ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenian, SSR
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian, SSR, USSR

А. А. ТАЛАЛЯН
Член-корреспондент АН Армянской ССР

ДОРОГОЙ АЛЕКСАНДР АНДРАНИКОВИЧ!

Редакция журнала „Математика" сердечно поздравляет Вас с пятидесятилетием.

Посвящая Вам этот выпуск, редакция выражает искреннее пожелание крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов в Вашей благородной деятельности.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 4, 1978 Математика

Г. М. МУШЕГЯН

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ВСЮДУ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА С ПЕРЕСТАВЛЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается вопрос о единственности коэффициентов всюду сходящихся рядов Хаара в зависимости от порядка следований членов этих рядов.

Для дальнейшего изложения приведем следующее

Определение 1.1. Пусть B — некоторое подмножество множества θ всех числовых последовательностей. Множество $E\subset[0,1]$ называется U-множеством для класса B, если из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) = 0, \text{ при } x\in[0, 1]\setminus E, \{a_n\}\in B$$

следует $a_n = 0$, $n=1, 2,\cdots$.

Хааром было установлено (см. [7]), что пустое множество является U-множеством для класса θ. Вместе с тем Фабер [8] показал, что множество, состоящее из одной точки, не является U-множеством для класса θ.

Далее Ф. Г. Арутюняном и А. А. Талаляном (см. [1]) был выделен естественный класс $A\subset\theta$, для которого счетное множество является U-множеством. Этот класс определяется следующим образом: $\{a_n\}\subset A$, если для любой точки $x_0\in[0,1]$ выполнено условие

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x_0)} = 0,$$

где $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ — последовательность всех тех номеров n для которых $\chi_n(x_0)\neq 0$.

В работе [1] был получен более сильный результат, который в, частности можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1. (Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян). Если $\{a_n\}\subset A$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \tag{1.1}$$

всюду кроме, быть может, счетного множества точек сходится к суммируемой функции $f(x)$, то

$$a_n = \int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{1.2}$$

В работе [9] была доказана

Теорема 2. Если ряд (1.1) из класса A, после некоторой перестановки* всюду, кроме быть может, счетного множества точек сходится к ограниченной функции $f(x)$, то справедливы формулы (1.2).

Отсюда следует, что если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x),\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x),\ \{a_n\},\ \{b_n\} \in A$$

после одной и той же перестановки всюду сходятся к некоторой функции $g(x)$, то $a_n = b_n$. Следовательно, коэффициенты ряда Хаара, который после некоторой фиксированной σ-перестановки всюду сходится к некоторой функции $g(x)$, должны определяться единственным образом в зависимости от $g(x)$.

В настоащей работе доказывается, что эти коэффициенты зависят не только от $g(x)$, но и от σ. А именно, приводятся примеры рядов Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x),\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x),\ a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ b_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

которые после двух различных перестановок всюду сходятся к одной и той же конечной функции $g(x)$, но $a_1 \neq b_1$.

§ 2. Определения и формулировки вспомогательных утверждений

Система Хаара определяется следующим образом: полагаем $\chi_1(x) = 1$, при $x \in [0,1]$. Если $n = 2^i + k$, $0 \leqslant i$, $1 \leqslant k \leqslant 2^i$, то

$$\chi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2^i}, & \text{при } x \in \left(\dfrac{2k-2}{2^{i+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{i+1}}\right) \\ -\sqrt{2^i}, & \text{при } x \in \left(\dfrac{2k-1}{2^{i+1}}, \dfrac{2k}{2^{i+1}}\right) \\ 0, & \text{при } x \overline{\in} \left[\dfrac{2k-2}{2^{i+1}}, \dfrac{2k}{2^{i+1}}\right], \end{cases}$$

---

*) то есть рассматриваются ряды вида

$$(\sigma)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n^{(\sigma)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \chi_{n_k}(x),$$

где $(n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots)$—некоторая перестановка последовательности $(1, 2, \cdots, n, \cdots)$.

в каждой из остальных точек значение функций $\chi_n(x)$ берется равным полусумме правостороннего и левостороннего его пределов в той же точке.

В настоящей статье будем пользоваться следующими обозначениями: если $n=2^i+k$, $0\leqslant i$, $1\leqslant k\leqslant 2^i$, то полагаем

$$\Delta_n=\left(\frac{2k-2}{2^{i+1}},\ \frac{2k}{2^{i+1}}\right),\quad \Delta_n^{(1)}=\left(\frac{2k-2}{2^{i+1}},\ \frac{2k-1}{2^{i+1}}\right),\quad \Delta_n^{(2)}=\left(\frac{2k-1}{2^{i+1}},\ \frac{2k}{2^{i+1}}\right),$$

$$\nabla_n^{(1)}=\left(\frac{4k-3}{2^{i+2}},\ \frac{4k-2}{2^{i+2}}\right),\quad \nabla_n^{(2)}=\left(\frac{4k-2}{2^{i+2}},\ \frac{4k-1}{2^{i+2}}\right).$$

Ясно, что $\nabla_n^{(1)}$ совпадает с правой половиной интервала $\Delta_n^{(1)}$, а $\nabla_n^{(2)}$ — с левой половиной интервала $\Delta_n^{(2)}$. Интервалами Хаара будем называть множества, имеющие вид $\left(\frac{l}{2^k},\ \frac{l+1}{2^k}\right)$, $0\leqslant l\leqslant 2^k-1$. Через $\overset{\circ}{E}$ будет обозначена внутренность множества E, а через $\overline{E}$ — замыкание множества E.

Пусть $(a,\ b)$ — некоторый интервал вида $\left(\frac{l-1}{2^s},\ \frac{l}{2^s}\right)$, $1\leqslant l\leqslant 2^s$, рассмотрим следующие ряды:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=2^s+1}^{\infty} a_n\chi_n(x),\ \text{где}\\
&a_n=\begin{cases}0, & \text{при } n\in\{n:\ \Delta_n\not\subset(a,\ b)\}\\ \left[\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|\chi_n(x)|\right]^{-1}, & \text{при } n\in\{n:\ \Delta_n\subset(a,\ b)\}\end{cases}
\end{aligned}\right|\qquad (2.1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=2^s+1}^{\infty} b_n\chi_n(x)\\
&b_n=\begin{cases}a_n, & \text{при } n\in\{n:\ \min\left[S_{2^m}(x);\ x\in\Delta_n,\ 2^s+1\leqslant 2^m<n\right]>-1\}\\ 0, & \text{если существует номер } m,\ 2^s\leqslant 2^m<n \text{ такой, что}\\ & S_{2^m}(x)=-1, \text{ при } x\in\Delta_n,\end{cases}
\end{aligned}\right|\qquad (2.2)$$

а

$$S_{2^m}(x)=\sum_{n=2^s+1}^{2^m} a_n\chi_n(x).$$

Ясно, что любая частичная сумма $S_{2^m}(x)$ ряда (2.1) в каждой точке отрезка [0,1] принимает целочисленные значения и последовательность $S_{2^m}(x)$, $m=s+1,\ s+2,\cdots,$ расходится всюду на $(a,\ b)$. Поэтому, как следует из результатов работы [3], почти для всех $x\in(a,\ b)$ справедливы следующие равенства:

$$\varliminf_{m\to\infty} S_{2^m}(x) = -\infty, \quad \varlimsup_{m\to\infty} S_{2^m}(x) = +\infty. \tag{2.3}$$

Используя определение коэффициентов b_n и учитывая, что каждая частичная сумма $Q_{2^m}(x)$ ряда (2.2) $m > s$, в произвольной точке отрезка [0,1] принимает целочисленные значения, получим

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=2^s+1}^{m} b_n \chi_n(x) = -1 \text{ почти всюду на } (a, b). \tag{2.4}$$

Пусть N и M—целые числа $N > M > s+1$. Обозначим

$$\left.\begin{array}{l} G(N) = \bigcup\limits_{i=s+1}^{N} (\{x:\ Q_{2^m}(x) = -1\} \setminus \{x:\ Q_{2^{m-1}}(x) \neq -1\})^{\circ} \\ G(N, M) = G(N) \setminus G(M),\ E(N) = \{(a, b) \setminus G(N)\}. \end{array}\right\}^{*} \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует число N такое, что $\mu\{G(N)\} > b - a - \varepsilon$.

Легко проверить справедливость следующих соотношений:

$$\text{если } Q_{N_0}(x_0) = -1, \text{ то } Q_N(x_0) = -1, \text{ при } N > N_0, \tag{2.6}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } Q_N(x_0) > -1, \text{ то } S_{2^N}(x_0) = Q_N(x_0), \text{ и если} \\ S_{2^N}(x_0) > -1, \text{ то } Q_N(x_0) = S_{2^N}(x_0), \text{ где } x_0 \in \left\{x:\ x \neq \dfrac{l}{2^k},\ 0 \leqslant l \leqslant 2^k\right\} \end{array}\right\}, \tag{2.7}$$

ясно, что

$$\left.\begin{array}{l} (\{x:\ Q_{2^m}(x) = -1\} \setminus \{x:\ Q_{2^{m-1}}(x) = -1\})^{\circ} = \bigcup\limits_{i\in B} \Delta_{n_i}^{(2)}, \text{ где} \\ \{n_i\}_{i\in B} \text{ — некоторое подмножество множества } \{n:\ 2^{m-1}+1 \leqslant n \leqslant 2^m\} \end{array}\right\}. \tag{2.8}$$

В работе [6] была доказана следующая

Лемма 1. *Для произвольного числа ε, $\varepsilon > 0$, существуют натуральное число N и перестановка $(\nu_{2^s+1}, \nu_{2^s+2}, \cdots, \nu_{2^N})$ последовательности $(2^s+1, 2^s+2, \cdots, 2^N)$ такие, что*

1) $-1 < \sum\limits_{i=2^s+1}^{m} b_{\nu_i} \chi_{\nu_i}(x) \leqslant 1$, при $x \in G(N)$, $2^s+1 \leqslant m \leqslant 2^N$,

2) $\mu\{G(N)\} > b - a - \varepsilon$,

3) $Q_N(x) = -1$, при $x \in G(N)$; $b_{\nu_i} \chi_{\nu_i}(x) = 0$, при $x \overline{\in} (a, b)$,

4) $G(N)$ является объединением конечного числа интервалов Хаара.

Отметим, что полиномы $Q_N(x)$ ранее были рассмотрены в работах [3], [4], а Р. И. Овсепян (см. [5]) доказал, что для любого m, $2^s < m \leqslant 2^N$ и $x \in G(N)$

---

* Здесь полагаем $Q_{2^s}(x) = 0$, при $x \in [0,1]$.

$$\sum_{n=m}^{2^N} b_{2^N-n+m}\chi_{2^N-n+m}(x)\leqslant 0.$$

В настоящей работе нам понадобится следующая

Лемма 2. *Для произвольного числа* δ, $\delta>0$ *и* N *существует полином*

$$P_N(x)=\sum_{n=2^s+1}^{2^N} d_n^{(N)}\chi_n(x),$$

обладающий свойствами:

1. $d_n^{(N)}\chi_n(x)=0$, *при* $x\overline{\in}(a,b)$, $2^s<n\leqslant 2^N$,
2. $\max\limits_{a<x<b}|d_n^{(N)}\chi_n(x)|\leqslant\delta$ *для любого* n, $2^s<n\leqslant 2^N$,
3. $P_N(x)=C(N)$, *при* $x\in E(N)$,
4. $C(N)\to+\infty$, *при* $N\to\infty$.

§ 3. Доказательство леммы 2

Вначале заметим, что если для некоторого i, $i=1$ или 2

$$\Delta_n^{(i)}\overline{\subset} G(M),\ \text{где}\ 2^s<n\leqslant 2^M,\ \text{то}\ \Delta_n^{(i)}\overline{\subset} G(N),\ \text{при любом}\ N,\ N>M. \tag{3.1}$$

Действительно, пусть $2^{N_1-1}<n\leqslant 2^{N_1}$, тогда из условия имеем

$$Q_{2^{N_1}}(x)=c\geqslant 0,\ \text{при}\ x\in\Delta_n^{(i)}.\ \text{Так как}$$

$$\int_{\Delta_n^{(i)}}\sum_{n=2^{N_1}+1}^{2^N} b_n\chi_n(x)\,dx=0,\ \text{то равенство}\ \sum_{n=2^{N_1}+1}^{2^N} b_n\chi_n(x)=-c-1$$

не может иметь места всюду на $\Delta_n^{(i)}$ и следовательно $\Delta_n^{(i)}\overline{\subset} G(N)$.

Предложение 1. *Пусть* $2^s<m\leqslant 2^N$, *тогда*

$$\mu\{G(N)\cap\Delta_m^{(2)}\}\geqslant\mu\{G(N)\cap\Delta_m^{(1)}\}. \tag{3.2}$$

Действительно, в случае когда $\Delta_m^{(2)}\subset G(N)$ или $\Delta_m\cap(a,b)=\varnothing$, неравенство (3.2) очевидно. Пусть $\Delta_m^{(2)}\subset(a,b)$ и $\Delta_m^{(2)}\overline{\subset} G(N)$, тогда из (2.1) имеем

$$S_m(x)=S_m(t)-2,\ \text{при}\ x\in\Delta_m^{(2)}\ \text{и}\ t\in\Delta_m^{(1)}, \tag{3.3}$$

Так как

$$\sum_{n=m+1}^{2^r} a_n\chi_n(x)=\sum_{n=m+1}^{2^r} a_n\chi_n(x+\mu(\Delta_m^{(2)})),\ \text{при}\ x\in\Delta_m^{(1)},\ 2^r>m. \tag{3.4}$$

то получим

$$S_{2^r}(x) = S_{2^r}\left(x + \mu\left(\Delta_m^{(2)}\right)\right) - 2, \text{ при } x \in \Delta_m^{(1)},\ 2^r > m.$$

Отсюда и из (2.2) следует

$$Q_{2^r}(x) \geqslant Q_{2^r}\left(x + \mu\left(\Delta_m^{(2)}\right)\right), \text{ при } x \in \Delta_m^{(1)},\ m < 2^r.$$

Пусть x_0 — произвольная точка из множества $\Delta_m^{(1)} \cap G(N)$, тогда учитывая, что для произвольного r, $r > s$ имеем $Q_{2^r}(x) \geqslant -1$ всюду на $[0,1]$ получим

$$-1 = Q_{2^N}(x_0) \geqslant Q_{2^N}\left(x_0 + \mu\left(\Delta_m^{(2)}\right)\right) \geqslant -1,$$

откуда $x_0 + \mu\left(\Delta_m^{(2)}\right) \subset \Delta_m^{(2)} \cap G(N)$ и, следовательно

$$\Delta_m^{(1)} \cap G(N) + \mu\left(\Delta_m^{(2)}\right) \subset \Delta_m^{(2)} \cap G(N).$$

Отсюда легко следует неравенство (3.2).

Предложение 2. *Пусть* $N > M > s$ *и* $2^s < r \leqslant 2^N$. *Если* $\Delta_r^{(2)} \overline{\subset} G(N)$, *то*

$$G(N, M) \cap \nabla_r^{(1)} + \mu\left(\nabla_r^{1}\right) = G(N, M) \cap \nabla_r^{(2)}.$$

При $\Delta_r \overline{\subset} (a, b)$, утверждение очевидно. Пусть $\Delta_r \cap (a, b)$ и $r = 2^l + l$, тогда из определения интервалов $\nabla_r^{(1)}$ и $\nabla_r^{(2)}$ имеем

$$\nabla_r^{(1)} = \Delta_j^{(2)},\quad \nabla_r^{(2)} = \Delta_{j+1}^{(1)},\ \text{где } j = 2^{l+1} - 2l - 1. \tag{3.5}$$

Так как $\Delta_r^{(2)} \overline{\subset} G(N)$, то

$$S_r(x) = S_r(t) - 2 > -1, \text{ при } x \in \Delta_r^{(2)},\ t \in \Delta_r^{(1)},$$

откуда $b_j = a_j$, $b_{j+1} = a_{j+1}$ и из (3.5) получим

$$Q_{2^{l+2}}(x) = Q_{2^{l+2}}(t) = \cos nt > -1 \text{ при } x \in \nabla_r^{(1)},\ t \in \nabla_r^{(2)}. \tag{3.6}$$

Пусть $n = 2^{l'} + l'$, $n > 2^{l+2}$ и $\Delta_n \subset \Delta_r^{(1)}$, тогда

$$\chi_n(x) = \chi_{n'}\left(x + \mu\left(\nabla_r^{(1)}\right)\right), \text{ где } n' = n + 2^{l'-l-2},\ x \in \nabla_r^{(1)}.$$

Отсюда получим

$$S_{2^m}(x) - S_{2^{l+2}}(x) = S_{2^m}\left(x + \mu\left(\nabla_r^{(1)}\right)\right) - S_{2^{l+2}}\left(x + \mu\left(\nabla_r^{(1)}\right)\right) \text{ при } x \in \nabla_r^{(1)}. \tag{3.7}$$

Из (3.6) имеем $S_{2^{l+2}}(x) = Q_{2^{l+2}}(x)$ при $x \in \nabla_r^{(1)} \cup \nabla_r^{(2)}$, так как $x + \mu\left(\nabla_r^{(1)}\right) \subset \nabla_r^{(2)}$, при $x \in \nabla_r^{(1)}$, то равенство (3.7) примет вид

$$S_{2^m}(x) = S_{2^m}\left(x + \mu\left(\nabla_r^{1}\right)\right) \text{ при } x \in \nabla_r^{(1)}. \tag{3.8}$$

Пусть x_0 — произвольная точка из множества $G(N, M) \cap \nabla_r^{(1)}$. Тогда из (2.5) имеем, что существует номер m, $2^N \geqslant m > 2^M$ такой, что

$$Q_{2^m}(x_0) = -1 \text{ и } Q_{2^{m'}}(x_0) > -1 \text{ при } m' < m. \tag{3.9}$$

Отсюда и из (2.2) получим

$$S_{2^m}(x_0) = -1, \quad S_{2^{m'}}(x_0) > -1, \text{ при } m' < m$$

и из (3.8) будем иметь

$$S_{2^m}(x_0 + \mu(\nabla_r^{(1)})) = -1, \quad S_{2^{m'}}(x_0) > -1,$$

откуда

$$Q_{2^m}(x_0 + \mu(\nabla_r^{(1)})) = -1, \quad Q_{2^{m'}}(x_0 + \mu(\nabla_r^{(1)})) > -1$$

и следовательно $x_0 + \mu(\nabla_r^{(1)}) \subset G(N, M) \cap \nabla_r^{(2)}$, в силу произвольности точки x_0

$$G(N, M) \cap \nabla_r^{(1)} + \mu(\nabla_r^{(1)}) \subset G(N, M) \cap \nabla_r^{(2)}.$$

Тем же путем легко установить обратное включение, откуда и следует справедливость предложения 2.

Легко убедиться, что в условиях предложения 2 справедливы условия

$$\left.\begin{array}{l} G(N) \cap \nabla_r^{(1)} + \mu(\nabla_r^{(1)}) = G(N) \cap \nabla_r^{(2)} \\ E(N) \cap \nabla_r^{(1)} + \mu(\nabla_r^{(1)}) = E(N) \cap \nabla_r^{(2)} \end{array}\right\}. \tag{3.10}$$

Пусть M и N — натуральные числа, $s < M < N$. Далее обозначим через $A_1^{(M, N)}$, $A_2^{(M, N)}$, $A_3^{(M, N)}$ подмножества натуральных чисел n, $2^s < n \leqslant 2^N$, удовлетворяющие условиям

$$A_1^{(M, N)} = \{n: \Delta_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing, \ \Delta_n^{(2)} \subset G(N, M)\}, \tag{3.11}$$

$$A_2^{(M, N)} = \{n: \Delta_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing, \ \Delta_n^{(2)} \cap G(N, M) \neq \varnothing, \ n \,\overline{\in}\, A_1^{(M, N)}\}. \tag{3.12}$$

$$A_3^{(M, N)} = \{n: 2^s < n \leqslant 2^N\} \setminus [A_1^{(M, N)} \cup A_2^{(M, N)}]. \tag{3.13}$$

Заметим, что

$$\nabla_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing, \quad \nabla_n^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing, \text{ при } n \in A_2^{(M, N)}. \tag{3.14}$$

Вначале покажем, что

$$\Delta_n^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing \text{ при } n \in A_2^{(M, N)}. \tag{3.15}$$

Действительно, если (3.15) не имеет места, то из (3.12) получим

$$\Delta_n^{(2)} \subset G(N), \quad \Delta_n^{(2)} \cap G(M) \neq \varnothing, \quad \Delta_n^{(2)} \,\overline{\subset}\, G(M). \tag{3.16}$$

Так как $G(M)$ является объединением интервалов Хаара, длина которых не меньше чем 2^{-M} и из двух интервалов Хаара, имеющих общую точку, один содержится в другом, то из (3.16) будем иметь $n < 2^M$. Откуда, учитывая (3.1), получим $\Delta_n^{(2)} G \,\overline{\subset}\, (N)$. Полученное противоречие доказывает справедливость условия (3.15). Далее из (3.12) легко убедиться, что $n \leqslant 2^{N-1}$. Полагая $n = 2^i + k$, из (3.15) следует $Q_{2^{i+1}}(x) = c \geqslant 0$. Поскольку $\nabla_n^{(2)} = \Delta_{2^{i+1}+2k}^{(1)}$, то из определения b_n вытекает, что $Q_{2^{i+2}}(x) = c + 1 \geqslant 1$, при $x \in \nabla_n^{(2)}$, следовательно, $\nabla_n^{(2)} \,\overline{\subset}\, G(i+2)$

и из (3.1) $\nabla_n^{(2)} \supset G(N)$ или $\nabla_n^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing$. Учитывая (3.10) будем иметь $E(N) \cap \nabla_n^{(1)} \neq \varnothing$. Условие (3.14) доказано.

Рассмотрим полином

$$P^{(M,N)}(x) = \sum_{n=2^s+1}^{2^N} d_n^{(M,N)} \chi_n(x),$$

где коэффициенты $d_n^{(M,N)}$ определены методом индукции. А именно, предположим, что определены коэффициенты $d_n^{(M,N)}$ при всех n, $m+1 < n \leqslant 2^N$. Положим

а) $d_m^{(M,N)} = 0$, при $m \in A_3^{(M,N)}$,

б) $d_m^{(M,N)} \chi_m(x) = \delta$, при $x \in \Delta_m^{(1)}$ и $m \in A_1^{(M,N)}$,

в) в случае, когда $m \in A_2^{(M,N)}$, берем

$$d_m^{(M,N)} = \frac{P_{m+1}^{(M,N)}(x) - P_{m+1}^{(M,N)}(t)}{2 \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\chi_m(x)|}, \text{ где}$$

$$P_{m+1}^{(M,N)} = \sum_{n=2^N}^{m+1} d_n^{(M,N)} \chi_n(x),\ x \in \Delta_m^{(2)} \cap E(N),\ t \in \Delta_m^{(1)} \cap E(N).$$

Для того чтобы убедиться, что в случае в) $d_m^{(M,N)}$ не зависит от выбора точек x и t, нам нужно доказать следующее

Предложение 3. *Для произвольного m, $2^s < m \leqslant 2^N$ справедливо условие*

$$P_m^{(M,N)}(x) = c_m^{(M,N)}, \text{ при } x \in \Delta_m \cap E(N). \tag{3.17}$$

Действительно, учитывая, что два интервала Хаара—либо не имеют общих точек, либо один содержит другой, из (2.5) легко убедиться в выполнении одного из следующих четырех условий: при $m \in \{m\colon 2^{N-1}+1 \leqslant m \leqslant 2^N\}$

$$\text{I } m \in A_1^{(M,N)},\ \text{II } \Delta_m \subset G(N),\ \text{III } \Delta_m \subset E(N),\ \text{IV } \Delta_m \cap (a, b) = \varnothing,$$

откуда

$$m \in A_1^{(M,N)} \cup A_3^{(M,N)}, \text{ при } m \in \{m\colon 2^{N-1}+1 \leqslant m \leqslant 2^N\}. \tag{3.18}$$

При указанных значениях m справедливость условия (3.17) очевидна. Положим, что (3.17) имеет место при $m \in \{m\colon 2^s+1 \leqslant j < m \leqslant 2^N\}$ и докажем его справедливость при $m = j$.

Если $\Delta_j^{(2)} \subset G(N, M)$, то $\Delta_j \cap E(N) = \Delta_j^{(1)} \cap E(N)$ и выполнение условия (3.17) следует из того, что $P_{j+1}^{(M,N)}(x) = \text{const}$, при $x \in \Delta_j^{(1)} \cap \cap E(N)$.

Отсюда получим (3.17), при $m = j$, $j \in A_1^{(M,N)}$.

Полагая $j \in A_2^{(M, N)}$, учитывая индукционное предположение и определение $d_j^{(M, N)}$, легко убедиться в справедливости условия (3.17), при $j=m$.

Пусть теперь $j \in A_3$, тогда выполняется одно из следующих условий:

$$\Delta_j \cap (a, b) = \varnothing, \ \Delta_j^{(1)} \subset G(N), \ \Delta_j^{(2)} \subset E(N) \cup G(M).$$

В первом случае (3.17) очевидно, а во втором оно следует из того, что согласно предложению 1 имеет место соотношение $\Delta_j \subset G(N)$.

Далее, пусть $\Delta_j^{(2)} \subset E(N) \cup G(M)$. В том случае, когда $\Delta_j^{(2)} \subset G(M)$ имеем $\Delta_j \cap E(N) = \Delta_j^{(1)} \cap E(N)$ и выполнение (3.17), при $m=j$ становится тривиальным. Пусть теперь $\Delta_j^{(2)} \overline{\subset} G(M)$, $\Delta_j^{(2)} \subset E(N) \cup G(M)$, $j = 2^r + k$, $r < N-1$. Рассмотрим следующие множества:

$$\{\nabla_{j_i}^{(1)}, \nabla_{j_i}^{(2)}\}_{i=0}^{N-r-1}, \text{ где } j_0 = j; \ j_i = 2^{r+i} + 2^i k - \sum_{l=0}^{i-1} 2^l. \tag{3.19}$$

Иными словами, рассматриваются те интервалы, для которых

$$\nabla_{j_i}^{(1)} = \Delta_{j_{i+1}}^{(2)}, \quad i=0, 1, \cdots, N-r-2. \tag{3.20}$$

Ясно, что

$$\Delta_j^{(1)} = \Delta_{j_{N-r-1}}^{(1)} \cup \bigcup_{i=0}^{N-r-2} (\nabla_{j_i}^{(1)}). \tag{3.21}$$

Из (3.20), (2.10), учитывая, что $\nabla_{j_i}^{(2)} = \Delta_{j_{i+1}+1}^{(1)}$ при условии $\Delta_{j_i}^{(2)} \cap \cap E(N) \neq \varnothing$, используя предложение 1, получим

$$\Delta_{j_i}^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing \Rightarrow \nabla_{j_i}^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing \Rightarrow \Delta_{j_i}^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta_{j_{i+1}}^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing. \tag{3.22}$$

Так как $\Delta_{j_0}^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing$, то условие (3.22) получим для любого i, $i = 1, 2, \cdots, N-r-1$. Отсюда учитывая, что $\nabla_{j_0}^{(2)} \subset E(N) \cup G(M)$, используя предложения 1 и 2, из (2.10) вытекает

$$\nabla_{j_0}^{(2)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \nabla_{j_0}^{(1)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \Delta_{j_1}^{(2)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \nabla_{j_1}^{(2)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \Delta_{j_1}^{(1)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \cdots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \nabla_{j_{N-r-2}}^{(2)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \nabla_{j_{N-r-2}}^{(1)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta_{j_{N-r-1}}^{(2)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \Delta_{j_{N-r-1}}^{(1)} \cap G(N, M) = \varnothing,$$

и из (3.21) $\Delta_j^{(1)} \subset E(N) \cup G(M)$, откуда $\Delta_j \subset E(N) \cup G(M)$. Следовательно, $n \in A_3^{(M, N)}$, при $n \in \{n: n > j, \Delta_n \subset \Delta_j\}$, отсюда $P_j^{(M, N)}(x) = 0$, при $x \in \Delta_j$. Предложение 3 полностью доказано.

Предложение 4. *Пусть* $m \in A_2^{(M,N)}$, $m = 2^l + k$, $1 \leqslant k < 2^l$. *Тогда*

$$P_{2^j+1}^{(M,N)}(t) = P_{2^j+1}^{(M,N)}(t + \mu(\nabla_m^{(1)})), \text{ где } j \geqslant i + 2, \ t \subset \nabla_m^{(1)}. \tag{3.23}$$

Доказательство. Из (3.18) имеем $i \leqslant N - 2$. При $j \geqslant N$ полагаем $P_{2^j+1}(x) = 0$ на $[0,1]$. Пусть при некотором n, $n > m$ имеем $\Delta_n \subset \nabla_m^{(1)}$, тогда, используя предложение 2, получим

$$[G(N, M) \cap \Delta_n^{(i)}] + \mu(\nabla_m^{(1)}) = G(N, M) \cap [\Delta_n^{(i)} + \mu(\nabla_m^{(1)})] =$$

$$= G(N, M) \cap \nabla_{n+\alpha_n}^{(i)}, \text{где } \alpha_n = \frac{\mu(\nabla_m^{(1)})}{\mu(\Delta_n)}, \ i = 1 \text{ или } 2. \tag{3.24}$$

Аналогично из (2.10) следует

$$E(N) \cap \Delta_n^{(i)} + \mu(\nabla_m^{(1)}) = E(N) \cap \Delta_{n+\alpha_n}^{(i)}, \ i = 1, 2. \tag{3.25}$$

Отсюда легко видеть, что при $n \in \{n: \Delta_n \subset \Delta_m^{(1)}\}$ числа n и $n + \alpha_n$ принадлежат одному и тому же множеству $A_l^{(M,N)}$ $(l = 1, 2, 3)$. Так как при $n \in \{n: 2^{N-1} + 1 \leqslant n \leqslant 2^N, \ \Delta_n \subset \nabla_m^{(1)}\}$, из (3.18) следует, что $n \in A_1^{(M,N)} \cup A_2^{(M,N)}$, то из вышесказанного получим $d_n^{(M,N)} = d_{n+\alpha_n}^{(M,N)}$, используя равенство $\chi_n(x) = \chi_{n+\alpha_n}(x + \mu(\nabla_n^{(1)}))$, где $x \in \nabla_n^{(1)}$, получим

$$P_{2^{N-1}+1}^{(M,N)}(t) = P_{2^{N-1}+1}^{(M,N)}(t + \mu(\nabla_n^{(1)})), \text{ при } t \in \nabla_n^{(1)}.$$

Предположим, что (3.23) имеет место для некоторого $j = l$, $l > i + 2$ и докажем его для $j = l - 1$. Сначала убедимся, что

$$d_n^{(M,N)} = d_{n+\alpha_n}^{(M,N)}, \text{ при } n \in \{n: 2^{l-1} + 1 \leqslant n \leqslant 2^l, \ \nabla_n \subset \nabla_m^{(1)}\}. \tag{3.26}$$

Если $n \in A_1^{(M,N)} \cup A_3^{(M,N)}$, то (3.26) следует из (3.24) и (3.25). Предположим $n \in A_2^{(M,N)}$, $n + \alpha_n \in A_2^{(M,N)}$. Из определения коэффициентов $d_n^{(M,N)}$ имеем

$$d_n^{(M,N)} = [P_{2^l+1}^{(M,N)}(x) - P_{2^l+1}^{(M,N)}(t)] \cdot [2 \max_{0<x<1} |\chi_n(x)|]^{-1},$$

$$d_{n+\alpha_n}^{(M,N)} = [P_{2^l+1}^{(M,N)}(y) - P_{2^l+1}^{(M,N)}(z)] \cdot [2 \max_{0<x<1} |\chi_{n+\alpha_n}(x)|]^{-1},$$

где

$$x \in \Delta_n^{(2)} \cap E(N), \ t \in \Delta_n^{(1)} \cap E(N), \ y \in \Delta_{n+\alpha_n}^{(2)} \cap E(N), \ z \in \Delta_{n+\alpha_n}^{(1)} \cap E(N).$$

Отсюда, используя (3.14), (3.24), (3.25), предложение 3 и индукционное предположение при указанных x, y, z, t, получим

$$P_{2^l+1}^{(M,N)}(x) = P_{2^l+1}^{(M,N)}(y), \quad P_{2^l+1}^{(M,N)}(t) = P_{2^l+1}^{(M,N)}(z),$$

откуда легко вывести (4.26) и (3.23). Тем самым предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Для произвольного* m, $2^{\nu}+1\leqslant m\leqslant 2^{N}$ *справедливо условие*

$$d_m^{(M,N)}\geqslant 0. \tag{3.27}$$

Действительно, при $m\in A_1^{(M,N)}\cup A_3^{(M,N)}$ условие (3.27) следует из определения $d_m^{(M,N)}$. Из (3.18) имеем $m\in A_1^{(M,N)}\cup A_3^{(M,N)}$ при $m\in\{m\colon 2^{N-1}+1\leqslant m\leqslant 2^N\}$ и (3.2) справедливо.

