

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Դիտավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵԹՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Գ. ԶԱՊԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱԼՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպայական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Ստաբիլիզացիայի հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համաձայն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշվում նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Իրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Ոգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգ

Издается преимущественно на русском языке, а также на армянском, английском, французском и немецком языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Бареканутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings *Izvestia* of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika” are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespaced, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika”
Academy of Sciences of Armenian, SSR
24, Berekamutian St.,
Yerevan, Armenian, SSR, USSR

Ю. А. КУТОЯНЦ

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ПУАССОНОВСКОГО ТИПА

§ 1. Введение

Локальная асимптотическая нормальность (ЛАН) [1] семейства мер, отвечающих наблюдениям, позволяет строить асимптотически локально наиболее мощные критерии проверки гипотез [2], устанавливать минимаксную границу на риск произвольных оценок [3] и помогает исследовать асимптотические свойства оценок [4]. Поэтому определенный интерес представляет задача получения условий ЛАН для различных схем наблюдений в возможно минимальных предположениях. В случае независимых одинаково распределенных случайных величин весьма слабые условия ЛАН получил Я. Гаек [3]. Когда случайные величины независимы и неодинаково распределены условия ЛАН сформулированы И. А. Ибрагимовым, Р. З. Хасьминским [5]. Кроме того, в [5] приведены условия ЛАН для наблюдений диффузионного процесса с неслучайным коэффициентом сноса. В работе автора [6] установлена ЛАН для наблюдений процесса диффузионного типа. В случае наблюдений неоднородного процесса Пуассона в работе [7] использована ЛАН семейства мер для описания асимптотических свойств оценок.

В настоящей работе даны условия ЛАН для наблюдений процесса пуассоновского типа. Процесс пуассоновского типа—это, грубо говоря, процесс Пуассона, интенсивность которого сама является случайным процессом. Его называют также процессом Кокса или дважды случайным (doubly stochastic) процессом Пуассона [8] и используют как вполне удовлетворительную модель ряда явлений в физике, технике, биологии и т. д. [9]. В частности, неоднородный процесс Пуассона также является процессом пуассоновского типа. Мы будем придерживаться терминологии статьи Ю. М. Кабанова, Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [10], откуда заимствуем формулу отношения правдоподобия.

В § 2 устанавливается теорема об асимптотической нормальности стохастического интеграла, которая затем используется в § 3 для доказательства ЛАН семейства мер процесса пуассоновского типа, распределение которого зависит от одномерного параметра θ . Этот результат распространяется в § 4 на случай многомерного θ . В § 5 приводятся два примера ЛАН семейств мер. § 6 и § 7 посвящены приме-

нениям ЛАН к задачам статистики: проверки гипотез и оценки параметров соответственно.

§ 2. Асимптотическая нормальность стохастического интеграла

Пусть $\{\Omega, F, P\}$ — полное вероятностное пространство; $\{F_t, t \geq 0\}$ — неубывающее семейство непрерывных справа пополненных σ -алгебр $F_t \subset F$; X — пространство непрерывных справа кусочно-постоянных функций $x = \{x(t), t \geq 0\}$ таких, что

$$x(0) = 0, \quad x(t) = x(t-) + (1 \text{ или } 0)$$

для всех $t < \infty$. Подпространство функций из X , заданных на $[0, T]$, обозначим X_T . На пространстве X определим семейство σ -алгебр $\{B_t, t \geq 0\}$, полагая $B_t = \sigma\{x(s), 0 \leq s \leq t\}$.

Определение 2.1. Заданный на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ случайный процесс $X = \{X(t), F_t; t \geq 0\}$ с траекториями, принадлежащими X , называется *точечным процессом*.

Согласно обобщенному разложению Дуба-Мейера точечный процесс X допускает представление

$$X(t) = A(t) + m(t), \quad t \geq 0,$$

где $m = \{m(t), F_t; t \geq 0\}$ — локальный мартингал с непрерывными справа траекториями, $A = \{A(t), F_t; t \geq 0\}$ — натуральный возрастающий процесс, называемый *компенсатором*.

Определение 2.2. Точечный процесс X с компенсатором A называется *процессом пуассоновского типа*, если при всех $T > 0$

$$A(T) = \int_0^T S(t) dt,$$

где $S = \{S(t), F_t; t \geq 0\}$ — некоторый предсказуемый процесс, называемый *интенсивностью* процесса X .

Для процесса пуассоновского типа X справедливо следующее (минимальное) представление

$$X(T) = \int_0^T \tilde{S}(t) dt + n(t), \quad T > 0$$

с локальным мартингалом $n = \{n(t), F_t^X; t \geq 0\}$ и интенсивностью $\tilde{S}(t) = E\{S(t) | F_t^X\}$, $t \geq 0$, где σ -алгебра $F_t^X = \sigma\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$ ([10], теорема 5). В соответствии с этим представлением всюду далее сразу считаем $F_t = F_t^X$ и следовательно $\tilde{S}(t) = S(t)$, $m(t) = n(t)$, $t \geq 0$.

Пусть $f = \{f(t), F_t; t \geq 0\}$ — предсказуемый процесс и

$$E \int_0^T |f(t)| S(t) dt < \infty. \quad (2.1)$$

Тогда можно определить интеграл Лебега—Стилтьеса

$$\int_0^T f(t) dY(t) = \int_0^T f(t) dX(t) - \int_0^T f(t) S(t) dt \quad (2.2)$$

со следующим свойством:

$$E \int_0^T f(t) dY(t) = 0. \quad (2.3)$$

Если, кроме того, и

$$E \int_0^T f(t)^2 S(t) dt < \infty, \quad (2.4)$$

то

$$E \left| \int_0^T f(t) dY(t) \right|^2 = E \int_0^T f(t)^2 S(t) dt.$$

Центральную предельную теорему для стохастического интеграла докажем в так называемой схеме серий. При каждом $T < \infty$ считаем заданным предсказуемый процесс $f_T = \{f_T(t), F_t; 0 \leq t \leq T\}$, удовлетворяющий условию (2.4). Вводим стохастический интеграл

$$F_T = \int_0^T f_T(t) dY(t).$$

Асимптотическую нормальность случайной величины g_T с параметрами (a, b) обозначим $L(g_T) \Rightarrow N(a, b)$.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия

A — I.
$$P\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f_T(t)^2 S(t) dt = z^2, \quad z^2 < \infty.$$

