*

Необходимость. Пусть (1) — полиномиальная D-реализация $z(\lambda)$ и $X(\lambda) = \begin{vmatrix} X_{11}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) \end{vmatrix}$, $Y(\lambda) = [Y_{11}(\lambda)\ Y_{12}(\lambda)]$ — соответствую-

---

* Если условия теоремы выполняются для одной экстремальной пары $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, то для любой другой экстремальной пары $X(\lambda)u$, $vY(\lambda)$ $(uu^* = v^*v = I)$ они также выполняются.

щие решения задач (4_X), (4_Y) (из теоремы 3 следует, что эти решения — экстремальные). Поскольку $A(\lambda)$ имеет вид (11), то $q_X(\lambda)$, $q_Y(\lambda)$, $h_X(\lambda)$, $h_Y(\lambda)$, $c(\lambda)(I - R)$ — полиномиальные матрицы.

Далее, как показано при доказательстве теоремы 2, равенство (17) есть D-реализация матрицы $z_l(\lambda)$, а так как эта реализация полиномиальная и $\operatorname{rang}[z_l(\lambda) + z_l^*(-\bar{\lambda})] = n$, то $z_l(\lambda)$ не имеет мнимых полюсов (условие 2°).

Достаточность. Рассмотрим пару экстремальных решений $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ и отвечающий ей реализующий набор полиномиальных матриц $c_{22}(\lambda)$, $h_X(\lambda)$, $h_Y(\lambda)$ и построим матрицу $A(\lambda)$ по формулам (11), (12), (13). Из условия теоремы следует, что $q_{lX}(\lambda)$ и $q_{lY}(\lambda)$, а значит (в виду (7_1)) $c(\lambda)$ и $d(\lambda)$ — полиномиальные. Так как $z_l(\lambda)$ позитивная и не имеет мнимых полюсов, то $p_{lX}(\lambda) = q_{lX}(\lambda)z_l(\lambda)$ и $p_{lY}(\lambda) = z_l(\lambda)q_{lY}(\lambda)$ регулярны при $Re\,\lambda > 0$. Из (18) следуют равенства

$$p_{lX}^*(-\bar{\lambda}) = q_{lX}^{-1}(\lambda)\,[2\cdot I - p_{lX}(\lambda)\,q_{lX}^*(-\bar{\lambda})],$$

$$p_{lY}^*(-\bar{\lambda}) = [2\cdot I - q_{lY}^*(-\bar{\lambda})\,p_{lY}(\lambda)]\,q_{lY}^{-1}(\lambda),$$

и так как $q_{lX}^{-1}(\lambda)$ и $q_{lY}^{-1}(\lambda)$ регулярны при $Re(\lambda) > 0$, то $p_{lX}^*(-\bar{\lambda})$, $p_{lY}^*(-\bar{\lambda})$ также регулярны, а значит $p_{lX}(\lambda)$, $p_{lY}(\lambda)$ регулярны в полуплоскости $Re\,\lambda < 0$. Таким образом, $p_{lX}(\lambda)$ и $p_{lY}(\lambda)$, а в виду (7_2) $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ — полиномиальные.

Остановимся теперь на одном простом достаточном условии существования полиномиальной D-реализации.

Теорема 5. *Пусть* $\dfrac{z(\lambda) + z^*(-\bar{\lambda})}{2} = \begin{pmatrix} M(\lambda) & K(\lambda) \\ K^*(-\bar{\lambda}) & S(\lambda) \end{pmatrix}$, *где* $M(\lambda)$ *— невырожденный блок порядка* m.

Если $z(\lambda)$ *не имеет мнимых полюсов, а* $M^{-1}(\lambda)K(\lambda)$ *и* $M^{-1}(\lambda)$ *— полиномиальные, то полиномиальная* D*-реализация* $z(\lambda)$ *существует.*

Пусть $X_{11}(\lambda)$ и $Y_{11}(\lambda)$ — экстремальные решения факторизационных задач

$$M(\lambda) = X_{11}(\lambda)\,X_{11}^*(-\bar{\lambda}),\quad M(\lambda) = Y_{11}^*(-\bar{\lambda})\,Y_{11}(\lambda).$$

Положим

$$X_{21}(\lambda) = K^*(-\bar{\lambda})\,M^{-1*}(-\bar{\lambda})\,X_{11}(\lambda),\quad Y_{12}(\lambda) = Y_{11}(\lambda)\,M^{-1}(\lambda)\,K(\lambda),$$

$$X(\lambda) = \begin{bmatrix} X_{11}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) \end{bmatrix} \text{ и } Y(\lambda) = [\,Y_{11}(\lambda)\;\; Y_{12}(\lambda)\,]$$

регулярны и имеют полный ранг в каждой точке правой полуплоскости. Так как $S(\lambda) - K^*(-\bar{\lambda})\,M^{-1}(\lambda)\,K(\lambda) = 0$, то имеют место равенства (4_X) и (4_Y). Таким образом, $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ — экстремальная пара решений факторизационных задач (4_X), (4_Y). Этой паре отвечает реализующий набор $c_{22}(\lambda)=0$, $h_X(\lambda) = h_Y(\lambda) = I$ такой, что

$$c_{12}(\lambda)=0,\ q_X(\lambda)=\begin{pmatrix} X_{11}^{-1}(\lambda) & 0 \\ -K^*(-\bar{\lambda})\,M^{-1*}(-\bar{\lambda}) & I\end{pmatrix},$$

$$q_Y(\lambda)=\begin{pmatrix} Y_{11}^{-1}(\lambda) & -M^{-1}(\lambda)\,K(\lambda) \\ 0 & I\end{pmatrix},\ z_1(\lambda) = z(\lambda)+I-\overset{*}{R}.$$

Так как $X_{11}(\lambda)$ и $Y_{11}(\lambda)$ регулярны и не вырождаются в правой полуплоскости, а $M^{-1}(\lambda)$—полиномиальная, то

$X_{11}^{-1}(\lambda)$, $Y_{11}^{-1}(\lambda)$, $X_{11}^{-1}(-\lambda) = \overset{*}{X}_{11}(\bar{\lambda})\,M^{-1*}(\bar{\lambda})$, $Y_{11}^{-1}(-\lambda) = M^{-1*}(\bar{\lambda})\,\overset{*}{Y}_{11}(\bar{\lambda})$

при $Re\,\lambda \geqslant 0$ не имеют полюсов, а значит $X_{11}^{-1}(\lambda)$, $Y_{11}^{-1}(\lambda)$, а с ними и $q_X(\lambda)$, $q_Y(\lambda)$ — полиномиальные (условие I). Условие II очевидно.

Примечание. Если $M^{-1}(\lambda)\,K(\lambda)$—полиномиальная, а $M^{-1}(\lambda)$ — не полиномиальная матрица, то полиномиальная D-реализация невозможна.

§ 3. D-реализации матриц-функций класса P_{clr}

В приложениях, в частности в теории цепей ([2]), особый интерес представляют позитивные матрицы-функции $z(\lambda)$ класса P_{clr}, т. е. удовлетворяющие условиям вещественности ($\bar{z}(\bar{\lambda}) = z(\lambda)$) и симметричности ($z'(\lambda)=z(\lambda)$). В этом случае представление (1) называют D-реализацией, если $A(\lambda)$—реактивная матрица-функция класса $\mathfrak{M}_{clr}$, т. е. кроме (2_1) и (2_2) обладает свойствами

$$\bar{A}(\bar{\lambda}) = A(\lambda) \quad \text{(вещественность)}, \tag{2_3}$$

$$A'(\lambda)\,jJA(\lambda) = jJ \quad \text{(симплектичность)}. \tag{2_4}$$

Из (2_2)—(2_4) следует равенство $A(-\lambda) = jA(\lambda)\,j$, поэтому $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$—четные, а $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$— нечетные матрицы-функции. Отсюда, в частности, следует, что $\overset{*}{q}_X(\bar{\lambda}) = q_Y(\lambda) = q(\lambda)$— вещественная и $Y(\lambda) = [I_m\ 0]\,q^{-1}(\lambda)$—вещественное допустимое решение факторизационной задачи

$$\frac{z(\lambda)+z(-\lambda)}{2} = Y'(-\lambda)\,Y(\lambda) \tag{20}$$

(при этом $r_{11}(\lambda) = Y_{11}(\lambda)\,Y_{11}^{-1}(-\lambda)$).

Справедлива следующая

Теорема 2'. *Пусть* $z(\lambda) \in P_{clr}$, $\operatorname{rang}[z(\lambda)+z(-\lambda)] = m$, $Y(\lambda) = [Y_{11}(\lambda)\ \ Y_{12}(\lambda)]$ — *произвольное вещественное допустимое решение факторизационной задачи* (20). *Каждая матрица коэффициентов* $A(\lambda)$ *D-реализации* $z(\lambda)$, *соответствующая этому решению, представима в виде*

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \frac{p(\lambda)+p(-\lambda)}{2} + a(\lambda)(I-R)\frac{p(\lambda)-p(-\lambda)}{2} \\ \frac{q(\lambda)-q(-\lambda)}{2} + c(\lambda)(I-R)\frac{q(\lambda)+q(-\lambda)}{2} \end{pmatrix},$$

где

$$p(\lambda)=z(\lambda)\,q(\lambda),\quad q(\lambda)=\begin{pmatrix} Y_{11}(\lambda) & Y_{12}(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I & 0 \\ \beta(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$c(\lambda)(I-R)=\begin{pmatrix} 0 & c_{12}(\lambda) \\ 0 & c_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$c_{12}(\lambda) = -Y_{11}^{-1}(\lambda)\,Y_{12}(\lambda)\,c_{22}(\lambda) + \frac{Y_{11}^{-1}(-\lambda)\beta'(\lambda) - Y_{11}^{-1}(\lambda)\beta'(-\lambda)}{2}\,\delta'^{-1}(\lambda),$$

$$a(\lambda)(I-R) = q'^{-1}(\lambda)(I-R) + z(\lambda)\,c(\lambda)(I-R),$$

при этом выполнены следующие (необходимые и достаточные) условия:

1′) *Все матрицы вещественны*; $\delta(-\lambda)=\delta(\lambda)$; $c_{22}(-\lambda) = -c_{22}(\lambda)$;

2′) *Матрица* $c_{22}(\lambda)\,\delta'(\lambda) + \frac{\beta(\lambda)\,\beta'(-\lambda)}{2}$ — *симметрическая*;

3′) $q_1^{-1}(\lambda) = [q(\lambda) + c(\lambda)(I-R)]^{-1}$ и $r_1(\lambda) = q_1^{-1}(\lambda)\,q_1(-\lambda)$ *регулярны в полуплоскости* $Re\,\lambda>0$;

4′) $z(\lambda) + q'^{-1}(\lambda)(I-R)\,q_1^{-1}(\lambda) = z_1(\lambda) \in \mathbf{P}_{rl_r}$.

На соответствующей модификации теоремы 4 мы не останавливаемся, так как она очевидна.

Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Поступила 15.VI.1976

Է. Յա. ՄԵԼԱՄՈՒԴ. Ըստ Դարլինգտոնի դրական մատրից-ֆունկցիաների իրագործումը։ Բազմանդամային իրագործումը վերասերման դեպքում (*ամփոփում*)

Հոդվածում տրվում է ըստ Դարլինգտոնի ռացիոնալ $z(\lambda)$ *մատրից-ֆունկցիայի բոլոր իրագործումների նկարագրությունը* $\det[z(\lambda) + z^*(-\bar{\lambda})] \equiv 0$ *դեպքում։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են բազմանդամային իրագործման գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ ստանալու համար։*

E. Y. MELAMUD. *Realization of positive matrix-functions after Darlington. Polynomial realization in case of degeneration* (summary)

The description of all rational positive matrix-function realizations after Darlington is given under the condition that

$$\det[z(\lambda) + z^*(-\bar{\lambda})] \equiv 0.$$

The results are used to obtain necessary and sufficient conditions for existence of polynomial realization.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Я. Меламуд*. Об одном обобщении теоремы Дарлингтона. Изв. АН Арм.ССР, сер. «Математика», VII, № 3, 1972, 183—195.
2. *А. В. Ефимов, В. П. Потапов*. J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей, УМН, XXVIII, вып. 1 (169), 1973, 65—130.
3. *S. Darlington*. Synthesis of Reactance 4-Poles, J Math. and Phys., 18, 1939 257—353.
4. *Д. З. Аров*. Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости. Сибирский матем. журнал, XVI, № 3, 1975, 440—463.
5. *W. Cauer*. Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Berlin, 1954.
6. *Ю. А. Розанов*. Стационарные случайные процессы, Ф.—М., 1963, 63—66.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

Л. А. СЕХПОСЯН

РАДИАЛЬНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ B_ω И Π_ω БЛЯШКЕ–ДЖРБАШЯНА

Введение

Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leq|z_{k+1}|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, пронумерованных в порядке неубывания их модулей.

Как известно, если

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<+\infty, \tag{1}$$

то бесконечное произведение Бляшке

$$B(z;\, z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k\cdot z}\cdot\frac{|z_k|}{z_k} \tag{2}$$

сходится в круге $|z|<1$ и представляет там аналитическую функцию, обращающуюся в нуль на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Известно [1], что произведение Бляшке имеет радиальный предел

$$B(e^{i\theta};\, z_k)=\lim_{r\to 1-0}B(re^{i\theta};\, z_k),$$

если в точке $e^{i\theta}$ удовлетворяется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-|z_k|}{|e^{i\theta}-z_k|}<+\infty. \tag{3}$$

М. М. Джрбашяном [2], при некоторых условиях на функцию $\omega(x)$, построена функция

$$B_\omega(z)\equiv B_\omega(z;\, z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\omega(z;\, z_k)}, \tag{4}$$

где

$$W_\omega(z;\,\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\cdot x^{k-1}\,dx-\bar{\zeta}^{k}\cdot\int_{|\zeta|}^{1}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\cdot\frac{z^k}{\Delta_k} \tag{5}$$

и

$$\Delta_0 = 1, \ \Delta_k = k \int\limits_0^1 \omega(x)\, x^{k-1}\, dx \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

которая является естественным обобщением как произведения Бляшке, так и введенного им же произведения $B_\alpha(z; z_k)$ и совпадает с ними в частных случаях $\omega(x) = 1$ и $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ соответственно.

Доказано, что для того чтобы произведение $B_\omega(z; z_k)$ сходилось и определяло аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию, обращающуюся в нуль на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{|z_k|}^1 \omega(x)\, dx < +\infty, \tag{6}$$

притом $\omega(x)$ — функция из определенного класса, который введем позже.

Доказано также, что если при некоторой функции $\omega(x)$ последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ удовлетворяет условию (6), то тогда предел

$$B_\omega(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1-0} B_\omega(re^{i\theta})$$

существует и конечен для всех $\theta \in [0; 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества $E \subset [0, 2\pi]$, некоторая емкость которого, ассоциированная с функцией $\omega(x)$, равна нулю.

В дальнейшем в работе [4] введена функция

$$\Pi_\omega(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \widetilde{A}_\omega(z; z_k), \tag{7}$$

где

$$\widetilde{A}_\omega(z; z_k) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \cdot e^{-\widetilde{U}_\omega(z; z_k)} \tag{8}$$

и

$$\widetilde{U}_\omega(z; z_k) = \int\limits_{|z_k|^2}^1 \frac{\omega(x)}{x}\, dx -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_k}\right)^k \cdot \frac{1}{\Delta_k} \cdot \int\limits_0^{|z_k|^2} \omega(x)\, x^{k-1}\, dx, \tag{9}$$

которая в частном случае $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ совпадает с произведением Π_α, введенным ранее М. М. Джрбашяном [5].

Говорят, что функция, голоморфная в открытом единичном круге D имеет конечное сегментное изменение в точке $e^{i\theta}$, если посредством этой функции любой сегмент, соединяющий $e^{i\theta}$ с точкой, лежащей в D, отображается на спрямляемую кривую. Если радиус с концом в $e^{i\theta}$ отображается на спрямляемую кривую, то говорят, что функция имеет конечное радиальное изменение в точке $e^{i\theta}$. Ясно, что в данной точке из конечности радиального изменения вытекает существование конечного радиального предела для данной функции в этой точке.

В работе [7] Рудиным было доказано, что если последовательность удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)\cdot\ln\frac{1}{1-|z_k|}<+\infty,$$

то произведение $B(z;\, z_k)$ имеет конечное радиальное изменение почти всюду на $[0;\, 2\pi]$.

В настоящей статье рассматривается вопрос о радиальном изменении произведений B_ω и Π_ω в данной точке.

Доказываются также теоремы о радиальном изменении произведений B_ω и Π_ω на единичной окружности.

Автор выражает искреннюю благодарность В. С. Захаряну за постановку задачи и руководство.

§ 1. Вспомогательные результаты

Ниже мы приведем важнейшие положения и результаты, на которые будем опираться и ссылаться в процессе изложения данной статьи.

Обозначим через Ω множество функций $\omega(r)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(r)$ положительна и непрерывна на $[0;\, 1)$;

2) $\omega(0)=1,\ \int\limits_0^1 \omega(r)\, dr<+\infty$;

3) в некоторой окрестности $0\leqslant r<\delta<1$ точки 0 выполняется условие

$$|\omega(r)-1|\leqslant C(\delta)\cdot r.$$

В случае, когда функция $\omega(x)\in\Omega$ не убывает на $[0;\, 1)$, такие функции отнесем к классу $\Omega_0\subset\Omega$.

Пусть имеем

$$C(z;\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k};\quad S(z;\,\omega)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}, \tag{10}$$

где

$$\Delta_0 = 1;\ \Delta_k = k \cdot \int\limits_0^1 \omega(x)\, x^{k-1}\, dx \quad (k=1,\ 2, \cdots). \tag{11}$$

Эти функции связаны между собой соотношением

$$S(z;\ \omega) = 2C(z;\ \omega) - 1. \tag{12}$$

Лемма. *При* $\omega(x) \in \Omega$ *имеем*

$$|B_\omega(z;\ z_m)| \leqslant |B_1(z;\ z_m)| \leqslant 1 \tag{13}$$

и

$$|\Pi_\omega(z;\ z_m)| \leqslant |\Pi_1(z;\ z_m)| \leqslant 1. \tag{14}$$

Доказательство. Неравенство (13) следует из представления ([14], стр. 353)

$$B_\omega(z;\ z_k) = B_1(z;\ z_k) \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z;\ \omega)\, d\mu(\theta)\right\} \ (|z| < 1),$$

где $\mu(\theta)$ — некоторая невозрастающая ограниченная функция на $[0;\ 2\pi]$, а неравенство (14)—из следующего представления ([4], стр. 357):

$$\Pi_\omega(z;\ z_k) = C_0 \cdot B_1(z;\ z_k) \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2} S(e^{-i\theta} z;\ \omega)\, d\psi(\theta)\right\},$$

где

$$C_0 = \sqrt{\Pi_\omega(0;\ z_k)},\ |z| < 1,$$

а $\psi(\theta)$ — неубывающая ограниченная функция на $[0;\ 2\pi]$.

Лемма 1. *Пусть* $\omega(x) \in \Omega_0$, *тогда для любых значений* $|z| < 1$, $|\zeta| < 1$ *имеем*

$$\mathrm{Re}\,\{W_\omega(z;\ \zeta) - W_1(z;\ \zeta)\} \geqslant 0 \tag{15}$$

и

$$\mathrm{Re}\,\{\widetilde{U}_\omega(z;\ \zeta) - \widetilde{U}_1(z;\ \zeta)\} \geqslant 0. \tag{16}$$

Доказательство. Заметим, что (15) следует из неравенства (13), поскольку имеем также, что

$$B_\omega(re^{i\theta}) = B_1(re^{i\theta}) \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} [W_\omega(re^{i\theta};\ z_k) - W_1(re^{i\theta};\ z_k)\right\},$$

а для доказательства оценки (16) заметим ([4], стр. 355), что

$$\mathrm{Re}\,\{\widetilde{U}_1(z;\ \zeta) - \widetilde{U}_\omega(z;\ \zeta)\} + \frac{1}{2}\widetilde{U}_\omega(0;\ \zeta) - \frac{1}{2}\widetilde{U}_1(0;\ \zeta) \leqslant 0.$$

Отсюда видно, что если

$$\frac{1}{2}\widetilde{U}_1(0;\ \zeta) - \frac{1}{2}\widetilde{U}_\omega(0;\ \zeta) \leqslant 0, \tag{16'}$$

то верно неравенство (16).

Имея ввиду (9), получим

$$\widetilde{U}_{\omega}(0;\zeta)=\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

а

$$\widetilde{U}_1(z;\zeta)=\log\frac{1-z\overline{\zeta}}{|\zeta|^2},$$

откуда

$$\widetilde{U}_1(0;\zeta)=\log\frac{1}{|\zeta|^2}\cdot$$

Поскольку $\omega(x)\geqslant 1$ при $\omega(x)\in\Omega_0$, имеем

$$\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\geqslant\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{dx}{x}=\log\frac{1}{|\zeta|^2},$$

а это равносильно тому, что

$$\widetilde{U}_1(0;\zeta)\leqslant\widetilde{U}_{\omega}(0;\zeta),$$

откуда вытекает справедливость (16′). Следовательно, (16) также верно.

Заметим, что для произвольной функции $\omega(x)\in\Omega_0$ имеет место оценка [8]:

$$\frac{1-|z|}{|1-z|}\leqslant A_0\cdot\left\{\int_{|z|}^{1}\omega(x)\,dx\right\}\cdot|C(z;\omega)|\quad(|z|<1),\tag{17}$$

где постоянная $A_0\,(0<A_0<+\infty)$ не зависит от z.

Следующая оценка также справедлива [9]:

$$\int_0^1|S'(re^{i\varphi};\omega)|\,dr\leqslant 16\,(1+2\,|S(e^{i\varphi};\omega)|),\tag{18}$$

где $0<|\varphi|\leqslant\pi$.