Предположим $m\in A_2^{(M,N)}$ и (2.27) имеет место при $n+1\leqslant m\leqslant 2^N$. Пусть $n=2^l+k$. Так как

$$\nabla_n^{(1)}=\left(\frac{4k-3}{2^{l+2}},\ \frac{4k-2}{2^{l+2}}\right)=\Delta_{2^{l+2}+4k-2},$$

$$\nabla_n^{(2)}=\left(\frac{4k-2}{2^{l+2}},\ \frac{4k-1}{2^{l+2}}\right)=\Delta_{2^{l+2}+4k-1},$$

то учитывая, что $\nabla_n^{(1)}+\mu(\nabla_n^{(1)})=\nabla_n^{(2)}$, из (3.14), используя предложения 3 и 4, получим

$$P^{(M,N)}_{2^{l+2}+1}(t)=P^{(M,N)}_{2^{l+2}+1}(x)=\text{const},\ \text{при}\ x\in\nabla_n^{(1)}\cup E(N), \tag{3.28}$$

$$t\in\nabla_n^{(2)}\cap E(N).$$

Принимая во внимание, что $\nabla_n^{(1)}=\Delta^{(2)}_{2^{l+1}+2k-1}$, $\nabla_n^{(2)}=\Delta^{(1)}_{2^{l+1}+2k}$ и индукционное предположение, из предложения 3 будем иметь

$$P^{(M,N)}_{2^{l+1}+1}(t)\leqslant P^{(M,N)}_{2^{l+1}+1}(x),\ \text{при}\ t\in\Delta_n^{(1)}\cap E(N),\ x\in\Delta_n^{(2)}\cap E(N),$$

отсюда и из определения коэффициентов $d_n^{(M,N)}$ легко убедиться в справедливости условия (3.27).

Предложение 6. *Для любого* m, $m\in\{m\colon 2^{\nu}+1\leqslant m\leqslant 2^N\}$ *справедливо условие*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|d_m^{(M,N)}\chi_m(x)|\leqslant\delta. \tag{3.29}$$

Действительно, в случае когда $m\in A_1^{(M,N)}\cup A_3^{(M,N)}$ (3.29) следует из определения $d_m^{(M,N)}$. При $m\in\{m\colon 2^{N-1}+1\leqslant m\leqslant 2^N\}$ имеем $m\in A_1^{(M,N)}\cup A_3^{(M,N)}$ и (3.29) выполнено.

Предположим, что (3.29) установлено при m, $m>N$ и докажем его справедливость для $m=n$, $n\in A_2^{(M,N)}$.

Полагая $n=2^l+k$, как и выше получим условие (3.28). Учитывая равенство $\mu(\nabla_n^{(1)})=\mu(\nabla_n^{(2)})=2^{-(l+2)}$, легко убедиться, что для каждого из интервалов $\nabla_n^{(i)}$, $i=1,\ 2$, существует единственное число $k_i\in\{k\colon 2^{l+2}\geqslant k\geqslant 2^{l+1}+1\}$, для которого $\chi_{k_i}(x)\neq 0$, при $x\in\nabla_n^{(i)}$.

Отсюда, так как $|d_{k_i}^{(M,N)}\chi_{k_i}(x)|\leqslant\delta$ всюду на $[0,1]$, то из (3.28)

$$|P^{(M,N)}_{2^{l+1}+1}(t)-P^{(M,N)}_{2^{l+1}+1}(x)|\leqslant 2\delta\ \text{при}\ x\in\Delta_n^{(1)}\cap E(N),\ t\in\nabla_n^{(2)}\cap E(N). \tag{3.30}$$

Из (3.14), используя предложение 3, получим справедливость (3.30), когда $t \in \Delta_n^{(2)} \cap E(N)$, $x \in \Delta_n^{(1)} \cap E(N)$. Отсюда, используя определение $d_n^{(M,N)}$ при $n \in A_2^{(M,N)}$, получим (3.29).

Рассмотрим следующий полином:

$$\sum_{n=2^N}^{2^s+1} d_n^{(M,N)} \chi_n(x) = P^{(M,N)}(x). \tag{3.31}$$

Из предложений 3, 5 и 6 имеем

$$P^{(M,N)}(x) = C(M, N), \text{ при } x \in E(N), \tag{3.32}$$

$$d_n^{(M,N)} \geqslant 0, \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |d_n^{(M,N)} \chi_n(x)| \leqslant \varepsilon, \text{ при } 2^s + 1 \leqslant n \leqslant 2^N. \tag{3.33}$$

Полагая в (3.31) $M = s$, $G(s) = \varnothing$, получим, что полином (3.31) зависит только от N. Обозначим $d_n^{(s,N)} = d_n^{(N)}$, $P^{(s,N)}(x) = P_N(x)$, $C(s, N) = C(N)$, $A_i^{(s,N)} = A_i^{(N)}$, $i = 1, 2, 3$. Для завершения доказательства леммы 2 нам остается показать, что $C(N) \to \infty$, при $N \to \infty$. Вначале убедимся, что справедливо следующее

Предложение 7. *Пусть $s < M < N$, тогда*

$$P_N(x) = P_M(x) + P^{(M,N)}(x), \text{ при } x \in [0,1], \tag{3.34}$$

$$d_n^{(N)} = d_n^{(M)} + d_n^{(M,N)}, \text{ при } 2^{s+1} \leqslant n \leqslant 2^N. \tag{3.35}$$

Доказательство. Если $G(N, M) = \varnothing$, то (3.34) и (3.35) тривиальны. Пусть $G(N, M) \neq \varnothing$. При $n > 2^M$ имеем, либо $\Delta_n \subset G(M)$, либо $\Delta_n \cap G(M) = \varnothing$. В обоих случаях $n \in A_3^{(M)}$ и $d_n^{(M)} = 0$. Если $\Delta_n \cap G(M) = \varnothing$, то из условий $\Delta_n^{(1)} \cap E(N) = \varnothing$ или $\Delta_n \subset G(N) \Rightarrow \Delta_n \subset \Delta_n \cap G(M, N)$ получим $n \in A_3^{(M,N)}$, $n \in A_3^{(N)}$. Пусть $\Delta_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing$, тогда (здесь пока $n > 2^M$)

$$\Delta_n^{(2)} \subset G(N) \Rightarrow \Delta_n^{(2)} \subset G(M, N), \ \Delta_n^{(2)} \cap G(N) = \Delta_n^{(2)} \cap G(M, N), \tag{3.36}$$

откуда $n \in A_{i_0}^{(N)} \Rightarrow n \in A_{i_0}^{(M,N)}$ ($i_0 = 1, 2$ или 3) и получим (3.35), при $n > 2^M$. Когда $n \in A_1^{(N)}$ или $n \in A_1^{(N)}$, при $2^s < n \leqslant 2^M$ легко убедиться в справедливости (3.35). Из (3.14) имеем $n \in A_1^{(N)} \cup A_3^{(N)}$, при $2^{N-1} + 1 \leqslant n \leqslant 2^N$, таким образом, (3.35) установлено. Предположим, что формула (3.35) имеет место при n, $n > m > 2^s + 1$. Легко убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$m \in A_2^{(N)} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{либо } \ m \in \{n\colon\ n \in A_2^{(M)},\ \ n \in A_2^{(M,N)}\}, \\ \text{либо } \ m \in \{n\colon\ n \in A_3^{(M)},\ \ n \in A_2^{(M,N)}\}, \\ \text{либо } \ m \in \{n\colon\ n \in A_2^{(M)},\ \ n \in A_3^{(M,N)}\}. \end{array} \right. \tag{3.37}$$

Действительно

$$m \in A_2^{(N)} \Rightarrow m \in \{n\colon \Delta_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing,\ \Delta_n^{(2)} \cap G(N) \neq \varnothing,\ \Delta_n^{(2)} \subset G(N)\}\text{-}$$

Имеем

$$\Delta_n^{(1)} \cap E(M) \supset \Delta_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing,$$

$$\Delta_n^{(2)} \supset G(N) \Rightarrow \Delta_n^{(2)} \supset G(M) \cup G(N, M),$$

$$\Delta_n^{(2)} \cap G(N) = \Delta_n^{(2)} \cap [G(M) \cup G(N, M)] \neq \varnothing.$$

Из последнего условия следует, что хотя бы одно из множеств $G(M) \cap \Delta_n^{(2)}$ и $G(N, M) \cap \Delta_n^{(2)}$ не пусто, откуда получим справедливость соотношения (3.37)*. Из сделанного предположения следует

$$P_{m+1}^{(N)}(x) = P_{m+1}^{(M)}(x) + P_{m+1}^{(M,N)}(x), \quad x \in [0,1]. \tag{3.38}$$

Из определения коэффициентов $d_m^{(n)}$ из (3.38) получим

$$\left. \begin{array}{l} d_m^{(N)} = \dfrac{P_{m+1}^{(M)}(t) - P_{m+1}^{(M)}(x)}{2 \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\chi_m(x)|} + \dfrac{P_{m+1}^{(M,N)}(t) - P_{m+1}^{(M,N)}(x)}{2 \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\chi_m(x)|}, \text{ где} \\ x \in \Delta_m^{(1)} \cap E(N) \subset \Delta_m^{(1)} \cap E(M), \ t \in \Delta_m^{(2)} \cap E(N) \subset \Delta_m^{(2)} \cap E(M) \end{array} \right| . \tag{3.39}$$

При $m \in \{n: n \in A_2^{(M)}, \ n \in A_2^{(M,N)}\}$ из (3.39) получим справедливость формулы (3.35). Если $m \in A_1^{(M)}$, то имеем $n \in A_3^{(M)}$, при $n \in \{n: \Delta_n \subset \Delta_m\}$, откуда $P_{m+1}^{(M)}(x) = 0$, при $x \in [0,1]$, и условие (3.35) выполнено. Тем же путем докажем равенство (3.35) при $m \in \{n: n \in A_3^{(M)}, n \in A_2^{(M,N)}\}$. Остается доказать условие (3.35) при $2^s + 1 \leqslant n \leqslant 2^M$ и $n \in A_1^{(N)} \cup A_3^{(N)}$.

Ясно, что

$$n \in A_3^{(N)} \Rightarrow n \in [\{n: \Delta_n^{(2)} \cap G(N) = \varnothing\} \cup \{n: \Delta_n^{(1)} \cap E(N) = \varnothing\}].$$

Так как $n \leqslant 2^M$, то из (3.1) последует

$$n \in \{n: \Delta_n^{(1)} \cap E(N) = \varnothing\} \Rightarrow n \in \{n: \Delta_n^{(1)} \cap E(M) = \varnothing\},$$

$$n \in \{n: \Delta_n^{(2)} \cap G(N) = \varnothing\} \Rightarrow n \in \{n: \Delta_n^{(2)} \cap [G(N, M) \cup G(M)] = \varnothing\}.$$

Отсюда в обоих случаях $n \in A_3^{(M)}$, $n \in A_3^{(M,N)}$, откуда получим (3.35). Легко убедиться, что при $2^s + 1 \leqslant n \leqslant 2^M$

$$n \in A_1^{(N)} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{либо } n \in \{n: n \in A_3^{(M)}, \ n \in A_1^{(M,N)}\} \\ \text{либо } n \in \{n: n \in A_1^{m}, \ \ n \in A_3^{(M,N)}\}, \end{array} \right.$$

откуда вытекает (3.35).

Теперь покажем, что $C(N) \to \infty$, когда $N \to \infty$. Для этого достаточно доказать, что для произвольного целого числа M, $M > 0$ существует натуральное число N_0, $N_0 > M$, такое, что $C(N) > C(M) + \dfrac{\delta}{2}$ как только $N > N_0$.

---

* Используя соотношение $G(M, N) = \varnothing$ можно показать, что $\{n: n \in A_2^{(M)}, n \in A_3^{(M)}\} = \varnothing$, но легче установить справедливость формулы (3.35) при $m \in \{n: n \in A_2^{(M)}, \ n \in A_3^{(M,N)}\}$.

Для M, $M > s$ выберем N_0 так, чтобы

$$\mu\{G(M, N_0)\} \geqslant \frac{\mu\{E(M)\}}{2}.$$

Пусть B будет множеством натуральных чисел, для которого справедливо следующее условие:

$$G(M, N) = \bigcup_{i \in B} \Delta_i^{(2)}, \text{ где } N \text{ некоторое целое число.}$$

Ясно, что $i \in \{i: 2^M + 1 \leqslant i \leqslant 2^N\}$, при $i \in B$.

Через B_0 обозначим подмножество множества B, для которого

$$G(M, N) \subset \bigcup_{i \in B_0} \Delta_i, \ \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing, \text{ при } i \neq j, \ i, j \in B_0. \tag{3.40}$$

Введем следующие обозначения:

$$e_n = \begin{cases} d_n^{(M, N)}, \text{ при } n \in \{n: \Delta_n \subset \bigcup_{i \in B_0} \Delta_i\} \\ 0, \quad \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{3.41}$$

$$e'_n = \begin{cases} d_n^{(M, N)}, \text{ при } n \in \{n: d_n^{(M, N)} \neq e_n\} \\ 0, \quad \text{при } n \in \{n: d_n^{(M, N)} = e_n\}. \end{cases} \tag{3.42}$$

Ясно, что

$$e_n + e'_n = d_n^{(M, N)}, \ 2^s + 1 \leqslant n \leqslant 2^N, \tag{3.43}$$

$$\sum_{n=2^N}^{2^s+1} e_n \chi_n(x) + \sum_{n=2^N}^{2^s+1} e'_n \chi_n(x) = P^{(M, N)}(x), \text{ при } x \in [0,1]. \tag{3.44}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n=2^N}^{2^s+1} e_n \chi_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \overline{\in} \bigcup_{i \in B_0} \Delta_i \\ k_i, \text{ при } x \in \Delta_i \cap E(N), \ i \in B_0. \end{cases}$$

Убедимся, что $k_i \geqslant \delta$ при любом i, $i \in B_0$. Действительно, из условия $B_0 \subset B$ следует, что $\Delta_i^{(2)} \subset G(M, N)$, при $i \in B_0$. Отсюда и из (2.5), (2.8) и (3.1) легко вытекает, что $\Delta_i^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing$ и $i \in A_1^{(M, N)}$, при $i \in B_0$. Следовательно, $e_i \chi_i(x) = d_i^{(M, N)} \chi_i(x) = \delta$, при $x \in \Delta_i^{(1)}$, $i \in B_0$.

Учитывая, что $e_n \geqslant 0$, при $n \in \{n: n > i, \Delta_n \subset \Delta_i, i \in B_0\}$ и $e_n \chi_n(x) = 0$ при $x \in \Delta_i$, $n \in \{n: n < i, \Delta_n \cap \Delta_i \neq \varnothing, i \in B_0\}$, используя предложение 1

$$\int\limits_{E(N) \cap \Delta_i} \sum_{n=2^N}^{2^s+1} e_n \chi_n(x)\, dx = \int\limits_{E(N) \cap \Delta_i} e_i \chi_i(x)\, dx + \sum_{n=2^N}^{i-1} \int\limits_{E(N) \cap \Delta_i} e_n \chi_n(x)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \delta \mu(E(N) \cap \Delta_i), \text{ откуда } k_i \geqslant \delta.$$

Определим функцию $F(x)$ следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} k_i, \text{ при } x \in E(M) \cap \Delta_i, \ i \in B_0 \\ \sum\limits_{n=2^N}^{2^s+1} e_n \chi_n(x), \text{ при } x \overline{\in} E(M) \cap \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i. \end{cases} \tag{3.45}$$

Ясно, что

$$E(M) = E(N) \cup \{E(M) \cap G(M, N)\} = E(N) \cup \{E(M) \cap \bigcup_{i \in B_0} \Delta_i\}.$$

Учитывая, что $e_n' = 0$, при $n \in \{n\colon \Delta_n \overline{\subset} \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i\}$ и следовательно,

$$\sum_{n=2^N}^{2^s+1} e_n' \chi_n(x) = \text{const на каждом интервале } \Delta_i, \ i \in B_0,$$

то используя предложение 3, нетрудно убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$F(x) + \sum_{i=2^N}^{2^s+1} e_n' \chi_n(x) = P^{(M, N)}(t) - C(M, N),$$

при $x \in E(M)$, $t \in E(N)$.

Так как $e_n' \geqslant 0$, то из предложения 1

$$\int\limits_{E(M)} e_n' \chi_n(x)\, dx \geqslant 0, \ 2^s + 1 \leqslant n \leqslant 2^M,$$

откуда, из условий $F(x) \geqslant \delta$ при $x \in E(M) \cap \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i$, $F(x) = 0$, при $x \overline{\in} \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i$, получим

$$C(M, N) = \frac{1}{\mu(E(M))} \int\limits_{E(M)} \left| F(x) + \sum_{n=2^N}^{2^s+1} e_n' \chi_n(x) \right| dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\mu\{E(M)\}} \int\limits_{E(M) \cap \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i} F(x)\, dx \geqslant \frac{\delta \cdot \mu\{E(M) \cap \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i\}}{\mu\{E(M)\}} \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Из предложения 6 имеем

$$C(N) = C(M) + C(N, M) \geqslant C(M) + \frac{\delta}{2} \text{ как только } N > N_0.$$

Тем самым лемма 2 полностью доказана.

Пусть Ω — некоторое конечное подмножество натуральных чисел, а $(\ni)\,\Omega$ есть множество Ω, упорядоченное некоторым способом, то есть $(\ni)$ — некоторый закон, устанавливающий порядок между произвольными парами элементов из Ω, удовлетворяющий условиям

i) если $\{m, n, k\} \subset \Omega$ и $m \prec n$, $n \prec k$, то $m \prec k$,

ii) $m \in \Omega$, $n \in \Omega$, $m \neq n$, $m \prec n$, то $n \not\prec m$,

iii) если $m \in \Omega$, то $m \not\prec m$.

Пусть

$$(\sigma)\ T(x) = \sum_{i \in (\sigma)\,\Omega} a_i \chi_i(x).$$

Обозначим

$$(\sigma)\ T^*(x) = \sup_{j \in \Omega} |S_j(x)|,\ \Omega(T) = \Omega,$$

где $S_j(x)$ — частные суммы полинома $(\sigma)\ T(x)$, согласованные с упорядочением (σ), то есть

$$S_j(x) = \sum_{i \in \{l:\, l \in \Omega,\ l \prec j\}} a_i \chi_i(x).$$

Замечание 1. Из определения множеств $A_1^{(N)}$, $A_2^{(N)}$, $A_3^{(N)}$ следует, что

$$P_N(x) = \sum_{n \in A_1^{(N)} \cup A_2^{(N)}} d_n^{(N)} \chi_n(x).$$

Если (σ_N) — упорядочение множества $(2^s + 1, 2^s + 2, \cdots, 2^N)$ в лемме 1,

$$M = \{n:\, n \in (2^s + 1, 2^s + 2, \cdots, 2^N),\ b_n \neq 0,\ \Delta_n \cap G_{(N)} \neq \varnothing\},$$

$$(\sigma_N) Q_N(x) = \sum_{i \in (\sigma_N)\,M} b_i \chi_i(x), \text{ при } x \in G_{(N)},$$

то легко убедиться, что $M = A_1^{(N)} \cup A_2^{(N)}$, откуда $\Omega(P_N) = \Omega(Q_N)$.

§ 4. Построение примера

Вначале докажем следующее

Предложение 8. Пусть $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{l} \omega_i$

$$f(x) = \{c_i,\ \text{при } x \in \omega_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l\}$$

$$g(x) = \{\alpha_i,\ \text{при } x \in \omega_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l\},$$

где ω_i, $1 \leqslant i \leqslant l$ — интервал Хаара и $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, при $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$. Тогда для произвольных положительных чисел δ, N_0 существуют множества G, E и полиномы

$$(\sigma)\ Q(x) = \sum_{j=1}^{M} (\sigma_j)\ Q_j(x),\ P(x) = \sum_{j=1}^{M} P_j(x),$$

обладающие свойствами

1) множества G и E являются объединениями конечного числа интервалов Хаара

$$G \cap E = \varnothing,\ E \cup G \subset \Gamma,\ \bar{G} \cup \bar{E} \supset \bar{\Gamma},$$

2) $(\sigma_j)\ Q_j^*(x) \leqslant \delta$ и $(\sigma)\ Q(x) \leqslant \sup_{x \in \Gamma} |f(x)| + \delta$, при $x \in G$,

3) $f(x) + (\sigma)\ Q(x) = 0$, при $x \in G$,

4) $\Omega(Q_j) = \Omega(P_j)$, $j = 1, 2, \cdots, M$; $\Omega(Q_j) \cap \Omega(Q_i) = \varnothing$, при $i \neq j$,

5) $g(x) = P(x)$, при $x \in E$,

6) $|d_n \chi_n(x)| \leqslant \delta$, при $x \in [0,1]$, $n \in \Omega(P_j)$, $j = 1, 2, \cdots, M$.

где d_n — коэффициент при функции $\chi_n(x)$ в полиноме $P_j(x)$,

7) $(\sigma)\ Q_j^*(x) = P_j^*(x) = 0$, при $x \in \Gamma$.

Доказательство. Не нарушая общности, можем полагать $\mu(\omega_i) < N^{-1}$. Выберем натуральное число M так, чтобы $\max_{1 \leqslant i \leqslant l} |c_i| \times M^{-1} < \delta$. Для интервала ω_i, $1 \leqslant i \leqslant l$ существуют множества $G(N(i, 1))$, $E(N(i, 1))$ и полиномы $(\sigma_i^{(1)})\ Q_{N(i,1)}(x)$, $P_{N(i,1)}(x)$, которые удовлетворяют условиям лемм 1 и 2, где $\varepsilon = \delta$, причем $N(i, 1)$ можно взять настолько большим, чтобы $C(N(i, 1)) > |\alpha_i|$. Обозначим

$$(\sigma_1)\ Q_1(x) = -\sum_{i=1}^{l} \frac{c_i}{M} (\sigma_i^{(1)})\ Q_{N(i,1)}(x),$$

$$P_1(x) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\alpha_i}{C(N(i, 1))} P_{N(i,1)}(x),$$

$$G_1 = \bigcup_{i=1}^{l} G(N(i, 1)), \quad E_1 = \bigcup_{i=1}^{l} E(N(i, 1)).$$

Предположим, что уже построены полиномы $Q_j(x)$, $P_j(x)$, $1 \leqslant j < m < M$ и множества $\{G_i, E_i\}_{i=1}^{m}$, удовлетворяющие условиям

1') множества G_i, E_i, $i = 1, 2, \cdots, m$ являются объединениями конечного числа интервалов Хаара

$$G_i \cup E_i \subset G_{i-1};\ G_i \cap E_i = \varnothing;\ G_{i-1} \subset \bar{G}_i \cup \bar{E}_i;\ E_i \cap E_j = \varnothing,$$
$$\text{при } i \neq j\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant m,$$

2') $\Omega(Q_j) = \Omega(P_j)$; $j = 1, 2, \cdots, m$; $\Omega(Q_j) \cap \Omega(Q_i) = \varnothing$, при $i \neq j$,

3') $Q_j(x) = -\dfrac{c_i}{M}$, при $x \in G_j \cap \omega_i$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant l$,

4') $(\sigma_j)\ Q_j^*(x) \leqslant \delta$, при $x \in G_j$,

5') $|d_n \chi_n(x)| \leqslant \delta$, при $x \in [0,1]$, $n \in \Omega(P_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. d_n — коэффициент при функции $\chi_n(x)$ в полиноме $P_j(x)$,

6') $Q_j^*(x) = P_j^*(x) = 0$, при $x \in \bar{G}_{j-1} \subset \bar{\Gamma}$,

$$7')\ \sum_{j=1}^{m} P_j(x) = g(x), \text{ при } x \in \bigcup_{j=1}^{m} E_j.$$

Множество G_m можно представить в следующем виде:

$$G_m = \bigcup_{i=1}^{l_m} \omega_i^{(m)}, \quad \omega_i^{(m)} \cap \omega_j^{(m)} = \varnothing, \text{ при } i \neq j,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant l_m,$$

где $\omega_i^{(m)}$, $1 \leqslant i \leqslant l_m$ является интервалом Хаара и такой, что если

$$\omega_i^{(m)} = \left(\frac{q_i}{2^{p_i}},\ \frac{q_i+1}{2^{p_i}}\right) \text{ и } n > 2^{p_i+1}, \text{ то } n \in \bigcup_{l=1}^{i} \Omega(Q_l),$$

$$f(x) = \text{const}, \text{ при } x \in \omega_i^{(m)},$$

$$g(x) = \text{const}, \text{ при } x \in \omega_i^{(m)}.$$

Для интервала $\omega_i^{(m)}$ и числа δ существуют полиномы

$$(\sigma_i^{(m+1)})\, Q_{N(i,\, m+1)}(x),\quad P_{N(i,\, m+1)}(x)$$

и множества $G_{N(i,\, m+1)}$, $E_{N(i,\, m+1)}$, удовлетворяющие условиям лемм 1 и 2, причем $N(i,\, m+1)$ можно взять настолько большим, чтобы

$$P_{N(i,\, m+1)}(x) > \max_{0<t<1} |g(t)| + \max_{0<t<1} \sum_{j=1}^{m} |P_j(t)|, \text{ при } x \in E_{N(i,\, m+1)}.$$

Выберем из каждого множества $\omega_i^{(m)} \cap E_{N(i,\, m+1)}$ некоторую точку x_i и обозначим

$$\left.\begin{aligned}
(\sigma_{m+1})\, Q_{m+1}(x) &= -\sum_{i=1}^{l_m} (\sigma_i^{(m+1)})\, Q_{N(i,\, m+1)}(x)\, \frac{f(x_i)}{M} \\
P_{m+1}(x) &= \sum_{i=1}^{l_m} \frac{g(x_i) - \sum\limits_{j=1}^{m} P_j(x_i)}{P_{N(i,\, m+1)}(x_i)}\, P_{N(i,\, m+1)}(x) \\
G_{m+1} &= \bigcup_{i=1}^{l_m} G_{N(i,\, m+1)},\quad E_{m+1} = \bigcup_{i=1}^{l_m} E_{N(i,\, m+1)}
\end{aligned}\right| . \tag{4.1}$$

Используя условия лемм 1 и 2, определения числа M и интервалов $\omega_i^{(m)}$, из (4.1) легко получить, что полиномы $(\sigma_i)\, Q_i(x)$, $P_i(x)$ и множества G_i, E_i удовлетворяют условиям 1') — 7') при $1 \leqslant i \leqslant m+1$.

Предположим, что указанным способом построены полиномы $(\sigma_i)\, Q_i(x)$, $P_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant M$ и множества G_i, E_i, $1 \leqslant i \leqslant M$, удовлетворяющие условиям 1')—7').

Обозначим

$$(\sigma)\, Q(x) = \sum_{i=1}^{M} (\sigma_i)\, Q_i(x),\quad P(x) = \sum_{i=1}^{M} P_i(x), \tag{4.2}$$

$$G = \bigcap_{i=1}^{M} G_i = G_M, \quad E = \bigcup_{i=1}^{M} E_i .$$

Отсюда и из 1′) — 7′) легко показать, что полиномы и множества в (4.2) удовлетворяют условиям предложения 8.

Пусть $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность монотонно убывающих положительных чисел, такая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i < 1$.

Пусть $f(x) = \chi_1(x)$, $\delta = \delta_1$, $g(x) = \chi_1(x)$, $\Gamma = (0, 1)$, тогда существуют полиномы

$$(\sigma)\, Q(x) = \sum_{i=1}^{M} (\sigma_i)\, Q_i(x), \quad P(x) = \sum_{i=1}^{M} P_i(x)$$

и множества G и E, удовлетворяющие условиям предложения 8. Обозначим

$$\left.\begin{array}{l} (\sigma_i)\, Q_i(x) = (\sigma_i^{(1)})\, Q_i^{(1)}(x), \; P_i(x) = P_i^{(1)}(x), \; P(x) = P_1(x) \\ (\sigma)\, Q(x) = (\sigma_1)\, Q_1(x), \; M = M_1, \; G = G_1, \; E = E_1 \end{array}\right\}, \tag{4.3}$$

$$(\sigma_1)\, R_1(x) = \chi_1(x) + (\sigma_1)\, Q_1(x). \tag{4.4}$$

Из условий предложения 8 имеем

$$(\sigma_1)\, R_1(x) = 0, \text{ при } x \in G_1,$$

$$(\sigma_1)\, R_1(x) = P_1(x) + (\sigma_1)\, Q_1(x), \text{ при } x \in E_1,$$

$$(\sigma_1)\, R_1^*(x) \leqslant 1 + \delta, \; x \in G_1,$$

$$\Omega(Q_i^{(1)}) = \Omega(P_i^{(1)}), \; \Omega(Q_i^{(1)}) \cap \Omega(Q_j^{(1)}) = \varnothing, \text{ при } i \neq j, \; 1 \leqslant i, \, j \leqslant M_1.$$

Предположим определены полиномы

$$\{(\sigma_i)\, R_i(x)\}_{i=1}^{n}, \; P_n(x) = \sum_{i=1}^{M_n} P_i^{(n)}(x), \; (\sigma_n)\, Q_n(x) = \sum_{i=1}^{M_n} (\sigma_i^{(n)})\, Q_i^{(n)}(x)$$

и множества $\{G_i\}_{i=1}^{n}$, $\{E_i\}_{i=1}^{n}$, обладающие свойствами

а) каждое из множеств G_i, E_i, $i=1, 2, \cdots, n$ можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся интервалов Хаара,

б) $\overline{G}_1 \cup \overline{E}_1 = [0,1]$, $G_i \cap E_i = \varnothing$, при $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$G_i \cup E_i \subset G_{i-1}, \; \overline{G}_i \cup \overline{E}_i \supset G_{i-1}, \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n,$$

в) $(\sigma_i)\, R_i^*(x) = 0$, при $x \in \overline{G}_{i-2}$,

г) $R_i(x) = R_{i+1}(x)$, при $x \in E_i$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$,

$$R_i(x) = 0, \text{ при } x \in G_i, \; i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$R_i^*(x) \leqslant 3\,(\delta_{i-1} + \delta_i), \text{ при } x \in G_i, \; i=1, 2, \cdots, n.$$

д) $(\varepsilon_i^{(n)})\, Q_i^{*(n)}(x) \leqslant \delta_n$, при $x \in G_n$,

е) $|d_m^{(n)} \chi_m(x)| \leqslant \delta_n$, при $x \in [0,1]$, $m \in \Omega(P_n)$, где

$d_m^{(n)}$ — коэффициент при функции $\chi_m(x)$ в полиноме $P_n(x)$,

ж) $\Omega(P_i^{(n)}) = \Omega(Q_i^{(n)})$, $i = 1, 2, \cdots, M_n$,

з) $R_n(x) = (\varepsilon_n)\, Q_n(x) + P_n(x)$, при $x \in E_n$,

и) $\max\{m\colon m \in \Omega(R_n)\} = \max\{m\colon m \in \Omega(Q_n)\}$,

к) $\Omega(R_i) \cap \Omega(R_j) = \varnothing$, при $j \geqslant i+2$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$.

Взяв

$$\left.\begin{array}{l}
\Gamma = G_{i-1}^{(n+1)},\ f(x) = Q_i^{(n)}(x),\ g(x) = Q_n(x) + P_n(x) - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \overline{P}_j^{(n+1)}(x) \\
\delta = \delta_{n+1},\ N = \max\left\{n\colon n \in \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} \Omega(Q_j^{(n+1)})\right\} \\
\quad (\text{при } i = 1 \text{ полагаем } \Gamma = G_n,\ g(x) = Q_n(x) + P_n(x) \\
\qquad N = \max\{n\colon n \in \Omega(Q_n)\}),
\end{array}\right| \tag{4.5}$$

последовательно можно определить множества $\{G_i^{(n+1)}, E_i^{(n+1)}\}_{i=1}^{M_n}$ и полиномы

$$\left.\begin{array}{l}
(\varepsilon_i^{(n+1)})\, \overline{Q}_i^{(n+1)}(x) = \sum\limits_{j=1}^{M_i^{(n+1)}} (\varepsilon_{i,j}^{(n+1)})\, Q_{i,j}^{(n+1)}(x),\ i = 1, 2, \cdots, M_n \\
\overline{P}_i^{(n+1)}(x) = \sum\limits_{j=1}^{M_i^{(n+1)}} P_{i,j}^{(n+1)}(x),\ i = 1, 2, \cdots, M_n
\end{array}\right|, \tag{4.6}$$

удовлетворяющие всем условиям предложения 8.

Пусть

$$\Omega(P_n) = \{m_1, m_2, \cdots, m_r\}$$

и d_{m_i} $(i = 1, 2, \cdots, r)$ — коэффициент при функции $\chi_{m_i}(x)$ в полиноме $P_n(x)$. Положив

$$\Gamma = G_{M_n}^{(n+1)},\ f(x) = d_{m_1}\chi_{m_1}(x),\ \delta = \delta_{n+1},\ N = \max\left\{n\colon n \in \bigcup_{i=1}^{M_n} \Omega(P_i^{(n+1)})\right\}, \tag{4.7}$$

$$g(x) = Q_n(x) + P_n(x) - \sum_{i=1}^{M_n} P_i^{(n+1)}(x),$$

можно указать множества $G_{m_1}^{'(n+1)}$, $E_{m_1}^{'(n+1)}$ и полиномы

$$\left.\begin{aligned}(\sigma'^{(n+1)}_{m_1})\, Q'^{(n+1)}_{m_1}(x) &= \sum_{i=1}^{M'_{m_1}} (\sigma'^{(n+1)}_{m_1,i})\, Q'^{(n+1)}_{m_1,i}(x)\\ P'^{(n+1)}_{m_1}(x) &= \sum_{i=1}^{M'_{m_1}} P'^{(n+1)}_{m_1,i}(x)\end{aligned}\right\}, \tag{4.8}$$

удовлетворяющие всем условиям предложения 8.