A — II. При некотором $\delta > 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \int_0^T |f_T(t)|^{2+\delta} S(t) dt = 0.$$

Тогда

$$L \left\{ \int_0^T f_T(t) dY(t) \right\} = N(0, z^2).$$

Доказательство. При каждом $T < \infty$ введем следующие объекты:

1) процесс Пуассона $\{N(t), F_T; T \leq t \leq T+1\}$ интенсивности T и процесс пуассоновского типа

$$X^*(t) = \begin{cases} X(t), & 0 \leq t \leq T \\ N(t), & T < t \leq T+1, \end{cases}$$

2) функции

$$f_T^*(t) = \begin{cases} f_T(t), & 0 \leq t \leq T \\ \frac{\sigma}{\sqrt{T}}, & T < t \leq T+1, \end{cases} \quad S^*(t) = \begin{cases} S(t), & 0 \leq t \leq T \\ T, & T < t \leq T+1, \end{cases}$$

3) марковский момент

$$\tau_T = \inf \left\{ \tau : \int_0^\tau f_T^*(t)^2 S^*(t) dt = \tau^2 \right\},$$

4) остановленный стохастический интеграл

$$\eta_T = \int_0^{\tau_T} f_T^*(t) dY^*(t),$$

где $Y^*(\cdot)$ определяется по $X^*(\cdot)$.

Сначала условие А—II позволит нам доказать асимптотическую нормальность η_T , а затем с помощью А—I установим сходимость разности $F_T - \eta_T$ по вероятности к нулю, откуда и будет следовать асимптотическая нормальность F_T .

Введем случайный процесс

$$\zeta_T(t) = \exp \left\{ i\lambda \int_0^t f_T^*(\tau) dY^*(\tau) + \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^t f_T^*(\tau)^2 S^*(\tau) d\tau \right\}, \quad 0 \leq t \leq T+1, \quad \lambda \in R^1,$$

для которого по обобщенной формуле Ито справедливо представление

$$\begin{aligned} \zeta_T(t) = & 1 + \int_0^t \zeta_T(t-) [\exp \{i\lambda f_T^*(\tau)\} - 1] dY^*(\tau) + \\ & + \int_0^t \zeta_T(\tau-) \left[\exp \{i\lambda f_T^*(\tau)\} - 1 - i\lambda f_T^*(\tau) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \lambda^2 f_T^*(\tau)^2 \right] S^*(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Возьмем математическое ожидание полученного равенства при $t = \tau_T$ и придем к

$$E \zeta_T(\tau_T) = 1 + E \int_0^{\tau_T} \zeta_T(\tau -) \left[\exp \{i\lambda f_T^*(\tau)\} - 1 - i\lambda f_T^*(\tau) + \frac{1}{2} \lambda^2 f_T^*(\tau)^2 \right] S^*(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

так как для второго слагаемого в (2.5) выполнено условие (2.4):

$$E \int_0^{\tau_T} |\zeta_T(t-)|^2 [\exp \{i\lambda f_T^*(t)\} - 1]^2 S^*(t) dt \leq \leq \lambda^2 \exp(\lambda^2 \sigma^2) E \int_0^{\tau_T} f_T^*(t)^2 S^*(t) dt < \infty,$$

где мы воспользовались известным неравенством

$$|e^{i\varphi} - 1| \leq |\varphi|$$

и определением τ_T .

С помощью другого известного неравенства

$$\left| e^{i\varphi} - 1 - i\varphi + \frac{1}{2} \varphi^2 \right| \leq C(\delta) |\varphi|^{2+\delta}, \quad \delta > 0$$

равенства (2.6) и условия A—II получаем сходимость

$$|E \zeta_T(\tau_T) - 1| \leq C(\delta) \exp \left\{ \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2 \right\} \times \times E \int_0^{\tau_T} |f_T^*(t)|^{2+\delta} S^*(t) dt \rightarrow 0,$$

Следовательно $\lim_{T \rightarrow \infty} E \zeta_T(\tau_T) = 1$. По определению $\zeta_T(\tau_T)$ имеет место

равенство $E \zeta_T(\tau_T) = \Psi_T(\lambda) \exp \left\{ \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2 \right\}$, где $\Psi_T(\lambda)$ — характеристическая функция интеграла η_T , откуда получаем сходимость $\Psi_T(\lambda) \rightarrow \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2 \right\}$, а так как сходимость характеристических функций

эквивалентна сходимости функций распределения — асимптотическая нормальность η_T доказана.

Далее, для любых положительных a, b справедливо неравенство

$$P \{ |F_T - \eta_T| > a \} = P \left\{ \left| \int_0^{\tau+1} f_T(t) [Z_{\tau+1} - Z_{\tau}] dY^*(t) \right| > a \right\}$$

$$\begin{aligned} > a \} \leq \frac{b}{a^2} + P \left\{ \int_0^{T+1} f_T^*(t)^2 | \chi_{\{t \leq T\}} - \right. \\ \left. - \chi_{\{t \leq \tau_T\}} | S^*(t) dt > b \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\chi_{\{B\}}$ — индикатор события B . Вероятность события в правой части (2.7) обозначим $P|A|$. По формуле полной вероятности

$$P|A| = P|A, \tau_T < T| + P|A, \tau_T = T| + P|A, \tau_T > T|.$$

Очевидно $P|A, \tau_T = T| = 0$. По определению марковских моментов

$$P|A, \tau_T < T| = P \left\{ \int_0^T f_T(t)^2 S(t) dt - \sigma^2 > b, \tau_T < T \right\},$$

$$P|A, \tau_T > T| = P \left\{ \sigma^2 - \int_0^T f_T(t)^2 S(t) dt, \tau_T > T \right\}.$$

Следовательно

$$P|A| \leq 2 P \left\{ \left| \int_0^T f_T(t)^2 S(t) dt - \sigma^2 \right| > b \right\}.$$

Но последняя вероятность по условию $A-I$ при $T \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Теперь сходимость $P(|F_T - \eta_T| > a) \rightarrow 0$ вытекает из произвольности a и b .

