ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Издается преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedin s Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of types script. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that woold call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where tho work has been caried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenian, SSR
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian, SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 3, 1979 Математика

А. Ю. ШАХВЕРДЯН

ОБ УБЫВАНИИ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Рассматриваем следующую задачу. Пусть U—единичный круг в плоскости (z) и совокупность $E \subset U$ состоит из попарно не пересекающихся множеств e_k, $E = \sum_{k \geq 1} e_k$, сгущающихся к единичной окружности S, таких что cap $(e_i) > 0$ для каждого $k \geq 1$ и

$$d(e_k) = O(1), \ \rho(e_i, e_j) \geq \delta > 0 \ (k \to +\infty; \ i, j = 1, 2, \cdots; \ i \neq j), \quad (1)$$

где $\rho(x, y)$ есть гиперболическое расстояние между точками $x, y \in U$, а $d(e)$ — гиперболический диаметр множества $e \in U$:

$$d(e) = \sup \{\rho(x, y) | \ x, y \in e\}.$$

Если B означает класс аналитических ограниченных в U функций, то задача состоит в точной оценке скорости убывания нетождественных функций $f \in B$ к нулю вдоль E, точнее в оценке скорости убывания величин

$$\|f\|_{e_k} = \sup_{z \in e_k} |f(z)|.$$

Как известно, вопросы такого характера (также и для общего случая мероморфных функций с заданной характеристикой $T(r)$) впервые были поставлены и систематически изучались А. Л. Шагиняном ([1—2]). В. Зейдель и др. в [3] заметили, что метод гармонической меры Р. Неванлинны (см. [4], гл. 3) применим к решению такого типа задач и получили более простое доказательство одной теоремы А. Л. Шагиняна. При доказательстве основного результата настоящей работы (теорема 1) мы также используем этот метод.

Выражаю искреннюю благодарность академику АН Арм.ССР А. Л. Шагиняну за постановку задачи и внимание к работе.

Для простоты записи примем следующие обозначения. Если $b(z)$ есть произведение Бляшке с последовательностью нулей N, то записываем $b(z) = b(z, N)$. Символом $\overline{N}$ обозначаем множество нулей функции $b(z, N)$. Если $a \in U$, $0 \leq \rho < +\infty$, то $C(a, \rho)$ есть неевклидовый круг с центром в точке a радиуса ρ. Класс $B_0 \subset B$ по определению состоит из тех функций, которые имеют лишь конечное число нулей в U и содержат все тождественно постоянные функции. B_1 есть класс тех функций $f \in B$, для которых $\sup_{z \in U} |f(z)| \leq 1$. Запись const означает положительную постоянную. Иногда пишем $\|f\|_k$ вместо $\|f\|_{e_k}$.

Лемма 1. *Если $b(z)=b(z, N)$ есть произведение Бляшке, а e — непустое подмножество U, то*

$$\inf_{z\in e}|b(z)|\geqslant \exp\left\{-\lambda\frac{1+\log \operatorname{cth}\rho(e, \overline{N})}{1-\sup\limits_{z\in e}|z|}\right\}, \tag{2}$$

где $0<\lambda<\infty$ — постоянная, не зависящая от e.

Доказательство. Будем исходить из интегрального представления логарифма модуля произведения Бляшке. Пусть

$$b(z)=\prod_{k\geq 1}\frac{\overline{\alpha}_k}{|\alpha_k|}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z}, \quad \sum_{k\geq 1}(1-|\alpha_k|)<\infty \tag{3}$$

(если $\alpha_k=0$, то множитель $\dfrac{\overline{\alpha}_k}{|\alpha_k|}$ опускается).

Тогда

$$-\log|b(z)|=\sum_{k\geq 1}\log\left|\frac{1-\overline{\alpha}_k z}{z-\alpha_k}\right|$$

или

$$-\log|b(z)|=\int\limits_{\overline{N}}\log\frac{1}{[a, z]}\,d\mu(a),$$

где $[a, z]=\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|$, μ — точечное распределение положительной массы (конечной или бесконечной) на $\overline{N}$ и $\mu(a)$ есть кратность нуля $a\in\overline{N}$. Если ввести $d\sigma(a)=(1-|a|)\,d\mu(a)$, то $\operatorname{supp}(\sigma)=\overline{N}$ и условие сходимости ряда из (3) запишется в виде

$$\int\limits_{\overline{N}}d\sigma(a)=\sigma(\overline{N}),\ 0<\sigma(\overline{N})<\infty$$

и нужное нам представление есть:

$$-\log|b(z)|=\int\limits_{\overline{N}}\frac{\log\frac{1}{[a, z]}}{1-|a|}\,d\sigma(a). \tag{4}$$

Для оценки последнего интеграла нам необходимо следующее замечание. Если $a\in U$, $0\leqslant\rho<\infty$ и a_1, a_2 ($|a_1|\leqslant|a_2|$) есть точки пересечения радиуса $[0, e^{i\arg a})$ с окружностью $\partial C(a, \rho)$, то

$$1-|a_1|=(1-|a|)\frac{1+th\,\rho}{1-|a|\,th\,\rho},\quad 1-|a_2|=(1-|a|)\frac{1-th\,\rho}{1+|a|\,th\,\rho}. \tag{5}$$

Для доказательства этих равенств достаточно рассмотреть образ $C(a, \rho)$ при преобразовании

$$\xi(z)' = e^{-i\arg a} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Вернемся к интегралу (4). Если $z \in U \setminus \bar{N}$, $N_z = \bar{N} \cap C(z, 1)$, то из (4) имеем

$$-\log|b(z)| = J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \int\limits_{N_z} \frac{\log \operatorname{ctg} \rho(a, z)}{1-|a|} d\sigma(a), \quad J_2 = \int\limits_{\bar{N} \setminus N_z} \frac{\log\left|\dfrac{1-\bar{a}z}{z-a}\right|}{1-|a|} d\sigma(a).$$

Из монотонности cth x имеем

$$J_1 \leqslant \log \operatorname{cth} \rho(z, \bar{N}) \int\limits_{N_z} \frac{d\sigma(a)}{1-|a|}$$

и из соотношений (5) вытекает

$$J_1 \leqslant \frac{e^2 \sigma[C(z, 1)] \log \operatorname{cth} \rho(z, \bar{N})}{1-|z|} \leqslant \frac{8\sigma(\bar{N}) \log \operatorname{cth} \rho(z, \bar{N})}{1-|z|}.$$

Если $N_z = \varnothing$, то $J_1 = 0$ и полученное неравенство опять справедливо. Таким образом

$$J_1 \leqslant \frac{8\sigma(\bar{N}) \log \operatorname{cth} \rho(z, \bar{N})}{1-|z|}.$$

Оценим J_2. Если $a \in \bar{N} \setminus N_z$, то $\rho(a, z) \geqslant 1$ и $[a, z] \geqslant th\,1$, откуда $1 - [a, z]^2 < 1/2$, и так как

$$\log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right| = -\frac{1}{2}\log[1-(1-[a, z]^2)],$$

то положив $x = 1-[a, z]^2$ и воспользовавшись неравенством

$$\log(1-x) \geqslant -2x \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant 1/2,$$

получим

$$\log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right| \leqslant 1-[a, z]^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{(1-\bar{a}z|^2} \leqslant 4 \cdot \frac{(1-|a|)(1-|z|)}{(1-|a|\,|z|)^2} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \cdot \frac{(1-|a|)(1-|z|)}{(1-|z|)^2} = 4 \cdot \frac{1-|a|}{1-|z|}.$$

Тогда

$$J_2 \leqslant \frac{4}{1-|z|} \int\limits_{\bar{N} \setminus N_z} d\sigma(a) = \frac{4\sigma(\bar{N} \setminus N_z)}{1-|z|},$$

то есть

$$J_2 \leqslant \frac{8\sigma(\bar{N})}{1-|z|}.$$

Теперь ясно, что для каждого $z \in U$

$$-\log|b(z)| \leq \lambda \cdot \frac{1+\log \operatorname{cth} \rho(z, \overline{N})}{1-|z|} \tag{6}$$

(так как оно справедливо и для $z \in \overline{N}$), где $\lambda = 8\sigma(\overline{N})$.

Переходя в обеих частях полученного неравенства к sup по $z \in e$, будем иметь (2).

Лемма 2. *Если $f \in B_0$, то*

$$\varlimsup_{|z| \to 1-0} (1-|z|) \log|f(z)| = -\infty \tag{7}$$

тогда и только тогда, когда $f \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $g \in B_1$ и $g \neq 0$ в U. Тогда $-\log|g(z)|$ есть неотрицательная гармоническая в U функция и согласно теореме А. Плеснера

$$-\log|g(z)| = \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})\, d\mu(\theta), \tag{8}$$

где P есть ядро Пуассона, а μ—неубывающая функция θ на $[0,2\pi]$:

$$\mu(\theta) = -\lim_{r \to 1-0} \int_0^{\theta} \log|g(re^{it})|\, dt \tag{9}$$

([5]. стр. 156). Если μ^* есть распределение конечной массы, соответствующее функции μ ($\mu^*(e)$ есть вариация μ на борелевском множестве e), то имеем неравенства:

$$\int_S P(z, e^{i\theta})\, d\mu^*(\theta) = \int_S \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\, d\mu^*(\theta) \leq \frac{1-|z|^2}{(1-|z|)^2} \int_S d\mu^*(\theta)$$

и из (8) имеем, что для каждого $z \in U$

$$(1-|z|) \log|g(z)| \geq -2\mu^*(S).$$

Пусть теперь $f \in B_1$ имеет конечное число нулей $\langle \alpha_i \rangle_1^n = N$, где каждый выписан с соответствующей кратностью. Тогда, если $b(z) = b(z, N)$— конечное произведение Бляшке, то $g = f \cdot b^{-1}$ не обращается в нуль в U и из (6) вытекает, что

$$\varlimsup_{|z| \to 1-0} (1-|z|) \log|f(z)| \geq -[2\mu^*(S) + 8n],$$

так как $\sigma(\overline{N}) = \sum_{i=1}^{n} (1-|\alpha_i|)$, $\sigma(\overline{N}) \leq n$. Пусть $f \in B_0$ и выполнено (7).

Понятно, что дополнительное предположение $f \in B_1$ является несущественным и из предыдущих неравенств вытекает, что либо $n = +\infty$, либо $\mu^*(S) = +\infty$. Первый случай означает, что кратность какого-либо нуля есть ∞ и следовательно $f \equiv 0$; если же $\mu^*(S) = +\infty$, то из (9)

$$-\mu^*(S) - \lim_{r\to 1-0} \int_0^{2\pi} \log|g(re^{it})|\,dt = -\infty$$

и согласно известной теореме $g=0$, следовательно и $f=0$.

Формулировка и доказательство следующих предложений используют понятие гиперболической емкости подмножеств U, введенного и развитого М. Цудзи (ем. [6], стр. 94). Теорию этого понятия можно получить рассматривая потенциалы положительных масс относительно ядра $\log[\zeta, z]^{-1}$ вместо обычного $\log|\zeta - z|^{-1}$. Гиперболическую емкость множества $e\subset U$ обозначаем $\gamma(e)$. Отметим также ([6], стр. 95), что cap $(e)=0$ тогда и только тогда, когда $\gamma(e)=0$.

Теорема 1. *Пусть E удовлетворяет* (1), $a_k\in e_k$ — *произвольные фиксированные числа.*

Если $f\in B$ и

$$\lim_{k\to\infty} (1-|a_k|)\log\|f\|_{e_k} = -\infty, \tag{10}$$

то

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\log\|f\|_{e_k}}{\log\gamma(e_k)}(1-|a_k|) = +\infty$$

тогда и только тогда, когда $f\equiv 0$.

Доказательство. Очевидно теорема будет доказана, если мы докажем ее для класса функций B_1. Пусть $f\in B_1$ и $f\not\equiv 0$. Заметим, что из (10) вытекает, что f имеет бесконечно много нулей в U. Действительно, если точка b_k из замыкания e_k такова, что $\|f\|_k=|f(b_k)|$, то из (5) и (10) будем иметь, что

$$\lim_{k\to\infty}(1-|b_k|)\log|f(b_k)| = -\infty$$

и если допустить, что $f\in B_0$, то из леммы 2 вытекает, что $f\equiv 0$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, f представляется в виде $f=gh$, где g, $h\in B_1$, $g\neq 0$ в U, а h есть бесконечное произведение Бляшке. Оценим $\|h\|_k$. Так как $|g|<1$, то

$$\|f\|_k \leq \|h\|_k \quad (k>1). \tag{11}$$

Имеем

$$\|h\|_k = \left\|\frac{f}{g}\right\|_k \leq \frac{\|f\|_k}{\inf\limits_{z\in e_k}|g(z)|}.$$

Если $\inf\limits_{z\in e_k}|g(z)|=|g(a_k')|$, где a_k' — точка из замыкания e_k, то из (5) и леммы 2 получим, что

$$\inf_{z\in e_k}|g(z)| > \exp\left\{-\frac{\text{const}}{1-|a_k|}\right\},$$

то есть

$$\|h\|_k \leq \|f\|_k\cdot\exp\left\{\frac{\text{const}}{1-|a_k|}\right\}$$

и учитывая (10) непосредственно видно, что для всех достаточно больших k

$$\|h\|_k \leqslant \|f\|_k^{1/2}.$$

Соединяя это неравенство с (11), имеем

$$\|h\|_k = \|f\|_k^{\delta_k},\ 1/2 \leqslant \delta_k \leqslant 1,\ k \geqslant k_1. \tag{12}$$

Для определенности в (1) положим $\delta = 1$, то есть

$$\rho(e_i, e_j) \geqslant 1\ (i, j = 1, 2, \cdots;\ i \neq j).$$

Тогда понятно, что если D есть гиперболическая $\frac{1}{2}$-окрестность E

$$D = \left\{ z \in U | \rho(z, E) < \frac{1}{2} \right\},$$

то $D = \sum\limits_{k \geqslant 1} D_k$, $D_i \cap D_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ и D_k есть гиперболическая $\frac{1}{2}$-окрестность e_k. Если $h(z) = b(z, N)$, то пусть

$$N_0 = N \cap D^c,\ N_0 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots \rangle,\ |\alpha_1| \leqslant |\alpha_2| \leqslant \cdots$$
$$N_k = (N \cap D_k) \cup \{\alpha_k\}\ (k \geqslant 1).$$

Если N_0 конечно, то считаем, что $\{\alpha_k\} = \varnothing$, начиная с некоторого места. Из (2), (5) и (12) вытекает $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(e_k, N) = 0$, что означает $N_k \neq \varnothing$ для всех достаточно больших k. Пусть

$$h_k(z) = b(z, N_k)$$

— конечное произведение Бляшке. Так как $N = \sum\limits_{k \geqslant 1} N_k$, $N_i \cap N_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, то $h = \prod\limits_{k \geqslant 1} h_k$. Представим h в виде

$$h = h_k \bar{h}_k,\ \bar{h}_k = \prod_{\substack{l \geqslant k \\ l \neq k}} h_l,\ k \geqslant 1$$

и оценим $\|h_k\|_k$. Имеем

$$\|h_k\|_k = \left\| \frac{h}{\bar{h}_k} \right\|_k \leqslant \frac{\|h\|_k}{\inf\limits_{z \in e_k} |\bar{h}_k(z)|}.$$

Согласно лемме 1

$$\|h_k\|_k \leqslant \|h\|_k \cdot \exp\left\{ \frac{c}{1 - |\alpha_k|} \right\},$$

где $c = 8\sigma(\bar{N})\,(1 + \log \operatorname{cth} 1/2)$ не зависит от k. Если учесть, что $\|h_k\|_k \geqslant \|h\|_k$, то имеем

$$\|h_k\|_k = \|h\|_k^{\beta_k},\ 1/2 \leqslant \beta_k \leqslant 1,\ k \geqslant k_2.$$

Из (12) и этого равенства тогда получим

$$\|h_k\|_k = \|l_k\|_k^{\beta_k} = \|f\|_k^{\gamma_k' \beta_k} = \|f\|_k^{\gamma_k}, \ 1/4 \leqslant \gamma_k \leqslant 1, \ k \geqslant \max(k_1, k_2).$$

Если положим $f_0 = g$, $f_k = h_k$ для $k \geqslant 1$, то нами получено представление f в виде

$$f = \prod_{k \geqslant 0} f_k, \ f_k \in B_1 \ (k \geqslant 0) \tag{13}$$

такое, что для всех достаточно больших k

$$\|f_k\|_k = \|f\|_k^{\gamma_k}, \ 1/4 \leqslant \gamma_k \leqslant 1. \tag{14}$$

Так как для $z \in e_k$ $|f_k(z)| \leqslant \|f_k\|_k$, то из принципа гармонической меры имеем

$$\log|f_k(z)| \leqslant -\left(\log\frac{1}{\|f_k\|_k}\right)\cdot \omega(z, e_k), \ z \in e_k^c, \ k \geqslant 1,$$

где ω есть гармоническая мера e_k относительно области U/e_k. Если учесть, что для произвольного множества $e \subset U$, $\operatorname{cap}(e) > 0$

$$\omega(z, e) = \frac{1}{\log\dfrac{1}{\gamma(e)}}\int_e \log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right| d\mu(a), \tag{15}$$

где μ — равновесное (для гиперболического потенциала) распределение единичной массы на e, из (14) будем иметь

$$\log|f_k(z)| \leqslant -\gamma_k\left(\log\frac{1}{\|f\|_k}\right)\frac{1}{\log\dfrac{1}{\gamma(e_k)}}\int_{e_k}\log\frac{1}{[a, z]}d\mu_k(a).$$

Так как предположение $f(0) \neq 0$ не составляет для нас существенного ограничения, то положив в последнем неравенстве $z = 0$ и используя равенства (5) получим, что для всех достаточно больших k

$$\log\frac{1}{|f_k(0)|} > \frac{1}{4}\,\frac{\log\|f\|_k}{\log\gamma(e_k)}\,(1 - |a_k|)$$

и так как сходимость произведения (13) влечет сходимость ряда

$$\sum_{k \geqslant 1}\log\frac{1}{|f_k(0)|},$$

будем иметь, что

$$\sum_{k \geqslant 1}\frac{\log\|f\|_k}{\log\gamma(e_k)}(1 - |a_k|) < +\infty,$$

чем и заканчивается доказательство.

Хорошо известно, что скорость $\exp\left\{-\dfrac{\text{const}}{1-|a|}\right\}$ является экстремальной для убывания вдоль радиуса нетождественных функций из

B (теорема А. Л. Шагиняна; подробнее см. [5], стр. 117). Следующее предложение дает точное выражение величины „протяженности" множества $E \subset U$, удовлетворяющего (1) для того, чтобы указанный порядок убывания сохранял свое экстремальное свойство.

Теорема 2. *Пусть E удовлетворяет условию* (1), $a_k \in e_k$ — *произвольные фиксированные числа и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\log \frac{1}{\gamma(e_k)}} = +\infty. \tag{16}$$

Если $f \in B$ и

$$\lim_{k\to\infty} (1-|a_k|) \log \|f\|_{e_k} = -\infty, \tag{17}$$

то $f \equiv 0$.

Можно указать множество E, удовлетворяющее требованию (1) *и функцию $f \in B$ так, что ряд* (16) *сходится, для f выполнено* (17) *и* $f \neq 0$.

Доказательство. Первая часть есть непосредственное следствие теоремы 1 и не нуждается в доказательстве. Для того чтобы убедиться в справедливости второй части теоремы, рассмотрим бесконечную последовательность точек $a_k \in U$, занумерованных в порядке неубывания модулей и такую, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|a_k|) < \infty, \ \rho(a_i, a_j) \geqslant 1 \ (i, j=1, 2, \cdots; i \neq j). \tag{18}$$

Выберем числа $\rho_k > 0$ $(k=1, 2, \cdots)$, так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\log \frac{1}{\rho_k}} < +\infty \tag{19}$$

и положим $e_k = \bar{C}(a_k, \rho_k)$. Нетрудно заметить, что при условии $\rho_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln \rho_k}{\ln \gamma(e_k)} = 1.$$

Действительно, из (15) имеем

$$\omega(0, e_k) = \frac{1}{\log \frac{1}{\gamma(e_k)}} \cdot \int_{e_k} \log \frac{1}{|a|} \, d\mu_k(a). \tag{20}$$

С другой стороны, посредством дробно-линейного преобразования легко получим

$$\omega(z, e_k) = \frac{\log \left| \frac{1-\bar{a}_k z}{z-a_k} \right|}{\log \operatorname{cth} \rho_k}.$$

Положив здесь $z = 0$ и используя (5), после замены интеграла в правой части (20) через $-\log|a|$, получим требуемое соотношение. Из (18) и (19) вытекает, что существует последовательность целых чисел $p_k > 1$ так, что

$$\sum_{k>1} p_k (1-|a_k|) < \infty \text{ и } \lim_{k\to\infty} p_k (1-|a_k|) \log \frac{1}{\rho_k} = +\infty. \tag{21}$$

Существование таких p_k есть следствие известного факта из теории положительных числовых рядов: существует ряд, сходящийся „медленнее“ двух наперед заданных сходящихся рядов. Если τ_k означает класс всех псевдополиномов $T(z)$

$$T(z) = \prod_{i=1}^{p_k} [z, \alpha_i]$$

степени p_k с нулями из e_k ($\alpha_i \in e_k$), то так же как и в случае полиномов, можно доказать существование псевдополинома $T_k \in \tau_k$ такого, что

$$\|T_k\|_{e_k} = \inf_{T\in\tau_k} \|T\|_{e_k}.$$

Так как $T(z)$ есть конформный инвариант, то для оценки $\|T_k\|_k$ можем предполагать, что $e_k = C(0, \rho_k)$. Имеем

$$T(z) = \prod_{i=1}^{p_k} \left| \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z} \right|$$

и так как для всех достаточно больших k и всех $z \in U$

$$2 \geqslant |1-\bar{\alpha}_i z| \geqslant 1-|\alpha_i| \geqslant 1-\operatorname{th} \rho_k \geqslant 2^{-1} \quad (i=1,\cdots, p_k),$$

то

$$2^{-p_k} |\tilde{T}(z)| \leqslant T(z) \leqslant 2^{p_k} |\tilde{T}(z)| \quad (z \in U),$$

где $\tilde{T}$ есть полином степени p_k с нулями из e_k; откуда и вытекает

$$2^{-p_k} \|\tilde{T}_k\|_k \leqslant \|T_k\|_k \leqslant 2^{p_k} \|\tilde{T}_k\|_k,$$

где $\tilde{T}_k$ есть полином Чебышева для множества e_k степени p_k. Следовательно

$$(2^{-1} \operatorname{th} \rho_k)^{p_k} \leqslant \|T_k\|_k \leqslant (2 \operatorname{th} \rho_k)^{p_k}. \tag{22}$$

Если $<\alpha_i^{(k)}>_{i=1}^{p_k}$ есть нули T_k, то пусть $b_{(0)}(z)$ означает произведение Бляшке с нулями $<\alpha_i^{(k)} | i = 1,\cdots, p_k; k \geqslant 1>$. Отметим, что из (21) и (5) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p_k} (1-|\alpha_i^{(k)}|) < \infty.$$

Очевидно $\|b_{(0)}\|_k \leqslant \|T_k\|_k$ и из (22) имеем

$$(1-|a_k|)\log\|b_{(0)}\|_k \leqslant -2(1-|a_k|)\,\rho_k \log\frac{1}{\operatorname{th}\rho_k},$$

Тогда из (21) ясно, что $b_{(0)}(z)$ удовлетворяет (17) и требуемая функция построена.

Заметим, что в силу известного представления функций ограниченного вида (класс N Р. Неванлинны) в виде отношения двух функций из B, заключения теорем 1, 2 остаются в силе, если заменить в их формулировках класс B на N.

Сравним полученные здесь предложения с имеющимися в этом направлении результатами И. В. Ушаковой ([7—8]) и С. Я. Хавинсона ([9]). В соответствующих теоремах из [7—9] даются условия на дискретное точечное множество $E\subset D$, при которых скорость убывания $\exp\{-\mathrm{const}/1-|z|\}$, указанная А. Л. Шагиняном, является экстремальной для класса N (в [8] рассматривается аналогичный вопрос для мероморфных функций с произвольным ростом характеристики). Говоря описательно, суть этих результатов сводится к тому, что для тех E, которые не „скапливаются" вблизи какой-либо последовательности $\{\xi_n\}_1^\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-|\xi_n|)<\infty$ неэвклидовой плоскости, названная скорость есть экстремальная для убывания вдоль расположенного некасательно к S множества E. В теоремах 1—2, в отличие от цитируемых, рассматривается именно тот случай, когда такое „скопление" точек E (уже не дискретного) имеет место, и теоремы единственности из [7—9] не действуют.

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 10.VI.1977

Ա. Յ. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ. Սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների դասի մասին. *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում է միավոր շրջանում որոշակի ենթաբազմություններով նվազելու էքստրեմալ (սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների դասի համար) արագությունը։

A. Y. SHAHVERDIAN. *On the boundary behaviory of bounded analytical functions* (summary)

Two theorems are proved concerning the experimental rate of decrease over some special sets in the unit disc for a class of bounded analytical in the disc functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Шагинян.* О некоторых неравенствах и их применениях в теории функций. ДАН СССР, № 2, 1959, 284—287.
2. *А. Л. Шагинян.* Об одном основном неравенстве в теории функций и его приложениях, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. н., 12, № 1, 1959, 3—25.

3. *J. S. Hwang, F. Schnitzer, W. Seidel.* Uniqueness theorems for bounded holomorphic functions, Mathematische Zeitscrift., bd. 122, H. 4, 1971.
4. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., Гостехиздат, 1941.
5. *А. Ловатер.* Граничное поведение аналитических функций. В сб. Мат. анализ., т. 10, 1973 (Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР), М., 1973, 99—204.
6. *M. Tsuji.* Potential theory in modern function theory, Maruzen Co., Tokyo, 1959.
7. *И. В. Ушакова.* Теорема единственности для функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге, ДАН СССР, 130, № 1, 1960, 29—32.
8. *И. В. Ушакова.* Некоторые теоремы единственности для функций, субгармонических и мероморфных в единичном круге, ДАН СССР, 137, № 6, 1961, 1319—1322.
9. *С. Я. Хавинсон.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН, 18, № 2, 1963, 25—98.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 3, 1979 Математика

С. А. ГРИГОРЯН

ОБ АЛГЕБРАХ КОНЕЧНОГО ТИПА НА КОМПАКТНОЙ ГРУППЕ G

Введение

Пусть G — компактная абелева группа и $C(G)$ алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на G. Для равномерных алгебр B и A ($B\subset A$) рассмотрим семейство $\{D\}$ всех тех замкнутых подалгебр $C(G)$, что $B\subset D\subset A$. Семейство $\{D\}$ является частично упорядоченным множеством по включению. Пусть P — линейно упорядоченное подмножество семейства $\{D\}$.

Типом алгебры B относительно A назовем мощность

$$\gamma = \sup_P \operatorname{card} P.$$

Тип алгебры B относительно A будем обозначать через $t_A(B)$. Если тип $t_A(B)$ конечен, то будем говорить, что алгебра B — конечного типа относительно A. Если же конечно $t_{C(G)}(B)$, то говорят, что B — алгебра конечного типа. Отметим, что в случае, когда $t_A(B)=1$, B является максимальной подалгеброй алгебры A.

Пусть Γ — группа характеров компактной абелевой группы G и Γ_0 — подполугруппа группы Γ. Через D_{Γ_0} будем обозначать замкнутую подалгебру в $C(G)$, порожденную множеством Γ_0.

Определение. Равномерную алгебру A на G называют алгеброй обобщенных аналитических функций или коротко алгеброй аналитических функций, если D_{Γ_0} совпадает с A для некоторой подполугруппы Γ_0 группы Γ.

Данная работа посвящена изучению типов и относительных типов алгебр обобщенных аналитических функций. Основные результаты сосредоточены в § 2 и § 3. В § 1 исследуются некоторые свойства абелевых полугрупп, необходимые для изучения типов алгебр обобщенных аналитических функций.

§ 1. Некоторые свойства абелевых полугрупп

Пусть Γ — абелева группа, и Γ_+ — подполугруппа группы Γ, удовлетворяющая условию $\Gamma_+ \cup (-\Gamma_+) = \Gamma$. На Γ можно задать порядок с помощью полугруппы Γ_+; под „$a>b$“ подразумеваем, что $a-b\in\Gamma_+$. Легко проверить, что

1. Если $a, b, c\in\Gamma$ и $a>b$, то $a+c>b+c$;
2. если $a\in\Gamma$, то либо $a\geqslant 0$, либо $a\leqslant 0$, причем могут выполняться оба неравенства.

Очевидно верно и обратное: если есть некоторый порядок на Γ, удовлетворяющий условиям 1 и 2, то всегда найдется полугруппа Γ_+, задающая такой порядок. Говорят, что полугруппа Γ_+ вполне упорядочивает Γ, если Γ_+ задает порядок на Γ и $\Gamma_+ \cap (-\Gamma_+) = \{O\}$.

Говорят, что подгруппа определяет архимедово упорядочение на Γ, если для любых $a, b \in \Gamma_+$, где $-a \notin \Gamma_+$ существует такое целое число $n > 0$, что $n \cdot a - b \in \Gamma_+$.