Предположим, что уже построены множества $\{G'^{(n+1)}_{m_j},\ E'^{(n+1)}_{m_j}\}_{j=1}^{l}$ и полиномы

$$\left.\begin{aligned}(\sigma'^{(n+1)}_{m_j})\, Q'^{(n+1)}_{m_j}(x) &= \sum_{i=1}^{M_{m_j}} (\sigma'^{(n+1)}_{m_j,i})\, Q'^{(n+1)}_{m_j,i}(x)\\ &\qquad\qquad j=1,2,\cdots,l\\ P_{m_j}(x) &= \sum_{i=1}^{M'_{m_j}} P'^{(n+1)}_{m_j,i}(x)\end{aligned}\right\}. \tag{4.9}$$

Взяв

$$\Gamma = G'^{(n+1)}_{m_l},\ f(x) = d_{m_{l+1}}\chi_{m_{l+1}}(x),\ \delta = \delta_{n+1},$$

$$g(x) = Q_n(x) + P_n(x) - \sum_{i=1}^{M_n} P_i^{(n+1)}(x) - \sum_{j=1}^{l} P'^{(n+1)}_{m_j}(x), \tag{4.10}$$

$$N = \max\{n:\ n \in \Omega(P'^{(n+1)}_{m_l}(x))\},$$

согласно предложению 8 существуют множества $G'^{(n+1)}_{m_{l+1}}$, $E'^{(n+1)}_{m_{l+1}}$ и полиномы

$$(\sigma'^{(n+1)}_{m_{l+1}})\, Q'^{(n+1)}_{m_{l+1}}(x) = \sum_{i=1}^{M_{m_{l+1}}} (\sigma'^{(n+1)}_{m_{l+1}})\, Q'^{(n+1)}_{m_{l+1}}(x),$$

$$P'^{(n+1)}_{m_{l+1}}(x) = \sum_{i=1}^{M_{m_{l+1}}} P'^{(n+1)}_{m_{l+1}}(x), \tag{4.11}$$

удовлетворяющие условиям предложения 8.

Пусть указанным способом для каждой функции $d_{m_j}\chi_{m_j}(x)$, $j = 1, 2, \cdots, r$, построены множества $G'^{(n+1)}_{m_j}$, $E'^{(n+1)}_{m_j}$ и полиномы $P'^{(n+1)}_{m_j}(x)$, $Q'^{(n+1)}_{m_j}(x)$. Далее, пусть

$$(\sigma_n)\, Q_i^{(n)}(x) = \sum_{m\in(\sigma_i^{(n)})\,\Omega(Q_i^{(n)})} a_m \chi_m(x),\quad P_i^{(n)}(x) = \sum_{m\in\Omega(P_i^{(n)})} d_m \chi_m(x). \tag{4.12}$$

Учитывая равенство $\Omega(Q_i^{(n)}) = \Omega(P_i^{(n)})$, обозначим

$$(\sigma_{n+1})\, R_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{M_n} \Big\{ \sum_{m \in (\sigma_i^{(n)}) \cup (Q_i^{(n)})} [(a_m + d_m)\, \chi_m(x) + (\sigma_m'^{(n+1)})\, Q_m'^{(n+1)}(x)] + (\sigma_i^{(n+1)}) \overline{Q}_i^{(n+1)}(x) \Big\}, \tag{4.13}$$

$$\left.\begin{aligned} G_{n+1} &= \bigcap_{i=1}^{M_n} G_i^{(n+1)} \cap \bigcap_{i=1}^{r} G_{m_i}'^{(n+1)} = G_{m_r}'^{(n+1)} \\ E_{n+1} &= \bigcup_{i=1}^{M_n} E_i^{(n+1)} \cup \bigcup_{i=1}^{r} E_{m_i}'^{(n+1)} \end{aligned}\right\}. \tag{4.14}$$

Пусть

$$\{(\sigma_i^{(n+1)})\, Q_i^{(n+1)}(x)\}_{i=1}^{M_{n+1}}, \text{ где } M_{n+1} = \sum_{i=1}^{M_n} M_i^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{r} M'_{m_k} \tag{4.15}$$

есть некоторая нумерация следующего множества полиномов:

$$\{(\sigma_{i,j}^{(n+1)})\, \overline{Q}_{i,j}^{(n+1)}(x)\};\ (\sigma_{m_k,l}'^{(n+1)})\, Q_{m_k,l}'^{(n+1)}(x);\ 1 \leqslant i \leqslant M_n;\ 1 \leqslant j \leqslant M_i^{(n+1)},$$

$$k = 1, 2, \cdots, r;\ l = 1, 2, \cdots, M'_k\}. \tag{4.16}$$

Далее, пусть

$$\{P_i^{(n+1)}(x)\}_{i=1}^{M_{n+1}} \tag{4.17}$$

будет нумерацией множества

$$\{\overline{P}_{i,j}^{(n+1)}(x);\quad P_{m_k,l}'^{(n+1)}(x),\ 1 \leqslant i \leqslant M_n;\ 1 \leqslant j \leqslant M_i^{(n+1)}, 1 \leqslant k \leqslant r, 1 \leqslant l \leqslant M'_k\} \tag{4.18}$$

такой, что при фиксированном i, j (или k, l) полиномы

$$(\sigma_{i,j}^{(n+1)})\, \overline{Q}_{i,j}^{(n+1)} \text{ и } \overline{P}_{i,j}^{(n+1)}(x) \text{ (или } (\sigma_{m_k,l}'^{(n+1)})\, Q_{m_k,l}'^{(n+1)}(x),\quad P'_{m_k,l}(x))$$

в (4.15) и (4.17) имеют одинаковые номера.

Положим

$$(\sigma_{n+1})\, Q_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{M_{n+1}} (\sigma_i^{(n+1)})\, Q_i^{(n+1)}(x);\ P_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{M_n} P_i^{(n+1)}(x). \tag{4.19}$$

Используя условия 2), 3) предложения 8 из д), е) и из (4.7)—(4.12), а также из определения полиномов $(\sigma_i^{(n+1)})\, Q_i^{(n+1)}(x)$, легко получить, что

$$(\sigma_{n+1})\, R_{n+1}(x) = 0, \text{ при } x \in G_{n+1},$$

$$(\sigma_{n+1})\, R^*_{n+1}(x) \leqslant 3(\delta_n + \delta_{n+1}), \text{ при } x \in G_{n+1}.$$

Ясно, что

$$(\sigma_{n+1})\, R_{n+1}(x) = (\sigma_n)\, Q_n(x) + P_n(x) + Q_{n+1}(x), \text{ при } x \in [0,1]. \tag{4.20}$$

Так как $Q_{n+1}(x)=0$, при $x \overline{\in} G_n$, то из з)

$$(\varepsilon_{n+1})\, R_{n+1}(x) = (\varepsilon_n)\, R_n(x), \text{ при } x \in E_n.$$

Докажем, что

$$(\varepsilon_{n+1})\, R_{n+1}(x) = (\varepsilon_{n+1})\, Q_{n+1}(x) + P_{n+1}(x), \text{ при } x \in E_{n+1}.$$

Из (4.20) следует, что достаточно установить следующее равенство:

$$(\varepsilon_n)\, Q_n(x) + P_n(x) = P_{n+1}(x), \text{ при } x \in E_{n+1}. \tag{4.21}$$

Рассмотрим множество $E_{i_0}^{(n+1)}$, $1 \leqslant i_0 \leqslant M_n$. Так как

$$G_{i_0}^{(n+1)} \cap E_{i_0}^{(n+1)} = \varnothing,\ G_{i_0}^{(n+1)} \supset G_i^{(n+1)} \supset G_{m_k}^{(n+1)}, \text{ при } i_0 < i \leqslant M_n,\ 1 \leqslant k \leqslant r,$$

то из определения множества Γ, используя условия 7) и 5) предложения 8, при $x \in E_{i_0}^{(n+1)}$ имеем

$$P_{n+1}(x) = \sum_{l=1}^{i_0} P_l^{(n+1)}(x) = P_{i_0}^{(n+1)}(x) + \sum_{i=1}^{i_0-1} P_i^{(n+1)}(x) =$$

$$= (\varepsilon_n)\, Q_n(x) + P_n(x) - \sum_{l=1}^{i_0-1} P_l^{(n+1)}(x) + \sum_{i=1}^{i_0-1} P_i^{(n+1)}(x) =$$

$$= (\varepsilon_n)\, Q_n(x) + P_n(x).$$

Тем же способом легко установить равенство (4.21) при $x \in E_{m_{i_0}}^{(n+1)}$.
Из определения числа N в (4.5), (4.7) (4.10) следует

$$\left.\begin{aligned} &\max\{m\colon m \in \Omega(R_{n+1})\} = \max\{m\colon m \in \Omega(Q_{n+1})\} \\ \text{и}\quad &\min\{m\colon m \in \Omega(Q_{n+1})\} > \max\{m\colon m \in \Omega(R_n)\} \end{aligned}\right\}. \tag{4.22}$$

Если теперь тем же путем определим полином $R_{n+2}(x)$, то из (4.22) получим

$$\Omega(R_n) \cap \Omega(R_{n+2}) = \varnothing.$$

Условия а), б), в), д), ж) при $1 \leqslant i \leqslant n+1$ легко проверить. Предположим, что указанным путем построены множества $\{G_i, E_i\}_{i=1}^{\infty}$ и полиномы $\{(\varepsilon_n)\, R_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, для которых имеют место условия а), б), в), г), к). Положим

$$L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_{2k})\, R_{2k}(x);\ T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon_{2k+1})\, R_{2k+1}(x), \tag{4.23}$$

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,\ E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Из условий б), в), г) следует равномерная сходимость к нулю на G обоих рядов в (4.23), откуда $L(x) = T(x) = 0$, при $x \in G$. Рассмотрим множество E_{n_0}, $n_0 \geqslant 1$. Из условия б) имеем

$$E_{n_0} \subset G_{n_0-1} \subset G_{n_0-2} \subset \cdots \subset G_0,\ E_{n_0} \cap G_i = \varnothing, \text{ при } i \geqslant n_0.$$

Из в) и г) следует

$$(\sigma_i)\, R_i(x)=0, \text{ при } i \leqslant n_0,\ x \in E_{n_0},$$

$$(\sigma_i)\, R_i^*(x)=0, \text{ при } i > n_0+2,\ x \in E_{n_0} \subset \bar{G}_{n_0},$$

$$(\sigma_{n_0})\, R_{n_0}(x)=(\sigma_{n_0+1})\, R_{n_0+1}(x), \text{ при } x \in E_{n_0},$$

откуда вытекает конечность функций $L(x)$ и $T(x)$ на E_{n_0}, а также, что

$$L(x)=T(x), \text{ при } x \in E_{n_0}, \text{ следовательно, и при } x \in E.$$

Остается доказать равенство $L(x)=T(x)$ на множестве $[0,1] \setminus (G \cup E)$. Вначале убедимся, что

$$[0,1] \subset \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{G}_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{E}_n\right), \text{ где } \bar{G}_0=[0,1].$$

Действительно, пусть $x_0 \notin \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \bar{G}_m$, тогда существует наименьшее число m, для которого $x_0 \notin \bar{G}_m$. Отсюда

$$x_0 \in \bar{G}_{m-1} \subset \bar{G}_m \cup \bar{E}_m \Rightarrow x_0 \in \bar{E}_m \Rightarrow x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{E}_n.$$

Пусть $x_0 \notin G \cup E$*. Тогда имеет место одно из следующих трех условий:

I $x_0 \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \bar{G}_n$, $x_0 \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bar{E}_n$,

II $x_0 \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \bar{G}_n$, $x_0 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bar{E}_n$,

III $x_0 \notin \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \bar{G}_n$, $x_0 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bar{E}_n$.

Заметим, что поскольку

$$\chi_n(x_0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \chi_n(x)+\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \chi_n(x)\right], \text{ при } n=1,2,\cdots,$$

то

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_n)\, R_n(x_0) &= \frac{1}{2}\left[\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (\sigma_n)\, R_n(x)+\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} (\sigma_n)\, R_n(x)\right],\ n=1,2,\cdots \\ (\sigma_n)\, R_n^*(x_0) &\leqslant \frac{1}{2}\left[\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (\sigma_n)\, R_n^*(x)+\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} (\sigma_n)\, R_n^*(x)\right] \end{aligned}\right\}. \tag{4.24}$$

---

* Здесь мы предполагаем, что $x_0 \neq 1$ либо 0. В противном случае доказательство можно провести с небольшими изменениями приведенного.

Когда выполняется I, то x_0 является внутренней точкой множества G_n, $n=0, 1, 2, \cdots$. Действительно, при $n=0$ утверждение справедливо. Предположим оно имеет место, при $n=0, 1, \cdots, m$. Тогда x_0 является внутренней точкой множества $\overline{G}_{m+1} \cup \overline{E}_{m+1} = \overline{G}_m$. Учитывая соотношение $x_0 \overline{\in} E_m$, из а) легко получить существование интервалов (α_n, x_0) и (x_0, β_n), для которых имеет место условие

$$\alpha_n < \beta_n,\ (\alpha_n, x_0) \subset G_n,\ (x_0, \beta_n) \subset G_n,\ n=0, 1, 2, \cdots.$$

Отсюда и из г) (4.23), (4.24) будем иметь $T(x_0) = L(x_0) = 0$.

Если имеет место II, то нетрудно убедиться, что существует единственное число m, для которого $x_0 \in \overline{E}_m$. Можно найти интервал $(\alpha, \beta) \subset E_m$, один конец которого совпадает с точкой x_0. Пусть для определенности $x_0 = \alpha$. Тогда из $x_0 \in \overline{G}_n$ следует существование интервала $(\gamma_n, x_0) \subset G_n$. Отсюда и из (4.24) б), в), г) получим

$$L(x_0) = T(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{R_m(x)}{2}.$$

При $x_0 = \beta$ рассуждения можно провести аналогично.

Пусть теперь имеет место III. Пусть $x_0 \in \overline{E}_m$, если x_0 является внутренней точкой множества $\overline{E}_m$, то равенство $T(x_0) = L(X_0)$ следует из г) и из того, что $E_m \cap E_n = \varnothing$ при $m \neq n$. Когда x_0 не является внутренней точкой множества E_m, то существует единственное число n, $n \neq m$, для которого $x_0 \in \overline{E}_n$. Отсюда нетрудно видеть, что $T(x_0) = L(x_0)$.

Тем самым установлено, что ряды в (4.23) всюду сходятся к одной и той же конечной функции.

Если коэффициент при функции $\chi_n(x)$ в полиноме (σ_m) $R_m(x)$ обозначим через $a_n^{(m)}$, то из конструкции нетрудно видеть, что $|a_n^{(m)}| |\chi_n(x)| \leqslant \delta_m + \delta_{n+1}$, откуда $a_n^{(m)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, и тем самым наше утверждение полностью доказано.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 29.V.1978

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ. Հաարի սիստեմով տեղափոխված անդամներով ամենուրեք զուգամետ շարքերի գործակիցների մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում բերվում են Հաարի սիստեմով իրար հետ չհամընկնող շարքերի օրինակներ, որոնց գործակիցները ձգտում են զրոյի և անդամների որոշ, իրարից տարբեր դասավորության դեպքում ամենուրեք զուգամիտում են միևնույն ֆունկցիային։

H. M. MOUSHEGHIAN. *On the coefficients of the series by Haar systems with displaced terms* (summary)

The paper gives an example of a pair of noncoinciding series by Haar systems with coefficients tending to zero and having the property that propper rearrangements of their terms result in the everywhere convergence to the same function.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Известия АН ССР, сер. матем., 28, 1964, 1391—1408.
2. *Ф. Г. Арутюнян.* О рядах по системам Хаара, ДАН Арм.ССР, LVII, № 2, 1973, 65—71.
3. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление измеримых функций всюду сходящимися рядами, Мат. сборник, 90, 4, 1973, 483—500.
4. *М. Б. Петровская.* О нуль-рядах по системе Хаара и о множествах единственности, Известия АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 773—798.
5. *Р. И. Овсепян.* О представлении функций ортогональными рядами, ДАН Арм.ССР LVII, № 1, 1973, 3—7.
6. *Г. М. Мушегян.* Об универсальности рядов относительно перестановок, Известия АН Арм.ССР, „Математика", XII, № 4, 1977, 278—302.
7. *A. Haar.* Yesommelte Arbeiten, Budapest, 1959, 625.
8. *G. Faber.* Über die orthogonal fanktionen des Haar, Jahressricht Deutschen Math 19, 1910, 104—112.
9. *Г. М. Мушегян.* О единственности рядов по перестановленным системам Хаара, Известия АН Арм.ССР, „Математика", V, № 2, 1970, 138—153.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 4 1978 Математика

А. В. БАХШЕЦЯН

О СТРУКТУРЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЦЕНТРИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Данная работа посвящена изучению свойств некоторых центрированных систем (определение см. ниже). Она состоит из двух частей. В 1° рассматриваются центрированные системы, состоящие из непрерывных функций. Во второй части, основываясь на одной теореме Ганди ([1]), устанавливается связь полных центрированных систем с классической системой Хаара.

1°. Пусть $\Phi = \{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — система действительных функций, определенных на E. Через $\mathbf{F}_n(\Phi)$ обозначим минимальную σ-алгебру, содержащую множества $\{x \in E: \Phi_k(x) < \alpha\}$ $(\alpha \in R,\ k=0, 1,\cdots, n)$ (т. е. $\mathbf{F}_n(\Phi)$—минимальная σ-алгебра, по которой измеримы функции Φ_k, $k=0, 1,\cdots, n$).

Для дальнейшего нам понадобится следующее простое

Замечание. *Если для некоторых двух точек x_1 и x_2 $(x_1 \neq x_2)$,*

$$\Phi_k(x_1) = \Phi_k(x_2),\ k=0,\ 1,\cdots,\ n,$$

то любое $\Delta \in \mathbf{F}_n(\Phi)$ либо содержит одновременно обе точки x_1, x_2, либо не содержит ни одну из них.

Действительно, рассмотрим σ-алгебру $\mathbf{F}$ всех подмножеств E одновременно содержащих или не содержащих точки x_1 и x_2. Очевидно функции Φ_k $(k=0, 1,\cdots, n)$ измеримы по $\mathbf{F}$. Следовательно, $\mathbf{F}_n(\Phi) \subset \mathbf{F}$, что доказывает наше утверждение.

Определение. Система $\Phi = \{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *центрированной*, если для любого n и $\Delta \in \mathbf{F}_n(\Phi)$

$$\int\limits_{\Delta} \Phi_{n+1}(x)\,dx = 0.$$

Введем некоторые вспомогательные обозначения. Пусть f определена на $[0,1]$ и $\Delta = [\alpha, \beta) \subset [0,1]$. Обозначим

$$f^+(x;\Delta) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right) & \text{при } x \in \Delta \\ 0 \text{ при } x \in [0,1] \setminus \Delta, \end{cases} \quad f^-(x;\Delta) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-\beta}{\alpha-\beta}\right) & \text{при } x \in \Delta \\ 0 \text{ при } x \in [0,1] \setminus \Delta, \end{cases}$$

$$\widehat{f}(x;\Delta) = |\Delta|\,[f^+(x;\Delta_1) + f^-(x;\Delta_2) - f^+(x;\Delta_3) - f^-(x;\Delta_4)],$$

где

$$\Delta_i = \left[\alpha + \frac{i-1}{4}|\Delta|,\ \alpha + \frac{i}{4}|\Delta|\right),\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Следует заметить, что если $f \in C([0,1])$ и $f(0)=0$, то $\hat{f}(x;\ \Delta)$ непрерывна на $[0,1]$, причем для любого $0 < x < \frac{|\Delta|}{2}$ имеем

$$\hat{f}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - x;\ \Delta\right) = -\hat{f}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + x;\ \Delta\right). \tag{1}$$

Предложение 1. *Существует центрированная система $\Phi = \{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$, состоящая из почти всюду отличных от нуля непрерывных функций.*

Пусть P_0 — канторово совершенное множество меры нуль. Обозначим через Θ непрерывную на $[0,1]$ функцию со следующими свойствами (определения см. в [2], стр. 50, 200):

1. $\Theta(0) = 0,\ \Theta(1) = 1,\ 0 < \Theta(x) < 1$ при $x \in (0,1)$, (2)

2. $\Theta(x)$ постоянна на дополнительных интервалах множества P_0.

Определим систему Φ индуктивно. $\Phi_0(x) = \Theta(x)$. Пусть $\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_n$ уже определены и $\Delta_i^{(n)}$ — интервалы постоянства функции Φ_n. Определим Φ_{n+1} равенством

$$\Phi_{n+1}(x) = \sum_i \hat{\Theta}(x;\ \Delta_i^{(n)}). \tag{3}$$

Так как в силу (2) $\|\hat{\Theta}(x;\ \Delta_i^{(n)})\|_{L} = |\Delta_i^{(n)}|$, то ряд (3) сходится абсолютно и равномерно. Следовательно, Φ_{n+1} непрерывна. Легко видеть, что любое Λ из $\mathbf{F}_n(\Phi)$ можно с точностью до множества меры нуль представить в виде суммы интервалов $\Delta_i^{(n)}$. Но в силу (1)

$$\int_{\Delta_i^{(n)}} \hat{\Theta}(x;\ \Delta_i^{(n)})\, dx = 0. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем

$$\int_{\Lambda} \Phi_{n+1}(x)\, dx = 0 \text{ для любого } \Lambda \in \mathbf{F}_n(\Phi).$$

В классе функций ограниченной вариации этот пример в некотором роде единственный. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\Phi = \{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — центрированная система непрерывных на $[0,1]$ функций и $\Phi_n(x) \neq 0$ почти всюду $(n=1, 2, \cdots)$. Если Φ_1 имеет конечное изменение, то существует множество $E \subset [0,1]$, $|E| = 1$ такое, что $|\Phi_1(E)| = 0$.*

Для доказательства нам понадобится

Теорема Реньи (см. [3]). *Пусть конечная или счетная система $\{f_i\}$ ограниченных функций максимальна на E, т. е. существует множество Z меры нуль такое, что если x_1 и x_2 принадлежат $E \setminus Z$ и $f_n(x_1) = f_n(x_2)$ для любого n, то $x_1 = x_2$. Тогда система произведений*

$$\{f_1^{m_1}\cdot f_2^{m_2},\cdots f_n^{m_n}\}\ (m_k=0,1,\cdots;\ k=1,2,\cdots;\ n=1,2,\cdots)$$

полна в $L^2(E)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $N(y)$ индикатриса Банаха функции Φ_1 (определение см. в [2], стр. 212). Известно (теорема Банаха, см. там же), что $N(y)$ измерима и

$$\int_m^M N(y)\,dy=\bigvee_0^1 \Phi_1, \tag{5}$$

где $m=\min\limits_{x\in[0,1]}\Phi_1(x)$, $M=\max\limits_{x\in[0,1]}\Phi_1(x)$. Более того, из доказательства теоремы Банаха видно, что $N(y)$ измерима по Борелю и следовательно

$$M_k=\Phi_1^{-1}(N^{-1}((0,k]))\in\mathbf{F}_1(\Phi)\ (k=1,2,\cdots). \tag{6}$$

(Из определения функции $N(y)$ следует, что множество M_k состоит из всех точек $t\in[0,1]$, для которых уравнение $\Phi_1(x)=\Phi_1(t)$ имеет не более, чем k корней).

Обозначим через $M_n^{(i)}$ множество тех $x\in[0,1]$, для которых множество $\bigcap\limits_{x\in E\in\mathbf{F}_i(\Phi)} E$ состоит из не более чем n точек. Очевидно $M_k^{(1)}=M_k$.

Зафиксируем произвольное k_0. Пусть e_k—множество нулей функции Φ_k и $e=\bigcup\limits_{k=1}^{k_0} e_k$.

Очевидно

$$e\in\mathbf{F}_k(\Phi)\ \text{и}\ |e|=0. \tag{7}$$

Пусть $P_n^{(i)}=M_n^{(i)}\setminus e$ $(n=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,k_0)$. Из (6) и (7) следует, что

$$P_n^{(1)}\in\mathbf{F}_{k_0}(\Phi)\quad\text{и}\quad |P_n^{(1)}|=|M_n|. \tag{8}$$

Докажем для любых $i<k_0$ и n включение

$$P_n^{(i)}\subset P_{n-1}^{(i+1)}.$$

Допустим противное. Тогда для некоторых n и $i<k_0$ существует $x_0\in P_n^{(i)}\setminus P_{n-1}^{(i+1)}$, т. е. найдутся ровно $n-1$ точек $x_1, x_2,\cdots, x_{n-1}$ таких, что

$$\Phi_j(x_k)=\Phi_j(x_0)\neq 0\ (k=1,\cdots,n-1;\ j=1,\cdots,i+1).$$

(Если для некоторого $x_0\in[0,1]\setminus e$ таких точек меньше, то $x_0\in P_{n-1}^{(i+1)}$, если же больше, то $x_0\,\overline{\in}\,P_n^{(i)}$). Так как $\Phi_{i+1}(x_0)\neq 0$, то существует $\delta>0$ такое, что Φ_{i+1} сохраняет знак на множестве $U=\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}(x_k-\delta, x_k+\delta)$. Далее существует $\varepsilon_0>0$ такое, что

$$V = V(\varepsilon_0) = \bigcap_{k=1}^{i} \Phi_k^{-1}((\Phi_k(x_0) - \varepsilon_0, \Phi_k(x_0) + \varepsilon_0)) \subset U. \tag{9}$$

В противном случае для каждого $\varepsilon = \dfrac{1}{2^m}$ существовала бы точка $y_m \in V\left(\dfrac{1}{2^m}\right) \setminus U$. В силу компактности $[0,1] \setminus U$ можно предположить, что последовательность y_m сходится к некоторому пределу $x = x_n$. Тогда $\Phi_j(x_n) = \Phi_j(x_0)$ для любого $j = 1, 2, \cdots, i$, причем $x_n \overline{\in} U$, т. е. $x_n \neq x_k$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Отсюда получаем, что $x_0 \overline{\in} P_n^{(i)}$, а это противоречит выбору точки x_0.

Из непрерывности Φ_k $(k = 1, 2, \cdots, i)$ получаем, что $|V(\varepsilon_0)| \neq 0$ (учитывая, что $x_0 \in V(\varepsilon_0) \neq \varnothing$) и в силу (9) $\int_V \Phi_{i+1}(x)\,dx \neq 0$. А это противоречит условию центрированности, так как $V \in \mathbf{F}_i(\Phi)$.

Тем самым мы в частности доказали, что

$$P_{k_0} = P_{k_0}^{(1)} \subset P_{k_0-1}^{(2)} \subset \cdots \subset P_1^{(k_0)}. \tag{10}$$

Докажем, что $|P_{k_0}| = 0$. Допустим противное: $|P_{k_0}| = \mu > 0$. Тогда существуют замкнутые множества

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_m \subset \cdots \subset P_{k_0} \tag{11}$$

с $|F_m| > \mu - \dfrac{1}{m}$ $(m = 1, 2, \cdots)$. Пусть $x \in F_m$, тогда в силу (10) и (11) $x \in P_1^{(k_0)}$ и, следовательно, существует $\varepsilon = \varepsilon(x, m) > 0$ такое, что

$$U_{x, m} = \bigcap_{k=1}^{k_0} \Phi_k^{-1}((\Phi_k(x) - \varepsilon, \Phi_k(x) + \varepsilon)) \subset \left(x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}\right). \tag{12}$$

В силу непрерывности Φ_k множества $\{U_{x, m}\}$ образуют открытые покрытия компактов F_m. Выберем конечные покрытия

$$\{U_i = U_{x_i, m}\}_{i=l_{m-1}+1}^{l_m}, \quad m = 1, 2, \cdots; \ 0 = l_0 < l_1 < \cdots.$$

Определим на P_{k_0} систему $\{\chi_i\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\chi_0(x) \equiv 1; \ \chi_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in U_i \cap P_{k_0} \\ 0 \text{ при } x \in P_{k_0} \setminus U_i \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, \cdots).$$

Пусть $F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. Очевидно $|P_{k_0} \setminus F| = 0$.

Покажем, что для любых отличных друг от друга точек α и β из F существует функция χ_{i_0} такая, что

$$\chi_{i_0}(\alpha) \neq \chi_{i_0}(\beta). \tag{13}$$

Пусть

$$|\alpha - \beta| > \frac{2}{m_0}. \tag{14}$$

Так как $\alpha, \beta \in F$, то существует (в силу (11))

$$m_1 > m_0 \tag{15}$$

такое, что $\alpha, \beta \in F_{m_1}$. Возьмем i_0 такое, что $l_{m_1-1} < i_0 \leqslant l_{m_1}$ и $\alpha \in U_{i_0}$. Тогда в силу (12), (14) и (15) $\beta \bar{\in} U_{i_0}$. Отсюда получаем (13).

Система $\{\chi_i\}_{i=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы Реньи. Следовательно, система

$$\Psi = \{\chi_0;\ \chi_{i_1}\cdot\chi_{i_2}\cdot\ldots\cdot\chi_{i_j},\ 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_j,\ j=1, 2, \cdots\}$$

полна в $L^2(P_{l_0})$. Но функция $\chi_{i_1}\cdot\chi_{i_2}\cdot\ldots\cdot\chi_{i_j} = 1$ на множестве $\bigcap_{l=1}^{j} U_{il} \cap P_{k_0}$, которое в силу (8) и (12) принадлежит $\mathbf{F}_{k_0}(\Phi)$. Отсюда в силу центрированности системы Φ получаем, что сужение функции Φ_{k_0+1} на P_{k_0} ортогонально ко всем функциям системы Ψ. Следовательно, $\Phi_{k_0+1}(x) = 0$ почти всюду на P_{k_0}. Получили противоречие, так как по условиям теоремы $\Phi_{k_0+1} \neq 0$ почти всюду. Итак, для любого k $|P_k^{(1)}| = 0$ и следовательно, в силу (8) $|M_k| = 0$.

Покажем, что множество $E = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, $|E|=1$ и $\Phi_1(E) = N^{-1}(\infty)$. Но из (5) следует, что $|N^{-1}(\infty)| = 0$.

Теорема 1 доказана.

Покажем, что в теореме 1 нельзя опустить условие ограниченности вариации Φ_1.

Предложение 2. *Существует центрированная система* $\Psi = \{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *непрерывных и почти всюду на* $[0,1]$ *отличных от нуля функций, причем* $|\{x;\ \Psi_0(x) < t\}| = t$ *для любого* $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Введем некоторые вспомогательные обозначения. Пусть

$$\Delta_{ni} = \left[\frac{i-1}{6^n}, \frac{i}{6^n}\right)\ (n=0, 1, \cdots;\ i=1, 2, \cdots, 6^n).$$

Для любого полуинтервала $\Delta = [\alpha, \beta)$ обозначим:

$$A(\Delta) = \left[\alpha, \alpha + \frac{2}{3}|\Delta|\right),\ B(\Delta) = \left[\alpha + \frac{1}{3}|\Delta|, \beta\right),$$

$$C_1(\Delta) = \left[\beta, \beta + \frac{1}{6}|\Delta|\right),\ C_2(\Delta) = \left[\beta + \frac{1}{4}|\Delta|, \beta + \frac{5}{12}|\Delta|\right),$$

$$D_i(\Delta) = \left[\alpha + \frac{i-1}{4}|\Delta|, \alpha + \frac{i}{4}|\Delta|\right)\ (i=1, 2, 3, 4),$$

$$E_0(\Delta) = \left[\alpha, \alpha + \frac{1}{6}|\Delta|\right) \cup \left[\alpha + \frac{1}{2}|\Delta|, \alpha + \frac{5}{6}|\Delta|\right),\ E_1(\Delta) = \Delta \setminus E_0(\Delta).$$

Далее, обозначим через $N(\Delta)$ последовательность полуинтервалов $\{\Delta^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\Delta^{(1)} = A(\Delta),\ \Delta^{(2m)} = C_1(\Delta^{(m)}),\ \Delta^{(2m+1)} = C_2(\Delta^{(m)})(m=1,\ 2,\cdots).$$

Очевидно

$$\Delta^{(k)} \subset \Delta,\ \Delta^{(k)} \cap \Delta^{(m)} = \varnothing\ (k,\ m=1,\ 2,\cdots;\ k \neq m) \tag{16}$$

и, так как

$$|A(\Delta)| = \frac{2}{3}|\Delta|,\ |C_1(\Delta)| = |C_2(\Delta)| = \frac{1}{6}|\Delta|,$$

то

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta^{(k)}\right| = |\Delta|. \tag{17}$$

Определим индуктивно последовательность ступенчатых функций $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$. Пусть

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in E_0([0,1)) \\ 1 \text{ при } x \in E_1([0,1)) \\ 2 \text{ при } x = 1. \end{cases}$$

Допустим, что функции f_m $(m = 0,1,\cdots,n-1)$ уже определены так, что функция

$$F_{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2^{m+1}} f_m$$

постоянна на полуинтервалах Δ_{ni} $(i = 1,\ 2,\cdots,\ 6^n)$ и имеет скачок, равный $\frac{1}{2^n}$ по крайней мере на одном из концов Δ_{ni}, причем

$$F_{n-1}\left(\frac{i}{6^n}\right) \neq F_{n-1}\left(\frac{i-1}{6^n} - 0\right) (i=2,\ 3,\cdots,\ 6^n).$$

Положим

$$f_n(1) = 0;\ f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in E_{\varepsilon_i}(\Delta_{ni}) \\ 1 \text{ при } x \in E_{1-\varepsilon_i}(\Delta_{ni}), \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,6^n), \tag{18}$$

где $\varepsilon_i = 0$, если $F_{n-1}\left(\frac{i}{6^n}\right) > F_{n-1}\left(\frac{i}{6^n} - 0\right)$ или же

$$F_{n-1}\left(\frac{i}{6^n}\right) = F_{n-1}\left(\frac{i}{6^n} - 0\right) = F_{n-1}\left(\frac{i-1}{6^n}\right) > F_{n-1}\left(\frac{i-1}{6^n} - 0\right)$$

и $\varepsilon_i = 1$ в противном случае.