§ 3. ЛАН для одномерного параметра

Пусть задано открытое множество $\Theta \subset R^k$ и семейство мер $P^{(T)} = \{P_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ в (X_T, B_T) . Будем говорить, что семейство $P^{(T)}$ ЛАН в Θ , если существует такая невырожденная матрица $\varphi_T(\theta) = \varphi_T(\theta)_{k \times k}$, что отношение правдоподобия

$$Z_T(u) = \frac{dP_{\theta + \varphi_T(\theta)u}^{(T)}}{dP_\theta^{(T)}}(X_T), \quad u \in U_{\theta, T} = \{u: \theta + \varphi_T(\theta)u \in \Theta\}$$

допускает представление [5]

$$Z_T(u) = \exp \left\{ (u, \Delta_T(\theta, X_T)) - \frac{1}{2} \|u\|^2 + \psi_T(\theta, u, X_T) \right\}, \quad (3.1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение и $\|\cdot\|$ — норма в R^k и при $T \rightarrow \infty$

$$L(\Delta_T(\theta, X_T) | P_\theta^{(T)}) \Rightarrow N(0, J), \quad (3.2)$$

J — единичная матрица размерности $k \times k$,

$$P_0 - \lim_{T \rightarrow \infty} \varphi_T(\theta, u, X_T) = 0. \quad (3.3)$$

В настоящем параграфе устанавливается ЛАН семейства мер $\{P_0^{(T)}, \theta \in \Theta\}$, наведенных в $(X_T, \mathcal{B}_T)$ реализациями процессов пуассоновского типа интенсивностей $S_T(\theta) = \{S(\theta, t), F_t; 0 \leq t \leq T\}$ в случае одномерного множества $\Theta = (x, \theta) \in R^1$.

Обозначим $E_\theta(\cdot)$ математическое ожидание по мере $P_0^{(T)}$, $S(\theta, t) = \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, t)$,

$$\varphi_T(\theta) = \left\{ E_\theta \int_0^T \frac{\dot{S}(\theta, t)^2}{S(\theta, t)} dt \right\}^{-1/2}$$

и всюду далее считаем интенсивность $S(\theta, t)$ при п.в. $t \geq 0$ положительным с вероятностью 1 случайным процессом.

Введем условия на семейство интенсивностей $\{S_T(\theta), \theta \in \Theta\}$.

В—I. При всех $\theta, \bar{\theta} \in \Theta$ и $T < \infty$

$$P_0^{(T)} \left\{ \int_0^T \frac{S(\bar{\theta}, t)}{S(\theta, t)} dt < \infty \right\} = 1.$$

В—II. Случайная функция $\{S(\theta, t), \theta \in \Theta\}$ при почти всех $t \geq 0$ абсолютно непрерывная по θ , т. е. с вероятностью 1

$$S(\bar{\theta}, t) - S(\theta, t) = \int_{\theta}^{\bar{\theta}} \dot{S}(y, t) dy$$

и при всех $\theta \in \Theta$ имеет место

$$0 < E_\theta \int_0^T \frac{\dot{S}(\theta, t)^2}{S(\theta, t)} dt < \infty.$$

В—III. При всех $\theta \in \Theta$

$$P_0 - \lim_{T \rightarrow \infty} \varphi_T(\theta)^2 \int_0^T \frac{\dot{S}(\theta, t)^2}{S(\theta, t)} dt = 1.$$

В—IV. Найдется такое $\delta > 0$, что при всех $\theta \in \Theta$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \varphi_T(\theta)^{2+\delta} E_\theta \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(\theta, t)}{S(\theta, t)} \right|^{2+\delta} S(\theta, t) dt = 0.$$

В—V. Для любого $C > 0$ и $\theta \in \Theta$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|y-z| \leq |y-\theta| \leq C \varphi_T(\theta)} \varphi_T(\theta)^2 E_\theta \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(z, t)}{S(y, t)} - \frac{\dot{S}(\theta, t)}{S(\theta, t)} \right|^2 S(\theta, t) dt = 0.$$

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия В—I—В—V, тогда семейство мер $\{P_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ при $T \rightarrow \infty$ локально асимптотически нормальное в Θ с правильной нормирующей функцией $\varphi_T(\theta)$ и

$$\Delta_T(\theta, X_T) = \varphi_T(\theta) \int_0^T \frac{\dot{S}(\theta, t)}{S(\theta, t)} [dX(t) - S(\theta, t) dt].$$

Доказательство. По условию В—I все меры $P_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta$ эквивалентны ([10], теорема 1.4) и отношение правдоподобия $Z_T(u)$ имеет вид

$$Z_T(u) = \exp \left\{ \int_0^T \ln \frac{S(\theta + \varphi_T(\theta)u, t)}{S(\theta, t)} dY(t) - \right. \\ \left. - \int_0^T \left[S(\theta + \varphi_T(\theta)u, t) - S(\theta, t) - S(\theta, t) \ln \frac{S(\theta + \varphi_T(\theta)u, t)}{S(\theta, t)} \right] dt \right\}, \quad (3.4)$$

Для разности

$$\int_0^T \ln \frac{S(\theta + \varphi_T(\theta)u, t)}{S(\theta, t)} dY(t) - u \Delta_T(\theta, X_T) \equiv G(T)$$

по свойству стохастических интегралов и условиям В—II, В—III имеем (считаем $u > 0$)

$$P_\theta^{(T)} \{ |G(T)| > \gamma \} \leq \frac{1}{\gamma^2} E_\theta G(T)^2 = \\ = \frac{1}{\gamma^2} E_\theta \int_0^T \left[\ln \frac{S(\theta + \varphi_T(\theta)u, t)}{S(\theta, t)} - u \varphi_T(\theta) \frac{\dot{S}(\theta, t)}{S(\theta, t)} \right]^2 S(\theta, t) dt = \\ = \frac{1}{\gamma^2} E_\theta \int_0^T \int_0^{\theta + \varphi_T(\theta)u} \left[\frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} - \frac{\dot{S}(\theta, t)}{S(\theta, t)} \right]^2 dy S(\theta, t) dt \leq \\ \leq \frac{\varphi_T(\theta)u}{\gamma^2} \int_0^{\theta + \varphi_T(\theta)u} E_\theta \int_0^T \left[\frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} - \frac{\dot{S}(\theta, t)}{S(\theta, t)} \right]^2 S(\theta, t) dt dy \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

для любого фиксированного u при $T \rightarrow \infty$.