Понятие „архимедово упорядочение“ равносильно понятию максимальности. Иными словами, если Γ_+ — максимальная подполугруппа группы Γ, то Γ_+ задает архимедов порядок на Γ. Верно и обратное: если Γ_+ задает архимедов порядок на Γ, то Γ_+ — максимальная подполугруппа группы Γ.

Пусть $\Gamma_0 \subset \Gamma^0$ — подполугруппы группы Γ. Последовательность полугрупп (включение строгое)

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_n = \Gamma^0 \tag{1.1}$$

называется цепью полугрупп.

Уплотнением цепи (1.1) будет цепь, которая может быть получена вставлением конечного числа полугрупп в данную цепь.

Говорят, что цепь

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_m = \Gamma^0 \tag{1.2}$$

неуплотняемая, если при всех i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, между Γ_i и Γ_{i+1} нет промежуточных подполугрупп. Число m называется длиной неуплотняемой цепи (1.2).

Если при всех i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, каждое Γ_i есть идеал в Γ_{i+1} $0 \leqslant i \leqslant m-1$, то цепь (1.2) называют идеальным рядом. Напомним, что для идеального ряда есть хорошо известный аналог теоремы Жордана—Гёльдера—Шрейера, утверждающий, что любые два идеальных ряда с началом Γ_0 и концом Γ^0 имеют изоморфные уплотнения. В случае же, когда ряд (1.2) не идеальный, такого результата нет, т. е. могут существовать две неуплотняемые цепи различной длины.

Для дальнейшего нам необходимы следующие леммы.

Лемма 1.1. *Пусть Γ_0 — максимальная, не содержащая нетривиальную группу, подполугруппа полугруппы Γ^0 и существует хотя бы один элемент из $\Gamma^0 \setminus \Gamma_0$, необратимый в Γ^0. Тогда $\Gamma^0 \setminus \Gamma_0$ состоит из одного элемента.*

Доказательство. Пусть $a \in \Gamma^0 \setminus \Gamma_0$ необратим в Γ^0. Тогда для любого $b \in \Gamma^0$, $b \neq 0$, $a+b$ принадлежит Γ_0. Действительно, если бы существовал $b \in \Gamma^0$ такой, что $a+b \notin \Gamma_0$, то полугруппа, порожденная множеством Γ_0 и элементом $a+b$ совпала бы с Γ^0 (в силу максимальности Γ_0 в Γ^0). Следовательно, для некоторого $d \in \Gamma_0$ нашлось бы такое положительное целое число n, что $n(a+b)+d=a$. Отсюда $nb+d=(1-n)a \in \Gamma^0$, и поэтому $-a \in \Gamma^0$. А это противоречит допущению что a необратим в Γ^0. Таким образом, для каждого $b \in \Gamma^0$, $b \neq 0$, $a+b \in \Gamma_0$. А это и означает, что $\Gamma^0 = \Gamma_0 \cup \{a\}$. Лемма доказана.

Следствие. Если $\Gamma^0 \setminus \Gamma_0$ состоит из одного элемента, то $\Gamma^0 \setminus \{0\}$ — идеал для полугруппы Γ^0.

Пусть Γ_1 — некоторая подполугруппа группы Γ. Через $\varkappa(\Gamma_1)$ будем обозначать порядок максимальной группы, содержащейся в Γ_1.

Лемма 1.2. *Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0. Тогда справедливо одно из следующих соотношений:*

а) $\Gamma^0 = \Gamma_0 \cup \{a\}$, $n \cdot a \in \Gamma_0$, $n \in Z_+$ — *полугруппа целых неотрицательных чисел* $n \geqslant 2$;

б) $\Gamma^0 = G^0 \cup H_0$, $\Gamma_0 = G^0_+ \cup H_0$, *где* H_0 — *идеал для* Γ^0, *а* G^0_+ — *подполугруппа в группе* G^0, *задающая архимедов порядок на* G^0 (*в частности, когда* G^0_+ *не содержит нетривиальную группу,* G^0_+ *задает полный архимедов порядок на* G);

в) $\Gamma^0 = G^0 \cup H_0$, $\Gamma_0 = G_0 \cup H_0$, *где* H_0 — *идеал для* Γ^0, *а* G_0 — *максимальная подгруппа группы* G^0 (*в случае, когда* G_0 *конечного порядка, группа* G^0 — *также конечного порядка*);

г) $\Gamma^0 = G_0 \cup (G_0 + a_0) \cup H_0$, $\Gamma_0 = G_0 \cup H_0$, *где* G_0 — *группа,* H_0 — *идеал в* Γ^0, $n \cdot a_0 \in H_0$, $n \in Z_+$, $n \geqslant 2$.

Доказательство. Если $\varkappa(\Gamma^0) = 1$, утверждение а) следует непосредственно из леммы 1.1. Предположим теперь, что $\varkappa(\Gamma^0) > 1$. Пусть G^0 — максимальная группа в Γ^0. Тогда $H = \Gamma^0 \setminus G^0$ является идеалом в Γ^0, и $\Gamma^0 = G^0 \cup H$. Если $a_0 \in \Gamma^0 \setminus \Gamma_0$, то возможны два случая: либо $a_0 \in G^0$, либо $a_0 \in H$.

Пусть $a_0 \in G^0$. Покажем, что $H \subset \Gamma_0$. Действительно, если бы $H \not\subset \Gamma$, то из максимальности Γ_0 в Γ^0 следовало бы, что $\Gamma^0 = \Gamma_0 + Z_+ \cdot b$, где $b \in H \setminus \Gamma_0$. Поэтому в силу того, что $a_0 = d + n \cdot b$, где $n \geqslant 1$ и H — идеал для Γ^0, $b \in H$, получаем $a_0 \in H$. А это противоречит допущению, что $a_0 \in G$. Таким образом, $H \subset \Gamma_0$, и $\Gamma_0 = G_0 \cup H_0$, где $G_0 = G^0 \cap \Gamma_0$ — полугруппа (или группа), максимальная в группе G^0. Отсюда, если G_0 — группа, то выполняется условие в) леммы; если же G_0 — не группа, то G_0 задает архимедов порядок на G^0, т. е. выполняется условие б). Аналогичными рассуждениями можно показать, что в случае, когда $a \in H$, выполняется условие г). Лемма доказана.

Предложение 1.3. *Пусть $\Gamma_0 \subset \Gamma^0$ — две собственные подполугруппы группы Γ. Предположим, что $\varkappa(\Gamma^0)$ конечен. Тогда, если существует неуплотняемая цепь полугрупп с началом Γ_0 и концом Γ^0, то найдется такая неуплотняемая цепь полугрупп*

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_{i_0} \subset \cdots \subset \Gamma_n = \Gamma^0 \tag{1.3}$$

и число i_0, $0 \leqslant i_0 \leqslant n$, что $\varkappa(\Gamma_i) > \varkappa(\Gamma_{i+1})$, когда $i > i_0$, и $\varkappa(\Gamma_i) = \varkappa(\Gamma_{i_0})$, когда $i \leqslant i_0$.

Доказательство предложения немедленно следует из леммы 1.2.

Число i_0 будем обозначать через $P(\Gamma^0, \Gamma_0)$. Заметим, что $P(\Gamma^0; \Gamma_0)$ является инвариантом для любых цепей полугрупп, удовлетворяющих предложению 1.3, т. е. оно не зависит от выбора цепи.

§ 2. Алгебры конечного типа на компактной группе G

Пусть Γ — некоторая дискретная абелева группа, а G — компактная группа ее характеров. Тогда по теореме двойственности Понтрягина, Γ—есть группа характеров группы G. Для каждого $a \in \Gamma$ через χ_a будем обозначать характер группы G, соответствующий элементу a.

Всюду в дальнейшем для равномерной алгебры A на G через Γ_A будем обозначать полугруппу $\{a \in \Gamma;\ \chi_a \in A\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $B \subset A$ — две алгебры обобщенных аналитических функций на G. Алгебра B является подалгеброй конечного типа относительно A тогда и только тогда, когда*

а) *существует хотя бы одна максимальная подполугруппа Γ_1 полугруппы Γ_A, содержащая Γ_B такая, что $\varkappa(\Gamma_1) < \infty$;*

б) *найдется хотя бы одна неуплотняемая цепь полугрупп с началом Γ_B и концом Γ_A.*

Мы предполагаем, что все рассматриваемые полугруппы Γ содержат единичный элемент Γ.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 2.2. *Пусть Γ_0—подполугруппа группы Γ и D_{Γ_0}—равномерная алгебра на G, порожденная элементами из Γ_0. Тогда $D_{\Gamma_0} \cap \cap \Gamma = \Gamma_0$.*

Доказательство следует из того, что характеры из Γ образуют ортонормированный базис в $L^2(\sigma)$, где σ— мера Хаара на группе G.

Пусть Γ_0—некоторая подполугруппа группы Γ. Обозначим через H_0 максимальную группу в Γ_0. Если $H_0^\perp$ — группа характеров из G, равная 1 на H_0, то легко заметить, что факторгруппа $G/H_0^\perp$ является группой характеров для H_0.

Опишем все максимальные множества антисимметрии алгебры D_{Γ_0}.

Лемма 2.3. *Максимальные множества антисимметрии алгебры D_{Γ_0} совпадают с классами смежности группы G по подгруппе $H_0^\perp$.*

Доказательство. Пусть f—некоторая вещественная функция из D_{Γ_0}. Тогда формальный ряд Фурье функции f на G есть $\sum\limits_{a \in \Gamma_0} c(a)\chi_a$. Поскольку f — вещественная функция, то для каждого χ_a, $a \in \Gamma_0$, такого, что $c(a) \neq 0$, $-a$ также принадлежит Γ_0. Но по условию H_0 — максимальная группа в Γ_0, поэтому $-a$, $a \in H$, и f постоянна на каждом классе смежности группы G по подгруппе $H_0^\perp$. С другой стороны, из построения $H_0^\perp$ видно, что для любых двух классов смежности G по $H_0^\perp$ найдется $a \in H_0$ такое, что χ_a принимает различное значение на этих классах. Тогда хотя бы одна из вещественных функций $\varphi_1 = \chi_a + \chi_{-a}$, $\varphi_2 = i(\chi_a - \chi_{-a}) \in D_{\Gamma_0}$ разделяет эти классы. Следовательно, максимальными множествами антисимметрии алгебры

D_{Γ_0} являются те и только те множества в G, которые совпадают с классами смежности группы G по подгруппе $H_0^\perp$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0. Если $\varkappa(\Gamma^0)=1$, то*

$$t_{D_{\Gamma_0}}(D_{\Gamma_0}) = \operatorname{codim}_{D_{\Gamma^0}} D_{\Gamma_0} = 1.$$

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что $\Gamma^0\setminus\Gamma_0$ состоит из одного элемента и если $a\in\Gamma^0$, то $n\cdot a\in\Gamma_0$, $n\in Z_+$, $n\geq 2$. Рассмотрия пространство $D_{\Gamma_0}+\mathbf{C}\chi_a$. Так как $(\chi_a)^2=\chi_{2a}\in D_{\Gamma_0}$ и $\chi_a\times D_{\Gamma_0}\subset D_{\Gamma_0}+\mathbf{C}\chi_a$, то $D_{\Gamma_0}+\mathbf{C}\chi_a$ — алгебра. Очевидно, полученная алгебра замкнута в $C(G)$. Теперь, применив лемму 2.2, получим, что $D_{\Gamma^0}=D_{\Gamma_0}+\mathbf{C}\cdot\chi_a$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0 и $\varkappa(\Gamma_0)=1$. Тогда $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0})$ конечен.*

Доказательство. Если $\varkappa(\Gamma^0)=1$, то $t_{D_{\Gamma_0}}(D_{\Gamma_0})=1$ (см. лемму 2.4). Если же $\varkappa(\Gamma^0)>1$, то тогда возможны два случая (см. лемму 1.2):

а) $\Gamma^0=G^0\cup H_0$, $\Gamma_0=G^0_+\cup H_0$, где H_0 — идеал для Γ^0, G^0 — максимальная группа в Γ^0, а G^0_+ задает полный архимедов порядок на G^0;

б) $\Gamma^0=G^0\cup H_0$, $\Gamma_0=\{0\}\cup H_0$, где H_0—идеал для Γ^0, а G^0 — группа конечного порядка.

Рассмотрим сначала случай а). Покажем, что тогда $t_{D_{\Gamma_0}}(D_{\Gamma_0})=1$. Пусть $f\in D_{\Gamma^0}$. Ряд Фурье функции $f\in L^1(\sigma)$ представим в виде

$$f\sim\sum_{a\in\Gamma}c(a)\chi_a.$$

Поскольку $\Gamma^0=G^0\cup H_0=G^0_+\cup(-G^0_+)\cup H_0$, то

$$\sum_{a\in\Gamma^0}c(a)\chi_a=\sum_{a\in G^0_+}c(a)\chi_a+\sum_{-a\in G^0_+}c(a)\chi_a+\sum_{a\in H_0}c(a)\chi_a.$$

Если $c(a)=0$ для любого $a\in(-G^0_+)$, то $f\in D_{\Gamma_0}$. Если же $c(a_0)\neq 0$ для некоторого $a_0\in(-G^0_+)$, то $f\notin G_{\Gamma_0}$. Покажем, что в этом случае равномерная алгебра $A_0=[f; D_{\Gamma_0}]$, порожденная функцией f и элементом из D_{Γ_0}, совпадает с D_{Γ^0}. Поскольку G^0_+ задает полный архимедов порядок на G^0, достаточно показать, что $\chi_{a_0}\in A_0$, т. е. что χ_{a_0} обратим в A_0. Действительно, если бы функция χ_{a_0} принадлежала A_0, то Γ_{A_0} содержало бы $G^0_+\cup H_0$ и $a_0\in(-G^0_+)$. Поэтому Γ_{A_0} совпало бы с Γ^0, т. е. $A_0=D_{\Gamma^0}$. Таким образом, достаточно показать, что $\chi_{a_0}\in A_0$. Допустим противное. Тогда найдется непрерывный мультипликативный функционал m на A такой, что $m(\chi_{-a_0})=0$. И поскольку G^0_+ задает архимедов порядок на G, $m(\chi_b)=0$ для любого $b\in G^0_+\setminus\{0\}$. А так как H_0—идеал в Γ^0, то для любого $h\in H_0$, $m(\chi_h)=m(\chi_{a_0}\chi_h)=m(\chi_{-a_0})(\chi_{a_0}\cdot\chi_{h_1})=m(\chi_{-a_0})\cdot m(\chi_{h_1})=0$, где $h_1=a+h\in H_0$.

Пусть μ — вещественная представляющая мера функционала m, заданная на G. Тогда из вышесказанного следует

$$\int_G \chi_a \, d\mu = 0 \tag{2.1}$$

для всех $a \in \Gamma_0 \setminus \{0\}$.

Поскольку $\chi_a = \operatorname{Re} \chi_a + i \operatorname{Im} \chi_a$, из 2.1 получаем

$$\int_G \operatorname{Re} \chi_a \, d\mu = 0, \int_G \operatorname{Im} \chi_a \, d\mu = 0. \tag{2.2}$$

Так как $\chi_{-a} = \operatorname{Re} \chi_a - i \operatorname{Im} \chi_a$, то из (2.2) следует

$$\int_G \chi_a \, d\mu = 0 \text{ для любого } a \in G^0 \setminus \{0\}, \text{ в частности и для } a_0.$$

Функция $\chi_{-a_0} \cdot f \in A_0$ имеет следующий ряд Фурье:

$$\chi_{-a_0} \cdot f \sim c\,(a_0) + \sum_{a \in \Gamma^0 \setminus \{0\}} c\,(a)\, \chi_a, \tag{2.3}$$

причем $c\,(a_0) \neq 0$. Тогда, как хорошо известно, функцию $g = \chi_{-a_0} \cdot f - c\,(a_0)$ можно равномерно на G приблизить теми характерами χ_a, $a \in \Gamma^0$, для которых

$$\int_G g \overline{\chi}_a \, d\sigma \neq 0,$$

где σ — мера Хаара на G.

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{|c\,(a_0)|}{2}$ и $g_0 = \sum_{\substack{1 \\ a_i \in \Gamma^0 \setminus \{0\}}}^{n} \alpha_i \chi_{a_i}$ такое, что $\sup |g - g_0| < \varepsilon$.

Поскольку μ — вещественная представляющая мера на G, то

$$\int_G |g - g_0| \, d\mu < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\left| \int_G (g - g_0) \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Но

$$\int_G g d\mu = \int_G \chi_{-a_0} \cdot f d\mu - c\,(a_0) \int_G d\mu = -c\,(a_0), \int_G g_0 d\mu = 0, \tag{2.4}$$

в силу равенства (2.2).

Таким образом, $\left| \int_G (g - g_0) \, d\mu \right| = c\,(a_0)$. А это противоречит условию (2.4). Следовательно, $\chi_{a_0} \in A_0$, т. е. $A_0 = D_{\Gamma^0}$.

Случай б). Пусть $\Gamma^0 = G^0 \cup H_0$, $\Gamma_0 = \{0\} \cup H_0$. Рассмотрим алгебры $D_{\Gamma^0} = D_{G^0} + D_{H_0}$, $D_{\Gamma_0} = \mathbf{C} \cdot 1 + D_{H_0}$. Поскольку G^0 — группа конечного порядка, то D_{G^0} — конечная алгебра, размерность которой равна порядку группы G^0. Следовательно, $\operatorname{codim}_{D_{\Gamma^0}} D_{H_0}$ конечен и равен $\varkappa(G^0)$. Поэтому $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0})$ конечен. Лемма доказана.

Следствие 2.6. Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0 и $\varkappa(\Gamma_0)=1$. Тогда, если $\varkappa(\Gamma^0)$ бесконечен, то $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0})=1$, в противном случае $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0})=\varkappa(\Gamma^0)-1=\operatorname{codim}_{D_{\Gamma_0}}(D_{\Gamma^0})$.

Пусть X — компактное пространство и Φ — гомеоморфизм из X на некоторое компактное пространство Y. Отображение Φ порождает изометрический изоморфизм Φ^* из $C(X)$ на $C(Y)$: $\Phi^*(f)(y)=f(\Phi^{-1}(y))$ $f\in C(X)$.

Пусть $B\subset A$ — две равномерные алгебры на X и $B^0=\Phi^*(B)$, $A^0=\Phi^*(A)$.

Лемма 2.7. $t_A(B)=t_{A^0}(B^0)$.

Доказательство следует из того, что Φ^* — изометрически взаимно однозначное отображение $C(X)$ на $C(Y)$.

Для любого замкнутого множества $F\subset G$ и равномерной алгебры A на G через A_F будем обозначать равномерное замыкание сужения A на F.

Лемма 2.8. *Пусть $B\subset A$ — две алгебры обобщенных аналитических функций на G, и $\{F_\alpha\}$ — разбиение G на максимальные множества антисимметрии относительно B. Тогда для любых F_1, $F_2\in\{F_\alpha\}$*

$$t_{A_{F_1}}(B_{F_1})=t_{A_{F_2}}(B_{F_2})$$

Доказательство. Пусть H_0 — максимальная группа в полугруппе $\Gamma_0=\Gamma_B$, а $H_0^\perp\subset G$ — анулятор H_0. Как хорошо известно (см. [4], стр. 254), группа характеров факторгруппы $G/H_0^\perp$ есть H_0. Поэтому, если $b\in\Gamma^0=\Gamma_A$ такое, что сужение характера χ_b на некоторый класс смежности G по $H_0^\perp$ совпадает с сужением некоторого характера из Γ_0 на то же множество, то $b\in\Gamma_0$.

Пусть Φ — отображение из $H_0^\perp$ на некоторый класс смежности G по $H_0^\perp$: $\Phi(g)=g_0+g$, $g_0\in G$, $g\in H_0^\perp$, и A_0 (соотв. B_0) — равномерная алгебра, порожденная сужениями характеров из Γ^0 (соотв. Γ_0) на $H_0^\perp$, а A^0 (соотв. B^0) — алгебра, порожденная сужениями из Γ^0 (соотв. Γ_0) на $g_0+H_0^\perp$. Тогда из вышесказанного следует, что $\Phi^*(A_0)=A^0$, $\Phi^*(B_0)=B^0$. Следовательно, на основании леммы 2.7 получаем $t_{A_0}(B_0)=t_{A^0}(B^0)$. А так как $A_0=A_{H_0^\perp}$, $B_0=B_{H_0^\perp}$ и все максимальные множества антисимметрии алгебры B совпадают с классами смежности G по $H_0^\perp$ (лемма 2.3), то $t_{A_F}(B_F)=t_{A_{H_0^\perp}}(B_{H_0^\perp})$ для любого $F\in\{F_\alpha\}$.

Лемма доказана.

Лемма 2.9. *Пусть Γ_0 — подполугруппа полугруппы Γ^0 и $\varkappa(\Gamma_0)=\infty$. Тогда $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0})$ не конечен.*

Доказательство следует из леммы 2.8 и леммы 1 из [8].

Лемма 2.10. *Пусть* Γ_0 — *максимальная подполугруппа полугруппы* Γ^0 *и* $\varkappa(\Gamma_0) < \infty$, *а* $\varkappa(\Gamma^0) = \infty$. *Тогда для любых двух равномерных алгебр* $C^0 \subset D^0$, $D_{\Gamma_0} \subset C^0 \subset D^0 \subset D_{\Gamma^0}$, *найдется такое бесконечное семейство* $\{F_\alpha\}$ *максимальных множеств антисимметрии алгебры* D^0, *где каждое* $F \in \{F_\alpha\}$ *не является максимальным множеством антисимметрии алгебры* C^0.

Доказательство. Поскольку $\varkappa(\Gamma_0)$ конечно, максимальная группа G_0, содержащаяся в Γ_0, имеет конечный порядок. Поэтому $G/G_0^{\perp}$ — группа конечного порядка. Это означает, что алгебра $B^0 = D_{\Gamma_0}$ имеет конечное число максимальных множеств антисимметрии. В частности, $G_0^{\perp}$ является максимальным множеством антисимметрии для алгебры B^0.

Сужения характеров из Γ_0 и Γ^0 на $G_0^{\perp}$ образуют полугруппу характеров группы $G_0^{\perp}$. Эти полугруппы обозначим через $\tilde{\Gamma}_0$ и $\tilde{\Gamma}^0$ соответственно. Очевидно, $\varkappa(\tilde{\Gamma}_0) = 1$ и $\varkappa(\tilde{\Gamma}^0) = \infty$. Из максимальности Γ_0 в Γ^0 следует максимальность $\tilde{\Gamma}_0$ в полугруппе $\tilde{\Gamma}^0$. Так как

$$B^0_{G_0^{\perp}} = D_{\tilde{\Gamma}_0},\ A^0_{G_0^{\perp}} = D_{\tilde{\Gamma}^0},\ \text{где } A^0 = D_{\Gamma^0},\ B^0 = D_{\Gamma_0},\ \text{и } t_{A^0_{G_0^{\perp}}}(B^0_{G_0^{\perp}}) =$$

$$= t_{D_{\tilde{\Gamma}_0}}(D_{\tilde{\Gamma}_0}) = 1,$$

то $B^0_{G_0^{\perp}}$ — антисимметричная алгебра, а $A^0_{G_0^{\perp}}$ обладает бесконечным семейством максимальных множеств антисимметрии и, кроме того, $t_{A^0}(B^0) = \varkappa(\Gamma_0)$ (см. леммы 2.3 и 2.8, следствие 2.6 и лемму 1 из [8]).

Пусть $\{F_i\}_{i=1}^{k}$ $(k = \varkappa(\Gamma_0))$ — максимальные множества антисимметрии алгебры B^0. Из теоремы Бишопа-Шилова (см. [3], стр. 87), леммы 2.8 и того, что $t_{A^0_{F_i}}(B^0_{F_i}) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$, следует, что для любых двух равномерных алгебр (включение строгое) $C^0 \subset D^0$, $B^0 \subset C^0 \subset D^0 \subset A^0$, существует такое $F \in \{F_i\}_{i=1}^{k}$, что $B^0_F = C^0_F$, $A^0_F = D^0_F$. Алгебра B^0_F антисимметрична, а A^0_F обладает бесконечным семейством максимальных множеств антисимметрии. Лемма доказана.

Лемма 2.11. *Пусть* Γ_0 — *максимальная подполугруппа полугруппы* Γ^0. *Тогда*

а) *если* $\varkappa(\Gamma^0) = \varkappa(\Gamma_0)$, *то* $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0}) = \operatorname{codim}_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0}) = \varkappa(\Gamma_0)$;

б) *если* $\varkappa(\Gamma_0) < \varkappa(\Gamma^0) < \infty$, *то* $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0}) = \operatorname{codim}_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0}) = \varkappa(\Gamma_0) - \varkappa(\Gamma_0)$;

в) *если* $\varkappa(\Gamma_0) < \infty$, $\varkappa(\Gamma^0) = \infty$, *то* $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0}) = \varkappa(\Gamma_0)$.

Доказательство непосредственно следует из лемм 2.5, 2.8 и 2.10.

Лемма 2.12. *Пусть B — конечномерная коммутативная банахова алгебра с единицей, содержащаяся в некоторой коммутативной алгебре A. Предположим, что $t_A(B)$ конечен. Тогда*

$$\mathrm{card}\,[Sp(A)] \leqslant \mathrm{card}\,[Sp(B)] + t_A(B),$$

где $Sp(A)$ — спектр алгебры A.

Доказательство. Допустим противное, т. е. $\mathrm{card}\,[Sp(A)] > \mathrm{card}\,[Sp(B)] + t_A(B)$. Поскольку $B \subset A$ и $Sp(B)$ состоит из конечного числа точек, то $Sp(B)$ содержится в $Sp(A)$ (см. [6], стр. 252). Пусть $x_1 \cdots x_{n+1} \in Sp(A) \setminus Sp(B)$ $(n = t_A(B),\ x_i \neq x_j)$. Так как $Sp(A)$ — хаусдорфово пространство, то найдутся такие элементы $a_1 \cdots a_{n+1} \in A$, что $\hat{a}_i(x_i) = 1, i = 1, \cdots, n+1, \hat{a}_i(y) = 0,\ y \in Sp(B),\ \hat{a}_i(x_j) = 0,\ x_i \neq x_j$, где $\hat{a}_i$ — гельфандовское представление $a_i \in A$ на $Sp(A)$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n+1$. Рассмотрим алгебру B_j — алгебру, порожденную элементами из B и элементами a_i, $i \leqslant j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$. Очевидно, $B_j \subset B_{j+1}$ (включение строгое). Цепочка банаховых алгебр

$$B = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_{n+1} \subset A$$

имеет длину $\geqslant n+1$. Отсюда $t_A(B) \geqslant n+1$. А это противоречит условию, что $t_A(B) = n$. Лемма доказана.

Для идеала I равномерной алгебры A через $\mathrm{hull}_A I$ будем обозначать оболочку I.

Лемма 2.13. *Пусть A — равномерная алгебра на G и I — такой идеал алгебры A, что $\mathrm{hull}_A I$ состоит из конечного числа точек. Тогда все максимальные множества антисимметрии алгебры A, кроме некоторого числа k $(k \leqslant (\mathrm{card}\,(\mathrm{hull}_A I))$ являются максимальными множествами антисимметрии и для I.*

Доказательство очевидно.

Доказательство теоремы 2.1. Необходимость. Пусть $B \subset A$ — две алгебры обобщенных аналитических функций на G. Если Γ_1 и Γ_2 — две такие подполугруппы группы Γ, что $\Gamma_B \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_A$, то тогда (см. лемму 2.2) $B \subset D_{\Gamma_1} \subset D_{\Gamma_2} \subset A$ и поэтому длина любой неуплотняемой цепи полугрупп с началом Γ_B и концом Γ_A не превосходит $t_A(B)$. Пусть

$$\Gamma_B = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_{k-1} \subset \Gamma_k = \Gamma_A$$

— некоторая неуплотняемая цепь полугрупп. Поскольку Γ_{k-1} максимален в Γ_k и $t_A(D_{\Gamma_{k-1}})$ конечен, то на основании леммы 2.9 $\varkappa(\Gamma_{k-1}) < \infty$.

Достаточность. Пусть дана некоторая неуплотняемая цепь

$$\Gamma_B = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_{n-1} \subset \Gamma_n = \Gamma_A$$

полугрупп, причем $\varkappa(\Gamma_{n-1}) < \infty$. Если и $\varkappa(\Gamma_A) < \infty$, то на основании следствия 2.6 получим: $t_A(B) = \mathrm{codim}_A(B)$ конечен. Предположим теперь, что $\varkappa(\Gamma_A) = \infty$. Рассмотрим алгебры B и $D_{\Gamma_{n-1}}$. Так как $\mathrm{codim}\, B$ конечен, найдется идеал I_0 алгебры $B_0 = D_{\Gamma_{n-1}}$, содержащийся в B и такой, что $\mathrm{codim}_B(I_0)$ конечен (см. [5]). Таким образом

$$B = I_0 + \mathbf{C}b_1 + \cdots + \mathbf{C}b_p,\ B_0 = B + \mathbf{C}d_1 + \cdots + \mathbf{C}d_m,$$

где $m = \operatorname{codim}_B B$.