Легко заметить, что при таком определении функция

$$F_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2^{m+1}} f_m$$

удовлетворяет предположениям индукции.

Пусть

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} f_m(x). \tag{19}$$

Докажем следующие свойства функции F:

1. F — непрерывна;

2. $F(0)=0;\ 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ при $x \in [0,1]$; (20)

3. $|F^{-1}([0,\ t))| = t$ для любого $0 \leqslant t < 1$; (21)

4. $$F(x) = \frac{1}{2}[f_0(x) + F^+(x;\ \Delta_{11}) + F^+(x;\ \Delta_{12}) + F^-(x;\ \Delta_{13}) + F^-(x;\ \Delta_{14}) + F^+(x;\ \Delta_{15}) + F^+(x;\ \Delta_{16})]. \qquad (22)$$

Непрерывность F вытекает из равномерной сходимости ряда (19), если учесть, что колебания функции F_n на $\overline{\Delta}_{ni}$ равны $\frac{1}{2^{n-1}}$. Свойство (20) очевидно.

Возьмем некоторый двоичный полуинтервал

$$\Delta = \left[\frac{i-1}{2^k},\ \frac{i}{2^k}\right) \ (1 \leqslant i \leqslant 2^k). \qquad (23)$$

Пусть $\frac{i-1}{2^k} = \sum_{m=1}^{k} \frac{\delta_m}{2^m}$, где $\delta_m = 0$ или 1. Тогда из (18) следует, что

$$F^{-1}(\Delta) = \{x:\ f_{m-1}(x) = \delta_m;\ m=1,\cdots,\ k\} = \bigcap_{m=1}^{k} \{x:\ f_{m-1}(x) = \delta_m\}.$$

Отсюда и в силу (18) получаем

$$|F^{-1}(\Delta)| = \frac{1}{2^k} = |\Delta|. \qquad (24)$$

Очевидно любой полуинтервал $[0,\ t)$ можно представить в виде суммы непересекающихся полуинтервалов вида (23). Следовательно, учитывая (24), получаем (21).

Далее

$$F(x) - \frac{1}{2}f_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}}\ f_m(x) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}}\ f_{m+1}(x). \qquad (25)$$

Нетрудно заметить, что из определения (18) следует

$$f_{m+1}(x) = \begin{cases} f_m^+(x;\ \Delta_{1i}) & \text{при } x \in \Delta_{1i},\ i=1,\ 2,\ 5,\ 6 \\ f_m^-(x;\ \Delta_{1i}) & \text{при } x \in \Delta_{1i},\ i=3,\ 4 \end{cases}$$

$$(m = 0,\ 1,\cdots),$$

а это вместе с (25) дает (22).

Свойство (22) означает, что для любого $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$

$$F\left(\frac{1}{3} - x\right) = F\left(\frac{1}{3} + x\right) \text{ и } F\left(\frac{2}{3} - x\right) = F\left(\frac{2}{3} + x\right).$$

т. е. функция F на интервалах $A(\Delta_{01})$ и $B(\Delta_{01})$ четна относительно середины этих интервалов. Многократно пользуясь формулой (22) получим, что для любых n, $1 \leqslant i \leqslant 6^n$ и $0 \leqslant x \leqslant \frac{|\Delta_{ni}|}{3}$

$$F(c-x) = F(c+x), \tag{26}$$

где c — середина интервала $A(\Delta_{ni})$.

Определим индуктивно последовательность M_n семейств полуинтервалов:

$$M_1 = N([0,1)); \quad M_n = \bigcup_{\Delta' \in M_{n-1}} \bigcup_{i=1}^{4} \{\Delta: \Delta \in N(D_i(\Delta'))\} \tag{27}$$

$$(n = 2, 3, \cdots).$$

Пусть

$$\Psi_0(x) = F(x); \quad \Psi_n(x) = \sum_{\Delta \in M_n} \overset{*}{F}(x; \Delta) (n = 1, 2, \cdots). \tag{28}$$

Система $\Psi = \{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ будет искомой.

Действительно, так как $\overset{*}{F}(x; \Delta) \in C([0,1])$, $\|\overset{*}{F}(x; \Delta)\|_C = |\Delta|$ и в силу (21) $\overset{*}{F}(x; \Delta) \neq 0$ п. в. на Δ, то из (16), (17) и (27) получаем, что $\Psi_n \in C([0,1])$ и $\Psi_n(x) \neq 0$ п. в. на $[0,1]$.

Докажем, что система Ψ центрирована. В силу (26), (27) и (28) легко заметить, что для любых n, $\Delta \in M_n$ и $0 \leqslant x \leqslant \frac{|\Delta|}{2}$

$$\Psi_k(c-x) = \Psi_k(c+x) \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1), \tag{29}$$

где c—середина интервала Δ.

Пусть $\Lambda \in \mathbf{F}_{n-1}(\Psi)$. Учитывая замечание в начале параграфа из (29) следует, что для любого $\Delta \in M_n$ множество $\Lambda \cap \Delta$ симметрично относительно середины интервала Δ. А отсюда в силу (28) и (1) получаем, что

$$\int_{\Lambda} \Psi_n(x)\, dx = 0 \text{ для любого } \Lambda \in \mathbf{F}_{n-1}(\Psi).$$

Итак, предложение 2 доказано.

Фактически мы доказали, что существует непрерывная функция Ψ_0, равноизмеримая с функцией $y = x$, которую можно дополнить непрерывными функциями до „нетривиальной" центрированной системы. На самом деле верно более общее

Предложение 3. *Для любой непрерывной на* $[0,1]$ *функции* φ *существует центрированная система* $\Psi = \{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$, *почти всюду отличных от нуля непрерывных функций такая, что* Ψ_0 *и* φ *равноизмеримы.*

Доказательство по существу то же самое. Нужно лишь подходящим образом изменить определения полуинтервалов Δ_{ni} и множеств $E_0(\Delta_{ni})$, $E_1(\Delta_{ni})$.

2°. Для каждой системы множеств $T=\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($T_n\subset[0,1]$, $|T_n|>0$, $n=1, 2,\cdots$), удовлетворяющих условиям:

$$1)\ |T_1|=1;\ 2)\ T_{2n}\cup T_{2n+1}=T_n;\ 3)\ T_{2n}\cap T_{2n+1}=\varnothing \quad (n=1, 2,\cdots) \tag{30}$$

определим ортонормированную на [0,1] систему $\chi_T=\{\chi_n(t;\ T)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\chi_0(t;\ T)\equiv 1;\ \chi_n(t;\ T)=\begin{cases}\left(\frac{|T_{2n+1}|}{|T_n|\,|T_{2n}|}\right)^{1/2} & \text{при } t\in T_{2n}\\ -\left(\frac{|T_{2n}|}{|T_n|\,|T_{2n+1}|}\right)^{1/2} & \text{при } t\in T_{2n+1}\\ 0 \text{ при } t\in[0,1]\setminus T_n\end{cases} \tag{31}$$

$$(n=1, 2,\cdots).$$

Для полных центрированных систем известна теорема Ганди, которую мы приводим в удобной для нас формулировке.

Теорема (Ганди, см. [1]). *Пусть* $\Phi=\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *полная в* $L^2([0,1])$, *нормированная, центрированная система. Тогда существует система множеств* T, *удовлетворяющая условиям* (30) *такая, что*

$$\Phi_n(t)=\chi_n(x;\ T) \text{ п. в. на } [0,1]\ (n=1,\ 2,\cdots).$$

Определение. Систему χ_T, определенную в (31), назовем *системой типа Хаара*, если система T состоит из полуинтервалов, причем $\lim\limits_{n\to\infty}|T_n|=0$*).

Определение. Системы $\Phi=\{\varphi_n\}$ и $\Psi=\{\psi_n\}$, определенные на [0,1], называются *изоморфными*, если существуют множество $F\subset[0,1]$, $|F|=1$ и взаимно-однозначное отображение α_0 из E в [0,1] такое, что

а) для любого измеримого $E\subset F$ образ $\alpha_0(E)$ также измерим и $|\alpha_0(E)|=|E|$, (32)

б) для любого измеримого $E\subset[0,1]$ прообраз $\alpha_0^{-1}(E)$ также измерим и $|\alpha_0^{-1}(E)|=|E|$, (33)

в) для любого n и $x\in F$ $\varphi_n(x)=\psi_n(\alpha_0(x))$. (34)

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (31) *была полна в* $L^2[0,1]$) *необходимо и достаточно, чтобы она была изоморфна некоторой системе типа Хаара.*

Вместе с теоремой Ганди отсюда вытекает

---

* Очевидно, классическая система Хаара является *системой типа Хаара* (в смысле равенства почти всюду).

Теорема 3. *Полная в $L^2([0,1])$ нормированная, центрированная система есть системи типа Хаара.*

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть система $S=\{f_n\}$ полна в $L^2([0,1])$. Тогда для любого измеримого $E\subset[0,1]$ существует множество $E_S\in\mathbf{F}(S)$ такое, что $|E\Delta E_S|=0$* (Здесь $\mathbf{F}(S)$ — σ-алгебра, порожденная системой S, т. е. минимальная σ-алгебра, по которой измеримы все функции системы S).

Доказательство леммы. Возьмем произвольное $E\subset[0,1]$ и обозначим через f_E характеристическую функцию множества E. Так как S полна в L^2, то существует последовательность многочленов по системе S, сходящихся к f_E по норме L^2. Следовательно, некоторая последовательность $\{p_n\}$ многочленов по S сходится к f_E почти всюду. Обозначим через E_S множество тех точек, где $\lim p_n(x)>\frac{1}{2}$.

Очевидно $|E\Delta E_S|=0$ и, как легко проверить

$$E_S=\bigcup_{m,k=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x:\,p_n(x)>\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right\}.$$

Отсюда вытекает, что $E_S\in\mathbf{F}(S)$.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть система (31) полна в L^2. Тогда по доказанной лемме для каждого интервала $U_{p,q}=(p,q)\subset[0,1]$ с рациональными концами существует

$$E_{p,q}\in\mathbf{F}(\chi_T) \tag{35}$$

такое, что мера $e_{p,q}=E_{p,q}\Delta U_{p,q}$ равна нулю*). Пусть $E_0=\bigcup\limits_{p,q}e_{p,q}$, $\widetilde{T}_n=T_n\setminus E_0$. Из полноты χ_T вытекает, что $\lim|\widetilde{T}_n|=0$. В противном случае существовали бы $\varepsilon_0>0$ и вложенные множества $\{\widetilde{T}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что $|\widetilde{T}_{n_k}|>\varepsilon_0$ для любого k. Но тогда мера множества $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{T}_{n_k}$ не меньше ε_0 и все функции системы χ_T постоянны на нем. Это противоречит полноте χ_T.

Пусть система полуинтервалов $\Delta=\{\Delta_n=[a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условием (30) и кроме того для любого n

$$|\Delta_n|=|T_n|=|\widetilde{T}_n|.$$

Определим отображение α: $\widetilde{T}_1\to[0,1]$: пусть

$$\widetilde{T}_1\supset\widetilde{T}_{n_1}\supset\widetilde{T}_{n_2}\supset\cdots\quad\text{и}\quad t\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\widetilde{T}_{n_k},$$

* Заметим, что $\mathbf{F}(\chi_T)$ есть σ-алгебра, порожденная системой T.

тогда

$$x = \alpha(t) = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}.$$

Очевидно для любого n

$$\alpha(\tilde{T}_n) \subset \bar{\Delta}_n. \tag{36}$$

Для отображения α выполняется условие (33).

Доказательство этого утверждения дано в работе [4] (лемма). Пусть R — множество, состоящее из точек $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(a_0=1)$, т. е. множество концов $\{\Delta_n\}$. (Заметим, что если $b_n \neq 1$, то $b_n = a_{n+1}$). В силу (33) мера $Q = \alpha^{-1}(R)$ равна нулю. Обозначим для любого n

$$H_n = \tilde{T}_n \setminus Q \tag{37}$$

и рассмотрим сужение α_0 отображения α на множество H_1. Очевидно для α_0 также выполняется (33).

Легко проверить, что и для системы $H = \{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняются условия (30). Далее из (36) и (37) имеем

$$\alpha_0(H_n) \subset \Delta_n \tag{38}$$

для любого n.

Докажем, что отображение α_0 взаимно-однозначно. Пусть

$$t_1,\ t_2 \in H_1 = T_1 \setminus (E_0 \cup Q) \text{ и } t_1 \neq t_2. \tag{39}$$

Тогда существует интервал $U_{p,q}$ с рациональными концами такой, что

$$t_1 \in U_{p,q} \text{ и } t_2 \bar{\in} U_{p,q}. \tag{40}$$

Обозначим

$$E_{p,q} \setminus (E_0 \cup Q) = E'_{p,q}. \tag{41}$$

В силу определения E_0 имеем

$$U_{p,q} \setminus (E_0 \cup Q) = E'_{p,q} \subset U_{p,q}. \tag{42}$$

Из (40), (39) и (42) получаем

$$t_1 \in E'_{p,q} \text{ и } t_2 \bar{\in} E'_{p,q}.$$

Отсюда в силу (41) и (39)

$$t_1 \in E_{p,q} \text{ и } t_2 \bar{\in} E_{p,q}.$$

Учитывая замечание в начале первого параграфа, получаем, что существует T_{n_0} такое, что

$$t_1 \in T_{n_0} \text{ и } t_2 \bar{\in} T_{n_0}$$

Отсюда в силу (37)

$$t_1 \in H_{n_0} \text{ и } t_2 \bar{\in} H_{n_0},$$

а это в силу (38) означает, что

$$\alpha_0(t_1) \in \Delta_{n_0} \text{ и } \alpha_0(t_2) \bar{\in} \Delta_{n_0}, \text{ т. е. } \alpha_0(t_1) \neq \alpha_0(t_2).$$

Итак, мы получили, что α_0 взаимно-однозначно на H_1. Теперь докажем, что для α_0 и любого множества H_n выполняется (32).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и k. Определим последовательность вложенных замкнутых множеств $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Пусть S_k — произвольное замкнутое множество из H_k с $|S_k| > |H_k| - \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем $P_1 = S_k$. Допустим, что множества P_i ($i = 1, 2, \cdots, m-1$) уже определены.

Рассмотрим те множества $H_i \cap P_{m-1}$ ($k\,2^{m-1} \leqslant i < (k+1)\,2^{m-1}$), которые имеют положительную меру. В каждом из них возьмем замкнутое множество S_i так, чтобы

$$\Big|\bigcup_{i\in J_m} S_i\Big| > |P_m| - \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}, \tag{43}$$

где

$$J_m = \{i\colon\ k2^{m-1} \leqslant i < (k+1)\,2^{m-1};\ |H_i \cap P_{m-1}| > 0\}.$$

Положим

$$P_m = \bigcup_{i\in J_m} S_i. \tag{44}$$

В силу (43)

$$\Big|\bigcap_{m=1}^{\infty} P_m\Big| \geqslant |H_k| - \varepsilon. \tag{45}$$

Для любого $m \geqslant 1$ обозначим

$$H^m = \bigcup_{i\in J_m} H_i. \tag{46}$$

Из определения множеств P_m следует, что

$$H_k = H^1 \supset H^2 \supset \cdots. \tag{47}$$

Далее, так как $P_m \subset H^m$ ($m = 1, 2, \cdots$), то из (45) и (47) получаем

$$\Big|\bigcap_{m=1}^{\infty} H^m\Big| \geqslant |H_k| - \varepsilon. \tag{48}$$

Аналогично обозначим

$$\Delta^m = \bigcup_{i\in J_m} \Delta_i. \tag{46'}$$

Из (47) и (48) получаем

$$\Delta_k = \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \cdots \tag{47'}$$

и

$$\Big|\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^m\Big| \geqslant |\Delta_k| - \varepsilon. \tag{48'}$$

Покажем, что

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^m \subset \alpha_0(H_k), \tag{49}$$

Пусть $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^m$, тогда существует последовательность $\{n_m\}$ такая, что для любого m

$$n_m \in J_m, \ \Delta_{n_m} \supset \Delta_{n_{m+1}} \tag{50}$$

и

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{n_m}. \tag{51}$$

Отсюда имеем, что и

$$H_{n_m} \supset H_{n_{m+1}} \ (m = 1, 2, \cdots). \tag{50'}$$

Далее из определения $S_{n_{m+1}}$ в силу (50'), (44) и (50) получаем для любого m

$$S_{n_{m+1}} \subset H_{n_{m+1}} \cap P_m \subset H_{n_m} \cap P_m = S_{n_m}.$$

(Здесь нужно учесть, что если $i, j \in J_m$, то $H_i \cap H_j = \varnothing$). Учитывая замкнутость S_{n_m}, отсюда получаем, что множество

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} H_{n_m} \supset \bigcap_{m=1}^{\infty} S_{n_m}$$

не пусто. Пусть $t \in \bigcap_{m=1}^{\infty} H_{n_m}$. В силу (38) и (51) имеем $\alpha_0(t) = x$, а это означает, что выполняется (49). Но (49) вместе с (51) доказывает утверждение (32) для множеств системы H.

Отсюда, учитывая взаимно-однозначность α_0 мы получаем, что и для любого множества из σ-алгебры $\mathbf{F}(H)$, порожденной системой H, выполняется условие (32). Пусть теперь E — измеримое множество из H_1. Проверим условие (32) для множества E. Очевидно для любого интервала $U \subset [0,1]$ существует множество $U_H \in \mathbf{F}(H)$ такое, что $|U \Delta U_H| = 0$. (Для этого достаточно в лемме вместо системы χ_T взять χ_H). А отсюда легко вывести, что множество $\alpha_0(E)$ измеримо. Но это, учитывая взаимно-однозначность α_0, вместе с (33) дает

$$|\alpha_0(E)| = |E|.$$

Итак, мы получили, что системе χ_T изоморфна системе χ_Δ. (Условие (34) очевидно выполняется).

Достаточность. Пусть система χ_T изоморфна *системе типа Хаара* $\chi_\Delta = \{\chi_n(x; \Delta)\}_{n=0}^{\infty}$. Пусть далее $t_1 \neq t_2$ и $t_1, t_2 \in F$ (F — область определения отображения α_0). Отсюда вытекает, что $\alpha_0(t_1) \neq \alpha_0(t_2)$ и, так как в силу определения χ_Δ $\lim |\Delta_n| = 0$, то существует $\chi_{n_0}(x; \Delta)$, которая принимает в точках $\alpha_0(t_1)$ и $\alpha_0(t_2)$ разные значения. В силу (34) то же верно и для $\chi_{n_0}(t; T)$, т. е.

$$\chi_{n_0}(t_1; T) \neq \chi_{n_0}(t_2; T).$$

Мы получили, что система χ_T удовлетворяет условиям теоремы Реньи. Но как легко заметить, любая функция вида

$$\chi_{n_1}(t;\ T)\cdot\chi_{n_2}(t;\ T)\cdots\chi_{n_k}(t;\ T)\ (0\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_k$$

есть конечная линейная комбинация функций системы χ_T. Следовательно, χ_T полна в $L^2([0,1])$.

Теорема 2 полностью доказана.

В заключение автор выражает благодарность Р. И. Овсепяну и А. А. Талаляну за постановку задач.

Ереванский государственный университет

Поступила 30.V.1978

Ա. Վ. ԲԱԽՇԵՑՅԱՆ. Կենտրոնացված սիստեմների որոշ դասերի կառուցվածքի մասին (*ամփոփում*)

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած կենտրոնացված սիստեմների կառուցվածքը [1] և ցույց է տրվում, որ լրիվ կենտրոնացված սիստեմները իզոմորֆ են Հաարի տիպի սիստեմներին։

A. V. BAKHSHETZIAN. *On the structure of some classes of centered systems* (summary)

The paper investigates centered systems consisting of continuous functions. It is shown that complete centered systems are isomorph to the Haar system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. F. Gundy*. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, Trans. Am. Math. Soc., 124, 1966, 228—248.
2. *И. П. Натансон*. Теория функций вещественной переменной, Изд. „Наука", 1974.
3. *A. Renyi*. On a conjecture of H. Steinhaus. Ann. Soc. math. Polonaise, 25, 1952, 279—287.
4. *А. В. Бахшецян*. О некотором обобщении систем Радемахера и Уолша. Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., X, № 1, 1975, 85—91.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 4, 1978 Математика

К. С. КАЗАРЯН

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ДОПОЛНЕНИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ

Система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется мультипликативно дополняемой в пространстве L^2, если существует измеримая функция $M(x)$ такая, что система $\{M(x) f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в L^2.

В 1948 г. Р. Боас и Г. Поллард [1] доказали, что любая ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ортогональное дополнение которой конечномерно, является мультипликативно дополняемой в L^2.

В дальнейшем Дж. Прайс и Р. Зинк [2] дали полное описание класса мультипликативно дополняемых систем, —оказалось, что это свойство системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентно тому, чтобы система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была замкнутой в пространстве S всех конечных измеримых функций. В работах [3], [4] А. А. Талаляна было установлено, что если система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута в пространстве S, то этим же свойством обладают все системы вида $\{f_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$, N—любое натуральное число, и некоторые системы $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, полученные из системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удалением бесконечного числа функций. Отсюда и из результата [2] непосредственно следует теорема Р. Боаса и Г. Полларда, и более того, получается, что если система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ мультипликативно дополняема, то она остается таковой и после удаления из нее произвольного конечного числа функций, причем это свойство можно сохранить также при удалении некоторых бесконечных подсистем.

Методы, использованные в работах [1], [2], не позволяют выяснить можно ли путем умножения неполных мультипликативно дополняемых систем на некоторую функцию получить базисы в L^2 или хотя бы системы представления пространства L^2 (т. е. получить такую систему $\{M(x) f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, чтобы для любой функции $f \in L^2$ существовал ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n M(x) f_n(x)$, сходящийся к $f(x)$ в метрике L^2).

В 1973 г. Бен-Ами Браун [5], опираясь только на лемму 3 А. А. Талаляна [3] о приближении измеримых функций на „больших“ множествах суммами вида $\sum\limits_{k=N}^{m} a_k \Phi_k(x)$, где однако, коэффициенты a_k, $N \le k \le m$, определяются не единственным образом, доказал, что если $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$—базис пространства L^p, то для любого натурального числа N существует ограниченная функция $M(x)$ такая, что $\{M(x) f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является системой представления пространства L^p.

В работах [6], [7] автора было установлено, что если $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, то для любого N существует ограниченная функция $M(x)$ такая, что система $\{M(x) \chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является базисом в пространстве $L^p[0,1]$ для всех $p > 1$. Вместе с тем было доказано также, что некоторые полные ортогональные системы (в частности система Уолша, тригонометрическая система) не обладают указанным свойством системы Хаара. В частности для системы Уолша $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, какова бы ни была измеримая функция $M(x)$ ни одна система $\{M(x) \cdot W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ $(N \geqslant 1)$ не является базисом пространства $L^p[0,1]$, $p > 1$, несмотря на то, что согласно теореме Бен-Ами Брауна среди таких систем существуют системы представления пространств $L^p[0,1]$. Вместе с тем оказывается, что подсистемы Уолша $\{M(x)\ W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ $(N \geqslant 1)$ можно мультипликативно дополнить до замкнутых минимальных систем в $L^p[0,1]$, сопряженные системы которых полны относительно $L^p[0,1]$. В § 3 будут даны необходимые и достаточные условия на $M(x)$, при которых системы $\{M(x)\ W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ $(N \geqslant 1)$ являются замкнутыми минимальными в $L^p[0,1]$ системами, сопряженные системы которых полны относительно $L^p[0,1]$.

§ 1 настоящей статьи посвящен нахождению достаточных условий на замкнутые минимальные системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, при выполнении которых системы $\{f_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ $(N \geqslant 2)$ мультипликативно не дополняемы до базисов в L^p, $p > 1$.

Во втором параграфе доказывается, что найденные условия в известном смысле окончательны [10].

В § 3 рассматриваются системы вида $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, где $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — система, полученная удалением произвольного конечного числа функций из системы Хаара. Найдены необходимые и достаточные условия на функцию $M(x)$, при которых система $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ является замкнутой минимальной в $L^p[0,1]$. Доказывается также, что если система $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ замкнута минимальна в $L^p[0,1]$, то сопряженная ей система функций $\{\psi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ полна относительно $L^p[0,1]$.

В дальнейшем через $|E|$ будем обозначать меру Лебега измеримого множества E, через L^q — сопряженное к L^p, $1 \leqslant p < \infty$, пространство функций, а через $\overline{G}$ — замыкание множества G.

§ 1. О невозможности мультипликативного дополнения до базисов в L^p, $1 \leqslant p < \infty$, некоторых минимальных систем

В этом параграфе сначала доказываются общие теоремы*), где для произвольной замкнутой минимальной в L^p, $1 \leqslant p < \infty$, системы

*) Эти теоремы являются обобщениями теоремы 1 работы [5] и теоремы 1 работы [6].

$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и для любого натурального числа N находятся необходимые и достаточные условия на функцию $M(x)$, при выполнении которых системы вида $\{M(x)\varphi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ снова являются замкнутыми минимальными системами в L^p.

В этих теоремах, в зависимости от свойств системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно предполагать, что функции $M(x)$ принадлежат классу ограниченных функций, классам L^p, $1 \leqslant p < \infty$, или требовать только, чтобы $M(x)\varphi_n(x) \in L^p$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Для всех этих случаев доказательства соответствующих теорем почти совпадают и поэтому мы их приводим одновременно. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *замкнутая минимальная система в* $L^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$, *и* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *сопряженная ей система функций. Пусть, далее,* N — *натуральное число и* $M(x)$ — *ограниченная функция.*

Для того чтобы система $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ *была замкнутой минимальной системой в* $L^p(E)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

Функция

1)
$$[M(x)]^{-1}\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x)$$

принадлежит пространству $L^q(E)$ *тогда и только тогда, когда все* a_n *равны нулю.*

2) *Для каждого* k $(k = N+1, N+2, \cdots)$ *существуют единственные числа* $a_n^{(k)}$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ *такие, что функция*

$$\psi_k(x) = [M(x)]^{-1}\sum_{n=1}^{N} a_n^{(k)}\varphi_n(x) + \varphi_k(x)]$$

принадлежит $L^q(E)$.

Теорема 1'. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *минимальная в* $L^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$, *и полная относительно* $L^1(E)$ *система ограниченных функций. Пусть, далее,* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *сопряженная к* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *система функций,* N-*натуральное число и функция* $M(x) \in L^p(E)$. *Для того чтобы система* $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ *была замкнутой минимальной системой в* L^p, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1) и 2) теоремы 1.*

Теорема 1''. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *минимальна в* $L^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$, *и обладает следующим свойством:*

(C_1)* *из того, что для некоторой измеримой функции* $f(x)$ *функции* $f(x)f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *интегрируемы и* $\int_E f(x)f_n(x)\,dx = 0$ *для всех* n, *следует* $f(x) \equiv 0$.

---

*) Заметим, что здесь функция $f(x)$ может быть неинтегрируемой, например, для случая системы $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, рассматриваемой на отрезке $[0, \pi]$.

Пусть далее, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *сопряженная к* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *системе функций,* N — *натуральное число и функция* $M(x)$ *такая, что* $M(x) f_n(x) \in L^p(E)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. *Для того чтобы система* $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ *была замкнутой минимальной системой в* L^p, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* 1) *и* 2) *теоремы* 1.

Доказательство теорем 1, 1° и $1^{\circ\circ}$. Необходимость. Пусть $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ — замкнутая минимальная система в $L^p(E)$. Если существуют числа a_n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ такие, что функция

$$g(x) = [M(x)]^{-1} \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x)$$

принадлежит пространству $L^q(E)$, то ввиду того, что

$$\int_E g(x) M(x) f_k(x)\, dx = \int_E \left[\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) \right] f_k(x)\, dx = 0$$
$$(k = N+1, N+2, \cdots),$$

и система $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ замкнута в $L^p(E)$ (полна относительно $L^q(E)$) получаем, что $g(x) \equiv 0$. Отсюда вытекает, что $a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$ и, следовательно, в теоремах 1, 1° и $1^{\circ\circ}$ условие 1) выполняется.

Проверим выполнение условия 2). Обозначим через $\{\psi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ систему функций, сопряженную к системе $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$, т. е.

$$\int_E \psi_k(x) M(x) f_n(x)\, dx = \delta_{n,k} \quad (n, k = N+1, N+2, \cdots), \tag{1.1}$$

где $\delta_{n,k}$ — символ Кронекера. Обозначим

$$a_n^{(k)} = \int_E M(x) \psi_k(x) f_n(x)\, dx \quad (1 \leqslant n \leqslant N,\ k = N+1, N+2, \cdots) \tag{1.2}$$

и для каждого k $(k = N+1, N+2, \cdots)$ положим

$$h_k(x) = M(x) \psi_k(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n^{(k)} \varphi_n(x) - \varphi_k(x). \tag{1.3}$$

Из условий (1.1), (1.2) и (1.3) получаем, что

$$\int_E h_k(x) f_n(x)\, dx = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots;\ k = N+1, N+2, \cdots).$$

Отсюда, ввиду того, что в теореме 1 система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $L^p(E)$, в теореме 1° — полна относительно $L^1(E)$, а в теореме $1^{\circ\circ}$ — имеет свойство (C_s), получаем, что $h_k(x) \equiv 0$ $(k = N+1, N+2, \cdots)$.

Следовательно, согласно определению функций $h_k(x)$, будем иметь, что

$$\psi_k(x) = [M(x)]^{-1}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n^{(k)} \varphi_n(x) + \varphi_k(x)\right] \quad (k = N+1,\ N+2, \cdots),$$

т. е. что и требовалось доказать.

Единственность коэффициентов $a_n^{(k)}$ $(n = 1, 2, \cdots, N;\ k = N+1, N+2, \cdots)$ очевидна.

Достаточность. Предположим, что имеют место условия 1) и 2). Если система $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ не является замкнутой в $L^p(E)$, то существует неэквивалентная нулю функция $g(x)$ из пространства $L^q(E)$ такая, что

$$\int_E g(x)\, M(x)\, f_k(x)\, dx = 0 \quad (k = N+1,\ N+2, \cdots).$$

Отсюда получаем, что

$$\int_E \left[g(x)\, M(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x)\right] f_k(x)\, dx = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{1.4}$$

где

$$a_n = \int_E g(x)\, M(x)\, f_n(x)\, dx \quad (1 \leqslant n \leqslant N).$$

Из условия (1.4), в силу соответствующих свойств системы $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в теоремах 1, 1° и $1^{\circ\circ}$, следует, что

$$g(x)\, M(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x).$$

Следовательно

$$g(x) = M(x)^{-1} \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) \in L^q,$$

а отсюда и из условия 1) вытекает, что $a_k = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, т. е. $g(x) = 0$ почти всюду. Полученное противоречие доказывает замкнутость системы $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ в пространстве $L^p(E)$. Минимальность системы $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ следует из условия 2). Нужно только заметить, что определенная в условии 2) система функций $\{\psi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ биортогональна к системе $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$.

Теоремы 1, 1° и $1^{\circ\circ}$ доказаны.

Для формулировки нижеследующих теорем введем

Определение 1. Будем говорить, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определенных на измеримом множестве E, $|E|>0$, функций имеет свойство (A) на измеримом множестве F $(F \subset E,\ |F|>0)$, если существует положительное число α такое, что для любого натурального числа N_1 найдется натуральное число N_2, для которого

$$\left|\bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k\right| = |F|,$$

где

$$E_k = \{x\colon |\varphi_k(x)| \geqslant \alpha\} \cap F.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *нормированная замкнутая минимальная система в* $L^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$, *и* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *сопряженная ей система, состоящая из ограниченных функций. Пусть, далее, система* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *содержит равномерно ограниченную подсистему* $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *обладает свойством* (A) *на множестве* $F \subset E$.

Тогда, если для некоторого натурального числа N *и для ограниченной функции* $M(x) \in L^p(E)$ *система* $\{M(x) f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ *является базисом в* $L^p(E)$, *то*

$$[M(x)]^{-1} \in L^q(F) \tag{1.5}$$

и

$$[M(x)]^{-1} \overline{\in} L^q(E). \tag{1.6}$$

Теорема 2°. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *нормированная минимальная в* $L^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$, *и полная относительно* $L^1(E)$ *система ограниченных функций, и* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *сопряженная ей система, состоящая из ограниченных функций. Пусть, далее, система* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *содержит равномерно ограниченную подсистему* $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *обладает свойством* (A) *на множестве* $F \subset E$.

Тогда, если для некоторого натурального числа N *и для функции* $M(x) \in L^p(E)$ *система* $\{M(x) f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ *является базисом в* $L^p(E)$, *то имеют место условия* (1.5) *и* (1.6) *теоремы* 2.

Теорема 2°°. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *нормирована минимальна в* $L^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$, *имеет свойство* (C_s), *и* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *сопряженная ей системи функций, состоящая из ограниченных функций. Пусть, далее, система* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *содержит равномерно ограниченную подсистему* $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *обладает свойством* (A) *на множестве* $F \subset E$.