Далее, справедливо равенство

$$\frac{1}{2} u^2 \varphi_T(\theta)^2 \int_0^T \frac{\dot{S}(\theta, t)^2}{S(\theta, t)} dt = \int_0^T \int_0^{\theta + \varphi_T(\theta)u} \int_0^y \frac{\dot{S}(\theta, t)^2}{S(\theta, t)^2} dz dy S(\theta, t) dt.$$

Поэтому можно записать

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left| S(\theta + \varphi_T(\theta)u, t) - S(\theta, t) - S(\theta, t) \ln \frac{S(\theta + \varphi_T(\theta)u, t)}{S(\theta, t)} \right| dt = \\ & - \frac{1}{2} u^2 \varphi_T(\theta)^2 \int_0^T \frac{S(\theta, t)^2}{S(\theta, t)} dt = \int_0^{T + \varphi_T(\theta)u} \int_0^y \left| \frac{S(z, t) \dot{S}(y, t)}{S(y, t) S(\theta, t)} - \right. \\ & \left. - \frac{S(\theta, t)^2}{S(\theta, t)^2} \right| dz dy S(\theta, t) dt, \end{aligned} \quad (3.6)$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} & E_0 \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(z, t) \dot{S}(y, t)}{S(\theta, t) S(y, t)} - \frac{S(\theta, t)^2}{S(\theta, t)^2} \right| S(\theta, t) dt \leq \\ & \leq E_0 \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(y, t)^2}{S(y, t)^2} - \frac{S(\theta, t)^2}{S(\theta, t)^2} \right| S(\theta, t) dt + \\ & + E_0 \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(z, t)}{S(\theta, t)} - \frac{S(y, t)}{S(y, t)} \right| \frac{|S(y, t)|}{S(y, t)} S(\theta, t) dt \leq \\ & \leq \left\{ E_0 \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} - \frac{S(\theta, t)}{S(\theta, t)} \right|^2 S(\theta, t) dt \times \right. \\ & \times E_0 \int_0^T \left| \frac{S(y, t)}{S(y, t)} - \frac{S(\theta, t)}{S(\theta, t)} \right|^2 S(\theta, t) dt \left. \right\}^{1/2} + \\ & + \left\{ E_0 \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} - \frac{S(z, t)}{S(\theta, t)} \right|^2 S(\theta, t) dt \times \right. \\ & \times E_0 \int_0^T \frac{\dot{S}(y, t)^2}{S(y, t)^2} S(\theta, t) dt \left. \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

По условию В-V

$$\begin{aligned} & E_0 \int_0^T \frac{\dot{S}(y, t)^2}{S(y, t)^2} S(\theta, t) dt \leq 2E_0 \int_0^T \frac{\dot{S}(\theta, t)^2}{S(\theta, t)} dt + \\ & + 2 \cdot E_0 \int_0^T \left| \frac{S(y, t)}{S(y, t)} - \frac{\dot{S}(\theta, t)}{S(\theta, t)} \right|^2 S(\theta, t) dt = 2 \varphi_T(\theta)^{-2} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

поэтому правая часть неравенства (3.7) равна $\varepsilon_T(\theta)^{-1} o(1)$, что вместе с (3.6) и условием В—III позволяет записать

$$P_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left[S(\theta + \varepsilon_T(\theta) u, t) - S(\theta, t) - \right. \\ \left. - S(\theta, t) \ln \frac{S(\theta + \varepsilon_T(\theta) u, t)}{S(\theta, t)} \right] dt = \frac{1}{2} u^2. \quad (3.8)$$

Условия В—III, В—IV обеспечивают по теореме 2.1 асимптотическую нормальность с параметрами $(0, 1)$ случайной величины $\Delta_T(\theta, X_T)$ (следует положить $f_T(t) = \varepsilon_T(\theta) S(\theta, t) S(\theta, t)^{-1}$).

Теперь утверждение теоремы 3.1 вытекает из соотношений (3.5) — (3.8) и представления (3.4).

§ 4. ЛАН для многомерного параметра

Пусть Θ — открытое подмножество R^k , при каждом $\theta \in \Theta$ на пространстве $[2, F, P]$ задан процесс пуассоновского типа $X = [X(t), F_t, t \geq 0]$ интенсивности $S(\theta) = [S(\theta, t), F_t; t \geq 0]$ и $P^{(\tau)}_\theta = [P^{(\tau)}_\theta, \theta \in \Theta]$ — семейство мер, наведенных в (X_T, B_T) процессами $X_T, \theta \in \Theta$. Кроме того, введем обозначения: $\dot{S}_j(\theta, t) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} S(\theta, t)$, вектор $\dot{S}(\theta, t) = [\dot{S}_1(\theta, t), \dots, \dot{S}_k(\theta, t)]$, матрица

$$I_T(\theta)_{ij} = E_0 \int_0^T \dot{S}_i(\theta, t) \dot{S}_j(\theta, t) S(\theta, t)^{-1} dt \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Следующие условия позволят доказать многомерный аналог теоремы 3.1.

С—I. При всех $\theta, \tilde{\theta} \in \Theta$ и $T < \infty$

$$P^{(\tau)}_\theta \left\{ \int_0^T \frac{S(\tilde{\theta}, t)}{S(\theta, t)} dt < \infty \right\} = 1.$$

С—II. Случайная функция $[S(\theta, t), \theta \in \Theta]$ при всех $t \geq 0$ непрерывно дифференцируема с вер. 1 по каждой составляющей θ , причем

$$E_0 \int_0^T \dot{S}_j(\theta, t)^2 S(\theta, t)^{-1} dt < \infty,$$

при всех $\theta \in \Theta$ и $j = 1, \dots, k$. Информационная матрица Фишера $I_T(\theta)$ положительно определена.

По этому условию существует положительно определенная, симметричная матрица $\varphi_T(\theta)$ такая, что $I_T(\theta)^{-1} = \varphi_T(\theta) \varphi_T(\theta)'$ (штрих обозначает транспонирование).