Пусть дана некоторая цепь равномерных алгебр

$$B \subset D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_k = A. \tag{2.5}$$

Для каждого D_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, рассмотрим $I_i = [I_0;\ I_0 \cdot D_i]$, — замкнутую подалгебру алгебры D_i, порожденную элементами из I_0 и $I_0 \cdot D_i$. С помощью I_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, можно построить равномерную алгебру

$$B_i = I_i + \mathbf{C}b_1 + \cdots + \mathbf{C}b_p + \mathbf{C}d_1 + \cdots + \mathbf{C}d_m. \tag{2.6}$$

Очевидно, что $B_0 \subset B_i$, $1 \leqslant i < k$. Покажем, что $D_i \subset B_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Допустим противное. Пусть $D_{i_0} \not\subset B_{i_0}$ для некоторого i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant k$. Тогда алгебра $\widetilde{B} = [D_{i_0};\ B_{i_0}]$ строго содержит B_{i_0}. Поскольку I_{i_0} является идеалом не только для B_{i_0}, но и для D_{i_0}, то I_{i_0} — идеал и для $\widetilde{B}$. Отсюда I_{i_0} является идеалом и для любой алгебры, заключенной между B_{i_0} и $\widetilde{B}$. Поэтому между семейством $\{D\}$, $B_{i_0} \subset D \subset \widetilde{B}$, замкнутых подалгебр $\widetilde{B}$ и семейством $\{D^0\}$, $B_{i_0}/I_{i_0} \subset D^0 \subset \widetilde{B}/I_{i_0}$, где B_{i_0}/I_{i_0} и $\widetilde{B}/I_{i_0}$ — фактор алгебры, существует взаимно однозначное соответствие. Следовательно

$$t_{\widetilde{B}}(B_{i_0}) = t_{\widetilde{B}^0}(\widetilde{B}_0),\ \text{где}\ \widetilde{B}^0 = \widetilde{B}^0/I_{i_0},\ \widetilde{B}_0 = B_{i_0}/I_{i_0}.$$

Поскольку $\operatorname{codim}_{B_{i_0}} I_{i_0} < \infty$, $S_p(B_{i_0})$ состоит из конечного числа точек, поэтому $S_p(\widetilde{B}^0)$ также конечен (см. лемму 2.12). Это означает, что $\operatorname{hull}_{\widetilde{B}} I_{i_0}$ конечен. Так как B_{i_0} строго содержится в $\widetilde{B}$, $B_0 = D_{\Gamma_{n-1}} \subset \subset B_{i_0} \subset \widetilde{B} \subset D_{\Gamma_A} = A$ и $\varkappa(\Gamma_A) = \infty$, то на основании леммы 2.10 найдется такое $\{F\}$ — бесконечное семейство максимальных множеств антисимметрии алгебры $\widetilde{B}$, где каждое $F_0 \in \{F\}$ не является максимальным множеством антисимметрии алгебры B_{i_0}. И поскольку $\operatorname{hull}_{\widetilde{B}} I_{i_0}$ конечен, из леммы 2.12 получаем, что хотя бы одно множество из $\{F\}$ является множеством антисимметрии для I_{i_0}. Но $I_{i_0} \subset B_{i_0}$. Отсюда следует, что существует $F \in \{F\}$, которое будет максимальным множеством антисимметрии для алгебры B_{i_0}. Пришли к противоречию. Таким образом, $D_i \subset B_i$ и $\operatorname{codim} B_i(D_i)$ конечен, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Рассмотрим алгебры D_{i+1} и B_{i+1}. Из того, что $D_i \subset D_{i+1}$, следует, что либо $B_i = B_{i+1}$, либо $B_i \subset B_{i+1}$. Если $B_i = B_{i+1}$, то очевидно $\operatorname{codim}_{B_i}(D_i) > \operatorname{codim}_{B_i}(D_{i+1})$. Если же $B_i \subset B_{i+1}$, то $\operatorname{codim}_{B_i}(D_i) \geqslant \operatorname{codim}_{B_{i+1}}(D_{i+1})$, а $t_A(B_i) > t_A(B_{i+1})$. Таким образом, каждой алгебре из цепи (2.5) можно поставить в соответствие пару целых чисел $(m_i;\ n_i)$, где $m_i = \operatorname{codim}_{B_0}(D_i)$, $n_i = t_A(B_i)$. Итак получим набор пар целых чисел

$$(m_0; n_0),\ (m_1;\ n_1), \cdots (m_{k-1};\ n_{k-1}),\ (0;\ 0), \tag{2.7}$$

где $m_0 = \operatorname{codim}_{B_0}(B)$, $n_0 = t_A(B_0)$, а $(0,0)$ соответствует алгебре A.

Из вышесказанного следует, что для любых двух наборов $(m_{i-1};\ n_{i-1})$, $(m_i;\ n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, либо $m_i > m_{i-1}$, либо $n_i > n_{i-1}$, либо выполняются одновременно оба неравенства. Отсюда $k \leqslant m_0 + n_0$, т. е. длина любой цепочки вида (2.5) не превосходит $m_0 + n_0 = \operatorname{codim}_{B_0}(B) + t_A(B)$. А это и означает, что $t_A(B)$ конечен и равен $t_A(B) = \operatorname{codim}_{B_0}(B) + t_A(B_0)$. Теорема доказана.

Пусть $B \subset A$ — алгебры обобщенных аналитических функций на G. С помощью полугрупп Γ_B и Γ_A дадим оценку $t_A(B)$. Для полугруппы Γ_A рассмотрим семейство $\{G\}$ — семейство всех групп конечного порядка, содержащихся в Γ_A. Пусть

$$\varkappa_0(\Gamma_A) = \sup_{G \in \{G\}} \varkappa(G).$$

Теорема 2.14. *Пусть $t_A(B)$ конечен. Тогда*

а) *если $\varkappa(\Gamma_A) = \varkappa(\Gamma_B)$, то*

$$t_A(B) = \varkappa(\Gamma_B) \cdot P(\Gamma_A:\ \Gamma_B);$$

б) *если $\varkappa(\Gamma_B) < \varkappa(\Gamma_A) < \infty$, то*

$$t_A(B) = \varkappa(\Gamma_B) \cdot [P(\Gamma_A;\ \Gamma_B) - 1] + \varkappa(\Gamma_A);$$

в) *если $\varkappa(\Gamma_A) = \infty$, то*

$$t_A(B) = \varkappa(\Gamma_B) \cdot [P(\Gamma_A;\ \Gamma_B) - 1] + 2\varkappa_0(\Gamma_A).$$

Доказательство. Пусть $B \subset A$ — алгебры обобщенных аналитических функций на G и $t_A(B)$ конечен. Тогда из теоремы 2.1 и предложения 1.3 следует существование такой неуплотняемой цепочки полугрупп

$$\Gamma_B = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_{i_0} \subset \cdots \subset \Gamma_{n-1} \subset \Gamma_n = \Gamma_A \tag{2.8}$$

и числа $P(\Gamma_A;\ \Gamma_B) = i_0$, $0 \leqslant i_0 \leqslant n$, что $\varkappa(\Gamma_i) < \varkappa(\Gamma_{i+1})$, когда $i > i_0$ и $\varkappa(\Gamma_i) = \varkappa(\Gamma_0)$, когда $0 \leqslant i_0 \leqslant n$, кроме того, $\varkappa(\Gamma_{n-1}) < \infty$. Предположим сначала что $\varkappa(\Gamma_A) = \varkappa(\Gamma_B)$. Тогда $\varkappa(\Gamma_i) = \varkappa(\Gamma_A)$ для $0 \leqslant i \leqslant n$. Отсюда $\operatorname{codim}_{D_{\Gamma_{i+1}}}(D_{\Gamma_i}) = \varkappa(\Gamma_B) = \varkappa(\Gamma_A)$ (см. лемму 2.11). Поэтому $t_A(B) = \operatorname{codim}_A(B) = \varkappa(\Gamma_A) \cdot n = \varkappa(\Gamma_A) \cdot P(\Gamma_A;\ \Gamma_B)$. Пусть теперь $\varkappa(\Gamma_B) < \varkappa(\Gamma_A) < \infty$. Тогда из вышесказанного следует, что $\operatorname{codim}_{D_{\Gamma_{i_0}}}(B) = \varkappa(\Gamma_B) \cdot P(\Gamma_A;\ \Gamma_B)$. Для $i > i_0$, применив лемму 2.11, получим: $\operatorname{codim}_{D_{\Gamma_{i+1}}}(D_{\Gamma_i}) = \varkappa(\Gamma_{i+1}) - \varkappa(\Gamma^i)$. Следовательно, в этом случае

$$t_A(B) = \varkappa(\Gamma_B) \cdot P(\Gamma_A;\ \Gamma_B) - \varkappa(\Gamma_B) + \varkappa(\Gamma_A) =$$

$$= \varkappa(\Gamma_B)\,[P(\Gamma_A;\ \Gamma_B) - 1] + \varkappa(\Gamma_A).$$

Предположим теперь, что $\varkappa(\Gamma_A) = \infty$. Тогда

$$t_{D_{\Gamma_{n-1}}}(B) = \varkappa(\Gamma_B)\,[P(\Gamma_A;\ \Gamma_B) - 1] + \varkappa(\Gamma_{n-1}) = \operatorname{codim}_{D_{\Gamma_{n-1}}} B.$$

Покажем, что $\varkappa_0(\Gamma_A) = \varkappa(\Gamma_{n-1})$. Допустим противное. Пусть $\varkappa(\Gamma_{n-1}) < \varkappa_0(\Gamma_A)$. Это означает, что найдется группа G^0 ($G^0 \subset \Gamma_A$) конечного порядка, не содержащаяся в Γ_{n-1}. Поскольку $\varkappa(G^0) < \infty$, $\varkappa(\Gamma_{n-1}) \leq \infty$, то для полугруппы Γ^0, порожденной элементами из G^0 и Γ_{n-1} справедливо $\varkappa(\Gamma^0) < \infty$. Полугруппа Γ_{n-1} — максимальная в Γ_A, поэтому $\Gamma^0 = \Gamma_A$. Отсюда $\varkappa(\Gamma_A) < \infty$. Пришли к противоречию. Таким образом, $\varkappa_0(\Gamma_A) = \varkappa(\Gamma_{n-1})$. Теперь, применив лемму 2.11, получаем $t_A(D_{\Gamma_{n-1}}) = \varkappa_0(\Gamma_A)$. Следовательно, (см. окончание доказательства теоремы 2.1)

$$t_A(B) = \operatorname{codim}_{D_{\Gamma_{n-1}}}(B) + t_A(D_{\Gamma_{n-1}}) = \varkappa(\Gamma_B)\,[P(\Gamma_A;\ \Gamma_B) - 1] + 2\varkappa_0(\Gamma_A).$$

Теорема доказана.

§ 3. Максимальные подалгебры в $C(G)$

Пусть A — некоторая алгебра обобщенных аналитических функций на G. Представляется интересным найти условия, при которых алгебра A содержится в максимальной алгебре. В случае, когда G — окружность, любая алгебра обобщенных аналитических функций на G имеет конечный тип и поэтому содержится в некоторой максимальной алгебре, но, вообще говоря, существуют примеры алгебр обобщенных аналитических функций, которые не содержатся ни в какой максимальной алгебре.

К. Гофманом и И. Зингером в [1] была сформулирована следующая

Теорема А. Пусть A — такая равномерная алгебра на G, что Γ_A вполне упорядочивает Γ. Алгебра A максимальна тогда и только тогда, когда Γ_A задает архимедов порядок на Γ.

Позднее Р. Кауфман доказал следующую теорему [2].

Теорема В. Пусть A — такая равномерная алгебра на G, что Γ_A упорядочивает Γ. Алгебра A содержится в некоторой максимальной алгебре на G тогда и только тогда, когда существует сохраняющий порядок гомоморфизм из группы Γ в группу вещественных чисел.

В этом параграфе указывается критерий существования максимальной алгебры, содержащей алгебру A, но уже не в терминах полугрупп, как это было сделано Р. Кауфманом, а также К. Гофманом и И. Зингером, а в терминах свойств самой алгебры A.

Напомним одно определение. Пусть A — равномерная алгебра на некотором бикомпактном пространстве X. Говорят, что A — проникающая алгебра, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ равномерное замыкание A_F сужения алгебры A на F совпадает с алгеброй всех непрерывных комплекснозначных функций на F.

Предложение 3.1. *Пусть A — такая равномерная алгебра на G, что Γ_A упорядочивает Γ. Алгебра A максимальна тогда и только тогда, когда она проникающая.*

Доказательство. Необходимость. Из максимальности A и леммы 2.3 следует, что A — антисимметричная алгебра. Следовательно, A — проникающая (см. [9]).

Достаточность. Пусть A — проникающая алгебра. Применив лемму 2.2, получим, что Γ_A не только упорядочивает, но и вполне упорядочивает группу Γ, а это означает (см. [1]), что алгебра A есть алгебра обобщенных аналитических функций, т. е. $A = D_{\Gamma_A}$. Покажем, что Γ_A задает архимедов порядок на Γ. Действительно, пусть $a \in \Gamma \setminus \Gamma_A$ и χ_a — характер группы G, соответствующий элементу a. Поскольку Γ_A вполне упорядочивает Γ, то $-a$ принадлежит Γ_A. Рассмотрим алгебру A_a — равномерную алгебру на G, порожденную элементом χ_a и множеством Γ_A. Очевидно $A \underset{+}{\subset} A_a$. Так как сопряжение к χ_a есть χ_{-a}, то алгебра A_a не антисимметрична и в силу проникаемости алгебры A получаем $A_a = C(G)$. Следовательно, полугруппа Γ^0, порожденная множеством Γ_A и элементом a, совпадает с Γ. Таким образом, Γ_A задает полный архимедов порядок на Γ. Теперь достаточно применить теорему А, и предложение доказано.

Предложение 3.2. *Пусть A — алгебра обобщенных аналитических функций на G. Если A — проникающая алгебра, то найдется алгебра B обобщенных аналитических функций на G, содержащая A и являющаяся максимальной алгеброй на G.*

Доказательство. Из определения алгебры обобщенных аналитических функций следует, что алгебра A порождена множеством $\Gamma_A \subset \Gamma$, т. е. $A = D_{\Gamma_A}$. Воспользовавшись леммой 2.2 и условием предложения 3.2, получаем, что в Γ_A нет нетривиальной группы. Далее, поскольку алгебра A проникающая, то в группе Γ нет группы конечного порядка. Действительно, если бы в Γ существовала группа G_0 конечного порядка, то полугруппа Γ_1, порожденная множествами Γ_A и G_0, во-первых, не совпала бы с Γ и, во-вторых, алгебра D_{Γ_1} была бы не антисимметричной, $D_{\Gamma_1} \neq C(G)$. А это противоречит условию проникаемости алгебры A. Таким образом, Γ не содержит группу конечного порядка и в Γ_A нет нетривиальной группы. Теперь, воспользовавшись леммой Цорна, можно показать существование такой полугруппы Γ^0 $(\Gamma_A \subset \Gamma^0)$, что Γ^0 вполне упорядочивает Γ. Поскольку $\Gamma_A \subset \Gamma^0$, то $A \subset D_{\Gamma^0}$, и следовательно, D_{Γ^0} — также проникающая алгебра. Поэтому достаточно применить предложение 3.1, согласно которому D_{Γ^0} становится максимальной алгеброй. Предложение доказано.

Следствие. Пусть A — проникающая алгебра обобщенных аналитических функций на компактной группе G. Тогда G связна.

Теорема 3.3. *Пусть A — равномерная алгебра на G и Γ_A упорядочивает Γ. Алгебра A содержится в некоторой максимальной алгебре на G тогда и только тогда, когда найдется такая замкнутая подгруппа H группы G, что* а) $A_{H_{x_0}} = C(H_{x_0})$, *где* $H_{x_0} = x_0 + H$ *для некоторого* $x_0 \in G$;

б) $A_{H_{x_0}}$ — *проникающая алгебра на* H_{x_0}.

Доказательство. Необходимость. Пусть B — максимальная алгебра на G, содержащая A. Поскольку Γ_A упорядочивает Γ, то Γ_B также упорядочивает Γ и, следовательно, максимальное неодноточечное множество антисимметрии алгебры B представимо в виде $x_0 + H$, где $x_0 \in G$, а H — некоторая замкнутая подгруппа группы G (см. [3], стр. 220). Покажем теперь, что $A_{H_{x_0}} = B_{H_{x_0}}$. Не теряя общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Обозначим через H^0 группу характеров H. Нетрудно проверить, что $H^0 = \Gamma/H^{\perp}$, где $H^{\perp}$ — множество тех характеров из Γ, которые равны 1 на H. Поскольку Γ_A и Γ_B упорядочивают Γ и алгебры A_H и B_H антисимметричные, то Γ_{A_H} и Γ_{B_H} вполне упорядочивают H^0. Следовательно, $A_H = B_H$ (см. [3], стр. 221). И поскольку B_H — максимальная алгебра на H, то она проникающая, поэтому проникающей является и алгебра A_H.

Достаточность. Пусть A_H — проникающая алгебра для некоторой группы $H \subset G$. Тогда на основании предложения 3.2 найдется максимальная в $C(H)$ алгебра B_H, содержащая A_H. Пусть $B = \{f \in C(G);\ f|_H \in B_H\}$. Нетрудно проверить, что $A \subset B$ и B — максимальная подалгебра в $C(G)$. Теорема доказана.

Пусть G — компактная связная группа. Укажем критерий, согласно которому G станет окружностью.

Теорема 3.4. *Пусть G — компактная связная группа. Группа гомеоморфна окружности тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа $n \geq 2$ найдется алгебра обобщенных аналитических функций на G, тип которой равен n.*

Доказательство. Необходимость. Если G — окружность, то группа характеров группы G есть $\mathbf{Z}$ — группа целых чисел. Полугруппа $\mathbf{Z}_+$ задает полный архимедов порядок на $\mathbf{Z}$ и поэтому $t_{C(G)}(A_0) = a$, где A — равномерная алгебра, порожденная полугруппой $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_+ \setminus \{1\}$ (см. теорему 2.14).

Достаточность. Пусть G — компактная связная группа, и A — алгебра обобщенных аналитических функций на G, имеющая тип $n \geq 2$. Полугруппа Γ_A не содержит нетривиальную группу. Действительно, если бы Γ_A содержала бы группу H, то в силу связности G $\kappa(H) = \infty$. Поэтому алгебра A имела бы бесконечное число максимальных неодноточечных множеств антисимметрии (см. лемму 2.2). Но тип алгебры A конечен, следовательно, число максимальных неодноточечных множеств антисимметрии алгебры A не превосходит $t_{C(G)}(A)$. Пришли к противоречию. Таким образом, Γ_A не содержит нетривиальную группу. Из леммы Цорна получаем, что существует полугруппа Γ^0, вполне упорядочивающая группу Γ и содержащая Γ_A. И поскольку $A \subset D_{\Gamma^0}$, то из конечности $t_{C(G)}(A)$ следует конечность $t_{C(G)}(D_{\Gamma^0})$ и конечность $t_{D_{\Gamma^0}}(A)$. Поэтому согласно теоремам 2.1 и 2.14 Γ^0 не содержит нетривиальную группу и $t_{C(G)}(D_{\Gamma^0})=1$, $\operatorname{codim}_{D_{\Gamma^0}}(A)=t_{D_{\Gamma_0}}(A)$. Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0, содержащая Γ_A. Тогда $\Gamma^0=\Gamma_0\cup\{a_0\}$ (см. лемму 1.1). Поскольку э-мера Хаара группы G является представляющей мерой некоторого мультипликативного функционала на D_{Γ^0}, то пространство максимальных идеалов алгебры D_{Γ^0} существенно шире группы G, и поэтому найдется такой мультипликативный функционал m на D_{Γ^0}, что

$$0<|m(\chi_a)|<1,\ a\in\Gamma^0.$$

С помощью m зададим отображение Φ из Γ в R — аддитивную группу вещественных чисел:

$$\begin{cases}\Phi(a)=-\log|m(\chi_a)| \\ \Phi(-a)=-\Phi(a)\end{cases} a\in\Gamma^0.$$

Отображение Φ является сохраняющим порядок гомоморфизмом группы Γ в группу вещественных чисел R и $\Phi(\Gamma^0)\subset R_+$, $\Phi(-\Gamma_0)\subset R_-$. Поскольку $\Gamma^0=\Gamma_0\cup\{a_0\}$, то $\Phi(\Gamma^0)=\Phi(\Gamma_0)\cup\Phi(a_0)$. Докажем, что $\Phi(\Gamma^0)$ совпадает с $Z_\Phi^+=\{x\in R_+;\ x=n\cdot\Phi(a_0),\ n\in Z_+\}$. Очевидно, что $\Phi(\Gamma^0)\supset Z_\Phi^+$. Покажем обратное включение. Допустим противное. Пусть для некоторого $m\in Z_+$ найдется $b\in\Gamma^0$ такое, что $m\Phi(a_0)<\Phi(b)<$ $<(m+1)\Phi(a_0)$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$0<\Phi(b-ma_0)<\Phi(a_0),\quad 0<\Phi((m+1)a_0-b)<\Phi(a_0). \tag{3.1}$$

Из этих неревенств получаем, что

$$b-ma_0\in\Gamma^0 \text{ и } (m+1)a_0-b\in\Gamma^0.$$

Так как $\Gamma^0=\Gamma_0\cup\{a_0\}$, из (3.1) следует, что

$$b-ma_0\in\Gamma_0 \text{ и } (m+1)a_0-b\in\Gamma_0.$$

Поэтому $a_0\in\Gamma$. Пришли к противоречию. Таким образом

$$\Phi(\Gamma^0)=Z_\Phi^+.$$

Поскольку алгебра D_Γ — максимальная и антисимметричная, то гомоморфизм Φ является изоморфизмом группы Γ на $Z_\Phi=Z_\Phi^+\cup(-Z_\Phi^+)$. Следовательно, группа Γ — группа характеров компактной группы G — изоморфна группе целых чисел. Поэтому G гомеоморфна окружности. Теорема доказана.

ВЦ Госплана Армянской ССР Поступила 6.X.1977

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Կոմպակտ խմբի վրա սահմանված վերջավոր տիպ ունեցող հանրահաշիվների մասին *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում են վերջավոր տիպ ունեցող համասարաչափ հանրահաշիվները, որոնք ծնվում են բնութագրերի խմբի որոշ ենթաբազմության միջոցով։ Այդ դասի A և B(B⊂A) հանրահաշիվների համար տրվում է չափանիշ որպեսզի B հանրահաշիվը լինի վերջավոր տիպի հանրահաշիվ։

S. A. GRIGORIAN. *On algebras of finite type on a compact group G* (summary)

The paper investigates the types and the relative types of the class of uniform algebras which are generated by a subsemigroup of the group of characters in a compact Abel group G.

For two algebras A, B, $A \subset B$ from this class a finiteness criterium of the type B with respect to A is found. In particular, for the algebra of all complex-valued continuous functions on G a maximality criterium for is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Hoffman, I. Singer*. Maximal subalgebras of C(Γ), Amer. J. Math., 79, 1957 295—305
2. *R. Kaufman*. A maximality theorem in Fourier analysis, P.A.M.S, 18, 1967, 806—807
3. *Т. Гамелин*. Равномерные алгебры, М., Изд. «Мир», 1974.
4. *Л. С. Понтрягин*. Непрерывные группы, М., Изд. «Наука», 1973.
5. *Е. А. Горин*. Подалгебры конечной коразмерности, Мат. заметки, 6 : 3, 1969.
6. *М. А. Наймарк*. Нормированные кольца, М., Изд. «Наука», 1968.
7. *С. А. Григорян*. Об алгебрах конечного типа, УМН, XXX, вып. 6, 1975.
8. *С. А. Григорян*. О типах равномерных алгебр, Функциональный анализ, 10, вып. 4, 1976.
9. *С. А. Григорян*. О некоторых свойствах функциональных алгебр с точки зрения ортогональных мер, Мат. заметки, 18, вып. 3, 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 3, 1979 Математика

С. В. ХРУЩЕВ

АЛЬТЕРНАТИВА БРЕННАНА ДЛЯ МЕР С КОНЕЧНОЙ ЭНТРОПИЕЙ

§ 1. Введение

Всякий ли субнормальный оператор имеет нетривиальное инвариантное подпространство? Этот вопрос, получивший недавно утвердительный ответ в работе Scott'a Brown'a [1], привел к изучению пространств $H^p(\mu)$, являющихся замыканием семейства многочленов $\mathbf{P}$ в $L^p(\mu)$, где μ — неотрицательная мера на плоскости $\mathbf{C}$ с компактным носителем, а $p>1$. С помощью спектральной теоремы сформулированный выше вопрос сводится к вопросу о существовании инвариантных подпространств у оператора $\mathbf{z}$ умножения на z ($z(\xi)\equiv\xi$, $\xi\in\mathbf{C}$) в $H^2(\mu)$. Отбросим неинтересный случай $\mu=\delta(\xi)$, $\delta(\xi)$ — единичная нагрузка в точке ξ. Очевидно, что оператор $\mathbf{z}$ имеет инвариантное подпространство, если $L^2(\mu)=H^2(\mu)$ или, если существует точка ξ такая, что функционал $\varphi\to\varphi(\xi)$, $\varphi\in\mathbf{P}$ ограничен в $H^2(\mu)$. В результате мы приходим к следующей альтернативе, которую справедливо назвать альтернативой Бреннана, так как J. Brennan внес большой вклад в исследование этой возможности. Пусть $1\leqslant p<\infty$.

Определение. Альтернатива Бреннана с показателем p справедлива для меры μ, короче $\mu\in(B_p)$, если либо $H^p(\mu)=L^p(\mu)$, либо существует точка ξ, $\xi\in\mathbf{C}$ такая, что функционал $\varphi\to\varphi(\xi)$, $\varphi\in\mathbf{P}$ ограничен в $H^p(\mu)$.

Как уже отмечалось выше, с проблемой субнормальных операторов связана альтернатива (B_2), и хотя Scott Brown доказал, что всякий субнормальный оператор имеет нетривиальное инвариантное подпространство, все же остается неясным — для всякой ли меры μ справедливо включение $\mu\in(B_2)$. Brennan [2] доказал, что $\mu\in(B_p)$ для любой меры μ, если $p>2$. С другой стороны, нетрудно показать, что справедливость альтернативы Бреннана с показателем $p=1$ влечет ее справедливость при всех p. Действительно, если $H^p(\mu)\neq L^p(\mu)$, то существует функция g, $g\in L^q(\mu)$, $q=p/(p-1)$ такая, что

$$\int\varphi g\,d\mu=0 \tag{1}$$

для любого полинома φ. Рассмотрим неотрицательную меру $\nu=|g|\cdot\mu$. Из (1) следует, что $L^1(\nu)\neq H^1(\nu)$. Так как по предположению (B_1) совпадает с множеством всех неотрицательных мер с компактным носителем, то найдется точка ξ и постоянная C, $C>0$ такие, что

$$|\varphi(\xi)| \leqslant C \cdot \|\varphi\|_{L^1(\nu)} \leqslant C \cdot \|\varphi\|_{L^p(\mu)} \cdot \|g\|_{L^q(\mu)}.$$

Следовательно, функционал $\varphi \to \varphi(\xi)$ ограничен в $H^p(\mu)$.

В этой работе мы будем иметь дело с мерами μ, абсолютно непрерывными относительно обычной меры Лебега dS на плоскости. Речь пойдет об уточнении недавнего результата Бреннана [3], который доказал, что $\mu \in (B_1)$, если $\mu = f dS$ и $f \in L^{1+\varepsilon}(dS)$ для какого-нибудь ε, $\varepsilon > 0$.

Теорема. *Пусть $\mu = f dS$, носитель меры μ компактен и*

$$\int f (\log^+ f)^p \, dS < +\infty, \quad p \geqslant 1.$$

Тогда $\mu \in (B_p)$.

Профессор Бреннан сообщил мне, что он может получить доказательство этой теоремы с помощью другого метода.

§ 2. Доказательство теоремы

Лемма 1. *Если теорема верна при $p = 1$, то она верна и при любом p, $p \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $p > 1$ и $H^p(\mu) \neq L^p(\mu)$. Тогда существует функция g, $g \in L^q(\mu)$, удовлетворяющая условию (1). Проверим, что для меры $\nu = |g| f dS$ справедливы все предпосылки нашей теоремы. Имеем

$$\int |gf| \log^+ |gf| \, dS \leqslant \int (|g| \log^+ |g|) \cdot |f| \, dS + \int |g| \cdot f^{1/q} \cdot f^{1/p} \log^+ f \, dS \leqslant$$

$$\leqslant \text{Const.} \int |g|^q f \, dS + \|g\|_{L^q(\mu)} \left(\int f (\log^+ f)^p \, dS \right)^{1/p} < +\infty.$$

Так как мы предположили справедливость теоремы при $p = 1$, то $\nu \in (B_1)$, откуда легко следует, что $\mu \in (B_p)$ (см. введение).

Перейдем к рассмотрению случая $p = 1$. Условимся символом $\hat{\nu}$ обозначать интеграл Коши меры ν:

$$\hat{\nu}(z) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Хорошо известно, что $\hat{\nu} \in L^1_{\text{loc}}(dS)$ для любой конечной меры ν на плоскости. Пусть $0 < d < 2$, ν — конечная борелевская мера на плоскости. Тогда

$$U^\nu_d(z) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{d\nu(\zeta)}{|\zeta - z|^{2-d}}$$

— потенциал Рисса порядка d меры ν.