Тогда, если для некоторого натурального числа N *и для некоторой измеримой функции* $M(x)$, $M(x) f_n(x) \in L^p(E)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *имеем, что система* $\{M(x) f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ *является базисом в* $L^p(E)$, *то имеют место условия* (1.5) *и* (1.6) *теоремы* 2.

Доказательство теорем 2, 2° и 2°°. Обозначим через $\{\psi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ сопряженную систему базиса $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$. Согласно теоремам 1, 1° и 1°° имеем, что

$$\psi_k(x)=[M(x)]^{-1}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n^{(k)}\varphi_n(x)+\varphi_k(x)\right]\in L^q(E)\ (k=N+1,\ N+2,\cdots).\tag{1.7}$$

Отсюда очевидно, что последовательности чисел

$$\{a_n^{(k)}\}_{k=N+1}^{\infty}\ (1\leqslant n\leqslant N)$$

являются коэффициентами разложений функций $M(x)\,f_n(x)\in L^p$ $(1\leqslant n\leqslant N)$ по базису $\{M(x)\,f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$. Следовательно, имеем, что

$$\sum_{l=N+1}^{\infty} a_n^{(l)} M(x)\,f_l(x) \overset{L^p(E)}{=} M(x)\,f_n(x)\ (1\leqslant n\leqslant N).\tag{1.8}$$

Из нормированности и ограниченности системы $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, следует, что существуют положительные числа β и δ такие, что при $E_\delta\subset E$ и $|E_\delta|>|E|-\delta$ —

$$\left[\int_{E_\delta}|f_{n_k}(x)|^p\,dx\right]^{1/p}>\beta>0\quad(k=1,\,2,\cdots).\tag{1.9}$$

Из условий (1.8) и (1.9) ввиду того, что функция $M(x)$ почти всюду отлична от нуля, следует, что

$$\lim_{k\to\infty} a_n^{(n_k)}=0\ (1\leqslant n\leqslant N).\tag{1.10}$$

Так как система $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойством (A) на множестве F, то для некоторого числа $\alpha>0$ каково бы ни было натуральное число N_1 существует $N_2>N_1$ такое, что

$$\left|\bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k\right|=|F|,\tag{1.11}$$

где

$$E_k=\{x:\,|\varphi_{n_k}(x)|\geqslant\alpha\}\cap F.\tag{1.12}$$

Возьмем N_1 настолько большим, чтобы

$$|a_n^{(n_k)}|<\frac{1}{N}\,\frac{\alpha}{2l}\quad(1\leqslant n\leqslant N;\ k>N_1),$$

где

$$l=\max_{1\leqslant j\leqslant N}\ \sup_{x\in E}|\varphi_j(x)|.$$

Тогда будем иметь

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n^{(n_k)}\varphi_n(x)+\varphi_{n_k}(x)\right|>\frac{\alpha}{2},\ \text{при } x\in E_k,$$

а отсюда согласно условию (1.7) получаем, что функция $[M(x)]^{-1}$ интегрируема по модулю в степени q на множестве $\bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k$. Следовательно, учитывая (1.11) и (1.12) получаем условие (1.5). Выполнение условия (1.6) для теорем 2, 2° и $2^{\circ\circ}$ вытекает соответственно из теорем 1, 1° и $1^{\circ\circ}$, ввиду ограниченности функций $\varphi_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$.

Теоремы 2, 2° и $2^{\circ\circ}$ доказаны.

Из теорем 2, 2° и $2^{\circ\circ}$ соответственно вытекают следующие теоремы.

Теорема 3. *Если в условиях теоремы 2 система* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *обладает свойством* (A) *на множестве полной меры, то для любого натурального числа* N *и произвольной ограниченной измеримой функции* $M(x)$ *система* $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ *не является базисом в* $L^p(E)$.

Теорема 3°. *Если в условиях теоремы* 2° *система* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *обладает свойством* (A) *на множестве полной меры, то для любого натурального числа* N *и произвольной функции* $M(x) \in L^p(E)$ *система* $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ *не является базисом в* $L^p(E)$.

Теорема $3^{\circ\circ}$. *Если в условиях теоремы* $2^{\circ\circ}$ *система* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *обладает свойством* (A) *на множестве полной меры, то для любого натурального числа* N *и произвольной измеримой функции* $M(x)$, *для которой* $M(x) f_n(x) \in L^p(E)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, *система* $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ *не является базисом в* $L^p(E)$.

Как легко видеть, теорема 3 является обобщением теоремы 3 работы [6], а теоремы 3° и $3^{\circ\circ}$ — теоремы 3 работы [7]. Отсюда следует также, что выбрасывая из системы Уолша, из тригонометрической системы $\{1, \cos 2\pi nx, \sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$ и из системы $\{\cos \pi nx\}_{n=0}^{\infty}$ конечное число функций, оставшуюся систему функций невозможно умножением на какую-нибудь измеримую функцию превратить в базис пространства $L^p[0,1]$ для любого $p > 1$.

Используя теорему $2^{\circ\circ}$, докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Если система* $\{\sin n_i x\}_{i=1}^{\infty}$ *получена удалением из системы* $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ *конечного числа функций, то для любой измеримой функции* $M(x)$ *система* $\{M(x) \sin n_i x\}_{i=1}^{\infty}$ *не является базисом в* $L^p[0,1]$ *для любых* $p > 1$.

Доказательство. Убедимся сначала, что система $\{\sin n_i x\}_{i=1}^{\infty}$ имеет свойство (C_1) на отрезке $[0,\pi]$.

Из условия

$$a_n = \int_0^{\pi} f(t) \sin n t \, dt = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{1.12'}$$

образуя разности $a_{n+2} - a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, получаем, что

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin t \cdot \cos (n+1) t \, dt = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{1.13}$$

Из существования интегралов (1.13) следует, что функция $f(t)\sin t \in L[0,\pi]$, а из того, что $a_1 = a_2 = 0$ и из условий (1.13) получаем, что

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\cos nt\,dt = 0 \quad (n = 0, 1, \cdots).$$

Отсюда, так как система $\{\cos nt\}_{n=0}^\infty$ полна в $L[0,\pi]$ получаем, что $f(t)\equiv 0$.

Обозначим $\{\sin k_j x\}_{j=1}^N = \{\sin nx\}_{n=1}^\infty - \{\sin n_i x\}_{i=1}^\infty$. Предположим, что $\{M(x)\sin n_i x\}_{i=1}^\infty$, где $M(x)$ — измеримая функция, является базисом в $L^p[0,\pi]$ и через $\{\psi_{n_i}(x)\}_{i=1}^\infty$ обозначим сопряженную ей систему функций. Согласно теореме 1°°

$$\psi_{n_i}(x) = [M(x)]^{-1}\left[\sum_{j=1}^N a_{k_j}^{(n_i)}\sin k_j x + \frac{2}{\pi}\sin n_i x\right] \quad (i=1, 2, \cdots).$$

Покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$\sin k_j x\,[M(x)]^{-1} \in L^q[(0, \delta)\cup(\pi-\delta, \pi)] \quad (1 \leqslant j \leqslant N). \tag{1.14}$$

Как и в доказательстве теоремы 2°° из предположения, что $\{M(x)\sin n_i x\}_{i=1}^\infty$ является базисом в $L^p[0,\pi]$, получаем, что

$$\lim_{i\to\infty} a_{k_j}^{(n_i)} = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant N). \tag{1.15}$$

Для $1 \leqslant j_0 \leqslant N$ определим следующий предел

$$\lim_{x\to 0} M(x)\,\psi_{n_i}(x)\,[\sin k_{j_0}x]^{-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\sum_{j=1}^N a_{k_j}^{(n_i)}\sin k_j x + \frac{2}{\pi}\sin n_i x\right][\sin k_{j_0} x]^{-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^N a_{k_j}^{(n_i)}\frac{k_j}{k_{j_0}} + \frac{2}{\pi}\frac{n_i}{k_{j_0}}.$$

Отсюда и из условия (1.15) следует, что существует некоторое большое натуральное число i_0, для которого

$$\lim_{x\to 0} M(x)\,\psi_{i_0}(x)\,[\sin k_{i_0}x]^{-1} \neq 0 \quad (1 \leqslant j_0 \leqslant N).$$

Ввиду того, что $\psi_{i_0}(x) \in L^q[0,\pi]$, получаем, что существует число $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\sin k_j x\,[M(x)]^{-1} \in L^q[0, \delta_1], \text{ для всех } j,\ 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Аналогично можно показать, что существует число $\delta_2 > 0$ такое, что

$$\sin k_j x\,[M(x)]^{-1} \in L^q[\pi-\delta_2, \pi], \text{ для всех } j,\ 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Следовательно, для $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ соотношение (1.14) имеет место.

Легко убедиться, что верхний предел

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |\sin nx| \geqslant 1/2, \text{ при } x \in [1/2\,\delta,\ \pi - 1/2\,\delta],$$

откуда ввиду непрерывности функций $\sin nx$ $(n = 1, 2, \cdots)$, применяя лемму Бореля, получаем, что система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ имеет свойство (A) на отрезке $[1/2\,\delta,\ \pi - 1/2\,\delta]$. Следовательно, согласно теореме $2^{\circ\circ}$ имеем, что

$$[M(x)]^{-1} \in L^q\,[1/2\,\delta,\ \pi - 1/2\,\delta]. \tag{1.16}$$

Но с другой стороны, согласно теореме $1^{\circ\circ}$, из условия

$$[M(x)]^{-1} \sum_{j=1}^{N} a_j \sin k_j x \in L^q\,[0,\pi]$$

следует, что $a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$, а это противоречит условиям (1.14) и (1.16). Теорема 4 доказана.

§ 2. Об окончательности теорем 3, 3° и $3^{\circ\circ}$

Прежде всего заметим, что в формулировках теорем 3, 3° и $3^{\circ\circ}$ нельзя отбросить требование о равномерной ограниченности некоторой подсистемы $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, сохраняя при этом все остальные условия. Например, для любого числа $p \geqslant 1$, нормируя систему Хаара в пространстве $L^p[0,1]$, легко видеть, что для полученной системы $\{2^{\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{2}\right)}\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ выполняются все условия этих теорем, кроме условия о равномерной ограниченности некоторой подсистемы, и тем не менее, для любого натурального числа N, согласно теореме 5 работы [6], систему $\{2^{\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{2}\right)}\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ можно мультипликативно дополнить до базиса в $L^p[0,1]$.

В формулировках этих теорем нельзя отбросить также требование, чтобы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система сопряженная к равномерно ограниченной системе $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, имела свойство (A) на множестве полной меры. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 5. *Существует нормированная и минимальная в $L^2[0,1]$ система $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая обладает следующими свойствами:*

а) *$\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полна в $L[0,\pi]$;*

б) *Как система $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, так и сопряженная ей система $\{L_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — равномерно ограничены;*

в) *Существует ограниченная функция $M(x)$ такая, что система $\{M(x)\,T_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ является базисом в пространстве $L^2[0,1]$.*

Очевидно, в этой теореме свойство (A) не может иметь места на множестве полной меры (это противоречило бы теореме 3).

Следовательно, функции $L_n(x)$ сопряженной системы в некотором смысле не могут быть удалены от нуля, и в зависимости от того, насколько они „близки“ к нулю удается системы, полученные из $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ после выбрасывания некоторых функций, мультипликативно дополнить до базисов.

Нам понадобятся квадратичные матрицы A_k, введенные А. М. Оленским [8]. Для каждого k определяется матрица

$$A_k = \|a_{i,j}^{(k)}\| \; (1 \leqslant i,\ j \leqslant 2^k)$$

$$a_{1,j}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \; (1 \leqslant j \leqslant 2^k), \tag{2.1}$$

а при $1 < i \leqslant 2^k$, i представляется следующим образом:

$$i = 2^s + \vartheta \; (1 \leqslant \vartheta \leqslant 2^s,\ 0 \leqslant s \leqslant k-1), \tag{2.2}$$

и полагаем

$$a_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2^{k-s}}}, & \text{если } (\vartheta-1)\,2^{k-s}+1 \leqslant j \leqslant (2\vartheta-1)\,2^{k-s-1} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2^{k-s}}}, & \text{если } (2\vartheta-1)\cdot 2^{k-s-1}+1 \leqslant j \leqslant \vartheta\cdot 2^{k-s} \\ 0, & \text{для остальных } j. \end{cases} \tag{2.3}$$

Приведем некоторые свойства матриц A_k [см. [8], стр. 299].

α). Матрица A_k ортогональна при каждом k.

β). Справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{2^k} |a_{i,j}^{(k)}| < \beta_1 \; (1 \leqslant i,\ j \leqslant 2^k;\ k=1, 2, \cdots). \tag{2.4}$$

Дадим определение квадратичных матриц $B_{k,m} = \|b_{i,j}^{(k,m)}\|$, где m принимает любые целочисленные значения и $1 \leqslant i,\ j \leqslant 2^k$. Положим

$$b_{1,j}^{(k,m)} = \frac{2^m}{\sqrt{2^k}} \; (1 \leqslant j \leqslant 2^k), \tag{2.5}$$

а при $1 < i \leqslant 2^k$ и для $m = \pm 1, \pm 2, \cdots$ полагаем

$$b_{i,j}^{(k,m)} = a_{i,j}^{(k)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant 2^k). \tag{2.6}$$

Из определения матриц $B_{k,m}$ и A_k непосредственно следует, что имеют место следующие свойства.

γ). Ранг матрицы $B_{k,m}$, для любых $m = \pm 1, \pm 2$, равен 2^k.

δ) $\sum_{j=1}^{2^k} b_{j,i}^{(k,m)}\, b_{j,l}^{(k,-m)} = \delta_{i,l} \; (1 \leqslant i,\ l \leqslant 2^k;\ m = \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n(x)\}$.

Имеем: $\chi_0^{(0)}(x) \equiv 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, а при $k=0, 1, 2, \cdots$

$$\chi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{если } \frac{2k-2}{2^{m+1}} < x < \frac{2k-1}{2^{m+1}}* \\ -\sqrt{2^m}, & \text{если } \frac{2k-1}{2^{m+1}} < x < \frac{2k}{2^{m+1}} \\ 0, & \text{если } x \bar{\in} \left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right], \end{cases}$$

где для каждого $m = 0, 1, \cdots$ индекс k пробегает значения $1, 2, \cdots$ $\cdots, 2^m$. Через $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обозначим систему Хаара, упорядоченную обычным образом:

$$\chi_0^{(0)}(x) = \chi_1(x),$$

а при $n = 2^m + k$ $(m = 0, 1, \cdots; k = 1, 2, \cdots, 2^m)$

$$\chi_m^{(k)}(x) = \chi_n(x).$$

Обозначим

$$\tilde{\chi}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\,\chi_n(2x), & \text{при } x \in [0, 1/2] \\ 0, & \text{при } x \in (1/2, 1] \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\tilde{W}_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [0, 1/2] \\ \sqrt{2}\,W_n(2x-1), & \text{при } x \in (1/2, 1], \end{cases} \tag{2.8}$$

где через $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответственно обозначены системы Хаара и Уолша.

При построении функции системы $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ будут сгруппированы в так называемые „пачки", а последние — в „блоки". Поэтому удобно эти функции обозначить тремя индексами — $T_i^{(p, q)}$, где нижний индекс i показывает номер функции в „пачке", верхний левый индекс p показывает номер „пачки" в „блоке", а верхний правый индекс q — номер „блока". Обозначим

$$T_0^{(0, 0)}(x) = \tilde{\chi}_1(x). \tag{2.9}$$

Нулевой „блок" состоит из одной „пачки", которая, в свою очередь состоит из одной функции $T_1^{(1, 0)}(x)$,

$$T_1^{(1, 0)}(x) = \tilde{\chi}_2(x). \tag{2.10}$$

n-ый „блок" состоит из 2^n „пачек", а в каждую „пачку" входит 2^n функций. Для $n = 1, 2, \cdots$ и $1 \leqslant m \leqslant 2^n$ обозначим

---

* Значения функций Хаара на конечном числе точек не играют роли в дальнейших рассуждениях.

$$n(m)=\begin{cases} n, & \text{если } m=1 \\ n-[\log_2(m-1)]-1, & \text{если } 2\leqslant m\leqslant 2^n, \end{cases} \tag{2.11}$$

где $[\log_2(m-1)]$ означает целую часть числа $[\log_2(m-1)]$. В n-ом „блоке“ m-тая „пачка“, $1\leqslant m\leqslant 2^n$, состоит из функций

$$T_j^{(m,\,n)}(x)=b_{1,\,j}^{(3n,\,n(m))}\,\tilde{\chi}_n^{(m)}(\chi)+\sum_{i=2}^{2^{3n}} b_{i,\,j}^{(3n,\,n(m))}\,\tilde{W}_{n_m+i-1}(x)\ (1\leqslant j\leqslant 2^{3n}), \tag{2.12}$$

где $\tilde{W}_{n_m}(x)$ имеет наибольший индекс среди ранее использованных функций. Положим

$$T_1(x)=T_0^{(0,\,0)}(x), \tag{2.13}$$

$$T_2(x)=T_1^{(1,0)}(x), \tag{2.14}$$

а для $n=1,2,\cdots,1\leqslant m\leqslant 2^n$ и $1\leqslant j\leqslant 2^{3n}$

$$T_k(x)=T_j^{(m,\,n)}(x), \tag{2.15}$$

где

$$k=1+\sum_{i=0}^{n-1}2^i\cdot 2^{3i}+(m-1)\,2^{3n}+j. \tag{2.16}$$

Ограниченность системы $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ следует из условий (2.5), (2.11), (2.6) и (2.4), если учесть, что

$$\max_{x\in[0,\,1]}|\tilde{\chi}_n^{(m)}(x)|=\sqrt{2^{n+1}}\quad (n=0=0,\ 1,\cdots;\ 1\leqslant m\leqslant 2^n), \tag{2.17}$$

$$\max_{x\in[0,\,1]}|\tilde{W}_n(x)|=\sqrt{2}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{2.18}$$

Покажем, что система $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является квазинормированной, т. е. существуют абсолютные константы c и C такие, что

$$c\leqslant\|T_k\|_{L^2[0,\,1]}\leqslant C\quad (k=1,\ 2,\cdots). \tag{2.19}$$

Действительно, из условий (2.12) и из определений матриц A_k и $B_{n,m}$ следует, что

$$\int_0^1|T_j^{(m,\,n)}(x)|^2\,dx=\sum_{i=2}^{2^{3n}}[a_{i,\,j}^{(3n)}]^2=1-1/2^{3n},$$

для $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 1\leqslant m\leqslant 2^n$ и $1\leqslant j\leqslant 2^{3n}$, и ввиду того, что функции $T_k(x)(k=1,\ 2,\cdots)$ ограничены получаем соотношения (2.19). Полнота системы $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ относительно пространства $L[0,1]$ следует из условия γ) и из полноты в $L[0,1]$ системы $\{\tilde{\chi}_n(x)\}\cup\{\tilde{W}_n(x)\}$. Чтобы показать минимальность системы $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^2[0,1]$ укажем сопряженную ей систему функций $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Полагаем

$$L_1(x)=\widetilde{\chi}_1(x),\ L_2(x)=\widetilde{\chi}_2(x), \tag{2.20}$$

а для натуральных чисел k, которые определяются равенством (2.16), где $n=1, 2, \cdots, 1\leqslant m\leqslant 2^n$ и $1\leqslant j\leqslant 2^{3n}$ —

$$L_k(x)=b_{1,j}^{(3n,\,-n(m))}\widetilde{\chi}_n^{(m)}(x)+\sum_{l=2}^{2^{3n}} b_{l,j}^{(3n,\,-n(m))}\widetilde{W}_{n_m+l-1}(x). \tag{2.21}$$

Из определений систем $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, учитывая раненства б), получаем, что

$$\int_0^1 T_k(x)\,L_l(x)\,dx=\delta_{k,\,l}\ (k,\ l=1,\ 2,\cdots),$$

где $\delta_{k,\,l}$ — символ Кронекера.

Из условий (2.17), (2.18), а также из определений матриц $\|b_{i,j}^{(k,\,n(m))}\|$ следует, что система $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена. Приступим к доказательству теоремы 5. Возьмем

$$M(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in(1/2,\ 1]\\ 2^{-n}, & \text{если } x\in(1/2^{n+1},\ 1/2^n],\ n=0,\ 1,\cdots.\end{cases} \tag{2.22}$$

Чтобы доказать замкнутость и минимальность системы $\{M(x)\ T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^2[0,1]$ достаточно проверить выполнение условий 1) и 2) теоремы 1 для случая $p=2,\ N=1$.

Условие 1) теоремы 1 выполнено, так как $|T_1(x)|=\sqrt{2}$, при $x\in[0,\ 1/2]$ и

$$\int_0^{1/2}[M(x)]^{-1}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}2^n\cdot 1/2^{n+2}=+\infty.$$

Остается доказать существование чисел a_k, для которых

$$\psi_k(x)=[M(x)]^{-1}\,[L_k(x)+a_k\,L_1(x)]\in L^2[0,1]\ (k=2,\ 3,\cdots). \tag{2.23}$$

Для удобства функции системы $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сгруппированы в „блоки" и „пачки" и пронумерованы тремя индексами таким же образом, что и соответствующие им функции из системы $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, согласно определению, каждая из функций $L_j^{(m,\,n)}(x)$, $m\neq 1$, отлична от нуля в некоторой окрестности точки $x=0$ и поэтому [см. (2.22)]

$$[M(x)]^{-1}\,L_j^{(m,\,n)}(x)\in L^2[0,1],\ \text{при}\ m\neq 1.$$

Следовательно, в соотношении (2.23) для k, определенных равенствами (2.16), где $m\neq 1$, полагаем $a_k=0$.

Итак получаем, что

$$\psi_j^{(m,\,n)}(x)=[M(x)]^{-1}\,L_j^{(m,\,n)}(x)\in L^2[0,1]\ (n=1,\ 2,\cdots;\ 2\leqslant m\leqslant 2^n;\ 1\leqslant j\leqslant 2^{3n}). \tag{2.24}$$

Так как $n(1)=n$, то согласно определению систем $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и из условий (2.5) и (2.7) имеем, что любая функция $L_k(x)$ из первой „пачки“ n-го „блока“ на интервале $(0, 1/2^{n+2})$ равна

$$b_{1,j}^{(3n,\, n(1))}\sqrt{2^{n+1}}=\frac{2^{-n}}{\sqrt{2^{3n}}}\cdot\sqrt{2^{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2^{2n}}\quad(1\leqslant j\leqslant 2^{3n}).$$

Следовательно, если для таких функций в соотношении (2.23) полагатъ $a_k=-2^{-2n}$, то получим, что функции

$$\psi_{\nu}^{(1,n)}(x)=[M(x)]^{-1}\,[L_{\nu}^{(1,n)}(x)-2^{-2n}L_1(x)]\in L^2[0,1]$$
$$(n=0,1,\cdots;\ 1\leqslant \nu\leqslant 2^{3n}). \tag{2.25}$$

Из (2.24) и (2.25) вытекает, что условие 2) теоремы 1 также выполнено, и, следовательно, система $\{M(x)\,T_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L^2[0,1]$, а система $\{\psi_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ определена равенствами (2.25) и (2.24), биортогональна ей. Покажем, что система $\{M(x)\,T_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ имеет ортонормированную подсистему, точнее

$$M(x)\,T_j^{(m,n)}(x)=\psi_j^{(m,n)}(x)\quad(n=1,2,\cdots;\ 2\leqslant m\leqslant 2^n;\ 1\leqslant j\leqslant 2^{3n}). \tag{2.26}$$

Для этого, во-первых, заметим, что согласно определению систем $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и функции $M(x)$,

$$M(x)\,T_k(x)=\psi_k(x),\ \text{при}\ x\in(1/2,\,1)\ (k\geqslant 2). \tag{2.27}$$

Для любого натурального числа n и для $2\leqslant m\leqslant 2^n$ из условия (2.22) получаем, что на носителе фунции $\overline{\chi}_n^{(m)}(x)$ $M(x)$ постоянна и принимает значение

$$2^{-\{n-[\log_2(m-1)]-1\}}. \tag{2.28}$$

Отсюда и из условий (2.12), (2.21), (2.11), (2.27) и (2.5) вытекают соотношения (2.26). Совокупность функций (2.26) составляет ортонормированную систему, поэтому часть разложения функции $f(x)\in L^2[0,1]$ по биортогональной системе $\{M(x)\,T_k(x),\ \psi_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$, в которой участвуют функции (2.26), сходится в $L^2[0,1]$.

Остается проверить сходимость другой части этого разложения, т. е. той части, в которой участвуют функции $M(x)\,T_j^{(1,n)}(x)$ $(n=1,2,\cdots;\ 1\leqslant j\leqslant 2^{3n})$. Положим

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & \text{при}\ x\in[0,\,1/2]\\ 0 & \text{при}\ x\in(1/2,\,1],\end{cases} \tag{2.29}$$

$$f_2(x)=\begin{cases} 0, & \text{при}\ x\in[0,\,1/2]\\ f(x), & \text{при}\ x\in(1/2,\,1].\end{cases} \tag{2.30}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{3n}}C_j^{(1,n)}M(x)\,T_j^{(1,n)}(x), \tag{2.31}$$

где $C_j^{(1,n)}$ коэффициенты разложения функции $f_1(x)$,

$$C_j^{(1,n)}=\int_0^1 f_1(t)\,\psi_j^{(1,n)}(t)\,td. \tag{2.32}$$

Из условий (2.21) и (2.25) следует, что на интервале (0, 1/2) функции $\psi_j^{(1,n)}(x)(n=1,2,\cdots;\ 1\leqslant j\leqslant 2^{3n})$ совпадают, поэтому из условий (2.29) и (2.32) следует, что

$$C_1^{(1,n)}=C_2^{(1,n)}=\cdots=C_{2^{3n}}^{(1,n)}\quad(n=1,2,\cdots). \tag{2.33}$$

Ряд (2.31) рассмотрим отдельно на интервалах (0, 1/2) и (1/2, 1). Из условий (2.33) получаем, что ряд (2.31) на интервале (0, 1/2) равен

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{3n}}\int_0^{1/2} f_1(t)\,\psi_1^{(1,n)}(t)\,dt\times M(x)\,T_j^{(1,n)}(x). \tag{2.34}$$

Подставляя сюда значения функций $\psi_1^{(1,n)}(x)$ и $T_j^{(1,n)}(x)$ $(1\leqslant j\leqslant 2^{3n})$ [см. (2.12), (2.25) и (2.21)], получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^{3n}\int_0^1 f_1(t)\,[b_{1,1}^{(3n,n(1)(l))}\,\widetilde{\chi}_n^{(1)}(t)-2^{-2n}\,\widetilde{\chi}_1(t)]\,[M(t)]^{-1}\,dt\times$$

$$\times M(x)\,b_{1,1}^{(3n,n(1))}\,\widetilde{\chi}_n^{(1)}(x).$$

Отсюда согласно (2.5) и (2.11) ряд (2.34) на интервале (0, 1/2) совпадает с рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{1/2} f_1(t)\,[\widetilde{\chi}_n^{(1)}(t)-2^{n/2}\,\widetilde{\chi}_1(t)]\,[M(t)]^{-1}\,dt\times M(x)\,\widetilde{\chi}_n^{(1)}(x). \tag{2.35}$$

Заметим, что норма в $L^2[0,1/2]$ m-той частичной суммы ряда (2.35) равна норме в $L^2[0,1]$ m-той частичной суммы ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 g(t)\,[\chi_n^{(1)}(t)-2^{n/2}\,\chi_1(t)][M_1(t)]^{-1}\,dt\cdot M_1(x)\,\chi_n^{(1)}(x), \tag{2.36}$$

где $g(t)=f_1(t/2)$ и $M_1(t)=M(t/2)$. Сходимость ряда (2.36) в $L^2[0,1]$ была доказана в работе [6], где установлено, что система $\{M_1(x)\,\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1\leqslant p<\infty$ (краткая схема доказательства этого факта приведена в работе [5]). Таким образом доказана сходимость ряда (2.31) на интервале [0, 1/2]. Снова используя равенства (2.33) ряд (2.31) на интервале [1/2, 1] можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{3n}} C_1^{(1,n)} M(x)\, T_j^{(1,n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{3n}} C_1^{(1,n)} M(x) \sum_{l=2}^{2^{3n}} b_{l,j}^{(3n,n)}\, \bar{W}_{n_1+l-1}(x). \tag{2.37}$$

Из условия (2.6) имеем, что $b_{l,j}^{(3n,n)} = a_{l,j}^{(3n)}$, поэтому, учитывая также условие (2.3), получим

$$\sum_{j=1}^{2^{3n}}\sum_{l=2}^{2^{3n}} b_{l,j}^{(3n,n)}\, \bar{W}_{n_1+l-1}(x) = \sum_{l=2}^{2^{3n}} \bar{W}_{n_1+l-1}(x) = \sum_{j=1}^{2^{3n}} a_{l,j}^{(3n)} = 0. \tag{2.38}$$

Чтобы доказать сходимость ряда (2.31) к нулю по норме в $L^2[1/2, 1]$ остается только проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} |C_1^{(1,n)}| \max_{1\leqslant\theta<2^{3n}} \left\| \sum_{j=1}^{\theta}\sum_{l=2}^{2^{3n}} a_{l,j}^{(3n)}\, \bar{W}_{n_1+l-1}(x) \right\|_{L^2} = 0. \tag{2.39}$$

Из ортогональности матрицы $\|a_{i,j}^{(k)}\|$ $(k=1, 2, \cdots, 1\leqslant i, j\leqslant 2^k)$ [см. условие α] и из того, что все элементы первой строки этой матрицы равны $1/\sqrt{2^k}$, получаем следующие соотношения:

$$\sum_{i=2}^{2^{3n}} a_{i,r}^{(3n)} a_{i,l}^{(3n)} = \begin{cases} 1-1/2^{3n}, & \text{при } r = l \\ -1/2^{3n}. & \text{при } r \neq l \end{cases} \quad (1\leqslant r, l\leqslant 2^{3n}).$$

Отсюда, ввиду ортонормированности системы $\{\bar{W}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, легко следует равенство

$$\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{\theta}\sum_{l=2}^{2^{3n}} a_{l,j}^{(3n)} \bar{W}_{n_1+l-1}(x) \right]^2 dx = \theta(1-1/2^{3n}) - \theta(\theta-1)\, 1/2^{3n}. \tag{2.40}$$

Так как функция $y(x) = x(1-1-1/2^{3n}) - x(x-1)\, 1/2^{3n}$ для положительных x достигает максимума при $x = 2^{3n-1}$ получаем, что

$$\max_{1\leqslant\theta<2^{3n}} \left\| \sum_{j=1}^{\theta}\sum_{l=2}^{2^{3n}} a_{l,j}^{(3n)} \bar{W}_{n_1+l-1}(x) \right\|_{L^2} \leqslant \sqrt{2^{3n-1}} \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{2.41}$$

С другой стороны, из (2.32), (2.25) и из определения системы $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ имеем

$$C_1^{(1,n)} = \int_0^1 f_1(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2^{3n}}}\, \tilde{\chi}_n^{(1)}(t) - \frac{1}{2^{2n}}\, \tilde{\chi}_1(t) \right] [M(t)]^{-1}\, dt,$$

а отсюда можно написать

$$C_1^{(1,n)} = \int_0^{1/2} \left[f(t) - \sum_{k=2}^{2^n} a_k M(t)\, \tilde{\chi}_k(t) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2^{3n}}}\, \tilde{\chi}_n^{(1)}(t) - 1/2^{2n}\, \tilde{\chi}_1(t) \right] \times$$

$$\times [M(t)]^{-1}\, dt \tag{2.42}$$

для любых действительных чисел a_k $(2 \leqslant k \leqslant 2^n)$. Обозначим

$$\delta_n = \inf_{\{a_k\}} \left\| f(t) - \sum_{k=2}^{2^n} a_k M(t) \widetilde{\chi}_k(t) \right\|_{L^2[0,1/2]} . \tag{2.43}$$

Из замкнутости системы $\{M(x)\widetilde{\chi}_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ в $L^2[0, 1/2]$ следует, что

$$\delta_n \to 0, \text{ при } n \to \infty. \tag{2.44}$$

Из условий (2.42) и (2.43) получаем, что

$$|C_1^{(1,n)}| \leqslant 2\delta_n \left[\int_0^{1/2} \left| \frac{1}{\sqrt{2^{5n}}} \widetilde{\chi}_n^{(1)}(t) - \frac{1}{2^{2n}} \widetilde{\chi}_1(t) \right|^2 [M(t)]^{-2} dt = \right.$$

$$= 2\delta_n \left[2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k} \cdot 1/2^{k+2} + 8 \cdot 2^{2n} \cdot 1/2^{n+2} \right]^{1/2} \cdot 1/2^{2n} \leqslant \frac{\sqrt{2^n}}{2^{2(n-1)}} \delta_n .$$

Отсюда и из условий (2.41), (2.44) вытекает (2.39). Сходимость ряда (2.31) в $L^2[0,1]$ доказана.