C-III. Для любого $\lambda \in R^k$ и $\theta \in \Theta$

$$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T |\lambda \varphi_T(\theta) \dot{S}(\theta, t)|^2 S(\theta, t)^{-1} dt = |\lambda|^2.$$

C-IV. Найдется такое $\delta > 0$, что при всех $\lambda \in R^k$ и $\theta \in \Theta$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_0 \int_0^T |\lambda \varphi_T(\theta) \dot{S}(\theta, t)|^{2+\delta} S(\theta, t)^{-1} dt = 0.$$

C-V. Для любых $C > 0$, $\lambda \in R^k$ и $\theta \in \Theta$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|u|+|v| \leq C} E_0 \int_0^T \left(\frac{S(\theta + \varphi_T(\theta) u, t)}{S(\theta + \varphi_T(\theta) v, t)} - \frac{S(\theta, t)}{S(\theta, t)} \varphi_T(\theta) \lambda \right)^2 S(\theta, t)^{-1} dt = 0.$$

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия C-I—C-V, тогда семейство мер $\{P_0^{(T)}; \theta \in \Theta\}$ при $T \rightarrow \infty$ локально асимптотически нормальное в Θ с правильной нормирующей матрицей $\varphi_T(\theta)$ и вектором

$$\Delta_T(\theta, X_T) = \varphi_T(\theta) \int_0^T \dot{S}(\theta, t) S(\theta, t)^{-1} [dX(t) - S(\theta, t) dt].$$

Доказательство этой теоремы можно вывести из теоремы 3.1, воспользовавшись следующим приемом [5]: для любого вектора $u \in R^k$ обозначим $l = u/|u|$, $|u| = s$. Тогда

$$Z_T(u) = \frac{dP_{\theta + s \varphi_T(\theta) l}^{(T)}}{dP_{\theta}^{(T)}}(X_T) = \bar{Z}_T(s).$$

Процесс $\bar{Z}_T(s)$ по теореме 3.1 допускает представление (3.1) (в случае одномерного параметра s), откуда легко получаем и утверждение теоремы 4.1.

§ 5. Примеры

Рассмотрим два примера наблюдений процессов пуассоновского типа, имеющих ЛАН семейства мер. Первый, когда интенсивность обладает эргодическим свойством, и второй — с неслучайной интенсивностью, меняющейся по гармоническому закону.

Пример 5.1. Пусть интенсивность процесса пуассоновского типа $X = \{X(t), F_t; t \geq 0\}$ есть случайная функция

$$S(\theta, t) = \theta; (t), \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$

где $[\theta; (t), F; t \geq 0]$ — неотрицательный с вероятностью 1 случайный процесс, $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Обозначим $P_0^{(T)}$ меру, наведенную в (X_T, B_T) процессом $X_T = [X(t), 0 \leq t \leq T]$.

Утверждение 5.1. Пусть процесс $\theta; (\cdot)$ имеет постоянное среднее $E\theta; (t) = z < \infty$ и справедлив закон больших чисел

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \theta; (t) dt = z > 0,$$

тогда семейство мер $[P_0^{(T)}, \theta \in \Theta]$ локально асимптотически нормальное в Θ с правильной нормирующей функцией $\varphi_T(\theta) = \sqrt{\theta/z} \cdot T^{-1/2}$.

Доказательство заключается в прямой проверке условий В-1—В-V теоремы 3.1.

Замечание 5.1. Пусть по наблюдениям процесса X_T интенсивности (5.1) требуется оценить неизвестный параметр $\theta \in \Theta$. Нетрудно показать, что оценка максимального правдоподобия имеет вид

$$\hat{\theta}_T = X(T) / \int_0^T \theta; (t) dt,$$

и при $T \rightarrow \infty$ в предположениях утверждения 5.1

$$L[(\hat{\theta}_T - \theta) / \sqrt{T} | P_0^{(T)}] \Rightarrow N(0, \theta/z).$$

Пример 5.2. Пусть интенсивность наблюдаемого процесса Пуассона $X_T = [X(t), 0 \leq t \leq T]$ меняется по гармоническому закону

$$S(\theta, t) = \frac{1}{2} A [1 + \cos(\omega t + \tau)] + \lambda, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.2)$$

где $\theta = (\omega, \tau) \in \Theta = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$, $\lambda > 0$. К такой схеме наблюдений приходят, например, в задачах оптической связи, когда происходит передача значений (ω, τ) модуляцией интенсивности слабого оптического источника, наблюдаемого на фоне однородного шума интенсивности λ , при этом A — амплитуда (максимальное значение), ω — частота и τ — фаза интенсивности сигнального процесса Пуассона.

Утверждение 5.2. Семейство мер $[P_0^{(T)}, \theta \in \Theta]$, наведенных процессами Пуассона X_T интенсивностей (5.2) в (X_T, B_T) при $T \rightarrow \infty$ локально асимптотически нормальное в Θ с правильной нормирующей матрицей

$$\varphi_T(\theta) = \left[1 + \frac{1}{2} A - \sqrt{\lambda A + \lambda^2} \right]^{-1/2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} T^{-3/2} & -3$$

$$I_T(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{3} T^3 (1 + o(1)) & \frac{\tau}{2} T^2 (1 + o(1)) \\ \frac{\tau}{2} T^2 (1 + o(1)) & \tau T (1 + o(1)) \end{pmatrix},$$

где

$$\tau = 1 + \frac{1}{2} A - \sqrt{1/4 A^2 + 1}.$$

Отметим, что асимптотическое поведение оценок максимального правдоподобия и байесовских оценок (одномерных) параметров A , σ и τ для схемы (5.1) описано в [7]. В доказательстве в [7] центральное место занимало установление ЛАН семейства мер, отвечающих наблюдениям, поэтому утверждение 5.1 также поможет исследовать асимптотические свойства оценок двумерного параметра $\theta = (\sigma, \tau)$ при $T \rightarrow \infty$.

§ 6. Асимптотически локально наиболее мощный критерий

Пусть наблюдается процесс пуассоновского типа $X_T = \{X(t), F_t; 0 \leq t \leq T\}$ интенсивности $S_T(\theta) = \{S(\theta, t), F_t; 0 \leq t \leq T\}$, $\theta \in \Theta$ и множество $\Theta = [\theta_0, \infty)$. Требуется по наблюдениям X_T проверить простую гипотезу $H: \theta = \theta_0$ против односторонней сложной альтернативы $K: \theta > \theta_0$. Как и ранее $P_{\theta_0}^{(T)}$ — мера, отвечающая X_T в (X_T, B_T) .

Считаем выполненным условие

$$P_{\theta_0}^{(T)} \left\{ \int_0^T \frac{S(\theta, t)}{S(\theta_0, t)} dt < \infty \right\} = 1, \theta > \theta_0,$$

гарантирующее абсолютную непрерывность мер $P_{\theta}^{(T)}$, $\theta > \theta_0$ относительно меры $P_{\theta_0}^{(T)}$, а также условие В—II с $\theta = \theta_0$ и $\bar{\theta} > \theta_0$. Кроме того, пусть выполнены условия В—III, В—IV в точке θ_0 и условие В—V, в котором следует положить $\theta = \theta_0$ и $y > \theta_0$, $z > \theta_0$.

Фиксируем уровень значимости α и обозначим $\beta_T(\theta, \Phi)$ вероятность правильного принятия решения при использовании критерия Φ и истинном значении θ . Сделаем замену переменных $u = (\theta - \theta_0) \tau_T(\theta_0)^{-1}$ и назовем критерий Φ^* асимптотически локально наиболее мощным, если для любого другого критерия Φ (также уровня α) и любой постоянной $C > 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{0 < u < C} [\beta_T(u, \Phi^*) - \beta_T(u, \Phi)] > 0,$$

где

$$\beta_T(u, \Phi) = \beta_T(\theta_0 + \tau_T(\theta_0) u, \Phi).$$

Утверждение 6.1. Критерий Φ , задаваемый соотношениями

принимать H , если $\Delta_T(\theta_0, X_T) \leq C_{\alpha, T}$,

принимать K , если $\Delta_T(\theta_0, X_T) > C_{\alpha, T}$,

где $C_{\alpha, T}$ является решением уравнения

$$P_{\theta_0}^{(T)}(|\Delta_T(\theta_0, X_T)| > C_{\alpha, T}) = \alpha,$$

асимптотически локально наиболее мощный.

Доказательство. Анализ доказательства теоремы 3.1 показывает, что на самом деле в ней установлено несколько больше, чем ЛАН. А именно, остаточный член $\psi_T(\cdot)$ в представлении (3.1) стремится к нулю по вероятности не только при каждом $u \in R^1$, но и равномерно на компактах по u , т. е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in C} P_{\theta_0}^{(T)}(|\psi_T(\theta_0, u, X_T)| > \gamma) = 0 \quad (6.1)$$

для любых $C > 0$ и $\gamma > 0$. А тогда доказательство утверждения 6.1 по существу не отличается от доказательства соответствующего утверждения в случае наблюдений последовательности случайных величин, отношение правдоподобия которых допускает представление (3.1) со свойствами (3.2), (6.1) ([2], гл. 4, следствие 3.1).

Представление (3.1) и теоремы 3.1, 4.1, кроме того, позволяют описать асимптотически наилучшие критерии и для некоторых других задач проверки гипотез (подробнее см. [2], гл. 4).

§ 7. Нижние границы на риск оценок

Пусть наблюдается реализация процесса пуассоновского типа $X_T = [X(t), F_t; 0 \leq t \leq T]$ интенсивности $S_T(\theta) = [S(\theta, t), F_t; 0 \leq t \leq T]$ и требуется параметр $\theta \in \Theta \subset R^k$ оценить. Ниже приводятся неравенство Крамера-Рао и граница Гаека для этой схемы наблюдений на среднеквадратическое отклонение произвольной оценки $\theta_T^* = \theta_T^*(X_T)$.

Сначала сформулируем и докажем неравенство Крамера-Рао в одномерном ($\Theta \subset R^1$) случае, для чего нам понадобятся

Условия:

Д-1. При всех $\theta, \tilde{\theta} \in \Theta$

$$P_{\theta}^{(T)} \left\{ \int_0^T \frac{S(\tilde{\theta}, t)}{S(\theta, t)} dt < \infty \right\} = 1.$$

Д-II. Функция $S(\theta, t)$ абсолютно непрерывная по θ с вероятностью 1 при п.в. $t \in [0, T]$ и функция

$$I(\theta_1, \theta_2) = E_{\theta_1} \int_0^T \frac{\dot{S}(\theta_1, t)^2}{S(\theta_2, t)} dt$$

непрерывна на прямой $\theta_1 = \theta_2$.

Д—III. При всех $\theta \in \Theta$

$$I(\theta) \equiv I(\theta, \theta) > 0.$$

Теорема 7.1. (Неравенство Крамера-Рао). Пусть выполнены условия Д—I—Д—III, тогда для любой оценки $\hat{\theta}_T$ параметра θ таковой, что величина $Q(\theta)$ ограничена на компактах в Θ , справедливы утверждения:

- 1) смещение $b(\theta) = E_{\theta} \hat{\theta}_T - \theta$ абсолютно непрерывно в Θ ;
- 2) при п.в. $\theta \in \Theta$ имеет место неравенство

$$E_{\theta} (\hat{\theta}_T - \theta)^2 \geq \frac{\left[1 + \frac{db(\theta)}{d\theta}\right]^2}{I(\theta)} + b(\theta)^2. \quad (7.1)$$

Доказательство. Повторяя выкладки (2.2)–(2.4) работы [11] в наших обозначениях придем к неравенству

$$\begin{aligned} (E_{\theta_1} \hat{\theta}_T - E_{\theta_1} \hat{\theta}_T)^2 &\leq [2Q(\theta_1) + 2Q(\theta_2) - 2b(\theta_1)^2 - 2b(\theta_2)^2 + \\ &+ (E_{\theta_1} \hat{\theta}_T - E_{\theta_1} \hat{\theta}_T)^2] 2 \left\{ 1 - E_{\theta} \left(\frac{dP_{\theta_1}^{(T)}}{dP_{\theta}^{(T)}} \frac{dP_{\theta_2}^{(T)}}{dP_{\theta}^{(T)}} \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

По условию Д—I меры $P_{\theta}^{(T)}$, $\theta \in \Theta$ эквивалентны и можно записать

$$E_{\theta} \left(\frac{dP_{\theta_1}^{(T)}}{dP_{\theta}^{(T)}} \frac{dP_{\theta_2}^{(T)}}{dP_{\theta}^{(T)}} \right)^{1/2} = E_{\theta_1} \left(\frac{dP_{\theta_2}^{(T)}}{dP_{\theta_1}^{(T)}} \right)^{1/2}.$$

Введем обозначения: $S_i = S(\theta_i, t)$, $i = 1, 2$

$$V(T) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \ln \left(\frac{S_2}{S_1} \right) dX(t) - \frac{1}{2} \int_0^T [S_2 - S_1] dt \right\} = \left(\frac{dP_{\theta_2}^{(T)}}{dP_{\theta_1}^{(T)}} \right)^{1/2}.$$

По обобщенной формуле Ито процесс $[V(t), \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T]$ допускает представление

$$\begin{aligned} V(T) &= 1 + \int_0^T V(t-) \left(\sqrt{\frac{S_2}{S_1}} - 1 \right) [dX(t) - S(\theta_1, t$$

По условию Д—II функция $V \overline{S(\theta, t)}$ также абсолютно непрерывная и

$$\begin{aligned} E_{\theta_1} \int_0^T V(t-)^2 (V \overline{S_2} - V \overline{S_1})^2 dt &\leq \\ &\leq \frac{1}{4} (\theta_2 - \theta_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} E_{\theta_1} \left(\int_0^T \frac{\dot{S}(y, t)^2}{S(y, t)} dt \right) dy = \\ &= \frac{1}{4} (\theta_2 - \theta_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} I(\theta_1, y) dy < \infty, \end{aligned}$$

если разность $|\theta_2 - \theta_1|$ достаточно мала. Поэтому

$$\begin{aligned} 1 - E_{\theta_1} V(T) &= \frac{1}{2} E_{\theta_1} \int_0^T V(t-)(V \overline{S(\theta_2, t)} - V \overline{S(\theta_1, t)})^2 dt \leq \\ &\leq \frac{1}{4} E_{\theta_1} \int_0^T (V \overline{S(\theta_2, t)} - V \overline{S(\theta_1, t)})^2 dt + \\ &+ \frac{1}{4} E_{\theta_1} \int_0^T (V \overline{S(\theta_2, t)} - V \overline{S(\theta_1, t)})^2 dt \leq \\ &\leq \frac{1}{8} (\theta_2 - \theta_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} [I(\theta_1, y) + I(\theta_2, y)] dy. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Следовательно, для достаточно малых $|\theta_2 - \theta_1|$ получаем неравенство

$$|E_{\theta_1} \theta_T^* - E_{\theta_2} \theta_T^*| \leq C |\theta_2 - \theta_1|,$$

откуда вытекает первое утверждение теоремы. Из неравенств (7.2) и (7.3) после деления на $|\theta_2 - \theta_1|^2$ и перехода к пределу $\theta_2 \rightarrow \theta$, $\theta_1 \rightarrow \theta$ получаем (7.1).

Известно, что неравенство Крамера-Рао в случае многомерного пространства параметров $\theta \in R^k$ прямо выводится из неравенства (7.1) (см., например, [12]), поэтому мы сформулируем его без доказательства.

Теорема 7.2. Пусть выполнены условия Д—I и условия:

Д—II. Функция $S(\theta, t)$ непрерывно дифференцируема с вероятностью 1 по каждой компоненте вектора $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ при п.в. $t \in [0, T]$ и элементы матрицы $I(\theta_1, \theta_2)$ равные

$$I(\theta_1, \theta_2)_{ij} = E_{\theta_1} \int_0^T \frac{\partial S}{\partial \theta_i}(\theta_2, t) \frac{\partial S}{\partial \theta_j}(\theta_2, t) S(\theta_2, t)^{-1} dt$$

непрерывны на множестве $\theta_1 = \theta_2$.

Д-III. Матрица $I(\theta) \equiv I(\theta, \theta)$ положительно определена при всех $\theta \in \Theta$.

Тогда для любой оценки b_T^* вектора θ такой, что величина $Q(\theta) = E_0 |b_T^* - \theta|^2$ ограничена на компактах в Θ справедливы утверждения

1) вектор $b(\theta) = E_0 b_T^* - \theta$ дифференцируем по составляющим вектора θ при п.в. $\theta \in \Theta$,

2) при п.в. $\theta \in \Theta$ имеет место неравенство

$$E_0 (b_T^* - \theta) (b_T^* - \theta)' \geq \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta} I(\theta)^{-1} \frac{\partial b(\theta)'}{\partial \theta} + b(\theta) b(\theta)'.$$

Неравенство $A \geq B$ для матриц A и B понимается как обычно, т. е. матрица $A - B$ неотрицательно определена.

Минимаксную границу Гаека [3] рисков оценок параметра θ мы сформулируем сразу в многомерном случае ($\theta \in \Theta \subset R^k$), следуя работе [5] (теорема 5.1).

Введем функцию $l(u)$, $u \in R^k$ со свойствами:

1) $l(u) \geq 0$, $l(0) = 0$, $l(u) = l(-u)$.

2) множество $\{u: l(u) < C\}$ выпукло при любом $C > 0$.

3) для любого $\gamma > 0$ конечен интеграл

$$\int_{R^k} l(u) \exp \left\{ -\gamma |u|^2 \right\} du.$$

Теорема 7.3. Пусть выполнены условия C-I-C-V и $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Sp } \varphi_T(\theta) \varphi_T(\theta) = 0$, тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{b_T^*} \sup_{|\theta - \theta_0| = \varepsilon} E_0 l(\varphi_T(\theta)^{-1} (b_T^* - \theta)) &> \\ &> (2\pi)^{-k/2} \int_{R^k} l(u) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |u|^2 \right\} du, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где нижняя грань берется по всевозможным оценкам b_T^* параметра θ .

Полагая $l(u) = (u, i)^2$, из (7.4) получаем асимптотический вариант неравенства Крамера-Рао в случае наблюдений процесса пуассоновского типа: для любого $i \in R^k$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\theta - \theta_0| < \varepsilon} (\varphi_T(\theta)^{-1} E_0 (b_T^* - \theta)(b_T^* -$$

Յու. Ա. ԿՈՒՏՈՅԱՆՑ. Լոկալ ասիմպտոտիկ նորմալությունը Պուասոնի տիպի պրոցեսների համար (ամփոփում)

Բերվում են լոկալ ասիմպտոտիկ նորմալության (LAN) պայմանները լավանակաձևի չափերի ընտանիքի համար, որոնք առաջացնում են ստոխաստիկ Պուասոնի տիպի պրոցես: Դիտարկվում են Պուասոնի տիպի պրոցեսների չափերի ընտանիքի LAN-ն երկու օրինակ:

Yu. A. KUTOYANTS. *Local asymptotical normality for the Poisson type processes (summary)*

Conditions of local asymptotical normality (LAN) for the family of measures induced by the realizations of stochastic Poisson type point processes are presented. Asymptotical normality of the stochastic integral on centered Poisson type point process is established. Two examples of LAN families and asymptotically local most powerful test are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Le Cam. Locally asymptotically normal families of distributions, Univ. Calif. Publ. Statist., 3, 1950, 37—98.
2. Дж. Русас. Контигуальность вероятностных мер, пер. с англ., изд. „Мир“, М., 1975.
3. J. Hajek. Local asymptotic minimax and admissibility in estimation, Proc. 6th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., Univ. Calif. Press, 1972, 175—194.
4. И. А. Ибрагимов, Р. Э. Хасьминский. Свойства оценок максимального правдоподобия и байесовских для неодинаково распределенных наблюдений, Теория вероят. и ее примен., XX, 4, 1975, 703—711.
5. И. А. Ибрагимов, Р. Э. Хасьминский. Локальная асимптотическая нормальность для неодинаково распределенных наблюдений, Теория вероят. и ее примен., XX, 2, 1975, 251—266.
6. Ю. А. Кутоянц. Об одной задаче проверки гипотез и асимптотической нормальности стохастических интегралов, Теория вероят. и ее примен., XX, 2, 1975, 385—393.
7. Ю. А. Кутоянц. Оценка параметра интенсивности неоднородного процесса Пуассона, Problems of control and information theory, 8, 2, 1979, 32—42.
8. J. Grandell. Doubly stochastic Poisson processes. Lecture notes in mathematics, v. 529, Springer, Berlin, 1976.
9. Stochastic point processes, ed P. A. W. Lewis, Wiley, New York, 1972.
10. Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Мартингальные методы в теории точечных процессов. Труды школы-семинара по теории случайных процессов, Друскининкай, 1975, часть II, 269—354.
11. И. А. Ибрагимов, Р. Э. Хасьминский. Об информационных неравенствах и суперэффе́ктивных оценках, Проблемы передачи информации, IX, 3, 1973, 53—67.
12. V. Fabian, J. Hannan. On the Cramer-Rao inequality, Annals of statistics, 5, 1, 1977, 197—205.

Д. Г. МАРТИРОСЯН

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕТЧАТЫХ МОДЕЛЕЙ

В в е д е н и е

В настоящей заметке дается полное описание периодических гиббсовских состояний для некоторого класса решетчатых моделей.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: через Z^v , $v > 1$ будем обозначать v -мерную целочисленную решетку. Векторы $i = (i_1, \dots, i_v)$ с целочисленными координатами будем называть точками решетки, подмножества V решетки Z^v будем называть объемами. Для объема V через $|V|$ обозначим число точек решетки, содержащихся в объеме V . Расстояние между двумя точками решетки $i = (i_1, \dots, i_v)$ и $i' = (i'_1, \dots, i'_v)$ полагаем равным

$$\text{dist } (i, i') = \sum_{k=1}^v |i_k - i'_k|. \quad (1)$$

Зафиксируем некоторое конечное множество $X = (x_1, \dots, x_n)$. Отображения $x(i): Z^v \rightarrow X$ будем называть конфигурациями решетчатой модели. Множество всех конфигураций называется фазовым пространством решетчатой модели и обозначается через $\mathfrak{M}$. Предположим, что на фазовом пространстве $\mathfrak{M}$ задано некоторое семейство $\{U_i[x(j)]\}_{i \in Z^v}$ действительных конечных функций, при каждом $i \in Z^v$ зависящее только от значений конфигураций $x(j)$ в R -окрестности точки i . Для любых двух конфигураций $x'(i)$ и $x''(i)$, совпадающих почти всюду (т. е. всюду, за исключением конечного числа точек решетки), определим относительный потенциал $H(x', x'')$ формулой

$$H(x'(i), x''(i)) = \sum_{i \in Z^v} [U_i(x'(j)) - U_i(x''(j))]. \quad (2)$$

Легко видеть, что в правой части (2) под знаком суммы только конечное число слагаемых отлично от нуля, так что $H(x', x'')$ определен корректно.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что U_i периодически, т. е. инвариантно относительно действия некоторой подгруппы $\hat{Z}$ группы Z^v конечного индекса; последнее означает, что для любых $i \in Z^v$, $k \in \hat{Z}$ и любой конфигурации $x(j)$

$$U_{i+k}[x(j-k)] = U_i[x(j)]. \quad (3)$$

$$H_0(s, s_0) \geq \rho |B(s)|, \quad (6)$$

где через $|B(s)|$ обозначено число неправильных точек конфигурации s , а ρ — положительная постоянная.

Рассмотрим теперь относительные потенциалы $H_1, \dots, H_{r-1}$, число которых на единицу меньше числа основных состояний относительного потенциала H_0 . Прежде чем сформулировать условия, которым удовлетворяют $H_1, \dots, H_{r-1}$, приведем одно определение.

Определение 5. Пусть $s', s'' \in \mathfrak{X}^{(\mathbb{Z}^r)}$ и $V_R = \{\bar{i} = (i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{Z}^r : \max_{1 \leq k \leq r} |i_k| \leq R\}$. Положим

$$s_{V_R}(i) = \begin{cases} s'(i), & i \in V_R \\ s''(i), & i \notin V_R \end{cases} \quad (7)$$

и образуем

$$l_H(s', s'') = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{H(s_{V_R}, s'')}{|V_R|}. \quad (8)$$

Нетрудно показать, что предел (8) существует, и что на $\mathfrak{X}^{(\mathbb{Z}^r)}$ можно найти функцию $e_H(s)$, определенную с точностью до аддитивной постоянной, такую, что $l_H(s', s'') = e_H(s') - e_H(s'')$. Функция $e_H(s)$ называется удельной энергией конфигурации s .

Для относительного потенциала $H = \sum_{i=1}^{r-1} h_i H_i$ определим $e_H(s_q)$,

$1 \leq q \leq r$ и положим $l_H(s_q) = e_H(s_q) - \min e_H(s_q)$. Набор чисел $l_H(s_q)$, который уже определяется однозначно, можно рассматривать как точку границы положительного октанта R' пространства R'

$$W^{r-1} = \{(a_1, \dots, a_r) \in R' : \min a_i = 0\}.$$

Определение 6. Набор относительных потенциалов $H_1, \dots, H_{r-1}$ снимает вырождение основного состояния H_0 , если отображение

$$h = (h_1, \dots, h_{r-1}) \rightarrow l_H = (l_H(s_1), \dots, l_H(s_r))$$

отображает пространство параметров $(h_1, \dots, h_{r-1})$ на всю границу положительного октанта R' .

И, наконец, приведем определение гиббсовского состояния.

Пусть заданы решетчатая модель (Z, X, H) , конечный объем $V \subset Z$, $|V| < \infty$ и параметр $\beta > 0$, где $\beta = \frac{1}{T}$ — обратная температура. Зафиксируем конфигурацию $\overline{x(i)} \in \mathfrak{X}$ и обозначим через $\mathfrak{X}(V, \overline{x(i)})$ множество

