

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0000-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԴՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Դիխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՊԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱԼՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԴՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տալայ, ական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրատարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ, հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համասնուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղափոխվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրությունը իրավունք է վերապահում լզրաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, ուրտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

Издается преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. ИЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегия.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

K. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKII

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika“ are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika“
Academy of Sciences of Armenian, SSR
24, Berekamutian St.,
Yerevan, Armenian, SSR, USSR

Р. Э. МКРТЧЯН

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПРИЗНАКЕ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕМ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

1. Введение. Пусть A — самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Пусть далее E_λ — соответствующее спектральное семейство проекционных операторов, а $\rho(\lambda) = \|E_\lambda g\|^2$, где g — так называемый порождающий элемент.

Обозначим через V оператор, существующий в силу основной спектральной теоремы и осуществляющий изометрическое отображение пространства H в пространство L^2 так, что оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную.

В работах [1, 2] показано, что полную систему собственных функционалов $T_\lambda(\varphi)$ оператора A можно строить по формуле

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\lambda \rightarrow +0} T_{\lambda+\varepsilon}(\varphi), \quad T_\lambda(\varphi) = \frac{(R_\lambda \varphi, R_\lambda g)}{\|R_\lambda g\|^2}, \quad (1)$$

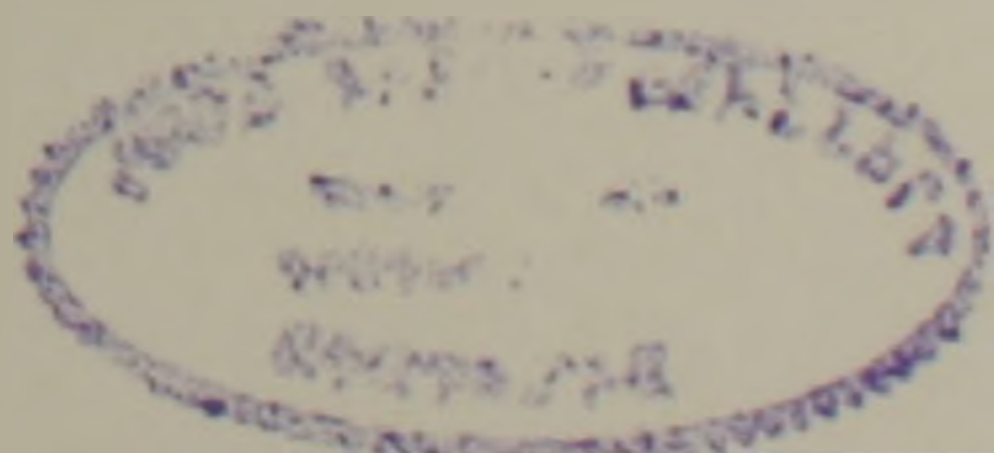
где R_λ — резольвента оператора A .

Затем в работе [2] исследован характер непрерывности построенных по формуле (1) функционалов $T_\lambda(\varphi)$ в терминах, аналогичных тем, которые использованы в работах Ю. М. Березанского [3, 4], Г. И. Каца [5, 6] и К. Морена [7, 8] при доказательстве возможности спектральных разложений по обобщенным собственным элементам.

В работе [2] доказано, что линейные многообразия тех элементов φ , для которых указанные по формуле (1) функционалы существуют и непрерывны в некоторой топологии, описываемой в терминах оператора G из класса R_H (где через R_H обозначена (см. [9]) совокупность неограниченных операторов G с плотными областями определения $D(G)$ и таких, что $G^{-1} \in S_2$ (определение класса S_p см., например, в [10])).

В этой работе доказывается, что для отдельно взятого самосопряженного оператора A существует полная система собственных функционалов $\{T_\lambda\}$, непрерывных в более слабой топологии, чем та, которая задается нормой $\|\varphi\|_* = \|G\varphi\|_H$. А именно, для каждого A и любого $p > 2$ существует оснащение $H_+ \subset H \subset H_-$ (где оператор вложения H_+ в H из S_p) и полная система собственных функционалов $\{T_\lambda\}$, определенных и непрерывных в H_+ .

Основной результат работы заключается в том, что в терминах оператора A описываются всевозможные оснащения гильбертова пространства H , удовлетворяющие указанным выше условиям.



2'. Пусть K — совокупность всех неограниченных операторов K , для которых $D(K) = H \Delta (K) = H$, а K^{-1} — вполне непрерывный. Пусть далее E_K — банахово пространство, получаемое пополнением $D(K)$ по норме

$$\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|_H. \quad (2)$$

Известно, что имеет место вложение $E_K \subset H \subset E_K^*$ и что H всюду плотно в E_K^* (сходимость в метрике пространства E_K сильнее, чем сходимость в H).

Пусть $K^{-1} = US$ — полярное представление оператора K^{-1} , тогда известно [10], что

$$K^{-1} \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i a_i \varphi_i, \quad a_i = (\varphi, \omega_i), \quad (3)$$

где ω_i — ортонормированная и полная в $D(K)$ система собственных элементов оператора S , соответствующих собственным значениям μ_i , а $\varphi_i = U \omega_i$.

Предположим, что самосопряженный оператор A имеет простой и непрерывный спектр.

Обозначим через $\sigma(A)$ множество операторов K из класса K , удовлетворяющих следующим условиям.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f(t) \in L_2^+$ так, что

$$a) \quad \mu(t; f(t) = 0) < \varepsilon,$$

$$б) \quad f(A) \cdot K^{-1} \in S_{\varepsilon}.$$

Из этого определения легко видеть, что $R_H \subset \sigma(A)$. В самом деле, пусть $K \in R_H$, а ограниченная функция $f(t)$ отлична от нуля на интервале (a, b) и равна нулю на $R^1 \setminus (a, b)$. Тогда условия а) и б) выполняются как только $\mu(a, b) > 1 - \varepsilon$. В дальнейшем будет доказано, что класс $\sigma(A)$ существенно шире, чем класс R_H .

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 1. Для того чтобы существовала полная система обобщенных собственных функционалов $\{T_i\}$ самосопряженного оператора A , непрерывных по норме $\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|_H$, необходимо и достаточно, чтобы оператор K принадлежал классу $\sigma(A)$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Пусть спектр оператора A простой и непрерывный, и пусть g — его порождающий элемент. Тогда для каждого $\varphi \in H$ и любого λ из некоторого множества $\Lambda_{\varphi} = S_{\lambda}(A) \cap \bar{\Lambda}_{\varphi}$ полной μ -меры имеет место равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi, R_{\lambda+i\tau}g)}{\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2} = \varphi(\lambda), \quad (4)$$

где $\tilde{\Lambda}_\varphi$ — совокупность точек Лебега функции $\varphi(t) = V\varphi$, в которых значения Лебега $\varphi(t)$ конечны, а $S_1(A)$ — так называемый существенный спектр [11].

Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 1 работы [2].

Лемма 2. Пусть A — оператор с простым спектром, а g — его порождающий элемент, и пусть оператор $K \in \mathfrak{J}(A)$. Тогда существует зависящее от K множество Λ_K полной ρ -меры и некоторое счетное всюду плотное в метрике H линейное многообразие $\Omega \subset D(K)$ такие, что для всех $\varphi \in \Omega$ и $\lambda \in \Lambda_K$ существует предел

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{(R_{\lambda+r}\varphi, R_{\lambda+r}g)}{\|R_{\lambda+r}g\|^2}, \quad (5)$$

и имеет место неравенство

$$|T_\lambda(\varphi)| \leq C_\lambda \|\varphi\|_0, \quad (6)$$

где C_λ — не зависящая от φ постоянная.

◀ Так как по условию леммы для любого $\varepsilon > 0$ существует $f(t) \in L^2_\rho$ такое, что $\rho\{t; f(t) = 0\} < \varepsilon$ и $f(A) \cdot K^{-1} \in S_2$, то оператор $(f(A) K^{-1})^* \cdot (f(A) \cdot K^{-1})$ имеет конечный след ([10], стр. 138), причем

$$\text{Sp}[(f(A) K^{-1})^* (f(A) K^{-1})] = \sum_{(j)} \|f(A) K^{-1} \psi_j\|^2 < +\infty, \quad (7)$$

где $\{\psi_j\}$ — произвольная ортонормированная полная система в H , причем величина следа в (7) не зависит от выбора системы $\{\psi_j\}$. Если в правой части равенства (7) вместо системы $\{\psi_j\}$ возьмем полную ортонормированную систему $\{\omega_j\}$, фигурирующую в представлении (3) оператора K^{-1} , то правая часть (7) примет более простой вид, а именно

$$\sum_{(j)} \|f(A) K^{-1} \omega_j\|^2 = \sum_{(j)} \|f(A) \varphi_j\|^2 \cdot \mu_j^2. \quad (8)$$

Так как оператор $V: H \rightarrow L^2_\rho$ изометричен, правую часть (8) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{(j)} \mu_j^2 \|f(A) \varphi_j\|^2 = \sum_{(j)} \mu_j^2 \int_{K^1} |f(t) \varphi_j(t)|^2 d\rho(t), \text{ где } \varphi_j(t) = V\varphi_j. \quad (9)$$

В силу теоремы об интегрировании рядов с неотрицательными членами [12] из (7), (8) и (9) следует

$$\text{Sp}[(f(A) K^{-1})^* (f(A) K^{-1})] = \int_{K^1} |f(t)|^2 \sum_{(j)} \mu_j^2 |\varphi_j(t)|^2 d\rho(t). \quad (10)$$

В силу того, что оператор $K \in \mathfrak{J}(A)$, то существует убывающая последовательность чисел $\varepsilon_i > 0$ $i = 1, 2, \dots$, стремящихся к нулю, и функций $f_i(t) \in L^2_\rho$, удовлетворяющих условиям а) и б) при $\varepsilon = \varepsilon_i$. В

силу неравенства а) для любого $i = 1, 2, \dots$, существует натуральное число $N(i)$ такое, что ρ -мера множества $F_i = \left\{ t; |f_i(t)| < \frac{1}{N(i)} \right\}$ меньше $2\varepsilon_i$.

Введем функции $\Phi_i^2(t)$, $i = 1, 2, \dots$ следующим образом:

$$\Phi_i^2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2 |\varphi_{j,i}(t)|^2, \text{ если } t \in E_i = R^1 \setminus F_i,$$

$$\Phi_i^2(t) = 0, \text{ если } t \in F_i.$$

Подставляя в (10) $f_i(t)$ вместо $f(t)$ заключаем, что функции $\Phi_i^2(t)$ принадлежат пространству L^1_ρ при всех $i = 1, 2, \dots$. Так как $\int_{R^1} d\rho(t) = 1$, то функция $\Phi_i(t) = \sqrt{\Phi_i^2(t)}$ также принадлежит пространству L^1_ρ .

По определению множеств E_i имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(E_i) = 1. \quad (11)$$

Обозначим через E_i^* множество точек плотности множества E_i относительно меры ρ , т. е. точек i , в которых предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho((\lambda - \delta, \lambda + \delta) \cap E_i)}{\rho(\lambda - \delta, \lambda + \delta)} = 1.$$

Используя теоремы Витали-Лебега (см. [13], стр. 200), можно доказать, что $\rho(E_i) = \rho(Q_i)$, где $Q_i = E_i \cap E_i^*$. Тогда в силу (11) можно написать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(Q_n) = 1. \quad (12)$$

Рассмотрим некоторое счетное всюду плотное в метрике H линейное многообразие $\Omega \subset D(K)$. Тогда в силу леммы 1, для произвольного элемента $\varphi \in \Omega$ существует множество Λ_φ такое, что для любого $\lambda \in \Lambda_\varphi$ имеет место равенство (4).

Составим множество $\Lambda_\omega = \bigcap_{\varphi \in \Omega} \Lambda_\varphi$, имеющее по лемме 1 полную ρ -меру.

Обозначим $\tilde{E}_i = Q_i \cap M_i \cap \Lambda_\omega$, где M_i — совокупность точек Лебега функции $\Phi_i(t)$ (относительно меры ρ), в которых значения Лебега конечны. По теореме Лебега (см. [13], стр. 212) множества M_i , $i = 1, 2, \dots$ имеют полную ρ -меру, следовательно $\rho(\tilde{E}_i) = \rho(Q_i)$. Отсюда и из (12) получаем, что множество $\Lambda_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{E}_i$ имеет полную ρ -меру, т. е. $\rho(\Lambda_k) = 1$.

Таким образом, для любой точки $\lambda \in \Lambda_K$ и для любого элемента $\varphi \in \Omega$ существует предел (5), и первая часть леммы 2 доказана.

Теперь докажем неравенство (6).

Возьмем произвольную точку $\lambda_0 \in \Lambda_K$, тогда существует такой номер p_0 , что $\lambda_0 \in \bar{E}_{p_0} = Q_{p_0} \cap M_{p_0} \cap \Lambda_\Omega$.

Пусть φ — произвольный элемент из многообразия Ω . Возьмем элемент $\hat{\varphi} = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_*}$. Так как $\|\hat{\varphi}\|_* = 1$, то из (2), (3) следует $\hat{\varphi} = K^{-1} \psi$, причем $\|\psi\| = 1$, поэтому

$$|T_{\lambda_0 + i\tau}(\hat{\varphi})| = |T_{\lambda_0 + i\tau}(K^{-1}\psi)|,$$

откуда будем иметь

$$|T_{\lambda_0 + i\tau}(\hat{\varphi})| = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho(t) \right|}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2}}. \quad (13)$$

Ясно, что $\|\hat{\varphi}\| \leq \|K^{-1}\|$, поэтому для каждого $\Delta_0 = K^1 \setminus (\lambda_0 - \delta_0; \lambda_0 + \delta_0)$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta_0} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho(t) \right| &\leq \frac{1}{\delta_0} \left| \int_{\Delta_0} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \varphi_k(t) d\rho(t) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta_0} \int_{\Delta_0} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \varphi_k(t) \right|^2 d\rho(t) \cdot \int_{\Delta_0} d\rho(t) \leq \frac{1}{\delta_0} \|K^{-1}\|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку точка λ_0 принадлежит $S_l(A)$, то в силу определения $S_l(A)$ [11], знаменатель правой части равенства (13) стремится к бесконечности при $\tau \rightarrow +0$, поэтому используя неравенство (14) можем сказать, что при достаточно малом $\tau > 0$ равенство (13) превращается в неравенство

$$|T_{\lambda_0 + i\tau}(\hat{\varphi})| \leq \frac{\left| \int_{\lambda_0 - \delta}^{\lambda_0 + \delta} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho(t) \right|}{\int_{\lambda_0 - \delta}^{\lambda_0 + \delta} \frac{d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2}} + \epsilon \text{ при } 0 < \tau < \tau_0, \quad (15)$$

где ϵ стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$.

В силу определения функции $\Phi_i(t)$ можно, используя неравенство Коши—Буняковского, для числителя правой части неравенства (15) получить оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} \frac{\sum_{(k)} \mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho(t) \right| &\leq \left| \int_{E_{p_0} \cap (\lambda_0-\delta_0; \lambda_0+\delta_0)} \frac{\sum_{(k)} \mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho(t) \right| + \\ &+ \left| \int_{(\lambda_0-\delta_0; \lambda_0+\delta_0) \setminus E_{p_0}} \frac{\sum_{(k)} \mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho(t) \right| \leq \int_{\lambda_0-\delta_0}^{\lambda_0+\delta_0} \frac{\Phi_{p_0}(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho(t) + \\ &+ \left| \int_{(\lambda_0-\delta_0; \lambda_0+\delta_0) \setminus E_{p_0}} \frac{\sum_{(k)} \mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho(t) \right|. \end{aligned} \quad (16)$$

Определим в интервале $(\lambda_0 - \delta_0; \lambda_0 + \delta_0)$ функцию $\tilde{\varphi}(t) = \chi(t) \varphi(t) \equiv \chi(t) \cdot \sum_{(k)} \mu_k a_k \varphi_k(t)$, где $\chi(t)$ — характеристическая функция множества $(\lambda_0 - \delta_0; \lambda_0 + \delta_0) \setminus E_{p_0}$. Докажем, что точка λ_0 является точкой Лебега для функции $\tilde{\varphi}(t)$ и значения Лебега в этой точке равны нулю. В самом деле, составим отношение

$$\frac{1}{\rho(\lambda_0 - h; \lambda_0 + h)} \cdot \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} \tilde{\varphi}(t) d\rho(t).$$

При достаточно малом $h < \delta_0$, в силу неравенства Буняковского — Шварца и определения функции $\tilde{\varphi}(t)$, получим следующую оценку:

$$\left| \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} \tilde{\varphi}(t) d\rho(t) \right| \leq \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L_p}^2 \rho((\lambda_0 - h; \lambda_0 + h) \setminus E_{p_0}). \quad (17)$$

Так как точка λ_0 является точкой плотности множества E_{p_0} , из неравенства (17) получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left| \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} \tilde{\varphi}(t) d\rho(t) \right|}{\rho(\lambda_0 - h; \lambda_0 + h)} \leq \|\tilde{\varphi}(t)\|^2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho((\lambda_0 - h; \lambda_0 + h) \setminus E_{p_0})}{\rho(\lambda_0 - h; \lambda_0 + h)} = 0.$$

Имея в виду (16), неравенство (15) можем переписать в виде

$$|T_{\lambda_0+\tau}(\tilde{\varphi})| \leq \frac{\int_{\lambda_0-\delta_0}^{\lambda_0+\delta_0} \frac{\Phi_{p_0}(t) d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2}}{\int_{\lambda_0-\delta_0}^{\lambda_0+\delta_0} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2}} + \frac{\left| \int_{\lambda_0-\delta_0}^{\lambda_0+\delta_0} \frac{\tilde{\varphi}(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2} d\rho(t) \right|}{\int_{\lambda_0-\delta_0}^{\lambda_0+\delta_0} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2}} + \varepsilon \tau < \tau_0. \quad (18)$$

Так как по построению множества Λ_k точка λ_0 принадлежит множеству $S_l(A)$ и так как эта точка является точкой Лебега для функции $\Phi_{p_n}(t)$ с конечным лебеговым значением $\Phi_{p_n}(\lambda_0) < +\infty$, то по лемме 1 первое слагаемое правой части неравенства (18) стремится к величине $\Phi_{p_n}(\lambda_0)$ при $\tau \rightarrow +0$. По той же причине и второе слагаемое правой части неравенства (18) стремится к величине $\varphi(\lambda_0) = 0$ при $\tau \rightarrow +0$. Таким образом, в силу произвольности ϵ , мы доказали, что

$$|T_{\lambda_0}(\varphi)| = \lim_{\tau \rightarrow +0} |T_{\lambda_0 + \tau}(\varphi)| \leq C_{\lambda_0} = \Phi_{p_n}(\lambda_0). \blacktriangleright$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство достаточности условия теоремы 1. Для каждого $\lambda \in \Lambda_K$ $T_\lambda(\varphi)$ является (в силу леммы 2) ограниченным по норме $\|\cdot\|_*$ функционалом, определенным на многообразии $\Omega \subset D(K)$. Следовательно, функционал $T_\lambda(\varphi)$ однозначно продолжим по непрерывности на замыкание Ω в пространстве E_K , совпадающем со всем пространством E_K . Полученные после такого продолжения функционалы, которые очевидно также будут принадлежать E_K^* , мы будем продолжать обозначать через $T_\lambda(\varphi)$.

Доказательство формулы

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda(f) \cdot \overline{T_\lambda(\varphi)} d\varphi(\lambda), \quad \varphi \in E_K$$

и утверждения, что построенная совокупность функционалов $\{T_\lambda \in E_K^*, \lambda \in \Lambda_K\}$ образует полную систему, можно провести так же как в работе [2]. $\blacktriangleright$

Доказательство необходимости условия теоремы 1. Пусть существует полная система обобщенных функционалов $\{T_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ самосопряженного оператора A , которые непрерывны по норме $\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|_H$, где $\rho(\Lambda) = 1$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\cdot, w_i) \varphi_i = K^{-1}(\cdot) \in S_{p'}, \quad p > 2.$$

Обозначим множество $\tilde{\Lambda}_K = \bigcap_{(i)} \Lambda_i$, где Λ_i — совокупность точек Лебега функции $\varphi_i(t) = V \varphi_i$ (относительно меры ρ), в которых значения Лебега конечны и равны $\varphi_i(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_i$. Так как каждое множество Λ_i ($i = 1, 2, \dots$) имеет полную ρ -меру, то множество $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cap \tilde{\Lambda}_K \cap S_l(A)$ также имеет полную ρ -меру.

Докажем, что при сделанных предположениях функция $\Phi(t) = (\sum_{(i)} \mu_i^2 |\varphi_i(t)|^2)^{1/2}$ почти всюду конечна по мере ρ . Предположим противное. Тогда существует множество F , для которого имеет место

$$\Phi^2(t) = \sum_{(i)} \mu_i^2 |\varphi_i(t)|^2 = +\infty, \text{ если } t \in F \subset \tilde{\Lambda}, \rho(F) > 0. \quad (19)$$

Таким образом, мы будем считать, что ряд (19) составлен из значений Лебега функций $\mu_i^2 |\varphi_i(t)|^2$ в точках λ из множества F .

По условию существует счетное всюду плотное по метрике H многообразие Ω в $D(K)$ такое, что функционалы $\{T_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ на элементах $\varphi \in \Omega$ определяются по формуле

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi, R_{\lambda+i\tau}g)}{\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2} = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{(i)} \mu_i a_i \varphi_i(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\rho(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}, \varphi \in \Omega. \quad (20)$$

Докажем, что при сделанном предположении (19) каждый функционал T_λ не ограничен по норме $\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|$, если $\lambda \in F$. Пусть $\lambda_0 \in F$, тогда для любого числа B в силу (19) существует номер N такой, что

$$F_N(\lambda_0) = \sum_{i=1}^N \mu_i^2 |\varphi_i(\lambda_0)|^2 > B + 1. \quad (21)$$

Положим $\hat{a}_i = \mu_i \bar{\varphi}_i(\lambda_0) \cdot (F_N(\lambda_0))^{-1/2}$ при $i \leq N$ и $\hat{a}_i = 0$ при $i > N$, тогда точка λ_0 является точкой Лебега для функции $\sum_{i=1}^N \mu_i \hat{a}_i \varphi_i(t)$ с лебеговским значением $F_N(\lambda_0)$. С другой стороны, можно выбрать такую функцию $\tilde{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \tilde{a}_i \varphi_i(t) \in \Omega$, что последовательность $\{\tilde{a}_i\}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{a}_i - \hat{a}_i|^2 < \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i^2 = 1. \quad (22)$$

Так как значения Лебега функций $\varphi_i(t)$ в точке λ_0 конечны, то в силу неравенства (21) можно считать (при подходящем выборе ε и последовательности $\{\tilde{a}_i\}$ в (22)), что λ_0 является точкой Лебега и для функции $\tilde{\varphi}(t)$, причем ее значение Лебега в λ_0 больше чем B . Следовательно, в силу леммы 1 и вышесказанного, равенство (20) при $\varphi \equiv \tilde{\varphi}(t)$ и $\lambda = \lambda_0$ принимает вид

$$T_{\lambda_n}(\tilde{\varphi}) = \sum_{(i)} \mu_i \tilde{a}_i \tilde{\varphi}_i(\lambda_0) > B.$$

Поскольку число B произвольно, а $\|\tilde{\varphi}\|_* = 1$, то получаем, что функционал T_{λ_n} , вопреки условию не ограничен по норме $\|\cdot\|_*$.

Таким образом, функция $\Phi(t)$, а следовательно и $\Phi^2(t)$, почти всюду по мере ρ конечны. Поэтому ρ -мера множества $M_n = \{t; \Phi^2(t) \leq n\}$ стремится к единице, при $n \rightarrow +\infty$. Теперь покажем, что оператор K принадлежит классу $\mathfrak{S}(A)$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ возьмем интервал $(a, b) \subset R^1$ такой, что $\rho(a, b) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, тогда в силу того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n \cap (a, b)) = \rho(a, b)$, существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что

$$\rho(M_{n(\varepsilon)} \cap (a, b)) > \rho(a, b) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $f(t)$ — произвольная функция из L^2 , исчезающая на $\hat{M}_{n(\varepsilon)} = (R^1 \setminus (a, b)) \cup ((a, b) \setminus M_{n(\varepsilon)})$ и отличная от нуля на $R^1 \setminus \hat{M}_{n(\varepsilon)}$. Ясно, что $\rho(\{t; f(t) \neq 0\}) < \varepsilon$. Из того, что носитель функции $f(t)$ ограничен, следует, что оператор $f(A) K^{-1}$ ограничен, следовательно,

$$\text{sp}[(f(A) K^{-1})^* (f(A) K^{-1})] = \sum_{(j)} \|f(A) K^{-1} \psi_j\|^2.$$

Тогда если вместо $\{\psi_j\}$ взять полную ортонормированную систему $\{\omega_j\}$, участвующую в представлении оператора K^{-1} , то получим

$$\begin{aligned} \sum_{(j)} \|f(A) K^{-1} \omega_j\|^2 &= \sum_{(j)} \|f(A) \varphi_j\|^2 \cdot \mu_j^2 = \sum_{(j)} \mu_j^2 \|V f(A) \varphi_j\|_{L^2}^2 = \\ &= \int_{R^1} \sum_{(j)} \mu_j^2 |\varphi_j(t)|^2 \cdot |f(t)|^2 d\rho(t). \end{aligned} \quad (23)$$

Из определения функции $f(t)$ и того, что $\Phi^2(t) < n(\varepsilon)$ на множестве $M_{n(\varepsilon)}$ следует, что правую часть равенства (23) можно оценить следующим образом:

$$\int_{R^1} |f(t)|^2 \sum_{(j)} \mu_j^2 |\varphi_j(t)|^2 d\rho(t) \leq n(\varepsilon) \int_{R^1} |f(t)|^2 d\rho(t) < +\infty.$$

Следовательно, оператор $f(A) K^{-1} \in \mathfrak{S}_2$. Таким образом, оператор K принадлежит классу $\mathfrak{S}(A)$, чем и завершается доказательство необходимости условий теоремы 1.

В определении класса $\mathfrak{S}(A)$ желательно, чтобы спектральная функция ρ не участвовала.

Действительно, если спектр оператора A лебеговский, то класс $\mathfrak{S}(A)$ можно определить без спектральной функции ρ .

С этой целью обозначим через B_n класс функций $f(t) \in L^2$, тождественно равных нулю вне интервала $(-n, n)$. Будем говорить, что оператор $K \in \mathfrak{S}_n(A)$, если

i) $K \in K$

ii) для любого $\varepsilon > 0$ и натурального n можно найти функцию $\varphi(t) \in B_n$ такую, что

a') $\text{mes}(\{t; \varphi(t) = 0\} \cap (-n, n)) < \varepsilon$,

б') $\varphi(A) \cdot K^{-1} \in S_2$.

Наше утверждение следует из равенства

$$\mathfrak{S}(A) = \mathfrak{S}_a(A), \quad (24)$$

доказательство которого мы опускаем.