Для завершения доказательства теоремы 5 нужно доказать сходимость в $L^2[0,1]$ ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1,n)} M(x) T_j^{(1,n)}(x), \tag{2.45}$$

где

$$d_j^{(1,n)} = \int_0^1 f_2(t) \psi_j^{(1,n)}(t)\, dt. \tag{2.46}$$

Из условий (2.12) ряд (2.45) на интервале (0, 1/2) можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1,n)} M(x) T_j^{(1,n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{1,1}^{(3n,n)} M(x) \widetilde{\chi}_n^{(1)}(x) \sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1,n)} ,$$

$$x \in (0, 1/2). \tag{2.47}$$

Согласно условиям (2.21), (2.25) и (2.46) имеем

$$\sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1,n)} = \int_{(0)}^{1/2} f(t) \left[\sum_{j=1}^{2^{3n}} \psi_j^{(1,n)}(t) \right] dt =$$

$$= \int_0^{1/2} f(t) \left[\sum_{j=1}^{2^{3n}} \sum_{i=2}^{2^{3n}} b_{i,j}^{(3n,n)} \widetilde{W}_{n_1+i-1}(t) \right] dt,$$

а отсюда и из условия (2.38) получаем

$$\sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1,n)} = 0. \tag{2.48}$$

С другой стороны, из определения $M(x)$ [см. (2.22)] и условия (2.5) имеем

$$\| M(x)\, b_{1,1}^{(3n,n)}\, \widetilde{\chi}_n^{(1)}(x) \|_{L^2} = \left\| \frac{1}{\sqrt{2^n}} M(x) \widetilde{\chi}_n^{(1)}(x) \right\|_{L^2} < \frac{3}{\sqrt{2^{3n}}}.$$

Отсюда учитывая (2.46) и полноту системы $\{\widetilde{W}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L^2[1/2, 1]$ подобными рассуждениями, что и выше, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \| b_{1,1}^{(3n,n)} (M(x) \widetilde{\chi}_n^{(1)}(x) \|_{L^2} \cdot \max_{1\le \vartheta\le 2^{3n}} \left| \sum_{j=1}^{\vartheta} d_j^{(1,n)} \right| = 0. \tag{2.49}$$

Из условий (2.47), (2.48) и (2.49) следует сходимость ряда (2.45) в $L^2[0, 1/2]$.

Так как $M(x) = 1$, при $x \in [1/2, 1]$, то имеем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1,n)} M(x)\, T_j^{(1,n)}(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} \int_0^{1/2} f_2(t) \left[\sum_{i=2}^{2^{3n}} b_{i,j}^{(3n,n)} \widetilde{W}_{n_i+i-1}(t) \right] dt \cdot \sum_{i=2}^{2^{3n}} b_{i,j}^{(3n,n)} \widetilde{W}_{n_i+i-1}(x),$$

$$x \in [1/2, 1]. \tag{2.50}$$

Функции

$$\sum_{i=2}^{2^{3n}} b_{i,j}^{(3n,n)} \widetilde{W}_{n_i+i-1}(x) \quad (1 \le j \le 2^{3n};\ n = 0, 1, 2, \cdots),$$

определенные на интервале $(1/2, 1)$, можно продолжить на весь отрезок $[0,1]$ таким образом, чтобы полученная система была ортонормированной системой в $L^2[0.1]$. Это очевидно следует из ортогональности матриц A_k $(k = 1, 2, \cdots)$, если в условии (2.12) положить

$$b_{1,1}^{(3n,\, n(1))} = b_{1,2}^{(3n,\, n(1))} = \cdots = b_{1,2^{3n}}^{(3n,\, n(1))} = \frac{1}{\sqrt{2^{3n}}}.$$

Отсюда ввиду того, что $f(x) = 0$, при $x \in (0, 1/2)$, сразу вытекает сходимость ряда (2.50) в $L^2[1/2, 1]$.

Теорема 5 доказана.

§ 3. Мультипликативное дополнение некоторых подсистем системы Хаара и системы Уолша

В настоящем параграфе для любого конечного набора функций Хаара устанавливаются необходимые и достаточные условия на функцию $M(x)$ для того, чтобы после удаления из системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ данного набора, оставшуюся систему функций $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ умножением на функцию $M(x)$ можно было превратить в замкнутую минимальную систему пространства $L^p[0,1]$, $p \geqslant 1$. Доказывается также, что если $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ является замкнутой минимальной системой в $L^p[0,1]$, то сопряженная ей система функций полна относительно $L^p[0,1]$. Заметим, что последний факт имеет место не для всех замкнутых минимальных систем. Например, система $\{\chi_n(x)+1\}_{n=2}^{\infty}$, где $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$, $p>1$, но для любой функции $M(x)$, для которой система $\{M(x)[\chi_n(x)+1]\}_{n=3}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$, сопряженная ей система функций не полна в $L^p[0,1]$. В самом деле, если $\{M(x)[\chi_n(x)+1]\}_{n=3}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$ (такая функция $M(x)$ существует — например, функция, определенная равенствами (2.22)), то сопряженная ей система $\{\psi_n(x)\}_{n=3}^{\infty}$ согласно условию 2) теоремы 1° представляется в виде

$$\psi_n(x)=[M(x)]^{-1}[\chi_n(x)+a_n\chi_2(x)] \quad (n \geqslant 3),$$

а отсюда ясно, что функция $M(x)\chi_1(x)$ ортогональна всем функциям $\psi_n(x)$ $(n \geqslant 3)$. Все результаты, доказнные в настоящем параграфе для системы Хаара, верны и для системы Уолша. Однако, в случае системы Уолша, для простоты, мы их приведем только для специальных подсистем вида $\{W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ (полученных удалением первых N функций из системы Уолша $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Дело в том, что в этом случае соответствующий результат получается как следствие теорем, доказанных для системы Хаара. Приведем одно определение.

Определение 2. Пусть $M(x)$ — функция, определенная на измеримом множестве E положительной конечной меры, и E_1 — измеримое подмножество множества E, $|E_1|>0$. Пусть, далее, $1 \leqslant p < \infty$ и $x_0 \in \bar{E}_1$. Скажем, что функция $M(x)$ имеет особенность степени p в точке x_0 относительно множества E_1, если для любого $\gamma>0$ функция $[M(x)]^{-1}$ не принадлежит пространству $L^p(E_\gamma)$, где $E_\gamma=(x_0-\gamma, x_0+\gamma)\cap E_1$. Сначала рассмотрим случай, когда из системы Хаара удалена первая функция.

Теорема 6. *Пусть* $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *система Хаара и* $M(x) \in L^p[0,1]$, $p \geqslant 1$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

γ_1) *Система* $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ *является замкнутой минимальной системой в* $L^p[0,1]$.

γ_2) *Система* $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ *является замкнутой минимальной системой в* $L^p[0,1]$ *и сопряженная ей система* $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ *полна относительно* $L^p[0,1]$.

γ_3) *Существует одна и только одна точка* $x_0 \in [0,1]$, *для которой, если точка* x_0 — *двоично иррациональна, то функция* $M(x)$ *имеет особенность степени* q *в этой точке относительно отрез-*

ка $[0,1]$; *если точка* x_0 — *двоично рациональна, то функция* $M(x)$ *имеет особенность степени* q *в этой точке относительно одного и только одного из множеств* $(0, x_0)$ *и* $(x_0, 1)$.

Доказательство. Если через $\Delta_k^{(1)}$ и $\Delta_k^{(2)}$ $(k=0, 1,\cdots)$ соответственно обозначим левую и правую половину носителя некоторой функции Хаара из k-той „пачки", то очевидно, что условие γ_3) эквивалентно существованию последовательности интервалов

$$\Delta_0^{(i_0)} \supset \Delta_1^{(i_1)} \supset \cdots \supset \Delta_k^{(i_k)} \supset \cdots \quad (i_k = 1 \text{ или } 2), \tag{3.1}$$

для которых

$$[M(x)]^{-1} \overline{\in} L^q [\Delta_k^{(i_k)}]; \quad [M(x)]^{-1} \in L^q [C\Delta_k^{(i_k)}]. \tag{3.2}$$

Из сделанного замечания следует, что эквивалентность условий γ_1) и γ_3) доказана в работе [7] (см. лемму 1). Нам здесь нужно только доказать, что сопряженная к $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ система функций $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ полна относительно $L^p[0,1]$. Положим

$$\psi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} [M(x)]^{-1}[\chi_m^{(k)}(x) + (-1)^{i_m}\sqrt{2^m}], & \text{если } \Delta_m^{(i_m)} \subset \Delta_{2^m+k} \\ \chi_m^{(k)}(x)[M(x)]^{-1}, & \text{если } \Delta_m^{(i_m)} \cap \Delta_{2^m+k} = \varnothing \end{cases} \tag{3.3}$$

$(1 \leqslant k \leqslant 2^m;\ m=0, 1,\cdots)$. Обозначая

$$\psi_{2^m+k}(x) = \psi_m^{(k)}(x) \quad (1 \leqslant k \leqslant 2^m;\ m=0, 1,\cdots), \tag{3.4}$$

непосредственным вычислением легко проверить, что система $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ биортогональна к системе $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$. Покажем, что если функция $f(x) \in L^p[0,1]$ и $\int\limits_0^1 f(t)\psi_n(t)\,dt = 0$ для всех $n \geqslant 2$, то $f(x) \equiv 0$.

Доказательство проведем по индукции. Сначала докажем, что $f(x)=0$, при $x \in C\Delta_0^{(i_0)}$. Обозначим через $\{\psi_{1,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ все те функции из системы $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$, которые тождественно равны нулю на интервале $\Delta_0^{(i_0)}$. Из условия (3.3) очевидно, что в систему $\{\psi_{1,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ входят функции, сопряженные к тем функциям из системы $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$, носители которых лежат в $C\Delta_0^{(i_0)}$, а также функция $\psi_2(x)$, которая на интервале $C\Delta_0^{(i_0)}$ равна $2(-1)^{i_0}[M(x)]^{-1}$. Согласно выбору системы $\{\psi_{1,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ имеем, что

$$\int\limits_{C\Delta_0^{(i_0)}} f(x)\psi_{1,k}(x)\,dx = 0 \quad (k=1, 2,\cdots). \tag{3.5}$$

Легко видеть, что каждую функцию $M(x)\psi_{1,k}(x)$ $(k=1, 2,\cdots)$ с точностью до постоянного множителя можно получить транспонируя функцию Хаара $\chi_k(x)$ с интервала $(0,1)$ на интервал $C\Delta_0^{(i_0)}$ заменой линейного переменного. Отсюда, ввиду того, что функция $f(x)[M(x)]^{-1}\in L[C\Delta_{0}^{(i_0)}]$ и система Хаара полна относительно $L[0,1]$, из условия (3.5) получаем, что $f(x)\equiv 0$ на интервале $C\Delta_{0}^{(i_0)}$.

Предположим, что для некоторого натурального числа m функция

$$f(x)\equiv 0,\ \text{при}\ x\in C\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})}. \tag{3.6}$$

Возьмем ту подсистему $\{\psi_{m,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ системы $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$, которая состоит из всех функций, принимающих нулевое значение на интервале $\Delta_m^{(i_m)}$ и имеющих ненулевое значение на интервале $\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})}-\Delta_m^{(i_m)}$. Если функции системы $\{\psi_{m,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ расположены относительно друг-друга таким же образом, что и в системе $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ и номера функций $\psi_{m,k}(x)(k=1,2,\cdots)$ в системе $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ равны m_k, то легко видеть, что

$$\Delta_{m_1}=\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})}, \tag{3.7}$$

$$\psi_{m,k}(x)=[M(x)]^{-1}\chi_m(x)\ (k>2). \tag{3.8}$$

Согласно предположению

$$0=\int_0^1 f(t)\,\psi_{m,1}(t)\,dt=\int\limits_{C\Delta_m^{(i_m)}} f(t)\,\psi_{m,1}(t)\,dt. \tag{3.9}$$

Но отсюда, ввиду того, что $f(x)\equiv 0$, при $x\in C\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})}$ и функция $\psi_{m,1}(x)$ на интервале $\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})}-\Delta_m^{(i_m)}$ с точностью до постоянного множителя равна $[M(x)]^{-1}$, получаем

$$\int\limits_{\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})}-\Delta_m^{(i_m)}} f(t)\,[M(t)]^{-1}\,dt=0. \tag{3.10}$$

Так как по предположению

$$\int_0^1 f(t)\,\psi_{m,k}(t)\,dt=0\ (k=1,2,\cdots),$$

то согласно выбору системы $\{\psi_{m,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ из условий (3.8) и (3.10), как и выше, получаем, что

$$f(x)\equiv 0,\ \text{при}\ x\in\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})}-\Delta_m^{(i_m)}.$$

Отсюда, согласно индукционному предположению, $f(x)\equiv 0$, при $x\in[0,1]$, что и требовалось доказать.

С помощью теоремы 6 доказывается следующая

Теорема 7. *Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, N — произвольное натуральное число и $M(x)\in L^p[0,1]$, $1\leqslant p<\infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

γ_1') *Система* $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ *является замкнутой минимальной системой в* $L^p[0,1]$.

γ_2') *Система* $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ *является замкнутой минимальной системой в* $L^p[0,1]$ *и сопряженная ей система функций* $\{\psi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ *полна относительно* $L^p[0,1]$.

γ_3') *Если* (a_i, b_i) $(1 \leqslant i \leqslant N)$ *двоичные интервалы наибольшей длины, на которых все функции* $\chi_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ *постоянны, то на каждом отрезке* $[a_i, b_i]$ *существует одна и только одна точка* x_i *такая, что если* x_i — *двоично иррациональная точка, то функция* $M(x)$ *в этой точке имеет особенность степени* q *относительно отрезка* $[a_i, b_i]$: *если* x_i — *двоично рациональная точка, то функция* $M(x)$ *в этой точке имеет особенность степени* q *относительно одного и только одного из множеств* (a_i, x_i) *и* (x_i, b_i).

Доказательство. Импликации $\gamma_3') \Rightarrow \gamma_2')$ и $\gamma_3') \Rightarrow \gamma_1')$ непосредственно следуют из теоремы 6. Для доказательства теоремы нам остается только показать, что $\gamma_1') \Rightarrow \gamma_3')$.

Ввиду того, что для любого числа i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ подходящим образом выбирая коэффициенты a_k $(1 \leqslant k \leqslant N)$, суммами вида $\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_k(x)$ можно представить характеристическую функцию интервала (a_i, b_i) то согласно теореме 1°

$$[M(x)]^{-1} \overline{\in} L^q[(a_i, b_i)] \ (1 \leqslant i \leqslant N).$$

Выполнение утверждений, касающихся точек, в которых функция $M(x)$ имеет особенность, следует из теоремы 6, если заметить, что система $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из N подсистем $\{\chi_{n,i}(x)\}_{n=2}^{\infty}$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$, где

$$\chi_{n,i}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b_i - a_i}} \chi_n\left(\dfrac{x - a_i}{b_i - a_i}\right), & \text{при } x \in (a_i, b_i) \\ 0 & , \text{при } x \overline{\in} (a_i, b_i). \end{cases} \qquad (n = 2, 3, \cdots).$$

Докажем аналог теоремы 7 для случая, когда из системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удаляется произвольный конечный набор функций $\{\chi_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$.

Введем некоторые определения.

Через Δ_n' и Δ_n'' соответственно обозначим левую и правую половину интервала Δ_n, где Δ_n — носитель функций Хаара $\chi_n(x)$, $n \geqslant 2$. При $n = 1$ полагаем $\Delta_1' = \Delta_1'' = [0,1]$. Обозначим через $S(\Delta_{k_1}', \Delta_{k_1}'', \cdots, \Delta_{k_N}', \Delta_{k_N}'')$, $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_N$, кольцо с мерой, порожденное отрезком $[0,1]$ и интервалами Δ_{k_i}', Δ_{k_i}'' $(1 \leqslant i \leqslant N)$, где мерой является мера Лебега.

Определение 3. Скажем, что совокупность атомов $\{L_i\}_{i=1}^N$ кольца $S(\Delta_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_N}, \Delta''_{k_N})$, $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_N$ выбрана правильно, если $L_i \cap \Delta_{k_i} \neq \varnothing$, $1 \leqslant i \leqslant N$, и для каждого натурального числа j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ число отличных друг от друга атомов кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_j}, \Delta''_{k_j})$, каждый из которых содержит хоть одно множество L_i, $1 \leqslant i \leqslant j$, в точности равно j.

По индукции убедимся в том, что для любых N чисел $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_N$ в кольце $S(\Delta'_{n_1}, \Delta''_{n_1}, \cdots, \Delta''_{n_N})$ можно правильно выбрать N различных атомов. Для $N = 1$ это очевидно. Предположим, что для любых $N-1$ чисел $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_{N-1}$ в кольце $S(\Delta'_{n_1}, \Delta''_{n_1}, \cdots, \Delta''_{n_{N-1}})$ существует набор правильно выбранных атомов $\{E_i\}_{i=1}^{N-1}$. Для случая, когда даны N различных чисел $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_N$, если $\Delta_{n_N} \subset E_{j_0}$ $(1 \leqslant j_0 \leqslant N-1)$, берем $L_j \equiv E_j$ $(1 \leqslant j \leqslant N-1;\ j \neq j_0)$, $L_{j_0} \equiv \Delta'_{n_N}$ и $L_N \equiv \Delta''_{n_N}$. А если множество Δ_{n_N} не лежит ни в одном из множеств E_j $(1 \leqslant j \leqslant N-1)$, то полагаем $L_j \equiv E_j$ $(1 \leqslant j \leqslant N-1)$ и $L_N \equiv \Delta'_{n_N}$. Очевидно, что взятые указанным способом атомы L_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ кольца $S(\Delta'_{n_1}, \Delta''_{n_1}, \cdots, \Delta'_{n_N}, \Delta''_{n_N})$, выбраны правильно.

Заметим, что все атомы кольца $S(\Delta'_{n_1}, \Delta''_{n_1}, \cdots, \Delta'_{n_{N-1}}, \Delta''_{n_{N-1}})$ кроме одного содержащего Δ_{n_N}, являются атомами кольца $S(\Delta'_{n_1}, \Delta''_{n_1}, \cdots, \Delta'_{n_N}, \Delta''_{n_N})$, а атом, содержащий Δ_{n_N} „расщепляется" на две (если совпадает с Δ_{n_N}) или на три части.

Лемма 1. *Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара. Пусть, далее, $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$ $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_N$ — произвольный комплект функций Хаара и $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ — некоторый набор атомов кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta''_{k_N})$. Тогда для того чтобы функции $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$ были линейно независимыми на объединении множеств $L_j^{(N)}$ $(1 \leqslant j \leqslant m_N)$ необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее: в совокупности множеств $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ найдется множество $L_{j_N}^{(N)}$ $(1 \leqslant j_N \leqslant m_N)$, которое является правой или левой половиной интервала Δ_{k_N}. В совокупности всех тех различных атомов $\{L_j^{(N-1)}\}_{j=1}^{m(N-1)}$ кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k(N-1)}, \Delta''_{k(N-1)})$ каждый из которых содержит хоть одно множество $L_j^{(N)}$ $(j \neq j_N,\ 1 \leqslant j \leqslant m_N)$, найдется множество $L_{j(N-1)}^{(N-1)}$, которое является левой или правой половиной $\Delta_{k(N-1)}$ и т. д. На n-ом шаге $(1 \leqslant n \leqslant N-1)$ в совокупности всех тех различных атомов $\{L_j^{(N-n)}\}_{j=1}^{m(N-n)}$ кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta''_{k(N-n)})$, каждый из которых содержит хоть одно множество $L_j^{(N-n+1)}$ $(j \neq j_{N-n+1};\ 1 \leqslant j \leqslant m_{N-n+1})$, найдется множество $L_{j(N-n)}^{(N-n)}$, которое является левой или правой половиной $\Delta_{k(N-n)}$.*

Доказательство. Достаточность докажем по индукции. При $N=1$ она верна. Предполагая, что достаточность имеет место, когда из системы Хаара удален произвольный набор функций $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^{N-1}$ докажем, что она верна и для случая, когда удалены любые функции $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^{N}$. Когда

$$L_j^{(N)} \in S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k(N-1)}, \Delta''_{k(N-1)})\ (j \neq j_N;\ 1 \leqslant j \leqslant m_N),$$

из условия

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{k_j}(x) = 0, \text{ при } x \in \bigcup_{j=1}^{m_N} L_j^{(N)}, \tag{3.11}$$

получаем, что

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_j \chi_{k_j}(x) = 0, \text{ при } x \in \bigcup_{\substack{j=1\\ j \neq j_N}}^{m_N} L_j^{(N)}.$$

Отсюда согласно индукционному предположению $a_1 = a_2 = \cdots = a_{N-1} = 0$, следовательно и $a_N = 0$. Если же для некоторого i_0

$$L_{i_0}^{(N)} \overline{\in} S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k(N-1)}, \Delta''_{k(N-1)})\ (i_0 \neq j_N;\ 1 \leqslant i_0 \leqslant m_N), \tag{3.12}$$

то получаем, что

$$\Delta_{k_N} \subset L'_{i_0}, \tag{3.13}$$

где L'_{i_0} есть атом кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k(N-1)}, \Delta''_{k(N-1)})$. Из условий (3.12) и (3.13) следует, что возможны следующие три случая

$$1)\ L_{i_0} = \Delta'_{k_N},\quad 2)\ L_{i_0} = \Delta''_{k_N},\quad 3)\ L_{i_0} = L'_{i_0} - \Delta_{k_N} \neq \varnothing.$$

В случае 1) или 2), ввиду того, что L_{j_N} является левой или правой половиной Δ_{k_N}, в совокупность атомов $\{L_j\}_{j=1}^{m_N}$ входят как Δ'_{k_N}, так и Δ''_{k_N}. Отсюда, так как все функции $\chi_{k_j}(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant N-1)$ принимают постоянные значения на Δ_{k_N}, из условия (3.11) получаем, что $a_N = 0$. Следовательно, согласно условию (3.11)

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_j \chi_{k_j}(x) = 0, \text{ при } x \in L'_{i_0}, \tag{3.14}$$

а если учесть, что все множества из совокупности $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$, не пересекающиеся с множеством L'_{i_0}, не являются атомами и для кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta''_{k(N-1)})$, то получаем, что

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_j \chi_{k_j}(x) = 0, \text{ при } x \in \bigcup_{j=1}^{m(N-1)} L_j^{(N-1)}, \tag{3.15}$$

откуда, согласно индукционному предположению, $a_1 = a_2 = \cdots = a_{N-1} = 0$. Для случая 3) из (3.11) нетрудно заметить, что имеет место условие (3.14). Откуда, ввиду того, что $L_{jN}^{(N)}$ является левой или правой половиной Δ_{k_N}, следует, что $a_N = 0$, что опять приводит к соотношению (3.15).

Необходимость. Предположим, что из условия (3.11) следует $a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$. Ввиду того, что Δ'_{k_N} и Δ''_{k_N} являются атомами кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_N}, \Delta''_{k_N})$ из сделанного предположения вытекает, что в совокупности $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ найдется множество $L_{jN}^{(N)}$, которое является левой или правой половиной интервала Δ_{k_N}. Пусть для натурального числа $n\,(1 \leqslant n \leqslant N-1)$ интервалы $L_{j_i}^{(i)}\,(n+1 \leqslant i \leqslant N;\ 1 \leqslant j_i \leqslant m_i)$ соответственно являются левыми или правыми половинами интервалов $\Delta_{k_i}\,(n+1 \leqslant i \leqslant N-1)$, где в совокупность $\{L_j^{(i)}\}_{j=1}^{m_i}$ входят все атомы кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots$ $\cdots, \Delta'_{k_i}, \Delta''_{k_i})$, содержащие хоть одно такое иножество из совокупности $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$, которое не лежит ни в одном из множеств $\{L_{j_m}^{(m)}\}_{m=i+1}^{N}$. Покажем, что левая или правая половина интервала $\Delta_{k(N-n)}$ содержится в совокупности $\{L_j^{(N-n)}\}_{j=1}^{m(N-n)}$. Предположим, что $\Delta_{k(N-n)} \cap L_j^{(N-n)} = \varnothing$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m_{(N-n)}$. Среди множеств $\{L_{j_i}^{(i)}\}_{i=N-n+1}^{N}$ выберем множество $L_{j_{i_1}}^{(i_1)}$ с наименьшим индексом i_1, содержащееся в $\Delta_{k(N-n)}$. После этого среди множеств $\{L_{j_i}^{(i)}\}_{i=i_1+1}^{N}$ выбираем множество с наименьшим индексом, лежащем в $\Delta_{k(N-n)} - L_{j_{i_1}}^{(i_1)}$ и т. д. После конечного числа шагов получим множества $L_{j_{i_1}}^{(i_1)}, L_{j_{i_2}}^{(i_2)}, \cdots, L_{j_{i_q}}^{(i_q)}$, которые содержатся в $\Delta_{k(N-n)} - L_{j_{i_1}}^{(i_1)}$ и вне объединения этих множеств в $\Delta_{k(N-n)}$ нет какого-либо множества из совокупности $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$. Покажем, что функции Хаара $\chi_{k(N-n)}(x), \chi_{k_{i_1}}(x), \chi_{k_{i_2}}(x), \cdots, \chi_{k_{i_q}}(x)$ линейно зависимы на множестве $\bigcup_{p=1}^{q} L_{j_{i_p}}$. Действительно, в противном случае совокупность линейных комбинаций этих функций на множестве $\bigcup_{p=1}^{q} L_{j_{i_p}}$ образовала бы $(q+1)$-мерное эвклидово пространство, которое, ввиду того, что все функции $\chi_{k(N-n)}(x), \chi_{k_{i_1}}(x), \cdots, \chi_{k_{i_q}}(x)$ принимают постоянные значения на каждом из множеств $L_{j_{i_p}}\,(1 \leqslant p \leqslant q)$, содержалось бы в q-мерном эвклидовом пространстве линейных комбинаций характеристических функций множеств $L_{j_{i_p}}\,(1 \leqslant p \leqslant q)$. Значит существуют действительные числа $\{a_p\}_{p=1}^{q}$ такие, что

$$\chi_{k(N-n)}(x) + \sum_{p=1}^{q} a_p \chi_{k_{i_p}}(x) = 0, \quad \text{при } x \in \bigcup_{p=1}^{q} L_{j_{i_p}}. \tag{3.16}$$

Ввиду того, что выражение (3.16) равно нулю, если $x \in C\Delta_{k_{(N-n)}}$ и так как в множестве $\Delta_{k_{(N-n)}} \bigcup\limits_{p=1}^{q} L_{i_{i_p}}$ не содержатся элементы из совокупности атомов $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$, получаем

$$\chi_{k_{(N-n)}}(x) + \sum_{p=1}^{q} a_p \chi_{k_{i_p}}(x) = 0, \quad \text{при} \quad x \in \bigcup_{j=1}^{m_N} L_j^{(m_N)}.$$

Полученное соотношение противоречит условию леммы и поэтому приходим к заключению, что одна из половин интервала $\Delta_{k_{(N-n)}}$ содержится в совокупности множеств $\{L_j^{(N-n)}\}_{j=1}^{m_{(N-n)}}$.

Лемма 1 доказана.

С помощью этой леммы устанавливаются необходимые и достаточные условия на функцию $M(x)$, при выполнении которых система $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$, а сопряженная ей система функций полна. Полученная теорема одновременно указывает способ построения функций $M(x)$, для которых система $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ является замкнутой и минимальной в $L^p[0,1]$. Эта теорема формулируется следующим образом.

Теорема 8. *Пусть* $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *— система Хаара,* $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ *— система, полученная из системы Хаара после удаления функций* $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^{N}$, $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_N$, *где* N *— некоторое натуральное число, и* $M(x) \in L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

δ_1) *Система* $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ *является замкнутой минимальной системой в* $L^p[0,1]$.

δ_2) *Система* $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ *является замкнутой минимальной системой в* $L^p[0,1]$ *и сопряженная ей система* $\{\psi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ *полна в* $L^p[0,1]$.

δ_3) *Существуют атомы* L_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ *кольца* $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots$ $\cdots \Delta'_{k_N}, \Delta''_{k_N})$ *и для каждого* L_j *только одна точка* x_j, $x_j \in \bar{L}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$ *такие, что:*

А) *Совокупность атомов* $\{L_j\}_{j=1}^{N}$ *выбрана правильно;*

Б) *Если точка* x_j *— двоично иррациональна, то функция* $M(x)$ *имеет особенность степени* q *относительно множества* $[0,1]$; *если точка* x_j *— двоично рациональна, то функция* $M(x)$ *имеет особенность степени* q *относительно одного и только одного из множеств* $L_j \cap (0, x_j)$ *и* $(x_j, 1) \cap L_j$;

В) $$[M(x)]^{-1} \in L^q\left[(0,1) - \bigcup_{j=1}^{N} L_j\right].$$

Доказательство. Сперва докажем импликацию $\delta_1) \Rightarrow \delta_3)$. Согласно теореме 1 из замкнутости системы $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ следует, что функция $M(x)$ имеет особенности степени q относительно некоторых атомов $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_N}, \Delta''_{k_N})$. Причем, легко видеть, что на объединении этих атомов функции $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^{N}$ линейно независимы. Следовательно, атомы $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ удовлетворяют условиям леммы 1 и согласно этой лемме в наборе $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ найдется множество $L_{j_N}^{(N)}$, являющееся левой или правой половиной интервала Δ_{k_N}. Пусть, далее, $\{L_j^{(N-n)}\}_{j=1}^{m(N-n)}$ — все те атомы кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k(N-n)}, \Delta''_{k(N-n)})$, каждый из которых содержит хоть одно множество из совокупности $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$, не лежащее ни в одном из множеств $\{L_{j_i}^{(i)}\}_{i=N-n+1}^{N}$. Тогда в совокупности $\{L_j^{(N-n)}\}_{j=1}^{m(N-n)}$ найдется множество $L_{j(N-n)}^{(N-n)}$ $(1 \leqslant j_{(N-n)} \leqslant m_{(N-n)})$, являющееся левой или правой половиной интервала $\Delta_{(N-n)}$. Отсюда, очевидно следует, что $m_N \geqslant N$. Докажем, что число m_N в точности равно N.

Предполагая $m_N > N$, получаем, что существует натуральное число i_0 $(1 \leqslant i_0 \leqslant N)$, для которого верно соотношение

$$m_{i_0} - m_{i_0-1} > 1, \tag{3.17}$$

где полагаем, что $m_0 = 0$. Пусть F — атом кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta''_{k_{i_0-1}})$ содержащий множество $\Delta_{k_{i_0}}$. Нам известно, что $L_{j_{i_0}}^{(i_0)}$ является левой или правой половиной интервала $\Delta_{k_{i_0}}$. Если среди множеств $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{m_{i_0}}$ кроме $L_{j_{i_0}}^{(i_0)}$ не было бы другого множества, лежащего в F, то ввиду того, что тогда атомы $L_j^{(i_0)}$ $(j \neq j_0;\ 1 \leqslant j \leqslant m_{i_0})$ кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_{i_0}}, \Delta''_{k_{i_0}})$ являлись бы атомами и для кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_{i_0-1}}, \Delta''_{k_{i_0-1}})$, получили бы $m_{i_0-1} = m_{i_0} - 1$, что противоречит условию (3.17). Отсюда следует, что возможны следующие два случая: из совокупности $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{m_{i_0}}$ во множестве F кроме $L_{j_{i_0}}^{(i_0)}$ лежит только одно множество, или — только два множества. Если бы из набора $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1,\ j \neq j_{i_0}}^{m_{i_0}}$ во множестве F лежало только одно множество, то остальные элементы этой совокупности являлись бы атомами кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_{i_0-1}}, \Delta''_{k_{i_0-1}})$ и так как множество F тоже входило бы в набор $\{L_j^{(i_0-1)}\}_{j=1}^{m_{i_0-1}}$, то опять получили бы противоречащее условию (3.17) условие — $m_{i_0-1} = m_{i_0} - 1$. Таким образом, множества Δ'_{i_0}, Δ''_{i_0} и $F - \Delta_{i_0}$ входят в совокупность множеств $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{m_{i_0}}$. Ввиду того, что каждое множество из совокупности $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{m_{i_0}}$ содержит хоть одно множество из набора $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$, не лежащее ни в одном из множеств $\{L_{j_i}^{(i)}\}_{i=i_0+1}^{N}$, то получаем, что во множестве $F - \Delta_{i_0}$ лежит некоторый атом $L_{j_*}^{(N)}$ кольц

$S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_N}, \Delta''_{k_N})$ и $L_{j_0}^{(N)} \cap \bigcup_{i=i_0+1}^{N} L_{j_i}^{(i)} = \varnothing$. Согласно выбору атомов $L_j^{(N)}$ $(1 \leqslant j \leqslant m_N)$ существует точка $x_{j_0} \in \overline{L}_{j_0}^{(N)}$, в которой функция $M(x)$ имеет особенность степени q относительно множества $L_{j_0}^{(N)}$. Очевидно, можно найти натуральное число N_0 такое, что $N_0 > k_N$, $x_{j_0} \in \Delta_{N_0}$ и функция $M(x)$ в точке x_{j_0} имеет особенность степени q относительно множества Δ_{N_0}.