Предположим, что все функционалы значений в точке разрывны в $H^1(\mu)$. Мы докажем, что тогда $H^1(\mu) = L^1(\mu)$. Для этого достаточно показать, что

$$g \in L^{\infty}(\mu), \quad \int \varphi g \, d\mu = 0, \ \varphi \in \mathbf{P} \Rightarrow g = 0.$$

Итак, пусть $g \in L^{\infty}(\mu)$ и $\int \varphi g \, d\mu = 0$ для любого многочлена φ. Известное равенство (см. [4], стр. 49)

$$\bar{\partial} \hat{\nu} = -\pi \nu,$$

справедливое в смысле теории обобщенных функций, позволяет нам доказывать, что $\hat{g\mu} = 0$ почти всюду по мере Лебега dS.

Пусть

$$\lambda > 0 \text{ и } E_{\lambda} \overset{\text{def}}{=} \{\zeta : |\hat{g\mu}(\zeta)| \leqslant \lambda\}.$$

Бреннан показал, что множество E_{λ} является в некотором смысле „толстым“.

Определение. Измеримое множество E на плоскости называется „толстым“, если для всякой точки ξ, $\xi \in \mathbf{C}$ почти всякая окружность с центром в точке ξ пересекает E по множеству положительной дуговой меры.

Из [3] можно извлечь следующую теорему.

Теорема (Brennan [3]). Пусть μ — произвольная неотрицательная мера на плоскости с компактным носителем и пусть для всякого ξ, $\xi \in \mathbf{C}$ функционал значения в точке ξ не является ограниченным в $H^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда если $g \in L^q(\mu)$, $q = p/(p-1)$ и $\int \varphi g \, d\mu = 0$ для любого многочлена φ, то при всяком λ, $\lambda > 0$ множество $E_{\lambda} = \{\xi : |\hat{g\mu}(\xi)| \leqslant \lambda\}$ является толстым.

Доказательство этой теоремы короткое и мы приведем его для удобства читателей. Пусть $\xi \in \mathbf{C}$ и пусть X — ограниченное замкнутое множество положительной меры на полуоси $(0, +\infty)$ такое, что длина $E_{\lambda} \cap \{\zeta : |\xi - \zeta| = x\}) = 0$ для всякого x, $x \in X$. Множество $X^* = \bigcup_{x \in X} \{\zeta : |\xi - \zeta| = x\}$ имеет положительную плоскую меру Лебега и $S(E_{\lambda} \cap X^*) = 0$. Если $\varphi \in \mathbf{P}$, то

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{S(X^*)} \int_{X^*} \varphi \, dS. \tag{2}$$

Подставляя в (1) $\dfrac{\varphi(\zeta) - \varphi(z)}{\zeta - z}$ вместо φ, получим, что $\varphi(z) = \dfrac{\widehat{\varphi g\mu}(z)}{\hat{g\mu}(z)}$,

если $\hat{g\mu}(z) \neq 0$. Следовательно

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{S(X^*)} \int_{X^*} \frac{\widehat{\varphi g\mu}(\zeta)}{\hat{g\mu}(\zeta)} \, dS(\zeta) = \int_{\mathbf{C}} \varphi(z) \, g(z) \, d\mu(z) \frac{1}{S(X^*)} \int_{X^*} \frac{dS(\zeta)}{\hat{g\mu}(\zeta)(z - \zeta)}.$$

Внутренний интеграл есть непрерывная функция как свертка локально суммируемой функции z^{-1} и ограниченной $1/\widehat{g\mu} \mid X^*$. Итак

$$|\varphi(\xi)| \leqslant \mathrm{Const.}\, \|\varphi\|_{L^p(\mu)} \cdot \|g\|_{L^q(\mu)}. \quad \bullet$$

Преобразования Коши $\hat{\nu}$ кооечных мер ν обладают некоторой „непрерывностью". Поэтому есть надежда, что множеству E_λ должны принадлежать и точки плоскости, близкие к нему. Точнее, если для какой-либо точки ξ, $\xi \in \mathbf{C}$ удастся расположить на E_λ семейство вероятностных мер $(\nu_\delta)_{\delta>0}$ так, чтобы

$$\widehat{g\mu}(\xi) = \lim_{\delta \to 0+} \int_{\mathbf{C}} \widehat{g\mu}\, d\nu_\delta,$$

то, очевидно, $\xi \in E_\lambda$. Следующая лемма Карлесона [5] (см. также [6], стр. 170) позволяет сформулировать критерий существования такого семейства $(\nu_\delta)_{\delta>0}$. Положим $\Delta(\xi, \delta) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\zeta\colon |\xi - \zeta| < \delta\}$.

Лемма Карлесона. Пусть μ — конечная комплексная мера с компактным носителем на плоскости и пусть $U_1^{|\mu|}(\xi) < +\infty$. Предположим, что $(\nu_\delta)_{\delta>0}$ — семейство вероятностных мер, такое, что носитель меры ν_δ лежит в $\Delta(\xi, \delta)$ для каждого δ, $\delta > 0$ и что

$$\lim_{\delta \to 0+} \int_{\Delta(\xi, 2\delta)} U_1^{\nu_\delta} d|\mu| = 0. \qquad (*)$$

Тогда

$$\hat{\mu}(\xi) = \lim_{\delta \to 0+} \int_{\mathbf{C}} \hat{\mu}\, d\nu_\delta.$$

Доказательство этой леммы приводится для полноты изложения Оригинальное доказательство близкого результата см. в [5].

$$\hat{\mu}(\xi) - \int \hat{\mu}\, d\nu_\delta = \int_{|\zeta-\xi|<\delta} d\nu_\delta(\zeta) \int_{|z-\xi|>2\delta} \left\{\frac{1}{z-\xi} - \frac{1}{z-\zeta}\right\} d\mu(z) +$$

$$+ \int_{|\zeta-\xi|<\delta} d\nu_\delta(\zeta) \int_{|z-\xi|<2\delta} \frac{d\mu(z)}{z-\xi} - \int d\nu_\delta(\zeta) \int_{|z-\xi|<2\delta} \frac{d\mu(z)}{z-\xi}.$$

Первый интеграл в правой части предыдущего равенства по модулю не превосходит интеграла

$$I_1(\delta) = \int_{|z-\xi|>2\delta} \left| \hat{\nu}_\delta(z) - \frac{1}{\xi - z}\right| d|\mu|.$$

Так как $|\hat{\nu}_\delta(z)| \leqslant \dfrac{\mathrm{Const}}{|z-\xi|}$ при $|z-\xi| > 2\delta$ и $\hat{\nu}_\delta(z) \to (\xi - z)^{-1}$ поточечно, то по теореме Лебега $\lim\limits_{\delta\to 0+} I_1(\delta) = 0$. Второй интеграл меньше интеграла $\int\limits_{|z-\xi|<2\delta} \frac{d|\mu|}{|z-\xi|}$, который стремится к нулю при $\delta \to 0+$. Последний интеграл стремится к нулю по условию. ●

Предположим, что нам удалось расположить для каждого δ, $\delta > 0$ на множестве $E_\xi \cap \Delta(\xi, \delta)$ вероятностную меру ν_δ так, чтобы выполнялось условие (*). Тогда лемма Карлесона позволяет заключить, что $\xi \in E_\mu$, если, конечно, $U_1^{|\mu|}(\xi) < +\infty$. Так как последнее имеет место для почти всех ξ, $\xi \in \mathbf{C}$, то для завершения доказательства теоремы достаточно осуществить указанный выше выбор мер ν_δ для почти любой точки ξ плоскости. Следующая лемма принадлежит Бреннану [3].

Лемма Бреннана. Пусть E — „толстое" множество и $\delta > 0$. Для любого ξ, $\xi \in \mathbf{C}$ существует вероятностная мера ν_δ на множестве $\Delta(\xi, \delta) \cap E$ такая, что для любой невозрастающей неотрицательной функции h на полуоси $(0, +\infty)$ справедливо неравенство

$$\int h(|\zeta - z|)\, d\nu_\delta(\zeta) \leqslant \frac{2}{\delta} \int\limits_0^\delta h(x)\, dx. \tag{3}$$

Доказательство. Можно считать, что $\xi = 0$. Пусть π — отображение, которое каждому r, $r > 0$ сопоставляет первую точку пересечения окружности с центром в нуле и радиуса r с некоторым замкнутым подмножеством E, мера которого сколь угодно близка к мере множества E. Мера ν_δ — есть нормированный образ линейной меры Лебега на отрезке $(0, \delta)$ при отображении π. Подробности см. в [3] или в [6], стр. 169—170. ●

Мы докажем теперь, что семейство построенных мер $(\nu_\delta)_{\delta>0}$ обладает свойством (*), если только мера μ удовлетворяет условиям теоремы. Для этого нам потребуется оценка функций распределения потенциалов U_1^μ. Лемма Литтлвуда, использовавшаяся также в [3], позволяет это сделать без труда.

Лемма Литтлвуда. Пусть μ — вероятностная мера на плоскости и $p > 2$. Тогда

$$\left(\int\limits_{\mathbf{C}} |U_1^\mu|^p\, dS \right)^{1/p} \leqslant K_p \left(\sup_{\zeta \in \mathbf{C}} U_q^\mu(\zeta) \right)^{1/q}$$

и $\overline{\lim\limits_{p \to +\infty}} K_p < +\infty$.

Доказательство этой леммы основано на технике интерполяции. Его можно найти в книге Карлесона [7] на стр. 83—84. Стоит, однако, предупредить читателя, что в [7] эта лемма не сформулирована, а доказывается как часть одной специальной теоремы. Кроме того, так как эта лемма в [7] используется в грубой форме, то и заключительная оценка проведена с искусственным загрублением. Тем не менее доказательство леммы с помощью рассуждений из [7] восстанавливается без труда.

Комбинируя лемму Литтлвуда с неравенством (3), получим

$$\left(\int |U_1^{\gamma_\delta}|^p \, dS\right)^{1/p} \leqslant K_p \left(\frac{2}{\delta}\int_0^\delta \frac{dx}{x^{2-q}}\right)^{1/q} = K_p\left(\frac{1}{q-1}\right)^{1/q} \cdot \left(\frac{1}{\delta^{2-q}}\right)^{1/q}.$$

Отсюда для y, $y>0$

$$S(\{\xi\colon U_1^{\gamma_\delta}(\xi) > y\}) \leqslant \frac{1}{y^p}\int |U_1^{\gamma_\delta}|^p \, dS \leqslant \frac{K_p\,\delta}{y} \cdot \left(\frac{K_p}{y^\delta (q-1)}\right)^{1/q-1}. \tag{4}$$

Лемма 1. *Существует постоянная* C, $C>0$ *такая, что для* y, $y > \frac{C}{\delta}$ *справедливо неравенство*

$$S(\{\xi\colon U_1^{\gamma_\delta}(\xi) > y\} < \mathrm{Const}\, \delta^2 e^{-ky^\delta},$$

где k *и* Const — *абсолютные положительные постоянные.*

Доказательство. Положим в (4) $\frac{1}{q-1} = \frac{y^\delta}{Ae}$, где A — пока произвольное положительное число. Элементарные вычисления показывают, что

$$\left(\frac{K_p}{y^\delta (q-1)}\right)^{1/q-1} = \exp\left\{\frac{y^\delta}{Ae}\log\frac{K_p}{Ae}\right\}.$$

Выберем теперь константу A так, чтобы $A > K_p$ для всех p, $p \geqslant 3$, т. е. для $q = \frac{p}{p-1} \leqslant 3/2$. Но $1 < q \leqslant 3/2$ в том и только в том случае, если $\frac{1}{q-1} \geqslant 2$. Значит, если положить постоянную C равной $2Ae$, то окажется возможным выбрать q так, что $\frac{1}{q-1} = \frac{y^\delta}{Ae}$ и одновременно $A > K_p$. Отсюда

$$S(\{\xi\colon U_1^{\gamma_\delta}(\xi) > y\}) \leqslant \frac{A\delta^2}{y^\delta} e^{-\frac{y^\delta}{Ae}} \leqslant \mathrm{Cost}\, \delta^3 d^{-ky^\delta}. \ ●$$

Приступим к проверке условия (*) для почти всех ξ, $\xi \in \mathbf{C}$. Не уменьшая общности, можно считать, что

$$\int \frac{f\log^+ f}{|\zeta - \xi|} \, dS(\zeta) < +\infty. \tag{5}$$

Положим $G = \Delta(\xi, 2\delta) \cap \left\{U_1^{\gamma_\delta} > \frac{C}{\delta}\right\}$. Ясно, что

$$\int_{\Delta(\xi, 2\delta)} U_1^{\gamma_\delta} \, d\mu \leqslant \frac{C}{\delta}\int_{\Delta(\xi, 2\delta)} d\mu + \int_G U_1^{\gamma_\delta} \, d\mu.$$

Ввиду (5), первое слагаемое в правой части предыдущего неравенства есть $o(1)$ при $\delta \to 0^{+}$.

Лемма 2. *Пусть h — неотрицательная функция на плоскости, а a — положительное число. Тогда*

$$\int\limits_G hf\,dS \leqslant a\int\limits_G f\log^+ f\,dS + \int\limits_G he^{\frac{1}{a}h}\,dS.$$

Доказательство. Если $h \leqslant a\log f$, то $hf \leqslant af\log f$. Если же $h > a\log f$, то $f < e^{\frac{1}{a}h}$ и $hf \leqslant he^{\frac{1}{a}h}$. Следовательно,

$$hf \leqslant af\log^+ f + he^{\frac{1}{a}h} \quad \bullet$$

Мы воспользуемся этой леммой с $h = U_1^{\gamma_\delta}$, а постоянную a подберем позднее. Положим

$$G_n = \left\{ \zeta \in G:\ \frac{C_n}{\delta} < U_1^{\gamma_\delta} \leqslant \frac{C(n+1)}{\delta} \right\}.$$

Из леммы 1 следует, что

$$S(G_n) \leqslant \mathrm{Const}\cdot\delta^2 e^{-kCn}.$$

Кроме того, $G = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} G_n$. Поэтому

$$\int\limits_G U_1^{\gamma_\delta} e^{\frac{1}{a}U_1^{\gamma_\delta}}\,dS \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{C(n+1)}{\delta}\, e^{\frac{1}{a}\frac{C(n+1)}{\delta}} \cdot \delta^2 e^{-kCn} =$$

$$= C\delta \sum_{n \geqslant 1} (n+1)\exp\left\{ C\left(\frac{n+1}{a\delta} - kn \right) \right\}.$$

Если теперь выбрать $a = \frac{4}{k\delta}$, то мы видим, что

$$\int\limits_G U_1^{\gamma_\delta} e^{\frac{1}{a}U_1^{\gamma_\delta}}\,dS = O(\delta).$$

Отсюда

$$\int\limits_G U_1^{\gamma_\delta} f\,dS \leqslant \frac{4}{k\delta} \int\limits_{\Delta(\zeta,\,2\delta)} f\log^+ f\,dS + O(\delta).$$

Это завершает доказательство теоремы.

Ленинградское отделение
Математического института АН СССР
им. В. А. Стеклова

Поступила 15.IV.1979

Ս. Վ. ԽՐՈՒՇՉՈՎ. Բրեննանի ալտերնատիվը վերջավոր էնտրոպիայով չափերի համար (ամփոփում)

Հոդվածում ապացուցված է հետևյալ արդյունքը։

Դիցուք $d\mu(s) = f(s)\,ds$, *որտեղ* $f(s) > 0$, ds*-ը Լեբեգի չափն է հարթության վրա։ Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ պնդումներից մեկը և միայն մեկը.*
կամ $H^p(\mu) = L^p(\mu)$, *կամ գոյություն ունի* $\xi \in C^1$ *կետ այնպես, որ* $\varphi \to \varphi(\xi)$ *ֆունկցիոնալը սահմանափակ է* $H^p(\mu)$ *տարածությունում, որտեղ* $H^p(\mu)$*-ն բազմանդամների փակույթն է* $L^p(\mu)$ *տարածությունում։*

S. V. KCHRUSHEV. *The Brennan alternative for measures with finite entropy* (summary)

The following theorem is proved.

Let $d\mu(s) = f(s)\,ds$ where $f(s) > 0$, ds is the planar Lebesgue measure.

If $\int f(\ln^+ f)^p\, ds < +\infty$, $1 < p < +\infty$ then either $H^p(\mu) = L^p(\mu)$ or there is a point $\xi \in C^1$ such that the functional $\varphi \to \varphi(\xi)$ is bounded in $H^p(\mu)$, where $H^p(\mu)$ is the closure of polinomials in the $L^p(\mu)$ space.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. W. Brown.* Some invariant subspaces for subnormal operators, preprint, 1978.
2. *J. E. Brennan.* Invariant subspaces and rational approximation, J. of Functional Analysis, 7, 1971, 285—310.
3. *J. E. Brennan.* Point evaluations, invariant subspaces and approximation in the mean by polynomials, preprint 1978, to appear in J. Functional Analysis.
4. *L. Schwartz.* Theorie des distributions, vol 1, Paris, Actualities Scient. et Indust., 1951.
5. *L. Carleson.* Mergeljan's theorem on uniform polynomial approximation, Math. Scand., 15, 1965, 167—175.
6. *J. Brennan.* Invariant subspaces and weighted polinomial approximation, Arkiv för Mat., 11, 1973, 167—189.
7. *Л. Карлесон.* Избранные проблемы теории исключительных множеств, М., Изд. „Мир", 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 3, 1979 Математика

Х. МАЛОНЕК

К ВОПРОСУ О СПРАВЕДЛИВОСТИ ТЕОРЕМ ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЁФА ДЛЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

1°. В работе [3] были доказаны теоремы типа Фрагмена-Линделёфа для решений (однозначных) комплексных дифференциальных неравенств с частными производными вида

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant K_1(z) \tag{1}$$

и

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant K_2(z)\,|w(z)|, \tag{2}$$

где z^* означает сопряженное с z комплексное число, причем производная функции $w(z)$ понимается как обобщенная производная в смысле Соболева. $K_1(z)$ и $K_2(z)$—определенные в $\mathbf{C}$ вещественные и неотрицательные функции, принадлежащие некоторому рассматриваемому И. Н. Векуа [2] пространству $L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p>2$. Если K_1 и K_2—заданные только в некоторой области G функции, то предположим что они вне области G равны нулю. Получить аналоги классической теоремы Фрагмена-Линделёфа для (1) и (2) (которые, в свою очередь, содержат классическую теорему как частный случай) было возможно использованием общих представлений решений при помощи голоморфных функций. Именно, было доказано, что если функция $w(z)$ является (однозначным) непрерывным решением неравенства (1) или (2) в области

$$G = \{z\colon 0 < \arg z < \alpha\pi;\ 0 < \alpha \leqslant 2\}$$

и удовлетворяет двум условиям Фрагмена-Линделёфа, т. е., во-первых: для каждой конечной точки ζ, граничной для G,

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\,|w(z)| \leqslant C,\ C = \text{const},\ z\in G, \tag{3}$$

и, во-вторых

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\ln M_w(r)}{r^{1/\alpha}} \leqslant 0, \tag{4}$$

где

$$M_w(r) = \sup_{|z|=r}|w(z)|.$$

то тогда решение неравенства (1) оценивается внутри угла через

$$|w(z)| \leqslant C + k_1, \ z \in G. \tag{5}$$

а решение неравенства (2) — через

$$|w(z)| \leqslant k_2 \cdot C, \ z \in G. \tag{6}$$

При этом постоянные k_1 и k_2 зависят только от $p > 2$ и оцениваются так:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant k_1 &< 2H_p \|K_1(z)\|_{p,2}, \\ 1 < k_2 &\leqslant e^{2H_p \|K_2(z)\|_{p,2}} \end{aligned} \tag{7}$$

(H_p — зависящая только от $p > 2$ постоянная).

Как видно, в случае (1) имеет место аддитивное изменение граничной постоянной C (5), а в случае (2) (Л. Берс, [1] называет решения таких неравенств „аппроксимативно аналитическими функциями") C меняется мультипликативно (6).

Целью настоящей работы является распространение теорем типа Фрагмена-Линделёфа на тот случай, когда $w(z)$ является непрерывным решением более общего чем (1) и (2) неравенства

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} K_i(z) \ |w(z)|^{\alpha_i}, \tag{8}$$

где

$$K_i(z) \in L_{p,2}(\mathbf{C}), \ p > 2, \ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Очевидно, что (8) совпадает с (1), когда $n = 1$ и $\alpha_1 = 0$ и с (2), когда $n = 1$ $\alpha_1 = 1$.

Для решений (8) найдется также же, но по сути дела более сложное представление при помощи голоморфных функций.

Заметим, что все рассуждения относительно этого общего представления остаются верны и в случае ограниченной области G (при этом можно K_i считать постоянными), так что возможно доказать и справедливость обобщений других качественных свойств голоморфных функций, как, например, принцип максимума модуля.

2°. Покажем, какое общее представление при помощи голоморфных функций существует для непрерывных решений (8) с измеримыми производными по z^*. Пусть $w(z)$ является таким непрерывным решением в области G. Рассмотрим две определенные во всей области функции

$$f_1(z) = \begin{cases} \dfrac{\partial w(z)}{\partial z^*}, & \text{если } |w| < 1 \\ 0, & \text{если } |w| > 1 \end{cases} \tag{9}$$

и

$$f_2(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } |w| < 1 \\ \dfrac{\partial w(z)}{\partial z^*}, & \text{если } |w| > 1. \end{cases} \tag{10}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial w(z)}{\partial z^*} = f_1(z) + f_2(z) \tag{11}$$

в области G^*).

В силу (8) и (9) в G имеет место неравенство

$$|f_1(z)| \leqslant \sum_1^n K_i(z)\,|w|^{\alpha_i} \leqslant \sum_1^n K_i(z) = K(z) \tag{12}$$

и соответственно в силу (8) и (10)

$$|f_2(z)| \leqslant \sum_1^n K_i(z)\,|w|^{\alpha_i} \leqslant \left(\sum_1^n K_i(z)\right)|w| = K(z)\,|w|, \tag{13}$$

где $K(z) \in L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p > 2$.

Введем далее новую функцию $g(z)$, обозначая при этом множество нулей функции $w(z)$ в G через N.

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f_2(z)}{w(z)}, & \text{если } z \in G \setminus N \\ 0, & \text{если } z \in N. \end{cases} \tag{14}$$

В силу (13), функция

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta$$

определена, непрерывна и ограничена на всей плоскости $\mathbf{C}$ (относительно этого факта см. примечание в [3], стр. 91). Кроме того, она является решением неоднородного уравнения Коши-Римана

$$\frac{\partial \omega}{\partial z^*} = g^*. \tag{15}$$

Очевидно, функция

$$v(z) = e^{\omega(z)} \tag{16}$$

также непрерывна и ограничена сверху и снизу. Действительно, как известно (см. [2], [3]), $\omega(z)$ оценивается так:

$$|\omega(z)| \leqslant H_p \|K(z)\|_{p,2},$$

причем H_p есть постоянная, зависящая только от $p > 2$. С другой стороны

$$e^{-|\omega|} \leqslant |e^{\omega}| = |v| \leqslant e^{|\omega|}$$

и следовательно

$$e^{-H_p\|K\|_{p,2}} \leqslant |v| \leqslant e^{H_p\|K\|_{p,2}}. \tag{17}$$

---

* f_1 и f_2 являются измеримыми функциями, так как $w(z)$ предполагается непрерывной и, тем самым, множество z, для которых $|w(z)| = 1$, является относительно замкнутым множеством.

Используя дифференцируемость в смысле Соболева функции $v(z) \times \times w(z)$ (см. [2]), легко видеть, что в силу (15), (14) и (11)

$$\frac{\partial (v\cdot w)}{\partial z^*} = \frac{\partial v}{\partial z^*}\cdot w + \frac{\partial w}{\partial z^*}\cdot v = \left(\frac{f_2}{w}\right)\cdot w\cdot v + (f_1+f_2)\cdot v = f_1\cdot v \tag{18}$$

когда $w(z) \neq 0$, но в силу (13) формула (18) имеет место и тогда, когда $w(z)=0$, так как в силу (13) $f_2(z)=0$, при $w(z)=0$.

Из (18), (12) и ограниченности (17) функции $v(z)$ получаем, что $v(z)\cdot w(z)$ удовлетворяет некоторому неравенству вида (1), т. е.

$$\left|\frac{\partial (v\cdot w)}{\partial z^*}\right| \leqslant K(z)\, e^{H_p \|K\|_{p,2}} = \bar{K}(z), \tag{19}$$

где $\bar{K}$ также принадлежит пространству $L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p>2$. Следуя рассуждениям в [3], решение неравенства (19) представим как сумму голоморфной функции $\Phi(z)$ и некоторой непрерывной и ограниченной на всей $\mathbf{C}$ функции $u(z)$, т. е.

$$v(z)\cdot w(z) = \Phi(z) + u(z), \tag{20}$$

причем

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{\frac{\partial (v\cdot w)}{\partial \zeta^*}}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta.$$

Непрерывность и ограниченность функции $u(z)$ доказывается аналогично функции $w(z)$, используя неравенства (19). $u(z)$ оценивается таким же образом как $w(z)$

$$|u(z)| \leqslant H_p\cdot \|\bar{K}(z)\|_{p,2} = H_p\,\|K\|_{p,2}\cdot e^{H_p \|K\|_{p,2}}. \tag{21}$$

Формула (20) дает возможность утверждать справедливость теоремы типа Фрагмена—Линделёфа для решений $w(z)$ неравенства (8). Не вдаваясь в подробное доказательство соответствующей теоремы (это было бы вполне аналогично доказательству теорем для решений (1) и (2) в [3]), мы здесь только укажем, как условия Фрагмена—Линделёфа (3) и (4) переносятся на функцию $\Phi(z)$ в (20), откуда получается соответствующий результат для $w(z)$.

Допустим, что $w(z)$ — непрерывное решение (8) в области угла раствора G, удовлетворяющее условиям (3) и (4). Тогда в силу (20), функция

$$\Phi = v\cdot w - u$$

должна удовлетворять аналогичным условиям. Именно, в силу (17) и (21) для конечных точек ζ, граничных для области G, имеет место

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\, |\Phi(z)| \leqslant C\cdot e^{H_p \|K\|_{p,2}} + H_p\,\|K\|_{p,2}\cdot e^{H_p \|K\|_{p,2}},$$

а внутри G

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{\ln M_\Phi(r)}{r^{1/\alpha}} \leqslant 0.$$

Но тогда из классической теоремы Фрагмена—Линделёфа для голоморфных функций следует, что внутри G

$$|\Phi(z)| \leqslant C\cdot e^{H_p \|K\|_{p,2}} + H_p\cdot\|K\|_{p,2}\cdot e^{H_p \|K\|_{p,2}}. \tag{22}$$

Тем самым, используя (20), (17), (21) и (22), получим

$$|w| \leqslant (|\Phi| + |u|)\,|v|^{-1} \leqslant (C e^{H_p\|K\|_{p,2}} + 2H_p \|K\|_{p,2}\cdot e^{H_p\|K\|_{p,2}})\, e^{H_p\|K\|_{p,2}} = k_2 C + k_1,$$

где $k_1 = 2H_p \|K\|_{p,2}\, e^{2H_p\|K\|_{p,2}}$ и $k_2 = e^{2H_p\|K\|_{p,2}}$.

Следовательно имеет место следующая

Теорема. *Если функция $w(z)$ является однозначным непрерывным решением неравенства* (8) *в области*

$$G = \{z:\ 0 < \arg z < \alpha\pi;\ 0 < \alpha \leqslant 2\}$$

и удовлетворяет условиям (3) *и* (4) *Фрагмена—Линделёфа, то внутри G имеет место*)*

$$|w(z)| \leqslant k_2\cdot C + k_1.$$

3°. Следствия:

I. Важный частный случай функций, для которых имеет место теорема типа Фрагмена-Линделёфа в таком виде, являются непрерывные решения неоднородного уравнения Векуа

$$\frac{\partial w(z)}{\partial z^*} = A(z)\,w(z) + B(z)\,w^*(z) + F(z)$$

в предположении, что $A, B, F \in L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p > 2$.

II. Применяя методы комплексного анализа к исследованию общего эллиптического вещественного дифференциального уравнения второго порядка с коэффициентами a, b, c, d из $L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p > 2$,

$$\frac{1}{4}\Delta u(x, y) + a(x, y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + c(x, y)\,u(x, y) + d(x, y) = 0, \tag{23}$$

наша теорема дает следующий результат:

Пусть $u(x, y)$ — вещественная непрерывная функция переменных x и y является решением уравнения (23) *в угле*

$$G = \left\{(x, y):\ 0 < \operatorname{arctg}\frac{y}{x} < \alpha\pi;\ 0 < \alpha \leqslant 2\right\},$$

причем она ограничена и обладает непрерывными первыми производными в G (кроме ∞). Относительно производных второго по-

---

* Используя соответственно величины S, S', $\bar{S}$ и $\bar{S}'$ из [3], можно улучшить оценки, именно получить аналогичные (7) оценки

$$0 \leqslant k_1 \leqslant 2H_p\|K\|_{p,2}\cdot e^{2H_p\|K\|_{p,2}},$$

$$1 \leqslant k_2 \leqslant e^{2H_p\|K\|_{p,2}}.$$

рядка достаточно предположить, что Δu существует в смысле Соболева и является измеримой функцией.

$$|\operatorname{grad} u\,(\xi,\ \eta)| \leqslant C, \tag{24}$$

где $(\xi,\ \eta)$ — конечная точка границы G. и

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_{\operatorname{grad} u}(r)}{r^{1/\alpha}} \leqslant 0, \tag{25}$$

где

$$M_{\operatorname{grad} u}(r) = \sup_{\sqrt{x^2+y^2}=r} |\operatorname{grad} u\,(x,\ y)|,$$

то внутри G имеет место

$$|\operatorname{grad} u\,(x,\ y)| \leqslant k_2\cdot C + k_1, \tag{26}$$

причем k_1 и k_2—некоторые константы, зависящие только от коэффициентов уравнения (23).

Действительно, введя комплексные обозначения и производные $\dfrac{\partial}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \partial z^*}$, уравнение (23) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*} = -(a+ib)\frac{\partial u}{\partial z} - (a-ib)\frac{\partial u}{\partial z^*} - cu - d.$$

Отсюда при помощи подстановки $\dfrac{\partial u}{\partial z} = w$ и свойства ограниченности функции u*) вместе с принадлежностью коэффициентов $(a+ib,\ a-ib)$, c и d к $L_{p,2}(\mathbf{C})$, получается неравенство

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant K_2(z)\,|w(z)| + K_1(z),$$

где K_1 и K_2 принадлежат $L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p > 2$.

Так как

$$2\,|w| = 2\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| = |\operatorname{grad} u\,(x,\ y)|, \tag{27}$$

то условия (24) и (25) переходят в аналогичные (3) и (4) условия Фрагмена-Линделёфа относительно $|w|$. Следовательно, в силу нашей теоремы $|w|$ ограничена внутри G, и обратно, при помощи (27) получается оценка (26).

III. Очевидно, что можно ожидать справедливость аналогичной теоремы также для решений дифференциальных неравенств с более общими правыми частями, чем $\sum_1^n K_i\,|w|^{\gamma_i}$, если только они оцениваются

---

*) См. [2]: если $g \in L_{p,2}(\mathbf{C})$ и f измерима и ограничена во всей плоскости $\mathbf{C}$, то $f\cdot g \in L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p > 2$.

линейной функцией относительно $|w|$. Это означает, что если рассматриваются непрерывные решения неравенства вида

$$\left|\frac{\partial w}{\partial z^*}\right| \leqslant \varphi(z, |w|),$$

где

$$\varphi(z, |w|) \leqslant K_2(z)\,|w| + K_1(z),$$

$K_1, K_2 \in L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p > 2$, то для них справедлива теорема типа Фрагмена-Линделёфа в указанном в п. 2 виде. Весьма частным случаем таких $\varphi(z, s)$, $s \geqslant 0$, являются функции вогнутые относительно s для всех z и для которых существует такое $s = s_0$, что

$$\varphi(z, s_0) = K(z) \in L_{p,2}(\mathbf{C}) \text{ и } \varphi_s'(z, s_0) = \bar{K}(z) \in L_{p,2}(\mathbf{C}),\ p > 2.$$

IV. Конечно можно рассматривать неравенство вида (8), в правой части которого стоит бесконечный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} K_i(z)\,|w|^{\alpha_i},\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1,\ K_i(z) \in L_{p,2}(\mathbf{C}),\ p > 2,\ i = 1, 2, \cdots.$$

Но тогда надо делать соответствующие предположения относительно сходимости ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} K_i(z)$ к некоторой функции $K(z)$, принадлежащей опять пространству $L_{p,2}(\mathbf{C})$. Для этого достаточно было бы, чтобы интегралы частичных сумм

$$\iint\limits_{|z|<1} \left(\sum_{1}^{n} K_i(z)\right)^p dx\,dy \text{ и } \iint\limits_{|z|<1} \left|\sum_{1}^{n} K_i\left(\frac{1}{z}\right) \cdot z^{-2}\right|^p dx\,dy$$

были бы ограничены в совокупности. Существование предела ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} K_i(z)$, принадлежащего пространству $L_{p,2}(\mathbf{C})$, следует из теоремы Б. Леви [4].

V. Еще несколько слов относительно дифференциальных, быть может, нелинейных уравнений вида

$$\frac{\partial w}{\partial z^*} = f(z, w).$$

Все рассуждения показывают, что (в рамках использованных методов) для справедливости таких качественных свойств решений, как принцип Фрагмена-Линделёфа и т. д. требуется, чтобы нелинейность функции $f(z, w)$ могла быть оценена через линейную функцию от $|w|$, т. е. $|f| \leqslant K_2\,|w| + K_1$. Но как показывает такой простой пример

$$\frac{\partial w}{\partial z^*} = \frac{\sqrt{w^2 + 1}}{1 + |z|^2}$$

это уже есть выигрыш по сравнению с требованиями $|f| \leqslant K_2|w|$ или $|f| \leqslant K_1$, так как правая часть здесь не оценивается ни через $K_2|w|$ ни через K_1, а только при помощи суммы $K_2|w| + K_1$.

Вопрос о справедливости теоремы типа Фрагмена-Линделёфа для решений неравенства вида

$$\left|\frac{\partial w\,(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant K\,(z)\,|w\,(z)|^{\alpha},\ \alpha > 1,$$

не решен, но кажется, что методы общего представления при помощи голоморфных функций здесь не годятся. Кроме того, правая часть имеет такой вид, что допускается слишком быстрый рост производной функции $w\,(z)$, когда сама функция возрастает. Например, для решений неравенства

$$\left|\frac{\partial w}{\partial z^*}\right| \leqslant K\,(z)\,|w|\,|\ln w|$$

теорема типа Фрагмена-Линделёфа в обычном виде с условиями (3) и (4) бессмыслена, так как второе условие Фрагмена-Линделёфа (4) вообще говоря невыполнимо, как показывает общее решение

$$w = \exp\,[\exp\,(\Phi + \omega)],$$

где Φ—голоморфная функция, а ω—некоторый интеграл, производная по z^* которого равняется $\dfrac{\partial \ln \ln w}{\partial z^*}$ (аналогично функции $\omega\,(z)$ в общем представлении решения (8)). Вообще говоря $w\,(z)$ возрастает гораздо быстрее, чем того допускает условие (4).

Секция математики университета
им. Мартина Лютера, Халле (ГДР)

Поступила 22.XII.1977

Հ. ՄԱԼՈՆԵԿ. Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի տիպի թեորեմների ճշտությունը կոմպլեքս դիֆերենցիալ անհավասարությունների լուծումների համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում ուսումնասիրվում են հետևյալ դիֆերենցիալ անհավասարությունների ամբողջական լուծումները՝

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} K_i\,(z)|w|^{\alpha_i},\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1,$$

որտեղ $K_i\,(z)(i=1,\cdots,n)$ *ֆունկցիաները իրական են և ոչ բացասական* C*-ում և* $K_i\,(z) \in L_{p,\,2}(C)$, $p > 2$ (*տես Ի. Ն. Վեկուա [2]*)։

Ցույց է տրվում, որ այդպիսի լուծումների վերաբերյալ տեղի ունեն Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի տիպի թեորեմներ։ Բերվում են որոշ հետևանքներ։ Աշխատանքում ընդլայնվում են [3] հոդվածի արդյունքները։

H. MALONEK *On the question of validity of theorems of Phragmen-Lindelöf type for solutions of complex differential inequalities* (summary)

The paper investigates continuous solutions of the complex partial differential inequality

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} K_i(z)\,|w|^{\alpha_i},\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1,$$

where $K_i(z)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ are real nonnegative functions, defined in C, $K_i(z) \in L_{p,2}(C)$, $p > 2$ (see I. N. Vekua [2]). For such solutions the validity of theorems of Phragmen-Lindelöf type is shown. Further, corollaries for solutions to (real and complex) differential equations (non-linear as well) are given. The paper extends the results given in [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Bers.* Theory of pseudo-analytic functions, New York University. New York, 1953.
2. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.
3. *Х. Малонек.* Теоремы типа Фрагмена-Линделёфа для решений комплексных дифференциальных неравенств с частными производными, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", XII, № 2, 1977.
4. *Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич.* Интеграл, мера и производная, Изд. „Наука", М., 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 3, 1979 Математика

В. А. ЯВРЯН

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СЛЕДЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей заметке уточняются и обобщаются результаты работы И. Вайдмана [1] и автора [2], [3]. При доказательстве полученных результатов существенную роль играет следующая (см. [4], стр. 240, 246)

Теорема М. Г. Крейна. *Пусть $A = A_R + iA_J$ — вольтерров оператор, A_R и A_J — самосопряженные операторы и $A_J \in S_1$ где S_1 — пространство ядерных операторов. Тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r, A_R)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_-(r, A_R)}{r} = \frac{1}{\pi} \int_{\{P\}} |dPA_J dP|_1, \tag{1}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{|\lambda_n|>\varepsilon} \lambda_n(A_R) = 0. \tag{2}$$

Здесь $n_+(r, B)$ и $n_-(r, B)$ означают соответственно количества характеристических чисел оператора B в интервалах $[0, r]$ и $[-r, 0]$, $|B|_1$ — ядерная норма оператора B, $\{P\}$ — любая максимальная собственная цепочка оператора A, $\lambda_n(B)$ — собственные значения оператора B.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — прямоугольные, соответственно $n\times m$ и $m\times n$, матрицы-функции с элементами из пространства $L^2(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$.

В пространстве $L^2(a, b; H_n)$ n-мерных вектор-функций с интегрируемым квадратом модуля рассмотрим интегральный оператор

$$(Gf)(x) = \int_a^b G(x, t) f(t)\, dt \quad (a < x < b), \tag{3}$$

где квадратная матрица-функция n-го порядка $G(x, t)$ задается формулой

$$G(x, t) = \begin{cases} A(x) B(t), & x \leqslant t \\ B^*(x) A^*(t), & x > t. \end{cases}$$

Легко видеть, что оператор G принадлежит классу Гильберта—Шмидта. Справедлива

Теорема 1. *Характеристические числа оператора G удовлетворяют асимптотическому соотношению*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_\pm(r,\ G)}{r}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b|B^*(x)\,A^*(x)-A\,(x)\,B\,(x)|_1\,dx. \qquad (4)$$

Оператор G имеет след в смысле главного значения и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{|\lambda_n|>\varepsilon}\lambda_n(G)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b \mathrm{Sp}\,(B^*(x)\,A^*(x)+A\,(x)\,B(x))\,dx. \qquad (5)$$

Доказательство. В пространстве $L^2(a,\ b;\ H_n)$ введем в рассмотрение вольтерров оператор

$$(Kf)\,(x)=\int\limits_a^x(B^*(x)\,A^*(t)-A\,(x)\,B\,(t))\,f\,(t)\,dt.$$

Легко видеть, что мнимая часть K_J оператора K выражается формулой

$$(K_Jf)\,(x)=\frac{1}{2i}\int\limits_a^b(B^*(x)\,A^*(t)-A\,(x)\,B\,(t))\,f\,(t)\,dt$$

и является конечномерным, а именно $2m$-мерным оператором. Очевидно также, что семейство ортогональных проекторов в $L^2(a,\ b;\ H_n)$

$$(P_tf)\,(x)=\begin{cases}0, & a\leqslant x\leqslant t\\ f\,(x), & t<x\leqslant b,\end{cases}\quad P_a=I,\ P_b=0\quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

служит собственной максимальной цепочкой для оператора K. Мы должны вычислить правую часть формулы (1).

Сначала предположим, что матрицы-функции $A\,(x)$ и $B\,(x)$ являются ступенчатыми, т. е.

$$A\,(x)=A_j,\ B\,(x)=B_j\quad \text{при}\quad x\in\Delta_j=(\alpha_j,\ \alpha_{j+1}),$$

где $\alpha_0=a<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_l=b$. Очевидно, что

$$(2\,iP_{\Delta_j}K_JP_{\Delta_j}f)\,(x)=\begin{cases}(B_j^*A_j^*-A_jB_j)\int\limits_{\Delta_j}f\,(t)\,dt, & x\in\Delta_j\\ 0, & x\overline{\in}\Delta_j,\end{cases}$$

где $P_{\Delta_j}=P_{\alpha_{j+1}}-P_{\alpha_j},\ j=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ l-1.$

Если обозначить через $\lambda_k^{(j)}$ и $\varphi_k^{(j)}$ $(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$ собственные числа и соответствующие собственные элементы оператора $B_j^*A_j^*-$ $-A_j\,B_j$, действующего в пространстве H_n, то, очевидно, что система функций

$$f_k^{(j)}(t)=\begin{cases}\varphi_k^{(j)}, & t\in\Delta_k\\ 0, & t\overline{\in}\Delta_k\end{cases}$$

будет полной системой собственных элементов оператора $2_i P_{\Delta_j} K_J P_{\Delta_j}$, которые соответствуют собственным значениям $\lambda_k^{(j)} \Delta_j$. Следовательно,

$$|2i P_{\Delta_j} K_J P_{\Delta_j}|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k^{(j)}| \Delta_j = |B_j^* A_j^* - A_j B_j|_1 \Delta_j.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{l} |P_{\Delta_j} K_J P_{\Delta_j}|_1 = \frac{1}{2} \int_a^b |B^* (x) A^* (x) - A (x) B (x)|_1 \, dx. \tag{6}$$

С другой стороны, очевидно, что в этом случае

$$\int_{\{P\}} |dP K_J dP|_1 = \sum_{j=1}^{l} |P_{\Delta_j} K_J P_{\Delta_j}|_1.$$

Таким образом, формула (4) в случае ступенчатых матриц-функций доказана.

Перейдем к общему случаю. Пусть $\widetilde{A} (x)$ и $\widetilde{B} (x)$ — такие ступенчатые матрицы-функции, что

$$\int_a^b |A (x) - \widetilde{A} (x)|^2 \, dx < \varepsilon^2, \int_a^b |B (x) - \widetilde{B} (x)|^2 (dx) < \varepsilon^2,$$

$$\int_a^b |\widetilde{A} (x)|^2 \, dx \leqslant 2 \int_a^b |A (x)|^2 \, dx, \int_a^b |\widetilde{B} (x)|^2 \, dx \leqslant 2 \int_a^b |B (x)|^2 \, dx.$$

Через $|C|$ обозначается норма оператора, порожденного матрицей C в пространстве H_n. Оценим норму оператора $P_\Delta (K_J - \widetilde{K}_J) P_\Delta$, где K_J — мнимая часть оператора

$$(\widetilde{K} f)(x) = \int_a^b (\widetilde{B}^*(x) \widetilde{A}^* (t) - \widetilde{A} (x) \widetilde{B} (t)) f (t) \, dt.$$

Имеем

$$\int_\Delta \Big| \int_\Delta (A (x) B (t) - \widetilde{A} (x) \widetilde{B}(t)) f (t) \, dt \Big|^2 dx \leqslant \int_\Delta |f (t)|^2 dt \int_\Delta dx \times$$

$$\times \int_\Delta |A (x) B (t) - \widetilde{A} (x) \widetilde{B} (t)|^2 \, dt \leqslant \int_\Delta |f (t)|^2 dt \int_\Delta dx \int_\Delta (|A (x) -$$

$$- \widetilde{A} (x)| \, |B (t)| + |\widetilde{A} (x)| \, |B (t) - \widetilde{B} (t)|)^2 \, dt \leqslant 2 \int_\Delta |f (t)|^2 dt \times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Delta}|B(t)|^2\,dt\int\limits_{\Delta}|A(t)-\widetilde{A}(t)|^2\,dt+2\int\limits_{\Delta}|A(t)|^2\,dt\int\limits_{\Delta}|B(t)-\widetilde{B}(t)|^2\,dt\right).$$

Отсюда легко следует, что

$$|P_\Delta(K_J-\widetilde{K}_J)P_\Delta f|^2\leqslant 6\int\limits_{\Delta}|f(t)|^2\,dt\left(\int\limits_{\Delta}|B(t)|^2\,dt\int\limits_{\Delta}|A(t)-\widetilde{A}(t)|^2\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Delta}|A(t)|^2\,dt\int\limits_{\Delta}|B(t)-\widetilde{B}(t)|^2\,dt\right).$$

Следовательно

$$|P_\Delta(K_J-\widetilde{K}_J)P_\Delta|\leqslant 2\left(\int\limits_{\Delta}|B(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Delta}|A(t)-\widetilde{A}(t)|^2\,dt\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int\limits_{\Delta}|A(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Delta}|B(t)-\widetilde{B}(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}|P_{\Delta_j}(K_J-\widetilde{K}_J)P_{\Delta_j}|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{\Delta_j}|B(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{\Delta_j}|A(t)-\right.$$

$$\left.-\widetilde{A}(t)|^2\,dt\right)^{1/2}+\left(\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{\Delta_j}|A(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{\Delta_j}|B(t)|-\widetilde{B}(t)|^2\,dt\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\int\limits_a^b|B(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_a^b|A(t)-\widetilde{A}(t)|^2\,dt\right)^{1/2}+\left(\int\limits_a^b|A(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_a^b|B(t)-\widetilde{B}(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\leqslant\varepsilon\left[\left(\int\limits_a^b|B(t)|^2\,dt\right)^{1/2}+\left(\int\limits_a^b|A(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\right]=c\varepsilon.$$

Таким образом, так как $K_J-\widetilde{K}_J$ есть $4m$-мерный оператор, то

$$\left|\sum_{j=1}^{l}|P_{\Delta_j}K_JP_{\Delta_j}|_1-\sum_{j=1}^{l}|P_{\Delta_j}\widetilde{K}_JP_{\Delta_j}|_1\right|\leqslant 4m\sum_{j=1}^{l}|P_{\Delta_j}(K_J-\widetilde{K}_J)P_{\Delta_j}|\leqslant 8mc\varepsilon.$$

Учитывая соотношение (6), после предельного перехода отсюда получаем, что

$$\int\limits_{\{P\}}|dP\,K_J\,dP|_1=\frac{1}{2}\int\limits_a^b|B^*(x)\,A^*(x)-A(x)\,B(x)|_1\,dx. \tag{7}$$

Это вместе с приведенной формулой (1) М. Г. Крейна дает (4).

Для доказательства соотношения (5) сначала заметим, что

$$((K_R - G) f)(x) = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b (B^*(x) A^*(t) + A(x) B(t)) f(t)\, dt, \tag{8}$$

где K_R — вещественная часть оператора K. Отсюда видно, что $K_R - G$ — конечномерный оператор. Следовательно, по теореме А. С. Маркуса ([5], стр. 115) имеем

$$\mathrm{Sp}(K_R - G) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^+(K_R) - \lambda_j^+(G)) + \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^-(K_R) - \lambda_j^-(G)), \tag{9}$$

где $\lambda_k^+(B)$ ($\lambda_k^-(B)$) — положительные (отрицательные) собственные значения оператора B, расположенные в порядке убывания (возрастания). Так как оператор $K_R - G$ есть $2m$-мерный оператор, то по известным неравенствам Куранта ([6], стр. 258)

$$\lambda_{n+2m}^+(G) \leqslant \lambda_n^+(K_R),\ \lambda_{n+2m}^+(K_R) \leqslant \lambda_n^+(G).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{\lambda_j^+(K_R)>\varepsilon} \lambda_j^+(K_R) - \sum_{\lambda_j^+(G)>\varepsilon} \lambda_j^+(G)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^+(K_R) - \lambda_j^+(G)),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{\lambda_j^-(K_R)<-\varepsilon} \lambda_j^-(K_R) - \sum_{\lambda_j^-(G)<-\varepsilon} \lambda_j^-(G)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^-(K_R) - \lambda_j^-(G)).$$

Таким образом, формулу (9) можно переписать в виде

$$\mathrm{Sp}(K_R - G) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{|\lambda_j(K_R)|>\varepsilon} \lambda_j(K_R) - \sum_{|\lambda_j(G)|>\varepsilon} \lambda_j(G)\right).$$

Теперь заметим, что согласно формуле (2) М. Г. Крейна

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{|\lambda_j(K_R)|>\varepsilon} \lambda_j(K_R) = 0,$$

откуда

$$\mathrm{Sp}(K_R - G) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{|\lambda_j(G)|>\varepsilon} \lambda_j(G).$$

С другой стороны, из (8) следует, что

$$\mathrm{Sp}(K_R - G) = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b \mathrm{Sp}(B^*(x) A^*(x) + A(x) B(x))\, dx.$$

Последние две формулы и доказывают соотношение (5).

С л е д с т в и е. Если ядро оператора (3), действующего в пространстве $L^2(a, b)$, имеет вид

$$G(x, t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} u_k(x)\, v_k(t), & x \leq t \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \overline{u_k(t)}\ \overline{v_k(x)}, & x > t, \end{cases}$$

где $u_k(x) \in L^2(a, b)$ и $v_k(x) \in L^2(a, b)$, то

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n_\pm(r, G)}{r} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left| 1 - \sum_{k=1}^{m} u_k(x)\, v_k(x) \right| dx. \tag{10}$$

Это следствие без доказательства приведено в [3].

Для доказательства надо положить

$$A(x) = (u_1(x),\ u_2(x), \cdots, u_m(x)),\quad B^*(x) = (\overline{v_1(x)},\ \overline{v_2(x)}, \cdots, \overline{v_m(x)}).$$

В работе И. Вайдмана [1] вместо (10) доказано, что существует такое $M > 0$, что $M\alpha_n(G) > n$, где $\{\alpha_n(G)\}_{n=1}^{\infty}$ — характеристические числа оператора G.

Теорема 1 может быть обобщена следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $A(x, t)$ $(a \leq x, t \leq b)$ — такая квадратная матрица n-го порядка с элементами из $L^2(a, b)$, что оператор*

$$(Af)(x) = \int_a^b A(x, t)\, f(t)\, dt$$

является ядерным. Тогда для характеристических чисел интегрального оператора G, порожденного эрмитовым ядром

$$G(x, t) = \begin{cases} A(x, t), & x < t \\ A^*(t, x), & x > t, \end{cases}$$

справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n_\pm(r, G)}{r} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\delta \to 0} \int_a^b |A_\delta^*(x, x) - A_\delta(x, x)|_1\, dx,$$

где

$$A_\delta(x, t) = \frac{1}{4\delta^2} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} A(u, v)\, du\, dv. \tag{11}$$

Доказательство. В пространстве $L^2(a, b; H_n)$ рассмотрим вольтерров оператор

$$(Kf)(x) = \int_a^x (A^*(t, x) - A(x, t))\, f(t)\, dt.$$

Мнимая часть K_J этого оператора равна

$$(K_J f)(x) = \frac{1}{2i}\int\limits_a^b (A^*(t,\ x) - A(x,\ t)) f(t)\,dt = -(\mathrm{A}_J f)(x)$$

и по условию принадлежит классу S_1.

Напишем разложение Шмидта оператора A:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(\cdot,\ \psi_i)\,\varphi_i\,.$$

Здесь $s_i\,(i = 1,\ 2, \cdots)$ — сингулярные числа оператора A, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормальные системы в пространстве $L^2\,(a,\ b;\ H_n)$, а ряд сходится в ядерной норме, т. е. $|A_N - A|_1 \to 0$ при $N \to \infty$, где

$$A_N = \sum_{i=1}^{N} s_i(\cdot,\ \psi_i)\,\varphi_i\,.$$

Ядро

$$A_N\,(x,\ t) = \sum_{i=1}^{N} s_i\ \varphi_i\ (x)\ \psi_i^*\,(t)\ \text{(почти всюду)}$$

оператора A_N можно записать в виде

$$A_N\,(x,\ t) = A_N\,(x)\ B_N\,(t),$$

где

$$A_N\,(x) = (\varphi_1\,(x),\ \varphi_2\,(x), \cdots,\ \varphi_N\,(x)),$$

$$B_N^*\,(x) = (s_1\,\psi_1\,(x),\ \ s_2\,\psi_2\,(x), \cdots,\ s_N\,\psi_N\,(x))$$

— прямоугольные $n x N$ матрицы-функции со столбцами

$$\varphi_j\,(x) = \{\varphi_{k_j}\,(x)\}_{k=1}^{n}\ \text{и}\ \psi_j\,(x) = \{\psi_{k_j}\,(x)\}_{k=1}^{n}\quad (j = 1,\ 2, \cdots,\ N)$$

соответственно. Согласно формуле (7) имеем

$$\int\limits_{\{P\}} |dP\,(K_N)_J\,dP|_1 = \frac{1}{2}\int\limits_a^b |B_N^*\,(x)\ A_N^*\,(x) - A_N\,(x)\ B_N\,(x)|_1\,dx, \tag{12}$$

где

$$(K_N f)(x) = \int\limits_a^x (B_N^*\,(x)\ A_N^*\,(t) - A_N\,(x)\,B_N\,(t))\,f\,(t)\,dt.$$

Так как $|(K_N)_J - K_J|_1 = |(A_N)_J - A_J|_1$ при $N \to \infty$, то учитывая непрерывность функционала, задаваемого левой частью (II) в ядерной метрике (см. [7], стр. 378), получаем

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{\{P\}} |dP\,(K_N)_J\,dP|_1 = \int\limits_{\{P\}} |dP\,K_J\,dP|_1.$$

Нетрудно показать, что элементы

$$a_{jk}^{(N)}(x, t) = \sum_{i=1}^{N} s_i \varphi_{ji}(x) \overline{\psi_{ki}(t)}$$

матрицы-функции $A_N(x, t)$ в метрике $L^2(a, b)$ стремятся к соответствующим элементам $a_{jk}(x, t)$ матрицы-функции $A(x, t)$. Отсюда легко получить, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i \varphi_i(x) \psi_i^*(x) \overset{\text{опр.}}{=} A(x, x)$$

сходится поэлементно в пространстве $L^2(a, b)$. Это означает, что

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b |A_N(x) B_N(x) - A(x, x)|\, dx = 0.$$

Из очевидного неравенства $|T|_1 \leq n|T|$ для любой матрицы T n-го порядка получаем

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b |A_N(x) B_N(x) - A(x, x)|_1\, dx = 0.$$

Переходя к пределу в равенстве (12) и учитывая приведенную выше теорему М. Г. Крейна, получаем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_-(r, K_R)}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b |A^*(x, x) - A(x, x)|_1\, dx.$$

Легко видеть, что правую часть можно переписать в виде (11), где столбцы функций $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ явно не участвуют, а фигурирует только ядро $A(x, t)$.

Теперь заметим, что

$$((G-K_R)f)(x) = \frac{1}{2} \int_a^b (A(x, t) + A^*(t, x)) f(t)\, dt = (A_R f)(x).$$

Отсюда вытекает, что $G - K_R = T \in S_1$, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty$. Следовательно, $n s_n(T) \to 0$, при $n \to \infty$ и по теореме Фань Цзя (см. [4], стр. 52) заключаем, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_-(r, G)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r, K_R)}{r}.$$

Теорема 2 доказана.

Эта теорема является обобщением одной теоремы М. Г. Крейна (см. [7], стр. 412). Действительно, если $B(x, t)$—эрмитово ядро, порождающее ядерный интегральный оператор, то для ядра $A(x, t) = -iB(x, t)$ будем иметь

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_{-}(r, G)}{r}=\frac{1}{2\pi}\lim_{\delta\to 0}\int_a^b |B_\delta^*(x,x)+B_\delta(x, x)|_1\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0}\int_a^b |B_\delta(x, x)|_1\,dx,$$

где

$$(Gf)(x) = i\int_a \operatorname{sign}(x-t)\,B(x, t)\,f(t)\,dt.$$

Здесь учитывалось, что для эрмитова непрерывного ядра $B_\delta(x, t)$ матрица $B_\delta(x, x)$ будет эрмитовой.

В заключение заметим, что метод доказательства формулы (5) в предположениях теоремы 2 неприменим. Дело в том, что из $B-C\in S_1$, $B\in S_\infty$, $C\in S_\infty$, как легко видеть, не следует, что

$$\operatorname{Sp}(B-C)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{|\lambda_j(B)|>\varepsilon}\lambda_j(B)-\sum_{|\lambda_j(C)|>\varepsilon}\lambda_j(C)\right)\cdot$$

В этом случае можно только утверждать, что существует такая последовательность $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{|\lambda_k|>\varepsilon_n}\lambda_k(G)=\frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\int_a^b \operatorname{Sp}(A_\delta^*(x, x)+A_\delta(x, x))\,dx.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26.V.1978

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ. Որոշ ինտեգրալ օպերատորների սեփական արժեքների ասիմպտոտիկայի և հետքի մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ստացված է (3) ինտեգրալ օպերատորի սեփական արժեքների ասիմպտոտիկան (թեորեմ 1 և 2), ինչպես նաև հաշված է նրա հետքը գլխավոր իմաստով։

V. A. JAVRIAN. *On the asymptotics of eigenvalues and the spur of some integral operators* (summary)

In the theorems 1 and 2 the asymptotics of the eigenvalues and the spur of the integral operator (3) is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Weidmann.* Werteilung der Eigenwerte für eine Klasse von Integraloperatoren in $L_2(a, b)$, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 276, 1975, 213—220.

2. *В. А. Яврян.* О следе некоторых интегральных операторов, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", 12, № 2, 1977, 143—146.
3. *В. А. Яврян.* О собственных значениях некоторых интегральных операторов, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", 13, № 2, 1978, 122—127.
4. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Изд. „Наука", 1965.
5. *А. С. Маркус.* Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов, УМН, 19, вып. 4, (118), 1964, 93—123.
6. *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь.* Лекции по функциональному анализу, М., ИИЛ, 1954.
7. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., Изд. „Наука", 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 3, 1979 Математика

Г. Г. ЭМИН

ПРЕДМНОГООБРАЗИЯ, ГРУППОИД МНОГООБРАЗИЙ И СТРОГИЕ РАДИКАЛЫ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ НАД ВСЕМИ КОЛЬЦАМИ

Рассматривается категория $\mathfrak{M}$, объектами которой являются всевозможные пары (A, U), где U — ассоциативное кольцо, A — правый U-модуль, в общем случае не унитарный, а множество морфизмов модуля (A, U) в модуль (B, V) состоит из пар отображений $\varphi = (\varphi_A, \varphi_U)$, где φ_A (соответственно φ_U) — гомоморфизм группы A в группу B (кольца U в кольцо V), причем $(a \cdot u)\varphi_A = a\varphi_A \cdot u\varphi_U$, $a \in A$, $u \in U$. Такая пара отображений называется гомоморфизмом модуля (A, U) в модуль (B, V). Идея этой категории появилась в неявном виде еще тогда, когда стали рассматривать превращения V-модулей в U-модули отступлением вдоль кольценого гомоморфизма $\varphi: U \to V$. В книге [5] на стр. 35 наряду с категориями модулей над фиксированными кольцами, в качестве одного из основных примеров, приводится категория $\mathfrak{M}$. В работе [8] изучались короткие точные последовательности в категории $\mathfrak{M}$, а в [10] описывались радикалы в некоторой модификации этой категории. Имеется также взаимосвязь с некоторыми из тех категорий пар, которые изучали Б. И. Плоткин и его ученики (см., например, [3], § 2).

В 1958 году академик А. И. Мальцев ввел понятие рефлективной подкатегории (см. [2], гл. IV, § 4). О важности этого понятия говорит число работ, появившихся с тех пор по этому вопросу.

В настоящей работе изучаются специальные классы рефлективных подкатегорий категории $\mathfrak{M}$, а именно, предмногообразия, то есть рефлективные подкатегории, замкнутые относительно подобъектов многообразия, то есть предмногообразия, замкнутые относительно нормальных эпиморфизмов, строгие радикалы в смысле А. Г. Куроша (легко проверить, что полупростые классы для строгих радикалов являются предмногообразиями, а классы радикальных объектов для таких же радикалов дают нам примеры копредмногообразий) и кручения. Теоремы, которые доказаны в данной работе, носят следующий характер: вопрос об изучении некоторого класса рефлективных подкатегорий категории $\mathfrak{M}$ сводится к изучению системы соответствующих классов рефлективных подкатегорий в категории ассоциативных колец и в некоторых категориях $\mathfrak{M}_U$ правых U-модулей над фиксированным ассоциативным кольцом U, причем эти системы рефлективных подкатегорий удовлетворяют соответствующим условиям согласованности. Кроме того, в работе описаны все насыщенные многообразия категории $\mathfrak{M}$ и найдена формула умножения таких многообразий. Оказалось, что насыщенные многообразия составляют подполугруппу $Se(\mathfrak{M})$ в группоиде $Gr(\mathfrak{M})$, всех многообразий категории $\mathfrak{M}$. Ни $Gr(\mathfrak{M})$, ни $Se(\mathfrak{M})$ не являются свободными. $Gr(\mathfrak{M})$ не является группоидом с левым или правым сокращением. В $Se(\mathfrak{M})$, а следовательно, и в $Gr(\mathfrak{M})$ имеются делители нуля и нильпотентные элементы. Доказано, что совокупности всех предмногообразий категории абелевых групп и категории $\mathfrak{M}$ не являются множествами. В категории $\mathfrak{M}$ имеется класс бикатегорных структур.

Известно, что если в любой категории брать произведение трех многообразий, третье из которых является бимногообразием, то в этом случае операция умножения многообразий будет ассоциативной. Возникал вопрос, будет ли иметь место ассоциативность, если бимногообразие брать не на третьем месте, а в середине, или же в начале произведения? Ответ отрицательный. В категории $\mathfrak{M}$ построен пример, который показывает, что если даже на первых двух местах стоит одно и то же идемпотентное бимногообразие, все равно, в общем случае ассоциативности не будет.

§ 1. Предмногообразия, многообразия и группоид многообразий

Пусть **K** — категория, удовлетворяющая следующим условиям: 1. **K** — нормальная категория. 2. **K** — локально малая справа бикатегория с нормальными кообразами и с ядерными парами морфизмов. 3. **K** — категория с прямыми произведениями.

Полная подкатегория **K**, замкнутая относительно подобъектов и прямых произведений, называется предмногообразием категории **K** ([2], стр. 216).

Пусть $\mathbf{P}^{(1)}$ и $\mathbf{P}^{(2)}$ — два предмногообразия категории **K**. Обозначим через $\mathbf{P}^{(1)}\mathbf{P}^{(2)}$ полную подкатегорию **K**, порожденную всеми объектами $A \in \mathbf{K}$, для каждого из которых существует по крайней мере одна такая точная последовательность

$$A^{(2)} \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\nu} A^{(1)},$$

что $A^{(2)} \in Ob\,\mathbf{P}^{(2)}$ и $A^{(1)} \in Ob\,\mathbf{P}^{(1)}$. Эта полная подкатегория является предмногообразием категории **K** (см. [2], стр. 217), называемым произведением предмногообразий $\mathbf{P}^{(1)}$ и $\mathbf{P}^{(2)}$.

Рассмотрим действие кольцевого гомоморфизма $\varphi: U \to V$. Любой правый V-модуль A становится правым U-модулем, если действие операторов определить следующим образом: $a \circ u = a\,(u\varphi)$; мы будем говорить, что модуль A превращен в U-модуль A_φ отступлением вдоль φ.

Обозначим категорию абелевых групп — **Ab**, категорию ассоциативных колец — **As**, категорию правых U-модулей — $\mathfrak{M}_U$. Категория $\mathfrak{M}$ и категории $\mathfrak{M}_U$ ($U \in$ **As**), **Ab** и **As** удовлетворяют всем условиям, наложенным на категорию **K** ([1], § 1).

Пусть U — некоторое ассоциативное кольцо, не обязательно с единицей, $\mathbf{P}_U$ — некоторое предмногообразие категории $\mathfrak{M}_U$ правых U-модулей, а $\mathbf{L}$ — некоторое предмногообразие категории $\mathbf{Ab}$. Легко проверить, что все U-модули $A \in \mathbf{P}_U$ такие, что абелева группа $A \in \mathbf{L}$, составляют предмногообразие в $\mathbf{P}_U$ и, следовательно, в $\mathfrak{M}_U$. Это предмногообразие назовем ограничением предмногообразия $\mathbf{P}_U$ по предмногообразию $\mathbf{L}$ и обозначим $\mathbf{P}_{U,\mathbf{L}}$.

Пусть $\mathbf{P}$ — некоторое предмногообразие категории $\mathfrak{M}$. Точно так же, как это делалось для многообразий при доказательстве теоремы 2.2 работы [1], можно показать, что все абелевы группы A такие, что для некоторого ассоциативного кольца U, модуль $(A, U) \in \mathbf{P}$, составляют некоторое предмногообразие $\mathbf{L}$ в категории $\mathbf{Ab}$, все ассоциативные кольца U такие, что для некоторой абелевой группы A модуль $(A, U) \in \mathbf{P}$, составляют некоторое предмногообразие $\mathbf{P}_{\mathbf{As}}$ в категории $\mathbf{As}$ и все модули $(A, U) \in \mathbf{P}$, где кольцо $U \in \mathbf{P}_{\mathbf{As}}$ зафиксировано, составляют некоторое предмногообразие $\mathbf{P}_U$ категории $\mathfrak{M}_U$. Получили некоторую систему предмногообразий $S = \{\mathbf{P}_{U,\mathbf{L}} | U \in \mathbf{P}_{\mathbf{As}}\}$.

Лемма 1.1. *Полученная система предмногообразий* $S = \{\mathbf{P}_{U,\mathbf{L}} | U \in \mathbf{P}_{\mathbf{As}}\}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

а) *Если U-модуль $A \in \mathbf{P}_{U,\mathbf{L}}$, где $\mathbf{P}_{U,\mathbf{L}} \in S$, $\mu: V \to U$ — мономорфизм в категории* $\mathbf{As}$, *а (A_μ, V) — превращение U-модуля A в V-модуль A_μ отступлением вдоль μ, то V-модуль A_μ принадлежит предмногообразию $\mathbf{P}_{V,\mathbf{L}} \in S$ (ясно, что кольцо $V \in \mathbf{P}_{\mathbf{As}}$);*

б) *если модуль $(A, U) \in \mathbf{P}_{U,\mathbf{L}}$, а модуль $(B, W) \in \mathbf{P}_{W,\mathbf{L}}$, где $\mathbf{P}_{U,\mathbf{L}}$ и $\mathbf{P}_{W,\mathbf{L}}$ принадлежат S, то прямое произведение этих модулей $(A \times B, U \times W)$ принадлежит предмногообразию $\mathbf{P}_{U \times W,\mathbf{L}} \in S$ (ясно, что кольцо $U \times W \in \mathbf{P}_{\mathbf{As}}$).*

Доказательство. Пусть модуль $(A, U) \in \mathbf{P}_{U,\mathbf{L}}$, где $\mathbf{P}_{U,\mathbf{L}} \in S$ и $\mu: V \to U$ — мономорфизм в категории $\mathbf{As}$. Тогда модуль $(A, U) \in \mathbf{P}$. Рассмотрим V-модуль A_μ. Так как отображение $(1_A, \mu)$: $(A_\mu, V) \to (A, U)$ является мономорфизмом в категории $\mathfrak{M}$, то модуль $(A_\mu, V) \in \mathbf{P}$. Значит, V-модуль $A_\mu \in \mathbf{P}_{V,\mathbf{L}}$, где $\mathbf{P}_{V,\mathbf{L}} \in S$.

Пусть модуль $(A, U) \in \mathbf{P}_{U,\mathbf{L}}$, а модуль $(B, W) \in \mathbf{P}_{W,\mathbf{L}}$. Эти модули принадлежат предмногообразию $\mathbf{P}$, поэтому прямое произведение этих модулей $(A \times B, U \times W) \in \mathbf{P}$. Значит $U \times W$-модуль $A \times B \in \mathbf{P}_{U \times W,\mathbf{L}}$, где $\mathbf{P}_{U \times W,\mathbf{L}} \in S$. Лемма 1.1 доказана.

Рассмотрим систему предмногообразий $S = \{\mathbf{P}_{U,\mathbf{L}} | U \in \mathbf{P}_{\mathbf{As}}\}$, где $\mathbf{P}_{\mathbf{As}}$ — некоторое предмногообразие категории $\mathbf{As}$, $\mathbf{L}$ — некоторое предмногообразие категории $\mathbf{Ab}$, а $\mathbf{P}_{U,\mathbf{L}}$ $(U \in \mathbf{P}_{\mathbf{As}})$ — ограничение некоторого предмногообразия $\mathbf{P}_U$ категории $\mathfrak{M}_U$ по предмногообразию $\mathbf{L}$. Систему предмногообразий $S = \{\mathbf{P}_{U,\mathbf{L}} | U \in \mathbf{P}_{\mathbf{As}}\}$, удовлетворяющую условиям а) и б) леммы 1.1, назовем согласованной системой предмногообразий (ССП). Очевидно, что существуют такие системы предмногообразий, которые не являются согласованными.

Пусть S — некоторая ССП. Рассмотрим полную подкатегорию $\mathbf{P}(S)$ категории $\mathfrak{M}$, объектами которой являются всевозможные модули $(A, U) \in \mathbf{P}_{U, \mathbf{L}}$ $(\mathbf{P}_{U, \mathbf{L}} \in S)$, при всевозможных $U \in \mathbf{P}_{\mathbf{As}}$.

Лемма 1.2. *Полная подкатегория* $\mathbf{P}(S)$, *порожденная согласованной системой предмногообразий* S, *является предмногообразием категории* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть модуль $(A, U) \in \mathbf{P}(S)$, то есть $(A, U) \in \mathbf{P}_{U, \mathbf{L}}$ $(\mathbf{P}_{U, \mathbf{L}} \in S)$, а $\mu = (\mu_B, \mu_V)\colon (B, V) \to (A, U)$ — мономорфизм в категории $\mathfrak{M}$. U-модуль A отступлением вдоль μ_V превращается в V-модуль A_μ, который принадлежит предмногообразию $\mathbf{P}_{V, \mathbf{L}} \in S$, в силу согласованности системы S. Отображение $(\mu_B, 1_V)$: $(B, V) \to (A_\mu, V)$ является мономорфизмом в категории правых V-модулей $\mathfrak{M}_V$, поэтому V-модуль $B \in \mathbf{P}_{V, \mathbf{L}}$, где $\mathbf{P}_{V, \mathbf{L}} \in S$. Следовательно, подмодуль (B, V) также принадлежит подкатегории $\mathbf{P}(S)$.

Пусть дано некоторое семейство модулей $(A_\alpha, U_\alpha) \in P(S)$, $\alpha \in I$. Покажем, что прямое произведение модулей этого семейства

$$\Bigl(\prod_{\alpha\in I}^{\times} A_\alpha, \prod_{\alpha\in I}^{\times} U_\alpha\Bigr) = (A, U)$$

также принадлежит подкатегории $\mathbf{P}(S)$. Ясно, что абелева группа $A \in \mathbf{L}$, а кольцо $U \in \mathbf{P}_{\mathbf{As}}$. Ясно также, что если кольцо $W \in \mathbf{P}_{\mathbf{As}}$, то нулевой модуль $(O, W) \in \mathbf{P}_{W, \mathbf{L}}$, где $\mathbf{P}_{W, \mathbf{L}} \in S$. Значит, из условия 6) леммы 1.1 следует, что для любого $i \in I$, U-модуль

$$(A_i^0, U) = \Bigl(O \times \cdots \times A_i \times O \times \cdots, \prod_{\alpha\in I}^{\times} U_\alpha\Bigr) = \Bigl(\bigl(\prod_{j<i}^{\times} A_j \times A_i\bigr) \times \prod_{j>i}^{\times} A_j,$$

$$\bigl(\prod_{j<i}^{\times} U_j \times U_i\bigr) \times \prod_{j>i}^{\times} U_j\Bigr),$$

где $A_j = 0$, если $j \neq i$, принадлежит предмногообразию $\mathbf{P}_{U, \mathbf{L}} \in S$. Так как $\mathbf{P}_{U, \mathbf{L}}$ — предмногообразие в категории $\mathfrak{M}_U$ правых U-модулей, то прямое произведение (рассматриваемое в категории $\mathfrak{M}_U$) этих всех U-модулей A_i^0 также должно принадлежать предмногообразию $\mathbf{P}_{U, \mathbf{L}} \in S$. Очевидно, что это прямое произведение совпадает с модулем $(A, U) = \bigl(\prod_{\alpha\in I}^{\times} A_\alpha, \prod_{\alpha\in I}^{\times} U_\alpha\bigr)$. Значит, модуль $(A, U) \in \mathbf{P}(S)$. Лемма 1.2 доказана.

Из этих двух лемм следует

Теорема 1.1. *Любое предмногообразие* $\mathbf{P}$ *категории* $\mathfrak{M}$ *однозначно определяет согласованную систему предмногообразий* S. *Каждая согласованная система предмногообразий* S *однозначно определяет предмногообразие* $\mathbf{P}(S)$ *в категории* $\mathfrak{M}$. *Эти сопоставления — взаимно обратные.*

Пусть $S_1 = \{\mathbf{P}^{(1)}_{U, \mathbf{L}_1} \mid U \in \mathbf{P}^{(1)}_{\mathbf{As}}\}$ и $S_2 = \{\mathbf{P}^{(2)}_{U, \mathbf{L}_2} \mid U \in \mathbf{P}^{(2)}_{\mathbf{As}}\}$ — две ССП. Возьмем некоторое кольцо $U \in \mathbf{P}^{(1)}_{\mathbf{As}} \cdot \mathbf{P}^{(2)}_{\mathbf{As}}$ и рассмотрим полную подкатегорию $\mathbf{P}^{(1,2)}_{U, \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2}$ категории $\mathfrak{M}_U$, порожденную всеми теми U-модулями (A, U), для каждого из которых существует по крайней мере одна такая точная последовательность

$$(B,\ V) \xrightarrow{a} (A,\ U) \xrightarrow{b} (C,\ W),$$

что $(B,\ V) \in \mathbf{P}^{(2)}_{V,\ \mathbf{L}_2}$, а $(C,\ W) \in \mathbf{P}^{(1)}_{W,\ \mathbf{L}_1}$, где $\mathbf{P}^{(2)}_{V,\ \mathbf{L}_2} \in S_2$, а $\mathbf{P}^{(1)}_{W,\ \mathbf{L}_1} \in S_1$. Когда U пробегает все $\mathbf{P}^{(1)}_{\mathbf{As}} \cdot \mathbf{P}^{(2)}_{\mathbf{As}}$, мы получаем систему

$$S_{1,\ 2} = \{\mathbf{P}^{(1,\ 2)}_{U,\ \mathbf{L}_1\mathbf{L}_2} | U \in \mathbf{P}^{(1)}_{\mathbf{As}} \cdot \mathbf{P}^{(2)}_{\mathbf{As}}\}$$

полных подкатегорий категорий $\mathfrak{M}_U$. С другой стороны, произведение предмногообразий $\mathbf{P}(S_1)$ и $\mathbf{P}(S_2)$ является предмногообразием в $\mathfrak{M}$, поэтому существует такая ССП S, что $\mathbf{P}(S_1) \cdot \mathbf{P}(S_2) = \mathbf{P}(S)$. Из построения системы $S_{1,2}$ и определения произведения предмногообразий следует, что системы полных подкатегорий S и $S_{1,2}$ совпадают. Так как S — ССП, то и $S_{1,2}$ — ССП.

Предложение 1.1. *Произведение двух предмногообразий $\mathbf{P}(S_1)$ и $\mathbf{P}(S_2)$ категории $\mathfrak{M}$ определяется по формуле* $\mathbf{P}(S_1) \times \mathbf{P}(S_2) = \mathbf{P}(S_{1,2})$.

Пусть $\mathbf{Y}$ — класс групп. Тогда $S\mathbf{Y}$ есть класс всех подгрупп, $C\mathbf{Y}$ есть класс всех декартовых произведений $\mathbf{Y}$-групп, $C_0R\mathbf{Y}$ — класс всех групп, аппроксимирующихся $\mathbf{Y}$-группами.

Если $\mathbf{Y}$ — произвольный класс групп, $\mathbf{X}(\mathbf{Y})$ — порожденное им предмногообразие, то $\mathbf{X}(\mathbf{Y}) = SC\mathbf{Y} = C_0R \cdot S\mathbf{Y}$.

Лемма 1.3. *Совокупность всех предмногообразий категории абелевых групп не является множеством.*

Доказательство. Известно, [4], что для всякой бесконечной мощности $\mathbf{m}$ существует $2^{\mathbf{m}}$ неизоморфных подпрямо неразлагающихся абелевых групп без кручения, каждая из которых имеет мощность $\mathbf{m}$. Выберем для каждой мощности $\mathbf{m}$ абелеву группу $A_{\mathbf{m}}$ такого вида и рассмотрим предмногообразие $\mathbf{X}(A_{\mathbf{m}})$, порожденное этой группой. Пусть мощность $\mathbf{m} < \mathbf{n}$. Так как $\mathbf{X}(A_{\mathbf{m}}) = C_0R \cdot S[A_{\mathbf{m}}]$, то каждая $\mathbf{X}(A_{\mathbf{m}})$-группа аппроксимируется подгруппами группы $A_{\mathbf{m}}$, а так как $A_{\mathbf{n}}$ — подпрямо неразлагающаяся абелева группа, мощность которой больше мощности группы $A_{\mathbf{m}}$, то группа $A_{\mathbf{n}} \overline{\in} \mathbf{X}(A_{\mathbf{m}})$. Получили, что $\mathbf{X}(A_{\mathbf{m}}) \neq \mathbf{X}(A_{\mathbf{n}})$. Лемма 1.3 доказана.

Теорема 1.2. *Совокупность всех предмногообразий категории $\mathfrak{M}$ не является множеством.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{L}$ — некоторое предмногообразие категории абелевых групп, а $\{0\}$ — тривиальное предмногообразие категории $\mathbf{As}$. Рассмотрим согласованную „систему" предмногообразий $\{\mathfrak{M}_{O,\ \mathbf{L}} | O \in \{O\}\}$, где $\mathfrak{M}_{O,\ \mathbf{L}}$ — это совокупность всех тех O-модулей A, для которых абелева группа $A \in \mathbf{L}$. Очевидно, что для различных предмногообразий $\mathbf{L}$ категории $\mathbf{Ab}$ получаются различные предмногообразия катогории $\mathfrak{M}$ выше рассмотренного вида. Из леммы 1.3 следует, что теорема 1.2 доказана.

Рассмотрим теперь многообразия категории $\mathfrak{M}$. Если предмногообразие $\mathbf{P}$ категории $\mathfrak{M}$ является многообразием $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$, то вместо системы предмногообразий $S=\{\mathbf{P}_{U,\mathbf{L}}|U\in\mathbf{P}_{\mathbf{As}}\}$ мы получим систему многообразий $S=\{\mathbf{N}_{V_{T'}(U),\mathbf{L}(n)}|U\in T\}$ (см. [1], доказательство теоремы 2.2), где $\mathbf{L}(n)$ (n — неотрицательное целое число) — многообразие категории **Ab**, определяемое тождеством $nx=0$, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}'$ — такие многообразия категории **As**, что $\mathbf{T}'\subseteq\mathbf{T}\cap\mathbf{T}(n)$, где $\mathbf{T}(n)$ — многообразие категории **As**, определяемое тождеством $nx=0$, $V_{T'}(U)$ — значение вербала $V_{T'}$ многообразия $\mathbf{T}'$ на кольце U, а $\mathbf{N}_{V_{T'}(U),\mathbf{L}(n)}$ $(U\in T)$ — ограничение по многообразию $\mathbf{L}(n)$ многообразия $\mathbf{N}_{V_{T'}(U)}$ категории $\mathfrak{M}_U$ определяемое идеалом $V_{T'}(U)$ кольца U. Очевидно, что полученная система многообразий удовлетворяет условиям а) и б) леммы 1.1.

Пусть θ: $U\to W$ — гомоморфизм колец. Тогда для любого модуля (A, U) подмодуль $(A\cdot\mathrm{Ker}\,\theta, \mathrm{Ker}\,\theta)$ является идеалом ([1], § 1) этого модуля, поэтому наряду с каждым модулем (A, U) мы можем рассматривать также и фактор-модуль $(A/A\cdot\mathrm{Ker}\,\theta, U/\mathrm{Ker}\,\theta)$ модуля (A, U) по идеалу $(A\cdot\mathrm{Ker}\,\theta, \mathrm{Ker}\,\theta)$.

Лемма 1.4. *Система многообразий* $S=\{N_{V_{T'}(U),\mathbf{L}(n)}|U\in\mathbf{T}\}$ *кроме условий* а) *и* б) *леммы* 1.1 *удовлетворяет еще и условию* в) *если* U*-модуль* $A\in\mathbf{N}_{V_{T'}(U),\mathbf{L}(n)}$, *где* $\mathbf{N}_{V_{T'}(U),\mathbf{L}(n)}\in S$ *и* θ: $U\to W$ *является сюръективным гомоморфизмом в категории* **As**, *то модуль* $(A/A\cdot\mathrm{Ker}\,\theta, U/\mathrm{Ker}\,\theta)$ *принадлежит многообразию* $\mathbf{N}_{V_{T'}(U/\mathrm{Ker}\,\theta),\mathbf{L}(n)}\in S$ (*ясно, что кольцо* $U/\mathrm{Ker}\,\theta\in\mathbf{T}$).

Доказательство. Пусть модуль $(A, U)\in\mathbf{N}_{V_{T'}(U),\mathbf{L}(n)}$ и θ: $U\to W$ — гомоморфизм „на" в категории **As**. Тогда модуль $(A, U)\in\mathbf{N}$, поэтому фактор-модуль $(A/A\cdot\mathrm{Ker}\,\theta, U/\mathrm{Ker}\,\theta)$ также принадлежит многообразию $\mathbf{N}$ как эпиморфный образ модуля (A, U) при естественном эпиморфизме. Лемма 1.4 доказана.

Систему многообразий $S=\{\mathbf{N}_{V_{T'}(U),\mathbf{L}(n)}|U\in\mathbf{T}\}$, удовлетворяющую условиям а) и б) леммы 1.1 и условию в) леммы 1.4, назовем согласованной системой многообразий (ССМ).

Пусть $S=\{\mathbf{N}_{V_{T'}(U),\mathbf{L}(n)}|U\in\mathbf{T}\}$ — некоторая ССМ. Рассмотрим полную подкатегорию $\mathbf{N}(S)$ категории $\mathfrak{M}$, объектами которой являются всевозможные модули $(A, U)\in\mathbf{N}_{V_{T'}(U),\mathbf{L}(n)}$, при всевозможных $U\in\mathbf{T}$.

Лемма 1.5. *Полная подкатегория* $\mathbf{N}(S)$ *категории* $\mathfrak{M}$, *порожденная согласованной системой многообразий* S, *является многообразием категории* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. ССМ является ССП, поэтому в силу леммы 1.2 подкатегория $\mathbf{N}(S)$ замкнута относительно подобъектов и прямых произведений. Покажем, что она замкнута относительно коидеалов.

Пусть модуль $(A, U)\in\mathbf{N}(S)$, то есть U-модуль $A\in\mathbf{N}_{V_{T'}(U),\mathbf{L}(n)}$, где $\mathbf{N}_{V_{T'}(U),\mathbf{L}(n)}\in S$, а $(\theta_A, \theta): (A, U)\to(B, W)$ — нормальный эпиморфизм в категории $\mathfrak{M}$, то есть гомоморфизм „на" (см. [1], предложение 1.5). Гомоморфизм $\theta: U \to W$ — гомоморфизм „на", поэтому фактор-модуль $(A/A \cdot \mathrm{Ker}\,\theta,\ U/\mathrm{Ker}\,\theta)$ принадлежит многообразию $\mathbf{N}_{V_{T'}(U/\mathrm{Ker}\,\theta),\, L(n)} \in S$, в силу согласованности системы S, и существует изоморфизм $\xi: U/\mathrm{Ker}\,\theta \to W$. Рассмотрим модуль $(B_{\xi},\ U/\mathrm{Ker}\,\theta) = (B,\ U/\mathrm{Ker}\,\theta)$ и отображение $(\psi, 1)$: $(A/A \cdot \mathrm{Ker}\,\theta,\ U/\mathrm{Ker}\,\theta) \to (B,\ U/\mathrm{Ker}\,\theta)$, которое переводит всякий элемент $(a + A \cdot \mathrm{Ker}\,\theta) \in A/A \cdot \mathrm{Ker}\,\theta$ в элемент $a\theta_1 \in B$, а на кольцах действует как тождественный автоморфизм. Отображение ψ определено корректно, так как легко проверить, что $A \cdot \mathrm{Ker}\,\theta \subseteq \mathrm{Ker}\,\theta_1$. Очевидно, что отображение $(\psi, 1)$ является гомоморфизмом „на" в категории $\mathfrak{M}$ и, даже более того, является гомоморфизмом „на" в категории $\mathfrak{M}_{U/\mathrm{Ker}\,\theta}$. Поэтому, так как $U/\mathrm{Ker}\,\theta$ — модуль $A/A \cdot \mathrm{Ker}\,\theta$ принадлежит многообразию $\mathbf{N}_{V_{T'}(U/\mathrm{Ker}\,\theta),\, L(n)}$ категории $\mathfrak{M}_{U/\mathrm{Ker}\,\theta}$, то $U/\mathrm{Ker}\,\theta$-модуль B также принадлежит многообразию $\mathbf{N}_{V_{T'}(U/\mathrm{Ker}\,\theta),\, L(n)}$. Модуль $(B, W) = (B_{\xi^{-1}}, W)$, поэтому модуль $(B, W) \in \mathbf{N}_{V_{T'}(W),\, L(n)}$, где $\mathbf{N}_{V_{T'}(W),\, L(n)} \in S$. Лемма 1.5 доказана.

Из этих двух последних лемм следует

Теорема 1.3. *Любое многообразие* $\mathbf{N}$ *категории* $\mathfrak{M}$ *однозначно определяет согласованную систему многообразий* S. *Каждая согласованная система многообразий* S *однозначно определяет многообразие* $\mathbf{N}(S)$ *в категории* $\mathfrak{M}$. *Эти сопоставления взаимно обратные.*

Замечание 1.1. Пусть n — неотрицательное целое число, а T и T' — такие многообразия категории $\mathbf{As}$, что $T' \subseteq T \cap T(n)$. Обозначим через $\mathbf{N}(n, T, T')$ многообразие категории $\mathfrak{M}$, определенное тройкой (n, T, T') (см. [1], § 2). Из доказательства теоремы 2.3 работы [1] видно, что формулу умножения многообразий категории $\mathfrak{M}$ можно записать и в такой форме

$$\mathbf{N}(n_1,\ T_1,\ T'_1) \cdot \mathbf{N}(n_2,\ T_2,\ T'_2) = \mathbf{N}(n_1 n_2,\ T_1 T_2,\ T'_1\, T(n_2) \cap T_1\, T'_2\, T(n_1) \cap$$

$$\cap [T'_1,\ T_1\, T'_2] \cap T'_1 T'_2).$$

Напомним, что $[\hat{T}_1, \hat{T}_2]$, где $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ — некоторые многообразия категории $\mathbf{As}$, это то многообразие категории $\mathbf{As}$, чей вербал $V_{[\hat{T}_1, \hat{T}_2]}$ определяется равенством

$$V_{[\hat{T}_1,\ \hat{T}_2]}(U) = V_{\hat{T}_1}(U) \cdot V_{\hat{T}_2}(U),$$

где $V_{\hat{T}_1}$ и $V_{\hat{T}_2}$ — вербалы многообразий $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$, а U — любое ассоциативное кольцо. Когда n_1 или n_2, или же оба они одновременно равны нулю, то есть когда задаваемое ими многообразие абелевых групп совпадает с $\mathbf{Ab}^*$ (в работе [1] этому случаю соответствовал индекс $n = \infty$, однако обозначение $n = 0$ лучше, так как ясно, что $T(O) = \mathbf{As}$), удобнее пользоваться этой новой формой записи формулы умножения многообразий категории $\mathfrak{M}$. В этой записи вместо $T(d)$, где d — наибольший общий делитель чисел n_1 и n_2, стоит $T(n_1)$, опущен член $T(n_1 n_2)$, так как из условия $T_1' \subseteq T(n_1)$ следует, что всегда $T_1'\, T(n_2) \subseteq T(n_1)\, T(n_2) = T(n_1 n_2)$ ([2], стр. 218). Из следствия IV.6.10 (см. [9], стр. 237) и из определения бимногообразия (см. [1], стр. 232) следует, что если в произвольной категории брать произведение трех многообразий, третье из которых является бимногообразием, то в этом случае операция умножения многообразий будет ассоциативной. Так как $T(n_1)$ — бимногообразие в категории **As**, то

$$(T_1\, T_2')\, T(n_1) = T_1\,(T_2'\, T(n_1)) = T_1\, T_2'\, T(n_1).$$

Обозначим группоид всех многообразий категории $\mathfrak{M}$ через $Gr(\mathfrak{M})$. Это группоид с нулем $\mathbf{N}(0,\ T(0),\ T(0)) = \mathbf{N}(0,\ \mathbf{As},\ \mathbf{As}) = \mathfrak{M}$ и единицей $\mathbf{N}(1,\ T(1),\ T(1)) = \{(O,\ O)\}$.

Пусть $\mathbf{N}$ — некоторое многообразие категории $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathbf{N} = \mathbf{N}(n,\ T,\ T')$ (см. [1], теорема 2.2).

Определение 1.1. Многообразие $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ назовем насыщенным, если из того, что модуль $(A,\ U) \in \mathbf{N}$, а $\theta\colon W \to U$ является нормальным эпиморфизмом в категории **As**, следует, что W-модуль A_θ также принадлежит многообразию $\mathbf{N}$ (см. [3], стр. 92 и 101).

Теорема 1.4. *Многообразие* $\mathbf{N}(n,\ T,\ T')$ *категории* $\mathfrak{M}$ *является насыщенным многообразием тогда и только тогда, когда* $T = \mathbf{As}$. *Существует взаимно однозначное соответствие между всеми парами* $(n,\ T')$ *(n — неотрицательное целое число, а T' — такое многообразие категории* **As**, *что* $T' \subseteq T(n)$*), и всеми насыщенными многообразиями* $\mathbf{N}(n,\ \mathbf{As},\ T')$ *категории* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Если многообразие $\mathbf{N}(n,\ T,\ T')$ — насыщенное, то так как нулевой модуль $(O,\ O)$ принадлежит этому многообразию и для любого ассоциативного кольца U, гомоморфизм $U \to 0$ является гомоморфизмом „на“, получаем что для любого ассоциативного кольца U модуль $(O,\ U) \in \mathbf{N}(n,\ T,\ T')$. Значит, $T = \mathbf{As}$. Обратно, если модуль $(A,\ U) \in \mathbf{N}(m,\ \mathbf{As},\ \dot{T})$ и $\theta\colon W \to U$ — нормальный эпиморфизм в категории **As**, то модуль $(A_\theta,\ W)$ также принадлежит многообразию $\mathbf{N}(m,\ \mathbf{As},\ \dot{T})$, так как из существования коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\theta"] & U \\
V_{\dot{T}}(W) \arrow[u, "\sigma_W"] \arrow[r, "V_{\dot{T}}(\theta)"] & V_{\dot{T}}(U) \arrow[u, "\sigma_U"']
\end{tikzcd}$$

следует, что для любого $a \in A$ и для любого $w \in V_{\dot{T}}(W)$, $a \circ w = a \cdot (w\theta) = a \cdot (w V_{\dot{T}}(\theta)) = 0$. Вторая часть теоремы следует из предложения 2.4 работы [1]. Теорема 1.4 доказана.

Следствие. Для насыщенных многообразий, соответствующая система кольцевых тождеств пуста. Значит, насыщенные многообразия — это классы модулей, задаваемые одними лишь наборами битождеств (см. [3], стр. 103 и [1], стр. 218).

Теорема 1.5. *Произведение любых двух насыщенных многообразий* $\mathbf{N}(n_1, \mathbf{As}, \mathbf{T}_1)$ *и* $\mathbf{N}(n_2, \mathbf{As}, \mathbf{T}_2)$ *является насыщенным многообразием, которое определяется по формуле*

$$\mathbf{N}(n_1, \mathbf{As}, \mathbf{T}_1)\cdot\mathbf{N}(n_2, \mathbf{As}, \mathbf{T}_2) = \mathbf{N}(n_1 n_2, \mathbf{As}, \mathbf{T}_1\mathbf{T}(n_2)).$$

Доказательство. Очевидно, что многообразие $\mathbf{As}$ является нулем группоида всех многообразий ассоциативных колец. Поэтому из формулы умножения многообразий категории $\mathfrak{M}$ следует, что $\mathbf{T}_1\mathbf{T}(n_2)\cap\mathbf{As}\cdot\mathbf{T}_2\cdot\mathbf{T}(n_1)\cap[\mathbf{T}_1, \mathbf{As}\cdot T_2]\cap\mathbf{As}\cdot\mathbf{As}=\mathbf{T}_1\mathbf{T}(n_2)$, так как из того, что $\mathbf{As}\subseteq[\mathbf{T}_1, \mathbf{As}]$ [см. [1], стр. 230], следует, что $[\mathbf{T}_1, \mathbf{As}]=\mathbf{As}$. Теорема 1.5 доказана.

Следствие 1. Насыщенные многообразия категории $\mathfrak{M}$ образуют подгруппоид $Se(\mathfrak{M})$ с нулем $\mathbf{N}(0, \mathbf{As}, \mathbf{As})=\mathfrak{M}$ и правой единицей $\mathbf{N}(1, \mathbf{As}, \mathbf{T}(1))$ в группоиде всех многообразий $Gr(\mathfrak{M})$ этой категории. Этот подгруппоид является двусторонним идеалом в $Gr(\mathfrak{M})$.

Следствие 2. Так как для любых двух многообразий $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ категории $\mathbf{As}$, $\mathbf{N}(0, \mathbf{As}, \mathbf{T}_1)\cdot\mathbf{N}(0, \mathbf{As}, \mathbf{T}_2)=\mathbf{N}(0, \mathbf{As}, \mathbf{As})$, то в группоиде $Gr(\mathfrak{M})$ многообразия вида $\mathbf{N}(0, \mathbf{As}, \mathbf{T})$ образуют двусторонний идеал с нулевым умножением. Значит, в группоиде $Gr(\mathfrak{M})$ имеются делители нуля и нильпотентные элементы.

Теорема 1.6. *Подгруппоид* $Se(\mathfrak{M})$ *является полугруппой.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $N_1=N(m_1, As, T_1)$ и $N_2=N(m_2, As, T_2)$ — два насыщенных многообразия, то для любого модуля (A, U) значение вербала $V_{N_2}(V_{N_1}(A, U))$ является идеалом в модуле (A, U) (см. [9], стр. 237). Действительно, вербал

$$V_{N_2}(V_{N_1}(A, U)) = V_{N_2}(m_1 A + A\cdot V_{T_1}(U),\ 0)=(m_2 m_1 A + m_2 A\cdot V_{T_1}(U),\ 0)$$

(см. [1], предложение 2.5). Теорема 1.6 доказана.

Лемма 1.6. *Если любое многообразие* $N(n, \dot{T}, T')$ *категории* $\mathfrak{M}$ *умножить справа на любое многообразие вида* $N(1, T, T(1))$, *то соответствующие тройки перемножаются покомпонентно, то есть* $N(n, \dot{T}, T')\cdot N(1, T, T(1))=N(n, \dot{T}\cdot T, T')$.

Доказательство. По формуле умножения многообразий ([1], теорема 2.3), мы получим выражение

$$T'\,T(1)\cap\dot{T}\cdot T(1)\cdot T(1)\cap[T', \dot{T}\,T(1)]\cap\dot{T}\cdot T,$$

которое равняется T', так как $T(1)$ — единица группоида многообразий категории As, $T'\subseteq\dot{T}$ и $[T', \dot{T}]\supseteq T'$.

Лемма 1.6 доказана.

В конце замечания 1.1 указывалось, что если в произвольной категории брать произведение трех многообразий, третье из которых является бимногообразием, то в этом случае операция умножения многообразий будет ассоциативной. Возникает вопрос, а как будут обстоять дела, если бимногообразие брать в середине, или же в начале произведения? Будет ли в этих случаях ассоциативность? Мы покажем, что это не так, что если даже на первых двух местах стоит одно и то же идемпотентное бимногообразие, то все равно, в общем случае ассоциативности не будет.

Известно, что $\mathbf{N}(0, T(1), T(1))$ — идемпотентное бимногообразие в категории $\mathfrak{M}$ ([1], § 3).

Предложение 1.2. $[\mathbf{N}(0, T(1), T(1))\cdot N(0, T(1), T(1))]\cdot N(1, As, T(1))\neq \mathbf{N}(0, T(1), T(1))\cdot[\mathbf{N}(0, T(1), T(1))\cdot N(1, As, T(1))]$.

Доказательство. В силу леммы 1.6 и формулы умножения бимногообразий ([1], теорема 3.2), левая часть этого выражения равна $N(0, As, T(1))$. Мы показали, что $N(0, T(1), T(1))\cdot \mathbf{N}(1, As, T(1))=N(0, As, T(1))$. Значит, правая часть нашего выражения равняется $N(0, T(1), T(1))\cdot N(0, As, T(1)) = N(0, As, T')$, где $T'= T(1)\cdot T(0)\cap T(1)\cdot T(1)\cdot T(0)\cap [T(1)\cdot T(1), T(1)]\cap T(1)\cdot As = [T(1), T(1)]$. Так как существует такое кольцо U, что $U\neq U^2$, то вербал $V_{[T(1), T(1)]}(U) = V_{T(1)}(U)\cdot V_{T(1)}(U) = U\cdot U\neq U = V_{T(1)}(U)$. Это означает, что многообразие $[T(1), T(1)]\neq T(1)$. Значит, многообразие $N(0, As, T(1))\neq N(0, As, [T(1), T(1)])$ ([1], предложение (2.4). Предложение 1.2 доказано.

Следствие. Умножение многообразий категории $\mathfrak{M}$ не ассоциативно.

В силу следствия 2 теоремы 1.5, для любых двух насыщенных многообразий $N(0, As, T_1)$ и $N(0, As, T_2)$ вида $N(0, As, \dot{T})$ и для любого многообразия $N(n, T, T')$ категории $\mathfrak{M}$ имеет место равенство $N(0, As, T_1)\cdot N(n, T, T')\cdot N(0, As, T_2) = N(0, As, As) = \mathfrak{M}$. Более того, для любого насыщенного многообразия $\mathbf{N}(n, As, \dot{T})$,

$$\mathbf{N}(n, As, \hat{T})\cdot N(0, As, T)=N(0, As, As),$$

то есть насыщенные многообразия вида $N(0, As, T)$ являются правыми делителями нуля полугруппы $Se(\mathfrak{M})$. Из сказанного выше следует.

Теорема 1.7. *Ни группоид $Gr(\mathfrak{M})$ ни полугруппа $Se(\mathfrak{M})$ не являются свободными.*

Мы уже рассматривали некоторые свободные коммутативные подполугруппы группоида $Gr(\mathfrak{M})$ ([1], теорема 3.3). Рассмотрим еще две такие подполугруппы.

Рассмотрим все насыщенные многообразия вида $\mathbf{N}(n, As, \mathbf{T}(n))$, где n — неотрицательное целое число. $Ob\,\mathbf{N}(n, As, \mathbf{T}(n)) = \{(A, U) \mid nu=0$, для любого $u\in A\}$, так как для любого элемента $a\in A$ и любого элемента $u\in U$, равенство $a\cdot(nu)=0$ выполняется автоматически в силу того, что $a\cdot(nu) = (na)\cdot u = 0\cdot u = 0$. Нетрудно проверить, что насыщенные многообразия выше рассмотренного вида образуют свободную коммутативную полугруппу с формально присоединенными нулем $N(0, As, T(0))$ и единицей $N(1, As, T(1))$, свободными образующими которой являются насыщенные многообразия вида $N(p, As, T(p))$, p—простое число. Эта полугруппа изоморфна мультипликативной полугруппе всех неотрицательных целых чисел. Из формулы умножения следует, что эта полугруппа является правым идеалом в $Se(\mathfrak{M})$.

Легко проверить, что многообразия вида $N(1, T(k), T(1))$, где $k=1, 2, \cdots$, образуют свободную коммутативную подполугруппу в $Gr(\mathfrak{M})$ с формально присоединенной единицей $N(1, T(1), T(1))$, свободными образующими которой являются многообразия вида $N(1, T(p), T(1))$, где p—простое число. Эта полугруппа изоморфна мультипликативной полугруппе всех натуральных чисел.

Рассмотрим теперь все насыщенные многообразия вида $N(n, As, T(m))$, где m — делитель n, если n—натуральное число и m—любое натуральное число или нуль, если $n=0$. Легко проверить, что все насыщенные многообразия такого вида образуют подполугруппу в полугруппе $Se(\mathfrak{M})$. Эта подполугруппа является правым идеалом в полугруппе $Se(\mathfrak{M})$. Она изоморфна мультипликативной полугруппе всех пар (n, m), где n и m удовлетворяют тем же условиям, что и выше и для любых двух пар (n_1, m_1) и (n_2, m_2) мультипликативная операция определена следующим образом: $(n_1, m_1)\cdot(n_2, m_2)=(n_1n_2, m_1m_2)$. Очевидно, что эта подполугруппа не является свободной и что правая единица $N(1, As, T(1))$ не являетея в ней единицей.

Замечание 1.2. Если произвольное многообразие $N(n, T, T')$ умножить слева на любое насыщенное многообразие $\mathbf{N}(m, \mathbf{As}, \dot{\mathbf{T}})$, то многообразия $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}'$ никакой роли не будут играть в этом умножении, так кзк из формулы умножения многообразий следует, что

$$\mathbf{N}(m, As, \dot{T})\cdot N(n, T, T')=N(mn, As, \dot{T}\cdot T(n)).$$

Отсюда следует, что $Gr(\mathfrak{M})$ не является группоидом с левым сокращением. Кроме того, нетрудно проверить, что для любого бимногообразия $N(m, T(m), T(m))$ ([1], § 3), $\mathbf{N}(m, T(m), T(m))\cdot N(n, As, T(n))=\mathbf{N}(m, As, T(m))\cdot N(n, As, T(n))=N(mn, As, T(mn))$. Значит, $Gr(\mathfrak{M})$ не являегся также и группоидом с правым сокращением. Заметим еще, что $N(n, As, T(n))\cdot N(m, T(m), T(m))=N(n, As, T(n))\cdot N(m, As, T(m))=N(mn, As, T(mn))$.

Предложение 1.3. *Для того чтобы многообразие $N(n, T, T')$ было идемпотентом в группоиде $Gr(\mathfrak{M})$, необходимо и достаточно, чтобы оно или было вида $N(1, T, T(1))$ или же вида $N(0, T, T)$, где в обоих случаях T — идемпотент в группоиде всех многообразий категории As.*

Доказательство. Из формулы умножения многообразий видно, что для того чтобы многообразие $N(n, T, T')$ было идемпотентом в группоиде $Gr(\mathfrak{M})$, необходимо, чтобы $n^2=n$, то есть чтобы $n=1$ или же $n=0$.

Пусть $n = 1$, тогда $T' = T(1)$, так как $T' \subseteq T(1) = \{0\}$. В силу леммы 1.6 $(\mathbf{N}(1, T, T(1)))^2 = \mathbf{N}(1, T^2, T(1))$. Значит, многообразие $N(1, T, T(1))$ тогда и только тогда идемпотентно, когда $T^2 = T$.

Пусть $n = 0$. Тогда имеем многообразие вида $N(0, T, T')$, где $T' \subseteq T$. Из условия $N(0, T, T') = (N(0, T, T'))^2 = N(0, T^2, \hat{T})$ получаем, что для того чтобы многообразие $N(0, T, T')$ было идемпотентом, необходимо, чтобы $T^2 = T$. В силу формулы умножения многообразий категории $\mathfrak{M}$ имеем, что

$$\hat{T} = T' \cdot T(0) \cap T \cdot T' \cdot T(0) \cap [T', T \cdot T'] \cap T^2 = [T', T \cdot T'] \cap T^2 = [T', T \cdot T'] \cap T,$$

так как $T^2 = T$. А из неравенства $[T', T \cdot T'] \supseteq T \cdot T' \supseteq T$ получаем что $\hat{T} = T$. Из условия $N(0, T, T') = N(0, T^2, \hat{T})$ и из предложения 2.4 работы [1] следует, что $T' = \hat{T} = T$. Получили многообразие вида $\mathbf{N}(0, \mathbf{T}, \mathbf{T})$. Предложение 1.3 доказано.

С л е д с т в и е 1. Единственным нетривиальным идемпотентом в полугруппе $B(\mathfrak{M})$ всех бимногообразий категории $\mathfrak{M}$ ([1], § 3), является бимногообразие $\mathbf{N}(0, \mathbf{T}(1), \mathbf{T}(1))$.

С л е д с т в и е 2. Единственным нетривиальным идемпотентом в полугруппе $Se(\mathfrak{M})$ всех насыщенных многообразий категории $\mathfrak{M}$, является ее правая единица $\mathbf{N}(1, \mathbf{As}, \mathbf{T}(1))$.

В работе [1] доказано, что для любых многообразий $\mathbf{N}(n_1, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1)$ и $\mathbf{N}(n_2, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2)$, $\mathbf{N}(n_1, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1) \cdot \mathbf{N}(n_2, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2) = \mathbf{N}(n_1 n_2, \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2)$. Значит, многообразия вида $N(n, T, T)$ образуют подгруппоид $\Gamma(\mathfrak{M})$ в $Gr(\mathfrak{M})$.

П р е д л о ж е н и е 1.4. $\Gamma(\mathfrak{M}) \cap Se(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{M}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если многообразие $N(n, T, T) \in Se(\mathfrak{M})$, то в силу теоремы 1.4, $T = As$, а так как $T \subseteq T(n)$ ([1], замечание 2.2), то это возможно лишь тогда, когда $n = 0$. Значит, $N(n, T, T) = N(0, As, As) = \mathfrak{M}$. Предложение 1.4 доказано.

С л е д с т в и е. $B(\mathfrak{M}) \cap Se(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{M}\}$.

П р е д л о ж е н и е 1.5. *Для того чтобы многообразия $N(n_1, T_1, T_1')$ и $N(n_2, T_2, T_2')$ коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы $T_1 T_2 = T_2 T_1$ и $T_1' T(n_2) \cap T_1 T_2' T(d) \cap [T_1', T_1 T_2'] \cap T_1 T_2 = T_2' T(n_1) \cap T_2 T_1' T(d) \cap [T_2', T_2 \cdot T_1'] \cap T_2 \cdot T_1$, где d — наибольший общий делитель чисел n_1 и n_2. Если n_1 или n_2, или же они оба равны нулю, то вместо $T(d)$, в левой части равенства надо подставить $T(n_1)$, а в правой части $T(n_2)$.*

Доказательство следует из формулы умножения многообразий категории $\mathfrak{M}$ и из предложения 2.4 работы [1].

С л е д с т в и е 1. Для того чтобы коммутировали насыщенные многообразия $\mathbf{N}(n_1, As, T_1)$ и $\mathbf{N}(n_2, As, T_2)$, необходимо и достаточно, чтобы $T_1 T(n_2) = T_2 T(n_1)$.

Следствие 2. *Для того чтобы многообразия* $\mathbf{N}(n_1, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1)$ *и* $\mathbf{N}(n_2, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2)$ *группоида* $\Gamma(\mathfrak{M})$ *коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы* $T_1T_2 = T_2T_1$.

§ 2. Бикатегорные структуры

Известно, что совокупность всех бикатегорных структур в категории ассоциативных колец не является множеством (см. [6], теорема 1).

Теорема 2.1. *Совокупность всех бикатегорных структур в категории* $\mathfrak{M}$ *не является множеством.*

Доказательство. Возьмем в категории **As** некоторую бикатегорную структуру $(\mathbf{As}, E_{\mathbf{As}}, M_{\mathbf{As}})$ и построим по ней бикатегорную структуру $(\mathfrak{M}, E_{\mathfrak{M}}, M_{\mathfrak{M}})$ в категории $\mathfrak{M}$.

Пусть $(\varphi_A, \varphi_U)\colon (A, U) \to (B, V)$ — любой морфизм категории $\mathfrak{M}$ и $\varphi_U = \theta\mu$ $(\theta\colon U \to W,\ \mu\colon W \to V)$ — допустимое разложение кольцевого гомоморфизма φ в бикатегорной структуре $(\mathbf{As}, E_{\mathbf{As}}, M_{\mathbf{As}})$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(A, U) \arrow[rr, "(\varphi_A, \varphi_U)"] \arrow[dr, "(\bar{\pi}, \theta)"'] & & (B, V) \\
& (\mathrm{Im}\,\varphi_A + \mathrm{Im}\,\varphi_A \circ W, W) \arrow[ur, "(i, \mu)"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

где $\mathrm{Im}\,\varphi_A + \mathrm{Im}\,\varphi_A \circ W$ — это W-подмодуль W-модуля B_W, порожденный подгруппой $\mathrm{Im}\,\varphi_A$, гомоморфизм π переводит любой элемент $a \in A$ в элемент $a\varphi_A \in \mathrm{Im}\,\varphi_A$, i-вложение подгруппы $\mathrm{Im}\,\varphi_A + \mathrm{Im}\,\varphi_A \circ W$ группы B в B. Покажем, что пары (π, θ) и (i, μ) являются морфизмами категории $\mathfrak{M}$.

Для всякого $a \in A$ и для всякого $u \in U$, $(a \cdot u)\pi = (a \cdot u)\varphi_A = (a\varphi_A)\cdot(u\varphi_U) = a\varphi_A \cdot (u^\theta)\mu = a\varphi_A \circ u^\theta = a^\pi \circ u^\theta$.

Для всякого $(a_1\varphi_A + a\varphi_A \circ \omega) \in \mathrm{Im}\,\varphi_A + \mathrm{Im}\,\varphi_A \circ W$ и для всякого

$\bar{\omega} \in W$, $[(a_1\varphi_A + a\varphi_A \circ \omega) \circ \bar{\omega}]\, i = (a_1\varphi_A \circ \bar{\omega} + a\varphi_A \circ \omega\bar{\omega})\, i = a_1\varphi_A \circ \bar{\omega} + a\varphi_A \circ \omega\bar{\omega} =$

$$= (a_1\varphi_A)\cdot(\bar{\omega}\mu) + (a\varphi_A)\cdot(\omega\bar{\omega})\mu = (a_1\varphi_A)\cdot(\bar{\omega}\mu) + (a\varphi_A)\cdot(\omega\mu)\cdot(\bar{\omega}\mu) =$$

$$= [a_1\varphi_A + (a\varphi_A)\cdot(\omega\mu)]\cdot\bar{\omega}\mu = (a_1\varphi_A + a\varphi_A \circ \omega)\, i \cdot \bar{\omega}\mu.$$

Очевидно, что диаграмма (2.1) коммутативна. Мы получили, что любой гомоморфизм (φ_A, φ_U) категории $\mathfrak{M}$ разлагается в произведение $(\varphi_A, \varphi_U) = (\pi, \theta)\cdot(i, \mu)$, где $\varphi_U = \theta\mu$ — допустимое разложение морфизма φ_U в бикатегорной структуре $(\mathbf{As}, E_{\mathbf{As}}, M_{\mathbf{As}})$. Покажем, что получили бикатегорную структуру $(\mathfrak{M}, E_{\mathfrak{M}}, M_{\mathfrak{M}})$ в категории $\mathfrak{M}$.

Очевидно, что $(i, \mu) \in \mathrm{Mon}\, \mathfrak{M}$. Покажем, что $(\pi, \theta) \in Epi\, \mathfrak{M}$.

Пусть даны гомоморфизмы (ψ, ψ_W) и (χ, χ_W) такие, что $(\pi, \theta)\cdot(\psi, \psi_W) = (\pi, \theta)\cdot(\chi, \chi_W)$. Это означает, что $(\pi\psi, \theta\psi_W) = (\pi\chi, \theta\chi_W)$. Из равенства $\theta\psi_W = \theta\chi_W$ следует, что $\psi_W = \chi_W$, так как $\theta \in Edi$ **As**. Покажем, что $\psi = \chi$. Действительно, для всякого

$$(a_1\varphi_A + a\varphi_A \circ \omega) \in \mathrm{Im}\, \varphi_A + \mathrm{Im}\, \varphi_A \circ W,\ (a_1\varphi_A + a\varphi_A \circ \omega)\psi = (a_1\varphi_A)\psi +$$

$$+ (a\varphi_A \circ \omega)\psi = (a_1\varphi_A)\psi + (a\varphi_A)\psi\cdot(\omega\psi_W) = (a_1\pi)\psi + (a\pi)\psi\cdot(\omega\psi_W) = a_1\pi\chi +$$
$$+ (a\pi\chi)\cdot(\omega\chi_W) = (a_1\varphi_A)\chi + (a\varphi_A)\chi\cdot\omega\chi_W = (a_1\varphi_A)\chi + (a\varphi_A \circ \omega)\chi =$$

$$= (a_1\varphi_A + a\varphi_A \circ \omega)\chi.$$

Значит, $\psi = \chi$. Получили, что $(\pi, \theta) \in Epi\, \mathfrak{M}$.

Пусть $\theta\mu = \rho\tau$ $(\rho: U \to R,\ \tau: R \to V)$ — два различных разложения морфизма $\varphi_U \in \mathrm{Mor}$ As. Тогда существует такой изоморфизм колец $\xi_W: W \to R$, что $\rho = \theta\xi_W$ (см. [2], определение 1.8.1) и, значит, существует такой изоморфизм

$$(\xi, \xi_W): (\mathrm{Im}\, \varphi_A + \mathrm{Im}\, \varphi_A \circ W, W) \to (\mathrm{Im}\, \varphi_A + \mathrm{Im}\, \varphi_A \circ R, R),$$

что $(\pi, \rho) = (\pi, \theta)(\xi, \xi_W)$.

Ясно, что $\mathrm{Iso}\, \mathfrak{M} \subseteq E_{\mathfrak{M}} \cap M_{\mathfrak{M}}$. Получили, что $(\mathfrak{M}, E_{\mathfrak{M}}, M_{\mathfrak{M}})$ является бикатегорной структурой в $\mathfrak{M}$.

Пусть даны две различные бикатегорные структуры $(\mathbf{As}, E^{(1)}_{\mathbf{As}}, M^{(1)}_{\mathbf{As}})$ и $(\mathbf{As}, E^{(2)}_{\mathbf{As}}, M^{(2)}_{\mathbf{As}})$ категории **As**. Пусть, например, $E^{(1)}_{\mathbf{As}} \neq E^{(2)}_{\mathbf{As}}$. Не нарушая общности можно считать, что $E^{(1)}_{\mathbf{As}} \subseteq E^{(2)}_{\mathbf{As}}$. Это означает, что существует такой эпиморфизм $\theta \in E^{(1)}_{\mathbf{As}}$, что $\theta \,\bar{\in}\, E^{(2)}_{\mathbf{As}}$. Из построения бикатегорной структуры $(\mathfrak{M}, E_{\mathfrak{M}}, M_{\mathfrak{M}})$ по бикатегорной структуре $(\mathbf{As}, E_{\mathbf{As}}, M_{\mathbf{As}})$ следует, что эпиморфизм $(0, \theta) \in E^{(1)}_{\mathfrak{M}}$, но $(0, \theta) \,\bar{\in}\, E^{(2)}_{\mathfrak{M}}$. Аналогичным образом доказывается, что если $M^{(1)}_{\mathbf{As}} \neq M^{(2)}_{\mathbf{As}}$, то соответствующие классы морфизмов $M^{(1)}_{\mathfrak{M}} \neq M^{(2)}_{\mathfrak{M}}$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Так как категория $\mathfrak{M}$ является локально малой бикатегорией с нулевым объектом и с прямыми и свободными произведениями, то категория $\mathfrak{M}$ является биполной категорией с нулевым объектом.

§ 3. Строгие радикалы и кручения

В работе [12] установлено, что в произвольной категории **K** можно построить общую теорию радикалов в смысле А. Г. Куроша [11], если эта категория удовлетворяет условиям I—V работы [12]. Эти условия выполнены в категории $\mathfrak{M}$ (см. [1], § 1). При построении радикала в смысле А. Г. Куроша в категории **K** выделяется класс объектов, обладающих некоторым свойством R; такие объекты называются R-объектами. Мы скажем, что свойство R радикально или определяет в категории **K** R-радикал, если выполняются следующие условия:

(A) Если θ: $B \to A$—нормальный эпиморфизм и A—R-объект, то и B—R-объект.

(B) Для каждого объекта $A \in \mathbf{K}$ существует R-идеал $(R(A), \mu_A]$, содержащий все R-идеалы объекта A (идеал $(R(A), \mu_A]$ называется R-радикалом).

(C) Если $[\nu_A, S(A))$-нормальный фактор-объект объекта A по его R-радикалу $(R(A), \mu_A]$, то объект $S(A)$ является R-полупростым, то есть он обладает лишь одним нулевым R-идеалом.

Из результатов работы [12] следует, что в категории $\mathfrak{M}$ свойство R радикально тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям (A) и

(D) Объект A является R-объектом, если для любого ненулевого нормального эпиморфизма θ: $A \to B$, B обладает ненулевым R-идеалом.

Мы будем говорить, что свойство R определяет в категории **K** строгий R-радикал, или что R является строго радикальным свойством, если оно радикально и удовлетворяет условию

(E) R-радикал $(R(A), \mu_A]$ любого объекта $A \in \mathbf{K}$ содержит все R-подъобекты объекта A.

Ясно, что в любой абелевой категории каждый R-радикал является строгим R-радикалом.

Пусть в категории $\mathfrak{M}$ задан некоторый строгий радикал R. Рассмотрим полную подкатегорию ${}_0\mathfrak{M}$ категории $\mathfrak{M}$, объектами которой являются все модули вида (O, U). Любые идеалы и любые гомоморфные образы объектов из ${}_0\mathfrak{M}$ сами лежат в подкатегории ${}_0\mathfrak{M}$, следовательно, (см. [11], § 6), радикал R индуцирует вполне определенный радикал $R_{{}_0\mathfrak{M}}$ в подкатегории ${}_0\mathfrak{M}$, а это означает, что радикал R определяет вполне определенный радикал $R_{\mathbf{As}}$ в категории **As**. Все сказанное выше остается верным и для подкатегории $\mathfrak{M}_0$ категории $\mathfrak{M}$, объектами которой являются все модули вида (A, O), поэтому радикал R определяет вполне определенный радикал R_0 в категории **Ab**. Получили, что

$$R(A, O) = (R_0(A), O) \text{ и } R(O, U) = (O, R_{\mathbf{As}}(U)). \tag{1}$$

Из строгости радикала R категории $\mathfrak{M}$ следует строгость радикала $R_{\mathbf{As}}$ категории **As**.

Пусть (A', U')—R-радикал модуля (A, U). Обозначим $U' = R(U)$, $A' = R_{R(U)}(A)$.

Лемма 3.1. *$R(U) = R_{\mathbf{As}}(U)$ и $R_0(A) \subseteq R_{R(U)}(A)$.*

Доказательство. Рассмотрим нормальный эпиморфизм $(0, 1)$: $(R_{R(U)}(A), R(U)) \to (O, R(U))$. Модуль $(R_{R(U)}(A), R(U))$ R-радикален, следовательно R-радикален модуль $(O, R(U))$. Значит, идеал

$R(U)$ кольца U R_{As}-радикален, поэтому $R(U) \subseteq R_{As}(U)$. Обратное включение следует из того, что модуль $(O, R_{As}(U))$ является R-подмодулем модуля (A, U), поэтому этот модуль лежит в радикале $R(A, U) = (R_{R(U)}(A), R(U))$. Вторая часть леммы доказывается аналогичным образом. Отметим, что отображение $(1, 0):(R_{R(U)}(A), R(U)) \to (R_{R(U)}(A), O)$ не является полулинейным отображением, если действие кольца $R(U)$ на абелеву группу $R_{R(U)}(A)$ не является нулевым. Лемма 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Там, где будет ясно, что U — кольцо, мы всегда вместо $R_{As}(U)$ будем писать $R(U)$.

Замечание 3.2. Рассмотрим полную подкатегорию $\mathfrak{M}^0$ модулей с нулевым действием кольца. Такие модули будем обозначать $(A, U)_0$. Так как в случае модулей с нулевым действием кольца отображение $(1, 0)$: $R((A, U)_0) = (R_{R(U)}(A), R(U))_0 \to (R_{R(U)}(A), 0)$ является нормальным эпиморфизмом в категории $\mathfrak{M}$, то $R_{R(U)}(A) \subseteq R_0(A)$. Следовательно, в случае модулей с нулевым действием кольца, $R((A, U)_0) = (R_0(A), R(U))_0$.

Лемма 3.2. *Для любого модуля* (A, U),

$$R(A, U) = (R_{R(U)}(A), R(U)) = R(A, R(U)) = R(R_{R(U)}(A), U) = R(R_{R(U)}(A), R(U)). \tag{2}$$

Доказательство. Радикал R — строгий, следовательно из включения $R(A, R(U)) \subseteq (A, R(U)) \subseteq (A, U)$ следует, что $R(A, R(U)) \subseteq R(A, U)$. С другой стороны, $R(A, U) = (R_{R(U)}(A), R(U))$ является R-подмодулем модуля $(A, R(U))$, следовательно, $R(A, U) \subseteq R(A, R(U))$. Значит, $R(A, U) = R(A, R(U))$. Аналогичным образом доказывается, что $R(A, U) = R(R_{R(U)}(A), U)$. Лемма 3.2 доказана.

Покажем теперь, что для любого ассоциативного кольца U, строгий радикал R категории $\mathfrak{M}$ индуцирует вполне определенный радикал $R_{R(U)}$ в категории $R(U)$-модулей $\mathfrak{M}_{R(U)}$. Именно, скажем, что правый $R(U)$-модуль A $R_{R(U)}$-радикален, если $(A, R(U))$ — R-радикальный объект категории $\mathfrak{M}$. Проверим, что свойство $R_{R(U)}$ действительно радикальное.

(A) Пусть θ: $A \to B$ является нормальным эпиморфизмом в категории $\mathfrak{M}_{R(U)}$ и $R(U)$-модуль A $R_{R(U)}$-радикален. Так как отображение $(\theta, 1)$: $(A, R(U)) \to (B, R(U))$ — нормальный эпиморфизм в категории $\mathfrak{M}$, то модуль $(B, R(U))$ R-радикален. Значит, $R_{R(U)}(B) = B$.

(Д) Пусть для любого ненулевого нормального эпиморфизма $R(U)$-модулей θ: $A \to D$, $R(U)$-модуль D обладает ненулевым $R_{R(U)}$-идеалом, в данном случае подмодулем. Покажем, что $R_{R(U)}(A) = A$. Действительно, пусть (θ, π): $(A, R(U)) \to (B, V)$ — любой ненулевой нормальный эпиморфизм в категории $\mathfrak{M}$. Тогда имеем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
(A, R(U)) \arrow[rr, "(\theta, \pi)"] \arrow[dr, "(\theta, 1)"'] & & (B, V) \\
& (B_\pi, R(U)) \arrow[ur, "(1, \pi)"'] &
\end{tikzcd}$$

где B_π — превращение V-модуля B в $R(U)$-модуль отступлением вдоль π. Если θ — ненулевой гомоморфизм, то пара $(\theta, 1)$ является ненулевым нормальным эпиморфизмом категории $\mathfrak{M}_{R(U)}$, поэтому в $R(U)$-модуле B_π существует ненулевой $R_{R(U)}$-модуль C_π, $R(C_\pi, R(U)) = (C_\pi, R(U))$. Рассмотрим ограничение нормального эпиморфизма $(1, \pi)$ на R-подмодуле $(C_\pi, R(U))$. Гомоморфным образом этого R-модуля будет ненулевой R-подмодуль (C, V) модуля (B, V). Значит, $(O, O) \neq (C, V) \subseteq R(B, V)$. Если же $\theta = 0$, то $B = O$, так как θ — гомоморфизм „на", Очевидно, что в этом случае модуль $(B_\pi, R(U)) = (O, R(U))$ является R-радикальным модулем, следовательно его гомоморфный образ (O, V) также является ненулевым R-радикальным модулем. Получили, что для любого ненулевого нормального эпиморфизма $(\theta, \pi)\colon (A, R(U)) \to (B, V)$, модуль (B, V) обладает ненулевым R-идеалом. Значит, $R(A, R(U)) = (A, R(U))$, а это означает, что $R_{R(U)}(A) = A$.

Итак, каждый строгий радикал R категории $\mathfrak{M}$ индуцирует вполне определенные строгий радикал $R_{\mathbf{As}}$ в категории $\mathbf{As}$ и радикалы $R_{R(U)}$ в категориях $\mathfrak{M}_{R(U)}$, причем для любого модуля (A, U) $R(A, U) = (R_{R(U)}(A), R(U))$. Из леммы 3.2 следует, что если

$$R(U) = 0, \text{ то } R_{R(U)} = R_0,$$

где R_0 — это тот самый радикал категории $\mathbf{Ab}$, индуцированный радикалом R категории $\mathfrak{M}$, о котором говорилось до доказательства леммы 3.1. Покажем, что полученная система радикалов

$$\{R_{\mathbf{As}},\ R_{R(U)} \mid R(U) \in \mathbf{As}\}$$

обладает следующими свойствами:

(R1) Для любого $R(U)$-модуля A, $A \cdot R(U) \subseteq R_{R(U)}(A)$.

(R2) Для любого U-модуля A, $R_{R(U)}(A) \cdot U \subseteq R_{R(U)}(A)$.

(R3) Если $\varphi\colon R(U) \to R(V)$ — гомоморфизм колец, то для $R(V)$-модуля A, $R_{R(U)}(A_\varphi) \subseteq R_{R(V)}(A)$.

Действительно, первые два условия следуют из того факта, что R-радикал любого модуля (A, U) является идеалом этого модуля. Напомним, (см. [1], § 1), что подмодуль (A_1, U_1) модуля (A, U) тогда и только тогда будет идеалом модуля (A, U), когда U_1 — идеал кольца U и выполнены включения $A \cdot U_1 \subseteq A_1$ и $A_1 \cdot U \subseteq A_1$. Условие (R3) следует из существования следующей коммутативной диаграммы (см. [13], предположение 2).

$$\begin{tikzcd}
(A_\varphi, R(U)) \arrow[r, "(1_A, \varphi)"] & (A, R(V)) \\
(R_{R(U)}(A_\varphi), R(U)) \arrow[u, "(\sigma_U, 1)"] \arrow[r, "(i, \varphi)"] & (R_{R(V)}(A), R(V)) \arrow[u, "(\sigma_V, 1)"']
\end{tikzcd}$$

где $i = 1_A|R_{R(U)}(A_\varphi)$, а σ_U, σ_V — вложения радикалов.

Определение 3.1. Систему радикалов $\{R_{\mathbf{As}}, R_{R(U)}|R(U) \in \mathbf{As}\}$, где $R_{\mathbf{As}}$ — строгий радикал в категории **As**, назовем согласованной системой строгих радикалов, если она удовлетворяет условиям (R1)—(R3).

Теорема 3.1. *Пусть в категории $\mathfrak{M}$ задан строгий радикал R. Тогда в категории* **As** *он индуцирует строгий радикал $R_{\mathbf{As}}$, а на каждой категории $\mathfrak{M}_{R(U)}$, $R(U) \in$* **As**, *индуцирует такие радикалы $R_{R(U)}$, что система строгих радикалов $\{R_{\mathbf{As}}, R_{R(A)}|R(U) \in \mathbf{As}\}$ является согласованной. Обратно, каждая согласованная система строгих радикалов $\{R_{\mathbf{As}}, R_{R(U)}|R(U) \in \mathbf{As}\}$ задает вполне определенный строгий радикал R в категории $\mathfrak{M}$, радикальный класс которого составляют все такие модули (A, U), что кольцо U — $R_{\mathbf{As}}$-кольцо, то есть $U = R(U)$, а $R(U)$-модуль A — $R_{R(U)}$ — радикальный модуль. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми строгими радикалами категории $\mathfrak{M}$ и всеми согласованными системами строгих радикалов.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы мы уже доказали.

Пусть задана некоторая согласованная система строгих радикалов $\{R_{\mathbf{As}}, R_{R(U)}|R(U) \in \mathbf{As}\}$. Покажем, что класс R-модулей, о котором говорится в формулировке теоремы, является радикальным классом для некоторого строгого радикала R категории $\mathfrak{M}$.

(A) Пусть (π, θ): $(A, U) \to (B, V)$ — нормальный эпиморфизм и (A, U) — R-модуль, то есть $(A, U) = (R_{R(U)}(A), R(U))$. Покажем, что (B, V) — R-модуль. Действительно, θ: $U \to V$ — нормальный эпиморфизм в категории **As** и кольцо U — R_{As}-радикальное, следовательно, кольцо V является $R_{\mathbf{As}}$-кольцом, $R(V) = V$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(A, R(U)) \arrow[rr, "(\pi, \theta)"] \arrow[dr, "(\pi, 1)"'] & & (B, R(V)) \\
& (B_\theta, R(U)) \arrow[ur, "(1, \theta)"'] &
\end{tikzcd}$$

$R(U)$-модуль B_θ, как эпиморфный образ $R_{R(U)}$-радикального $R(U)$-модуля A, является $R_{R(U)}$-модулем, $R_{R(U)}(B_\theta) = B$. Следовательно, из условия (R3) получаем, что $B = R_{R(U)}(B_\theta) \subseteq R_{R(V)}(B) \subseteq B$, то есть $R_{R(V)}(B) = B$. Значит, модуль (B, V) является R-модулем.

(B) и (E). Покажем, что для любого модуля (A, U) идеал, в силу (R1) и (R2), $(R_{R(U)}(A), R(U))$ является строгим R-радикалом модуля (A, U), то есть надо показать, что этот идеал содержит все R-подмодули модуля (A, U). Пусть (B, V) — R-подмодуль модуля (A, U). Тогда кольцо V является $R_{\mathbf{As}}$-подкольцом кольца U, следовательно, $V = R(V) \subseteq R(U)$, так как $R_{\mathbf{As}}$ — строгий радикал в категории **As**. Получили, что модуль $(B, V) = (R_{R(V)}(B), R(V))$ является R-подмодулем модуля $(A, R(U))$. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
(B, R(V)) \arrow[rr, "(i, \sigma)"] \arrow[dr, "(i, 1)"'] & & (A, R(U)) \\
& (A_\sigma, R(V)) \arrow[ur, "(1, \sigma)"'] &
\end{tikzcd}$$

где (i, σ) — вложение подмодуля $(B, R(V))$ в модуль $(A, R(U))$. $R(V)$-модуль B является $R_{R(V)}$-радикальным подмодулем $R(V)$-модуля A_σ, следовательно, в силу свойства (R3), $B \subseteq R_{R(V)}(A_\sigma) \subseteq R_{R(U)}(A)$. Значит, модуль $(B, V) \subseteq (R_{R(U)}(A), R(U))$.

(C) Покажем, что $R((A, U)/R(A, U)) = (O, O)$. Действительно, из $R(U/R(U)) = O$ следует, что

$$R(A/R_{R(U)}(A), U/R(U)) = (R_0(A/R_{R(U)}(A)), O) = (O, O),$$

так как если применить условие (R3) к гомоморфизму $O \to R(U)$, то получим, что для любого $R(U)$-модуля A, $R_0(A) \subseteq R_{R(U)}(A)$. Поэтому абелева группа $A/R_{R(U)}(A) \subseteq A/R_0(A)$. Но абелева группа $A/R_0(A)$ — R_0-полупроста, следовательно, абелева группа $A/R_{R(U)}(A)$ также R_0-полупроста.

Третье утверждение теоремы следует из первых двух утверждений, так как сопоставления, которые там указываются, взаимно обратные. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.3. Если в согласованной системе строгих радикалов $\{R_{\mathbf{As}}, R_{R(U)} | R(U) \in \mathbf{As}\}$ — хотя бы для одного кольца $R(V)$ все $R(V)$-модули $R_{R(V)}$-радикальны, то для любого кольца $R(U) \in \mathbf{As}$ все $R(U)$-модули $R_{R(U)}$-радикальны.

Выше мы доказали, что для любого $R(U)$-модуля A, $R_0(A) \subseteq R_{R(U)}(A)$, поэтому достаточно доказать, что для любой абелевой группы A, $R_0(A) = A$. Рассмотрим нулевой гомоморфизм $0: R(V) \to O$. Из условия (R3) имеем, что для любой абелевой группы A, $A = R_{R(V)}(A_0) \subseteq R_0(A) \subseteq A$. Значит, $R_0(A) = A$.

Замечание 3.4. Если в согласованной системе строгих радикалов $\{R_{\mathbf{As}}, R_{R(U)} | R(U) \in \mathbf{As}\}$ хотя бы для одного кольца $R(V)$ все $R(V)$-модули являются $R_{R(V)}$-полупростыми модулями, то все абелевы группы A являются R_0-полупростыми абелевыми группами.

Действительно, любая абелева группа является $R(V)$-модулем если действие кольца $R(V)$ определить как нулевое, а для любого $R(V)$-модуля A имеем, что $R_0(A) \subseteq R_{R(V)}(A) = O$.

Замечание 3.5. Зафиксируем некоторый строгий радикал R_{As} в категории As и рассмотрим систему таких радикалов

$$\{R_{As},\ R_{R(U)} \mid R(U) \in \mathbf{As}\},$$

что для каждого $R(U)$-модуля A, $R_{R(U)}(A) = A$. Легко проверить, что эта система строгих радикалов является согласованной. Очевидно, что для различных строгих радикалов R_{As} категории As мы будем получать различные строгие радикалы категории $\mathfrak{M}$.

Определение 3.2. Строгий радикал R категории $\mathfrak{M}$ называется кручением (сильно наследственным строгим радикалом), если из $(A, U) \subseteq R(B, V)$, где (A, U) — подмодуль модуля (B, V), следует, что $R(A, U) = (A, U)$, (см. [15], стр. 290).

Описание кручений (сильно наследственных строгих радикалов) категории ассоциативных колец дано в работе [7].

Теорема 3.2. *Согласованная система строгих радикалов $\{R_{As},\ R_{R(U)} \mid R(U) \in \mathrm{As}\}$ тогда и только тогда является кручением в категории $\mathfrak{M}$, когда она удовлетворяет следующим условиям*

(R4) *Радикал R_{As} является кручением в категории* As.

(R5) *Если μ: $R(U) \subset R(V)$ — вложение колец и $R(U)$-модуль A лежит в $R(U)$-модуле $[R_{R(V)}(B)]_{\mu}$, для некоторого $R(V)$-модуля B, то $A = R_{R(U)}(A)$.*

Доказательство. Если радикал R является кручением в категории $\mathfrak{M}$, то из того, что U—подкольцо кольца V и $U \subseteq R(V)$ следует, что модуль (O, U) — подмодуль модуля (O, V) и $(O, U) \subseteq (O, R(V)) = R(O, V)$. Значит, $R(O, U) = (O, U)$, то есть $R(U) = U$. Условие (R4) выполнено. Если же модуль $(A, R(U)) \subseteq ([R_{R(V)}(B)]_{\mu}, R(U))$, где μ: $R(U) \subseteq R(V)$—вложение колец, то

$$(A, R(U)) \subseteq (R_{R(V)}(B),\ R(V)) = R(B, V)$$

и $(A, R(U))$—подмодуль модуля (B, V), поэтому $R(A, R(U)) = (A, R(U))$. то есть $R_{R(U)}(A) = A$. Условие (R5) также выполнено.

Обратно, пусть согласованная система строгих радикалов $\{R_{As}, R_{R(U)} \mid R(U) \in \mathrm{As}\}$ удовлетворяет условиям (R4) и (R5) и модуль $(A, U) \subseteq R(B, V) = (R_{R(V)}(B),\ R(V))$, где (A, U) — подмодуль модуля (B, V). Тогда U является подкольцом кольца V и $U \subseteq R(V)$, следовательно, $R(U) = U$, так как R_{As} — кручение в категории A_s. Из условия $(A, R(U)) \subseteq (R_{R(V)}(B), R(V))$, где $(A, R(U))$ — подмодуль модуля (B, V), следует, что $R(U)$-модуль B лежит в $R(U)$-модуле $[R_{R(V)}(B)]_{\mu}$, где μ — вложение подкольца $R(U)$ в кольцо $R(V)$. Значит, из (R5) следует, что $R_{R(U)}(A) = A$. Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.6. В частности, когда $R(U) = R(V)$, из условия (R5) следует, что для любого кольца $R(U)$ радикал $R_{R(U)}$ является кручением в категории $\mathfrak{M}_{R(U)}$.

Замечание 3.7. Легко проверить, что если в согласованной системе строгих радикалов, рассматриваемом в замечании 3.5, в качестве строгого радикала категории $\mathbf{As}$ мы будем брать некоторое кручение категории $\mathbf{As}$, то полученная система строгих радикалов будет определять кручение категории $\mathfrak{M}$.

З а м е ч а н и е 3.8. Если в согласованной системе строгих радикалов $\{R_{\mathbf{As}}, R_{R(U)} | R(U) \in \mathbf{As}\}$ радикал $R_{\mathbf{As}}$—тривиальный радикал (для любого ассоциативного кольца U, $R(U) = O$), то эта система превращается в пару радикалов $\{R_{\mathbf{As}}, R_0\}$, где R_0—радикал в категории $\mathbf{Ab}$. Зафиксируем некоторый радикал R в категории $\mathbf{Ab}$ и рассмотрим пару $\{O_{\mathbf{As}}, R\}$, где $O_{\mathbf{As}}$—тривиальный радикал категории $\mathbf{As}$. Эта пара определяет строгий радикал в категории $\mathfrak{M}$, так как условия (R1) и (R3) для нее выполняются автоматически, а выполнение условия (R2) следует из того факта, что для любой абелевой группы A и любого эндоморфизма f этой группы $f(R(A)) \subseteq R(A)$ (см. [13] и [14]). Очевидно, что если в качестве радикала R мы будем брать кручение категории абелевых групп, то пара $\{O_{\mathbf{As}}, R\}$ будет определять кручение в категории $\mathfrak{M}$.

С л е д с т в и е. Совокупность всех строгих радикалов категории $\mathfrak{M}$ не является множеством.

З а м е ч а н и е 3.9. Рассмотрим пару радикалов $\{O_{\mathbf{As}}, 1\}$, где $O_{\mathbf{As}}$ — тривиальный радикал категории $\mathbf{As}$ и $1(A) = A$ для любой абелевой группы A. Эта пара задает кручение R в категории $\mathfrak{M}$. Легко проверить, что это кручение удовлетворяет следствию 4.20 работы [15], поэтому полная подкатегория $\mathfrak{M}_0$ категории $\mathfrak{M}$, порожденная всеми R-радикальными объектами, является подкатегорией локализации. Значит, в неабелевой категории $\mathfrak{M}$ существует нетривиальная подкатегория локализации.

Автор благодарен М. Ш. Цаленко, под руководством которого была написана эта статья.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.I.1978

Գ. Գ. ԷՄԻՆ. Մինչբազմաձևություններ, բազմաձևությունների խմբոիդը և խիստ ռադիկալները բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում (*ամփոփում*)

Տրված է բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի մինչբազմաձևությունների, բազմաձևությունների, հագեցված բազմաձևությունների, խիստ ռադիկալների նկարագրությունը: Ուսումնասիրված է այդ կատեգորիայի բազմաձևությունների խմբոիդը կառուցվածքը:

G. G. EMIN. *Prevarieties the grouppoid of varieties and strict radicals in the category of modules over all rings* (summary)

The $\mathfrak{M}$ category is considered, its objects are all possible pairs (A, U) (A is the right U — module over associative ring U) and the morphisms are the pairs of homomorphisms (φ_A, φ_U) under the condition $(a \cdot u)\varphi_A = a\varphi_A \cdot u\varphi_U$.

The description of the prevarieties, varieties and Kurosh's strict radicals of the mentioned category is given. The grouppoid of the varieties of the category $\mathfrak{M}$ is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Г. Эмин.* Многообразия и бимногообразия в категории модулей над всеми кольцами. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 3, 1974, 212—235.
2. *М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер.* Основы теории категорий, М., Изд. «Наука», 1974.
3. *Б. И. Плоткин.* Радикалы и многообразия в представлениях групп, Латв. матем. ежегодник, 10, 1972, 75—132.
4. *L. Fuchs.* The existence of indecomposable abelian groups of arbitrary power Acta math. Acad. scient. hung., 10, № 3–4, 1959, 453—457.
5. *S. MacLane.* Categories for the working mathematician, New York, Heidelberg, Berlin, Springer—Verlag, 1971.
6. *С. В. Полин.* Построение бикатегорных структур, Математические заметки, 16, № 3, 1974, 455—460.
7. *Stewart Patrick N.* Strict radical classes of associative rings, Proc. Amer. Math. Soc., 39, № 2, 1973, 273—278.
8. *Б. М. Рулык.* Расширение модулей, Труды ММО, 21, 1970, 209—244.
9. *М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер.* Лекции по теории категорий, М., Изд. МГУ, 1970.
10. *Е. Л. Горбачук.* Радикалы над разными кольцами, Математические исследования, VII, вып. 1 (23), 1972, 44—59.
11. *А. Г. Курош.* Радикалы колец и алгебр, Матем. сб., 33, № 1, 1953, 13—26.
12. *Е. Г. Шульгейфер.* К общей теории радикалов в категориях, Матем. сб., 51, № 4, 1960, 487—500.
13. *Е. Г. Шульгейфер.* Функторная характеризация строгих радикалов в категориях, Сиб. мат. ж., VII, № 6, 1966, 1412—1421.
14. *А. П. Мишина, Л. А. Скорняков.* Абелевы группы и модули, М., Изд. «Наука», 1969.
15. *Е. Г. Шульгейфер.* Локализации и сильно наследственные строгие радикалы в категориях, Труды ММО, 19, 1968, 271—301.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Յու. Շահվերդյան. *Սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների դասի մասին* . . . 157
Ս. Ա. Գրիգորյան. *Կոմպակտ խմբի վրա սահմանված վերջավոր տիպ ունեցող հանրահաշիվների մասին* . . . 168
Ս. Վ. Խրուշչյով. *Բրենանի ալտերնատիվը վերջավոր էնտրոպիայով չափերի համար* . . . 184
Հ. Մալոնեկ. *Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի տիպի թեորեմների ճշտության կոմպլեքս դիֆերենցիալ անհավասարությունների լուծումների համար* . . . 192
Վ. Ա. Յավրյան. *Որոշ ինտեգրալ օպերատորների սեփական արժեքների ասիմպտոտիկայի և հետքի մասին* . . . 201
Գ. Գ. Էմին. *Մինչբազմաձևությունները, բազմաձևությունների խմբոիդը և խիստ ռադիկալները բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում* . . . 211

СОДЕРЖАНИЕ

А. Ю. Шахвердян. К граничному поведению ограниченных аналитических функций . . . 157
С. А. Григорян. Об алгебрах конечного типа на компактной группе . . . 168
С. В. Хрущев. Альтернатива Бреннана для мер с конечной энтропией . . . 184
Х. Малонек. К вопросу о справедливости теорем типа Фрагмена-Линделефа для решений некоторых комплексных дифференциальных неравенств . . . 192
В. А. Явран. Об асимптотике собственных значений и следе некоторых интегральных операторов . . . 201
Г. Г. Эмин. Предмногообразия, группоид многообразий и строгие радикалы в категории модулей над всеми кольцами . . . 211

CONTENTS

A. Yu. Shahverdian. On the boundary behaviory of bounded analytical functions 157
S. A. Grigorian. On algebras of finite type on compact group . . . 168
S. V. Kchrushev. The Brennan alternative for measures with finite entropy . . . 184
H. Malonek. On the question of validity of theorems of Phragmen-Lindelof type for solutions of complex differential inequalities . . . 192
V. A. Javrian. On the asymptotics of eigenvalues and the spur of some integral operators . . . 201
G. G. Emin. Prevarieties the grouppoid of varieties and strict radicals in the category of modules over all rings . . . 211