Если спектр оператора A лебеговский, то в силу (24) теорему 1 можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2. Для того чтобы существовала полная система непрерывных по норме $\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|_H$ обобщенных функционалов $\{T_\lambda\}$ самосопряженного оператора A с лебеговским спектром, необходимо и достаточно, чтобы оператор $K \in \mathfrak{S}_a(A)$.

В общем случае, когда спектр оператора A имеет сингулярную и лебеговскую части, определим следующий класс операторов: будем говорить, что $K \in \mathfrak{S}_1(A)$, если $K \in K$ и существует непрерывная функция $f(t)$, обращающаяся в нуль не более чем в счетном множестве точек, такая, что оператор $f(A) K^{-1} \in S_2$. Очевидно, что $\mathfrak{S}_1(A) \subset \mathfrak{S}(A)$, поэтому имеет место следующая

Теорема 3. Для существования полной системы непрерывных по норме $\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|_H$ обобщенных функционалов $\{T_\lambda\}$ самосопряженного оператора A , достаточно чтобы оператор K принадлежал классу $\mathfrak{S}_1(A)$

Замечание. Пусть $f(t) = \prod_{j=1}^m (t - \lambda_j)^{n_j}$, тогда в силу равенства (10) из условия $f(A) K^{-1} \in S_2$ следует, что если λ_j ($j=1, 2, \dots, m$) не принадлежит классическому спектру $S(A)$, то $K^{-1} \in S_2$, если же хотя бы одна точка $\lambda_i \in S(A)$, тогда как мы убедимся в дальнейшем (см. п. 3), существует оператор $K^{-1} \in S_\infty \setminus S_2$ такой, что $f(A) \cdot K^{-1} \in S_2$ и следовательно $K \in \mathfrak{S}_1(A)$. В частности, если $f(t) = (t - \lambda)$, где $\lambda \in S(A)$, то существует оператор $K^{-1} \in S_\infty \setminus S_2$ такой, что $(A - \lambda I) K^{-1} \in S_2$.

3. Основной результат этого пункта состоит в следующем: пересечение классов $\mathfrak{S}^{-1}(A) \cap (S_p \setminus S_{p-1})^{\text{del}} = \mathfrak{S}^p(A)$ не пусто ни при каком $p=3, 4, \dots$, где $\mathfrak{S}^{-1}(A)$ определяется так: $K \in \mathfrak{S}^{-1}(A)$, если $K^{-1} \in \mathfrak{S}(A)$. Кроме этого результата будет приведено новое доказательство теоремы Каца [6].

Предложение 1. Для любого самосопряженного оператора A с простым спектром, действующего в гильбертовом пространстве H и для любого числа $2 < p < +\infty$, класс $S^p(A)$ всюду плотен (в смысле сходимости по метрике $|\cdot|_{S_p}$) в $S_p \setminus S_{p-1}$.

◀ Не нарушая общности, можно предполагать, что оператор A ограничен, т. е., что его спектральная мера сосредоточена на интервале (a, b) .

Пусть оператор $K(\cdot) = \sum_{(j)} \mu_j(\cdot, \omega_j) \varphi_j$ принадлежит классу $S_p \setminus S_{p-1}$. Это означает, что $\sum_{(j)} \mu_j^p < +\infty$, $\sum_{(j)} \mu_j^{p-1} = +\infty$. Тогда для любого числа $\varepsilon_0 > 0$ существует номер n_0 такой, что

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} \mu_j^p < \varepsilon_0. \quad (25)$$

В интервале (a, b) выберем возрастающую последовательность чисел $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$ и p -мера каждого интервала $\Delta_k = (t_{k-1}, t_k)$ больше нуля, а p -мера каждой точки t_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ равна нулю. Обозначим через L_k^2 подпространство функций $f(t) \in L_p^2$, обращающихся в нуль вне интервала Δ_k . Очевидно, что

$$L_p^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus L_k^2 \text{ и } L_p^2 = L_{p_k}^2, \quad (26)$$

где

$$p_k(t) = p(t) \text{ } t \in \Delta_k \text{ и } p_k(t) = \begin{cases} p(t_k) & t_k \leq t \leq b \\ p(t_{k-1}) & a \leq t \leq t_{k-1} \end{cases}.$$

Рассмотрим пространство $L_{p, n_0}^2 = L_k^2 \cap VH_{n_0}$, $k = 1, 2, \dots$, где подпространство $H_{n_0} = H \ominus \overline{|\varphi_j|_{j=1}^{n_0}}$. Тогда в силу (26) очевидно имеем

$$VH_{n_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus L_{k, n_0}^2. \quad (27)$$

Пусть множество положительных чисел $\{a_i^{(k)}\}_{i,k=1,2,\dots}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^2 < +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^{p-1} = +\infty, \quad (29)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^p < \varepsilon_0. \quad (30)$$

Существование такого множества при любом $p > 2$ легко установить. Произвольным образом перенумеруем множество чисел $\{a_i^{(k)}\}_{i, k=1, 2, \dots}$ и полученную последовательность обозначим через $\{\eta_j\}$.

Из условий (29) и (30) следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^{p-1} = +\infty, \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^p < \varepsilon_0. \quad (32)$$

Затем в пространстве L_{k, n_0}^2 выберем полную ортонормальную систему $\{\omega_i^{(k)}(t)\}_{i=1}^{\infty}$, $k=1, 2, \dots$ и соответственным образом перенумеруем множество функций $\{\omega_i^{(k)}(t)\}$, $i, k=1, 2, \dots$; обозначим полученную последовательность через $\{f_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$. Легко видеть, что система $\{f_j(t)\}$ будет полной и ортонормальной в пространстве VH_{n_0} .

Обозначим через $\{\varphi_j(t)\}$ полную систему, биортогональную к $\{f_j(t)\}$. Тогда очевидно, что в силу (27), (31) и (32) оператор $B_{n_0}(\cdot) = \sum_{(j)} \eta_j(\cdot, \theta_j) f_j$ определен в H_{n_0} и принадлежит классу $S_p \setminus S_{p-1}$, где $\theta_j = V^{-1} \varphi_j(t)$, $f_j = V^{-1} f_j(t)$. Рассмотрим оператор

$$B(\cdot) = \sum_{j=1}^{n_0} \eta_j(\cdot, \varphi_j) \varphi_j + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(\cdot, \theta_j) f_j,$$

определенный в H и принадлежащий классу $S_p \setminus S_{p-1}$ и докажем, что оператор B^{-1} принадлежит классу $\pi(A)$. Для этого сперва покажем, что для любого m функция

$$F_m^2(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^2 |f_j(t)|^2, & \text{если } t \in (a, t_m) \\ 0, & \text{если } t \in (t_m, b), \end{cases}$$

интегрируема по мере ρ .

В самом деле, в силу условия (28) и способа нумерации системы $\{\omega_i^{(k)}\}$, $i, k=1, 2, \dots$, получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b F_m^2(t) d\rho(t) &= \sum_{k=1}^m \int_{\Delta_k} F_m^2(t) d\rho(t) = \sum_{k=1}^m \int_{\Delta_k} \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{ik}^2 |\omega_i^{(k)}(t)|^2 d\rho(t) = \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{\Delta_k} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^2 |\omega_i^{(k)}(t)|^2 d\rho(t) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^2 < +\infty, \end{aligned} \quad (33)$$

где для фиксированного k последовательность чисел $\{a_i^{(k)}\}_{i=1}^{\infty}$ обозна-

чена через $\{\eta_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, т. е. $a_i^{(k)} = \eta_{k_i}$, $i = 1, 2, \dots$, а последовательность функций $\{\omega_i^{(k)}(t)\}_{i=1}^{\infty}$ обозначена соответственно через

$$\{f_{k_i}(t)\}_{i=1}^{\infty}, \text{ т. е. } \omega_i^{(k)}(t) = f_{k_i}(t), i = 1, 2, \dots.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда существует такой номер $m(\varepsilon)$, что имеет место $\rho(t_{m(\varepsilon)}, b) < \varepsilon$. Возьмем, далее, ограниченную функцию $f(t) \in L_2$ такую, что $f(t) \neq 0$, если $t \in (a, t_{m(\varepsilon)})$, $f(t) = 0$, если $t \in (t_{m(\varepsilon)}, b)$. Легко видеть, что оператор $f(A) \cdot B \in S_2$. Так как

$$f(A) \cdot B(\cdot) = f(A) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n_0} \mu_j(\cdot, \omega_j) \varphi_j + B_{n_0}(\cdot) \right),$$

то для этого достаточно показать, что оператор $f(A) \cdot B_{n_0}$ принадлежит S_2 . В самом деле, в силу (10) и (33) имеем

$$\begin{aligned} \text{sp} [(f(A) \cdot B_{n_0})^* (f(A) \cdot B_{n_0})] &= \int_a^b \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j^2 |f_j(t)|^2 |f_j(t)|^2 d\rho(t) = \\ &= \int_a^{t_{m(\varepsilon)}} F_{m(\varepsilon)}^2(t) |f(t)|^2 d\rho(t) \leq C \sum_{k=1}^{m(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из вышеуказанного следует, что оператор $B \in \mathfrak{z}^p(A)$. Теперь докажем, что операторы B и K близки в метрике пространства S_p . В самом деле, в силу (25) и (32) можем написать

$$\begin{aligned} \|K - B\|_{S_p} &= \left\| \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \mu_j(\cdot, \omega_j) \varphi_j - \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(\cdot, \theta_j) f_j \right\|_{S_p} \leq \\ &\leq \left\| \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \mu_j(\cdot, \omega_j) \varphi_j \right\|_{S_p} + \|B_{n_0}\|_{S_p} = \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \mu_j^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j^p < 2\varepsilon_0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Предложение 2. Для любого $p > 2$ и любого оператора $K \in S_p$ существует самосопряженный оператор A такой, что оператор $K^{-1} \in \mathfrak{z}(A)$ (существование оператора K^{-1} в H мы предполагаем).

◀ Пусть $K(\cdot) = \sum_{(i)} \mu_i(\cdot, \omega_i) \varphi_i$, где $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^p < +\infty$ и система $\{\varphi_i\}$ —

полная и ортонормированная в H . Легко показать, что из последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательности

$$\mu_{k'_1}, \mu_{k'_2}, \dots, \mu_{k'_j}, \dots, j = 1, 2, 3, \dots,$$

(где для каждого $j = 1, 2, 3, \dots$ через $\{k'_j\}$ обозначена подпоследовательность последовательности натуральных чисел), удовлетворяющие условиям:

- i) $\sum_{l=1}^{\infty} \mu_{kl}^2 < +\infty, j = 1, 2, 3, \dots,$
- ii) $k_l = k_q$ тогда и только тогда, когда $j = q, i = l$.
- iii) Каждый член последовательности $\{\mu_k\}$ участвует в какой-нибудь из взятых подпоследовательностей.

Возьмем интервал (a, b) и на нем последовательность точек

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_j < \dots \text{ так что } \lim_{j \rightarrow \infty} t_j = b. \quad (34)$$

Обозначим через H_j подпространство пространства H , которое порождено системой $\{\varphi_{kj}\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. система $\{\varphi_{kj}\}_{k=1}^{\infty}$ полна и ортонормирована в H_j .

Легко доказать, что существует самосопряженный оператор A_j с простым спектром, действующий на H_j , и соответствующая ему спектральная мера ρ_j , сосредоточенная на интервале $\Delta_j = (t_{j-1}, t_j)$.

Из условий ii) iii) и (34) следует, что

$$H_j \perp H_i \quad i \neq j \text{ и } H = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus H_j. \quad (35)$$

Введем самосопряженный оператор A в H следующим образом: $A|_{H_j} \stackrel{\text{def}}{=} A_j, j = 1, 2, \dots$. Тогда в силу (35) оператор A имеет простой спектр и его спектральная функция будет

$$\rho(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \rho_j(t), \text{ где } \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j = 1, \varepsilon_j > 0.$$

Из условия (34) получаем, что мера ρ сосредоточена на интервале (a, b) .

Теперь покажем, что оператор $K^{-1} \in \sigma(A)$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$, тогда существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что $\rho(t_{n(\varepsilon)}, b) < \varepsilon$. Введем ограниченную функцию $f(t) \in L^2_\rho$ следующим образом: $f(t) \neq 0$, если $t \in (a, t_{n(\varepsilon)})$, $f(t) = 0$, если $t \in (t_{n(\varepsilon)}, b)$. Легко видеть, что оператор $f(A) \cdot K \in S_\eta$. В самом деле, в силу (10), i) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sp} [(f(A)K)^* (f(A)K)] &= \int_a^b |f(t)|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 |\varphi_j(t)|^2 d\rho(t) = \\ &= \int_a^{t_{n(\varepsilon)}} |f(t)|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 |\varphi_j(t)|^2 d\rho(t) \leq \operatorname{const} \cdot \int_a^{t_{n(\varepsilon)}} \sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} \sum_{l=1}^{\infty} \mu_{kj}^2 |\varphi_{kl}^j(t)|^2 d\rho(t) = \\ &= \operatorname{const} \sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} \sum_{l=1}^{\infty} |\mu_{kj}|^2 < +\infty, \text{ где } \varphi_j(t) = V\varphi_j. \end{aligned}$$

Приведем теперь доказательство теоремы Каца [6] в новой формулировке.

Теорема 4. Для любого оператора $K \in K$ такого, что $K^{-1} \in S_1 / S_2$, можно найти самосопряженный оператор A такой, что $K \in \sigma(A)$ или $K^{-1} \in \sigma^{-1}(A)$.

◀ Пусть $K^{-1}(\cdot) = \sum_{(i)} \mu_i a_i \varphi_i$, $a_i = (\cdot, \varphi_i)$ и $\sum_{(i)} \mu_i^2 = +\infty$.

Рассмотрим пространство L^2_ρ , где функция ρ монотонна, непрерывна и $\rho(-\infty) = 0$, $\rho(+\infty) = 1$.

Легко понять, что для любой последовательности положительных чисел $\{a_i\}$, удовлетворяющей условию $\sum_{(i)} a_i^2 = +\infty$, существует полная ортонормированная система $\{\chi_i(t)\}$ в L^2_ρ такая, что имеет место условие

(i) $\sum_{(i)} a_i^2 |\chi_i(t)|^2$ равна бесконечности на множестве положительной ρ -меры. В самом деле, в пространстве L^2_ρ для некоторой ортонормированной и полной системы $\{\chi_i(t)\}$ ($\chi_i(t)$ по отношению к мере ρ имеет такую же конструкцию, как и система Уолша $\{W_n(t)\}$ по отношению к мере Лебега. Заметим, что $|W_n(t)| = 1$ п. в. по мере Лебега, следовательно $|\chi_i(t)| = 1$ п. в. по мере ρ), имеем

$$\sum_{(i)} a_i^2 |\chi_i(t)|^2 = +\infty \text{ п. в. по мере } \rho.$$

В условии (i) можем считать, что $a_i = \mu_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Рассмотрим далее оператор $A = V^{-1} Q V$, где Q — оператор умножения на независимую переменную, а $V: H \rightarrow L^2_\rho$ — изометрический оператор, определяемый следующим образом:

$$V\varphi_i = \chi_i(t) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Известно [14], что оператор A самосопряжен в H и его классический спектр $S(A)$ совпадает с точкой роста функции $\rho(t)$. По построению система $\{\chi_i(t)\}$ такова, что соответствующая оператору K^{-1} функция $\Phi^2(t) = \sum_{(i)} \mu_i^2 |\chi_i(t)|^2$ равна бесконечности на множестве положительной спектральной меры оператора A . Далее из доказательства необходимости условия теоремы 1 следует, что оператор $K \in \sigma(A)$. ▶

Поскольку для каждого самосопряженного оператора A $\sigma(A) \supset R_H$, то из теоремы 4 легко следует

Теорема 4*.

$$\bigcap_{(A)} \sigma(A) = R_H.$$

Ի. Զ. ՄԿՐՏՉԻԱՆ. Ինֆնահամալուծ օպերատորի սեփական ֆունկցիոնալների լրիվ սիս-
տեմի անընդհանուրությունը բնորոշող մի նոր կայունության մասին (ամփոփում)

Հիմնականում այս աշխատանքը վերաբերվում է անհրաժեշտ-բավարար և բավարար
պայմանների նկարագրելուն, որ H հիլբերտյան տարածության մեջ գործող A ինքնահամալուծ
օպերատորի ընդհանրացված ֆունկցիոնալների $|T_\lambda|$ լրիվ սիստեմը իրի անընդհատ ըստ (2)
բանաձևի սահմանված մետրիկայի:

R. Z. MKRTCHIAN. *On a new criterion characterizing the continuity of the
full system of eigenfunctionals* (summary)

The paper is devoted to the description of necessary—sufficient and sufficient
conditions for the continuity in the metric (2), of the full system of generalized eigen-
functionals $|T_\lambda|$ of the selfadjoint operator A , acting in the Hilbert space H .

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Александрян. О спектральном разложении произвольных самосопряженных операторов по собственным функционалам, ДАН СССР, 162, № 1, 1965, 11—14.
2. Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. О построении полной системы собственных функционалов произвольного самосопряженного оператора и об исследовании их структуры, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, №№ 4—5, 1968, 358—368.
3. Ю. М. Березанский. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, УМЖ, 11, № 1, 1959, 16—24.
4. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Изд. «Наука думка», Киев, 1965.
5. Г. И. Кац. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, ДАН СССР, 119, № 1, 1958, 19—22.
6. Г. И. Кац. Спектральные разложения самосопряженных операторов по обобщенным элементам гильбертова пространства, УМЖ, 13, № 4, 1961, 13—33.
7. K. Maurin. Math. Scand., 9, 1961, 359—371.
8. К. Морен. Методы гильбертова пространства, Изд. «Мир», М., 1965.
9. Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. О ядре спектра самосопряженного оператора с простым спектром, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», V, № 2, 1970, 97—108.
10. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамопряженных операторов, Изд. «Наука», 1965.
11. Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. Некоторые критерии, характеризующие спектр самосопряженного оператора в абстрактном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1, № 1, 1966, 25—34.
12. С. Сакс. Теория интеграла, ИИЛ, М., 1949, стр. 47.
13. Г. Е. Шилов, Б. А. Гуревич. Интеграл, мера и производная, Изд. «Наука», М., 1967.
14. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Изд. «Наука», М., 1966, стр. 158, 294.

В. А. АВАКЯН

ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ λ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

1°. Введение. В настоящей работе изучается асимптотическое поведение собственных значений (с. з.) для краевой задачи

$$l[y(x)] = -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad (1)$$

$$y(0) - \theta(\lambda)y'(0) = 0,^*$$

$$y(x) \in L_2(0, +\infty), \quad (2)$$

где $\theta(\lambda)$ — некоторая мероморфная функция, отличная от бесконечной константы.

Случай, когда краевое условие не зависит от λ , при некоторых условиях на регулярность потенциала $q(x)$ в бесконечности, впервые был изучен Э. Ч. Титчмаршем (см. [1], стр. 161). Далее, при более слабых условиях на $q(x)$ формула распределения с.з. была получена Б. М. Левитаном (см. [2], стр. 584—587), а случай дифференциальных операторов произвольного четного порядка рассмотрен А. Г. Костюченко в [3]. В работе И. Вальтера [8] доказывается разложимость по собственным функциям краевой задачи (1), (2) в случае, когда $\theta(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ и интервал конечен. Более сложен вопрос о распределе-

нии с.з., когда граничные условия зависят от λ . При линейной зависимости граничных условий от λ этот вопрос для эллиптических краевых задач был решен А. Н. Кожевниковым (см., например, [4]).

Чтобы исследовать распределение с.з. задачи (1), (2) наложим следующие условия на потенциал $q(x)$ и функцию $\theta(\lambda)$:

$$1^\circ. |q(x) - q(\xi)| \leq c_1 |x - \xi| q^2(\xi), \text{ при } |x - \xi| \leq 1, \text{ где } \alpha < \frac{3}{2}.$$

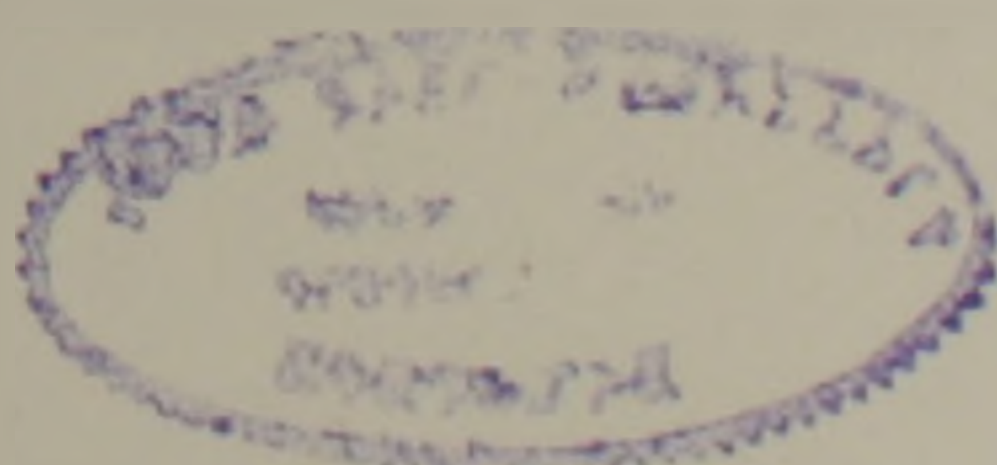
$$2^\circ. |q(x)| \leq c_2 \exp [c_0 |x - \xi| q^{1/\alpha}(\xi)], \text{ при } |x - \xi| > 1, \text{ где } c_0 < 1.$$

$$3^\circ. \text{ В области } |\xi - y| \leq 1 \text{ выполняется неравенство}$$

$$c' q(y) \leq q(\xi) \leq c'' q(y).$$

$$4^\circ. q(x) \text{ — вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству } q(x) > cx^{2+\varepsilon}, \text{ где } \varepsilon > 0 \text{ — любое число.}$$

* Если для какого-либо λ $\theta(\lambda) = \infty$, то условие (2) заменяется следующим: $y'(0) = 0$.



5°. Пусть функция $q(x)$ монотонно возрастает, имеет первую и вторую производные и вогнута. Тогда $q'(x) > 0$, $q''(x) > 0$.

Далее, пусть выполняется еще условие

$$q(x) q''(x) < c_2 |q'(x)|^3,$$

где c_2 — некоторое конечное число, отличное от нуля.

6°. Функция $\theta(\lambda)$ имеет вид

$$\theta(\lambda) = \sum_1^{\infty} \frac{\rho_k}{\alpha_k - \lambda}, \quad (3)$$

где ρ_k — комплексные числа, удовлетворяющие условию $\sum_1^{\infty} |\rho_k| < \infty$, а

α_k лежат (за исключением быть может конечного числа) в сколь угодно малом угле комплексной плоскости и $\sum_1^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|}$ сходится. При этом

предполагается, что вершина угла находится в начале координат, а положительная полуось является его биссектрисой.

2°. Операторная трактовка задачи (1), (2). В этом пункте мы покажем, что задача (1), (2) эквивалентна задаче на собственные значения некоторого линейного оператора в более широком гильбертовом пространстве.

Введем пространство H (см. [5], стр. 24)

$$H = L_2(0, +\infty) \oplus l_2. \quad (4)$$

Далее определим оператор L в H с областью определения D_L . Вектор $Y = \{y(x), y_1, y_2, \dots, y_k, \dots\}$ принадлежит D_L в том и только в том случае, когда существуют первая и вторая производные функции $y(x)$ и вместе с $l[y(x)]$ принадлежат $L_2(0, +\infty)$, а компонента $Y^\lambda = \{y_1, y_2, \dots, y_k, \dots\} \in l_2$ удовлетворяет условию

$$\sum_1^{\infty} y_k = y(0) \text{ и } \sum_1^{\infty} |\alpha_k y_k| < \infty,$$

здесь $y(0)$ — значение первой компоненты вектора Y в точке 0.

Покажем, что D_L всюду плотна в H . Пусть $H = \{h(x), h_1, h_2, \dots, h_k, \dots\} \in H$ и ортогонален D_L . В частности, H ортогонален вектору $Y_1 = \{y(x), 0, 0, \dots, 0, y(0), 0, \dots\}$, так как Y_1 принадлежит D_L . Следовательно, принимая во внимание (4), получаем равенство

$$\langle H, Y_1 \rangle = [h(x), y(x)]_L + y(0) \cdot h_1 = 0,$$

где $\langle \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H . Известно (см. [6]), что пара $\{y(x), y(0)\}$ всюду плотна в $L_2(0, +\infty) \oplus C$ и поэтому из верхнего равенства следует, что $h(x) = h_1 = 0$. Аналогично можно показать, что остальные компоненты вектора H также равны нулю.

$$LY = \{l[y(x)], x_1 y_1 - p_1 y'(0), x_2 y_2 - p_2 y'(0), \dots, x_n y_n - p_n y'(0), \dots\}. \quad (5)$$

Как легко установить, оператор L допускает замыкание в пространстве H . Для этого рассмотрим две такие последовательности $\{U^n\}_{n=1}^\infty$ и $\{V^n\}_{n=1}^\infty$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U^n = U, \lim_{n \rightarrow \infty} V^n = V \text{ и } U \neq V. \quad (6)$$

Известно (см. [5], стр. 127), что оператор L будет допускать замыкание в том и только в том случае, когда из (6) следует неравенство $\lim_{n \rightarrow \infty} L U^n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} L V^n$. Предположим противное. Тогда принимая во внимание формулу (5), получим соотношения:

[illegible]

при $n \rightarrow \infty$. Здесь $\gamma_1 = \left. \frac{d}{dx} \right|_{x=0}^{\text{опр.}}$.

Но так как дифференциальное выражение l в определении оператора L имеет максимальную область определения, то из первого равенства следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u^n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} v^n(x)$. Теперь, учитывая, что γ_1 — непрерывный оператор, получим $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_1 u^n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_1 v^n(x)$. Следовательно, из остальных равенств соотношения (7) вытекает, что

$$x_1 \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1^n - v_1^n) = \dots = x_k \lim_{n \rightarrow \infty} (u_k^n - v_k^n) = \dots = 0.$$

С другой стороны, из условия б' следует, что все x_k отличны от нуля и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_k^n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_k^n$ ($k = 1, 2, \dots$), что противоречит предположению (6).

Таким образом, L — замкнутый линейный оператор в пространстве H со всюду плотной областью определения.

Имеет место

Лемма 1. Задача на собственные значения (с.з.) оператора L адекватна задаче (1), (2), т. е. с.з. оператора L и задачи (1), (2) совпадают вместе с их кратностями. Более того, между собственными векторами (с.в.) оператора L и собственными функциями (с.ф.) задачи (1), (2), отвечающими одному и тому же с.з., можно установить взаимно-однозначное соответствие (при этом первые компоненты с.в. оператора L являются с.ф. задачи (1), (2), отвечающими одинаковым с.з.).