Теперь рассмотрим кольцо $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_N}, \Delta''_{k_N}, \Delta'_{N_0}, \Delta''_{N_0})$ и возьмем все те атомы $\{F_l^{(N+1)}\}_{l=1}^{m'(N+1)}$ этого кольца, относительно которых функция $M(x)$ имеет особенность степени q. Согласно выбору числа N_0 очевидно, что в совокупности $\{F_l^{(N+1)}\}_{l=1}^{m'(N+1)}$ найдется множество $F_{l_{N+1}}^{(N+1)}$, которое является левой или правой половиной интервала Δ_{N_0}. Рассмотрим все те атомы $\{F_l^{(N)}\}_{l=1}^{m'_N}$ кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots$ $\cdots, \Delta'_{k_N}, \Delta''_{k_N})$, каждый из которых содержит хоть одно множество $F_l^{(N+1)}$ $(l \neq l_{N+1};\ 1 \leqslant l \leqslant m'_{(N+1)})$. Ввиду того, что

$$L_{j_0}^{(N)} \cap \bigcup_{i=i_0+1}^{(N)} L_{j_i}^{(i)} = \varnothing \text{ и } F_{l_{N+1}}^{(N+1)} \subset L_{j_0}^{(N)},$$

существует некоторое натуральное число l_N $(1 \leqslant l_N \leqslant m'_N)$ такое, что $L_{j_N}^{(N)} \equiv F_{l_N}^{(N)}$. Для натурального числа n $(i_0 \leqslant n \leqslant N-1)$ рассмотрим все те атомы $\{F_l^{(n)}\}_{l=1}^{m'_n}$ кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_n}, \Delta''_{k_n})$, каждый из которых содержит по крайней мере одно множество из совокупности

$$\{F_l^{(n+1)}\}_{l=1,\ l \neq l_{n+1}}^{m'_{n+1}}, \text{ где } F_{l_{n+1}}^{(n+1)} \equiv L_{j_{n+1}}^{(n+1)}. \text{ Набор } \{F_l^{(n)}\}_{l=1}^{m'_n}$$

состоит из всех тех атомов кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_n}, \Delta''_{k_n})$, пересечение которых с множеством $\bigcup_{i=n+1}^{N+1} F_{l_i}^{(i)}$ пусто и каждый из которых содержит хоть одно множество из совокупности $\{F_l^{(N+1)}\}_{l=1}^{m'(N+1)}$. Отсюда, ввиду того, что

$$L_{j_n}^{(n)} \cap \bigcup_{i=n+1}^{N} L_{j_i}^{(i)} = \varnothing;\ L_{j_n}^{(n)} \cap \Delta_{N_0} = \varnothing \text{ и } F_{l_i}^{(i)} \equiv L_{j_i}^{(i)} \quad (n+1 \leqslant i \leqslant N)$$

получаем, что для некоторого натурального числа l_n $(1 \leqslant l_n \leqslant m'_n)$ $F_{l_n}^{(n)} \equiv L_{j_n}^{(n)}$.

Покажем, что совокупности атомов $\{L_j^{(i_0-1)}\}_{j=1}^{m(i_0-1)}$ и $\{F_l^{(i_0-1)}\}_{l=1}^{m'(i_0-1)}$ кольца $S(\Delta_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k(i_0-1)}, \Delta''_{k(i_0-1)})$ совпадают. Для этого заметим во-первых, что, согласно построению, если некоторый атом кольца $S(\Delta_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k(i_0-1)}, \Delta''_{k(i_0-1)})$, входит в совокупность $\{F_l^{(i_0-1)}\}_{l=1}^{m'(i_0-1)}$, то этот атом входит также и в совокупность множеств $\{L_j^{(i_0-1)}\}_{j=1}^{m(i_0-1)}$.

Из построения и из того, что $\Delta_{k_{l_0}} - L^{(l_0)}_{j_{l_0}} \subset \{L^{(l_0)}_j\}^{m_{l_0}}_{j=1}$ имеем также, что атом $\Delta_{k_{l_0}} - L^{(l_0)}_{j_{l_0}}$ кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_{l_0}}, \Delta''_{k_{l_0}})$ находится как в совокупности $\{L^{(l_0)}_j\}^{m_{l_0}}_{j=1}$, так и в совокупности множеств $\{F^{(l_0)}_l\}^{m'_{l_0}}_{l=1}$. Отсюда, так как все атомы кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_{l_0}}, \Delta''_{k_{l_0}})$, которые входят в совокупность множеств $\{L^{(l_0)}_j\}^{m_{l_0}}_{j=1}$ и не пересекаются с множеством F, находятся в наборе $\{F^{(l)}_l\}^{m'_{l}}_{l=1}$ и являются атомами кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots$ $\cdots, \Delta'_{k_{(l_0-1)}}, \Delta''_{k_{(l_0-1)}})$ получаем, что совокупности множеств $\{L^{(l_0-1)}_j\}^{m_{(l_0-1)}}_{j=1}$ и $\{F^{(l_0-1)}_l\}^{m'_{(l_0-1)}}_{l=1}$ совпадают. Следовательно, процесс, описанный в лемме 1, проходит для атомов $\{F^{(N+1)}_l\}^{m'_{(N+1)}}_{l=1}$ кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_N},$ $\Delta''_{k_N}, \Delta'_{N_0}, \Delta''_{N_0})$ и значит функции $\chi_{k_1}(x), \chi_{k_2}(x), \cdots, \chi_{k_N}(x), \chi_{k_{N_0}}(x)$ линейно независимы на множестве $\bigcup\limits_{l=1}^{m'_{N+1}} F^{(N+1)}_l$.

С другой стороны, так как система $\{M(x)\chi_{n_l}(x)\}^{\infty}_{l=1}$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$, то функция $\chi_{N_0}(x)$ должна удовлетворять условию 2) теоремы 1. Но это противоречит линейной независимости функций $\chi_{k_1}(x), \cdots, \chi_{k_N}(x), \chi_{N_0}(x)$ на множестве $\bigcup\limits_{l=1}^{N+1} F^{(N+1)}_l$, если заметить, что $[M(x)]^{-1} \in L^q[F^{(N+1)}_l]$ $(1 \leqslant l \leqslant m'_{N+1})$. Предположение, что $m_N > N$ привело к противоречию, следовательно $m_N = N$.

Перенумеруем атомы $\{L^{(N)}_j\}^N_{j=1}$ кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots, \Delta'_{k_N}, \Delta''_{k_N})$ таким образом, чтобы вновь полученная совокупность $\{L^{(N)}_{i_k}\}^N_{k=1}$ для любого натурального числа k $(1 \leqslant k \leqslant N)$ удовлетворяла условию

$$L^{(N)}_{i_k} \subset L^{(k)}_{j_k} - \bigcup_{l=k+1}^{N} L^{(l)}_{j_l}.$$

Легко видеть, что совокупность атомов $\{L_k\}^N_{k=1}$ кольца $S(\Delta'_{k_1}, \Delta''_{k_1}, \cdots$ $\cdots, \Delta'_{k_N}, \Delta''_{k_N})$, где $L_k = L^{(N)}_{i_k}$, составляет правильный выбор. Остается показать, что в замыкании каждого множества L_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ есть только одна точка x_j, в которой функция $M(x)$ имеет особенность степени q относительно множества L_j. Допустим, что функция $M(x)$ в двух различных точках x_{j_0} и x'_{j_0} имеет особенность степени q относительно некоторого атома L_{j_0}.

Легко видеть, что существует функция $\chi_r(x)$ такая, что точки x_{j_0} и x'_{j_0} находятся в замыканиях различных половин интервала Δ_r и $M(x)$ в точках x_{j_0} и x'_{j_0} имеет особенность степени q относительно соответствующей половины. Для этого нужно взять интервал Хаара наименьшей длины, содержащий атом L_{j_0} и последовательным делением на две равные части отобрать первый интервал Хаара, для которого функция $M(x)$ имеет особенности в точках x_{j_0} и x'_{j_0} относительно его различных половин. Покажем, что функции $\chi_{k_1}(x), \cdots, \chi_{k_N}(x)$, $\chi_r(x)$ линейно независимы на множестве $\bigcup_{j \neq j_0} L_j \cup (L_{j_0} \cap \Delta_r)$. Действительно, если бы

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{k_j}(x) + a_{N+1} \chi_r(x) = 0, \text{ при } x \in \bigcup_{j \neq j_0} L_j \cup (L_{j_0} \cap \Delta_r),$$

то, ввиду того, что оба множества $L_{j_0} \cap \Delta_r'$ и $L_{j_0} \cap \Delta_r''$ не пусты и функции $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$ принимают постоянные значения на множестве L_{j_0}, получаем $a_{N+1} = 0$. Откуда, так как функции $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$ линейно независимы на множестве $\bigcup_{j=1}^{N} L_j$, получаем $a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$. Согласно выбору функции $\chi_r(x)$ имеем, что если функция

$$\left| \chi_r(x) + \sum_{j=1}^{N} a_j^{(r)} \chi_{k_j}(x) \right| [M(x)]^{-1} \in L^q[0,1],$$

то выражение $\left| \chi_r(x) + \sum_{j=1}^{N} a_j^{(r)} \chi_{k_j}(x) \right|$ равно нулю на множестве $\bigcup_{j \neq j_0} L_j \cup (L_{j_0} \cap \Delta_r)$, что противоречит линейной независимости функций $\chi_{k_1}(x), \cdots, \chi_{k_N}(x)$, $\chi_r(x)$ на множестве $\bigcup_{j \neq j_0} L_j \cup (L_{j_0} \cap \Delta_r)$. Следовательно, в замыкании каждого множества L_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ есть только одна точка x_j, в которой функция $M(x)$ имеет особенность. Для завершения доказательства импликации $\delta_1) \Rightarrow \delta_3)$ остается проверить выполнение второй части условия Б) (выполнение первой части — когда x_j двоично иррациональна, очевидно). Допустим, что точка x_j двоично рациональна и $M(x)$ имеет особенности относительно обоих множеств $(0, x_j) \cap L_j$ и $(x_j, 1) \cap L_j$. Взяв функцию $\chi_{r_1}(x)$, для которой точка x_j является центром интервала Δ_{r_1}, подобными рассуждениями, что и выше, придем к противоречию.

Импликация $\delta_1) \Rightarrow \delta_3)$ доказана.

Перейдем к доказательству импликации $\delta_3) \Rightarrow \delta_1)$. Ввиду того, что атомы $\{L_j\}_{j=1}^N$ кольца $S(\Delta_{k_1}', \Delta_{k_1}'', \cdots, \Delta_{k_N}', \Delta_{k_N}'')$ выбраны правильно, согласно лемме 1, функции $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$ будут линейно независимыми на множестве $\bigcup_{j=1}^{N} L_j$. Отсюда немедленно следует, что функция $M(x)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 1°. Для проверки выполнения условия 2) теоремы 1° сперва покажем, что для любого натурального числа r, отличного от всех k_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ и для произвольных $F_j \subset L_j (1 \leqslant j \leqslant N)$, где множества F_j — атомы кольца $S(\Delta_{k_1}', \Delta_{k_1}'', \cdots, \Delta_{k_N}', \Delta_{k_N}'', \Delta_r', \Delta_r'')$, существуют действительные числа c_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{k_j}(x) + \chi_r(x) = 0, \text{ при } x \in \bigcup_{j=1}^{N} F_j = F. \tag{3.18}$$

Предположим, что функции $\chi_r(x), \chi_{k_1}(x), \cdots, \chi_{k_N}(x)$ линейно независимы на множестве F, тогда линейные комбинации этих функций на F образуют $(N+1)$-мерное эвклидово пространство. Но, так как все рассмотренные функции постоянны на множествах $F_j\ (1 \leqslant j \leqslant N)$, то это пространство содержится в N-мерном эвклидовом пространстве линейных комбинаций характеристических функций множеств $F_j\ (1 \leqslant j \leqslant N)$. Откуда приходим к противоречию. Значит существуют числа $\{a_j\}_{j=1}^{N+1}$ (не все a_j равны нулю), для которых

$$\sum_{j=1}^{N+1} a_j \chi_{k_j}(x) + a_{N+1} \chi_r(x) = 0, \text{ при } x \in F.$$

Так как $F_j \subset L_j\ (1 \leqslant j \leqslant N)$ и функции $\{\chi_{k_i}(x)\}_{i=1}^{N}$ линейно независимы на множестве $\bigcup\limits_{j=1}^{N} L_j$, то получаем, что $a_{N+1} \neq 0$, откуда приходим к соотношению (3.18).

Для любого натурального числа $r\ (r \neq k_j;\ 1 \leqslant j \leqslant N)$ рассмотрим все атомы F_j кольца $S(\Delta_{k_1}', \Delta_{k_1}'', \cdots, \Delta_{k_N}', \Delta_{k_N}'', \Delta_r', \Delta_r'')$, относительно которых функция $M(x)$ имеет особенности. Очевидно, что количество этих атомов равно N и $F_j \subset L_j\ (1 \leqslant j \leqslant N)$. Тогда из равенства (3.18) будет следовать выполнение условия 2) теоремы 1°.

Для завершения доказательства теоремы нам остается показать, что если система $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$, то сопряженная ей система функций $\{\psi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ полна в $L^{p'}[0,1]$.

Предположим, что для некоторой функции $f(x) \in L^{p'}[0,1]$

$$\int_0^1 f(x)\, \psi_{n_i}(x)\, dx = 0 \quad (i=1, 2, \cdots). \tag{3.19}$$

Из эквивалентности условий δ_1) и δ_3) следует существование атомов $L_j\ (1 \leqslant j \leqslant N)$ кольца $S(\Delta_{k_1}', \Delta_{k_1}'', \cdots, \Delta_{k_N}', \Delta_{k_N}'')$ и единственных точек $x_j \in \overline{L}_j\ (1 \leqslant j \leqslant N)$, для которых выполняются условия А), Б) и В). Пусть $\{\Gamma_l\}_{l=1}^{2^{m+1}}$ — все интервалы Хаара, длина которых равна $1/2^{m+1} = 1/2\,|\Delta_{k_N}|$. Выберем из них те интервалы $\Gamma_{l_j}\ (1 \leqslant j \leqslant N)$, для которых $x_j \in \overline{\Gamma}_{l_j}$ и функция $M(x)$ в точке x_j имеет особенность относительно множества Γ_{l_j}. Согласно условию 2) теоремы 1° имеем

$$\psi_{n_i}(x) = [M(x)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} a_j^{(n_i)} \chi_{k_j}(x) = \chi_{n_i}(x) \right]. \tag{3.20}$$

Так как функции

$$\left| \sum_{j=1}^{N} a_j^{(n_i)} \chi_{k_j}(x) + \chi_{n_i}(x) \right|, \text{ при } n_i \leqslant 2^{m+1}, \tag{3.21}$$

линейно независимы на отрезке $[0,1]$, тождественно равны нулю на множестве $\Gamma = [0,1] - \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_{i_j}$ и принимают постоянные значения на каждом множестве Γ_i $(1 \leqslant i \leqslant 2^{m+1})$, то получаем, что линейные комбинации этих функций образуют $(2^{m+1} - N)$-мерное эвклидово пространство характеристических функций $\Gamma_i (i \neq i_j;\ 1 \leqslant j \leqslant N)$, то эти пространства совпадают. Откуда будем иметь, что характеристическая функция любого множества $\Gamma_i (i \neq i_j;\ 1 \leqslant j \leqslant N)$ равна линейной комбинации функций (3.21). Следовательно, отсюда и из условий (3.19) и (3.20) получаем

$$\int_{\Gamma_i} f(t)\, [M(t)]^{-1}\, dt = 0 \quad (i \neq i_j;\ 1 \leqslant j \leqslant N). \tag{3.22}$$

Ввиду того, что функция $M(x)$ не имеет особенностей во множестве Γ, то из условия (3.20) получаем, что если носитель Δ_{n_i} некоторой функции Хаара $\chi_{n_i}(x)$ лежит в Γ_i $(i \neq i_j;\ 1 \leqslant j \leqslant N)$, то

$$\psi_{n_i}(x) = [M(x)]^{-1}\, \chi_{n_i}(x) \in L^q[0,1].$$

Отсюда и из условия (3.19) следует, что для любой функции Хаара $\chi_{n_i}(x)$, носитель которой лежит во множестве $\Gamma_i (i \neq i_j;\ 1 \leqslant j \leqslant N)$

$$\int_{\Gamma_i} f(t)\, [M(t)]^{-1}\, \chi_{n_i}(t)\, dt = 0. \tag{3.23}$$

Из (3.22) и (3.23) получаем, что $f(x)\,[M(x)]^{-1} = 0$, при $x \in \Gamma$, следовательно

$$f(x) = 0, \text{ при } x \in \Gamma. \tag{3.24}$$

Обозначим через $\{\chi_{j_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ все функции Хаара, носители которых лежат в Γ_{i_j} $(1 \leqslant j \leqslant N)$. Из равенств (3.20) и из того, что $\psi_{n_i}(x) \in L^q[0,1] (i = 1, 2, \cdots)$ будем иметь, что все функции $\psi_{j_i}(x)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ равны нулю на множестве $\Gamma - \Gamma_{i_j}$. Следовательно, отсюда и из условий (3.24) и (3.19) получаем, что

$$\int_{\Gamma_{i_j}} f(t)\, \psi_{j_i}(t)\, dt = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant N). \tag{3.25}$$

Полагая

$$\varphi_{j_i}(x) = \begin{cases} \psi_{j_i}(x), & \text{при } x \in \Gamma_{i_j} \\ 0, & \text{при } x \in [0,1] - \Gamma_{i_j}, \end{cases} \tag{3.26}$$

получим, что система $\{\varphi_{j_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ биортогональна к системе $\{M(x)\, \chi_{j_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$. Транспонируем функции $M(x)\, \chi_{j_i}(x)$ и $\varphi_{j_i}(x)$ $(i = 1, 2, \cdots)$

заменой линейного переменного с интервала $\Gamma_{i_j} = (a_j, b_j)$ на интервал (0,1). Очевидно, что функция

$$M_j(x) = M[(b_j - a_j)x + a_j], \quad x \in [0,1]$$

в точке

$$y_j = \frac{x_j - a_j}{b_j - a_j}$$

удовлетворяет условию γ_3) теоремы 6, откуда получим, что система, полученная транспонированием системы функций $\{\varphi_{i_j}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ с интервала Γ_{i_j} на (0,1) полна в $L^p[0,1]$. Отсюда и из условий (3.25) и (3.26) следует

$$f(x) = 0, \text{ при } x \in \Gamma_{i_j} \quad (1 \leqslant j \leqslant N). \tag{3,27}$$

Из (3.27) и (3.29) получаем, что $f(x) \equiv 0$, при $x \in [0,1]$. Теорема 8 полностью доказана.

Напомним определение системы Уолша-Пэли. Положим $W_0(x) = 1$; если

$$n = \sum_{i=1}^{q} 2^{m_i}, \quad m_q = [\log_2 n]. \tag{3.28}$$

Положим

$$W_n(x) = \prod_{i=1}^{q} r_{m_i}(n). \tag{3.29}$$

где $r_m(x)$ — функции Радемахера:

$$r_m(x) = \operatorname{sign}(\sin 2^{m+1} \pi x), \quad m = 0,1,\cdots.$$

Имеет место следующая

Теорема 9. *Пусть $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система Уолша-Пэли и N — некоторое натуральное число, где*

$$N = \sum_{i=1}^{m} 2^{N_i}, \quad N_m = [\log_2 N], \tag{3.30}$$

есть двоичное разложение числа N. Пусть, далее, функция

$$M(x) \in L^p[0,1], \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

ε_1) *Система $\{M(x) W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$.*

ε_2) *Система $\{M(x) W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ замкнута минимальна в $L^p[0,1]$ и сопряженная ей система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ полна относительно $L^p[0,1]$.*

ε_3) *Существуют атомы L_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ кольца*

$$S(\Delta^{1}_{2^{N_1}+1}, \Delta^{2}_{2^{N_1}+1}, \cdots, \Delta^{2^{N_1}}_{2^{N_1}+1}, \Delta^{1}_{2^{N_2}+1}, \Delta^{2}_{2^{N_2}+1}, \cdots, \Delta^{1}_{2^{N_i}+1},$$

$$\Delta^{*}_{2^{N_1+1}}, \ldots, \Delta^{*}_{2^{N_m+1}})$$

и для каждого L_j *только одна точка* x_j, $x_j \in \overline{L}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$ *такие, что выполняются условия* А), Б) *и* В) *теоремы* 8.

Доказательство. Согласно теореме 8 условие ε_3) эквивалентно тому, что система $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, где $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — система, полученная из системы Хаара удалением из нее всех функций $\chi_{N_i}^{(k)}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant k \leqslant 2^{N_i})$, была замкнутой минимальной системой в $L^p[0,1]$. Следовательно, для доказательства эквивалентности условий ε_1) и ε_3), нам нужно показать, что из замкнутости и минимальности системы $\{M(x)W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ в $L^p[0,1]$ следует замкнутость и минимальность в $L^p[0,1]$ системы $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ и наоборот. Сначала предположим, что система $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$. Согласно теореме 1° для доказательства замкнутости и минимальности в $L^p[0,1]$ системы $\{M(x)W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ нужно показать, во-первых, что если некоторая функция

$$\left[\sum_{i=0}^{N-1} b_i W_i(x)\right][M(x)]^{-1} \in L^q[0,1], \tag{3.31}$$

то $b_0 = b_1 = \cdots = b_{N-1} = 0$, а во-вторых — что для любого натурального числа r $(r \geqslant N)$ существуют действительные числа $b_i^{(r)}$ $(0 \leqslant i \leqslant N-1)$, для которых функция

$$\varphi_r(x) = \left[W_r(x) + \sum_{i=0}^{N-1} b_i^{(r)} W_i(x)\right][M(x)]^{-1} \in L^q[0,1]. \tag{3.32}$$

Очевидно, из условий (3.31) следует, что

$$\left[\sum_{i=0}^{N-1} b_i W_i(x)\right] W_N(x)[M(x)]^{-1} \in L^q[0,1]. \tag{3.33}$$

Если число N определяется равенством (3.30), то умножая первые функции системы Уолша-Пэли $W_0(x), W_1(x), \cdots, W_{N-1}(x)$ на функцию $W_N(x)$, получаем все функции Уолша $W_n(x)$, номера которых находятся между числами 2^{N_i} и $2^{N_i+1}-1$ $(2^{N_i} \leqslant n \leqslant 2^{N_i+1}-1;\ 1 \leqslant i \leqslant m)$, т. е. получим целые „пачки" системы Уолша (см. [9], стр. 295)*.

Отсюда следует, что функция

$$\left[\sum_{i=0}^{N-1} b_i W_i(x)\right] W_N(x)$$

выражается некоторой линейной комбинацией $\chi_{N_i}^{(k)}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant 2^{N_i})$. Следовательно, из (3.33) и из замкнутости системы

* Этот факт имеет место и для системы в нумерации Уолша, в этом можно убедиться простой индукцией.

$\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ согласно теореме 1° получаем, что $b_0 = b_1 = \cdots = b_{N-1} = 0$. Сейчас проверим выполнение условия (3.32). Действительно, (3.32) эквивалентно тому, что

$$[M(x)]^{-1} \cdot \left[W_r(x) + \sum_{i=1}^{N-1} b_i^{(r)} W_i(x)\right] \cdot W_N(x) \in L^q[0,1]. \qquad (3.34)$$

Ввиду того, что функции Уолша $W_r(x) \cdot W_N(x)$ $(r > N)$ не находятся ни в одной из „пачек“ с номерами N_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ и выражаются через конечные линейные комбинации некоторых функций из системы $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, то из минимальности системы $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ согласно теореме 1° вытекает (3.34). Таким образом, импликация $\varepsilon_3) \Rightarrow \varepsilon_1)$ доказана. Импликация $\varepsilon_1) \Rightarrow \varepsilon_2)$ доказывается аналогичными рассуждениями.

Проверим импликацию $\varepsilon_1) \Rightarrow \varepsilon_2)$. Если для некоторой функции $f(x) \in L^p[0,1]$

$$\int_0^1 f(t)\, \varphi_n(t)\, dt = 0 \quad (n = N, N+1, \cdots),$$

то ввиду того, что функции $\varphi_n(x)$ $(n \geqslant N)$ определяются равенствами (3.32), будем иметь

$$\int_0^1 f(t)\, W_N(t)\, \psi_{n_i}(t)\, dt = 0,$$

где $\{\psi_{n_i}(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — сопряженная к системе $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ система функций. Откуда согласно теореме 8 следует, что $f(x) \equiv 0$. Теорема 9 доказана.

В заключение выражаю благодарность член-корреспонденту АН Армянской ССР А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.IV.1978

Կ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Որոշ սիստեմների մուլտիպլիկատիվ լրացման մասին (*ամփոփում*)

§ 1-ում L^p, $1 < p < \infty$, տարածություններում փակ մինիմալ սիստեմների համար գտնված են բավարար պայմաններ որպեսզի տրված սիստեմից կամայական վերջավոր քանակով ֆունկցիաներ հեռացնելուց հետո մնացած ֆունկցիաների սիստեմը, որևէ ֆունկցիայի վրա բազմապատկելով, հնարավոր չլինի դարձնել L^p-ի բազիս։

§ 2-ում ցույց է տրվում, որ ստացված թեորեմները հայտնի իմաստով վերջնական են։

§ 3-ում գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $M(x)$ ֆունկցիայի վրա, որպեսզի Հաարի սիստեմից կամայական վերջավոր թվով ֆունկցիաներ դուրս գցելուց հետո մնացած $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ սիստեմը $M(x)$-ի վրա բազմապատկելու միջոցով հնարավոր լինի դարձնել $L^p[0,1]$-ում $(1 < p < \infty)$ փակ մինիմալ սիստեմ։

Ապացուցվում է նաև, որ եթե $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ սիստեմը փակ մինիմալ է $L^p[0,1]$-ում, ապա նրա համալուծ սիստեմը լրիվ է $L^p[0,1]$-ում։ Նույնատիպ արդյունքներ ստացվում են նաև Ուոլշի սիստեմի համար։

Gh. S. GHAZARIAN. *On the multiplicative completion of some sistems* (summary)

In the § 1 of the paper sufficient conditions are stated for the closed minimal in L^p, $1 < p < \infty$, systems to have the following property: it is impossible to obtain a basis in L^p, $1 < p < \infty$, by taning the given system minus a finite number of elements and multiplying this by a measurable function.

In § 2 we show that the theorems proved in the 1 are in a sense final.

In the § 3 necessary and sufficient conditions on a function M for the $\{M x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ system to be closed and minimal in L^p, $1 < p < \infty$, are stated where $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ is a system $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ obtained from the Haar system $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ by deleting from it of any finite number of functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. P. Boas, H. Pollard.* The multiplicative completion of sets of function. Bull. Amer. Soc., 54, 1948, 518—522.
2. J. J. *Price, R. E. Zink.* On sets of functions that can be multiplicatively completed, Ann. of Math., (2), 82, 1965, 139—145.
3. *А. А. Талалян.* Представление измеримых функций рядами, УМН, 15, № 5, 1960, 77—141.
4. *А. А. Талалян.* О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-матем. наук, 10, № 3, 1957, 17—34.
5. *Ben-Ami Braun.* On the multiplicative completion of certain basic sequences in L^p, $1 < p < \infty$, Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1975.
6. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении базисных последовательностей до базисов в L_p, $1 < p < \infty$, ДАН Арм.ССР, LXII, № 4, 1976, 203—209.
7. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в L^p, $1 < p < \infty$, Analysis Math., 4, № 1, 1978.
8. *А. М. Олевский.* Об одной ортонормированной системе и ее применениях, Мат. сборник, 78 (113), № 3, 297—336.
9. *R. Paley.* A remarkable system of orthogonal functions, Proc. London Math. Soc., 34, 1932, 241—279.
10. *К. С. Казарян.* О базисах в L^p, $p > 1$, полученных умножением минимальных систем на функцию из L^p, ДАН Арм.ССР, LXIV, № 3, 1977, 151—155.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII, № 4, 1978 Математика

Р. И. ОВСЕПЯН

О ПУСТОМ МНОЖЕСТВЕ КАК M-МНОЖЕСТВЕ В КЛАССЕ ОБЩИХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Напомним, что множество $E \subset [a, b]$ называется M-множеством для ортонормированной (на $[a, b]$) системы $(\varphi_n)_1^\infty$, если существует ряд

$$\sum_1^\infty d_n \cdot \varphi_n(x), \tag{1}$$

сходящийся к нулю на $[a, b] \setminus E$, причем $\sum_1^\infty |d_n| > 0$*. В протином случае E называется U-множеством.

Известно, что пустое множество является U-множестном для тригонометрической системы [1], системы Хаара [2] и системы Уолша [2]. В связи с этим возник вопрос, сформулированный в работах [3—5]: существует ли такая ограниченная в совокупности, ортонормированная, полная в $L^2[0,1]$ система (кратко ООНПС) непрерывных функций $(\varphi_n)_1^\infty$, что пустое множество является для нее M-множеством? Положительный ответ на этот вопрос был дан в работе [6]. Здесь продолжается исследование в этом направлении.

Выясняется как влияют на рассматриваемый вопрос скорость стремления к нулю коэффициентов ряда (1) и перестановки системы $(\varphi_n)_1^\infty$.

Теорема 1. *Для любой последоватгльности $(b_n)_1^\infty$,*

$$b_n^2 \downarrow 0, \ \sum_1^\infty b_n^2 = \infty \tag{2}$$

существует последовательность $(d_n)_1^\infty$

$$d_n^2 \leqslant b_n^2, \ \sum_1^\infty d_n^2 = \infty \tag{3}$$

и ООНПС $(\varphi_n)_1^\infty$ непрерывных на $[0,1]$ функций такие, что ряд (1) сходится всюду на $[0, 1]$ к нулю.

В связи с этой теоремой отметим, что В. А. Скворцов при таких же условиях на коэффициенты (a_n) построил [7] нуль-ряд (сходимость к нулю почти всюду) $\sum a_n \cdot \chi_n(t)$ по системе Хаара. Вопрос о

* Такие ряды называются нуль-рядами.

существовании такого (в смысле скорости коэффициентов) тригонометрического ряда был поставлен П. Л. Ульяновым [5] и пока не решен.

Теорема 2. *Для любого $p>2$ существует ОНПС $(\varphi_n)_1^\infty$, $\varphi_n \in C[0,1]$ такая, что в классе коэффициентов из l^p пустое множество является M-множеством и для любого $r<p$ в классе l^r — U-множеством.*

Теорема 3. *Существуют ОНПС $(\varphi_n)_1^\infty$, $\varphi_n \in C[0,1]$ такие, что пустое множество является*

а) *M-множеством при любой перестановке системы (φ_n),*

б) *U-множеством при любой перестановке системы (φ_n),*

в) *U-множеством при одном порядке и M-множеством при другом порядке системы (φ_n).*

В связи с пунктом б) отметим результат Г. М. Мушегяна [8], который в частности утверждает, что при некотором ограничении на коэффициенты рядов по системе Хаара, пустое множество является U-множеством (в классе этих рядов) при любых перестановках по системе Хаара.

Доказательство теоремы 1

Лемма 1. *Для любой числовой последовательности $(a_n)_0^\infty$, удовлетворяющей условиям*

$$a_n>0 \ \forall n \geqslant 0, \ a_n \to 0, \ \sum_0^\infty a_n^2=\infty, \tag{4}$$

существует на [0,1] ортонормированная система $(\psi_n)_0^\infty$ непрерывных функций с условием

$$\sum_0^\infty a_n \cdot \psi_n(x)=0 \text{ всюду на } [0,1]. \tag{5}$$

Некоторые элементы рассуждения заимствованы из работ [3—4].

Доказательство леммы 1. Положим

$$B_n^2=\frac{a_0^2}{\sum\limits_0^n a_i^2}, \ n \geqslant 0, \tag{6}$$

$$A_n^2=B_{n-1}^2-B_n^2=\frac{a_0^2 \cdot a_n^2}{\left(\sum\limits_0^{n-1} a_i^2\right) \cdot \left(\sum\limits_0^n a_i^2\right)}, \ n \geqslant 1. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$B_0^2=1, \ B_n^2 \to 0, \ \sum_1^\infty A_n^2=1. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что существует последовательность $(\alpha_n)_1^\infty$ с условиями

$$\alpha_n \to 0, \ \sum_1^\infty \frac{2 \cdot A_i^2}{\alpha_i^2} = 1. \tag{9}$$

Пусть

$$\beta_k = \frac{2 \cdot A_k^2}{\alpha_k^2}. \tag{10}$$

Из (9) следует

$$\beta_i > 0, \ \sum_1^\infty \beta_i = 1. \tag{11}$$

Пусть $(\Delta_i)_1^\infty$ — занумерованные слева направо непересекающиеся интервалы отрезка $[0,1]$, удовлетворяющие условию

$$\text{mes } \Delta_i = \beta_i. \tag{12}$$

Пусть $(x_{i-1}, x_i) \equiv \Delta_i, \ i \geqslant 1$.

Рассмотрим функцию

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \alpha_i \cdot \sin \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \pi, & x \in \bar{\Delta}_i, \ i \geqslant 1 \\ 0 & x = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Из (8)—(12) следует нормированность (в L^2) и непрерывность функции $\psi_0(x)$ на $[0,1]$.

Пусть

$$p_n = \frac{B_n}{A_n \cdot B_{n-1}} = \frac{\sum\limits_0^{n-1} a_i^2}{a_0 \cdot a_n}, \quad q_n = \frac{A_n}{B_n \cdot B_{n-1}} = \frac{a_n}{a_0} \tag{14}$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} -p_n \cdot \psi_0(x) & x \in \bar{\Delta}_n \\ q_n \cdot \psi_0(x) & x \in [x_n, 1] \quad n \geqslant 1 \\ 0 & x \in [0, x_{n-1}]. \end{cases} \tag{15}$$

Непрерывность и, следовательно, ограниченность функций ψ_n, $n \geqslant 0$ очевидна. В силу (10)—(13) имеем

$$\int_{\Delta_n} \psi_0^2(x)\, dx = A_n^2, \ n \geqslant 1, \tag{16}$$

откуда в силу (7) получаем

$$\int_{x_n}^1 \psi_0^2\, dx = B_n^2, \ n \geqslant 0. \tag{17}$$

Из условий (7)—(17) следует ортонормированность системы $(\psi_n)_0^\infty$. Из (6)—(8) и (14) вытекает

$$a_1 \cdot p_1 = a_0, \cdots, a_n \cdot p_n = a_0 + a_1 \cdot q_1 + \cdots + a_{n-1} \cdot q_{n-1}, \ n \geqslant 2, \tag{18}$$

откуда следует

$$\sum_0^n a_i \cdot \psi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, x_n] \\ \psi_0 \cdot (a_0 + a_1 \cdot q_1 + \cdots + a_{n-1} \cdot q_{n-1}), & x \in (x_n, 1], \end{cases}$$

а это равносильно условию (5).

Замечание 1. Числа α_n из (9) можно подчинить дополнительному требованию

$$p_n \cdot \alpha_n^2 \leqslant M \cdot 2^n, \ n \geqslant 1, \tag{19}$$

где M — постоянная (в дальнейшем также).

Пусть $S_n = \sum_0^n a_i^2$, тогда

$$\sum_1^\infty \frac{2 \cdot A_n^2}{\alpha_n^2} = 2 \cdot a_0^2 \cdot \sum_1^\infty \frac{a_n^2}{S_{n-1} \cdot S_n \cdot \alpha_n^2} \leqslant 2 \cdot a_0^2 \cdot \sum_1^\infty \frac{a_n^2}{S_{n-1}^2} \cdot \frac{1}{\alpha_n^2}.$$

Положим $a_n^2/S_{n-1}^2 = \gamma_n^2 \ (\downarrow 0)$. В силу (4) имеем

$$\sum_1^\infty \gamma_n^2 < \infty.$$

Пусть $\overline{\beta}_n \to \infty$ и такова, что $\sum_1^\infty \gamma_n^2 \cdot \overline{\beta}_n < \infty$. Если n_i таково, что $\gamma_{n_i}^2 \times \times \overline{\beta}_{n_i} < 2^{-n_i}$, то положим $\beta_{n_i} = 2^{-n_i} \cdot \gamma_{n_i}^{-2}$, а в остальных случаях полагаем $\beta_n = \overline{\beta}_n$. Ясно, что $\beta_n \geqslant \overline{\beta}_n \ \forall n \geqslant 1$ и потому $\beta_n \to \infty$ и $\gamma_n^2 \cdot \beta_n \geqslant \geqslant 2^{-n}$. Ясно также, что $\sum \gamma_n^2 \cdot \beta_n < \infty$. Если положить $\alpha_n = \beta_n^{-1/2}$, то из вышеизложенного получим

$$\alpha_n \to 0, \ \sum_1^\infty \frac{2 \cdot A_n^2}{\alpha_n^2} < \infty, \ \alpha_n^2 \cdot p_n^2 = \alpha_n^2 \cdot \frac{S_{n-1}^2}{(a_0 \cdot a_n)^2} \leqslant \frac{2^n}{a_0^2}. \tag{20}$$

В случае необходимости, заменяя α_n на $\mathrm{const} \cdot \alpha_n$, получим для α_n условия (9), (19).

Замечание 2. Если наряду с (4) $a_n \to 0$, то $q_n = \dfrac{a_n}{a_0} \to 0$, а $p_n = \dfrac{1}{a_0} \cdot \dfrac{S_{n-1}}{a_n} \to \infty$ и потому в силу (13), (15) и замечания 1 имеем

$$\|\psi_n\|_\infty \leqslant \mathrm{const} \cdot p_n \cdot \alpha_n \leqslant M \cdot 2^{n/2}. \tag{21}$$

Обозначим

$$\psi_m^i(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{x_i-x_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sin m\cdot\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\pi, & x\in\bar{\Delta}_i\\ 0 & x\bar{\in}\bar{\Delta}_i.\end{cases}\tag{22}$$

Ясно, что система $(\Phi_n)_1^\infty\equiv(\psi_n)_0^\infty\cup(\psi_m^i)_{m\geq2;\,i\geq1}$ ортонормирована и состоит из непрерывных на [0,1] функций. Кроме того она полна в $L[0,1]$, ибо конечными линейными комбинациями функций ψ_n мы можем получить любую из функций ψ_1^i, а при любом фиксированном i система $(\psi_m^i)_{m=1}^\infty$ полна в $L(\Delta_i)$, ибо система $(\sin nx)_1^\infty$ полна в $L[0,\pi]$.

Замечание 3. Поскольку система (ψ_m^i; $m\geq2$, $i\geq1$) состоит из непрерывных на [0,1] (следовательно ограниченных) функций и содержит равномерно ограниченную подсистему (например, $(\psi_m^1)_{m=2}^\infty$), то, как известно [9] в L^2-замыкании линейной оболочки системы (ψ_m^i; $m\geq2$, $i\geq1$) существует полная равномерно ограниченная ортонормированная система $(t_n)_1^\infty$ непрерывных функций.

Таким образом, система $(\psi_n)_0^\infty\cup(t_n)_1^\infty$ ортонормирована и полна в $L^2[0,1]$, и состоит из непрерывных функций.

Напомним свойства матриц А. М. Олевского [10]

$$A_n=\|a_{ij}^n\|,\ 1\leq i,\ j\leq2^n;\ n\geq1.$$

1°. A_n имеет порядок 2^n и при любом n ортонормирована,

2°. Элементы первого столбика $a_{i1}^n=2^{-n/2}$, $1\leq i\leq2^n$,

3°. $\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_{ij}^n=0\ \forall j\geq2$.

4°. $\sum\limits_{j=1}^{2^n}|a_{ij}^n|<M$, $\sum\limits_{i=1}^{2^n}|a_{ij}^n|\leq2^{n/2}\ \forall j\geq1$.

5°. $\sum\limits_{j=1}^{2^n}\left|\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}^n\right|<M\cdot2^{n/2}$.

Пусть теперь (b_n) удовлетворяет условиям (2). Выберем числа d_n так, что

$$d_n=d_{2^i}>0,\ \ 2^{i-1}<n\leq2^i;\ d_{2^i}\leq|b_{2^i}|;\ d_{2^i}^2\,2^i\to0;\ \sum_1^\infty d_{2^i}^2\,2^i=\infty.\tag{23}$$

Ясно, что для d_n выполняются условия (3).

Подставляя в лемме 1 вместо $(a_n)_0^\infty$ последовательность $(d_{2^n}\cdot2^{n/2})_1^\infty$, получим

$$\sum_1^\infty d_{2^n}\cdot2^{n/2}\cdot\psi_{n-1}(x)\equiv0.\tag{24}$$

Теперь введем обозначения для векторов (в виде столбцов)

$$F_0 = (\psi_0, t_1);\ F_1 = (\psi_1, t_2);\ F_2 = (\psi_2, t_3, t_4, t_5),$$
$$F_3 = (\psi_3, t_6, t_7, \cdots, t_{12}) \text{ и т. д.} \tag{25}$$
$$(\varphi_1, \varphi_2) = A_1 \cdot F_0;\ (\varphi_3, \varphi_4) = A_1 \cdot F_1,$$
$$(\varphi_5, \cdots, \varphi_8) = A_2 \cdot F_2;\ (\varphi_9, \cdots, \varphi_{16}) = A_3 \cdot F_3 \text{ и т. д.} \tag{26}$$

В силу свойства 1° и того, что $(\psi_n)_0^\infty \cup (t_n)_1^\infty$ — ОНПС система $(\varphi_i)_1^\infty$ также будет ОНПС. Ясно, что непрерывность функций сохраняется. Равномерная ограниченность системы (φ_n) следует из замечания 3, (21), 2° и первого неравенства в 4°. Ряд $\sum d_n \cdot \varphi_n$ является искомым.

Действительно, в силу (23), (26) имеем

$$\sum_1^\infty d_n \cdot \varphi_n = d_2 \cdot (\varphi_1 + \varphi_2) + d_4 \cdot (\varphi_3 + \varphi_4) + d_8 \cdot (\varphi_5 + \cdots + \varphi_8) + \cdots.$$

Из (25), (26), 2°, 3° следует

$$\sum_{2^{n-1}+1}^{2^n} \varphi_i = 2^{n/2} \cdot \psi_{n-1},$$

откуда в силу (24) вытекает

$$d_2 \cdot (\varphi_1 + \varphi_2) + \sum_{n=2}^\infty d_{2^n} \cdot \left(\sum_{2^{n-1}+1}^{2^n} \varphi_i \right) = \sum_1^\infty d_{2^n} \cdot 2^{n/2} \cdot \psi_{n-1} = 0.$$

Обозначим

$$\delta_n (x) = \max_{2^{n-1} < m \leqslant 2^n} \left| d_{2^n} \cdot \sum_{2^{n-1}+1}^{m} \varphi_i (x) \right|.$$

Так как

$$\left| \sum_{2^{n-1}+1}^{m} \varphi_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{m} \left(a_{i1}^n \cdot \psi_n + \sum_{j=2}^{2^n} a_{ij}^n \cdot t_{r(n)+j} \right) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|\psi_n\|_\infty \cdot \sum_1^m |a_{i1}| + \sup_n \|t_n\|_\infty \cdot \sum_{j=2}^{2^n} \left| \sum_{i=1}^m a_{ij}^n \right|,$$

то в силу 5° и равномерной ограниченности системы (t_n) получим

$$\delta_n (x) \leqslant |d_{2^n}| \cdot \|\psi_n\|_\infty \cdot \sum_1^m |a_{i1}| + M \cdot |d_{2^n}| \cdot 2^{n/2}.$$

Второе слагаемое сходится к нулю в силу (23), а первое — поскольку $\psi_n = 0$, если $x \leqslant x_{n-1}$ и $x_n \uparrow 1$. Таким образом, $\delta_n (x) \to 0$ всюду на $[0,1]$ и, следовательно, ряд $\sum d_n \cdot \varphi_n$ сходится к нулю на $[0,1]$ и в силу (23) является требуемым.

З а м е ч а н и е 4. Рассмотрим матрицу $\|d_{ij}\|$

$$d_{1j} = a_j \ (j \geqslant 1), \ d_{i+1,i} = -p_i \ (i \geqslant 1), \ d_{ij} = q_{i-1} \ (j \geqslant i \geqslant 2),$$

остальные $d_{ij} = 0$.

Утверждение леммы 1 означает, что последонательность $(a_n)_0^\infty$ ортогональна ко всем столбцам матрицы $\|d_{ij}\|$, а из конструкции этой матрицы следует единственность (с точностью до постоянного множителя, отличного от нуля) такой последовательности (при условии (4)) и, следовательно, единственность ряда (5).

Замечание 5. Поскольку в любой точке отрезка [0,1] только конечное число членов ряда (5) отлично от нуля, то он сходится к нулю при любых перестановках членов.

Доказательство теоремы 2

Лемма 2. *На* $[0,\pi]$ *существует ОНПС* $(\Phi_n)_1^\infty$ *непрерывных функций такая, что* $\Phi_1(x) \equiv \sin x$, $\Phi_n(0) = \Phi_n(\pi) = 0$, $\forall n \geqslant 2$ *существуют точки* $y_i \in (0, \pi)$ $(i \geqslant 1)$ *такие, что*

$$\Phi_n(y_i) = 0 \ \forall n > i, \ \Phi_i(y_i) \neq 0. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $\delta_n > 0$, $(y_n)_1^\infty$ — различные точки из $(0,\pi)$ и $(f_n)_1^\infty$ — произвольная ОНПС на $[0,\pi]$. Выберем настолько большое N_1, что

$$\|f_1 - S_{N_1}(f_1; \sin nx)\| < \delta_1/2. \tag{27}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — L^2-норма, S_{N_1} — N_1-я частная сумма ряда Фурье f_1 по $(\sin nx)_1^\infty$ на $[0,\pi]$.

Возьмем достаточно малые (точнее ниже) числа $\varepsilon_{mn} > 0$, $m, n \geqslant 2$. Для каждого ε_{2n} берем произвольную непрерывную на $[0,\pi]$ функцию l_n^2 с условиями

$$l_n^2(0) = l_n^2(y_1) = l_n^2(\pi) = 0, \ n \geqslant 2, \tag{28}$$

$$l_2^2(y_2) \neq 0, \ l_n^2(y_2) = 0, \ n > 2, \tag{29}$$

$$\int_0^\pi l_n^2 \cdot \sin x\,dx = 0 \ \ n \geqslant 2; \int_0^\pi l_n^2 \cdot l_2^2\,dx = 0, \ n > 2, \tag{30}$$

$$\|l_2^2\| = 1; \ \|l_n^2 - \sin nx\| \leqslant \varepsilon_{2n}, \ n \geqslant 2. \tag{31}$$

При подходящем выборе чисел ε_{2n} получим [11] (в силу (30)), что система $\sin x \cup (l_n^2)_{n=2}^\infty$ — базис в $L^2[0,\pi]$. Ортогонализуем систему $(l_n^2)_{n=3}^\infty$ методом Шмидта и полученную систему $S(l_n^2;\ n \geqslant 3)$ обозначим через $(\Phi_n^2)_3^\infty$. Положим еще $\Phi_2^2 \equiv l_2^2$.

Поскольку $\bigvee_3^\infty l_n^2 = \bigvee_3^\infty \Phi_n^3 \left(\bigvee_3^\infty l_n^2 - L^2\text{-замыкание линейной оболоч-}\right.$ ки системы $\left.(l_n^2)_3^\infty\right)$, то, учитывая вышесказанное получим, что $\sin x \cup \cup (\Phi_n^2)_2^\infty$ — ОНПС.

Ясно также, что все Φ_n^2 непрерывны на $[0,\pi]$ и что за счет малости чисел ε_{2n} (в силу (31)) можно обеспечить наперед заданную малость величин $\|\Phi_n^2 - \sin nx\|$, $2 \leqslant n \leqslant N_1$. Кроме того имеем

$$\Phi_n^2(0) = \Phi_n^2(\pi) = 0, \ n \geqslant 2; \ \Phi_2^2(y_2) \neq 0, \ \Phi_2^2(y_1) = 0. \tag{32}$$

Опишем еще один шаг.

Для каждого ε_{3n} $(n \geqslant 3)$ берем произвольную непрерывную на $[0,\pi]$ функцию l_n^3 с условиями

$$l_n^3(0) = l_n^3(\pi) = l_n^3(y_1) = l_n^3(y_2) = 0, \ n \geqslant 3; \ l_3^3(y_3) \neq 0, \ l_n^3(y_3) = 0, \ \ n > 3, \tag{33}$$

$$\int_0^\pi l_n^3 \cdot \sin x dx = \int_0^\pi l_n^3 \cdot \Phi_2^2 \, dx = 0, \ n \geqslant 3; \ \int_0^\pi l_n^3 \cdot l_3^3 \, dx = 0, \ n > 3, \tag{34}$$

$$\|l_3^3\| = 1, \ \|l_n^3 - \Phi_n^2\| < \varepsilon_{3n}, \ n \geqslant 3. \tag{35}$$

Систему $S(l_n^4;\ n \geqslant 4)$ обозначим через $(\Phi_n^3)_4^\infty$. Положим еще $\Phi_3^3 \equiv l_3^3$. Рассуждая как выше, получим, что при достаточно малых ε_{mn} система $\sin x \cup \Phi_2^2 \cup (\Phi_n^3)_3^\infty$ — ОНПС и состоит из непрерывных функций. Из предыдущего шага и (35) следует, что величины $\|\Phi_n^3 - \sin nx\|$ $(3 \leqslant n \leqslant N_1)$ можно считать сколь угодно малыми.

Далее имеем

$$\Phi_n^3(0) = \Phi_n^3(\pi) = 0, \ n \geqslant 3; \ \ \Phi_3^3(y_3) \neq 0, \ \Phi_3^3(y_1) = \Phi_3^3(y_2) = 0. \tag{36}$$

Продолжим этот процесс до шага N_1. Получим полную ортонормированную систему $\sin x \cup (\Phi_n^n)_2^{N_1} \cup (\Phi_n^{N_1})_{N_1+1}^\infty$ непрерывных функций со свойствами

$$\Phi_n^n(0) = \Phi_n^n(\pi) = 0, \quad \Phi_n^n(y_n) \neq 0 \ \forall n \leqslant N_1,$$

$$\Phi_n^{N_1}(0) = \Phi_n^{N_1}(\pi) = 0, \quad n > N_1; \ \Phi_n^n(y_i) = 0 \ \ n > i. \tag{37}$$

Обозначим $\Phi_1 = \sin x$, $\Phi_n = \Phi_n^n(x)$, $2 \leqslant n \leqslant N_1$. Нетрудно видеть, что выбирая числа ε_{mn} достаточно малыми можно гарантировагь такую малость еeличин $\|\Phi_n - \sin nx\|$, $2 \leqslant n \leqslant N_1$, что в силу (27) будсм иметь

$$\|f_1 - Pf_1\| < \delta_1, \tag{38}$$

где Pf_1 — ортогональная проекция f_1 ня $\bigvee_1^{N_1} \Phi_n$. Первые N_1 функций искомой системы найдены.

Теперь надо брать N_2 настолько большим, что расстояние элемента f_2 до подпространства $\bigvee_1^{N_1}\Phi_n \vee \bigvee_{N_1+1}^{N_2} \Phi_n^{N_1}$ меньше, чем $\frac{1}{2}\cdot\delta_2$. Дальше надо повторить вышеизложенные рассуждения уже для точек y_n, $n > N_1$, причем роль функций $\sin nx$ теперь будут играть функции $\Phi_n^{N_1}$, $n > N_1$. В результате определятся функции Φ_n, $N_1 < n \leqslant N_2$ с условиями (26). При этом система $(\Phi_n)_1^{N_1} \cup (\Phi_n^{N_1})_{N_1+1}^{\infty}$ — ОНПС, состоит из непрерывных функций и еще

$$\|f_2 - Pf_2\| < \delta_2, \tag{39}$$

где Pf_2 — ортогональная проекция f_2 на $\bigvee_1^{N_2} \Phi_n$.

Продолжив этот процесс до бесконечности, мы получим искомую систему $(\Phi_n)_1^{\infty}$. Непрерывность и выполнение условий (26) и $\Phi_n(0) = \Phi_n(\pi) = 0$ очевидны, а полнота системы следует из условий (38), (39) и т. д., если δ_n достаточно малы, ибо система $(Pf_n)_1^{\infty}$ будет базисом в $L^2[0,\pi]$ [11]. Лемма 2 доказана.

Замечание 6. Несколько иным путем можно доказать следующее: если числовая матрица $\|\beta_{mn}\|$ удовлетворяет условию $|\beta_{mn}| < \text{const}$, $\beta_{mn} \underset{n}{\to} \beta_m$ $(\forall m)$ и $(y_n)_1^{\infty}$ — произвольная сходящаяся последовательность различных точек из $(0,1)$, причем $\lim y_n \in (0,1)$, то существует равномерно ограниченная ортонормированная полная система $(\varphi_n)_1^{\infty}$ такая, что $\varphi_m \in C^{\infty}[0,1]$,

$$\varphi_m(0) = \varphi_m(1) = 0 \ (\forall m) \ \text{и} \ \varphi_m(y_n) = \beta_{mn}.$$

Продолжим доказательство теоремы 2.

Пусть $(a_n)_0^{\infty}$ — произвольная числовая последовательность с условиями $a_n > 0$, $(a_n) \in l^p$ и $(a_n) \overline{\in} l^r$, если $r < p$. Поскольку $p > 2$, то (a_n) удовлетворяет условию (4). Применим к ней лемму 1. Далее, для каждого отрезка $\bar{\Delta}_i = [x_{i-1}, x_i]$ (см. доказательство леммы 1) отображаем на нее систему $(\Phi_n)_2^{\infty}$ из леммы 2 и вне $\bar{\Delta}_i$ полагаем равной нулю. Полученные системы обозначим через $(\psi_n^i)_{n=2}^{\infty}$, $i \geqslant 1$. Нетрудно видеть, что система $(\psi_n)_0^{\infty} \cup (\psi_n^i;\ n \geqslant 2,\ i \geqslant 1)$ — ОНПС на $[0,1]$ и состоит из непрерывных функций. Докажем, что эта система (обозначим ее через $(\varphi_n)_1^{\infty}$ независимо от порядка нумерации) удовлетворяет теореме 2.

Пусть $\sum_1^{\infty} b_n \cdot \varphi_n(x) = 0$ всюду. Нам удобно разбить этот ряд на подряды

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^i \cdot \psi_n^i,\ i \geqslant 1;\ \sum_0^{\infty} d_n \cdot \psi_n(x).$$

Для каждого i проходит следующее рассуждение: поскольку $\sum_{1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_n(x) = 0$ всюду, то на $\bar{\Delta}_i$ имеем

$$\sum_{0}^{\infty} d_n \cdot \psi_n + \sum_{n=2}^{\infty} b_n^i \cdot \psi_n^i = 0$$

и так как (в силу леммы 2)

$$\psi_n^i(y_1^i) = 0, \ n \geq 2, \text{ то } \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot \psi_n(y_1^i) = 0$$

и вследствие конструкции функций ψ_n имеем на всем $\bar{\Delta}_i$ $\sum_{0}^{\infty} d_n \cdot \psi_n(x) = 0$.

Таким образом

$$\sum_{0}^{\infty} d_n \cdot \psi_n(x) = 0, \ x \in [0, 1], \tag{40}$$

и в силу замечания 4 получим $d_n = a_n$, $n \geq 0$.

Теперь докажем, что все $b_n^i = 0$. В самом деле, из (40) следует, что $\sum_{n=2}^{\infty} b_n^i \cdot \psi_n^i = 0$ на $\bar{\Delta}_i$ и, следовательно, $\sum_{n=2}^{\infty} b_n^i \cdot \psi_n^i(y_2^i) = 0$. Но по лемме 2 $\psi_2^i(y_2^i) \neq 0$, $\psi_n^i(y_2^i) = 0$, $n > 2$, откуда следует, что $b_2^i = 0$ и т. д. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3

а) В силу замечания 5 для системы $(\varphi_n)_1^{\infty}$, построенной при доказательстве теоремы 2, пустое множество будет M-множеством после любой перестановки.

б) Требованию этого пункта удовлетворяет система из леммы 2, а из замечания 6 следует, что эта система может быть равномерно ограниченной (для этого надо в качестве $\|\beta_{mn}\|$ брать единичную матрицу).

На самом деле для этой системы верно более сильное утверждение: если ряд (1) для каждой точки при каком-либо порядке членов сходится к нулю хотя бы по подпоследовательности частных сумм, то все коэффициенты равны нулю.

в) Пусть $a_i \ (i \geq 1)$ — произвольные положительные числа и $\sum_{1}^{\infty} a_i^2 = 1$, b_i — отличные от нуля числа такие, что

$$\sum_{1}^{\infty} a_i \cdot b_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i \cdot b_i| = \infty, \tag{41}$$

$$(a_1, a_2) \text{ и } (b_1, b_2) \text{ — линейно независимы,} \tag{42}$$

существуют такие m' и m'', что

$$|b_{m'}| < a_{m'}, \quad |b_{m''}| > a_{m''}. \tag{43}$$

Обозначим $a_{i1} = a_i$. Из (42) следует, что существует единственный l^2-нормированный вектор $(a_{i2})_{i=1}^\infty$, $a_{i2} = 0$, $i > 3$, ортогональный к $(b_i)_1^\infty$ и $(a_{i1})_1^\infty$. Далее выбирается нормированный вектор $(a_{i3})_{i=1}^\infty$, $a_{i3} = 0$ $i > 4$, ортогональный к $(b_i)_1^\infty$, $(a_{i1})_1^\infty$, $(a_{i2})_1^\infty$. Продолжая так, мы получим матрицу $\|a_{ij}\|$, столбцы которой составляют ортонормированную и полную l^2-систему.

Докажем полноту. Пусть $(A_i)_1^\infty \in l^2$ и ортогонален ко всем столбцам $(a_{ij})_{i=1}^\infty$. Тогда в силу (42) получим

$$(A_i)_1^3 = u_3 \cdot (a_{i1})_1^3 + v_3 \cdot (b_i)_1^3; \; (A_i)_1^4 = u_4 \cdot (a_{i1})_1^4 + v_4 \cdot (b_i)_1^4$$

и вообще $(A_i)_1^n = u_n \cdot (a_{i1})_1^n + v_n \cdot (b_i)_1^n$.

Опять же в силу (42) получим $u = u_3 = u_4 = \cdots$; $v = v_3 = v_4 = \cdots$, т. е. $(A_i)_1^\infty = u \cdot (a_i)_1^\infty + v \cdot (b_i)_1^\infty$. Отсюда следует, что $v = 0$, ибо в противном случае $(A_i) \notin l^2$, поскольку $(b_i) \notin l^2$ (см. (41)).

Но так как $(A_i)_1^\infty$ и $(a_i)_1^\infty$ ортогональны, то $u=0$, т. е. $A_i = 0 \; \forall i$. Этими же рассуждениями можно получить утверждение: если $(A_i)_1^\infty$ ортогональна ко всем стобцам матрицы, то $(A_i)_1^\infty = v \cdot (b_i)_1^\infty$. В самом деле, сначала получим $(A_i)_1^\infty = u \cdot (a_i)_1^\infty + v \cdot (b_i)_1^\infty$ и из первого условия в (41) будет следовать $u = 0$.

С другой стороны, можно указать такую перестановку $\sigma(m)$ строчек матрицы $\|a_{mn}\|$, что если $(A_m)_1^\infty$ ортогональна ко всем столбцам новой матрицы $\|a_{\sigma(m)\,n}\|$, то $A_m = 0 \; \forall m$. В самом деле, пусть $\sigma(m)$ таково, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_{\sigma(m)} \cdot a_{\sigma(m)} = \alpha \neq 0$. Это возможно, ибо в силу второго условия (41) ряд $\sum b_n \cdot a_n$ условно сходящийся. Теперь имеем

$$(A_{\sigma(m)})_{m=1}^\infty = u \cdot (a_{\sigma(m)})_{m=1}^\infty + v \cdot (b_{\sigma(m)})_{m=1}^\infty.$$

Ясно, что u и v не зависят от перестановок σ. Если $v \neq 0$, то

$$0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_{\sigma(m)} \cdot a_{\sigma(m)} = u + v \cdot \sum b_{\sigma(m)} \cdot a_{\sigma(m)} = u + v \cdot \alpha.$$

Но α можно выбрать так, чтобы $u + v \cdot \alpha \neq 0$ и тогда придем к противоречию. Следовательно, $v = 0$. Дальше ясно.

Ф. Г. Арутюнян заметил, что если столбцы матрицы ортонормированы и составляют в l^2 полную систему, то строчки также обладают этими свойствами.

Доказательство. Пусть $(\varphi_m)_1^\infty$ — ОНПС и $\psi_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \varphi_m$. Тогда $(\psi_n)_1^\infty$ — тоже ОНПС и поскольку $a_{mn} = \int \varphi_m \cdot \psi_n \, dx$, то $\varphi_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \psi_n$. Ортонормированность и полнота строчек $(a_{mn})_{n=1}^\infty$ эквивалентна тому, что $(\varphi_m)_1^\infty$—ОНПС. Теперь покажем, что существует $(l_n)_1^\infty \in l^2$ такая, что

$$\forall m \geqslant 1,\ a_{mn} = O(l_n). \tag{44}$$

Матрица $\|a_{ij}\|$ строилась так, что при любом j векторы $(b_m)_1^j$, $(a_{mn})_{m=1}^j$, $1 \leqslant n < j$ линейно независимы. Тогда, учитывая ортогональность столбцов матрицы, получим

$$(a_{mn})_{m=1}^{n-1} = u_n \cdot (b_m)_1^{n-1} + v_n \cdot (a_m)_1^{n-1},\ \forall n > 3 \tag{45}$$

(напомним, что $a_{m1} = a_m$), откуда следует

$$a_{mn} = b_m \cdot u_n + a_m \cdot v_n\ \ \forall m \geqslant 1,\ \forall n > m. \tag{46}$$

Из конструкции матрицы следует, что для любого $n > 3$ $|u_n| + |v_n| > 0$. Пусть n_i', n_i'' — все те числа, для которых

$$\left|u_{n_i'}\right| \leqslant \left|v_{n_i'}\right|,\ \left|u_{n_i''}\right| > \left|v_{n_i''}\right|. \tag{47}$$

Тогда $a_{m' n_i'} = \left(b_{m'} \cdot \dfrac{u_{n_i'}}{v_{n_i'}} + a_{m'}\right) \cdot v_{n_i'}$ и в силу (43) и (47)

имеем

$$a^2_{m' n_i'} \geqslant M \cdot v^2_{n_i'}.$$

Аналогично получим $a^2_{m'' n_i''} \geqslant M \cdot u^2_{n_i''}$.

Но поскольку все строчки нашей матрицы принадлежат l^2, то из последних неравенств следует $(v_{n_i'})_{i=1}^\infty$, $(u_{n_i''})_{i=1}^\infty \in l^2$ и в силу (47) получим

$$(v_n)_1^\infty \in l^2,\ (u_n)_1^\infty \in l^2. \tag{48}$$

Далее $a^2_{mn} \leqslant (b^2_m + a^2_m) \cdot (u^2_n + v^2_n)$ и в силу (48) получим (44).

Будем считать, что $l_n > 0$ $\forall n \geqslant 1$. Поскольку $(l_n) \in l^2$, то существует $(d_n)_1^\infty$ такая, что

$$d_n > 0\ \ n \geqslant 1,\ d_n \to \infty,\ \ \sum_1^\infty d_n^2 \cdot l_n^2 = 1. \tag{49}$$

Обозначим $x_i = \sum\limits_{n=1}^{i} d_n^2 \cdot l_n^2$,

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{d_n \cdot l_n} \cdot \sin \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \cdot \pi, & x \in [x_{i-1}, x_i] \equiv \Delta_i \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \Delta_i, \end{cases}$$

$(\psi_n)_1^\infty$ — ортонормирована на [0,1] и тогда в силу ортонормированности строчек матрицы $\|a_{ij}\|$ функции $\Psi_m = \sum\limits_{n=1}^\infty a_{mn} \cdot \psi_n$ также ортонормированы на [0,1], причем

$$\bigvee_1^{\infty} \Psi_n = \bigvee_1^{\infty} \psi_n. \tag{50}$$

Непрерывность функций Ψ_n на $[0,1)$ следует из непрерывности функций ψ_n. Далее из (44) и (49) следует $\max\limits_{x \in \Delta_n} |a_{mn} \cdot \psi_n(x)| = O(d_n^{-1}) = o(1)$, а это означает непрерывность $\Psi_n(x)$ при $x = 1$, ибо $\Psi_n(1) = 0 \; \forall n \geqslant 1$.

Теперь ясно, что условие $\sum\limits_1^{\infty} A_n \cdot \Psi_n(x) \equiv 0$ на $[0,1]$ эквивалентно тому, что $(A_n)_1^{\infty}$ ортогональна ко всем столбцам матрицы $\|a_{ij}\|$ и, как было показано ранее, это равносильно условию

$$(A_n)_1^{\infty} = v \cdot (b_n)_1^{\infty}. \tag{51}$$

Итак, по системе $(\Psi_n)_1^{\infty}$ существуют нуль-ряды $\sum\limits_1^{\infty} A_n \cdot \Psi_n$. Если же $\sum\limits_1^{\infty} A_m \cdot \Psi_{\sigma(m)} = 0$ на $[0,1]$, то отсюда следует, что $(A_m)_1^{\infty}$ ортогональна ко всем столбцам матрицы $\|a_{\sigma(m)\, n}\|$ и, как было показано ранее, при подходящем выборе σ отсюда следует, что $A_m = 0 \; \forall m \geqslant 1$.

Для завершения доказательства пункта в) теоремы 3 надо воспользоваться леммой 2 и провести рассуждения как при доказательстве теоремы 2.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 6.V.1978

Ռ. Ի. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Դատարկ բազմության M-բազմություն լինելու վերաբերյալ ընդհանուր օրթոնորմավորված սիստեմների դասում *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է այն հարցը՝ թե անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած լրիվ օրթոնորմավորված սիստեմների համար զրո-շարքի գոյությունը ինչպես է կախված սիստեմի տեղափոխությունից և գործակիցների զրոյին ձգտելու արագությունից։

R. I. OVSEPIAN. *About the empty set which is M-set in the class of orthonormal systems* (summary)

In the paper the following question is considered how does the existence of series $\sum a_n \varphi_n$ ($\{\varphi_n\}$ — is a complete orthonormal system of continous functions) which converge to zero everywhere depend on the coefficients a_n and the rearrangements of the system $\{\varphi_n\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды. М., Гос. изд. физ-мат. лит., 1961.
2. Итоги науки, Математический анализ, М., Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, 1971, 132, 193.
3. *R. P. Agnew.* Convergence of orthogonal series, Duke Math. J., 27, № 2, 1960, 127—131.

4. *Р. П. Агнью.* Сходимость ортогональных рядов, Математика, сб. переводов, 6: 1, 1962, 60—64.
5. *П. Л. Ульянов.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, XIX, вып. 1, 1964.
6. *Г. М. Мушегян, Р. И. Овсепян.* О единственности ортогональных рядов, Изв. АН Арм. ССР, „Математика", IV, № 4, 1969, 259—266.
7. *В. А. Скворцов.* О скорости стремления к нулю коэффициентов нуль-рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР сер. матем., 41, № 3, 1977, 703—716.
8. *Г. М. Мушегян.* О единственности рядов по переставленным системам Хаара, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", VI, № 1, 1971, 21—34.
9. *А. М. Олевский.* Ряды Фурье непрерывных функций по ограниченным системам, Изв. АН СССР сер. матем., 1966, 387—432.
10. *А. М. Олевский.* Об одной ортонормальной системе и ее применениях, Матем. сб. 71 (113): 3, 1966, 297—337.
11. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958, 442.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS