

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0000-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵԹՕԱՆԴՐՅԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱԹԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՊԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱԼՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենայրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման քաջադիպ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենայրած, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումնեջ։ Հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոթրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոթրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերենը շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թն շատ զգալի փոփոխությունները (օղիգինայի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չղբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН

Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKI

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika“ are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

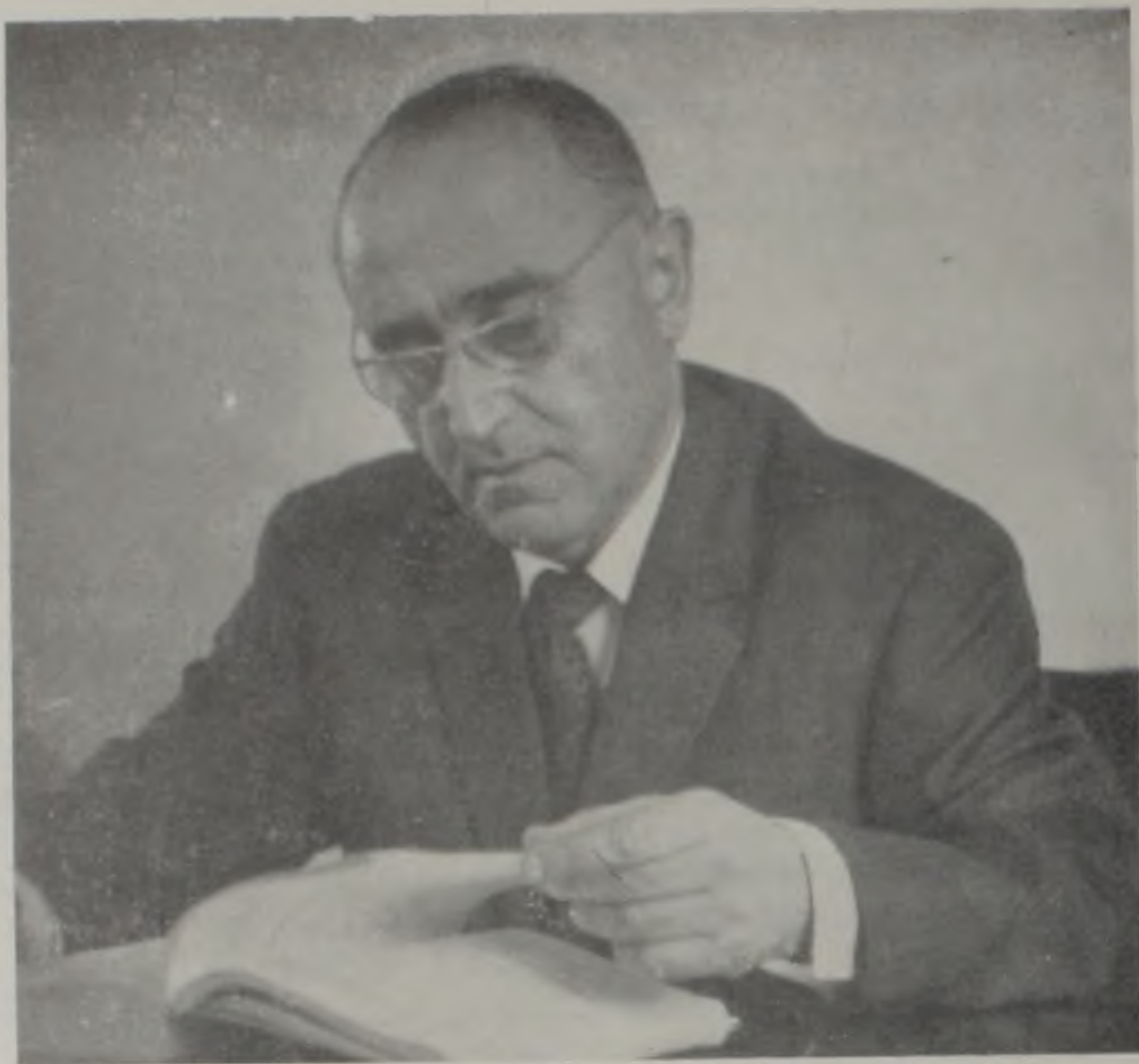
9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika“
Academy of Sciences of Armenian, SSR
24, Berekamutian St.,
Yerevan, Armenian, SSR, USSR



У К А З

ПРЕЗИДИУМА ВЕРХОВНОГО СОВЕТА СССР

О НАГРАЖДЕНИИ АКАДЕМИКА АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР ДЖРБАШЯНА М. М. ОРДЕНОМ
ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ

За заслуги в развитии математических наук, подготовке научных кадров и в связи с шестидесятилетием со дня рождения наградить академика Академии наук Армянской ССР *ДЖРБАШЯНА Мхитара Мкртичевича* орденом Октябрьской революции.

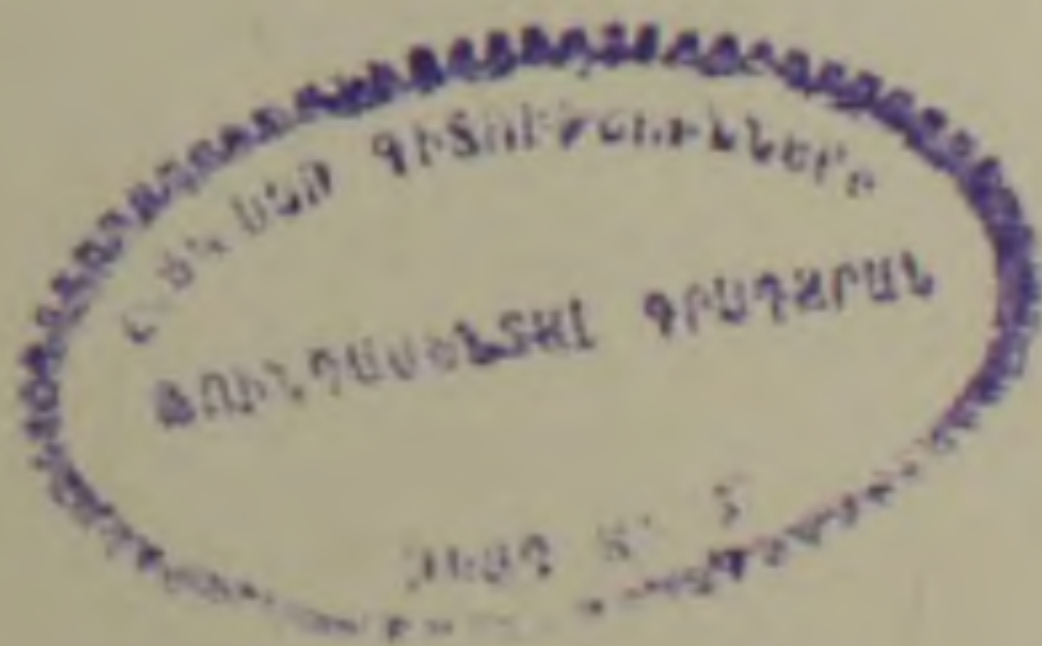
Председатель Президиума Верховного Совета СССР
Л. БРЕЖНЕВ

Секретарь Президиума Верховного Совета СССР
М. ГЕОРГАДЗЕ

Москва, Кремль, 8 сентября 1978 г.

ДОРОГОЙ МХИТАР МКРТИЧЕВИЧ!

Редакция журнала „Математика“ с чувством глубокого уважения посвящает Вам этот выпуск и в день Вашего шестидесятилетия желает Вам крепкого здоровья и дальнейшей плодотворной творческой деятельности!



ДЖРБАШЯН МХИТАР МКРТИЧЕВИЧ

(к шестидесятилетию со дня рождения)

Исполнилось 60 лет со дня рождения выдающегося советского математика, крупного аналитика, академика АН Армянской ССР, заслуженного деятеля науки, директора Института математики Академии наук Армении Мхитара Мкртичевича Джрбашяна. Велики заслуги М. М. Джрбашяна, одного из самых признанных в нашей стране специалистов по теории функций, в деле развития математической науки в Армении.

Семья М. М. Джрбашяна, спасаясь от геноцида 1915 года, переехала из города Вана в Ереван. Мхитар Мкртичевич Джрбашян родился в Ереване 11 сентября 1918 года.

По окончании средней школы в 1936 году М. М. Джрбашян поступил на физико-математический факультет Ереванского государственного университета. В студенческие годы быстро проявились его незаурядные математические способности. Он стал самым активным участником первого научного семинара по теории функций, руководимого А. Л. Шагиняном.

Наиболее значительным событием студенческих лет М. М. Джрбашяна явились превосходные лекции, прочитанные в 1940 году гостившим в Ереване выдающимся математиком М. В. Келдышем. Эти лекции, посвященные новейшим разделам теории аналитических функций, были насыщены самыми свежими для того времени идеями и четкими постановками ряда нерешенных проблем. М. В. Келдыш увлекательно рассказывал также о своих собственных блестящих научных достижениях.

Лекции М. В. Келдыша и его последующие научные контакты с армянскими математиками, оказали определяющее влияние на формирование научных интересов М. М. Джрбашяна и сыграли решающую роль в деле становления и развития армянской математической школы теории функций комплексного переменного.

После блестящего окончания Университета М. М. Джрбашян с 1942 по 1945 г.г. работал ассистентом и одновременно учился в аспирантуре Ереванского университета под руководством А. Л. Шагиняна.

В 1945 году им была успешно защищена кандидатская диссертация на тему «Некоторые вопросы представимости аналитических функций». Это была первая защита диссертации по математике в Ереванском университете.

В своей диссертационной работе М. М. Джрбашян решил поставленную перед ним экстремальную задачу, связанную с многочленами, ортогональными по площади [1]. В той же работе М. М. Джрбашян положил начало весьма важной и перспективной проблематики в области классической теории функций [2]. Это явилось первым существенным продвижением в указанном направлении после, ставших уже тогда классическими, результа-

тов выдающегося финского математика Р. Неванлинны, полученных им еще в двадцатые годы. Речь идет о развитой М. М. Джрбашяном самой общей и совершенной теории факторизации мероморфных функций. Результаты, полученные в диссертации, послужили основой для последующих глубоких исследований М. М. Джрбашяна и его учеников, интенсивно продолжающихся и по сей день.

С этого времени начинается плодотворная научно-педагогическая деятельность М. М. Джрбашяна в Ереванском университете и в Секторе математики АН Армянской ССР (1945—1955 г.г.), который впоследствии стал основой Института математики и механики (1955—1971 г.г.).

Всего лишь 4 года спустя, в 1949 году, он с большим успехом защитил в Московском университете докторскую диссертацию — «Метрические теоремы о полноте и представимости аналитических функций». Официальные оппоненты М. В. Келдыш, А. О. Гельфонд и А. И. Маркушевич, оценив результаты М. М. Джрбашяна как крупный вклад в теорию приближений функций комплексного переменного, отмечали, что автор в совершенстве владеет современными методами анализа и теории функций.

Став одним из ведущих математиков Армении, М. М. Джрбашян в 1953 году избирается членом-корреспондентом, а в 1956 году — действительным членом Академии наук Армянской ССР.

В конце сороковых в начале пятидесятих годов формируется получившая впоследствии всеобщее признание армянская математическая школа, в деле образования и дальнейшего развития которой существенный вклад внесла научная, педагогическая и организационная деятельность М. М. Джрбашяна.

С 1964 г. по 1978 г. он — член Президиума Академии наук, академик-секретарь Отделения физико-математических наук (до конца 1973 г.).

М. М. Джрбашян является главным редактором журнала «Математика» (Известия АН Армянской ССР) со дня его основания.

Все это время Мхитар Мкртичевич поддерживает теснейшие контакты с Ереванским университетом. Он с энтузиазмом и увлеченностью работает со студентами и научной молодежью, привлекая их к исследовательской работе либо под своим руководством, либо направляя их на дальнейшую учебу к крупным советским специалистам, заботливо следя за их дальнейшей судьбой и своевременно оказывая им энергичную поддержку и помощь.

К 1970 году уже сложилась и достаточно окрепла армянская математическая школа в целом, с ее основными научными интересами и традициями. Она получила признание в нашей стране и за рубежом. Естественно встал вопрос о создании в Армении отдельного математического института.

Директором организованного в 1971 году Института математики АН Армянской ССР, выделившегося из бывшего Института математики и механики, стал М. М. Джрбашян. На этом посту его научно-организационная деятельность поднялась на новую, более высокую и ответственную ступень. Высоккоквалифицированные ученики Мхитара Мкртичевича, доктора и кандидаты наук, заведующие кафедрами работают сегодня в вузах и от-

раслевых институтах республики. Он — автор множества научных публикаций, докладов, учебных пособий, ряда больших статей, содержащих основополагающие результаты, и фундаментальной монографии, получившей широкую известность, — «Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области» [83].

Очень обширна сфера научных интересов М. М. Джрбашяна. Наряду с вопросами теории приближений, которыми ученый занимался в самый ранний период своей деятельности, он — автор глубоких и фундаментальных исследований в ряде областей современного анализа. Теория приближений и гармонический анализ в комплексной области, теория целых и мероморфных функций, теория интегральных преобразований и представлений, граничные свойства аналитических функций, вопросы единственности бесконечно дифференцируемых функций — вот далеко не полный перечень направлений, в которых М. М. Джрбашян получил основополагающие результаты. Исследованиям М. М. Джрбашяна характерны, с одной стороны, далеко идущие обобщения известных результатов классического анализа, а, с другой, — постановки и блестящие решения ряда трудных и оригинальных проблем, что потребовало создания собственных оригинальных методов исследования.

Многие из результатов М. М. Джрбашяна послужили основой для появления большого числа новых важных исследований других авторов у нас в Ереване, а также в других научных центрах. Эти результаты значительно развили и углубили ставшие уже классическими результаты таких знаменитых математиков, как Миттаг-Леффлер, Планшерель, Данжуа, Карлеман, Винер, Неванлинна и Келдыш.

Как уже отмечалось, основные научные интересы М. М. Джрбашяна связаны с современным анализом. Отнюдь не претендуя на полноту, перечислим некоторые из циклов его исследований.

1. Первым в хронологическом порядке является цикл исследований по теории приближений. Этот цикл охватывает вопросы теории взвешенно-равномерных, средних, а также наилучших приближений полиномами и целыми функциями в комплексной области.

Развитый М. М. Джрбашяном оригинальный метод исследования позволил установить точные интегральные критерии полноты для широкого класса аппроксимационных задач с весом или без веса. В частности, были получены окончательные решения задач полноты полиномов в угловых областях, на бесконечных кривых, в области типа круговой луночки, в круге с радиальным вырезом и т. д.

Далее, в работах [21], [22], [29], наряду с исследованиями проблем полноты впервые в теории приближений были поставлены и решены важные и трудные задачи взвешенно-наилучшей аппроксимации полиномами. Здесь, в связи с классическим неравенством Чебышева-Маркова, была поставлена задача: оценить скорость роста при $n \rightarrow +\infty$ последовательности $\{P'_n(x)\}_1^{\infty}$ производных полиномов $P_n(x)$ степени $n \geq 1$, подчиненных условиям

$$|P_n(x)| \leq \exp \{p(|x|)\}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (n=1, 2, \dots),$$

где $p(x)$ — произвольная непрерывная, монотонно возрастающая на $[0, +\infty)$ функция. Своеобразным методом и с помощью тонких оценок здесь же был открыт качественно новый факт, состоящий в том, что в случае рас-

ходимости интеграла $\int_1^\infty p(x) x^{-2} dx$ производные $P_n(x)$ растут суще-

ственно медленнее, чем в случае конечного отрезка, а именно, со скоростью $\int_1^n q^{-1}(y) dy$, где q — обратная к p функция. В случае же, ко-

гда $\int_1^\infty p(x) x^{-2} dx < +\infty$, семейство полиномов $|P_n(x)|$ образует нор-

мальное семейство на всей комплексной плоскости. Оказалось, что в этом случае дифференциальные свойства аппроксимируемых функций характеризуются не шкалой $n^{-p-\alpha}$, как это имеет место в теоремах

Джексона-Бернштейна, а шкалой $\left[\int_1^n q^{-1}(y) dy \right]^{-p-\alpha}$.

К этому же кругу задач относится и исследование [34], где с помощью специальных интегральных операторов, в которых в качестве ядра фигурируют линейные комбинации функций Миттаг-Леффлера, были установлены оценки наилучших приближений функций, аналитических в различных канонических областях, целыми функциями произвольного порядка $\rho > \frac{1}{2}$.

Несомненно, исследования Мхитара Мкртичевича по теории весовых приближений полиномами и наилучших приближений целыми функциями явились значительным вкладом в конструктивную теорию функций. В них были продолжены и существенно продвинуты вперед достижения его предшественников — Валле-Пуссена, С. Н. Бернштейна, М. В. Келдыша, А. Л. Шагиняна и других.

2. Большой цикл работ, выполненных М. М. Джрбашяном в 1952—1966 г. г., охватывает исследования по гармоническому анализу в комплексной области.

Эти исследования, по сути, опираются на открытые им замечательные свойства двух семейств функций — функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^{-1}\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right) z^k \text{ и их континуального аналога — функций}$$

$$\text{типа Вольтерра } \psi_\rho(z; \mu) = \int_0^\infty \Gamma^{-1}\left(\mu + \frac{t}{\rho}\right) z^t dt.$$

Важным моментом для всей развитой здесь теории являются установленные Мхитаром Мкртичевичем тождества, которым удовлетворяют преобразования Меллина функций $E_\rho(e^{iz} x^{1/\rho}; \mu + 1) \left(\frac{\pi}{2\rho} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\rho} \right)$ и $[e^{\pm ix} - 1] / \pm ix$.

Эти тождества позволили открыть замечательные, качественно новые факты, лежащие в основе всей развитой им теории.

Первый из них заключается в том, что преобразования Фурье функций из $L_2(0, +\infty)$ имеют целое семейство формул обращения с ядрами типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z; \mu) \left(\rho \geq \frac{1}{2} \right)$. В этом общем результате при $\rho = \mu = 1$ содержатся хорошо известные формулы обращения теории Фурье-Планшереля. А второй — в том, что при любом $\rho \geq 1$ множество формул обращения с ядрами типа $E_\rho(z; \mu)$ одновременно с заданной функцией $t(x) \in L_2(0, +\infty)$ представляют нулевую функцию в области угла $|\pi - \arg z| < \pi \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)$ комплексной плоскости.

Эти принципиально новые свойства интегральных преобразований и обращений с ядрами $E_\rho(z; \mu)$ позволили Мхитару Мкртичевичу построить изящный аппарат преобразований типа Фурье-Планшереля для произвольной конечной системы лучей комплексной плоскости, исходящих из одной точки.

Замечательно, что эти результаты одновременно являются также новыми и очень тонкими результатами теории приближений целыми функциями, поскольку в них содержится явное построение аппроксимирующих функций, рост которых определяется в зависимости от метрических свойств множеств, на которых происходит аппроксимация.

Упомянутый глубокий и оригинальный цикл исследований Мхитара Мкртичевича, содержащий ряд новых конструктивных идей и потребовавший от него преодоления огромных аналитических трудностей, является значительным вкладом в гармонический анализ. Созданный Мхитаром Мкртичевичем мощный аппарат интегральных преобразований в дальнейшем нашел в его руках фундаментальные применения в теории аналитических и бесконечно-дифференцируемых функций.

3. В другом цикле исследований, выполненных в те же годы и подытоженных в его упомянутой монографии, были установлены также принципиально новые результаты о параметрическом представлении классов целых функций произвольного порядка $\rho > \frac{1}{2}$, подчиненных дополнительным условиям интегрируемости.

Этот цикл завершается установлением общей теоремы, формулировку которой мы лишь опишем.

Пусть E — некоторая конечная система лучей, исходящих из начала координат, $\mathfrak{M}_\rho$ — класс целых функций порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и типа $\leq \sigma$, подчиненных условию

$$\int_E |f(z)|^2 |z|^\omega |dz| < +\infty, \quad \omega \in (-1, 1).$$

С множествами $\mathfrak{M}_\rho$ и E однозначно ассоциируется некоторая конечная

система отрезков e , также исходящих из начала координат. Утверждается, что класс $\mathfrak{M}$, совпадает с множеством функций f , представимых в виде

$$f(z) = \int_E E_p(S^{1/p} z; \mu) \varphi(\xi) \xi^{\mu-1} d\xi,$$

где $\mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$ и $\varphi(\xi) \in L_2(e)$.

В этом общем результате при $\rho = \mu = 1$ содержится знаменитая теорема Винера-Пэли о представлении целых функций экспоненциального типа, суммируемых с квадратом модуля на вещественной оси.

В этом же цикле работ Мхитару Мкртичевичу удалось построить стройный аппарат интегральных операторов типа Фурье-Планшереля-Лапласа для множеств, состоящих из конечного числа лучей и угловых областей с общей вершиной в начале координат. Основой для этого послужили его же результаты по гармоническому анализу и установленная им замечательная теорема, содержащая, в частности, вторую известную теорему Винера-Пэли о представлении аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функций, входящих в класс H_2 Харди-Тамаркина. Этот результат состоит в следующем:

1) Класс $H_2[\alpha; \omega] \left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, -1 < \omega < 1 \right)$ аналитических в области угла $\Delta(\alpha) = \left\{ z: |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}$ функций $F(z)$, подчиненных условию

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} < +\infty,$$

совпадает с множеством функций $F(z)$, допускающих представление вида

$$\begin{aligned} F(z) = & \int_0^{+\infty} E_p(e^{i\frac{\pi}{2\alpha}} z\tau^{1/p}; \mu) v_{(-)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau + \\ & + \int_0^{+\infty} E_p(e^{-i\frac{\pi}{2\alpha}} z\tau^{1/p}; \mu) v_{(+)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau, \quad z \in \Delta(\alpha), \end{aligned} \quad (*)$$

где

$$v_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, +\infty), \rho > \frac{\alpha}{2\alpha-1}, \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha}, \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

2) Правая часть (*) при $\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ представляет нулевую функцию в области угла

$$\Delta^*(\alpha) = \left\{ z: |\pi - \arg z| < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}.$$

где

$$\alpha = \frac{\alpha\rho}{(2\alpha - 1)\rho - 2\alpha}.$$

Наконец, результаты этого цикла были распространены на значительно более общие классы функций, определенных уже на римановой поверхности логарифма G_{μ} . Здесь соответствующие представления строятся уже посредством «квазицелой» функции $\chi_{\rho}(z; \mu)$ типа Вольтерра, аналитической на всей поверхности G_{μ} и имеющей там конечный порядок роста $\rho > 0$. В этом обширном цикле исследований принимали участие и его ученики.

Результаты М. М. Джрбашяна о представлении целых, квазицелых и аналитических функций обладают большой общностью и имеют законченный характер. Они представляют собой фундаментальный вклад в теорию функций вообще и в теорию целых функций в частности.

4. Следующее важное направление научных изысканий Мхитара Мкртичевича охватывает проблематику единственности.

Здесь прежде всего следует выделить его исследование [93], посвященное вопросам квазианалитичности классов $S[M_n] = \{f \in C^{\infty}[0, +\infty): |f^{(n)}(x)| \leq A, B^n M_n\}$ бесконечно-дифференцируемых функций.

После фундаментальных результатов А. Данжуа, Т. Карлемана—А. Островского и других казалось, что все основные и наиболее важные проблемы здесь уже решены. Однако в указанном исследовании Мхитар Мкртичевич предложил значительно более общую постановку проблемы единственности классов бесконечно-дифференцируемых функций и получил ее изящное решение, существенно расширив само классическое понятие квазианалитичности.

Как известно, квазианалитические классы $S[M_n]$, с точки зрения скорости роста последовательных производных функций этого класса, представляют собой сравнительно умеренное расширение класса аналитических функций. Так, например, $S[n^n]$ — это класс аналитических функций, а $S[(n \log n)^n]$ — уже квазианалитический класс, в то время, как классы $S[n^{\gamma}]$ ($1 < \gamma < +\infty$) заведомо не квазианалитичны.

В упрощенном варианте постановка вопроса, предложенная Мхитаром Мкртичевичем, может быть сформулирована таким образом: значениями каких функционалов $\{L_n(\varphi)\}_{n=0}^{\infty}$ (вместо $\{\varphi^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty}$) могут быть единственным образом определены функции $\varphi(x)$, принадлежащие классам $S[n^{\gamma}]$ при $\gamma > 1$. Как непосредственно следует из основного результата М. М. Джрбашяна, в качестве таковых могут служить функционалы

$$D_{\alpha}^{n(1-\alpha)} \varphi(0) = \frac{1}{\Gamma(n\alpha)} \int_0^{\infty} x^{n\alpha-1} \varphi^{(n)}(x) dx \quad (n=0, 1, \dots),$$

где $\alpha = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$, а $D_{\alpha}^{n(1-\alpha)}$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Бейля порядка $n(1-\alpha)$.

В общем же случае, при рассмотрении классов $S_n(M_n; [0, l])$ ($0 < l < +\infty$), единственность по тем же начальным данным $D_-^{\alpha(1-\alpha)} \varphi(0)$ ($n = 0, 1, \dots$) имеет место лишь в том случае, когда выполняется условие

$$\int_0^+ r^{-1-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \log T(r) dr = +\infty, \quad T(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n}.$$

В этом исчерпывающем решении проблемы, данном Мхитаром Мкртичевичем, при значении параметра $\alpha = 0$ содержится классическая теорема Данжуа-Карлемана-Островского.

Примечательно, что ее решение оказалось возможным благодаря систематическому применению развитой им теории гармонического анализа в комплексной области с ядрами типа Миттаг-Леффлера.

Вместе с тем эти результаты значительно расширили и обновили проблематику квазианалитичности и открыли новые пути изучения классов бесконечно-дифференцируемых функций.

5. Другой важный цикл исследований Мхитара Мкртичевича охватывает его работы по теории факторизации и граничных свойств мероморфных функций.

Известно, какую большую роль в теории функций и в ее приложениях играет введенный Р. Неванлинной класс N функций ограниченного вида и их параметрическое представление. Еще под влиянием лекций М. В. Келдыша Мхитар Мкртичевич задался целью получить параметрическое представление и факторизацию мероморфных в круге функций произвольного роста. Этой цели он достигал постепенно, но неуклонно. Рациональное зерно будущей теории, по существу, содержалось уже в его ранней работе [2], вошедшей в его кандидатскую диссертацию. Там было получено каноническое представление функций, характеристика $T(r)$ которых подчинена условию

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha T(r) dr < +\infty \quad (-1 < \alpha < +\infty).$$

Но к этой проблематике Мхитар Мкртичевич вернулся значительно позже (1964—1966), когда посредством остроумных и оригинальных построений ему удалось создать стройную теорию классов N_α , $\alpha \in (-1, +\infty)$. Классы N_α монотонно расширяются с возрастанием α , совпадая при $\alpha = 0$ с классом N Р. Неванлины. При $0 < \alpha < +\infty$ классы N_α охватывают мероморфные в круге функции любого конечного порядка. Если же $-1 < \alpha < 0$, то получаются подклассы N_α , обладающие очень тонкими граничными свойствами, для описания которых линейная мера оказалась недостаточной и пришлось привлекать меры Хаусдорфа и емкости Фростмана.

Результаты эти были подробно изложены в его монографии [83] и в работах [87], [91], [94]. Затем М. М. Джрбашян существенно расширил и обобщил теорию классов N_α . В фундаментальном исследовании «Теория

факторизации функций, мероморфных в круге» [98], им была создана в определенном смысле завершенная теория факторизации произвольных мероморфных в круге функций и их граничных свойств.

Здесь, во-первых, взамен дробных интегро-дифференциальных операторов $D^{-\alpha}$ в смысле Римана-Лиувилля, лежащих в основе теории классов N_{α} , М. М. Джрбашян открыл их существенно общие, глубокие аналоги—операторы $L^{(\omega)}$, ассоциированные с произвольной непрерывной в интервале $[0, 1)$ функцией $\omega(x) > 0$, подчиненной некоторым естественным условиям [95].

Основополагающую роль в исследованиях Мхитара Мкртичевича играет открытый им оригинальный класс формул типа Иенсена-Неванлинны, ассоциированных с оператором $L^{(\omega)}$, в которых роль ядра Шварца играет функция

$$S(z; \omega) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}; \quad \Delta_k = k \int_0^1 \omega(x) x^{k-1} dx,$$

обладающая замечательным свойством $\operatorname{Re} S(z; \omega) \geq 0$ ($|z| < 1$), когда $\omega(x)$ — неубывающая функция.

Эти существенно новые формулы, сводящиеся к классической формуле Иенсена-Неванлинны лишь в случае $\omega(x) \equiv 1$, позволили Мхитару Мкртичевичу ввести в рассмотрение новое понятие ω -характеристики $T_{\omega}(r; f)$ мероморфной функции $f(z)$ и определить класс $N\{\omega\}$ функций с ограниченной ω -характеристикой.

Указанные формулы позволили ему открыть также новые бесконечные произведения $B_{\omega}(z; z_k)$ с нулями $|z_k|_1^{\infty}$, сходящиеся при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^1 \omega(x) dx < +\infty.$$

Будучи глубокими и замечательными аналогами классического произведения Бляшке и совпадая с ним при $\omega(x) \equiv 1$, они могут иметь нули $|z_k|_1^{\infty}$, стремящиеся к границе единичного круга произвольным образом, в зависимости от поведения порождающей их функции $\omega(x)$ в окрестности точки $x = 1$.

Основная факторизационная теорема Мхитара Мкртичевича гласит:

Класс $N\{\omega\}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = C_{\omega} z^{\lambda} \frac{B_{\omega}(z; a_1)}{B_{\omega}(z; b_1)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z; \omega) d\psi(\theta) \right\},$$

где ψ — вещественная функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, C_{ω} — комплексное, а λ — целое число.

Этот фундаментальный результат и тот важный факт, что объединение всевозможных классов $N\{\omega\}$ совпадает с множеством всех мероморфных

в круге функций, привели Мхитара Мкртичевича к полному решению проблемы факторизации всего семейства функций, мероморфных в круге.

Привлекая, как и прежде, своих учеников, Мхитар Мкртичевич успешно завершил также исследование граничных свойств функций классов $N\{\omega\}$ ([101], [102]).

Как для классов $N\{\omega\} \supset N$, так и для классов $N\{\omega\} \subset N$ им были получены тонкие результаты о граничных свойствах, продвинувшие вперед ставшие классическими результаты Фату, Г. Сегё, Т. Карлемана, а также Л. Карлесона и других.

Исследования Мхитара Мкртичевича по теории факторизации, о которых он рассказывал в своем докладе на Международном конгрессе математиков в Ванкувере (Канада, 1974 г.), явились фундаментальным вкладом в классическую теорию однозначных аналитических функций. Они неоднократно получали высокую оценку и признание ведущих специалистов, в том числе Р. Неванлинны и Л. Альфорса.

В этой статье мы не коснулись важных исследований М. М. Джрбашяна по другим направлениям современного анализа.

Среди них следует отметить исследования по функциональному анализу ([58], [63], [64], [66], [67], [69]), по краевым задачам для дифференциальных операторов дробного порядка ([50], [59], [62], [68], [92], [99]), по теории единственности асимптотических рядов типа Дирихле-Тейлора ([103], [106], [121]) и, наконец, особенно интенсивно развиваемого за последние годы М. М. Джрбашяном и его учениками цикла исследований по теории интерполяции и базисности неполных биортогональных систем аналитических функций в комплексной области ([108], [110], [111], [127]).

Свое шестидесятилетие Мхитар Мкртичевич встречает в расцвете творческой и научно-организационной деятельности.

Коллеги и ученики Мхитара Мкртичевича от всей души желают ему доброго здоровья, счастья и новых научных достижений.

А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, Н. У. Аракелян, В. С. Захарян,
А. Б. Нерсисян, И. С. Саргсян, И. О. Хачатрян

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ М. М. ДЖРБАШЯНА

1944

1. О некоторых экстремальных проблемах в нежордановых областях. ДАН Арм. ССР, т. 1, № 3, 5—12.

1945

2. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций. ДАН Арм. ССР, т. 3, № 1, 3—9.

1947

3. О представимости некоторых классов голоморфных функций в единичном круге. ДАН Арм. ССР, т. 6, № 5, 129—134.
4. О метрических признаках полноты систем полиномов в неограниченных областях. ДАН Арм. ССР, т. 7, № 1, 3—10.
5. О представимости некоторых классов целых функций. ДАН Арм. ССР, т. 7, № 5, 193—197.

1948

6. К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм. ССР, вып. 2, 3—40.
7. О полноте некоторых систем аналитических функций на линейных измеримых совокупностях. ДАН СССР, т. 62, № 5, 581—584.
8. Об одной экстремальной задаче из теории взвешенных ортогональных полиномов. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 12, № 6, 555—568.

1949

9. О метрических признаках полноты системы полиномов при взвешенном приближении. ДАН СССР, т. 66, № 6, 1037—1040.
10. О полноте некоторых систем аналитических функций в бесконечных областях. ДАН СССР, т. 67, № 1, 15—18.

1950

11. О полноте одной ортогональной системы целых периодических функций. ДАН СССР, т. 71, № 3, 429—432.
12. О полноте системы функций $\{z_\lambda^n\}$ в круге с радиальным вырезом. ДАН СССР, т. 74, № 2, 173—176.

1951

13. О кручении валов переменного сечения. Прикл. матем. и мех., т. 15, вып. 4, 451—472 (совм. с Б. Л. Абрамяном).
14. О представимости и единственности аналитических функций. ДАН Арм. ССР, т. 14, № 1, 3—7.

1952

15. О разложении целых функций в обобщенный ряд Тейлора, ДАН СССР, т. 82, № 5, 665—668.
16. О росте производных полиномов, ДАН СССР, т. 84, № 1, 5—8.
17. О взвешенно-наилучшем приближении полиномами на вещественной оси, ДАН СССР, т. 84, № 6, 1123—1126.
18. Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, ДАН СССР, т. 85, № 1, 29—32.
19. Теоремы единственности и представимости для аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 16, № 3, 225—252.

1953

20. Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, Матем. сб., т. 33(75), № 3, 485—530.
21. Оценки производных полиномов и взвешенно-наилучшие приближения в комплексной области, ДАН Арм. ССР, т. 17, № 1, 3—7.

1954

22. Метрические признаки полноты полиномов при взвешенном приближении на бесконечных кривых, ДАН СССР, т. 98, № 5, 713—716.
23. Некоторые экстремальные задачи для целых функций, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем., ест. и техн. наук, т. 7, № 5, 1—17 (совм. с А. Б. Тавадяном).
24. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, ДАН СССР, т. 95, № 6, 1133—1136.
25. О наилучших приближениях рациональными функциями, ДАН СССР, т. 99, № 5, 673—675 (совм. с С. Н. Мергеляном).
26. О суммировании по Абелю обобщенных интегральных преобразований, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем., ест. и техн. наук, т. 7, № 6, 1—26.
27. Об асимптотическом поведении функции типа Миттаг-Леффлера, ДАН Арм. ССР, т. 19, № 3, 65—72.
28. Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (Обобщение интеграла Фурье), Изв. АН СССР, сер. матем., т. 18, № 5, 427—448.

1955

29. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Матем. сб., т. 36(78), № 3, 353—440.
30. О двух квази-аналитических классах функций на вещественной оси, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем., ест. и техн. наук, т. 8, № 1, 3—14.
31. Оценки для производных целых функций конечного порядка и нормального типа, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем., ест. и техн. наук, т. 8, № 2, 1—16.
32. К теории некоторых классов целых функций многих переменных, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем., ест. и техн. наук, т. 8, № 4, 1—23.
33. О кручении призматических стержней, Труды Ер. ГУ, сер. физ.-матем. наук, т. 48, вып. 2, 49—70.
34. О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области, ДАН СССР, т. 104, № 3, 345—348 (совм. с А. П. Тамадяном).
35. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 19, № 2, 133—190.

1956

36. О взвешенно-полиномиальном приближении в комплексной области, Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда, секционные доклады, том. 1, М., 80.

- 37. Исследования по теории обобщенных интегральных преобразований в комплексной области и по теории целых функций, Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда, том 2, краткое содержание обзорных и секционных докладов. М., 26—27.
- 38. К теории рядов Фурье по рациональным функциям, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем., ест. и техн. наук, т. 9, № 7, 3—28.
- 39. О квази-аналитическом классе функций взвешенно-полиномиального приближения на всей вещественной оси, ДАН Арм. ССР, т. 23, № 3, 97—102.
- 40. О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, № 4, 485—512 (совм. с А. П. Тамадяном).
- 41. О полноте системы функций $\{z^n\}$ в комплексной области при взвешенно-квадратической аппроксимации, ДАН СССР, т. 110, № 6, 914—917 (совм. с И. О. Хачатряном).
- 42. Об асимптотическом приближении целыми функциями в полуплоскости, ДАН СССР, т. 111, № 4, 749—752.

1957

- 43. Об интегральном представлении и разложении в обобщенный ряд Тейлора целых функций многих комплексных переменных, Матем. сб., т. 41, № 3, 257—276.
- 44. О взвешенно-равномерном приближении полиномами функций многих переменных, Матем. сб., т. 43, № 2, 227—256 (совм. с А. Б. Тавадяном).
- 45. О разложении аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. наук, т. 10, № 1, 21—29.
- 46. Об одном методе решения гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 10, № 1, 113—121 (совм. с Р. А. Александрияном и Н. Х. Арутюняном).
- 47. Об одном интегральном преобразовании, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 10, № 4, 3—18.
- 48. Теоремы единственности для преобразований Фурье и для бесконечно дифференцируемых функций, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 10, № 6, 7—24.

1958

- 49. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, т. 120, № 3, 457—460 (совм. с А. Е. Аветисяном).
- 50. О применении некоторых интегро-дифференциальных операторов, ДАН СССР, т. 121, № 2, 210—213 (совм. с А. Б. Нерсисяном).
- 51. Исследования по теории обобщенных интегральных преобразований и по теории целых функций, Труды Третьего всеос. мат. съезда, т. 3, Обзорные доклады. М., 182—189.
- 52. О взвешенно-наилучшем приближении функции $|x|$ на всей вещественной оси, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 1, 77—84.
- 53. Об обратной задаче наилучшего приближения в пространстве функций $L_2(-\infty, +\infty)$, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. наук, т. 11, № 2, 79—82.
- 54. Критерии разложимости функций в ряды Дирихле, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 5, 85—106 (совм. с А. Б. Нерсисяном).
- 55. Некоторые интегро-дифференциальные операторы и связанные с ними квазианалитические классы функций, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 5, 107—120 (совм. с А. Б. Нерсисяном).

1959

- 56. К теории интегральных преобразований с ядрами Вольтерра, ДАН СССР, т. 124, № 1, 22—25.
- 57. Разложение мероморфных функций в обобщенный ряд Маклорена, ДАН СССР, т. 125, № 4, 707—710.
- 58. О квазинизометрическом отображении пространств функций $L^2_{\alpha_1}(a_1, b_1)$, $L^2_{\alpha_2}(a_2, b_2)$, ДАН СССР, т. 128, № 3, 456—459.

- 59. О построении некоторых специальных биортогональных систем, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. наук, т. 12, № 5, 17—42 (совм. с А. Б. Нерсисяном).

1960

- 60. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. матем. журнал, т. 1, № 3, 383—426 (совм. с А. Е. Аветисяном).
- 61. Интегральные преобразования с ядрами Вольтерра, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 24, № 3, 387—420.
- 62. Разложения по специальным биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, ДАН СССР, т. 132, № 4, 747—750 (совм. с А. Б. Нерсисяном).
- 63. К общей теории биортогональных ядер, ДАН СССР, т. 132, № 5, 994—997 (совм. с Р. М. Мартиросяном).
- 64. Проблема моментов и биортогонализация ядер, ДАН СССР, т. 132, № 6, 1250—1253 (совм. с Р. М. Мартиросяном).
- 65. Об интегральных преобразованиях, порожденных обобщенной функцией типа Миттаг-Леффлера, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 13, № 3, 21—63.

1961

- 66. О квазиизометрическом отображении пространств функций $L^2_{\alpha_1}(a_1; b_1), L^2_{\alpha_2}(a_2; b_2)$, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, № 1, 87—112.
- 67. Теория общих ядерных преобразований, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, № 6, 825—870 (совм. с Р. М. Мартиросяном).
- 68. Разложения по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, Труды Моск. мат. общества, т. 10, 89—179 (совм. с А. Б. Нерсисяном).
- 69. Унитарные пары операторов и их аналитическая характеристика в пространстве $L_2(a; b)$, ДАН СССР, т. 141, № 2, 281—284.
- 70. О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\lambda_k x} x s^{k-1}\}$, ДАН СССР, т. 141, № 3, 539—542.

1962

- 71. Об интегральном представлении некоторых ортогональных систем, ДАН Арм. ССР, т. 35, № 1, 13—19.
- 72. О пополнении неполной системы Мальмквиста на вещественной оси, ДАН Арм. ССР, т. 35, № 2, 55—61.
- 73. О пополнении одной неполной системы, ДАН Арм. ССР, т. 35, № 3, 97—105.
- 74. Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, т. 143, № 1, 17—20.
- 75. Ортогональные системы рациональных функций на окружности с заданным множеством полюсов, ДАН СССР, т. 147, № 6, 1278—1281.

1964

- 76. Лекции по избранным вопросам теории функций. Вып. I. Преобразования Фурье (на армянском языке), г. Ереван, 1—101, Изд. Митк.
- 77. О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, т. 157, № 5, 1024—1027.
- 78. О представлении некоторых классов целых и квазицелых функций, ДАН СССР, т. 159, № 1, 9—12.
- 79. Об интегральных преобразованиях в комплексной области, ДАН СССР, т. 159, № 2, 258—261.

- 80. К теории интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера, ДАН Арм. ССР, т. 38, № 4, 207—216 (совм. с С. А. Акопяном).
- 81. Об одном обобщении полиномов Чебышева, ДАН Арм. ССР, т. 38, № 5, 263—270 (совм. с А. А. Китбаляном).

1965

- 82. Об оценке голоморфных функций, подчиненных дополнительным условиям в единичном круге, УМН, т. 20, вып. 4(124), 148—150.

1966

- 83. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1—682.
- 84. Классы функций и ассоциированные с ними интегральные преобразования в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 4, 825—852 (совм. с С. А. Акопяном).
- 85. Классы функций и их параметрическое представление (Межд. конфер. по теории аналит. функций, Ереван, 1965), В кн. Современные проблемы теории аналит. функций, М., 118—137.
- 86. Ортогональные системы рациональных функций на окружности, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 1, № 1, 3—24 и № 2, 106—125.

1967

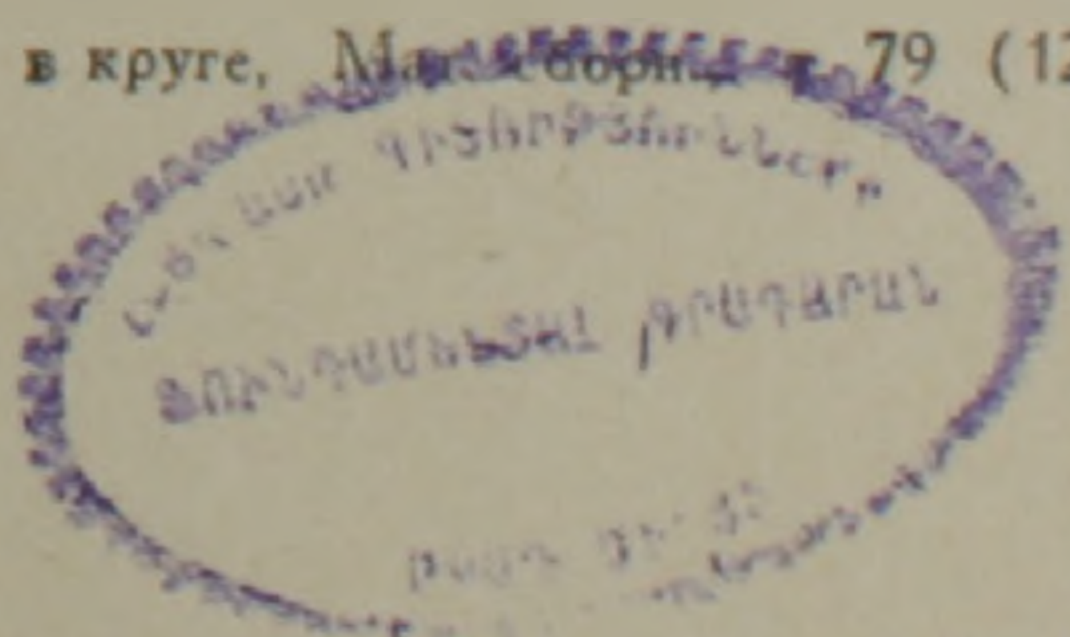
- 87. О граничных свойствах мероморфных функций класса N , ДАН СССР, т. 173, № 6, 1247—1250 (совм. с В. С. Захаряном).
- 88. Об одном свойстве функции Бляшке, ДАН СССР, т. 175, № 5, 981—984.
- 89. Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, ДАН СССР, т. 177, № 4, 767—770.
- 90. Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 2, № 1, 3—51.
- 91. Граничные свойства мероморфных функций класса N , Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 2, № 5, 275—294 (совм. с В. С. Захаряном).

1968

- 92. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 3, № 1, 3—29 (совм. с А. Б. Нерсисяном).
- 93. Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 3, № 3, 171—248.
- 94. О факторизации функции B , Матем. заметки, т. 4, вып. 1, 3—10 (совм. с В. С. Захаряном).
- 95. Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, т. 32, № 5, 1075—1111.
- 96. Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана, ДАН СССР, т. 180, № 4, 782—785.

1969

- 97. О расслоении классов однолистных функций, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 4, № 4, 225—243.
- 98. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Математика, т. 79 (121), № 4(8), 517—615.



1970

- 99. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма-Лиувилля, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 5, № 2, 71—96.
- 100. Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 5, № 6, 453—485.
- 101. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, № 2, 1262—1339 (совм. с В. С. Захаряном).

1971

- 102. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 6, №№ 2—3, 182—194 (совм. с В. С. Захаряном).

1972

- 103. Присыкание и единственность рядов типа Дирихле на вещественной оси, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 7, № 4, 258—274.

1973

- 104. Теория факторизации и граничных свойств функций, мероморфных в круге, УМН, т. 28, вып. 4(172), 3—14.
- 105. Теоремы единственности для некоторых классов аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 37, № 1, 98—134 (совм. с Г. С. Кочаряном).
- 106. Теоремы единственности аналитических функций, асимптотически представимых рядами Дирихле-Тейлора, Мат. сб., т. 91, (133), № 4(8), 580—626.
- 107. Некоторые основные результаты, полученные армянскими математиками в теории функций за последние 15 лет, История естествознания и техники в Армении, т. 5, 21—34.
- 108. Биортогональные системы рациональных функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 8, № 5, 384—409.

1974

- 109. Harmonic analysis in the complex domain and applications in the theory of analytical and infinitely differentiable functions, Lecture notes in Mathematics, 399, Functional Analysis and its Applications International Conference, Madras, 1973, 94—118.
- 110. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2 , Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 9, № 5, 339—373.
- 111. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси, Матем. сб., т. 95(137), № 3(11), 418—444.
- 112. Решение обратной электродинамической задачи для звездообразной системы отрезков, ДАН СССР, т. 218, № 2, 312—315 (совм. с Л. Д. Бахрахом, О. С. Литвиновым).
- 113. О замкнутости систем функций типа Миттаг-Леффлера, ДАН СССР, т. 219, № 6, 1302—1305.
- 114. Теория факторизации и граничные свойства функций, мероморфных в круге, Математические структуры. Вычислительная математика. Математическое моделирование. Труды, посвященные 60-летию академика Л. Илиева, г. София, 69—79.

1975

- 115. Классы формул и разложения типа Тейлора-Маклорена, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 39, № 1, 69—122 (совм. с Б. А. Саакяном).
- 116. Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг-Леффлера, ДАН СССР, т. 223, № 6, 1297—1300 (совм. с Р. А. Багияном).
- 117. Теоремы типа Винера-Пэли и Мюнца-Сасса, ДАН СССР, т. 225, № 5, 1001—1004 (совм. с В. М. Мартиросяном).
- 118. Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг-Леффлера, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 10, № 6, 483—508 (совм. с Р. А. Багияном).
- 119. Theory of Factorization and Boundary Properties of functions Meromorphic in the Disk, Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vancouver, 1974, 197—202.

1976

- 120. Some problems in the theory of single-valued analytical functions and harmonic analysis in the complex domain, "Complex analysis and its applications, vol. II, IAEA Vienna, pp. 145—202.

1977

- 121. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе H_+^p , ДАН СССР, т. 234, № 3, 517—520.
- 122. Теоремы типа Винера-Пэли и Мюнца-Саса, Известия АН СССР, сер. мат., т. 41, № 4, 868—894 (совм. с В. М. Мартиросяном).
- 123. Общие классы формул типа Тейлора-Маклорена, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 12, № 1, 66—83 (совм. с Б. А. Саакяном).
- 124. An extension of the Denjoy-Carleman quasi-analytic classes, Amer. Math. Soc. Transl. (2), Vol. 110, 1—59.

1978

- 125. Об одном бесконечном произведении, ДАН СССР, т. 240, № 3, 518—521.
- 126. Об одном бесконечном произведении, Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 13, № 3, 175—208.
- 127. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 42, № 6, 1322—1384.
- 128. Некоторые открытые вопросы теории представлений аналитических функций. Исследования по линейным операторам и теории функций (99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа); Записки научных семинаров ЛОМИ, том 81, «Наука», Ленинградское отделение, Л., 238—241.

А. Е. АВЕТИСЯН

К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ М. М. ДЖРБАШЯНА

В работе М. М. Джрбашяна и автора [1] был введен класс функций

$$H_2 [z; \omega] \left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, -1 < \omega < 1 \right).$$

Это — совокупность функций, голоморфных в области

$$\Delta (\alpha) = \left\{ z: |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}, 0 < |z| < \infty \right\}$$

и удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega} dr \leq M_F < +\infty, |\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}, \quad (1)$$

где M_F не зависит от z . Там же была установлена следующая теорема (теорема 3, стр. 408).

Теорема А. Если $F(z) \in H_2 [z; \omega]$, то для любого $\rho > \frac{2}{2\alpha-1}$ и $\mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}$ справедливо интегральное представление

$$\begin{aligned} F(r^{1/\rho} e^{i\varphi}) r^{\mu-1} = \\ = \frac{d}{dr} \left\{ r^{\mu} \int_0^{\infty} E_{\rho} (r^{1/\rho} \tau^{1/\rho} e^{i\varphi} e^{i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho} \right) \frac{\pi}{2}}; \mu+1) v_{(-)} (\tau) \tau^{\mu-1} d\tau \right\} + \\ + \frac{d}{dr} \left\{ r^{\mu} \int_0^{\infty} E_{\rho} (r^{1/\rho} \tau^{1/\rho} e^{i\varphi} e^{-i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho} \right) \frac{\pi}{2}}; \mu+1) v_{(+)} (\tau) \tau^{\mu-1} d\tau \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

для всех $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\alpha}$, где почти всюду на $(0, \infty)$

$$v_{(\pm)} (\tau) = \frac{e^{\pm i \frac{\pi}{2} (1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{\pm i\tau t} - 1}{\pm it} F(t^{1/\rho} e^{\pm i \frac{\pi}{2\alpha}}) t^{\mu-1} dt \in L_2 (0, \infty). \quad (3)$$

При этом для $|\varphi| = \frac{\pi}{2\alpha}$ равенство (2) имеет место почти всюду на $(0, \infty)$, а для $z \in \Delta(\alpha)$ его можно записать в виде

$$F(z) = \int_0^{\infty} E_{\rho}(z e^{i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) v_{(-)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau + \\ + \int_0^{\infty} E_{\rho}(z e^{-i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) v_{(+)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau. \quad (4)$$

Здесь под знаками интегралов фигурируют целые функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right)}.$$

Далее была доказана (стр. 414, теорема 4).

Теорема В. Если $F(z)$ определяется по формуле (4), где $v_{(\pm)}(\tau)$ — произвольные функции из $L_2(0, \infty)$, а параметры $\rho, \alpha, \omega, \mu$ имеют прежние значения, то она принадлежит классу $H_2[\alpha; \omega]$.

Однако из формулы (4) произвольные функции $v_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$ не определяются по формулам (3). Оказывается, что представление функции класса $H_2[\alpha; \omega]$ не единственно, т. е. ту же функцию $F(z)$ из класса $H_2[\alpha; \omega]$ в области $\Delta(\alpha)$ можно представить по формуле типа (4), но с другими функциями $v_{(\pm)}^*(\tau) \in L_2(0, \infty)$. Поэтому невозможно восстановить функции $v_{(\pm)}(\tau)$ по значениям $F(z)$ в области $\Delta(\alpha)$.

Естественно возникает вопрос: какие дополнительные данные нужны для восстановления функций $v_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$?

В первой части настоящей работы дается ответ на поставленный вопрос. Во второй части полученный результат обобщается на случай, когда число слагаемых интегралов в преобразовании типа (4) больше двух. И в заключение приводится теорема о расщеплении функции интегрируемой с квадратом (с небольшим весом) на заданной конечной системе лучей, исходящих из начала координат*.

1°. Пусть $v_{(\pm)}(\tau)$ — произвольные функции из класса $L_2(0, \infty)$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_0^{\infty} E_{\rho}(z e^{i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} v_{(-)}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^{\infty} E_{\rho}(z e^{-i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} v_{(+)}(\tau) d\tau, \quad (5)$$

* Формулировки этих результатов были опубликованы в заметке [3] автора.

где

$$\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}, \mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}, -1 < \omega < 1.$$

Как известно ([1], [2]), определенная формулой (5) функция $F(z)$ голоморфна в областях Δ_1 и Δ_2 :

$$\Delta_1 = \Delta(\alpha) = \left\{ z; |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}, 0 < |z| < \infty \right\},$$

$$\Delta_2 = \left\{ z; \pi \geq |\arg z| > \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho}, 0 < |z| < \infty \right\}$$

и удовлетворяет условиям

$$\int_0^{\pi} |F(re^{i\varphi})|^2 r^{\mu} dr < M_F < \infty,$$

где $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ и $\pi \geq |\varphi| > \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho}$.

Для любой угловой области B с вершиной в начале координат мы обозначим через $H_{2,\omega}(B)$ класс функций $f(z)$, голоморфных в B и удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 r^{\mu} dr < M_f < \infty,$$

для любого луча $re^{i\theta}$, $0 < r < \infty$ из области B . Таким образом, имеем $F(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_1)$ и $F(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_2)$.

Следующая теорема дает формулу обращения для преобразования (5).

Теорема 1. Если по произвольным функциям $v_{(\pm)}(\tau)$ из класса $L_2(0, \infty)$ составить функцию

$$\begin{aligned} F(z) = & \int_0^{\pi} E_{\rho}(z e^{i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho; \mu}) \tau^{\mu-1} v_{(-)}(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^{\pi} E_{\rho}(z e^{-i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho; \mu}) \tau^{\mu-1} v_{(+)}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}, \mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}, -1 < \omega < 1,$$

то почти всюду на $(0, \infty)$ справедливы следующие формулы обращения:

$$v_{(-)}(\tau) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\tau t} - 1}{-it} F(t^{1/\rho} e^{-i\frac{\pi}{2\alpha}}) t^{\mu-1} dt +$$

$$+ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\tau t} - 1}{it} F[t^{1/\rho} e^{-i(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho})}] t^{\mu-1} dt, \quad (6)$$

$$v_{(+)}(\tau) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\tau t} - 1}{it} F(t^{1/\rho} e^{i\frac{\pi}{2\alpha}}) t^{\mu-1} dt +$$

$$+ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\tau t} - 1}{-it} F[t^{1/\rho} e^{i(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho})}] t^{\mu-1} dt.$$

Доказательство. Как уже было отмечено, функция $F(z)$, определенная формулой (5), голоморфна в области $\Delta_1 \cup \Delta_2$ и $F(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_1)$ и $F(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_2)$. Рассмотрим $F(z)$ только в Δ_1 . Обозначим ее через $F_1(z)$. Применяя теорему А, для этой функции получим интегральное представление

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} E_{\rho}(z e^{i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} v_{(-)}^{(1)}(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^{\infty} E_{\rho}(z e^{-i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} v_{(+)}^{(1)}(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где почти всюду на $(0, \infty)$

$$v_{(\pm)}^{(1)}(\tau) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{\pm i\tau t} - 1}{\pm it} F(t^{1/\rho} e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}) t^{\mu-1} dt. \quad (8)$$

При этом (см. [2], стр. 432, см. также [4]) $F_1(z) = 0$, когда $z \in \Delta_2$. Аналогично рассматривая $F(z)$ только в Δ_2 (обозначим ее через $F_2(z)$), по теореме А получим для нее представление

$$F_2(z) = \int_0^{\infty} E_{\rho}(z e^{i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} v_{(+)}^{(2)}(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^{\infty} E_{\rho}(z e^{-i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} v_{(-)}^{(2)}(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где почти всюду на $(0, \infty)$

$$v_{(\pm)}^{(2)}(\tau) = \frac{e^{\pm i \frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{\pm i\tau t} - 1}{\pm it} F[t^{1/\rho} e^{\mp i(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho})}] t^{\mu-1} dt. \quad (10)$$

При этом $F_2(z) = 0$, когда $z \in \Delta_1$. Складывая (7) и (9), получим для $z \in \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^\infty E_\rho(z e^{i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} [v_{(-)}^{(1)}(\tau) + v_{(+)}^{(2)}(\tau)] d\tau + \\ &+ \int_0^\infty E_\rho(z e^{-i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} [v_{(+)}^{(1)}(\tau) + v_{(-)}^{(2)}(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Вычитая (11) из (5), получим для $z \in \Delta$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty E_\rho(z e^{i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} u_1(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^\infty E_\rho(z e^{-i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} u_2(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} u_1(\tau) &= v_{(-)}(\tau) - [v_{(-)}^{(1)}(\tau) + v_{(+)}^{(2)}(\tau)], \\ u_2(\tau) &= v_{(+)}(\tau) - [v_{(+)}^{(1)}(\tau) + v_{(-)}^{(2)}(\tau)]. \end{aligned}$$

Теперь остается доказать, что если сумма интегралов справа в (12) равна нулю в $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, то функции $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$ из $L_2(0, \infty)$ равны нулю почти всюду. Это, как легко видеть, равносильно утверждениям (б) теоремы.

Введем обозначения

$$\Phi_1(z) = \int_0^\infty E_\rho(z e^{i\frac{\pi}{2}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} u_1(\tau) d\tau, \quad (13)$$

$$\Phi_2(z) = \int_0^\infty E_\rho(z e^{-i\frac{\pi}{2}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\mu-1} u_2(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Далее обозначим через $B_\rho(\varphi)$ угловую область, которая получается от всей плоскости удалением замкнутого угла раствора $\frac{\pi}{\rho}$, вершина которого находится в начале координат, а ось симметрии

совпадает с лучом $\arg z = \varphi$, $0 \leq |z| < \infty$. Известно (см. [1], [2]), что $\Phi_1(z)$ голоморфна в области

$$B_\rho\left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}\right) \text{ и } \Phi_1(z) \in H_{2,\infty}\left[B_\rho\left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}\right)\right].$$

Аналогично $\Phi_2(z)$ голоморфна в области

$$B_\rho\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho}\right) \text{ и } \Phi_2(z) \in H_{2,\infty}\left[B_\rho\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho}\right)\right].$$

Но угловые области пересекаются с двух сторон:

$$B_\rho\left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}\right) \cap B_\rho\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho}\right) = \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2.$$

С другой стороны, согласно (12), когда $z \in \Delta$, $\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = 0$, или $\Phi_1(z) = -\Phi_2(z)$. Отсюда мы заключаем, что $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ аналитически продолжаются на всю плоскость, без начала координат, как однозначные аналитические функции. При этом для любого φ

$$\int_0^\infty |\Phi_k(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr < M_\varphi < \infty.$$

Нулевая точка является изолированной особой точкой для этих функций. Но в окрестности начала координат (а также при $r \rightarrow \infty$) имеем равномерную оценку (см. [2], стр. 417)

$$|\Phi_k(re^{i\varphi})| \leq \frac{A}{r^{\frac{1+\omega}{2}}} \quad (k=1, 2).$$

Так как $|\omega| < 1$, то нулевая точка является устранимой особой точкой, вокруг которой функции $\Phi_k(z)$ ограничены, в то время, как при $r \rightarrow \infty$ они стремятся равномерно к нулю. По теореме Лиувилля

$$\Phi_k(z) \equiv 0 \quad (k=1, 2).$$

Отсюда по теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна с ядром типа Миттаг-Леффлера (см. [2], стр. 237), следует, что почти всюду на $(0, \infty)$ $u_k(\tau) = 0$ ($k=1, 2$). Последнее заключение можно было бы сделать и ссылаясь на формулы обращения для преобразований (13) и (14), где используются значения $\Phi_k(z)$ только на одном луче (см. [5]). Теорема 1 полностью доказана.

2°. Пусть $v_k(\tau) \in L_2(0, \infty)$, $k=1, 2, \dots, n$ произвольны. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty E_\rho(ze^{-i\rho k \tau^{1/\rho}}; \mu) \tau^{\rho-1} v_k(\tau) d\tau, \quad (15)$$

где предполагается

$$0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$$

и

$$\rho > \alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\pi}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} \right\}, \quad (\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi).$$

Тогда формула (15) определяет, вообще говоря, разные аналитические функции в угловых областях Δ_k ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$\Delta_k = \left\{ z: \varphi_k + \frac{\pi}{2\rho} < \operatorname{Arg} z < \varphi_{k+1} - \frac{\pi}{2\rho}, 0 < |z| < \infty \right\}.$$

При этом $F(z) \in H_{2, \omega}(\Delta_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Это станет ясным, если заметить, что k -тый интеграл в правой части (15), как функция от z принадлежит классу $H_{2, \omega}[B_\rho(\varphi_k)]$ и $\bigcap_1^n B_\rho(\varphi_k) = \bigcup_1^n \Delta_k$.

При сделанных предположениях относительно φ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) и ρ верна.

Теорема 2. Если для произвольных $v_k(\tau) \in L_2(0, \infty)$, ($k = 1, 2, \dots, n$) составить функцию

$$F(z) = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty E_\rho(z e^{-i\varphi_k \tau^{1/\rho}; \mu}) \tau^{\mu-1} v_k(\tau) d\tau, \quad (16)$$

где $\mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}$, $-1 < \omega < 1$, то почти всюду на $(0, \infty)$ справедливы следующие формулы обращения ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} v_k(\tau) = & \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{it} - 1}{it} F[t^{1/\rho} e^{i(\varphi_k + \frac{\pi}{2\rho})}] t^{\mu-1} dt + \\ & + \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{-it} - 1}{-it} F[t^{1/\rho} e^{i(\varphi_k - \frac{\pi}{2\rho})}] t^{\mu-1} dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство. Как уже отметили, функция $F(z)$, определенная формулой (15), голоморфна в области

$$\Delta = \bigcup_{k=1}^n \Delta_k \text{ и } F(z) \in H_{2, \omega}(\Delta_k) (k=1, 2, \dots, n).$$

Рассмотрим функцию $F(z)$ только в Δ_k . Обозначим ее через $F_k(z)$. Применяя теорему А для $F_k(z)$, получим представление

$$F_k(z) = \int_0^\infty E_\rho(z e^{-i\varphi_k \tau^{1/\rho}; \mu}) \tau^{\mu-1} v_k^{(+)}(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^{\infty} E_p(z e^{-i\varphi_{k+1} \tau^{1/p}; \mu}) \tau^{\mu-1} v_{k+1}^{(-)}(\tau) d\tau \quad (18)$$

($k=1, 2, \dots, n$),

где

$$v_k^{(+)}(\tau) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\tau t} - 1}{it} F[t^{1/p} e^{i(\varphi_k + \frac{\pi}{2\rho})}] t^{\mu-1} dt, \quad (19)$$

$$v_{k+1}^{(-)}(\tau) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\tau t} - 1}{-it} F[t^{1/p} e^{i(\varphi_{k+1} - \frac{\pi}{2\rho})}] t^{\mu-1} dt, \quad (20)$$

причем $f_k(z)=0$ в области $\Delta \setminus \Delta_k$ ($k=1, 2, \dots, n$). Складывая все $F_k(z)$ и имея в виду, что $\sum_{k=1}^n F_k(z) = F(z)$, когда $z \in \Delta$, будем иметь

$$F(z) = \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} E_p(z e^{-i\varphi_k \tau^{1/p}; \mu}) \tau^{\mu-1} \{v_k^{(+)}(\tau) + v_k^{(-)}(\tau)\} d\tau. \quad (21)$$

Теперь вычитая (21) из (16), получим для $z \in \Delta$

$$0 = \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} E_p(z e^{-i\varphi_k \tau^{1/p}; \mu}) \tau^{\mu-1} u_k(\tau) d\tau, \quad (22)$$

где

$$u_k(\tau) = v_k(\tau) - \{v_k^{(+)}(\tau) + v_k^{(-)}(\tau)\}, \quad (23)$$

($k=1, 2, \dots, n$).

Нам остается доказать, что из (22) следует, что $u_k(\tau) \equiv 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) почти всюду на $(0, \infty)$. Это, ввиду (23), (13), (20), равносильно утверждениям теоремы (17).

Введем обозначения

$$\Phi_k(z) = \int_0^{\infty} E_p(z e^{-i\varphi_k \tau^{1/p}; \mu}) \tau^{\mu-1} u_k(\tau) d\tau \quad (24)$$

($k=1, 2, \dots, n$).

Ясно, что $\Phi_k(z)$ голоморфна в угловой области $B_p(\varphi_k)$ и принадлежит там классу $H_{\Delta, \infty}[B_p(\varphi_k)]$. Обозначим

$$\bar{\Phi}_k(z) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \Phi_m(z).$$

Обозначим, далее, через $\bar{B}_k$ ту компоненту (угловую область) множества $\bigcap_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n B_p(\varphi_m)$, которая содержит области Δ_k и Δ_{k-1} . Легко видеть, что

$$\bar{\Phi}_k(z) \in H_{2, \omega}[\bar{B}_k].$$

Но области $B_p(\varphi_k)$ и B_k пересекаются с двух сторон:

$$B_p(\varphi_k) \cap \bar{B}_k = \Delta_k \cup \Delta_{k-1}.$$

С другой стороны, согласно (22), при $z \in \Delta_k \cup \Delta_{k-1}$

$$\Phi_k(z) + \bar{\Phi}_k(z) = 0$$

или

$$\Phi_k(z) = -\bar{\Phi}_k(z).$$

Отсюда, как в пункте 1°, заключаем, что функция $\Phi_k(z)$ аналитически продолжается на всю плоскость без начала координат. При этом для любого φ

$$\int_0^\infty |\Phi_k(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \leq M < \infty.$$

Как и в конце пункта 1°, отсюда следует, что $\Phi_k(z) \equiv 0$. А это означает, что почти всюду на $(0, \infty)$ $u_k(r) = 0$, ($k = 1, 2, \dots, n$). Теорема 2 доказана.

3°. Пусть Γ означает совокупность лучей

$$\arg z = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi,$$

исходящих из начала координат. Γ разбивает плоскость на n угловых областей D_k , $k = 1, 2, \dots, n$:

$$D_k = \{z; \varphi_k < \arg z < \varphi_{k+1}; 0 < |z| < \infty\}, \quad (\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi).$$

Пусть $u(\zeta)$ — произвольная функция из класса $L_{2, -\omega}(\Gamma)$ ($-1 < \omega < 1$), т. е. определена на системе лучей Γ и удовлетворяет условию

$$\int_\Gamma |u(\zeta)|^2 |\zeta|^{-\omega} d|\zeta| = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty |u(re^{i\varphi_k})|^2 r^{-\omega} dr < \infty.$$

Обозначим через $H_{2, -\omega}(D_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) класс функций $g(z)$, голоморфных в области D_k и удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty |g(re^{i\varphi})|^2 r^{-\omega} dr < M_g < \infty, \quad \varphi_k < \varphi < \varphi_{k+1}. \quad (25)$$

Известно ([1], [2]), что функции класса $H_{2, -\omega}(D_k)$ почти всюду имеют граничные значения $g(re^{i\varphi_k})$ и $g(re^{i\varphi_{k+1}})$, которые также удовлетворяют условию (25).

Справедлива следующая

Теорема 3. Для данной системы Γ и данной функции $u(\zeta) \in L_{2, -\omega}(\Gamma)$ существует единственный набор функций $G_k(z) \in H_{2, -\omega}(D_k)$ таких, что

$$u(re^{i\varphi_k}) = G_k(re^{i\varphi_k}) - G_{k-1}(re^{i\varphi_k}) \quad (26)$$

$$(k=2, 3, \dots, n+1, G_{n+1}(z) = G_1(z)).$$

Доказательство. Полагая

$$\rho > \alpha = \max_k \left\{ \frac{\pi}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} \right\}, \quad \mu = \frac{1 + \rho + \omega}{2\rho}, \quad -1 < \omega < 1,$$

поставим функцию

$$F(z) = \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} E_{\rho}(ze^{i\varphi_k} \tau^{1/\rho}; \mu) \tau^{\lambda-1} \left\{ \frac{ie^{i\varphi_k}}{2\pi\rho} u(\tau^{1/\rho} e^{i\varphi_k}) \tau^{1/\rho-\mu} \right\} d\tau. \quad (27)$$

Из условия $u(\zeta) \in L_{2, -\omega}(\Gamma)$ следует, что

$$\frac{ie^{i\varphi_k}}{2\pi\rho} u(\tau^{1/\rho} e^{i\varphi_k}) \tau^{1/\rho-\mu} \in L_2(0, \infty) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Определенная формулой (27) функция $F(z)$ голоморфна в областях

$$\bar{\Delta}_k = \left\{ z; -\varphi_{k+1} + \frac{\pi}{2\rho} < \text{Arg } z < -\varphi_k - \frac{\pi}{2\rho}, 0 < |z| < \infty \right\}$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

и в каждой области $\bar{\Delta}_k$ принадлежит классу $H_{2, -\omega}(\bar{\Delta}_k)$. По теореме 2 имеем

$$\begin{aligned} & \frac{ie^{i\varphi_k}}{2\pi\rho} u(\tau^{1/\rho} e^{i\varphi_k}) \tau^{1/\rho-\mu} = \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\tau t} - 1}{it} F[t^{1/\rho} e^{-i(\varphi_k + \frac{\pi}{2\rho})}] t^{\mu-1} dt + \\ &+ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\tau t} - 1}{-it} F[t^{1/\rho} e^{-i(\varphi_k - \frac{\pi}{2\rho})}] t^{\mu-1} dt \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u(\tau^{1/\rho} e^{i\varphi_k}) &= e^{-i\frac{\pi}{2}\mu - i\varphi_k} \tau^{\mu - \frac{1}{\rho}} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\tau t} - 1}{it} F[t^{1/\rho} e^{-i(\varphi_k + \frac{\pi}{2\rho})}] t^{\mu-1} dt - \\ &- e^{i\frac{\pi}{2}\mu - i\varphi_k} \tau^{\mu - \frac{1}{\rho}} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\tau t} - 1}{-it} F[t^{1/\rho} e^{-i(\varphi_k - \frac{\pi}{2\rho})}] t^{\mu-1} dt \equiv \end{aligned} \quad (28)$$

$$\equiv G_k(\tau^{1/p} e^{i\varphi_k}) - G_{k-1}(\tau^{1/p} e^{i\varphi_k}).$$

Для доказательства (26) надо показать, что $G_k(\tau e^{i\varphi_k})$ и $G_{k-1}(\tau e^{i\varphi_k})$ являются граничными значениями функций

$$G_k(z) \in H_{2, \infty}(D_k) \text{ и } G_{k-1}(z) \in H_{2, \infty}(D_{k-1}).$$

Докажем, например, первое из этих утверждений. С этой целью рассмотрим функцию

$$g_\theta(z) = p(z e^{-i\theta})^{1/p} z^{-1} \int_0^{\infty} F(te^{-i\theta}) e^{-t^p(e^{-i\theta} z)^p} t^{1/p-1} dt, \quad (29)$$

где

$$\theta \in \left[\varphi_k + \frac{\pi}{2p}, \varphi_{k+1} - \frac{\pi}{2p} \right]. \text{ При } \theta = \varphi_k + \frac{\pi}{2p} \text{ и } \theta = \varphi_{k+1} - \frac{\pi}{2p}$$

под знаком интеграла участвуют граничные значения функции $F(z)$ области $\bar{\Delta}_k$.

Формула (29) определяет $g_\theta(z)$ как функцию, голоморфную в угловой области

$$\Delta(p, \theta) = \left\{ z; |\operatorname{Arg} z - \theta| < \frac{\pi}{2p}, 0 < |z| < \infty \right\}.$$

Так как $F(z) \in H_{2, \infty}(\bar{\Delta}_k)$, то существует функция $G_k(z)$, совпадающая с $g_\theta(z)$ в $\Delta(p, \theta)$ и голоморфная в более широкой области D_k , при этом $G_k(z) \in H_{2, \infty}(D_k)$ (см. [2], теорему 7.6). Убедимся в том, что полученная таким образом $G_k(z)$ — именно та функция, граничные значения которой участвуют в (28). Действительно, из (29) при $\theta = \varphi_k + \frac{\pi}{2p}$, $z = r e^{i(\varphi_k + \delta)}$ ($\delta > 0$ достаточно малое число) имеем

$$\begin{aligned} G_k[re^{i(\varphi_k + \delta)}] &= g_{\varphi_k + \frac{\pi}{2p}}[re^{i(\varphi_k + \delta)}] = \\ &= r^{1/p-1} p e^{i\left[\delta(1/p-1) - \frac{\pi}{2}(1-\varphi_k)\right]} \int_0^{\infty} F[t^{1/p} e^{-i(\varphi_k + \frac{\pi}{2p})}] e^{t r e^{-i(\frac{\pi}{2p} - \delta)}} t^{1/p-1} dt \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} G_k[r^{1/p} e^{i(\varphi_k + \delta)}] r^{1/p-1} dr \cdot e^{-i\delta(1/p-1)} = \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\varphi_k)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t r e^{-i(\frac{\pi}{2p} - \delta)}} - 1}{-t e^{-i(\frac{\pi}{2p} - \delta)}} F[t^{1/p} e^{-i(\varphi_k + \frac{\pi}{2p})}] t^{1/p-1} dt. \end{aligned}$$

Переходя к пределу под знаками интеграла (что, очевидно, допустимо) при $\delta \rightarrow 0$, а затем дифференцируя по τ , получим почти всюду на $(0, \infty)$

$$G_k(\tau^{1/p} e^{i\varphi_k}) = e^{-i(\frac{\pi}{2}\mu - i\varphi_k)} \tau^{\mu-1/p} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{i\tau t} - 1}{it} F\left[t^{1/p} e^{-i(\varphi_k + \frac{\pi}{2\epsilon})}\right] t^{\mu-1} dt,$$

что и требовалось (см. (28)). Аналогично доказывается утверждение относительно $G_{k-1}(z)$. Утверждение (26) доказано. Отметим, что в представлении $u(re^{i\varphi_{k+1}})$ фигурируют граничные значения $G_k(re^{i\varphi_{k+1}})$ той же функции $G_k(z)$. Остается доказать единственность представления (26). Предположим, что помимо (26) имеет место также

$$u(re^{i\varphi_k}) = P_k(re^{i\varphi_k}) - P_{k-1}(re^{i\varphi_k}) \quad (30)$$

$$(k = 2, 3, \dots, n+1, P_{n+1}(z) \equiv P_1(z), \text{ где } P_k(z) \in H_{2,-\infty}(D_k).$$

Сравнивая (26) с (30), получим п. в.

$$G_k(re^{i\varphi_k}) - P_k(re^{i\varphi_k}) = G_{k-1}(re^{i\varphi_k}) - P_{k-1}(re^{i\varphi_k}),$$

т. е. граничные значения функций $G_k(z) - P_k(z) \in H_{2,-\infty}(D_k)$ и $G_{k-1}(z) - P_{k-1}(z) \in H_{2,-\infty}(D_{k-1})$ совпадают почти всюду на общей границе $re^{i\varphi_k}$, $0 < r < \infty$ областей D_k и D_{k-1} . Отсюда функция $G_k(z) - P_k(z)$ из области D_k аналитически продолжается в область D_{k-1} как функция того же класса. Из области она таким же образом продолжается в область D_{k-2} и т. д. В итоге получается, что $T(z) = G_k(z) - P_k(z)$ — однозначная аналитическая функция на всей конечной плоскости без начала координат и удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |T(re^{i\varphi})|^2 r^{-\omega} dr < M$$

для любого φ . Отсюда как в конце пункта 1° заключаем, что $T(z) \equiv 0$, т. е.

$$G_k(z) \equiv P_k(z) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Теорема 3 полностью доказана.

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 15.IX.1978

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Մ. Մ. Զրբաշյանի ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսության շուրջը
(ամփոփում)

Ենթակա աշխատանքում, ρ , z , ω , μ պարամետրերի վրա դրվող որոշակի պայմանների դեպքում և կամայական $v_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$ համար ապացուցվում է Մ. Մ. Զրբաշյանի և հեղինակի կողմից դիտարկված

$$\begin{aligned} F(z) = & \int_0^\infty E_\rho(z e^{i(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/p}; \mu) v_{(-)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau + \\ & + \int_0^\infty E_\rho(z e^{-i(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/p}; \mu) v_{(+)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau \end{aligned} \quad (1)$$

ինտեգրալ ձևափոխության համար շրջան բանաձև: Այնուհետև այդ արդյունքն ընդհանրացվում է այն դեպքի համար, երբ գումարելիների թիվը (1) տեսքի ձևափոխության մեջ ավելի է երկուսից: Վերջում բերվում է սկզբնականից ելնող ճառագայթների սխեմների վրա թառակուսով ինտեգրելի (փոքր կշռով) ֆունկցիաների տրոհման մասին թեորեմ:

A. E. AVETISIAN. *On the theory of Djrbashian's integral transforms*
(summary)

The conversion formula for the integral transformation

$$F(z) = \int_0^{\infty} E_{\rho}(z e^{i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) v_{(-)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau + \\ + \int_0^{\infty} E_{\rho}(z e^{-i(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho})\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu) v_{(+)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau$$

considered by M. M. Djrbashian and the author ρ, z, ω, μ is obtained under some conditions on parameters and for arbitrary $v_{(+)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$. Further this result is generalised to the case of more than two integrals in the transformation of form (1). In conclusion we prove a theorem about the splitting of functions square-integrable (with a small weight) on a finite set of rays starting from the origin.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян и А. Е. Аветисян. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Изд. „Наука“, М., 1966.
3. А. Е. Аветисян. К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна, ДАН Арм.ССР, 65, № 5, 1977, 266—270.
4. А. Е. Аветисян. Две теоремы о функциях, аналитических в угловых областях, ДАН Арм.ССР, XXIX, № 5, 1959.
5. А. Е. Аветисян. Некоторые приложения теории обобщенных интегральных преобразований, Известия АН Арм.ССР, „Математика“, XII, № 5, 1977.

А. Е. АВЕТИСЯН, С. А. АКОПЯН, И. О. ХАЧАТРЯН

О ЗАМКНУТОСТИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ЛУЧЕЙ

1°. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из области $\operatorname{Re} \lambda > 0$, а $s_k \geq 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $[\lambda_j]_{j=1}^k$. Известна следующая теорема Мюнца-Сасса в обобщенной формулировке [1, 2].

Теорема А. Для замкнутости системы функций $|e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}|_1$ в $L_2(0, +\infty)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = +\infty.$$

М. М. Джрбашьяном [2] исследован вопрос о замкнутости системы функций, порожденных целой функцией Миттаг-Леффлера

$$E_p(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad (\mu > 0, \rho > 0)$$

и установлен критерий замкнутости этих систем. Чтобы сформулировать результат М. М. Джрбашьяна, введем обозначения: через $\Delta(\alpha)$

$\left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty\right)$ обозначим угловую область $\left\{\lambda: |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2\alpha}, 0 < |\lambda| < +\infty\right\}$, и пусть $\lambda_k \in \Delta(\alpha)$ ($k = 1, 2, \dots$), а s_k имеет вышеприведен-

ный смысл. Далее, для данного ω ($-1 < \omega < 1$) обозначим через $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ множество измеримых на $(0, +\infty)$ функций f , для которых

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 x^\omega dx < +\infty.$$

Полагая $\rho = \frac{\alpha}{2\alpha-1}$, $\mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$, рассмотрим систему функций

$$\{E_p^{(s_k-1)}(-\lambda_k x; \mu) x^{s_k-1}\}_1^\infty. \quad (1)$$

Следующая теорема является обобщением вышеприведенной теоремы А Мюнца-Сасса.

Теорема Б. (М. М. Джрбашян). Для замкнутости системы (1) в метрике $L_{2,\alpha}(0, +\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k^\alpha}{1 + |\lambda_k|^{2\alpha}}. \quad (2)$$

М. М. Джрбашяном и В. М. Мартиросяном исследованы вопросы замкнутости систем $\{e^{-\lambda_k z} z^{\lambda_k-1}\}$ и $\{E_p^{(s_k-1)}(-\lambda_k \zeta; \mu) \zeta^{s_k-1}\}$ в различных пространствах функций, определенных на двух лучах [3, 4].

В настоящей работе установлен критерий замкнутости системы функций

$$\{E_p^{(s_k-1)}(\lambda_k \zeta; \mu) \zeta^{s_k-1}\}_1^\infty \quad (3)$$

на произвольной конечной системе лучей, исходящих из начала координат. При этом мы пользуемся классическим методом сведения задачи к теореме единственности в определенном классе голоморфных функций, что, в свою очередь, сводит задачу к обращению интегрального преобразования М. М. Джрбашяна на системе лучей.

2°. Приведем, предварительно, некоторые результаты, на которые будем опираться в дальнейшем.

а) Пусть $v_k(\tau) \in L_2(0, +\infty)$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Предположим, что

$$0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi, \\ \rho > \alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\pi}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} \right\}, \quad \mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}, \quad -1 < \omega < 1. \quad (4)$$

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty E_p(z e^{-i\varphi_k} \tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu) \tau^{\mu-1} v_k(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Формула (5) определяет, вообще говоря, разные аналитические функции в угловых областях Δ_k ($k=1, 2, \dots, n$)

$$\Delta_k = \left\{ z: \varphi_k + \frac{\pi}{2\rho} < \arg z < \varphi_{k+1} - \frac{\pi}{2\rho}, \quad 0 < |z| < +\infty \right\}.$$

При этом $F(z)$ в каждой области Δ_k удовлетворяет условиям

$$\sup \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr < +\infty, \quad (6)$$

где $\sup$ берется по $\varphi: \varphi_k + \frac{\pi}{2\rho} < \varphi < \varphi_{k+1} - \frac{\pi}{2\rho}$.

Обозначим через $H_{2,\omega}(\Delta_k)$ класс функций, голоморфных в угловой области Δ_k и удовлетворяющих условию (6). По сказанному

$$F(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (L)$$

В работе [5] доказана следующая теорема, дающая формулы обращения для (5).

Теорема В. Если для произвольных $v_k(\tau) \in L_2(0, +\infty)$, $k = 1, 2, \dots, n$ составить функцию (5), где ρ, μ, ω имеют вышеуказанный смысл, то почти всюду на $(0, +\infty)$ справедливы следующие формулы обращения: ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} v_k(\tau) = & \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\tau t} - 1}{it} F\left(t^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\varphi_k + \frac{\pi}{2\rho}\right)}\right) t^{\mu-1} dt + \\ & + \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\tau t} - 1}{-it} F\left(t^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\varphi_k - \frac{\pi}{2\rho}\right)}\right) t^{\mu-1} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

б) В упомянутой работе [2] М. М. Джрбашяна содержится теорема единственности для класса $H_2[\alpha, \omega]$. Приведем формулировку теоремы для области Δ_k .

Теорема Г. Если функция $\Phi(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_k)$ обращается в нуль в точках $\lambda_j \in \Delta_k$ (с кратностью s_j) и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\lambda_j e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{\alpha_k}}{1 + |\lambda_j|^{2\alpha_k}} = +\infty, \quad (9)$$

где $\alpha_k = \frac{\pi\rho}{\rho(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - \pi}$, то $\Phi(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_k$.

Если же ряд (9) сходится, то бесконечное произведение

$$B_{\alpha_k}(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{\alpha_k} - (\lambda_j e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{\alpha_k}}{(\lambda e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{\alpha_k} + (\lambda_j e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{\alpha_k}} \chi_j, \quad (10)$$

где

$$\chi_j = \frac{|1 - (\lambda_j e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{2\alpha_k}|}{1 - (\lambda_j e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{2\alpha_k}}, \quad \alpha_k = \frac{\pi\rho}{\rho(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - \pi},$$

сходится в области Δ_k , причем

$$B_{\alpha_k}(\lambda) \neq 0, \quad |B_{\alpha_k}(\lambda)| \leq 1, \quad \lambda \in \Delta_k.$$

3°. Перейдем теперь к изложению нашего результата.

Пусть теперь Γ означает совокупность лучей

$$\arg z = -\varphi_k, \quad 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n = 2\pi.$$

Обозначим через $L_{2,\omega}(\Gamma)$ множество функций f , определенных на Γ и удовлетворяющих условию

$$\int_{\Gamma} |f(z)|^2 |z|^\omega d|z| < +\infty.$$

Обозначим через Δ объединение всех областей Δ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) $\Delta = \bigcup_{k=1}^n \Delta_k$. Пусть в каждой области Δ_k задана последовательность комплексных чисел $\{\lambda_j^{(k)}\}$. Обозначим через $s_i^{(k)}$ кратность числа $\lambda_i^{(k)}$ среди совокупности $\{\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_l^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Рассмотрим, наконец, систему функций

$$\{E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)} \zeta; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1}\}_{i=1}^{\infty}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \zeta \in \Gamma, \quad (11)$$

где p и μ определяются из условий (4).

Из асимптотических свойств функции $E_p(z; \mu)$ [6, стр. 136] легко следует, что каждая функция системы (11) принадлежит классу $L_{2,\omega}(\Gamma)$.

Имеет место следующая

Теорема. Для замкнутости системы

$$\{E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)} \zeta; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1}\}_{i=1}^{\infty}, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ в } L_{2,\omega}(\Gamma)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\lambda_j^{(k)}) e^{-i \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}}}{1 + |\lambda_j^{(k)}|^{2\alpha_k}} = +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

где

$$\alpha_k = \frac{\pi\rho}{\rho(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - \pi}.$$

Доказательство. Пусть для некоторой функции $f_0 \in L_{2,\omega}(\Gamma)$ выполняются равенства

$$\int_{\Gamma} E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)} \zeta; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1} \overline{f_0(\zeta)} |\zeta|^\omega d|\zeta| = 0 \quad (13)$$

$$(i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n).$$

Равенство (13) можно записать в форме

$$\sum_{k'=1}^n \int_0^{+\infty} E_p^{(s_j^{(k)}-1)} (\lambda_j^{(k)} \tau^{\frac{1}{p}} e^{-l\varphi_{k'}}; \mu) \tau^{\mu-1+\frac{s_j^{(k)}-1}{p}} v_{k'}(\tau) d\tau = 0 \quad (14)$$

$$(j=1, 2, \dots; k=1, 2, \dots, n),$$

где

$$v_{k'}(\tau) = \frac{1}{p} e^{-\varphi_{k'}(s_j^{(k)}-1)} \overline{f_0(\tau^{\frac{1}{p}} e^{-l\varphi_{k'}}) \tau^{\mu-1}}, \quad k'=1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Из $f_0 \in L_{2,\omega}(\Gamma)$ следует, что $v_{k'} \in L_2(0, +\infty)$, $k'=1, 2, \dots, n$. Составим функцию

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} E_p(\lambda \tau^{\frac{1}{p}} e^{-l\varphi_k}; \mu) \tau^{\mu-1} v_k(\tau) d\tau, \quad (16)$$

она голоморфна в каждой области Δ_k и при этом $F(\lambda) \in H_{2,\omega}(\Delta_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Из (14) следует, что

$$F^{(s_j^{(k)}-1)}(\lambda_j^{(k)}) = 0 \quad (j=1, 2, \dots; k=1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Из условия (12) на основании теоремы единственности (Γ) заключаем, что

$$F(\lambda) \equiv 0, \quad \lambda \in \Delta. \quad (18)$$

Теперь применяя формулу обращения (8) теоремы В, получим, что функции $v_k(\tau)$ ($k=1, 2, \dots, n$) равны нулю почти всюду на $(0, +\infty)$. А это в силу (15) означает, что $f_0(\zeta) = 0$ почти всюду на Γ и достаточность условий (12) доказана.

Для доказательства необходимости допустим, что хотя бы одно из условий (12) нарушено. Пусть для некоторого k ($1 \leq k \leq n$) ряд (12) сходится. Тогда существует произведение Бляшке $B_{\alpha_k}(\lambda) \neq 0$ для области Δ_k (см. (10)).

Функция

$$\Phi(\lambda) = \frac{B_{\alpha_k}(\lambda)}{1 + \lambda e^{-l \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}}} \quad (19)$$

принадлежит классу $H_{2,\omega}(\Delta_k)$, и, следовательно, имеет представление [7]

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{+\infty} E_p(\lambda \tau^{\frac{1}{p}} e^{-l\varphi_k}; \mu) \tau^{\mu-1} v_k(\tau e^{-l\varphi_k}) d\tau +$$

$$+ \int_0^{+\infty} E_p(\lambda \tau^{\frac{1}{p}} e^{-l\varphi_{k+1}}; \mu) \tau^{\mu-1} v_{k+1}(\tau e^{-l\varphi_{k+1}}) d\tau \quad (v_{n+1} = v_1), \quad (20)$$

где v_k и v_{k+1} принадлежат $L_2(0, +\infty)$.

Формулу (20) можно записать в виде

$$\Phi(\lambda) = \int_{\Gamma_k} E_p(\lambda; \mu) |\zeta|^\mu \overline{\varphi(\zeta)} d|\zeta|, \quad (21)$$

где Γ_k — пара лучей $\arg z = -\varphi_k$ и $\arg z = -\varphi_{k+1}$, а

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} \rho v_k (\tau^p e^{-i\varphi_k})^{-1} \tau^{p(1-\lambda)}, & \text{если } \zeta = \tau e^{-i\varphi_k} \\ \tau v_{k+1} (\tau^p e^{-i\varphi_{k+1}})^{-1} \tau^{p(1-\lambda)}, & \text{если } \zeta = \tau e^{-i\varphi_{k+1}} \end{cases}$$

Легко видеть, что $\varphi(\zeta) \in L_{2,\omega}(\Gamma_k)$ и $\varphi(\zeta) \neq 0$. Функция $\Phi(\lambda)$, опреде-

ленная равенством (20) (или (21)) равна $B_{\tau_k}(\lambda)/(1 + \lambda e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})$ в области Δ_k и равна нулю в других областях $\Delta_j, j \neq k$ (см. [6]). Имеем

$$B_{\tau_k}^{(j)}(\lambda_i^{(k)}) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, s_i^{(k)}; 1 \leq i < +\infty),$$

из (21) $s_i^{(k)} - 1$ — кратным дифференцированием получим

$$\int_{\Gamma_k} E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)}; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1} \overline{\varphi(\zeta)} |\zeta|^\mu d|\zeta| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Теперь рассмотрим на Γ функцию

$$\psi(\zeta) = \begin{cases} \varphi(\zeta), & \text{когда } \zeta \in \Gamma_k \\ 0, & \text{когда } \zeta \in \Gamma \setminus \Gamma_k. \end{cases} \quad (23)$$

Ясно, что $\psi(\zeta) \neq 0$ на Γ и $\psi(\zeta) \in L_{2,\omega}(\Gamma)$. Из (22), (23) имеем

$$\int_{\Gamma} E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)}; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1} \overline{\psi(\zeta)} |\zeta|^\mu d|\zeta| = 0, \quad i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n.$$

Это и доказывает необходимость условий (12). Теорема доказана.

Ереванский институт народного хозяйства,

Ереванский государственный университет,

Армянский гос. пед. институт им. Х. Абовяна

Поступила 28.IX.1978

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍԻԱՆ, Ս. Ա. ՀԱԿՈՐՅԱՆ, Ի. Շ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Ճառագայթների կամայական վերջավոր սխտեմի վրա Միտտագ-Լեֆլերի ախտի ֆունկցիաների սխտեմի փակության մասին (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է

$$\{E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)}; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1}\}_{i=1}^{s_i^{(k)}-1} \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Ֆունկցիաների սխտեմի փակության հարցը մի կետից ելնող ճառագայթների վերջավոր սխտեմի վրա, նրկու ճառագայթների վրա նշված սխտեմի փակության հարցը ուրիշ մեթոդով ուսումնասիրված է Վ. Մ. Մարտիրոսյանի [4] աշխատանքում: Մենք առաջնորդվում ենք դասական այն մեթոդով, որը խնդիրը բերում է հոյամորֆ ֆունկցիաների որոշակի դասի միակության թեորեմի, իսկ սա իր հերթին խնդիրը հանգեցնում է ճառագայթների սխտեմի վրա Մ. Մ. Ջորաշյանի ինտեգրալ ձևափոխության շրջմանը:

A. E. AVETISIAN, S. A. AKOPIAN, J. O. KHATCHATURIAN. *On the closure of Mittag Leffler type systems on arbitrary finite set of rays (summary)*

In this paper we investigate the closure problem for functions system

$$\{E_p^{(\lambda_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)}\zeta; \mu)\zeta^{\lambda_i^{(k)}-1}\}_{i=1}^n, k=1, 2, \dots, n$$

on a finite set of rays starting from one point. The two rays case has been studied by a different method in the work [4] of V. M. Martirosian. We are guided by the classical method, which reduces the problem to the uniqueness theorem for a class analytic functions and further to the inversion of M. M. Djrbashian's integral transformation.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян. О пополнении и замкнутости неполной системы функций $\{e^{-\lambda_k x^{\lambda_k-1}}\}_1^n$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
2. М. М. Джрбашян. О замкнутости систем функций типа Миттаг-Леффлера. ДАН СССР, 219, № 6, 1974, 1302—1305.
3. М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян. Теоремы типа Винера-Пэли и Мюнца-Сасса, ДАН СССР, 225, № 5, 1975, 1001—1004.
4. В. М. Мартиросян. О замкнутости систем функций типа Миттаг-Леффлера и систем простейших рациональных дробей, ДАН Арм.ССР. LXII, № 5, 1976, 269—273.
5. А. Е. Аветисян. К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна, ДАН Арм.ССР, LXV, № 5, 1977, 266—270.
6. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука“, 1966.
7. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. мат. ж., I, № 3, 1960, 383—426.

W. H. J. FUCHS*

ON THE DEGREE OF CHEBYSHEV APPROXIMATION ON SETS WITH SEVERAL COMPONENTS

1°. Let K be a compact set in the z -plane with p , $1 < p < \infty$, simply connected disjoint components $I_1, I_2, \dots, I_p$ none of which is a single point. For a connected set K the degree of best approximation (in the Chebyshev sense)

$$E_n(f, K) = E_n(f) = \inf_{q \in P_n} \sup_{z \in K} |f - q| = \inf_{q \in P_n} \|f - q\|_K$$

P_n = polynomials of degree $\leq n$ is determined by the regularity properties of f . In the case under consideration here a new phenomenon arises, because the geometrical nature of K plays a decisive role. To study the influence of the geometry of K we consider approximation of functions which have very regular behavior on K . To be precise, we restrict ourselves to functions in the class R :

Definition 1. $f \in R$ if and only if

- a) $f(z)$ is defined on K .
- b) On every connected component I_j of K $f(z)$ is equal to the restriction of an entire function $h_j(z)$ to I_j .
- c) Not all $h_j(z)$ are identical.

The relevant geometric properties of K find their analytic expression in the properties of the Green's function $k(z)$ of the complement K' of K in the completed z -plane with pole at ∞ . We extend the definition of $k(z)$ to all complex z by setting

$$k(z) = 0 \quad (z \in K).$$

For $0 < \alpha < \infty$, let

$$D_\alpha = \{z | k(z) < \alpha\}.$$

If α is sufficiently small the set D_α will consist of p disjoint regions. Each one of these regions will contain exactly one I_j . As α increases there will be values α' of α such that $D_{\alpha' + \varepsilon}$ has fewer components than $D_{\alpha' - \varepsilon}$ for every ε , $0 < \varepsilon < \alpha'$. The values α' for which this occurs can be characterized as those positive numbers for which the level line $k(z) = \alpha'$ contains a critical point of $k(z)$ (i. e. a point where $\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial y} = 0$). It is well known that there are $p - 1$ such points, if counted with proper multiplicity [1, p. 32]. For simplicity we assume that each

* The author gratefully acknowledges support of this research by Bell Telephone Laboratories and the National Science Foundation.

of these points is of multiplicity one. Since $k(z)$ is harmonic, this means that in terms of a suitably chosen new variable

$$\zeta = \xi + i\eta = e^{i\gamma}(z - z_0).$$

$k(z) = k(z_0) + c(z_0)(\xi^2 - \eta^2) + \text{higher order terms}$ ($c(z_0) > 0$) (1) near the critical point z_0 .

It is an immediate consequence of the definition of the class R that $f \in R$ has a holomorphic extension to D_α for sufficiently small α (the holomorphic functions defining $f(z)$ in distinct components of D_α are the $h_j(z)$ entering into the definition of $f \in R$). By requirement c) of Definition 1 there must be a β , $0 < \beta < \infty$, such that $f(z)$ is holomorphic in D_β , but not in D_α with $\alpha > \beta$.

Theorem 1. Suppose there are constants α_1, A_1 such that for $0 < \alpha < \alpha_1$ the length of ∂D_α , the boundary of D_α , is less than A_1 . Suppose also that at all critical points $k(z)$ has an expansion of the form (1).

If $f \in R$ is holomorphic in D_β , but not in D_α with $\alpha > \beta$, then one can find a non-negative integer $q = q(f)$ such that

$$E_n(f) \geq A_1 n^{-q - \frac{1}{2} - n\beta} e^{-n\beta}. \quad (2)$$

Remarks. 1. Critical points of higher multiplicity can be investigated in the same way and a similar statement holds in their presence.

2. The hypothesis about the length of the level curves ∂D_α is satisfied if and only if each I_j has a rectifiable boundary. Under more stringent conditions on K it is possible to show that Theorem 1 gives the correct order of magnitude of $E_n(f)$:

A function of a real variable is said to be in class C^{m+} , if its m^{th} derivative satisfies a Lipschitz condition with some positive exponent. The boundary of K is in C^{m+} if the boundary of K consists of rectifiable curves such that the coordinate functions are C^{m+} functions of arc length.

Theorem 2. Suppose that the hypotheses of Theorem 1 hold and that in addition ∂K consists of Jordan curves and simple arcs in C^{2+} .

Then one can find polynomials $p_n(x)$ such that

$$\|f - p_n\|_K \leq A_2 n^{-q - \frac{1}{2} - n\beta} e^{-n\beta},$$

where q is the same integer as in Theorem 1.

Notation. The letter A will be used for a positive number which may depend on f and K , but not on n . The value of A may change from one occurrence to the next.

2°. Proof of Theorem 1. Theorem 1 is proved by estimating $\int_{\partial D_\alpha} f(z) \bar{\varphi}(z) dz$ in two different ways, where $\varphi(z)$ is a suitable bounded holomorphic function in K' (the complement of K), with a zero of order $n+2$ at infinity.

First we construct a suitable $\varphi(z)$. Let $\omega_j(z)$ be the harmonic measure of ∂I_j with respect to K' . We assume that φ is of the form

$$\varphi(z, n+2) = \varphi(z) = \exp\{u(z) + i\bar{u}(z)\}$$

where

$$u(z) = -(n+2)k(z) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \omega_j(z) \quad (\lambda_j \in \mathbb{R}, |\lambda_j| < A).$$

Here $\bar{u}$ must be the conjugate harmonic function of u defined by

$$u(z) + i\bar{u}(z) = \int_{z_0}^z \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(\zeta) - i \frac{\partial u}{\partial y}(\zeta) \right\} d\zeta + \text{const.} \quad (2.1)$$

In general this will not define a single-valued φ , since the integral in (2.1) depends on the path of integration. Integrals along different paths with the same end points will differ by

$$\sum m_l \pi_l(u) \quad (m_l \in \mathbb{Z}, \pi_l(u) = \text{period of } u + i\bar{u} = \int_{C_l} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\zeta,$$

where C_l is a curve encircling I_l once in the positive sense, but not encircling any other I_j . $\pi_l(u)$ is an imaginary number. The function $\varphi(z)$ is single-valued, if and only if

$$\pi_l(u) = 2\pi i q_l \quad (q_l \in \mathbb{Z}). \quad (2.2)$$

If we put

$$\pi_l(k) = i\nu_l \quad \pi_l(\omega_j) = iP_{lj},$$

we can rewrite (2.2) as

$$\sum_{j=1}^p P_{lj} \lambda_j = (n+2)\nu_l + 2\pi q_l = \kappa_l \quad (l = 1, 2, \dots, p). \quad (2.3)$$

H. Widom [4, p. 142] proved that the equations

$$\sum_{j=1}^p P_{lj} \lambda_j = c_l \quad (l = 1, 2, \dots, p) \quad (2.4)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 0$$

have a unique solution, if and only if

$$c_1 + c_2 + \dots + c_p = 0.$$

Since, by Cauchy's Theorem,

$$i \sum \nu_l(k) = \int_{|z|=R} \left(\frac{\partial k}{\partial x} - i \frac{\partial k}{\partial y} \right) d\zeta = 2\pi i,$$

it follows that (2.3) has a unique solution if and only if the integers q_l satisfy

$$2\pi(n+2 + q_1 + q_2 + \dots + q_p) = \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_p = 0.$$

By linearity, we can therefore find real constants Q_{lj} , depending only on the P_{lj} , such that

$$\lambda_j = \sum_{l=1}^{p-1} Q_{jl} z_l \quad (j=1, 2, \dots, p-1). \quad (2.5)$$

By adjusting the integers q_l we can make $|z_l| < A$ and so, by (2.4) and (2.5)

$$|\lambda_j| < A \quad (j=1, 2, \dots, p).$$

With this choice of the λ_j , φ is a bounded, holomorphic function in K' .

Since $\varphi(z)$ has a zero of order $n+2$ at ∞ , an application of Cauchy's Theorem yields

$$\int_{\partial D_\alpha} z^j \varphi(z) dz = \int_{|z|=R} z^j \varphi(z) dz = 0 \quad (R > R_0; j=0, 1, 2, \dots, n).$$

Therefore, if $q(z)$ is the polynomial of degree $\leq n$ which best approximates $f(z)$ on $\overline{D_\alpha}$, $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial D_\alpha} f(z) \varphi(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial D_\alpha} (f(z) - q(z)) \varphi(z) dz \right| \\ &\leq E_n(f, \overline{D_\alpha}) \int_{\partial D_\alpha} |\varphi(z)| |dz|. \end{aligned}$$

Since $|\varphi(z)| < A$ and, for $\alpha < \alpha_1$, $\int_{\partial D_\alpha} |dz| < A$, it follows that

$$E_n(f, \overline{D_\alpha}) > A \left| \int_{\partial D_\alpha} f(z) \varphi(z) dz \right| \quad (\alpha < \alpha_1). \quad (2.6)$$

By a well-known result of J. L. Walsh [3, p. 80, 81] the polynomials of best approximation to $f(z)$ in K , $p_n(z)$, converge uniformly to $f(z)$ in $D_{\beta-\varepsilon}$ ($0 < \varepsilon < \beta$). By the two-constant theorem applied to the subharmonic function $\log |f(z) - p_n(z)|$ in $D_{\beta-\varepsilon} \setminus K$

$$\log |f(z) - p_n(z)| < \log E_n(f, K) \left(1 - \frac{k(z)}{\beta - \varepsilon} \right) \quad (n > n_0).$$

Therefore in $\overline{D_\alpha}$ with

$$\alpha \leq (\beta - \varepsilon) / |\log E_n(f)| = \alpha_2,$$

$$E_n(f, \overline{D_\alpha}) \leq \|f - p_n\|_{\overline{D_\alpha}} < e E_n(f).$$

Hence, using (2.6)

$$E_n(f) > A \left| \int_{\partial D_\alpha} f(z) \varphi(z) dz \right| \quad (\alpha \leq \alpha_2). \quad (2.7)$$

By the definition of β , $f(z)$ must have a singular point on ∂D_β . This can only happen for $f \in R$, if there are critical points of $k(z)$ on

∂D_β . D_β is the union of at most p disjoint regions Δ_v ($v=1, 2, \dots$), say. By our assumptions each critical point of $k(z)$ on ∂D_β is a common boundary point of exactly two Δ_v 's. There are no other points which belong to the boundary of more than one Δ_v . If z_0 is a critical point of $k(z)$, then there is exactly one line L through z_0 in the direction of steepest increase of k , namely the ξ -axis, in the notation of (1). Draw all such lines L through critical points on ∂D_β . For sufficiently small ϵ these lines divide $D_{\beta+\epsilon}$ into subregions Δ'_v ($v=1, 2, \dots$). Each Δ'_v contains one and only one Δ_v , and there are exactly two Δ'_v which have a given line L in common. If $f(z) = h_\mu(z)$, say, in Δ'_v , then we have, by Cauchy's Theorem,

$$\left| \int_{\partial D_\alpha} f(z) \varphi(z) dz \right| = \left| \sum_v \int_{\Delta'_v} h_\mu(z) \varphi(z) dz \right| \quad (\alpha < \beta). \quad (2.8)$$

On the level line $\partial D_{\beta+\epsilon}$ (of length $\leq A$)

$$|h_j(z)| < A \quad (j=1, 2, \dots, p) \text{ and } |\varphi(z)| < Ae^{-n(\beta+\epsilon)}.$$

Therefore

$$\left| \int_{\partial \Delta'_v \cap \partial D_{\beta+\epsilon}} h_\mu(z) \varphi(z) dz \right| < Ae^{-n(\beta+\epsilon)}. \quad (2.9)$$

The contribution to (2.8) of a line segment L through the critical point z_0 is

$$\int_L \{h_\mu(z) - h_\rho(z)\} \varphi(z) dz = J(L) \quad (2.10)$$

where $f = h_\mu$ and $f = h_\rho$, respectively, in the two Δ'_v having L as their common boundary. By (1), near z_0 , $k(z) + i\bar{k}(z)$, expressed in terms of $\zeta = \xi + i\eta$ has the form

$$k(z) + i\bar{k}(z) = \beta + i\bar{\beta} + c(\xi^2 - \eta^2 + 2i\xi\eta) + \text{higher order terms}.$$

In particular, on L

$$k(z) + i\bar{k}(z) = \beta + i\bar{\beta} + c\xi^2 + \text{higher order terms in } \xi.$$

Expanding in powers of ξ

$$h_\mu(z) - h_\rho(z) = b_s \xi^s + b_{s+1} \xi^{s+1} + \dots \quad (b_s \neq 0), \quad (2.11)$$

$$e^{\sum \lambda_j (\omega_j(z) + i\bar{\omega}_j(z))} = a_0 - a_1 \xi + \dots \quad (a_0 \neq 0).$$

Here the b 's are independent of n , the a 's depend on n (via the λ, s), but $|a_j| < A$, uniformly in n . Substituting these power series, the integral (2.10) takes the form

$$J(L) = e^{-L\gamma} \int_{-a}^b e^{-(n+2)\beta - L(n+2)\tilde{\beta} - (n+2)[c\xi^2 + \dots]} (a_0 b_s \xi^s + \dots) d\xi.$$

By applying Laplace's method [2, p. 78] to the integral $J(L)$,

$$J(L) = \begin{cases} e^{-L\gamma} C_s [(n+2)c]^{-\frac{s+1}{2}} e^{-(n+2)(\beta + i\tilde{\beta})} a_0 b_s + R(s \text{ even}) \\ R(s \text{ odd}) \end{cases} \quad (2.12)$$

where

$$|R| < A(n+2)^{-\frac{s+2}{2}} e^{-n\beta}.$$

Remembering the definition of a_0 we can write the leading term in (2.12)

$$e^{-L\gamma} C_s [(n+2)c]^{-\frac{s+1}{2}} e^{-n\beta} |\varphi(z_0) e^{n\beta}| b_s. \quad (2.13)$$

Since $|\varphi(z_0) e^{n\beta}|$ lies between two positive numbers independent of n , Theorem 1 follows from (2.12), if z_0 is the only critical point on ∂D_s and $s = 2q$ is even.

Suppose now that several critical points $z_1, z_2, \dots$ lie on ∂D_s , and suppose that the lowest power ξ^s occurring in the corresponding expansions (2.11) is ξ^s , s even.

Note that one can find a function $\psi(z)$, holomorphic and bounded in the complement K' of K , which satisfies

$$\psi(z_j) = e^{i\alpha_j} \quad (j = 1, 2, \dots, p-1; \alpha_j \text{ given, real}).$$

(E. g., if $w = \psi_k(z)$ maps the complement of I_p conformally onto $|w| < 1$, $\psi_k(z_k) = 0$, one can choose ψ of the form $\psi(z) = \sum_k \gamma_k \prod_{j \neq k} \psi_j(z)$).

If $\varphi(z)$ is replaced by $\varphi(z)\psi(z)$, the leading contribution of each z_j to (2.8) is obtained from those z_j for which $s_j = s$ and each such z_j contributes a leading term

$$C_s e^{-L\gamma_j} [(n+2)c(z_j)]^{-\frac{s+1}{2}} e^{-n\beta} (\varphi(z_j) e^{n\beta}) \psi(z_j) b_s(z_j).$$

By suitable choice of the $\psi(z_j)$ all these terms can be given equal argument, so that no cancellations between them are possible and Theorem 1 follows in this case with $q = \frac{1}{2}s$.

It remains to prove the Theorem in the case $s = \min s_j = \text{odd integer}$. Again we replace $\varphi(z)$ by $\varphi(z)\psi(z)$, but this time we choose $\psi(z)$ so that

$$\psi(z_j) = 0, \quad \psi'(z_j) = e^{i\alpha_j} \quad (z_j \in \partial D_s).$$

It is again easy to see that such a ψ exists, which is bounded and holomorphic in K' . The principal contributions to the new integral (2.8) are now of the form

$$C, \sum_j [(n+2)c(z_j)]^{-\frac{s+2}{2}} e^{-n\beta} (\bar{\tau}(z_j) e^{n\beta}) \psi'(z_j) b_s(z_j) e^{-\beta \tau(z_j)}$$

and cancellations between terms are impossible, if the $\psi'(z_j)$ are suitably chosen. This proves the Theorem with

$$q = \frac{1}{2} (s+1),$$

if s is odd.

3°. Proof of Theorem 2. Let $\varphi(z) = \varphi(z, n+2)$ be the function defined in the proof of Theorem 1. The function

$$\psi(z) = 1/\varphi(z, n)$$

is holomorphic in K' except for a pole at ∞ where

$$\psi(z) = Az^n + \text{lower powers of } z \quad (|z| \geq R). \quad (3.1)$$

Also

$$\bar{A}_1 e^{-na} < |\psi(z)| < A_2 e^{na} \quad (z \in \partial D_a; a > 0). \quad (3.2)$$

Let

$$q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (|z| < R).$$

By (3.1),

$$q(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \psi(\zeta) z^v \zeta^{-v-1} d\zeta = \text{polynomial of degree } n \text{ in } z.$$

For z outside $\bar{D}_a$, by the residue theorem,

$$q(z) - \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_a} \frac{\psi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

It follows from results of H. Widom [4, Lemma 11.2] that the integral on the right hand side of (3.1) is uniformly bounded for $z \in K'$ and all n . Therefore

$$|q(z) - \psi(z)| < A \quad (z \in K', n = 1, 2, \dots). \quad (3.3)$$

Consider now

$$p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_a} \frac{f(\zeta) (q(\zeta) - q(z))}{q(\zeta) (\zeta - z)} d\zeta$$

where a is so small that ∂D_a consists of p disjoint curves C_j each of which surrounds one I_j . Since $(q(\zeta) - q(z))/(\zeta - z)$ is a polynomial of degree $n-1$ in z , $p(z)$ is a polynomial of degree $n-1$. By Cauchy's formula

$$\begin{aligned} f(z) - p(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_a} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - p(z) = \frac{q(z)}{2\pi i} \int_{\partial D_a} \frac{f(\zeta) d\zeta}{q(\zeta) (\zeta - z)} = \\ &= \sum_{j=1}^p \frac{q(z)}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{h_j(\zeta) (\psi(\zeta) - q(\zeta)) d\zeta}{q(\zeta) \psi(\zeta) (\zeta - z)} + \frac{q(z)}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{h_j(\zeta) d\zeta}{\psi(\zeta) (\zeta - z)} \quad (z \in D_a). \end{aligned} \quad (3.4)$$

By (3.3) and (3.2), $q(z) \neq 0$ outside D_1 for $n > n_0(z)$. We can therefore deform the contours C_j into the contours $\partial\Delta_j$ used in the proof of Theorem 1. On $\partial\Delta_j$, $|\zeta - z| > A$, $|h_j(\zeta)| < A$. By (3.2) and (3.3)

$$|\psi(\zeta)| > A_1 e^{n\beta}, \quad |q(\zeta)| > A e^{n\beta}.$$

On the parts of $\partial\Delta_j$ which lie on ∂D_{j+1} ,

$$|\psi(\zeta)| > A_1 e^{n(\beta+s)}.$$

Therefore it is an easy consequence of (3.4) that

$$\begin{aligned} |f(z) - p(z)| &< \left\{ A e^{-2n\beta} + A e^{-n(\beta+s)} + \right. \\ &\left. + \sum_{z_0} \left| \frac{3}{2\pi} \int_L |h_{\mu}(\zeta) - h_{\nu}(\zeta)| \frac{d\zeta}{\psi(\zeta)(\zeta - z)} \right| \right\} |q(z)| \end{aligned} \quad (3.5)$$

where the summation is over all critical points z_0 lying on ∂D_j . Each integral is estimated by Laplace's method and yields a contribution which is less than

$$A n^{-\frac{s+1}{2}} e^{-n\beta} |q(z)| \quad (s \text{ even}) \quad (3.6)$$

and less than

$$A n^{-\frac{s+2}{2}} e^{-n\beta} |q(z)| \quad (s \text{ odd}). \quad (3.7)$$

By (3.2) and (3.3)

$$|q(z)| < A \quad (z \in \partial D_{1/n}) \quad (3.8)$$

and Theorem 2 follows from (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) and the maximum principle.

Վ. Գ. Ի. ՖՈՒԲՍ. Մի բանի կոմպոնենտներով բազմությունների վրա Ջերիչևյան մոտարկման աստիճանի մասին (ամփոփում)

Դիցուք K -ն կոմպակտ է C -ում $I_1, \dots, I_p$ միակապ կոմպոնենտներով ($2 < p < \infty$), f ֆունկցիան սահմանված է K -ի վրա հետևյալ հավասարություններով

$$f(z) = h_j(z), \quad j = 1, 2, \dots, p$$

($z \in I_j$, h_j -ն ամբողջ ֆունկցիա է):

Դիցուք k -ն $\overline{C} \setminus K$ -ի Գրինի ֆունկցիան է, անվերջ հոռու բևեռով:

Եթե h_j ֆունկցիաներից գոնե երկուսը տարբեր են, ապա գոյություն ունի այնպիսի β ($0 < \beta < \infty$), որ f -ը թույլ է տալիս անալիտիկ շարունակություն մինչև $D_\beta = \{z | k(z) < \beta\}$, բայց ոչ D_α , երբ $\alpha > \beta$.

Ապացուցված է, որ K -ի և f -ի վրա որոշ պայմանների դեպքում տեղի ունի

$$A_1 n^{q-\frac{1}{2}} e^{-\beta n} < E_n(f) = \inf_p \sup_{z \in K} |f(z) - p(z)| < A_2 n^{q-\frac{1}{2}} e^{-\beta n}$$

գնահատականը, որտեղ p -ն n -ից ոչ բարձր կարգի բազմանդամ է, $q = q(f)$ որոշ ոչ բացասական հաստատուն է, իսկ A_1, A_2 -ը n -ից անկախ հաստատուններ են:

В. Г. И. ФУКС. О степени Чебышевской аппроксимации на множествах несколькими компонентами (резюме)

Пусть K -компакт в C с p односвязными компонентами $I_1, \dots, I_p$ ($2 < p < \infty$).
 Функция f определена на K равенствами $f(z) = h_j(z)$ ($z \in I_j$, h_j — целая функция) $j = 1, 2, \dots, p$.

Функция k — функция Грина для $\overline{C \setminus K}$ с полюсом в бесконечности.
 Если хотя бы две из функций h_j различны, то существует такое β ($0 < \beta < \infty$), что f позволяет аналитическое продолжение в $D_\beta = \{z | k(z) < \beta\}$, но не в D_α при $\alpha > \beta$.

Доказывается, что при некоторых условиях на K и f имеет место оценка

$$A_1 n^{-q-\frac{1}{2}} e^{-\beta n} < E_n(f) = \inf_p \sup_{z \in K} |f(z) - p(z)| < A_2 n^{-q-\frac{1}{2}} e^{-\beta n},$$

где p — полином степени не выше n , $q = q(f)$ — некоторая неотрицательная константа, A_1, A_2 — константы, не зависящие от n .

Cornell University Ithaca, New York

Received 20.VIII.1978

B I B L I O G R A P H Y

1. R. Nevanlinna. Eindeutige Analytische Funktionen, 2nd edition, Springer, Berlin, 1953.
2. G. Pólya and Szegő. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I, Springer, 1926.
3. J. L. Walsh. Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, 2nd edition, Am. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. 2, 1935.
4. H. Widom. Extremal Polynomials Associated with a System of Curves in the Complex Plane, Advances in Math., 3, 1969, 127—232.

Ф. А. ШАМОЯН

ФАКТОРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА М. М. ДЖРБАШЯНА И ХАРАКТЕРИСТИКА НУЛЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С МАЖОРАНТОЙ КОНЕЧНОГО РОСТА

Введение

1. Пусть U — единичный круг на комплексной плоскости. Следуя М. М. Джрбашяну (см. [1], [2]) обозначим через A_α^+ , ($\alpha > -1$) класс аналитических в круге U функций f , для которых

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^\alpha \ln^+ |f(re^{i\theta})| r dr d\theta < +\infty.$$

В работах [1], [2] была установлена каноническая факторизация классов A_α^+ . А именно, была доказана следующая основная

Теорема А. Если $f \in A_\alpha^+$, ($\alpha > -1$), $f(0) = 1$ и $\{z_k\}_1^{+\infty}$ — множество нулей функции f , то

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \quad (0.1)$$

Функция f допускает следующую факторизацию:

$$f(z) = \pi_\alpha^f \exp \left\{ \frac{\alpha+2}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \ln |f(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \right\}, \quad z \in U, \quad (0.2)$$

где

$$\pi_\alpha^f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \left\{ -\frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z(1-\rho^2)^\alpha \ln \left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}\right|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \right\}, \quad (0.3)$$

причем при условии (0.1) бесконечное произведение π_α^f равномерно сходится внутри U .

Как особо было отмечено в указанных работах [1] и [2], при целых α , $\alpha = p$, произведение π_p^f принимает следующий простой вид:

$$\pi_p^f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z_k}z}\right) \exp \left\{ \sum_{j=0}^p \frac{1}{j+1} \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z_k}z}\right)^{j+1} \right\}. \quad (0.3')$$

Нетрудно видеть, что факторы произведения (0.3) элементарно получаются из факторов Бляшке вида $\frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k}z}$ по аналогии с извест-

ными факторами Вейерштрасса. Именно таким образом произведения вида (0.3) были введены в работе Цудзи [3], десять лет спустя, после того, как М. М. Джрбашьяном были открыты произведения π_a для всех a , $(-1 < a < +\infty)$. Несмотря на это, в ряде работ произведения π'_a были приписаны Цудзи и другим авторам (см., например, [4]).

В дальнейшем для удобства введем следующие обозначения:

$$g'_a(z) = \frac{a+1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^a \ln |f(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{a+2}}, \quad z \in U,$$

$$U_a(z, \zeta) = \frac{2(a+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^a \ln \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \right| \rho d\rho d\theta}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{a+2}}, \quad \zeta, z \in U, \zeta \neq 0.$$

Таким образом, согласно теореме А любая функция $f \in A'_a$, $(-1 < a < +\infty)$ допускает представление

$$f(z) = \pi'_a \exp \{g'_a(z)\}. \quad (0.2')$$

В связи с этим, естественно, возникает следующий вопрос: Пусть $f \in A'_a$, и таким образом, f допускает представление (0.2'). Принадлежат ли сомножители π'_a и $\exp \{g'_a\}$ классу A'_a ? Здесь мы докажем, что в общем случае π'_a и $\exp \{g'_a\}$ могут не принадлежать классу A'_a и найдем достаточное условие, налагаемое на нули функций f , для того, чтобы π'_a и $\exp \{g'_a\}$ принадлежали этому классу. Указанное условие, когда нули находятся внутри угла раствора меньшего π , оказывается и необходимым. Одновременно доказывается, что если $f \in A'_a$ и $\alpha_0 > a$, то π'_{α_0} , $\exp \{g'_{\alpha_0}\}$ принадлежат классу A'_{α_0} .

Следовательно, чтобы обеспечить принадлежность факторизационных сомножителей к классу A'_a , достаточно увеличить параметр a .

В § 2 изучается аналогичный вопрос относительно классов

$$X_{\varphi}^{\infty} = \left\{ f: |f(z)|^{\varphi} \leq \exp \left\{ C_{\varphi} \varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right) \right\} \right\},$$

где φ — неотрицательная, монотонно растущая функция на $R_+ = (0, +\infty)$

Здесь же при помощи факторизации (0.2) дается полная характеристика нулей функций класса X_{φ}^{∞} , при некоторых естественных ограничениях, налагаемых на рост функции φ .

§ 1. О произведениях М. М. Джрбашьяна

В этом параграфе мы получим условия на последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset U'$, при которых бесконечное произведение π_a с нулями $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ принадлежит классу A'_a .

Сначала докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. Пусть задана последовательность $\{z_k\}_1^\infty \subset U$, тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Если

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty, \quad (\alpha > -1),$$

то произведение π_α с нулями $\{z_k\}_1^\infty$ для любого $\alpha_0 > \alpha$ принадлежит классу $A_{\alpha_0}^*$.

2. Если же

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} \ln \frac{1}{1 - |z_k|} < +\infty \quad (\alpha > -1),$$

то π_α принадлежит A_α^* .

Замечание. Отметим, что утверждение 1° теоремы 1.1 вместе с теоремой А дает полную характеристику нулей функций класса A_α^* , $\alpha > -1$.

Доказательству теоремы 1.1 предположим следующие леммы.

Лемма 1.1. (М. М. Джрбашян [2]).

Пусть $\alpha > 0$, $z, \zeta \in U$, $\zeta \neq 0$, тогда, во-первых, имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$U_\alpha(z, \zeta) = U_{\alpha-1}(z, \zeta) - \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right)^{\alpha+1}, \quad (1.1)$$

и, во-вторых, при $|z| < |\zeta|$ справедливо представление

$$\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{-U_\alpha(z, \zeta)\} = \exp\left\{-\int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} \frac{dt}{t}\right\}. \quad (1.2)$$

Лемма 1.2. Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty \subset U$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty \quad (\alpha > -1).$$

Тогда для произведения π_α с нулями в точках $\{z_k\}_1^\infty$ имеет место следующая оценка:

$$\ln |\pi_\alpha(z)| \leq \text{const} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1 - |z_k|)^{\alpha+2}}{|1 - \bar{z}_k z|^{\alpha+2}}, \quad z \in U. \quad (1.3)$$

Доказательство. Для установления оценки (1.3) достаточно получить аналогичную оценку для одного фактора, т. е. для выражения

$$I(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{-U_\alpha(z, \zeta)\}, \quad z, \zeta \in U, \quad \zeta \neq 0.$$

С этой целью воспользуемся выше указанной леммой М. М. Джрбашяна, согласно которой, при $|z| < |\zeta|$

$$I(z, \zeta) = \exp \left\{ - \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} \frac{dt}{t} \right\}.$$

Но так как последний интеграл является аналитической функцией от вне отрезка

$$l_\zeta = \left\{ z: \arg z = \arg \zeta, |\zeta| \leq |z| \leq \frac{1}{|\zeta|} \right\},$$

то равенство (1.2) имеет место в области $U \setminus l_\zeta$.

Легко видеть, что

$$\left| \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} \frac{dt}{t} \right| \leq \frac{|z|^\alpha}{|\zeta|^2} \left| \frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right|^{\alpha+2} \left\{ \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\tau^{\alpha+2} d\tau}{\left| \frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z} + \frac{\tau z (1-|\zeta|^2)}{1-\bar{\zeta}z} \right|^{\alpha+2}} \right\},$$

откуда при условии

$$\left| \frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right| \leq \frac{1}{8} \quad (1.4)$$

будем иметь

$$\left| \frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z} \right|^2 = 1 - \frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{\zeta}z|^2} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, знаменатель подынтегрального выражения можно оценить следующим образом:

$$\left| \frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z} - \frac{\tau z (1-|\zeta|^2)}{1-\bar{\zeta}z} \right| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4\sqrt{3}-1}{8}.$$

Итак

$$\left| \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} \frac{dt}{t} \right| \leq \frac{\text{const}}{|\zeta|^2} \left| \frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right|^{\alpha+2}. \quad (1.5)$$

Теперь предположим, что

$$\left| \frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right| \geq \frac{1}{8}. \quad (1.6)$$

Обозначим через $\beta = \alpha - [\alpha]$, где $[\alpha]$ — целая часть α . Тогда снова используя вышеуказанную лемму М. М. Джрбашяна, получим

$$I(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \{ -U_{\beta-1}(z, \zeta) + O(1) \} = \\ = \exp \left\{ - \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\beta+1}} \frac{dt}{t} + O(1) \right\}.$$

Так как для целых α оценка (1.3) следует из известных оценок произведений такого типа (см. [5], стр. 75), то будем предполагать, что $\beta = \alpha - [\alpha] \neq 0$. Оценим интеграл

$$I_1 = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\beta+1}} \frac{dt}{t}.$$

Сначала убедимся, что при условии (1.6)

$$I_1 = \frac{z}{\zeta} \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\beta+1}} d\zeta + O(1).$$

Действительно, мы имеем

$$I_1 - \frac{z}{\zeta} \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\beta+1}} dt = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^\beta} \frac{dt}{t} = O(1).$$

Поэтому достаточно оценить интеграл

$$I_2 = \frac{z}{\zeta} \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\beta+1}} dt.$$

Но интегрированием по частям будем иметь

$$I_2 = \frac{-1}{\beta} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right)^\beta + \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\beta-1}}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^\beta} dt.$$

Далее, положив $\frac{1-t}{\zeta - z} = u$, получим

$$I_2 = \frac{-1}{\beta} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right)^\beta + \left(\frac{\zeta}{z} \right)^\beta \int_0^{\frac{z(1-|\zeta|^2)}{\zeta - z}} \frac{u^{\beta-1}}{(1+u)^\beta} du,$$

откуда очевидно, что при

$$\left| \frac{z(1-|\zeta|^2)}{\zeta - z} \right| \leq 3 \text{ имеем } |I_2| \leq \text{const.}$$

Поэтому дальше будем предполагать, что

$$\left| \frac{z(1-|\zeta|^2)}{\zeta-z} \right| \geq 3.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\frac{\zeta}{z} \right)^\beta \int_u^3 \frac{u^{\beta-1}}{(1+u)^\beta} du + \frac{-1}{\beta} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^\beta + \\ &\quad + \left(\frac{\zeta}{z} \right)^\beta \int_3^{\frac{z(1-|\zeta|^2)}{\zeta-z}} \frac{u^{\beta-1}}{(1+u)^\beta} du = \\ &= \left(\frac{\zeta}{z} \right)^\beta \int_3^{\frac{z(1-|\zeta|^2)}{\zeta-z}} \left(1 + \frac{1}{1+u} \right)^\beta \frac{du}{u} + O(1). \end{aligned}$$

Учитывая разложение

$$(1-v)^\beta = 1 - \beta v + \beta(\beta-1)v^2 + O(v^3), \quad |v| < \frac{1}{2},$$

получим, что при условии (1.6)

$$I_2 = \left(\frac{\zeta}{z} \right)^\beta \ln \left(\frac{1-|\zeta|^2}{\zeta-z} \right) z + O(1), \quad z \in l; \quad |\zeta|, |z| \geq |\zeta_1|.$$

Итак, при условии (1.6)

$$\left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) \exp \{-U_\alpha(z, \zeta)\} = \exp \left\{ - \left(\frac{\zeta}{z} \right)^\beta \ln \left(\frac{1-|\zeta|^2}{\zeta-z} \right) z + O(1) \right\}, \quad z \in l;$$

или

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) \exp \{-U_\alpha(z, \zeta)\} \right| &\leq \frac{|\zeta-z|}{(1-|\zeta|^2)} \times \\ &\times \exp \left\{ \left| \frac{\zeta^\beta - z^\beta}{z^\beta} \right| \ln \left| \frac{1-|\zeta|^2}{\zeta-z} \right| + O(1) \right\}. \end{aligned}$$

Однако, ввиду (1.6)

$$\left| \frac{\zeta-z}{1-|\zeta|^2} \right| \leq 8 \left| \frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z} \right| \leq 8,$$

и мы имеем

$$\left| \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) \exp \{-U_\alpha(z, \zeta)\} \right| \leq \exp \left\{ C_0 \left(|\zeta-z| \ln \frac{1}{|\zeta-z|} + 1 \right) \right\}$$

при условии, что $|z|, |\zeta| \geq |\zeta_1| > 0$.

Объединяя все эти оценки и учитывая (1.6), приходим к неравенству

$$\left| \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) \exp \{ - U_a(z, \zeta) \} \right| \leq \exp \left\{ \text{const} \left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right|^{a+2} \right\}, \quad z \in U, \quad (1.7)$$

которое справедливо для всех $|\zeta| \geq |\zeta_1| = |z_1| > 0$. ●

Доказательство теоремы 1.1.

1°) Пусть $\alpha_0 > \alpha$, тогда, учитывая оценку (1.3), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \rho^2)^{\alpha} \ln |\pi_{\alpha_0}(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta \leq \\ & \leq \text{const} \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha_0+2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - \rho^2)^{\alpha} \rho d\rho d\theta}{|1 - z_k \rho e^{-i\theta}|^{\alpha_0+2}}, \end{aligned}$$

Но для внутреннего интеграла легко получить следующую оценку:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1 - z_k \rho e^{-i\theta}|^{\alpha_0+2}} \leq \left(\frac{\pi^{\alpha_0+1}}{\alpha_0+1} + 1 \right) \frac{1}{(1 - \rho |z_k|)^{\alpha_0+1}}, \quad (1.8)$$

и поэтому

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - \rho^2)^{\alpha} \rho d\rho d\theta}{|1 - z_k \rho e^{-i\theta}|^{\alpha_0+2}} \leq \text{const} \int_0^1 \frac{(1 - \rho^2)^{\alpha} d\rho}{(1 - \rho |z_k|)^{\alpha_0+1}} \leq \frac{\text{const}}{(1 - |z_k|)^{\alpha_0-\alpha}},$$

так как $\alpha_0 > \alpha$. Пользуясь этой же оценкой, получим

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \rho^2)^{\alpha} \ln^+ |\pi_{\alpha_0}(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta \leq \text{const} \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty.$$

2°) Проверяется аналогичным образом, так как в этом случае

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \rho^2)^{\alpha} \ln^+ |\pi_{\alpha}(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta \leq \\ & \leq \text{const} \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} \int_0^1 \frac{(1 - \rho^2)^{\alpha}}{(1 - \rho |z_k|)^{\alpha+1}} d\rho \leq \\ & \leq \text{const} \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} \ln \frac{1}{1 - |z_k|} < +\infty. \quad \bullet \end{aligned}$$

Теорема 1.2. Пусть точки $|z_k|_1^{\infty} \subset I$ лежат внутри некоторого угла с вершиной на ∂U и раствором, меньшим, чем π . Если

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} \ln \frac{1}{1 - |z_k|} = +\infty, \quad (-1 < \alpha < +\infty),$$

то произведение π_α с нулями $\{z_k\}_1^{+\infty}$ не принадлежит классу A_α° .

Доказательству теоремы предположим следующую элементарную лемму.

Лемма 1.3. Пусть $-1 < \alpha < +\infty$ и $|\varphi| < \frac{\pi}{4(\alpha+2)}$. Тогда при всех $t, \rho \in (0,1)$ справедлива оценка

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1-t}{\rho t} + e^{-i\varphi} \right)^{\alpha+2} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Доказательство. Обозначая $\frac{1-t}{\rho t} + e^{-i\varphi} = r e^{i\theta}$, легко видеть, что в условиях леммы $r \geq 1$. Но так как

$$|\sin \theta| = \frac{|\sin \varphi|}{r}, \quad \text{то} \quad |\sin \theta| \leq |\sin \varphi|.$$

Ввиду того, что $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, можем утверждать, что $|\theta| < |\varphi|$. Поэтому

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1-t}{\rho t} + e^{-i\varphi} \right)^{\alpha+2} = \operatorname{Re} (r^{\alpha+2} e^{i(\alpha+2)\theta}) =$$

$$= r^{\alpha+2} \cos (\alpha+2)\theta \geq r^{\alpha+2} \cos (\alpha+2)\varphi \geq r^{\alpha+2} \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \bullet$$

Доказательство теоремы 1.2. Отметим, что случай, когда $\{z_k\}_1^\infty \subset U$ находятся внутри угла, по существу не отличается от случая, когда все $\{z_k\}_1^\infty$ находятся на некотором радиусе. Нужно только изменить область интегрирования. Поэтому будем предполагать, что они находятся на одном радиусе, и не ограничивая общности, будем предполагать, что $z_k \in (0,1)$, $k=1, \dots$. Докажем, что отношение

$$g_\alpha(z) = \frac{\pi_{\alpha+1}(z)}{\pi_\alpha(z)}$$

не принадлежит классу A_α° , отсюда ввиду теоремы 1.2 получим, что π_α не принадлежит классу A_α° . Действительно, согласно лемме 1.2 имеем

$$g_\alpha(z) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right)^{\alpha+2} \right\},$$

поэтому в предположениях теоремы имеет место формула

$$\ln \left| \frac{\pi_{x+1}(z)}{\pi_x(z)} \right| = \ln |g_x(z)| = \operatorname{Re} \int_0^1 \frac{(1-t)^{x+2} dn(t)}{(1-\bar{t}z)^{x+2}}, \quad (1.10)$$

где $n(t)$ — число точек $\{z_k\}$ в круге $|z| \leq t$. Введя в рассмотрение круг

$$K = \left\{ z: \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \right\},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^x \ln^+ |g_x(re^{i\theta})| r dr d\theta \geq \\ & \geq \int_K \int (1-r^2)^x \ln^+ |g(re^{i\theta})| r dr d\theta. \end{aligned}$$

Оценим последний интеграл снизу.

Очевидно, что если $1-z = \rho e^{i\theta}$, то K будет совпадать с множеством тех $\rho e^{i\theta}$, для которых $\rho \leq \cos \theta$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Тогда очевидно

$$\begin{aligned} I &= \int_K \int (1-r^2)^x \ln^+ |g_x(re^{i\theta})| r dr d\theta = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} (1-|\rho e^{i\theta}|^2)^x \ln^+ |g_x(1-\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Далее из (1.10) вытекает, что

$$\ln |g_x(z)| = \int_0^1 \frac{(1-t)^{x+2} \operatorname{Re} (1-tre^{-i\theta})^{x+2}}{|1-tz|^{2(x+2)}} dn(t), \quad z = re^{i\theta}.$$

Теперь оценим $\operatorname{Re} (1-tre^{-i\theta})^{x+2}$ снизу.

Сначала убедимся, что $\operatorname{Re} (1-tre^{-i\theta})^{x+2} > 0$ при $|\theta| < \frac{\pi}{4(x+2)}$.

В самом деле, при $z = 1 - \rho e^{i\theta}$

$$\operatorname{Re} (1-tre^{-i\theta})^{x+2} = \operatorname{Re} (1-t + t(1-z))^{x+2} = \operatorname{Re} (1-t + t\rho e^{-i\theta})^{x+2}.$$

Следовательно

$$\operatorname{Re} (1-tre^{-i\theta})^{x+2} = (\rho t)^{x+2} \operatorname{Re} \left(\frac{1-t}{\rho t} + e^{-i\theta} \right)^{x+2}$$

и в силу леммы 1.3

$$\operatorname{Re} (1-tre^{-i\theta})^{x+2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} (\rho t)^{x+2}.$$

Поэтому при $|\varphi| < \frac{\pi}{4(\alpha+2)}$ имеем

$$\begin{aligned} \ln^+ |g_\alpha(re^{i\varphi})| &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+2} \operatorname{Re}(1-tre^{-i\varphi})^{\alpha+2}}{|1-tre^{-i\varphi}|^{2(\alpha+2)}} dn(t) \geq \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \rho^{\alpha+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+2} t^{\alpha+2}}{|1-t+tp e^{i\theta}|^{2(\alpha+2)}} dn(t); \quad 1-re^{i\varphi} = \rho e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Итак, ввиду того, что $|\theta| < |\varphi|$ (см. лемму 1.3), имеем

$$\begin{aligned} &\iint_K (1-r^2)^\alpha \ln^+ |g_\alpha(re^{i\varphi})| r dr d\varphi \geq \\ &\geq \int_{-\frac{\pi}{4(\alpha+2)}}^{\frac{\pi}{4(\alpha+2)}} \int_0^{\cos \theta} (1-|1-\rho e^{i\theta}|^2)^\alpha \ln^+ |g_\alpha(1-\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta \geq \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+2} t^{\alpha+2} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{4(\alpha+2)}}^{\frac{\pi}{4(\alpha+2)}} \int_0^{\cos \theta} \frac{(1-|1-\rho e^{i\theta}|^2)^\alpha \rho^{\alpha+3}}{|1-t+tp e^{i\theta}|^{2(\alpha+2)}} d\rho d\theta \right\} dn(t), \end{aligned}$$

а, как легко видеть, интеграл в скобках равен

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4(\alpha+2)}} \int_0^{\cos \theta} \frac{(1-|1-\rho e^{i\theta}|^2)^\alpha \rho^{\alpha+3}}{|1-t+tp e^{i\theta}|^{2(\alpha+2)}} d\rho d\theta.$$

Наконец, оценим подынтегральное выражение, имея ввиду, что

$$1-|1-\rho e^{i\theta}|^2 = \rho(2 \cos \theta - \rho) \geq \rho \cos \theta$$

и что

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4(\alpha+2)}, \quad \cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1-|1-\rho e^{i\theta}|^2 \geq \frac{\rho \sqrt{2}}{2}.$$

Учитывая эти неравенства и то, что под интегралом стоят неотрицательные функции, получим

$$I \geq \sqrt{2} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+2} t^{\alpha+2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4(\alpha+2)}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\rho^{2\alpha+3} d\rho d\theta}{[(1-t)^2 + 2t\rho \cos \theta + t^2]^{\alpha+2}} \right\} dn(t).$$

Последний интеграл, в свою очередь, больше, чем

$$\sqrt{2} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+2} t^{\alpha+2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4(\alpha+2)}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\rho^{2\alpha+3} d\rho d\theta}{[(1-t)^2 + 2t\rho + \rho^2 t^2]^{\alpha+2}} \right\} dn(t).$$

Но имея ввиду, что

$$(1-t)^2 + 2tp + t^2p^2 \geq (1-t+tp)^2,$$

приходим к неравенству

$$I \geq \frac{\sqrt{2}}{4(\alpha+2)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+2} t^{\alpha+2} \left\{ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\rho^{2\alpha+3}}{[(1-t)+\rho t]^{2(\alpha+2)}} d\rho \right\} dn(t).$$

Снова используя неотрицательность подынтегральных функций, получим

$$I \geq \frac{\pi \sqrt{2}}{4(\alpha+2)2^{\alpha+2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha+2} \left\{ \int_{1-t}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\rho^{2\alpha+3} d\rho}{[\rho(1+t)]^{2(\alpha+2)}} \right\} dn(t)$$

или

$$\begin{aligned} I &\geq \frac{\pi \sqrt{2}}{4^{2(\alpha+2)}(\alpha+2)} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha+2} \left\{ \int_{1-t}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{d\rho}{\rho} \right\} dn(t) = \\ &= \frac{\pi \sqrt{2}}{(\alpha+2)(16)^{\alpha+2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha+2} \left\{ \ln \frac{1}{1-t} - \ln 2 \right\} dn(t), \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^{\alpha} \ln^+ |g_{\alpha}(re^{i\varphi})| r dr d\varphi \geq C(\alpha) \sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} \ln \frac{1}{1-|z_k|},$$

где $C(\alpha)$ — положительное число, зависящее только от α . ■

Замечание 1.2. Из доказательства теоремы 1.2 следует, что в ее предположениях имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^{\alpha} \ln^+ |\pi_{\alpha}(re^{i\theta})| r dr d\theta \geq \\ &\geq C(\alpha) \sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} \ln \frac{1}{1-|z_k|}, \end{aligned}$$

где $C(\alpha)$ — некоторая постоянная.

§ 2. Характеристика нулей и некоторые свойства факторизации функций класса X_φ^-

Сначала напомним определение класса X_φ^- . Обозначим через $H(U)$ множество всех аналитических в U функций. Тогда

$$X_\varphi^- = \left\{ f \in H(U) : |f(z)| \leq \exp C_\varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right) \right\}.$$

В этом параграфе мы получим характеристику нулей функций класса X_φ^- при условии, что $1^\circ \varphi(x)$ — монотонно возрастающая неотрицательная функция на $R_+ = (0, +\infty)$ и

2°. Для чисел

$$\beta_\varphi = \liminf \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \alpha_\varphi = \overline{\lim} \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

выполняются неравенства

$$1 < \beta_\varphi, \alpha_\varphi < +\infty. \quad (2.1)$$

Пусть

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^k} < |z| \leq 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{\pi l}{2^k} < \arg z \leq \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\}, \\ -2^k \leq l \leq 2^k - 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.2. Пусть φ удовлетворяет вышеуказанным условиям, тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Если $f \in X_\varphi^-$, $f(0) = 1$, то число нулей функции f в каждом прямоугольнике (2.2) не превосходит $\text{const } \varphi(2^k)$;

2°. Обратно, пусть $0 < \beta_\varphi, \alpha_\varphi < +\infty$ и $\{z_k\}_1^\infty \subset U$ — любая последовательность точек, число которых в каждом прямоугольнике $\Delta_{k,l}$ не превосходит $\text{const } \varphi(2^k)$. Тогда произведение π_a с нулями $\{z_k\}_1^\infty$ принадлежит классу X_φ^- для всех $a > \alpha_\varphi + 1$.

Доказательству теоремы предположим следующую лемму, которая установлена в [6], но для полноты изложения приведем основные этапы ее доказательства.

Лемма 2.1. Пусть $\varphi(x) \geq 0$ — монотонно растущая функция на R_+ и

$$\alpha_\varphi = \overline{\lim} \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} < +\infty.$$

Тогда для любого $a > \alpha_\varphi$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{z \in \Delta_{k,l}} \left| \varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right) \frac{(1-|z|)^{a+2}}{|1-\overline{w}z|^{a+2}} \right| \leq \\ \leq \text{const} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \frac{(1-\rho^2)^2 \rho d\rho d\theta}{|1-w\rho e^{-i\theta}|^{a+2}}.$$

Доказательство. Пусть $0 < \eta < 1$ и $z \in U$. Введем в рассмотрение круг

$$K_\eta(z) = \{\zeta: |\zeta - z| < \eta(1 - |z|)\}.$$

Легко заметить справедливость следующего неравенства:

$$\frac{(1 - |z|)^{a+2}}{|1 - \bar{w}z|^{a+2}} \leq \frac{(1 + \eta)^{a+2}}{(1 - \eta)^2} \int \int_{K_\eta(z)} \frac{(1 - |\zeta|)^a}{|1 - \bar{\zeta}z|^{a+2}} d\sigma(\zeta),$$

где $d\sigma$ — плоская мера Лебега. Учитывая, что при $\zeta \in K_\eta(z)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{1 - |z|} \leq \frac{1}{1 - \eta} \frac{1}{1 - |\zeta|}$$

и используя тот факт, что

$$\varphi(cu) \leq c^2 \varphi(u), \quad u \geq 1,$$

мы приходим к неравенствам:

$$\varphi\left(\frac{1}{1 - |z|}\right) \leq \varphi\left(\frac{1}{(1 - \eta)(1 - |\zeta|)}\right) \leq \frac{1}{(1 - \eta)^2} \varphi\left(\frac{1}{1 - |\zeta|}\right), \quad \zeta \in K_\eta(z).$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{1 - |z|}\right) \frac{(1 - |z|)^{a+2}}{|1 - \bar{w}z|^{a+2}} &\leq \frac{(1 + \eta)^{a+2}}{(1 - \eta)^2} \varphi\left(\frac{1}{1 - |z|}\right) \int \int_{K_\eta(z)} \frac{(1 - |\zeta|)^a}{|1 - \bar{w}\zeta|^{a+2}} d\sigma(\zeta) \\ &\leq \frac{(1 + \eta)^{a+2}}{(1 - \eta)^{a+2}} \int \int_{K_\eta(z)} \varphi\left(\frac{1}{1 - |\zeta|}\right) \frac{(1 - |\zeta|)^a}{|1 - \bar{w}\zeta|^{a+2}} d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Чтобы завершить доказательство леммы, остается покрыть прямоугольники (2.2) кружками $K_\eta(z)$ (подробнее см. [6]). ●

Доказательство теоремы 2.1.

1°. Пусть $f \in X_{\frac{1}{2}}^+$, обозначим через $n_f(z_0)$ число нулей функции f в круге $K_{\frac{1}{2}}(z_0)$. Для доказательства первого пункта теоремы используем следующую формулу Хеймана-Линдена (см. [4]):

$$\begin{aligned} n_f(z_0) &\leq \frac{C(\beta)}{(1 - R)^\beta} \left\{ \int_0^R (1 - t)^{\beta-1} \left(\max_{|z|=t} |f(z)| + 1 \right) dt \right\}, \\ 1 &< \beta < 2, \quad |z_0| < R < 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Положим $R = \frac{1 + r_0}{2}$, $r_0 = |z_0|$ и учтем тот факт, что

$$\beta_\varphi = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \varphi'(x)}{\varphi(x)} > 1.$$

Тогда подбирая β и $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы

$$\beta_\varepsilon > \beta + \varepsilon > 1,$$

мы получим

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} > \frac{\beta + \varepsilon}{x}, \quad x \geq x_0. \quad (2.4)$$

Но так как при $x \leq x_0$ можно задать функцию φ произвольно, то можно предположить, что неравенство (2.4) выполняется всюду в R . Проинтегрировав неравенство (2.4) по интервалу (x_0, x) , получим

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \geq \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\beta+\varepsilon} \quad (2.5)$$

для произвольных x_0, x ($x \geq x_0$).

Теперь займемся упрощением неравенства (2.3). Во-первых, отметим, что

$$n_f(z_0) \leq \frac{C(\beta)2^\beta}{(1-r_0)^\beta} \left\{ \int_0^{\frac{1+r_0}{2}} (1-t)^{\beta-1} \varphi\left(\frac{1}{1-t}\right) dt + 1 \right\},$$

откуда заменой переменной $\frac{1-r_0}{1-t} = u$ получим

$$n_f(z_0) \leq C_1(\beta) \left\{ \int_{1-r_0}^2 \varphi\left(\frac{u}{1-r_0}\right) \frac{du}{u^{1+\beta}} + \frac{1}{(1-r_0)^\beta} \right\}.$$

Пусть

$$I = \int_{1-r_0}^2 \varphi\left(\frac{u}{1-r_0}\right) \frac{du}{u^{1+\beta}}.$$

Тогда, положив в (2.5) $x = \frac{1}{1-r_0}$; и $x_0 = \frac{u}{1-r_0}$ при $0 < u \leq 1$ приходим к неравенствам

$$I \leq \varphi\left(\frac{1}{1-r_0}\right) \int_{1-r_0}^1 u^{\beta-1} du + 2^{2\varphi} \varphi\left(\frac{1}{1-r_0}\right)$$

или

$$I \leq \varphi\left(\frac{1}{1-r_0}\right) \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + 2^{2\varphi} - 1 \right\}.$$

Вновь пользуясь неравенством (2.5), получим

$$n_f(z_0) \leq C(\varepsilon, \beta z_0) \varphi\left(\frac{1}{1-|z_0|}\right).$$

Отсюда следует первый пункт теоремы, так как каждый прямоугольник $\Delta_{k,l}$ можно покрыть конечным числом кружков вида $K_{\frac{1}{2}}(z_0)$.

2°. Пусть $\alpha > \alpha_0 + 1$, тогда очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty.$$

Докажем, что бесконечное произведение π_α с нулями $|z_k|_1^-$ принадлежит классу X_α^- . Используем лемму 1.2, согласно которой

$$\begin{aligned} \ln |\pi_\alpha(z)| &\leq \text{const} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right|^{\alpha+2} = \\ &= \text{const} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-2^k-1}^{2^k-1} \sum_{z_j \in \Delta_{k,l}} \frac{(1 - |z_j|^2)^{\alpha+2}}{|1 - \bar{z}_j z|^{\alpha+2}}. \end{aligned}$$

Однако, по условию теоремы

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-2^k-1}^{2^k-1} \sum_{z_j \in \Delta_{k,l}} \left| \frac{1 - |z_j|^2}{1 - \bar{z}_j z} \right|^{\alpha+2} \leq \\ &\leq \text{const} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-2^k-1}^{2^k-1} \max_{t \in \Delta_{k,l}} \left\{ \varphi \left(\frac{1}{1 - |t|} \right) \frac{(1 - |t|^2)^{\alpha+2}}{|1 - \bar{t} z|^{\alpha+2}} \right\} \leq \\ &\leq \text{const} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) \frac{(1 - \rho^2)^\alpha}{|1 - z \rho e^{-i\theta}|^{\alpha+2}} d\rho d\theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Чтобы завершить доказательство теоремы нужно оценить последний интеграл. Учитывая (1.8), имеем

$$\begin{aligned} I &\leq \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) \frac{(1 - \rho^2)^\alpha \rho d\rho d\theta}{|1 - z \rho e^{-i\theta}|^{\alpha+2}} \leq \\ &\leq \text{const} \int_0^1 \varphi \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) \frac{(1 - \rho^2)^\alpha}{(1 - \rho |z|)^{\alpha+1}} d\rho \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} I &\leq \left\{ \int_0^{|z|} \varphi \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) \frac{(1 - \rho^2)^\alpha}{(1 - |z| \rho)^{\alpha+1}} d\rho + \right. \\ &\left. + \int_{|z|}^1 \varphi \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) \frac{(1 - \rho^2)^\alpha}{(1 - |z| \rho)^{\alpha+1}} d\rho \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{const} (I_1 + I_2). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$I_1 \leq \text{const} \int_0^{|z|} \varphi \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \frac{d\rho}{\rho}.$$

Далее, положив $\frac{1-|z|}{1-\rho} = u$, получим

$$I_1 \leq \text{const} \int_{1-|z|}^1 \varphi \left(\frac{u}{1-|z|} \right) \frac{du}{u}.$$

Заметим теперь, что ввиду условия

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \varphi'(x)}{\varphi(x)} > \varepsilon > 0$$

имеем

$$\varphi \left(\frac{u}{1-r} \right) \leq u^\varepsilon \varphi \left(\frac{1}{1-r} \right), \quad r, u \in [0, 1].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{1-|z|}^1 \varphi \left(\frac{u}{1-|z|} \right) \frac{du}{u} &\leq \varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right) \int_{1-|z|}^1 \frac{du}{u^{1-\varepsilon}} < \\ &< \frac{1}{\varepsilon} \varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Чтобы оценить I_2 снова произведем замену переменной $\frac{1-|z|}{1-\rho} = u$. В результате получим

$$I_2 \leq \int_1^{+\infty} \varphi \left(\frac{u}{1-|z|} \right) \frac{du}{u^{1+2}}$$

и так как

$$\varphi \left(\frac{u}{1-|z|} \right) \leq u^{2\varphi} \varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right), \quad u \geq 1,$$

то

$$I_2 \leq \frac{1}{1+\alpha-\alpha_\varphi} \varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right), \quad z \in U. \quad (2.8)$$

Объединяя оценки (2.6)–(2.8), получаем утверждение теоремы. ●

Замечание 2.1. Отметим, что при $\varphi(x) = x^\gamma$, $1 < \gamma < +\infty$ и целых α утверждение теоремы было доказано другим методом Линден [4].

Из теоремы 2.1 и из результатов И. Ф. Красичкова-Терновского [6] вытекает такое

С л е д с т в и е 2.1. Пусть φ — монотонно растущая неотрицательная функция на $(0, +\infty)$, для которой $1 < \beta_\varphi$, $\alpha_\varphi < +\infty$. Предположим, что $\alpha > \alpha_\varphi + 1$ и $f \in X_\alpha^-$, тогда, если

$$f(z) = \pi'_\alpha(z) \exp |g'_\alpha(z)|, \quad z \in U,$$

то функции π'_α и $\exp \{\pm g'_\alpha\}$ принадлежат классу X_α^- .

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.X.1978

Յ. Ա. ՇԱՄՈՋԱՆ. Մ. Մ. Ջրբաշյանի ֆակտորիզացիոն բևոգեմը և շրջանում անալիտիկ վերջավոր կարգի մաժորանտա ունեցող անալիտիկ ֆունկցիաների զերոների խառակտերիստիկան (ամփոփում)

Մ. Մ. Ջրբաշյանի թեորեմի համաձայն $[2]$ A_α^* ($\alpha > -1$) դասին պատկանող յուրաքանչյուր f ֆունկցիա թույլ է տալիս կանոնական ֆակտորիզացիա

$$f(z) = \pi'_\alpha(z) \exp \{g'_\alpha(z)\}, \quad |z| < 1:$$

Հոդվածում քննարկվում է ֆակտորիզացիոն արտադրիչների՝ π'_α -ի և $\exp \{g'_\alpha\}$ -ի A դասին պատկանելության հարցը: Խաջի այդ $\varphi(x) > 0$ մոնոտոն անդ α ֆունկցիայի վրա որոշ բնական սահմանափակումների դեպքում, տրվում է շրջանում անալիտիկ, այն ֆունկցիաների զերոների լրիվ խառակտերիստիկան, որոնց համար

$$\sup_{|z| < 1} \left\{ |f(z)| \exp \left(-C f \varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right) \right) \right\} < +\infty:$$

F. A. SHAMOJAN. M. M. Jrbashian's factorization theorem and characterization of zeros of analytical in a disc functions with a bounded growth rate (summary)

According to M. M. Jrbashian's theorem every holomorphic in the unite circle function f from the class

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^\alpha \ln^+ |f(re^{i\varphi})| r dr d\varphi \quad (\alpha > -1) \quad (1)$$

permits the canonical factorization

$$f(z) = \pi'_\alpha(z) \exp \{g'_\alpha(z)\}, \quad |z| < 1.$$

The article considers the question of class (1) membership of the factors π'_α and $\exp \{g'_\alpha\}$. This yields a result on zeros of holomorphic with in the unite circle functions for which

$$\sup_{|z| < 1} \left\{ |f(z)| \exp \left(-C f \varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right) \right) \right\} < +\infty.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщин-та математики и механики АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—55.
3. М. Tsuji. Canonical product of meromorphic function in the unit disc, Journ. of Math. Soc. of Japan, 8, № 1, 1956, 7—19.
4. С. N. Linden. The representation of regular functions, Journ. Lond. Math. Soc., 39, № 153, 1964, 19—30.
5. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций, Изд. „Наука“, М., 1970.
6. Ф. А. Шамоян. Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$, Мат. сб., 107 (149), № 3 (11), 1978, 446—462.
7. И. Ф. Красичков-Терновский. Оценки субгармонических разностей субгармонических функций I, Мат. сб., 102 (144), 1977, 216—247, II т., 103 (145), 1977, 69—111.

А. А. ВАГАРШАКЯН

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

1°. Пусть $H_2(\alpha)$, $-1 < \alpha < \infty$, пространство аналитических в единичном круге, $|z| < 1$, функций $f(z)$, для которых

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 (1-r)^\alpha dr dt < \infty.$$

Эти классы были введены и исследованы М. М. Джрбашяном (см. [3], [5]). Им, в частности, было установлено, что функции из $H_2(\alpha)$ допускают параметрическое представление

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{(e^{it} - z)^{\frac{3+\alpha}{2}}} dt, \quad (1)$$

где $g(t)$ — произвольная функция из $L_2(0, 2\pi)$.

В работах Л. Карлесона [1] и Г. Шапиро, А. Шилдса [2] был дан исчерпывающий ответ на вопрос о распределении модулей нулей функции, производная которых принадлежит $H_2(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$. В настоящей заметке, опираясь на интегральное представление (1), устанавливается критерий для распределения нулей нетривиальных функций $f(z)$, для которых $f'(z) \in H_2(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$, которые учитывают не только модули, но и аргументы этих нулей.

2°. С этой целью введем функцию $\rho_z(\xi, \Lambda)$, с помощью которой будут сформулированы наши критерии. Пусть $\Lambda = \{z_k\}_{k=1}^\infty$ — некоторая последовательность точек из единичного круга и α , $0 \leq \alpha \leq 1$ — некоторый параметр. Обозначим

$$\rho_\alpha(\xi, \Lambda) = \inf_k \frac{|\xi - z_k|}{(1 - |z_k|)^\alpha} \quad (|\xi| = 1). \quad (2)$$

Заметим, что в случае, когда $\alpha = 0$, $\rho_0(\xi, \Lambda)$ просто означает расстояние точек ξ от множества Λ , а в случае $\alpha = 1$ имеет место неравенство

$$\rho_1(\xi, \Lambda) > 1, \quad |\xi| = 1.$$

Основным результатом настоящей заметки является следующая

Теорема. Пусть $f'(z) \in H_2(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$, и $\Lambda = \{z_k\}_{k=1}^\infty$ — множество нулей функции $f(z) \not\equiv 0$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \log \rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(e^{it}, \Lambda) dt > -\infty.$$

Доказательство. Как отмечалось выше, функция $f'(z) \in H_2(\alpha)$ допускает представление

$$f'(z) = \int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{(e^{it} - z)^{\frac{3+\alpha}{2}}} dt,$$

где $g(t) \in L_2(0, 2\pi)$. Имеет место неравенство

$$|f'(z)| (1 - |z|)^{\frac{1+\alpha}{2}} \leq \int_0^{2\pi} \frac{(1 - |z|)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{|e^{it} - z|^{\frac{3+\alpha}{2}}} |g(t)| dt. \quad (3)$$

Заметим, что при $0 < |z| < 1$ имеют место оценки $1 - |z| \leq |e^{it} - z|$ и $|e^{it} - \frac{z}{|z|}| \leq 2|e^{it} - z|$. Поэтому для любого $0 < \delta < 2$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - |z|)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{|e^{it} - z|^{\frac{3+\alpha}{2}}} |g(t)| dt &\leq \frac{1}{1 - |z|} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |g(t)| dt + 2^{\frac{3+\alpha}{2}} (1 - |z|)^{\frac{1+\alpha}{2}} \int_0^2 t^{-\frac{3+\alpha}{2}} d \times \\ &\times \int_{x-t}^{x+t} |g(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{1 - |z|} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |g(t)| dt + \int_0^{2\pi} |g(\tau)| d\tau + \frac{3+\alpha}{2} 2^{\frac{3+\alpha}{2}} (1 - |z|)^{\frac{1+\alpha}{2}} \times \\ &\times \int_0^2 t^{-\frac{5+\alpha}{2}} \int_{x-t}^{x+t} |g(\tau)| d\tau dt, \end{aligned}$$

где $\arg z = x$. Подставляя в полученное неравенство $\delta = 1 - |z|$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - |z|)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{|e^{it} - z|^{\frac{3+\alpha}{2}}} |g(t)| dt &\leq \int_0^{2\pi} |g(\tau)| d\tau + \left(1 + \frac{3+\alpha}{2} 2^{\frac{3+\alpha}{2}}\right) \times \\ &\times \sup_{t > 1 - |z|} \left(\frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |g(\tau)| d\tau \right). \quad (4) \end{aligned}$$

В силу известной теоремы Харди и Литтлвуда (см. [4], стр. 15) правая часть неравенства, которую мы обозначим $\psi(x)$, принадлежит пространству $L_2(0, 2\pi)$. Из (3) и (4) окончательно получим неравенство

$$\sup_{0 < r < 1} |f'(re^{ix})|^2 (1 - r)^{1+\alpha} \leq \psi^2(x).$$

Пусть $0 < p < 1$ — некоторое число. В силу упомянутой выше теоремы Харди и Литтлвуда имеем

$$\int_0^{2\pi} \left(\sup_{-\pi < \delta < \pi} \frac{1}{|\delta|} \int_x^{x+\delta} \left(\sup_{0 < r < 1} |f'(re^{it})|^2 (1-r)^{1+\alpha} \right) dt \right)^p dx \leq \\ \leq \int_0^{2\pi} \left(\sup_{-\pi < \delta < \pi} \frac{1}{|\delta|} \int_x^{x+\delta} \psi^2(t) dt \right)^p dx < \infty.$$

Далее

$$\int_0^{2\pi} \left(\sup_{\substack{-\pi < \delta < \pi \\ 0 < r < 1}} \frac{(1-r)^{1+\alpha}}{|\delta|} \int_x^{x+\delta} |f'(re^{it})|^2 dt \right)^p dx \leq \\ \leq \int_0^{2\pi} \left(\sup_{-\pi < \delta < \pi} \frac{1}{|\delta|} \int_x^{x+\delta} \left(\sup_{0 < r < 1} |f'(re^{it})|^2 (1-r)^{1+\alpha} \right) dt \right)^p dx < \infty.$$

Эта оценка означает, что существует функция $\varphi(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $0 < p < 1$, такая, что

$$\sup_{\substack{-\pi < \delta < \pi \\ 0 < r < 1}} \frac{(1-r)^{1+\alpha}}{|\delta|} \int_x^{x+\delta} |f'(re^{it})|^2 dt \leq \varphi(x), \quad x \in (0, 2\pi).$$

Следовательно

$$|f(re^{ix}) - f(re^{i(x+\delta)})| \leq \int_x^{x+\delta} |f'(re^{it})| dt \leq \sqrt{|\delta|} \left(\int_x^{x+\delta} |f'(re^{it})|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \frac{|\delta|}{(1-r)^{\frac{1+\alpha}{2}}} \left(\frac{(1-r)^{1+\alpha}}{|\delta|} \int_x^{x+\delta} |f'(re^{it})|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{|\delta|}{(1-r)^{\frac{1+\alpha}{2}}} \varphi^{\frac{1}{2}}(x). \quad (5)$$

Далее для любых $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 < p < 1$ и $0 \leq \alpha < 1$ имеем

$$\int_p^1 |f'(re^{ix})| dr \leq \left(\int_p^1 |f'(re^{ix})|^2 (1-r)^\alpha dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_p^1 \frac{dr}{(1-r)^\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \left(\int_0^1 |f'(re^{ix})|^2 (1-r)^\alpha dr \right)^{\frac{1}{2}} (1-p)^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Из полученной оценки следует, что существует функция $\lambda(x) \in L_2(0, 2\pi)$ такая, что

$$|f(e^{ix}) - f(re^{ix})| \leq \lambda(x) (1-r)^{\frac{1-\alpha}{2}}. \quad (6)$$

Следовательно, в силу (5) и (6) имеем

$$\begin{aligned} |f(e^{ix}) - f(z)| &\leq (1 - |z|)^{\frac{1-\alpha}{2}} \lambda(x) + \frac{|e^{ix} - z|^{\frac{1}{2}}}{(1 - |z|)^{\frac{1+\alpha}{2}}} \varphi^{\frac{1}{2}}(x) \leq \\ &\leq \frac{|e^{ix} - z|^{\frac{1}{2}}}{(1 - |z|)^{\frac{1+\alpha}{2}}} (\lambda(x) + \varphi^{\frac{1}{2}}(x)). \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда получаем

$$|f(e^{ix})| = |f(e^{ix}) - f(z_k)| \leq \frac{|e^{ix} - z_k|^{\frac{1}{2}}}{(1 - |z_k|)^{\frac{1+\alpha}{2}}} (\lambda(x) + \varphi^{\frac{1}{2}}(x))$$

или

$$|f(e^{ix})| \leq \rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(e^{ix}, \Lambda) (\lambda(x) + \varphi^{\frac{1}{2}}(x)).$$

Поэтому

$$-\infty < \int_0^{2\pi} \log |f(e^{ix})| dx < \int_0^{2\pi} \log \rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(e^{ix}, \Lambda) dx + \int_0^{2\pi} \log (\lambda(x) + \varphi^{\frac{1}{2}}(x)) dx.$$

Так как последний интеграл сходится, то

$$\int_0^{2\pi} \log \rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(e^{ix}, \Lambda) dx > -\infty.$$

Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.IX.1978

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի զերոների մասին (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում քննարկվում են պայմաններ այնպիսի $f(z)$ ֆունկցիաների զերոների բաշխման վրա, որոնց համար $f'(z) \in H_2(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$:

A. A. VAGARSHAKIAN. On the zeros of some classes of analytic functions (summary)

The paper considers distributions of zeros of functions $f(z)$ with $f'(z) \in H_2(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. L. Carleson. On the zeros of functions with bounded Dirichlet integrals, Math. Zeitschrift, 56, № 3, 1952, 289—295.

2. *H. Shapiro and A. Shields.* On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces, *Math. Zeitschrift*, v. 80, 1962, 217—229.
3. *М. М. Джрбашян.* О представимости некоторых классов голоморфных функций в единичном круге, *ДАН Арм.ССР*, VI, 1947.
4. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Изд. „Мир“, 1973.
5. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, *Сооб. Инст. мат. и мех. АН Арм.ССР*, вып. 2, 1948, 3—40.

А. И. ПЕТРОСЯН, Г. М. ХЕНКИН

РЕШЕНИЕ С РАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКОЙ $\bar{\partial}$ -УРАВНЕНИЯ В ВЕЩЕСТВЕННО НЕВЫРОЖДЕННОМ ПОЛИЭДРЕ ВЕЙЛЯ

В в е д е н и е

Настоящая статья посвящена исследованию разрешимости уравнения

$$\bar{\partial} u = f \quad (1)$$

в полиэдре Вейля пространства $\mathbb{C}^2$. Здесь u — неизвестная функция, $f = f_1 \bar{dz}_1 + f_2 \bar{dz}_2$ — заданная форма типа $(0,1)$,

$$\bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} d\bar{z}_2.$$

Полиэдром Вейля называют ограниченную область в $\mathbb{C}^2$ вида

$$D = \{z \in \mathbb{C}^2: |\chi_i(z)| < 1, i = 1, 2, \dots, N\}, \quad (2)$$

где $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N$ — некоторые голоморфные полиномы.

Множества $\sigma_k = \{z \in \bar{D}: |\chi_k(z)| = 1\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, называются гранями полиэдра D , а множества $\sigma_k \cap \sigma_j$ ($k, j = 1, 2, \dots, N$) образуют его остов.

Для разрешимости уравнения (1) необходимо, конечно, чтобы форма f была $\bar{\partial}$ -замкнутой ($\bar{\partial}f = 0$), т. е. чтобы $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_2} = \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}_1}$. Из теоремы

Ока о разрешимости в полиэдрах Вейля первой проблемы Кузена и из леммы Гротендика-Дольбо (см., например, [1]) следует, что условие $\bar{\partial}f = 0$ является также и достаточным для существования решения уравнения (1). В приложениях важно иметь решение уравнения (1) в D с подходящими оценками около границы ∂D . Из результатов Л. Хёрмандера [1] вытекает существование решения u уравнения (1) с L^2 -оценкой

$$\|u\|_{L^2(D)} \leq \gamma \|f\|_{L^2(D)}.$$

Нахождение решений уравнения (1) с оценками в равномерной метрике оказалось более трудной задачей. В [2] найдена формула для решения $\bar{\partial}$ -уравнения в полиэдре Вейля. Эта формула, в случае, когда грани и остов полиэдра комплексно невырождены, т. е. когда $d\chi_k \neq 0$ на σ_k и $d\chi_k \wedge d\chi_j \neq 0$ на $\sigma_{kj} = \sigma_k \cap \sigma_j$, $k \neq j$ ($k, j = 1, 2, \dots, N$), дает решение u уравнения (1) с равномерной оценкой

$$\|u\|_{C(D)} \leq \gamma \|f\|_{C(D)}. \quad (3)$$

Условие комплексной невырожденности остова полиэдра D не является, однако, даже условием „общего положения“, поскольку произвольный полиэдр, вообще говоря, нельзя превратить в комплексно невырожденный полиэдр малым шевелением коэффициентов полиномов $\{\lambda_i(z)\}$.

В настоящей работе отыскивается решение (1) с оценкой (3) в полиэдре Вейля „общего положения“ в $\mathbb{C}^2$, т. е. когда $d|\lambda_k|^2 \neq 0$ на σ_k и $d|\lambda_k|^2 \wedge d|\lambda_j|^2 \neq 0$ на σ_{kj} , ($k, j = 1, 2, \dots, N$). Такие полиэдры мы называем здесь вещественно невырожденными полиэдрами Вейля. Рассматриваемые нами полиэдры удовлетворяют следующему дополнительному условию: остов (U_{σ_k}) совпадает с границей Бергмана-Шилова.

Формула решения, указанная в [2], здесь уже непосредственно задачу не решает. Решение $\bar{\partial}$ -уравнения с оценкой (3) мы получаем далее по следующей схеме. Сначала с помощью формулы Мартинелли—Бохнера—Коппельмана [3] форма f специальным образом разбивается в сумму N форм, $\bar{\partial}$ -замкнутых в значительно больших областях (теорема 1), затем к области D „пристраиваются“ комплексно невырожденные полиэдры D_i ($D \subset D_i$), $i = 1, 2, \dots, N$ (лемма 3), и, наконец, $\bar{\partial}$ -уравнение решается (с помощью формул из [2]) „по-своему“ для каждой области D_i (теоремы 2, 3).

К сожалению, пока не удалось реализовать подобную схему рассуждений для получения решений (1) с равномерными оценками в вещественно невырожденных полиэдрах Вейля в пространствах любого числа переменных. Именно поэтому (а не „ради простоты изложения“) мы ограничились в этой работе полиэдрами в $\mathbb{C}^2$.

Анализ проводимых далее рассуждений в $\mathbb{C}^2$ показывает, что основной результат (решение (1) с оценкой (3)) справедлив уже при условии, что на любой грани σ_k полином λ_k либо вообще не имеет критических точек, либо имеет лишь невырожденные критические точки.

Было бы очень интересно выяснить, имеет ли (1) решение с оценкой (3) в произвольном аналитическом полиэдре (без каких бы то ни было условий невырожденности граней).

§ 1. Разложение формы

Пусть всюду в дальнейшем D — вещественно невырожденный полиэдр Вейля (2) в пространстве $\mathbb{C}^2$, остов которого совпадает с границей Бергмана-Шилова. Будем пользоваться следующими обозначениями: для формы $f = f_1 dz_1 + f_2 dz_2$

$$\|f\|_{C(D)} = \|f_1\|_{C(D)} + \|f_2\|_{C(D)}; \quad \|f\|_{L^p(D)} = \|f_1\|_{L^p(D)} + \|f_2\|_{L^p(D)};$$

$$\omega(\zeta) = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2; \quad \omega'(\eta) = \eta_1 d\eta_2 - \eta_2 d\eta_1,$$

где $\eta_k = \eta_k(\zeta; z)$, $k = 1, 2$, причем дифференциалы здесь берутся по ζ ; в случае, если дифференциалы будем брать по z , полученную форму обозначим через $\omega'_1(\eta)$. Далее, через $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ будем обозначать константы, не зависящие от f .

Теорема 1. Для любой формы f типа $(0,1)$, $\bar{\partial}$ -замкнутой и непрерывной в замыкании $\bar{D}$ полиэдра D , имеет место разложение

$$\sum_{i=1}^N f_i(z) + (1-N)F(z) = \begin{cases} 4\pi^2 f(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \bar{D}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$F(z) = \bar{\partial}_z \int_D f(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta), \quad (1.2)$$

а формы f_i удовлетворяют следующим условиям:

(а) f_i бесконечно дифференцируема в $\mathbb{C}^2 \setminus \partial D$ и непрерывна на $D \cup \{\sigma_i \setminus \bigcup_{j=1}^N \sigma_j\}$;

(б) f_i $\bar{\partial}$ -замкнута;

(в) для любой ограниченной области B и числа $p > 0$ существует $\gamma = \gamma(B; p)$ так, что

$$\|f_i\|_{L^p(B)} \leq \gamma \|f_i\|_{C(D)}; \quad (1.3)$$

(г) коэффициенты формы f_i интегрируемы на σ_i .

Доказательство. Формула Мартинелли—Бохнера—Коппельмана, указанная Коппельманом в [3], имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_z \int_D f(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) + \int_{\partial D} f(\zeta) \omega'_1 \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) = \\ = \begin{cases} 4\pi^2 f(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \bar{D}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Учитывая, что $\partial D = \bigcup_{i=1}^N \sigma_i$ и обозначив

$$\tilde{f}_i(z) = \int_{\sigma_i} f(\zeta) \omega'_1 \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta), \quad (1.5)$$

перепишем формулу (1.4) в виде

$$F(z) + \sum_{j=1}^N \tilde{f}_j(z) = \begin{cases} 4\pi^2 f(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \bar{D}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Разложение (1.1) получается из (1.6), если форму f_i определить следующим образом:

$$f_i(z) = \tilde{f}_i(z) + F(z). \quad (1.7)$$

Из (1.6) и (1.7) имеем

$$f_i(z) + \sum_{j \neq i} \tilde{f}_j(z) = \begin{cases} 4\pi^2 f(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \bar{D}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Свойство (а) следует из (1.8), если заметить, что форма $\tilde{f}_j(z)$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{C}^2 \setminus \sigma_j$.

Продифференцировав (1.7) с учетом, что $\bar{\partial}^2 = 0$, получим

$$\begin{aligned} \bar{\partial} f_i(z) &= \int_{\sigma_i} f(\zeta) \wedge \bar{\partial}_z \omega_1 \left(\frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) = \\ &= \left\{ \int_{\sigma_i} f(\zeta) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{|\zeta - z|^4} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \frac{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2}{|\zeta - z|^4} \right) \wedge \omega(\zeta) \right\} dz_1 \wedge dz_2 = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает (б).

Оценим L^p -норму $\tilde{f}_i$ в ограниченной области B

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_i\|_{L^p(B)} &= \left\{ \int_B \left| \int_{\sigma_i} f(\zeta) \wedge \frac{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2}{|\zeta - z|^4} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \right|^p dv_z \right\}^{1/p} + \\ &+ \left\{ \int_B \left| \int_{\sigma_i} f(\zeta) \wedge \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{|\zeta - z|^4} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \right|^p dv_z \right\}^{1/p} \leq \gamma_1 \|f\|_{C(D)} \left\{ \int_B \left(\int_{\sigma_i} \frac{ds_\zeta}{|\zeta - z|^3} \right)^p dv_z \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл, согласно доказываемой ниже лемме 1, имеет рост порядка логарифма, поэтому повторный интеграл сходится, т. е.

$$\|\tilde{f}_i\|_{L^p(B)} \leq \gamma_2 \|f\|_{C(D)}; \quad (1.9)$$

отсюда и из (1.6) следует, что аналогичная оценка верна и для $F(z)$

$$\|F\|_{L^p(B)} \leq \gamma_3 \|f\|_{C(D)}. \quad (1.10)$$

Утверждение (в) следует из (1.7), (1.9) и (1.10).

Далее, из (1.8) видно, что особенности формы f_i находятся на гранях σ_j ($j \neq i$), причем, в силу той же леммы 1, при подходе к σ_j коэффициенты этой формы имеют логарифмический рост. Отсюда и из того, что грани σ_i и σ_j в силу вещественной невырожденности полиэдра D пересекаются трансверсально, следует утверждение (г).

Лемма 1. Пусть σ — ограниченная гладкая гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$; $\rho(z, \sigma)$ — расстояние между z и σ . Тогда функция

$$\Phi(z) = \int_{\sigma} \frac{ds_\zeta}{|\zeta - z|^3},$$

где ds_ζ — элемент объема на σ , удовлетворяет неравенству

$$\Phi(z) \leq \gamma_4 \ln |\rho(z, \sigma)|.$$

Доказательство. В силу условий на σ с помощью диффеоморфизма вопрос можно свести к случаю, когда σ — компакт, лежащий „на цилиндре“. Достаточно ограничиться случаем, когда σ , к примеру, имеет вид

$$\sigma = \{ \operatorname{Im} \zeta_1 = \eta_1 = 0; |\operatorname{Re} \zeta_1| = |\xi_1| < 1 \},$$

а точка $z = (x_1 + iy_1, z_2)$ удовлетворяет условию $|x_1| \leq 2, |z_2| \leq 2$. Тогда $\rho(z, \sigma) = |y_1|$. Обозначив $\zeta_1 - z_1 = re^{i\varphi}$, $x_1 - \xi_1 = t$, будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\leq \int_{-3}^3 \int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{r d\varphi dr dt}{(r^2 + t^2 + y_1^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{2} \int_{-3}^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + y_1^2}} - \\ &- \frac{\pi}{2} \int_{-3}^3 \frac{dt}{\sqrt{9 + t^2 + y_1^2}} < \frac{\pi}{2} \int_{-3}^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + y_1^2}} \leq \gamma_4 \ln |y_1|. \end{aligned}$$

§ 2. Формулы решения

В работе [2] для произвольного полиэдра в пространстве $\mathbb{C}^n$ получена формула решения уравнения (1), которая в случае $n=2$ имеет вид

$$\begin{aligned} u(z) = \frac{1}{4\pi^2} &\left\{ \int_D f(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) - \sum_{k=1}^N \int_{\sigma_k} f(\zeta) \times \right. \\ &\times \frac{\begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1 & P_{k1} \\ \bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2 & P_{k2} \end{vmatrix}}{|\zeta - z|^2 [\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)]} \wedge \omega(\zeta) \Big\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь P_{k1} и P_{k2} — коэффициенты Гедера функции χ_k , т. е.

$$\chi_k(\zeta) - \chi_k(z) = (\zeta_1 - z_1) P_{k1}(\zeta, z) + (\zeta_2 - z_2) P_{k2}(\zeta, z).$$

Интегралы в правой части формулы (2.1) имеют смысл и при менее ограничительных условиях на f , чем непрерывность. Оказывается, что и в этом случае (2.1) дает решение уравнения (1), если последнее понимать в смысле обобщенных функций. Точнее, имеет место

Лемма 2. Пусть $\bar{\partial}$ -замкнутая форма f типа $(0,1)$ с коэффициентами из $L^p(D)$, $p > 4$, такова, что ее сужения на грани σ_i интегрируемы. Тогда функция u , определяемая формулой (2.1), является решением уравнения (1) в полиэдре D в смысле обобщенных функций.

Доказательство. Ограничение $p > 4$ в условиях леммы необходимо для того, чтобы объемный интеграл в (2.1) сходился. Нужно показать, что для любой финитной в D и бесконечно дифференцируемой формы $g(z)$ типа (2.1) имеет место равенство

$$(u, \bar{\partial} g) = (f, g). \quad (2.2)$$

Применяя теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} (u, \bar{\partial} g) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_D \left\{ \int_D f(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) - \sum_{k=1}^N \int_{\sigma_k} f(\zeta) \times \right. \\ &\quad \times \frac{\left| \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2} \frac{P_{k1}}{P_{k2}} \right|}{|\zeta - z|^2 [\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)]} \wedge \omega(\zeta) \left. \right\} \bar{\partial} g(z) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_D \left\{ \int_D f(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) \right\} \bar{\partial} g(z) - \\ &- \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^N \int_{\sigma_k} f(\zeta) \left\{ \int_D \frac{\left| \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2} \frac{P_{k1}}{P_{k2}} \right|}{|\zeta - z|^2 [\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)]} \bar{\partial} g(z) \right\} \wedge \omega(\zeta). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Применяя формулу Стокса и учитывая, что

$$\bar{\partial}_z \frac{\left| \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2} \frac{P_{k1}}{P_{k2}} \right|}{|\zeta - z|^2 [\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)]} = \omega'_1 \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right),$$

преобразуем второе слагаемое в правой части (2.3) к виду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi^2} \int_D \left\{ \sum_{k=1}^N \int_{\sigma_k} f(\zeta) \omega'_1 \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) \right\} \wedge g(z) = \\ &= \int_D \left\{ f(z) - \frac{1}{4\pi^2} \bar{\partial}_z \int_D f(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) \right\} \wedge g(z). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В последнем равенстве была использована формула Мартинелли — Бохнера — Коппельмана (1.4). Подставляя (2.4) в (2.3) и используя еще раз формулу Стокса, окончательно получим

$$\begin{aligned} (u, \bar{\partial} g) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_D \left\{ \int_D f(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) \right\} \bar{\partial} g(z) + \\ &+ \int_D f(z) \wedge g(z) - \frac{1}{4\pi^2} \int_D \left\{ \bar{\partial}_z \int_D f(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) \right\} \wedge g(z) = (f, g). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть

$$S_l = \{\zeta \in \mathbb{C}^2: |\chi_l(\zeta)| = 1\}.$$

Лемма 3. Для каждого i , $1 \leq i \leq N$, существует полиэдр D_i , $D \subset D_i$, у которого одна грань σ_i^* лежит на S_i , а остальные грани пересекаются с σ_i^* комплексно трансверсально.

Доказательство. Аналитическое множество

$$M = \{z: \text{grad } \chi_i(z) = 0\}$$

состоит из конечного числа компонент, так как χ_i — полином. Очевидно, на каждой такой связной компоненте $m \chi_i|_m = \text{const}$. Отсюда следует, что m либо не пересекается с S_i , либо целиком лежит на S_i , т. е. особые точки гиперповерхности S_i являются особыми и для M . С другой стороны, M может иметь лишь конечное число особых точек, так что все они находятся внутри некоторого шара $\{|z| < R\}$. Для каждой точки $z_0 \in S_i$, $|z_0| > R$ построим гиперповерхность $\lambda = \{\zeta: |l_{z_0}(\zeta)| = 1\}$, где $l_{z_0}(\zeta)$ — линейная функция, так что $\lambda \cap D = \emptyset$ и λ пересекается с S_i комплексно трансверсально в точке z_0 , а, следовательно, и в некоторой окрестности этой точки. Выбрав конечное число таких функций $l_i^k(\zeta)$, ($1 \leq k \leq N_i$, $N_i > n - 1$), мы тем самым „пристроим“ к грани S_i искомый полиэдр

$$D_i = \{\zeta: |\chi_i(\zeta)| < 1, |l_i^k(\zeta)| < 1, k = 1, 2, \dots, N_i\}.$$

Обозначим через σ_i^* грань этого полиэдра, содержащую σ_i :

$$\sigma_i^* = \{\zeta: |\chi_i(\zeta)| = 1, |l_i^k(\zeta)| < 1, k = 1, 2, \dots, N_i\},$$

а через λ_i^k — грань, на которой $|l_i^k(\zeta)| = 1$.

Пусть f — непрерывная в $\bar{D}$, $\bar{\partial}$ -замкнутая форма типа $(0,1)$; f_i — то же, что и в теореме 1.

Теорема 2. Существует решение уравнения

$$\bar{\partial}u = f_i \quad (2.5)$$

понимаемого в смысле обобщенных функций в области D_i , допускающее равномерную оценку

$$\|u_i\|_{C(D)} \leq T \|f\|_{C(D)}. \quad (2.6)$$

Доказательство. Согласно утверждениям (в) и (г) теоремы 1 форма f_i в области D_i удовлетворяет условиям леммы 2. По этой лемме функция

$$u_i(z) = \frac{1}{4\pi^2} [v_0(z) - v_i(z) - \bar{v}_i(z)], \quad (2.7)$$

где

$$v_0(z) = \int_{D_i} f_i(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\bar{\zeta} - \bar{z}|^2} \right) \wedge \omega(\zeta), \quad (2.8)$$

$$v_l(z) = \int_{\sigma_l} f_l(\zeta) \frac{\left| \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2} \frac{P_{l1}}{P_{l2}} \right|}{|\zeta - z|^2 [\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)]} \wedge \omega(\zeta), \quad (2.9)$$

$$\tilde{v}_l(z) = \sum_{j=1}^{N_l} \int_{\lambda_l^j} f_l(\zeta) \frac{\left| \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2} \frac{P_{l1}^j}{P_{l2}^j} \right|}{|\zeta - z|^2 [l_l^j(\zeta) - l_l^j(z)]} \wedge \omega(\zeta), \quad (2.10)$$

является решением уравнения (2.5). Здесь P_{l1}^j и P_{l2}^j — коэффициенты Гедера функции l_l^j . Оценка, аналогичная (2.6) для интегралов $v_0(z)$, и $\tilde{v}_l(z)$, дана в § 3. Оценка интеграла $v_l(z)$ существенно использует замкнутость формы f_l и непосредственно из вида (2.9) не получается. Поэтому преобразуем $v_l(z)$ к более удобной для оценок форме.

Пусть $\{g_k(z)\}$ — разбиение единицы на компакте σ_l , причем носители m_k функций $g_k(z)$ удовлетворяют условию $\text{diam } m_k \leq \delta$, $\delta > 0$. В дальнейшем будут накладываться ограничения на величину δ , а пока выберем $\delta < \rho(\sigma_l, \lambda_l^j)$, $1 \leq j \leq N_l$. Обозначив, для краткости,

$$\psi_l(\zeta; z) = \frac{\left| \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2} \frac{P_{l1}}{P_{l2}} \right|}{|\zeta - z|^2 [\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)]} \omega(\zeta)$$

и внося тождество $\sum_k g_k(\zeta) \equiv 1$ под знак интеграла в (2.9), будем иметь

$$v_l(z) = \sum_k \int_{\sigma_l} g_k(\zeta) f_l(\zeta) \wedge \psi_l(\zeta; z) = \sum_k' + \sum_k''. \quad (2.11)$$

Под знаком $\sum_k'$ здесь собраны те слагаемые, для которых выполняется хотя бы одно из условий

$$1) \quad m_k \cap \sigma_l \neq \emptyset;$$

$$2) \quad m_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{N_l} \lambda_l^j \right) \neq \emptyset.$$

Число δ предполагаем настолько малым, чтобы

$$\frac{\partial \chi_l(\zeta)}{\partial \zeta_{\alpha(k)}} \neq 0, \quad \zeta \in m_k, \quad (2.12)$$

а в случае 2) чтобы отображение

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= l_l^j(\zeta) \\ w_2 &= \chi_l(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

на m , было бы диффеоморфным. Условиям (2.11) и (2.12) удовлетворить можно в силу вещественной невырожденности D и комплексной невырожденности D_1 .

Зафиксируем $z \in D$ и для $\varepsilon > 0$ введем обозначения

$$T_z = \{\zeta \in \bar{D}_1 : \chi_1(\zeta) - \chi_1(z) = 0\}, \quad (2.14)$$

$$T_z^\varepsilon = \{\zeta \in \bar{D}_1 : |\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)| \leq \varepsilon\},$$

$$\bar{T}_z^\varepsilon = \{\zeta \in \bar{D}_1 : |\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)| = \varepsilon\}.$$

Пусть k таково, что выполнено 1) или 2). Применяя формулу Стокса к форме $g_k f_l \wedge \psi_l$ в области $D_l \setminus T_z^\varepsilon$, с учетом, что

$$\partial(D_l \setminus T_z^\varepsilon) = \partial_l \cup \left(\bigcup_j \lambda_l^j \setminus T_z^\varepsilon \right) \cup (-\bar{T}_z^\varepsilon),$$

получим

$$\int_{\partial_l} g_k f_l \wedge \psi_l + \sum_{j=1}^{N_l} \int_{\lambda_l^j \setminus T_z^\varepsilon} g_k f_l \wedge \psi_l - \int_{\bar{T}_z^\varepsilon} g_k f_l \wedge \psi_l = \int_{D_l \setminus T_z^\varepsilon} d_\zeta (g_k f_l \wedge \psi_l). \quad (2.15)$$

Используя (2.12), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{T}_z^\varepsilon} g_k f_l \wedge \psi_l &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-1)^{\nu(k)} \int_{|\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)| = \varepsilon} g_k f_l \times \\ &\times \frac{\left| \begin{array}{cc} \bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1 & P_{l1} \\ \bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2 & P_{l2} \end{array} \right| d\zeta_{3-\nu(k)} \wedge d\zeta_l}{|\zeta - z|^2 [\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)] \frac{\partial \chi_l}{\partial \zeta_{\nu(k)}}} = \\ &= 2\pi i (-1)^{\nu(k)} \int_{T_z} g_k f_l \frac{\left| \begin{array}{cc} \bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1 & P_{l1} \\ \bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2 & P_{l2} \end{array} \right|}{|\zeta - z|^2 \frac{\partial \chi_l}{\partial \zeta_{\nu(k)}}} d\zeta_{3-\nu(k)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Далее, при подсчете $d_\zeta (g_k f_l \wedge \psi_l)$ учтем, что $\bar{\partial} f_l = 0$ (теорема 1, пункт (6)), а прямое вычисление показывает, что

$$\bar{\partial}_\zeta \frac{\left| \begin{array}{cc} \bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1 & P_{l1} \\ \bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2 & P_{l2} \end{array} \right|}{|\zeta - z|^2 [\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)]} = \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right).$$

Следовательно

$$d_\zeta (g_k f_l \wedge \psi_l) = \bar{\partial}_\zeta (g_k f_l \wedge \psi_l) = g_k f_l \wedge \omega' \wedge \omega + \bar{\partial} g_k \wedge f_l \wedge \psi_l. \quad (2.17)$$

Устремив ε к нулю, с учетом (2.16) и (2.17) из (2.15) получим

$$\int_{\sigma_i} g_k(\zeta) f_i(\zeta) \wedge \psi_i(\zeta; z) = \sum_{\nu=1}^4 J_\nu(z), \quad (2.18)$$

где

$$J_1(z) = \int_{D_1} g_k(\zeta) f_i(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta), \quad (2.19)$$

$$J_2(z) = \int_{D_1} \bar{\partial} g_k(\zeta) \wedge f_i(\zeta) \wedge \psi_i(\zeta; z), \quad (2.20)$$

$$J_3(z) = - \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\lambda_j^f} g_k(\zeta) f_i(\zeta) \wedge \psi_i(\zeta; z), \quad (2.21)$$

$$J_4(z) = 2\pi i (-1)^{\nu(k)} \int_{T_z} g_k(\zeta) f_i(\zeta) \frac{\left| \begin{smallmatrix} \bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1 & P_{11} \\ \bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2 & P_{12} \end{smallmatrix} \right|}{|\zeta - z|^2 \frac{\partial \lambda_i}{\partial \zeta_{\nu}(k)}} d\zeta_{3-\nu}(k). \quad (2.22)$$

Итак, каждое слагаемое под знаком $\sum_k$ в (2.11) представляется в виде (2.18). Аналогичным образом, применяя на этот раз формулу Стокса в области $CD_1 = \mathbb{C}^2 \setminus D_1$, получим формулу для оставшихся слагаемых в (2.11)

$$\int_{\sigma_i} g_k(\zeta) f_i(\zeta) \wedge \psi_i(\zeta; z) = J_5(z) + J_6(z),$$

где

$$J_5(z) = \int_{CD_1} g_k(\zeta) f_i(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta), \quad (2.23)$$

$$J_6(z) = \int_{CD_1} \bar{\partial} g_k(\zeta) \wedge f_i(\zeta) \wedge \psi_i(\zeta; z). \quad (2.24)$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось получить оценку для $J_1(z) - J_6(z)$, что сделано в § 3.

Теорема 3. Пусть D — вещественно невырожденный полиномиальный полиэдр в пространстве $\mathbb{C}^2$, остов которого совпадает с границей Бермана—Шилова; f — непрерывная в D , $\bar{\partial}$ -замкнутая форма типа $(0,1)$. Тогда уравнение

$$\bar{\partial} u = f \quad (2.25)$$

имеет решение $u(z)$, допускающее равномерную оценку

$$\|u\|_{C(D)} \leq \gamma \|f\|_{C(D)}, \quad (2.26)$$

где γ — константа от f не зависящая.

Доказательство. Согласно теореме 1 форму f в области D разложим в сумму

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2} \left[\sum_{i=1}^N f_i(z) + (1-N) F(z) \right].$$

Построим комплексно невырожденные полиэдры D_i (лемма 3). Функции $u_i(z)$ из теоремы 2 служат решением с оценкой (2.26) уравнения $\bar{\partial}u = f_i$ в области D_i , а, следовательно, и в D , так как $D \subset D_i$. Из определения (1.2) формы F следует, что функция

$$u_0(z) = \int_D f(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\zeta - z}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) \quad (2.27)$$

является решением уравнения $\bar{\partial}u = F$, удовлетворяющее, как показано ниже в § 3, неравенству (2.26). Итак, функция

$$u(z) = \frac{1}{4\pi^2} \left[\sum_{i=1}^N u_i(z) + (1-N) u_0(z) \right]$$

является искомой.

§ 3. Оценки интегралов

Оценка $v_0(z)$, (2.8).

Пусть $f_i(\zeta) = f_{i1}(\zeta) d\bar{\zeta}_1 + f_{i2}(\zeta) d\bar{\zeta}_2$; d — диаметр области D_i ; p и q — сопряженные числа, т. е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; dv_ζ — элемент объема.

Вводя сферические координаты и используя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\begin{aligned} |v_0(z)| &= \left| \int_{D_i} (f_{i1} d\bar{\zeta}_1 + f_{i2} d\bar{\zeta}_2) \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) d\bar{\zeta}_1}{|\zeta - z|^4} \wedge \omega(\zeta) \right| \leq \\ &\leq \int_{D_i} (|f_{i1}| + |f_{i2}|) \frac{dv_\zeta}{|\zeta - z|^3} \leq \|f_i\|_{L^p(D)} \left\{ \int_{D_i} \frac{dv_\zeta}{|\zeta - z|^{3q}} \right\}^{1/q} \leq \\ &\leq \gamma_5 \|f_i\|_{L^p(D)} \int_0^d \frac{dr}{r^{3(q-1)}}. \end{aligned}$$

Последний интеграл сходится при $q < \frac{4}{3}$, т. е. при $p > 4$. Отсюда и из (1.3) следует

$$\|v_0\|_{C(D)} \leq \gamma_6 \|f\|_{C(D)}.$$

Оценка $u_0(z)$, (2.25) проводится аналогично, с очевидными упрощениями.

Оценка $\bar{v}_i(z)$, (2.10). По построению полиэдра D_i (лемма 3) его грани λ_i^j находятся на положительном расстоянии от D , поэтому знаменатель подынтегрального выражения в (2.10) при $z \in D$ ограничен от нуля, т. е.

$$|\bar{v}_i(z)| \leq \gamma_7 \|f\|_{L^1(D_i)}.$$

Это неравенство вместе с (1.4) дает

$$\|\bar{v}_i\|_{C(D)} \leq \gamma_8 \|f\|_{C(D)}.$$

Оценка $J_3(z)$, (2.21). Оценим в отдельности каждое слагаемое в (2.21)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\lambda_i^j} g_k f_i \wedge \psi_i \right| &\leq \int_{\lambda_i^j} g_k (|f_{i1}| + |f_{i2}|) \frac{|(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) P_{i2} - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) P_{i1}|}{|\zeta - z|^2 |\chi_i(\zeta) - \chi_i(z)|} ds_\zeta \leq \\ &\leq \gamma_9 \|f_i\|_{C(\lambda_i^j)} \int_{\lambda_i^j} g_k(\zeta) \frac{ds_\zeta}{|\zeta - z| \cdot |\chi_i(\zeta) - \chi_i(z)|}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Интегрирование здесь ведется фактически по множеству $\lambda_i^j \cap m_k$, на котором, по условию, отображение (2.13) диффеоморфно. Обозначив через t образ точки z при этом отображении, будем иметь

$$|\zeta - z| \geq \gamma_{10} |w - t|; \quad ds_\zeta = \left| \frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial(w_1, w_2)} \right| ds_w \leq \gamma_{11} ds_w.$$

Положим

$$w_2 - t_2 = re^{i\varphi}; \quad \arg w_1 - \arg t_1 = \tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_i^j} g_k(\zeta) \frac{ds_\zeta}{|\zeta - z| \cdot |\chi_i(\zeta) - \chi_i(z)|} &\leq \\ &\leq \gamma_{12} \int_{|w_1|=1} \frac{ds_w}{|w - t| \cdot |w_2 - t_2|} \leq \gamma_{12} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{r dr d\varphi d\tau}{r \sqrt{|w_1 - t_1|^2 + \tau^2}} \leq \\ &\leq \gamma_{13} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{dr d\tau}{\sqrt{r^2 + \tau^2}} = \gamma_{14}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Далее, согласно (1.8), при $z \in M$

$$f_i(z) = \sum_{k \neq i} \tilde{f}_k(z) = - \sum_{k \neq i} \int_{\sigma_k} f(\zeta) \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) d\bar{z}_2 - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) d\bar{z}_1}{|\zeta - z|^4} \wedge \omega(\zeta).$$

Отсюда, с учетом, что расстояние между множествами σ_k и λ_l положительно, получается очевидное неравенство

$$\|f\|_{C(\lambda_l)} \leq \gamma_{15} \|f\|_{C(D)}. \quad (3.3)$$

Нужная нам оценка вытекает из (3.1)—(3.3).

Оценка $J_4(z)$, (2.22). Положим, для определенности, $\nu(k)=1$ и преобразуем $J_4(z)$ к удобной форме. По определению (2.14) на T_z имеем

$$\chi_1(\zeta) - \chi_1(z) = (\zeta_1 - z_1) P_{11} + (\zeta_2 - z_2) P_{12} = 0,$$

или

$$P_{12} = -\frac{\zeta_1 - z_1}{\zeta_2 - z_2} P_{11}.$$

Далее

$$\left| \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2} \frac{P_{11}}{P_{12}} \right| = -(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) \frac{\zeta_1 - z_1}{\zeta_2 - z_2} P_{11} - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) P_{11} = -\frac{|\zeta - z|^2}{\zeta_2 - z_2} P_{11}. \quad (3.4)$$

Подставив (3.4) в (2.22), получим выражение

$$J_4(z) = 2\pi i \int_{T_z} g_k f_l \wedge \frac{P_{11} d\zeta_2}{(\zeta_2 - z_2) \frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta_1}}. \quad (3.5)$$

В силу вещественной невырожденности полиэдра D существует окрестность U грани σ_1 такая, что для $z \in U$ поверхность T_z пересекается с остальными гранями σ_j ($j \neq 1$) трансверсально. Отсюда и из того, что особенности формы f_l лежат на σ_1 и имеют логарифмический порядок роста (лемма 1), следует, что для $z \in U$

$$\|f_l\|_{L^p(T_z)} \leq \gamma_{16} \|f_l\|_{L^p(D_1)}, \quad (3.6)$$

где $\|f_l\|_{L^p(T_z)}$ — это L^p -норма сужения формы на поверхность T_z . Применяя к интегралу (3.5) неравенство Гёльдера (при $p > 2$) и переходя к локальной координате ζ_2 , получим

$$|J_4(z)| \leq \gamma_{17} \|f_l\|_{L^p(T_z)} \int_C \frac{|d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2|}{|\zeta_2 - z_2|^q} \leq \gamma_{18} \|f_l\|_{L^p(T_z)}. \quad (3.7)$$

Здесь мы воспользовались тем, что полученный интеграл, как в этом нетрудно убедиться, ограничен для всех z_2 , так как $q < 2$. Далее диаметр m_k предполагаем столь малым, чтобы при $z \in U$ множества T_z и m_k не пересекались. Тогда $J_4(z) = 0$ при $z \notin U$. Требуемое неравенство следует из (3.7), (3.6) и (1.3). $J_1(z)$, (2.19) и $J_3(z)$, (2.23) — интегралы такого же типа, что $v_0(z)$. Интегралы $J_2(z)$, (2.20) и $J_6(z)$, (2.24) имеют то же ядро, что и $J_3(z)$ и их оценка проводится, по существу, так же, как и $J_3(z)$, с незначительными изменениями.

Ереванский государственный университет.

Центральный экономико-математический институт

Поступила 27.III.1978

Յ. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Գ. Մ. ԽԵՆԿԻՆ. Իրական իմաստով ոչ էափոխվող վեյլի բազմանիստում $\bar{\partial}$ -հավասարման լուծումը հավասարաչափ գնահատականով (ամփոփում)

Դիցուք D -ն C^2 երկչափ կոմպլեքս տարածության մեջ իրական իմաստով ոչ էափոխվող վեյլի բազմանիստ է, $\{-r, 0, r\}$ տիպի դիֆֆերենցիալ ձև է, որը անընդհատ է $\bar{D}$ -ում և $\bar{\partial}f = 0$.

Հոդվածում ապացուցվում է, որ $\bar{\partial}u = f$ հավասարումը ունի լուծում, որը բավարարում է $\|u\| \leq \gamma \|f\|$ հավասարաչափ գնահատականին:

A. I. PETROSYAN, G. M. HENKIN. The solution with the uniform estimate of the $\bar{\partial}$ -equation in the real nondegenerate Weil polyhedron (summary)

Let D be a real nondegenerate Weil polyhedron in two-dimensional complex space; f be a $\bar{\partial}$ -closed differential form of the $(0,1)$ type, which is continuous in $\bar{D}$. It is proved, that the $\bar{\partial}u = f$ equation has the solution which satisfies the $\|u\| \leq \gamma \|f\|$ uniform estimate.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Хёрмандер. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., Изд. „Мир“, 1968.
2. Г. М. Хенкин. Равномерная оценка решения $\bar{\partial}$ -задачи в областях Вейля. УМН 26: 3, 1971, 211—212.
3. W. Koppelman. The Cauchy integral for differential forms, Bull. Amer. Math. Soc., 73. № 4, 1967, 554—556.

Ա. Ա. ՆԵՐՏԵՏՅԱՆ

ТЕОРЕМА ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ КАСАТЕЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В работе [1] У. Капланом доказано следующее утверждение:
Теорема. Пусть $f \in C^1(-\infty, +\infty)$, $\varepsilon \in C([0, +\infty))$, $\varepsilon > 0$. Существует такая целая функция G , что

$$\begin{aligned} |f(x) - G(x)| &< \varepsilon(|x|), \\ |f'(x) - G'(x)| &< \varepsilon(|x|); \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

Такого рода приближения назовем одновременным касательным приближением.

В работе [2] Л. Хойшен доказал возможность одновременного касательного приближения всех производных функций класса $C^\infty(-\infty, +\infty)$, целой функцией и ее производными. Автор доказал теорему об одновременном касательном приближении на счетной совокупности радиусов круга, лучей или достаточно гладких кривых, причем приближаются производные до произвольного фиксированного порядка [3]. Отметим также работу [4], где рассмотрено одновременное касательное приближение вместе с интерполяцией.

Теоремы о касательном приближении обычно дают удобное средство для построения примеров функций, имеющих заданное граничное поведение (см., например, [5]).

В настоящей работе доказывается теорема об одновременном касательном приближении на совокупности точек радиусов единичного круга, оканчивающихся на множестве типа F_σ и первой категории на единичной окружности (теорема 1). В п. 2^о приведено применение теоремы 1 к построению примера типа Ф. Багемила и У. Зейдела. Полученные в работе результаты допускают обобщения на случай других совокупностей вместо радиусов, например, на совокупности „tress“, введенной в [5], однако в настоящей работе такие обобщения не рассматриваются.

1^о. Пусть $D = \{z: |z| < 1\}$, $C = \partial D$, $D_p = \{z: |z| < r_p\}$, $r_p = \frac{2^p - 1}{2^p}$, $p \geq 0$, $E \subset [0, 2\pi]$ — множество типа F_σ первой категории по Бэру, $E = \bigcup_{p=0}^{\infty} E_p$, где множество $E_p \subset [0, 2\pi]$ — замкнутое нигде не плотное, K_p — совокупность замкнутых в D отрезков радиусов, заключенных между D_p и e^{iE_p} , $p \geq 0$; $K = \bigcup_{p=0}^{\infty} K_p$; $K \cap D_p = K^p$, $p \geq 0$.

Ниже принято обозначение

$$f^{(p)}(z) = e^{-ip\theta} \frac{d^p}{dr^p} f(z) \text{ при } z = re^{i\theta}, p \geq 0.$$

Если $S \subset D$ — некоторое множество, то обозначим через $C^{(p)}(S)$, $1 \leq p \leq \infty$, класс функций, значения радиальных производных которых до p -го порядка представляют функции, непрерывные на S . Будем говорить $f \in \bar{C}(K)$, если $f \in C^{(p)}(K \setminus K^{p-1})$, $p \geq 1$.

Теорема 1. Для произвольной пары f, ε , $f \in \bar{C}(K)$, $\varepsilon \in C([0, 1])$, $\varepsilon > 0$,

существует такая аналитическая в D функция g , что

$$|f^{(p)}(z) - g^{(p)}(z)| < \varepsilon(|z|),$$

если $z \in K \setminus K^p$, $p \geq 0$.

Доказательство. Не нарушая общности будем считать, что $\varepsilon < 1$ и не возрастающая.

Обозначим

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \exp \frac{x}{x-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{и } \chi_p(x) = \chi(2^{p-1}x), p \geq 1, c_p = \max_{1 \leq l \leq p} [\chi_p^{(l)}].$$

Очевидно $c_p > 1$, $p \geq 1$.

По теореме С. Н. Мергеляна о полиномиальном приближении ([6]) существует такой полином $p_1^{(1)}$, что

$$\|f' - p_1^{(1)}\|_{K^2} < \frac{\varepsilon(r_2)}{8 \cdot 2^2 \cdot c_1}. \quad (1)$$

Из неравенства (1) для полинома

$$p_1(z) = f(0) + \int_0^z p_1^{(1)}(z) dz$$

интегрированием по радиусам получаем

$$\|f - p_1\|_{K^2} < \frac{\varepsilon(r_2)}{8 \cdot 2^2 \cdot c_1}.$$

Таким образом, при $j = 0, 1$ имеем

$$\|f^{(j)} - p_1^{(j)}\|_{K^2} < \frac{\varepsilon(r_2)}{8 \cdot 2^2 \cdot c_1}. \quad (2)$$

Предположим, что при некотором $q \geq 1$ построены полиномы $p_1, \dots, p_q$ и $g_q = \sum_{j=1}^q p_j$, причем при $0 \leq j \leq q$

$$\|f^{(j)} - g_q^{(j)}\|_{K^{q+1} \setminus K^q} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8 \cdot 2^q \cdot c_q}. \quad (3)$$

Положим

$$h_q(z) = \chi_q(|z| - r_q)(f(z) - g_q(z)). \quad (4)$$

Имеем при $0 \leq k \leq q$, согласно (3) и $c_q > 1$

$$\begin{aligned} \|h_q^{(k)}\|_{K^{q+1} \setminus K^q} &\leq \sum_{j=0}^k \binom{j}{k} \|\chi_q^{(j)}\| \|f^{(k-j)} - g_q^{(k-j)}\|_{K^{q+1} \setminus K^q} < \\ &< \frac{2^k c_q}{8 \cdot 2^q \cdot c_q} \varepsilon(r_{q+1}) = \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично p_1 построим для $K^{q+1} \cup D_q$ и функции h_q такой полином p_{q+1} , что при $0 \leq j \leq q+1$

$$\|h_q^{(j)} - p_{q+1}^{(j)}\|_{K^{q+2} \cup D_q} < \frac{\varepsilon(r_{q+2})}{8 \cdot 2^q \cdot c_{q+1}}. \quad (6)$$

Согласно (4) и (6) имеем для $g_{q+1} = g_q + p_{q+1}$

$$\|f^{(j)} - g_{q+1}^{(j)}\|_{K^{q+2} \setminus K^{q+1}} < \frac{\varepsilon(r_{q+2})}{8 \cdot 2^q \cdot c_{q+1}} \quad (7)$$

при $0 \leq j \leq q+1$.

В силу (5), (6) при $0 \leq j \leq q$

$$\|p_{q+1}^{(j)}\|_{K^{q+1} \setminus K^q} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8 \cdot 2^q \cdot c_{q+1}} + \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{4}. \quad (8)$$

Сопоставляя (3) и (8), получаем при $0 \leq j \leq q$

$$\|f^{(j)} - g_{q+1}^{(j)}\|_{K^{q+1} \setminus K^q} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8 \cdot 2^q \cdot c_q} + \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{4} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{2}. \quad (9)$$

Отметим, что из (4), (5) вытекает при $0 \leq j \leq q$ и $q \geq 2$

$$\|p_q^{(j)}\|_{D_{q-1}} < \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{8 \cdot 2^q \cdot c_q}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что $g = \sum_{q=1}^{\infty} p_q$ аналитическая в D функция.

Пусть теперь $z \in K$ — произвольная фиксированная точка, $q \geq 0$ такое число, что $z \in K^{q+1} \setminus K^q$, а $0 \leq j \leq q$.

Согласно (9) и (10) имеем

$$|f^{(j)}(z) - g^{(j)}(z)| \leq |f^{(j)}(z) - g_{q+1}^{(j)}(z)| + \sum_{q=2}^{\infty} |p_q^{(j)}(z)| <$$

$$< \frac{\varepsilon(r_{q+1})}{2} + \frac{1}{8} \sum_{q+2}^{\infty} \frac{\varepsilon(r_{s+1})}{2^s c_s} < \varepsilon(|z|).$$

Теорема доказана.

2°. Пусть E — множество типа F , первой категории на $[0, 2\pi]$, $mE = 2\pi$.

Имеет место следующая

Теорема 2. Для произвольной последовательности $\{x_p\}$, $x_p \in C(E)$, $p \geq 0$, существует такая аналитическая в D функция A , что

$$\lim_{r \rightarrow 1} A^{(p)}(re^{i\vartheta}) = x_p(\vartheta)$$

при $\vartheta \in E$ и $p \geq 0$.

Сначала покажем, что для любой последовательности $x_p \in C(E)$ существует такая $A^* \in \bar{C}(K)$, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} A^{*(p)}(re^{i\vartheta}) = x_p(\vartheta)$$

при $\vartheta \in E$ и $p \geq 0$.

Доказательство является модификацией схемы Е. Берца [7].

Составим последовательность $\{\beta_p\}$ следующим образом:

$$\beta_p(\vartheta) = e^{ip\vartheta} x_p(\vartheta) \quad p \geq 0.$$

Определим последовательность функций $\{\varepsilon_p\}$, $0 < \varepsilon_p \in C(E)$, $p \geq 1$ с помощью равенств

$$\varepsilon_p(\vartheta) = \frac{1}{2^p \max(|\beta_p(\vartheta)|, 1)}, \quad \vartheta \in E. \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что существует такая последовательность $\{\varepsilon_p^*\}$, $0 < \varepsilon_p^* \in C(E)$, что функции

$$\varphi_p(re^{i\vartheta}) = (-1)^p \chi(r) \int_0^1 \dots \int_0^1 \chi\left(\frac{\sigma_1 + \varepsilon_p^*(\vartheta) - 1}{\varepsilon_p^*(\vartheta)}\right) d\sigma_1 \dots d\sigma_p$$

при $p \geq 1$ и

$$\varphi_0(re^{i\vartheta}) = \chi(r),$$

удовлетворяют условиям

$$\text{i) } \frac{\partial^p}{\partial r^p} \varphi_n(e^{i\vartheta}) = 0, \quad 0 \leq p, \quad p \neq n,$$

$$\text{ii) } \max_{r \in [0, 1]} \left| \frac{\partial^p}{\partial r^p} \varphi_n(re^{i\vartheta}) \right| < \varepsilon_n(\vartheta), \quad 0 \leq p \leq n-1, \quad \vartheta \in E,$$

$$\text{iii) } \frac{\partial^n}{\partial r^n} \varphi_n(e^{i\vartheta}) = 1$$

при $n \geq 1$.

Рассмотрим ряд

$$A^*(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(re^{i\theta}) \beta_n(\theta).$$

В силу (11) и ii) этот ряд и все его формальные радиальные производные ряды сходятся для всех $\theta \in E$ равномерно по $r \in [0, 1]$. Следовательно, для всех $\theta \in E$ $A^*(re^{i\theta})$ представляет собой бесконечно дифференцируемую по r функцию. Наконец i), iii) показывают, что функция A^* удовлетворяет требуемым условиям.

В качестве функции A можно теперь взять функцию, существование которой утверждается в теореме 1, примененной к функции A^* .

Теорема 2 доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 29.IX.1978

Ա. Հ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Թեորեմ միաժամանակյա շոշափումային մոտարկման մասին (ամփոփում)

Ինտարկված է միավոր շրջանագծի վրա առաջին կատեգորիայի F_σ տիպի E բազմության վրա վերջացող շառավիղների վրայով ֆունկցիայի և նրա բոլոր ածանցյալների շոշափումային մոտարկման խնդիրը: Որպես հետևանք թերեւս 1-ի ստացված է հետևյալ արդյունքը.

Թերեւս 2. Կամայական $\{x_p\}$, $x_p \in C(E)$, $p \geq 0$, հաջորդականության համար գոյութուն ունի միավոր շրջանում անալիտիկ այնպիսի A ֆունկցիա, որ

$$\lim_{r \rightarrow 1} A^{(p)}(re^{i\theta}) = x_p(e^{i\theta})$$

բոլոր n բացասական p -երի և $e^{i\theta} \in E$ համար:

A. H. NERSESIAN. A simultaneous tangential approximation theorem
(summary)

The problem of simultaneous tangential approximation of a function and all its derivatives along radii terminating in a set E of the first Baire category and of F_σ type on the unique circle is considered. The next result is obtained as a corollary of the Theorem 1.

Theorem 2. For any sequence $\{x_p\}$, $x_p \in C(E)$, there exists a function A analytical in the unique disk such that

$$\lim_{r \rightarrow 1} A^{(p)}(re^{i\theta}) = x_p(e^{i\theta})$$

for all $p \geq 0$ and $e^{i\theta} \in E$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. W. Kaplan. Approximation by entire functions, Mich. Math. Journ., 3, 1955—1956, 43—52.
2. L. Hoischen. Eine Verschärfung eines Approximationssatzes von Carleman, Journ. Approx. Theory, 3, 1973, 272—277.
3. А. А. Нерсисян. Об одновременном приближении с касанием функций и их производных, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Матем.“, 8, № 6, 1973, 464—473.

4. L. Hoischen. Approximation und Interpolation durch ganze Funktionen, Journ. Approx. Theory, 15, 1975, 116—123.
5. F. Bagemihl, W. Setdel. Some boundary properties of analytic functions, Math. Zeitsch, 61, 1954—1955, 186—199.
6. С. Н. Мерелян. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН. 7, вып. 2, 1952, 31—122.
7. E. Berz. Operatoren verallgemeinerter Funktionen, Math. Ann., 158, 1965, 215—232.

Г. М. АЙРАПЕТЯН

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПОДКЛАССАХ H_1 И H_∞ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ИНТЕГРАЛОМ КОШИ

(а) Пусть $\{a_k\}_1^\infty$ — последовательность попарно различных точек из единичного круга $|z| < 1$, удовлетворяющих условию Бляшке

$$\sum_1^\infty (1 - |a_k|) < \infty, \quad (1)$$

а $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{a_k\}_1^\infty$:

$$B(z) = \prod_{k=1}^\infty \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} \frac{|a_k|}{a_k}.$$

Пусть, далее, H_p , $(1 \leq p \leq \infty)$ — класс Харди с нормой

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p},$$

при $1 \leq p < \infty$ и

$$\|f\|_\infty = \sup_{|z| < 1} |f(z)|, \text{ при } p = \infty.$$

Следуя М. М. Джрбашяну [1], обозначим через $\lambda_p \{a_k\}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ класс функций, определенных вне точек окружности $|z| = 1$ и удовлетворяющих условиям:

1. $f(z) \in H_p$, при $|z| < 1$;

2. $f(z) = B(z) \tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right)$, при $|z| > 1$, причем $\tilde{f}(z) \in H_p$ и $\tilde{f}(0) = 0$;

3. Угловые граничные значения функции $f(z)$ изнутри и извне окружности $|z| = 1$ почти всюду совпадают.

б) Пусть оператор T_p каждой функции $f \in H_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ сопоставляет последовательность

$$T_p(f) \rightarrow \{f(a_k)(1 - |a_k|^2)^{1/p}\}_1^\infty, \quad (2)$$

при $1 \leq p < \infty$, и

$$T_\infty(f) \rightarrow \{f(a_k)\}_1^\infty, \quad (3)$$

при $p = \infty$.

В работе [2] Л. Карлесоном было доказано, что если последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\inf_{k=1, 2, \dots, j+k} \prod_{j=1}^{j+k} \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k} \right| = \delta > 0, \quad (4)$$

то

$$T_-(H_-) = l_-. \quad (5)$$

Позже в работе [3] Шапиро и Шилдс при условии (4) установили включение $T_p(H_p) \subset l_p$ ($0 < p < \infty$), а также доказали, что это условие необходимо и достаточно для справедливости равенства $T_p(H_p) = l_p$ ($1 \leq p < \infty$). С другой стороны, Кабайла [4] установил, что при том же условии (4) имеет место включение $l_p \subset T_p(H_p)$, $p < 1$. Таким образом, условие (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$T_p(H_p) = l_p \quad (0 < p < \infty). \quad (6)$$

Тем самым, для любой последовательности $\{w_k\}_1^\infty$, подчиненной условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p (1 - |a_k|^2) < \infty \quad (p < \infty), \quad (7)$$

существует функция $f(z) \in H_p$ такая, что

$$f(a_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

и обратно, для любой функции $f(z) \in H_p$ ($p < \infty$) выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(a_k)|^p (1 - |a_k|^2) < \infty. \quad (9)$$

Очевидно, что при условии (4) решение интерполяционной задачи (7)–(8) не единственно.

В работе автора [5] было доказано, что при условии (4) интерполяционная задача (7)–(8) разрешима в $h_p\{a_k\}$ ($1 < p < \infty$) однозначно и интерполирующую функцию можно представить в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \Omega_k(z), \quad (10)$$

где

$$\Omega_k(z) = \frac{B(z)}{(z - a_k) B'(a_k)}. \quad (11)$$

Тем самым, если $\{a_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (4), что будем записывать так: $\{a_k\}_1^\infty \in \Delta_1$, то при $1 < p < \infty$ выполняется соотношение

$$T_p(\lambda_p\{a_k\}) = l_p. \quad (12)$$

(в) В настоящей работе рассматриваются аналогичные вопросы для пространств $\lambda_1\{a_k\}$ и $\lambda_\infty(\{a_k\})$. Полученные результаты используются также для исследования следующего вопроса: Пусть $B(z)$ — некоторое произведение Бляшке с нулями $\{a_k\}_1^\infty$. Рассмотрим функцию

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad f \in H_p \quad (1 \leq p \leq \infty). \quad (13)$$

Каким должно быть произведение Бляшке, чтобы для любой функции $f \in H_1$ (или H_∞) соответствующая функция $F_f(z)$ принадлежала классу H_1 (или H_∞)? Приведем краткое содержание работы.

В § 1 приводятся важные для дальнейшего леммы, в основе доказательства которых лежит формула М. М. Джрбашяна (см. [6]) о представлении ядра Коши посредством биортогональных систем.

В § 2 доказывается, что при $\{a_k\}_1^\infty \in \Delta_1$ интерполяционная задача (7)–(8) при $p = 1$ неразрешима в $\lambda_1\{a_k\}$ (теорема 1). На основании этого результата в теореме 2 доказывается, что условие конечности произведения Бляшке $B(z)$ необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции $f \in H_1$ соответствующая функция $F_f(z)$ принадлежала классу H_1 . По поводу этой теоремы отметим, что недавно другими методами Д. Сидженжом [7] был получен более сильный результат такого же рода, где вместо произведения Бляшке стоит любая внутренняя функция.

Ситуация иная в случае $p = \infty$. А именно, в теореме 3 доказывается следующее утверждение: для справедливости соотношения

$$T_\infty(\lambda_\infty\{a_k\}) = l_\infty \quad (14)$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ удовлетворяла равномерному условию Фростмана (см. статью С. А. Виноградова и В. П. Хавина [8]):

$$\sup_{|\zeta|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - \bar{\zeta} a_k|} < \infty. \quad (15)$$

В теореме 4 доказывается, что если произведение Бляшке $B(z)$ представимо в виде $B(z) = B_1(z) \cdots B_m(z)$, где $B_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) произведения Бляшке, нули которых удовлетворяют условиям (4) и (15), то для любой функции $f(z) \in H_\infty$ соответствующая функция $F_f(z)$ из (13) принадлежит классу H_∞ . В последней теореме (теорема 5) приводится одно условие для нулей произведения Бляшке, при котором такое утверждение не верно, т. е. не для любой функции $f \in H_\infty$ соответствующая функция $F_f(z)$ принадлежит H_∞ .

§ 1. Предварительные леммы

(а). Для любого целого $n \geq 1$ введем в рассмотрение функции

$$\Omega_{n,k}(z) = \frac{B_n(z)}{(z - a_k) B'_n(a_k)} = \frac{B_n(z) (1 - |a_k|^2)}{(z - a_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k}} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

где

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^n \frac{a_j - z}{1 - \bar{a}_j z} \frac{|a_j|}{a_j}.$$

Следующая лемма является частным случаем более общей леммы из работы М. М. Джрбашяна [6].

Лемма 1. Для произвольных значений переменных z и ζ имеет место тождество

$$\frac{1}{1 - \bar{\zeta} z} = \sum_{k=1}^n \overline{r_k(\zeta)} \Omega_{n,k}(z) + \frac{\overline{B_n(\zeta)} B_n(z)}{1 - \bar{\zeta} z}, \quad (1.2)$$

где

$$r_k(z) = \frac{1}{1 - z \bar{a}_k} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1.3)$$

Сформулируем одну лемму, характеризующую классы $\lambda_p\{a_k\}$ ($1 \leq p \leq \infty$), которая в случае $p=2$ установлена в работе М. М. Джрбашяна [1], а в общем случае — в работе автора [5].

Лемма 2. Для того чтобы $f(k) \in H_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) принадлежала классу $\lambda_p\{a_k\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0, \quad |z| < 1. \quad (1.4)$$

Как следствие из лемм 1 и 2 получаем следующее утверждение

Лемма 3. Если $f(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ ($1 \leq p \leq \infty$) и $f(a_k) = 0$ ($k=1, 2, \dots$), то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Применяя тождество (1.2) для любой функции $f(z) \in H_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) будем иметь

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta} z} |d\zeta| = \sum_{k=1}^n f(a_k) \Omega_{n,k}(z) + \\ &+ \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\bar{B}_n(\zeta) = \prod_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k - \zeta}{1 - \bar{a}_k \zeta} \frac{|a_k|}{a_k},$$

для любого z ($|z| < 1$) будем иметь

$$\left| \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z} - \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z} \right| \leq \frac{1}{1-|z|} \int_{|\zeta|=1} |f(\zeta) - \tilde{B}_n(\zeta) f(\zeta)| |d\zeta| \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (1.5)$$

так как (см. [9])

$$\|\tilde{B}_n(\zeta) - 1\|_{L_1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(6) Нам необходима также следующая

Лемма 4. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Delta_1$, тогда для любой функции $f(z) \in H_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) имеет место тождество

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k) \Omega_k(z) + \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad (1.6)$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно вне замыкания множества $E = \{1/\bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Поскольку $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Delta_1$, то

$$|\delta_k| > \delta > 0 \quad (1 \leq k < \infty) \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} |f(a_k)|(1-|a_k|^2) < \infty,$$

где

$$\delta_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k} \frac{|a_j|}{a_j}.$$

Значит ряд в (1.6) или, что то же, ряд

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(a_k)}{(z - a_k)} \frac{B(z)(1-|a_k|^2)}{\delta_k} \quad (1.7)$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве дополнения множества E и там определяет аналитическую функцию $\tilde{f}(z)$.

Применяя формулу (1.2) леммы 1, для любой функции $f(z) \in H_p$ ($1 \leq p \leq \infty$), как и в лемме 3, будем иметь

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=1}^n f(a_k) \Omega_{n,k}(z) + \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{f(a_k) B_n(z)(1-|a_k|^2)}{(z - a_k) \delta_{n,k}} + \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\delta_{n,k} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k} \frac{|a_j|}{a_j}.$$

Так как согласно (1.5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

причем сходимость равномерна на любом компакте из $|z| < 1$, то для доказательства леммы надо установить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(z) \sum_{k=1}^n \frac{f(a_k)(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_{n,k}} = \tilde{f}(z) \quad (1.9)$$

для любого z из единичного круга $|z| < 1$. С этой целью для заданных $0 < r < 1$ и $\varepsilon > 0$ возьмем $N_0 > 0$ так, чтобы при $|z| \leq r$ выполнялось неравенство

$$\sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|\delta_k} < \varepsilon.$$

Поскольку $|\delta_{N,k}| > \delta_k > \delta$, то для $|z| \leq r$ и $N > N_0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^N \frac{f(a_k)(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_{N,k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(a_k)(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_k} \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{N_0} \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|} \left| \frac{1}{\delta_{N,k}} - \frac{1}{\delta_k} \right| + \\ & + \sum_{k=N_0+1}^N \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|\delta_{N,k}} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|\delta_k} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{N_0} \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|} \left| \frac{1}{\delta_{N,k}} - \frac{1}{\delta_k} \right| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $\delta_{N,k} \rightarrow \delta_k$ ($N \rightarrow \infty$), то для фиксированного $N_0 > 0$ и $z \neq a_k$ ($k = 1, 2, \dots$) при $N \rightarrow \infty$ будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{N_0} \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|} \left| \frac{1}{\delta_{N,k}} - \frac{1}{\delta_k} \right| \rightarrow 0.$$

Тем самым при $z \neq a_k$ ($k = 1, 2, \dots$) соотношение (1.9) доказано, а при $z = a_k$ ($k = 1, 2, \dots$) его справедливость очевидна.

§ 2. Основные теоремы

2.1. (а) Сначала рассмотрим случай $p = 1$.

Теорема 1. Пусть $\{a_k\}_1^{\infty} \in \Delta_1$, тогда имеет место строгое включение

$$T_1(\lambda_1 | a_k|) \subset l_1. \quad (2.1)$$

Доказательство. Допустим противное

$$T_1(\lambda_1 | a_k|) = l_1. \quad (2.2)$$

Тогда из леммы 3 будет следовать, что оператор T_1 взаимнооднозначно отображает пространство $\lambda_1 |a_k|$ на l_1 . Применяя теорему о замкнутом графике, заключаем, что оператор T_1^{-1} , обратный к оператору T_1 , есть ограниченный оператор из l_1 на $\lambda_1 |a_k|$.

Из лемм 2 и 4 следует, что для любой последовательности $\{w_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию

$$\sum_1^\infty |w_k| (1 - |a_k|^2) < \infty, \quad (2.3)$$

существует единственная функция $f(z) \in \lambda_1 \{a_k\}$ такая, что

$$f(a_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

и эту функцию можно представить в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_1^\infty w_k \Omega_k(z) = B(z) \sum_1^\infty \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{(z - a_k) \delta_k}. \quad (2.5)$$

Предполагая, что $z=1$ есть предельная точка для последовательности $\{a_k\}_1^\infty$ (что не нарушает общности), возьмем некоторую последовательность $\{w_k\}_1^\infty$, удовлетворяющую условиям

$$\sum_1^\infty |w_k| (1 - |a_k|^2) < \infty,$$

$$\sum_1^\infty \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{\delta_k} \log \left(- \frac{1 + a_k}{1 - a_k} \right) = \infty. \quad (2.6)$$

Из ограниченности оператора T_1^{-1} следует, что существует число C ($0 < C < \infty$) такое, что

$$\sup_{n=1, 2, \dots} \left\| B(z) \sum_1^n \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{(z - a_k) \delta_k} \right\|_{L_1} < C. \quad (2.7)$$

Применяя теорему Хана-Банаха, получим

$$\begin{aligned} \left\| B(z) \sum_1^n \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{(z - a_k) \delta_k} \right\|_{L_1} &= \left\| \sum_1^n \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{(z - a_k) \delta_k} \right\|_{L_1} = \\ &= \sup_{\substack{g \in L_\infty \\ \|g\|_\infty \leq 1}} \left| \int_{|z|=1} \sum_1^n \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{(\zeta - a_k) \delta_k} g(\zeta) |d\zeta| \right|. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Пусть $g(\zeta) = g(e^{i\theta})$ определена так:

$$g(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0, & \text{если } \pi < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Тогда из (2.8) будем иметь

$$\left| B(z) \sum_1^n \frac{w_k (1-|a_k|^2)}{(z-a_k) \delta_k} \right| \geq \left| \sum_1^n \frac{w_k (1-|z_k|^2)}{\delta_k} \log \left(-\frac{1+a_k}{1-a_k} \right) \right|.$$

Учитывая (2.6), получим противоречие с (2.7), тем самым теорема доказана.

(6) Пусть $B(z)$ — некоторое произведение Бляшке с нулями $\{z_k\}_1^\infty$. Каждой функции $f(z) \in H_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) сопоставим функцию

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Как следствие теоремы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 2. Для того чтобы для любой функции $f(z) \in H_1$ функция $F_f(z)$ принадлежала классу H_1 , необходимо и достаточно, чтобы $B(z)$ было конечным произведением Бляшке.

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем необходимость. Легко заметить, что можно предполагать, что последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию Л. Карлесона (4). Тогда учитывая теорему Шапиро и Шилдса из лемм 4 и 2 заключаем, что для любой последовательности $\{w_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию (2.3), функция

$$\tilde{f}(z) = \sum_1^\infty w_k \Omega_k(z)$$

принадлежит классу $\lambda_1\{z_k\}$, иначе говоря, интерполяционная задача (7)–(8) разрешима в $\lambda_1\{z_k\}$ для любой последовательности, удовлетворяющей условию (2.3). Но это противоречит теореме 1.

Теорема доказана.

2.2. (а) С л у ч а й $p = \infty$. Будем говорить, что последовательность $\{z_k\}$ удовлетворяет равномерному условию Фростмана, если

$$\sup_{|\zeta|=1} \sum_{k=1}^\infty \frac{1-|a_k|^2}{|1-\bar{\zeta}a_k|} = M < \infty. \quad (2.9)$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Если $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta_1$, то для справедливости соотношения

$$T_-(\lambda_- \{z_k\}) = l_- \quad (2.10)$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяла условию (2.9).

Доказательство. Необходимость. Из лемм 2, 3 и 4 следует, что если выполняется (2.10), то для любой последовательности $w = \{w_k\}_1^\infty \in l_\infty$ существует единственная функция $f_w(z) \in \lambda_- \{z_k\}$, удовлетворяющая условиям

$$f_w(a_k) = w_k \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

и эту функцию можно представить в виде ряда

$$f_w(z) = \sum_1^{\infty} w_k \Omega_k(z) = \sum_1^{\infty} w_k \frac{B(z)(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_k}. \quad (2.12)$$

Применяя теорему о замкнутом графике, можем утверждать, что существует некоторая постоянная C ($0 < C < \infty$) такая, что для любой последовательности $w = \|w_k\|_1^{\infty} \in l_{\infty}$, $\|w\|_{\infty} \leq 1$ и для любого целого $n > 0$ будет выполняться неравенство

$$\|f_w\|_{\infty} = \left\| \sum_1^n \frac{w_k(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_k} \right\|_{\infty} = \max_{|z|=1} \left| \sum_1^n \frac{w_k(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_k} \right| < C, \quad (2.13)$$

в частности, если для z ($|z|=1$) положить

$$w_j = \begin{cases} \exp(-i \arg(z-a_j)\delta_j), & j \leq n, \\ 0 & , j > n, \end{cases}$$

то будем иметь

$$\sum_1^n \frac{1-|a_k|^2}{|z-a_k|\delta_k} < C, \quad |z|=1, \quad n > 1, \quad (2.14)$$

что эквивалентно условию (2.9).

Достаточность. Так как $|\delta_k| \geq \delta$ ($k=1, 2, \dots$), то очевидно, что для любой последовательности $\{w_k\}_1^{\infty} \in l_{\infty}$ ряд

$$f(z) = \sum_1^{\infty} w_k \Omega_k(z) \quad (2.15)$$

сходится абсолютно и равномерно вне замыкания множества $E = \{1/a_k\}_1^{\infty}$ и там, определяет некоторую аналитическую функцию. Обозначив

$$S_n(z) = \sum_1^n w_k \Omega_k(z), \quad (2.16)$$

согласно (2.9) будем иметь

$$\begin{aligned} \|S_n(z)\|_{L_{\infty}} &= \sup_{\substack{g \in L_1 \\ \|g\|_1=1}} \left| \int_{|\zeta|=1} \sum_1^n \frac{w_k(1-|a_k|^2)}{(\zeta-a_k)\delta_k} g(\zeta) |d\zeta| \right| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{g \in L_1 \\ \|g\|_1=1}} \int_{|\zeta|=1} \sum_1^n \frac{|w_k|(1-|a_k|^2)}{|1-\bar{\zeta}a_k|\delta_k} |g(\zeta)| \leq \|w\|_{\infty} \cdot M. \end{aligned}$$

Так что функция из (2.15) принадлежит классу $\lambda_{\alpha}\{a_k\}$ и $f(a_k) = w_k$ ($k=1, 2, \dots$), и теорема доказана.

(6) Теорема 4. Пусть $B_1(z), \dots, B_m(z)$ ($m \geq 1$) — произведения Бляшке, нули которых удовлетворяют условиям (4) и (2.9), и $B(z) = B_1(z) \cdots B_m(z)$. Тогда для любой функции $f(z) \in H_{\infty}$ функция

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (|z| < 1)$$

принадлежит классу H_∞ .

Доказательство. Из леммы 4 для любой функции $f(z) \in H_\infty$ при $k=1, 2, \dots, m$ имеем

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f(z_j^{(k)}) \frac{B_k(z)}{(z - z_j^{(k)}) B_k(z_j^{(k)})} + \frac{B_k(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_k(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad (2.17)$$

где $\{z_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$ ($k=1, 2, \dots$) — нули функции $B_k(z)$ ($k=1, 2, \dots$). Применяя здесь теорему 3, заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_k(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H_\infty \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (2.18)$$

и наша теорема при $m=1$ доказана.

Из (2.17) и (2.18) следует также, что каждую функцию $f(z) \in H_\infty$ можно представить в виде

$$f(z) = f_1(z) + B_m(z) f_2(z), \quad (2.19)$$

где $f_1(z) \in \lambda_\infty \{z_k\}$ и $f_2(z) \in H_\infty$.

Предположим теперь, что для любой функции $f(z) \in H_\infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_1(\zeta) \cdots B_{m-1}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H_\infty. \quad (2.20)$$

Тогда используя (2.19), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta) + B_m(\zeta) f_2(\zeta)}{B_1(\zeta) \cdots B_m(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f_2(\zeta)}{B_1(\zeta) \cdots B_{m-1}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из определения класса $\lambda_\infty \{z_k^m\}$ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{B_m(\zeta) \tilde{f}_1(1/\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\tilde{f}_1(1/\zeta)}{B_1(\zeta) \cdots B_{m-1}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0 \quad (|z| < 1), \end{aligned}$$

так что из (2.21), учитывая (2.20), будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H_\infty$$

и, тем самым, теорема доказана.

(в) Предположим теперь, что последовательность нулей $\{z_k\}_1^\infty$ произведения Бляшке $B(z)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{|\zeta|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \bar{\zeta} z_k|} = \infty \quad (2.22)$$

(в частности, последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (2.22), если она содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке единичной окружности по некасательному пути).

Теорема 5. Если последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ содержит хотя бы одну подпоследовательность, удовлетворяющую условиям (2.22) и (4), то существует функция $f(z) \in H_\infty$ такая, что функция

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

не принадлежит классу H_∞ .

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2, только вместо теоремы Шапиро и Шилдса надо воспользоваться теоремой Карлесона.

Замечание. Отметим, что можно привести пример последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условиям (1) и (2.22), которая не содержит ни одной подпоследовательности, одновременно удовлетворяющей условиям (2.22) и (4). Покажем, как можно построить такую последовательность. Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ ($|z_k| < 1$) удовлетворяет условию (2.9). Пусть, далее, $K_n = \{z; |z - z_k| |1 - \bar{z}_k z|^{-1} < p_k\}$, $p_k \downarrow 0$, такая последовательность непересекающихся кругов из $|z| < 1$, что любая последовательность $\{w_j\}_1^\infty$ ($w_j \in K_j$) удовлетворяет условию (2.9) (о возможности построения таких кругов K_j см. [7]). Если ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$) — предельная точка для последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/|1 - \bar{\zeta}_0 z_k| = \infty$. Значит для некоторой последовательности натуральных чисел $m_j \downarrow \infty$ будем иметь

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2) m_j < +\infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - |z_j|^2}{(1 - \bar{\zeta}_0 z_j)} m_j = +\infty.$$

Тогда легко видеть, что в каждом круге K_j можно выбрать m_j различных точек, так чтобы последовательность $\{z_j\}_1^\infty$ всех этих точек удовлетворяла условиям (1) и (2.22). Остается заметить, что в силу выбора кругов K_j и того факта, что $\{z_l\}_1^\infty \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, как только некоторая подпоследовательность последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (4), то она удовлетворяет также условию (2.9).

2. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. H_1 և H_∞ դասերի ենթադասերում ինտերպոլացիայի մասին և կոնյուգատի հետ կապված որոշ հարցեր (ամփոփում)

Այս աշխատանքում դիտարկվում են ինտերպոլացիայի հարցերը $\lambda_1\{z_k\} \subset H_1$ և $\lambda_\infty\{z_k\} \subset H_\infty$ ենթադասերում: Բացի այդ ստացված արդյունքները կիրառվում են հետևյալ հարցի ուսումնասիրության համար: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի $B(z)$ Բլաշկեի արտադրար, որպեսզի ցանկացած $f \in H_1$ (կամ H_∞) համար

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

ֆունկցիան պատկանա H_1 -ին (կամ H_∞ -ին),

G. M. AIRAPETIAN. *About interpolation for subclasses from H_1 and H_∞ and some questions connected with integral Coushe (summary)*

Some interpolation problems in subspaces $\lambda_1\{z_k\} \subset H_1$ and $\lambda_\infty\{z_k\} \subset H_\infty$ are investigated. The results are applied in investigation of the following problem. Describe the Blaschke product $B(z)$ such that for every function $f \in H_1$ (or H_∞)

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

will lie in H_1 (or in H_∞).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян. Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
2. L. Carleson. An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 80, 1958, 921—930.
3. H. S. Shapiro, A. L. Shields. On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
4. В. Кабайла. Интерполяционные последовательности для классов H_p в случае $p < 1$, Liet. matem. rink., III, 1, 1963, 141—147.
5. Г. М. Айрапетян. О базисе рациональных функций в подпространствах классов H_p ($1 < p < \infty$), Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 429—450.
6. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—403.
7. D. A. Stegenga. Bounded Toeplitz operators on H' and application of the duality between H' and the functions of bounded mean oscillation., Amer. J. Math., 98, № 3, 1976, 573—589.
8. С. А. Виноградов, В. П. Хавин. Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 47, 1974, 15—44.
9. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.

Ш. А. ГРИГОРЯН

О БАЗИСНОСТИ НЕПОЛНЫХ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

1°. В работе М. М. Джрбашяна [1] была построена система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональная на окружности $|z|=1$ с системой рациональных функций

$$r_k(z) = \frac{(s_k - 1)! z^{s_k - 1}}{(1 - \bar{a}_k z)^{s_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\{a_k\}_1^\infty$ ($|a_k| < 1$) удовлетворяет условию Бляшке, а $s_k \geq 1$ — кратность появления числа a_k на отрезке $|a|_1^k$. В дальнейшем было показано, что тем же методом можно построить системы $\{r_k(w)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(w)\}_1^\infty$, биортогональные на вещественной оси [2]. При этом в качестве системы $\{r_k(w)\}_1^\infty$ бралась система рациональных функций

$$r_k(w) = \frac{(s_k - 1)!}{(w - \beta_k)^{s_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $\{\beta_k\}_1^\infty$, ($\text{Im } \beta_k > 0$) удовлетворяет лишь условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Im } \beta_k}{1 + |\beta_k|^2} < +\infty, \quad (3)$$

а $s_k \geq 1$ — кратность появления числа β_k на отрезке $|\beta|_1^k$.

Биортогональные системы М. М. Джрбашяна позволили решить ряд задач анализа. Так, с помощью системы $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, представляющей модификацию системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ и также биортогональной с системой (1), в его работе [3] было получено чисто аналитическое решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_1 Харди. В дальнейшем им же в работе [4] было получено полное решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классах H_+^p ($1 < p < +\infty$) в полуплоскости $\text{Im } z > 0$. Основой для этого послужили системы $\{r_k(w); \Omega_k(w)\}_1^\infty$, биортогональные на вещественной оси. В этой же работе [4] был получен критерий базисности систем $\{r_k(w)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(w)\}_1^\infty$ в подпространствах Харди-Тамаркина H_-^p ($1 < p < +\infty$) в полуплоскости $\text{Im } z > 0$.

С другой стороны, системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональные на окружности $|z|=1$, послужили основой для полного решения поставленных в работе [1] задач о базисности этих систем в подпространствах пространств H_p ($1 < p < +\infty$) Харди в круге $|z| < 1$, а

также интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классах H_p ($0 < p < +\infty$). Этим вопросам были посвящены работы Г. М. Айрапетяна [5], [6], [7].

В цитированной выше работе [1] с помощью системы (1) для любого ограниченного континуума K были построены также системы простейших рациональных дробей $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ с полюсами, лежащими на произвольной последовательности $\{\omega_k\}_1^\infty \subset K$. Наряду с системами $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ для любого n ($1 \leq n < +\infty$) была построена также система $\{p_{n,k}^{(s)}(z)\}_{k=1}^n$ аналитических вне континуума K функций. В случае, когда K — жорданова область со спрямляемой границей Γ , была доказана биортогональность этих двух систем на Γ .

Отметим, что система $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ представляет собой существенное обобщение классической системы полиномов Фабера и ее модификацией.

2. В настоящей статье мы используем предложенный в работе [1] метод для построения систем функций, биортогональных на границах бесконечных угловых областей, и устанавливаем критерий их базисности в определенных пространствах функций, аналитических в угловых областях.

Чтобы сформулировать основные результаты, приведем сначала несколько определений и обозначений.

Для произвольного p ($\frac{1}{2} < p < +\infty$) обозначим через

$$\Delta(p) = \left\{ z; |\arg z| < \frac{\pi}{2p}; 0 < |z| < +\infty \right\}$$

угловую область на конечной комплексной плоскости.

Пусть $\alpha = p/2p - 1$, тогда угловая область

$$\Delta(\alpha) = \left\{ z; |\arg(-z)| < \frac{\pi}{2\alpha}; 0 < |z| < +\infty \right\}$$

является дополнением к замыканию $\Delta(p)$; положим, далее, что L_p — обшая граница областей $\Delta(p)$ и $\Delta(\alpha)$.

Обозначим через $H^p[p]$ ($0 < p < +\infty$) пространство функций $f(z)$, аналитических в $\Delta(p)$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H^p[p]} \equiv \sup_{|\theta| < \frac{\pi}{2p}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\theta})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Пусть, далее, последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ из $\Delta(\alpha)$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k^{\alpha}}{1 + |\lambda_k|^{2\alpha}} < +\infty. \quad (4)$$

Для любого $k \geq 1$ обозначим через $s_k \geq 1$ кратность появления λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^\infty$.

С последовательностью $\{\bar{\lambda}_j^\alpha\}_1^\infty$ ассоциируем систему функций $\{r_k(w)\}_1^\infty$, где

$$r_k(w) = \frac{(s_k - 1)!}{(-w - \lambda_k^\alpha)^{s_k}}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Функция $w = \varphi(z) = -(-z)^2$ отображает левую полуплоскость $G^- = \{w; \operatorname{Re} w < 0\}$ на область $\Delta(\alpha)$.

Введем функции

$$\psi_k(z; \alpha) = r_k(\varphi(z))[\varphi'(z)]^{1/p} = \frac{(s_k - 1)! [\alpha(-z)^{\alpha-1}]^{1/p}}{[(-z)^\alpha - \lambda_k^\alpha]^{s_k}},$$

очевидно, для любого $k \geq 1$, имеющие полюс в точке $z = -\lambda_k$ кратности s_k .

Теперь для любого $k \geq 1$ рассмотрим их главную часть, т. е.

$$m_k(z; \alpha) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}(\alpha)}{(z + \lambda_k)^j}, \quad a_{s_k}^{(k)}(\alpha) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Легко видеть, что $m_k(z; \alpha) \in H^p[\rho] (1 < p < +\infty) (1 \leq k < +\infty)$. Наряду с системой $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ введем систему функций $\{\rho_k(z; \alpha)\}_1^\infty$, положив

$$\rho_k(z; \alpha) = \overline{\Omega_k(-\overline{\varphi(z)})} [\varphi'(z)]^{1/q}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $q = p/(p-1)$, а $\Omega_k(w) (1 \leq k < +\infty)$ определяется из (1.9) § 1. Следует отметить, что $\rho_k(-z; \alpha) \in H^q[z] (1 < q < \infty) (1 \leq k < +\infty)$.

Системы $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ и $\{\rho_k(z; \alpha)\}_1^\infty$, как показано в лемме 2.3 § 2, биортогональны в смысле

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(t; \alpha) \rho_l(t; \alpha) dt = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \quad k, l = 1, 2, \dots.$$

Пусть, далее, последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (4). Обозначим через $L_p^\alpha\{\lambda_k\} (1 < p < +\infty)$ пространство функций, аналитических вне множества $L_p \cup \{-\lambda_k\}_1^\infty$ и удовлетворяющих условиям:

$$1) f(z) \in H^p[\rho] (1 < p < +\infty), \quad z \in \Delta(\rho),$$

$$2) f(z) = \bar{f}(z) B_\alpha^{-1}(-z), \quad \text{где } \bar{f}(-z) \in H^p[z], \quad z \in \Delta(\alpha),$$

а $B_\alpha(z)$ — функция типа Бляшке с нулями в точках $z = \lambda_k (1 \leq k < +\infty)$,

$$B_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z^\alpha - \lambda_k^\alpha}{z^\alpha + \bar{\lambda}_k^\alpha} \frac{|1 - \lambda_k^{2\alpha}|}{1 - \lambda_k^{2\alpha}}, \quad z \in \Delta(\alpha),$$

3) угловые граничные значения $f(z)$ слева и справа от L_p почти всюду совпадают.

Из теоремы 3.1, § 3 следует, что замыкание в $L^p[\rho]$ системы $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ совпадают с пространством функций $\lambda_\rho^\alpha \{\lambda_k\}$.

Наконец, сформулируем основной результат настоящей работы.

Если последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$, кроме условия (4), удовлетворяет также условию $\sup_{k \geq 1} \{s_k\} < +\infty$, то справедлива

Теорема 3.2. Для того чтобы система рациональных функций $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ являлась базисом в замыкании своей линейной оболочки, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_k + \lambda_j}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k^\alpha - \lambda_j^\alpha}{\lambda_k^\alpha + \bar{\lambda}_j^\alpha} \right| \geq \delta > 0.$$

§ 1. Предварительные сведения

Введем в рассмотрение пространства $H^p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) функций $f(w)$, аналитических в правой полуплоскости $G^+ = \{w; \operatorname{Re} w > 0\}$, для которых

$$\|f\|_{H^p(G^+)} \equiv \|f\|_p^+ \equiv \sup_{x > 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^p dy \right)^{1/p} < +\infty. \quad (1.1)$$

Как известно [8], для любой функции $f \in H^p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) существуют угловые граничные значения $f(iy) \in L_p(-\infty, +\infty)$, причем

$$\|f\|_p^+ = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(iy)|^p dy \right)^{1/p}. \quad (1.2)$$

Аналогично под $H^p(G^-)$ ($0 < p < +\infty$) будем понимать пространства функций $\varphi(w)$, аналитических в левой полуплоскости $G^- = \{w; \operatorname{Re} w < 0\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|_{H^p(G^-)} \equiv \|\varphi\|_p^- \equiv \sup_{x < 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x + iy)|^p dy \right)^{1/p} < +\infty. \quad (1.3)$$

Очевидно, что если $f(w) = \varphi(-w)$, то

$$\|\varphi\|_p^- = \|f\|_p^+.$$

Пусть $\{\beta_k\}_1^\infty$ ($\operatorname{Re} \beta_k > 0$) — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут быть числа конечной и даже бесконечной кратности. Для любого $k \geq 1$ через $s_k > 1$ и $p_k > 1$ обозначим кратности появления числа β_k на отрезке $\{\beta_j\}_1^k$ и во всей последовательности $\{\beta_j\}_1^\infty$ соответственно. Последовательность $\{\beta_j\}_1^\infty$ отнесем классу $\Delta(P)$, если выполняются условия

$$\inf_{k>1} \prod_{\substack{j=1 \\ \beta_j \neq \beta_k}}^{\infty} \left| \frac{\beta_k - \beta_j}{\beta_k + \bar{\beta}_j} \right| > \delta > 0, \quad (1.4)$$

$$\sup_{k>1} |\rho_k| = P < +\infty. \quad (1.5)$$

Отметим, что из (1.4) вытекает условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \beta_j}{1 + |\beta_j|^2} < +\infty, \quad (1.6)$$

которое обеспечивает существование функции Бляшке для правой полуплоскости с нулями в точках $\{\beta_j\}_1^{\infty}$:

$$B(w) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{w - \beta_j}{w + \bar{\beta}_j} \frac{|1 - \beta_j^2|}{1 - \beta_j^2}, \quad (1.7)$$

условившись полагать $\frac{|a|}{a} = -1$, при $a = 0$.

Теперь приведем некоторые факты, известные для верхней полуплоскости, но для удобства перефразировав их для правой полуплоскости.

Рассмотрим биортогональные системы функций $\{r_k(w); \Omega_k(w)\}_1^{\infty}$, (см. [2]), ассоциированные с последовательностью $\{\beta_j\}_1^{\infty}$ ($\operatorname{Re} \beta_j > 0$), удовлетворяющей условию (1.6):

$$r_k(w) = \frac{(s_k - 1)!}{(-w - \bar{\beta}_k)^{s_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.8)$$

$$\Omega_k(w) = \frac{B(w)}{(s_k - 1)!} \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{a_v(\beta_k)}{(w - \beta_k)^{p_k - s_k - v + 1}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

где

$$a_v(\beta_k) = \frac{1}{v!} \frac{\partial^v}{\partial w^v} \left\{ \frac{(w - \beta_k)^{p_k}}{B(w)} \right\}_{w=\beta_k} \quad \begin{matrix} v = 0, 1, \dots, p_k - 1. \\ k = 1, 2, \dots. \end{matrix} \quad (1.10)$$

Как было установлено М. М. Джрбашяном [2] эти системы биортогональны на мнимой оси $(-i\infty, +i\infty)$ в смысле

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_k(iy) \overline{r_l(iy)} dy = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Omega_k(iy)} r_l(iy) dy = \delta_{k,l} \quad (k, l = 1, 2, \dots). \quad (1.11)$$

Справедлива следующая теорема (см. [9]).

Теорема А. Если $\{\beta_j\}_1^{\infty} \in \Delta(P)$, то для любой функции $f \in H^p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \beta_k)^{p_{r+1}} |f^{(r)}(\beta_k)|^p \leq A_p(r, \delta) \|f\|_p^p, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

где $A_p(r, \delta) > 0$ — постоянная, не зависящая от f .

Из этой теоремы вытекает следующая

Теорема В. [4]. Если $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty \in \Delta(P)$, то для любой функции $f \in H^p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \beta_k)^{p(s_k-1)-1} |f^{(s_k-1)}(\beta_k)|^p \leq A_p(P, \delta) \|f\|_p^p, \quad (1.13)$$

где $A_p(P, \delta) > 0$ не зависит от f .

Там же [4] были установлены следующие утверждения.

Лемма А. Если $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty \in \Delta(P)$, то для коэффициентов (1.10) справедливы оценки

$$|a_\nu(\beta_k)| \leq a(\delta, P) (\operatorname{Re} \beta_k)^{p_k-\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, p_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

где $a(\delta, P) > 0$ — постоянная, не зависящая от ν и k .

Теорема С. Если $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty \in \Delta(P)$, то для любой функции $f \in H^p(G^+)$ ($1 < p < +\infty$) справедливо представление

$$f(w) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\beta_k) \Omega_k(w) + \frac{B(w)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(iy)}{B(iy)} \frac{dy}{iy-w}, \quad (1.15)$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $K \subset G^+ \cup G^- \setminus \{-\bar{\beta}_k\}_{k=1}^\infty$ и в метрике L_p на мнимой оси $(-i\infty, +i\infty)$.

Отметим еще две теоремы относительно функций из $H^p(G^+)$, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема D. [8]. Если $f \in H^p(G^+)$ ($1 \leq p < +\infty$), то

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{f(t)}{t-w} dt = \begin{cases} f(w), & w \in G^+ \\ 0, & w \in \overline{G^+}^-. \end{cases} \quad (1.16)$$

Теорема Е. [10]. Если $h(t) \in L_p(-i\infty, +i\infty)$, то интегралы типа Коши

$$f^+(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{h(t)}{t-w} dt, \quad w \in G^+, \quad (1.17)$$

$$f^-(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{h(t)}{t-w} dt, \quad w \in G^- \quad (1.17')$$

обладают свойствами

$$1) \quad f^+ \in H^p(G^+), \quad f^- \in H^p(G^-), \quad (1.18)$$

$$2) \quad \|f^+\|_p^+ \leq A_p \|h\|_p, \quad \|f^-\|_p^- \leq A_p \|h\|_p, \quad (1.19)$$

где $A_p > 0$ — постоянная, не зависящая от h .

3) почти для всех $t \in (-i\infty, +i\infty)$

$$h(t) = f^-(t) - f^+(t). \quad (1.20)$$

Рассмотрим также класс $H^p_*(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) функций $f(w)$, аналитических в правой полуплоскости G^+ , для которых

$$\|f\|_{H^p_*(G^+)} = \|f\|_p = \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (1.21)$$

Нам понадобится также следующая

Теорема Г. Для любого p ($0 < p < +\infty$) справедливы утверждения

$$\begin{aligned} 1) \quad & H^p(G^+) = H^p_*(G^+), \\ 2) \quad & A_p \|f\|_p^+ \leq \|f\|_p \leq B_p \|f\|_p^+, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где A_p и B_p от f не зависят.

Отметим, что утверждение 1) в случае $p=2$ впервые было установлено в совместной работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [11].

Включение $H^p(G^+) \subset H^p_*(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) является очевидным следствием теоремы о двух постоянных С. А. Акопяна [13]. Включение же $H^p_*(G^+) \supset H^p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) было доказано А. М. Седлецким [14], где после С. А. Акопяна было приведено также другое доказательство включения $H^p(G^+) \subset H^p_*(G^+)$.

§ 2. Представление функций из $H^p[\rho]$ ($1 \leq p < +\infty$)

2.1. а) Для произвольного ρ ($\frac{1}{2} < \rho < +\infty$) обозначим через

$$\Delta(\rho) = \left\{ z; |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}; 0 < |z| < +\infty \right\}$$

угловую область на конечной комплексной плоскости. Полагая $\alpha = \rho/(2\rho - 1)$, обозначим через

$$\Delta^*(\rho) \equiv \tilde{\Delta}(\alpha) = \left\{ z; |\arg(-z)| < \frac{\pi}{2\alpha}; 0 < |z| < +\infty \right\}$$

дополнение к замыканию $\Delta(\rho)$.

Пусть $H^p[\rho]$ ($0 < p < +\infty$) — пространство функций $f(z)$, аналитических в $\Delta(\rho)$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H^p[\rho]} \equiv \sup_{|\vartheta| < \frac{\pi}{2\rho}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\vartheta})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (2.1)$$

Через $\tilde{H}^p[\alpha]$ ($0 < p < +\infty$) обозначим пространства функций $\varphi(z)$, аналитических в $\tilde{\Delta}(\alpha)$ и удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|_{H^p[\alpha]} \equiv \sup_{|\theta| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |\varphi(re^{-i\theta})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (2.2)$$

Далее, пусть $L^p[\rho]$ — класс функций $f(t)$, измеримых на общей границе взаимно дополнительных областей $\Delta(\rho)$ и $\Delta^*(\rho)$, для которых

$$\|f\|_{L^p[\rho]} \equiv \left\{ \int_{L_\rho} |f(t)|^p |dt| \right\}^{1/p} = \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\frac{\pi}{2\rho}})|^p dr + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} |f(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (2.3)$$

б) Полагая всюду в дальнейшем, что $\{\lambda_j\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\alpha)$, для любого k ($1 \leq k < +\infty$) через $s_k \geq 1$ и $p_k \geq 1$ обозначим кратности появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$ и во всей последовательности $\{\lambda_j\}_1^\infty$ соответственно.

Последовательность $\{\lambda_j\}_1^\infty$ отнесем к классу $\Delta_+(P)$, если выполняются условия

$$\inf_{k>1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_k \pm \lambda_j}}^\infty \left| \frac{\lambda_k^\alpha - \lambda_j^\alpha}{\lambda_k^\alpha + \overline{\lambda_j^\alpha}} \right| \geq \delta > 0, \quad (2.4)$$

$$\sup_{k>1} \{p_k\} = P < +\infty. \quad (2.5)$$

Из условия (2.4) вытекает условие

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\operatorname{Re} \lambda_k^\alpha}{1 + |\lambda_k|^{2\alpha}} < +\infty, \quad (2.6)$$

которое обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость внутри угловой области $\Delta(\alpha)$ произведения типа Бляшке с нулями в точках $z = \lambda_k$:

$$B_+(z) = \prod_{k=1}^\infty \frac{z^2 - \lambda_k^2}{z^2 + \overline{\lambda_k^2}} \frac{|1 - \lambda_k^{2\alpha}|}{1 - \lambda_k^{2\alpha}}, \quad z \in \Delta(\alpha), \quad (2.6')$$

вновь условившись полагать, что $\frac{|b|}{b} = -1$ при $b = 0$, а под z^2 понимая главную ветвь этой функции.

Лемма 2. 1. Если $f \in H^p[\rho]$ ($0 < p < +\infty$), то отображением $f_\rho(w) = f(w^{\frac{1}{\rho}}) \left[\frac{1}{\rho} w^{\frac{1}{\rho} - 1} \right]^{1/p}$ устанавливается изоморфизм между пространством $H^p[\rho]$ и $H^p(G^+)$.

Действительно, если $z = r_1 e^{i\varphi}$, то

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^p_\bullet(G^+)} &= \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} = \\
&= \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(r^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\varphi}{p}})|^p \frac{1}{p} r^{\frac{1}{p}-1} dr = \right. \\
&= \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(r_1 e^{i\varphi})|^p dr_1 \right\}^{1/p} = \|f\|_{H^p[\varphi]}.
\end{aligned}$$

Остается воспользоваться теоремой F .

Следствие 1. Любая функция $f \in H^p[\rho]$ ($0 < p < +\infty$) представима в виде

$$f(z) = B_\rho(z) \cdot e(z), \quad (2.7)$$

причем

$$a_\rho \|e\|_{H^p[\rho]} \leq \|f\|_{H^p[\rho]} \leq b_\rho \|e\|_{H^p[\rho]}, \quad (2.7')$$

где $e(z) \neq 0$ при $z \in \Delta(\rho)$, $e(z) \in H^p[\rho]$, а $B_\rho(z)$ — произведение типа Бляшке для угловой области $\Delta(\rho)$ с нулями функции $f(z)$.

Следствие 2. Для любой функции $f \in H^p[\rho]$ справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq C_{p,\rho} (|z|^{1-\rho} \operatorname{Re} z^\rho)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{H^p[\rho]}, \quad z \in \Delta(\rho). \quad (2.8)$$

Оно следует из следующего неравенства:

$$|g(w)| \leq C_\rho (\operatorname{Re} w)^{-\frac{1}{p}} \|g\|_p^+, \quad w \in G^+,$$

отмеченного в работе [14] для функций $g \in H^p(G^+)$. Благодаря неравенству (2.8), сходимость в метрике $H^p[\rho]$ влечет равномерную сходимость к предельной функции на каждом компакте из угловой области $\Delta(\rho)$.

Теорема 2.1. Для любой функции $f \in H^p[\rho]$ ($1 \leq p < +\infty$) справедливы утверждения:

1°. Любая функция $f \in H^p[\rho]$ ($1 \leq p < +\infty$) почти всюду на L имеет угловые граничные значения $f(t) \in L_p(L_\rho)$ такие, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2\rho} - 0} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\frac{\pi}{2\rho}}) - f(re^{i\varphi})|^p dr = 0, \quad (2.9)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2\rho} + 0} \int_0^{+\infty} |f(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}}) - f(re^{i\varphi})|^p dr = 0. \quad (2.10)$$

2°. Для любого $p \left(\frac{1}{2} < p < +\infty \right)$ имеет место интегральная формула Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(re^{-i\frac{\pi}{2p}})}{re^{-i\frac{\pi}{2p}} - z} d(re^{-i\frac{\pi}{2p}}) - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(re^{i\frac{\pi}{2p}})}{re^{i\frac{\pi}{2p}} - z} d(re^{i\frac{\pi}{2p}}) = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{f(t)}{t - z} dt = \begin{cases} f(z), & z \in \Delta(p) \\ 0, & z \notin \overline{\Delta(p)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где L_p — граница $\Delta(p)$, пробегаемая в направлении неубывания $\arg t$;

3°. Функция $f(re^{i\varphi})$ почти для всех $r \in (0, +\infty)$ при $\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2p}$ имеет пределы, совпадающие с граничной функцией $f(t)$, $t = re^{\pm i\frac{\pi}{2p}}$, т. е.

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2p} - 0} f(re^{i\varphi}) = f(re^{i\frac{\pi}{2p}}), \quad (2.12)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2p} + 0} f(re^{i\varphi}) = f(re^{-i\frac{\pi}{2p}}). \quad (2.12')$$

Эта теорема является аналогом теоремы 7.5, установленной М. М. Джрбашьяном (см. [12], стр. 414) для $p=2$ и приводится без доказательства. Отметим, что доказательство 2° в случае $p=2$ основывалось на лемме 8.6 (см. [12]). Используя эту лемму, просто получить аналогичное утверждение для случая $p \in [1, +\infty)$.

Действительно, из следствия 1 леммы 2.1 вытекает, что функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = B_p(z) e(z), \quad z \in \Delta(p)$$

или

$$f(z) = B_p(z) ([e(z)]^{p/2})^{2/p} = B_p(z) (E(z))^{2/p},$$

где $E(z) \in H^2[p]$. Тогда для любого $\varphi_0 \left(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2p} \right)$ имеем

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \{ \max |f(re^{i\varphi})| r^{1/p} \} \leq \lim_{r \rightarrow 0^+} \{ \max |E(re^{i\varphi})| r^{1/2} \}^{2/p} = 0, \quad (2.13)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \{ \max |f(re^{i\varphi})| r^{1/p} \} \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \{ \max |E(re^{i\varphi})| r^{1/2} \}^{2/p} = 0. \quad (2.14)$$

Лемма 2.2. Для любых функций $f \in H^p[p] \ (1 \leq p < +\infty)$ и $g \in H^q[p]$, где $q = p(p-1)$ на границе L_p области $\Delta(p)$ справедливо равенство

$$\int_{L_\rho} f(\zeta) g(\zeta) d\zeta \equiv 0. \quad (2.15)$$

Доказательство. Так как $f \in H^p[\rho]$, $g \in H^q[\rho]$, то согласно (2.13) и (2.14) для любого $\varphi_0 \left(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \right)$

$$\max_{|\varphi| < \varphi_0} |f(re^{i\varphi})| = o(r^{-\frac{1}{p}}), \quad r \rightarrow +0, \quad r \rightarrow +\infty, \quad (2.16)$$

$$\max_{|\varphi| < \varphi_0} |g(re^{i\varphi})| = o(r^{-\frac{1}{q}}), \quad r \rightarrow +0, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (2.16')$$

Отсюда имеем

$$\int_{\substack{|z|=r \\ |\arg z| < \varphi_0}} f(z) g(z) dz = o(1), \quad r \rightarrow +0, \quad r \rightarrow +\infty \quad (2.17)$$

и по теореме Коши

$$\int_0^{+\infty} f(re^{i\varphi_0}) g(re^{i\varphi_0}) dre^{i\varphi_0} - \int_0^{+\infty} f(re^{-i\varphi_0}) g(re^{-i\varphi_0}) dre^{-i\varphi_0} = 0. \quad (2.18)$$

Теперь остается проверить, что в (2.18) можно перейти к пределу при $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2\rho} = 0$. Действительно, справедлива оценка

$$\begin{aligned} U(\varphi_0) &\equiv \left| \int_0^{+\infty} f(re^{\pm i\varphi_0}) g(re^{\pm i\varphi_0}) dre^{\pm i\varphi_0} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{+\infty} f(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) g(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) dre^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} \right| \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| f(re^{\pm i\varphi_0}) \right| \left| g(re^{\pm i\varphi_0}) - g(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) \right| dr + \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \left| g(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) \right| \left| f(re^{\pm i\varphi_0}) - f(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) \right| dr + \\ &\quad + \left| e^{\pm i\varphi_0} - e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} \right| \int_0^{+\infty} \left| f(re^{\pm i\varphi_0}) g(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) \right| dr. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} U(\varphi_0) &\leq \|f\|_{H^p[\rho]} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| g(re^{\pm i\varphi_0}) - g(re^{\pm i\frac{\pi}{2p}}) \right|^p dr \right\}^{1/p} + \\ &+ \|g\|_{H^q[\rho]} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f(re^{\pm i\varphi_0}) - f(re^{\pm i\frac{\pi}{2p}}) \right|^p dr \right\}^{1/p} + \\ &+ \|f\|_{H^p[\rho]} \cdot \|g\|_{H^q[\rho]} |e^{\pm i\varphi_0} - e^{\pm i\frac{\pi}{2p}}|. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Но в силу теоремы 2.1 при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2p} = 0$ вторые сомножители в первом и во втором слагаемом стремятся к нулю. Поэтому, переходя к пределу в (2.18) при $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2p} = 0$, в силу (2.19) получим равенство

$$\int_0^{+\infty} f(re^{i\frac{\pi}{2p}}) g(re^{i\frac{\pi}{2p}}) dre^{i\frac{\pi}{2p}} - \int_0^{+\infty} f(re^{-i\frac{\pi}{2p}}) g(re^{-i\frac{\pi}{2p}}) dre^{-i\frac{\pi}{2p}} \equiv 0.$$

Отметим следующий аналог теоремы М. Рисса об интегралах типа Коши.

Теорема 2.2. Если $h(t) \in L_p(L)$ ($1 < p < +\infty$), то функции

$$\begin{aligned} f_+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{h(t)}{t-z} dt, \quad z \in \Delta(\rho) \\ f_-(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{h(t)}{t-z} dt, \quad z \in \tilde{\Delta}(\alpha) \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям

- 1) $f_+(z) \in H^p[\rho]$, $f_-(z) \in \tilde{H}^p[\alpha]$,
- 2) $\|f_+\|_{H^p[\rho]} \leq C_p \|h\|_{L^p[\rho]}$; $\|f_-\|_{H^p[\alpha]} \leq C_p \|h\|_{L^p[\rho]}$,
- 3) почти для всех $t \in L$,

$$h(t) = f_-(t) - f_+(t).$$

Доказательство. Для любого p ($\frac{1}{2} < p < +\infty$) и $\alpha = p/(2p-1)$

введем следующие обозначения

$$L_r^\pm = \left\{ t; \arg t = \pm \frac{\pi}{2p}; 0 < |t| < +\infty \right\},$$

$$L_\alpha^\pm = \left\{ t; \arg t = \pm \frac{\pi}{2\alpha}; 0 < |t| < +\infty \right\},$$

и

$$l_1 = L_p^+ \cup L_2^-, \quad l_2 = L_p^- \cup L_1^+.$$

Далее, если определить две функции следующим образом:

$$h_1(t) = \begin{cases} h(t), & t \in L_p^+ \\ 0, & t \in L_2^-, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$h_2(t) = \begin{cases} h(t), & t \in L_p^- \\ 0, & t \in L_1^+, \end{cases} \quad (2.20')$$

то очевидно $h_1(t) \in L^p(l_1)$, а $h_2(t) \in L^p(l_2)$, причем

$$\|h_1\|_{L^p(l_1)} = \left\{ \int_{L_p^+} |h(t)|^p |dt| \right\}^{1/p}, \quad (2.21)$$

$$\|h_2\|_{L^p(l_2)} = \left\{ \int_{L_p^-} |h(t)|^p |dt| \right\}^{1/p}. \quad (2.21')$$

Теперь рассмотрим функции

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p^+} \frac{h(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{h_1(t)}{t-z} dt,$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p^-} \frac{h(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \frac{h_2(t)}{t-z} dt.$$

Заметим, что в силу теорем *E* и *F* функция $f_1(z)$ из классов H^p , H_p^p в полуплоскостях по обе стороны прямой l_1 , но поскольку вдоль L_2^- функция $f_1(z)$ не имеет особенностей, она аналитична во всей плоскости, исключая разрез вдоль L_p^+ . Аналогично, функция $f_2(z)$ из классов H^p , H_p^p в полуплоскостях с общей границей l_2 и аналитична вне L_p^- . Следовательно, используя теоремы *E* и *F*, имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2p}} \int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi})|^p dr \leq \sup_{-\frac{\pi}{2\alpha} < \varphi < \frac{\pi}{2\beta}} \int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi})|^p dr + \\ & + \sup_{\frac{\pi}{2\beta} < \varphi < -\frac{\pi}{2\alpha}} \int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi})|^p dr \leq 2 \int_{l_1} |f_1(t)|^p |dt| \leq A_p \|h_1\|_{L^p[l_1]}^p, \\ & \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2p}} \int_0^{+\infty} |f_2(re^{i\varphi})|^p dr \leq \sup_{-\frac{\pi}{2\beta} < \varphi < \frac{\pi}{2\alpha}} \int_0^{+\infty} |f_2(re^{i\varphi})|^p dr + \\ & + \sup_{\frac{\pi}{2\alpha} < \varphi < -\frac{\pi}{2\beta}} \int_0^{+\infty} |f_2(re^{i\varphi})|^p dr \leq 2 \int_{l_2} |f_2(t)|^p |dt| \leq A_p \|h_2\|_{L^p[l_2]}^p. \end{aligned} \quad (2.22')$$

Теперь рассмотрим функции

$$f_+(z) = -f_1(z) + f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{h(t)}{t-z} dt, \quad z \in \Delta(\rho),$$

$$f_-(z) = f_1(z) - f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{h(t)}{t-z} dt, \quad z \in \bar{\Delta}(\alpha),$$

которые, очевидно, аналитичны соответственно в областях $\Delta(\rho)$ и $\bar{\Delta}(\alpha)$.

Используя (2.21), (2.21') и (2.22), (2.22') получим

$$\begin{aligned} \|f_+\|_{H^p[\rho]} &= \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi}) - f_2(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq \left\{ \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}} \int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} + \left\{ \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}} \int_0^{+\infty} |f_2(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq 2 \left[\left\{ \int_{I_1} |f_1(t)|^p |dt| \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{I_2} |f_2(t)|^p |dt| \right\}^{1/p} \right] \leq \\ &\leq 2A_p \left[\left\{ \int_{L_\rho^+} |h(t)|^p |dt| \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{L_\rho^-} |h(t)|^p |dt| \right\}^{1/p} \right] \leq \\ &\leq 2A_p^* \|h\|_{L^p[\rho]}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается утверждение 2) относительно функции $f_-(z)$.

Утверждение 3) вытекает из известных результатов об интегралах типа Коши.

2.2. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Delta(\alpha)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию Бляшке (2.6). Тогда последовательность $\{\beta_k\}_1^\infty$, заданная таким образом:

$$\beta_k = \bar{\lambda}_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяет условию (1.6) и $\operatorname{Re} \beta_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots$). С этой последовательностью ассоциируем системы (1.8) и (1.9) функций $r_k(w)$ и $Q_k(w)$ соответственно.

Теперь отображим конформно область $\bar{\Delta}(\alpha)$ на полуплоскость G^- с помощью функции

$$w = \varphi(z) = -(-z)^\alpha, \quad (2.23)$$

тогда обратное отображение имеет вид

$$z = \psi(w) = -(-w)^{1/\alpha}. \quad (2.24)$$

Далее рассмотрим последовательность функций

$$\psi_k(z; \alpha) = r_k(\varphi(z)) [\varphi'(z)]^{1/p} = \frac{(s_k - 1)! [\alpha (-z)^{\alpha-1}]^{1/p}}{((-z)^{\alpha-1})^{s_k}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Заметим, что для любого $k \geq 1$ функция $\psi_k(z; \alpha)$ регулярна в $\Delta(\alpha)$, кроме точки $z = -\lambda_k$, где она имеет полюс кратности s_k .

Пусть $m_k(z; \alpha)$ — главная часть функции $\psi_k(z; \alpha)$, т. е.

$$m_k(z; \alpha) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}(z)}{(z + \lambda_k)^j}, \quad a_{s_k}^{(k)}(\alpha) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Поскольку $\psi_k(z; \alpha) = O\left(\frac{1}{|z|^{\frac{q}{p} + \frac{1}{p}}}\right)$, при $|z| \rightarrow +\infty$,

где $q = p/(p-1)$, то, аналогично формуле (3.18) ([1], стр. 402), имеем

$$m_k(z; \alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{\psi_k(t; \alpha)}{t - z} dt, \quad z \in \Delta(p). \quad (2.27)$$

Здесь и в последующем изложении под L_p будем понимать общую границу областей $\Delta(p)$ и $\Delta(\alpha)$, пробегаемую в направлении неубывания $\arg t$.

Так как $m_k(z; \alpha)$ — рациональная функция с полюсом в точке $z = -\lambda_k \in \Delta(\alpha)$, то она непрерывна в $\overline{\Delta(p)}$ и $m_k(z; \alpha) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$, при $|z| \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что $m_k(z; \alpha) \in H^p[p]$ ($1 < p < +\infty$).

Теперь, наряду с системой $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$, полагая $q = p/(p-1)$, введем систему функций $\{\rho_k(z; \alpha)\}_1^\infty$, регулярных в области $\Delta(\alpha)$, положив

$$\rho_k(z; \alpha) = \overline{\Omega_k(-\overline{\varphi(z)})} [\varphi'(z)]^{1/q} = \frac{B_\alpha(-z)[\alpha(-z)^{\alpha-1}]^{1/q}}{(s_k-1)!} \times \\ \times \sum_{v=0}^{p_k-s_k} \frac{a_v(\overline{\lambda_k}^\alpha)}{[(-z)^\alpha - \lambda_k^\alpha]^{p_k-s_k-v+1}}.$$

Легко проверить, что для любого $k \geq 1$, $\rho_k(z; \alpha) \in H^q[\alpha]$. Действительно, используя теорему F , имеем

$$\|\rho_k\|_{\widetilde{H^q(\alpha)}} = \|\Omega_k\|_{H^q(\alpha^+)} \leq B_p \|\Omega_k\|_{H^q(\alpha^+)} < +\infty. \quad (2.29)$$

Полученные системы функций $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ и $\{\rho_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ в случае $\alpha=1$ совпадают с системами $\{r_k(w)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(w)\}_1^\infty$ функций (1.8) и (1.9) соответственно.

Лемма 2.3. Системы $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ и $\{\rho_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ биортогональны в смысле

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(t; \alpha) \rho_l(t; \alpha) dt = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases}, \quad k, l = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

Доказательство. Запишем интеграл (2.30) в виде

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} m_\varepsilon(t; \alpha) \rho_k(t; \alpha) dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \psi_\varepsilon(t; \alpha) \rho_k(t; \alpha) dt + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} [\psi_\varepsilon(t; \alpha) - m_\varepsilon(t; \alpha)] \rho_k(t; \alpha) dt = J_1 + J_2.$$

Учитывая биортогональность систем $\{r_k(w)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(w)\}_1^\infty$ на мнимой оси в смысле (1.11) и определения (2.28), (2.25) функций $\rho_k(z; \alpha)$ и $\psi_k(z; \alpha)$ соответственно, после замены $iy = \varphi(t) = -(-t)^\alpha$, получим

$$J_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} r_l(\varphi(t)) \cdot \overline{\varphi(t)} \overline{\Omega_k(-\varphi(t))} dt = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r_l(iy) \overline{\Omega_k(iy)} dy = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

Далее, для любого $l \geq 1$ по определению функций $\psi_l(z; \alpha)$ и $m_l(z; \alpha)$ их разность $\varphi_l(z; \alpha) = \psi_l(z; \alpha) - m_l(z; \alpha)$ имеет порядок

$$O\left(\frac{1}{|z|^\mu}\right), \quad \mu = \min\left\{1, \frac{\alpha}{q} + \frac{1}{p}\right\}$$

при $|z| \rightarrow +\infty$ и регулярна в $\Delta(\alpha)$. Следовательно, $\varphi_l(z; \alpha) \in \tilde{H}^q[\alpha]$ и

так как $\rho_k(z; \alpha) \in \tilde{H}^q[\alpha]$, то в силу леммы 2.2 $J_2 = 0$.

2.3. Для любого фиксированного $z \in \Delta(\rho)$ рассмотрим функцию

$$\chi_\alpha(w; z) = \frac{\left[\frac{1}{\alpha} w^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]^{\frac{1}{q}}}{-(-w)^{1/\alpha} - z}, \quad w \in G^-,$$

очевидно регулярную в полуплоскости G^- . Тогда функция

$$\chi_\alpha^*(w; z) = \overline{\chi_\alpha(-\bar{w}; z)}, \quad z \in \Delta(\rho)$$

относительно w будет регулярной в G^+ и принадлежит пространству $H^q(G^+)$ ($1 < q < +\infty$).

Лемма 2.4. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_\alpha(P)$, то для любых $z \in \Delta(\rho)$, $\zeta \in \tilde{\Delta}(\alpha)$ имеет место разложение

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^\infty \rho_k(z; \alpha) m_k(z; \alpha) - \frac{[\alpha(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/q} B_\alpha(-\zeta)}{2\pi i} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_\alpha(iy; z) B(iy)}{iy - \varphi(\zeta)} dy. \quad (2.31)$$

Доказательство. Очевидно, что если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_0(P)$, то из определения классов $\Delta_0(P)$ и $\Delta_1(P)$ следует, что $\{\bar{\lambda}_k\}_1^\infty \in \Delta_1(P)$. Поскольку $\chi_a^*(w; z) \in H^q(G^+)$ ($1 < q < +\infty$), то по теореме С имеет место представление

$$\chi_a^*(w; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(w) \chi_a^{*(s_k-1)}(\bar{\lambda}_k; z) + \frac{B(w)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_a^*(iy; z)}{B(iy)(iy-w)} dy, \quad (2.32)$$

где ряд относительно w сходится абсолютно и равномерно в области $G^+ \cup G^- \setminus \overline{\{\bar{\lambda}_k\}_1^\infty}$ и в метрике L_q на мнимой оси, $B(w)$ — функция Бляшке с нулями в точках $\{\bar{\lambda}_k\}_1^\infty$.

Простой подсчет показывает, что

$$\begin{aligned} \chi_a^*(\bar{\lambda}_k; z) &= -\frac{(s_k-1)!}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_a^*(iy; z)}{(iy - \bar{\lambda}_k)^{s_k}} dy = \\ &= -\frac{(s_k-1)!}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_a(iy; z)}{(-iy - \bar{\lambda}_k)^{s_k}} dy = \\ &= -\frac{(s_k-1)!}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{[\alpha(-t)^{\alpha-1}]^{1/p}}{[(-t)^\alpha - \bar{\lambda}_k]^{s_k}(t-z)} dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{\psi_k(t; \alpha)}{t-z} dt = \overline{m_k(z; \alpha)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Отсюда и из (2.32), учитывая тождество $\overline{B(-w)} = B^{-1}(w)$, после замены $w = -\bar{\eta}$ и перехода к сопряженным величинам получим

$$\chi_a(\eta; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\Omega_k(-\bar{\eta})} \overline{m_k(z; \alpha)} - \frac{1}{B(\eta)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_a(iy; z) B(iy)}{iy - \eta} dy. \quad (2.34)$$

Из (2.34) в результате замены $\eta = \varphi(\zeta) = -(-\zeta)^\alpha$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/q} \overline{\Omega_k((- \zeta)^\alpha)} \overline{m_k(z; \alpha)} - \\ &- \frac{[\alpha(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/q}}{B(-(-\zeta)^\alpha)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_a(iy; z) B(iy)}{iy - \varphi(\zeta)} dy. \end{aligned}$$

Отсюда, используя определение (2.28) функции $\mu_k(z; \alpha)$, получаем разложение (2.31), где $B_1(-z)$ — функции типа Бляшке для угловой области $\Delta(\alpha)$ с нулями в точках $\{-\lambda_k\}_1^\infty$.

Отметим, что построения и леммы, аналогичные леммам 2.3 и 2.4, для конечных областей впервые были установлены в работе М. М. Джрбашяна [1].

Теорема 2.3. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_+(P)$, то любая функция $f \in H^p[p]$ ($1 < p < +\infty$) представима в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) m_k(z; \alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) B_+(-\zeta) F(\zeta; z) d\zeta, \quad (2.35)$$

где

$$c_k(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) \rho_k(\zeta; \alpha) d\zeta, \quad k=1, 2, \dots,$$

а $F(\zeta; z) \in \tilde{H}^q[\alpha]$ относительно переменной $\zeta \in \tilde{\Delta}(\alpha)$ и имеет вид

$$F(\zeta, z) = [\alpha(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/q} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_+(iy; z) B(iy)}{iy - \varphi(\zeta)} dy, \quad \zeta \in \tilde{\Delta}(\alpha), \quad z \in \Delta(p).$$

Доказательство. По теореме 2.1 функция $f(z)$ представима интегралом Коши

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Delta(p).$$

Остается воспользоваться разложением ядра Коши (2.31), чтобы получить представление (2.35) функции $f(z)$.

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi(w; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_+(iy; z) B(iy)}{iy - w} dy, \quad w \in G^-,$$

которая в силу теоремы E принадлежит классу $H^q(G^-)$, так как $\lambda_+(iy; z) B(iy) \in L_q(-\infty; +\infty)$. А поскольку $F(\zeta; z) = [\alpha(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/q} \times \times \Phi(\varphi(\zeta); z)$, то по лемме 2.1 будем иметь $F(\zeta; z) \in \tilde{H}^q[\alpha]$.

§ Основные теоремы

3.1. Ниже $\{\lambda_k\}_1^\infty$ это последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\alpha)$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k^2}{1 + |\lambda_k|^2} < +\infty. \quad (3.1)$$

Обозначим через $\tilde{H}_p^{\alpha}[\lambda_k]$ ($1 < p < +\infty$) пространство функций $f(z)$, аналитических вне множества $L_p \cup \overline{\{-\lambda_k\}_1^\infty}$ и удовлетворяющих условиям

1. $f(z) \in H^p[p]$ ($1 < p < +\infty$), $z \in \Delta(p)$;
2. $f(z) = \tilde{f}(z) B_+^{-1}(-z)$, где $\tilde{f}(z) \in \tilde{H}^p[\alpha]$, $z \in \tilde{\Delta}(\alpha)$.

3) угловые граничные значения функции $f(z)$ слева и справа от контура L_p почти всюду совпадают.

Лемма 3.1. Пространство $\lambda_p^a \{\lambda_k\}$ совпадает с множеством функций $f(z)$ из $H[p]$, удовлетворяющих условию

$$\int_{L_p} \frac{f(\zeta) B_a(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0, \quad z \in \Delta(p). \quad (3.2)$$

Доказательство. Если $f(z) \in \lambda_p^a \{\lambda_k\}$, то существует функция $\tilde{f}(z) \in \tilde{H}^p[p]$ такая, что почти для всех $t \in L_p$

$$f(t) = \tilde{f}(t) B_a^{-1}(-t).$$

Тогда для интеграла (3.1) в силу теоремы 2.1, получаем

$$\int_{L_p} \frac{f(\zeta) B_a(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{L_p} \frac{\tilde{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0, \quad z \in \Delta(p).$$

Обратно, полагая, что для функции $f(z) \in H^p[p]$ выполняется условие (3.2), рассмотрим интеграл

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{f(\zeta) B_a(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Delta(a). \quad (3.3)$$

Так как $f(\zeta) B_a(-\zeta) \in L^p[p]$, то в силу теоремы 2.3 функция $R(z) \in \tilde{H}^p[p]$ и ее граничные значения $R(\zeta) \in L^p[p]$ в силу теоремы 2.3 и условия (3.2) почти всюду на L_p совпадают со значениями $f(\zeta) B_a(-\zeta)$. Следовательно, граничные значения $f(\zeta)$ функции $f(z)$ совпадают с граничными значениями функции $R(z) B_a^{-1}(-z)$. А это значит, что $f(z) \in \lambda_p^a \{\lambda_k\}$.

Теорема 3.1. Замыкание в $L^p[p]$ системы $\{m_k(z; a)\}_{k=1}^\infty$ совпадает с пространством функций $\lambda_p^a \{\lambda_k\}$.

Доказательство. Покажем сначала, что любая функция $f(z)$ из $\lambda_p^a \{\lambda_k\}$ принадлежит замыканию в $L^p[p]$ системы $\{m_k(z; a)\}_{k=1}^\infty$. Другими словами, нам нужно показать, что если F — произвольный функционал на $L^p[p]$ такой, что

$$F(m_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

то

$$F(f) = 0, \quad f \in \lambda_p^a \{\lambda_k\}. \quad (3.5)$$

Принимая во внимание общий вид функционала в $L^p[p]$:

$$F(f) = \int_{L_p} f(\zeta) h(\zeta) d\zeta, \quad h(\zeta) \in L^q[p], \quad (3.6)$$

где $q = p/p-1$, из (3.4) будем иметь

$$\int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) h(\zeta) d\zeta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

Но по теореме 2.3 почти для всех $\zeta \in L_p$.

$$h(\zeta) = h_-(\zeta) - h_+(\zeta),$$

где $h_+(z) \in H^q[\rho]$, а $h_-(z) \in \tilde{H}^q[\alpha]$. Поэтому (3.6) принимает вид

$$F(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) h_+(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) h_-(\zeta) d\zeta. \quad (3.8)$$

Поскольку по определению пространства $\lambda_p^{\alpha} \{\lambda_k\}$ функция $f(z) \in H^p[\rho]$ при $z \in \Delta(\rho)$, а $h_-(z) \in \tilde{H}^q[\alpha]$, то в силу леммы 2.2

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) h_-(\zeta) d\zeta = 0. \quad (3.9)$$

Отсюда и из (3.7) следует, что

$$\sum_{j=1}^{s_k} \alpha_j^{(k)}(z) h_-^{(j-1)}(-\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а так как $\alpha_{s_k}^{(k)}(z) \neq 0$ ($k \geq 1$), то функция $h_-(z)$ имеет нули на последовательности $\{-\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in \bar{\Delta}(\alpha)$. Следовательно, $h_-(z) B_+^{-1}(-z) \in \tilde{H}^q[\alpha]$, а из определения класса $\lambda_p^{\alpha} \{\lambda_k\}$ вытекает, что функция $f(z) B_+(-z) \in \tilde{H}^p[\alpha]$.

Поэтому опираясь на лемму 2.2, получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) h_-(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) B_+(-\zeta) h_-(\zeta) B_+^{-1}(-\zeta) d\zeta = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, из (3.9) и (3.10) следует, что $F(f) = 0$ для любой функции $f \in \lambda_p^{\alpha} \{\lambda_k\}$.

Обратно, полагая, что функция $f(z)$ — из замыкания системы $\{m_k(z; \alpha)\}_{k=1}^{\infty}$, покажем принадлежность $f(z)$ классу $\lambda_p^{\alpha} \{\lambda_k\}$.

С этой целью, достаточно проверить выполнение условия (3.1) леммы 3.1 для любой функции из последовательности $\{m_k(z; \alpha)\}_{k=1}^{\infty}$. Следует заметить, что для любого $k \geq 1$ функция $m_k(z; \alpha)$ в точке $z = -\lambda_k$ имеет полюс порядка s_k ($s_k \leq p_k < +\infty$). Следовательно, функция $\varphi_k(z) = m_k(z; \alpha) B_+(-z)$ регулярна в $\bar{\Delta}(\alpha)$, порядка $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$

при $|z| \rightarrow +\infty$, т. е. принадлежит классу $\tilde{H}^p[\alpha]$. Поэтому в силу теоремы 2.1 получим

$$\int_{L_p} \frac{m_k(\zeta; \alpha) B_+(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in \Delta(\rho).$$

Лемма 3.2. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_1(P)$, то для любой функции $f \in \mathcal{H}_p^a[\lambda_k]$ последовательность

$$S_n(f; z) = \sum_{k=1}^n c_k(f) m_k(z; \alpha), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

где

$$c_k(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) p_k(\zeta; \alpha) d\zeta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

сходится в метрике $L^p[\rho]$ ($1 < p < +\infty$).

Доказательство. Сначала, для любого $k \geq 1$ оценим коэффициенты $c_k(f)$. Так как $f \in \mathcal{H}_p^a[\lambda_k]$, то существует функция $\tilde{f}(z) \in \tilde{H}^p[\alpha]$, такая, что $f(z) = \tilde{f}(z) B_1^{-1}(-z)$, $z \in \tilde{\Delta}(\alpha)$. Поэтому, согласно (3.12), учитывая (2.28), после замены $iy = \varphi(\zeta) = -(-\zeta)^a$ получаем

$$\begin{aligned} c_k(f) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) p_k(\zeta; \alpha) d\zeta = \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{\overline{a_v(\lambda_k^a)}}{(s_k - 1)!} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{\tilde{f}(\zeta) [\varphi'(\zeta)]^{1/q}}{[(-\zeta)^a - \lambda_k^a]^{p_k - s_k - v + 1}} d\zeta = \\ &= \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{\overline{a_v(\lambda_k^a)}}{(s_k - 1)!} (-1)^{p_k - s_k - v + 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(-(-iy)^{1/a}) [(-iy)^{\frac{1}{a}-1}]^{1/p}}{[iy + \lambda_k^a]^{p_k - s_k - v + 1}} dy. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отсюда, используя оценки (1.14) и условие $\sup_{k=1}^{\infty} |p_k| = P < +\infty$ вво-

дя обозначение $F_*(-w) = \tilde{F}(w) = \tilde{f}(-(-w)^{1/a}) [(-w)^{\frac{1}{a}-1}]^{1/p}$, $w \in G^-$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} |c_k(f)| &\leq \frac{a(\tilde{\alpha}, P)}{(s_k - 1)!} \sum_{v=0}^{p_k - s_k} (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{p_k - v} \frac{1}{(p_k - s_k - v)!} |F_*^{(p_k - s_k - v)}(\lambda_k^a)| \leq \\ &\leq a(\tilde{\alpha}, P) \sum_{v=0}^{p_k - s_k} (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{s_k + v} |F_*^{(v)}(\lambda_k^a)|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Заметим также, что $F_*(w) \in H^p(G^+)$, так как $\tilde{F}(w) \in H^p(G^-)$.

Теперь покажем, что последовательность $\{S_n(f; z)\}_1^\infty$ фундаментальна в метрике $L^p[\rho]$ ($1 < p < +\infty$). В самом деле, по теореме Хана-Банаха имеем

$$\|S_n(f; \zeta) - S_m(f; \zeta)\|_{L^p[\rho]} = \sup_{\substack{g \in L^q[\rho] \\ \|g\| \leq 1}} \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=m+1}^n c_k(f) \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g(\zeta) d\zeta \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{f \in L^q[\rho] \\ \|f\| < 1}} \sum_{k=m+1}^n |c_k(f)| \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g(\zeta) d\zeta \right|. \quad (3.15)$$

Теперь упростим интеграл в (3.15), пользуясь теоремой 2.3, в силу которой почти для любого $\zeta \in L$,

$$g(\zeta) = g_+(\zeta) - g_-(\zeta),$$

где $g_+(z) \in H^q[\rho]$, а $g_-(z) \in \bar{H}^q[\alpha]$, причем

$$\|g_-\|_{\bar{H}^q[\alpha]} \leq c_p \|g\|_{L^q[\rho]} \leq c_p.$$

Итак, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g(\zeta) d\zeta &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g_+(\zeta) d\zeta + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g_-(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Но поскольку $m_k(z; \alpha) \in H^p[\rho]$, а $g_+(z) \in H^q[\rho]$, то в силу леммы 2.2

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g_-(\zeta) d\zeta = 0 \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (3.17)$$

Таким образом, из (3.16), принимая во внимание (3.17) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g_-(\zeta) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \psi_k(\zeta; \alpha) g_-(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} [m_k(\zeta; \alpha) - \psi_k(\zeta; \alpha)] g_-(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $\psi_k(\zeta; \alpha)$, для любого $k \geq 1$, определяется из (2.25). Пользуясь заменой $\zeta = -(-iy)^{1/\alpha}$, упростим первый интеграл в (3.18)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \psi_k(\zeta; \alpha) g_-(\zeta) d\zeta &= \frac{(s_k-1)!}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{[\alpha(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/p} g_-(\zeta)}{[(-\zeta)^\alpha - \lambda_k^\alpha]^{s_k}} d\zeta = \\ &= (-1)^{s_k} \frac{(s_k-1)!}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \frac{1}{\alpha}(-iy)^{\frac{1}{\alpha}-1} \right|^{1/q} \bar{g}_-(-(-iy)^{1/\alpha})}{[iy + \lambda_k^\alpha]^{s_k}} dy = \\ &= (-1)^{s_k} \bar{g}^{(s_k-1)}(-\lambda_k^\alpha) = -\bar{g}_*^{(s_k-1)}(\lambda_k^\alpha), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $\bar{g}(w) = g_-((-w)^{1/\alpha}) \left| \frac{1}{\alpha}(-w)^{\frac{1}{\alpha}-1} \right|^{1/q}$, и принадлежит классу

$H^q(G^-)$, а функция $\bar{g}(-w) = g_*(w) \in H^q(G^+)$ и

Второй интеграл в (3.18) равен нулю, в силу леммы 2.2, так как для любого $k \geq 1$ функция $\varphi_k(z; \alpha) = m_k(z; \alpha) - \psi_k(z; \alpha)$, по определению, регулярна в области $\Delta(\alpha)$, порядка $O\left(\frac{1}{|z|^\lambda}\right)$, где $\lambda \geq 1$, т. е. из класса $\bar{H}^p[\alpha]$, $g_-(z) \in \bar{H}^q[\alpha]$.

Поэтому в силу (3.19), а также (3.17), из (3.16) следует, что

$$\left| \int_{L_{\bar{\alpha}}} m_k(\zeta; \alpha) g(\zeta) d\zeta \right| = |g_*^{(s_k-1)}(\lambda_k^a)|. \quad (3.21)$$

Итак, из (3.15), учитывая (3.14) и (3.21), по неравенству Гельдера будем иметь

$$\begin{aligned} \|S_n(f; \zeta) - S_m(f; \zeta)\|_{L^p[\alpha]} &\leq \sup_{\substack{g_* \in H^p(G^+) \\ \|g_*\| = C_p}} a(\delta, p) \sum_{k=m+1}^n \left\{ \sum_{v=0}^{p-1} (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{v+\frac{1}{p}} \times \right. \\ &\quad \left. \times |F_*^{(v)}(\lambda_k^a)| \right\} (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{s_k-1+\frac{1}{q}} |g_*^{(s_k-1)}(\lambda_k^a)| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{g_* \in H^p(G^+) \\ \|g_*\| = C_p}} a(\delta, d) c_{n,m}^{1/p} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{q(s_k-1)+1} |g_*^{(s_k-1)}(\lambda_k^a)| \right\}^{1/q}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $c_{n,m} = \sum_{k=m+1}^n \left\{ \sum_{v=0}^{p-1} (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{v+\frac{1}{p}} |F_*^{(v)}(\lambda_k^a)| \right\}^p$.

В силу неравенства

$$\left[\sum_{k=1}^m a_k \right]^p \leq m^{p/q} \sum_{k=1}^m a_k^p,$$

справедливого для любого набора чисел $a_k \geq 0$ ($1 \leq k \leq m < +\infty$), имеем

$$c_{n,m} < \sum_{v=0}^{p-1} P^{p/q} \sum_{k=m+1}^n (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{p v + 1} |F_*^{(v)}(\lambda_k^a)|^p = P^{p/q} \sum_{v=0}^{p-1} S_{n,m}(v) = P^{p/q} S_{n,m}(P)$$

причем $S_{n,m}(P) \rightarrow 0$, при $n, m \rightarrow +\infty$, так как для любого v ($0 \leq v < P-1$) по теореме А $S_{n,m}(v) \rightarrow 0$, при $n, m \rightarrow +\infty$.

Отсюда и в силу теоремы В из (3.22), используя (3.20) имеем

$$\begin{aligned} \|S_n(f; \zeta) - S_m(f; \zeta)\|_{L^p[\alpha]} &\leq \sup_{\substack{g_* \in H^p(G^+) \\ \|g_*\| = C_p}} a(\delta; p) P^{p/q} S_{n,m}(P) \|g_*\|_{H^p(G^+)} \leq \\ &\leq c_p P^{p/q} a(\delta; P) S_{n,m}(P) \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. Если $f_-(z)$ — любая функция из $\dot{H}^p[\alpha]$ ($1 < p < +\infty$), то

где

$$f(z) = f_-(z) B_\alpha^{-1}(z) - f_*(z) \in \lambda_p^\alpha |\lambda_k|, \quad (3.23)$$

$$f_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{f_-(\zeta)}{B_\alpha(-\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in \tilde{H}^p[\rho]. \quad (3.23')$$

Доказательство. Поскольку $f_-(\zeta)/B_\alpha(-\zeta) \in L^p[\rho]$, то по теореме 2.3 $f_*(z) \in \tilde{H}^p[\alpha]$. Теперь легко заметить, что функция $f(z)$ из (3.23) принадлежит классу $\lambda_p^\alpha |\lambda_k|$, т. е. выполняется условие 3.1, так как

$$\int_{L_p} \frac{f(\zeta) B_\alpha(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{L_p} \frac{f_-(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{L_p} \frac{f_*(\zeta) B_\alpha(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Delta(\rho)$$

и в силу теоремы 2.1 каждый из интегралов справа равен нулю.

3.2. Введем функционалы на пространстве функций $f \in \lambda_p^\alpha |\lambda_k|$

$$F_k(f) = \int_{L_p} f(\zeta) \rho_k(\zeta; \alpha) d\zeta, \quad k = 1, 2, \dots$$

и полагая, что $|\lambda_k|_1^\infty$ — последовательность отличных друг от друга комплексных чисел, докажем следующую лемму.

Лемма 3.4. Для любой функции $f \in \lambda_p^\alpha |\lambda_k|$ справедливо неравенство

$$\|F_k(f)\| \geq c_p \|\rho_k\|_{L^q[\rho]}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.24)$$

где

$$\|F_k(f)\| = \sup_{\substack{f \in \lambda_p^\alpha |\lambda_k| \\ \|f\|_{L^p[\rho]} < 1}} \left| \int_{L_p} f(\zeta) \rho_k(\zeta; \alpha) d\zeta \right|, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.25)$$

Доказательство. Если $s_k = 1$, то из (2.28) получим

$$\rho_k(z; \alpha) = \frac{B_\alpha(-z) [\alpha(-z)^{\alpha-1}]^{1/q}}{(-z)^\alpha - \lambda_k^\alpha} \overline{a_0(\bar{\lambda}_k^\alpha)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.26)$$

Теперь воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} \|\rho_k\|_{L^q[\rho]} &= \|\bar{\Omega}_k\|_{L^q} = \|\bar{\Omega}_k \bar{B}\|_{L^q} = \\ &= \sup_{\substack{F \in L_p \\ \|F\|_{L_p} < 1}} \left| \overline{a_0(\bar{\lambda}_k^\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(iy)}{iy + \lambda_k^\alpha} dy \right|, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.27)$$

По теореме Е почти всюду на мнимой оси имеем

$$F(iy) = F_-(iy) - F_+(iy),$$

где

$$F_-(iy) \in H^p(G^-), \quad F_+(iy) \in H^p(G^+),$$

причем

$$\|F_-\|_{H^p(G^-)} \leq M_p \|F_-\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq M_p. \quad (3.28)$$

Так как $[-\lambda_k]_1^\infty \in G^-$, то в силу теоремы D

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(iy)}{iy + \lambda_k} dy = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

и поэтому из (3.27) следует равенство

$$\|p_k\|_{L^q(\mathbb{R})} = \sup_{\substack{F_- \in H^p(G^-) \\ \|F_-\| \leq M_p}} \left| a_0(\lambda_k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(iy)}{iy + \lambda_k} dy \right|. \quad (3.29)$$

Если $w = \varphi(z) = -(-z)^a$, то очевидно

$$f_-(z) \equiv F_-(\varphi(z)) [\varphi'(z)]^{1/p} \in \tilde{H}^p[a],$$

причем

$$\|f_-\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|F_-\|_{H^p(G^-)} \leq M_p.$$

В силу леммы 3.3, функция $f(z) = f_-(z) B_a^{-1}(-z) - f_*(z) - i\lambda_p^a |\lambda_k|$, где $f_*(z)$ определяется по (3.23'). Далее, поскольку

$$\int_{L_p} \frac{f_*(\zeta) [\varphi'(\zeta)]^{1/q} B_a(-\zeta)}{(-\zeta)^a - \lambda_k^a} d\zeta = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то интеграл в равенстве (3.29) для любого $k \geq 1$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(iy)}{iy + \lambda_k} dy &= i \int_{L_p} \frac{F_-(\varphi(\zeta)) [\varphi'(\zeta)]^{1/p} [\varphi'(\zeta)]^{1/q}}{(-\zeta)^a - \lambda_k^a} d\zeta = \\ &= i \int_{L_p} \frac{f_-(\zeta) [\varphi'(\zeta)]^{1/q}}{(-\zeta)^a - \lambda_k^a} d\zeta - i \int_{L_p} \frac{f_*(\zeta) B_a(-\zeta) [\varphi'(\zeta)]^{1/q}}{(-\zeta)^a - \lambda_k^a} d\zeta = \\ &= i \int_{L_p} \frac{f(\zeta) [\varphi'(\zeta)]^{1/q} B_a(-\zeta)}{(-\zeta)^a - \lambda_k^a} d\zeta. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Из (3.23'), в силу теоремы 2.3 имеем

$$\|f_-\|_{\tilde{H}^p(\mathbb{R})} \leq b_p \|f_-\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

и поэтому из (3.23) следует неравенство

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq (1 + b_p) \|f_-\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq (1 + b_p) M_p = B_p. \quad (3.31)$$

Теперь из (3.29), принимая во внимание (3.30) и (3.31), получаем

$$\|p_k\|_{L^q(\rho)} \leq \sup_{\substack{\|m\|_{L^p(\rho)} \leq B_p \\ f \in \lambda_p^* |\lambda_k|}} \left| \int_{L_p} \frac{f(\zeta) a_0(\bar{\lambda}_k^*) [\varphi'(\zeta)]^{1/q} B_\alpha(-\zeta)}{(-\zeta)^\alpha - \lambda_k^\alpha} d\zeta \right|.$$

Отсюда окончательно, следуют оценки

$$\begin{aligned} \|p_k\|_{L^q(\rho)} &\leq B_p \sup_{\substack{f \in \lambda_p^* |\lambda_k| \\ \|m\|_{L^p(\rho)} \leq 1}} \left| \int_{L_p} f(\zeta) p_k(\zeta; \alpha) d\zeta \right| = \\ &= B_p \|F_k(f)\|, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где B_p не зависит от k . Лемма доказана.

Пусть последовательность $|\lambda_k|_1^\infty$ удовлетворяет условию $\sup_{k \geq 1} |p_k| = P < \infty$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. Для того чтобы система рациональных функций $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ являлась базисом в замыкании своей линейной оболочки, необходимо и достаточно, чтобы $|\lambda_k|_1^\infty \in \Delta_\alpha(P)$.

Достаточность. Пусть $|\lambda_k|_1^\infty \in \Delta_\alpha(P)$. Тогда в силу леммы 3.2 и теоремы 3.1 для любой функции $f(z) \in \lambda_p^* |\lambda_k|$ функция

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^\infty c_k(f) m_k(z; \alpha) \quad (3.33)$$

принадлежит классу $\lambda_p^* |\lambda_k|$ ($1 < p < +\infty$), где ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве $\Delta(\rho) \cup \Delta(\bar{z}) / |\overline{-\lambda_k}|_1^\infty$ и в метрике $L^p[\rho]$ на L_ρ . Следовательно, остается показать, что $\Phi(z) \equiv f(z)$, или другими словами, полагая $c_k(f) = 0$ ($1 \leq k < \infty$) и $f \in \lambda_p^* |\lambda_k|$, покажем, что $f(z) \equiv 0$. Учитывая тот факт, что функция $f \in \lambda_p^* |\lambda_k|$ представима в виде $f(z) = \bar{f}(z) B_\alpha^{-1}(-z)$, где $\bar{f}(z) \in \bar{H}^p[z]$, воспользуемся представлением (2.35) функции $f(z)$, откуда непосредственно вытекает, что $f(z) \equiv 0$, так как в силу леммы 2.2

$$\int_{L_p} f(\zeta) B_\alpha(-\zeta) F(\zeta; z) d\zeta = \int_{L_p} \bar{f}(\zeta) F(\zeta; z) d\zeta = 0.$$

Необходимость. В предположении $\sup_{k \geq 1} |p_k| = P < \infty$ положим, что система $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ является базисом в замыкании своей линейной оболочки, совпадающим с пространством $\lambda_p^* |\lambda_k|$ в силу теоремы 3.1. Тогда по теореме Банаха [15] для любого $k > 1$ будем иметь

$$\|F_k(f)\| \|m_k\|_{L^p(\rho)} \leq c, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.34)$$

где $F_k(f)$ — функционал, заданный на пространстве $\lambda_p^* |\lambda_k|$ с нормой, определенной по формуле (3.24), а c ($0 < c < +\infty$) не зависит от k .

Очевидно, доказательство достаточно провести для последовательности $\{z_j\}_1^\infty$ отличных друг от друга чисел из $\{i_k\}_1^\infty$, так как при условии $\sup_{k=1} \{p_k\} = P < +\infty$ из $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta_2(1)$ следует, что $\{i_k\}_1^\infty \in \Delta_2(P)$.

Из неравенств (3.34), в силу леммы 3.4, имеем

$$\|p_k\|_{L^q(\rho)} \|m_k\|_{L^p(\rho)} \leq c_p^*, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.35)$$

тогда по неравенству Гельдера

$$J = \int_{L_\rho} |\rho_k(\zeta; \alpha)| |m_k(\zeta; \alpha)| d|\zeta| \leq c_p^*, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.36)$$

Пользуясь представлением (3.26) функции $\rho_k(z; \alpha)$ и формулой (2.27), в силу которой для $s_k = 1$, $m_k(z; \alpha) = \frac{1}{[2z_k^{\alpha-1}]^{1/q} (z + z_k)}$, оценим интеграл (3.36) снизу.

Тогда учитывая определение (1.10) коэффициентов $a_0(\bar{z}_k^2)$, получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{2 \operatorname{Re} z_k^2}{\sigma_k^\alpha |z_k|^{\frac{\alpha-1}{q}}} \int_{L_\rho} \frac{|\zeta|^{\frac{\alpha-1}{q}} d|\zeta|}{|(-\zeta)^\alpha - z_k^\alpha| |\zeta + z_k|} = \\ &= \frac{2 \operatorname{Re} z_k^2}{\sigma_k^\alpha |z_k|^{\frac{\alpha-1}{q}}} \int_{L_\rho} \frac{|\zeta|^{\frac{\alpha-1}{q}} d|\zeta|}{|\zeta^\alpha - z_k^\alpha| |\zeta - z_k|}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где

$$\sigma_k^\alpha = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^\infty \left| \frac{z_k^\alpha - z_j^\alpha}{z_k^\alpha + z_j^\alpha} \right|.$$

Полагая $\zeta = r e^{\pm i \frac{\pi}{2\alpha}}$, $z_k = |z_k| e^{i\varphi_k}$, после замены $r/|z_k| = t$ интеграл J в (3.37) приводится к виду

$$\begin{aligned} J &= \frac{2 \operatorname{Re} z_k^2}{\sigma_k^\alpha |z_k|^\alpha} \left[\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-1}{q}} dt}{|t e^{i(\frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k)} - 1| |t^\alpha e^{i\alpha(\frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k)} - 1|} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-1}{q}} dt}{|t e^{-i(\frac{\pi}{2\alpha} + \varphi_k)} - 1| |t^\alpha e^{-i\alpha(\frac{\pi}{2\alpha} + \varphi_k)} - 1|} \right] = \frac{2 \cos \alpha \varphi_k}{\sigma_k^\alpha} [U_1 + U_2]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Легко проверить, что интеграл J ограничен снизу, если $|\varphi_k| \leq \varphi < \frac{\pi}{2\alpha}$, $k = 1, 2, \dots$, так как ограничены интегралы U_1 и U_2 .

Поэтому, учитывая тот факт, что возможно $\varphi_k \rightarrow \pm \frac{\pi}{2\alpha}$, сначала оценим выражение $\cos \alpha \varphi_k \times U_1$. Для этого пользуясь обозначением $\Delta_k = \frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k$ и принимая во внимание, что $\sin x \approx x$ при $x \rightarrow 0$, получаем оценки

$$|te^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k\right)} - 1| = \left[t^2 + 1 - 2t \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k\right) \right]^{1/2} \leq [(t-1)^2 + t\Delta_k^2]^{1/2},$$

$$|t^\alpha e^{i\alpha\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k\right)} - 1| = \left[t^{2\alpha} + 1 - 2t^\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \alpha\varphi_k\right) \right]^{1/2} \leq [(t^\alpha - 1)^2 + t^\alpha \Delta_k^2]^{1/2}.$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ следует неравенство

$$\begin{aligned} \cos \alpha \varphi_k \times U_1 &\geq b \int_0^{+\infty} \frac{\Delta_k t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} dt}{[(t-1)^2 + t\Delta_k^2]^{1/2} \times [(t^\alpha - 1)^2 + t^\alpha \Delta_k^2]^{1/2}} > \\ &\geq b^\varepsilon \int_{1-\varepsilon\Delta_k}^{1+\varepsilon\Delta_k} \frac{\Delta_k dt}{[(t-1)^2 + t\Delta_k^2]^{1/2} \times [(t^\alpha - 1)^2 + t^\alpha \Delta_k^2]^{1/2}} > \\ &\geq c \int_{1-\varepsilon\Delta_k}^{1+\varepsilon\Delta_k} \frac{\Delta_k dt}{(t-1)^2 + \Delta_k^2} = 2c \int_0^{\varepsilon\Delta_k} \frac{\Delta_k dt}{t^2 + \Delta_k^2} = 2c \int_0^\varepsilon \frac{du}{u^2 + 1} = A_1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Аналогично учитывая, что возможно $\varphi_k \rightarrow -\frac{\pi}{2\alpha}$, получим

$$\cos \alpha \varphi_k \times U_2 \geq A_2$$

Таким образом, из (3.36), (3.38) и (3.39) будем иметь

$$\frac{A_1 + A_2}{\sigma_k} < J \leq c_p^*$$

или

$$\sigma_k > \frac{A_1 + A_2}{c_p^*} > 0.$$

Теорема доказана.

В заключение считаю своим долгом поблагодарить профессора М. М. Джрбашяна за постановку задачи и внимание при выполнении этой работы, а также В. М. Мартиросяна за ценные замечания.

Շ. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Իսպիռնալ ֆունկցիաների ոչ լրիվ սիստեմների բազիսությունը անկյունային տիրույթներում (ամփոփում)

Դիցուք $\{\lambda_k\}_1^\infty \left(0 < |\arg \lambda_k| < \frac{\pi}{2\alpha}\right)$, $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը բավարարում է

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_j}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k^\alpha - \lambda_j^\alpha}{\lambda_k^\alpha + \bar{\lambda}_j^\alpha} \right| \geq \delta > 0 \quad (a)$$

պայմանին:

Օգտագործելով $\tilde{\Delta}(z) = \left\{0 < |\arg(-z)| < \frac{\pi}{2\alpha}\right\}$ անկյունային տիրույթի կոնֆորմ արտապատկերումը, $G^+ = \{w; \operatorname{Re} w < 0\}$ կիսաարթության վրա, կառուցվում է հետևյալ ֆունկցիաների սիստեմը:

$$m_k(z; \alpha) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}(z)}{(z + \lambda_k)^j}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (b)$$

(որտեղ s_k -ն λ_k -ի հանդես գալու կարգն է $\{\lambda_j\}_1^k$ -ում և $\sup_{k \geq 1} s_k < +\infty$) (ցույց է տրվում,

որ (a) պայմանը անհրաժեշտ է և բավարար. որպեսզի սիստեմը կազմի բազիս իր գծային թաղանթում:

Sh. A. GRIGORIAN. On basisness of noncomplete systems of rational functions in an angular domain (summary)

Let $\{\lambda_k\}_1^\infty \left(0 < |\arg \lambda_k| < \frac{\pi}{2\alpha}\right)$, $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$ be a sequence of complex number satisfying the following condition

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_j}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k^\alpha - \lambda_j^\alpha}{\lambda_k^\alpha + \bar{\lambda}_j^\alpha} \right| \geq \delta > 0. \quad (a)$$

Using the conform mapping of the angular domain $\tilde{\Delta}(z) = \left\{0 < |\arg(-z)| < \frac{\pi}{2\alpha}\right\}$ on the $G^+ = \{w; \operatorname{Re} w < 0\}$ half-plane, one can construct the following system of functions

$$m_k(z; \alpha) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}(z)}{(z + \lambda_k)^j}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (b)$$

(where s_k is the multiplicity of λ_k in $\{\lambda_j\}_1^k$ and $\sup_{k \geq 1} \{s_k\} = P < +\infty$).

The paper proves that (a) condition is necessary and sufficient for the system (b) to form bases in their linear hull.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
2. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшие приближения ядра Коши на вещественной оси, Мат. сб., 95 (137), № 3 (11), 1974, 418—444.
3. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_p , Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
4. М. М. Джрбашян. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе H^p , ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 517—520.
5. Г. М. Айрапетян. О базисе рациональных функций в подпространствах классов Харди H_p ($1 < p < +\infty$), Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 429—450.
6. Г. М. Айрапетян. О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., X, № 2, 1975, 133—152.
7. Г. М. Айрапетян. Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах H_p Харди, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 262—277.
8. P. Duren. Theory of H^p Spaces, Ac. Press New-York and London, 1970.
9. Ш. А. Григорян. Об одном свойстве функций из H^p ($0 < p < +\infty$) в полуплоскости, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XII, № 5, 1977, 335—340.
10. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
11. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958; Сиб. мат. ж., I, № 3, 1960.
12. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. «Наука», М., 1966.
13. С. А. Акопян. Теорема о двух постоянных для функций класса H_p , Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., II, № 2, 1967, 96—114.
14. А. М. Седлецкий. Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости, Мат. сб., 96 (138), I, 1975, 75—82.
15. А. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа, М., 1965.

В. М. МАРТИРОСЯН

ЗАМЫКАНИЕ И БАЗИСНОСТЬ НЕКОТОРЫХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ И РЕШЕНИЕ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Введение

1. В работе М. М. Джрбашяна [1] был предложен метод построения системы функций $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональной на окружности $|z|=1$ с системой рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z) = \frac{(s_k - 1)! z^{s_k - 1}}{(1 - \bar{a}_k z)^{s_k}} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

$\{a_k\}_1^\infty$ ($|a_k| < 1$) — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию Бляшке, а $s_k \geq 1$ — кратность появления числа a_k на отрезке $[a_1, \dots, a_k]$.

Им же было показано [2], что этот метод эффективен также для построения системы функций $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональной на вещественной оси с системой рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z) = \frac{(s_k - 1)!}{(z - \bar{\mu}_k)^{s_k}} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$\{\mu_k\}_1^\infty$ ($\text{Im } \mu_k > 0$) — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию Бляшке для полуплоскости $\text{Im } z > 0$, а $s_k \geq 1$ — кратность появления числа μ_k на отрезке $[\mu_1, \dots, \mu_k]$.

Поскольку этот метод биортогонализации лежит в основе данной работы, считаем уместным привести здесь небольшой обзор его истоков и развития.

Впервые этот метод был указан в одной давней работе М. М. Джрбашяна и А. Б. Нерсисяна [3], посвященной построению биортогональных на конечном отрезке систем целых функций — линейных комбинаций от функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_\nu(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\nu^{-1})} \quad (\nu > 0, \mu > 0).$$

В связи с этим исследовались также вопросы разложений функций по указанным системам, порожденным, вообще говоря, кратными нулями определенных целых функций такого же рода [4].

В дальнейшем тот же метод построения биортогональных систем, порождаемых аналитическими функциями с кратными нулями, нашел

существенно новые применения в ряде различных по своей природе вопросов анализа: в теории краевых задач для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [5], [6] и для уравнений дробного порядка типа Штурма-Лиувилля [7], в вопросах разложений функций по неполным обобщенным системам Мюнца-Сасса [8] $\{e^{-\lambda_j x} x^{\lambda_j - 1}\}_1^\infty$ ($\operatorname{Re} \lambda_j > 0$) и т. д.

Далее, этот метод нашел новые приложения и интересные обобщения в серии работ Верблюнского [9]—[11], относящихся, в частности, к вопросам негармонических рядов Фурье, а также в работах А. Ф. Леонтьева [12], [13].

Отметим также, что в работах М. М. Джрбашяна [14], [15] этот же метод впервые был применен к вопросам изучения асимптотических рядов Дирихле-Тейлора, обладающих свойством примыкания лишь на некоторой полуоси $[a, +\infty)$ или в бесконечных областях типа криволинейных полос.

Остановимся вкратце на других важных, непосредственно связанных с данной работой, аспектах применения этого метода.

Как уже отмечалось выше, в работах [1] и [2] были построены системы, биортогональные с системами вида (1) или (2).

Биортогональные системы М. М. Джрбашяна $\{r_k(z); S_k(z)\}_1^\infty$ и их различные модификации позволили установить критерий базисности этих систем и получить полное решение кратной интерполяционной задачи в различных классах аналитических функций.

В его работе [16] при помощи системы $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, являющейся модификацией системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ и также биортогональной на окружности $|z| = 1$ с системой (1), было дано полное и эффективное решение кратной интерполяционной задачи в классе H_2 Харди.

В его же работах [17], [18] было дано полное и эффективное решение кратной интерполяционной задачи в классах H_p^+ ($1 < p < +\infty$) Хилле-Тамаркина функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Там же было получено полное внутреннее описание замыканий в метрике H_p^+ неполных систем вида (2) и биортогональных с ними систем. Был установлен также критерий базисности этих систем в подпространствах пространств H_p^+ .

Системы М. М. Джрбашяна $\{r_k(z); \Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональные на окружности $|z| = 1$, и ряд их важных свойств, установленных в работах [1] и [16], послужили в работе Г. М. Айрапетяна [19] основой для установления критерия базисности систем вида (1) и биортогональных с ними систем в подпространствах пространств H_p ($1 < p < +\infty$) в круге $|z| < 1$, а также для решения кратной интерполяционной задачи в классах H_p в круге $|z| < 1$. Следует отметить, что результаты относительно круга, содержащиеся в указанной работе [19], аналогичны по своей природе лишь части результатов из работ [17] и [18] относительно полуплоскости. Одновременно отметим, что буквально все результаты, относящиеся, соответственно, к полуплоскости и к кру-

гу, принципиально не могут быть сведены друг к другу путем конформного отображения.

С другой стороны, в заметке автора [20] были построены системы функций $|\mathcal{Q}_\alpha(z)|_1^\pi$, биортогональные на границе угловой области $\left\{z: |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}\right\} \left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty\right)$ с определенными системами простейших рациональных дробей. Был установлен критерий базисности этих систем в определенных гильбертовых пространствах функций, аналитических в угловых областях. Использование этих биортогональных систем позволило также получить полное и эффективное решение кратной интерполяционной задачи в классах

$$H_2[\alpha; \omega] \left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, -1 < \omega < 1 \right)$$

функций, аналитических в угловой области $\left\{z: |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}\right\}$.

2. Настоящая работа посвящена обобщению отмеченных выше результатов из работ [18] и [20].

Следует, однако, отметить, что эти обобщения не получаются путем простого переноса методов получения результатов из работ [18] и [20].

С одной стороны, дело осложняется в силу специфики рассматриваемых в данной работе более общих объектов. С другой стороны, рассмотрение таких общих объектов позволило наряду с обобщением некоторых, известных ранее, результатов из работ [18] и [20] получить также более простые их доказательства. Подробнее об этом будет отмечаться в основном тексте.

Приведем теперь краткое содержание данной работы.

В § 1 устанавливается ряд свойств классов $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$). Эти классы являются обобщениями классов $H_2[\alpha; \omega]$, введенных впервые М. М. Джрбашьяном и А. Е. Аветисяном [21], и классов H^p в полуплоскости.

Для значений $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$, $-\infty < \vartheta < +\infty$ класс $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$) определяется как множество функций $F(z)$, аналитических в угловой области

$$\Delta(\alpha; \vartheta) = \left\{ z: |\operatorname{Arg} z - \vartheta| < \frac{\pi}{2\alpha}, 0 < |z| < +\infty \right\}$$

и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|\varphi - \vartheta| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega dr \right\} < +\infty.$$

В теореме 1 устанавливается, что любая функция

$$F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)]$$

почти всюду на границе $\partial\Delta(x; \vartheta)$ угловой области $\Delta(x; \vartheta)$ имеет угловые граничные значения $F(\zeta)$. При этом граничная функция $F(\zeta)$ принадлежит классу $L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(x; \vartheta))$, т. е.

$$\|F\|_{p, \omega} = \left\{ \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} |F(\zeta)|^p |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad (3)$$

и $F(z)$ является интегралом Коши своей граничной функции.

В том же параграфе устанавливается одно обобщение теоремы М. Рисса о проектировании из $L_p (1 < p < +\infty)$ в H^p . Именно, в теореме 3 доказывается, что интеграл типа Коши функции из

$$L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(x; \vartheta)) \quad (1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1)$$

принадлежит классу $H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)]$.

Здесь доказывается также, что $H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)] (1 < p < \infty, -1 < \omega < p-1)$ с нормой (3) является банаховым пространством.

В § 2 с последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Delta(x; \vartheta)$ ассоциируется система простейших рациональных дробей $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z) = \frac{(s_k - 1)!}{(z - \lambda_k)^{s_k}} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

а $s_k \geq 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $[\lambda_1, \dots, \lambda_k]$.

В теореме 6 доказывается, что если $1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1$ то для полноты системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в пространстве

$$H_p^{(\omega)}[\Delta^*(x; \vartheta)] = H_p^{(\omega)}[\Delta(\rho; \vartheta + \pi)] \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{x} = 2 \right)$$

необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^{2\omega})^{-1} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta} \lambda_k)^\omega. \quad (4)$$

В случае сходимости этого ряда, в теореме 7 дается полное внутреннее описание замыкания системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$. Оказывается, что это замыкание совпадает с подпространством тех функций из $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(x; \vartheta)]$, которые в определенном смысле допускают мероморфное продолжение в угловую область $\Delta(x; \vartheta)$.

В том же параграфе при условии сходимости ряда (4) строится система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональная с системой $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} r_k(\zeta) \Omega_n(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k, n = 1, 2, \dots),$$

где направление на $\partial\Delta(z; \vartheta)$ совпадает с направлением положительно-го обхода области $\Delta(z; \vartheta)$. Доказывается также, что если ряд (4) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не минимальна в пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$ и, следовательно, не имеет биртогонального дополнения.

Здесь дается также полное внутреннее описание замыкания системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty \subset H_p^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$).

В § 3 устанавливаются критерии базисности систем

$$\{r_k(z)\}_1^\infty \subset H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)] \text{ и } \{\Omega_k(z)\}_1^\infty \subset H_p^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$$

($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$), в порожденных ими замкнутых подпространствах. Оказывается, что для базисности этих систем в порожденных ими подпространствах необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:

$$\inf_{k \geq 1} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_k}}^\infty \left| \frac{(e^{-i\vartheta} \lambda_k)^2 - (e^{-i\vartheta} \lambda_j)^2}{(e^{-i\vartheta} \lambda_k)^2 + (e^{-i\vartheta} \lambda_j)^2} \right| \right\} > 0, \quad \sup_{k \geq 1} |s_k| < +\infty \quad (5)$$

(теоремы 11 и 12).

В том же параграфе дается полное решение кратной интерполяционной задачи в классах $H_p^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$ ($1 < p < +\infty$, $1 < \omega < p-1$).

В теореме 13 устанавливается, что если выполняются условия (5), то пространство последовательностей

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty; f \in H_p^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]\} \quad (6)$$

совпадает с пространством последовательностей $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\|\gamma\|_{p, \omega} = \left\{ \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^{m + (1-\omega)(2-p)} [|\lambda_k|^{1-\omega} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta} \lambda_k)^2]^{p(s_k-1)+1} |\gamma_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

При этом доказывается, что для любой последовательности $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию (7), ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k \Omega_k(z)$$

сходится в $H_p^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$ и определяет функцию $f(z)$, удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Наконец, в той же теореме 13 доказывается, что если хотя бы одно из условий (5) нарушается, то пространство последовательностей (6) не совпадает ни с каким весовым l_s -пространством ($1 \leq s < +\infty$).

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и внимание к работе.

§ 1. Пространства $H_p^{(m)}[\Delta(z; \theta)]$

1.1(a) Пусть $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$, $-\infty < \theta < +\infty$. Обозначим через

$$\Delta(z; \theta) = \left\{ z: |\operatorname{Arg} z - \theta| < \frac{\pi}{2\alpha}, 0 < |z| < +\infty \right\}, \quad (1.1)$$

$$\Delta^*(z; \theta) = \left\{ z: \frac{\pi}{2\alpha} < |\operatorname{Arg} z - \theta| \leq \pi, 0 < |z| < +\infty \right\}$$

взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Общую границу этих угловых областей обозначим через $\partial\Delta(z; \theta)$ (через $\partial\Delta^*(z; \theta)$), полагая, что направление на $\partial\Delta(z; \theta)$ (на $\partial\Delta^*(z; \theta)$) совпадает с направлением положительного обхода области $\Delta(z; \theta)$ (области $\Delta^*(z; \theta)$).

Обозначим через $H_p^{(m)}[\Delta(z; \theta)]$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < m < p-1$) класс функций $F(z)$, аналитических в угловой области $\Delta(z; \theta)$ и удовлетворяющих условию

$$\|F\|_{p,m} = \sup_{|\varphi - \theta| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^m dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty. \quad (1.2)$$

Отметим, что классы $H_2[\alpha; \theta] \equiv H_2^{(m)}[\Delta(z; \theta)]$ впервые были введены в совместной работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [21], которые установили также их параметрическое представление, являющееся существенным обобщением теоремы Винера-Пэли (см. также гл. VII монографии М. М. Джрбашяна [22]).

Отметим также, что если $\rho^{-1} + \alpha^{-1} = 2$, то угловые области $\Delta^*(\alpha; \theta)$ и $\Delta(\rho; \theta + \pi)$ совпадают. Поэтому класс $H_p^{(m)}[\Delta(\rho; \theta + \pi)]$ будем обозначать также через $H_p^{(m)}[\Delta^*(\alpha; \theta)]$.

Наконец, обозначим через $L_p^{(m)}(\partial\Delta(z; \theta))$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < m < p-1$) пространство измеримых на $\partial\Delta(z; \theta)$ функций $F(\zeta)$ с нормой

$$\|F\|_{p,m} = \left\{ \int_{\partial\Delta(z; \theta)} |F(\zeta)|^p |\zeta|^m |d\zeta| \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty. \quad (1.3)$$

(б) Пусть H_p ($0 < p < +\infty$) — известный (см., напр., [23]) класс функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{0 < x < +\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x + iy)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

а H_p^* — это класс функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и таких, что

$$\|f\|_{H_p^*} = \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Следующая теорема при $p=2$ была установлена в совместной работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [21], а в общем случае — работе А. М. Седлецкого [24]*.

Теорема А. Для любого $p \in (0, +\infty)$ справедливы утверждения:

$$1^\circ. H_p = H_p^*;$$

$$2^\circ. 2^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{H_p} \leq \|f\|_{H_p^*} \leq \|f\|_{H_p}.$$

Так как $H_p^{(0)}[\Delta(1; 0)] = H_p^*$, то из этой теоремы видно, что классы $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ — это естественные обобщения классов H_p . Поэтому они обладают многими свойствами, которыми обладают классы H_p . Некоторые из этих свойств приведены в следующей теореме.

Теорема 1. Для любой функции $F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$) справедливы утверждения:

1°. Почти всюду на $\partial\Delta(\alpha; \vartheta)$ функция $F(z)$ имеет угловые граничные значения $F(\zeta) \in L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$, причем

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2\alpha} + \vartheta} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi}) - F(re^{i(\pm \frac{\pi}{2\alpha} + \vartheta)})|^p r^\omega dr = 0;$$

2° Имеет место интегральная формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} F(z), & z \in \Delta(\alpha; \vartheta), \\ 0, & z \in \Delta^*(\alpha; \vartheta); \end{cases}$$

3° Для любого $\varphi_0 \left(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2\alpha} \right)$

$$\max_{|\varphi - \vartheta| = \varphi_0} \|F(re^{i\varphi})\| = o(r^{-\frac{1+\omega}{p}}), \text{ при } r \rightarrow +0, r \rightarrow +\infty.$$

В случае $p=2$, $\vartheta=0$, это утверждение известно (см. [22], гл. VII, теорему 7.5). В общем случае теорема 1 доказывается аналогичным образом.

(в) Со стандартными операциями сложения функций и умножения функций на скаляр $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ является комплексным линейным пространством. При этом равенством (1.2) в этом пространстве задается норма. В силу теоремы 1 в этом пространстве можно задать норму также равенством (1.3), где $F(\zeta)$ — угловые граничные значения.

* Включение $H_p \subset H_p^*$ и неравенство $\|f\|_{H_p^*} \leq \|f\|_{H_p}$ вытекают также из работы С. А. Акопяна [25].

ния функции $F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$. Докажем следующую теорему, из которой, в частности, следует, что нормы (1.2) и (1.3) порождают в $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ одну и ту же топологию.

Теорема 2. Если $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, то справедливы утверждения:

1°. $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ с нормой (1.3) является банаховым пространством;

2°. Для любой функции $F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ имеем:

$$2^{-\frac{1}{p}} \|F\|_{p, \omega} \leq \|F\|_{p, \omega}^* \leq \|F\|_{p, \omega}.$$

Доказательство. Пусть $F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$. Положив*

$$\Phi(w) = \alpha^{-\frac{1}{p}} F(e^{i\vartheta} w^{\frac{1}{\alpha}}) w^{\frac{1+\omega-\gamma}{p\alpha}}, \quad \operatorname{Re} w > 0,$$

будем иметь: $\Phi(w) \in H_p^{(0)}[\Delta(1; 0)]$, а также

$$\|\Phi\|_{p, 0}^* = \|F\|_{p, \omega}^*, \quad \|\Phi\|_{p, 0} = \|F\|_{p, \omega}. \quad (1.4)$$

Поскольку $H_p^{(0)}[\Delta(1; 0)] = H_p^*$, то по теореме А $H_p^{(0)}[\Delta(1; 0)] = H_p$. Следовательно, в силу второго из равенств (1.4), а также равенства $\|\Phi\|_{p, 0} = \|\Phi\|_{H_p}$, пространство $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ с нормой $\|\cdot\|_{p, \omega}$ изометрически изоморфно пространству H_p с нормой $\|\cdot\|_{H_p}$. Отсюда на основании известного факта о полноте пространства H_p получаем утверждение 1° теоремы.

С другой стороны, так как $\|\Phi\|_{p, 0}^* = \|\Phi\|_{H_p^*}$ и $\|\Phi\|_{p, 0} = \|\Phi\|_{H_p}$, то из (1.4) получаем

$$\|F\|_{p, \omega}^* = \|\Phi\|_{H_p^*}, \quad \|F\|_{p, \omega} = \|\Phi\|_{H_p}.$$

Отсюда и из теоремы А (2°) получаем утверждение 2° теоремы. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ можно рассматривать как замкнутое подпространство банахова пространства $L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$.

1.2. Следующее утверждение, по существу, было установлено в монографии [26] (стр. 176).

Теорема В. Если $f(iy) \in L_p(-\infty, +\infty)$ ($1 < p < +\infty$) и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(iy)}{iy-z} dy, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

* Здесь и всюду в дальнейшем для значений $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и $\beta \in (-\infty, +\infty)$ будем полагать $z^\beta = |z|^\beta e^{i\beta \arg z}$ ($-\pi < \arg z < \pi$).

то $F(z) \in H_p$ и $\|F\|_{H_p} \leq A_p \|f\|_p$, причем $A_p \in (0, +\infty)$ не зависит от f .

Мы хотим обобщить эту теорему.

Обозначим через $L_p^{(\omega)}(L(\varphi))$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, $-\infty < \varphi < +\infty$) класс функций $f(\zeta)$, измеримых на луче

$$L(\varphi) = \{\zeta = re^{i\varphi}: 0 \leq r < \infty\}$$

и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L_p^{(\omega)}(L(\varphi))} = \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p r^\omega dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Лемма 1. Пусть $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$. Если

$$f(\zeta) \in L_p^{(\omega)}(L(\varphi)) \quad (-\infty < \varphi < +\infty),$$

то интеграл типа Коши*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L(\varphi)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus L(\varphi),$$

обладает следующими свойствами:

1°. $F(z)$ аналитична в области $\mathbb{C} \setminus L(\varphi)$ и справедливо неравенство

$$\sup_{\varphi < \theta < \varphi + 2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\theta})|^p r^\omega dr \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A_{p,\omega} \|f\|_{L_p^{(\omega)}(L(\varphi))}, \quad (1.5)$$

где $A_{p,\omega} \in (0, +\infty)$ не зависит от $f(\zeta)$;

2°. Функция $F(z)$ почти всюду на $L(\varphi)$ имеет угловые граничные значения $F^{(-)}(\zeta)$ и $F^{(+)}(\zeta) \in L_p^{(\omega)}(L(\varphi))$, соответственно слева и справа от луча $L(\varphi)$, причем

$$f(\zeta) = F^{(-)}(\zeta) - F^{(+)}(\zeta) \quad \text{почти всюду на } L(\varphi). \quad (1.6)$$

Доказательство. Очевидно, что путем поворота комплексной плоскости доказательство леммы можно свести к случаю $\varphi = \frac{\pi}{2}$, когда $L(\varphi)$ совпадает с положительной частью мнимой оси.

Итак, пусть

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad f(iy) \in L_p^{(\omega)}\left(L\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(iy)}{iy - z} dy, \quad z \in \mathbb{C} \setminus L\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (1.7)$$

* Полагаем, что направление на $L(\varphi)$ совпадает с направлением возрастания $|\zeta|$.

Из абсолютной и равномерной сходимости этого интеграла внутри области $C \setminus L\left(\frac{\pi}{2}\right)$ следует, что в этой области $F(z)$ аналитична.

Перейдем к доказательству неравенства (1.5) при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. С этой целью, зафиксировав $\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$ и положив

$$H_{\vartheta}(r; r-y) = \frac{1}{2\pi} \frac{|r-y|}{iy - re^{i\vartheta}},$$

определим оператор T_{ϑ} равенством

$$T_{\vartheta}(\varphi)(r) = \int_0^{+\infty} |H_{\vartheta}(r; r-y)| / |r-y| \varphi(y) dy. \quad (1.8)$$

Докажем, что T_{ϑ} — ограниченный оператор в $L_p(0, +\infty)$. Пусть $\varphi(y) \in L_p(0, +\infty)$. Положив

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{iy-z} dy = \begin{cases} \Phi^{(+)}(z), & \operatorname{Re} z > 0, \\ \Phi^{(-)}(z), & \operatorname{Re} z < 0, \end{cases}$$

на основании теоремы В заключаем, что

$$\Phi^{(+)}(z) \in H_p, \quad \Phi^{(-)}(-z) \in H_p$$

и

$$\|\Phi^{(+)}\|_{H_p} \leq A_p \|\varphi\|_{L_p(0, +\infty)}, \quad \|\Phi^{(-)}(-z)\|_{H_p} \leq A_p \|\varphi\|_{L_p(0, +\infty)}.$$

Следовательно, в силу теоремы А имеем также

$$\Phi^{(+)}(z) \in H_p^*, \quad \Phi^{(-)}(-z) \in H_p^*,$$

причем

$$\|\Phi^{(+)}\|_{H_p^*} \leq A_p \|\varphi\|_{L_p(0, +\infty)}, \quad \|\Phi^{(-)}(-z)\|_{H_p^*} \leq A_p \|\varphi\|_{L_p(0, +\infty)}.$$

Это значит, что при $\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$ справедливо неравенство

$$\left\{ \int_0^{+\infty} |\Phi(re^{i\vartheta})|^p dr \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A_p \|\varphi\|_{L_p(0, +\infty)},$$

причем $A_p \in (0, +\infty)$ не зависит от ϑ и $\varphi(y)$. Поскольку $T_{\vartheta}(\varphi)(r) = \Phi(re^{i\vartheta})$, то последнее неравенство можно переписать в виде

$$\|T_{\vartheta}(\varphi)\|_{L_p(0, +\infty)} \leq A_p \|\varphi\|_{L_p(0, +\infty)}, \quad \varphi \in L_p(0, +\infty).$$

Значит T_{ϑ} — ограниченный оператор в $L_p(0, +\infty)$. Кроме того, $|H_{\vartheta}(r; r-y)| \leq 1/(2\pi)$. Следовательно, в силу одного результата И. Стейна [27], для любой измеримой функции $\varphi(y)$ будем иметь

$$\|T_{\vartheta}(\varphi)(r) r^{\frac{\omega}{p}}\|_{L_p(0, +\infty)} \leq A_{p, \omega} \|\varphi(y) y^{\frac{\omega}{p}}\|_{L_p(0, +\infty)}, \quad (1.9)$$

причем $A_{p, \omega} \in (0, +\infty)$ не зависит от $\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$ и $\varphi(y)$. В частности, для функции $\varphi_0(y) = f(iy)$, в силу определений (1.7) и (1.8) функции $F(z)$ и оператора T_{ϑ} , будем иметь: $T_{\vartheta}(\varphi_0)(r) = F(re^{i\vartheta})$. В этом случае неравенство (1.9) принимает вид

$$\left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\vartheta})|^p r^{\omega} dr \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A_{p, \omega} \|f\|_{L_p^{(\omega)}\left(L\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}, \quad (1.10)$$

где $\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$. Поскольку отсюда вытекает принадлежность $F(z)$ классу $H_p^{(\omega)}[\Delta(1; 0)]$, то в силу теоремы 1 (1°) неравенство (1.10) верно и при $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$. Этим завершается доказательство утверждения 1°.

Чтобы убедиться в справедливости утверждения 2° леммы положим

$$F(z) = \begin{cases} F^{(+)}(z), & \operatorname{Re} z > 0, \\ F^{(-)}(z), & \operatorname{Re} z < 0. \end{cases}$$

Тогда, в силу (1.10), $F^{(+)}(z)$ и $F^{(-)}(-z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(1; 0)]$. Следовательно, по теореме 1 функция $F(z)$ почти всюду на $L\left(\frac{\pi}{2}\right)$ имеет угловые граничные значения $F^{(-)}(\zeta)$ и $F^{(+)}(\zeta) \in L_p^{(\omega)}\left(L\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, соответственно слева и справа от луча $L\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Наконец, (1.6) вытекает из известных результатов об интегралах типа Коши (см., напр., [28], стр. 416). Лемма доказана.

Применение доказанной леммы позволяет получить следующее обобщение теоремы В.

Теорема 3. Если $F(\zeta) \in L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(x; \vartheta))$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$), то интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} F^{(+)}(z), & z \in \Delta(x; \vartheta), \\ F^{(-)}(z), & z \in \Delta^*(x; \vartheta), \end{cases}$$

обладает следующими свойствами.

1°. $F^{(+)}(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)]$, $F^{(-)}(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(x; \vartheta)]$;

2°. Имеют место неравенства

$$\|F^{(+)}\|_{p, \omega} \leq B_{p, \omega} \|F\|_{p, \omega}, \quad \|F^{(-)}\|_{p, \omega} \leq B_{p, \omega} \|F\|_{p, \omega},$$

где $B_{p, \omega} \in (0, +\infty)$ не зависит от $F(\zeta)$;

3° Почти всюду на $\partial\Delta(\alpha; \vartheta)$

$$F(\zeta) = F^{(+)}(\zeta) - F^{(-)}(\zeta).$$

Доказательство. Положив

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L\left(\vartheta \pm \frac{\pi}{2\alpha}\right)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \Phi^{(\pm)}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus L\left(\vartheta \pm \frac{\pi}{2\alpha}\right),$$

очевидно, будем иметь

$$\Phi^{(-)}(z) - \Phi^{(+)}(z) = \begin{cases} F^{(+)}(z), & z \in \Delta(\alpha; \vartheta), \\ F^{(-)}(z), & z \in \Delta^*(\alpha; \vartheta). \end{cases}$$

Применив к функциям $\Phi^{(\pm)}(z)$ лемму 1, получим утверждения 1° и 3°, а также неравенства

$$\|F^{(+)}\|_{p, \omega}^* \leq A_{p, \omega} \|F\|_{p, \omega}, \quad \|F^{(-)}\|_{p, \omega}^* \leq A_{p, \omega} \|F\|_{p, \omega}.$$

Из этих неравенств, воспользовавшись теоремой 2 (2°), получим утверждение 2°. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $F(\zeta) \in L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$). Для того чтобы $F(\zeta)$ была граничной функцией некоторой функции из класса $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in \Delta^*(\alpha; \vartheta).$$

1.3. Мы хотим установить общий вид линейного функционала в пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \vartheta)]$, удобный для наших дальнейших целей. Сначала докажем лемму.

Лемма 2. Если $F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ и $G(z) \in H_q^{(\bar{\omega})}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\bar{\omega} = (1-q)\omega$), то

$$\int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} F(\zeta) G(\zeta) d\zeta = 0. \quad (1.11)$$

Доказательство. Для фиксированных значений ε , R и φ_0 ($0 < \varepsilon < R < +\infty$, $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2\alpha}$) обозначим через $C(\varepsilon; R; \varphi_0)$ границу области $|z: |\operatorname{Arg} z - \vartheta| < \varphi_0, \varepsilon < |z| < R|$. По теореме Коши

$$\int_{C(\varepsilon; R; \varphi_0)} F(z) G(z) dz = 0. \quad (1.12)$$

С другой стороны, в силу теоремы 1 (3°) имеем

$$\max_{|\varphi - \vartheta| < \varepsilon_0} \|F(re^{i\varphi})\| = o(r^{-\frac{1+\omega}{p}}),$$

$$r \rightarrow +0, r \rightarrow +\infty,$$

$$\max_{|\varphi - \vartheta| < \varepsilon_0} \|G(re^{i\varphi})\| = o(r^{-\frac{1+(1-q)\omega}{q}}),$$

откуда

$$\int_{\substack{|z|=r \\ |\operatorname{Arg} z - \vartheta| < \varepsilon_0}} F(z) G(z) dz = o(1), \quad r \rightarrow +0, r \rightarrow \infty.$$

Следовательно, устремив в (1.12) $\varepsilon \rightarrow +0$, $R \rightarrow +\infty$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} F(re^{i(-\varphi_0 + \vartheta)}) G(re^{i(-\varphi_0 + \vartheta)}) e^{i(-\varphi_0 + \vartheta)} dr - \\ & - \int_0^{\infty} F(re^{i(\varphi_0 + \vartheta)}) G(re^{i(\varphi_0 + \vartheta)}) e^{i(\varphi_0 + \vartheta)} dr = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Теперь уже нетрудно в этом равенстве перейти к пределу при $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2\alpha}$.

Действительно, в силу теоремы 1 (1°), при $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2\alpha}$ будем иметь

$$F(re^{i(\pm \frac{\pi}{2\alpha} + \vartheta)}) r^{\frac{\omega}{p}} = \text{l. i. m.}_{\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2\alpha}} F(re^{i(\pm \varphi_0 + \vartheta)}) r^{\frac{\omega}{p}},$$

$$G(re^{i(\pm \frac{\pi}{2\alpha} + \vartheta)}) e^{i(\pm \frac{\pi}{2\alpha} + \vartheta)} r^{-\frac{\omega}{p}} = \text{l. i. m.}_{\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2\alpha}} G(re^{i(\pm \varphi_0 + \vartheta)}) e^{i(\pm \varphi_0 + \vartheta)} r^{-\frac{\omega}{p}},$$

где в первом из этих равенств предел в среднем берется по метрике $L_p(0, +\infty)$, а во втором — по метрике $L_q(0, +\infty)$. Отсюда заключаем, что произведения правых частей этих равенств сходятся по метрике $L_1(0, +\infty)$ к произведениям их левых частей. Следовательно, устремив в (1.13) $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2\alpha}$, получим (1.11), Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть Φ — ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(x; \vartheta)]$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$). Тогда существует единственная функция $G(z) \in H_q^{(\bar{\omega})}[\Delta(x; \vartheta)]$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\bar{\omega} = (1-r)\omega$) такая, что

$$\Phi[F] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(a; \vartheta)} F(\zeta) G(\zeta) d\zeta, \quad F \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(x; \vartheta)]. \quad (1.14)$$

При этом

$$\|\Phi\|_* \leq \frac{1}{2\pi} \|G\|_{q, \omega} \leq B_{p, \omega} \|\Phi\|_*, \quad (1.15)$$

где $\|\Phi\|_*$ — это норма функционала Φ на пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$, а $B_{p, \omega} \in (0, +\infty)$

не зависит от Φ .

Обратно, если $G(z) \in H_q^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$, то формулой (1.14) определяется ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$.

Доказательство. Пусть Φ — ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)] \subset L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(z; \vartheta))$. Продолжим этот функционал с сохранением нормы на все пространство $L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(z; \vartheta))$. Из общего вида функционала в $L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(z; \vartheta))$ имеем

$$\Phi[F] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z; \vartheta)} F(\zeta) \overline{g(\zeta)} |\zeta|^\omega d\zeta, \quad F \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)], \quad (1.16)$$

где $g(\zeta) \in L_q^{(\omega)}(\partial\Delta(z; \vartheta))$, причем

$$2\pi \|\Phi\|_* = \|g\|_{q, \omega}. \quad (1.17)$$

Так как $\overline{g(\zeta)} |\zeta|^\omega \in L_q^{(\omega)}(\partial\Delta(z; \vartheta))$, то по теореме 3 существуют функции $G(z) \in H_q^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$ и $G^*(z) \in H_q^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$ такие, что

$$\|G\|_{q, \omega} \leq B_{q, \omega} \|\overline{g(\zeta)} |\zeta|^\omega\|_{q, \omega} = B_{p, \omega} \|g\|_{q, \omega} \quad (1.18)$$

и почти всюду на $\partial\Delta(z; \vartheta)$

$$\overline{g(\zeta)} |\zeta|^\omega = \tilde{G}(\zeta) - G^*(\zeta). \quad (1.19)$$

Воспользовавшись леммой 2, из (1.16) и (1.19) получим (1.14).

Далее, применив к (1.14) неравенство Гельдера, будем иметь

$$|\Phi[F]| \leq \frac{1}{2\pi} \|G\|_{q, \omega} \|F\|_{p, \omega}, \quad F \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]. \quad (1.20)$$

Отсюда, из (1.17) и (1.18) следуют неравенства (1.15).

Докажем единственность представления (1.14).

Пусть $G(z) \in H_q^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$ и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z; \vartheta)} F(\zeta) G(\zeta) d\zeta = 0, \quad \forall F \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]. \quad (1.21)$$

Так как при фиксированном $z \in \Delta(z; \vartheta)$ функция $F_z(\zeta) = (\zeta - z)^{-1}$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\Delta^*(z; \vartheta)}$, а при $|\zeta| \rightarrow +\infty$ имеет порядок $O(|\zeta|^{-1})$, то $F_z(\zeta) \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$. Поэтому из (1.21), в частности, имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(x; \vartheta)} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in \Delta(x; \vartheta).$$

Следовательно, по теореме 1, $G(z) \equiv 0$, $z \in \Delta(x; \vartheta)$, и единственность представления (1.14) доказана.

Наконец, если $G(z) \in H_q^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)]$, то формулой (1.14) задается линейный функционал, ограниченность которого следует из (1.20). Теорема доказана.

1.4. В заключение этого параграфа опишем множество нулей функций класса $H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)]$.

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Delta(x; \vartheta)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, а $s_k > 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $[\lambda_1, \dots, \lambda_k]$. Образует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(e^{-i\vartheta} \lambda_k)^2}{1 + |\lambda_k|^{2s_k}}. \quad (1.22)$$

Справедливо следующее утверждение (см., напр., [29], лемму 3).

Лемма А. Если ряд (1.22) сходится, то произведение типа Бляшке

$$B_{x, \vartheta}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{-i\vartheta} z)^{s_k} - (e^{-i\vartheta} \lambda_k)^{s_k}}{(e^{-i\vartheta} z)^{s_k} + \overline{(e^{-i\vartheta} \lambda_k)^{s_k}}} \frac{|1 - (e^{-i\vartheta} \lambda_k)^{2s_k}|}{1 - (e^{-i\vartheta} \lambda_k)^{2s_k}} \quad (1.23)$$

сходится в области $\Delta(x; \vartheta)$ и определяет нам аналитическую функцию $B_{x, \vartheta}(z)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Более того

$$|B_{x, \vartheta}(z)| \leq 1 \quad (z \in \Delta(x; \vartheta)); \quad B_{x, \vartheta}^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$|B_{x, \vartheta}(\zeta)| = 1 \text{ почти всюду на } \partial \Delta(x; \vartheta).$$

Имеет место

Теорема 5. Пусть $1 < p < +\infty$ и $-1 < \omega < p-1$. Справедливы следующие утверждения:

1°. Если ряд (1.22) сходится, то существует функция $G(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)]$, обращающаяся в нуль лишь в точках последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$, причем

$$G^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (1.24)$$

2°. Если ряд (1.22) расходится и функция $G(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)]$ удовлетворяет условиям (1.24), то $G(z) \equiv 0$.

Доказательство. 1°. Если ряд (1.22) сходится, то в силу леммы А функция

$$G(z) = \frac{B_{x, \vartheta}(z)}{z - \zeta}, \quad z \in \Delta(x; \vartheta),$$

где $\zeta \in \Delta^*(x; \vartheta)$ фиксировано, аналитична и ограничена в области $\Delta(x; \vartheta)$, а при $|z| \rightarrow +\infty$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$. Следовательно, $G(z) \in$

$\in H_p^{(m)}[\Delta(x; \vartheta)]$ и, в силу той же леммы А, удовлетворяет условиям (1.24).

2°. Пусть $G(z) \in H_p^{(m)}[\Delta(x; \vartheta)]$ и удовлетворяет условиям (1.24). Тогда при любом целом $n \geq 1$ функция

$$G_n(z) = G(z) \pi_n^{-1}(z), \quad z \in \Delta(x; \vartheta),$$

где

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{(e^{-i\vartheta} z)^{\alpha} - (e^{-i\vartheta} \lambda_k)^{\alpha}}{(e^{-i\vartheta} z)^{\alpha} + (e^{-i\vartheta} \lambda_k)^{\alpha}},$$

принадлежит классу $H_p^{(m)}[\Delta(x; \vartheta)]$. Следовательно, по теореме 1

$$\frac{G(z)}{\pi_n(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} \frac{G(\zeta) \pi_n^{-1}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Delta(x; \vartheta).$$

Применив здесь неравенство Гельдера и учитывая, что $|\pi_n(\zeta)| = 1$, $\zeta \in \partial\Delta(x; \vartheta)$, получим

$$|G(z)| \leq |\pi_n(z)| \frac{\|G\|_{p, \omega}}{2\pi} \left\{ \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} \frac{|\zeta|^{\omega} |d\zeta|}{|\zeta - z|^q} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad z \in \Delta(x; \vartheta).$$

Наконец, поскольку из расходимости ряда (1.22) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\pi_n(z)| = 0, \quad z \in \Delta(x; \vartheta),$$

(см. [29], лемму 2), то, устремив в последнем неравенстве $n \rightarrow +\infty$, получим $G(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

§ 2. Полнота и замыкание биортогональных систем

$\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{Q_k(z)\}_1^\infty$ в угловых областях

2.1 (а). Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(x; \vartheta)$, среди которых могут быть числа произвольной конечной или даже бесконечной кратности.

Для любого целого $j \geq 1$ обозначим через s_j и p_j кратности появления числа λ_j на отрезке $[\lambda_k]_1^\infty$ и во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ соответственно.

Очевидно, что

$$1 \leq s_j \leq p_j \leq +\infty \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Отметим также, что если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(e^{-i\vartheta} \lambda_k)^{\alpha}}{1 + |\lambda_k|^{2\alpha}} \quad (2.1)$$

сходится, то число p_j будет конечным при всех $j \geq 1$.

Условимся также всюду ниже полагать

$$1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \bar{\omega} = (1-q)\omega. \quad (2.2)$$

Отметим, что эти условия симметричны относительно указанных параметров в том смысле, что

$$1 < q < +\infty, -1 < \bar{\omega} < q-1, \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1, \omega = (1-p)\bar{\omega}$$

Этим обстоятельством мы будем часто пользоваться.

(б) С последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем систему простейших рациональных дробей $\{r_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$r_k(z) = \frac{(s_k - 1)!}{(z - \lambda_k)^{s_k}} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.3)$$

Так как $r_k(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\Delta^*(\alpha; \beta)}$, а при $|z| \rightarrow +\infty$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$, то

$$r_k(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \beta)] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Теорема 6. Для полноты системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \beta)]$ необходимо и достаточно, чтобы ряд (2.1) расходился.

Доказательство. Пусть Φ — заданный на пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \beta)]$ ограниченный линейный функционал, удовлетворяющий условиям

$$\Phi[r_k] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

В силу теоремы Хана-Банаха нам нужно показать, что если ряд (2.1) расходится, то не существует нетривиального функционала Φ , удовлетворяющего условиям (2.4), а если ряд (2.1) сходится, то такой функционал Φ существует. Но из общего вида функционала

$$\Phi[F] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(\alpha; \beta)} F(\zeta) G(\zeta) d\zeta, \quad F \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \beta)],$$

где $G(z) \in H_q^{(\bar{\omega})}[\Delta(\alpha; \beta)]$ (см. теорему 4), из (2.4) и (2.3) имеем

$$G^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Остается воспользоваться теоремой 5. Теорема доказана.

Аналогично можно доказать, что если ряд (2.1) расходится, то система $\{r_k(z)\}_{k=2}^\infty$ полна в пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \beta)]$. Таким образом,

Если ряд (2.1) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не минимальна в $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \beta)]$ и, следовательно, не имеет биортогонального дополнения.

Отметим, что в случае $p=2$ утверждение теоремы 6 было дискусировано в заметке автора [30].

(в) Если система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не полна в $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$ (т. е. ряд (2.1) сходится), то она порождает в $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$ некоторое замкнутое подпространство. Мы хотим дать полное внутреннее описание этого подпространства.

При условии сходимости ряда (2.1) обозначим через $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \vartheta)\}$ множество тех функций $F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$, для которых $F(\zeta) B_{z, \vartheta}(\zeta)$, $\zeta \in \partial\Delta(z; \vartheta)$, являются угловыми граничными значениями некоторой функции из класса $H_p^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$.

В силу следствия из теоремы 3 справедлива

Лемма 3. Если ряд (2.1) сходится, то класс $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \vartheta)\}$ совпадает с множеством тех $F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$, для которых

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z; \vartheta)} \frac{F(\zeta) B_{z, \vartheta}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in \Delta^*(z; \vartheta). \quad (2.5)$$

Из этой леммы легко следует, что $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \vartheta)\}$ является замкнутым подпространством пространства $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$.

Оказывается, что справедлива

Теорема 7. Если ряд (2.1) сходится, то замыкание в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$ линейной оболочки системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ совпадает с классом $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \vartheta)\}$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\{r_k(z)\}_1^\infty \subset H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \vartheta)\}$. Поэтому, обозначив через $V(\{r_k\}_1^\infty; H_p^{(\omega)}(z; \vartheta))$ замыкание в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$ линейной оболочки системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$, будем иметь

$$V(\{r_k\}_1^\infty; H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]) \subset H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \vartheta)\}.$$

Докажем, что

$$V(\{r_k\}_1^\infty; H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]) = H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \vartheta)\}.$$

Пусть Φ — заданный на $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(z; \vartheta)]$ ограниченный линейный функционал, удовлетворяющий условиям

$$\Phi[r_k] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Нам нужно доказать, что

$$\Phi[F] = 0, \quad \forall F \in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \vartheta)\}.$$

Из общего вида функционала

$$\Phi[F] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(a; \vartheta)} F(\zeta) G(\zeta) d\zeta,$$

где $G \in H_p^{(\omega)}[\Delta(a; \vartheta)]$ (см. теорему 4), имеем: $G^{(k-1)}(\lambda_k) = 0$, ($k = 1, 2, \dots$). Отсюда заключаем, что $G(\zeta) B_{a, \vartheta}^{-1}(\zeta) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$. С другой стороны, если $F \in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(a; \vartheta)\}$, то $F(\zeta) B_{a, \vartheta}(\zeta) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$.

Следовательно, в силу леммы 2

$$\Phi[F] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(x; \vartheta)} |F(\zeta) B_{x, \vartheta}(\zeta)| |G(\zeta) B_{x, \vartheta}^{-1}(\zeta)| d\zeta = 0$$

для всех $F \in H_p^{(w)}(\lambda_k; \Delta^*(x; \vartheta))$. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $p = 2$ утверждение этой теоремы было установлено в работе С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна [31], а в случае $\alpha = 1, \omega = 0$ — в работе М. М. Джрбашяна [18]. Однако примененный здесь метод доказательства теоремы 7 отличается как от метода, примененного в работе [31], так и от метода, примененного в работе [18] и раньше приводит к цели.

2.2. (а) Если ряд (2.1) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не имеет биортогонального дополнения. Но при условии сходимости ряда (2.1) система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ имеет биортогональную с ней систему. Займемся ее построением.

(б). Пусть ряд (2.1) сходится. Тогда бесконечное произведение (1.23) сходится в области $\Delta(x; \vartheta)$ и представляет там ограниченную аналитическую функцию $B_{x, \vartheta}(z)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. При этом для функции $B_{x, \vartheta}(z)$ точка $z = \lambda_k$ является нулем кратности p_k . Очевидно, что функция

$$\tau_k(z) = (z - \lambda_k)^{p_k} B_{x, \vartheta}^{-1}(z) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

регулярна и отлична от нуля в некоторой окрестности точки $z = \lambda_k$. Следовательно, при достаточно малом $\delta > 0$ справедливо разложение

$$\tau_k(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v(\lambda_k) (z - \lambda_k)^v, \quad |z - \lambda_k| < \delta; \quad (2.7)$$

$$a_v(\lambda_k) = \frac{1}{v!} \tau_k^{(v)}(\lambda_k) \quad (v = 0, 1, \dots; \quad k = 1, 2, \dots). \quad (2.8)$$

Отметим, что $a_0(\lambda_k) \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Введем в рассмотрение полиномы

$$q_k(z) = \sum_{v=0}^{p_k - s_k} a_v(\lambda_k) (z - \lambda_k)^v \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

и функции

$$\Omega_k(z) = \frac{B_{x, \vartheta}(z) q_k(z)}{(s_k - 1)! (z - \lambda_k)^{p_k - s_k + 1}} = \quad (2.10)$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

$$= \frac{B_{x, \vartheta}(z)}{(s_k - 1)!} \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{a_v(\lambda_k)}{(z - \lambda_k)^{p_k - s_k - v + 1}}.$$

Так как функция $B_{x, \vartheta}(z)$ аналитична и ограничена в области $\Delta(x; \vartheta)$ и в точке $z = \lambda_k$ имеет нуль кратности p_k , то $\Omega_k(z)$ аналитична и ограничена в той же области $\Delta(x; \vartheta)$. Более того, при $|z| \rightarrow +\infty$ функция $\Omega_k(z)$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$. Отсюда легко видеть, что

$$\Omega_k(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Лемма 4. Функции системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ удовлетворяют следующим интерполяционным данным:

$$\Omega_k^{(s_k-1)}(\lambda_n) = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k, n = 1, 2, \dots).$$

Доказательство. Из (2.7) и (2.9) следует, что

$$q_k(z) = \tau_k(z) - \sum_{v=p_k-s_k+1}^{\infty} a_v(\lambda_k)(z-\lambda_k)^v, \quad |z-\lambda_k| < \delta,$$

а в силу (2.6) имеем

$$\frac{B_{s, \vartheta}(z) \tau_k(z)}{(s_k-1)!(z-\lambda_k)^{p_k-s_k+1}} = \frac{(z-\lambda_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}.$$

Из этих равенств и из (2.10) получаем

$$\Omega_k(z) = \frac{(z-\lambda_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!} - \frac{B_{s, \vartheta}(z)}{(s_k-1)!} \sum_{x=0}^{\infty} b_x(\lambda_k)(z-\lambda_k)^x, \quad |z-\lambda_k| < \delta. \quad (2.11)$$

Так как $B_{s, \vartheta}(z)$ в точке $z = \lambda_k$ имеет нуль кратности $p_k \geq s_k$, то из (2.11) имеем $\Omega_k^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 1$ ($k \geq 1$).

Если $\lambda_k = \lambda_n$, но $k \neq n$, то $s_k \neq s_n$, и из (2.11) получаем: $\Omega_k^{(s_n-1)}(\lambda_n) = 0$.

Наконец, если $\lambda_k \neq \lambda_n$, то из (2.10) вытекает, что в точке $z = \lambda_n$ функция $\Omega_k(z)$ вместе с $B_{s, \vartheta}(z)$ имеет нуль кратности $p_n \geq s_n$. Следовательно, $\Omega_k^{(s_n-1)}(\lambda_n) = 0$. Лемма доказана.

Теорема 8. Пусть ряд (2.1) сходится. Тогда системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ биортогональны в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} r_n(\zeta) \Omega_k(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k, n = 1, 2, \dots), \quad (2.12)$$

где направление на $\partial\Delta(x; \vartheta)$ совпадает с направлением положительного обхода области $\Delta(x; \vartheta)$.

Эта теорема следует из леммы 4, так как написанный в (2.12) интеграл равен $\Omega_k^{(s_n-1)}(\lambda_n)$ (в силу (2.3) и теоремы 1 (2)).

(в) Теперь мы хотим описать замкнутую линейную оболочку системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty \subset H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)]$. Напомним, что эта система определена лишь при условии сходимости ряда (2.1).

Пусть ряд (2.1) сходится. Обозначим через $\tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(x; \vartheta)\}$ множество тех функций $f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)]$, для которых $f(\zeta) B_{s, \vartheta}^{-1}(\zeta)$, $\zeta \in \partial\Delta(x; \vartheta)$, являются граничными значениями некоторой функции из класса $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(x; \vartheta)\}$.

Теорема 9. Пусть ряд (2.1) сходится. Тогда замыкание в метрике $\bar{H}_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)]$ линейной оболочки системы $|\Omega_k(z)|_1^\infty$ совпадает с классом $\bar{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(x; \vartheta)\}$.

Доказательство. Для произвольного целого $j \geq 1$ обозначим через $\{K_j\}$ множество тех индексов k , для которых $\lambda_k = \lambda_j$. Обозначим, далее, через A_j и B_j семейства функций:

$$A_j = \left\{ \frac{(n-1)!}{(z-\lambda_j)^n} \right\}_{n=1}^{p_j}, \quad B_j = \left\{ \frac{1}{(n-1)!} \sum_{v=0}^{p_j-n} \frac{a_v(\lambda_j)}{(z-\lambda_j)^{p_j-n-v+1}} \right\}_{n=1}^{p_j}.$$

В силу определения множества $\{K_j\}$ будем иметь

$$A_j = \{r_k(z): k \in \{K_j\}\}, \quad B_j = \{\Omega_k(z) B_{\alpha, \vartheta}^{-1}(z): k \in \{K_j\}\},$$

откуда заключаем, что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \{r_k(z)\}_1^\infty, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \{B_{\alpha, \vartheta}^{-1}(z) (\Omega_k(z))\}_1^\infty. \quad (2.13)$$

С другой стороны, любая функция семейства B_j есть линейная комбинация функций семейства A_j , и наоборот, так как $a_0(\lambda_j) \neq 0$, то любая функция семейства A_j является линейной функцией семейства B_j . Иначе говоря, линейные оболочки семейств A_j и B_j совпадают. Следовательно, в силу (2.13), линейные оболочки систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{B_{\alpha, \vartheta}^{-1}(z) \times \Omega_k(z)\}_1^\infty$ также совпадают.

Пусть теперь $f(z) \in \bar{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(x; \vartheta)\}$. Тогда существует функция $F(z) \in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(x; \vartheta)\}$ такая, что почти всюду на $\partial\Delta(x; \vartheta) = \partial\Delta^*(x; \vartheta)$ справедливо равенство

$$f(\zeta) B_{\alpha, \vartheta}^{-1}(\zeta) = F(\zeta). \quad (2.14)$$

По теореме 7 существует последовательность $\{P_n(z)\}_1^\infty$ линейных комбинаций функций системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ такая, что $\|P_n - F\|_{p, \omega} \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$). Отсюда, учитывая (2.14) и тот факт, что $|B_{\alpha, \vartheta}(\zeta)| = 1$ почти всюду на $\partial\Delta(x; \vartheta) = \partial\Delta^*(x; \vartheta)$, получим: $\|B_{\alpha, \vartheta} P_n - f\|_{p, \omega} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$). При этом ясно, что $\{B_{\alpha, \vartheta} P_n\}_1^\infty$ — это последовательность линейных комбинаций функций системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ (т. к. линейные оболочки систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k B_{\alpha, \vartheta}^{-1}\}_1^\infty$ совпадают).

Таким образом, $\bar{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(x; \vartheta)\}$ является подпространством замыкания в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \vartheta)]$ линейной оболочки системы $|\Omega_k(z)|_1^\infty$.

А поскольку $|\Omega_k(z)|_1^\infty \subset \bar{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(x; \vartheta)\}$, то $\bar{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(x; \vartheta)\}$ совпадает с этим замыканием. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $\alpha = 1$, $\omega = 0$ утверждение этой теоремы иным способом было доказано в работе М. М. Джрбашяна [18].

2.3. Докажем несколько непосредственно связанных с содержанием этого параграфа лемм, которыми воспользуемся ниже.

Лемма 5. Пусть ряд (2.1) сходится. Если $f(z) \in \tilde{H}_p^{(\infty)}(\lambda_k; \Delta(x; \vartheta))$ и $f^{(k-1)}(\lambda_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Так как $f^{(k-1)}(\lambda_k) = 0$ ($k \geq 1$), то

$$f(\zeta) B_{\lambda, \vartheta}^{-1}(\zeta) \in H_p^{(k)}[\Delta(x; \vartheta)].$$

С другой стороны, из

$$f(z) \in \tilde{H}_p^{(\infty)}(\lambda_k; \Delta(x; \vartheta))$$

имеем

$$f(\zeta) B_{\lambda, \vartheta}^{-1}(\zeta) \in H_p^{(\infty)}[\Delta^*(x; \vartheta)].$$

Следовательно, в силу теоремы 1 (2°)

$$\int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} \frac{f(\zeta) B_{\lambda, \vartheta}^{-1}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0, \quad z \in \Delta(x; \vartheta) \cup \Delta^*(x; \vartheta).$$

Отсюда заключаем, что $f(\zeta) B_{\lambda, \vartheta}^{-1}(\zeta) = 0$ почти всюду на $\partial\Delta(x; \vartheta)$ (см. теорему 3 (3°)), и поскольку $|B_{\lambda, \vartheta}(\zeta)| = 1$ на $\partial\Delta(x; \vartheta)$, то $f(z) \equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть ряд (2.1) сходится. Тогда любая функция $G(z) \in H_p^{(\infty)}[\Delta(x; \vartheta)]$ представима в виде

$$G(z) = g(z) + \frac{B_{\lambda, \vartheta}(z)}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} \frac{G(\zeta)}{B_{\lambda, \vartheta}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Delta(x; \vartheta), \quad (2.15)$$

где

$$g(z) \in \tilde{H}_p^{(\infty)}(\lambda_k; \Delta(x; \vartheta)), \quad \tilde{G}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} \frac{G(\zeta)}{B_{\lambda, \vartheta}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H_p^{(\infty)}[\Delta(x; \vartheta)]. \quad (2.16)$$

При этом справедливо неравенство

$$\|y\|_{p, \infty} \leq B_{p, \infty} \|G\|_{p, \infty}, \quad (2.17)$$

где $B_{p, \infty} \in (0, +\infty)$ не зависит от $G(z)$.

Доказательство. Пусть $G(z) \in H_p^{(\infty)}[\Delta(x; \vartheta)]$. Так как $|B_{\lambda, \vartheta}(\zeta)| = 1$ почти всюду на $\partial\Delta(x; \vartheta)$, то по теореме 1 (1°)

$$G(\zeta) B_{\lambda, \vartheta}^{-1}(\zeta) \in L_p^{(\infty)}(\partial\Delta(x; \vartheta)).$$

Следовательно, положив

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} \frac{G(\zeta)}{B_{\lambda, \vartheta}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} \tilde{G}(z), & z \in \Delta(x; \vartheta), \\ -F(z), & z \in \Delta^*(x; \vartheta), \end{cases}$$

в силу теоремы 3 можем написать

$$\tilde{G}(z) \in H_p^{(\infty)}[\Delta(x; \vartheta)], \quad F(z) \in H_p^{(\infty)}[\Delta^*(x; \vartheta)],$$

причем $\|F\|_{p, \omega} \leq B_{p, \omega} \|G\|_{p, \omega}$. Более того, почти всюду на $\partial\Delta(\alpha; \vartheta)$

$$G(\zeta) B_{\alpha, \vartheta}^{-1}(\zeta) = \bar{G}(\zeta) + F(\zeta).$$

Следовательно, определив функцию $g(z)$ равенством

$$g(z) = G(z) - B_{\alpha, \vartheta}(z) \bar{G}(z), \quad z \in \Delta(\alpha; \vartheta),$$

будем иметь: $g(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$, и почти всюду на $\partial\Delta(\alpha; \vartheta)$

$$g(\zeta) B_{\alpha, \vartheta}^{-1}(\zeta) = F(\zeta).$$

Отсюда на основании леммы 3 заключаем, что $h(z) \in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)\}$.

Следовательно; $g(z) \in \tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}$, причем

$$\|g\|_{p, \omega} = \|g B_{\alpha, \vartheta}^{-1}\|_{p, \omega} = \|F\|_{p, \omega} \leq B_{p, \omega} \|G\|_{p, \omega},$$

и лемма доказана.

Лемма 7. Если ряд (2.1) сходится, то

1°. При любом целом $k \geq 1$ формулой

$$\chi_k[\varphi] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} \Omega_k(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta, \quad \varphi \in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)\},$$

на пространстве $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)\}$ определяется ограниченный линейный функционал χ_k ;

2°. Системы $\{\chi_k\}_1^\infty$ и $\{r_k\}_1^\infty$ биортогональны:

$$\chi_k[r_n] = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k, n = 1, 2, \dots);$$

3°. Справедливы неравенства

$$\|\Omega_k\|_{q, \omega} \leq C_{p, \omega} \|\chi_k\| \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где $\|\chi_k\|$ — это норма функционала χ_k на пространстве $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)\}$, а $C_{p, \omega} \in (0, +\infty)$ не зависит от $k \geq 1$.

Доказательство. Так как $\Omega_k(z) \in H_q^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ и $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)\} \subset H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \vartheta)]$, то утверждение 1° следует из теоремы 4. Утверждение 2° следует из теоремы 8. Перейдем к доказательству утверждения 3° леммы.

Положим

$$T_k(\zeta) = \Omega_k(\zeta) B_{\alpha, \vartheta}^{-1}(\zeta) = \frac{1}{(s_k - 1)!} \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{a_v(\lambda_k)}{(\zeta - \lambda_k)^{p_k - s_k - v + 1}}, \quad \zeta \in \partial\Delta(\alpha; \vartheta).$$

Нетрудно видеть, что $T_k \in H_q^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \vartheta)]$ и $\|T_k\|_{q, \omega} = \|\Omega_k\|_{q, \omega}$. Следовательно, по теореме 4 формулой

$$\Phi_k[G] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} T_k(\zeta) G(\zeta) d\zeta, \quad G \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$$

определяется ограниченный линейный функционал Φ_k , заданный на пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$. При этом

$$\|\Omega_k\|_{q, \infty} = \|T_k\|_{q, \infty} \leq 2\pi B_{p, \infty} \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} T_k(\zeta) G(\zeta) d\zeta \right| \right\}, \quad (2.18)$$

где верхняя грань берется по всем $G \in H_p^{(\infty)}[\Delta(x; \vartheta)]$ с нормой $\|G\|_{p, \infty} \leq 1$. Но по лемме 6 каждая такая функция представима в виде

$$G(z) = g(z) + B_{\lambda, \vartheta}(z) \tilde{G}(z), \quad z \in \Delta(x; \vartheta), \quad (2.19)$$

где $g(z) \in \tilde{H}_p^{(\infty)}\{\lambda_k; \Delta(x; \vartheta)\}$, $\tilde{G}(z) \in H_p^{(\infty)}[\Delta(x; \vartheta)]$, причем $\|g\|_{p, \infty} \leq B_{p, \infty}$.

Но так как функция $B_{\lambda, \vartheta}(z) \tilde{G}(z)$ вместе с $B_{\lambda, \vartheta}(z)$ в точке $z = \lambda_k$ имеет нуль кратности p_k , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} T_k(\zeta) B_{\lambda, \vartheta}(\zeta) \tilde{G}(\zeta) d\zeta = 0,$$

и из (2.19) получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} T_k(\zeta) G(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} T_k(\zeta) g(\zeta) d\zeta. \quad (2.20)$$

Однако $g(z) \in \tilde{H}_p^{(\infty)}\{\lambda_k; \Delta(x; \vartheta)\}$. Значит

$$g(\zeta) B_{\lambda, \vartheta}^{-1}(\zeta) = \varphi(\zeta) \in H_p^{(\infty)}\{\lambda_k; \Delta^*(x; \vartheta)\}, \quad (2.21)$$

и поскольку $\|g\|_{p, \infty} \leq B_{p, \infty}$, то $\|\varphi\|_{p, \infty} \leq B_{p, \infty}$. Наконец, так как $T_k(\zeta) B_{\lambda, \vartheta}(\zeta) = \Omega_k(\zeta)$, то из (2.20) и (2.21) получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} T_k(\zeta) G(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} \Omega_k(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta.$$

Отсюда и из (2.18) заключаем, что

$$\|\Omega_k\|_{q, \infty} \leq 2\pi B_{p, \infty} \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} \Omega_k(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \right| \right\},$$

где верхняя грань берется по всем $\varphi(\zeta) \in H_p^{(\infty)}\{\lambda_k; \Delta^*(x; \vartheta)\}$ с нормой $\|\varphi\|_{p, \infty} \leq B_{p, \infty}$, откуда и вытекает утверждение 3. Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 8. Если ряд (2.1) сходится, то

1°. При любом целом $k \geq 1$ формулой

$$R_k[g] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(x; \vartheta)} r_k(\zeta) g(\zeta) d\zeta, \quad g \in \tilde{H}_p^{(\infty)}\{\lambda_k; \Delta(x; \vartheta)\},$$

на пространстве $\tilde{H}_p^{(\infty)}\{\lambda_k; \Delta(x; \vartheta)\}$ определяется ограниченный линейный функционал R_k :

2°. Системы $\{R_k\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k\}_1^\infty$ биортогональны:

$$R_k[\Omega_n] = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k, n = 1, 2, \dots);$$

3°. Справедливы неравенства

$$\|r_k\|_{p, \dots} \leq C_{p, \dots} \|R_k\| \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где $\|R_k\|$ — это норма функционала R_k на пространстве $\bar{H}_p^{(m)}(\lambda_k; \Delta(x; \vartheta))$, а $C_{p, \dots} \in (0, +\infty)$ не зависит от $k \geq 1$.

§ 3. Базисность систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$, $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ и решение кратной интерполяционной задачи в классах $H_p^{(m)}[\Delta(x; \vartheta)]$

3.1 (а) Для удобства читателя приведем здесь некоторые известные определения и факты.

Пусть X — банахово пространство и $\{x_k\}_1^\infty$ — система элементов этого пространства. Обозначим через $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$ замкнутую линейную оболочку системы $\{x_k\}_1^\infty$.

Как известно, система $\{x_k\}_1^\infty$ называется базисом пространства $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$, если любой элемент $x \in V(\{x_k\}_1^\infty; X)$ единственным образом разлагается в сходящийся по метрике X ряд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) x_k, \quad (3.1)$$

где $c_k(x)$ — комплексные коэффициенты. В этом случае система $\{c_k(x)\}_1^\infty$ будет биортогональна с системой $\{x_k\}_1^\infty$.

Напомним, что системы $\{x_k\}_1^\infty \subset X$ и $\{x_k^*\}_1^\infty \subset X^*$ называются биортогональными, если

$$x_k^*(x_n) = \delta_{k,n} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где $\delta_{k,n}$ — символ Кронекера.

Если система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом пространства $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$, то эта система имеет биортогональное дополнение $\{x_k^*\}_1^\infty$, причем справедливо неравенство

$$\sup_{k \geq 1} \{\|x_k\| \|x_k^*\|\} < +\infty, \quad (3.2)$$

где $\|x_k^*\|$ — это норма функционала x_k^* на пространстве $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$ (см. [32], стр. 164—171).

Скажем, что система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$, изоморфным стандартному базису пространства l_p , если существует ограниченный обратимый линейный оператор $T_p: V(\{x_k\}_1^\infty; X) \rightarrow l_p$ такой, что $T_p(x_k) = |\delta_{k,n}|_{n=1}^\infty$ при всех $k \geq 1$.

(б) Пусть $\{r_k\}_1^\infty \subset \Delta(x; \vartheta)$ — произвольная последовательность. Как и раньше, для произвольного целого $j \geq 1$ через s_j и p_j будем обозначать кратности появления числа λ_j на отрезке $|\lambda_k|$ и во всей последовательности $\{r_k\}_1^\infty$ соответственно.

Обозначим через $US(\Delta(x; \theta))$ класс тех последовательностей $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Delta(x; \theta)$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\inf_{k \geq 1} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left| \frac{(e^{-i\theta} \lambda_k)^{\alpha} - (e^{-i\theta} \lambda_j)^{\alpha}}{(e^{-i\theta} \lambda_k)^{\alpha} + (e^{-i\theta} \lambda_j)^{\alpha}} \right| \right\} > 0, \quad \sup_{k \geq 1} |p_k| < +\infty. \quad (3.3)$$

Отметим, что из первого из этих условий вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(e^{-i\theta} \lambda_k)^{\alpha}}{1 + |\lambda_k|^{2\alpha}}. \quad (3.4)$$

С последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем новую последовательность $\gamma_{(p, \omega)} \equiv \{\gamma_k^{(p, \omega)}\}_1^\infty$, положив

$$\gamma_k^{(p, \omega)} = \left\{ |\lambda_k|^{\omega + (1-\alpha)(2-p)} (|\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \lambda_k)^{\alpha})^{p(s_k-1)+1} \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (3.5)$$

Пусть, далее $x \equiv \{x_k\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел. Обозначим через $l_p\{x\}$ банахово пространство всевозможных последовательностей комплексных чисел $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\|\gamma\|_{p, \omega} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^p |\gamma_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Очевидно, что если последовательности $w \equiv \{w_k\}_1^\infty$ и $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty$ удовлетворяют условиям $w_k = x_k \gamma_k$ ($k \geq 1$), то $\gamma \in l_p\{x\}$ тогда и только тогда, когда $w \in l_p$.

Наконец, напомним, что выше мы условились через p, q, ω и ω обозначать параметры, определяемые из условий (2.2).

3.2 (а). Докажем лемму.

Лемма 9. Если $\lambda \in \Delta(x; \theta)$ и $n \geq 1$, то

$$\left\{ \frac{2 \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \lambda)^{\alpha}}{\alpha |\lambda|^{2\alpha-1}} \right\}^n \int_{\partial \Delta(x; \theta)} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \lambda|^{n+1}} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \right)^n.$$

Доказательство. Положив $\varphi_k^{(\pm)} = \frac{\pi}{2x} \pm \arg(e^{-i\theta} \lambda)$, можно на-

писать

$$J_n(\lambda) = \int_{\partial \Delta(x; \theta)} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \lambda|^{n+1}} = J_n^{(+)}(\lambda) + J_n^{(-)}(\lambda),$$

где

$$J_n^{(\pm)}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{dr}{[r^2 - 2r|\lambda| \cos \varphi_{\lambda}^{(\pm)} + |\lambda|^2]^{(n+1)/2}}.$$

Произведя здесь замену переменной $R = \left(\frac{r}{|\lambda|} - 1 \right) / \sqrt{1 + \cos \varphi^{(\pm)}}$, получим

$$f_n^{(\pm)}(\lambda) = (|\lambda| \sqrt{1 - \cos \varphi_{\lambda}^{(\pm)}})^{-n} \int_{\frac{1}{2} - \sqrt{1 - \cos \varphi_{\lambda}^{(\pm)}}}^{+\infty} \frac{dR}{[R^2 + 2R\sqrt{1 - \cos \varphi_{\lambda}^{(\pm)}} + 2]^{(n+1)/2}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f_n^{(\pm)}(\lambda) &\geq (|\lambda| \sqrt{1 - \cos \varphi_{\lambda}^{(\pm)}})^{-n} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dR}{[R^2 + 2R\sqrt{1 - \cos \varphi_{\lambda}^{(\pm)}} + 2]^{(n+1)/2}} > \\ &\geq (|\lambda| \sqrt{1 - \cos \varphi_{\lambda}^{(\pm)}})^{-n} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dR}{\left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2 \right]^{(n+1)/2}} = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n (|\lambda| \sqrt{1 - \cos \varphi_{\lambda}^{(\pm)}})^{-n}. \end{aligned}$$

Но так как $\sqrt{1 - \cos \varphi_{\lambda}^{(\pm)}} \leq \frac{|\varphi_{\lambda}^{(\pm)}|}{2}$, то

$$f_n^{(\pm)}(\lambda) > \frac{1}{3} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^n |\lambda|^{-n} |\varphi_{\lambda}^{(\pm)}|^{-n}.$$

Следовательно,

$$f_n(\lambda) = f_n^{(+)}(\lambda) + f_n^{(-)}(\lambda) > \frac{1}{3} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^n |\lambda|^{-n} (|\varphi_{\lambda}^{(+)}|^{-n} + |\varphi_{\lambda}^{(-)}|^{-n}). \quad (3.6)$$

Теперь заметим, что $|\arg(e^{-i\theta}\lambda)| < \frac{\pi}{2\alpha}$ и, следовательно, хотя бы одно из чисел $\varphi_{\lambda}^{(+)}$, $\varphi_{\lambda}^{(-)}$ лежит на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2\alpha}\right]$. Отсюда заключаем, что хотя бы одно из чисел $\alpha\varphi_{\lambda}^{(+)}$, $\alpha\varphi_{\lambda}^{(-)}$ принадлежит промежутку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Приняв это во внимание и воспользовавшись неравенством

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

из равенств

$$\cos(2 \arg(e^{-i\theta}\lambda)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 2 \arg(e^{-i\theta}\lambda)\right) = \sin(2\varphi_{\lambda}^{(\pm)})$$

получим

$$[\cos(2 \arg(e^{-i\theta}\lambda))]^n \geq \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^n \min\{|\varphi_{\lambda}^{(+)}|^n, |\varphi_{\lambda}^{(-)}|^n\}.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{2 \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \lambda)}{2 |\lambda|^{2-1}} \right|^n = \left(\frac{2}{2} \right)^n |\lambda|^n [\cos(2 \arg(e^{-i\theta} \lambda))]^n > \\ > \left(\frac{4}{\pi} \right)^n |\lambda|^n \min \{ |\varphi_+^{(n)}|^n, |\varphi_-^{(n)}|^n \}.$$

Отсюда и из (3.6) вытекает неравенство леммы.

Лемма 10. Пусть ряд (3.4) сходится. Если

$$\sup_{k \geq 1} \|r_n\|_{p_n, \infty} \|\Omega_n\|_{q, \infty} = C < +\infty, \quad (3.7)$$

то $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(z; \theta))$.

Доказательство. Сначала заметим, что в силу сходимости ряда (3.4) число p_n (т. е. кратность появления числа λ_n во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$) при любом $n \geq 1$ конечно.

Обозначим через $\{N\}$ множество тех индексов n , для которых $p_n = s_n$.

Из определения (2.10) функций $\Omega_n(z)$ следует, что

$$\Omega_n(z) = \frac{a_0(\lambda_n)}{(p_n-1)!} \frac{B_{z, \theta}(z)}{z - \lambda_n}, \quad n \in \{N\},$$

причем

$$|a_0(\lambda_n)| = \left[\frac{2 \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \lambda_n)^2}{2 |\lambda_n|^{2-1}} \right]^{p_n} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_n}}^{\infty} \left| \frac{(e^{-i\theta} \lambda_n)^2 - (e^{-i\theta} \lambda_j)^2}{(e^{-i\theta} \lambda_n)^2 + \overline{(e^{-i\theta} \lambda_j)^2}} \right| \right]^{-1}. \quad (3.8)$$

Имеем также

$$r_n(z) = \frac{(p_n-1)!}{(z - \lambda_n)^{p_n}}, \quad n \in \{N\}.$$

Учитывая, что $|B_{z, \theta}(z)| = 1$ почти всюду на $\partial\Delta(z; \theta)$ и применяя неравенство Гельдера, можем написать

$$|a_0(\lambda_n)| \int_{\partial\Delta(z; \theta)} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \lambda_n|^{p_n+1}} = \int_{\partial\Delta(z; \theta)} |r_n(\zeta)| |\zeta|^{-\frac{p_n}{p}} |\Omega_n(\zeta)| |\zeta|^{-\frac{p_n}{p'}} |d\zeta| \leq \\ \leq \|r_n\|_{p_n, \infty} \|\Omega_n\|_{q, \infty}, \quad n \in \{N\}.$$

Отсюда, воспользовавшись леммой 9, в силу (3.7) и (3.8) будем иметь

$$\frac{1}{3} \left(\frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \right)^{p_n} \leq C \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_n}}^{\infty} \left| \frac{(e^{-i\theta} \lambda_n)^2 - (e^{-i\theta} \lambda_j)^2}{(e^{-i\theta} \lambda_n)^2 + \overline{(e^{-i\theta} \lambda_j)^2}} \right| \right], \quad n \in \{N\}. \quad (3.9)$$

Так как $[(8\sqrt{2})/(3\pi)] > 1$, а выражение справа в (3.9) не превосходит C , то из (3.9) получаем

$$\inf_{n \in \{N\}} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_n}}^{\infty} \left| \frac{(e^{-i\theta} \lambda_n)^2 - (e^{-i\theta} \lambda_j)^2}{(e^{-i\theta} \lambda_n)^2 + \overline{(e^{-i\theta} \lambda_j)^2}} \right| \right] > 0, \quad \sup_{n \in \{N\}} |p_n| < +\infty.$$

Отсюда следует (3.3) и лемма доказана.

Лемма 11. Пусть ряд (3.4) сходится. Если система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ при какой-либо перестановке членов является базисом замыкания в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \vartheta)]$ своей линейной оболочки, то $\{\lambda_k\}_1^\infty \in U(S\Delta(\alpha; \vartheta))$.

Доказательство. Напомним, что при условии сходимости ряда (3.4) система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ определена. При том же условии замыкание в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \vartheta)]$ линейной оболочки системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ совпадает с пространством $H_p^{(\omega)}[\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)]$ (см. теорему 7).

Если система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ при какой-либо перестановке членов является базисом пространства $H_p^{(\omega)}[\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)]$, то в силу леммы 7 и (3.2) имеет место (3.7). Остается воспользоваться леммой 10.

Аналогично доказывается

Лемма 12. Пусть ряд (3.4) сходится. Если система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ при какой-либо перестановке членов является базисом замыкания в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ своей линейной оболочки то $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \vartheta))$.

б) Следующее утверждение играет существенную роль при установлении достаточных условий базисности систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$.

Теорема 10. Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — последовательность попарно различных точек из $\Delta(\alpha; \vartheta)$, удовлетворяющая условию

$$\inf_{k>1} \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} \left| \frac{(e^{-i\vartheta} z_k)^\alpha - (e^{-i\vartheta} z_j)^\alpha}{(e^{-i\vartheta} z_k)^\alpha + (e^{-i\vartheta} z_j)^\alpha} \right| \right\} > 0. \quad (3.10)$$

Тогда для любой функции $f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ справедливы неравенства

$$L_r[f] = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k^{(r)}|^p |f^{(r-1)}(z_k)|^p \leq A_{p,\omega}^{(r)} \|f\|_{p,\omega}^p \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (3.11)$$

где $A_{p,\omega}^{(r)} \in (0, +\infty)$ не зависит от $f(z)$, а

$$z_k^{(r)} = \left\{ |z_k|^{\omega + (1-\alpha)(2-p)} (|z_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta} z_k)^\alpha)^{p(r-1)+1} \right\}^{1/p} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (3.5')$$

Доказательство. Наряду с последовательностью $\{z_k\}_1^\infty$ рассмотрим новую последовательность $\{w_k\}_1^\infty$ из полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$, где

$$w_k = (e^{-i\vartheta} z_k)^\alpha \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.12)$$

Тогда, как известно, [33], в силу (3.10) для любого $F(w) \in H_p$ будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re} w_k)^{p(r-1)+1} |F^{(r-1)}(w_k)|^p \leq A_p^{(r)} \|F\|_{p,r}^p \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (3.13)$$

где $A_p^{(r)} \in (0, +\infty)$ не зависит от $F(w)$.

Пусть теперь $f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$. Положив

$$F(w) = f(e^{i\theta} w^{1/a}) w^{\gamma-1}, \operatorname{Re} w > 0, \gamma - 1 = \frac{1 + \omega - a}{pa}, \quad (3.14)$$

непосредственной проверкой убеждаемся, что $F(w) \in H_p$. Значит $F(w) \in H_p$ по теореме А, и для функции $F(w)$ (3.13) имеет место.

С другой стороны, применив индукцию по r ($r = 1, 2, \dots$), легко убедиться в справедливости тождества

$$w^{\frac{r-1}{a} + \gamma - r} \frac{d^{r-1} f(z)}{dr^{r-1}} \Big|_{z=e^{i\theta} w^{\frac{1}{a}}} = \sum_{v=0}^{r-1} A_v^{(r-1)} w^{-v} \frac{d^{r-1-v} F(w)}{dw^{r-1-v}}, \operatorname{Re} w > 0,$$

где $A_v^{(r-1)}$ ($0 \leq v \leq r-1$) не зависят от w и $f(z)$. Отсюда и из (3.12) получаем

$$|f^{(r-1)}(z_k)|^p \leq B_r |w_k|^{-p \left(\frac{r-1}{a} + \gamma - r \right)} \left| \sum_{v=0}^{r-1} |w_k|^{-v} |F^{(r-1-v)}(w_k)|^p \right| (k \geq 1),$$

где $B_r \in (0, +\infty)$ не зависит от $k \geq 1$ и $f(z)$. Применив здесь неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n \right|^p \leq N^{p/q} \sum_{n=1}^N |a_n|^p, \quad (3.15)$$

получим

$$|f^{(r-1)}(z_k)|^p \leq r^{p/q} B_r \sum_{v=0}^{r-1} |w_k|^{-p \left(\frac{r-1}{a} + \gamma - r + v \right)} |F^{(r-1-v)}(w_k)|^p \quad (k \geq 1).$$

Следовательно

$$L_r[f] \leq r^{p/q} B_r \sum_{v=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} |z_k^{(r)}|^p |w_k|^{-p \left(\frac{r-1}{a} + \gamma - r + v \right)} |F^{(r-1-v)}(w_k)|^p. \quad (3.16)$$

С учетом (3.12), (3.5') и равенства $\gamma - 1 = (1 + \omega - a)/(pa)$, можем написать

$$|z_k^{(r)}|^p |w_k|^{-p \left(\frac{r-1}{a} + \gamma - r + v \right)} = |w_k|^{-pv} (\operatorname{Re} w_k)^{pr-1} \leq (\operatorname{Re} w_k)^{p(r-v-1)+1}.$$

Воспользовавшись этим неравенством и (3.13), из (3.16) имеем

$$\begin{aligned} L_r[f] &\leq r^{p/q} B_r \sum_{v=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re} w_k)^{p(r-v-1)+1} |F^{(r-1-v)}(w_k)|^p \leq \\ &\leq r^{p/q} B_r \sum_{v=0}^{r-1} A_p^{(r-v)} \|F\|_{H_p}^p \quad (r = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

откуда, в силу равенства $\|F\|_{H_p}^p = a \|f\|_{p, \Delta}^p$, получаем (3.11). Теорема доказана.

Следствие. Если $\{|\lambda_k|_1^{-1}\} \in US(\Delta(a; \theta))$, то для любой функции $f(z) \in H_p^{(w)}[\Delta(a; \theta)]$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{(p, \omega)}|^p |f^{(s_k-1)}(\lambda_k)|^p \leq D_{p, \omega} \|f\|_{p, \omega}^p, \quad (3.10)$$

где $\{\lambda_k^{(p, \omega)}\}_1^\infty$ определяется из (3.5), а $D_{p, \omega} \in (0, +\infty)$ не зависит от $f(z)$.

Доказательство. Обозначим через $\{z_k\}_1^\infty$ последовательность попарно различных точек последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Так как $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(a; \theta))$, то $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (3.10). Следовательно, для любого $f \in H_p^{(\omega)}[\Delta(a; \theta)]$ имеет место (3.11).

Пусть для данного целого $j \geq 1$ число $q_j \geq 1$ означает кратность появления числа z_j во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Очевидно, что

$$\sup_{k \geq 1} \{q_k\} = \sup_{k \geq 1} \{p_k\} = P < +\infty.$$

Поэтому согласно (3.11) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{q_k} |z_k^{(r)}|^p |f^{(r-1)}(z_k)|^p &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^P |z_k^{(r)}|^p |f^{(r-1)}(z_k)|^p = \\ &= \sum_{r=1}^P L_r[f] \leq \left\{ \sum_{r=1}^P A_{p, \omega}^{(r)} \right\} \|f\|_{p, \omega}^p. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Теперь для каждого целого $k \geq 1$ обозначим через J_k множество тех индексов j , для которых

$$\lambda_j = z_k \text{ при } j \in J_k.$$

Непосредственно видно, что

$$J_{k_1} \cap J_{k_2} = \emptyset \quad (k_1 \neq k_2); \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = \{j\}_1^\infty,$$

а также, что когда j пробегает множество J_k , соответствующая ему величина s_j однократно пробегает совокупность чисел $\{1, 2, \dots, q_k\}$. Принимая во внимание эти замечания, а также определения (3.5) и (3.5') последовательностей $\{\lambda_k^{(p, \omega)}\}_1^\infty$ и $\{z_k^{(r)}\}_1^\infty$, мы убеждаемся в справедливости равенств

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{(p, \omega)}|^p |f^{(s_k-1)}(\lambda_k)|^p &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in J_k} |\lambda_j^{(p, \omega)}|^p |f^{(s_j-1)}(\lambda_j)|^p = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in J_k} |z_k|^{\omega + (1-s_j)(2-p)} (|z_k|^{s_j-2} \operatorname{Re}(e^{-i\theta} z_k)^{\alpha})^{p(s_j-1)+1} |f^{(s_j-1)}(z_k)|^p = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{q_k} |z_k^{(r)}|^p |f^{(r-1)}(z_k)|^p. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (3.18) получаем (3.17).

(в) Сейчас нам понадобится следующая лемма об оценках коэффициентов разложения (2.7).

Лемма 13. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \vartheta))$, то для коэффициентов разложения (2.7) справедливы оценки

$$|a_\nu(\lambda_k)| \leq A \{ |\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta} \lambda_k)^\alpha \}^{p_k-\nu} \quad (0 \leq \nu \leq p_k-1, k \geq 1),$$

где $A \in (0, +\infty)$ не зависит от ν и k .

Эта лемма доказывается точно так же как лемма 1.6 из работы [16] или лемма 2.9 из работы [18].

Лемма 14. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \vartheta))$ и последовательность $\{p_k^{(p, \omega)}\}_1^\infty$ определяется из (3.5), то для любой функции $F(\zeta) \in L_q^{(m)}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |p_k^{(p, \omega)}|^{-q} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} F(\zeta) \Omega_k(\zeta) |\zeta|^m d\zeta \right|^q \leq C_{p, \omega} \|F\|_{q, \omega}^q, \quad (3.19)$$

где $C_{p, \omega} \in (0, +\infty)$ не зависит от $F(\zeta)$.

Доказательство. Положим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} \frac{F(\zeta) B_{\alpha, \vartheta}(\zeta) |\zeta|^m}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Delta(\alpha; \vartheta). \quad (3.20)$$

Так как $F(\zeta) B_{\alpha, \vartheta}(\zeta) |\zeta|^m \in L_q^{(m)}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$, то по теореме 3 имеем $f(z) \in H_q^{(m)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$, причем

$$\|f\|_{q, \omega} \leq B_{q, \omega} \|F(\zeta) B_{\alpha, \vartheta}(\zeta) |\zeta|^m\|_{q, \omega} = B_{q, \omega} \|F\|_{q, \omega}, \quad (3.21)$$

где $B_{q, \omega} \in (0, +\infty)$ не зависит от $F(\zeta)$.

Принимая во внимание определения (2.10) и (3.20) функций $\Omega_k(z)$ и $f(z)$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} F(\zeta) \Omega_k(\zeta) |\zeta|^m d\zeta = \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{a_\nu(\lambda_k)}{(s_k-1)!(p_k-s_k-\nu)!} f^{(p_k-s_k-\nu)}(\lambda_k).$$

Применив здесь неравенство (3.15) (заменяя p на q) получим

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} F(\zeta) \Omega_k(\zeta) |\zeta|^m d\zeta \right|^q \leq (p_k - s_k)^{q/p} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\lambda_k)|^q |f^{(p_k-s_k-\nu)}(\lambda_k)|^q. \quad (3.22)$$

Так как в силу условия $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \vartheta))$ должно быть

$$\sup_{k \geq 1} \{p_k\} = P < +\infty, \quad (3.23)$$

то из (3.22), воспользовавшись леммой 13, получим

$$|p_k^{(p, \omega)}|^{-q} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} F(\zeta) \Omega_k(\zeta) |\zeta|^m d\zeta \right|^q \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq P^{q/p} A^q \sum_{v=0}^{p_k - s_k} [\lambda_k^{(p, \omega)}]^{-q} \{ |\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re} (e^{-i\theta} \lambda_k)^{\alpha} \}^{q(p_k - v)} |f^{(p_k - s_k - v)}(\lambda_k)|^q = \\
&= P^{q/p} A^q \sum_{v=0}^{p_k - s_k} |\lambda_k|^{\tilde{m} + (1-\alpha)(2-q)} \{ |\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re} (e^{-i\theta} \lambda_k)^{\alpha} \}^{q(p_k - s_k - v) + 1} \times \\
&\quad \times |f^{(p_k - s_k - v)}(\lambda_k)|^q
\end{aligned}$$

(для получения последнего равенства мы воспользовались определением (3.5) последовательности $[\lambda_k^{(p, \omega)}]_1^{\infty}$ и (2.2)). Произведя здесь замену переменных $p_k - s_k - v + 1 = r$ и учитывая (3.23), можем написать

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^{(p, \omega)}]^{-q} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; h)} F(\zeta) \Omega_k(\zeta) |\zeta|^{\alpha} d\zeta \right|^q \leq \\
&\leq P^{q/p} A^q \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{p_k - s_k + 1} |\lambda_k|^{\tilde{m} + (1-\alpha)(2-q)} \{ |\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re} (e^{-i\theta} \lambda_k)^{\alpha} \}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(\lambda_k)|^q \leq \\
&\leq P^{q/p} A^q \sum_{r=1}^P \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{\tilde{m} + (1-\alpha)(2-q)} \{ |\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re} (e^{-i\theta} \lambda_k)^{\alpha} \}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(\lambda_k)|^q. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Теперь обозначим через $\{z_k\}_1^{\infty}$ последовательность попарно различных точек последовательности $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$, а через $|J_k|$ обозначим множество тех индексов $j \geq 1$, для которых

$$\lambda_j = z_k \text{ при } j \in |J_k|.$$

Непосредственно видно, что

$$|J_{k_1}| \cap |J_{k_2}| = \emptyset \quad (k_1 \neq k_2); \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} |J_k| = \{j\}_1^{\infty}.$$

Учитывая эти замечания и (3.23), будем иметь

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{\tilde{m} + (1-\alpha)(2-q)} \{ |\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re} (e^{-i\theta} \lambda_k)^{\alpha} \}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(\lambda_k)|^q = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in |J_k|} |\lambda_j|^{\tilde{m} + (1-\alpha)(2-q)} \{ |\lambda_j|^{1-\alpha} \operatorname{Re} (e^{-i\theta} \lambda_j)^{\alpha} \}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(\lambda_j)|^q \leq \\
&\leq P \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{\tilde{m} + (1-\alpha)(2-q)} \{ |z_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re} (e^{-i\theta} z_k)^{\alpha} \}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(z_k)|^q \quad (1 \leq r \leq P).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.24) получаем неравенство

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^{(p, \omega)}]^{-q} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; h)} F(\zeta) \Omega_k(\zeta) |\zeta|^{\alpha} d\zeta \right|^q \leq \\
&\leq (PA)^q \sum_{r=1}^P \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{\tilde{m} + (1-\alpha)(2-q)} \{ |z_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re} (e^{-i\theta} z_k)^{\alpha} \}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(z_k)|^q. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Но поскольку $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \vartheta))$, то последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (3.10). С другой стороны, $f(z) \in H_q^{(\bar{\omega})}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$. Следовательно, воспользовавшись теоремой 10 (предварительно заменив p на q и ω на $\bar{\omega}$), из (3.25) и (3.21) получим (3.19). Лемма доказана.

Пусть последовательность $\lambda_{(q, \bar{\omega})} = \{\lambda_k^{(q, \bar{\omega})}\}_1^\infty$ определяется из (3.5), т. е.

$$\lambda_k^{(q, \bar{\omega})} = \{|\lambda_k|^{(\bar{\omega} + (1-q)(2-q))} (|\lambda_k|^{1-q} \operatorname{Re}(e^{-ib_k} \lambda_k)^q)^{q(\alpha_k-1)+1}\}^{1/q} \quad (k \geq 1). \quad (3.26)$$

Лемма 15. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \vartheta))$, то для любой функции $F(\zeta) \in L_q^{(\bar{\omega})}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{(q, \bar{\omega})}|^q \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} F(\zeta) r_k(\zeta) |\zeta|^{\bar{\omega}} d\zeta \right|^q \leq C_{q, \bar{\omega}} \|F\|_{q, \bar{\omega}}^q, \quad (3.27)$$

где $C_{q, \bar{\omega}} \in (0, +\infty)$ не зависит от $F(\zeta)$.

Доказательство. Положим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} \frac{F(\zeta) |\zeta|^{\bar{\omega}} d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Delta(\alpha; \vartheta). \quad (3.28)$$

Так как $F(\zeta) |\zeta|^{\bar{\omega}} \in L_q^{(\bar{\omega})}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$, то по теореме 3 имеем $f(z) \in H_q^{(\bar{\omega})}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$, причем

$$\|f\|_{q, \bar{\omega}} \leq B_{q, \bar{\omega}} \|F(\zeta) |\zeta|^{\bar{\omega}}\|_{q, \bar{\omega}} = B_{q, \bar{\omega}} \|F\|_{q, \bar{\omega}}. \quad (3.29)$$

Принимая во внимание определения (2.3) и (3.28) функций $r_k(z)$ и $f(z)$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} F(\zeta) r_k(\zeta) |\zeta|^{\bar{\omega}} d\zeta = f^{(k-1)}(\lambda_k) \quad (k \geq 1).$$

Следовательно, чтобы получить (3.27) остается воспользоваться следствием из теоремы 10 (предварительно заменив p на q и ω на $\bar{\omega}$) и неравенством (3.29). Лемма доказана.

Лемма 16. Пусть ряд (3.4) сходится. Если $f(z) \in H_p^{(\bar{\omega})}(\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta))$ и

$$\int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} f(\zeta) \Omega_k(\zeta) d\zeta = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.30)$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что при любом $k \geq 1$ функция $B_{\alpha, \vartheta}(z) (z - \lambda_k)^{-\alpha_k}$ принадлежит классу $H_q^{(\bar{\omega})}(\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta))$. Следовательно, воспользовавшись теоремой 9 (заменив в ней p на q и ω на $\bar{\omega}$), можем утверждать, что существует последовательность $\{P_n(z)\}_1^\infty$ линейных комбинаций функций системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, сходящаяся в метрике $H_q^{(\bar{\omega})}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ к $B_{\alpha, \vartheta}(z) (z - \lambda_k)^{-\alpha_k}$. Но в силу (3.30) имеем

$$\int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} f(\zeta) P_n(\zeta) d\zeta = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Устремив здесь $n \rightarrow +\infty$, получим

$$\int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} \frac{f(\zeta) B_{\alpha, \vartheta}(\zeta)}{(\zeta - \lambda_k)^{s_k}} d\zeta = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.31)$$

Теперь заметим, что из определений классов $H_p^{(\omega)}[\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)]$ и $\bar{H}_p^{(\omega)}[\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)]$ следует, что если $f(z) \in H_p^{(\omega)}[\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)]$, то $F(\zeta) = B_{\alpha, \vartheta}(\zeta) f(\zeta)$, $\zeta \in \partial\Delta(\alpha; \vartheta)$, является граничной функцией некоторой функции $F(z) \in \bar{H}_p^{(\omega)}[\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)]$. Для этой функции из (3.31) получаем

$$F^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отсюда и из леммы 5 получаем $F(z) \equiv 0$, откуда заключаем, что $f(z) \equiv 0$. Лемма доказана.

3.3. Пусть $\{\lambda_k^{(q, \bar{\omega})}\}_1^\infty$ определяется из (3.26). Тогда имеет место

Теорема 11. Справедливы следующие утверждения:

1°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \vartheta))$, то система $\{\lambda_k^{(q, \bar{\omega})} r_k(z)\}_1^\infty$ является базисом пространства $H_p^{(\omega)}[\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)]$, изоморфным стандартному базису пространства l_p .

2°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \notin US(\Delta(\alpha; \vartheta))$, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ ни при какой перестановке членов не является базисом замыкания в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \vartheta)]$ своей линейной оболочки.

Доказательство. 1°. Пусть $f(z)$ — произвольная функция из класса $H_p^{(\omega)}[\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)]$. Определим последовательность $\gamma(f) \equiv \{\gamma_k(f)\}_1^\infty$ следующим образом:

$$\gamma_k(f) = [\lambda_k^{(q, \bar{\omega})}]^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} f(\zeta) \Omega_k(\zeta) d\zeta \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.32)$$

Заметим, что $f(\zeta) |\zeta|^{-\bar{\omega}} \in L_p^{(\bar{\omega})}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$. Следовательно, воспользовавшись леммой 14 (предварительно заменив в ней p на q , ω на $\bar{\omega}$ и q на p), можем написать

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty |\gamma_k(f)|^p &= \sum_{k=1}^\infty [\lambda_k^{(q, \bar{\omega})}]^{-p} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} |f(\zeta) |\zeta|^{-\bar{\omega}}| \Omega_k(\zeta) |\zeta|^{\bar{\omega}} d\zeta \right|^p \leq \\ &\leq C_{p, \omega} \|f(\zeta) |\zeta|^{-\bar{\omega}}\|_{p, \bar{\omega}}^p = C_{p, \omega} \|f\|_{p, \omega}^p, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $C_{p, \omega} \in (0, +\infty)$ не зависит от $f(\zeta)$.

Определим теперь оператор $T_{p, \omega}$ следующим образом:

$$T_{p, \omega}[f] = \gamma(f), \quad f \in H_p^{(\omega)}[\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)].$$

Из (3.33) следует, что $T_{p, \infty}$ — ограниченный линейный оператор, отображающий $H_p^{(\infty)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \emptyset)\}$ в l_p . При этом, в силу леммы 16, оператор $T_{p, \infty}$ переводит разные элементы из $H_p^{(\infty)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \emptyset)\}$ в разные элементы пространства l_p . С другой стороны, в силу теоремы 8

$$T_{p, \infty}[\lambda_k^{(q, \infty)} r_k] = (\delta_{k, n})_{n=1}^{\infty} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где $\delta_{k, n}$ — символ Кронекера.

Таким образом, чтобы завершить доказательство утверждения 1° теоремы, нам нужно показать, что $T_{p, \infty}$ отображает $H_p^{(\infty)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \emptyset)\}$ на все пространство l_p .

Пусть $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^{\infty} \in l_p$. В силу теоремы Хана — Банаха

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(q, \infty)} r_k \right\|_{p, \infty} = \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z; \emptyset)} F(\zeta) \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(q, \infty)} r_k(\zeta) |\zeta|^m d\zeta \right| \right\}, \quad (3.34)$$

где верхняя грань берется по всем $F(\zeta) \in L_q^{(\infty)}(\partial \Delta(z; \emptyset))$ с нормой $\|F\|_{q, \infty} \leq 2\pi$. Однако в силу неравенства Гельдера и леммы 15 можем написать:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z; \emptyset)} F(\zeta) \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(q, \infty)} r_k(\zeta) |\zeta|^m d\zeta \right| = \\ & = \left| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \left\{ \lambda_k^{(q, \infty)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z; \emptyset)} F(\zeta) r_k(\zeta) |\zeta|^m d\zeta \right\} \right| \leq \\ & \leq \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} [\lambda_k^{(q, \infty)}]^q \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z; \emptyset)} F(\zeta) r_k(\zeta) |\zeta|^m d\zeta \right|^q \right\}^{1/q} \leq \\ & \leq \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} C_{q, \infty} \|F\|_{q, \infty}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.34) получаем

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(q, \infty)} r_k \right\|_{p, \infty} \leq 2\pi C_{q, \infty} \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} \quad (n, m = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, ряд

$$f_{\gamma}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \lambda_k^{(q, \infty)} r_k(z)$$

сходится в метрике $H_p^{(\infty)}[\Delta^*(z; \emptyset)]$ и определяет некоторую функцию $f_{\gamma}(z) \in H_p^{(\infty)}\{\lambda_k; \Delta^*(z; \emptyset)\}$ (см. теоремы 2 и 7), а в силу теоремы 8 $T_{p, \infty}[f_{\gamma}] = \gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^{\infty}$. Утверждение 1° доказано.

2°. Если ряд (3.4) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ не минимальна в $H_p^{(\infty)}[\Delta^*(z; \emptyset)]$ и, следовательно, ни при какой перестановке членов не является базисом.

Если же ряд (3.4) сходится, то надо воспользоваться леммой 11. Теорема доказана.

Отметим, что утверждения этой теоремы в случае $p = 2$ были установлены в работе автора [20], а в случае $\alpha = 1$, $\omega = 0$ — в работе М. М. Джрбашяна [17] (см. также [18]).

Установим теперь критерий базисности системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$. Напомним, что эта система определена лишь при условии сходимости ряда (3.4). При этом замыкание в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ её линейной оболочки совпадает с пространством $\tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}$ (см. теорему 9).

Если $\{\lambda_k^{(p, \omega)}\}_1^\infty$ определяется из (3.5), то имеет место

Теорема 12. Пусть ряд (3.4) сходится. Справедливы следующие утверждения:

1°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \vartheta))$, то система $\{(\lambda_k^{(p, \omega)})^{-1} \Omega_k(z)\}_1^\infty$ является базисом пространства $\tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}$, изоморфным стандартному базису пространства l_p .

2°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \notin US(\Delta(\alpha; \vartheta))$, то система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ ни при какой перестановке членов не является базисом пространства

$$\tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}.$$

Доказательство. 1°. Пусть $f(z) \in \tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}$. Определим последовательность $\gamma(f) \equiv \{\gamma_k(f)\}_1^\infty$ следующим образом:

$$\gamma_k(f) = \lambda_k^{(p, \omega)} f^{(s_k-1)}(\lambda_k) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Нетрудно видеть, что

$$\gamma_k(f) = \lambda_k^{(p, \omega)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} \{f(\zeta) |\zeta|^{-\bar{\omega}}\} r_k(\zeta) |\zeta|^{\bar{\omega}} d\zeta \quad (k = 1, 2, \dots),$$

причем $f(\zeta) |\zeta|^{-\bar{\omega}} \in L_p^{(\bar{\omega})}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$. Следовательно, воспользовавшись леммой 15 (предварительно заменив в ней q на p и ω на $\bar{\omega}$), можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k(f)|^p \leq C_{p, \bar{\omega}} \|f(\zeta) |\zeta|^{-\bar{\omega}}\|_{p, \bar{\omega}}^p = C_{p, \bar{\omega}} \|f\|_{p, \omega}^p \quad (3.35)$$

где $C_{p, \bar{\omega}} \in (0, +\infty)$ не зависит от $f(\zeta)$.

Определим теперь оператор $Q_{p, \omega}$ следующим образом:

$$Q_{p, \omega}[f] = \gamma(f), \quad f \in \tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}.$$

Из (3.35) следует, что $Q_{p, \omega}$ — ограниченный линейный оператор, отображающий $\tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}$ в l_p . При этом, в силу леммы 5, оператор $Q_{p, \omega}$ переводит разные элементы из $\tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}$ в разные элементы пространства l_p . С другой стороны, в силу леммы 4

$$Q_{p, \omega}[(\lambda_k^{(p, \omega)})^{-1} \Omega_k] = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство утверждения 1^о теоремы, нам нужно показать, что $Q_{p, \omega}$ отображает $\bar{H}_p^{(\omega)}(\lambda_k; \Delta(z; \vartheta))$ на все пространство l_p .

Пусть $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty \in l_p$. В силу теоремы Хана-Банаха

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k (\lambda_k^{(p, \omega)})^{-1} \Omega_k \right\|_{p, \omega} \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z; \vartheta)} F(\zeta) \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k (\lambda_k^{(p, \omega)})^{-1} \Omega_k(\zeta) |\zeta|^m d\zeta \right| \right\}, \quad (3.36)$$

где верхняя грань берется по всем $F(\zeta) \in L_q^{(\omega)}(\partial \Delta(z; \vartheta))$ с нормой $\|F\|_{q, \omega} \leq 2\pi$. Однако, в силу неравенства Гельдера и леммы 14, можем написать

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \left\{ (\lambda_k^{(p, \omega)})^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z; \vartheta)} F(\zeta) \Omega_k(\zeta) |\zeta|^m d\zeta \right\} \right| \leq \\ & \leq \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} (\lambda_k^{(p, \omega)})^{-q} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z; \vartheta)} F(\zeta) \Omega_k(\zeta) |\zeta|^m d\zeta \right|^q \right\}^{1/q} \leq \\ & \leq \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} C_{p, \omega} \|F\|_{q, \omega} \quad (n, m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.36) получаем

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k (\lambda_k^{(p, \omega)})^{-1} \Omega_k \right\|_{p, \omega} \leq 2\pi C_{p, \omega} \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} \quad (n, m = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, ряд

$$f_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (\lambda_k^{(p, \omega)})^{-1} \Omega_k(z)$$

сходится в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$ и определяет некоторую функцию

$f_\gamma(z) \in \bar{H}_p^{(\omega)}(\lambda_k; \Delta(z; \vartheta))$ (см. теоремы 2 и 9), а в силу леммы 4 $Q_{p, \omega}[f_\gamma] = \gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty$. Утверждение 1^о доказано.

Утверждение 2^о следует из леммы 12. Теорема доказана.

Воспользовавшись леммами 4 и 6, из теоремы 12 получаем следующее

Следствие. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(z; \vartheta))$, то для любой функции $f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$ справедливо представление вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\lambda_k) \Omega_k(z) + \frac{B_{\alpha, \vartheta}(z)}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z; \vartheta)} \frac{f(\zeta)}{B_{\alpha, \vartheta}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Delta(z; \vartheta),$$

где ряд сходится по метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(z; \vartheta)]$.

Отметим, что в случае $p = 2$ утверждения теоремы 12 были установлены в работе автора [20], а в случае $\alpha = 1, \omega = 0$ — в работе М. М. Джрбашяна [17] (см. также [18]).

3.4. Пусть J — банахово пространство комплексных последовательностей, в которой плотны финитные последовательности. Скажем, что J — идеальное пространство последовательностей, если из условий $\{a_k\}_1^\infty \in J, |b_k| \leq |a_k| (k = 1, 2, \dots)$ следует $\{b_k\}_1^\infty \in J$.

Кратная интерполяционная задача в классе $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \beta)]$ состоит в нахождении условий, при которых пространство последовательностей

$$\{ (f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \beta)] \} \quad (3.37)$$

совпадает с каким-либо идеальным пространством последовательностей.

В следующей теореме содержится полное решение этой задачи.

Теорема 13. 1°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \beta))$, то справедливы следующие утверждения:

а) если последовательность $l_{p, \omega} \equiv \{\lambda_k^{(p, \omega)}\}_1^\infty$ определяется из (3.5), то справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \{ (f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \beta)] \} = \\ & = \{ (f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z) \in \tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \beta)\} \} = l_p\{\lambda_{(p, \omega)}\}; \end{aligned} \quad (3.38)$$

б) если $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty \in l_p\{\lambda_{(p, \omega)}\}$, то ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k \varrho_k(z) \quad (3.39)$$

сходится в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \beta)]$ и определяет функцию $f(z) \in \tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \beta)\}$, которая удовлетворяет следующим интерполяционным данным:

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (3.40)$$

в) функция из класса $\tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \beta)\}$, удовлетворяющая интерполяционным данным (3.40), единственна.

2°. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \notin US(\Delta(\alpha; \beta))$, то пространство (3.37) не совпадает ни с каким идеальным пространством последовательностей.

Доказательство. 1°. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \beta))$. В силу следствия из теоремы 10 имеем

$$\begin{aligned} & \{ (f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f \in \tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \beta)\} \} \subset \\ & \subset \{ (f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \beta)] \} \subset l_p\{\lambda_{(p, \omega)}\}. \end{aligned}$$

Следовательно, равенства (3.38) будут доказаны, если мы докажем утверждение б).

Пусть $\gamma = \{\gamma_k\}_1^\infty \in l_p \setminus l_{(p, \omega)}$. Тогда последовательность $\{2^{(p, \omega)} \gamma_k\}_1^\infty$ принадлежит l_p . Следовательно, в силу утверждения 1° теоремы 12 ряд (3.39) сходится по метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(x; \emptyset)]$, и по теореме 9 сумма этого ряда принадлежит классу $\bar{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(x; \emptyset)\}$. Равенства (3.40) вытекают из леммы 4.

Наконец, утверждение в) является следствием леммы 5, и утверждение 1° доказано.

2°. Пусть теперь $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \overline{US}(\Delta(x; \emptyset))$. Предположим, что пространство последовательностей (3.37) совпадает с каким-либо идеальным пространством последовательностей J . Но легко видеть, что пространство последовательностей (3.37) совпадает с пространством

$$\{(\Phi[r_k])_1^\infty : \Phi \in (H_p^{(\omega)}[\Delta^*(x; \emptyset)])^*\}, \quad (3.41)$$

где $(H_p^{(\omega)}[\Delta^*(x; \emptyset)])^*$ — это сопряженное пространство пространства $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(x; \emptyset)]$ (нужно только воспользоваться теоремами 1 и 4 и определением (2.3) функций $r_k(z)$). Но тогда пространство последовательностей (3.41) также совпадает с J . Следовательно, система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ является безусловным базисом замыкания в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(x; \emptyset)]$ своей линейной оболочки (см. [34], стр. 27), а это противоречит утверждению 2° теоремы 11. Теорема доказана.

Так как при любом s ($1 \leq s < +\infty$) пространство $l_s\{x\}$ является идеальным, то из утверждения 2° теоремы 13, в частности, следует, что:

Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \overline{US}(\Delta(x; \emptyset))$, то пространство последовательностей (3.37) не совпадает ни с каким пространством $l_s\{x\}$ ($1 \leq s < +\infty$).

Отметим, что в случае $p=2$ утверждение 1° теоремы 13 было установлено в работе автора [20], а в случае $\alpha=1$, $\omega=0$ — в работе М. М. Джрбашяна [17] (см. также [18]).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 28.VII 1978

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Որոշ բիօրթոգոնալ սիստեմների փակույթն ու բազիսությունը և բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը անկյունային տիրույթներում (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկված են որոշ բիօրթոգոնալ սիստեմների լրիվության, փակույթի և կարագրության ու բազիսության հարցերը: Դիտարկումները կատարվում են անկյունային տիրույթներում H_p տիպի տարածություններում: Լուծված է նաև բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդիրը այդ տարածություններում:

V. M. MARTIROSIAN. Closure and basesness of some biorthogonal systems and solution of the multiple interpolation problem in angular domains (summary)

The questions of completeness closure description and basisness for some biorthogonal systems are investigated. These problems are considered in spaces of H_p type in angular domains. A solution of the multiple interpolation problem in such spaces is also given.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы функций и представления ядра Коши. Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 1, 1973, 384—409.
2. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси. Матем. сб., 95 (137), № 3 (11), 1974, 418—444.
3. М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян. О построении некоторых специальных биортогональных систем, Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-матем. наук, XII, № 5, 1959, 17—42.
4. М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян. Разложения по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциального уравнения дробного порядка, Труды ММО, X, 1961, 89—179.
5. А. Б. Нерсисян. Разложения по собственным функциям некоторых несамосопряженных краевых задач, Сиб. матем. ж., 11, № 3, 1961, 428—453.
6. А. Б. Нерсисян. Разложения по собственным функциям краевой задачи для одного интегро-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-матем. наук, XII, № 6, 1959, 37—68.
7. М. М. Джрбашян. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма-Лиувилля, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 2, 1970, 71—95.
8. М. М. Джрбашян. О пополнении и замыкании неполной системы функций $\left\{ e^{-\mu_k x} x^{k-1} \right\}_{k=1}^{\infty}$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
9. S. Verblunski. On some biorthogonal systems, II, Quart. J. Math., 16, 1965, 1—8.
10. S. Verblunski. On a class of integral operators, II, Proc. London Math. Soc., XVI, № 3, 1966, 456—472.
11. S. Verblunski. On a class of biorthogonal expansions, II, Proc. London Math. Soc., XXV, № 1, 1972, 1—25.
12. А. Ф. Леонтьев. Представление функций обобщенными рядами Дирихле, УМН. XXIV, вып. 2 (146), 1969, 97—164.
13. А. Ф. Леонтьев. Ряды экспонент, «Наука», М., 1976.
14. М. М. Джрбашян. Присоединение и единственность рядов типа Дирихле на вещественной оси, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 4, 1972, 258—274.
15. М. М. Джрбашян. Теоремы единственности аналитических функций, асимптотически представимых рядами Дирихле—Тейлора, Матем. сб., 91 (133), № 4 (8), 1973, 580—626.
16. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2 , Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
17. М. М. Джрбашян. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе H^p , ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 517—520.
18. М. М. Джрбашян. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., 43, № 6, 1978, 1322—1384.
19. Г. М. Айрапетян. Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах H_p , Харди, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 262—277.
20. В. М. Мартirosян. Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм.ССР, 63, № 5, 1976, 278—283.
21. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
22. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.

23. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
24. А. М. Седлецкий. Эквивалентное определение пространств H_p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сб., 96 (138), № 1, 1975, 75—82.
25. С. А. Акопян. Теорема о двух постоянных для функций класса H_p , Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., II, № 2, 1967, 123—127.
26. Е. Титчмарш. Введение в теорию интеграла Фурье, Гостехиздат, 1948.
27. Е. М. Stein. Note on singular integrals, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1957, 250—254.
28. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966.
29. М. М. Джрбашян. О замкнутости системы типа Миттаг—Леффлера, ДАН СССР, 219, № 6, 1974, 1302—1305.
30. В. М. Мартиросян. О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера и систем простейших рациональных дробей, ДАН Арм.ССР, 62, № 5, 1976, 269—274.
31. С. А. Акопян, И. О. Хачатрян. О замыкании незамкнутых систем функций типа Миттаг—Леффлера, Изв. АН СССР, сер. матем., 40, № 1, 1976, 96—114.
32. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа, «Наука», М., 1965.
33. Ш. А. Григорян. Об одном свойстве функций из H^p ($0 < p < +\infty$) в полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, XII, № 5, 1977, 335—340.
34. С. А. Виноградов. Базисы из показательных функций и свободная интерполяция в банаховых пространствах с L_p -нормой, Записки научн. семинаров ЛОМИ, том 65, вып. VII, 1976, 17—68.

Բ Ո Վ Ա Ն Ի Ս Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Հայկական ՍՍՀ Դիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր
«Մաթեմատիկա» ամսագրի 1978 թ., XIII, № 1—6

Ա. Ե. Ավետիսյան, Մ. Մ. Զորաշյանի ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսության շուրջը	5—6,317
Ա. Ե. Ավետիսյան, Ս. Ա. Հակոբյան, Ի. Հ. Խաչատրյան, Ճառագայթների կամայական վերջավոր սխտեմի վրա Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների սխտեմի փակության մասին	5—6,389
Ի. Ա. Ավետիսյան, Ֆունկցիաները պարզ կոտորակների շարքերով ներկայացնելու մասին	1,36
Ի. Ա. Ալեքսանդրյան, Ի. Չ. Մկրտչյան, Անվերջ բաղադատելիությամբ սպեկտրով ինքնահամալուծ օպերատորի սեփական էլեմենտների լրիվության հայտանիշ	3,209
Վ. Ա. Արզումանյան, Ինվերս կիսախմբերի* — ներկայացումներ	2,107
Ա. Վ. Բախշեցյան, Կենտրոնավորված սխտեմների որոշ դասերի կառուցվածքի մասին	4,301
Ա. Ա. Գուլբերգ, Լ. Ս. Քոչինյան, Ս. Մ. Սարգսյան, Պիկարի տիպի մի շարք թեորեմների մասին	1,23
Բ. Լ. Գոլինսկի, Միավոր շրջանագծի վրա օրթոգոնալ բաղմանդամներ ընդհանրացված Ֆակորի կշռով	2,87
Ե. Հ. Կերիզոյան, Ռադիոնալ ֆունկցիաների ու լրիվ սխտեմների բաղիսությունը անկյունային տիրույթներում	5—6,460
Յու. Գ. Իսախանյան, Եռաչափ տիրույթի կանոնավոր ցանցում խզվող գործակիցներով էլիպտիկ հավասարումների լուծումը վարիացիոն-տարրերական մեթոդով	2,140
Մ. Ի. Իսվրյան, Բացասական կորություն ունեցող թաղանթների տեսության եզրային խնդրի լուծման գոյության և միակության թեորեմ	2,151
Ի. Գ. Խաչատրյան, Բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար ձևափոխության օպերատորների մասին	3,215
Ա. Մ. Կիտմանով, Լ. Ա. Այվենբերգ, Մարտինելի-Բոհների ինտեգրալով ներկայացվող անընդհատ ֆունկցիաների հոլոմորֆության մասին	2,153
Ի. Վ. Կովալիշյան, Գ. Մ. Չուրկովա-Վիլովա, Նեանիենս-Պիկի պրոբլեմի վերին կիսահարթությունում նեանիենսյան, սիմետրիկ մատրից-ֆունկցիաների համար	1,43
Ի. Վ. Հակոբյան, Ոչ բացասական օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի տեսության մասին	2,114
Հ. Մ. Հայրապետյան, H ₁ և H _∞ դասերի ենթադասերում ինտերպոլյացիայի մասին և Կոշու ինտեգրալի հետ կապված որոշ հարցեր	5—6,445
Ի. Ի. Հովսեփյան, Դատարկ բազմության M բազմություն լինելու վերաբերյալ ընդհանուր օրթոնորմավորված սխտեմների դասում	4,261
Վ. Ս. Վազարյան, Որոշ սխտեմների մուլտիպլիկատիվ լրացման մասին	4,315
Վ. Մ. Մաբալիբոսյան, Որոշ բիրթոգոնալ սխտեմների փակույթն ու բաղիսությունը և բաղադատելի ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը անկյունային տիրույթներում	5—6,491
Հ. Մ. Մուշեղյան, Հաարի սխտեմով տեղափոխված անդամներով ամենուրեք զուգամետ շարքերի գործակիցների մասին	4,275
Կ. Հ. Յաղոյան, Թույլ հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդիրը ժերմի դասերում	1,3
Վ. Ա. Յավրյան, Որոշ ինտեգրալ օպերատորների սեփական արժեքների մասին	2,122
Ա. Հ. Ներսիսյան, Թեորեմ միաժամանակյա շոշափումային մոտարկման մասին	5—6,442
Ա. Յու. Շաքվերդյան, Ջերմ ունակության եզակիությունների բազմության վրա անընդհատ հարմոնիկ ֆունկցիաների մասին	2,100
Յ. Ա. Շամոյան, Մ. Մ. Զորաշյանի ֆակտորիզացիոն թեորեմը և շրջանում անալիտիկ վերջավոր կարգի մաժորանտա ունեցող անալիտիկ ֆունկցիաների զերոների խարակտերիստիկան	5—6,405

Ա. Ի. Պետրոսյան, Գ. Մ. Խենկին. Իրական իմաստով ոչ էափոխվող Վելլի բազմանի-	
տում Ծ — հավասարման լուծումը հավասարաչափ զնահատականով	5—6,428
Ս. Կ. Պողոսյան. Ստատիստիկ գումարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկ վերլուծություն	3,238
Մ. Մ. Ջրբաշյան. Մի անվերջ արտադրյալի մասին	3,177
Գ. Ջ. Սարգսյան. Թվաբանական ֆունկցիաների և պրեդիկատների ֆունկցիոնալ տար-	
րերից կազմված սխեմաներով որոշվող արդյունավետ հաշվարկելիությունը	2,128
Ա. Ա. Վաղարշակյան. Անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի զերոների մասին	5—6,423
Վ. Հ. Ի. Ֆուխ. Մի թանի կոմպոնենտներով բազմությունների վրա Չերիշևյան մոտարկ-	
ման աստիճանի մասին	5—6,396

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика“
за 1978 г., XIII, №№ 1—6

А. Е. Аветисян. К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна	5—6, 371
А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, И. О. Хачатрян. О замкнутости систем функций типа Миттаг-Леффлера на произвольной конечной системе лучей	5—6, 389
Р. А. Аветисян. О представлении функций рядами простых дробей	1, 36
Г. М. Айрапетян. Об интерполяции в подклассах H_1 и H_∞ и некоторые вопросы, связанные с интегралом Коши	5—6, 448
Р. В. Акопян. К теории спектральной функции J -неотрицательного оператора	2, 114
Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. Критерий полноты системы собственных элементов самосопряженного оператора с бесконечнократным спектром	3, 209
В. А. Арзуманян. * — представления инверсных полугрупп	2, 107
А. В. Бахшецян. О структуре некоторых классов центрированных систем	4, 301
А. А. Ваиурашакян. О нулях некоторых классов аналитических функций	5—6, 423
Б. Л. Голинский. Ортогональные на единичной окружности многочлены с обобщенным якобиевым весом	2, 87
А. А. Гольдберг, Л. С. Кочинян, С. Ц. Саркисян. О некоторых теоремах типа Пикара	1, 23
III. А. Григорян. О базисности неполных систем рациональных функций в угловой области	5—6, 464
М. Д. Давтян. Теорема существования и единственности решения краевой задачи безмоментной теории оболочек для оболочки отрицательной кривизны	2, 151
Ю. Г. Дадали. Вариационно-разностный метод решения на регулярной сетке эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами в трехмерной области	2, 140
М. М. Джрбашян. Об одном бесконечном произведении	3, 177
К. С. Каварян. О мультипликативном дополнении некоторых систем	4, 315
И. В. Ковалишина, Г. М. Чубкова-Видова. Проблема Неванлинны-Пика для неванлинновских, симметрических матриц-функций в верхней полуплоскости	1, 48
А. М. Кытманов, Л. А. Айзенберг. О голоморфности непрерывных функций, представимых интегралом Мартинелли—Бохнера	2, 158
В. М. Мартиросян. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях	5—6, 490
Г. М. Мушегян. О коэффициентах всюду сходящихся рядов по системе Хаара с переставленными членами	4, 275
А. А. Нерсисян. Теорема об одновременном касательном приближении	5—6, 442

<i>Р. И. Овсепян.</i> О пустом множестве как M множестве в классе общих ортонормированных систем	4, 261
<i>А. И. Петросян, Г. М. Хенкин.</i> Решение с равномерной оценкой $\bar{O}$ уравнения в вещественно невырожденном полиэдре Вейля	5—6, 428
<i>С. К. Полюсян.</i> Асимптотическое разложение логарифма статистической суммы	3, 238
<i>Г. З. Саркисян.</i> Эффективная вычислимость арифметических предикатов и функций на основе схем из функциональных элементов	2, 123
<i>В. Г. И. Фукс.</i> О степени чебышевской аппроксимации на множествах с несколькими компонентами	5—6, 396
<i>И. Г. Хачатрян.</i> Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков	3, 215
<i>Ф. А. Шамолян.</i> Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста	5—6, 405
<i>А. Ю. Шахвердян.</i> О гармонических функциях, непрерывных на особом множестве емкости нуль	2, 100
<i>В. А. Яврян.</i> О собственных значениях некоторых интегральных операторов	2, 122
<i>К. А. Яиджян.</i> Задача Коши для слабо гиперболического уравнения в классах Жевре	1.

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR,
 seria "Matematika", 1978, vol. XIII, №№ 1—6

<i>G. M. Airapetian.</i> About interpolation for subclasses from H_1 and H_2 and some questions connections connected with integral Cauchy	5—6, 448
<i>R. A. Alexandrian, R. Z. Murtchian.</i> A completeness criterium for a system of eigenelements of a selfadjained operator with spectrum possessing infinite multiplicities	3, 209
<i>V. A. Arzumanyan.</i> —representation of inverse semigroups	2, 107
<i>A. E. Avetisyan.</i> On the theory of Jrbashian's integral transforms	5—6, 371
<i>A. E. Avetisyan, S. A. Akopian, I. O. Khatchatrian.</i> On the closure of Mittag-Leffler systems on arbitrary finite set of rays	5—6, 389
<i>R. A. Avetisyan.</i> On representation of functions in series of simple fractions	1, 36
<i>A. V. Bakhshetzyan.</i> On the structure of some classes of centered systems	4, 301
<i>Yu. G. Dadajan.</i> Variational difference method for the solution of elliptic equations in three dimensional domain with discontinuous coefficients on regular set	2, 140
<i>M. D. Davtian.</i> Existence and uniqueness theorem for solution of boundary problem in the moment free theory of shells for the shells of negative curvature	2, 151
<i>W. H. J. Fuchs.</i> On the degree of Chebyshev approximation on sets with several components	5—6, 396
<i>Gh. S. Ghazarian.</i> On the multiplicative completion of some systems	4, 315
<i>A. A. Goldberg, L. S. Kochinian, S. C. Sarkisian.</i> On some theorems of Picard's type	1, 23
<i>B. L. Golinskiy.</i> Orthogonal polynomials on the unit cycle with the generalized Jacoby weight	1, 87
<i>Sh. A. Grigorian.</i> On basisness of noncomplete systems of rational functions in an angular domain	5—6, 464
<i>R. V. Hakopian.</i> On the theory of spectral function of J -nonnegative operator	2, 114
<i>V. A. Javrtan.</i> On the eigenvalues of some integral operators	2, 122
<i>M. M. Jrbashyan.</i> On a certain infinite product	3, 177
<i>I. G. Khachatrian.</i> On the transformation operators for high order differential equations	3, 215
<i>I. V. Kovalishina, G. M. Chubkova-Vidova.</i> Nevanlinna-Pick problem for nevanlinna's symmetric matrix-functions in the upper halfplane	1, 48
<i>A. M. Kythmanov, L. A. Alzenberg.</i> About holomorpheness of continuous functions, representable by the Martinelli-Bochner integral	2, 158
<i>V. M. Martirosyan.</i> Closure and basisness of some biorthogonal systems and solution of the multiple interpolation problem in angular domains	5—6, 490
<i>H. M. Mousheghian.</i> On the coefficients of the series by Haar systems with displaced terms	4, 275
<i>A. H. Nersesyan.</i> A simultaneous tangential approximation theorem	5—6, 442
<i>R. I. Ousepian.</i> About the empty sets which is M -set in the class of orthonormal systems	4, 261

<i>A. I. Petrosian, G. M. Henkin.</i> The solution with the uniform estimate of the $\bar{\partial}$ -equation in the real nondegenerate Weil polyhedron	5--6, 428
<i>S. K. Pogostan.</i> The asymptotical expansion of the partition function logarithm	3, 238
<i>G. S. Sargsian.</i> The effective computability of arithmetic predicates and functions treated on the basis of schemes of functional elements . .	2, 128
<i>A. U. Shahverdian.</i> On harmonic functions continuous on a singular set of zero capacity	2, 100
<i>F. A. Shamojan, M. M. Jrhashian's</i> factorization theorem and characterization of zeros of analytical in a disc functions with a bounded growth rate	5--6, 405
<i>A. A. Vagarshakian.</i> On the zeros of some classes of analytic functions .	5--6, 423
<i>K. H. Yagdjian.</i> The Cauchy problem for weakly hyperbolic equation in the classes of Gevrey functions	1, 3

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Մխիթար Մկրտչի Ջրբաշյան (ծննդյան 60-ամյակի առթիվ) Ա. Ե. Ավետիսյան, Ս. Հ. Հակոբյան, Ն. Հ. Արաքելյան, Վ. Ս. Զախարյան, Հ. Ս. Ներսիսյան, Ի. Ս. Սարգսյան, Ի. Հ. Խաչատրյան	359
Ա. Ե. Ավետիսյան, Մ. Մ. Ջրբաշյանի ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսության շուրջը	371
Ա. Ե. Ավետիսյան, Ս. Ա. Հակոբյան, Ի. Հ. Խաչատրյան. Ծառագայթների կամայական վերջավոր սխտեմի վրա Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների սխտեմի փակության մասին	389
Վ. Ի. Ի. Ֆուխս. Մի բանի կոմպոնենտներով բազմությունների վրա Չերիշևյան մոտարկման աստիճանի մասին	396
Յ. Ա. Շամոյան. Մ. Մ. Ջրբաշյանի ֆակտորիզացիոն թեորեմը և շրջանում անալիտիկ վերջավոր կարգի մաժորանտա ունեցող անալիտիկ ֆունկցիաների գերոնների բարակտերիստիկան	405
Ա. Ա. Վաղարշակյան. Անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի գերոնների մասին	423
Ա. Ի. Պետրոսյան, Գ. Մ. Խենկին. Իրական իմաստով ոչ էափոխվող Վեյլի բազմանիստում $\bar{D}$ — հավասարման լուծումը հավասարաչափ գնահատականով	423
Ա. Հ. Ներսիսյան. Թեորեմ միաժամանակա շոշափումային մոտարկման մասին	442
Հ. Մ. Հայրապետյան. H_1 և H_∞ դասերի ենթադասերում ինտերպոլյացիայի մասին և Կոչու ինտեգրալի հետ կապված որոշ հարցեր	449
Ն. Հ. Կրիզոստոմ. Ռացիոնալ ֆունկցիաների ոչ լրիվ սխտեմների բազիսությունը անկյունային տիրույթներում	460
Վ. Մ. Մաքսիմովսկի. Որոշ բիրթոգոնալ սխտեմների փակույթն ու բազիսությունը և բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը անկյունային տիրույթներում	490

СОДЕРЖАНИЕ

Мхитар Мартычевич Джрбашян (к шестидесятилетию со дня рождения) А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, Н. У. Арахелян, В. С. Захарян, А. Б. Нерсисян, И. С. Саркисян, И. О. Хачатрян	359
А. Е. Аветисян. К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна	371
А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, И. О. Хачатрян. О замкнутости систем функций типа Миттаг-Леффлера на произвольной конечной системе лучей	389
В. Г. И. Фукс. О степени чебышевской аппроксимации на множествах с несколькими компонентами	396
Ф. А. Шамолян. Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантной конечного роста	405
А. А. Вагаршакян. О нулях некоторых классов аналитических функций	423
А. И. Петросян, Г. М. Хенкин. Решение с равномерной оценкой $\bar{D}$ -уравнения в вещественно невырожденном полиэдре Вейла	428
А. А. Нерсисян. Теорема об одновременном касательном приближении	442
Г. М. Айрапетян. Об интерполяции в подклассах H_1 и H_∞ и некоторые вопросы, связанные с интегралом Коши	448
Ш. А. Григорян. О базисности неполных систем рациональных функций в угловой области	460
В. М. Муртиросян. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решений кратной интерполяционной задачи в угловых областях	490

CONTENTS

Mchitar Mkrtichevich Jrbashian (Dedicated to M. M. Jrbashian on the occasion of his 60th birthday) <i>A. E. Avetisyan, S. A. Hakopian, N. U. Arakelian, V. S. Zakarian, H. B. Nersesyan, I. S. Sargsyan, I. H. Khachatryan</i>	359
<i>A. E. Avetisyan</i> . On the theory of Jrbashian's integral transforms	371
<i>A. E. Avetisyan, S. A. Akopian, I. O. Khachatryan</i> . On the closure of Mittag-Leffler systems on arbitrary finite set of rays	389
<i>W. H. J. Fuchs</i> . On the degree of Chebyshev approximation on sets with several components	396
<i>F. A. Shamojan</i> . M. M. Jrbashian's factorization theorem and characterization of zeros of analytical in a disc functions with a bounded growth rate	405
<i>A. A. Vagarshakian</i> . On the zeros of some classes of analytic functions	423
<i>A. I. Petrosian, G. M. Henkin</i> . The solution with the uniform estimate of the $\bar{\partial}$ -equation in the real nondegenerate Weil polyhedron	428
<i>A. H. Nersesyan</i> . A simultaneous tangential approximation theorem	442
<i>G. M. Alrapettan</i> . About interpolation for subclasses from H_1 and H_∞ and some questions connected with integral Cauchy	448
<i>Sh. A. Grigorian</i> . On basisness of noncomplete systems of rational functions in an angular domain	460
<i>V. M. Martirosian</i> . Closure and basisness of some biorthogonal systems and solution of the multiple interpolation problem in angular domains	490