Доказательство. Пусть Y — некоторый с.в. оператора L , отвечающий с.з. λ_0 , т. е. $LY = \lambda_0 Y$. Тогда из формулы (5) следуют равенства

$$\left. \begin{aligned} l[y(x)] &= \lambda_0 y(x) \\ \alpha_1 y_1 - \rho_1 y'(0) &= \lambda_0 y_1 \\ \alpha_2 y_2 - \rho_2 y'(0) &= \lambda_0 y_2 \\ \alpha_k y_k - \rho_k y'(0) &= \lambda_0 y_k \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Первое из равенств (8) показывает, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1) при $\lambda = \lambda_0$. Для того чтобы показать, что $y(x)$ удовлетворяет при $\lambda = \lambda_0$ и граничному условию (2), заметим, что из остальных равенств (8) следуют соотношения:

$$y_k = \frac{\rho_k}{\alpha_k - \lambda_0} y'(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Теперь, принимая во внимание определение D_L , из этих равенств вытекает выполнимость краевого условия (2). Таким образом, мы показали, что первая компонента с.в. оператора L с с.з. λ_0 является с.ф. задачи (1), (2) с тем же с.з.

Обратно, пусть $y(x)$ — с.ф. задачи (1), (2) с с.з. λ_0 . Обозначим через

$$y_k = \frac{\rho_k}{\alpha_k - \lambda_0} y'(0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Так как $y(x)$ удовлетворяет граничному условию (2) при $\lambda = \lambda_0$, то ясно, что $\sum_1 y_k = y(0)$. Следовательно, вектор $y = \|y(x), y_1, y_2, \dots, y_k, \dots\|$ принадлежит области определения оператора L . Заметим также, что сходимость ряда $\sum_1 |\alpha_k y_k|$ сразу следует из соотношений (9), учитывая, что λ_0 — фиксированное число, не равное α_k ($k = 1, 2, \dots$)* и $\sum_1 |\rho_k| < \infty$. Следовательно, вектор Y принадлежит D_L и, как легко видеть, выполняется равенство $LY = \lambda_0 Y$. Тем самым, доказательство леммы окончено.

Отметим, что из определения D_L следует, что область значений оператора L состоит из таких векторов пространства H , у которых первая компонента принадлежит $L_2(0, +\infty)$, а вторая — l_1 .

Теперь рассмотрим задачу:

* Здесь y_k ($k = 1, 2, \dots$) определяются из соотношений (9), а $y(x)$ — с.ф. задачи (1), (2).

** См. сноску на стр. 91.

$$L Y - \lambda Y = F, \quad (10)$$

где $Y = \{y(x), Y^\lambda\} \in D_L$, а $F = \{f(x), F^\lambda\}$, $f(x) \in L_2(0, +\infty)$ и $\sum_1^\infty |f_k| < \infty$.

Решение задачи (10) будем искать в виде суммы решений двух других задач, которые мы введем в следующем пункте.

3°. Операторы R и T . Обозначим через R оператор в $L_2(0, +\infty)$, соответствующий задаче

$$\left. \begin{aligned} l[z(x)] - \lambda z(x) &= g(x) \\ z(0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

где $g(x) \in L_2(0, +\infty)$.

Известно (см. например, [2], часть V, гл. XII или [3]), что при выполнении условий 1°–4° R — полуограниченный снизу самосопряженный оператор с дискретным спектром. Более того, при $\lambda < 0$ достаточно больших резольвента $(R - \lambda I)^{-1}$ — ядерный оператор. Не нарушая общности можно считать, что $q(x) \geq 1$, тогда спектр оператора R будет лежать только на положительной полуоси. Таким образом, при условиях 1°–5° имеет место (см. [2], стр. 585) следующая формула следов:

$$\operatorname{sp} (R - iI)^{-1} = \int_0^\infty \frac{dN(t, R)}{t - \lambda}, \quad (12)$$

где

$$N(\lambda, R) = \sum_{\lambda_j(R) < \lambda} 1 \sim \frac{1}{2\pi} \int_{q(x) < \lambda} \sqrt{\lambda - q(x)} dx \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Теперь рассмотрим задачу

$$\left. \begin{aligned} l[v(x)] &= 0 \\ (T - \lambda I) V^\lambda &= A^\lambda \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

где T — оператор в l_2 с областью определения D_T , состоящий из векторов $Y^\lambda = [v_1, v_2, \dots, v_k, \dots] \in l_2$ таких, что

$$\sum_1^\infty v_k = v(0) \text{ и } \sum_1^\infty |x_k v_k| < \infty.$$

Здесь $v(0)$ — значение в нуле решения уравнения $l[v(x)] = 0$. Оператор T на $Y^\lambda \in D_T$, аналогично оператору L , определяется по формуле

$$T V^\lambda = [x_1 v_1 - \rho_1 v'(0), x_2 v_2 - \rho_2 v'(0), \dots, x_k v_k - \rho_k v'(0), \dots].$$

Ясно, что T — линейный замкнутый оператор в пространстве l_2 с областью определения D_T , всюду плотной в l_2 , и с областью значений,

состоящей из таких векторов $A^\lambda = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$, что $\sum_1^\infty |a_k| < \infty$.

Обозначим через T_k ($k = 1, 2, \dots$) одномерные операторы, действующие на k -ой компоненте вектора V^λ следующим образом:

$$T_k v_k = a_k v_k - \rho_k v'(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, для некоторой регулярной точки λ^* резольвента оператора T будет задаваться формулой

$$(T - \lambda I)^{-1} = \{(T_1 - \lambda I)^{-1}, (T_2 - \lambda I)^{-1}, \dots, (T_k - \lambda I)^{-1}, \dots\}. \quad (15)$$

Теперь отметим, что любое решение уравнения $l[v(x)] = 0$ имеет вид $v(x) = C \psi(x)$, где $\psi(x)$ — фиксированное решение, удовлетворяющее условию $\psi(0) = 1$, а C — некоторая константа. Обозначим через $\Omega_{(T - \lambda I)^{-1}}$ оператор, который каждому вектору A^λ из области значений оператора $(T - \lambda I)^{-1}$ сопоставляет число $v(0)$. Тогда, принимая во внимание равенство**

$$C = v(0) = \sum_1^\infty (T_k - \lambda I)_{a_k}^{-1},$$

где

$$(T_k - \lambda I)_{a_k}^{-1} = v_k = \frac{\rho_k}{a_k - \lambda} C \psi'(0) + \frac{a_k}{a_k - \lambda},$$

получим следующую формулу для оператора $\Omega_{(T - \lambda I)^{-1}}$:

$$\Omega_{(T - \lambda I)^{-1}} A^\lambda = \frac{\sum_1^\infty \frac{a_k}{a_k - \lambda}}{1 - \ell(\lambda) \psi'(0)}. \quad (16)$$

Окончательно из формулы (16) вытекает, что решение задачи (14) задается вектором $V = [v(x), V^\lambda]$, где

$$v(x) = \Omega_{(T - \lambda I)^{-1}} A^\lambda \times \psi(x), \quad (17)$$

а

$$v_k = (T_k - \lambda I)_{a_k}^{-1} = \frac{\rho_k}{a_k - \lambda} \Omega_{(T - \lambda I)^{-1}} A^\lambda \times \psi'(0) + \frac{a_k}{a_k - \lambda}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Отметим также, что формулы (15) и (18) вместе задают резольвенту оператора T .

В дальнейшем нам понадобятся оценки операторов $(R - \lambda I)^{-1}$, $(T - \lambda I)^{-1}$ и $\Omega_{(T - \lambda I)^{-1}}$ при достаточно больших $|\lambda|$ вне любого сколь угодно малого угла, содержащего положительную полуось в качестве биссектрисы.

* В дальнейшем мы увидим, что спектр оператора T дискретный, откуда и будет следовать существование регулярной точки λ .

** Оно следует из формулы (15) и из определения оператора T .

Оценим сначала функцию $\theta(\lambda)$. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через Φ_ε угол на комплексной λ -плоскости, задаваемый неравенством $|\arg \lambda| < \varepsilon$. Докажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ вне угла Φ_ε и при достаточно больших $|\lambda|$ имеет место оценка сверху:

$$|\theta(\lambda)| \leq \frac{C}{|\lambda|},$$

где C — некоторая положительная константа.

Из условия 6° следует, что для $\frac{\varepsilon}{2}$ можно подобрать такое $N_1 > 0$, что все α_k с номерами $(k = N_1 + 1, N_2 + 2, \dots)$ будут лежать внутри угла $|\arg \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$. А так как $\sum_1^\infty |\rho_k|$ сходится, то найдется и $N_2 > 0$ такое, что $\sum_{N_1+1}^\infty |\rho_k| < \sin \frac{\varepsilon}{4}$. Пусть теперь $N = \max \{N_1, N_2\}$, тогда

$$|\theta(\lambda)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left\{ \sum_1^N \frac{|\rho_k|}{\left| \frac{\alpha_k}{|\lambda|} - e^{i \arg \lambda} \right|} + \sum_{N+1}^\infty \frac{|\rho_k|}{\left| \frac{\alpha_k}{|\lambda|} - e^{i \arg \lambda} \right|} \right\} = \frac{1}{|\lambda|} (M_1 + M_2). \quad (19)$$

Из выбора N для M_2 следует оценка

$$M_2 \leq \frac{1}{\inf_k \left| \frac{\alpha_k}{|\lambda|} - e^{i \arg \lambda} \right|} \sum_{N+1}^\infty |\rho_k| \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{4}} \sum_{N+1}^\infty |\rho_k| < 1.$$

С другой стороны, при $|\lambda|$ достаточно больших M_2 будет меньше или равно некоторой константе. Соединяя оценки для M_1 и M_2 , получаем нужную нам оценку сверху.

Чтобы получить для $\theta(\lambda)$ оценку снизу, напишем следующее неравенство:

$$|\theta(\lambda)| \geq \left| \sum_1^N \frac{\rho_k}{\alpha_k - \lambda} - \sum_{N+1}^\infty \frac{\rho_k}{\alpha_k - \lambda} \right| = |Q_1 - Q_2|, \quad (20)$$

где N определяется условиями: $\sum_{N_1+1}^\infty |\rho_k| < \varepsilon \sin \frac{\varepsilon}{4}$ и $N = \max \{N_1, N_2\}$.

Оценивая Q_2 так же как и M_2 , получим

$$Q_2 \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{N+1}^\infty \frac{|\rho_k|}{\left| \frac{\alpha_k}{|\lambda|} - e^{i \arg \lambda} \right|} \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{\inf_k \left| \frac{\alpha_k}{|\lambda|} - e^{i \arg \lambda} \right|} \sum_{N+1}^\infty |\rho_k| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

А из представления Q_1 следует, что для любого $C' > \varepsilon$ всегда найдется такое $C'' > 0$, что при $|\lambda| > C''$ будем иметь неравенство:

$$Q_1 > \frac{C'}{|\lambda|}.$$

Поэтому (20) можно продолжить следующим образом:

$$|Q(\lambda)| \geq |Q_1 - Q_2| \geq \frac{C'}{|\lambda|} - \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \frac{C_2}{|\lambda|},$$

где $C_2 = C' - \varepsilon$. Из этой оценки, принимая во внимание еще оценку сверху, получим, что при больших $|\lambda|$ и для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, вне угла Φ_1 выполняется оценка

$$|q(\lambda)| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \quad (21)$$

Далее, чтобы оценить резольвенту самосопряженного оператора R , заметим, что из интегрального представления (учитывая приведенные в пункте 3 некоторые результаты) следует аналогичное (3) представление для $(R - \lambda I)^{-1}$

$$(R - \lambda I)^{-1} = \sum_1^{\infty} \frac{\Delta_k}{\lambda_k - \lambda},$$

где $\lambda_k \geq 0$ — собственные значения оператора R , а $\Delta_k \geq 0$ — скачки спектральной функции. Поэтому дословно повторяя рассуждения, примененные при получении (21), можно показать, что вне любого сколь угодно малого угла Φ_2 и при достаточно больших $|\lambda|$ имеет место оценка

$$\|(R - \lambda I)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \quad (22)$$

А для оценки оператора $\Omega_{(T - \lambda I)^{-1}}$ нужно воспользоваться формулой (16) и оценкой (21). Тогда при достаточно больших $|\lambda|$ и для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ вне угла Φ_1 можно написать равенство

$$\Omega_{(T - \lambda I)^{-1}} A^{\lambda} = \sum_1^{\infty} \frac{a_k}{\alpha_k - \lambda} \left[I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right]. \quad (23)$$

Но так как выражение $\sum_1^{\infty} \frac{a_k}{\alpha_k - \lambda}$ можно оценить аналогично $\theta(\lambda)$, то из (23) сразу получим оценку

$$\|\Omega_{(T - \lambda I)^{-1}}\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \quad (24)$$

Заметим, что при $\lambda < 0$ достаточно больших из представления (23) также вытекает ядерность оператора $\Omega_{(T - \lambda I)^{-1}}$. Действительно, обозначим через T_{α_k} ($k=1, 2, \dots$) оператор умножения k -ой компоненты вектора на число α_k . Тогда формула (23) перепишется так:

$$\Omega_{(T - \lambda I)^{-1}} A^{\lambda} = \left[I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right] \sum_1^{\infty} (T_{\alpha_k} - \lambda I)^{-1},$$

откуда, учитывая аддитивность и непрерывность операции взятия следа, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp} \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} &= \sum_1^\infty \operatorname{Sp} \left\{ \left\| I + O\left(\frac{1}{-\lambda}\right) \right\| (T_{\alpha_k} - \lambda I)^{-1} \right\} \leq \\ &\leq C \sum_1^\infty \|(T_{\alpha_k} - \lambda I)^{-1}\|_1, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_1$ — ядерная норма (см. [7], стр. 135). Теперь, принимая во внимание, что $\frac{1}{|\alpha_k - \lambda|}$ ($k = 1, 2, \dots$) являются S -числами оператора $(T_{\alpha_k} - \lambda I)^{-1}$, из верхнего неравенства вытекает, что $\Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}$ — ядерный оператор при $\lambda < 0$ достаточно больших*.

Далее заметим, что из формул (18) и (23) следует, что оператор $(T - \lambda I)^{-1}$ при $\lambda < 0$ достаточно больших допускает представление

$$(T - \lambda I)^{-1} = (T_\alpha - \lambda I)^{-1} \left\| I + O\left(\frac{1}{-\lambda}\right) \right\|, \quad (25)$$

где $T_\alpha = \{T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}, \dots, T_{\alpha_k}, \dots\}$.

Из определения матричного следа (см. [7], стр. 125) и из представления (25) легко вывести, что при $\lambda < 0$ достаточно больших оператор $(T - \lambda I)^{-1}$ — ядерный**.

4°. Построение резольвенты оператора L . Вернемся к задаче (10). Ее решение будем искать в виде суммы

$$Y = Z + V,$$

где $Z = \{z(x), 0, 0, \dots, 0, \dots\}$ и $V = \{v(x), v_1, v_2, \dots, v_k, \dots\}$.

Здесь $z(x)$ и V соответственно решения задач (11) и (14). Подставив Y в (10), получим равенства***:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) - \lambda v(x) \\ F^\lambda = A^\lambda - K_p \gamma_1 z(x) \end{cases},$$

где $K_p \gamma_1 z(x) = \{\rho_1 z'(0), \rho_2 z'(0), \dots, \rho_k z'(0), \dots\}$.

С помощью введенных в пункте 3 операторов эти равенства можно переписать в виде

$$\begin{cases} f(x) = g(x) - \lambda \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} A^\lambda \times \psi(x), \\ F^\lambda = A^\lambda - K_p \gamma_1 (R - \lambda I)^{-1} g(x) \end{cases} \quad (26)$$

Чтобы решить систему (26) относительно $g(x)$ и A^λ , подставим выражение $g(x)$ из первого уравнения во второе, получим

$$F^\lambda = A^\lambda - K_p \gamma_1 (R - \lambda I)^{-1} f(x) - K_p \gamma_1 (R - \lambda I)^{-1} \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} A^\lambda \times \psi(x).$$

* Сходимость ряда $\sum_1^\infty \frac{1}{\alpha_k - \lambda}$ вытекает из условия б°, в силу следствия из леммы 2 (см. п. 5).

** См. предельное соотношение (31).

*** Легко видеть, что D_R и D_T входят в D_L .

Отсюда, учитывая ограниченность операторов K_p , γ_1 и оценки (22), (24), можно показать, что при достаточно больших $|\lambda|$ и вне угла Φ_0 имеет место представление

$$F^\lambda = A^\lambda - O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) f(x) - O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) A^\lambda.$$

Следовательно

$$A^\lambda = F^\lambda + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) [f(x), F^\lambda]. \quad (27)$$

С помощью подстановки (27) в первое уравнение системы (26) находим $g(x)$:

$$g(x) = f(x) + \lambda \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} \times \psi(x) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \{f(x), F^\lambda\}. \quad (28)$$

Соединяя (27) и (28), можно написать матричное равенство

$$\begin{pmatrix} g(x) \\ A^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \lambda \psi(x) \times \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ F^\lambda \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \begin{pmatrix} f(x) \\ F^\lambda \end{pmatrix}. \quad (29)$$

С другой стороны, из того, что решение задачи (10) представлялось в виде суммы решений задач (11) и (14) вытекает, что

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ Y^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R - \lambda I)^{-1} & \psi(x) \times \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} \\ 0 & (T - \lambda I)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x) \\ A^\lambda \end{pmatrix}.$$

Окончательно, принимая во внимание (29), из этого равенства следует, что резольвента оператора L допускает представление

$$\begin{aligned} (L - \lambda I)^{-1} \begin{pmatrix} f(x) \\ F^\lambda \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} (R - \lambda I)^{-1} & (R - \lambda I)^{-1} \lambda \psi(x) \times \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} + \psi(x) \times \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} \\ 0 & (T - \lambda I)^{-1} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} f(x) \\ F^\lambda \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \begin{pmatrix} (R - \lambda I)^{-1} & \psi(x) \times \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} \\ 0 & (T - \lambda I)^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (30)$$

при достаточно больших $|\lambda|$ и вне любого угла Φ_0 .

5. Некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 2. Пусть $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию: для любого $\varepsilon > 0$ все ν_k ($k = 1, 2, \dots$) (кроме, быть может, конечного числа) лежат в угле Φ_0 . Тогда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow -\infty \\ \operatorname{Im} \lambda = 0}} \left\{ \sum_1^\infty \frac{1}{\nu_k - \lambda} \middle/ \sum_1^\infty \frac{1}{|\nu_k| - \lambda} \right\} = 1. \quad (31)$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $N = N_\varepsilon > 0$, что все ν_k , $k = N, N+1, \dots$ лежат в угле $|\arg \nu| < \varepsilon$. Тогда

$$\left| \frac{v_k - \lambda}{|v_k| - \lambda} - 1 \right| = \left| \frac{|v_k| \cos \frac{\varphi_k}{2} + i |v_k| \sin \frac{\varphi_k}{2} - |v_k|}{|v_k| - \lambda} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|v_k| \left| \cos \frac{\varphi_k}{2} - 1 \right|}{|v_k| - \lambda} + \frac{|v_k| \sin \frac{\varphi_k}{2}}{|v_k| - \lambda},$$

где $\varphi_k = \arg v_k$ и по условию леммы $\varphi_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Известно, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеют место оценки

$$\left| \cos \frac{\varphi_k}{2} \right| = 1 + O\left(\left|\frac{\varphi_k}{2}\right|^2\right) \text{ и } \left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right| = \left|\frac{\varphi_k}{2}\right| + O\left(\left|\frac{\varphi_k}{2}\right|^3\right).$$

Поэтому из верхнего неравенства вытекает, что

$$\left| \frac{1}{v_k - \lambda} / \frac{1}{|v_k| - \lambda} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Тогда при $\lambda < 0$ выполняется оценка

$$\left| \left\{ \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{v_k - \lambda} / \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{|v_k| - \lambda} \right\} - 1 \right| \leq \varepsilon. \quad (32)$$

При получении (32) мы воспользовались следующим неравенством: если для положительных чисел a_k и комплексных чисел b_k ($k=1, 2, \dots, n$) выполняются неравенства $\left| \frac{b_k}{a_k} \right| < \varepsilon$ ($k=1, 2, \dots, n$) для произвольного n , то

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k / \sum_{k=1}^n a_k \right| < \varepsilon.$$

С другой стороны, найдется такое C_1 , что при $-\lambda > C_1$ будем иметь

$$\left| \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{v_k - \lambda} / \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{|v_k| - \lambda} \right\} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, при $-\lambda > C_1$ неравенство (32) будет иметь место и при замене N на 1. Лемма доказана.

Заметим, что используя неравенство

$$|v_k| \cos \varphi_k - \lambda - |v_k| \sin \varphi_k \leq |v_k - \lambda| \leq |v_k| \cos \varphi_k - \lambda + |v_k| \sin \varphi_k,$$

где λ и $\varphi_k = \arg v_k$, совершенно аналогично можно показать, что при выполнении условий леммы 2 имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow -\infty \\ \lim \lambda = 0}} \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{1}{|v_k| - \lambda} / \sum_1^{\infty} \frac{1}{|v_k| - \lambda} \right\} = 1. \quad (33)$$

Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $H = H_1 \oplus H_2$ — прямая сумма гильбертовых пространств H_1 и H_2 . Рассмотрим в H матрицу от операторов

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где A и C — операторы, соответственно, в H_1 и H_2 , а B — из H_2 в H_1 . Тогда оператор F — ядерный в том и только в том случае, когда A , B и C ядерные. При этом имеет место равенство следов

$$\text{Sp } F = \text{Sp } A + \text{Sp } C.$$

Лемма 4. (см. [7], стр. 122). Если оператор $A \in \mathfrak{S}_p$ ($p > 0$), то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(A)|^p \leq (\|A\|_p)^p,$$

знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда оператор A нормален.

Из этой леммы, в частности, следует, что если $A \in \mathfrak{S}_1$ и все его собственные числа неотрицательны, то

$$\text{Sp } A = \|A\|_1.$$

Наконец, нам понадобится также (см. [7], стр. 342)

Лемма 5. (Б. И. Коренблум). Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ ($0 \leq t < \infty$) — неубывающие функции, для которых при некоторых $p (> 0)$ конечны интегралы

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(t)}{(t-\lambda)^p},$$

($\lambda \leq 0$)

$$\Psi(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{d\psi(t)}{(t-\lambda)^p}$$

и

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\Phi(\lambda)} = 1.$$

Если при этом $\varphi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и существует такая положительная константа $\gamma < p$, что для достаточно больших $t < S$

$$\frac{\varphi(S)}{\varphi(t)} \leq \left(\frac{S}{t}\right)^{\gamma},$$

то также

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = 1.$$

6°. Окончательные результаты. Из представления (30) следует, что спектр оператора L дискретен, т. е. состоит только из с.з. При этом все, кроме, быть может, конечного числа, с.з. лежат в любом сколь угодно малом угле Φ_1 . Отсюда, в силу леммы 1, следует дискретность спектра задачи (1), (2).

Далее, учитывая ядерность операторов $(K - \lambda I)^{-1}$, $(T - \lambda I)^{-1}$ и $\psi(x) \times \mathfrak{Q}_{(T - \lambda I)^{-1}}$ при $\lambda < 0$ достаточно больших, с помощью леммы 3 из того же представления (30) можно вывести равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp} (L - \lambda I)^{-1} = & \{ \operatorname{Sp} (R - \lambda I)^{-1} + \operatorname{Sp} (T - \lambda I)^{-1} \} + \operatorname{Sp} \left\{ O \left(\frac{1}{-\lambda} \right) \times \right. \\ & \left. \times [(R - \lambda I)^{-1} + (T - \lambda I)^{-1}] \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

С помощью ядерной нормы второй член верхнего равенства оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp} \left\{ O \left(\frac{1}{-\lambda} \right) [(R - \lambda I)^{-1} + (T - \lambda I)^{-1}] \right\} \leq & \left\| O \left(\frac{1}{-\lambda} \right) \right\| \times \\ & \times [\| (R - \lambda I)^{-1} \|_1 + \| (T - \lambda I)^{-1} \|_1]. \end{aligned} \quad (35)$$

Заметим, что из результатов, приведенных в пункте 3, следует, что оператор R удовлетворяет условиям следствия из леммы 4. Поэтому имеет место равенство

$$\operatorname{Sp} (R - \lambda I)^{-1} = \| (R - \lambda I)^{-1} \|_1 \quad (36)$$

при больших $\lambda < 0$.

С другой стороны, так как $\operatorname{Sp} (T_\alpha - \lambda I)^{-1} = \sum_1^\infty \frac{1}{x_k - \lambda}$ и x_k ($k = 1, 2, \dots$) удовлетворяют условиям леммы 2, то учитывая соотношения (31) и (33) из представления (25) можно вывести, что при $\lambda < 0$ достаточно больших имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp} (T - \lambda I)^{-1} \leq & \| (T - \lambda I)^{-1} \|_1 \leq C' \| (T_\alpha - \lambda I)^{-1} \|_1 = C' \sum_1^\infty \frac{1}{|x_k - \lambda|} < \\ & \leq C'' \operatorname{Sp} (T_\alpha - \lambda I)^{-1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Теперь, учитывая (36) и (37), из неравенства (35) получаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp} \left\{ O \left(\frac{1}{-\lambda} \right) [(R - \lambda I)^{-1} + (T - \lambda I)^{-1}] \right\} \leq & O \left(\frac{1}{-\lambda} \right) \times \\ & \times [\operatorname{Sp} (R - \lambda I)^{-1} + \operatorname{Sp} (T_\alpha - \lambda I)^{-1}]. \end{aligned} \quad (38)$$

Далее, принимая во внимание равенство

$$\operatorname{Sp} (T - \lambda I)^{-1} = \operatorname{Sp} (T_\alpha - \lambda I)^{-1} + \operatorname{Sp} \left[O \left(\frac{1}{-\lambda} \right) (T_\alpha - \lambda I)^{-1} \right],$$

которое имеет место в силу представления (25), из (34) с помощью неравенства (38) получаем следующий результат.

Лемма 6. При выполнении условий 1°–4° и 6° имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow -\infty \\ \operatorname{Im} \lambda = 0}} [\operatorname{Sp} (L - \lambda I)^{-1} / \operatorname{Sp} (R - \lambda I)^{-1} + \operatorname{Sp} (T_\alpha - \lambda I)^{-1}] = 1.$$

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. При выполнении условий 1°–6° спектр задачи (1), (2) дискретен и (быть может, за исключением конечного чис-

ла) лежит в сколь угодно малом угле, а формула распределения собственных значений $N(\lambda)$ имеет асимптотику

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{q(x) < \lambda} \sqrt{\lambda - q(x)} dx + N_0(\lambda), \quad (39)$$

где $N(\lambda) = \sum_{|\lambda_j| < \lambda} 1$, λ_j — с.з. задачи (1), (2), а $N_0(\lambda) = \sum_{|\alpha_j| < \lambda} 1$, α_j — полюсы функции $\theta(\lambda)$.

Доказательство. Из леммы 2 вытекает формула

$$\text{Sp}(T_\varepsilon - iI)^{-1} \sim \int_0^\infty \frac{dN_0(t)}{t - \lambda} \quad (40)$$

при $\lambda < 0$ достаточно больших.

А так как

$$\int_0^\infty \frac{dN(L, t)}{t - \lambda} = \sum_j \frac{1}{|\lambda_j(L)| - \lambda},$$

то из леммы 6, принимая во внимание (12), (40) и лемму 2, получим

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow -\infty \\ \text{Im } \lambda = 0}} \left\{ \int_0^\infty \frac{dN(L, t)}{t - \lambda} \bigg/ \int_0^\infty \frac{d[N(R, t) + N_0(t)]}{t - \lambda} \right\} = 1. \quad (41)$$

Далее предположим, что $N_0(t)$ удовлетворяет следующему тауберовому условию (см. [7], стр. 343): существует такая неубывающая функция $\varphi(t)$ ($0 \leq t < \infty$), что выполняются условия:

- 1) $\varphi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$;
- 2) при некотором $\gamma < 0$ для достаточно больших $t < s$ выполняется неравенство

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi(t)} \leq \left(\frac{s}{t} \right)^\gamma;$$

$$3) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_0(t)}{\varphi(t)} = 1.$$

Тогда из соотношения (41) с помощью леммы 5 будет следовать, что

$$N(L, t) \sim N(R, t) + N_0(t).$$

Отсюда, учитывая формулу (13) и лемму 1, получаем (39).

Теорема доказана.

Замечание 1. На самом деле вместо условия 4 можно было потребовать просто, чтобы $q(x) \geq cx^2$. В этом случае резольвенту можно оценить, используя параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma u.$$

Замечание 2. В условии 6° вместо $\sum_1 \frac{1}{|x_k|} < \infty$ можно было потребовать, чтобы сходилась сумма $\sum_1 \frac{1}{|x_k|^p}$, где $p > 0$ — любое целое число. Тогда вместо оператора $(L - \lambda I)^{-1}$ нужно рассмотреть оператор $(L - \lambda I)^{-p}$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность А. Г. Костюченко за постановку задачи и внимание при выполнении работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 17.II.1977

Վ. Հ. ԱՎԱԿԻԱՆ. Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը λ սպեկտրալ պարամետրով եզրային պայմանի մեջ (ամփոփում)

Այս աշխատությունում դիտարկվում է Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը դրական կիսաառանցքի վրա. ենթադրվում է, որ սպեկտրալ պարամետրը մտնում է նաև եզրային պայմանի մեջ: Այսպես $y(0) - \eta(\lambda) y'(0) = 0$, որտեղ $\eta(\lambda)$ -ն ինչ-որ մերոմորֆ ֆունկցիա է, որը բավարարում է 6° պայմանին:

Ցույց է տրված, որ երբ $q(x)$ պոտենցիալը և $\eta(\lambda)$ ֆունկցիան բավարարում են 1°—5° պայմաններին, (1), (2) խնդիրը ունի միայն դիսկրետ սպեկտր և սեփական արժեքների բաշխման ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով:

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} 1 \sim \frac{1}{2\pi} \int_{q(x) < \lambda} \sqrt{\lambda - q(x)} dx + N_0(\lambda), \text{ երբ } \lambda \rightarrow +\infty:$$

V. A. AVAKIAN. *The Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary condition (summary)*

The paper deals with the Sturm-Liouville problem on the positive semi-axis. It is assumed that the spectral parameter also enters into the boundary condition, namely $y(0) - \eta(\lambda) y'(0) = 0$, where $\eta(\lambda)$ is some meromorphic function, which satisfies condition 6°. Under conditions 1°—5° on potential $q(x)$ and the function $\eta(\lambda)$ it is proved that the (1), (2) problem has purely discrete spectrum and the eigenvalue distribution function is given by formula

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} 1 \sim \frac{1}{2\pi} \int_{q(x) < \lambda} \sqrt{\lambda - q(x)} dx + N_0(\lambda), \text{ when } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Э. Ч. Титчмарш. Разложение по собственным функциям, связанное с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 1, М., ИИЛ, 1960.
2. Б. М. Левитан, И. С. Сарисян. Введение в спектральную теорию. М., Изд. "Наука", 1970.
3. А. Г. Костюченко. Докторская диссертация, МГУ, 1966.
4. А. Н. Кожанников. Об асимптотике собственных значений эллиптической краевой задачи с λ в уравнении и в граничном условии, УМН, 31, вып. 4 (190), 1976, 265—266.

5. Н. И. Ахиезер, И. М. Глязман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., Изд. „Наука“, 1966.
6. J. Odhnoff. Operators generated by differential problems with eigenvalue parameter in equation and boundary condition, Medd. Lunds Univ. Matem. Sem., 1959, 1—80.
7. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамопрямых операторов, М., Изд. „Наука“, 1965.
8. J. Walter. Regular Eigenvalue problems with Eigenvalue parameter in the boundary condition, Math. Z., 1, 33, № 4, 1973, 301—312.

А. А. ВОСКАНЯН

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

В работе М. М. Джрбашяна [1] был развит метод, позволяющий получить решение экстремальных задач о наилучшем весовом полиномиальном приближении ядра Коши $\frac{1}{w-x}$ ($\text{Im } w \neq 0$) на всей вещественной оси $-\infty < x < +\infty$ как в равномерной, так и в средне-квадратической метрике, когда вес является полиномом с заданными полюсами. Этот метод, в частности, опирался на представление ядра $\frac{1}{w-x}$ посредством отрезков его ряда Фурье по ортогональной на всей оси системе рациональных функций $|\Phi_k(x)|$ с заданным множеством полюсов $\{\bar{z}_j\}$, ($\text{Im } z_j > 0$).

В настоящей работе, пользуясь тем же методом и некоторыми результатами из [1], приводится решение аналогичных экстремальных задач взвешенно-весового приближения ядер вида $\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}$ ($A, B, \lambda \in R^1$) впервые рассмотренных С. Н. Бернштейном.

В § 1 рассматривается весовое полиномиальное приближение указанного ядра, а в § 2 — приближение с помощью рациональных функций с заданными полюсами.

Отметим, что а) решение экстремальной задачи при весовом полиномиальном приближении в равномерной метрике впервые было получено Н. И. Ахиезером, указавшим в своей книге найденный им по совершенно другим соображениям явный вид экстремальных полиномов и значения соответствующих экстремумов (см. [2], задача 9);

б) решение экстремальной задачи при приближении рациональными функциями с заданными полюсами в равномерной метрике впервые приведено акад. С. Н. Бернштейном в его известной монографии [3].

В данной работе показывается, что решение рассматриваемых задач в случае средне-квадратической метрики позволяет естественным путем получить решение аналогичной задачи в случае равномерной метрики.

В частности, показано также, что экстремальные функции обеих задач в средне-квадратической метрике совпадают с соответствующими экстремальными функциями при равномерной метрике.

Перейдем к изложению наших результатов.

§ 1. Об экстремальных задачах весового приближения ядра С. Н. Бернштейна

1. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих в верхней полуплоскости $G^{(+)} = \{z; \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\{\Phi_k(z)\}_1^\infty$ — ассоциированная с ней система Мальмквиста-Такенака

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{z - \lambda_1}, \dots, \Phi_n(z) = \frac{1}{z - \lambda_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z - \lambda_k}{z - \bar{\lambda}_k}, \quad (2 \leq n < +\infty) \quad (1.1)$$

рациональных функций с множеством полюсов $\{\lambda_k\}_1^\infty$, лежащих в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{z; \operatorname{Im} z < 0\}$.

Известно, что система $\{\Phi_k(z)\}_1^\infty$ ортонормальна на всей оси $-\infty < x < +\infty$ в следующем смысле (см. [1], стр. 2 или [3], [4])

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) \overline{\Phi_m(x)} dx = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Теорема А. (см. [1]). Для произвольных значений z, w и для любого n ($1 \leq n < +\infty$) справедливо тождество

$$\frac{1}{2i(\bar{w} - z)} = \sum_{k=1}^n \overline{\Phi_k(w)} \Phi_k(z) + \frac{B_n(z) \overline{B_n(w)}}{2i(\bar{w} - z)}, \quad (1.2)$$

где

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - \lambda_k}{z - \bar{\lambda}_k}, \quad \lambda_k = \frac{1 + i\lambda_k}{1 - i\lambda_k} \quad (k \geq 1). \quad (1.3)$$

Далее, аналитическую в полуплоскости $G^{(+)}$ функцию $f(z)$ относим к классу H_+^2 , если

$$\sup_{0 < y < 1} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^2 dx < M_f < +\infty.$$

Известно, что (см. [6], стр. 405—409) для любой функции $f(z) \in H_+^2$ ее граничные значения

$$f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x + iy)$$

существуют почти для всех $x \in (-\infty; +\infty)$, причем справедлива интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - z} dt, \quad z \in G^{(+)}.$$

Теорема Б. (см. [1]). Если $f(z) \in H_+^2$, то для любого n ($1 \leq n < +\infty$) справедлива формула

$$f(z) = \sum_{k=1}^n a_k(f) \Phi_k(z) + \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{B_n(t)} f(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^{(+)}, \quad (1.4)$$

где

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\Phi_k(t)} dt \quad (1 \leq k < +\infty).$$

2. а) Введем в рассмотрение рациональную функцию от двух переменных z, λ ($\lambda > 0$):

$$R_n(z; \lambda) = \frac{A + Bz}{(z^2 + \lambda^2) \pi_n(z)}, \quad z \in G^{(+)}, \quad 1 \leq n < +\infty, \quad (1.5)$$

где A, B — комплексные параметры, а

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k), \quad \overline{\pi}_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - \overline{\lambda}_k). \quad (1.6)$$

Обозначим через $S_n(x; R_n)$ n -ый отрезок ряда Фурье функции $R(x; \lambda)$ по ортогональной системе $\{\Phi_k(x)\}_1^\infty$:

$$S_n(x; R_n) = \sum_{k=1}^n c_k(R_n) \Phi_k(x), \quad 1 \leq n < +\infty,$$

где

$$c_k(R_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_n(t; \lambda) \overline{\Phi_k(t)} dt,$$

и пусть далее

$$S_n(z; R_n) = \sum_{k=1}^n C_k(R_n) \Phi_k(z), \quad 1 \leq n < +\infty.$$

Имеет место следующая

Лемма 1. Для любого n ($1 \leq n < +\infty$) и при любых комплексных $A, B, \lambda > 0$ и $z \in G^{(+)}$ справедливо тождество:

$$\begin{aligned} R_n(z; \lambda) - S_n(z; R_n) &= \frac{A + i\lambda B}{2i\lambda(z - i\lambda) \overline{\pi}_n(i\lambda)} - \\ &- \frac{A - i\lambda B}{2i\lambda(z + i\lambda) \pi_n(-i\lambda)} \frac{\overline{\pi}_n(z)}{\pi_n(z)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Доказательство. Полагая, что $z \in G^{(+)}$, рассмотрим следующий интеграл типа Коши:

$$J_n(z; \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_n(t; \lambda)}{t-z} dt \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A+Bt}{(t^2 + \lambda^2) \overline{\pi}_n(t)} \frac{dt}{t-z}. \quad (1.8)$$

Поскольку подынтегральная функция, как функция комплексной переменной t , в области $G^{(+)}$ имеет два простых полюса в точках $t = z$ и $t = i\lambda$, $\lambda > 0$, а при $|t| \rightarrow +\infty$ имеет порядок $O(|t|^{-n-2})$, то пользуясь теоремой Коши о вычетах, получим

$$J_n(z; \lambda) = \frac{A + Bz}{(z^2 + \lambda^2) \bar{\pi}_n(z)} + \frac{A + i\lambda B}{2i\lambda (i\lambda - z) \bar{\pi}_n(i\lambda)}. \quad (1.9)$$

С другой стороны, если в тождестве (1.2) теоремы А возьмем $w = t$ ($-\infty < t < +\infty$), то пользуясь представлением (1.8), приходим к тождеству

$$J_n(z; \lambda) = S_n(z; R_n) + B_n(z) U_n(z; \lambda), \quad z \in G^{(+)}, \quad (1.10)$$

где

$$U_n(z; \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{B_n(t)} R_n(t; \lambda)}{t - z} dt.$$

Но принимая во внимание определения (1.3) и (1.5) функции $B_n(t)$ и $R_n(t; \lambda)$ ($\lambda > 0$), получим

$$U_n(z; \lambda) = \frac{\prod_{k=1}^n \bar{z}_k}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(A + Bt) dt}{(t^2 + \lambda^2)(t - z) \pi_n(t)}, \quad z \in G^{(+)}. \quad (1.11)$$

Так как подынтегральная функция в полуплоскости $G^{(-)}$ как функция комплексной переменной t имеет простой полюс в точке $t = -i\lambda \in G^{(-)}$, а при $|t| \rightarrow +\infty$ имеет порядок $O(|t|^{-n-2})$, то по теореме вычетов имеет место равенство

$$U_n(z; \lambda) = - \frac{(A - i\lambda B) \prod_{k=1}^n \bar{z}_k}{2i\lambda (z + i\lambda) \pi_n(-i\lambda)},$$

которое вместе с (1.9) и (1.10) приводит нас к доказательству тождества (1.7). Тем самым лемма доказана.

б). Для фиксированного значения λ ($\lambda > 0$) мы определим полином $T_{n-1}^*(z; \lambda)$ степени $n-1$ от z посредством соотношения

$$T_{n-1}^*(z; \lambda) = \bar{\pi}_n(z) S_n(z; R_n), \quad 1 \leq n < +\infty. \quad (1.12)$$

Наряду с полиномом $T_{n-1}^*(z; \lambda)$, следуя М. М. Джрбашяну [1], рассмотрим также полином

$$L_{n-1}^*(z; w) = \begin{cases} \frac{\pi_n(w) - \pi_n(z)}{(w - z) \pi_n(w)}, & w \in G^{(-)}, \\ \frac{\bar{\pi}_n(w) - \bar{\pi}_n(z)}{(w - z) \bar{\pi}_n(w)}, & w \in G^{(+)}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Лемма 2. При любых комплексных A, B и $\lambda > 0$ справедливо тождество

$$\frac{A + Bz}{z^2 + \lambda^2} - T_{n-1}^*(z; \lambda) = \frac{A + i\lambda B}{2i\lambda(z - i\lambda)} \frac{\overline{\pi_n(z)}}{\overline{\pi_n(i\lambda)}} - \frac{A - i\lambda B}{2i\lambda(z + i\lambda)} \frac{\pi_n(z)}{\pi_n(-i\lambda)}, \quad (1.13)$$

т. е. полином $T_{n-1}^*(z; \lambda)$ допускает представление

$$T_{n-1}^*(z; \lambda) = \frac{1}{2i\lambda} \{ (A - i\lambda B) L_{n-1}^*(z; -i\lambda) - (A + i\lambda B) L_{n-1}^*(z; i\lambda) \}. \quad (1.14)$$

В самом деле, подставив значение $S_n(z; R_n)$ из (1.11) в тождество (1.7) леммы 1, мы получим соотношение (1.13). Представление (1.14) полинома следует из очевидного тождества

$$\frac{A + Bz}{z^2 + \lambda^2} = \frac{1}{2i\lambda} \left\{ \frac{A + i\lambda B}{z - i\lambda} - \frac{A - i\lambda B}{z + i\lambda} \right\}$$

и из определения (1.12) полинома $L_{n-1}^*(z; w)$, ($\operatorname{Im} w \neq 0$).

в). Пусть P_{n-1} — семейство всевозможных полиномов с комплексными коэффициентами порядка не выше, чем $n-1$.

Всюду ниже мы будем считать, что

$$\rho_n(z) = \rho_0 \pi_n(z) = \rho_0 \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k), \quad (1.15)$$

где $\rho_0 \neq 0$ — произвольная постоянная.

Для произвольных $A, B, \lambda \in R^1$ введем в рассмотрение функционал

$$A_n\{p; \lambda\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2} - p(x) \right|^2 \frac{dx}{|\rho_n(x)|^2}, \quad p \in P_{n-1}, \quad (1.16)$$

принимаящий, очевидно, конечное значение на семействе P_{n-1} .

Имеет место следующая

Теорема 1. На семействе P_{n-1} минимум функционала $A_n\{p; \lambda\}$ реализует полином $T_{n-1}^*(x, \lambda)$ леммы 2, причем справедливы равенства

$$\begin{aligned} \inf_{p \in P_{n-1}} A_n\{p; \lambda\} &= A_n\{T_{n-1}^*; \lambda\} = \frac{\pi(A^2 + \lambda^2 B^2)}{2|\lambda|^3 |\overline{\rho_n(i\lambda)}|^2} \equiv \\ &\equiv \frac{\pi(A^2 + \lambda^2 B^2)}{2|\lambda|^3} \exp \left\{ -\frac{2|\lambda|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |\rho_n(x)|}{x^2 + \lambda^2} dx \right\}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Доказательство. Заметим, что $\left| \frac{\pi_n(x)}{\pi_n(i\lambda)} \right| = 1$, $-\infty < x < +\infty$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \lambda^2} = \frac{\pi}{\lambda}, \quad \lambda > 0. \quad (1.18)$$

Так как

$$\frac{1}{(t + i\lambda)^2} \cdot \frac{\pi_n(t)}{\bar{\pi}_n(t)}$$

как функция комплексной переменной t регулярна в области $G^{(+)}$, а при $|t| \rightarrow +\infty$ имеет порядок $O(|t|^{-2})$, то по теореме Коши

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi_n(t)}{\bar{\pi}_n(t)} \frac{dt}{(t + i\lambda)^2} = 0. \quad (1.19)$$

Из тождества (1.7) леммы 1 и из (1.18), (1.19) для любых A, B и $\lambda > 0$ вытекает равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_n(x; \lambda) - S_n(x; R_n)|^2 dx = \frac{\pi(A^2 + \lambda^2 B^2)}{2\lambda^3 |\bar{\pi}_n(i\lambda)|^2}. \quad (1.20)$$

Но пользуясь значением (1.15) функции $R_n(x; \lambda)$, а также представлением (1.11) суммы $S_n(z; R_n)$, из (1.18) мы получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |R_n(x; \lambda) - S_n(x; R_n)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2} - T_{n-1}^*(x; \lambda) \right|^2 \frac{dx}{|\pi_n(x)|^2} = \\ &= \frac{\pi(A^2 + \lambda^2 B^2)}{2\lambda^3 |\bar{\pi}_n(i\lambda)|^2}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Заметим, что любой полином $p \in P_{n-1}$ допускает представление вида

$$p(x) = \bar{\pi}_n(x) \sum_{k=1}^n a_k \Phi_k(x)$$

с вполне определенными коэффициентами $\{a_k\}_1^n$, и обратно, для любого набора коэффициентов $\{a_k\}_1^n$ выражение, стоящее в правой части этого равенства, является некоторым полиномом $p \in P_{n-1}$. Поэтому принимая во внимание определения (1.5)–(1.6) функции $R_n(x; \lambda)$, мы можем утверждать, что при любом $p \in P_{n-1}$ функционал $A_n\{p; \lambda\}$ допускает представление вида

$$A_n\{p; \lambda\} = |\rho_0|^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| R_n(x; \lambda) - \sum_{k=1}^n a_k \Phi_k(x) \right|^2 dx \quad (1.22)$$

с надлежащими постоянными $\{a_k\}_1^n$, и обратно, для любого набора этих постоянных выражение справа является значением функционала при некотором $p \in P_{n-1}$.

Но согласно формуле (1.7) леммы 1 сумма $S_n(x; R_n)$ является n -ым отрезком ряда Фурье функции $R_n(x; \lambda)$ по ортогональной на всей оси $-\infty < x < +\infty$ системе $\{\Phi_k(x)\}_1^n$. Поэтому из (1.22) и (1.21) вытекает, что для любого полинома $p \in P_{n-1}$

$$A_n(p; \lambda) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2} - T_{n-1}^*(x; \lambda) \right|^2 \frac{dx}{|\rho_n(x)|^2} = \frac{\pi(A^2 + \lambda^2 B^2)}{2\lambda^3 |\bar{\rho}_n(i\lambda)|^2}, \quad (1.23)$$

поскольку по определению (1.15) функции $\bar{\rho}_n(z)$, $z \in G^{(+)}$ мы имеем

$$|\bar{\rho}_n(i\lambda)| = |\rho_n| |\bar{\pi}_n(i\lambda)|.$$

При этом в (1.23) знак равенства возможен лишь в том случае, когда

$$\sum_{k=1}^n a_k \Phi_k(x) \equiv S_n(x; R_n)$$

или, что то же самое, когда $p(x) \equiv T_{n-1}^*(x; \lambda)$.

Заметим, что для функции $\ln |\bar{\rho}_n(i\lambda)|$ справедлива формула Пуассона

$$\ln |\bar{\rho}_n(i\lambda)| = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |\rho_n(x)|}{x^2 + \lambda^2} dx, \quad \lambda > 0, \quad (1.24)$$

откуда и из (1.21), (1.24) мы приходим к формуле (1.17), чем и завершается доказательство теоремы.

г). Следуя М. М. Джрбашяну, введем в рассмотрение также полином

$$H_n(z; w) = \begin{cases} \frac{2i \operatorname{Im} w \bar{\pi}_n(w) - (z - w) \bar{\pi}_n(z)}{2i \operatorname{Im} w (w - z) \bar{\pi}_n(w)}, & w \in G^{(-)} \\ \frac{2i \operatorname{Im} w \bar{\pi}_n(w) - (z - \bar{w}) \bar{\pi}_n(z)}{2i \operatorname{Im} w (w - z) \bar{\pi}_n(w)}, & w \in G^{(+)}. \end{cases} \quad (1.25)$$

Согласно представлению (1.14) полинома $T_{n-1}^*(z; w)$ ($\lambda > 0$), а также согласно определению (1.6) полиномов $\pi_n(z)$ и $\bar{\pi}_n(z)$, заменяя n на $n+1$ получим для экстремального полинома $T_n^*(z; \lambda)$ степени n , ассоциированного с совокупностью параметров $\{\lambda_j\}_1^{n+1}$, представление вида

$$T_n^*(z; \lambda) = \frac{1}{2i\lambda} \{ (A - i\lambda B) H_n(z; -i\lambda) - (A + i\lambda B) H_n(z; i\lambda) \}. \quad (1.26)$$

Далее, определим полином степени n

$$H_n^*(z; \lambda) = [T_n^*(z; \lambda)]_{\lambda_{n+1} = i\lambda}, \quad (1.27)$$

ассоциированный с совокупностью чисел $\{\lambda_j\}_1^{n+1}$, где $\lambda_{n+1} \equiv i\lambda$ ($\lambda > 0$).

Из представления (1.26) полинома $T_n^*(z; \lambda)$ и из (1.27), (1.25) заключаем, что полином $H_n^*(z; \lambda)$ ($\lambda > 0$) допускает представление вида

$$H_n^*(z; \lambda) = \frac{1}{2i\lambda} \{ (A - i\lambda B) H_n(z; -i\lambda) - (A + i\lambda B) H_n(z; i\lambda) \}. \quad (1.28)$$

Наконец, введем в рассмотрение функционал

$$A_{n+1}(p; \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2} - p(x) \right|^2 \frac{dx}{(x^2 + \lambda^2) |\rho_n(x)|^2}, \quad p \in P_n,$$

принимая конечное значение уже на семействе полиномов P_n степени не выше чем n .

Теорема 2. На семействе P_n минимум функционала $A_{n+1}(p; \lambda)$ реализует полином $H_n^*(x; \lambda)$, причем

$$\begin{aligned} \inf_{p \in P_n} A_{n+1}(p; \lambda) &= A_{n+1}(H_n^*; \lambda) = \frac{\pi(A^2 + \lambda^2 B^2)}{8|\lambda|^3 |\rho_n(i\lambda)|^2} = \\ &= \frac{\pi(A^2 + \lambda^2 B^2)}{8|\lambda|^3} \exp \left\{ -\frac{2|\lambda|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |\rho_n(x)|}{x^2 + \lambda^2} dx \right\}. \end{aligned}$$

В самом деле, достаточно применить метод доказательства теоремы 1, используя леммы 1 и 2 с заменой n на $n+1$ и $\lambda_{n+1} = i\lambda$ ($\lambda > 0$) и определение (1.27) полинома $H_n^*(x; \lambda)$ ($-\infty < x < +\infty$).

3. Теперь приведем решение задачи наилучшего полиномиального приближения ядра $\frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2}$ на всей оси $-\infty < x < +\infty$ в метрике равномерного приближения при наличии весовых функций видов

$$\frac{\sqrt{x^2 + \lambda^2}}{|\rho_n(x)|} \quad (\lambda > 0) \quad \text{и} \quad |\rho_n(x)|^{-1}.$$

Если при любых $A, B \in R^1$ и $\lambda > 0$ определим положительные константы R_1, R_2 ($0 < R_1, R_2 < +\infty$) и вещественные константы φ_1 и φ_2 из соотношений

$$\frac{A + i\lambda B}{i\lambda \rho_n(i\lambda)} = R_1 e^{-i\varphi_1}, \quad -\frac{A + i\lambda B}{2i\lambda^2 \rho_n(i\lambda)} = R_2 e^{-i\varphi_2}, \quad (1.29)$$

то в качестве следствия леммы 2 получим следующее утверждение.

Лемма 3. Для любого n ($1 \leq n < +\infty$) и вещественных $A, B, \lambda > 0$ на всей оси $-\infty < x < +\infty$ справедливы тождества

а)

$$\frac{\sqrt{x^2 + \lambda^2}}{|\rho_n(x)|} \left\{ \frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2} - T_{n-1}^*(x; \lambda) \right\} =$$

$$= \frac{R_1}{2} \left(\sqrt{\frac{x - i\lambda}{x + i\lambda}} \sqrt{\frac{\pi_n(x)}{\pi_n(x)}} e^{i\varphi_1} + \sqrt{\frac{x + i\lambda}{x - i\lambda}} \sqrt{\frac{\pi_n(x)}{\pi_n(x)}} e^{-i\varphi_1} \right),$$

б)

$$\frac{1}{|\rho_n(x)|} \left\{ \frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2} - H_n^*(x; \lambda) \right\} =$$

$$= \frac{R_2}{2} \left(\frac{x-i\lambda}{x+i\lambda} \sqrt{\frac{\overline{\rho_n(x)}}{\rho_n(x)}} e^{i\varphi_2} + \frac{x+i\lambda}{x-i\lambda} \sqrt{\frac{\overline{\rho_n(x)}}{\rho_n(x)}} e^{-i\varphi_2} \right),$$

где R_1, φ_1 и R_2, φ_2 определяются из соотношений (1.28).

Введем, наконец, функционал

$$\bar{A}_n \{p; \lambda\} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left\{ \frac{\sqrt{x^2 + \lambda^2}}{|\rho_n(x)|} \left| \frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2} - p(x) \right| \right\}, \quad p \in P_{n-1},$$

принимая конечное значение на семействе $p \in P_{n-1}$.

Применяя теорему П. Л. Чебышева о свойствах, характеризующих поведение полиномов равномерного наилучшего приближения, можно доказать, что полученные нами экстремальные полиномы при средне-квадратическом приближении являются также решениями тех же задач в случае равномерного приближения, установленные впервые Н. И. Ахиезером.

Теорема 3. 1°. На семействе P_{n-1} минимум функционала $\bar{A}_n \{p; \lambda\}$ также реализует полином $T_{n-1}^*(x; \lambda)$ теоремы 1, причем

$$\begin{aligned} \inf_{p \in P_{n-1}} \bar{A}_n \{p; \lambda\} &= \bar{A}_n \{T_{n-1}^*(x; \lambda), \lambda\} = \frac{\sqrt{A^2 + \lambda^2 B^2}}{|\lambda| |\rho(i\lambda)|} = \\ &= \frac{\sqrt{A^2 + \lambda^2 B^2}}{|\lambda|} \exp \left\{ -\frac{|\lambda|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |\rho_n(x)|}{x^2 + \lambda^2} dx \right\}. \end{aligned}$$

2°. На семействе P_n минимум функционала

$$\bar{A}_{n+1} \{p; \lambda\} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left\{ \frac{1}{|\rho_n(x)|} \left| \frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2} - p(x) \right| \right\}, \quad p \in P_n$$

реализует полином $H_n^*(x; \lambda)$ теоремы 2, причем

$$\begin{aligned} \inf_{p \in P_n} \bar{A}_{n+1} \{p; \lambda\} &= \bar{A}_{n+1} \{H_n^*; \lambda\} = \frac{\sqrt{A^2 + \lambda^2 B^2}}{2\lambda^2 |\rho_n(i\lambda)|} = \\ &= \frac{\sqrt{A^2 + \lambda^2 B^2}}{2\lambda^2} \exp \left\{ -\frac{|\lambda|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |\rho_n(x)|}{x^2 + \lambda^2} dx \right\}. \end{aligned}$$

§ 2. Об экстремальных задачах приближения ядра

С. Н. Бернштейна рациональными функциями с заданными полюсами

1. Здесь мы воспользуемся представлением функции $R(z; w) = (w - z)^{-2}$ посредством отрезка $S_{n-1}(z; R)$ ее ряда Фурье по ортогональной на всей оси системе $\{\Phi_k(z)\}_1^n$, т. е. представлением

$$S_{n+1}(z; R) = -2i \sum_{k=1}^{n+1} \overline{\Phi_k(w)} \Phi_k(z), \lambda_{n+1} \equiv w \in G^{(+)} \quad (2.1)$$

Далее, для любого фиксированного значения $w \in G^{(+)}$ мы определим рациональную функцию $r_n(z; w) \in \omega \{ \lambda_k \}$ от z посредством соотношения

$$r_n(z; w) = (\bar{w} - z) S_{n+1}(z; R). \quad (2.2)$$

Имеет место следующая

Л е м м а 3. а) Для любого n ($1 \leq n < +\infty$) и $z \in \overline{G^{(+)}}$ справедлива формула

$$R(z; w) - S_{n+1}(z; w) = \frac{1}{2i \operatorname{Im} w} \left(\frac{z - \bar{w}}{z - w} \right) \frac{B_n(z) \overline{B_n(w)}}{\bar{w} - z} \quad (2.3)$$

б) Функция $r_n(z; w) \in \omega \{ \lambda_k \}$ допускает представление

$$r_n(z; w) = \frac{2i \operatorname{Im} w + (z - w) B_n(z) \overline{B_n(w)}}{2i \operatorname{Im} w (\bar{w} - z)} \quad (2.4)$$

и удовлетворяет интерполяционным данным

$$r_n^{(s_k-1)}(\lambda_k; w) = \frac{(s_k-1)!}{(\bar{w} - \lambda_k)}, \quad 1 \leq k \leq n+1, \lambda_{n+1} \equiv w \in G^{(+)}. \quad (2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку при $w \in G^{(+)}$, $R(z; w) \in H_+^2$, то пользуясь теоремой Б мы приходим к тождеству

$$R(z; w) - S_{n+1}(z; R) = B_{n+1}(z) J_n(z; w), \quad z \in G^{(+)}, \quad (2.6)$$

где

$$J_n(z; w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{B_{n+1}(t)} R_n(t; w)}{t - z} dt.$$

Заметим теперь, что из (1.3) и (1.6)

$$B_{n+1}(z) = \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} x_k \right\} \frac{z - w}{z - \bar{w}} \frac{\overline{\pi_n(z)}}{\pi_n(z)} \quad (|x_k| = 1), \quad (2.7)$$

поэтому из определения функции $R(t; w)$ и из (2.7) следует равенство

$$\overline{B_{n+1}(t)} R(t; w) = \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \bar{x}_k \right\} \frac{1}{(t - \bar{w})(t - w)} \frac{\overline{\pi_n(t)}}{\pi_n(t)}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

следовательно и равенство

$$J_n(z; w) = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \bar{x}_k}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{(t - z)(t - w)} \frac{\overline{\pi_n(t)}}{\pi_n(t)} \right\} \frac{dt}{t - \bar{w}}. \quad (2.8)$$

Но выражение

$$\frac{1}{(t-z)(t-w)} \frac{\overline{\pi_n(t)}}{\pi_n(t)}, \quad z, w \in G^{(+)}$$

как функция комплексной переменной t регулярна в полуплоскости $G^{(-)}$ и при $|t| \rightarrow +\infty$ имеет порядок $O(|t|^{-2})$. Отсюда и из (2.8) ввиду того, что $\bar{w} \in G^{(-)}$, получим

$$J_n(z; w) = - \frac{\left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \bar{x}_k \right\}}{(\bar{w}-\bar{w})(\bar{w}-z)} \frac{\overline{\pi_n(\bar{w})}}{\pi_n(\bar{w})} = \frac{\bar{x}_{n+1}}{2i \operatorname{Im} w} \cdot \frac{\overline{B_n(w)}}{\bar{w}-z}. \quad (2.9)$$

Наконец, из (2.6) и (2.9) следует тождество (2.3).

6). Пусть, $s_k \geq 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$, и пусть $p_k(n)$ для любого целого $n \geq 1$ и k ($1 \leq k \leq n$) означает кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^n$. Очевидно

$$1 \leq s_k \leq p_k(n) \quad (1 \leq k \leq n), \quad s_n = p_n(n),$$

поэтому, если $0 < j \leq s_k - 1 \leq p_k(n) - 1$, то функция $\psi_{n,j}(z) = (z - \lambda_k)^{-j-1} \pi_n(z)$ является полиномом. Полагая $R > \max_{1 \leq j \leq n} \{|\lambda_j|\}$,

отсюда j -кратным дифференцированием по z формулы

$$\pi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{\pi_n(t)}{t-z} dt \quad (|z| < R)$$

получим

$$\pi_n^{(j)}(\lambda_k) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{|t|=R} \psi_{n,j}(t) dt = 0, \quad 0 \leq j \leq s_k - 1. \quad (2.10)$$

Далее заметим, что

$$\frac{\partial^{s_k-1}}{\partial z^{s_k-1}} \left(\frac{1}{\bar{w}-z} \right)_{z=\lambda_k} = \frac{(s_k-1)!}{(\bar{w}-\lambda_k)^{s_k}}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.11)$$

Наконец, (s_k-1) -кратным дифференцированием тождества

$$\frac{1}{\bar{w}-z} - r_n(z; w) = \frac{1}{2i \operatorname{Im} w} \frac{\overline{\pi_{n+1}(z)}}{\pi_{n+1}(z)} \frac{\overline{\pi_n(w)}}{\pi_n(w)}, \quad \lambda_{n+1} = w \in G^{(+)}, \quad z \in G^{(+)}$$

в силу (2.10), (2.11) мы приходим к утверждению (2.5) леммы, поскольку

$$\frac{(s_k-1)!}{(\bar{w}-\lambda_k)^{s_k}} - r_n^{(s_k-1)}(\lambda_k; w) = \left\{ \frac{\overline{\pi_n(w)}}{\pi_n(w)} \right\} \sum_{j=0}^{s_k-1} C_{s_k-1}^j \frac{\overline{\pi_{n+1}^{(j)}(\lambda_k)}}{\pi_{n+1}^{(s_k-j)}(\lambda_k)} = 0.$$

Тем самым лемма доказана.

2. Пусть при данном n ($1 \leq n < +\infty$) $\omega_0\{\lambda_k\}$ — семейство всевозможных рациональных функций вида

$$\left\{ \sum_{j=1}^n a_j \Phi_j(x) \right\}$$

и $\omega \{ \lambda_k \}$ — семейство вида

$$\{ a_0^{(n)} + R_n(x) \}, \quad R_n \in \omega \{ \lambda_k \}.$$

Принимая во внимание определение (1.1) системы $\{ \Phi_k(z) \}_1^\infty$, легко видеть, что семейство $\omega \{ \lambda_k \}$ совпадает с множеством рациональных функций, имеющих вид

$$\left\{ a_0^{(n)} + \sum_{j=1}^n \frac{b_j^{(n)}}{(x - \bar{\lambda}_j)^{s_j}} \right\}.$$

Теорема 4. На семействе $\omega \{ \lambda_k \}$ минимум функционала

$$\mu^* \left\{ \frac{1}{\bar{w} - x}; R_n \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\bar{w} - x} - R_n(x) \right|^2 \frac{dx}{|w - x|^2} \quad (2.12)$$

реализует функция $r_n(x; w) \in \omega \{ \lambda_k \}$ леммы 3, причем

$$\inf_{R_n \in \omega \{ \lambda_k \}} \mu^* \left\{ \frac{1}{\bar{w} - x}; R_n \right\} = \mu^* \left\{ \frac{1}{\bar{w} - x}; r_n(x, w) \right\} = \frac{\pi |B_n(w)|^2}{4 (\operatorname{Im} w)^3}. \quad (2.13)$$

Доказательство. Из тождества (2.3) леммы 3 вытекает равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R(x; w) - S_{n+1}(x; R)|^2 dx = \frac{\pi |B_n(w)|^2}{4 (\operatorname{Im} w)^3}, \quad w \in G^{(+)}. \quad (2.14)$$

Но пользуясь значением функции $R_n(x; w)$, а также представлением (2.2) суммы $S_{n+1}(x; R)$, мы получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |R(x; w) - S_{n+1}(x; R)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\bar{w} - x} - r_n(x; w) \right|^2 \frac{dx}{|w - x|^2} = \\ &= \frac{\pi |B_n(w)|^2}{4 (\operatorname{Im} w)^3}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Заметим, что любая рациональная функция $R_n(x)$ допускает представление вида

$$R_n(x) = (\bar{w} - x) \sum_{k=1}^{n+1} a_k \Phi_k(x), \quad \lambda_{n+1} \equiv w \in G^{(+)}$$

с вполне определенными коэффициентами $\{a_k\}_1^{n+1}$, и обратно, для любого набора коэффициентов $\{a_k\}_1^{n+1}$ выражение, стоящее в правой части этого равенства, является некоторой рациональной функцией $R_n \in \omega \{ \lambda_k \}$.

В силу этого и принимая во внимание определение функции $r_n(x; w)$, мы можем утверждать что при любом $R_n \in \omega\{\lambda_k\}$ функционал $\mu^* \left\{ \frac{1}{w-x}; R_n \right\}$ допускает представление вида

$$\mu^* \left\{ \frac{1}{w-x}; R_n \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| R(x; w) - \sum_{k=1}^{n+1} a_k \Phi_k(x) \right|^2 dx \quad (2.16)$$

с надлежащими постоянными $|a_k|_1^{n+1}$, и обратно, для любого набора этих постоянных выражение справа является значением функционала $\mu^* \left\{ \frac{1}{w-x}; R_n \right\}$ при некотором $R_n \in \omega\{\lambda_k\}$.

Но согласно формуле (2.3) леммы 3 сумма $S_{n+1}(x; R)$ является n -ным отрезком ряда Фурье функции $R(x; w)$ по ортогональной на всей оси $-\infty < x < +\infty$ системе $\{\Phi_k(x)\}_1^\infty$.

Поэтому из (2.16) и (2.15) вытекает, что для любой рациональной функции $R_n \in \omega\{\lambda_k\}$

$$\mu^* \left\{ \frac{1}{w-x}; R_n \right\} \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{w-x} - r_n(x; w) \right|^2 \frac{dx}{|w-x|^2} = \frac{\pi |B_n(w)|^2}{4 (\operatorname{Im} w)^3}. \quad (2.17)$$

При этом в (2.17) знак равенства возможен лишь в том случае, когда

$$R_n(x) \equiv r_n(x; w), \quad w \in G^{(+)}$$

Из (2.17), (2.15) мы приходим к формуле (2.13), чем и завершается доказательство теоремы 4.

Теорема 5. Среди рациональных функций семейства $\omega\{\lambda_k\}$ минимум функционала

$$\mu \left\{ \frac{1}{w-x}; R_n \right\} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left| \frac{1}{w-x} - R_n(x) \right|, \quad R_n \in \omega\{\lambda_k\} \quad (2.18)$$

реализует та же самая функция $r_n(x; w)$ теоремы 4, причем

$$\inf_{R_n \in \omega\{\lambda_k\}} \mu \left\{ \frac{1}{w-x}; R_n \right\} = \mu \left\{ \frac{1}{w-x}; r_n(x; w) \right\} = \frac{\pi |B_n(w)|}{2 \operatorname{Im} w}. \quad (2.19)$$

В самом деле, во-первых из (2.12), (2.13) и (2.18) следует неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\pi |B_n(w)|^2}{4 (\operatorname{Im} w)^3} &\leq \mu^* \left\{ \frac{1}{w-x}; R_n \right\} \leq \mu^2 \left\{ \frac{1}{w-x}; R_n \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|w-x|^2} = \\ &= \frac{\pi}{\operatorname{Im} w} \mu^2 \left\{ \frac{1}{w-x}; R_n \right\}, \end{aligned}$$

откуда заключаем, что для любого $R_n \in \omega\{\lambda_k\}$,

$$\inf_{R_n \in \{r_k\}} \mu \left\{ \frac{1}{w-x}; R_n \right\} \geq \frac{\pi |B_n(w)|}{2 \operatorname{Im} w}. \quad (2.20)$$

С другой стороны, пользуясь тождеством (2.3), приходим к неравенству

$$\mu \left\{ \frac{1}{w-x}; r_n(x; w) \right\} \leq \frac{\pi |B_n(w)|}{2 \operatorname{Im} w}, \quad (2.21)$$

что вместе с (2.20) приводит нас к утверждению (2.19).

3. Теперь рассмотрим следующие рациональные функции:

$$\sigma_n(x; \lambda) = \frac{1}{i\lambda} |(A - i\lambda B) S_n(x; i\lambda) - (A + i\lambda B) S_n(x; -i\lambda)|$$

и

$$\sigma_n^*(x; \lambda) = \frac{1}{2i\lambda} |(A - i\lambda B) r_n(x; i\lambda) - (A + i\lambda B) r_n(x; -i\lambda)|,$$

где A, B — вещественные числа, $\lambda > 0$, а $S_n(x; i\lambda)$ является n -ым отрезком ряда Фурье функции $\frac{1}{x+i\lambda}$ по ортогональной системе $\{\Phi_k(x)\}_1^\infty$, т. е.

$$S_n(x; i\lambda) = \sum_{k=1}^n \overline{\Phi_k(i\lambda)} \Phi_k(x).$$

Определим положительные константы ρ_1, ρ_2 ($0 < \rho_1, \rho_2 < +\infty$) и вещественные числа α_1 и α_2 из соотношений

$$\frac{A + i\lambda B}{i\lambda} \frac{\pi_n(i\lambda)}{\overline{\pi_n(i\lambda)}} = \rho_1 e^{-i\alpha_1}, \quad -\frac{A + i\lambda B}{2\lambda^2} \frac{\pi_n(i\lambda)}{\overline{\pi_n(i\lambda)}} = \rho_2 e^{-i\alpha_2}.$$

Отсюда и из (1.2), (2.3) следует

Лемма 4. Для любого n ($1 \leq n < +\infty$) и вещественных $A, B, \lambda > 0$ на всей оси справедливы тождества

$$\begin{aligned} \text{а) } & \sqrt{x^2 + \lambda^2} \left\{ \frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2} - \sigma_n(x; \lambda) \right\} = \\ & = \frac{\rho_1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{x-i\lambda}{x+i\lambda}} \frac{\pi_n(x)}{\overline{\pi_n(x)}} e^{i\alpha_1} + \sqrt{\frac{x+i\lambda}{x-i\lambda}} \frac{\overline{\pi_n(x)}}{\pi_n(x)} e^{-i\alpha_1} \right\}, \\ \text{б) } & \frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2} - \sigma_n^*(x; \lambda) = \frac{\rho_2}{2} \left\{ \frac{x-i\lambda}{x+i\lambda} \frac{\pi_n(x)}{\overline{\pi_n(x)}} e^{i\alpha_2} + \frac{x+i\lambda}{x-i\lambda} \frac{\overline{\pi_n(x)}}{\pi_n(x)} e^{-i\alpha_2} \right\}. \end{aligned}$$

4. Пусть, $\omega_0 \{\lambda_k; \bar{\lambda}_k\}$ — семейство всевозможных рациональных функций вида

$$\left\{ \frac{p_{2n-1}(z)}{\prod_{k=1}^n (z - \lambda_k) \prod_{k=1}^n (z - \bar{\lambda}_k)} \right\}, \quad 1 \leq n < +\infty,$$

а $\omega \{\lambda_k; \bar{\lambda}_k\}$ — семейство

$$|a_0^{(n)} + R_n(z)|, R_n \in \omega_0 \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}.$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Omega \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; R_n \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - R_n(x) \right|^2 dx, \quad R_n \in \omega_0 \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \},$$

принимаящий конечное значение на семействе рациональных функций $\omega_0 \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}$.

Теорема 6. 1°. На семействе $\omega_0 \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}$ минимум функционала $\Omega \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}, R_n \right\}$ реализует функция $\sigma_n(x; \lambda)$, причем

$$\begin{aligned} \inf_{R_n \in \omega_0 \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}} \Omega \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; R_n \right\} &= \Omega \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; \sigma_n(x; \lambda) \right\} = \\ &= \frac{\pi(A^2 + \lambda^2 B^2)}{2|\lambda|^3} |B_n(i\lambda)|^2. \end{aligned}$$

2°. Среди рациональных функций семейства $\omega \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}$ минимум функционала

$$\Omega^* \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; R_n \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - R_n(x) \right|^2 \frac{dx}{x^2+\lambda^2}, \quad R_n \in \omega \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}$$

реализует функция $\sigma_n^*(x; \lambda) \in \omega \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}$, причем

$$\begin{aligned} \inf_{R_n \in \omega \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}} \Omega^* \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; R_n \right\} &= \Omega^* \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; \sigma_n^*(x; \lambda) \right\} = \\ &= \frac{\pi(A^2 + \lambda^2 B^2)}{8|\lambda|^5} |B_n(i\lambda)|^2. \end{aligned}$$

Здесь так же как и выше применяя теорему П. Л. Чебышева можно доказать, что полученные нами экстремальные функции $\sigma_n(x; \lambda)$ и $\sigma_n^*(x; \lambda)$ при средне-квадратическом приближении являются решениями тех же задач в случае равномерного приближения. Иначе говоря, имеет место следующая

Теорема 7. 1°. На семействе $\omega \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}$ минимум функционала

$$\rho \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; R_n \right\} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left| \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - R_n(x) \right|, \quad R_n \in \omega \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}$$

реализует функция $\sigma_n^*(x; \lambda) \in \omega \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}$, причем

$$\begin{aligned} \inf_{R_n \in \omega \{ \lambda_k; \bar{\lambda}_k \}} \rho \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; R_n \right\} &= \rho \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; \sigma_n^*(x; \lambda) \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{A^2 + \lambda^2 B^2}}{2|\lambda|^2} |B_n(i\lambda)|. \end{aligned}$$

2°. Среди рациональных функций семейства $\omega_0 \{\lambda_k; \bar{\lambda}_k\}$ минимум функционала

$$\rho^* \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; R_n \right\} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left\{ \left| \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - R_n \right| \right\}, R_n \in \omega_0 \{\lambda_k; \bar{\lambda}_k\}$$

реализует та же функция $\sigma_n(x; \lambda) \in \omega_0 \{\lambda_k; \bar{\lambda}_k\}$ участвующая в теореме 6, причем

$$\inf_{R_n \in \omega_0 \{\lambda_k; \bar{\lambda}_k\}} \rho^* \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; R_n \right\} = \rho^* \left\{ \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; \sigma_n(x, \lambda) \right\} = \\ = \frac{\sqrt{A^2 + \lambda^2 B^2}}{|\lambda|} |B_n(i\lambda)|.$$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и ценные советы.

Армянский государственный
пединститут им. Х. Абовяна

Поступила 2.III.1977

Ա. Ա. ՎՈՍԿԱՆՅԱՆ. Ամբողջ առանցքի վրա մոտավորությունների տեսության մի բանի էստրեմալ խնդիրների մասին (ամփոփում)

Օգտվելով առաջին անգամ [1] աշխատանքում շարադրված մեթոդից, դիտարկված է ամբողջ առանցքի վրա Ս. Ն. Բեռնշտեյնի կորիզի՝

$$\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}, A, B, \lambda \in R'$$

միջին թառակուսային մոտարկումները բազմանդամներով և տված բևեռներ ունեցող ուղիղ առանցքի վրա:

Նշենք, որ հավասարաչափ մետրիկայով այդ ֆունկցիայի լավագույն կշռային մոտավորության խնդիրը բազմանդամներով առաջին անգամ տրվել է Ն. Ի. Ախիսկերի կողմից, իսկ ֆիկսած բևեռներով ուղիղ առանցքի վրա կոտորակներով մոտավորության դեպքում բերված է Ս. Ն. Բեռնշտեյնի հայտնի մեկնադրության մեջ:

Ցույց է տրվում, որ դիտարկված խնդրի լուծումը միջին թառակուսային մետրիկայով, հեռավորություն է տալիս բնական ճանապարհով ստանալ անալոգ խնդրի լուծումը հավասարաչափ մետրիկայով: Միաժամանակ ցույց է տրվում նաև որ էքստրիմալ ֆունկցիաները երկու մետրիկաներում էլ համընկնում են:

A. A. VOSKANIAN. On some extremal problems in the theory of approximation on the real axis (summary)

Using the method proposed in [1], the mean-quadratic approximation of S. N. Bernstein's kernel $\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}, A, B, \lambda \in R'$ by polynomials and rational functions with prescribed poles is considered.

It is shown that the solution of this problems leads to a natural solution of analogous problem in the uniform metric. It have been found that for both cases the extremal functions coincide.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси, Матем. сб. 95 (137), вып. 3 (11), 1974.

2. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации, М., Изд. «Наука», 1965.
3. С. Н. Бернштейн. Экстремальные свойства полиномов, ОНТИ, Л.—М., 1937.
4. F. Malmg $\ddot{a}$ st. Sur lad une classe de fonctions analutiques Par leurs valeurs dans un ensemble donne de Points, Comptes rendus sixieme congris (1925) des math. scand, Kopenhagen, 1926, 253—259.
5. S. Takenaka. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations, Japan, J. Math., 2, 1925.
6. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. «Наука», 1966.
7. В. К. Дзядык. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., Изд. «Наука», 1977.

Մ. Ե. ԲՕԶՕՅԱՆ, Բ. Ե. ԴՕՐՕՏՅԱՆ

ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ АКТИВНОСТИ СОВОКУПНОСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Работа посвящена исследованию функций алгебры логики с точки зрения степени зависимости функции от своих аргументов. Подобные исследования полезны не только с теоретической точки зрения, но и имеют весьма ценное практическое значение. Результаты этого направления могут применяться для анализа и синтеза схем из функциональных элементов, синтеза надежных схем из ненадежных элементов, построения проверяющих и диагностирующих тестов и т. д.

Работа состоит из четырех пунктов.

В п. 1 вводится основное для работы понятие активности совокупности переменных относительно функции и приводятся некоторые основные свойства этого понятия. Вводится понятие допустимого вектора.

В п. 2. приводятся некоторые условия допустимости вектора.

В п. 3. вводятся два отношения эквивалентностей R_1 и R_2 и перечисляются функции, зависящие от данного числа n переменных, не эквивалентные относительно этих отношений.

В п. 4 некоторые хорошо известные классы функций характеризуются с помощью понятия „активность“ и приводятся некоторые необходимые и достаточные условия принадлежности функций к этим классам на языке этого понятия. Выполнены исследования в области пороговых функций. Эти исследования в определенной степени облегчают выяснение вопроса: является ли данная функция пороговой?

В работе сделана также попытка связать понятие „активность“ с ранее известными понятиями, некоторые из последних переформулированы на этом языке.

В работе использованы важные понятия и утверждения из теории функций алгебры логики, которые подробно изучены в работах [1, 2, 3].

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность А. В. Петросяну за постоянное внимание и ценные советы.

1. Упорядоченную совокупность различных переменных $|x_1, x_2, \dots, x_n|$ обозначим через x_n , булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — через $f(x_n)$, а множество всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ — через $\Phi(n)$ ($n \in N$).

Пусть $E = \{0, 1\}$ и $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$. Определим $\bar{x}^a$ как упорядоченную совокупность $\{x_1^a, x_2^a, \dots, x_n^a\}$, где

$$x_i^a = \begin{cases} x_i, & \text{если } a = 1 \\ \bar{x}_i, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Нормой булевой функции $f(\bar{x}_n)$ назовем число

$$\|f(\bar{x}_n)\| = \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{x} \in E^n} f(\bar{x}).$$

Легко проверяются следующие свойства понятия нормы.

1н. Для любых двух функций $\varphi(\bar{x}_n)$ и $\psi(\bar{x}_n)$

$$а) \|\varphi(\bar{x}_n) \vee \psi(\bar{x}_n)\| = \|\varphi(\bar{x}_n)\| + \|\psi(\bar{x}_n)\| - \|\varphi(\bar{x}_n) \cdot \psi(\bar{x}_n)\|,$$

$$б) \|\varphi(\bar{x}_n) \oplus \psi(\bar{x}_n)\| = \|\varphi(\bar{x}_n)\| + \|\psi(\bar{x}_n)\| - 2\|\varphi(\bar{x}_n) \cdot \psi(\bar{x}_n)\|.$$

2н. Если функции $\varphi(\bar{x}_n)$ и $\psi(\bar{x}_n)$ не имеют общих существенных переменных, то

$$\|\varphi(\bar{x}_n) \cdot \psi(\bar{x}_n)\| = \|\varphi(\bar{x}_n)\| \cdot \|\psi(\bar{x}_n)\|.$$

3н. Для любой функции $\varphi(\bar{x}_n)$ и для любого набора $\bar{a} \in E^n$

$$а) \|\bar{\varphi}(\bar{x}_n)\| = 1 - \|\varphi(\bar{x}_n)\|,$$

$$б) \|\varphi(\bar{x}_n^{\bar{a}})\| = \|\varphi(\bar{x}_n)\|.$$

Каждой совокупности $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \subseteq \bar{x}_n$ соответствует набор $\bar{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ такой, что $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 0$, а остальные его компоненты — единицы. Так как указанное соответствие взаимно-однозначно, то совокупность $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ и соответствующий ей набор $\bar{a}$ различать мы не будем.

Определение. Производной функцией булевой функции $f(\bar{x}_n)$ по совокупности переменных $\bar{x} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \subseteq \bar{x}_n$ называется функция $f(\bar{x}_n) \oplus f(\bar{x}_n^{\bar{a}})$ и обозначается через

$$\frac{\partial f(\bar{x}_n)}{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})} \left(\text{или } \frac{\partial f(\bar{x}_n)}{\partial \bar{x}} \right).$$

Введем теперь понятие активности совокупности переменных относительно функции, являющейся обобщением понятий существенной и фиктивной переменных.

Определение. Активностью совокупности переменных $\bar{x} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \subseteq \bar{x}_n$ относительно функции $f(\bar{x}_n)$ называется

число $\left\| \frac{\partial f(\bar{x}_n)}{\partial \bar{a}} \right\|$, которое обозначается через

$$\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{f(\bar{x}_n)} \left(\text{или } \omega_{\bar{a}}^{f(\bar{x}_n)} \right).$$

Приведем некоторые свойства этого понятия [4].

1а. Для любого $\bar{a} \in E^n$, $0 \leq \omega_{\bar{a}}^{f(\bar{x}_n)} \leq 1$.

2. Для любого номера i , $1 \leq i \leq n$, $\omega_i^{f(\bar{x}_n)} = 0$ тогда и только тогда, когда функция $f(\bar{x}_n)$ фиктивно зависит от переменной x_i .

3а. Для любых $\alpha \in E$; $\bar{a}, \bar{\alpha} \in E^n$,

$$\omega_{\bar{a}}^{f(\bar{x}_n)} = \omega_{\bar{\alpha}}^{f^{\bar{\alpha}}(\bar{x}_n)}.$$

4а. Для любого номера i , $1 \leq i \leq n$, $\omega_i^{f(\bar{x}_n)} = 1$ тогда и только тогда, когда функция $f(\bar{x}_n)$ представляется в виде

$$f(\bar{x}_n) = x_i \oplus f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

5а. Если при некотором $\bar{a}$, $\omega_{\bar{a}}^{f(\bar{x}_n)} = 1$, то $\|f(\bar{x}_n)\| = 1/2$. Во всех перечисленных свойствах $f(\bar{x}_n)$ — произвольная функция от переменных $\bar{x}_n$.

Доказательства этих свойств приводятся в работе [4], поэтому мы здесь приведем только доказательство свойства 5а, детали которого понадобятся нам в дальнейшем.

Заметим для этого сначала, что так как для любых двух наборов $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in E^n$, $(\bar{\beta}^{\bar{\alpha}})^{\bar{\alpha}} = \bar{\beta}$, то по данному набору $\bar{a}$ множество E^n разбивается на 2^{n-1} неупорядоченных пар наборов $(\bar{\beta}, \bar{\beta}^{\bar{a}})$.

Пусть теперь для функции $f(\bar{x}_n)$ при некотором $\bar{a}$ имеем $\omega_{\bar{a}}^{f(\bar{x}_n)} = 1$. Из последнего следует, что для любого набора $\bar{\beta}$, $f(\bar{\beta}) \oplus$

$\oplus f(\bar{\beta}^a) = 1$, или, что значение функции $f(x_n)$ равно единице ровно на одном наборе каждой пары $(\bar{\beta}, \bar{\beta}^a)$. Свойство 5а доказано.

Отметим, что для всякой функции $f(x_n)$, $\omega_{\bar{1}}^{f(x_n)} = 0$, где $\bar{1} = (1, 1, \dots, 1) \in E^n$.

Таким образом, каждой функции $f(x_n)$ можно сопоставить вектор длины $2^n - 1$ $\Omega^{f(x_n)}$, который определяется следующим образом:

$$\Omega^{f(x_n)} = (\omega_1^{f(x_n)}, \omega_2^{f(x_n)}, \dots, \omega_n^{f(x_n)}, \omega_{1,2}^{f(x_n)}, \omega_{1,3}^{f(x_n)}, \dots, \omega_{1,n}^{f(x_n)}, \\ \omega_{2,3}^{f(x_n)}, \dots, \omega_{2,n}^{f(x_n)}, \dots, \omega_{n-1,n}^{f(x_n)}, \dots, \omega_{1,2,\dots,n}^{f(x_n)}),$$

и который называется вектором активностей функции $f(x_n)$. Из свойства 3а следует, что указанное соответствие не взаимно-однозначно.

Компонентами этого вектора для всякой функции $f(x_n)$ являются числа типа $q/2^{n-1}$ при некотором q , $0 \leq q \leq 2^{n-1}$. С другой стороны, из доказательства свойства 5а следует, что для всякого числа q , $0 \leq q \leq 2^{n-1}$ и для всякого набора $\bar{a} \in E^n$ можно построить функцию $f(x_n)$ такую, что $\omega_{\bar{a}}^{f(x_n)} = q/2^{n-1}$.

Но нетрудно привести пример вектора, компоненты которого суть числа указанного типа, но который не является вектором активностей ни для одной функции. Таким вектором является, например, вектор $(0, 1/2, 1)$, в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Вектор длины $2^n - 1$, который является вектором активностей для некоторой функции $f(x_n)$, назовем допустимым.

Естественно возникает следующий вопрос — каким дополнительным условиям должен удовлетворять такой вектор, чтобы он был допустим?

2°. Как уже отмечалось, для всякой функции $f(x_n)$ и для всякого набора $\bar{a} \in E^n$, $\omega_{\bar{a}}^{f(x_n)} = q_{\bar{a}}/2^{n-1}$ ($0 \leq q_{\bar{a}} \leq 2^{n-1}$). Так как при тех же условиях число наборов $\bar{\beta} \in N_{f(x_n)}$ таких, что $\bar{\beta}^a \in N_{f(x_n)}$, четно, то четности чисел $q_{\bar{a}}$ и $|N_{f(x_n)}|$ совпадают, и значит, для всех $\bar{a}$ числа $q_{\bar{a}}$ имеют одинаковую четность.

Но эти необходимые для допустимости произвольного вектора условия не являются достаточными. Вектор $(1, 1, 1)$ удовлетворяет этим условиям, но не допустим.

Приведем другое необходимое условие допустимости. Пусть $f(\bar{x}_n)$ — произвольная функция. Для каждой пары наборов $\bar{a} \in N_{f(\bar{x}_n)}$ и $\bar{\beta} \in N_{\bar{f}(\bar{x}_n)}$ найдется ровно один набор $\bar{z} \in E^n$ такой, что $\bar{a}^{\bar{z}} = \bar{\beta}$. Толь-

ко и только на такой паре имеем $f(\bar{a}) \oplus f(\bar{a}^{\bar{z}}) = 1$.

Из сказанного следует, что

$$\sum_{\bar{a}} \omega_{\bar{a}}^{f(\bar{x}_n)} = \frac{|N_{f(\bar{x}_n)}| \cdot (2^n - |N_{f(\bar{x}_n)}|)}{2^{n-1}}.$$

Отсюда получаем необходимое условие допустимости.

Лемма 1. Для допустимости вектора $\Omega = (\omega_{\bar{a}_i})$, $i = \overline{1, 2^n - 1}$ необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$x^2 - 2^n x + 2^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{2^n-1} \omega_{\bar{a}_i} = 0$$

имело целое решение x .

Здесь считается, что наборы из E^n , кроме $\bar{1}$, упорядочены последовательностью $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{2^n-1}$ в соответствии с индексами компонент вектора активностей.

Решив это уравнение, получим следующее решение:

$$x = 2^{n-1} \pm \sqrt{2^{2(n-1)} - 2^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{2^n-1} \omega_{\bar{a}_i}}.$$

Ясно, что уравнение будет иметь целое решение только тогда, когда для некоторого натурального числа k имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} \omega_{\bar{a}_i} = \frac{2^{2(n-1)} - k^2}{2^{n-1}}.$$

Полученное условие только необходимое. Для вектора $(0, 1/2, 1)$ соответствующее квадратное уравнение имеет целые решения $x=1$ и $x=3$, но он не допустим.

Полное же решение задачи допустимости, как мы вскоре увидим, эквивалентно задаче отыскания $(0-1)$ решения системы уравнений второго порядка с 2^n неизвестными.

Для доказательства этого факта заметим, что активность совокупности переменных $\bar{a} \subseteq \bar{x}_n$ относительно функции $f(\bar{x}_n)$ можно определить следующим равенством:

$$\omega_{\alpha}^f(\tilde{x}_n) = \frac{\sum_{\tilde{\beta} \in E^n} f(\tilde{\beta}) \cdot (1 - f(\tilde{\beta}^{\alpha}))}{2^{n-1}}$$

или

$$\sum_{\tilde{\beta} \in E^n} f(\tilde{\beta}) \cdot (1 - f(\tilde{\beta}^{\alpha})) = \omega_{\alpha}^f(\tilde{x}_n) \cdot 2^{n-1}$$

Введя теперь переменные $x_{\tilde{\beta}}$ ($\tilde{\beta} \in E^n$), получим следующее необходимое и достаточное условие допустимости.

Теорема 1. Для допустимости вектора $\Omega = (\omega_{\alpha_i})$, $i = \overline{1, 2^n - 1}$, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений второго порядка

$$\sum_{\tilde{\beta} \in E^n} x_{\tilde{\beta}} \cdot (1 - x_{\tilde{\beta}^{\alpha_i}}) = \omega_{\alpha_i} \cdot 2^{n-1}, \quad i = \overline{1, 2^n - 1} \quad (1)$$

имела (0—1) решение.

Ясно, что множество всех (0—1) решений системы (1) совпадает с множеством всех функций, зависящих от переменных $\tilde{x}_n$ и имеющих вектор активностей Ω .

Относительно (0—1) решений система (1) эквивалентна системе

$$\sum_{\tilde{\beta} \in E^n} (x_{\tilde{\beta}} - x_{\tilde{\beta}^{\alpha_i}})^2 = \omega_{\alpha_i} \cdot 2^n, \quad i = \overline{1, 2^n - 1}.$$

Рассмотрим некоторую подсистему системы (1)

$$\sum_{\tilde{\beta} \in E^n} x_{\tilde{\beta}} \cdot (1 - x_{\tilde{\beta}^{\alpha_{i_t}}}) = \omega_{\alpha_{i_t}} \cdot 2^{n-1}; \quad 1 \leq i_t \leq 2^n - 1, \quad t = \overline{1, m}.$$

Если $f(\tilde{x}_n)$ — некоторое (0—1) решение последней системы, то очевидно имеем

$$\omega_{\alpha_{i_t}}^f(\tilde{x}_n) = \omega_{\alpha_{i_t}}, \quad t = \overline{1, m}.$$

Так что задача отыскания множества всех функций, активности фиксированных совокупностей которых равны заранее [заданным] числам, эквивалентна задаче отыскания всех (0—1) решений соответствующей подсистемы (1).

Особый интерес представляет начальный отрезок длины m вектора

$$\Omega^f(\tilde{x}_n), \quad \omega^f(\tilde{x}_n) = (\omega_1^f(\tilde{x}_n), \omega_2^f(\tilde{x}_n), \dots, \omega_m^f(\tilde{x}_n)),$$

который называется вектором активностей аргументов функции $f(\bar{x}_n)$.

Вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ назовем допустимым, если существует функция $f(\bar{x}_n)$ такая, что $\omega^{f(\bar{x}_n)} = \omega$. Приведем без доказательств некоторые свойства допустимости.

1д. Если вектор $\omega^1 = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ допустим, то допустим также вектор $\omega = (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_n})$, где $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

2д. Если векторы $\omega^1 = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ и $\omega^2 = (\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \dots, \omega_{k+m})$ допустимы, то допустим также вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \dots, \omega_{k+m})$. В частности, если вектор $\omega^1 = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ допустим, то допустим также вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \alpha)$ $\alpha \in E$.

3д. Если векторы $\omega^1 = (\omega_1^1, \omega_2^1, \dots, \omega_{n-1}^1)$ и $\omega^2 = (\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{n-1}^2)$ допустимы, то для всяких двух функций $\varphi(\bar{x}_{n-1})$ и $\psi(\bar{x}_{n-1})$ таких, что $\omega^{\varphi(\bar{x}_{n-1})} = \omega^1$, $\omega^{\psi(\bar{x}_{n-1})} = \omega^2$, допустим также вектор

$$\omega = \left(\frac{\omega_1^1 + \omega_1^2}{2}, \frac{\omega_2^1 + \omega_2^2}{2}, \dots, \frac{\omega_{n-1}^1 + \omega_{n-1}^2}{2}, \|\varphi(\bar{x}_{n-1}) \oplus \psi(\bar{x}_{n-1})\| \right).$$

В частности, для всяких функций $f(\bar{x}_{n-1})$ и набора $\bar{a} \in E^{n-1}$ вектор $\omega = (\omega_1^{f(\bar{a})}, \omega_2^{f(\bar{a})}, \dots, \omega_{n-1}^{f(\bar{a})}, \omega_{\sim}^{f(\bar{a})})$ допустим.

4д. Если вектор $\omega^1 = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1}, \omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n)$ допустим, то допустим также вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1}, 1 - \omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n)$, $1 \leq i \leq n$.

5д. Для любого числа q , $0 \leq q \leq 2^{n-1}$, вектор

$$\omega = \underbrace{(q/2^{n-1}, q/2^{n-1}, \dots, q/2^{n-1})}_n$$

допустим.

На основе этих свойств докажем следующую лемму.

Лемма 2. Для всяких целых чисел $m, i_1, i_2, \dots, i_m$; $1 \leq m \leq \leq (n+1)/2$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$, и для всяких чисел q_t , $t = \overline{1, m}$, каждое из которых кратно 2^{m-1} и удовлетворяет одному из условий $0 \leq q_t \leq 2^{n-m}$, $2^{n-1} - 2^{n-m} \leq q_t \leq 2^{n-1}$, существует допустимый вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ такой, что $\omega_{i_t} = q_t / 2^{n-1}$.

Доказательство. При $m=1$ утверждение леммы очевидно. Пусть поэтому $m \geq 2$. В силу свойств 1д и 4д достаточно доказать лемму при $i_t = t$ и $0 \leq q_t = 2^{m-1} \cdot q_t^1 \leq 2^{n-m}$, $t = \overline{1, m}$. Так как для всех t , $0 \leq q_t^1 \leq 2^{n-2m+1}$, то существуют допустимые векторы

$$\omega_t^1 = (q_t^1 / 2^{n-2m+1}, \omega_1^t, \omega_2^t, \dots, \omega_{n-2m+1}^t), \quad t = \overline{1, m}.$$

Применив к этим векторам свойства 2д и 1д, получим, что векторы

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (q_1/2^{n-m}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1}, \omega_1^1, \dots, \omega_{n-2m+1}^1), \\ \omega_2 &= (0, q_2/2^{n-m}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-2}, \omega_1^2, \dots, \omega_{n-2m+1}^2), \\ \omega_t &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{t-1}, q_t/2^{n-m}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-t}, \omega_1^t, \dots, \omega_{n-2m+1}^t), \quad t \geq 3,\end{aligned}$$

допустимы.

Применив свойство 3д к последним векторам последовательно $m-1$ раз, получим допустимый вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, который удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Отметим, что свойство 3д дает метод получения всех допустимых векторов длины n из всех допустимых векторов длины $n-1$, если последние известны. Свойство 5д дает возможность непосредственно построить некоторые допустимые векторы произвольной длины. Свойство 2д дает метод построения допустимых векторов данной длины, исходя из двух (или более) допустимых векторов меньшей длины. Наконец, свойства 1д и 4д дают возможность получить новые допустимые векторы данной длины, исходя из уже известных допустимых векторов той же длины.

В общем же случае задача — допустим ли данный вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, как уже было отмечено, эквивалентна задаче отыскания $\{0-1\}$ решения соответствующей подсистемы системы (1).

3°. **О п р е д е л е н и е.** Двойственной функцией функции $f(\bar{x}_n)$ по направлению $\bar{a} \in E^n$ назовем функцию $\bar{f}(\bar{x}_n)$ и обозначим ее через $f_{\bar{a}}(\bar{x}_n)$.

Двойственная к $f(\bar{x}_n)$ функция по направлению $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0) \in E^n$ называется просто двойственной функцией функции $f(\bar{x}_n)$ и обозначается через $f^*(\bar{x}_n)$. Из определения следует, что двойственной к $f(\bar{x}_n)$ функция по направлению $\bar{1}$ есть $\bar{f}(\bar{x}_n)$.

О п р е д е л е н и е. Функцию $f(\bar{x}_n)$ назовем самодвойственной по направлению $\bar{a} \in E^n$, если $f_{\bar{a}}(\bar{x}_n) = f(\bar{x}_n)$.

Функция $f(\bar{x}_n)$ называется просто самодвойственной, если $f^*(\bar{x}_n) = f(\bar{x}_n)$. Ясно, что самодвойственных функций по направлению $\bar{1}$ нет.

Л е м м а 3. Функция $f(\bar{x}_n)$ самодвойственна по направлению $\bar{a} \in E^n$ тогда и только тогда, когда $\omega_{\bar{a}}^f(\bar{x}_n) = 1$.

Доказательство леммы следует из доказательства свойства 5а.

Определение. Функцию $f(\tilde{x}_n)$ назовем устойчивой по направлению $\tilde{\alpha} \in E^n$, если $f(\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{x}_n)$, а множество

$$T_{f(\tilde{x}_n)} = \{\tilde{\alpha} \in E^n / f(\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{x}_n)\} —$$

— множеством устойчивости функции $f(\tilde{x}_n)$.

Ясно, что устойчивая по направлению $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{df} = \{x_i\}, 1 \leq i \leq n$, функция $f(\tilde{x}_n)$ фиктивно зависит от переменной x_1 .

Очевидно, что функция $f(\tilde{x}_n)$ устойчива по направлению $\tilde{\alpha} \in E^n$ тогда и только тогда, когда $\omega^{f(\tilde{x}_n)} = 0$.

Легко видеть, что для всякой функции $f(\tilde{x}_n)$ из того, что $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in T_{f(\tilde{x}_n)}$, следует, что $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta} \in T_{f(\tilde{x}_n)}$. Следовательно, для всякой функции

$f(\tilde{x}_n)$ множество $T_{f(\tilde{x}_n)} = \{\tilde{\alpha} / \tilde{\alpha} \in T_{f(\tilde{x}_n)}\}$ является линейным под-

пространством пространства E^n и имеет некоторый базис $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m$. Имеет место и обратное положение—для всяких линейно независимых наборов $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m \in E^n$ существует функция $f(\tilde{x}_n)$, такая, что указанная совокупность наборов является базисом подпространства $T_{f(\tilde{x}_n)}$.

Из сказанного следует, что если для функции $f(\tilde{x}_n)$ выполняются соотношения $\omega_{i_1}^{f(\tilde{x}_n)} = \omega_{i_2}^{f(\tilde{x}_n)} = \dots = \omega_{i_k}^{f(\tilde{x}_n)} = 0$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$), то для этой функции выполняется также соотношение $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{f(\tilde{x}_n)} = 0$. Обратное не всегда верно. Для функции $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$, $\omega_{1,2}^{f(x_1, x_2)} = 0$, но $\omega_1^{f(x_1, x_2)} = \omega_2^{f(x_1, x_2)} = 1$. Легко описать класс всех функций, для которых имеет место и обратное—это множество всех функций $f(\tilde{x}_n)$ таких, для которых совокупность наборов $\{\tilde{\gamma} / \omega_{\tilde{\gamma}}^{f(\tilde{x}_n)} = 0, |\tilde{\gamma}| = 1\}$ является базисом в $T_{f(\tilde{x}_n)}$.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 4. Каждая самодвойственная по некоторому направлению функция $f(\tilde{x}_n)$ самодвойственна по $|T_{f(\tilde{x}_n)}|$ направлениям.

Доказательство. Пусть для функции $f(\bar{x}_n)$, $\bar{f}(\bar{x}_n^{\bar{a}}) = f(\bar{x}_n)$ при некотором $\bar{a} \in E^n$, а $\bar{\beta} \in T_{f(\bar{x}_n)}$ — произвольный набор. Тогда, как

нетрудно видеть, $\bar{f}(\bar{x}_n^{\bar{a} \oplus \bar{\beta}}) = f(\bar{x}_n)$, и значит, функция $f(\bar{x}_n)$ самодвойственна самое меньшее по $|T_{f(\bar{x}_n)}|$ направлениям.

С другой стороны, пусть наряду с $\bar{f}(\bar{x}_n^{\bar{a}}) = f(\bar{x}_n)$ имеет место также соотношение $\bar{f}(\bar{x}_n^{\bar{z}}) = f(\bar{x}_n)$. Тогда $f(\bar{x}_n) = f(\bar{x}_n^{\bar{z}})$ и, следовательно, существует набор $\bar{\beta} \in T_{f(\bar{x}_n)}$ такой, что $\bar{z} = \bar{a} \oplus \bar{\beta}$. Значит функция $f(\bar{x}_n)$ самодвойственна самое большее по $|T_{f(\bar{x}_n)}|$ направлениям. Лемма доказана.

Над множеством $\Phi(n)$ определим отношения эквивалентностей R_1 и R_2 следующим образом. Для любых двух функций $\varphi(\bar{x}_n)$ и $\psi(\bar{x}_n)$

1. $\varphi(\bar{x}_n) R_1 \psi(\bar{x}_n)$ тогда и только тогда, когда для некоторого набора $\bar{z} \in E^n$, $\varphi(\bar{x}_n) = \psi(\bar{x}_n^{\bar{z}})$.

2. $\varphi(\bar{x}_n) R_2 \psi(\bar{x}_n)$ тогда и только тогда, когда для некоторого набора $\bar{z} \in E^n$ и для некоторого значения $z \in E$, $\varphi(\bar{x}_n) = \psi^z(\bar{x}_n^{\bar{z}})$.

Множества классов эквивалентностей по отношениям R_1 и R_2 обозначим через $\Phi_{R_1}(n)$ и $\Phi_{R_2}(n)$, а классы эквивалентностей, содержащие функцию $f(\bar{x}_n)$, через $[f(\bar{x}_n)]_{R_1}$ и $[f(\bar{x}_n)]_{R_2}$ соответственно.

Ясно, что для всякой функции $\varphi(\bar{x}_n)$, $[\varphi(\bar{x}_n)]_{R_1} \subseteq [\varphi(\bar{x}_n)]_{R_2}$ и что $[\varphi(\bar{x}_n)]_{R_1} = [\varphi(\bar{x}_n)]_{R_2}$ тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\bar{x}_n)$ самодвойственна по некоторому направлению. Множество классов последнего типа обозначим через $\Phi_{R_1, R_2}(n)$. Множество

$$\{[\varphi(\bar{x}_n)]_{R_1} \mid |N_{\varphi(\bar{x}_n)}| = P\}$$

обозначим через $\Phi_{R_1}^P(n)$.

Легко убедиться в справедливости следующих утверждений.

1э. $\Phi_{R_1, R_2}(n) = \Phi_{R_1}(n) \cap \Phi_{R_2}(n)$.

2э. Для всякой функции $f(\bar{x}_n)$, $|[f(\bar{x}_n)]_{R_1}| = 2^n / |T_{f(\bar{x}_n)}|$.

Зэ. Для всякой функции $f(\tilde{x}_n)$,

$$|\lfloor f(\tilde{x}_n) \rfloor_{R_1}| = \begin{cases} 2^n / |T_{f(\tilde{x}_n)}|, & \text{если функция } f(\tilde{x}_n) \text{ самодвойственна по} \\ & \text{некоторому направлению.} \\ 2^{n-1} / |T_{f(\tilde{x}_n)}|, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По теоремам перечисления Пойа [5] легко определить величины $|\Phi_{R_1}(n)|$ и $|\Phi_{R_1}^p(n)|$.

Теорема 2.

$$1. \quad |\Phi_{R_1}(n)| = \frac{2^{2^n} + (2^n - 1) \cdot 2^{2^{n-1}}}{2^n}.$$

$$2. \quad |\Phi_{R_1}^p(n)| = \begin{cases} \frac{C_{2^n}^p + (2^n - 1) \cdot C_{2^{n-1}}^{p/2}}{2^n}, & \text{если } p \text{ четно} \\ \frac{C_{2^n}^p}{2^n}, & \text{если } p \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Чтобы определить величину $|\Phi_{R_1}(n)|$ предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 5.

$$|\Phi_{R_1, R_1}(n)| = \frac{(2^n - 1) \cdot 2^{2^{n-1}}}{2^n}.$$

Доказательство. Число всех самодвойственных по некоторому направлению функций из $\Phi(n)$, мощность множества устойчивости каждой из которых равна 2^m , $0 \leq m \leq n-1$, обозначим через y_m . Из утверждения Зэ следует, что

$$|\Phi_{R_1, R_1}(n)| = \frac{y_0}{2^n} + \frac{y_1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{y_{n-1}}{2} = \frac{y_0 + 2y_1 + \dots + 2^{n-1} \cdot y_{n-1}}{2^n}.$$

В числителе последней дроби каждая функция, мощность множества устойчивости которой есть 2^m , суммируется 2^m раз. Но по лемме 4, каждая самодвойственная по некоторому направлению функция $f(\tilde{x}_n)$ самодвойственна по $|T_{f(\tilde{x}_n)}|$ направлениям. Значит, если мы вы-

числим число самодвойственных функций по каждому направлению, потом просуммируем их, то получим то же число, что и в числителе указанной дроби.

Число самодвойственных функций по произвольному направлению $\tilde{1} \neq \tilde{x} \in E^n$ равно $2^{2^{n-1}}$. Число таких направлений $2^n - 1$. Следовательно, эта сумма равна $(2^n - 1) \cdot 2^{2^{n-1}}$. Лемма доказана.

Отметим, что этот метод можно применять и для вычисления величин $|\Phi_{R_1}(n)|$ и $|\Phi_{R_1}^p(n)|$ (теорема 2).

С л е д с т в и е. Среди функций, существенно зависящих от четырех (или более) переменных, существует функция, имеющая норму $1/2$ и несамоудовлетворенная ни по одному направлению.

Доказательство следует из сравнения величин $|\Phi_{R_1 R_2}(n)|$ и $|\Phi_{R_1}^{2^n-1}|$.

Из теоремы 2 и леммы 5 вытекает следующая

Т е о р е м а 3.

$$|\Phi_{R_1}(n)| = \frac{2^{2^n} + (2^n - 1) \cdot 2^{2^n-1} + 1}{2^{n+1}}.$$

4°. Из определения линейной функции, определения активности аргумента и свойства 4а следует очевидная

Л е м м а 6. Функция $f(\bar{x}_n)$ линейна тогда и только тогда, когда для $i = \overline{1, n}$, $\omega_i^f(\bar{x}_n) \in E$ и (или) имеет место представление

$$f(\bar{x}_n) = f(0) \oplus \omega_1^f(\bar{x}_n) \cdot x_1 \oplus \omega_2^f(\bar{x}_n) \cdot x_2 \oplus \dots \oplus \omega_n^f(\bar{x}_n) \cdot x_n.$$

Множество всех монотонных функций алгебры логики обозначим через M , а через $\bar{M}$ обозначим множество функций

$$\{f^z(\bar{x}_n^z) / f(\bar{x}_n) \in M, z \in E, \bar{z} \in E^n; n = 1, 2, \dots\}.$$

Функции из $\bar{M}$ назовем обобщенно-монотонными функциями.

Для произвольной функции $f(\bar{x}_n)$ через $f_i^z(\bar{x}_n)$ ($1 \leq i \leq n$, $z \in E$) обозначим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Отметим для дальнейшего, что для всякой функции $f(\bar{x}_n)$ имеет место соотношение $\omega_i^f(\bar{x}_n) = \|f_0^i(\bar{x}_n) \oplus f_1^i(\bar{x}_n)\|$, $i = \overline{1, n}$.

Имеет место следующая

Л е м м а 7. Функция $f(\bar{x}_n)$ обобщенно-монотонна тогда и только тогда, когда для каждого i , $1 \leq i \leq n$ выполняется соотношение $f_0^i(\bar{x}_n) \cdot f_1^i(\bar{x}_n) = f_{z_i}^i(\bar{x}_n)$ при некотором значении $z_i \in E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что если некоторая функция $f(\bar{x}_n)$ удовлетворяет условиям леммы, то для всяких $z \in E$, $\bar{z} \in E^n$ этим условиям удовлетворяет также функция $f^z(\bar{x}_n^z)$. Так что достаточно доказать лемму для монотонных функций и при $z_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Необходимость. Пусть $f(\bar{x}_n) \in \bar{M}$ и число i , $1 \leq i \leq n$, произвольно. В силу монотонности для любой пары соседних по i -й компо-

ненте наборов $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$ из условий $f(\bar{\alpha}) = 1$ следует, что $f(\bar{\beta}) = 1$ и, следовательно, $f_0(\bar{x}_n) \cdot f_1(\bar{x}_n) \cdot f_0(\bar{x}_n)$.

Достаточность. Пусть функция $f(\bar{x}_n)$ такая, что для $i = \overline{1, n}$, $f_0(\bar{x}_n) \cdot f_1(\bar{x}_n) = f_0(\bar{x}_n)$. Тогда для любой пары соседних наборов $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$ из условий $f(\bar{\alpha}) = 1$ следует, что $f(\bar{\beta}) = 1$, и значит, функция $f(\bar{x}_n)$ монотонна. Лемма доказана.

Заметим, что условия леммы можно заменить условиями: для каждого i , $1 \leq i \leq n$, $\|f_0^i(\bar{x}_n) \cdot f_1^i(\bar{x}_n)\| = \min \{\|f_0^i(\bar{x}_n)\|, \|f_1^i(\bar{x}_n)\|\}$.

С помощью этой леммы докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. Функция $f(\bar{x}_n)$ обобщенно-монотонна тогда и только тогда, когда для каждого i , $1 \leq i \leq n$, имеет место соотношение

$$\omega_i'(\bar{x}_n) = \|\|f_1^i(\bar{x}_n)\| - \|f_0^i(\bar{x}_n)\|\|. \quad (2)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(\bar{x}_n) \in M$ и число i , $1 \leq i \leq n$, произвольно. В силу замеченного выше соотношения и свойства 2а имеем

$$\omega_i'(\bar{x}_n) = \|f_0^i(\bar{x}_n) \oplus f_1^i(\bar{x}_n)\| = \|f_0^i(\bar{x}_n)\| + \|f_1^i(\bar{x}_n)\| - 2\|f_0^i(\bar{x}_n) \cdot f_1^i(\bar{x}_n)\|.$$

Так как $f(\bar{x}_n) \in M$, то по лемме 7 имеем $f_0^i(\bar{x}_n) \cdot f_1^i(\bar{x}_n) = f_{\sigma_i}^i(\bar{x}_n)$ при некотором значении $\sigma_i \in E$. Ясно, что при любом из этих значений выполняется (2).

Достаточность. Пусть для функции $f(\bar{x}_n)$ при $i = \overline{1, n}$ выполняются соотношение (2). Докажем, что функция $f(\bar{x}_n)$ удовлетворяет условиям леммы 7. Пусть это не так. Тогда найдется некоторый номер i , $1 \leq i \leq n$, такой, что

$$\|f_0^i(\bar{x}_n) \cdot f_1^i(\bar{x}_n)\| < \min \{\|f_0^i(\bar{x}_n)\|, \|f_1^i(\bar{x}_n)\|\}.$$

Но тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_i'(\bar{x}_n) &= \|f_1^i(\bar{x}_n)\| - \|f_0^i(\bar{x}_n) \cdot f_1^i(\bar{x}_n)\| + \|f_0^i(\bar{x}_n)\| - \\ &\quad - \|f_0^i(\bar{x}_n) \cdot f_1^i(\bar{x}_n)\| > \|\|f_1^i(\bar{x}_n)\| - \|f_0^i(\bar{x}_n)\|\|, \end{aligned}$$

которое противоречит условиям теоремы.

Итак, функция $f(\bar{x}_n)$ удовлетворяет условиям леммы 7, и, следовательно, $f(\bar{x}_n) \in M$. Теорема доказана.

Лемма 8. Если $f(\bar{x}_n) \in M$, то $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{f(\bar{x}_n)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega_{i_1}^{f(\bar{x}_n)} = \omega_{i_2}^{f(\bar{x}_n)} = \dots = \omega_{i_k}^{f(\bar{x}_n)} = 0$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$).

Доказательство. Достаточность леммы, как уже было отмечено, имеет место для всякой функции.

Необходимость. Пусть $f(\bar{x}_n) \in M$, $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{f(\bar{x}_n)} = 0$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$) и пусть, например, $\omega_{i_1}^{f(\bar{x}_n)} \neq 0$. Из последнего, по теореме 4, следует, что $\|f_0^{i_1}(\bar{x}_n)\| \neq \|f_1^{i_1}(\bar{x}_n)\|$. Пусть $\bar{x} = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \rangle$, $\bar{z} = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \rangle$ и $\bar{x}^z(\bar{x}_n) = f(x_1, \dots, x_{i_1-1}, \bar{x}, x_{i_1+1}, \dots, x_n)$.

Ясно, что

$$\|f_0^{i_1}(\bar{x}_n)\| = \|f_1^{i_1}(\bar{x}_n)\| \neq \|f_0^{i_1}(\bar{x}_n)\| = \|f_1^{i_1}(\bar{x}_n)\| \text{ и что } \bar{x}^z(\bar{x}_n) = f(\bar{x}_n^z).$$

С другой стороны, по свойству 3 и 6) следует, что $\|f_1^{i_1}(\bar{x}_n^z)\| = \|f_0^{i_1}(\bar{x}_n^z)\| = \|f_1^{i_1}(\bar{x}_n)\|$. Следовательно, для функции $f(\bar{x}_n^z)$ имеем

$$\|f_0^{i_1}(\bar{x}_n^z)\| = \|f_1^{i_1}(\bar{x}_n)\| \neq \|f_0^{i_1}(\bar{x}_n)\| = \|f_1^{i_1}(\bar{x}_n^z)\|,$$

и значит $f(\bar{x}_n) \neq f(\bar{x}_n^z)$. Но тогда будем иметь $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{f(\bar{x}_n)} = \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{f(\bar{x}_n^z)} \neq 0$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие. Если $f(\bar{x}_n) \in M$, то совокупность наборов $\{\bar{x} / \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{f(\bar{x}_n)} = 0, |\bar{x}| = 1\}$ образует базис подпространства $T_{f(\bar{x}_n)}^*$.

Функция $f(\bar{x}_n)$ называется пороговой, если существуют n -мерный вещественный вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и вещественное число ω такие, что имеет место следующее:

$$f(\bar{x}_n) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } \bar{\xi} \cdot \bar{x}_n \geq \omega.$$

Вектор $\bar{\xi}$ называется вектором весов, ξ_i — весом i -го аргумента ($i = 1, n$), ω — порогом, а вектор $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \omega)$ — вектором структуры функции $f(\bar{x}_n)$.

Множество всех пороговых функций алгебры логики обозначим через Π .

Приведем некоторые известные результаты исследований в области пороговых функций [3].

$$1. \Pi \subseteq M.$$

$$2. \text{ Если } f(\bar{x}_n) \in \Pi, \text{ то } \|f(\bar{x}_n)\|_{K_1} \subseteq \Pi.$$

$$3. f(\bar{x}_n) \in \Pi \text{ тогда и только тогда, когда уравнение}$$

$$\sum_{i=0}^n \xi_i \cdot a_i^{f(\bar{x}_n)} = \sum_{\bar{y}} |\bar{\xi} \cdot \bar{y}| \quad (3)$$

имеет решение $\bar{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\bar{\xi} \cdot \bar{y} \neq 0$ при любом $\bar{y}$, где

$$\begin{aligned} a_0^{f(\bar{x}_n)} &= 2 |N_{f(\bar{x}_n)}| - 2^n, \quad \bar{y} = (1, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad a_i^{f(\bar{x}_n)} = \\ &= 2 |N_{f'_i(\bar{x}_n)}| - 2 |N_{f''_0(\bar{x}_n)}|, \quad y_i \in \{-1, 1\}; \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Если уравнение (3) имеет решение $\bar{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$, то вектором структуры функции $f(\bar{x}_n)$ является вектор

$$\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \frac{\xi_0 - \sum_{i=1}^n \xi_i}{2} \right).$$

Из свойства 1п следует, что каждая пороговая функция принадлежит множеству M , то есть удовлетворяет условиям теоремы 4.

Пусть $f(\bar{x}_n) \in P$ и $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \omega)$ — ее вектор структуры. Нетрудно убедиться в том, что для всяких i, j ; $1 \leq i, j \leq n$, справедливы утверждения.

Если $\omega_i^{f(\bar{x}_n)} = \|f'_i(\bar{x}_n)\| - \|f'_0(\bar{x}_n)\| > 0$, то $\xi_i > 0$.

Если $\omega_i^{f(\bar{x}_n)} = \|f'_0(\bar{x}_n)\| - \|f'_i(\bar{x}_n)\| \neq 0$, то $\xi_i < 0$.

Если $\omega_i^{f(\bar{x}_n)} = 0$, то возможно $\xi_i = 0$.

Если $|\xi_i| > |\xi_j|$, то $\omega_i^{f(\bar{x}_n)} > \omega_j^{f(\bar{x}_n)}$.

Явная же связь между весами и активностями аргументов пороговой функции состоит в следующем.

Пусть $f(\bar{x}_n) \in M$. Подстановкой $x_i \rightarrow \bar{x}_i$ в функцию $f(\bar{x}_n)$ для i , $1 \leq i \leq n$, таких, для которых $\omega_i^{f(\bar{x}_n)} = \|f'_0(\bar{x}_n)\| - \|f'_i(\bar{x}_n)\| \neq 0$, мы получим функцию $g(\bar{x}_n) \in [f(\bar{x}_n)]_{R_1}$, такую, что для $i = \overline{1, n}$, $a_i^{g(\bar{x}_n)} > 0$.

Ясно, что $g(\bar{x}_n) \in M$.

По свойству 2п функция $f(\bar{x}_n)$ порогова тогда и только тогда, когда функция $g(\bar{x}_n)$ порогова. С другой стороны, по свойству 3а, $\omega_i^{g(\bar{x}_n)} = \omega_i^{f(\bar{x}_n)}$.

Составив уравнение (3) для функции $y(x_n)$, разделив обе части полученного уравнения на 2^n и учитывая вышесказанное, получим следующее утверждение.

Лемма 9. Функция $f(x_n) \in M$ порогова тогда и только тогда, когда уравнение

$$\sum_{i=0}^n \xi_i \cdot \omega_i^{f(x_n)} = \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{y}} |\bar{\xi} \cdot \bar{y}| \quad (4)$$

имеет решение $\bar{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\bar{\xi} \cdot \bar{y} = 0$ для всех $\bar{y}$, где

$$\omega_0^{f(x_n)} = 2 \|f(x_n)\| - 1.$$

Следствие. Если $f(x_n) \in P$, $g(x_n) \in M$, $\omega_0^{f(x_n)} = \omega_0^{g(x_n)}$ и $\|g(x_n)\| = \|f(x_n)\|$ (или $\|g(x_n)\| = 1 - \|f(x_n)\|$), то $g(x_n) \in [f(x_n)]_{K_1}$ (и значит $g(x_n) \in P$).

Пусть $f(x_n)$ — произвольная функция. Через $[\Omega^{f(x_n)}]$ обозначим множество $|g(x_n)|_{\Omega^{f(x_n)}} = |\Omega^{f(x_n)}|$. Ясно, что $[f(x_n)]_{K_1} \subseteq [\Omega^{f(x_n)}]$.

Определение. Функцию $f(x_n)$ назовем устойчивой по активностям аргументов, если $[f(x_n)]_{K_1} = [\Omega^{f(x_n)}]$.

Легко убедиться в том, что все функции алгебры логики, принимающие фиксированное значение $z \in E$ не более, чем на четырех наборах, а также все линейные функции устойчивы по активностям аргументов.

Докажем еще одно важное утверждение, касающееся пороговых функций.

Теорема 5. Каждая пороговая функция устойчива по активностям аргументов.

Доказательство. Пусть $f(x_n) \in P$ — произвольная функция. Очевидно, достаточно показать, что $[\Omega^{f(x_n)}] \subseteq [f(x_n)]_{K_1}$. Пусть $g(x_n) \in [\Omega^{f(x_n)}]$ произвольная функция. Так как $\Omega^{g(x_n)} = \Omega^{f(x_n)}$, то по лемме 1 или $\|g(x_n)\| = \|f(x_n)\|$ или же $\|g(x_n)\| = 1 - \|f(x_n)\|$. Ясно, что функции $g(x_n)$ и $\bar{g}(x_n)$ одновременно или содержатся, или не содержатся в множестве $[f(x_n)]_{K_1}$, поэтому можно считать, что $\|g(x_n)\| = \|f(x_n)\|$.

Рассмотрим произвольно выбранный номер i , $1 \leq i \leq n$. Так как $\Omega^{g(x_n)} = \Omega^{f(x_n)}$, то $\sum \omega_i^{g(x_n)} = \sum \omega_i^{f(x_n)}$, где суммирования производятся по всем совокупностям переменных, таких, которые содержат переменную x_i . Легко видеть, что эти суммы равны числам

$$2^n (\|g(x_n)\| - \|g_0^i(x_n)\| \cdot \|g_1^i(x_n)\|) \text{ и } 2^n (\|f(x_n)\| - \|f_0^i(x_n)\| \cdot \|f_1^i(x_n)\|)$$

соответственно.

Սчитывая то, что

$$\|g'_i(\tilde{x}_n)\| + \|g_i(\tilde{x}_n)\| = 2 \cdot \|g(\tilde{x}_n)\|, \quad \|f'_0(\tilde{x}_n)\| + \|f_1(\tilde{x}_n)\| = 2 \cdot \|f(\tilde{x}_n)\|$$

и $\|g(\tilde{x}_n)\| = \|f(\tilde{x}_n)\|$, получим, что или $\|g'_i(\tilde{x}_n)\| = \|f'_0(\tilde{x}_n)\|$, или же $\|g'_i(\tilde{x}_n)\| = 1 - \|f'_1(\tilde{x}_n)\|$, $i \in E$. Но так как функции $g(\tilde{x}_n)$ и $g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ одновременно или содержатся, или не содержатся в $\{f(\tilde{x}_n)\}$, и так как i произвольно, то можно считать, что для $i = \overline{1, n}$ имеет место соотношение $\|g'_i(\tilde{x}_n)\| = \|f'_i(\tilde{x}_n)\|$ при любом значении $i \in E$. В таком случае для $i = \overline{0, n}$ будем иметь $a_i^g(\tilde{x}_n) = a_i^f(\tilde{x}_n)$, и, так как $f(\tilde{x}_n) \in \Pi$, то из свойства $\exists n_0$. $g(\tilde{x}_n) = f(\tilde{x}_n)$. Теорема доказана.

Из доказательства этой теоремы и из теоремы 4 вытекает следующая лемма.

Лемма 10. Если $\Omega^g(\tilde{x}_n) = \Omega^f(\tilde{x}_n)$ и $\varphi(\tilde{x}_n) \in M$, то

$$\psi(\tilde{x}_n) \in M.$$

Вычислительный центр
АН Армянской ССР
и Ереванского госуниверситета

Поступила 20.VII.1977

Շ. Է. ԲՈԶՈՅԱՆ, Բ. Է. ԹՈՐՈՍՅԱՆ. Տրամաբանության ռանգահաշվի ֆունկցիաների հետազոտումը վեկտորականների համախմբության ակտիվության տեսակետից (ամփոփում)

Աշխատանքում փորձ է արվում բուլյան ֆունկցիան բնութագրել իր, այսպես կոչված, ակտիվությունների վեկտորի միջոցով: Բերվում է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որպեսզի տված իրական վեկտորը լինի ակտիվությունների վեկտոր: Տրվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի տված ակտիվությունների վեկտորն ունեցող ֆունկցիան պատկանի ֆունկցիաների որոշ հայտնի դասերի: Տրվում են նաև ֆունկցիաների շեմքայնության անհրաժեշտ պայմաններ «ակտիվությունների» լեզվով: Որոնք հետաքննում են շեմքային ֆունկցիայի ճանաչումը:

Sh. E. BOZOJAN, B. E. TOROSSIAN. *Investigation of functions of the algebra of logic in terms of activity of joint variables (summary)*

An attempt to characterize Boolean functions in terms of so-called "activity vector" is made in the article. Necessary and sufficient conditions are provided for a given real vector to be an activity vector. Also, necessary and sufficient conditions are stated for any function with given activity vector to belong to a number of well-known classes of Boolean functions. In terms of activity some necessary conditions are obtained for function to be threshold.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Дискретная математика и мат. вопросы кибернетики, под общей редакцией С. В. Яблонского и О. Б. Луизова, „Наука“, М., 1974.
2. С. В. Яблонский и др. Функции алгебры логики и классы Поста, Изд. „Наука“, 1966.
3. М. Дертоузос. Пороговая логика, перевод с английского, Изд. „Мир“, М., 1967.
4. Ш. Е. Бозоян. Некоторые свойства булевых дифференциалов и активностей аргументов булевых функций, Изв. АН СССР, сер. техн. киб., № 5, 1975.
5. Ф. Харари, Э. Палмер. Перечисления графов, Изд. „Мир“, М., 1977.

М. Ю. ХОДЖАЯНЦ

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРОВ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ

В настоящей работе рассматриваются две характеристики операторов перечисления. Исследуется связь этих характеристик друг с другом, а также с остальными множествами, определяющими оператор перечисления, относительно различных типов сводимости. Далее рассматриваются возможности ускорения перечисления множеств, определяющих оператор перечисления на основании введенного М. Блюмом понятия ускоряемого множества.

Все основные обозначения и понятия, используемые в работе, взяты из [1].

Пусть φ и W — стандартные нумерации частично рекурсивных функций и рекурсивно перечислимых множеств, а D — каноническая нумерация конечных множеств [1]. N — множество натуральных чисел.

Определение 1. (см. [1]). Отображение Ψ множества 2^N во множество 2^N называется оператором перечисления, если

$$\exists z \forall A \forall x (x \in \Psi(A) \Leftrightarrow \exists u (\langle x, u \rangle \in W_z \& D_u \subseteq A)).$$

Мы будем говорить, что множество W_z определяет оператор перечисления Ψ . В качестве номера оператора перечисления Ψ возьмем номер множества, которое определяет этот оператор. Пусть Φ — определенная таким образом нумерация операторов перечисления [1].

Введем следующие отношения на N :

$$x \preceq y \Leftrightarrow (l(x) = l(y) \& D_{r(x)} \subseteq D_{r(y)}),$$

$$x \sim y \Leftrightarrow (x \preceq y \& x \succeq y).$$

Здесь l и r это функции, вычисляющие по x соответственно левую и правую компоненты пары с номером x . Для произвольного числа z рассмотрим два множества

$$V_z = \{x | x \in W_z \& y (y \preceq x \Rightarrow y \in W_z)\},$$

$$S_z = \{x | \exists y (y \in W_z \& y \preceq x)\}.$$

Введенные множества обладают следующими очевидными свойствами:

- a) $\forall x \forall y (\forall A (\Phi_x(A) = \Phi_y(A)) \Leftrightarrow V_x = V_y),$
- b) $\forall x \forall y (\forall A (\Phi_x(A) = \Phi_y(A)) \Leftrightarrow S_x = S_y),$
- c) $\forall x \forall A \forall y (y \in \Phi_x(A) \Leftrightarrow \exists u (\langle y, u \rangle \in V_x \& D_u \subseteq A)),$
- d) $\forall x (S_x \text{ определяет } \Phi_x).$

Теорема 1.

а) $\forall x (V_x \equiv_{II} S_x)$.

б) $\forall x \forall y (W_y \text{ определяет } \Phi_x \supset V_x \leq_{II} W_y)$.

с) Для любого непустого оператора перечисления Φ , в каждой рекурсивно перечислимой T -степени α такой что $d(V_\alpha) \leq \alpha$, существует множество, определяющее Φ_x .

Доказательство. Пункты а) и б) теоремы очевидны. Докажем с). Пусть A — произвольное рекурсивно перечислимое множество степени α . Согласно а) и условию теоремы, $S_x \leq_T A$. Так как $V_x \neq \emptyset$, то зафиксируем произвольный элемент $\langle z, u \rangle$ из V_x . Рассмотрим следующее множество:

$$B = \{ \langle y, v \rangle \mid \langle y, v \rangle \in S_x \& (y = z \supset (u = v \vee \exists t (t \in A \& D_v = D_u \cup \{t\}))) \}.$$

Очевидно, что $A \leq_m B$, $B \leq_T A$ и B определяет Φ_x .

Таким образом, каждый оператор перечисления Ψ характеризуют два множества V_Ψ и S_Ψ . V_Ψ назовем стержнем оператора Ψ , а S_Ψ — насыщением Ψ . Любое из этих множеств определяет T -степени всех множеств, определяющих Ψ , поэтому под T -степенью оператора перечисления Ψ мы будем понимать $d(V_\Psi)$.

Легко видеть, что для любого Ψ S_Ψ рекурсивно перечислимо. Из следующей теоремы видно, что существуют операторы перечисления, стержни которых не рекурсивно перечислимы.

Теорема 2. Для любой нерекурсивной рекурсивно перечислимой T -степени α существует оператор перечисления Ψ степени α такой, что V_Ψ не рекурсивно перечислимо.

Доказательство. Известно, что в каждой нерекурсивной рекурсивно перечислимой T -степени есть негиперпростое рекурсивно перечислимое множество. Пусть $A \in \alpha$ является таковым. Так как A негиперпросто, то существует общерекурсивная функция g , мажорирующая $\bar{A}$. Пусть f и h — общерекурсивные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$|W_{f(n)}| = a_n, \text{ где } a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \text{ элементы } \bar{A},$$

расположенные в порядке возрастания,

$$D_{h(n)} = \{x \mid x \leq g(n)\}, \dots, D_{h(n+1)} = \{x \mid g(n) + 1 \leq x \leq g(n+1)\}.$$

Строим множество B следующим образом. Для каждого n в B перечисляем пару $\langle n, h(n) \rangle$. Параллельно перечисляем множество $W_{f(n)}$. При каждом новом элементе, появившемся в $W_{f(n)}$, от $D_{h(n)}$ отнимаем максимальный элемент и пару $\langle n, u \rangle$, где u — номер полученного конечного множества, перечисляем в B .

Пусть B определяет оператор Ψ . Очевидно, что для любых x и u

$$\langle x, u \rangle \in V_\Psi \supset g(x) - p(u) \in \bar{A},$$

$$\langle x, u \rangle \notin V_\Psi \supset (g(x) < p(u) \vee (g(x) \geq p(u) \& g(x) - p(u) \notin \bar{A})),$$

где $p(u) = |D_u|$.

Таким образом, $V_\Psi \leq_m \bar{A}$ и V_Ψ не рекурсивно перечислимо, так как $\bar{A}$ не рекурсивно перечислимо. Легко убедиться, что и $\bar{A} \leq_{II} V_\Psi$.

Следствие. Для любой нерекурсивной рекурсивно перечислимой T -степени $\mathbf{a}$ существует оператор перечисления Ψ такой, что

1. $V_\Psi \in \mathbf{a}$,
2. V_Ψ иммунно.

Доказательство. В каждой нерекурсивной рекурсивно перечислимой T -степени существует простое негиперпростое множество (см. [2]). В доказательстве теоремы 2 в качестве A возьмем такое множество.

Теорема 3. Существует оператор перечисления Ψ такой, что V_Ψ продуктивно, а S_Ψ — креативно.

Доказательство. Пусть h — общерекурсивная функция, удовлетворяющая следующему условию: $D_n(x) = \{x\}$ и

$$A = \{ \langle x, h(x) \rangle \mid x \in N \}.$$

Тогда $B = A \cup \{ \langle x, 0 \rangle \mid x \in K \}$, где 0 номер пустого множества в нумерации D , и B определяет Ψ . Пусть $f(x) = \langle x, h(x) \rangle$ и $g(x) = \langle x, 0 \rangle$. Тогда $x \in K \iff f(x) \in V_\Psi$ и $x \in K \iff g(x) \in S_\Psi$ для всех x .

Замечание. Для любого оператора перечисления Ψ V_Ψ не гипериммунно.

Существование оператора с иммунным стержнем дает нам возможность убедиться в том, что существуют операторы перечисления, стержни и насыщения которых находятся в несравнимых m -степенях. Следующая теорема показывает, что существуют операторы перечисления с таким же свойством, стержни которых рекурсивно перечислимы.

Теорема 4. Существует оператор перечисления Ψ такой, что

1. V_Ψ рекурсивно перечислимо,
2. V_Ψ и S_Ψ находятся в несравнимых m -степенях.

Доказательство. Будем строить множество $V = V_\Psi$ по шагам. Построение будет производиться с помощью вспомогательных множеств A, B, C, F и последовательностей чисел $\{t_m^n\}$.

Пусть $D_{d_n} = \{2n, 2n+1\}$.

Шаг 0.

$$V_0 = \emptyset, A_0 = \emptyset, B_0 = \emptyset, F_0 = \emptyset, C_0 = \{ \langle x, dy \rangle \mid x, y \in N \},$$

$t_i^0 = \langle i, d_i \rangle$. Переходим к шагу 1.

Шаг $n+1$. Предпримем по $n+1$ шагов в вычислении всех тех функций $\varphi_{i_0}(t_{i_0}^n), \dots, \varphi_{i_k}(t_{i_k}^n)$, для которых $i_0, \dots, i_k \leq n+1$ и $i_0, \dots, i_k \notin F_n$.

Пусть α — наименьшее из тех чисел i , для которых эти вычисления завершились. Если такого α не существует, то $V_{n+1} = V_n$.

$$A_{n+1} = A_n, F_{n+1} = F_n, B_{n+1} = B_n, C_{n+1} = C_n$$

и переходим к блоку 2.

Если такое a существует, то возможны следующие два случая:

С л у ч а й I: t_a^n сравнимо с $\varphi_a(t_a^n)$ относительно $\rightarrow$.

1. $t_a^n = \varphi_a(t_a^n)$. Тогда $V_{n+1} = V_n \cup \{ \langle a, v \rangle \}$ (v определяется из соотношения $D_v = \{ w | w = \mu s (s \in D_{r(t_a^n)}) \}$, $A_{n+1} = A_n \cup \{ x | \langle a, v \rangle \rightarrow x \vee x \rightarrow \langle a, v \rangle \}$). Переходим к блоку 1.

2. $t_a^n \rightarrow \varphi_a(t_a^n)$. Тогда $V_{n+1} = V_n \cup \{ \varphi_a(t_a^n) \}$, $A_{n+1} = A_n \cup \{ x | x \rightarrow \varphi_a(t_a^n) \vee \varphi_a(t_a^n) \rightarrow x \}$. Переходим к блоку 1.

3. $\varphi_a(t_a^n) \rightarrow t_a^n$. Тогда $V_{n+1} = V_n \cup \{ t_a^n \}$, $A_{n+1} = A_n \cup \{ x \rightarrow t_a^n \vee t_a^n \rightarrow x \}$.

Переходим к блоку 1.

С л у ч а й II. t_a^n несравнимо с $\varphi_a(t_a^n)$ относительно $\rightarrow$. Пусть $\varphi_a(t_a^n) = \langle z, u \rangle$.

1. $a = z$. Тогда $V_{n+1} = V_n \cup \{ t_a^n \}$, $A_{n+1} = A_n \cup \{ x | x \rightarrow t_a^n \vee t_a^n \rightarrow x \vee x \rightarrow \varphi_a(t_a^n) \}$. Переходим к блоку 1.

2. $a < z$. Возможны 4 случая:

а). $\varphi_a(t_a^n) \in A_n \& \exists x (x \rightarrow \varphi_a(t_a^n) \& x \in A_n)$.

Тогда $V_{n+1} = V_n \cup \{ \langle a, v \rangle \}$, где $D_v = \{ w | w = \mu s (s \in D_{r(t_a^n)}) \}$, $A_{n+1} = A_n \cup \{ x | \langle a, v \rangle \rightarrow x \vee x \rightarrow \langle a, v \rangle \}$. Переходим к блоку 1.

б). $\varphi_a(t_a^n) \in A_n \& \forall x (x \rightarrow \varphi_a(t_a^n) \supset x \in A_n)$.

Тогда $V_{n+1} = V_n \cup \{ t_a^n \}$, $A_{n+1} = A_n \cup \{ x | x \rightarrow t_a^n \vee t_a^n \rightarrow x \}$. Переходим к блоку 1.

в). $\varphi_a(t_a^n) \notin A_n \& \varphi_a(t_a^n) \notin V_n$, тогда

$$V_{n+1} = V_n \cup \{ t_a^n \}, A_{n+1} = A_n \cup \{ x | x \rightarrow t_a^n \vee t_a^n \rightarrow x \vee x \rightarrow \varphi_a(t_a^n) \}.$$

Возможны 2 подслучая:

с₁). $\exists p (\langle a, p \rangle \in B_n)$. Определим множество $I_a = \{ p | \langle a, p \rangle \in B_n \}$.

Тогда

$$F_{n+1} = (F_n \cup \{ a \}) - I_a, B_{n+1} = B_n - \{ \langle a, p \rangle | p \in I_a \},$$

$$C_{n+1} = C_n - (\{ \langle p, x \rangle | p \in I_a \& \exists y (\langle p, y \rangle \in V_n \& D_y \cap D_x \neq \emptyset) \} \cup \{ \langle z, x \rangle | D_x \cap D_u \neq \emptyset \}).$$

Переходим к блоку 2.

с₂). $\forall p (\langle a, p \rangle \notin B_n)$. Тогда $F_{n+1} = F_n \cup \{ a \}$, $B_{n+1} = B_n$, $C_{n+1} = C_n - \{ \langle z, x \rangle | D_x \cap D_u \neq \emptyset \}$. Переходим к блоку 2.

д). $\varphi_a(t_a^n) \notin A_n \& \varphi_a(t_a^n) \in V_n$. Пусть $b = \mu x (t_a^n \rightarrow x \& x \in A_n)$,

тогда

$$V_{n+1} = V_n \cup \{ b \}, A_{n+1} = A_n \cup \{ x | x \rightarrow b \vee b \rightarrow x \}.$$

Переходим к блоку 1.

3. $z < a$.

а). $\varphi_a(t_a^n) \in A_n \& \exists x (x \rightarrow \varphi_a(t_a^n) \& x \notin A_n)$.

Поступаем так же, как и при 2а).

б). $\varphi_a(t_a^n) \in A_n \& \forall x (x \rightarrow \varphi_a(t_a^n) \& x \notin A_n)$.

Поступаем так же, как и при 2б).

с). $\varphi_a(t_a^n) \notin A_n \& \varphi_a(t_a^n) \in V_n$.

Тогда

$$V_{n+1} = V_n \cup \{t_a^n\}, \quad A_{n+1} = A_n \cup \{x | x \rightarrow t_a^n \vee t_a^n \rightarrow x\}.$$

Возможны 2 подслучая:

с₁). $\exists p (< a, p > \in B_n)$. Пусть $I_a = \{p | < a, p > \in B_n\}$, тогда

$$F_{n+1} = (F_n \cup \{a\}) - I_a, \quad B_{n+1} = (B_n \cup \{< z, a >\}) - \{< a, p > | p \in I_a\}, \\ C_{n+1} = C_n - \{< p, x > | p \in I_a \& \exists y (< p, y > \in V_n \& D_y \cap D_x \neq \emptyset)\}.$$

Переходим к блоку 2.

с₂). $\forall p (< a, p > \notin B_n)$, тогда $F_{n+1} = F_n \cup \{a\}$,

$B_{n+1} = B_n \cup \{< z, a >\}$, $C_{n+1} = C_n$. Переходим к блоку 2.

д). $\varphi_a(t_a^n) \notin A_n \& \varphi_a(t_a^n) \in V_n$.

Поступаем так же, как и при 2д).

Б л о к 1. 2 случая:

а). $\exists p (< a, p > \in B_n)$. Пусть $I_a = \{p | < a, p > \in B_n\}$, тогда

$$F_{n+1} = (F_n \cup \{a\}) - I_a, \quad B_{n+1} = B_n - \{< a, p > | p \in I_a\}, \\ C_{n+1} = C_n - \{< p, x > | p \in I_a \& \exists y (< p, y > \in V_n \& D_y \cap D_x \neq \emptyset)\}.$$

Переходим к блоку 2.

б). $\forall p (< a, p > \notin B_n)$, тогда $F_{n+1} = F_n \cup \{a\}$, $B_{n+1} = B_n$, $C_{n+1} = C_n$.

Переходим к блоку 2.

Б л о к 2.

$t_i^{n+1} = \mu < i, d_j > (< i, d_j > \in C_{n+1})$. Переходим к шагу $n + 1$.

Из конструкции видно, что

1. $\forall i (\lim_n t_i^n < \infty)$.

2. Пусть $t_i = \lim_n t_i^n$. Если! $\varphi_i(t_i)$, то в этой точке опровергается и m -сводимость V_Π к S_Π и m -сводимость S_Π к V_Π с помощью функции φ_i . В противном случае φ_i не является всюду определенной.

Пусть $\{C_i\}$ — мера сложности вычисления частично рекурсивных функций [3], удовлетворяющая также аксиоме параллельной вычисли-

мости [4]. Через S_A мы будем обозначать полухарактеристическую функцию множества A .

Определение 2 (см. [5]). Рекурсивно перечислимое множество A называется ускоряемым, если для любого j такого, что $\varphi_j = S_A$ и любой общерекурсивной функции g существует i , удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\varphi_i = S_A$,
2. $\forall x (c_i(x) \leq c_j(x))$,
3. $\exists x^+ (x \in A \ \& \ g(x, c_i(x)) < c_j(x))$.

Определение 3 (см. [5]). Рекурсивно перечислимое множество A называется эффективно ускоряемым, если существует общерекурсивная функция τ такая, что для любых j и l , если $\varphi_j = S_A$ и φ_l — общерекурсивная функция, то

1. $\varphi_{\tau(j,l)} = S_A$,
2. $\forall x (c_{\tau(j,l)}(x) \leq c_j(x))$,
3. $\exists x^+ (x \in A \ \& \ \varphi_l(x, c_{\tau(j,l)}(x)) < c_j(x))$.

Определение 4 (см. [5], [6]). Рекурсивно перечислимое множество A называется субкреативным, если существует общерекурсивная функция δ такая, что

$$\forall i (W_i \cap A = \emptyset \supset A \subset W_{\delta(i)} \subseteq \overline{W}_i).$$

В дальнейшем будут использованы следующие теоремы.

Предложение 1 (см. [5], [6]). Рекурсивно перечислимое множество A эффективно ускоряемо тогда и только тогда, когда A субкреативно.

Предложение 2 (см. [5]). Рекурсивно перечислимое множество A неускоряемо тогда и только тогда, когда существует общерекурсивная функция τ со следующими свойствами:

1. $\forall i (W_i \cap \overline{A} = W_{\tau(i)} \cap \overline{A})$,
2. $\forall i (W_i \subseteq A \supset W_{\tau(i)} \text{ конечно})$.

Предложение 3 (см. [7]). Рекурсивно перечислимая T -степень α содержит ускоряемое множество тогда и только тогда, когда $\alpha' < \alpha$.

Предложение 4 (см. [8]). Для любого рекурсивно перечислимого множества A существуют неускоряемые множества A_0 и A_1 такие, что $A_0 \cup A_1 = A$ и $A_0 \cap A_1 = \emptyset$.

Отметим, что если $A \leq_1 B$ и B неускоряемо, то и A неускоряемо.

Теорема 5. Если для некоторого оператора перечисления Ψ V_Ψ эффективно ускоряемо, то и любое множество, определяющее Ψ , эффективно ускоряемо.

Доказательство. Пусть A — произвольное множество, определяющее Ψ . Так как V_Ψ эффективно ускоряемо, то, согласно предложению 1, существует общерекурсивная функция δ такая, что

$$\forall i (W_i \cap V_\Psi = \emptyset \supset V_\Psi \subset W_{h(i)} \subseteq \overline{W}_i).$$

Рассмотрим следующую общерекурсивную функцию f :

$$\forall i (W_{f(i)} = (A - V_\Psi) \cup W_i).$$

Пусть $W_i \cap A = \emptyset$, следовательно, $V_\Psi \cap W_{f(i)} = \emptyset$. Тогда $V_\Psi \subset W_{f(i)} \subseteq \overline{(A - V_\Psi) \cup W_i}$. Пусть $W_{h(i)} = A \cup W_{f(i)}$, тогда $A \subset W_{h(i)} \subseteq \overline{W}_i$, т. е. A субкреативно и, следовательно, эффективно ускоряемо.

С л е д с т в и е 1. Существует оператор перечисления Ψ , все определяющие множества которого эффективно ускоряемы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве V_Ψ возьмем множество $\{ \langle x, h(x) \rangle \mid x \in K \}$, где h — общерекурсивная функция из теоремы 3. Заметим, что в этом случае все множества, определяющие Ψ , будут креативными.

С л е д с т в и е 2. Существует оператор перечисления, у которого все определяющие множества ускоряемы, но среди них есть и не эффективно ускоряемые.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно.

Из доказательства пункта с) теоремы 1 видно, что среди множеств, определяющих произвольный оператор перечисления, есть креативные и, следовательно, эффективно ускоряемые множества (предложение 1).

В дальнейшем мы будем рассматривать только те операторы, стержни которых рекурсивно перечислимы.

Т е о р е м а 6. Если среди множеств, определяющих оператор перечисления Ψ , есть неускоряемое множество, то и V_Ψ тоже неускоряемо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — неускоряемое множество, определяющее Ψ . Тогда существует общерекурсивная функция z , удовлетворяющая условиям предложения 2. Построим общерекурсивную функцию z' следующим образом:

$$W_{z'(i)} = W_{z(i)} \cup \{ \langle x, u \rangle \mid \langle x, u \rangle \in W_i \cap A \ \& \ \langle x, u \rangle \notin V_\Psi \}.$$

Легко убедиться, что z удовлетворяет условиям предложения 2 и, следовательно, V_Ψ неускоряемо.

С л е д с т в и е. Существует оператор перечисления Ψ , у которого все определяющие множества ускоряемы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — произвольное ускоряемое множество. В качестве V_Ψ возьмем множество $\{ \langle x, h(x) \rangle \mid x \in A \}$, где h — общерекурсивная функция из теоремы 3.

Из предложения 3 и пунктов а) и б) теоремы 1 следует, что существуют операторы перечисления, стержни и насыщения которых не рекурсивны и не ускоряемы. Следующая теорема дает пример оператора перечисления, стержень которого не ускоряем, а насыщение ускоряемо.

Т е о р е м а 7. Существует оператор перечисления Ψ такой, что V_Ψ неускоряемо, а S_Ψ ускоряемо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — произвольное ускоряемое множество. Согласно предложению 4, существуют два неускоряемых множества A_0 и A_1 таких, что $A_0 \cup A_1 = A$ и $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Пусть $V_\Psi = (A_0 \times |h(0)|) \cup (A_1 \times |h(1)|)$, где h — общерекурсивная функция из теоремы 3. Нетрудно убедиться в том, что V_Ψ неускоряемо. С другой стороны, $A \leq_1 S_\Psi$ с помощью функции $f(x) = \langle x, u \rangle$, где $D_u = \{0, 1\}$, и, следовательно, S_Ψ ускоряемо.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступила 5.X.1977

Մ. Յու. ԽՈԴՋԱՅԱՆՑ. Թվարկության օպերատորների որոշ բնութագրեր (ամփոփում)

Հոդվածում ներմուծվում են թվարկության ռաբրատորների երկու բնութագիր և հետազոտվում է նրանց կապը ինչպես միմյանց հետ, այնպես և այն բազմությունների հետ, որոնք որոշում են թվարկության օպերատորը տարրեր տիպերի հանգեցումների նկատմամբ:

Այնուհետև դիտարկվում են թվարկության օպերատորների որոշիչ բազմությունների թվարկության արագացման հնարավորությունները Մ. Էլյումի կողմից մտցված արագացվող բազմության հասկացողության հիման վրա:

M. Ju. KHODJAINTS. Some characteristics of enumeration operators (summary)

Two characteristics of enumeration operators are defined and their interrelations and relations to the sets, defining an enumeration operator are investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., Изд. „Мир“, 1972.
2. C. E. M. Yates. Three theorems on the degree of recursively enumerable sets. Duke Math. J., 32, 1965, 465—463.
3. М. Блюм. Машинно-независимая теория сложности рекурсивных функций. Сб. Проблемы математической логики, М., Изд. „Мир“, 1970.
4. L. H. Landweber, E. L. Robertson. Recursive properties of abstract complexity classes, JACM, 19, 2, 1972, 295—308.
5. M. Blum, I. Marques. On complexity properties of recursively enumerable sets, J. Symb. Log., 38, 1973, 579—593.
6. J. T. Gill, P. H. Morris. On subcreative sets and S-reducibility, J. Symb. Log., 39, 1974, 669—677.
7. R. I. Soare. Degrees and structure of speedable sets, Not. Amer. Math. Soc. 21, 1974, A—380, Abstract 74 T—E 40.
8. I. Marques. On degrees of unsolvability and complexity properties, J. Symb. Log., 40, 1975, 529—539.

Г. Ц. АКОПЯН, О. А. ГАЛСТЯН

КЛАССЫ ГРАФОВ, КРИТИЧЕСКИХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОКРЫТИЙ

Рассмотрим задачи покрытия вершин или ребер графа вершинами или ребрами.

Пусть $G = [V(G), E(G)]$ — граф, не содержащий изолированных вершин, где $V(G)$ — множество вершин, а $E(G)$ — множество ребер графа. Если $e = [u, v]$, где $u, v \in V(G)$ и $e \in E(G)$, то через G_e будем обозначать граф $\{V(G) \setminus E(G) \cup \{e\}\}$. Пусть $d_G(u, v)$ — расстояние между вершинами u и v в графе G . Введем следующие обозначения:

$$V(u) = \{v | v \in V(G), d_G(u, v) \leq 1\},$$

$$E(u) = \{e | e \in E(G), u \in e\},$$

$$V(e) = \{v | v \in V(G), v \in e\},$$

$$E(e) = \{f | f \in E(G), f \cap e \neq \emptyset\}.$$

Множество $U \subseteq V(G)$ называется покрытием вершин (соответственно ребер) графа G вершинами, если $V(G) = \bigcup_{u \in U} V(u)$ (соответственно $E(G) = \bigcup_{u \in U} E(u)$).

Множество $W \subseteq E(G)$ называется покрытием вершин (соответственно ребер) графа G ребрами, если $V(G) = \bigcup_{e \in W} V(e)$ (соответственно $E(G) = \bigcup_{e \in W} E(e)$).

Покрытие называется тупиковым, если оно не содержит собственного подмножества, являющегося покрытием. Покрытие, содержащее наименьшее число элементов, называется минимальным.

Через $\Pi(G)$, $T(G)$ и $M(G)$ мы будем обозначать множество всех покрытий, тупиковых покрытий и, соответственно, минимальных покрытий графа G , считая заранее известным, о каком из четырех типов покрытий идет речь.

О п р е д е л е н и е 1. Граф G назовем p -критическим (соответственно t -критическим или m -критическим) относительно рассматриваемого покрытия, если для каждого $e = [u, v] \subseteq V(G)$, $e \in E(G)$, $\Pi(G) \neq \Pi(G_e)$ (соответственно $T(G) \neq T(G_e)$ или $M(G) \neq M(G_e)$), в противном случае граф G назовем p -некритическим (t -некритическим или m -некритическим). По определению, полный граф является p - t - и m -критическим.

Через Γ_p , Γ_t и Γ_m будем обозначать множество всех p -критических, t -критических и m -критических графов.

Заметим, что для каждого из четырех рассматриваемых нами понятий покрытия выполняются соотношения $\Gamma_{\Pi} = \Gamma_{\Gamma}$, $\Gamma_{\Pi} \subseteq \Gamma_{\Gamma}$; поэтому для краткости Π - или Γ -критические графы будем называть критическими.

Рассмотрим задачу распознавания критических графов относительно введенных понятий покрытий.

1°. Покрытие вершин графа вершинами.

Определение 2. Вершину v графа G назовем регулярной, если существует вершина $u \neq v$ такая, что $V(u) \subseteq V(v)$.

Так, например, вершина, смежная с всякой вершиной, является регулярной.

Определение 3. Вершины $u, v \neq u$ графа G назовем попарно-тупиковыми, если существует тупиковое покрытие U , содержащее эти вершины.

Заметим, что любые две несмежные вершины графа являются попарно-тупиковыми.

Пусть $U \in \Pi(G)$ и $V_U(u) = V(u) \setminus \bigcup_{v \in U, v \neq u} V(v)$. Тогда покрытие U будет тупиковым в том и только в том случае, если $|V_U(u)| \geq 1$ для всех вершин $u \in U$.

Лемма 1. Для того чтобы вершина v была регулярной, необходимо и достаточно выполнение условий $V_U(v) \neq \{v\}$ для всех тупиковых покрытий U , содержащих v .

Доказательство. Необходимость. Пусть v — регулярная вершина, т. е. существует вершина $u \neq v$ такая, что $V(u) \subseteq V(v)$. Если $U \in T(G)$ и $v \in U$, то из регулярности v для всех вершин $w \in V(u)$ следует, что $w \in U$ и $|v| \neq V(u) \subseteq V_U(v)$.

Достаточность. Пусть для всех $U \in T(G)$, $v \in U$ следует, что $V_U(v) \neq \{v\}$. Тогда легко заметить, что если v не является регулярной вершиной, то можно построить покрытие U из $T(G)$, не удовлетворяющее условию леммы.

Теорема 1. Смежные вершины u и v графа G являются попарно-тупиковыми тогда и только тогда, когда существуют нерегулярные вершины u' и v' отличные от u и v такие, что

$$[u, u'] \in E(G), [v, u'] \notin E(G), [v, v'] \in E(G), [u, v'] \notin E(G).$$

Лемма 2. Пусть $e = \{u, v\} \subseteq V(G)$, $e \notin E(G)$. Тогда $T(G_e) = T(G)$ в том и только в том случае, если u и v — регулярные вершины графа G .

Доказательство. Необходимость. Пусть $T(G_e) = T(G)$. Покажем, что вершины u и v — регулярные. Предположим, например, что u — нерегулярная вершина. Тогда по лемме 1 существует $U \in T(G)$, такое, что $V_U(u) = \{u\}$. Если $v \notin U$, то $(U \setminus \{u\}) \cup \{v\} = U' \in T(G_e)$ и $U' \notin T(G)$. Если $v \in U$, то в графе G_e имеем $V_U(u) = \emptyset$ и, следовательно, $U \notin T(G_e)$. Это противоречие доказывает, что u — регулярная вершина.

Достаточность. Пусть u и v — две несмежные регулярные вершины графа G . Докажем, что $T(G) = T(G_e)$. Пусть $U \in T(G)$. Если U не содержит хотя бы одну из вершин u и v , то $U \in T(G_e)$. Если U содержит вершины u и v , то из леммы 1 следует, что $V_U(u) \neq \{u\}$ и $V_U(v) \neq \{v\}$. Отсюда вытекает, что в графе G_e $|V_U(u)| \geq 1$ и $|V_U(v)| \geq 1$, т. е. $U' \in T(G_e)$. Следовательно, $T(G) \subseteq T(G_e)$.

Обратное включение $T(G_e) \subseteq T(G)$ легко следует из регулярности вершин u и v графа G .

Из определения 1 и леммы 2 следует

Теорема 2. Для того чтобы граф G был некритическим, необходимо и достаточно, чтобы он содержал две несмежные регулярные вершины.

Следствие 1. Для того чтобы граф G являлся критическим, необходимо и достаточно, чтобы все его регулярные вершины принадлежали одной и той же клике.

Пусть K — класс тех графов G , в которых никакие две смежные вершины не являются попарно-тупиковыми.

Пусть $V = \{v_1, \dots, v_r\}$ — некоторое множество и $F = \{F_1, \dots, F_k\}$ — множество, элементами которого являются подмножества множества V .

Определение 4. Скажем, что множество F является k -тупиковым, если существует граф $G \in K$ такой, что $V(G) = V$ и $T(G) = F$.

По данному множеству F построим следующий граф $G[F]$: $V(G[F]) = \bigcup_{F_i \in F} F_i$ и две вершины этого графа соединяются ребром тогда и только тогда, когда не существует подмножества $F_i \in F$, содержащего эти вершины.

Из построения графа $G[F]$ и определения 4 следует

Теорема 3. Для того чтобы множество F было бы k -тупиковым, необходимо и достаточно, чтобы $F = T(G[F])$.

2. Покрытие вершин графа ребрами.

Для этого понятия справедлива лемма, соответствующая лемме 2.

Лемма 3. Пусть $e = \{u, v\} \subseteq V(G)$, $e \in E(G)$. Тогда $T(G_e) = T(G)$ в том и только том случае, если вершины u и v имеют смежные висячие вершины.

Из этой леммы следует, что граф G является критическим тогда и только тогда, когда все его висячие вершины смежны с вершинами одной и той же клики.

Так как каждая вершина, смежная с висячей, является регулярной, то все графы, критические относительно покрытия вершин графа вершинами, будут критическими относительно покрытия вершин графа ребрами.

Нетрудно показать, что все графы будут критическими относительно покрытий ребер графа вершинами и ребер графа ребрами.

2. Յ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Հ. Հ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ. Ծածկույթների նկատմամբ կրիտիկական գրաֆիկների դասերը (ամփոփում)

Դիտարկվում են ծածկույթների խնդիրները գրաֆիկների վրա: Սահմանվում է ծածկույթի նկատմամբ գրաֆի գաղափարը և տրվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում գրաֆը կլինի կրիտիկական դիտարկվող ծածկույթի նկատմամբ:

H. Ts. HAKOBIAN, H. H. GALUSTIAN. *Classes of critical graphs in reference to coverings* (summary)

The problems of coverage are considered on graphs. The concept of critical graph with respect to a coverage is defined, necessary and sufficient conditions are given for a graph to be critical with respect to the considered covering.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ф. Харари. Теория графов, Изд. Мир", М., 1973.
2. Ю. И. Журавлев. Теоретико-множественные методы в алгебре логики, Сб. „Проблемы кибернетики“, вып. 8, 1962.
3. Г. Ц. Акопян. Об эквивалентных преобразованиях покрытий, „Кибернетика“, Киев, 6, 1972.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ռ. Զ. Մկրտչյան. Ինքնահամալուծ օպերատորի սեփական ֆունկցիոնալների լրիվ սխեմայի անընդհատությունը բնորոշող մի նոր հայտանիշի մասին	75
Վ. Հ. Ավագյան. Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը սպեկտրալ պարամետրով եզրային պայմանի մեջ	91
Ա. Ա. Ոսկանյան. Ամբողջ առանցքի վրա մոտավորությունների տեսության մի քանի էկստրեմալ խնդիրների մասին	107
Շ. Ե. Բոզոյան, Բ. Ե. Թորոսյան. Տրամաբանության հանրահաշվի ֆունկցիաների հետազոտումը փոփոխականների համախմբության ակտիվության տեսակետից	124
Մ. Յու. Խոճյանց. Թվարկության օպերատորների որոշ բնութագրեր	142
Հ. Յ. Հակոբյան, Հ. Հ. Գալստյան. Ծածկույթների նկատմամբ կրիտիկական գրաֆների դասերը	150

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Р. З. Мкртчян. Об одном новом признаке, характеризующем непрерывность полной системы собственных функционалов самосопряженного оператора	75
В. А. Авакян. Задача Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии	91
А. А. Восканян. О некоторых экстремальных задачах теории приближения на всей вещественной оси	107
Ш. Е. Бозоян, Б. Е. Торосян. Исследования функций алгебры логики с точки зрения активности совокупности переменных	124
М. Ю. Ходжалар. Некоторые характеристические спектры перечисления	142
Г. Ц. Акопян, О. А. Галстян. Классы графов, критических относительно покрытий	150

CONTENTS

R. Z. Mkrtchian. On a new criterion characterizing the continuity of the full system of eigenfunctionals of a self-adjoint operator	75
V. A. Avakian. The Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary condition	91
A. A. Voskanyan. On some extremal problems in the theory of approximations on the real axis	107
Sh. E. Bozoyan, B. E. Torossian. Investigation of functions of the algebra of logic in terms of activity of joint variables	124
M. Ju. Khodjalants. Some characteristic of enumeration operators	142
H. Ts. Hakobyan, H. H. Galustian. Classes of critical graphs in reference to coverings	150