Имеем также [8]:

$$|S(rz;\omega)|<5\,\{1+|S(z;\omega)|\}\quad(0\leqslant r\leqslant 1).\tag{19}$$

При условии $0<|\zeta|<1$ и $\dfrac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}<\dfrac{1}{4}$ имеет место оценка [8]:

$$|W_{\omega}(r;\zeta)-W_1(r;\zeta)|\leqslant 54\,|\zeta|^{-2}\cdot\left\{1+|S(\zeta;\omega)|\cdot\right\}\int_{|\zeta|}^{1}\omega(x)\,dx=$$

$$=108\,|\zeta|^{-2}\,|C(\zeta;\omega)|\int_{|\zeta|}^{1}\omega(x)\,dx.\tag{20}$$

Лемма 2. *Пусть* $\omega(x) \in \Omega_0$, *тогда имеет место оценка*

$$|\widetilde{U}_\omega(r;\zeta) - \widetilde{U}_1(r;\zeta)| \leqslant C|\zeta|^{-2} \cdot |C(\zeta;\omega)| \int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\,dx. \tag{21}$$

Доказательство. Имея ввиду (9), получим

$$\widetilde{U}_\omega(r;\zeta) - \widetilde{U}_1(r;\zeta) = \int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k} - \frac{(\zeta)^{-2k}}{\Delta_k} \cdot \int\limits_{0}^{|\zeta|^2} \omega(x)\,x^{k-1}\,dx\right\}(r\zeta)^k. \tag{22}$$

Имеем

$$\int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx < \int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\,dx < |\zeta|^{-2}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\,dx. \tag{23}$$

В работе [8] доказано, что

$$|j_2(r;\zeta)| = \left| -\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k} - \frac{|\zeta|^{-2k}}{\Delta_k}\int\limits_{0}^{|\zeta|^2} \omega(x)\,x^{k-1}\,dx\right\} \cdot (r\bar{\zeta})^k \right| \leqslant$$

$$\leqslant 3\,\{1 + |S(\zeta;\omega)|\} \cdot \int\limits_{0}^{1} \frac{\omega(x) - \omega(|\zeta|^2 x)}{x}\,dx. \tag{24}$$

Поскольку $\omega(x) \in \Omega_0$ и $0 \leqslant |\zeta| \leqslant x < 1$, то

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{\omega(x) - \omega(|\zeta|^2 x)}{x}\,dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx - \int\limits_{0}^{1} \frac{\omega(|\zeta|^2 x)-1}{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx < |\zeta|^{-2}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\,dx. \tag{25}$$

Итак окончательно получаем

$$|j_2(r;\zeta)| \leqslant 6\,|\zeta|^{-2}\,|C(\zeta;\omega)| \int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\,dx. \tag{26}$$

Имеем

$$|\widetilde{U}_\omega(r;\zeta) - \widetilde{U}_1(r;\zeta)| \leqslant |\zeta|^{-2}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\,dx +$$

$$+ 6\,|\zeta|^{-2}\cdot|C(\zeta;\omega)|\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\omega(x)\,dx <$$

$$< C\cdot|\zeta|^{-2}\,|C(\zeta;\omega)|\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\omega(x)\,dx. \qquad (27)$$

Следуя работе [8], введем определение. Пусть множество $E\subset[0,2\pi]$ измеримо по Борелю. Если существует такое неотрицательное распределение μ, сосредоточенное на E, а именно:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\mu = \int\limits_E d\mu = 1,$$

что интеграл

$$U_\omega(re^{i\varphi}) = \int\limits_0^{2\pi}|C(re^{i(\varphi-\theta)};\omega)|\,d\mu(\theta)$$

остается равномерно ограниченным по $\varphi\in[0;2\pi]$ при $r\to 1-0$, то скажем, что множество E имеет положительную ω-емкость и напишем $C_\omega(E)>0$. В случае отсутствия такой меры, считаем ω-емкость множества E равной нулю: $C_\omega(E)=0$. Известна следующая теорема [8].

Теорема А. Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leq|z_{k+1}|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, а последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}_1^\infty$ $(\delta_k\geq 0)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k<+\infty. \qquad (28)$$

Тогда при любом $\omega(x)\in\Omega_0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C(e^{-i\theta}z_k,\omega)|\,\delta_k,\ \theta\in[0;2\pi] \qquad (29)$$

может расходится лишь на множестве $E\subset[0;2\pi]$ нулевой C_ω-емкости.

§ 2. Радиальные изменения произведений B_ω и Π_ω в данной точке

Теорема 1. *Пусть $\omega(x)\in\Omega_0$, тогда если последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C(e^{-i\theta}z_k;\omega)|\cdot\int\limits_{|z_k|}^{1}\omega(x)\,dx<+\infty;\ \theta\in[0;2\pi]; \qquad (30)$$

то в точке $e^{i\theta}$ произведение $B_\omega(z;z_k)$ имеет конечное радиальное изменение.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$B_\omega(re^{i\theta};\ z_k) = B_\omega(r;\ z_k\, e^{-i\theta}),$$

а также, что можем и в дальнейшем заменить в функции $C(z_k;\ \omega)$ z_k на $z_k\, e^{-i\theta}$, поэтому, не нарушая общности, достаточно доказать теорему только для случая $\theta=0$.

Обозначим

$$B_\omega(z;\ z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} b_\omega(z;\ z_k), \tag{31}$$

где

$$b_\omega(z;\ z_k) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)\cdot e^{-W_\omega(z,\ z_k)}. \tag{32}$$

Тогда вычислив логарифмическую производную произведения, получим

$$B'_\omega(z;\ z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b'_\omega(z;\ z_k)}{b_\omega(z;\ z_k)}\, B_\omega(z;\ z_m),$$

откуда согласно (13) имеем

$$|B'_\omega(z;\ z_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |b'_\omega(z;\ z_k)| \tag{33}$$

для всех z из единичного круга.

Обозначим через $V(f;\ \theta)$ радиальное изменение функции $f(z)$ в точке $e^{i\theta}$, а именно

$$V(f;\ \theta) = \int_0^1 |f'(re^{i\theta})|\, dr.$$

В силу (33)

$$V(B_\omega;\ 0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 |b'_\omega(r;\ z_k)|\, dr. \tag{34}$$

Оценим теперь следующий интеграл:

$$I_\omega = \int_0^1 |b'_\omega(r;\ \zeta)|\, dr.$$

Имеем

$$I_\omega \leqslant \int_0^1 |b'_1(r;\ \zeta)|\, dr + \int_0^1 |b'_\omega(r;\ \zeta) - b'_1(r;\ \zeta)|\, dr = I_\omega^{(1)} + I_\omega^{(2)}. \tag{35}$$

Так как $b_1(r;\ \zeta) = \dfrac{r-\zeta}{1-r\bar{\zeta}}\cdot\dfrac{|\zeta|}{\zeta}$ — дробно-линейная функция, отображающая единичный круг на себя, то ясно, что

$$I_\omega^{(1)} \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot |b_1(0;\zeta) - b_1(1;\zeta)| =$$

$$= \frac{\pi}{2}(1+|\zeta|)\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|} \leqslant \pi\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}. \tag{36}$$

Теперь имея ввиду (17), получим

$$I_\omega^{(1)} \leqslant \pi A_0 \left| \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\,dx \right| \cdot |C(\zeta;\omega)|. \tag{36'}$$

Для оценки $I_\omega^{(2)}$ заметим, что

$$b_\omega(r;\zeta) - b_1(r;\zeta) = b_1(r;\zeta)\cdot[e^{W_1(r;\zeta)-W_\omega(r;\zeta)} - 1].$$

Отсюда получим

$$|b'_\omega(r;\zeta) - b'_1(r;\zeta)| \leqslant |b'_1(r;\zeta)|\cdot[e^{W_1(r;\zeta)-W_\omega(r;\zeta)} - 1] +$$

$$+ |b_1(r;\zeta)|\cdot e^{W_1(r;\zeta)-W_\omega(r;\zeta)} \cdot |W'_1(r;\zeta) - W'_\omega(r;\zeta)|.$$

Поскольку для $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$|1-e^{-z}| \leqslant |z|,$$

то в силу (15)

$$|1-e^{W_1(r;\zeta)-W_\omega(r;\zeta)}| \leqslant |W_\omega(r;\zeta) - W_1(r;\zeta)|. \tag{37}$$

Согласно (13), (15) и (37) будем иметь

$$|b'_\omega(r;\zeta) - b'_1(r;\zeta)| \leqslant |W_\omega(r;\zeta) - W_1(r;\zeta)|\cdot|b'_1(r;\zeta)| +$$

$$+ |W'_\omega(r;\zeta) - W'_1(r;\zeta)|. \tag{38}$$

Таким образом, для $I_\omega^{(2)}$ получаем:

$$I_\omega^{(2)} \leqslant \int_0^1 |W_\omega(r;\zeta) - W_1(r;\zeta)|\cdot|b'_1(r;\zeta)|\,dr +$$

$$+ \int_0^1 |W'_\omega(r;\zeta) - W'_1(r;\zeta)|\,dr = \overline{I}_\omega^{(2)} + \overline{\overline{I}}_\omega^{(2)}. \tag{39}$$

Теперь с учетом (20), (36) и имея ввиду, что $\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|} < 1$, получим оценку для $\overline{I}_\omega^{(2)}$:

$$\overline{I}_\omega^{(2)} \leqslant 108\,\pi\,|\zeta|^{-2}\cdot|C(\zeta;\omega)| \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\,dx,$$

иными словами $\overline{I}_\omega^{(2)}$ удовлетворяет условию (30) теоремы. Теперь оценим $\overline{\overline{I}}_\omega^{(2)}$. Для этого сначала преобразуем следующее выражение:

$$W_\omega(r;\zeta) - W_1(r;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(r\bar{\zeta})^k}{\Delta_k}\cdot\int_{|\zeta|}^{1}\left[\omega(x)-\omega\left(\frac{|\zeta|^2}{x}\right)\right]x^{-k-1}\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}-\frac{|\zeta|^{-2k}}{\Delta_k}\int_0^{|\zeta|^2}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\right\}(r\bar{\zeta})^k=$$

$$=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}dx+\frac{1}{2}\int_{|\zeta|}^{1}\left\{\omega(x)-\omega\left(\frac{|\zeta|^2}{x}\right)\right\}\cdot\left\{S\left(\frac{r\bar{\zeta}}{x};\omega\right)-1\right\}\frac{dx}{x}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\omega(x)-\omega(|\zeta|^2)\,x)}{x}\{S(r\bar{\zeta}x;\omega)-1\}\,dx.$$

Отсюда получим

$$|W'_{\omega}(r;\zeta)-W'_1(r;\zeta)|\leqslant\frac{|\bar{\zeta}|}{2}\cdot\int_{|\zeta|}^{1}\left|S'\left(\frac{r\bar{\zeta}}{x};\omega\right)\right|\cdot\left|\omega(x)-\omega\left(\frac{|\zeta|^2}{x}\right)\right|\times$$

$$\times\frac{dx}{x^2}+\frac{|\bar{\zeta}|}{2}\int_0^1|S'(r\bar{\zeta}x;\omega)|\cdot|\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)|\,dx. \tag{40}$$

Заметим, что при $\omega(x)\in\Omega_0$ и $|\zeta|\leqslant x<1$

$$\omega\left(\frac{|\zeta|^2}{x}\right)\leqslant\omega(x)$$

и поэтому имеет место оценка

$$\left|\omega(x)-\omega\left(\frac{|\zeta|^2}{x}\right)\right|x^{-2}\leqslant 2\,|\zeta|^{-2}\,\omega(x),$$

а также спраеедлива

$$\omega(|\zeta|^2x)\leqslant\omega(x),$$

поэтому

$$|\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)|\leqslant 2\,\omega(x).$$

Из (40) имеем

$$|W'_{\omega}(r;\zeta)-W'_1(r;\zeta)|\leqslant|\zeta|^{-1}\int_{|\zeta|}^{1}\left|S'\left(\frac{r\bar{\zeta}}{x};\omega\right)\right|\omega(x)\,dx+$$

$$+|\zeta|\cdot\int_0^1|S'(r\bar{\zeta}x,\omega)|\,\omega(x)\,dx.$$

Итак из (39) для $\overline{I}_{\omega}^{(2)}$ получим

$$\widetilde{I}_{\omega}^{(2)} \leqslant |\zeta|^{-1} \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx \int\limits_{0}^{1} \left| S'\left(\frac{r\zeta}{x}; \omega\right)\right| dr +$$

$$+ |\zeta| \int\limits_{0}^{1} \omega(x)\, dx \int\limits_{0}^{1} |S'(r\bar{\zeta} x; \omega)|\, dr. \tag{41}$$

Теперь согласно (18), (19) и учитывая доказанное в работе [8] неравенство

$$\int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x) \left| S\left(\frac{r\zeta}{x}; \omega\right)\right| dx \leqslant 9\, |\zeta|^{-2}\, |S(r\zeta; \omega)| \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx,$$

получаем

$$\widetilde{I}_{\omega}^{(2)} \leqslant |\zeta|^{-1} \int\limits_{|\zeta|}^{1} 16\left(1 + 2\left| S\left(\frac{\zeta}{x}; \omega\right)\right|\right) \omega(x)\, dx +$$

$$+ |\zeta| \cdot \int\limits_{0}^{1} 16\,(1 + 2\,|S(\bar{\zeta}(x; \omega)|)\, \omega(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 16\, |\zeta|^{-1} \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx + 288\, |\zeta|^{-3}\, |S(\bar{\zeta}; \omega)| \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx +$$

$$+ 16\, |\zeta| \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx + 160\, |\zeta|\, [1 + |S(\bar{\zeta}; \omega)|] \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx,$$

откуда

$$\widetilde{I}_{\omega}^{(2)} \leqslant c_1\, |\zeta|^{-3} \{1 + |S(\bar{\zeta}; \omega)|\} \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx +$$

$$+ c_2\, |\zeta|^{-3}\, |S(\bar{\zeta}; \omega)| \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx =$$

$$= 2\, c_1\, |\zeta|^{-3}\, |C(\zeta; \omega)| \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx +$$

$$+ c_2\, |\zeta|^{-3}\, |S(\zeta; \omega)| \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c\, |\zeta|^{-3}\, |C(\zeta; \omega)| \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx.$$

Отсюда видно, что $\widetilde{I}_\omega^{(2)}$ также удовлетворяет условию (30) теоремы. Из неравенства (35), (36'), (39) согласно условию (30) вытекает утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\omega(x) \in \Omega_0$, тогда, если последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leq |z_{k+1}| < 1)$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C(e^{-i\theta} z_k; \omega)| \int_{|z_k|^\theta}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty; \; \theta \in [0; 2\pi], \tag{42}$$

то в точке $e^{i\theta}$ произведение Π_ω имеет конечное радиальное изменение.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, не нарушая общности, мы можем считать, что $\theta = 0$, поскольку

$$\Pi_\omega(re^{i\theta}; z_i) = \Pi_\omega(r; z_k e^{-i\theta}).$$

Вычислим логарифмическую производную произведения $\Pi_\omega(z; z_k)$

$$\Pi_\omega'(z; z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_\omega'(z; z_k)}{\bar{A}_\omega(z; z_k)} \cdot \Pi_\omega(z; z_m).$$

Отсюда, учитывая (14), будем иметь

$$|\Pi_\omega'(z; z_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\bar{A}_\omega'(z; z_k)| \tag{43}$$

для всех z из единичного круга.

Как и при доказательстве теоремы 1 обозначим радиальное изменение произведения Π_ω в точке 0 следующим образом:

$$V(\Pi_\omega; 0) = \int_0^1 |\Pi_\omega'(r; z_k)|\, dr.$$

Отсюда, в силу (43), будем иметь

$$V(\Pi_\omega; 0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 |\widetilde{A}_\omega'(r; z_k)|\, dr. \tag{44}$$

Оценим интеграл

$$K_\omega = \int_0^1 |\bar{A}_\omega'(r; z_k)|\, dr.$$

Очевидно, что

$$K_\omega \leq \int_0^1 |\bar{A}_1(r; \zeta)|\, dr +$$

$$+\int_0^1 |\widetilde{A}_\infty'(r;\zeta)-\widetilde{A}_1'(r;\zeta)|\,dr = K_\infty^{(1)}+K_\infty^{(2)}. \tag{45}$$

Поскольку

$$\Pi_1(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}|z_k|\,B(z;z_k)=c\cdot B(z;z_k),$$

то

$$K_\infty^{(1)}\leqslant\frac{c\pi}{2}\,|b_1(0;\zeta)-b_1(1;\zeta)|<$$

$$\leqslant c\pi A_0\cdot|C(\zeta;\omega)|\int_{[\zeta]}^{1}\omega(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c\,\pi A_0\,|C(\zeta;\omega)|\int_{|\zeta|^*}^{1}\omega(x)\,dx. \tag{46}$$

Для оценки $K_\infty^{(2)}$ заметим, что

$$\widetilde{A}_\infty(r;\zeta)-\widetilde{A}_1(r;\zeta)=\widetilde{A}_1(r;\zeta)\cdot[e^{\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)}-1].$$

Следовательно

$$\widetilde{A}_\infty'(r;\zeta)-\widetilde{A}_1'(r;\zeta)=A_1'(r;\zeta)\cdot[e^{\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)}-1]+$$

$$+\widetilde{A}_1(r;\zeta)\,e^{\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)}\,[\widetilde{U}_1'(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty'(r;\zeta)]. \tag{47}$$

Аналогичным образом, из (16) получим

$$|1-e^{\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)}|\leqslant|\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)-\widetilde{U}_1(r;\zeta)|. \tag{48}$$

Теперь согласно (14), (16), (48)

$$|\widetilde{A}_\infty'(r;\zeta)-\widetilde{A}_1'(r;\zeta)|\leqslant|\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)|\cdot|\widetilde{A}_1'(r;\zeta)|+$$

$$+|\widetilde{U}_\infty'(r;\zeta)-\widetilde{U}_1'(r;\zeta)|. \tag{49}$$

Итак для $K_\infty^{(2)}$ имеем

$$K_\infty^{(2)}\leqslant\int_0^1|\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)|\,|\widetilde{A}_1'(r;\zeta)|\,dr+$$

$$+\int_0^1|\widetilde{U}_\infty'(r;\zeta)-\widetilde{U}_1'(r;\zeta)|\,dr=\bar{K}_\infty^{(2)}+\bar{K}_\infty^{(2)}. \tag{50}$$

В силу (21) и (46) для первого слагаемого получим оценку

$$\widetilde{K}_{\omega}^{(2)} \leqslant c\,|\zeta|^{-2}\,|C(\zeta;\omega)|\cdot\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\omega(x)\,dx. \tag{51}$$

Теперь оценим второе слагаемое. Из (9) следует, что

$$\widetilde{U}_{\omega}(r;\zeta)-\widetilde{U}_1(r;\zeta) = \int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta_k}\left\{\int\limits_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx-\int\limits_0^1\omega(|\zeta|^2x)\,x^{k-1}\,dx\right\}\cdot(r\zeta)^k.$$

Отсюда в силу (10) имеем

$$\widetilde{U}_{\omega}(r;\zeta)-\widetilde{U}_1(r;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\omega(x)-\omega(|\zeta|^2)\,x)}{x}\,\{S(r\zeta x;\omega)-1\}\,dx. \tag{52}$$

Вычислив производную, получим

$$|\widetilde{U}_{\omega}'(r;\zeta)-\widetilde{U}_1'(r;\zeta)|=\frac{|\zeta|}{2}\cdot\int\limits_0^1[\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)]\,|S'(r\zeta x;\omega)|\,dx. \tag{53}$$

Итак нам нужно оценить следующий интеграл:

$$\widetilde{K}_{\omega}^{(2)}=\frac{|\zeta|}{2}\int\limits_0^1[\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)]\,dx\int\limits_0^1|S'(r\zeta x;\omega)|\,dr. \tag{54}$$

Из (18) и (19) имеем

$$\widetilde{K}_{\omega}^{(2)}\leqslant 8\,|\zeta|\int\limits_0^1[\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)]\,dx+$$

$$+\,80\,|\zeta|\,\{1+|S(\zeta;\omega)|\}\int\limits_0^1[\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)]\,dx. \tag{55}$$

При этом

$$\int\limits_0^1[\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)]\,dx=\int\limits_0^1[\omega(x)-1]\,dx\,-$$

$$-\int_0^1 [\omega(|\zeta|^2 x)-1]\,dx=\int_{|\zeta|^2}^1[\omega(x)-1]\,dx<\int_{|\zeta|^2}^1\omega(x)\,dx, \tag{56}$$

откуда в силу (56), из (55) будем иметь

$$\bar{K}_\omega^{(2)}\leqslant 8\,|\zeta|\int_{|\zeta|^2}^1\omega(x)\,dx+160\,|\zeta|\,|C(\zeta;\,\omega)|\int_{|\zeta|^2}^1\omega(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c\cdot|\zeta|\cdot|C(\zeta;\,\omega)|\int_{|\zeta|^2}^1\omega(x)\,dx. \tag{57}$$

Из неравенств (45,) (46), (50), (51) и (57), согласно условию (42), следует справедливость теоремы.

§ 3. Радиальные изменения произведений B_ω и Π_ω на единичной окружности

Теорема 3. *Пусть $\omega(x)\in\Omega_0$, тогда если последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^\infty\int_{|z_k|}^1\omega(x)\,dx<+\infty \tag{58}$$

или

$$\sum_{k=1}^\infty\int_{|z_k|^2}^1\omega(x)\,dx<+\infty, \tag{59}$$

то произведения B_ω и Π_ω при условиях (58) *и* (59) *всюду на множестве* $[0;\,2\pi]$ *имеют конечные радиальные изменения, за исключением, быть может, множества $E\subset[0,2\pi]$, для которого $C_\omega^*(E)=0$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теоремы А.

Действительно, положив

$$\delta_k=\int_{|z_k|}^1\omega(x)\,dx$$

или

$$\delta_k=\int_{|z_k|^2}^1\omega(x)\,dx\quad(k=1,\,2,\,\cdots),$$

можем утверждать, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C(e^{-i\theta} z_k;\ \omega)| \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C(e^{-i\theta} z_k;\ \omega)| \int_{|z_k|^2}^{1} \omega(x)\, dx$$

соответственно при условии (58) и (59) могут расходиться на множестве $E \subset [0;\ 2\pi]$, для которого $C_\omega(E)=0$, а это и означает, что на отрезке $[0;\ 2\pi]$, за исключением множества E, выполняются условия теорем 1 и 2.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 26.I.1978

Լ. Ա. ՍԵԽՊՈՍՅԱՆ. Բլյաշկե-Ջրբաշյանի B_ω և Π_ω արտադրյալների շառավղային փոփոխությունը (ամփոփում)

Հոդվածում քննարկվում է տվյալ կետում B_ω և Π_ω արտադրյալների շառավղային փոփոխության հարցը։

Մասնավորապես ապացուցվում է, որ հետևյալ տիպի պայմանը

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C(e^{-i\theta} z_k;\ \omega)| \int_{|z_k|^2}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty;\ \omega(x) \in \Omega_0$$

բավարար է, որպեսզի B_ω և Π_ω արտադրյալները $e^{i\theta}$ կետում ունենան վերջավոր շառավղային փոփոխություն։ Հոդվածի վերջում ապացուցվում է նաև միավոր շրջանագծի B_ω և Π_ω արտադրյալների շառավղային փոփոխության վերաբերյալ թեորեմ։

L. A. SEGPOSIAN. *Radial variations of B_ω and Π_ω Blaschke—Djrbashian products* (summary)

It is proved in the article, that if a sequence $\{z_k\}_1^{\infty}$ satisfies the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C(e^{-i\theta} z_k;\ \omega)| \int_{|z_k|^2}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty;\ \omega(x) \in \Omega_0$$

then the radial variance of the products B_ω and Π_ω at the point $e^{i\theta}$ are both finite.

It is proved also, that under a certain condition the B_ω and Π_ω products possess finite variance in every point of $[0;\ 2\pi]$, except, may be, for a set whose ω-capacity is equal zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Otto Frostman.* Sur les produits de Blaschke, Kungl. Fysiografiska Sälska pets hund Förhandlingar, 12, 1942, 169—182.
2. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб. 79 (121), 1969, 517—615.

3. В. С. Захарян. Радиальные пределы и радиальные изменения произведения $B_\alpha(z, z_n)$, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», III, № 1, 1968, 38—51.
4. Р. С. Галоян. О мероморфных функциях класса $N\{\omega\}$. Изв. АН Арм.ССР «Математика», VII, № 5, 1972, 334—360.
5. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций. ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945.
6. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. инст. матем. и мех. АН Арм.ССР, 2, 1948, 3—40.
7. W. Rudin. The radial variation of analytic functions, Duke Mathematical journal 22, 1955, 235—242.
8. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 1970, 1262—1339.
9. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», VI, №№ 2—3 1971, 182—194.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

Л. З. ГЕВОРКЯН

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

0°. В работе [1] Н. Судзуки предложил новый метод исследования алгебраической структуры ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, мнимая часть которых компактна. Впоследствии Ф. Джилфетер и Х. Бенке продолжили эти исследования для более широкого класса операторов [2], [3].

В частности, Ф. Джилфетер доказал следующую теорему.

Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве H и $P(z, \bar{z})$ — некоторый некоммутативный полином, для которого $P(A, A^*)$ компактен. Тогда существует единственное семейство центральных проекторов $\{P_i\}_{i=0}^n$ $(n \leqslant \infty)$ таких, что

$$A = A_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} \oplus A_i,$$

где $A_0 = A|_{P_0H}$ удовлетворяет $P(z, \bar{z})$, т. е. $P(A_0, A_0^*)=0$, $A_i = A|_{P_iH}$ — примарные операторы, для которых $P(A_i, A_i^*)$ компактен и не равен нулю и $K = H \ominus P_0H$ сепарабельно.

В последующей работе Бенке [4] содержится существенно более общая теорема, чем сформулированная теорема Джилфетера, однако приведенное им доказательство мало обозримое и „неконструктивное" (см. реферат Судзуки [5]).

Цель настоящей заметки — привести новое доказательство теоремы разложения, близкой к теореме Бенке, а также установить однозначность такого разложения, которое и вовсе не обсуждается в [4]. Попутно мы приводим новое доказательство возможности разложения фактора типа 1 в прямую сумму неприводимых компонент.

1°. Введем несколько обозначений и напомним некоторые факты из теории алгебр фон-Неймана.

Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра фон-Неймана в гильбертовом (вообще говоря, несепарабельном) пространстве H. Обозначим через Z центр алгебры $\mathbf{A}$, т. е. пересечение $\mathbf{A}$ и его коммутанта $\mathbf{A}'$. Пусть P — проектор из $\mathbf{A}'$. Обозначим через $\mathbf{A}|_P$ множество $\{A|_{PH}: A \in \mathbf{A}\}$, которое является алгеброй фон-Неймана в пространстве PH и называется индуцированной алгеброй. Пусть R — проектор из $\mathbf{A}$. Множество $\{A|_{RH}: AR = RA = A\ A \in \mathbf{A}\}$ тоже является алгеброй фон-Неймана, называемой редуцированной алгеброй. Если проектор Q принадлежит центру Z алгебры $\mathbf{A}$, то индуцированная и редуцированная алгебры совпадают.

Центр $\mathbf{A}|_Q \cap \mathbf{A}|_Q'$ алгебры $\mathbf{A}|_Q$ совпадает с множеством $Z_{|Q} = \{A|_{QH} : A \in Z\} = \{A|_{QH} : AQ = QA = A,\ A \in Z\}$ ([6], [7] A 15).

Пусть оператор T принадлежит $\mathbf{A}$. Оператор проектирования на ортогональное дополнение к ядру T называется носителем T, а наименьший проектор из центра Z алгебры $\mathbf{A}$, мажорирующий носитель T, называется центральным носителем T. Для множества операторов $\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$ центральным носителем называется наименьший проектор из центра, мажорирующий носитель каждого оператора из $\mathbf{C}$.

Очевидно, что центральный носитель S множества $\mathbf{C}$ удовлетворяет соотношению

$$TS = ST = T, \ \forall T \in \mathbf{C} \tag{1}$$

и меньше всех проекторов $R \in Z$, удовлетворяющих соотношению (1) ([6], Приложение III, I).

Обозначим через $K_{\mathbf{A}}$ пересечение $\mathbf{A}$ и $K(H)$ ($K(H)$ — идеал компактных операторов в H).

Теорема 1. *Алгебру* $\mathbf{A}$ *можно разложить проекторами* P_0, $\{P_\beta\}$ *из центра* Z *в прямую сумму* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \oplus (\bigoplus_{\beta \in B} \mathbf{A}_\beta)$, *где* $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}|_{P_0}$ — *алгебра фон-Неймана в пространстве* P_0H, *не содержащая нетривиального компактного оператора, а все* $\mathbf{A}_\beta = \mathbf{A}|_{P_\beta}$ — *факторы и содержат нетривиальный компактный оператор в* $P_\beta H$. *Указанное семейство проекторов определяется единственным образом.*

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений в той форме, в какой они будут использованы ниже.

Лемма 1. *Если проектор* Q *принадлежит центру* Z *алгебры* $\mathbf{A}$, *то множества* $K_{\mathbf{A}}|_Q = \{A|_{QH} : A \in K_{\mathbf{A}}\}$ *и* $K_{\mathbf{A}|Q} = \mathbf{A}|_Q \cap K(QH)$ *совпадают.*

Доказательство. Включение $K_{\mathbf{A}|Q} \subset K_{\mathbf{A}|Q}$ очевидно, поскольку сужение компактного оператора компактно. Пусть теперь $B \in K_{\mathbf{A}|Q}$, тогда ясно, что B компактен и представляет собой сужение на QH некоторого A из $\mathbf{A}$. Легко можно проверить, что $A|_{QH} = AQ|_{QH}$, поэтому можно считать, что A удовлетворяет соотношению $AQ = QA = A$ (в противном случае мы рассмотрим AQ).

Очевидно, что $A = I_{QH,\,H} BQ$ ($I_{QH,\,H}$ — оператор вложения QH в H).

Так как B компактен в QH, то $A = I_{QH,\,H} BQ$ будет компактным в H, откуда заключаем, что $B = A|_{QH}$ принадлежит $K_{\mathbf{A}}|_Q$. Итак, $K_{\mathbf{A}|Q} = K_{\mathbf{A}|Q} = K_{\mathbf{A}}|_Q$.

Обозначим через $\mathfrak{M}^P$ множество всех операторов проектирования из некоторого подмножества $\mathfrak{M}$ алгебры $B(H)$.

Лемма 2. *Если проектор* Q *принадлежит* Z, *то множества* $(Z|_Q)^P = \{R|_{QH} : R \in Z\}^P$ *и* $Z^P|_Q = \{S|_{QH} : S \in Z^P\}$ *совпадают.*

Доказательство. Ясно, что $Z^P|_Q \subset (Z|_Q)^P$ (сужение проектора — снова проектор).

Пусть теперь $R \in (Z|_Q)^P$, откуда следует, что существует оператор $M \in Z$ такой, что $M|_{QH} = R$, $MQ = QM = M$. Это значит, что на ортогональном дополнении к QH M равен нулю, откуда следует, что $M \in Z^P$ (продолжение проектора нулем — снова проектор).

Заметим, что сужение алгебры $\mathbf{A}$ на MH, $\mathbf{A}|_M$ будет совпадать с сужением алегбры $\mathbf{A}|_Q$ на RQH.

Лемма 3. *Пусть $Q \in Z^P$. Для того чтобы $\mathbf{A}|_Q$ был фактором, необходимо и достаточно, чтобы Q был минимальным.*

Доказательство. Необходимость. Так как $\mathbf{A}|_Q$ — фактор, то центр $\mathbf{A}|_Q \cap \mathbf{A}'_Q = \{\lambda I_{QH}\}$. С другой стороны, центр алгебры $\mathbf{A}|_Q$ совпадает с Z_Q. Согласно лемме 2 $Z^P|_Q$ будет состоять из двух элементов 0 и I_{QH}. Это значит, что сужение любого элемента S из Z^P равняется или I_{QH}, или 0. Если $S|_{QH} = I_{QH}$, то очевидно, $SQ = QS = Q$, а это означает, что $Q \leqslant S$. Если же $S|_{QH} = 0$, то проекторы S и Q не сравнимы.

Достаточность. Пусть проектор $Q \in Z$ минимален. Из этого следует, что для любого проектора S из Z либо $SQ = QS = Q$, либо $QS = 0$ (если произведение QS не равно нулю, то оно является проектором из Z, очевидным образом не большим, чем Q). Тогда ясно, что $Z^P|_Q = \{0, I_{QH}\}$. Как известно, алгебра фон-Неймана порождается своими проекторами [8]. Поэтому $Z|_Q = \mathbf{A}|_Q \cap \mathbf{A}'_Q$ будет состоять только из скаляров $\{\lambda I_{QH}\}$, т. е. $\mathbf{A}|_Q$ — фактор.

Доказательство теоремы 1. Если $K_{\mathbf{A}} = \{0\}$ (т. е., если алгебра не содержит нетривиального компактного оператора), то доказывать нечего и разложение имеет вид $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ $(P_0 = I_H)$, если же $K_{\mathbf{A}} \neq \{0\}$, то обозначим через H_0 пересечение ядер всех операторов из $K_{\mathbf{A}}$. Так как H_0 — замкнутое подпространство в H, то существует соответствующий ему проектор, который мы обозначим через P_0.

Докажем, что $P_0 \in Z$. Прежде всего заметим, что P_0 принадлежит $\mathbf{A}'$, так как H_0 инвариантно относительно любого оператора A из $\mathbf{A}$. Действительно, если $x \in H_0$, то $Bx = 0$ для любого B из $K_{\mathbf{A}}$, следовательно и $BAx = 0$, так как BA также принадлежит $K_{\mathbf{A}}$. Докажем, что H_0 инвариантно также относительно любого C из $\mathbf{A}'$. Если $x \in H_0$, то $BCx = CBx = 0$, следовательно $P_0 \in \mathbf{A}''$. Так как $\mathbf{A}$ — алгебра фон-Неймана, то $\mathbf{A} = \mathbf{A}''$, поэтому $P_0 \in Z$.

Согласно лемме 1 все компактные операторы из $\mathbf{A}|_{P_0}$ представляют из себя сужение на подпространство P_0H компактных операторов из $\mathbf{A}$. Из определения H_0 непосредственно следует, что $\mathbf{A}|_{P_0} \cap K(P_0H) = \{0\}$.

Пусть E — главная единица множества $K_{\mathbf{A}}$, т. е. проектор $I_H - P_0$, который, по доказанному, принадлежит Z. Легко видеть, что E удовлетворяет соотношению

$$EB = BE = B, \ \forall B \in K_{\mathbf{A}}. \tag{1'}$$

Действительно, так как $P_0B = BP_0 = 0$ для любого B из $K_{\mathbf{A}}$, то (1') получается из определения E.

Докажем, что E мажорируется всеми проекторами из центра Z алгебры **A**, удовлетворяющими соотношению (1′) и, стало быть, является центральным носителем множества $K_{\mathbf{A}}$ [6].

Если $Q \in Z$, то очевидно $QE \leqslant E$, если к тому же $BQ = QB = B$ для любого B из $K_{\mathbf{A}}$, то $QEB = BQE = B$. Предположим теперь, что $QE < E$ и, следовательно, существует $x_0 \in H$ такой, что $QEx_0 = 0$, а $Ex_0 \neq 0$. Тогда ясно, что $Bx_0 = BQEx_0 = 0$ для любого B из $K_{\mathbf{A}}$, следовательно x_0 принадлежит пересечению ядер всех операторов из $K_{\mathbf{A}}$, что противоречит условию $Ex_0 \neq 0$. Итак, $QE = E$, что и означает $E \leqslant Q$.

В работе [2] доказано, в частности, следующее

Предложение. Пусть **C** — алгебра фон-Неймана в гильбертовом пространстве **H** такая, что для множества $\mathbf{C} \cap K(\mathbf{H})$ центральным носителем служит $I_{\mathbf{H}}$. Тогда каждый проектор из центра этой алгебры $Z_{\mathbf{C}}$ мажорирует минимальный проектор из $Z_{\mathbf{C}}$.

Докажем, что для алгебры $\mathbf{A}_E$ условие этого предложения выполняется. Допустим, что R — центральный носитель множества $K_{\mathbf{A}E}$. Это значит, в частности, что R удовлетворяет соотношению $AR = RA = A$ для любого A из $K_{\mathbf{A}E}$, а это эквивалентно тому, что все операторы из $K_{\mathbf{A}E}$ на ортогональном дополнении REH равны нулю, откуда следует, в силу определения E и леммы 1, что $R = I_{EH}$.

Итак, любой проектор из центра $Z|_E$ алгебры $\mathbf{A}|_E$ мажорирует минимальный проектор из $Z|_E$. Согласно лемме 3 сужение алгебры $\mathbf{A}|_E$ на образе минимального проектора будет фактором. Как это уже отмечалось при доказательстве леммы 2, каждому проектору R из $Z|_E$ соответствует проектор $M \in Z$, являющийся продолжением R нулем на ортогональное дополнение к EH, откуда уже следует, что сужение алгебры **A** на MH совпадает с сужением $\mathbf{A}|_E$ на REH. Таким образом, $\mathbf{A}|_M$ — фактор, если R минимален. Кроме того ясно, что $\mathbf{A}_M$ содержит нетривиальный компактный оператор, что непосредственно следует из того, что $M \leqslant E$.

Поступая так же, как, например, в монографии ([8], стр. 286), и привлекая лемму Цорна, мы можем утверждать, что существует такое семейство $\{R_\beta\}$ взаимно-ортогональных минимальных проекторов из $Z|_E$, которые в сумме дают I_{EH}. Обозначим через $\{P_\beta\}$ семейство проекторов, являющихся продолжениями R_β нулем на ортогональном дополнении к EH. Согласно лемме 2 $\{P_\beta\} \subset Z$. Они будут осуществлять разложение $\mathbf{A}_E$ в прямую сумму факторов. Присоединяя сужение $\mathbf{A}_0$ алгебры **A** на P_0H, мы получим искомое разложение

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \oplus (\bigoplus_{\beta \in B} \mathbf{A}_\beta).$$

Докажем теперь единственность этого разложения. Пусть имеется еще одно разложение $\mathbf{A} = \mathbf{A}|_{Q_0} \oplus (\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{A}|_{Q_\gamma})$. Если $\mathbf{A}|_{Q_{\gamma_0}}$ — фактор, то согласно лемме 3, проектор Q_{γ_0}, принадлежащий Z, минимален. Из этого следует, что либо $Q_{\gamma_0} P_\beta = 0$ для любого $\beta \in \mathbf{B}$, либо $Q_{\gamma_0} = P_{\beta_0}$ для некоторого β_0. Первое невозможно, так как $\sum_{\beta\in B} P_\beta + P_0 = I_H$, в силу чего $Q_{\gamma_0} \leqslant P_0$, что противоречит условию

$$\mathbf{A}|_{Q_{\gamma_0}} \cap K(Q_{\gamma_0}H) \neq \{0\}.$$

Далее, так как множества $\{P_\beta\}$ и $\{Q_\gamma\}$ совпадают, то $Q_0 = P_0$.

Как уже доказано, факторы, участвующие в разложении, содержат нетривиальный компактный оператор. Так как алгебра фон-Неймана вместе с каждым оператором содержит и его спектральное разложение [8], то фактор будет содержать конечномерный проектор, откуда следует, что фактор содержит минимальный проектор, т. е. имеет тип 1.

В книге Диксмье [6], [7] A 36 дано описание факторов типа 1. Здесь мы сформулируем и докажем теорему, которая очень близка к результату Диксмье. Доказательство, которое приводится ниже, как нам кажется, более простое. Сначала докажем лемму.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *алгебра фон-Неймана в гильбертовом пространстве* H, P — *проектор из* $\mathbf{A}'$. *Для того чтобы* $\mathbf{A}|_P$ *совпадал с* $B(PH)$, *необходимо и достаточно, чтобы* P *был минимальным.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{A}|_P = B(PH)$. Известно, что $(\mathbf{A}'|_P) = \mathbf{A}|_P$ ([5], [6] A 15). Тогда $\mathbf{A}_P' = \{\lambda I_{PH}\}$, откуда следует, что сужение любого $A \in \mathbf{A}'$ такого, что $AP = PA = A$, на подпространство PH равняется λI_{PH}. Пусть Q — проектор из $\mathbf{A}'$, удовлетворяющий условию $QP = PQ = Q$ (т. е. Q не больше, чем P). Но так как $Q|_{PH} = I_{PH}$, то очевидно, что $Q = P$. Итак, проектор $P \in \mathbf{A}'$ минимален.

Достаточность. Пусть P минимален. Это означает, что не существует ни одного подпространства, инвариантного относительно всех операторов из $\mathbf{A}$ и содержащегося в подпространстве PH. То же самое верно и для сужений операторов из $\mathbf{A}$ на подпространство PH. Таким образом, коммутант $\mathbf{A}_P'$ не содержит нетривиальных проектов, т. е. состоит из скаляров. Так как $\mathbf{A}|_P$ — алгебра фон-Неймана, то $\mathbf{A}|_P = B(PH)$.

Теорема 2. *Если фактор* $\mathbf{A}$ *содержит конечномерный проектор, то его можно разложить проекторами* $\{Q_\alpha\}$ *из коммутанта* $\mathbf{A}'$ *в прямую сумму* $\mathbf{A} = \bigoplus_{\alpha\in S} B(Q_\alpha H)$, *причем сужения любого* A *из* $\mathbf{A}$ *на подпространства* $Q_\alpha H$ *унитарно эквивалентны между собой.*

Доказательство. Если $\mathbf{A} \neq B(H)$, то $\mathbf{A}'$ содержит нетривиальный проектор. Докажем, что любой проектор P из $\mathbf{A}'$ мажорирует некоторый минимальный проектор $Q \in \mathbf{A}'$.

Рассмотрим произвольное линейно упорядоченное множество проекторов $\{P_\gamma\} \subset \mathbf{A}'$, мажорируемых P. Если мы докажем, что это множество обладает нижней гранью, то по лемме Цорна будет существовать минимальный элемент $Q \in \mathbf{A}'$. Очевидно, что нижней гранью множества $\{P_\gamma\}$ будет оператор проектирования R на $\bigcap P_\gamma H$. Ясно, что этот проектор принадлежит $\mathbf{A}'$. Остается доказать, что R не равняется нулю.

Пусть S — конечномерный проектор, принадлежащий $\mathbf{A}$. Для любого γ обозначим через R_γ проектор SP_γ. Очевидно, что R_γ конечномерен.

Известно, что если $\mathbf{A}$ фактор, то из условия $AA'=0$ ($A \in \mathbf{A}$, $A' \in \mathbf{A}'$) следует, что либо $A=0$, либо $A'=0$ ([8], стр. 523, основная лемма). Поэтому $R_\gamma \neq 0$ для любого γ. Поскольку множество $\{P_\gamma\}$ линейно упорядочено, то будет линейно упорядоченным и множество $\{R_\gamma\}$. Среди этого множества не более чем n различных элементов (n — размерность проектора S). Поэтому в множестве $\{R_\gamma\}$ существует наименьший элемент и пересечение $\bigcap R_\gamma H$ не равно нулю. Поэтому не равно нулю и $\bigcap P_\gamma H$. Итак, каждый проектор $P \in \mathbf{A}'$ мажорирует минимальный проектор $Q \in \mathbf{A}'$.

Согласно лемме 4 сужение фактора $\mathbf{A}$ на QH будет совпадать с $B(QH)$.

Как и выше, используя лемму Цорна, можно доказать, что сумма некоторого множества минимальных проекторов $\{Q_\iota\}$ будет совпадать с I_H.

Остается доказать унитарную эквивалентность сужений A_ι оператора $A \in \mathbf{A}$.

Напомним, что проекторы E и F, принадлежащие некоторой алгебре фон-Неймана $\mathbf{C}$, называются эквивалентными относительно $\mathbf{C}$, если существует частично изометричный оператор $U \in \mathbf{C}$ такой, что $UU^* = E$ и $U^*U = F$ (обозначение $E \sim F$). Если существует проектор из $\mathbf{C}$, эквивалентный E и мажорируемый F, то пишут $E \lesssim F$ ([6], [7] A 46).

Известно, что если $\mathbf{C}$ — фактор, то либо $E \lesssim F$, либо $F \lesssim E$ ([6], [7] A 46). Очевидно, что если проекторы E и F, принадлежащие $\mathbf{A}'$ минимальны, то будут эквивалентны друг другу.

Итак, для любой пары ι_1, ι_2 существует частично изометричный оператор $\tilde{U}_{\iota_1\iota_2} \in \mathbf{A}'$, отображающий $Q_{\iota_1}H$ на $Q_{\iota_2}H$. Сужение $U_{\iota_1\iota_2}$ оператора $\tilde{U}_{\iota_1\iota_2}$ на $Q_{\iota_1}H$ и будет обладать всеми нужными свойствами. Равенство $A_{\iota_2} = U_{\iota_1\iota_2} A_{\iota_1} U^*_{\iota_1\iota_2}$ проверяется непосредственно.

Важным частным примером алгебр фон-Неймана являются алгебры фон-Неймана $R(A)$, порожденные одним оператором A.

Из доказанных выше теорем следует, что если $R(A)$ содержит компактный оператор, то A разлагается в прямую сумму оператора A_0, для которого $R(A_0)$ не содержит нетривиального компактного оператора и некоторой совокупности экземпляров одного и того же неприводимого оператора. Первое слагаемое разложения — A_0, когда оператор A удовлетворяет какому-то соотношению (например, если $A - A^*$ компактен, или $AA^* - A^*A$ компактен, или $I - A^*A$ компактен) представляет собой оператор с довольно хорошо исследованными свойствами

(A_0 самосопряжен, соответственно нормален, изометричен). Таким обр... зом, изучение структуры произвольного оператора этих классов, де... ствующих в несепарабельном пространстве сводится к изучению таки... же неприводимых операторов, действующих уже в сепарабельном про... странстве.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 20.IV.197...

Լ. Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ. Ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների որոշ դասի ալգեբրաիկ կազմ... թյունը (*ամփոփում*)

Հոդվածի նպատակն է տալ կոմպակտ օպերատոր պարունակող ֆոն-Նոյմանի ալգեբր... չբերվող բաղադրիչների ուղիղ գումարի վերածման թեորեմայի նոր ապացույցը։

L. Z. GEVORKIAN. *On the algebraic structure of a certain class of non self-adjoint operators* (summary)

The aim of this paper is to give a new proof of the theorem on decompositi... of the von-Neumans algebras containing compact operator, into direct sum of irr... ducible components.

ЛИТЕРАТУРА

1. *N. Suzuki*. The algebraic structure of non self-adjoint operators, Acta Math. Sc... 27, 1966, 173—184.
2. *F. Gilfeather*. On the Suzuki structure theory for non self-adjoint operators, Ac... Math. Sci., 32, 1971, 240—249.
3. *H. Behncke*. Structure of certain nonnormal operators, J. of Math. and Mech., 1... 1968, 103—107.
4. *H. Behncke*. Structure of certain nonnormal operators, II, Ind. Univ. Math. J., 2... 1972, 301—308.
5. *N. Suzuki*. Math. Rev., 47, 1974, 9322.
6. *J. Dixmier*. Les algebres d'operateurs dans L'espace Hilbertien, GV., 1969.
7. *Ж. Диксмье*. C^*—алгебры и их представления, М., 1974.
8. *М. А. Наймарк*. Нормированные кольца, М., 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

Г. У. ОГАНЕСЯН

РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ РАВЕНСТВА СЛОВ ДЛЯ ПОЛУГРУПП С ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ ВИДА $A = BtC$

В настоящей работе доказывается разрешимость проблемы равенства слов в полугруппе П, заданной образующими

$$t,\ a_1,\ a_2, \cdots,\ a_m \tag{1}$$

и определяющим соотношением

$$A = BtC, \tag{2}$$

где слова A, B и C не содержат вхождений буквы t.

В теореме 1, используя подход, предложенный С. И. Адяном в [2], доказывается разрешимость проблемы левой (правой) делимости в полугруппе П в случае несократимого слева (соответственно, справа) соотношения (2). В теореме 2 при помощи введенных в [3] преобразований, определяющих соотношений и теоремы 1, доказывается разрешимость проблемы равенства слов в П.

Теорема 2 есть усиление основного результата работы [4], в которой доказана разрешимость проблемы равенства слов в П при условии $\partial(A) > \max(\partial(B), \partial(C))$.

Теорема 1. *Если соотношение* (2) *несократимо слева (справа), то для полугруппы* П, *заданной образующими* (1) *и определяющим соотношением* (2), *разрешимы проблемы равенства и левой (соответственно, правой) делимости слов.*

В работе [1] (см. стр. 97) была доказана разрешимость проблем равенства, левой и правой делимости в полугруппе, заданной определяющим соотношением вида $A = \Lambda$, где Λ — пустое слово. В силу этого результата и в силу очевидной симметрии для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай, когда слово A непусто и соотношение (2) несократимо слева. В этом случае нам потребуются введенные в [2] понятия левого разложения $R(X, d)$ данного слова X относительно данной буквы d, головки и компонент этого разложения.

Пусть слова A и Bt начинаются, соответственно, с букв a и b алфавита (1). Если разложение $R(X, d)$ существует, то, очевидно, слово X начинается с буквы a или b и d есть, соответственно, b или a. Поэтому вместо записи $R(X, d)$ мы будем в некоторых случаях использовать запись $R(X)$.

Через **A** будем обозначать построенный в [2] алгоритм, устанавливающий левую делимость слова aX или bX на букву b или a, соответственно.

В дальнейшем под делимостью слов будем понимать левую делимость в полугруппе П.

Лемма 1. *Если $R(X, d) = K_1 * K_2 * \cdots * K_s * A * Q$, буква t не входит в слово $K_1 K_2 \cdots K_s$ и хотя бы одна из компонент $K_1, K_2, \cdots, K_s$ есть начало слова B, то X не делится на d.*

Доказательство. Алгоритм **A** за один шаг переводит слово X в слово $X_1 = K_1 K_2 \cdots K_s BtCQ$. Если $R(X_1, d)$ существует, то либо $B = B_1 A B_2$ и $R(X_1, d) = K_1 * K_2 * \cdots K_{s-1} * R(K_s B_1) A * B_2 tCQ$, либо $K_s B = AB_2$ и $R(X_1, d) = K_1 * K_2 * \cdots K_{s-1} * A * B_2 tCQ$. Следовательно, если при некотором $i \leq s$ компонента K_i разложения $R(X_1, d)$ является началом B, то i-ая компонента разложения $R(X_1, d)$ также есть начало B. Кроме того, все компоненты разложения $R(X_1, d)$ не содержат вхождений буквы t. Поэтому алгоритм **A**, начав работу со слова X, либо останавливается на неразложимом слове, либо работает бесконечно, выдавая промежуточные результаты, удовлетворяющие условиям леммы. В силу леммы 3 из работы [2] это означает, что X не делится на d. Лемма 1 доказана.

Через V обозначим множество таких начал A' слова A, что $A'b$ есть начало A. Если $A' \in V$ и

$$R(A'BtC) = A_1 * A_2 * \cdots * A_n * A * E, \tag{3}$$

где все $A_i \in V$ при $i = 1, 2, \cdots n$, то начала A_i назовем предшествующими началу A'.

Через Γ обозначим ориентированный граф с множеством вершин V, ребрами которого являются все упорядоченные пары (A', A''), где вершина A'' предшествует вершине A'.

Вершину A' назовем тупиковой, если не существует разложения $R_0(A'BtC)$.

Через V_1 обозначим подмножество V, состоящее из таких вершин A', что любая (ориентированная) цепь графа Γ, начинающаяся в A', не содержит тупиковых вершин и вершин, принадлежащих циклам графа Γ. Так как множество V конечно, то граф Γ и множество V_1 определены эффективно.

Лемма 2. *Если $A' \in V_1$, то слово $A'BtC$ делится на BtC.*

Доказательство. Через $f(A')$ обозначим число ребер в максимальной цепи графа Γ, начинающейся в вершине A'. Индукцией по параметру $f(A')$ докажем, что $A'BtC$ делится на BtC.

Если $f(A') = 0$, то $A'BtC$ начинается со слова A и потому делится на BtC.

Пусть $f(A') > 0$ и $R(A'BtC)$ имеет вид (3). Так как $f(A_i) < f(A')$ при $i = 1, 2, \cdots n$, то по предположению индукции $A_i BtC = BtC Z_i$ при некоторых Z_i. Тогда $A'BtC = A_1 A_2 \cdots A_n AE = BtC Z_1 Z_2 \cdots Z_n E$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $R(X, d) = K_1 * K_2 * \cdots * K_s * A * Q$ и буква t не входит в слово $K_1 K_2 \cdots K_s$, то X делится на d тогда и только тогда, когда $K_i \in V_1$ при $i = 1, 2, \cdots, s$.*

Доказательство. Если $K_i \in V_1$ при $i = 1, 2, \cdots, s$, то X делится на d в силу леммы 2.

Пусть $K_r \overline{\in} V_1$ и $K_j \in V_1$ при $j = r+1, r+2, \cdots s$. Если K_r есть начало B, то X не делится на d в силу леммы 1. Пусть K_r есть начало A. В силу леммы 2 алгоритм **A** переводит слово X в слово $X_1 = K_1 K_2 \cdots K_r BtCZ$ при некотором Z. Если разложение $R(K_r BtC)$ существует, то оно имеет вид $R(K_r BtC) = D_1 * D_2 * \cdots D_l * A * P$. Тогда

$$R(X_1, d) = K_1 * K_2 * \cdots * K_{r-1} * D_1 * D_2 * \cdots * D_l * A * PZ.$$

Если бы все компоненты $D_1, D_2, \cdots, D_l$ принадлежали V_1, то и K_r принадлежало бы V_1. Следовательно, хотя бы одна из компонент $D_1, D_2, \cdots, D_l$ не принадлежит V_1. Отсюда следует, что если $K_r \overline{\in} V_1$ при некотором r, то алгоритм **A**, начав работу со слова X, либо останавливается на неразложимом слове, либо работает бесконечно, выдавая слова, в разложении которых имеется компонента, не принадлежащая V_1. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если $R(X) = BtC' * K_1 * K_2 * \cdots * K_s * A * Q$ и буква t не входит в слово $K_1 K_2 \cdots K_s$, то разрешима проблема делимости слова X на букву a.*

Доказательство. Если хотя бы одна из компонент K_i при $i = 1, 2, \cdots, s$ не принадлежит V_1, то X не делится на a в силу леммы 3. Пусть $K_i \in V_1$ при $i = 1, 2, \cdots, s$. Тогда в силу леммы 2 алгоритм **A** переводит слово X в слово $X_1 = BtC' BtCZ$ при некотором Z. Если $R(X_1)$ не существует, то X не делится на d. Если $R(X_1)$ существует, то $R(X_1) = BtC'' * D_1 * D_2 * \cdots * D_l * A * Q_1$, $\partial(C'') > \partial(C')$ и буква t не входит в слово $D_1 D_2 \cdots D_l$. Следовательно, повторив приведенные выше рассуждения не более чем $\partial(C) - \partial(C')$ раз, мы выясним делится ли X на a или нет. Лемма 4 доказана.

Через $\sigma_t(X)$ и $\sigma_{tC}(X)$ обозначим число вхождений в слово X буквы t и слова tC, соответственно. Положим по определению $\tau(X) \rightleftharpoons \sigma_t(X) - \sigma_{tC}(X)$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 5. *Пусть один шаг алгоритма **A** имеет вид $X = PKHQ \to PKFQ = X_1$, где K — компонента разложения $R(X)$, H и F — различные определяющие слова соотношения (2). Если KF начинается со слова BtC, то $\tau(X_1) = \tau(X) - 1$. Если KF не начинается со слова BtC, то $\tau(X_1) = \tau(X)$.*

Доказательство теоремы 1. Индукцией по параметру $\tau(X)$ докажем разрешимость проблемы делимости слова X на букву d. Если $R(X, d)$ не существует, то X не делится на d в силу леммы 3 из работы [2]. Пусть $R(X, d) = K_1 * K_2 * \cdots * K_s * H * Q$, где H — головка.

Если $H = BtC$, то сделав не более чем $\sigma_t(X)$ шагов алгоритма **A**, мы либо получим заключительный результат, либо промежуточный результат X_1 с головкой A. При этом в силу леммы 5 $\tau(X_1) \leqslant \tau(X)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $H = A$.

Если $\tau(X) = 0$, то проблема делимости X на d разрешима в силу леммы 3.

Пусть $\tau(X)>0$, $K_j=BtC$ и компоненты $K_{j+1},\cdots,K_s$ не содержат вхождений буквы t. В силу леммы 4 разрешима проблема делимости слова $Y=K_jK_{j+1}\cdots K_sAQ$ на букву a. Если Y не делится на a, то X не делится на d. Пусть $Y=aZ$, тогда алгоритм A переводит слово X в промежуточный результат $X_1=K_1K_2\cdots K_{j-1}aZ$. В силу леммы 5 $\tau(aZ)=\tau(Y)-1$, поэтому $\tau(X_1)\leqslant\tau(X)-1$ и по предположению индукции проблема делимости X_1 на d разрешима. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Разрешима проблема равенства слов в полугруппе* П, *заданной образующими* (1) *и определяющим соотношением* (2).

Для доказательства этой теоремы нам потребуются преобразования φ и ψ_T, введенные в работе [3].

Если соотношение (2) приводимо, то к нему можно применить преобразование φ. При этом в слове $\varphi(BtC)$ найдется буква, которая входит в это слово один раз и не входит в слово $\varphi(A)$. Следовательно, в силу следствия 2 из работы [3], достаточно рассмотреть случай, когда соотношение (2) неприводимо.

В этом случае в силу теоремы 4 из работы [3] проблема равенства слов в П сводится к той же проблеме для полугруппы Π_1, заданной несократимым хотя бы с одной стороны определяющим соотношением вида $\psi_T(A)=\psi_T(BtC)$. Из определения преобразования ψ_T следует, что найдется буква, которая входит в слово $\psi_T(BtC)$ один раз и не входит в слово $\psi_T(A)$. Поэтому в силу теоремы 1 проблема равенства слов в Π_1 разрешима. Теорема 2 доказана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 17.VI.1977

Գ. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Բառերի հավասարության պրոբլեմի լուծելիությունը A=BtC տեսքի որոշիչ հարաբերություն ունեցող կիսախմբերի համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է բառերի հավասարության պրոբլեմի լուծելիությունը A=BtC *տեսքի որոշիչ հարաբերություն ունեցող կիսախմբերի համար, որտեղ t տառը չի հանդիպում* A, B *կամ* C *բառերում։*

G. U. OGANESIAN. *The solvability of the word problem for semigroups with a defining relation of the form* $A=BtC$ (summary)

The paper establishes the solvability of the word problem for semigroups with a defining relation of the form $A=BtC$, where generator t does not occur in words A, B or C.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. И. Адян.* Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, том 85, 1966.
2. *С. И. Адян.* О преобразованиях слов в полугруппе, заданной системой определяющих соотношений, Алгебра и логика, том 15, № 6, 1976.
3. *С. И. Адян, Г. У. Оганесян.* К проблемам равенства и делимости в полугруппах с одним определяющим соотношением, Известия АН СССР, сер. матем. 42, № 2, 1978.
4. *A. Yasuhara.* The solvability of the word problem for certain semigroups, Proc. Amer. Math. Soc., 26, № 4, 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

Б. ЁРИККЕ

О МЕРЕ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МНОГОЧЛЕНА ОТ ОДНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1°. Пусть G — ограниченное подмножество комплексной плоскости $\mathbf{C}$, n — натуральное число, Π — какая-нибудь полунорма в пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$. Нас будет интересовать величина

$$C(G, n, \Pi) = \sup\{\Pi(\{c_k\}_0^n) : \{c_k\}_0^n \in \mathbf{C}^{n+1},$$

$$\sup_{z\in G} \Big|\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\Big| \leqslant 1\}.$$

Эта величина показывает, насколько малым на данном множестве G может быть многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$ с большими (в смысле нормы) коэффициентами; её естественно называть „мерой обусловленности многочленов" (см. в связи с этим термином статью [1]). Таким образом, в центре нашего внимания будет находиться своеобразное явление интерференции взаимного поглощения больших по модулю слагаемых многочлена.

В этой работе в качестве G будет выбрана область

$$G_{R,\sigma} \overset{\text{def}}{=} \{\zeta\in\mathbf{C} : |\zeta| < R\} \setminus \{\zeta\in\mathbf{C} : 1 \leqslant |\zeta| < R, |\arg\zeta| \leqslant \sigma\},$$

где $R > 1$, $\sigma \in (0, \pi)$. Целесообразность рассмотрения именно такого множества G обсуждается в статье [2]. Эта область интересна тем, что она содержит весь единичный круг D и некоторые точки, не принадлежащие D, но не содержит D строго внутри себя — в противном случае малость многочлена на G могла бы быть обеспечена лишь за счет малости его коэффициентов.

В качестве полунормы Π мы возьмем функцию $\Pi_d^{(n)}$, определяемую последовательностью $d = \{d_k\}_0^\infty$ неотрицательных чисел:

$$\Pi_d^{(n)}(\{c_k\}_0^n) = \sum_{k=0}^{n} d_k |c_k|.$$

(Нетрудно было бы рассмотреть и аналогичные весовые l^p-полунормы, см. [2] и [3]). В статье [3] было показано, что

$$C(D, n, \Pi_d^{(n)}) \asymp \sqrt{\sum_{k=0}^{n} d_k^2} \tag{1}$$

при больших n (D обозначает открытый единичный круг); в [2] было доказано, что $\lim_{n\to\infty} C(G_{R,\beta}, n, \Pi_d^{(n)}) = \infty$, если $\sum_0^{\infty} d_k^2 = \infty$, однако вопрос о скорости роста величины $C(G_{R,\beta}, n, \Pi_d^{(n)})$ остался открытым. Этот вопрос представляет известный интерес в связи с изучением коэффициентов степенных рядов, равномерно сходящихся в круге сходимости ([4], [5], [6], [7], [13]).

В дальнейшем числа R, β и последовательность d будут фиксированы: вместо $C(G_{R,\beta}, n, \Pi_d^{(n)})$ мы будем писать просто C_n. Положим $S(n) = \sum_{k=0}^{n} d_k^2$.

2°. Оценка роста величины C_n различна в зависимости от того, обладает или не обладает весовая последовательность d свойством

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{S(N) - S([aN])}{S([aN])} \overset{\text{def}}{=} B(d, a) < +\infty \ (R(a)),$$

где $a \in (0, 1)$. Последовательность d, обладающая свойством $R(a)$, не может слишком быстро расти (например, быть растущей геометрической прогрессией); она не может быть также характеристической функцией очень неправильного подмножества натурального ряда. С другой стороны, если d есть характеристическая функция геометрической прогрессии с натуральным знаменателем или множества всех факториалов, то d обладает свойством $R(a)$. Этим свойством обладает также любая последовательность $d = \{(k+1)^\beta\}_0^\infty$ ($\beta \in \mathbf{R}$).

Лемма 1. *Пусть a, $a' \in (0, 1)$. Свойства $R(a)$ и $R(a')$ равносильны.*

Доказательство. Пусть $Q(a)$ есть отрицание утверждения $R(a)$. Ясно, что

$$Q(a) \Rightarrow Q(a'),$$

если $a' < a$. Проверим, что $Q(a) \Rightarrow Q(a^{2/3})$ (после этого остается заметить, что

$$Q(a) \Rightarrow Q(a^{(2/3)^n}),\ n = 1, 2, \cdots).$$

Если d обладает свойством $Q(a)$, то для любого $A > 2$ найдется строго возрастающая последовательность номеров $\{N_k\}$ такая, что

$$S(N_k) - S([aN_k]) > 2A^2 S([aN_k])\quad k = 1, 2, \cdots.$$

Построим новую последовательность номеров $\{\bar{N}_k\}$. Если

$$S([\sqrt{a}\, N_k]) - S([aN_k]) > AS([aN_k]), \tag{2}$$

то выберем $\bar{N}_k$ так, что

$$[aN_k] = [a^{2/3} \bar{N}_k];$$

при этом $\widetilde{N}_k \sim a^{1/3} N_k$ при больших k. Если (2) не выполнено, то положим $\widetilde{N}_k = N_k$. Тогда

$$S(N_k) - S([a^{2/3}\widetilde{N}_k]) < AS([a^{2/3}\widetilde{N}_k])$$

при всех достаточно больших k. В самом деле, в случае (2)

$$\sqrt{a}\, N_k < \widetilde{N}_k$$

при больших k, и

$$S(\widetilde{N}_k) - S([a^{2/3}\widetilde{N}_k]) \geqslant S([\sqrt{a}\, N_k]) - S([aN_k]) > AS([aN_k]) = \\ = AS([a^{2/3}\widetilde{N}_k]).$$

Если же (2) не выполнено, то

$$S(N_k) - S([\sqrt{a}\, N_k]) > (2A^2 - A)\, S([a\, N_k]) \geqslant \\ \geqslant \frac{2A^2 - A}{A+1} S([\sqrt{a}\,\widetilde{N}_k]) \geqslant AS([\sqrt{a}\,\widetilde{N}_k]).$$

Остается учесть, что $a^{2/3} < \sqrt{a}$. Лемма доказана.

3°. Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема 1. *Если последовательность d удовлетворяет условию $R(a)$ (при каком-нибудь $a \in (0, 1)$), то*

$$C_n \geqslant K \cdot \sqrt{S(n)} \ (n = 0, 1, \cdots),$$

где K положительно и зависит лишь от R, σ и $B(d, q)$ ($q \in (0, 1)$ и зависит от R и σ).

2. *Если последовательность d не удовлетворяет условию $R(a)$, то*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{C_n}{\sqrt{S(n)}} = 0.$$

Замечания. а) Легко видеть, что

$$C_n \leqslant L\sqrt{S(n)} \ (n = 0, 1, \cdots).$$

б) Соотношение (1) имеет место без каких бы то ни было предположений регулярности последовательности d, тогда как в условиях нашей теоремы ($R > 1$) условие $R(a)$ оказывается существенным.

в) Наряду с величиной C_n естественно рассмотреть величину

$$\widetilde{C}_n \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sup \Pi_d^{(n)} \left(\left\{ \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right\}_0^n \right) : f \in C_A(G_{R,\sigma}),\ \sup_{\zeta \in G_{R,\sigma}} |f(\zeta)| \leqslant 1 \right\}.$$

Интересно отметить, что $\widetilde{C}_n > \mathrm{const}\sqrt{S(n)}$ без каких бы то ни было предположений регулярности последовательности d (здесь $C_A(G)$ обозначает множество всех функций, аналитических и равномерно непрерывных в G). Этот факт доказан в [4]. Замена класса $C_A(G)$ классом всех многочленов степени не выше n существенно изменяет задачу, как показывает утверждение 2 нашей теоремы.

4°. Наметим план доказательства. Сначала мы для любого номера Q построим функцию f, аналитическую в некотором расширении $\bar{G}$ области G и непрерывную в замыкании множества $\bar{G}$, причем ряд Маклорена функции f равномерно сходится в $\mathbf{D}$, $\sup\limits_{\bar{G}}|f| \leqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{Q} |\hat{f}_k| d_k > \text{const} \sqrt{S(Q)}. \tag{3}$$

(Здесь и ниже const обозначает константу, зависящую лишь от упомянутого расширения области G, но не от Q, а $\hat{f}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$). Затем зафиксируем номер N и воспользуемся одним методом суммирования степенных рядов. Рассмотрим целую функцию $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k r_k(v) z^k$, где v — некоторый параметр, который будет выбран в зависимости от N, причем числа $r_k(v)$ при $k \geqslant N$ окажутся весьма малыми, а при $k \leqslant [qN] \overset{\text{def}}{=} Q$ (q — малое положительное число) — достаточно большими. Многочлен $\sum\limits_{k=0}^{N} \hat{f}_k r_k(v) z^k$ будет на G оцениваться абсолютной постоянной, тогда как

$$\sum_{k=0}^{[qN]} |\hat{f}_k| r_k(v) d_k > \text{const} \sum_{k=0}^{[qN]} |\hat{f}_k| d_k,$$

и ссылка на (3) и условие $R(q)$ завершит доказательство.

Отметим, что эта схема рассуждения, по существу, присутствует в работе [3], где к степенному ряду „плохой" функции f применяется метод суммирования Фейера.

5°. Построение функции f представляет собою незначительную модификацию рассуждений С. А. Виноградова ([4], [5]).

Символом $C_A(O)$ мы будем обозначать множество всех функций, непрерывных в замыкании открытого множества $O \subset \mathbf{C}$ и аналитических в O. Пространство всех функций, аналитических в $\mathbf{D}$, ряд Маклорена которых сходится равномерно в $\mathbf{D}$, обозначим через U_A.

В $C_A(O)$ и в U_A введем нормы, полагая

$$\|f\|_{C_A(O)} = \sup_{\zeta \in O} |f(\zeta)| \quad (f \in C_A(O)),$$

$$\|f\|_{U_A} = \sup_{n \geqslant 0} \sup_{|\zeta| < 1} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \hat{f}_k \zeta^k \right| \quad (f \in U_A).$$

Нам потребуется область

$$\bar{G} = \bar{G}(\delta, R, \sigma) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \zeta : \zeta \in \mathbf{C},\ |\zeta| < R \cdot \frac{1}{1-\delta} \right\} \diagdown \left\{ \zeta : 1 \leqslant |\zeta| < R \times \right.$$

$$\times \frac{1}{1-\delta}, \ |\arg \zeta| \leqslant \sigma - \delta \Big\},$$

где $0<\delta<\sigma$, например, $\delta = \frac{\sigma}{2}$.

Лемма 2. *Пусть Q — натуральное число. Существует функция $f \in C_A(\widetilde{G})$ такая, что*

$$f|\mathbf{D} \in U_A, \ \|f\|_{C_A(\widetilde{G})} \leqslant 1,$$

$$\|f|\mathbf{D}\|_{U_A} \leqslant 1, \ \Pi_d^Q(|\hat{f}_k|_0^Q) \geqslant \text{const} \sqrt{S(Q)}$$

(константа зависит лишь от R, σ, δ).

Для доказательства этой леммы введем (следуя [5]) пространство Y всевозможных последовательностей

$$F = (f_0, f_1, f_2, \cdots),$$

где

$$f_0 \in C_A(\widetilde{G}), \ f_k \in C_A(\mathbf{D}) \ (k = 1, 2, \cdots)$$

и

$$\lim_{k \geqslant 1, k \to \infty} \|f_k\|_{C_A(\mathbf{D})} = 0.$$

Положим

$$\|F\|_Y = \sup \{ \|f_0\|_{C_A(\widetilde{G})}, \|f_1\|_{C_A(\mathbf{D})}, \|f_2\|_{C_A(\mathbf{D})}, \cdots \}.$$

Совокупность X всех таких функций $\varphi \in C_A(\widetilde{G})$, что $\varphi|\mathbf{D} \in U_A$, отождествим с подпространством пространства Y, сопоставляя функции $\varphi \in X$ элемент $(\varphi, \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} \hat{\varphi}_n z^n, \cdots) \in Y$.

Пусть $w \in H \overset{\text{def}}{=} \mathbf{C} \diagup \widetilde{\widetilde{G}}$. Положим $c_w(\zeta) = (\zeta - w)^{-1}$ $(\zeta \in \widetilde{G})$. Ясно, что $c_w \in X$. Если $\Phi \in Y^*$, то функция $\mathbf{K}\Phi : w \to \Phi(c_w)$ аналитична в H.

Доказательство леммы 2 опирается на следующее утверждение.

Лемма 3. $\mathbf{K}\Phi \in E^p(H)$ *при любом* $p \in (0, 1)$, *и*

$$\|\mathbf{K}\Phi\|_{E^p(H)} \leqslant \text{const} \|\Phi\|,.$$

(константа зависит лишь от p и $\widetilde{G}$). Символом $E^p(H)$ обозначается совокупность всех функций v, аналитических в $H \cup (\infty)$ и таких, что

$$\|v\|_{E^p(H)} \overset{\text{def}}{=} \sup_n \Big\{ \int_{\gamma_n} |v(\zeta)|^p |d\zeta| \Big\}^{1/p} < +\infty,$$

где γ_n — какая-нибудь последовательность гладких жордановых контуров, охватывающих $\widetilde{G}$, сходящаяся к ∂G (ср. [8], гл. III, § 6).

Лемма 3 легко вытекает из рассуждений С. А. Виноградова [5]. Действительно, функционалу Φ отвечает последовательность комплексных мер $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots)$ такая, что μ_0 сосредоточена на $\partial \widetilde{G}$, $\mu_1, \mu_2, \cdots$ сосредоточены на ∂D и

$$\Phi(F) = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k d\mu_k \quad (F = \{f_k\} \in Y),$$

причем

$$\|\Phi\|_{Y^*} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{var} \mu_k.$$

Поэтому

$$\mathbf{K}\Phi(w) = \int\limits_{\partial\widetilde{G}} \frac{d\mu_0(\zeta)}{\zeta - w} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w^k} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^k \, d\mu_k(\zeta)}{\zeta - w}.$$

Первое слагаемое в правой части принадлежит (как функция переменной w) классу $E^p(H)$. Сумма s остальных слагаемых принадлежит $E^p(\mathbf{C} \setminus \overline{\mathbf{D}})$ — доказательство этого нетривиального факта дано в [5] и опирается на глубокую теорему Карлесона—Ханта о сходимости почти всюду рядов Фурье ([14], [15]). Остается воспользоваться теоремой Карлесона (см. [9], стр. 18 и сл.) для того, чтобы оценить $\|s\|_{E^p(H)}$ через $\|s\|_{E^p(\mathbf{C} \setminus \overline{\mathbf{D}})}$.

Докажем теперь лемму 2. Имеем

$$I(Q) \overset{\text{def}}{=} \sup \{\Pi_d^Q(\{\hat{f}_k\}_0^Q : f \in X, \|f\|_Y \leq 1\} =$$

$$= \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\widetilde{G}} f(\zeta) \left(\sum_{k=0}^{Q} \frac{d_k e^{ix_k}}{\zeta^{k+1}} \right) d\zeta \right| : f \in X, \|f\|_Y \leq 1, \{x_k\}_0^Q \in R^{Q+1} \right\} =$$

$$= \sup_{x_k} \sup \{|\Phi_x(f)| : f \in X, \|f\|_Y \leq 1\}.$$

Здесь $x = \{x_k\}_0^Q$ пробегает вещественное пространство $\mathbf{R}^{Q+1}$, а

$$\Phi_x(F) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\widetilde{G}} f_0(\zeta) \left(\sum_{k=0}^{Q} \frac{d_k e^{ix_k}}{\zeta^{k+1}} \right) d\zeta$$

$$(F = (f_0, f_1, f_2, \cdots) \in Y;$$

f отождествляется с элементом из Y).

Воспользуемся известным следствием теоремы Хана—Банаха:

$$I(Q) = \sup_x \inf \{\|\Phi_x - \widetilde{\Phi}\|_{Y^*} : \widetilde{\Phi} \in Y^*, \ \widetilde{\Phi} \perp X\} \geq$$

$$\geq \text{const} \sup_x \|\mathbf{K}\Phi_x - \mathbf{K}\widetilde{\Phi}\|_{E^p(H)} = \text{const} \sup_x \|\mathbf{K}\Phi_x\|_{E^p(H)},$$

ибо $\widetilde{\Phi}(c_w) = 0$ при любом $w \in H$.

Легко видеть, что $\mathbf{K}\Phi_x(w)=\sum_{k=0}^{Q}d_k w^{-(k+1)}e^{ix_k}\ (w\in H)$ и

$$I(Q)\geq \text{const}\ \sup_x\left(\int_{\partial G}\left|\sum_{k=0}^{Q}d_k w^{-(k+1)}e^{ix_k}\right|^p|dw|\right)^{1/p}\geq \text{const}\sqrt{\sum_{k=0}^{Q}d_k^2}$$

(по поводу последнего неравенства см. [4], стр. 28 и сл.). Лемма доказана.

6°. В этом разделе мы заготовим необходимые для дальнейшего оценки, связанные с методом суммирования Миттаг—Леффлера (см. по этому поводу монографии [10], стр. 247, [11], гл. III). Напомним, что равенство $E_\alpha(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{\Gamma(1+\alpha n)}$ определяет целую функцию E_α, называемую функцией Миттаг—Леффлера $(0<\alpha<2)$. Как известно

$$\frac{1}{1-\zeta}=\int_0^\infty e^{-t}E_\alpha(t^\alpha\zeta)\,dt, \tag{4}$$

причем интеграл сходится равномерно относительно точки ζ, изменяющейся в любом компактном подмножестве области, содержащей начало и ограниченной кривой

$$r=\left(\cos\frac{\theta}{\alpha}\right)^{-\alpha},\quad -\frac{\pi\alpha}{2}<\theta<\frac{\pi\alpha}{2}$$

(r, θ — полярные координаты; см. [10], стр. 247, замечание к § 8.10).

Вернемся теперь к области $\bar G=\bar G(\delta, R, \sigma)$ (см. выше п. 5°), и положим $\alpha=\frac{\delta}{\pi}$. Равенство (4) выполняется равномерно внутри дополнения к множеству

$$\mathbf{L}_\delta \overset{\text{def}}{=} \{\zeta\in\mathbf{C}:|\zeta|\geq 1-\delta,\ |\arg\zeta|\leq\delta\}.$$

Функция f, существование которой утверждается в лемме 2, представима по формуле Коши в области

$$G\setminus\mathbf{L}_{\delta,\sigma}\ (\mathbf{L}_{\delta,\sigma}\overset{\text{def}}{=}\{\zeta\in\mathbf{C}:|\zeta|\geq 1-\delta,\ \arg J_1\leq\sigma\}):$$

$$f(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\bar G}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\bar C}f(\zeta)\frac{1}{\zeta}\left(\int_0^\infty e^{-t}E_\alpha\left(t^\alpha\frac{\tau}{\zeta}\right)dt\right)d\zeta=$$

$$=\lim_{v\to+\infty}f_v(\tau),$$

где

$$f_v(\tau) \overset{\text{def}}{=} \int_0^v e^{-t}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\tilde G} f(\zeta)\,\frac{1}{\zeta}\,E_\alpha\!\left(t^\alpha\frac{\tau}{\zeta}\right)d\zeta\,dt$$

$$(\tau\in G\setminus\mathbf{L}_{\delta,\sigma}).$$

Последний предельный переход происходит равномерно внутри $G\setminus\mathbf{L}_{\delta,\sigma}$. Это следует из (4) и из того, что $\frac{\tau}{\zeta}\,\overline{\in}\,\mathbf{L}_\delta$, если $\zeta\in\partial\tilde G$, $\tau\in G\setminus\mathbf{L}_{\delta,\sigma}$. В самом деле, если $\zeta\in\partial\tilde G$, $\tau\in G\setminus\mathbf{L}_{\delta,\sigma}$ и $\left|\frac{\tau}{\zeta}\right|\geqslant 1-\delta$, то $|\arg\zeta|\leqslant\sigma-\delta$ (в противном случае $|\zeta|=R\,(1-\delta)^{-1}$, а $G\setminus\mathbf{L}_{\delta,\sigma}\subset\{\tau:|\tau|<R\}$); кроме того, $|\tau|\geqslant 1-\delta$ (ибо $|\zeta|\geqslant 1$, если $\zeta\in\partial\tilde G$); значит

$$|\arg\tau|>\sigma \text{ и } |\arg\tau-\arg\zeta|>\delta.$$

Заметим еще, что при любом $\tau\in G\setminus\mathbf{L}_{\delta,\sigma}$

$$|f_v(\tau)|\leqslant\text{const},\tag{5}$$

где постоянная зависит лишь от R, σ и δ, ибо $|f(\zeta)|\leqslant 1$ при $\zeta\in\partial\tilde G$.

Из определения функции f_v следует, что

$$f_v(\tau)=\sum_0^\infty f_n\,r_n(v)\,\tau^n\quad(\tau\in\mathbf{C}),\tag{6}$$

где

$$r_n(v)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha n)}\int_0^v t^{\alpha n}e^{-t}\,dt\quad(n\geqslant 0).$$

Нам будут нужны следующие свойства коэффициентов $r_n(v)$.

I. При любом $v>0$ и любых u_1, u_2, $0<u_1<u_2$ выполнены неравенства $0<r_{u_2}(v)<r_{u_1}(v)$.

Для доказательства вычислим производную по u отношения

$$R_v(u)\overset{\text{def}}{=}\int_0^v e^{-t}t^{\alpha u}\,dt\cdot(\Gamma(1+\alpha u))^{-1}\quad(u>0).$$

Получим

$$(\Gamma(1+\alpha u))^2\,R_v'(u)=$$

$$=\int_0^v e^{-t}t^{\alpha u}\alpha\log t\,dt\cdot\int_v^\infty e^{-t}t^{\alpha u}\,dt-\int_v^\infty e^{-t}t^{\alpha u}\alpha\log t\,dt\cdot\int_0^v e^{-t}t^{\alpha u}\,dt<$$

$$<\alpha\log v\int_0^v e^{-t}t^{\alpha u}\,dt\cdot\int_v^\infty e^{-t}t^{\alpha u}\,dt-\alpha\log v\int_v^\infty e^{-t}t^{\alpha u}\,dt\cdot\int_0^v e^{-t}t^{\alpha u}\,dt=0.$$

II. Зафиксируем номер N и выберем параметр v (в зависимости от N, R и δ) так, чтобы коэффициенты $r_n(v)$ имели достаточно быстро стремящуюся к нулю мажоранту при $n > N$.

Пусть $0 < c < c_0 < 1$; положим

$$v = \alpha \cdot c \cdot N. \tag{7}$$

Выбор чисел c и c_0 будет уточнен позже. Обозначим

$$\mathrm{J}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-p\alpha t} t^{p\alpha}\, dt.$$

Тогда при $p > N$

$$r_p(v) = (\Gamma(1+\alpha p))^{-1} \int\limits_0^v e^{-t} t^{p\alpha}\, dt = (\mathrm{J}(p))^{-1} \int\limits_0^{\frac{cN}{p}} e^{-p\alpha t} t^{p\alpha}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (\mathrm{J}(p))^{-1} \int\limits_0^c e^{-p\alpha(t - \log t)}\, dt =$$

$$= (\mathrm{J}(p))^{-1} \int\limits_0^c e^{-p\alpha(c_0 - \log c_0) - p\alpha(t - \log t - (c_0 - \log c_0))}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{-(c_0 - \log c_0)p\alpha} \cdot (\mathrm{J}(p))^{-1} \int\limits_0^\infty e^{-p\alpha(t - \log t)\theta}\, dt, \tag{8}$$

где $\theta = 1 - \dfrac{c_0 - \log c_0}{c - \log c}$. Мы воспользовались убыванием функции $t \to t - \log t$ в промежутке $(0, 1)$.

Используя формулу Стирлинга и (8), легко проверить, что

$$r_p(v) \leqslant \operatorname{const} e^{-p\alpha(c_0 - \log c_0)\left(1 - \frac{1}{c - \log c}\right)} \quad (p > N), \tag{9}$$

где константа зависит лишь от θ (напомним, что v здесь определено равенством (7)).

Теперь выберем столь малое $c_0 \in (0, 1)$, что

$$c_0 - \log c_0 > \frac{2}{\alpha} \log 2R,$$

а $c \in (0, c_0)$ так, что $\dfrac{1}{c - \log c} < \dfrac{1}{2}$. Тогда при $M = 1, 2, \cdots$ из (9) получим

$$r_{N+M}(v) \leqslant C(R, \alpha)\, e^{-(N+M)\log 2R}. \tag{10}$$

III. Считая попрежнему, что v определено равенством (7) и выбором c и c_0, сделанным только что, оценим $r_n(v)$ снизу при $n < a \times \times c \cdot \alpha \cdot N$, где $0 < a < 1$. Имеем

$$r_n(v) > r_{ac\alpha N}(v) = 1 - (\mathrm{J}(acN))^{-1} \int\limits_{1/a}^{\infty} e^{-ac\alpha N(t - \log t)}\, dt.$$

Действуя так же, как в п. II (вводя число $a_0 \in (0, 1)$, используя возрастание функции $t \to t - \log t$ в $(1, +\infty)$ и формулу Стирлинга), получим

$$r_n(v) > \text{const} > 0 \ (n < ac\alpha N \overset{\text{def}}{=} qN), \tag{11}$$

где константа зависит лишь от a.

7°. Закончим теперь доказательство первой части теоремы.

Пусть N — натуральное число, $Q = [a\alpha cN]$, где a, α и c определены в п. 6 , f — функция, соответствующая числу Q по лемме 2. Положим

$$P_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \hat{f}_v(n)\, z^n \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{\hat{f}_v^{(n)}(0)}{n!}\, z^n,$$

где v определено в (7). Проверим, что

$$\|P_N\|_{C_A(G)} < C_1, \tag{12}$$

$$\sum_{n=0}^{Q} |\hat{f}_v(n)|\, d_n \geqslant C_2 \sqrt{S(Q)}, \tag{13}$$

где C_1 и C_2 зависят лишь от R и ε. После этого, используя условие $R(ac\alpha)$, мы получим, что

$$\Pi_d^N(P_N) > C_3 \sqrt{S(N)},$$

где C_3 зависит лишь от R, ε и $B(d, a\alpha c)$ и доказательство будет закончено.

Докажем (12). Ясно, что

$$P_N(z) = f_v(z) - \sum_{n=N+1}^{\infty} \hat{f}_v(n)\, z^n$$

$(z \in G \setminus L_{\cdot,\varepsilon})$. Воспользуемся оценкой (10):

$$|\hat{f}_v(n)| = |\hat{f}_n)|\, r_n(v) < r_n(v) \leqslant \text{const}\, \frac{1}{(2R)^n} \ (n > N)$$

(константа зависит лишь от R и ε). Учитывая (5), получим

$$\sup\{|P_N(\zeta)| : \zeta \in G \setminus L_{\cdot,\varepsilon}\} \leqslant \text{const}. \tag{14}$$

Оценим $P_N(\zeta)$ при $|\zeta| \leqslant 1$. Из неравенства $\|f\|_{C_A} \leqslant 1$ следует, что все частичные суммы ряда $\sum \hat{f}_n z^n$ не превосходят 2 всюду в D. Учитывая, что

$$1 \geqslant r_n(v) > r_{n+1}(v) > 0 \ (n = 0, 1, \cdots),$$

применяя преобразование Абеля, получим

$$\sup\{|P_N(\zeta)| : \zeta \in \mathrm{D}\} \leqslant 2. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует (12).

Вспомним теперь свойство III множителей $r_n(v)$:

$$\sum_{n=0}^{Q} d_n |\hat{f}_v(n)| = \sum_{n=0}^{Q} d_n |\hat{f}_n| r_n(v) \geqslant \text{const} \sum_{n=0}^{Q} d_n |\hat{f}_n| \geqslant \text{const} \sqrt{S(Q)}\,.$$

Доказательство первой части теоремы закончено.

8°. Доказательству второй части теоремы предпошлем следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть K — замкнутый круг, расположенный в* $\mathbf{C} \setminus \overline{\mathbf{D}}$. *Тогда существуют числа $b \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для любого $N = 1, 2, \cdots$ и любого многочлена P степени $\leqslant N$ из неравенства* $\max\limits_K |P| \leqslant 1$ *следует, что*

$$|\hat{P}_n| \leqslant e^{-\varepsilon N} \quad (bN \leqslant n \leqslant N). \tag{16}$$

Через $\hat{P}_n$ мы, как всегда, обозначаем $\dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}$.

Доказательство этой леммы следует по известной схеме рассуждений (см. [12], гл. VIII, § 6). Рассмотрим гармоническую в $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ функцию u

$$u(\zeta) = \frac{1}{N} \log |P| - \log |\zeta|.$$

Ясно, что $u(\zeta) \leqslant 0$, если $|\zeta| = 1$, $u(\zeta) < -\mu$, если $\zeta \in \partial K$, где $\mu > 0$. Гармоническая мера окружности $\gamma = \partial K$ относительно области $\hat{\mathbf{C}} \setminus (\overline{\mathbf{D}} \cup K)$ ограничена снизу положительным числом $\lambda = \lambda(R)$ на любой окружности Γ_R радиуса R с центром в начале. Зафиксируем такую окружность Γ_R, лежащую в $\mathbf{C} \setminus (\mathbf{D} \cup K)$; ясно, что

$$u(\zeta) \leqslant -\lambda\mu \quad (\zeta \in \Gamma^{K}),$$

так что

$$|P(\zeta)| \leqslant (Re^{-\lambda\mu})^N \quad (\zeta \in \Gamma_R).$$

Записывая коэффициенты $\hat{P}_n$ с помощью формулы Коши (примененной к Γ_R) и выбирая b достаточно близким к 1, получим оценку (16).

Обратимся, наконец, к доказательству утверждения 2 теоремы. Пусть $A > 0$. Воспользуемся тем, что последовательность d не обладает свойством $R(b)$, т. е. обладает свойством $Q(b)$ (см. доказательство леммы 1). Найдутся сколь угодно большие номера N такие, что

$$S(N) - S([bN]) > AS([bN]), \text{ т. е. } S([bN]) < A^{-1} S(N).$$

Пусть P — многочлен степени не выше N, причем $\sup\limits_{\zeta \in K} |P(\zeta)| \leqslant 1$. К многочлену P применима лемма, поэтому

$$\sum_{0}^{N} |\hat{P}_n| d_n \leqslant \sum_{0}^{[bN]} |\hat{P}_n| d_n + e^{-\varepsilon N} \sum_{[bN]+1}^{N} d_n \leqslant \left(\sum_{0}^{[bN]} |\hat{P}_n|^2 \right)^{1/2} \sqrt{S([bN])} +$$

$$+ e^{-\varepsilon N} N^{1/2} \sqrt{S(N)} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{A}} + e^{-\varepsilon N} N^{1/2} \right) \sqrt{S(N)}.$$

Выбирая A достаточно большим, получим наше утверждение.

В заключение отметим следующий факт, вытекающий из рассуждений п. 7.

Для любой области $G=G_{R,\,\vartheta}$ существует такое число $q\in(0,1)$, что

$$C(G,\ n,\ \Pi_n^d)\geqslant \text{const}\sqrt{S([qN])},$$

где константа зависит лишь от R и ϑ (но не от d).

В заключение выражаю свою глубокую признательность В. П. Хавину за внимание к работе и помощь при подготовке ее к печати, а также С. А. Виноградову — за полезные обсуждения.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступила 20.IX.1977

Բ. ՅՈՐԻԿԵ. Մեկ կոմպլեքս փոփոխականի բազմանդամի պայմանավորվածության չափի մասին (ամփոփում)

Դիցուք $d=\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$-ն ոչ բացասական թվերի հաջորդականություն է, G-ն հետևյալ տիրույթն է

$$\{\zeta\in C:|\zeta|<R\}\setminus\{\zeta\in C:1\leqslant|\zeta|<R,\ |\arg\zeta|\leqslant\vartheta\}\ (R>1,\ \vartheta\in(0,\pi)):$$

Մենք ցույց ենք տալիս, որ

$$\underline{\lim}\left(\sum_{k=0}^{m}d_k^2\right)^{-\frac{1}{2}}\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}|c_k|\,d_k:\{c_k\}_0^n\in\mathbf{C}^{n+1},\ \sup_{\zeta\in G}\left|\sum_{k=0}^{n}c_k\zeta^k\right|\leqslant 1\right\}>0\ (*)$$

այն և միայն այն դեպքում, երբ d-ն բավարարում է ռեգուլյարության մի պայմանի։

Մինչ այդ միայն հայտնի էր, որ (*) արտահայտության վերին սահմանը ձգտում է ∞, երբ $\sum d_k^2<\infty$։ Մեր գնահատականի նման գնահատական ստացված էր [4]-ում այն դեպքի համար, երբ G-ն D միավոր շրջանն է։ Այս դեպքում ռեգուլյարության պայման չի պահանջվում։

B. JÖRICKE. *On the rate of the conditionedness of a palynomial of a complex variable* (summary)

Let $d=\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ be a sequence of non negative numbers. Let G be the domain

$$\{\zeta\in\mathbf{C}:|\zeta|<R\}\setminus\{\zeta\in\mathbf{C}:1\leqslant|\zeta|<R,\ |\arg\zeta|\leqslant\vartheta\}\ (R>1,\ \vartheta\in(0,\pi)).$$

We prove that

$$\underline{\lim}\left(\sum_{k=0}^{n}d_k^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}c_k d_k:\ \{c_k\}_0^n\ \in c^{n+1},\right.$$

$$\left.\sup_{\zeta\in G}\left|\sum_{k=0}^{n}c_k\zeta^k\right|\leqslant 1\right\}>0\ (*)$$

if and only if d satisfies a regularity condition. This condition allows d to be for instance $\{(k+1)^{\beta}\}_{k=0}^{\infty}$ ($\beta\in R$) or the characteristic funktion of any geometric progression with the integer positive ratio or of the set of all factorials.

Previously it was only known that the supremum occuring in (*) tends to infinity when $\sum_{k=0} d_k^2 = \infty$. The estimate analogous to ours was obtained in [4] in the case when the domain is replaced by the unit disc D. In that case no regularity condition is needed which is in contrast with the situation considered here.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. А. Самокиш*. О поведении коэффициентов многочленов, приближающих регулярную на отрезке функцию. Методы вычислений, вып. 1, 1963, 58—65.
2. *В. П. Хавин*. О нормах некоторых операторов в пространстве многочленов. Вестник Ленинградского университета, вып. 4, № 19, серия мат.-мех. и астр., 1959, 47—59.
3. *С. Б. Стечкин*. Одна экстремальная задача для многочленов. Изв. АН СССР, серия матем., 20, № 6, 1956, 765—774.
4. *С. А. Виноградов*. Интерполяционные теоремы Банаха—Рудина—Карлесона и нормы операторов вложения для некоторых классов аналитических функций. Записки научн. семин. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, Ленингр. отд., т. 19, 1970, 6—54.
5. *С. А. Виноградов*. Сходимость почти всюду рядов Фурье функций из L^2 и поведение коэффициентов равномерно сходящихся рядов Фурье. ДАН СССР, 230, № 3, 1976, 508—511.
6. *С. Б. Стечкин*. О коэффициентах Фурье непрерывных функций. Изв. АН СССР, серия матем., 21, 1957, 93—116.
7. *С. В. Хрущёв*. Особенности линейных операторов в пространствах аналитических функций. Матем. программирование и смежные вопросы. Труды 7-ой Зимней школы, Дрогобыч, 1974, М., 1976, 87—114.
8. *И. И. Привалов*. Граничные свойства аналитических функций. Гос. изд. техн.-теор. лит., М., 1950.
9. *С. А. Виноградов, В. П. Хавин*. Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций. Записки научн. семин. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, Ленингр. отд., т. 47, 1974, 15—54.
10. *Г. Харди*. Расходящиеся ряды. ИИЛ, М., 1951.
11. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
12. *Г. М. Голузин*. Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966.
13. *R. E. A. C. Paley*. A note on power series, Journal London Math. Soc., 7, 1932, 122—130.
14. *L. Carleson*. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116, 1966, 135—157.
15. *R. Hunt*. On the convergence of Fourier series, Proc. Conf. Southern Ill. Un. Orthogonal Expansions and their continous analogues, 1967, 235—257.
16. *E. Beller, D. J. Newman*. An l^1 extremal problem for polynomials. PAMS, 29, № 3, 1971, 474—481.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

А. Э. ЕРЁМЕНКО

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ КРИВЫХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ R^m

Пусть функция u субгармонична в R^m, $m \geq 2$. Асимптотической кривой называется кривая Γ, уходящая в бесконечность такая, что

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in \Gamma}} u(x) = \sup_{x \in R^m} u(x).$$

Известно [1], что всегда существует локально спрямляемая асимптотическая кривая. Недавно Л. Карлесон [7] доказал существование полигональных асимптотических кривых. Обозначим через $l(r, \Gamma)$ длину части кривой Γ, лежащей в шаре $D(r) = \{x \in R^m: |x| < r\}$. Известно [2], [3], стр. 131, что если выполняется

$$u(x) < \begin{cases} O(\ln^2 |x|), & m = 2, \\ O(1), & m \geq 3, \; x \to \infty, \end{cases} \tag{1}$$

то в качестве асимптотической кривой может служить луч, исходящий из начала координат. Очевидно, что в этом случае $l(r, \Gamma) \equiv r$. С другой стороны, если φ — произвольная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \to \infty$ на $[0, \infty)$, то существует целая функция f, для которой выполняется

$$\ln |f(x)| = O(\varphi(|x|) \ln^2 |x|), \; x \to \infty,$$

причем для всякой асимптотической кривой Γ выполняется

$$\varlimsup_{r \to \infty} l(r, \Gamma) / r = \infty. \tag{2}$$

Этот результат, полученный в [4], с одной стороны опровергает гипотезу У. К. Хеймана, высказанную в [5], а с другой — показывает, что условие (1) нельзя ослабить при $m = 2$. Мы докажем, что условие (1) нельзя ослабить и при $m \geq 3$.

Теорема 1. *Пусть функция φ монотонно стремится к $+\infty$ на $[0, \infty)$. Существует функция u, субгармоническая в R^m, $m \geq 3$ со свойством*

$$u(x) \leq \varphi(|x|), \; x \in R^m, \tag{3}$$

причем для каждой асимптотической кривой Γ выполняется (2).

Положим

$$\overline{D}(r) = \{x \in R^m: |x| \leq r\}, \; S(r) = \{x \in R^m: |x| = r\},$$

$$K(r_1, r_2) = \{x \in R^m: r_1 < |x| < r_2\},$$

$$A_+ = \{x \in R^m: x_1 > 0, \; x_2^2 + \cdots + x_m^2 < 1\}.$$

$$A_- = \{x \in R^m\colon x_1 < 0,\ x_2^2 + \cdots + x_m^2 < 1\},$$

$$\Phi_k = \bigcup_{i=0}^{k^2-1} \left\{ \left\{ K\left(3 + \frac{4i}{4k},\ 3 + \frac{4i+1}{4k}\right) \setminus A_+ \right\} \cup \right.$$

$$\left. \cup \left\{ K\left(3 + \frac{4i+2}{4k}, 3 + \frac{4i+3}{4k}\right) \setminus A_- \right\} \right\},\ k \in N.$$

Лемма. *Существует ограниченная в R^m, $m \geqslant 3$ субгармоническая функция v_k со свойствами*

$$v_k(x) = 0,\ x \in \overline{D}(1), \tag{4}$$

$$v_k(x) = -1,\ x \in \Phi_k. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим область

$$G_k = D(4+k) \setminus \{\overline{D}(1) \cup \Phi_k\}.$$

Положим

$$w_k(x) = M > 0,\ x \in S(4+k), \tag{6}$$

$$w_k(x) = 0,\ x \in \overline{D}(1), \tag{7}$$

$$w_k(x) = -1,\ x \in \Phi_k. \tag{8}$$

Продолжим функцию w_k, заданную условиями (6), (7), (8), до непрерывной функции в $\overline{D}(4+k)$, гармонической в G_k. Поскольку гармоническая мера множества $S(4+k)$ относительно области G_k положительна, функция w_k стремится к ∞ равномерно на компактах в G_k при $M \to \infty$. Зафиксируем M так, чтобы выполнялось

$$w_k(x) > 0,\ x \in S(2) \subset G_k. \tag{9}$$

Покажем, что w_k субгармонична в $D(4+k)$. Если $x_0 \notin S(1) \cup \cup \operatorname{Fr} \Phi_k$, то w_k гармонична в окрестности x_0. Пусть $x_0 \in \operatorname{Fr} \Phi_k$. Тогда $w_k(x_0) = -1$. С помощью (6), (7), (8) и принципа экстремума для гармонических функций, получаем, что x_0 минимум w_k. Пусть теперь $x_0 \in S(1)$, $w_k(x_0) = 0$. Из (7), (9) и принципа экстремума, примененного к кольцу $K(1, 2)$, следует, что x_0—локальный минимум функции w_k. Таким образом, функция w_k удовлетворяет условиям теоремы о среднем и, следовательно, является субгармонической в $D(4+k)$.

Продолжим функцию w_k до субгармонической и ограниченной во всем пространстве. В силу (6) наименьшая гармоническая мажоранта функции w_k в области $D(4+k)$ тождественно равна M, поэтому имеет место представление Грина

$$w_k(x) = \int\limits_{D(4+k)} \{-|x-\xi|^{2-m} + \{|\xi|\,|x-\xi'|/(4+k)\}^{2-m}\}\, d\mu_\xi + M,$$

$\xi' = \xi(4+k)^2|\xi|^{-2}$, μ — масса, ассоциированная по Риссу. Это соотношение определяет функцию w_k во всем пространстве. Легко видеть, что $w_k \leqslant O(1)$, $x \to \infty$ и что $w_k = p_k - q_k$, где p_k и q_k субгармоничны в R^m, причем масса ν_k, ассоциированная с q_k, сосредоточена вне некоторого шара $\overline{D}(\rho)$, $\rho > 4 + k$.

Положим $s_k(x) = -\int |x - \xi|^{2-m}\, d\nu_k + c_k$, где c_k выбрано так, чтобы выполнялось

$$s_k(x) > 0, \quad x \in S(\rho). \tag{10}$$

Заметим, что функция

$$h_k(x) = -|x|^{2-m} + \left(\frac{1}{2}(4 + k + \rho)\right)^{2-m}$$

субгармонична и ограничена сверху в R^m, причем

$$h_k(x) < 0, \quad x \in \overline{D}(4 + k),$$

$$h_k(x) > 0, \quad x \in S(\rho). \tag{11}$$

Выберем положительное d_k настолько большим, чтобы выполнялось

$$s_k(x) + d_k h_k(x) < 0, \quad x \in \overline{D}(4 + k). \tag{12}$$

Пусть B_k — компонента множества $\{x\colon s_k(x) + d_k h_k(x) < 0\}$, содержащая начало координат. В силу (10), (11), (12) выполняется $D(4 + k) \subset B_k \subset D(\rho)$. Положим

$$g_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in B_k \\ s_k(x) + d_k h_k(x), & x \overline{\in} B_k. \end{cases} \tag{13}$$

По теореме 4.11 из [3], стр. 172, функция g_k субгармонична в R^m. Положим

$$v_k = w_k + g_k.$$

Легко видеть, что v_k субгармонична в R^m и что $v_k \leqslant O(1)$, $x \to \infty$, следовательно, v_k ограничена сверху в R^m. Из (13) следует, что функция v_k совпадает с w_k при $x \in D(4+k)$, следовательно, для нее выполняется (4), (5).

Доказательство теоремы 1. Предположим, не уменьшая общности, что $\varphi(0) = 1$. Построим по индукции последовательность ограниченных субгармонических функций u_k и положительных чисел $\tau_k \tau_{k-1} < \tau_k / (4 + k)$ так, чтобы выполнялось

$$u_k(x) \leqslant \varphi(|x|), \quad x \in R^m; \tag{14}$$

$$u_k(x) \leqslant -1, \quad \tau_i x \in \Phi_i, \quad i = 1, \cdots, k; \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{15}$$

Поскольку функция v_1, построенная в лемме, ограничена, то можно выбрать настолько малое $\tau_1 > 0$, чтобы

$$u_1(x) = v_1(\tau_1 x) \leqslant \varphi(|x|), \quad x \in R^m.$$

Отсюда и из (5) следует, что u_1 удовлетворяет условиям (14), (15) с $k = 1$.

Пусть построены $\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}$; $u_1, \cdots, u_{n-1}$, удовлетворяющие условиям (14), (15). Обозначим

$$a_{n-1} = \sup\{u_{n-1}(x): x \in R^m\} < \infty, \tag{16}$$

$$b_n = \sup\{v_n(x): x \in R^m\} < \infty. \tag{17}$$

Выберем $\tau_n > 0$, удовлетворяющее условиям

$$\tau_n < \tau_{n-1}/(4+n), \tag{18}$$

$$\varphi(\tau_n^{-1}) \geqslant a_{n-1} + (a_{n-1}+1)\, b_n. \tag{19}$$

Положим $u_n(x) = u_{n-1}(x) + (a_{n-1}+1)\, v_n(\tau_n x)$.

Покажем, что u_n удовлетворяет условию (15) с $k = n$. При $i \leqslant n-1$ это следует из (15) с $k=n-1$ с учетом (4), (18). При $x\tau_n \in \Phi_n$ имеем в силу (5), (16).

$$u_n(x) = u_{n-1}(x) + (a_{n-1}+1)\, v_n(\tau_n x) \leqslant a_{n-1} - a_{n-1} - 1 = -1.$$

Покажем теперь, что функция u_n удовлетворяет условию (14) с $k = n$. При $|x| < \tau_n^{-1}$ это следует из (14) с $k=n-1$ и (4), а при $|x| \geqslant \tau_n^{-1}$ имеем в силу (16), (17), (19), что

$$u_n(x) = u_{n-1}(x) + (a_{n-1}+1)\, v_n(\tau_n x) \leqslant$$
$$\leqslant a_{n-1} + (a_{n-1}+1)\, b_n \leqslant (\tau_n^{-1}) \leqslant \varphi(|x|).$$

Индуктивное построение закончено. Из (18) следует, что $\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$. Вместе с (4) это влечет сходимость последовательности u_k на каждом компакте к субгармонической функции u. Очевидно, что $u(0) = 0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в (15), получим

$$u(x) \leqslant -1,\ \tau_i x \in \Phi_i,\ i = 1, 2, \cdots. \tag{20}$$

Отсюда вытекает, в частности, что $u \not\equiv \mathrm{const}$. Пусть Γ — любая асимптотическая кривая. Легко видеть, что

$$l(\tau_k^{-1}(4+k), \Gamma) \geqslant \tau_k^{-1} \cdot \frac{3}{2}\pi(k^2-2),$$

откуда следует (2). Переходя к пределу в (14) при $k \to \infty$, получим (3). Теорема доказана.

Заметим, что из цитированного в начале статьи результата следует, что построенная нами субгармоническая функция неограничена сверху.

Положим $\theta(r, u) = \operatorname{mes}\{x \in S(1): u(rx) > 0\}$ (здесь mes означает меру Лебега на $S(1)$). Р. Гэрайпи и Дж. Л. Льюис [6] доказали, что для субгармонической в R^m, $m \geqslant 3$ функции u нулевого порядка выполняется $\theta(r, u) \to \alpha > 0$ при r, принадлежащем некотором множеству нижней логарифмической плотности 1. (α — абсолютная постоянная). Методом, использованным в теореме 1, можно доказать следующий результат.

Теорема 2. *Пусть φ монотонно стремится к $+\infty$ на $[0, \infty)$. Существует неограниченная сверху субгармоническая в R^m, $m \geqslant 3$, функция со свойством (3), у которой $\theta(r, u) \to 0$ при $r \to \infty$, $r \in E \subset [0, \infty)$, E — некоторое множество верхней плотности 1.*

Доказательство. Положим

$$\Phi'_k = \{K(3, 3+k) \setminus A_+\} \subset D(4+k).$$

Построим функцию u как в теореме 1, пользуясь Φ_k' вместо Φ_k. В силу (20) с Φ_k' вместо Φ_k имеем

$$\theta(r, u) \to 0, \ r \to \infty, \ r \in [3, 3+k],$$

что доказывает теорему.

Аналогичная теорема для функций в плоскости была доказана в [4].

Автор благодарит А. А. Гольдберга и Н. С. Ландкофа за ценные замечания, сделанные в ходе работы.

ВНИИ метрологии измерительных
и управляющих систем — г. Львов

Поступила 18.IX.1976.

Ա. Է. ԵՐԵՄԵՆԿՈ. R^m տարածությունում սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների ասիմպտոտական կորերի մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցված է, որ գոյություն ունի R^m-ում $m \geq 3$ վերեից ոչ սահմանափակ և կամայապես փոքր աճ ունեցող այնպիսի սուբհարմոնիկ u ֆունկցիա, որ կամայական Γ կորի համար, որի վրայով u-ն ձգտում է անվերջության, բավարարվում է հետևյալ առնչությունը՝

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, l(r, \Gamma)/r = \infty:$$

Այստեղ $l(r, \Gamma)$ մեծությունը կորի այն մասի երկարությունն է, որը գտնվում է $\{x: |x| < r\}$ գնդում։

A. E. EREMENKO. *On asymptotic curves of subharmonic functions in R^m* (summary)

There exists a subharmonic function in R^m, $m \geq 3$ with arbitrary small growth such that for any curve Γ along which the function tends to infinity holds

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, l(r, \Gamma)/r = \infty,$$

where $l(r, \Gamma)$ is the length of the part of Γ in the ball $\{x : |x| < r\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *B. Fuglede*. Asymptotic paths for subharmonic functions, Math. Ann., 213, № 3, 1975, 261—274.
2. *W. Hayman*. Slowly growing integral and subharmonic functions, Comment. math. helv., 34, 1960, 75—84.
3. *W. Hayman, P. Kennedy*. Subharmonic functions, Acad. Press, London, 1976.
4. *А. А. Гольдберг, А. Э. Ерёменко*. Об асимптотических кривых целых функций конечного порядка, Мат. сб., 109, № 4, 1979, 555—581.
5. *У. К. Хейман*. Дефектные значения и асимптотические пути, сб. переводов ин. статей, „Математика", 4, № 4, 1960, 20—27.
6. *R. Gariepy, J. Lewis*. Space analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions, Ark. mat., 13, № 1, 1975, 91—105.
7. *L. Carleson*. Asymptotic paths for subharmonic functions in R^n, Ann. acad. sci. fenn., Ser. AI, 2, 1976, 35—39.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

Ю. М. АРЛИНСКИЙ

РЕГУЛЯРНЫЕ (*)-РАСШИРЕНИЯ КВАЗИЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОСНАЩЕННЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Бирасширения эрмитовых и неэрмитовых операторов возникли в связи с построением теории характеристических оператор-функций неограниченных операторов (близких к самосопряженным). Самосопряженные бирасширения неплотно заданного эрмитова оператора с выходом в оснащенное гильбертово пространство были предметом изучения в [1]*.

Настоящая статья посвящена изучению чрезвычайно важных для теории характеристических оператор-функций регулярных (*)-расширений квазиэрмитовых операторов (все определения даны ниже). Отметим, что такие (*)-расширения для операторов с конечным рангом неэрмитовости были введены Э. Р. Цекановским в [2], [3].

Мы выделяем класс неограниченных квазиэрмитовых операторов, допускающих регулярные расширения, даем описание всех регулярных (*)-расширений данного оператора и приводим критерий регулярности данного (*)-расширения.

Часть результатов настоящей работы анонсирована в [4]. Там же регулярные (*)-расширения были применены для исследования аналитических свойств характеристических оператор-функций неограниченных операторных узлов. Автор благодарен Э. Р. Цекановскому за полезные обсуждения полученных результатов.

Пусть H_0 — сепарабельное гильбертово пространство, A — замкнутый эрмитов оператор в H_0. Пусть $H = \overline{D(A)}$, $H' = H_0 \ominus H$, P — ортопроектор в H_0 на H.

Оператор A мы будем называть регулярным, если PA — замкнутый эрмитов оператор в H [5].

Замкнутый плотно заданный оператор T будем называть квазиэрмитовым расширением A, если $T \supset A$, $T^* \supset A$.

Определение класса Ω_A. Квазиэрмитово расширение T отнесем к классу Ω_A, если

1) A — максимальная общая эрмитова часть T, T^*, т. е.

$$D(A) = \{f \in H_0, \ Tf = T^* f\},$$

2) PT, PT^* — замкнутые операторы в H_0,

* В этой работе, а также в [2, 3] бирасширения назывались обобщенными расширениями.

3) $-i$ — регулярная точка оператора T.

Будем рассматривать A как оператор из H в H_0. Пусть $A^*: H_0 \to H$ — его сопряженный, при этом $\overline{D(A^*)} = H_0$.

Обозначим $H_+ = D(A^*)$, превратим H_+ в гильбертово пространство, введя в нем скалярное произведение

$$(f, g)_+ = (f, g)_0 + (A^* f, A^* g)_0.$$

Как известно [1], имеет место $(+)$ ортогональное разложение

$$H_+ = D(A) \oplus N_i^{\cdot} \oplus N_{-i}^{\cdot} \oplus N,$$

где

$$N = (AA^* + I)^{-1} H', \ N_{\pm i}^{\cdot} = H \ominus (PA \pm iI) D(A)$$

($N_{\pm i}^{\cdot}$ называются полудефектными подпространствами оператора A).

Введем в H_+ эквивалентное скалярное произведение

$$(f, g)_{+1} = (f, g)_+ + (P_N^+ f, P_N^+ g)_{+1},$$

где P_N^+ — ортопроектор в H_+ на N.

Легко видеть, что $D(A)$, $N_{\pm i}^{\cdot}$, N $(+1)$ ортогональны. Введем обозначения: $W = N_i^{\cdot} \oplus N_{-i}^{\cdot} \oplus N$, $P^+ = P_{N_i^{\cdot}}^+ + P_{N_{-i}^{\cdot}}^+$; $J^+ = P_{N_i^{\cdot}} - P_{N_{-i}^{\cdot}}$ ($P_{N_{\pm i}^{\cdot}}^+$ — ортопроекторы в H_+ на $N_{\pm i}^{\cdot}$).

Пусть $H_+ \subset H_0 \subset H_-$ — оснащенное гильбертово пространство, $\mathbf{J}$ — естественно возникающая изометрия H_- и H_+ [6]. Через $[H_+, H_-]$ будем обозначать совокупность линейных ограниченных операторов, заданных из H_+ со значениями в H_-.

Если $B \in [H_+, H_-]$, то $B^* \in [H_+, H_-]$, где B^* — сопряженный к B оператор, т. е. $(Bu, v)_0 = (u, B^* v)_0 \ \forall u, v \in H_+$.

Определение. Оператор $\mathbf{A} \in [H_+, H_-]$ называется бирасширением оператора A, если $\mathbf{A} \supset A$, $\mathbf{A}^* \supset A$. Если $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, то $\mathbf{A}$ называется самосопряженным бирасширением оператора A.

Оказывается [7], что всякое бирасширение имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{A} = A P^+_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(Q - \frac{i}{2}J^+\right)\right] P^+_W \\ \mathbf{A}^* = A P^+_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(Q^* - \frac{i}{2}J^+\right)\right] P^+_W, \end{cases} \quad (2)$$

где $P^+_{D(A)}$, P^+_W — ортопроекторы в H_+ на $D(A)$, W; $Q \in [W, W]$, причем $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ тогда и только тогда, когда $Q = Q^*$.

Пусть $\mathbf{A}$ — самосопряженное бирасширение A,

$$D(\hat{A}) = \{f \in H_+, \ \mathbf{A}f \in H_0\};$$

оператор $\mathbf{A}$ называется сильным самосопряженным бирасширением, если $\hat{A} = \hat{A}^*$, где $\hat{A} = \mathbf{A}|_{D(\hat{A})}$, т. е. $\hat{A}$ — самосопряженное расширение оператора A.

Определение. Оператор $\mathbf{A} \in [H_+, H_-]$ называется (*)-расширением оператора T класса Ω_A, если $\mathbf{A} \supset T$, $\mathbf{A}^* \supset T^*$.

Как известно ([7]), всякому оператору T класса Ω_A отвечает оператор M со свойствами:

а) $M \in [N'_i \oplus N, N'_{-i} \oplus N]$, $M^* \in [N'_{-i} \oplus N, N'_i \oplus N]$,

б) -1 — точка регулярного типа для M и M^*,

в) $D(T) = D(A) \oplus (M+I)(N'_i \oplus N)$,

$$D(T^*) = D(A) \oplus (M^*+I)(N'_{-i} \oplus N),$$

г) существуют $(MM^* - I)^{-1}$ и $(M^*M - I)^{-1}$.

Если $\mathbf{A}$ — (*)-расширение оператора T класса Ω_A, то $\mathbf{A}$ — бирасширение оператора A, поэтому всякое (*) — расширение $\mathbf{A}$ оператора T имеет вид (2), где оператор Q удовлетворяет соотношениям ([7])

$$\begin{cases} Q(M+I)f = \dfrac{i}{2}(I-M)f, & f \in N'_i \oplus N, \\ Q^*(M^*+I)g = \dfrac{i}{2}(M^*-I)g, & g \in N'_{-i} \oplus N. \end{cases} \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть $Q \in [W', W]$ удовлетворяет соотношениям* (3), *тогда*

$$\mathrm{Ker}\left[\frac{Q+Q^*}{2}P^+ + \frac{i}{2}J^+\right] = \mathrm{Ker}\left[\frac{Q-Q^*}{2i}P^+\right]. \tag{4}$$

Доказательство. В силу (3)

$$P^+\left[\left(\frac{Q+Q^*}{2} - \frac{i}{2}J^+\right) + i\frac{Q-Q^*}{2i}\right](M+I)(N'_i \oplus N) = 0,$$

$$P^+\left[\left(\frac{Q+Q^*}{2} - \frac{i}{2}J^+\right) - i\frac{Q-Q^*}{2i}\right](M^*+I)(N'_{-i} \oplus N) = 0,$$

отсюда

$$P^+\left(\frac{Q+Q^*}{2} - \frac{i}{2}J^+\right)[(M+I)(N'_i \oplus N) + (M^*+I)(N'_{-i} \oplus N)] =$$

$$= P^+\frac{Q-Q^*}{2i}[(M+I)(N'_i \oplus N) + (M^*+I)(N'_{-i} \oplus N)].$$

Из обратимости операторов $MM^* - I$ и $M^*M - I$ следует плотность в W' линеала $(M+I)(N'_i \oplus N) + (M^*+I)(N'_{-i} \oplus N)$, поэтому

$$\overline{R\left[P^+\frac{Q+Q^*}{2} - \frac{i}{2}J^+\right]} = \overline{R\left[P^+\frac{Q-Q^*}{2i}\right]}.$$

Отсюда и вытекает (4).

Теорема 1. *Пусть* $S \in [W, W]$, $S = S^*$. *Для того чтобы самосопряженное бирасширение*

$$\mathbf{A} = AP^{+}_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(S - \frac{i}{2}J^{+}\right)\right] P^{+}_{W}$$

было сильным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{Ker}\left[SP^{+} + \frac{i}{2}J^{+}\right] = N \oplus (U + I)\, N'_{i},$$

где $U - (+1)$ *изометрическое отображение* N'_{i} *на* N'_{-i}.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{A} = AP^{+}_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(S - \frac{i}{2}J^{+}\right)\right] P^{+}_{W}$ — сильное самосопряженное бирасширение оператора A, тогда [1], [5]

$$D(\overset{*}{A}) = D(A) \oplus (V + I)(N'_{i} \oplus N),$$

где $V(+1)$ изометрическое отображение $N'_{i} \oplus N$ на $N'_{-i} \oplus N$, причем $(V + 1)\varphi \neq 0$, $\varphi \neq 0$

$$S(V + I)\varphi = \frac{i}{2}(I - V)\varphi, \quad \varphi \in N'_{i} \oplus N.$$

Из этого получим, что

$$\left(S - \frac{i}{2}I\right)(V + I)\varphi = -iV\varphi,$$

$$\left(S + \frac{i}{2}I\right)(V + I)\varphi = i\varphi, \quad \varphi \in N'_{i} \oplus N.$$

Поэтому

$$\left(S - \frac{i}{2}I\right)G_0 = N'_{-i} \oplus N, \quad \left(S + \frac{i}{2}I\right)G_0 = N'_{i} \oplus N,$$

где $G_0 = (V + I)(N'_{i} \oplus N)$. Пусть $G_0^{\perp} = W \ominus G_0$. Так как S — самосопряженный в W оператор, то

$$\left(S - \frac{i}{2}I\right)W = \left(S + \frac{i}{2}I\right)W = W,$$

значит

$$(N'_{-i} \oplus N) + \left(S - \frac{i}{2}I\right)G_0^{\perp} = W,$$

$$(N'_{i} \oplus N) + \left(S + \frac{i}{2}I\right)G_0^{\perp} = W,$$

откуда

$$P^{+}_{N'_{i}}\left(S - \frac{i}{2}I\right)G_0^{\perp} = N'_{i},$$

$$P^{+}_{N'_{-i}}\left(S+\frac{i}{2}I\right)G_0^{+}=N'_{-i}.$$

Кроме того

$$P^{+}_{N'_{\mp i}}\left(S\mp\frac{i}{2}I\right)\varphi\neq 0\ \forall\varphi\in G_0^{+},\ \varphi\neq 0.$$

Зададим оператор $\tilde{V}\in[N'_i,\ N'_{-i}]$:

$$\begin{cases}\varphi=P^{+}_{N'_i}\left(S-\frac{i}{2}I\right)f,\\ \tilde{V}\varphi=P^{+}_{N'_{-i}}\left(S+\frac{i}{2}I\right)f,\ f\in G_0^{+}.\end{cases}$$

В силу сказанного выше оператор $\tilde{V}$ корректно определен и отображает N'_i на N'_{-i}. Таким образом

$$R\left[P^{+}\left(S-\frac{i}{2}J^{+}\right)\right]=(\tilde{V}+I)\,N'_i.$$

Следовательно

$$\operatorname{Ker}\left[SP^{+}+\frac{i}{2}J^{+}\right]=N\oplus(\tilde{V}^{*}-I)\,N'_{-i}.$$

Пусть $f\in(\tilde{V}^{*}-I)\,N'_{-i}$, тогда $Sf=-\frac{i}{2}J^{+}f$. Из эрмитовости S вытекает, что $\|P^{+}_{N'_i}f\|^2_{+1}=\|P^{+}_{N'_{-i}}f\|^2_{+1}$. Это означает, что оператор $\tilde{V}^{*}(+1)$ изометричен. Обозначим $U=-\tilde{V}$, тогда $U\ (+1)$ изометричен и отображает N'_i на N'_{-i}, причем

$$\operatorname{Ker}\left[SP^{+}+\frac{i}{2}J^{+}\right]=N_s\oplus(U_s+I)\,N'_i.$$

Достаточность. Пусть

$$\operatorname{Ker}\left[SP^{+}+\frac{i}{2}J^{+}\right]=N\oplus(U+I)\,N'_i,$$

где

$$U\,N_i^{+}=N'_{-i},\ \|Uf\|^2_{+1}=\|f\|^2_{+1}\quad\forall f\in N_i.$$

Тогда

$$R\left[P^{+}S-\frac{i}{2}J^{+}\right]=(U-I)\,N'_i, \tag{*}$$

Это означает, что

$$\left\|P^{+}_{N'_i}\left(S-\frac{i}{2}I\right)f\right\|_{+1}=\left\|P^{+}_{N'_{-i}}\left(S+\frac{i}{2}I\right)f\right\|_{+1}\ \forall f\in W.$$

Если $\mathbf{A}$ не сильно самосопряженное бирасширение, то всегда найдется $f \in W(\{1\})$, что либо

$$P^+_{N'_i}\left(S-\frac{i}{2}I\right)f=0, \text{ а } P^+_{N'_{-i}}\left(S+\frac{i}{2}I\right)f\neq 0,$$

либо

$$P^+_{N'_i}\left(S-\frac{i}{2}I\right)f\neq 0, \text{ а } P^+_{N'_{-i}}\left(S+\frac{i}{2}I\right)f=0.$$

В этих случаях не выполняется ($*$), значит $\mathbf{A}$ — сильное самосопряженное бирасширение. Теорема доказана.

Определение. ($*$)-расширение $\mathbf{A}$ оператора T класса Ω_A назовем регулярным, если $\mathbf{A}_R=\dfrac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)$ — сильное самосопряженное бирасширение оператора A.

Определение. Оператор T класса Ω_A будем относить к классу Λ_A, если он допускает регулярные ($*$)-расширения.

Теорема 2. *Для того чтобы оператор T класса Ω_A принадлежал классу Λ_A, необходимо и достаточно, чтобы существовало $(+1)$ изометрическое отображение U N'_i на N'_{-i} такое, что*

$$\begin{cases} D(T)\dotplus(U+I)N'_i=H_+ \\ D(T^*)\dotplus(U+I)N'_i=H_+. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{A}=AP^+_{D(A)}+\left[A^*+\mathbf{J}^{-1}\left(Q-\frac{i}{2}J^+\right)\right]P^+_{\mathfrak{N}}$ — регулярное ($*$)-расширение оператора T класса Ω_A, при этом выполняются равенства (3).

Так как $\mathbf{A}_R=AP^+_{D(A)}+\left[A^*+\mathbf{J}^{-1}\left(\dfrac{Q+Q^*}{2}-\dfrac{i}{2}J^+\right)\right]P^+_{\mathfrak{N}}$ — сильное самосопряженное бирасширение оператора A, то по теореме 1

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q+Q^*}{2}P^++\frac{i}{2}J^+\right]=N\oplus(U+I)N'_i,$$

$$UN'_i=N'_{-i},\ \|Uf\|_{+1}=\|f\|_{+1}\quad \forall f\in N'_i.$$

Из формулы (4) следует, что

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q-Q^*}{2i}P^+\right]=N\oplus(U+I)N'_i.$$

Значит $\forall f_i\in N'_i$

$$\frac{Q+Q^*}{2}(U+I)f_i=\frac{i}{2}(U-I)f_i;\ \frac{Q-Q^*}{2i}(U+I)f_i=0,$$

$$Q(U+I)f_i=Q^*(U+I)f_i=\frac{i}{2}(U-I)f_i.$$

Поскольку

$$\left(Q-\frac{i}{2}J\right)(M+I)\varphi=\frac{i}{2}P^{+}_{N}(I-M)\varphi,\ \varphi\in N_i\oplus N,$$

то

$$(U+I)N_i\cap(M+I)(N_i\oplus N)=\{0\}.$$

Аналогично

$$(U+I)N_i'\cap(M^*+I)(N_{-i}'\oplus N)=\{0\}.$$

Пусть h $(+1)$ ортогонален $(U+I)N_i\dot{+}(M+I)(N_i'\oplus N)$, тогда легко видеть, что

$$h=(U-I)e_i+e_N,\ e_i\in N_i,\ e_N\in N,\ h=z-P^{+}_{N_i}M^*z,$$

где $P^{+}_{N}(M^*+I)z=0$, значит

$$\begin{cases} e_i=P^{+}_{N_i}M^*z\\ Ue_i=P^{+}_{N_{-i}}z,\end{cases}$$

$$(U+I)e_i=P^{+}_{N_i}M^*z+P^{+}_{N_{-i}}z=(M^*+I)z.$$

Так как

$$(U+I)N_i'\cap(M^*+I)(N_{-i}'\oplus N)=0,\ z=0,\ e_i=0,$$

то $h=0$. Поэтому

$$(M+I)(N_i'\oplus N)\dot{+}(U+I)N_i \text{ и аналогично}$$

$$(M^*+I)(N_{-i}'\oplus N)\dot{+}(U+I)N_i \text{ всюду плотно в } W.$$

Пусть $f^{(n)}=(U+I)\varphi^{(n)}+(M+I)h^{(n)}$, $n=1,2,\cdots$ $(+1)$ сходящаяся последовательность.

Так как Q $(+1)$ непрерывен, то последовательность $\{Qf^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ сходящаяся

$$Qf^{(n)}=\frac{i}{2}(U-I)\varphi^{(n)}+\frac{i}{2}(I-M)h^{(n)},$$

$$\left(Q+\frac{i}{2}I\right)f^{(n)}=iU\varphi^{(n)}+ih^{(n)},\ n=1,2,\cdots.$$

Из ортогональности N_{-i}' и $N_i'\oplus N$ вытекает, что $\{U\varphi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{h^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящиеся последовательности, поэтому $\{\varphi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, и значит

$$(U+I)N_i'\dot{+}(M+I)(N_i'\oplus N)=W.$$

Аналогично $(U+I)N_i'\dot{+}(M^*+I)(N_{-i}'\oplus N)=W$.

Вследствие $D(T)=D(A)\oplus(M+I)(N_i'\oplus N)$,

$$D(T^*)=D(A)\oplus(M^*+I)(N_{-i}'\oplus N)$$

получаем

$$D(T)\dot{+}(U+I)N_i'=D(T^*)\dot{+}(U+I)N_i'=H_+.$$

Достаточность. Пусть U — такое изометрическое отображение, что выполнены равенства (5).

Определим $Q \in [W, W]$ следующим образом:

$$\begin{cases} f = (U+I)\, e_i + (M+I)\, \varphi, \\ Qf = \frac{i}{2}(U-I)\, e_i + \frac{i}{2}(I-M)\, \varphi, \; e_i \in N'_i, \; \varphi \in N_i \ominus N. \end{cases}$$

Простой проверкой можно убедиться в том, что оператор Q^* задается следующим образом:

$$\begin{cases} h = (U+I)\, g_i + (M^*+I)\, \psi, \\ Q^* h = \frac{i}{2}(U-I)\, g_i + \frac{i}{2}(M^*-I)\, \psi, \end{cases}$$

$$g_i \in N'_i, \; \psi \in N_i \ominus N.$$

Отсюда ясно, что оператор

$$\mathbf{A} = A P^+_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(Q - \frac{i}{2} J^+\right)\right] P^+_W$$

(*)-расширение оператора T класса Ω_A.

Так как

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q+Q^*}{2} P^+ + \frac{i}{2} J^+\right] = N \oplus (U+I)\, N'_i, \; U N'_i = N'_{-i},$$

то по теореме 1

$$\mathbf{A}_R = A P^+_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(\frac{Q+Q^*}{2} - \frac{i}{2} J^+\right)\right] P^+_W$$

— сильное самосопряженное бирасширение оператора A, значит

$$\mathbf{A} = A P^+_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(Q - \frac{i}{2} J^+\right)\right] P^+_W$$

— регулярное (*)-расширение оператора T, поэтому $T \in \Lambda_A$.

Теорема 3. *Если у замкнутого эрмитова оператора A индексы дефекта конечны и равны, то класс Ω_A совпадает с классом Λ_A.*

Доказательство. В [8] показано, что если у замкнутого эрмитова оператора конечные и равные дефектные числа, то равны и полудефектные числа. В [5] показано, что замкнутый эрмитов оператор с конечными дефектными числами регулярен. Легко видеть, что если оператор удовлетворяет условиям $T \supset A$, $T^* \supset A$, то PT и PT^* — замкнутые операторы. $N_{\pm i} = H_0 \ominus (A \pm iI)\, D(A)$.

Пусть $T \in \Omega_A$, $\dim N_{\pm i} = r$, $\dim N = p$, $r < \infty$, тогда $\dim N'_i = \dim N'_{-i} = r - p$.

Пусть M — отвечающий T в пространстве W оператор

$$D(T) = D(A) \dotplus (M + I)(N'_i \oplus N),$$

$$D(T^*) = D(A) \dotplus (M^* + I)(N'_{-i} \oplus N).$$

Из плотности $D(T)$ и $D(T^*)$ в H_0 вытекает, что

$$P^+_N (M + I)(N'_i \oplus N) = P^+_N (M^* + I)(N'_{-i} \oplus N) = N.$$

Обозначим

$$\tilde{N} = \operatorname{Ker}\, [P^+_N (M + I)];\ \tilde{N}_* = \operatorname{Ker}\, [P^+_N (M^* + I)].$$

Из сказанного выше следует, что $\dim \tilde{N} = \dim \tilde{N}_* = r - p$. Обозначим через F, G, L следующие подпространства в $\tilde{N}$

$$F = \operatorname{Ker}\, [P^{+}_{N'_i}|_{\tilde{N}}];\ G = \operatorname{Ker}\, [P^{+}_{N'_{-i}} M|_{\tilde{N}}];\ L = \tilde{N} \ominus [F \dotplus G].$$

Отметим, что $F \cap G = \{0\}$ вытекает из равенства $(M + I) f = P^+_{N'_i} f + P^+_{N'_{-i}} Mf$, $f \in \tilde{N}$ и обратимости оператора $M + I$.

Пусть $K = N'_{-i} \ominus [P^+_{N'_{-i}} MF \dotplus P^+_{N'_{-i}} ML]$. Так как $\dim \tilde{N} = \dim N'_{-i}$, то $\dim K = \dim G$.

Зададим изометрическое отображение подпространства $P^+_{N'_i} G \dotplus P^+_{N'_i} L$ на $K \oplus P^+_{N'_{-i}} ML$ и продолжим его до отображения V пространства N'_i на N'_{-i}.

Рассмотрим на $\tilde{N}$ уравнение относительно f

$$V P^+_{N'_i} f = \alpha P^+_{N'_{-i}} Mf, \tag{6}$$

α — комплексный параметр.

Пусть $f_\alpha \neq 0$ — решение этого уравнения, тогда

$$g = \alpha P^+_{N'_{-i}} M f_\alpha \in P^+_{N'_{-i}} MF \dotplus P^+_{N'_{-i}} ML,$$

$$g = V P^+_{N'_i} f_\alpha \in V (P^+_{N'_i} G \dotplus P^+_{N'_i} L).$$

Отсюда

$$g \in [P^+_{N'_{-i}} MF \dotplus P^+_{N'_{-i}} ML] \cap [K \oplus P^+_{N'_{-i}} ML].$$

Из определения подпространства K вытекает, что $g \in P^+_{N'_{-i}} ML$, т. е. $f_\alpha \in G \oplus L$.

Допустим, что уравнение (6) разрешимо при любом α. Выберем последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$. Пусть f_n, $\|f_n\|_{+1} = 1$, $n=1, 2, \cdots$; решение уравнения (6) при $\alpha = \alpha_n$. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ компактна. Будем считать, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f, $\|f\|_{+1} = 1$, так как $f_n \in L \oplus G$, $f \in L \oplus G$. Поскольку $\|P^+_{N'_{-1}} Mf_n\| \leqslant \|Mf_n\| \leqslant \|M\|$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n P^+_{N'_{-i}} Mf_n = 0$. Значит $\lim\limits_{n \to \infty} V P^+_{N'_i} f_n = 0$, $P^+_{N'_i} f = 0$. Поэтому $f \in F$, вопреки $f \in L \oplus G$ и $f \neq 0$.

Получили противоречие, значит существует лишь конечное множество чисел α, при которых уравнение (7) имеет нетривиальное решение. Это множество обозначим через $\mathfrak{a}$, если $\alpha_0 \overline{\in} \mathfrak{a}$ и $|\alpha_0| = 1$, то оператор $\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} - P^{+}_{N'_{-i}} M$ отображает взаимно однозначно $\tilde{N}$ на N'_{-i}.

Покажем, что оператор $P_{N'_{-i}} - \bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} M^*$ отображает взаимно однозначно $\tilde{N}_*$ на N'_{-i}. Допустим, что $\exists g \in \tilde{N}_*$, при котором

$$P^{+}_{N'_{-i}} g = \bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} M^* g,$$

тогда при любом $f \in \tilde{N}$ имеем

$$0 = (f, \alpha_0 V^{-1} (P^{+}_{N'_{-i}} g - \bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} M^* g)_{+1} =$$

$$= (f, \alpha_0 V^{-1} P^{+}_{N'_{-i}} g)_{+1} - (f, P^{+}_{N'_i} M^* g)_{+1} =$$

$$= (\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} f, g)_{+1} - (f, M^* g)_{+1} + (f, P_N M^* g)_{+1} =$$

$$= (\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} f, g)_{+1} - (Mf, g)_{+1} - (f, P^{+}_N g)_{+1} =$$

$$= (\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} f, g)_{+1} - (Mf, g)_{+1} + (P^{+}_N f, g)_{+1} =$$

$$= (\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} f, g)_{+1} - (Mf, g)_{+1} + (P^{+}_N Mf, g)_{+1} =$$

$$= (\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} f - P^{+}_{N'_{-i}} Mf, g)_{+1}.$$

Значит g $(+1)$ ортогонален подпространству N'_{-i}, так как $g \in N'_{-i} \oplus N$ то $g \in N$, поэтому $P^{+}_{N'_i} M^* g = 0$, $(M^* + I) g = 0$. Отсюда $g = 0$.

Следовательно, уравнение $P^{+}_{N'_{-i}} g = \bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} M^* g$ имеет только тривиальное решение, поэтому $P^{+}_{N'_{-i}} - \bar{\alpha}_0 V P_{N'_i} M^*$ отображает $\tilde{N}_*$ на N_{-i}. Обозначим $U = \bar{\alpha}_0 V$. Покажем, что $(U + I) N'_i \cap (M + I)(N'_i \oplus N) = \{0\}$. Пусть $(U+I) f_i = (M+I) g$, $f_i \in N'_i$, $g \in N'_i \oplus N$. Из этого равенства следует, что $g \in \tilde{N}$ и $U P^{+}_{N'_i} g - P^{+}_{N'_{-i}} Mg = 0$, но как мы уже показали это уравнение имеет только тривиальное решение, поэтому $g = 0$

$$(U + I) N'_i \dotplus (M + I)(N'_i \oplus N) = W.$$

Аналогично $(U + I) N'_i \dotplus (M^* + I)(N'_{-i} \oplus N) = W$. По теореме 2 оператор $T \in \Lambda_A$.

Приведем пример оператора $T \in \Omega_A$, но $T \overline{\in} \Lambda_A$. Рассмотрим случай плотно заданного оператора A, тогда

$$N = 0 \text{ и } H_+ = D(A) \oplus N_{-i} \oplus N_{-i}.$$

Пусть $\dim N_{-i} = \dim N_i = \infty$. Мы построим такой оператор $M \in [N_i, N_{-i}]$, что $M^* M - I$ и $MM^* - I$ обратимы и для любого изометрического отображения U N_i на N_{-i} не выполняются равенства (5).

Прежде всего отметим, что если выполняются равенства (5), то оператор $M-U$ — изоморфизм N_i и N_{-i}. В самом деле, для любого $e_{-i}\in N_{-i}$ однозначно найдутся $f_i, g_i\in N_i$, такие, что $e_{-i}=(U+I)f_i+(M+I)g_i$, но тогда $g_i=-f_i$ и $(M-U)f_i=e_{-i}$, т. е. уравнение $(M-U)f_i=e_{-i}$ однозначно разрешимо при любом $e_{-i}\in N_{-i}$.

Пусть B — вполне непрерывный оператор в N_i $\forall f\in N_i(Bf,f)_+\geqslant -\varepsilon(f,f)_+$, $0<\varepsilon<1$, причем число 0 не является собственным значением оператора B. Пусть V — изометрический оператор, отображающий N_i в N_{-i} и $\dim \operatorname{Ker}[V^*]=\infty$.

Положим $M=V(B+I)$, тогда $M^*=(B+I)V^*$,

$$M^*M-I=(B+I)V^*V(B+I)-I=B(B+2I).$$

Поскольку -2 — регулярная точка для B, а $R(B)$ плотно в N_i, то M^*M-I обратим

$$MM^*-I=V(B+I)^2V^*-I.$$

Если $(MM^*-I)f=0$, то $[(B+I)^2-I]V^*f=0$, поэтому $V^*f=0$, значит $f=V(B+I)^2V^*f=0$, т. е. MM^*-I также обратим.

Отметим, что оператор $MM^*-I=B(B+2I)$ вполне непрерывен. Допустим, что существует $U\in[N_i, N_{-i}]$ такой, что выполняются равенства (5), значит $M-U$ — изоморфизм N_i и N_{-i}, а следовательно, M^*-U^* изоморфизм N_{-i} и N_i.

Пусть G такое подпространство в N_i, что

$$(M-U)G=\operatorname{Ker}[V^*],\ \dim G=\infty.$$

При любом $g\in G$ и любом $f_i\in N_i$ имеем $((M-U)g, Mf_i)_+=0$, тогда $M^*Mg=M^*Ug$. Так как M^*-U^* изоморфизм N_{-i} и N_i, то $\exists c>0\ \|(M^*U-I)f\|_+\geqslant c\|f\|_+$ $\forall f\in N_i$, в частности $\forall g\in G$ $\|(M^*U-I)g\|_+\geqslant c\|g\|_+$ и поскольку $M^*Ug=M^*Mg$, то $\|(M^*M-I)g\|_+\geqslant c\|g\|_+$, но это неравенство невозможно, потому что M^*M-I вполне непрерывен, а $\dim G=\infty$.

Поэтому не существует изометрического оператора U со свойством (5). Положим $D(T)=D(A)\dotplus(M+I)N_i$

$$Tf=A^*f,\ f\in D(T).$$

Получим $T\in\Omega_A$, но $T\notin\Lambda_A$.

Дадим описание всех регулярных (*)-расширений оператора T класса Λ_A. Как следует из доказательства теоремы 2 всякому регулярному (*)-расширению **A** оператора T класса Λ_A отвечает $(+1)$ изометрическое отображение U N_i на N_{-i} такое, что выполняются равенства (5), и наоборот, причем, если Q — оператор, задающий **A**, то

$$\left(Q-\frac{i}{2}J^+\right)(U+I)f_i=\left(Q^*-\frac{i}{2}J^*\right)(U+I)f_i=$$
$$=i(U-I)f_i,\ f_i\in N_i.$$

Таким образом, мы имеем взаимно-однозначное соответствие между операторами U со свойством (5) и регулярными (*)-расширениями **A**.

Пусть $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}_*$) — оператор проектирования в H_+ на $D(T)$ ($D(T^*)$) параллельно $(U+I)N_i'$, тогда

$$A^*(I-\mathbf{P})f = iJ^+(I-\mathbf{P})f,$$

$$A^*(I-\mathbf{P}_*)f = iJ^+(I-\mathbf{P}_*)f,$$

$$\left(Q-\frac{i}{2}J^+\right)(I-\mathbf{P})f = -iJ^+(I-\mathbf{P})f,$$

$$\left(Q^*-\frac{i}{2}J^+\right)(I-\mathbf{P}_*)f = -iJ^+(I-\mathbf{P}_*)f,\ f\in H_+.$$

Имеем

$$\begin{cases} \mathbf{A}_P = T\mathbf{P} + i(I-\mathbf{J}^{-1})J^+(I-\mathbf{P}) \\ \mathbf{A}_P^r = T^*\mathbf{P}_* + i(I-\mathbf{J}^{-1})J^+(I-\mathbf{P}_*). \end{cases} \tag{7}$$

Приведем критерий регулярности (*)-расширения оператора T класса Ω_A.

Мы будем использовать одно соотношение, имеющееся в [1].

Пусть $N_{\pm i} = H_0 \ominus (A \pm iI)D(A)$ — дефектные подпространства оператора A, тогда

$$N_{\pm i} = (A^* \pm iI)(N'_{\pm i} \ominus N). \tag{8}$$

Теорема 4. *Для того чтобы (*)-расширение* $\mathbf{A}$ *было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись одновременно включения:*

$$(\mathbf{A}+iI)N_{-i} \geqslant R(\mathbf{A}-\mathbf{A}^r);$$

$$(\mathbf{A}^r-iI)N_i \geqslant R(\mathbf{A}-\mathbf{A}^r)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{A}$ — регулярное (*)-расширение оператора T, тогда найдется изометрическое отображение U N_i' на N_{-i}' такое, что

$$(U+I)N_i' \dotplus (M+I)(N_i' \ominus N) = W,$$

$$(U+I)N_i' \dotplus (M^*+I)(N'_{-i} \oplus N) = W.$$

Пусть

$$\mathbf{A} = AP_{D(A)} + \left|A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(Q-\frac{i}{2}\mathbf{J}^+\right)\right| P_W^+.$$

Поскольку

$$Q(U+I)f_i = Q^*(U+I)f_i = \frac{i}{2}(U-I)f_i,\ f_i \in N_i',$$

то

$$\left(Q-\frac{i}{2}J^+\right)(U+I)f_i = \left(Q^*-\frac{i}{2}J^+\right)(U+I)f_i = i(U-I)f_i.$$

Так как

$$\mathrm{Ker}\left|\frac{Q-Q^*}{2i}P^+\right| = N \oplus (U+I)N_i',$$

то

$$\overline{R\left[P^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}\right]}=(U-I)\,N_{i}=\left(Q-\frac{i}{2}\,J^{+}\right)(U+I)\,N_{i}.$$

Пусть

$$f=\frac{1}{2i}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{*})\,g=\mathbf{J}^{-1}\left(\frac{Q-Q^{*}}{2i}\,g\right)=\mathbf{J}^{-1}\,P^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}g+$$

$$+\mathbf{J}^{-1}\,P_{N}^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}\,g.$$

Найдется вектор $h=(U+I)\,e_{i}$, $e_{i}\in N_{i}$ такой, что

$$P^{+}\left(Q-\frac{i}{2}\,J^{+}\right)h=P^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}\,g.$$

Легко видеть, что вектор

$$\varphi=h+(T+iI)^{-1}\left[\mathbf{J}^{-1}\,P_{N}^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}\,g-(A^{*}+iI)\,h\right]$$

является решением уравнения $(\mathbf{A}+iI)\,\varphi=f$. Так как $\varphi\in N_{-i}$, то $(\mathbf{A}+iI)\,N_{-i}\supseteq R\,(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{*})$. Аналогично $(\mathbf{A}^{*}-iI)\,N_{i}\supseteq R\,(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{*})$.

Достаточность. Пусть

$$\mathbf{A}=A\,P_{D\,(A)}^{+}+\left[A^{*}+\mathbf{J}^{-1}\left(Q-\frac{i}{2}\,J^{+}\right)\right]P_{W}^{+},$$

$$(\mathbf{A}+iI)\,N_{-i}\supseteq R\,(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{*}),\ (\mathbf{A}^{*}-iI)\,N_{i}\supseteq R\,(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{*}).$$

Из того, что Q удовлетворяет соотношениям (3) и плотности линеала $(M+I)(N_{i}\oplus N)+(M^{*}+I)(N_{-i}\oplus N)$ в W легко следует, что

$$\overline{R\left[P^{+}\,Q-\frac{i}{2}\,J^{+}\right]}\subseteq\overline{R\left[P^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}\right]},$$

$$\overline{R\left[P^{+}Q^{*}-\frac{i}{2}J^{+}\right]}\subseteq\overline{R\left[P^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}\right]}.\tag{9}$$

Пусть $f_{i}\in N_{i}$, тогда из (8)

$$f_{i}=(A^{*}+iI)\,\varphi_{N}+\varphi_{i},\ \varphi_{N}\in N,\ \varphi_{i}\in N_{i}.$$

$$(\mathbf{A}^{*}-iI)\,f_{i}=(AA^{*}+I)\,\varphi_{N}+\mathbf{J}^{-1}\,P^{+}\left(Q^{*}-\frac{i}{2}J^{+}\right)(\varphi_{i}+\varphi_{N})+$$

$$+\mathbf{J}^{-1}\,P_{N}^{+}\left(Q^{*}-\frac{i}{2}J^{+}\right)(\varphi_{i}+\varphi_{N})=\mathbf{J}^{-1}\left[\frac{1}{2}\,\varphi_{N}+P_{N}^{+}\,Q^{*}\,(\varphi_{i}+\varphi_{N})\right]+$$

$$+\mathbf{J}^{-1}\,P^{+}\left(Q^{*}-\frac{i}{2}\,J^{+}\right)(\varphi_{i}+\varphi_{N}).$$

(Здесь использовано то, что $A^{*}\,\varphi_{i}=i\varphi_{i}$, $A^{*}\,N\subset D\,(A)$,

$\frac{1}{2}\,\mathbf{J}^{-1}\varphi_N = (AA^* + I)\,\varphi_N$, см. [1]).

Отсюда и из $(\mathbf{A}^* - iI)\,N_i \supset R\,(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)$ следует, что

$$\overline{R\left[P^+\left(Q^* - \frac{i}{2}\,J^+\right)\right]} \supseteq \overline{R\left[P^+\,\frac{Q - Q^*}{2i}\right]},$$

сравнивая с (9), получим

$$\operatorname{Ker}\left[QP^+ + \frac{i}{2}J^+\right] = \operatorname{Ker}\left[\frac{Q - Q^*}{2i}\,P^+\right].$$

Аналогично

$$\operatorname{Ker}\left[Q^* P^+ + \frac{i}{2}J^+\right] = \operatorname{Ker}\left[\frac{Q - Q^*}{2i}P^+\right].$$

Из эрмитовости $\frac{1}{2}\,(Q + Q^*)$ вытекает, что существует подпространство $\dot{N}_i \subseteq N_i$, изометрический оператор $V\colon \dot{N}_i \to N_{-i}$ такие, что

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q + Q^*}{2}\,P^+ + \frac{i}{2}J^+\right] = N \oplus (V + I)\,\dot{N}_i\,.$$

Рассуждая так же как при доказательстве теоремы 2, получим, что

$$(V + I)\,\dot{N}_i \dotplus (M + I)(N_i \ominus N)$$

— подпространство в W.

Так как

$$\operatorname{Ker}\left[P^+\left(Q^* - \frac{i}{2}\,J^+\right)\right] = (M^* + I)(N_{-i} \ominus N),$$

то

$$W \ominus \operatorname{Ker}\left[P^+\left(Q^* - \frac{i}{2}\,J^+\right)\right] = (I - P^+_{N_{-i}})\,\tilde{N},$$

где $\tilde{N} = \operatorname{Ker}\,[P_N\,(M + I)]$.

Пусть $\varphi \in \tilde{N}$, тогда $(M + I)\,\varphi \in N_i \oplus N_{-i}$ и

$$\left(Q + \frac{i}{2}J^+\right)(M + I)\,\varphi = i\,[I - P^+_{N_{-i}}\,M]\,\varphi.$$

Это означает, что

$$\overline{R\left[QP^+ + \frac{i}{2}\,J^+\right]} = R\left[QP^+ + \frac{i}{2}J^+\right] = (I - P^+_{N_{-i}}M)\,\tilde{N}\,.$$

Пусть

$$f \in W \ominus [(V + I]\,\dot{N}_i \dotplus (M + I)\,(N_i \ominus N)],$$

тогда $\exists\varphi \in \tilde{N}$, что

$$\left(QP^{+}+\frac{i}{2}J^{+}\right)f=\left(Q+\frac{i}{2}J^{+}\right)(M+I)\varphi.$$

Поэтому

$$f=(M+I)\varphi+(V+I)\varphi_i+\varphi_N,\ \varphi_i\in\hat{N}_i,\ \varphi_N\in N.$$

Так как $(f,(M+I)\varphi)_{+1}=(f,(V+I)\varphi_i)_{+1}=0$, то

$$(f,\varphi_N)_{+1}=(\varphi_N,f)_{+1}=\|\varphi_N\|^2_{+1}=\|f\|^2_{+1}.$$

Отсюда $f=\varphi_N$, значит $f\in N$. Но так как $f\perp(M+I)(N_i\ominus N)$, то

$$f=(I-P_{N_i}M^*)z,\ \text{где}\ P_N(M^*+I)z=0.$$

Если $f\in N$, то $(M^*+I)z=0$, т. е. $z=0$, $f=0$. Таким образом

$$(V+I)\hat{N}_i\dotplus(M+I)(N_i\ominus N)=W. \tag{10}$$

Из леммы 1

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q-Q^*}{2i}P^{+}\right]=N\oplus(V+I)\hat{N}_i.$$

Из (10)

$$R\left[P^{+}\left(Q-\frac{i}{2}J^{+}\right)\right]=P^{+}\left(Q-\frac{i}{2}J^{+}\right)(V+I)\hat{N}_i=(V-I)\hat{N}_i.$$

Из равенства

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q-Q^*}{2i}P^{+}\right]=\operatorname{Ker}\left[Q^*P^{+}+\frac{i}{2}J^{+}\right]$$

получаем

$$\overline{R\left[P^{+}\left(Q-\frac{i}{2}J^{+}\right)\right]}=W\ominus\operatorname{Ker}\left[\frac{Q-Q^*}{2i}P^{+}\right].$$

Поэтому

$$W=(V-I)\hat{N}_i\oplus(V+I)\hat{N}_i\oplus N.$$

Значит $\hat{N}_i=N_i$, $VN_i=N_{-i}$.

По теореме 1

$$\mathbf{A}_R=AP^{+}_{D(\mathbf{A})}+\left[A^*+\mathbf{J}^{-1}\left(\frac{Q+Q^*}{2}-\frac{i}{2}J^{+}\right)\right]P^{+}_{W}$$

— сильное самосопряженное бирасширение оператора A, поэтому $\mathbf{A}$ — регулярное (*)-расширение оператора T.

Донецкий государственный университет

Поступила 16.V.1977

*Յու. Մ. ԱՌԼԻՆՍԿԻ. Հանդերձված հիլբերտյան տարածություններում քվազիէրմիտյան օպերատորների ռեգուլյար (*)-ընդլայնումներ (ամփոփում)*

*Հոդվածը նվիրված է հանդերձված հիլբերտյան տարածության մեջ ելքով քվազիէրմիտյան օպերատորների ռեգուլյար (*)-ընդլայնումների ուսումնասիրությանը։ Այդ ընդլայնումները սկզբունքային նշանակություն ունեն ոչ սահմանափակ օպերատորային հանգույցների բնութագրիչ օպերատոր-ֆունկցիաների տեսության համար։*

*Մտցված է օպերատորների մի դաս, որոնք թույլ են տալիս ռեգուլյար (*)-ընդլայնում, բերվում է օպերատորը այդ դասին պատկանելու հայտանիշը։ Տրված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի տվյալ ընդլայնումը լինի ռեգուլյար։*

Yu. M. ARLINSKY. *Regular (*)-extensions of quasihermitian operators in the equipped Hilbert spaces* (summary)

The paper deals with the (*)-extensions of quasihermitian operators, which are applied to the theory of characteristic operator-function of unbounded operator nots.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. М. Арлинский, Э. Р. Цекановский.* Метод оснащенных пространств в теории расширений эрмитовых операторов с неплотной областью определения, Сиб. мат. журнал, XV, № 2, 1974, 243—261.
2. *Э. Р. Цекановский.* Обобщенные расширения неограниченных линейных операторов Докторская диссертация, Харьков, 1970.
3. *Э. Р. Цекановский.* Об описании и единственности обобщенных расширений квазиэрмитова оператора, Функц. анализ, 3, № 1, 1969, 96—97.
4. *Ю. М. Арлинский.* Об обратной задаче теории характеристических функций неограниченных операторных узлов, ДАН УССР, сер. А, № 2, 1976, 105—109.
5. *Ю. Л. Шмульян.* Регулярные и сингулярные эрмитовы операторы, Мат. заметки, 8, № 2, 1970, 197—203.
6. *Ю. М. Березанский.* Пространства с негативной нормой, УМН, 18, № 1, 1963, 63—96.
7. *Э. Р. Цекановский, Ю. Л. Шмульян.* Метод обобщенных функций в теории расширений неограниченных линейных операторов, Издательство Донецкого университета, 1973.
8. *М. А. Красносельский.* О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов, УМЖ, № 1, 1948, 21—38.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS