ISSN 0002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ՋԱՊԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆՈՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջը)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանագծեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տնէստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ գլոբալ փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզրաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

© Издательство АН Арм. ССР. 1978 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
Л. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DJRBASHIAN

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate {with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenian, SSR
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian, SSR, USSR

С. Н. МЕРГЕЛЯН

Академик АН Армянской ССР
Член-корреспондент АН СССР

ДОРОГОЙ СЕРГЕЙ НИКИТОВИЧ!

Посвящая Вам этот выпуск, редакция журнала „Математика" поздравляет Вас с пятидесятилетием и искренне желает Вам крепкого здоровья, дальнейших творческих успехов.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII. № 3, 1978 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

ОБ ОДНОМ БЕСКОНЕЧНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ

Путем дальнейшего применения и развития метода, лежащего в основе цикла работ автора по теории факторизации функций, мероморфных в круге ([1], [2], [3]), в его статье [4] были установлены общие результаты о факторизации функций, мероморфных во всей конечной плоскости. Эти результаты (см. [4], теоремы 7 и 8) фактически явились существенным обобщением известной факторизационной теоремы Р. Неванлинны (см. [5] и [6]) на случай мероморфных во всей плоскости z функций с характеристикой произвольного роста.

Отметим однако, что как теорема Р. Неванлинны, так и основная теорема 7 работы [4] по своему характеру и завершенности были весьма далеки от тех результатов для единичного круга, которые имелись в его известной факторизационной теореме относительно мероморфных функций ограниченного вида и в наших теоремах из указанных выше работ.

В заключении указанной статьи [4] были отмечены некоторые открытые вопросы, простейший из которых состоял в следующем.

Пусть функция $\omega(x)$ положительна, не возрастает на полуоси $[0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям

$$\omega(0)=1,\ \Delta(k)=k\int_0^{+\infty}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx<+\infty\ (1\leqslant k<+\infty). \tag{1}$$

С функцией $\omega(x)$ ассоциируем элементарную целую функцию

$$A_{\omega}^{(\infty)}(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left[-W_{\omega}^{(\infty)}(z;\zeta)\right],$$

где

$$W_{\omega}^{(\infty)}(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx-\right. \tag{2}$$

$$\left.-\bar{\zeta}^{k}\int_{|\zeta|}^{+\infty}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{z^k}{\Delta(k)},$$

с простым нулем в произвольной точке $\zeta\ (0<|\zeta|<+\infty)$ комплексной плоскости z.

Пусть, наконец, $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < +\infty)$ — произвольная последовательность комплексных чисел и

$$\pi_\omega(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\omega^{(\infty)}(z; z_k) \tag{3}$$

—ассоциированное с нею бесконечное произведение, для сходимости которого, как легко видеть, необходимо выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < +\infty. \tag{4}$$

Спрашивается, достаточно ли это же условие для сходимости бесконечного произведения $\pi_\omega(z; z_k)$ в каждой точке $z \neq z_k$ $(1 \leqslant k < +\infty)$?

В настоящей статье устанавливается, что при естественных ограничениях на регулярность убывания к нулю функции $\omega(x)$ при $x \to +\infty$, а также на скорость этого убывания, поставленный вопрос имеет утвердительный ответ.

В § 1 статьи устанавливается ряд предварительных лемм (1.1—1.3) о прямом построении и других представлениях функций $W_\omega^{(\infty)}(z; \zeta)$ и $A_\omega^{(\infty)}(z; \zeta)$. Здесь вводится также в рассмотрение функция

$$U_\omega(z; \zeta) = \int_0^{+\infty} \log |A_\omega^{(\infty)}(re^{i\varphi}; \zeta)|\, d\{-\omega(r/\tau)\}, \tag{5}$$

разные представления которой (лемма 1.4) позволяют установить ее важные свойства в единичном круге $|\zeta e^{i\varphi}| < 1$ (леммы 1.5—1.6). В заключении параграфа приводятся также формулы, позволяющие установить представления функции $A_\omega^{(\infty)}(z; \zeta)$ для значений $|z| < |\zeta|$ (леммы 1.7—1.8).

В § 2 с самого начала выделяется некоторый естественный подкласс $\tilde{\Omega}_-$ функций $\omega(x)$, для которых конечны все интегралы вида (1), и убывание которых к нулю при $x \to +\infty$ имеет регулярный характер. Класс $\tilde{\Omega}_-$ определяется как множество функций $\omega(x)$, представимых на $[1, +\infty)$ в виде

$$\omega(x) = \omega(1) \exp\left\{-\int_1^x \frac{\alpha(x)}{x}\, dx\right\} \quad (1 \leqslant x < +\infty), \tag{6}$$

где $\alpha(t) > 1$ — некоторая неубывающая на $[1, +\infty)$ функция, обладающая свойством $\alpha(t) \uparrow +\infty$ при $t \uparrow +\infty$. Очевидно, что для функций $\omega(x) \in \tilde{\Omega}_-$ не только конечны интегралы (1), но вместе с тем они могут стремиться к нулю как угодно быстро, или с соблюдением условий (1) произвольно медленно, в зависимости от скорости роста к $+\infty$ соответствующей функции

$$\alpha(x) = -\frac{d \log \omega(x)}{d \log x}. \tag{7}$$

В предположении, что $\omega(x) \in \bar{\Omega}_-$ здесь сперва устанавливаются важные асимптотические формулы для некоторых несобственных интегралов, зависящих от параметра ζ, при $|\zeta| \to +\infty$ (леммы 2.1—2.3 и различные их следствия). Однако, как эти формулы, так и приводимая затем теорема 1 об асимптотическом поведении $\log A_\omega^{(\infty)}(z; \zeta)$ при $|\zeta| \to +\infty$, нам удается получить пока что не для всего класса функций $\bar{\Omega}_-$, а только для его достаточно широких подклассов, по существу включающих в себя лишь такие функции $\alpha(x)$, рост которых при $x \to +\infty$ не ниже степенного.

Наконец, в заключительной теореме 2 статьи мы устанавливаем сходимость бесконечного произведения $\pi_\omega(z; z_k)$ для любой последовательности, удовлетворяющей условию (4), и в предположении, что функция $\omega(x) \in \bar{\Omega}_-$ подчинена указанным выше ограничениям роста.

Таким образом, вопрос о том, сохраняет ли силу теорема 2 при снятии этого ограничения, т. е. сходится ли бесконечное произведение $\pi_\omega(z; z_k)$ лишь при выполнении условий (4) и $\omega(x) \in \bar{\Omega}_-$, остается открытым.

Разумеется, остается также открытым главный вопрос—нахождение наиболее естественной внутренней характеристики того класса мероморфных на всей z-плоскости функций, в частности содержащего и произведения $\pi_\omega(z; z_k)$, $1/\pi_\omega(z; z_k)$, который допускал бы полное параметрическое представление посредством выделения их нулей и полюсов с помощью функций вида π_ω.

§ 1. Предварительные леммы

1.1 (а). Обозначим через Ω_- множество функций $\omega(x)$, определенных на полуоси $[0, +\infty)$ и подчиненных следующим условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и не возрастает на всей полуоси $[0, +\infty)$,

2)

$$\omega(0) = 1, \quad a_\omega = \int_0^1 \{1 - \omega(x)\} \frac{dx}{x} < +\infty, \tag{1.1}$$

3) для любого $s \in (0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} \omega(x)\, x^{s-1}\, dx < +\infty. \tag{1.2}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Delta(s) = s \int_0^{+\infty} \omega(x)\, x^{s-1}\, dx, \quad s \in (0, +\infty) \tag{1.3}$$

и отметим некоторые ее свойства:

1°. *Если положить*

$$\Delta(0) = 1, \tag{1.4}$$

то функция $\Delta(s)$ *непрерывна на всей полуоси* $[0, +\infty)$.

Очевидно, достаточно убедиться, что $\lim\limits_{s \to +0} \Delta(s) = 1$.

Действительно, представив функцию $\Delta(s)$ в виде

$$\Delta(s) = s\int_0^1 \omega(x)\, x^{s-1}\, dx + s\int_1^{+\infty} \omega(x)\, x^{s-1}\, dx \equiv$$

$$\equiv \Delta_1(s) + \Delta_2(s),\ 0 < s < +\infty,$$

получим, что при $0 < s \leqslant 1$

$$|\Delta_1(s) - 1| \leqslant s\int_0^1 \{1 - \omega(x)\}\ \frac{dx}{x} = a_\omega\, s$$

и

$$0 \leqslant \Delta_2(s) \leqslant s\int_1^{\infty} \omega(x)\, dx < \Delta(1)\, s.$$

Отсюда и следует наше утверждение.

2°. *Для любого* $s \geqslant 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \{\omega(x)\, x^s\} = 0. \tag{1.5}$$

Действительно, полагая, что при некотором $s_0 \geqslant 0$

$$\liminf_{x \to +\infty} \{\omega(x)\, x^{s_0}\} > c_0 > 0,$$

очевидно, будем иметь

$$\omega(x)\, x^{s_0} \geqslant c_0,\ x \geqslant x_0 \geqslant 1.$$

Тогда для любого $x > x_0$ получим оценку

$$\Delta(1 + s_0) \geqslant \int_0^{+\infty} \omega(x)\, x^{s_0}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{x_1}^{x} \omega(x)\, x^{s_0}\, dx \geqslant c_0\,(x - x_0),$$

откуда при $x \to \infty$ приходим к противоречию.

3°. *Функцию* $\Delta(s)$ *можно представить также в виде*

$$\Delta(s) = \int_0^{+\infty} x^s\, d\{-\omega(x)\},\ s \in [0, +\infty). \tag{1.6}$$

Действительно, если $s = 0$, то

$$\int_0^{+\infty} x^s \, d\{-\omega(x)\} = \int_0^{+\infty} d\{-\omega(x)\} = \omega(0) - \omega(+\infty) = 1 = \Delta(0),$$

так как $\omega(0) = 1$ и согласно (1.5) $\omega(+\infty) = 0$.

Если же $s > 0$, то

$$\Delta(s) = \int_0^{+\infty} \omega(x) \, dx^s = -\int_0^{+\infty} x^s \, d\omega(x),$$

так как проинтегрированный член равен нулю вновь в силу (1.5).

(б) В предположении, что $\omega(x) \in \Omega_-$, для фиксированного значения параметра $\tau (0 < \tau < +\infty)$ обозначим через $L_\tau^1(0, +\infty; \omega) \equiv L_\tau^1(0, +\infty)$ множество функций $\varphi(x)$ абсолютно непрерывных на $[0, +\infty)$ и удовлетворяющих условию

$$\varphi'(x)\, \omega(x/\tau) \in L^1(0; +\infty). \tag{1.7}$$

Ввиду свойства 1) функции $\omega(x)$ очевидно, что для любой пары значений $0 < \tau_1 < \tau_2 < +\infty$ имеет место включение

$$L_{\tau_1}^1(0, +\infty) \subset L_{\tau_2}^1(0, +\infty). \tag{1.8}$$

Полагая теперь, что при данном $\tau_0 (0 < \tau_0 < +\infty)$ $\varphi(x) \in L_{\tau_0}^1(0, +\infty)$, введем в рассмотрение оператор

$$L_\tau^{(\omega)}\{\varphi(x)\} \equiv \varphi_\omega(\tau) =$$

$$= \varphi(0) + \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, \omega(x/\tau)\, dx, \ \tau \in (0, \tau_0], \tag{1.9}$$

заметив, что в силу (1.8) функция $\varphi_\omega(\tau)$ определена для всех значений $0 < \tau \leqslant \tau_0$.

Легко проверить, что для функции $\varphi(x) = x^s$ $(0 \leqslant s < +\infty)$ справедлива формула

$$L_\tau^{(\omega)}\{x^s\} = \Delta(s)\, \tau^s \ (0 \leqslant s < +\infty, \ 0 < \tau < +\infty). \tag{1.10}$$

Отметим, далее, что если для данного τ_0

$$\varphi(x) \in L_{\tau_0}^1(0, +\infty) \text{ и } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x)\, \omega(x/\tau_0) = 0, \tag{1.11}$$

то, как легко видеть путем интегрирования по частям, оператор $L_\tau^{(\omega)}\{\varphi(x)\}$ допускает также представление вида

$$L_\tau^{(\omega)}\{\varphi(x)\} \equiv \varphi_\omega(\tau) \equiv \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, d\{-\omega(x/\tau)\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(\tau t)\, d\{-\omega(t)\},\ \tau \in (0, \tau_0]. \tag{1.12}$$

(в) Введем теперь в рассмотрение функцию

$$v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) \equiv L_\tau^{(\omega)} \left\{ \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right| \right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right| \right\} \omega(r/\tau)\, dr\ (0 < |\zeta| < +\infty,\ 0 < \tau < +\infty). \tag{1.13}$$

Таким образом, будем иметь

$$v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = -\operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{e^{i\varphi}}{\zeta}}{1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta}} \omega(r/\tau)\, dr \tag{1.13*}$$

в предположении, что $\varphi \neq \arg \zeta$.

Отсюда, заменой переменного интегрирования заключаем:

4°. *При любом* $\zeta\ (0 < |\zeta| < +\infty)$, $\tau\ (0 < \tau < +\infty)$ *и* $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\varphi \neq \arg \zeta$, *функция* $v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta)$ *допускает представление*

$$v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = -\operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\tau e^{i\varphi} x}{\zeta}}{1 - \frac{\tau e^{i\varphi} x}{\zeta}} \frac{\omega(x)}{x} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{x - \frac{|\zeta|}{\tau} \cos(\varphi - \arg \zeta)}{x^2 - 2x \frac{|\zeta|}{\tau} \cos(\varphi - \arg \zeta) + \frac{|\zeta|^2}{\tau^2}} \omega(x)\, dx. \tag{1.14}$$

Установим теперь следующее важное свойство функции $v_\omega(\tau e^{i\vartheta}; \zeta)$.

5°. *Для любых* $\zeta\ (0 < |\zeta| < +\infty)$ *и* $\tau\ (0 < \tau < +\infty)$

$$v_\omega(\tau e^{i\vartheta}; \zeta) \in L(0, 2\pi). \tag{1.15}$$

Введем в рассмотрение функции

$$v_\omega^{(1)}(\tau e^{i\vartheta}; \zeta) = \int_0^{+\infty} \frac{x - \frac{|\zeta|}{\tau}}{x^2 - 2x \frac{|\zeta|}{\tau} \cos(\vartheta - \arg \zeta) + \frac{|\zeta|^2}{\tau^2}} \omega(x)\, dx, \tag{1.16}$$

$$v_\omega^{(2)}(\tau e^{i\vartheta}; \zeta) = 2 \frac{|\zeta|}{\tau} \sin^2 (\vartheta - \arg \zeta) \int_0^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x^2 - 2x \frac{|\zeta|}{\tau} \cos(\vartheta - \arg \zeta) + \frac{|\zeta|^2}{\tau^2}} dx, \tag{1.17}$$

заметив, что

$$v_\omega(\tau e^{i\vartheta};\ \zeta)=v_\omega^{(1)}+v_\omega^{(2)}. \tag{1.18}$$

Но по формуле Пуассона

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{x^2-2x\frac{|\zeta|}{\tau}\cos(\vartheta-\arg\zeta)+\frac{|\zeta|^2}{\tau^2}}=\left|x^2-\frac{|\zeta^2|}{\tau^2}\right|^{-1}\left(x\neq\frac{|\zeta|}{\tau}\right).$$

Поэтому, из (1.16) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|v_\omega^{(1)}(\tau e^{i\vartheta};\ \zeta)|\,d\vartheta\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x+\frac{|\zeta|}{\tau}}dx<+\infty \tag{1.19}$$

для всех $\zeta\ (0<|\zeta|<+\infty)$ и $\tau\ (0<\tau<+\infty)$.

Далее, из тождества

$$x^2-2x\frac{|\zeta|}{\tau}\cos(\vartheta-\arg\zeta)+\frac{|\zeta|^2}{\tau^2}=$$

$$=\left(x-\frac{|\zeta|}{\tau}\right)^2+4\,x\frac{|\zeta|}{\tau}\sin^2\frac{\vartheta-\arg\zeta}{2}$$

легко заключаем, что справедлива оценка

$$0\leqslant 2\frac{|\zeta|}{\tau}\sin^2\frac{\vartheta-\arg\zeta}{2}\left\{x^2-2x\frac{|\zeta|}{\tau}\cos(\vartheta-\arg\zeta)+\frac{|\zeta|^2}{\tau^2}\right\}^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases}8\dfrac{\tau}{|\zeta|},\ \text{при}\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{|\zeta|}{2\tau}\\[2ex]\dfrac{1}{2x},\ \text{при}\ \dfrac{|\zeta|}{2\tau}\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|v_\omega^{(2)}(\tau e^{i\vartheta};\ \zeta)\,d\vartheta\leqslant$$

$$\leqslant 8\frac{\tau}{|\zeta|}\int_0^{\frac{|\zeta|}{2\tau}}\omega(x)\,dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{|\zeta|}{2\tau}}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx. \tag{1.20}$$

В силу (1.18) из оценок (1.19) и (1.20) следует наше утверждение.

(г) Введем в рассмотрение функцию

$$C_\omega(z;\ \omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta(k)}. \tag{1.21}$$

6°. *Функция* $C_{-}(z;\omega)$ *целая, и на всей* z*-плоскости справедливы оценки вида*

$$|C_{-}^{(\nu)}(z;\omega)| \leqslant A_{\nu}(\gamma)\,\{|z|^{\nu}\,\omega(\gamma|z|)\}^{-1}\ (0 \leqslant \nu < +\infty), \tag{1.22}$$

где $\gamma > 1$ *— любое число и*

$$A_{\nu}(\gamma) = \frac{\gamma\,\nu!}{(\gamma-1)^{\nu+1}}\ (0 \leqslant \nu < +\infty).$$

В самом деле, из представления (1.6) чисел $\Delta(k)$ следует, что для любого $\gamma > 1$ и $k \geqslant 1$

$$\Delta(k) \geqslant \int_{\gamma|z|}^{+\infty} x^{k}\,d\{-\omega(x)| \geqslant (\gamma|z|)^{k}\,\omega(\gamma|z|). \tag{1.23}$$

Следовательно, для любого $z\ (0 \leqslant |z| < +\infty)$ и $\gamma > 1$

$$|C_{-}(z;\omega)| \leqslant 1 + \omega^{-1}(\gamma|z|)\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^{-k},$$

откуда следует наше неравенство (1.22) при $\nu = 0$, так как

$\omega(\gamma|z|) \leqslant \omega(0) = 1.$

Заметим теперь, что

$$C_{-}^{(\nu)}(z;\omega) = \sum_{k=\nu}^{\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-\nu+1)}{\Delta(k)}\,z^{k-\nu}\ (\nu \geqslant 1),$$

откуда в силу (1.23) получим

$$|C_{-}^{(\nu)}(z;\omega)| \leqslant |(\gamma|z|)^{\nu}\,\omega(\gamma|z|)|^{-1}\sum_{k=\nu}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-\nu+1)(1/\gamma)^{k-\nu}.$$

Отсюда следуют неравенства (1.22), если заметить, что

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-\nu+1)\,x^{k} = \frac{\nu!}{(1-x)^{\nu+1}}\ (\nu \geqslant 0).$$

1.2. (а) Наряду с функцией $C_{-}(z;\omega)$ введем также в рассмотрение целую функцию

$$S_{-}(z;\omega) = 2C_{-}(z;\omega) - 1 = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Delta(k)}. \tag{1.24}$$

Далее, поскольку из (1.15), в частности, вытекает, что $v_{\omega}(e^{i\vartheta};\zeta) \in L(0,2\pi)$ для любого $\zeta\ (0 < |\zeta| < +\infty)$, то интеграл

$$W_{\omega}^{(-)}(z;\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}S_{-}(e^{-i\vartheta}z;\omega)\,v_{\omega}(e^{i\vartheta};\zeta)\,d\vartheta \tag{1.25}$$

также является целой функцией от переменной z.

Лемма 1.1. *При любом z и $\zeta \neq 0$ справедливо разложение*

$$W_{\omega}^{(-)}(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\,dx -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_{0}^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx - \bar{\zeta}^{k}\int_{|\zeta|}^{\infty}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{z^{k}}{\Delta(k)}. \qquad (1.26)$$

Доказательство. Из определения (1.24) функции $S_{-}(z;\omega)$ следует, что целая функция $W_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)$ допускает разложение

$$W_{\omega}^{(-)}(z;\zeta) = \frac{a_0(\zeta)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(\zeta)}{\Delta(k)}z^{k},\ |z|<+\infty, \qquad (1.27)$$

где

$$a_k(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{-ik\vartheta}\,v_{\omega}(e^{i\vartheta};\zeta)\,d\vartheta\ (0\leqslant k<+\infty). \qquad (1.28)$$

Обозначим, далее,

$$\varphi_k(r) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{-ik\vartheta}\log\left|1-\frac{re^{i\vartheta}}{\zeta}\right|d\vartheta\ (0\leqslant k<+\infty) \qquad (1.29)$$

и заметим, что имеет место разложение

$$\log|1-\rho e^{i\vartheta}| = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{in\vartheta}+e^{-in\vartheta})\rho^{n}}{n}\ (0\leqslant\rho<1,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi).$$

Тогда легко видеть, что

1) при $0\leqslant r<|\zeta|$

$$\varphi_k(r) = \begin{cases} 0, & k=0 \\ -\dfrac{r^{k}}{k\zeta^{k}}, & 1\leqslant k<+\infty, \end{cases}$$

2) при $|\zeta|<r<+\infty$

$$\varphi_k(r) = \begin{cases} 2\log\dfrac{r}{|\zeta|}, & k=0 \\ -\dfrac{\bar{\zeta}^{k}}{kr^{k}}, & 1\leqslant k<-\infty. \end{cases}$$

Следовательно, пользуясь определением (1.9) оператора $L_{\tau}^{(\omega)}$, мы будем иметь для любого $0<\tau<+\infty$

$$L_{\tau}^{(\omega)}\{\varphi_k(r)\} = \varphi_k(0) + \int_{0}^{+\infty}\varphi_k'(r)\,\omega(r/\tau)\,dr\ (0\leqslant k<+\infty).$$

Поэтому, пользуясь приведенными выше значениями функций $\varphi_k(r)$, получим формулы

$$L_{\tau}^{(\omega)}\{\varphi_0(r)\} = 2\int_{\frac{1}{\tau}}^{+\infty}\omega(r/\tau)\,\frac{dr}{r},$$

$$L_\tau^{(\omega)}\{\varphi_k(r)\} = -\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(r/\tau)\,r^{k-1}\,dr - \bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{+\infty}\omega(r/\tau)\,r^{-k-1}\,dr\right\} \quad (1.30)$$

$$(1\leqslant k<+\infty).$$

По определению (1.13) функции $v_\omega(\tau e^{i\theta};\zeta)$, в силу (1.28), (1.29)

$$a_k(\zeta) = L_\tau^{(\omega)}\{\varphi_k(r)\}_{\tau=1}\ (0\leqslant k<+\infty).$$

Отсюда и из (1.30) получим формулы

$$a_0(\zeta) = 2\int_{|\zeta|}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

$$a_k(\zeta) = -\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx - \bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{\infty}\omega(x)\,x^{-k-1}dx\right\}\ (1\leqslant k<+\infty).$$

Подставляя эти значения в (1.27), приходим к разложению (1.26) леммы.

Лемма 1.2. 1°. *Разложение* (1.26) *функции* $W_\omega(z;\zeta)$ *можно записать также в виде*

$$W_\omega^{(\omega)}(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k(\zeta)}{k}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k, \quad (1.31)$$

где

$$\mu_k(\zeta) = \left\{\int_0^{|\zeta|}x^k\,d[-\omega(x)] + |\zeta|^{2k}\int_{|\zeta|}^{+\infty}x^{-k}\,d[-\omega(x)]\right\}\Delta^{-1}(k) \quad (1.32)$$

$$(1\leqslant k<+\infty).$$

2°. *Справедлива формула*

$$1-\mu_k(\zeta) = k\Delta^{-1}(k)\int_{|\zeta|}^{+\infty}\left\{x^k + |\zeta|^{2k}x^{-k}\right\}\frac{\omega(x)}{x}\,dx \quad (1.33)$$

$$(1\leqslant k<+\infty).$$

Доказательство. 1°. Заметим сначала, что

$$\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx = \frac{1}{k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\,dx^k =$$

$$= \frac{|\zeta|^k}{k}\omega(|\zeta|) + \frac{1}{k}\int_0^{|\zeta|}x^k\,d[-\omega(x)]\ (1\leqslant k<+\infty),$$

и в силу (1.5)

$$\int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x)\, x^{-k-1}\, dx = \frac{|\zeta|^{-k}}{k}\,\omega(|\zeta|) + \frac{1}{k}\int_{|\zeta|}^{+\infty} x^{-k}\, d[-\omega(x)] \quad (1 \leqslant k < +\infty).$$

Поэтому

$$\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|} \omega(x)\, x^{k-1}\, dx - \bar{\zeta}^{k}\int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x)\, x^{-k-1}\, dx =$$

$$= \left\{\int_0^{|\zeta|} x^{k}\, d[-\omega(x)] + |\zeta|^{2k}\int_{|\zeta|}^{+\infty} x^{-k}\, d[-\omega(x)]\right\}\frac{\zeta^{-k}}{k} \quad (1 \leqslant k < +\infty).$$

Подставляя эти значения в (1.26), получим формулу (1.31) — (1.32) леммы.

2°. Из (1.32) и (1.6) следует

$$1 - \mu_k(\zeta) = \left\{\int_{|\zeta|}^{+\infty} x_k\, d[-\omega(x)] - |\zeta|^{2k}\int_{|\zeta|}^{+\infty} x^{-k}\, d[-\omega(x)]\right\}\Delta^{-1}(k)$$

$$(1 \leqslant k < +\infty).$$

Однако, интегрированием по частям, в силу (1.5) получим

$$\int_{|\zeta|}^{+\infty} x^{k}\, d[-\omega(x)] - |\zeta|^{2k}\int_{|\zeta|}^{+\infty} x^{-k}\, d[-\omega(x)] =$$

$$= k\int_{|\zeta|}^{+\infty}\{x^{k} + |\zeta|^{2k}\, x^{-k}\}\frac{\omega(x)}{x}\, dx \quad (1 \leqslant k < +\infty),$$

откуда и следует формула (1.33) леммы.

Из (1.32) и (1.33) непосредственно вытекает

Следствие. Для любого k $(1 \leqslant k < +\infty)$

$$0 < \mu_k(\zeta) < 1 \quad (0 < |\zeta| < +\infty) \tag{1.34}$$

$$\lim_{\zeta \to \infty} \mu_k(\zeta) = 1. \tag{1.35}$$

В самом деле, что касается неравенств (1.35), то они очевидны, а предельные соотношения (1.35) следуют из оценок

$$0 < 1 - \mu_k(\zeta) \leqslant 2k\,\Delta^{-1}(k)\int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x)\, x^{k-1}\, dx \quad (1 \leqslant k < +\infty).$$

1.3. (а) Наряду с функцией $W_{\omega}^{(\infty)}(z;\zeta)$ введем в рассмотрение также целую функцию

$$A_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-W_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)\} \tag{1.36}$$

с нулем в точке $z=\zeta$.

Лемма 1.3. *Если* $0\leqslant|z|<|\zeta|<+\infty$, *то функция* $A_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)$ *допускает также представление вида*

$$A_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)=\exp\{-\Omega_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)\}, \tag{1.37}$$

где

$$\Omega_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{+\infty}\left\{C_{-}\left(\frac{zx}{\zeta};\omega\right)+C_{-}\left(\frac{z\bar{\zeta}}{x};\omega\right)-1\right\}\frac{\omega(x)}{x}dx \tag{1.38}$$

и

$$C_{-}(z;\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Delta(k)}.$$

Доказательство. Заметим, что при $0\leqslant|z|<|\zeta|$ имеет место тождество

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_{k}(\zeta)}{k}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}=\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\mu_{k}(\zeta)}{k}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}.$$

Отсюда и из (1.31) и (1.33) вытекает формула

$$W_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)=\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+$$

$$+\int_{|\zeta|}^{\infty}\frac{\omega(x)}{x}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta(k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\int_{|\zeta|}^{\infty}\{x^{k}+|\zeta|^{2k}x^{-k}\}\frac{\omega(x)}{x}dx. \tag{1.39}$$

Или, принимая во внимание определение функции $C_{-}(z;\omega)$, приходим к представлению

$$W_{\omega}(z;\zeta)=\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+$$

$$+\int_{|\zeta|}^{+\infty}\left\{C_{-}\left(\frac{zx}{\zeta};\omega\right)+C_{-}\left(\frac{z\bar{\zeta}}{x};\omega\right)-1\right\}\frac{\omega(x)}{x}dx\ (0\leqslant|z|<|\zeta|),$$

поскольку легко убедиться, что интегралы справа абсолютно сходятся, и, таким образом, перестановка порядков суммирования и интегрирования в (1.39) допустима при условии $0\leqslant|z|<|\zeta|<+\infty$.

Нам остается воспользоваться определением (1.36) функции $A_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)$, чтобы получить утверждение (1.37)—(1.38) леммы.

(б) Введем в рассмотрение функцию

$$U_{\omega}(re^{i\varphi};\zeta)=L_{r}^{(\omega)}\{\log|A_{\omega}^{(-)}(re^{i\varphi};\zeta)|\} \tag{1.40}$$

и установим для нее два разных представления.

Лемма 1.4. 1°. *Для любого* τ $(0 \leqslant \tau < 1)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ *и* ζ $(0 < |\zeta| < +\infty)$ *справедлива формула*

$$U_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\tau^2}{1-2\tau\cos(\varphi-\vartheta)+\tau^2}\, v_\omega(e^{i\vartheta};\ \zeta)\, d\vartheta. \qquad (1.40')$$

2°. *В тех же предположениях, за исключением, быть может значения* $\varphi = \arg \zeta$, *справедлива формула*

$$U_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = -(1-\tau^2)\int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{1-\tau\left(\frac{x}{|\zeta|}+\frac{|\zeta|}{x}\right)\cos(\varphi-\arg\zeta)+\tau^2}{\left|1-\frac{x\,\tau e^{i\varphi}}{\zeta}\right|^2 \left|1-\frac{\bar{\zeta}\,\tau e^{i\varphi}}{x}\right|^2} \frac{\omega(x)}{x}\, dx. \qquad (1.41)$$

Доказательство. 1°. Из определений (1.24), (1.25) функций $S_-(z;\omega)$ и $W_\omega^{(-)}(z;\zeta)$ следует, что для $0 \leqslant \tau < 1$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$L_\tau^{(\omega)}\left|W_\omega^{(\infty)}(re^{i\varphi};\zeta)\right| = L_\tau^{(\omega)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_\omega(e^{i\vartheta};\zeta)\, d\vartheta + \right.$$

$$\left. +2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k e^{ik\varphi}}{\Delta(k)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta}\, v_\omega(e^{i\vartheta};\zeta)\, d\vartheta\right\}.$$

Но согласно элементарным формулам (1.10)

$$L_\tau^{(\omega)}\{r^k\} = \Delta(k)\,\tau^k \quad (0 \leqslant k < +\infty),$$

причем $\Delta(0) = 1$.

Поэтому будем иметь для любого $0 \leqslant \tau < 1$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$L_\tau^{(\omega)}\{W_\omega^{(\infty)}(re^{i\varphi};\zeta)\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}[\tau e^{i(\varphi-\vartheta)}]^k\right\} v_\omega(e^{i\vartheta};\zeta)\, d\vartheta = \qquad (1.42)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\tau e^{i(\varphi-\vartheta)}}{1-\tau e^{i(\varphi-\vartheta)}}\, v_\omega(e^{i\vartheta};\zeta)\, d\vartheta,$$

причем легко убедиться в правомерности перестановки порядков суммирования и применения оператора $L_\tau^{(\omega)}$.

Так как согласно (1.36) и (1.40)

$$U_\omega(\tau e^{i\varphi};\zeta) = L_\tau^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right\} - L_\tau^{(\omega)}\left|\mathrm{Re}\ W_\omega^{(-)}(re^{i\varphi};\zeta)\right|, \qquad (1.43)$$

то из (1.42) ввиду самого определения функции $v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta)$ мы получим представление (1.40′) леммы.

2°. По определению (1.9) оператора $L_\tau^{(\omega)}$

$$L_\tau^{(\omega)}\{W_\omega^{(-)}(re^{i\varphi}; \zeta)\} = W_\omega^{(-\infty)}(0; \zeta) + \int_0^r \frac{\partial}{\partial r}\{W_\omega^{(-)}(re^{i\varphi}; \zeta)\}\,\omega(r/\tau)\,dr. \tag{1.44}$$

Но в силу формулы (1.26) леммы 1.1

$$W_\omega^{(-\infty)}(0; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\,dx$$

и

$$\frac{\partial}{\partial r}\{W_\omega^{(\infty)}(re^{i\varphi}; \zeta)\} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx - \bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{+\infty}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{kr^{k-1}e^{ik\varphi}}{\Delta(k)}. \tag{1.45}$$

Пользуясь затем элементарными формулами

$$\int_0^{+\infty} r^{k-1}\omega(r/\tau)\,dr = \tau^k\int_0^{+\infty} x^{k-1}\omega(x)\,dx = \frac{\tau^k\,\Delta(k)}{k}\ (k \geqslant 1),$$

подстановкой значения (1.45) в (1.44), получим

$$L_\tau^{(\omega)}\{W_\omega^{(-\infty)}(re^{i\varphi}; \zeta)\} = \int_{|\zeta|}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx - \bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{+\infty}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}(\tau e^{i\varphi})^k. \tag{1.46}$$

При этом легко видеть, что при $0 \leqslant \tau < 1$ произведенная нами перестановка порядков суммирования и интегрирования допустима.

Но ряд (1.46) легко просуммировать и в результате получить представление

$$L_\tau^{(\omega)}\{W_\omega^{(-\infty)}(re^{i\varphi}; \zeta)\} = \int_{|\zeta|}^{+\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta\tau e^{i\varphi}}{x}\right)^k\right\}\frac{\omega(x)}{x}\,dx - \int_0^{|\zeta|}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x\tau e^{i\varphi}}{\zeta}\right)^k\right\}\frac{\omega(x)}{x}\,dx = \tag{1.47}$$

$$= \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{\tau e^{i\varphi}\,\bar{\zeta}}{x}}\,\frac{\omega(x)}{x}\,dx - \int_{0}^{|\zeta|} \frac{\frac{x\tau e^{i\varphi}}{\zeta}}{1-\frac{x\tau e^{i\varphi}}{\zeta}}\,\frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

вновь справедливое при $0 \leqslant \tau < 1$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Теперь, пользуясь первым из интегральных представлений (1.14) функции $v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta)$ в предположении $\varphi \neq \arg \zeta$, из (1.43) и (1.44) получим

$$U_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = -\operatorname{Re} \int_{|\zeta|}^{+\infty} \left\{ \frac{\frac{x\tau e^{i\varphi}}{\zeta}}{1-\frac{x\tau e^{i\varphi}}{\zeta}} + \frac{1}{1-\frac{\bar{\zeta}\tau e^{i\varphi}}{x}} \right\} \frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

откуда и следует представление (1.41) леммы.

(в) Обозначим через Ω_-^* подмножество функций $\omega(x)$ из класса Ω_-, удовлетворяющих условию Липшица на каждом промежутке $[0, \Delta]$ $(0 < \Delta < +\infty)$. Таким образом, если $\omega(x) \in \Omega_-^*$, то $\omega(x) \in \Omega_-$, и, кроме того, для любых $0 \leqslant x' < x'' \leqslant \Delta$

$$|\omega(x') - \omega(x'')| \leqslant K(\Delta)\,|x' - x''|,$$

где $K(\Delta)(0 < K(\Delta) < +\infty)$ — некоторая постоянная.

Лемма 1.5. *Если* $\omega(x) \in \Omega_-^*$, *то справедливы следующие утверждения:*

1°. *Функция* $U_\omega(z; \zeta)$ *непрерывна и субгармонична в замкнутом круге* $|z| \leqslant 1$.

2°. *На границе* $z = e^{i\varphi}$ *круга*

$$U_\omega(e^{i\varphi}; \zeta) = 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \tag{1.48}$$

и, следовательно,

$$U_\omega(z; \zeta) < 0,\ |z| < 1. \tag{1.49}$$

Доказательство. 1°. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\omega(x)}{x-w}\,dx,$$

являющийся аналитической функцией всюду вне полуоси $[0, +\infty)$.

Поскольку $\omega(x) \in \Omega_-^*$, то так же как и в лемме 1.7 нашей работы [3] легко убедиться, что функция

$$\psi(w) = \operatorname{Re} |2\pi i\,\Phi(w)|$$

непрерывна всюду, кроме точки $w = 0$, если при $w = u \in [0, +\infty)$ интеграл $\Phi(w)$ понимать в смысле главного значения.

Но согласно первой из формул (1.14)

$$v_{\omega}(\tau e^{i\varphi};\ \zeta) = \psi\left(\frac{\zeta}{\tau e^{i\varphi}}\right),$$

и поэтому функция $v_{\omega}(z;\ \zeta)$ заведомо непрерывна при $|z| < +\infty$ для любого значения $\zeta\ (0 < |\zeta| < +\infty)$.

Функцию $v_{\omega}(\tau e^{i\varphi};\ \zeta)$ первоначально мы определили согласно формуле (1.13)

$$v_{\omega}(\tau e^{i\varphi};\ \zeta) = L_{\tau}^{(\omega)}\left\{\log\left|1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right\},$$

в предположении, что $\varphi \neq \arg\zeta$.

Но легко видеть, что в данном случае наша функция допускает также представление

$$v_{\omega}(\tau e^{i\varphi};\ \zeta) = \int_0^{+\infty} \log\left|1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right| d\{-\omega(r/\tau)\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \log\left|1 - r\,\frac{\tau e^{i\varphi}}{\zeta}\right| d\,|-\omega(r)|$$

во всей плоскости $z = \tau e^{i\varphi}$, кроме, быть может, луча $\varphi = \arg\zeta$.

Не останавливаясь на подробностях отметим, что это представление сохраняет силу также и на луче $\varphi = \arg\zeta$ (см. [3], доказательство леммы 1.8).

Но для любого значения параметра $r \in [0, +\infty)$ функция $\log\left|1 - r\,\frac{z}{\zeta}\right|$ субгармонична на всей z-плоскости, а $d\,|-\omega(r)| \geqslant 0$. Поэтому функция $v_{\omega}(z;\ \zeta)$ субгармонична и непрерывна на всей плоскости z.

Наконец, что касается утверждения леммы относительно непрерывности и субгармоничности функции $U_{\omega}(z;\ \zeta)$ в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, то оно непосредственно следует из тождества (1.40′) леммы 4.

2°. Из того же тождества (1.40′) легко следует равенство (1.48). и в силу субгармоничности функции $U_{\omega}(z;\ \zeta)$ — и неравенство (1.49) нашей леммы.

В связи с леммой 1.5 отметим следующее: если не предполагать положительности функции $\omega(x)$ на всей оси, а положить

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

то, как легко видеть, функция $A_{\omega}^{(\infty)}(z;\ \zeta)$ переходит в фактор Бляшке $b(z;\ \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z}\,\frac{|\zeta|}{\zeta}$, оператор $L_{\tau}^{(\omega)}$ — в единичный оператор, и поэтому функция $U_{\omega}(z;\ \zeta)$ — в $\log|b(z;\ \zeta)|$. Таким образом, утверждения, со-

держащиеся в лемме 1.5, суть далеко идущие аналоги известных свойств фактора Бляшке. Другой важный специальный случай фактора $A_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)$ и функции $U_{\omega}(z;\zeta)$ мы получим, положив лишь $\omega(x)\equiv 0$ $1<x<+\infty$). Для этого случая соответствующие утверждения леммы 1.5 были установлены нами в работе [3].

Наконец, отметим еще один важный специальный случай. Предположив, что

$$\int_0^{+\infty}\omega(x)\,x^{s-1}\,dx\begin{cases}<+\infty, & 0\leqslant s\leqslant p\\ =+\infty, & s\geqslant p+1,\end{cases}$$

будем иметь

$$A_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-\int_{|\zeta|}^{\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx+\sum_{k=1}^{p}\frac{\mu_k(\zeta)}{k}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\right\}.$$

Поскольку и в данном случае $\mu_k(\zeta)\to 1$ $(0\leqslant k\leqslant p)$ при $\zeta\to\infty$, то факторы $A_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)$ асимптотически ведут себя как элементарные факторы Вейерштрасса

$$E(z/\zeta;\ p)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\right\}.$$

В заключение этого параграфа приведем еще несколько лемм.

(г) Лемма 1.6. *Если* $\omega(x)\in\Omega_{-}^{*}$, *то для любого* ζ $(0<|\zeta|<+\infty)$ *и* τ $(0\leqslant\tau\leqslant 1)$

$$-\int_{|\zeta|}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}dx\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_{\omega}(\tau e^{i\varphi};\zeta)\,d\varphi\leqslant 0. \tag{1.50}$$

Доказательство. Так как по лемме 5 функция $U_{\omega}(z;\zeta)$ субгармонична и непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, то согласно известной теореме (см., напр., [7], стр. 9), интеграл

$$m(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_{\omega}(\tau e^{i\varphi};\zeta)\,d\vartheta,\ 0\leqslant\tau<1$$

является неубывающей функцией от τ.

Но в силу формулы (1.41) леммы 4

$$m(0)=U_{\omega}(0;\zeta)=-\int_{|\zeta|}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

откуда и из свойства $U_{\omega}(z;\zeta)\leqslant 0$ $(|z|<1)$ следуют неравенства (1.50) леммы.

Замечание. В случае, когда $\omega(x)$ принадлежит более широкому классу $\Omega_\infty \supset \Omega'_\infty$, справедливо неравенство вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |U_\omega(\tau e^{i\vartheta}; \zeta)|\,d\vartheta \leqslant C(r_0)\int_{|\zeta|}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx \quad (0 \leqslant \tau < 1)$$

для $0 < r_0 \leqslant |\zeta| < +\infty$. Оно устанавливается уже посредством ряда тонких оценок, на основе интегрального представления (1.41) функции $U_\omega(z; \zeta)$ из леммы 4. Отметим, что в случае финитной функции $\omega(x) \equiv 0$, $x \geqslant 1$ и $0 < |\zeta| < 1$ соответствующий результат был установлен в лемме 2.2 работы автора [3].

(д) Введем важную для дальнейшего функцию

$$\Omega(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\omega(t)}{t}\,dt, \quad x \in [0, +\infty) \tag{1.51}$$

и убедимся, что она обладает свойством, аналогичным свойству (1.5) функции $\omega(x)$.

В самом деле, для любого $s \in [0, +\infty)$ по (1.5) имеем

$$\omega(x)\, x^{s+1} \leqslant 1, \quad x \geqslant x_s > 0.$$

Отсюда следует, что при $x \geqslant x_s$

$$\Omega(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{s+2}} \leqslant x^{-s-1}$$

и, т. о., $\Omega(x)\, x^s \to 0$ при $x \to +\infty$.

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$U(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} C_\infty\left(\frac{\bar{\zeta} z}{x}; \omega\right)\frac{\omega(x)}{x}\,dx, \quad |z| < +\infty, \tag{1.52}$$

и в предположении, что $0 \leqslant |z| < |\zeta| < +\infty$, также функцию

$$V(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} C_\infty\left(\frac{zx}{\zeta}; \omega\right)\frac{\omega(x)}{x}\,dx. \tag{1.53}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 1.7. *Для любого* ζ $(0 < |\zeta| < \infty)$ *справедливы тождества*

$$U(z; \zeta) = C_\infty\left(\frac{|\zeta| z}{\zeta}; \omega\right)\Omega(|\zeta|) -$$

$$-\bar{\zeta} z \int_{|\zeta|}^{+\infty} C'_\infty\left(\frac{\bar{\zeta} z}{x}; \omega\right)\frac{\Omega(x)}{x^2}\,dx, \quad |z| < +\infty, \tag{1.54}$$

$$V(z;\zeta)=C_{-}\left(\frac{|\zeta|\,z}{\zeta};\,\omega\right)\Omega(|\zeta|)+$$

$$+\frac{z}{\zeta}\int_{|\zeta|}^{+\infty}C'_{\infty}\left(\frac{zx}{\zeta};\,\omega\right)\Omega(x)\,dx,\quad 0\leqslant|z|<|\zeta|. \tag{1.55}$$

Доказательство. Поскольку

$$U(z;\zeta)=-\int_{|\zeta|}^{+\infty}C_{\infty}\left(\frac{\bar{\zeta}z}{x};\,\omega\right)d\Omega(x),$$

то интегрированием по частям получим тождество (1.54), ввиду того, что $\Omega(x)\to 0$, при $x\to+\infty$.

Хотя это и было отмечено выше, убедимся, что интеграл $U(z;\zeta)$ абсолютно сходится при $0\leqslant|z|=r<|\zeta|=R<+\infty$.

В самом деле, в этих условиях мы имеем

$$|U(z;\zeta)|\leqslant\int_{R}^{+\infty}C_{-}\left(\frac{r}{R}\,x;\,\omega\right)\frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

и пока что формально можно написать

$$|U(z;\zeta)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{k}\Delta^{-1}(k)\int_{R}^{+\infty}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx.$$

Так как, очевидно

$$\Delta^{-1}(k)\int_{R}^{+\infty}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\leqslant 1/k\ \ (k\geqslant 1), \tag{1.56}$$

то

$$|U(z;\zeta)|\leqslant\int_{R}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{r}{R}\right)^{k}=\Omega(R)+\log(1-r/R)^{-1},$$

и произведенная нами перестановка порядков интегрирования и суммирования в наших условиях законна, а интеграл $U(z;\zeta)$ на самом деле абсолютно сходящийся.

Покажем, далее, что в тех же условиях $0\leqslant|z|=r<|\zeta|=R<+\infty$ интеграл

$$V^{*}(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{+\infty}C_{-}\left(\frac{z}{\zeta}\,x;\,\omega\right)\Omega(x)\,dx$$

также абсолютно сходится.

Действительно, пока что формально мы имеем

$$|V^*(z;\zeta)| \leqslant \int_R^{+\infty} C_-\left(\frac{r}{R}\,x;\,\omega\right)\Omega(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} k\,\Delta^{-1}(k)\int_R^{+\infty}\Omega(x)\,x^{k-1}\,dx.$$

Но, как легко видеть,

$$k\int_R^{+\infty}\Omega(x)\,x^{k-1}\,dx = -R^k\,\Omega(R) + \int_R^{+\infty}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx,\ (0\leqslant k<+\infty). \tag{1.57}$$

Поэтому, в силу (1.56)

$$|V^*(z;\zeta)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} = (1-r/R)^{-1},$$

и произведенная здесь операция перестановки порядков интегрирования и суммирования также законна, а интеграл $V^*(z;\zeta)$ — абсолютно сходящийся.

Теперь уже нетрудно установить наше тождество (1.55).

Для этого составим разность

$$V(z;\zeta) - \frac{z}{\zeta}\,V^*(z;\zeta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\Delta^{-1}(k)\int_{|\zeta|}^{+\infty}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k k\,\Delta^{-1}(k)\int_{|\zeta|}^{+\infty}\Omega(x)\,x^{k-1}\,dx =$$

$$= \int_{|\zeta|}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\left\{\int_{|\zeta|}^{+\infty}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx - k\int_{|\zeta|}^{+\infty}\Omega(x)\,x^{k-1}\,dx\right\}\Delta^{-1}(k).$$

Далее, пользуясь формулами (1.57), для $R=|\zeta|$ находим

$$V(z;\zeta) - \frac{z}{\zeta}\,V^*(z;\zeta) =$$

$$= \Omega(|\zeta|) + \Omega(|\zeta|)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z\,|\zeta|}{\zeta}\right)^k\Delta^{-1}(k),$$

т. е. тождество (1.55) леммы, причем, в силу природы сходимости наших интегралов, все произведенные операции законны при условии $0\leqslant|z|<|\zeta|<+\infty$.

Наконец, вспомнив определение (1.24) функции $S_-(z;\zeta)$, в силу тождеств (1.54) и (1.55), лемме 1.3 можно дать и такую формулировку.

Лемма 1.8. *Пусть* $0<|z_1|<|\zeta|<+\infty$, *причем* $z_1=|z_1|e^{i\varphi}$. *Тогда функция* $A_{z_1}^{(-)}(z;\zeta)$ *допускает представление вида*

$$A_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)=\exp\{-\Omega_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)\},$$

где

$$\Omega_{\omega}^{(-)}(z;\zeta)=\Omega(|\zeta|)\,S_{-}(z\,e^{-i\varphi};\omega)+V_1(z;\zeta)+U_1(z;\zeta), \tag{1.58}$$

$$V_1(z;\zeta)=\frac{z}{r}\int_{|\zeta|}^{+\infty}C_{-}\left(\frac{zx}{r};\omega\right)\Omega(x)\,dx, \tag{1.59}$$

$$U_1(z;\zeta)=-\bar{\zeta}\,z\int_{|\zeta|}^{+\infty}C_{-}\left(\frac{\bar{\zeta}z}{x};\omega\right)\frac{\Omega(x)}{x^2}\,dx. \tag{1.60}$$

§ 2. Дальнейшие леммы и основные теоремы

2.1. (а) В этом параграфе мы продолжим изложение, сначала же несколько сузив класс Ω_{-}.

А именно, условимся отнести функцию $\omega(x)$ к классу $\bar{\Omega}_{-}$, если она удовлетворяет тем же условиям 1) и 2) из п. 1.1 (а), но взамен условия 3) обладает свойством:

3′) Функция $\omega(x)$ на полуоси $[1,+\infty)$ представима в виде

$$\omega(x)=\exp\{-p(x)\},\ 1\leqslant x<+\infty, \tag{2.1}$$

где

$$p(x)=\log 1/\omega(1)+\int_1^x\frac{\alpha(t)}{t}dt, \tag{2.1′}$$

а $\alpha(t)\geqslant 1$ — некоторая неубывающая на $[1,+\infty)$ функция, причем $\alpha(t)\uparrow+\infty$ при $t\uparrow+\infty$.

Легко видеть, что если $\omega(x)\in\bar{\Omega}_{-}$, то для любого $s\in(0,+\infty)$

$$\int_0^{+\infty}\omega(x)\,x^{s-1}\,dx<+\infty.$$

Таким образом, из свойства 3′) вытекает выполнение свойства 3) класса Ω_{-}. Иначе говоря, имеет место включение классов $\bar{\Omega}_{-}\subset\Omega_{-}$ и, тем самым, все утверждения из § 1 останутся в силе при $\omega(x)\in\bar{\Omega}_{-}$.

Отметим прежде всего, что если $\omega(x)\in\bar{\Omega}_{-}$, то для введенной нами в § 1 функции

$$\Omega(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\omega(t)}{t}\,dt,\ x\in(0,+\infty)$$

справедлива оценка

$$\Omega(x) \leqslant \frac{\omega(x)}{\alpha(x)},\ 1 \leqslant x < +\infty. \tag{2.2}$$

В самом деле, из представления (2.1)—(2.1′) функции $\omega(x)$ следует, что при $1 \leqslant x < +\infty$

$$\Omega(x) = \int_x^{+\infty} \frac{d\left|-e^{-p(x)}\right|}{\alpha(x)} \leqslant \frac{1}{\alpha(x)} \int_x^{+\infty} d\left\{-e^{-p(x)}\right\} = \frac{e^{-p(x)}}{\alpha(x)} = \frac{\omega(x)}{\alpha(x)},$$

поскольку, согласно определению функции $\alpha(t)$, мы имеем $\alpha(t) \geqslant \alpha(x)$ при $t \geqslant x$.

(б) Докажем теперь лемму.

Лемма 2.1. *Пусть* $\omega(x) \in \widetilde{\Omega}_-$ *и* $\arg \zeta = \varphi$. *Тогда для введенной по* (1.52) *функции*

$$U(z;\ \zeta) = \int_{|\zeta|}^{\infty} C_\infty\left(\frac{\bar{\zeta} z}{x};\ \omega\right) \frac{\omega(x)}{x}\, dx$$

справедливо предельное соотношение

$$\lim_{|\zeta| \to +\infty} \Omega^{-1}(|\zeta|)\, U(z;\ \zeta) = C_\infty\left(ze^{-i\varphi};\ \omega\right),\ |z| < +\infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. Обозначая

$$U_1(z;\ \zeta) \equiv \Omega^{-1}(|\zeta|)\, U(z;\ \zeta) - C_\infty\left(z\, e^{-i\varphi};\ \omega\right) \tag{2.4}$$

и положив $r = |z|$, $R = |\zeta| > 1$, из тождества (1.54) леммы 1.7 получим оценку

$$|U_1(z;\ \zeta)| \leqslant r \frac{R}{\Omega(R)} \int_R^{+\infty} C'_\infty\left(\frac{rR}{x};\ \omega\right) \frac{\Omega(x)}{x^2}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant rC'_-(r;\ \omega) \frac{1}{R\Omega(R)} \int_R^{+\infty} \Omega(x)\, dx,\ \ R > 1. \tag{2.5}$$

Но поскольку

$$\lim_{R \to +\infty} R\Omega(R) = \lim_{R \to +\infty} \int_R^{+\infty} \Omega(x)\, dx = 0,$$

то согласно формуле Коши существует такое $\xi \in (R,\ +\infty)$, что

$$\frac{1}{R\Omega(R)} \int_R^{+\infty} \Omega(x)\, dx = \frac{\Omega(\xi)}{\omega(\xi) - \Omega(\xi)}.$$

Поэтому в силу неравенства (2.2)

$$\overline{\lim_{R \to +\infty}} \frac{1}{R\Omega(R)} \int_R^{+\infty} \Omega(x)\, dx \leqslant \overline{\lim_{\xi \to +\infty}} \frac{1}{\alpha(\xi) - 1} = 0,$$

откуда и из (2.4), (2.5) следует соотношение (2.3) леммы.

(в) Обозначим при $0 \leqslant |z| < |\zeta| < +\infty$

$$V_1(z;\zeta)\equiv\Omega^{-1}(|\zeta|)\,V(z;\zeta)-C_-(ze^{-i\varphi};\omega),\qquad(2.6)$$

положив вновь $\varphi=\arg\zeta$, где функция $V(z;\zeta)$ определена по формуле (1.53).

Тогда положив вновь $0\leqslant r=|z|<|\zeta|=R<+\infty$, из тождества (1.55) леммы 1.7 получим оценку

$$|V_1(z;\zeta)|\leqslant\frac{r}{R\Omega(R)}\int_R^{+\infty}C_-\left(\frac{rx}{R};\omega\right)\Omega(x)\,dx,\qquad(2.7)$$

причем, как было показано в той же лемме, интеграл справа сходится при нашем условии $R>r$.

Из оценок (1.22) производных функции $C_-(z;\omega)$, в частности, вытекает неравенство

$$|C_-(z;\omega)|\leqslant A_1(\gamma)\{|z|\,\omega(\gamma|z|)\}^{-1},\ 0<|z|<\infty,$$

где $A_1(\gamma)=\gamma(\gamma-1)^{-2}$.

Отсюда и из (2.7) приходим к оценке

$$|V_1(z;\zeta)|\leqslant\frac{A_1(\gamma)}{\Omega(R)}\int_R^{+\infty}\frac{\Omega(x)}{x\omega\left(\frac{\gamma r}{R}x\right)}\,dx,\ R>r.\qquad(2.8)$$

Но оценка эта будет содержательной, если мы установим, что интеграл

$$J(r;R)=\int_R^{+\infty}\frac{\Omega(x)}{x\omega\left(\frac{\gamma r}{R}x\right)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\Omega(Rx)}{x\omega(\gamma rx)}\,dx\qquad(2.9)$$

сходится хотя бы для достаточно больших значений $R>r>1$.

В этом можно убедиться для функций класса $\bar{\Omega}_-$, подчиненных дополнительному условию

$$\alpha(x)\geqslant\alpha_0\log_2 x,\ x\geqslant x_0\geqslant e^2,\qquad(2.10)$$

где α_0 $(0<\alpha_0<+\infty)$ — некоторое фиксированное число.

В самом деле, во-первых, заметим, что в силу неравенства (2.2) мы будем иметь

$$J(r;R)\leqslant\frac{1}{\alpha(R)}\int_1^{+\infty}\frac{\omega(Rx)}{x\omega(\gamma rx)}\,dx,\qquad(2.9')$$

причем ввиду представления (2.1)—(2.1′) функции $\omega(x)$ для $x\geqslant1$

$$\frac{\omega(Rx)}{\omega(\gamma rx)}=\exp\left\{-\int_{\gamma rx}^{Rx}\frac{\alpha(t)}{t}\,dt\right\}\leqslant\exp\left\{-\alpha(\gamma rx)\log\frac{R}{\gamma r}\right\}.$$

Предположив теперь, что

$$R \geqslant \varkappa_0^{-1} \max \{\gamma r,\ x_0\},\ \varkappa_0 = e^{-2/\alpha_*}, \tag{2.11}$$

мы приходим к неравенству

$$\frac{\omega(Rx)}{\omega(\gamma r x)} \leqslant \frac{\omega(Rx)}{\omega(\varkappa_0 R x)} \leqslant \exp\{-2\log_2(\gamma r x)\} = [\log(\gamma r x)]^{-2},\ x \geqslant x_0.$$

Следовательно, в условиях (2.10) и (2.11) будем иметь

$$J(r, R) \leqslant \frac{1}{\alpha(R)} \int_1^{+\infty} \frac{\omega(Rx)}{x\omega(\varkappa_0 Rx)}\,dx = \frac{1}{\alpha(R)} \int_R^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x\omega(\varkappa_0 x)}\,dx < +\infty, \tag{2.12}$$

откуда, очевидно, вытекает, что

$$\lim_{R \to +\infty} J(r, R) = 0\ (0 \leqslant r < +\infty).$$

2.2. Докажем теперь важный для дальнейшего аналог леммы 2.1 об асимптотическом поведении функции $V(z; \zeta)$, когда $\zeta \to \infty$.

а) Лемма 2.2. *Пусть* $\omega(x) \in \bar{\Omega}_-$ *и при некотором* $\varkappa\ (0 < \varkappa < 1)$ *функция* $\alpha(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{x \to +\infty} \sup \frac{\alpha(\varkappa x)}{\alpha(x)} < \delta(\varkappa) < 1. \tag{2.13}$$

Тогда если $\arg \zeta = \varphi$, *то справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{|\zeta| \to +\infty} \Omega^{-1}(|\zeta|)\, V(z; \zeta) = C_-(z e^{-i\varphi}; \omega),\ |z| < +\infty. \tag{2.14}$$

Доказательство. Для любого $R_1 > R$ введем в рассмотрение функцию

$$J(r, R; R_1) = \int_R^{R_1} \frac{\Omega(x)}{x\omega\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)}\,dx,\ R_1 > R > r.$$

Тогда будем иметь

$$J(r, R; R_1) = -\int_R^{R_1} \frac{1}{\omega\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)}\,d\left\{\int_x^{R_1} \frac{\Omega(t)}{t}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\omega(\gamma r)} \int_R^{R_1} \frac{\Omega(t)}{t}\,dt - \int_R^{R_1} \left\{\int_x^{R_1} \frac{\Omega(t)}{t}\,dt\right\} \frac{\frac{\gamma r}{R}\,\omega'\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)}{\omega^2\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)}\,dx.$$

Далее, пользуясь неравенством (2.2), мы имеем для $R \leqslant x \leqslant R_1$

$$\int_x^{R_1} \frac{\Omega(t)}{t}\,dt \leqslant \int_x^{\infty} \frac{\omega(t)}{t\alpha(t)}\,dt \leqslant \frac{1}{\alpha(x)} \int_x^{\infty} \frac{\omega(t)}{t}\,dt = \frac{\Omega(x)}{\alpha(x)}.$$

Одновременно, очевидно, что для любого $q > 0$, $-q\omega'(qx)/\omega(qx) = \alpha(qx)/x$. Поэтому мы приходим к оценке

$$J(r, R; R_1) \leqslant \frac{\Omega(R)}{\omega(\gamma r)\alpha(R)} + \int_R^{R_1} \frac{\Omega(x)}{x\omega\left(\frac{\gamma r}{R}x\right)} \frac{\alpha\left(\frac{\gamma r}{R}x\right)}{\alpha(x)}\,dx,$$

или, в силу определения самого интеграла $J(r, R; R_1)$ — к оценке

$$\int_R^{R_1} \frac{\Omega(x)}{x\omega\left(\frac{\gamma r}{R}x\right)} \left\{1 - \frac{\alpha\left(\frac{\gamma r}{R}\lambda\right)}{\alpha(x)}\right\} dx \leqslant \frac{\Omega(R)}{\omega(\gamma r)\alpha(R)}.$$

Устремив здесь $R_1 \to +\infty$, для любого $R > \gamma r \geqslant 1$ получим неравенство

$$\int_R^{+\infty} \frac{\Omega(x)}{x\omega\left(\frac{\gamma r}{R}x\right)} \left\{1 - \frac{\alpha\left(\frac{\gamma r}{R}x\right)}{\alpha(x)}\right\} dx \leqslant \frac{\Omega(R)}{\omega(\gamma r)\alpha(R)}. \tag{2.15}$$

левая часть которого неотрицательна ввиду того, что функция $\alpha(x)$ неубывающая на полуоси $[1, +\infty)$.

Но если $R \geqslant \varkappa^{-1}\gamma r$, то $\alpha\left(\frac{\gamma r}{R}x\right) \leqslant \alpha(\varkappa x)$ и

$$1 - \frac{\alpha\left(\frac{\gamma r}{R}x\right)}{\alpha(x)} \geqslant 1 - \frac{\alpha(\varkappa x)}{\alpha(x)},\ R \leqslant x < +\infty.$$

Поэтому из условия (2.13) леммы следует, что существует число $R_0 \geqslant \varkappa^{-1}\gamma r$ такое, что при $x \geqslant R_0$

$$1 - \frac{\alpha\left(\frac{\gamma r}{R}x\right)}{\alpha(x)} \geqslant 1 - \sqrt{\delta(x)} > 0.$$

Отсюда, из формул (2.8), (2.9) ввиду (2.15) вытекает, далее, неравенство

$$|V_1(z; \zeta)| \leqslant \frac{A_1(\gamma)}{(1 - \sqrt{\delta(x)})\alpha(R)},\ R > R_0,$$

откуда, ввиду того, что $\alpha(R) \to +\infty$ при $R \to +\infty$, получим для любого $r = |z| \geqslant 1$

$$\lim_{|\zeta|\to+\infty} V_1(z;\zeta)=0. \tag{2.16}$$

Но поскольку $|V_1(z;\zeta)|$ для $|\zeta|>|z|$ суть семейство функций, аналитических в любом круге $|z|\leqslant r$ $(0<r<+\infty)$, то очевидно, что соотношение (2.16) справедливо во всей комплексной плоскости z.

Наконец, из тождества (2.6), в силу (2.16), вытекает утверждение (2.14) леммы.

(б) Из доказанной леммы непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если* $\omega(x)\in\tilde{\Omega}_\infty$, *причем* $\alpha(x)/x$ *— неубывающая функция на полуоси* $[x_0,+\infty)\subset[1,+\infty)$, *то соотношение* (2.14) *леммы справедливо.*

Действительно, в этом случае для любого $\varkappa$ $(0<\varkappa<1)$

$$\frac{\alpha(\varkappa x)}{\alpha(x)}=\varkappa\left[\frac{\alpha(\varkappa x)}{\varkappa x}\right]\cdot\left[\frac{\alpha(x)}{x}\right]^{-1}\leqslant\varkappa<1.$$

Прежде чем привести второе следствие, напомним одно определение.

Функция $\rho(x)>0$, определенная на некоторой полуоси $[x_0,+\infty)\subset[0,+\infty)$, называется *уточненным порядком*, если

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\rho(x)=\rho>0,$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\{x\rho'(x)\log x\}=0. \tag{2.17}$$

Как известно (см., напр., [8], стр. 48), если $\rho(x)$ — уточняет порядок, то имеет место представление

$$x^{\rho(x)}=x^{\rho}L(x),\quad x\geqslant x_1\geqslant x_0, \tag{2.18}$$

где $L(x)$ — *медленно растущая функция*, т. е. функция, для которой при любом $\varkappa$ $(0<\varkappa<+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}L(\varkappa x)/L(x)=1. \tag{2.18'}$$

Условимся теперь функцию $\rho(x)$ отнести к классу R_ρ, если она кроме условий (2.17) удовлетворяет также дополнительному условию

$$3)\ \lim_{x\to+\infty}|x\rho''(x)\log x|=0. \tag{2.17'}$$

Следствие 2. *Если* $\omega(x)=\exp\{-\sigma x^{\rho(x)}\}$, *где* $\rho(x)\in R_\rho$, *а* $\sigma>0$ — *любое фиксированное число, то* $\omega(x)\in\bar{\Omega}_\infty$, *и кроме того имеет место соотношение* (2.14) *леммы.*

В самом деле, обозначая.

$$p(x)=\sigma x^{\rho(x)},$$

мы имеем:

$$xp'(x)=p(x)\{\rho(x)+x\rho'(x)\log x\}, \tag{2.19}$$

$$[xp'(x)]'=p(x)\{[\rho(x)+x\rho'(x)\log x]^2+$$
$$+[2\rho'(x)+\rho'(x)\log x+x\rho''(x)\log x]\}.$$

Из условий (2.17)—(2.17′) непосредственно вытекает, что $xp'(x) \uparrow +\infty$ при $x \uparrow +\infty$. Иначе говоря, если положить $xp'(x) = \alpha_\rho(x)$, то функция $p(x)$ на некоторой полуоси $[x_0, +\infty) \subset [1, +\infty)$ допускает представление вида

$$p(x) = p(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\alpha_\rho(t)}{t}\, dt, \quad x \geqslant x_0,$$

где $\alpha_\rho(x) \geqslant 1$ — неубывающая на $[x_0, +\infty)$ функция, причем $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha_\rho(x) = +\infty$. Таким образом, обозначая $\omega(x) = \exp\{-\alpha x^{\rho(x)}\}$, мы будем иметь $\omega(x) \in \bar{\Omega}_-$.

Наконец, по (2.18) и (2.19) для любого $\varkappa$ $(0 < \varkappa < +\infty)$

$$\frac{\alpha_\rho(\varkappa x)}{\alpha_\rho(x)} = \frac{\varkappa x p'(\varkappa x)}{x p'(x)} = \varkappa^\rho \frac{L(\varkappa x)}{L(x)} \cdot \frac{p(\varkappa x) + \varkappa x\, p'(\varkappa x) \log \varkappa x}{p(x) + x p'(x) \log x}$$

и, согласно (2.18′) и (2.19)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha_\rho(\varkappa x)}{\alpha_\rho(x)} = \varkappa^\rho.$$

Следовательно, для любого $0 < \varkappa < 1$ функция $\alpha_\rho(x)$ удовлетворяет условию (2.13) леммы 2.2, и, тем самым, наше утверждение справедливо.

(в) В заключение приведем другой важный конкретный пример функции $\omega(x) \in \bar{\Omega}_-$, для которого соотношение (2.13) леммы 2.2 сохраняет силу.

С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$\omega_\rho(x) = \frac{\rho\, \sigma^\mu}{\Gamma(\mu)} \int_x^{+\infty} e^{-\sigma t^\rho}\, t^{\mu\rho - 1}\, dt, \quad x \in [0, +\infty), \tag{2.20}$$

где ρ $(0 < \rho < +\infty)$, μ $(0 < \mu < +\infty)$ и σ $(0 < \sigma < +\infty)$ — произвольные параметры.

Легко видеть, что функция $\omega_\rho(x) > 0$ непрерывна, убывает на всей полуоси $[0, +\infty)$, причем $\omega_\rho(0) = 1$. Так как

$$1 - \omega_\rho(x) = \frac{\rho\, \sigma^\mu}{\Gamma(\mu)} \int_0^x e^{-\sigma t^\rho} t^{\mu\rho - 1}\, dt, \quad x > 0,$$

то $1 - \omega_\rho(x) = O(x^{\mu\rho})$ при $x \to 0$, и поэтому

$$a_\omega = \int_0^1 \{1 - \omega_\rho(x)\}\, \frac{dx}{x} < +\infty.$$

Далее, для любого $s \in (0, +\infty)$

$$\Delta(s)=s\int_0^{+\infty}\omega_\rho(x)\,x^{s-1}\,dx=\int_0^{+\infty}x^s\,d\{-\omega_\rho(x)\}=$$

$$=\frac{\rho\,\sigma^\mu}{\Gamma(\mu)}\int_0^{+\infty}e^{-\sigma x^\rho}\,x^{\mu\rho+s-1}\,dx=\frac{\Gamma(\mu+s/\rho)}{\sigma^{s/\rho}\,\Gamma(\mu)}.$$

Таким образом, $\Delta(+0)=1$, и

$$C_\omega(z;\ \omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta(k)}=\Gamma(\mu)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sigma^{1/\rho}z)^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}=\Gamma(\mu)\,E_\rho(\sigma^{1/\rho}z;\ \mu),\qquad(2.21)$$

где

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}$$

— целая функция типа Миттаг-Леффлера порядка ρ и типа 1 для любого значения параметра $\mu>0$.

Лемма 2.3. *Функцию $\omega_\rho(x)$ можно представить в виде*

$$\omega_\rho(x)=\exp\{-\sigma x^{\rho(x)}\},\ 0\leqslant x<+\infty,\qquad(2.22)$$

где $\rho(x)\in R_\rho$.

Доказательство. Из определения (2.20) функции $\omega_\rho(x)$ имеем

$$\omega_\rho(x)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{\sigma x^\rho}^{+\infty}e^{-t}\,t^{\mu-1}\,dt.\qquad(2.20')$$

Поэтому при $\mu=1$ мы имеем $\omega_\rho(x)=e^{-\sigma x^\rho}$, и, тем самым, $\rho(x)\equiv\rho$.

Таким образом, нам следует доказать лемму лишь в случае, когда $\mu\neq1$. Из (2.20') интегрированием по частям получим тождество

$$\omega_\rho(x)=\frac{\sigma^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}e^{-\sigma x^\rho}\,x^{\mu\rho-\rho}+\omega_\rho^*(x),\qquad(2.23)$$

где

$$\omega_\rho^*(x)=\frac{\mu-1}{\Gamma(\mu)}\int_{\sigma x^\rho}^{+\infty}e^{-t}\,t^{\mu-2}\,dt,\qquad(2.23')$$

и поэтому

$$|\omega_\rho^*(x)|\leqslant\frac{|\mu-1|}{\sigma x^\rho}\,\omega_\rho(x),\ 0<x<+\infty.\qquad(2.24)$$

Отсюда непосредственно следуют асимптотические формулы

$$\omega_\rho(x)\sim\frac{\sigma^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\,e^{-\sigma x^\rho}\,x^{\mu\rho-\rho},\quad x\to+\infty$$

$$\omega_\rho^{-1}(x)\sim\frac{\Gamma(\mu)}{\sigma^{\mu-1}}\,e^{\sigma x^\rho}\,x^{\rho-\mu\rho}.\qquad(2.25)$$

Далее, из (2.23′) применением двукратного интегрирования по частям приходим к следующему более общему чем (2.23) тождеству

$$\omega_\rho(x) = \frac{\sigma^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\, e^{-\sigma x^\rho}\, x^{\mu\rho-\rho}\{1+(\mu-1)\,\sigma^{-1}\, x^{-\rho}+$$

$$+(\mu-1)(\mu-2)\,\sigma^{-2}\,x^{-2\rho}+\tilde{\omega}_\rho(x)\}, \tag{2.26}$$

где

$$\tilde{\omega}_\rho(x) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-3)}\,\sigma^{1-\mu}\, e^{\sigma x^\rho}\, x^{\rho-\mu\rho}\int_{\sigma x^\rho}^{+\infty} e^{-t}\, t^{\mu-4}\, dt,$$

при этом в силу (2.25) легко видеть, что при $x \to +\infty$

$$\tilde{\omega}_\rho(x) = O(x^{-3\rho}). \tag{2.26′}$$

Поэтому из (2.26) и (2.26′) следует также, что при $x \to +\infty$

$$\omega_\rho^{-1}(x) = \frac{\Gamma(\mu)}{\sigma^{\mu-1}}\, e^{\sigma x^\rho}\, x^{\rho-\mu\rho}\,\{1-(\mu-1)\,\sigma^{-1}\,x^{-\rho}+$$

$$+(\mu-1)\,\sigma^{-2}\,x^{-2\rho}+O(x^{-3\rho})\}. \tag{2.27}$$

Теперь заметим, что согласно определению (2.22) функции $\rho(x)$

$$\rho(x) = \log\{\sigma^{-1}\log\omega_\rho^{-1}(x)\}(\log x)^{-1},$$

а в силу (2.27) при $x \to +\infty$

$$\sigma^{-1}\log\omega_\rho^{-1}(x) = \sigma^{-1}\log|\sigma^{1-\mu}\,\Gamma(\mu)| + x^{\rho} - \rho(\mu-1)\,\sigma^{-1}\log x +$$

$$+\sigma^{-1}\log\{1-(\mu-1)\,\sigma^{-1}\,x^{-\rho}+O(x^{-2\rho})\}.$$

Отсюда следует, что справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\rho(x) = \rho+\rho(1-\mu)\,\sigma^{-1}\,x^{-\rho}+O\left(\frac{x^{-\rho}}{\log x}\right),\ x\to+\infty. \tag{2.28}$$

Далее, так как по (2.22)

$$x^{\rho(x)} = \sigma^{-1}\log\omega_\rho^{-1}(x),$$

то дифференцированием по x отсюда получим

$$x^{\rho(x)-1}\,[\rho(x)+x\rho'(x)\log x] = -\sigma^{-1}\,\frac{\omega_\rho'(x)}{\omega_\rho(x)}. \tag{2.29}$$

Но из (2.20′) имеем

$$\omega_\rho'(x) = -\frac{\rho\,\sigma^\mu}{\Gamma(\mu)}\, e^{-\sigma x^\rho}\, x^{\mu\rho-1}. \tag{2.30}$$

Поэтому, и в силу (2.27) мы приходим к асимптотической формуле

$$\rho(x) + x\rho'(x)\log x = \rho\, x^{\rho-\rho(x)}\{1 + O(x^{-\rho})\},\ x \to +\infty.$$

Но из (2.28) вытекает, что

$$\lim_{x\to+\infty} \rho(x) = \rho \text{ и } \lim_{x\to+\infty} x^{\rho-\rho(x)} = 1, \tag{2.31}$$

и поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \{x\rho'(x)\log x\} = 0. \tag{2.32}$$

Таким образом, $\rho(x)$ является уточненным порядком и для завершения доказательства леммы нам остается показать, что она удовлетворяет также условию (2.17′).

С этой целью запишем тождество (2.29) в виде

$$\rho(x) + x\rho'(x)\log x = -\sigma^{-1}\frac{\omega_\rho'(x)}{\omega_\rho(x)}\, x^{1-\rho(x)}$$

и затем, дифференцируя по x, получим

$$2\rho'(x) + \rho'(x)\log x + x\rho''(x)\log x =$$

$$= \sigma^{-1}[1-\rho(x)]\, x^{-\rho(x)}\frac{\omega_\rho'(x)}{\omega_\rho(x)} + \sigma^{-1}\, x^{1-\rho(x)}\rho'(x)\,\frac{\omega_\rho'(x)}{\omega_\rho(x)} - \tag{2.33}$$

$$-\frac{\sigma^{-1}}{\omega_\rho(x)}\left\{\omega_\rho''(x) - \frac{[\omega_\rho'(x)]^2}{\omega_\rho(x)}\right\} x^{1-\rho(x)} \equiv \sum_{j=1}^{3} U_j(x).$$

Но по (2.25) и (2.30), при $x \to +\infty$

$$U_1(x) \sim -\rho(\rho-1)\, x^{\rho-\rho(x)-1} \sim O(x^{-1})$$

по (2.31), и

$$U_2(x) \sim -\rho\, x^{\rho-\rho(x)}\rho'(x) \sim o\left(\frac{x^{-1}}{\log x}\right)$$

по (2.32).

Переходя к выяснению поведения функции $U_3(x)$ при $x \to +\infty$, заметим, что из (2.30) имеем

$$\omega_\rho''(x) = \frac{\sigma^{\mu+1}\rho^2}{\Gamma(\mu)}\, e^{-\sigma x^\rho}\, x^{\mu\rho+\rho-2}\{1-(\mu-1/\rho)\,\sigma^{-1}\, x^{-\rho}\},$$

а из (2.30) и (2.27) следует, что при $x \to +\infty$

$$\frac{[\omega_\rho'(x)]^2}{\omega_\rho(x)} = \frac{\sigma^{\mu+1}\rho^2}{\Gamma(\mu)}\, e^{-\sigma x^\rho}\, x^{\mu\rho+\rho-2}\,[1-(\mu-1)\,\sigma^{-1}\, x^{-\rho} +$$

$$+ (\mu-1)\,\sigma^{-2}\, x^{-2\rho} + O(x^{-3\rho})].$$

Из приведенных соотношений следует, что при $x \to +\infty$

$$\omega_\rho''(x) - \frac{[\omega_\rho'(x)]^2}{\omega_\rho(x)} = -(\sigma\rho)^2\,\frac{\sigma^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\, e^{-\sigma x^\rho}\, x^{\mu\rho+\rho-2}\{(1-\rho^{-1})\,\sigma^{-1}\, x^{-\rho} +$$

$$+ (\mu-1)\,\sigma^{-2}\, x^{-2\rho} + O(x^{-2\rho})\},$$

откуда, пользуясь формулой (2.25), получим

$$U_3(x) \equiv -\frac{\sigma^{-1}}{\omega_\rho(x)}\left\{\omega_\rho'(x) - \frac{[\omega_\rho'(x)]^2}{\omega_\rho(x)}\right\} =$$

$$= (\sigma\rho)^2 x^{\rho-\rho(x)}\left\{(1-\rho^{-1})\sigma^{-1} + (\mu-1)\sigma^{-2}x^{-\rho} + O(x^{-2\rho})\right\} x^{-1}.$$

Отсюда по (2.31) заключаем, что при $x \to +\infty$

$$U_3(x) \sim O(x^{-1}).$$

Возвращаясь, наконец, к тождеству (2.33) и учитывая как поведение функций $U_j(x)(j=1, 2, 3)$ при $x \to +\infty$, так и то, что функция $\rho(x)$ — уточненный порядок, заключаем, что также $\lim\limits_{x\to+\infty}\{x\rho''(x) \times \times \log x\} = 0$.

Итак, $\rho(x) \in R_0$ и лемма полностью доказана.

Из следствия 2 леммы 2.2 и из доказанной леммы 2.3 вытекает

Следствие. *Для любого* $\rho\ (0<\rho<+\infty)$, $\sigma\ (0<\sigma<+\infty)$ *и* $\mu\ (0<\mu<+\infty)$ *будем иметь* $\omega_\rho(x) \in \Omega_-$, *и если* $\arg\zeta = \varphi$, *то*

$$\lim_{|\zeta|\to+\infty} \Omega_\rho^{-1}(|\zeta|)\, V_\rho(z;\zeta) = E_\rho(ze^{-i\varphi};\zeta),\ |z|<+\infty, \qquad (2.34)$$

где

$$V_\rho(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} E_\rho\left(\frac{zx}{\zeta};\mu\right)\frac{\omega_\rho(x)}{x}\,dx,\ \Omega_\rho(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\omega_\rho(t)}{t}\,dt. \qquad (2.34')$$

2.2 (а). Согласно лемме 3 и введенным нами обозначениям (1.52) и (1.53) функция

$$A_\omega^{(-)}(z;\zeta) = \left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-W_\omega^{(-)}(z;\zeta)\right\}$$

при $0 \leqslant |z| < |\zeta| < +\infty$ допускает представление

$$A_\omega^{(-)}(z;\zeta) = \exp\{-\Omega_-(z;\zeta)\},$$

где

$$\Omega_-(z;\zeta) = U(z;\zeta) + V(z;\zeta).$$

Поэтому, пользуясь леммами 2.1, 2.2, следствиями 1 и 2 из последней, или леммой 2.3, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть функция* $\omega(x)$ *из класса* $\bar{\Omega}_-$, *причем выполняется одно из следующих условий:*

а) *при некотором* $\varkappa\ (0<\varkappa<1)$

$$\lim_{x\to+\infty}\sup\frac{a(\varkappa x)}{a(x)} < 1,$$

б) $a(x)/x$ *не убывает на некоторой полуоси* $[x_0, +\infty) \subset [1, +\infty)$,

в) *функция* $\omega(x)$ *представима в виде* $\omega(x) = \exp\{-\sigma x^{\rho(x)}\}$ $(0<\sigma<+\infty)$, *где* $\rho(x) \in R_\rho$, *или, в частности, в виде*

$$\omega(x) = \omega_\rho(x) = \frac{\rho\,\sigma^\mu}{\Gamma(\mu)} \int_x^{+\infty} e^{-\sigma t^\rho} t^{\mu\rho-1}\,dt,$$

где ρ, σ *и* μ — *произвольные положительные параметры.*

Тогда при $\arg\zeta = \varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{|\zeta|\to+\infty} \Omega^{-1}(|\zeta|)\log A_\omega^{(\infty)}(z;\zeta) =$$

$$= 2C_-(ze^{-i\varphi};\omega) - 1 = S_-(ze^{-i\varphi};\omega),\ |z| < +\infty. \tag{2.35}$$

(б) Приведем, наконец, основную теорему данной работы о построении универсальной целой функции с нулями на данной произвольной последовательности точек на комплексной плоскости.

Теорема 2. *Пусть функция* $\omega(x)$ *из класса* $\tilde{\Omega}_-$ *удовлетворяет одному из условий теоремы* 1. *Пусть, далее,* $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < +\infty)$ — *произвольная последовательность комплексных чисел, подчиненная условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\,dx < +\infty. \tag{2.36}$$

Тогда бесконечное произведение

$$\pi_\omega(z;z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left\{-W_\omega^{(\infty)}(z;z_k)\right\}, \tag{2.37}$$

где

$$W_\omega^{(\infty)}(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx - \right.$$

$$\left. - \bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{+\infty}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{z^k}{k\int_0^\infty \omega(x)\,x^{k-1}\,dx} \tag{2.38}$$

равномерно и абсолютно сходится на каждом компакте плоскости z, *представляя целую функцию* $\pi_\omega(z;z_k)$, *обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности* $\{z_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$A_\omega^{(\infty)}(0;\zeta) = \left\{\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-W_\omega^{(\infty)}(z;\zeta)\right\}_{z=0}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\int_{|\zeta|}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}.$$

Поэтому

$$\pi_\omega(0;\ z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}A_\omega^{(\infty)}(0;\ z_k)=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z|_k}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}dx\right\}>0$$

лишь при условии (2.36).

Таким образом, условие (2.36) необходимо для того, чтобы бесконечное произведение $\pi_\omega(z;\ z_k)$ сходилось в точках плоскости z, отличных от точек последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Согласно предельному соотношению (2.35) теоремы 1

$$\lim_{|\zeta|\to+\infty}\{1-A_\omega(z;\ |\zeta|e^{i\varphi})\}\,\Omega^{-1}(|\zeta|)=S_-(e^{-i\varphi}z;\ \omega),$$

притом равномерно относительно $\varphi\in[0,\ 2\pi]$ и $|z|\leqslant R$, где $R\in(0,\ +\infty)$ любое.

Отсюда следует, что для любого $R>0$ существует целое число $N(R)\geqslant 1$, такое что

$$|1-A_\omega^{(\infty)}(z;\ z_k)|\leqslant 2S_-(R;\ \omega)\int_{|z_k|}^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx,\ |z|\leqslant R,$$

как только $k\geqslant N(R)$.

Поскольку всегда

$$|1-|A_\omega^{(\infty)}(z;\ \zeta)||\leqslant|1-A_\omega^{(\infty)}(z;\ \zeta)|,$$

то отсюда следует, что при условии (2.36) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|1-|A_\omega^{(\infty)}(z;\ z_k)||$$

сходится, притом равномерно в каждом круге $|z|\leqslant R$.

В силу известного признака сходимости бесконечных произведений, утверждение теоремы доказано.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 31.III.1978

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Մի անվերջ արտադրյալի մասին *(ամփոփում)*

Հեղինակի աշխատանքներում կառուցվել էր մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացիայի տեսությունը միավոր շրջանում [1, 2, 3] և մասնակիորեն ամբողջ հարթության մեջ։ [4]

Նշված աշխատանքների հիմքում ընկած գաղափարների և մեթոդների հետագա զարգացման միջոցով ներկա հոդվածում բերվում է մի ունիվերսալ անվերջ արտադրյալի կառուցումը։ Այդ արտադրյալները կարող են հիմք ծառայել ողջ հարթության մեջ կամայական աճ ունեցող ամբողջ կամ մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացիայի լիակատար տեսության կառուցման համար։

M. M. JRBASHIAN. *On a certain infinite product* (summary)

In the series of the author's earlier investigations (1, 2, 3) the factorizatio theory for functions meromorphic in the disk or in the whole plane was developed.

The present article carries out the construction of an universal infinite pro duct. The construction developes further the ideas and methods, which were the ba sis of the mentioned above investigations.

The obtained products can serve for a basis in the construction of a complet factorization theory for functions entire or meromorphic in the whole plane, havin arbitrary growth.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единично круге функций. ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций комплексной области, М., Изд. „Наука", 1966.
3. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат сб., 79 (121), № 4 (8), 1969, 517—615.
4. *М. М. Джрбашян.* Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости Изв. АН Арм.ССР, „Математика", V, № 6, 1970, 453—485.
5. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М., Огиз, 1941, 226.
6. *У. Хейман.* Мероморфные функции, М., Изд. „Мир", 1966.
7. *P. Duren.* Theory of H^p Spaces, Academy Press, New York and London, 1970.
8. *Б. Л. Левин.* Распределение корней целых функций, М., 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII. № 3, 1978 Математика

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. З. МКРТЧЯН

КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА С БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫМ СПЕКТРОМ

Пусть A — самосопряженный оператор с областью определения D_A, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, E_λ — отвечающее ему спектральное семейство проекционных операторов, а R_z — его резольвента.

В работе [1], изучая вопрос о полноте системы собственных элементов оператора A в предположении однократности его спектра, мы доказали необходимое и достаточное условие полноты, формулируемое исключительно в терминах резольвенты R_z и заданной совокупности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ его собственных значений.

В настоящей работе мы доказываем необходимое и достаточное условие полноты системы собственных элементов $\Phi = \{\varphi_k \in D_A;\ A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k,\ \lambda_k \in \Lambda\}$, без каких-либо предположений относительно кратности спектра рассматриваемого оператора A.

Отметим, что указываемое нами условие аналогично классическому равенству Парсеваля для полных ортонормированных систем. Кроме того это условие (как и условие содержащееся в [1]) формулируется лишь в терминах R_z и совокупности Λ, поэтому при проверке его выполнимости для конкретного оператора A нет необходимости находить саму систему Φ, полнота которой исследуется.

Приводимое здесь условие в случае операторов с однократным спектром содержалось в числе результатов, доложенных нами в январе 1976 года на Всесоюзной конференции по дифференциальным уравнениям, посвященной 75-летию И. Г. Петровского.

1°. В этом пункте мы устанавливаем справедливость неравенства, которое можно рассматривать как аналог известного неравенства Бесселя для ортонормированных систем.

Ниже нам понадобится следующее вспомогательное предложение.

Лемма 1. *Пусть в точке λ_0 неубывающая функция $\rho(t)$ имеет скачок $\Delta_0 = \rho(\lambda_0 + 0) - \rho(\lambda_0 - 0) > 0$, тогда для каждой функции $F(t) \in L_\rho(\mathbb{R}^1)$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{F(t)\, d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2} = F(\lambda_0) \cdot \Delta_0. \tag{1}$$

◀ Рассмотрим функцию $\tilde{\rho}(t) = \rho(t) - \Delta_0 \cdot \theta_{\lambda_0}(t)$ (здесь θ_{λ_0} — мера Хевисайда, сосредоточенная в точке $t = \lambda_0$, которая очевидно является неубывающей и непрерывной в точке λ_0, поэтому в силу леммы 5 из [1] будем иметь

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^2 \int_{R^1} \frac{F(t)\, d\tilde{\rho}(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2} = 0,$$

следовательно

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^2 \int_{R^1} \frac{F(t)\, d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2} = \Delta_0 \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \int_{R^1} \frac{F(t)\, d\theta_{\lambda_0}(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2} = F(\lambda_0) \cdot \Delta_0.$$

▶

Теорема 1. (*аналог неравенства Бесселя*). *Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — некоторая совокупность его собственных значений, тогда для любого элемента f из H имеет место неравенство*

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{2}$$

◀ Представим пространство H в виде нижеследующей ортогональной суммы инвариантных относительно A подпространств

$$H = \sum_{m=1}^{\infty} \oplus H_m$$

причем так, чтобы все сужения $A|_{H_m}$ имели простой спектр, и пусть $V_m: H_m \to L^2_{\rho_m}(R^1)$ — изометрическое отображение, существующее по основной спектральной теореме, тогда легко понять, что для любого $f \in H$ будем иметь

$$\|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \sum_{(m)} \|R_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2 = \sum_{(m)} \int_R \frac{|F_m(t)|^2\, d\rho_m(t)}{(t-\lambda_k)^2 + \tau^2}, \tag{3}$$

где положено

$$f = \sum_{(m)} f_m,\ f_m \in H_m,\ F_m(t) = V_m f_m.$$

Поэтому ясно, что

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \lim_{\tau \to 0} \sum_{(m)} \tau^2 \int_R \frac{|F_m(t)|^2\, d\rho_m(t)}{(t-\lambda_k)^2 + \tau^2}, \tag{4}$$

но поскольку нижеследующий не зависящий от τ числовой ряд

$$\sum_{(m)} \int_R |F_m(t)|^2\, d\rho_m(t) = \sum_{(m)} \|f_m\|^2 \leqslant \|f\|^2 \tag{5}$$

очевидно является мажорантным для ряда (4), то переходя к пределу под знаком суммы и пользуясь доказанной выше леммой 1, без труда получим

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \sum_{(m)} |F_m(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho_m, \quad (6)$$

где обозначено $\Delta_k \rho_m = \rho_m(\lambda_k + 0) - \rho_m(\lambda_k - 0)$.

Наконец, пользуясь доказанным соотношением (6) и меняя порядок суммирования (все слагаемые неотрицательны), будем иметь

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \sum_{(m)} |F_m(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho_m =$$

$$= \sum_{(m)} \left(\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |F_m(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho_m \right) \leqslant \sum_{(m)} \int_R |F_m(t)|^2 d\rho_m(t) = \sum_{(m)} \|f_m\|^2 \leqslant \|f\|^2,$$

чем и завершается доказательство теоремы. ▶

2°. В этом пункте мы доказываем необходимое и достаточное условие полноты системы Φ при дополнительном предположении однократности спектра оператора A.

Теорема 2. (*критерий точечности спектра*). *Пусть спектр самосопряженного в H оператора A однократный, тогда система $\Phi = \{\varphi_k\}$ его собственных элементов, отвечающих собственным значениям λ_k, принадлежащим некоторому их набору $\Lambda = \{\lambda_k\}$, полна в H тогда и только тогда, когда для любого элемента $f \in H$*

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \|f\|^2. \quad (7)$$

◀ Необходимость. Пусть система Φ полна в H, т. е. замыкание линейной оболочки, натянутой на элементы из Φ, совпадает с H.

Рассмотрим выражение $\|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2$, которое, в силу однократности спектра оператора A, может быть представлено в виде

$$\|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \int_R \frac{|F(t)|^2 d\rho(t)}{(t - \lambda_k)^2 + \tau^2}, \quad (3')$$

где $F(t) = Vf$, а $V: H \to L^2_\rho$ — изометрический оператор, существующий по основной спектральной теореме.

Поскольку по предположению $\Delta_k \rho = \rho(\lambda_k + 0) - \rho(\lambda_k - 0)$, то принимая во внимание (3′) и лемму 1, будем иметь

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = |F(\lambda_k)|^2 \cdot \Delta_k \rho. \quad (8)$$

С другой стороны, по предположению, система Φ полна во всем H, следовательно вся спектральная мера ρ сосредоточена на множестве Λ, т. е. $\rho(\Lambda) = \rho(\mathbf{R})$, поэтому

$$\int_R |F(t)|^2 d\rho(t) = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |F(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho. \quad (9)$$

Сопоставляя теперь (8) с (9) и суммируя по всем $\lambda_k \in \Lambda$, будем иметь

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \| R_{\lambda_k + i\tau} f \|^2 = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |F(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho = \int_{\mathbf{R}} |F(t)|^2 d\rho(t) = \|f\|^2$$

для любого $f \in H$, т. е. необходимость доказана.

Достаточность. Пусть теперь для каждого $f \in H$ имеет место равенство (7), тогда прежде всего ясно, что Λ содержит все без исключения собственные значения оператора A. В самом деле, допустим, вопреки утверждению, что нашлось собственное значение λ_0 оператора A, не принадлежащее Λ, тогда для собственного элемента φ_0, отвечающего этому λ_0, имели бы $A\varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0$ и $\|\varphi_0\| > 0$, следовательно

$$V(A\varphi_0) = \lambda_0 V\varphi_0$$

или, положив $F_0(t) = V\varphi_0$, имели бы $(t - \lambda_0) F_0(t) = 0$ почти всюду по мере ρ. С другой стороны, в каждой из точек $\lambda_k \neq \lambda_0$ сосредоточена положительная ρ-мера, поэтому из последнего соотношения непосредственно заключаем, что $F_0(\lambda_k) = 0$ при всех $\lambda_k \in \Lambda$. Теперь уже, записав левую часть соотношения (7) для элемента $\varphi_0 \in H$ и воспользовавшись леммой 1, получим:

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \| R_{\lambda_k + i\tau} \varphi_0 \|^2 = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |F_0(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho = 0,$$

которое очевидно противоречит соотношению (7), ибо $\|\varphi_0\|^2 > 0$.

Полученное противоречие доказывает, что Λ—совокупность чисел всех без исключения собственных значений оператора A.

Предположим теперь, вопреки утверждению, что непрерывная составляющая $\rho_c(t)$ спектральной меры $\rho(t)$ отлична от нуля, причем $\rho_c(\mathbf{R}) = \delta > 0$.

Поскольку $\rho_c(t)$ — непрерывная функция на $\mathbf{R}$, то положительные числа ε_k очевидно можно выбрать так, чтобы для интервалов $\sigma_k = (\lambda_k - \varepsilon_k, \lambda_k + \varepsilon_k)$ имели место неравенства

$$\rho_c(\sigma_k) < \delta / 2^{k+1},$$

откуда легко следует, что ρ_c-мера множества $\Sigma = \mathbf{R}^1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ больше $\delta/2$. Построим теперь функцию $F^*(t)$ на $\mathbf{R}^1$, положив ее равной нулю на теоретико-множественном объединении интервалов σ_k, т. е. на множестве $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ — и равной единице на множестве Σ.

Вычислим теперь правую часть соотношения (7) для элемента $f^* = V^{-1} F^*(t)$, тогда, принимая во внимание построение функции $F^*(t)$, будем иметь

$$\|f^*\|^2 = \int_R |F^*(t)|^2 \, d\rho(t) = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |F^*(\lambda_k)|^2 \, \Delta_k \rho + \int_R |F^*(t)|^2 \, d\rho_c(t) \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Sigma d\rho_c(t) = \rho_c(\Sigma) \geqslant \delta/2.$$

С другой стороны, принимая во внимание (8), непосредственно заключаем, что левая часть соотношения (7) равна нулю. Таким образом, предположение наличия непрерывной составляющей спектральной меры тоже приводит к нарушению соотношения (7) для некоторого элемента $f^* \in H$.

Итак, вся спектральная мера ρ сосредоточена на множестве Λ, т. е. система Φ действительно полна в H.

3°. В этом пункте мы допускаем, чтобы спектр оператора A имел произвольную кратность и опираясь на полученные выше результаты устанавливаем необходимое и достаточное условие полноты системы Φ в этом общем случае.

Теорема 3. (*основная теорема о полноте*). *Система Φ собственных элементов произвольного самосопряженного оператора A, отвечающих собственным значениям λ_k, принадлежащим некоторому их набору $\Lambda = \{\lambda_k\}$, полна в H тогда и только тогда, когда для каждого $f \in H$*

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \|f\|^2. \tag{7}$$

◀ Необходимость. Пусть система Φ полна в H, и пусть Φ_m — та ее часть, которая содержится в инвариантном относительно A подпространстве H_m, тогда ясно, что Φ_m будет полной в H_m. Тогда поскольку спектр сужения $A^{(m)} = A|_{H_m}$ однократный, то применяя теорему 2 к оператору $A^{(m)}$, будем иметь

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda_m} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R^{(m)}_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2 = \|f_m\|^2, \ \forall f \in H_m, \tag{7'}$$

где $R^{(m)}_z$ — резольвента оператора $A^{(m)}$, а Λ_m — та часть набора Λ, которая состоит из собственных значений оператора $A^{(m)}$.

Пусть теперь f — произвольный элемент из H и $f = \sum_{(m)} f_m$, где $f_m \in H_m$, тогда поскольку числовой ряд (5) является мажорантным для ряда $\sum_{(m)} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2$, то будем иметь

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \sum_{(m)} \|R^{(m)}_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2 =$$

$$= \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \sum_{(m)} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2 = \sum_{(m)} \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R^{(m)}_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2.$$

Далее, поскольку, по самому определению множества Λ_m, каждое из $\lambda_k \in \Lambda \setminus \Lambda_m$ очевидно не может быть точкой разрыва спектральной меры ρ_m оператора $A^{(m)}$, то по лемме 5 из [1] легко заключаем, что

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \sum_{(m)} \sum_{\lambda_k \in \Lambda_m} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R^{(m)}_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2$$

или, принимая во внимание (7′), получаем

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \sum_{(m)} \|f_m\|^2 = \|f\|^2,$$

чем и завершается доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть соотношение (7) выполнено для всех $f \in H$ и в частности для всех $f_m \in H_m$, тогда, поскольку очевидно

$$\|R_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2 = \|R^{(m)}_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2 = \int_{\mathbf{R}} \frac{|F_m(t)|^2 \, d\rho_m(t)}{(t - \lambda_k)^2 + \tau^2},$$

то записав соотношение (7) для $f = f_m$ в силу леммы 5 из [1], легко заключаем, что все слагаемые левой части, соответствующие собственным значениям $\lambda_k \overline{\in} \Lambda_m$, обратятся в нуль, и поэтому это соотношение примет вид

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda_m} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \|R^{(m)}_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2 = \|f_m\|^2, \ \forall f_m \in H_m.$$

Теперь уже, в силу теоремы 2, заключаем, что часть Ф, содержащая все собственные элементы, отвечающие тем λ_k, которые принадлежат Λ_m, полны в H_m, откуда с очевидностью следует полнота всей системы Ф во всем H.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 6.I.1975

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ, Ռ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Անվերջ բազմապատիկությամբ սպեկտրով ինքնահամալուծ օպերատորի սեփական էլեմենտների լրիվության հայտանիշ *(ամփոփում)*

Ապացուցվում է ինքնահամալուծ օպերատորի սեփական էլեմենտների լրիվության մի նոր անհրաժեշտ և բավարար պայման, որը հիշեցնում է Պարսևալի դասական հավասարությունը լրիվ օրթոնարմալ սիստեմների համար։

R. A. ALEXANDRIAN, R. S. MCRTCHIAN. *A completeness criterium for a system of eigenelements of a selfadjained operator with spectrum possesing infinite multiplicities* (summary)

For operators of the type mentioned in the heading a sufficient and necessary condition for completeness of the system of eigenelements is proposed which reminds the classical Parseval equation for complete orthonormal systems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* Об одном критерии полноты системы собственных элементов произвольного самосопряженного оператора с однократным спектром, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика“, X, № 6, 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII. № 3, 1978 Математика

И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ОПЕРАТОРАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В теории дифференциальных операторов второго порядка рассматриваются три типа операторов преобразования (см. [4]).

1) Пусть $y(x, \lambda)$ — решение уравнения

$$y'' - q(x)\, y + \lambda^2 y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{0.1}$$

с $q(x) \in L_1(0, l)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0, \lambda) = 1$, $y'(0, \lambda) = h$. Тогда существует абсолютно непрерывная* функция $K(x, t)$ такая, что при всех значениях параметра λ справедлива формула

$$y(x, \lambda) = \cos \lambda x + \int_0^x K(x, t) \cos \lambda t \, dt, \quad 0 < x \leqslant l. \tag{0.2}$$

Оператор $I + K$, определяемый правой частью формулы (0.2), называется оператором преобразования. Этот оператор преобразует решение $\varphi(x, \lambda) = \cos \lambda x$ уравнения

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0 \tag{0.3}$$

с начальными условиями $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = 0$ в решение $y(x, \lambda)$ уравнения (0.1).

2) Пусть $\psi(x, \lambda)$ — произвольное решение уравнения (0.3), а $u(x, \lambda)$ — решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условиям $u(0, \lambda) = \psi(0, \lambda)$, $u'(0, \lambda) = \psi'(0, \lambda) + h\, \psi(0, \lambda)$. Тогда существует функция $M(x, t)$, не зависящая от $\psi(x, \lambda)$, такая, что

$$u(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + \int_{-x}^{x} M(x, t)\, \psi(t, \lambda)\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{0.4}$$

Если в уравнении (0,1) $q(x) \in L_1(-l, l)$, то формулы (0.2) и (0.4) справедливы при $-l \leqslant x \leqslant l$. В отличие от $I + K$, оператор $I + M$ преобразует всякое решение уравнения (0.3) в решение уравнения (0.1). Формулы (0.2) и (0.4) получены А. Я. Повзнером [1].

---

* Впредь функцию $f(x, t)$, непрерывную по совокупности аргументов и абсолютно непрерывную по каждому аргументу, вкратце будем называть абсолютно непрерывной.

3) Пусть в уравнении (0.1) функция $q(x)$ определена на полуоси $0<x<\infty$ и $xq(x)\in L_1(0, \infty)$. Тогда уравнение (0.1) имеет решение $v(x, \lambda)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to\infty} v(x, \lambda)\, e^{-i\lambda x} = 1, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0,$$

кроме того, существует функция $L(x, t)$ такая, что

$$v(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty L(x, t)\, e^{i\lambda t}\, dt, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0,\ 0 < x < \infty. \tag{0.5}$$

Правая часть формулы (0.5) определяет введенный Б. Я. Левиным [3] оператор преобразования $I + L$, сохраняющий асимптотику решений.

Операторы преобразования для дифференциальных уравнений порядка $n>2$ изучались в работах [5]—[15]. В этом случае операторы преобразования имеют более сложную структуру, чем для уравнений второго порядка, и только в случае уравнений с аналитическими коэффициентами (см. [8]—[10]) операторы преобразования имеют такой же вид, что и для уравнений второго порядка. Приведем результат, полученный Л. А. Сахновичем [8]. Пусть $y(x, \lambda)$— решение уравнения

$$y^{(n)} + p_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + \cdots + p_0(x)\, y = \lambda^n y,\ 0 \leqslant x < \infty, \tag{0.6}$$

$$y(0, \lambda) = 1,\ y^{(\nu)}(0, \lambda) = 0,\ \nu = 1, 2, \cdots, n-1,$$

с целыми аналитическими коэффициентами $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-2)$, а $\varphi(x, \lambda)$— решение уравнения $\varphi^{(n)} = \lambda^n \varphi$ с начальными условиями $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi^{(\nu)}(0, \lambda) = 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n-1)$, тогда существует аналитическая функция $K(x, t)$ такая, что имеет место формула

$$y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t)\, \varphi(t, \lambda)\, dt,\ 0 \leqslant x < \infty. \tag{0.7}$$

В настоящей работе приводится простой вывод формулы (0.7) и одновременно эта формула обобщается на случай операторных уравнений. Доказывается, что для справедливости формулы (0.7) при $0 \leqslant x \leqslant l$ достаточно требовать принадлежность коэффициентов уравнения (0.6) классу* H_1 аналитических функций в четырехугольнике D_l^n с вершинами

$$0,\ l,\ l\left|1-\exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)\right|^{-1},\ l\left|1-\exp\left(-i\frac{2\pi}{n}\right)\right|^{-1}.$$

При $l = \infty$ область D_l^n превращается в сектор $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$,

---

* Определение класса H_1 аналитических функций содержится в книге И. И. Привалова [16]. В [16] обозначение H_1 применяется для круговых областей, а для произвольных областей применяется обозначение E_1.

в этом случае требуется принадлежность коэффициентов классу $H_1(D_a^n)$ при каждом a $(0 < a < \infty)$. Эти условия, наложенные на коэффициенты, в некотором смысле согласуются с условиями в случае уравнений второго порядка, поскольку замкнутая область $\bar{D}_l^n$ при $n=2$ превращается в отрезок $[0, l]$. Аналогичные обобщения допускают и формулы (0.4) и (0.5), которым автор надеется посвятить отдельную статью. В работе используются следующие свойства функций класса $H_1(D_l^n)$ (см. [16], [17]). Пусть $f(z) \in H_1(D_l^n)$, тогда

а) Почти всюду на границе C области D_l^n существуют граничные значения функции $f(z)$, которые на C определяют суммируемую функцию. Если $f'(z) \in H_1(D_l^n)$, то функция $f(z)$ непрерывна вплоть до контура C и абсолютно непрерывна на C.

б) Если γ — произвольный прямолинейный отрезок, лежащий в $\bar{D}_l^n$, то

$$\sup_{\gamma} \int_{\gamma} |f(z)|\,|dz| < \infty. \tag{0.8}$$

в) Если Γ—произвольный треугольный контур, лежащий в $\bar{D}_l^n$, то

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{0.9}$$

1°. 1. Для формулировки результатов введем несколько обозначений. Обозначим через D_a замкнутую четырехугольную область на комплексной плоскости z с вершинами 0, a, $a(1-\omega_1)^{-1}$, $a(1-\omega_{n-1})^{-1}$, где

$$\omega_s = e^{i\frac{2\pi}{n}s}, \quad s = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.1}$$

Обозначим $V = \{(\xi, z);\ z \in D_{l-\xi},\ 0 \leqslant \xi \leqslant l\}$: область V в трехмерном пространстве (с горизонтальной комплексной плоскостью z и вертикальной вещественной осью ξ) представляет собой пирамиду с вершиной $(l, 0)$ и с основанием D_l. Обозначим через $\Phi(x, \lambda)$ решение следующего операторного уравнения относительно матрицы-функции $\Phi(x)$

$$\Phi^{(n)} - \lambda^n \Phi = 0, \tag{1.2}$$

$$\Phi(0, \lambda) = I,\ \Phi^{(\nu)}(0, \lambda) = 0,\ \nu = 1, 2, \cdots, n-1,$$

где I — единичная матрица. Заметим, что

$$\Phi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda)\, I, \tag{1.3}$$

где

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} e^{\omega_s \lambda x}. \tag{1.4}$$

Отметим следующие свойства функции $\varphi(x, \lambda)$:

$$\frac{1}{\lambda^n}\varphi^{(n-1-k)}(x, \lambda) = \frac{1}{k!}\int_0^x (x-u)^k \varphi(u, \lambda)\, du, \quad k=0, 1, \cdots, n-2, \tag{1.5}$$

$$\varphi(x, \lambda)\,\overline{\varphi}(t, \lambda) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \varphi(x+\omega_s t, \lambda), \tag{1.6}$$

$$\varphi(\omega_s x, \lambda) = \varphi(x, \lambda), \quad s=0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.7}$$

Обозначим через $Y(x, \lambda)$ решение следующего операторного уравнения относительно матрицы-функции $Y(x)$

$$Y^{(n)} + P_{n-2}(x)\, Y^{(n-2)} + \cdots + P_0(x)\, Y - \lambda^n Y = F(x), \ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.8}$$

$$Y^{(\nu)}(0) = A_\nu, \ \nu = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.9}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Если в уравнении* (1.8) $P_k^{(k)}(z) \in H_1(D_l)$ $(k=0, 1, \cdots, n-2)$ *и* $F(x) \in L_1(0, l)$*, то существует единственная матрица-функция* $K(x, t)$ $(0 \leqslant t \leqslant x \leqslant l)$, *имеющая по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка* $n-2$ *и такая, что имеет место формула*

$$Y(x, \lambda) = A_0 \Phi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t)\, \Phi(t, \lambda)\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{1.10}$$

При этом $K(x, t) = K_0(x-t, t)$, *где матрица-функция* $K_0(\xi, z)$ *определена в пирамиде* V *и все частные производные которой порядка* $n-1$ *при фиксированном* ξ *принадлежат классу* $H_1(D_{l-\xi})$.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $Y(x, \lambda)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$Y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda)\, A_0 + \int_0^x \varphi(t, \lambda)\, B(x-t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-2}\int_0^x \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda)\, Q_k(t)\, Y(t, \lambda)\, dt, \tag{1.11}$$

где

$$B(x) = A_1 + \sum_{k=0}^{n-3}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left[A_{k+2} - \sum_{\nu=0}^{k}\sum_{j=0}^{\nu} C_{k-j}^{\nu-j} Q_j^{(\nu-j)}(0)\, A_{k-\nu}\right] +$$

---

* Эти условия нужно понимать как условия на элементы матриц $P_k(z)$ и $F(x)$. Рассматриваемые в работе матрицы являются квадратными и имеют конечный, причем одинаковый порядок.

$$+\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-u)^{n-2} F(u)\,du, \tag{1.12}$$

$$Q_k(x)=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu+1} C_{n-2-\nu}^{k-\nu} P_{n-2-\nu}^{(k-\nu)}(x), \quad k=0, 1, \cdots, n-2. \tag{1.13}$$

Действительно, если уравнение (1.11) n раз продифференцировать, предварительно заменив

$$\int_0^x \varphi(t, \lambda) B(x-t)\,dt = \int_0^x \varphi(x-t, \lambda) B(t)\,dt,$$

то с учетом формул $\varphi^{(n)}(x, \lambda)=\lambda^n \varphi(x, \lambda)$ и

$$P_{n-2-k}(x)=-\sum_{\nu=0}^{k} C_{n-2-\nu}^{k-\nu} Q_\nu^{(k-\nu)}(x), \quad k=0, 1, \cdots, n-2,$$

получим уравнение (1.8). Аналогично проверяются и условия (1.9).

С учетом условий теоремы из (1.13) следует, что

$$Q_k^{(n-2-k)}(z) \in H_1(D_l), \quad k=0, 1, \cdots, n-2. \tag{1.14}$$

Применяя метод последовательных приближений к уравнению (1.11), получим

$$Y(x, \lambda)=\sum_{j=0}^{\infty} R_j(x, \lambda), \tag{1.15}$$

где функции $R_j(x, \lambda)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$R_0(x, \lambda)=\varphi(x, \lambda) A_0+\int_0^x \varphi(t, \lambda) B(x-t)\,dt, \tag{1.16}$$

$$R_{j+1}(x, \lambda)=\frac{1}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-2}\int_0^x \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) Q_k(t) R_j(t, \lambda)\,dt, \quad j=0, 1, 2, \cdots. \tag{1.17}$$

Покажем, что матрицы-функции $R_j(x, \lambda)$ можно представить в виде

$$R_j(x, \lambda)=\int_0^x \varphi(t, \lambda) K_j(x-t, t)\,dt, \quad j=1, 2, \cdots. \tag{1.18}$$

С учетом формул (1.5), (1.16), (1.17) матрицу $R_1(x, \lambda)$ напишем в виде

$$R_1(x, \lambda)=T(x, \lambda) A_0+\widetilde{T}(x, \lambda), \tag{1.19}$$

где

$$T(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}\int_0^x Q_k(t)\,\varphi(t,\lambda)\int_t^x(x-u)^k\,\varphi(u-t,\lambda)\,du\,dt, \tag{1.20}$$

$$\bar{T}(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}\int_0^x Q_k(t)\int_t^x(x-u)^k\,\varphi(u-t,\lambda)\int_0^t\varphi(v,\lambda)\,B(t-v)\,dv\,du\,dt. \tag{1.21}$$

Если в (1.20) поменять порядок интегрирования, то получим

$$T(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}\int_0^x(x-u)^k\int_0^u\varphi(t,\lambda)\,\varphi(u-t,\lambda)\,Q_k(t)\,dt\,du. \tag{1.22}$$

В силу (1.6) формула (1.22) принимает вид

$$T(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\left[\int_0^x\varphi(t,\lambda)\,(x-t)^k\int_0^t Q_k(u)\,du\,dt+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n-1}\int_0^x(x-u)^k\int_0^u\varphi(u-t+\omega_s t,\lambda)\,Q_k(t)\,dt\,du\right]. \tag{1.23}$$

Однако

$$\int_0^u\varphi(u-t+\omega_s t,\lambda)\,Q_k(t)\,dt=\frac{1}{1-\omega_s}\int_{\omega_s u}^u\varphi(t,\lambda)\,Q_k\left(\frac{u-t}{1-\omega_s}\right)dt. \tag{1.24}$$

Согласно (1.14) и (0.9) имеем

$$\int_{\omega_s u}^u\varphi(t,\lambda)\,Q_k\left(\frac{u-t}{1-\omega_s}\right)dt=\int_{\omega_s u}^0\varphi(t,\lambda)\,Q_k\left(\frac{u-t}{1-\omega_s}\right)dt+$$

$$+\int_0^u\varphi(t,\lambda)\,Q_k\left(\frac{u-t}{1-\omega_s}\right)dt. \tag{1.25}$$

Кроме того, в силу (1.7)

$$\int_{\omega_s u}^0\varphi(t,\lambda)\,Q_k\left(\frac{u-t}{1-\omega_s}\right)dt=-\omega_s\int_0^u\varphi(t,\lambda)\,Q_k\left(\frac{u-\omega_s t}{1-\omega_s}\right)dt. \tag{1.26}$$

С учетом формул (1.24), (1.25) и (1.26) имеем

$$\int_0^x(x-u)^k\int_0^u\varphi(u-t+\omega_s t,\lambda)\,Q_k(t)\,dt\,du=$$

$$= \frac{1}{1-\omega_s} \int_0^x (x-u)^k \int_0^u \varphi(t, \lambda) \left[Q_k \left(\frac{u-t}{1-\omega_s} \right) - \omega_s Q_k \left(\frac{u-\omega_s t}{1-\omega_s} \right) \right] dt\,du =$$

$$= \frac{1}{1-\omega_s} \int_0^x \varphi(t, \lambda) \int_0^{x-t} (x-t-u)^k \left| Q_k \left(\frac{u}{1-\omega_s} \right) - \omega_s Q_k \left(t + \frac{u}{1-\omega_s} \right) \right| du\,dt.$$

Поэтому формула (1.23) принимает вид

$$T(x, \lambda) = \int_0^x \varphi(t, \lambda) H(x-t, t)\, dt, \tag{1.27}$$

где

$$H(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!\, n} \xi^k \int_0^z Q_k(\zeta) d\zeta - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!\, n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s}{1-\omega_s} \int_0^{\xi} (\xi-u)^k \times$$

$$\times Q_k \left(z + \frac{u}{1-\omega_s} \right) du + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!\, n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega_s} \int_0^{\xi} (\xi-u)^k Q_k \left(\frac{u}{1-\omega_s} \right) du. \tag{1.28}$$

Если в последних двух интегралах, стоящих в правой части (1.28), сделать замены переменных $z + u(1-\omega_s)^{-1} = \zeta$, $u(1-\omega_s)^{-1} = \zeta$ и учесть формулы

$$\xi^k = -\sum_{s=1}^{n-1} \omega_s (1-\omega_s)^k \left(\frac{\xi}{1-\omega_s} + z - \zeta \right)^k, \quad k = 0, 1, \cdots, n-2,$$

то в силу (1.14) и (0.9) получим

$$H(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!\, n} \sum_{s=1}^{n-1} (1-\omega_s)^k \int_0^{\frac{\xi}{1-\omega_s}} \left(\frac{\xi}{1-\omega_s} - \zeta \right)^k Q_k(\zeta)\, d\zeta -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!\, n} \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s (1-\omega_s)^k \int_0^{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z} \left(\frac{\xi}{1-\omega_s} + z - \zeta \right)^k Q_k(\zeta)\, d\zeta. \tag{1.29}$$

Сделав в (1.21) замену переменных $u_1 = u$, $t_1 = u - t$, $v_1 = u - t + v$, и опустив индексы у новых переменных, получим

$$\widetilde{T}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \int_0^x (x-u)^k \int_0^u \int_0^v \varphi(t, \lambda) \varphi(v-t, \lambda) Q_k(u-t) B(u-v)\, dt\,dv\,du. \tag{1.30}$$

Повторяя рассуждения, сделанные при выводе (1.27), формулу (1.30) приведем к виду

$$\widetilde{T}(x, \lambda)=\int_0^x \varphi(t, \lambda)\, \widetilde{H}(x-t, t)\, dt, \tag{1.31}$$

где

$$\widetilde{H}(\xi, z)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}(1-\omega_s)^k\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}}\left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s}-\zeta\right)^k Q_k(u+\zeta)\, B(u)\, d\zeta du -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}\omega_s(1-\omega_s)^k\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}\left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z-\zeta\right)^k Q_k(u+\zeta)\, B(u)\, d\zeta\, du. \tag{1.32}$$

С учетом (1.19), (1.27) и (1.31) приходим к формуле

$$R_1(x, \lambda)=\int_0^x \varphi(t, \lambda)\, K_1(x-t, t)\, dt, \tag{1.33}$$

где

$$K_1(\xi, z)=H(\xi, z)\, A_0+\widetilde{H}(\xi, z). \tag{1.34}$$

В силу (1.14) из формул (1.29), (1.32), (1.34) следует, что матрица-функция $K_1(\xi, z)$ определена в пирамиде V и все частные производные порядка $n-1$ при фиксированном ξ принадлежат классу $H_1(D_{l-\varepsilon})$. Возможность представления матриц-функций $R_j(x, \lambda)$ $(j=1, 2, \cdots)$ в виде (1.18) докажем методом математической индукции. При $j=1$ такое представление уже получено. Предположим, что при некотором j формула (1.18) верна, причем соответствующая матрица-функция $K_j(\xi, z)$ обладает всеми свойствами, высказанными выше относительно $K_1(\xi, z)$. Тогда, согласно (1.17) и (1.5) имеем

$$R_{j+1}(x, \lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}\int_0^x Q_k(t)\int_t^x (x-u)^k\, \varphi(u-t, \lambda)\times$$

$$\times\int_0^t \varphi(v, \lambda)\, K_j(t-v, v)\, dv\, du\, dt. \tag{1.35}$$

Повторяя относительно (1.35) рассуждения, сделанные при выводе (1.33), получим формулу (1.18) для $R_{j+1}(x, \lambda)$, при этом

$$K_{j+1}(\xi, z)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}(1-\omega_s)^k\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}}\left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s}-\zeta\right)^k Q_k(u+\zeta)\, K_j(u, \zeta)\, d\zeta du-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}\omega_s(1-\omega_s)^k\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}\left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z-\zeta\right)^k Q_k(u+\zeta)\,K_j(u,\zeta)\,d\zeta du. \tag{1.36}$$

Из (1.36) следует, что $K_{j+1}(\xi, z)$ тоже обладает свойствами, высказанными относительно $K_1(\xi, z)$. Формулы (1.18) доказаны.

Из (1.14) и (0.8) следует, что

$$c=\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{2^{k+1}}{k!}\left[\sup_{z,\,z_1\in D_l}\int_{z_1}^{z}|z-\zeta|^k\,|Q_k(\zeta)|\,|d\zeta|\right]<\infty, \tag{1.37}$$

где $|Q_k(z)|$ — сумма модулей всех элементов матрицы $Q_k(z)$. С учетом (1.37) из формул (1.29), (1.32), (1.34) легко получается оценка

$$|K_1(\xi, z)|\leqslant c\,[|A_0|+l\cdot\max_{0<\xi<l}|B(\xi)|]=c_0. \tag{1.38}$$

В силу (1.37) и (1.38) из формулы (1.36) по индукции получим оценки

$$|K_{j+1}(\xi, z)|\leqslant c_0\,c^j\,\frac{\xi^j}{j!},\quad j=0, 1, 2, \cdots.$$

Положим

$$K_0(\xi, z)=B(\xi)+\sum_{j=1}^{\infty}K_j(\xi, z). \tag{1.39}$$

В силу равномерной сходимости ряда (1.39) матрица-функция $K_0(\xi, z)$ при фиксированном ξ принадлежит классу $H_1(D_{l-\xi})$. Если формулы (1.36) просуммировать по значениям j и учесть (1.32), (1.34), то для $K_0(\xi, z)$ получим следующее интегральное уравнение

$$K_0(\xi, z)=B(\xi)+H(\xi, z)\,A_0+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s-1}^{n-1}(1-\omega_s)^k\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}}\left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s}-\zeta\right)^k Q_k(u+\zeta)\,K_0(u,\zeta)\,d\zeta du-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s-1}^{n-1}\omega_s(1-\omega_s)^k\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}}\left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z-\zeta\right)^k Q_k(u+\zeta)\,K_0(u,\zeta)\,d\zeta du. \tag{1.40}$$

Если обозначить $K(x, t)=K_0(x-t, t)$, то с учетом формул (1.16), (1.18) и (1.3) из (1.15) получим формулу (1.10). В силу (1.14) из (1.40) следует, что матрицы-функции $K_0(\xi, z)$ и $K(x, t)$ обладают всеми свойствами, высказанными в теореме. Остается доказать единственность

матрицы-функции $K(x, t)$. Пусть суммируемая матрица-функция $\tilde{K}(x, t)$ такая, что

$$Y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) A_0 + \int_0^x \varphi(t, \lambda) \tilde{K}(x, t)\, dt. \tag{1.41}$$

Если из равенства (1.41) вычесть (1.10), то получим

$$\int_0^x \varphi(t, \lambda)[\tilde{K}(x, t) - K(x, t)]\, dt = 0. \tag{1.42}$$

Разлагая функцию $\varphi(x, \lambda)$ в ряд по степеням λ,

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{nj}}{(nj)!} \lambda^{nj}, \tag{1.43}$$

из (1.42) получим

$$\int_0^x t^{nj} [\tilde{K}(x, t) - K(x, t)]\, dt = 0, \quad j = 0, 1, 2, \cdots.$$

Отсюда следует, что $\tilde{K}(x, t) = K(x, t)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если в начальных условиях (1.9) при некотором m $(1 \leqslant m \leqslant n-1)$ $A_\nu = 0$ $(\nu = 0, 1, \cdots, m-1)$, то из уравнения (1.40) следует, что

$$\sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j C_\nu^j \frac{\partial^\nu}{\partial \xi^{\nu-j} \partial z^j} K_0(\xi, z)|_{\xi=0} = A_{\nu+1}, \ \nu = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{1.44}$$

и в частности

$$(-1)^\nu \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} K(x, t)|_{t=x} = A_{\nu+1}, \ \nu = 0, 1, \cdots, m-1. \tag{1.45}$$

Замечание 2. Пусть в (1.9) при некотором m $(0 \leqslant m \leqslant n-1)$ $A_\nu = 0$ $(\nu = 0, 1, \cdots, m-1)$. Тогда если правую часть формулы (1.10) m раз проинтегрировать по частям и учесть (1.45), то получим

$$Y(x, \lambda) = A_m \Phi_m(x, \lambda) + \int_0^x L(x, t) \Phi_m(t, \lambda)\, dt,$$

где

$$L(x, t) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} K(x, t),$$

а $\Phi_m(x, \lambda)$ — решение уравнения (1.2) с начальными условиями $\Phi^{(m)}(0) = I$, $\Phi^{(\nu)}(0) = 0$ $(\nu \neq m)$: при $m \geqslant 1$

$$\Phi_m(x, \lambda) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^x (x-t)^{m-1}\,\Phi(t, \lambda)\,dt.$$

Обозначим

$$L_0(\xi, z) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j \frac{\partial^m}{\partial \xi^{m-j}\,\partial z^j} K_0(\xi, z).$$

С учетом (1.44) из (1.40) для $L_0(\xi, z)$ можно вывести следующее интегральное уравнение:

$$L_0(\xi, z) = B^{(m)}(\xi) + H_m(\xi, z)\,A_m +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^m}\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}}\left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s}-\zeta\right)^k Q_k(u+\zeta)\,L_0(u, \zeta)\,d\zeta\,du -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}\omega_s(1-\omega_s)^k\int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}\int_0^{}\left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z-\zeta\right)^k Q_k(u+\zeta)\,L_0(u, \zeta)\,d\zeta\,du, \tag{1.46}$$

где

$$H_m(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^m}\int_0^{\frac{\xi}{1-\omega_s}}\left(\frac{\xi}{1-\omega_s}-\zeta\right)^k Q_k(\zeta)\,d\zeta -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!n}\sum_{s=1}^{n-1}\omega_s(1-\omega_s)^k\int_0^{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}\left(\frac{\xi}{1-\omega_s}+z-\zeta\right)^k Q_k(\zeta)\,d\zeta. \tag{1.47}$$

Если в уравнении (1.8) $P_n^{(k+r)}(z) \in H_1(D_l)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-2)$ и $F^{(m+r)}(x) \in L_1(0, l)^*$, то из (1.46) следует, что все частные производные порядка $n-1+r$ (порядка $n+r$) матрицы-функции $L_0(\xi, z)$ (матрицы-функции $L_0(\xi, z) - B^{(m)}(\xi) - H_m(\xi, z)\,A_m$) при фиксированном ξ принадлежат классу $H_1(D_{l-\xi})$, а матрицы-функции $L(x, t)$ и $L(x, t) - B^{(m)}(x-t) - H_m(x-t, t)\,A_m$ имеют по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-2+r$ и $n-1+r$ соответственно.

Замечание 3. Из (1.47) следует, что

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1-j}\,\partial t^j}H_m(x-t, t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{\omega_s^m(1-\omega_s)^{n-1-k}}\,Q_k^{(n-2-k)}\left(\frac{x-t}{1-\omega_s}\right). \tag{1.48}$$

* Впредь $f^{(\nu)}(x) \in L_1(0, l)$ при $\nu \geqslant 1$ будет означать лишь абсолютную непрерывность функций $f^{(j)}(x)$ $(j = 0, 1, \cdots, \nu-1)$.

Поэтому матрица-функция, стоящая в левой части (1.48), зависит только от разности $x-t$.

2. Обозначим через $Y(x, \lambda)$ и $\tilde{Y}(x, \lambda)$ решения следующих уравнений

$$\Lambda(Y)-\lambda^n Y=F(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1.49}$$

$$Y^{(\nu)}(0)=A_\nu, \quad \nu=0, 1, \cdots, n-1, \tag{1.50}$$

$$\tilde{\Lambda}(\tilde{Y})-\lambda^n \tilde{Y}=\tilde{F}(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1.51}$$

$$\tilde{Y}^{(\nu)}(0)=\tilde{A}_\nu, \quad \nu=0, 1, \cdots, n-1, \tag{1.52}$$

где дифференциальные выражения $\Lambda(Y)$ и $\tilde{\Lambda}(\tilde{Y})$ определяются по формулам

$$\Lambda(Y)\equiv Y^{(n)}+P_{n-2}(x)\, Y^{(n-2)}+\cdots+P_0(x)\, Y, \tag{1.53}$$

$$\tilde{\Lambda}(\tilde{Y})\equiv \tilde{Y}^{(n)}+\tilde{P}_{n-2}(x)\, \tilde{Y}^{(n-2)}+\cdots+\tilde{P}_0(x)\, \tilde{Y}. \tag{1.54}$$

Теорема 2. *Пусть в начальных условиях* (1.50), (1.52) *при некотором* m $(0\leqslant m\leqslant n-1)$

$$A_\nu=\tilde{A}_\nu=0 \ (\nu=0, 1, \cdots, m-1) \text{ и } \det A_m\neq 0.$$

Если в уравнениях (1.49), (1.51)

$$P_k^{(k+r)}(z),\ \tilde{P}_k^{(k+r)}(z)\in H_1(D_l) \ (k=0, 1, \cdots, n-2),$$

$$F^{(m+r)}(x),\ \tilde{F}^{(m+r)}(x)\in L_1(0, l),$$

то существует единственная матрица-функция $K(x, t)$ $(0\leqslant t\leqslant x\leqslant l)$, *имеющая по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка* $n-2+r$ *и такая, что имеет место формула*

$$\tilde{Y}(x, \lambda)=\tilde{A}_m A_m^{-1}\, Y(x, \lambda)+\int_0^x K(x, t)\, Y(t, \lambda)\, dt, \ 0\leqslant x\leqslant l. \tag{1.55}$$

При этом $K(x, t)=K_0(x-t, t)$, *где матрица-функция* $K_0(\xi, z)$ *определена в пирамиде* V *и все частные производные которой порядка* $n-1+r$ *при фиксированном* ξ *принадлежат классу* $H_1(D_{l-\xi})$.

Доказательство. Согласно замечанию 2 имеем

$$Y(x, \lambda)=A_m \Phi_m(x, \lambda)+\int_0^x L(x, t)\, \Phi_m(t, \lambda)\, dt, \tag{1.56}$$

$$\tilde{Y}(x, \lambda)=\tilde{A}_m \Phi_m(x, \lambda)+\int_0^x \tilde{L}(x, t)\, \Phi_m(t, \lambda)\, dt. \tag{1.57}$$

Формулу (1.56) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно $\Phi_m(x, \lambda)$, решение которого, в силу $\det A_m \neq 0$, имеет вид

$$\Phi_m(x, \lambda) = A_m^{-1} Y(x, \lambda) - \int_0^x M(x, t)\, Y(t, \lambda)\, dt, \tag{1.58}$$

при этом матрица-функция $M(x, t)$ удовлетворяет каждому из следующих интегральных уравнений

$$M(x, t) = A_m^{-1} L(x, t)\, A_m^{-1} - \int_t^x A_m^{-1} L(x, u)\, M(u, t)\, du, \tag{1.59}$$

$$M(x, t) = A_m^{-1} L(x, t)\, A_m^{-1} - \int_t^x M(x, u)\, L(u, t)\, A_m^{-1}\, du. \tag{1.60}$$

Если выражение $\Phi_m(x, \lambda)$ из (1.58) подставить в (1.57) и обозначить

$$K(x, t) = \bar{L}(x, t)\, A_m^{-1} - \bar{A}_m M(x, t) - \int_t^x \bar{L}(x, u)\, M(u, t)\, du, \tag{1.61}$$

то получим формулу (1.55). Из (1.59), (1.60) и (1.61) следует, что $K(x, t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$K(x, t) = \bar{L}(x, t)\, A_m^{-1} - \bar{A}_m A_m^{-1} L(x, t)\, A_m^{-1} - \int_t^x K(x, t)\, L(u, t)\, A_m^{-1} du. \tag{1.62}$$

Поскольку к уравнению (1.62) применим метод последовательных приближений, то остальные утверждения теоремы следуют из (1.62) с учетом замечания 2. Теорема 2 доказана.

Замечание 4. В силу замечаний 2 и 3 из (1.62) следует, что матрица-функция

$$K(x, t) - B^{(m)}(x - t) - H_m(x - t, t)\, A_m - \bar{B}^{(m)}(x - t) - \bar{H}_n(x - t, t)\, A_m$$

имеет по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n - 1 + r$, где $B(x)$ и $H_m(\xi, z)$ определяются соответственно по формулам (1.12) и (1.47), а $\bar{B}(x)$ и $\bar{H}_m(\xi, z)$ строятся аналогично, исходя из уравнения (1.51), (1.52).

Замечание 5. При условиях теоремы 2 существует еще матрица-функция $K_1(x, t)$ такая, что

$$\bar{Y}(x, \lambda) = Y(x, \lambda) A_m^{-1} \tilde{A}_m + \int_0^x Y(t, \lambda) K_1(x, t)\, dt,\ 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Замечание 6. Основываясь на идеях работ [2] и [11] можно построить дифференциальные уравнения с неаналитическими коэффициентами, решения которых связаны соотношением (1.55). Построение таких уравнений приводится ниже.

Приведем несколько свойств матрицы-функции $K(x, t)$. Обозначим

$$\Lambda^*(Y) \equiv (-1)^n Y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k [YP_k(x)]^{(k)}. \tag{1.63}$$

Лемма. *Если в условиях теоремы 2 $r \geqslant 1$, то $K(x, t)$ удовлетворяет следующим соотношениям*

$$\bar{\Lambda}_x [K(x, t)] - \Lambda_t^* [K(x, t)] = 0,^* \tag{1.64}$$

$$\bar{P}_k(x) S - S P_k(x) + \sum_{\nu=k}^{n-1} \bar{P}_{\nu+1}(x) \sum_{j=k}^{\nu} C_j^k \left[\frac{\partial^{\nu-j}}{\partial x^{\nu-j}} K(x, t)|_{t=x} \right]^{(j-k)} -$$

$$- \sum_{\nu=k}^{n-1} (-1)^{\nu-k} \frac{\partial^{\nu-k}}{\partial t^{\nu-k}} [K(x, t) P_{\nu+1}(t)]|_{t=x} = 0,\ k = 0, 1, \cdots, n-2, \tag{1.65}$$

$$SF(x) - \bar{F}(x) + \int_0^x K(x, t) F(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=\nu}^{n-1} (-1)^{j-\nu} \frac{\partial^{j-\nu}}{\partial t^{j-\nu}} [K(x, t) P_{j+1}(t)]|_{t=0} \right\} Y^{(\nu)}(0, \lambda) = 0, \tag{1.66}$$

*где $S = \bar{A}_m A_m^{-1}$, $P_n(x) = \bar{P}_n(x) = I$, $P_{n-1}(x) = \bar{P}_{n-1}(x) = 0$. Обратно**, *пусть $Y(x, \lambda)$ — некоторое решение уравнения* (1.49) *с коэффициентами $P_k^{(k)}(x) \in L_1(0, l)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-2)$. Если матрица-функция $K(x, t)$, имеющая по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-1$, удовлетворяет соотношениям* (1.64), (1.65), (1.66) *с некоторым S, то матрица-функция $\bar{Y}(x, \lambda)$, определяемая по формуле*

$$\bar{Y}(x, \lambda) = SY(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) Y(t, \lambda)\, dt, \tag{1.67}$$

является решением уравнения (1.51).

---

* В символе Λ_x индекс означает, что Λ действует по переменной x.

** Обратное утверждение леммы установлено в работе [11].

Доказательство. Если выражение $\bar{Y}(x, \lambda)$ из (1.55) подставить в тождество

$$\bar{\Lambda}[\bar{Y}(x, \lambda)] - \lambda^n \bar{Y}(x, \lambda) - F(x) = 0 \tag{1.68}$$

и учесть, что $Y(x, \lambda)$ — решение уравнения (1.49), то получим

$$SF(x) - \bar{F}(x) + \int_0^x K(x, t) F(t)\, dt + \bar{\Lambda}[SY(x, \lambda)] - S\Lambda[Y(x, \lambda)] +$$

$$+ \bar{\Lambda}\left[\int_0^x K(x, t)\, Y(t, \lambda)\, dt\right] - \int_0^x K(x, t)\, \Lambda[Y(t, \lambda)]\, dt = 0. \tag{1.69}$$

Обозначим через $G(x, t)$, $M_k(x)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-2)$ и $N(x)$ правые части формул (1.64), (1.65) и (1.66) соответственно. Если учесть, что при $r \geqslant 1$ $K(x, t)$ имеет по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-1$, то тождество (1.69) легко приводится к виду

$$N(x) + \int_0^x G(x, t)\, Y(t, \lambda)\, dt + \sum_{k=0}^{n-2} M_k(x)\, Y^{(k)}(x, \lambda) = 0. \tag{1.70}$$

Однако, согласно теореме 1

$$Y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) A_0 + \int_0^x \varphi(t, \lambda)\, \Gamma(x, t)\, dt. \tag{1.71}$$

С учетом замечания 1 из (1.71) следует, что

$$\lim_{\lambda \to +\infty} n\, \lambda^{m-k} e^{-\lambda x}\, Y^{(k)}(x, \lambda) = A_m,\ k = 0, 1, \cdots, n-2, \tag{1.72}$$

причем сходимость равномерна по x $(0 \leqslant x \leqslant l)$. В силу (1.72) из (1.70) с учетом $\det A_m \neq 0$ получаются равенства $M_k(x) = 0$ $(k = 0, 1, \cdots, n-2)$,

$$N(x) + \int_0^x G(x, t)\, Y(t, \lambda)\, dt = 0. \tag{1.73}$$

Таким образом, соотношения (1.65) доказаны. Далее, выражение $Y(x, \lambda)$ из (1.71) подставим в (1.73)

$$N(x) + \int_0^x \varphi(t, \lambda) \left[G(x, t) A_0 + \int_t^x G(x, u)\, \Gamma(u, t)\, du \right] dt = 0. \tag{1.74}$$

Если в (1.74) взять $\lambda = 0$, то получим

$$N(x) = -\int_0^x \left[G(x, t) A_0 + \int_t^x G(x, u) \Gamma(u, t)\, du \right] dt, \qquad (1.75)$$

в силу чего (1.74) принимает вид

$$\int_0^x [\varphi(t, \lambda) - 1] \left[G(x, t) A_0 + \int_t^x G(x, u) \Gamma(u, t)\, du \right] dt = 0. \qquad (1.76)$$

Разлагая $\varphi(t, \lambda)$ в ряд по степеням λ (см. (1.43)), из (1.76) получим

$$\int_0^x t^{mj} \left[G(x, t) A_0 + \int_t^x G(x, u) \Gamma(u, t)\, du \right] dt = 0, \; j = 1, 2, \cdots.$$

Поэтому

$$G(x, t) A_0 + \int_t^x G(x, u) \Gamma(u, t)\, du = 0. \qquad (1.77)$$

Если формулу (1.77) продифференцировать m раз по t и учесть замечание 1, то получим

$$(-1)^m G(x, t) A_m + \int_t^x G(x, u) \frac{\partial^m}{\partial t^m} \Gamma(u, t)\, du = 0. \qquad (1.78)$$

Однако, в силу условия $\det A_m \neq 0$ уравнение (1.78) имеет только тривиальное решение $G(x, t) = 0$. Но тогда из (1.75) следует, что $N(x) = 0$. Итак соотношения (1.64) и (1.66) доказаны. Обратное утверждение леммы получается из следующих соображений. По предположению имеет место равенство (1.70), которое эквивалентно равенству (1.69). Но, согласно определению $\bar{Y}(x, \lambda)$ (формула (1.67)), равенство (1.69) принимает вид (1.68). Лемма доказана.

Замечание 7. Формулы (1.65) и (1.66) остаются верными и при $r = 0$, а формула (1.64) в этом случае, вообще говоря, теряет свой обычный смысл. Однако, нетрудно убедиться, что при $r = 0$ лемма остается верной (при этом в обратном утверждении леммы достаточно потребовать абсолютную непрерывность частных производных порядка $n-2$ матрицы-функции $K(x, t)$), если (1.64) заменить формулой

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} [K(x, t) - M(x, t)] - (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} [K(x, t) - M(x, t)] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} \bar{P}_k(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k} K(x, t) - \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} [K(x, t) P_k(t)] = 0,$$

где матрица-функция $M(x, t)$ такая, что $K(x, t) - M(x, t)$ имеет по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-1$, а матрица-функция

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1-j}\, \partial t^j} M(x, t)$$

зависит только от разности $x - t$. Отметим, что на основании замечаний 3 и 4 для $K(x, t)$ такая матрица-функция $M(x, t)$ всегда существует.

Следствие. Пусть уравнения (1.49), (1.50) и (1.51), (1.52) удовлетворяют условиям теоремы 2, а матрица-функция $K(x, t)$ соответствует решениям $Y(x, \lambda)$ и $\tilde{Y}(x, \lambda)$ по формуле (1.55). Если $Y_1(x, \lambda)$ — решение уравнения

$$\Lambda(Y_1) - \lambda^n Y_1 = F_1(x), \quad Y_1^{(\nu)}(0) = A_\nu^1, \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{1.79}$$

то матрица-функция $\bar{Y}_1(x, \lambda)$, определяемая по формуле

$$\bar{Y}_1(x, \lambda) = \bar{A}_m A_m^{-1} Y_1(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t)\, Y_1(t, \lambda)\, dt,$$

является решением уравнения

$$\bar{\Lambda}(\bar{Y}_1) - \lambda^n \bar{Y}_1 = \bar{F}_1(x), \tag{1.80}$$

где

$$\bar{F}_1(x) = \bar{A}_m A_m^{-1} F(x) + \int_0^x K(x, t)\, F_1(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=\nu}^{n-1} (-1)^{j-\nu} \frac{\partial^{j-\nu}}{\partial t^{j-\nu}} [K(x, t)\, P_{j+1}(t)]_{t=0} \right\} A_\nu^1.$$

Это непосредственно следует из леммы, причем в случае $r = 0$ нужно учесть замечание 7. Отметим, что если в уравнениях (1.49), (1.51) и (1.79) $F(x) = \bar{F}(x) = F_1(x) = 0$, то из этого еще не следует, что в уравнении (1.80) $\bar{F}_1(x) = 0$ (по этому поводу см. [11], [12]).

3. Перейдем теперь к построению дифференциальных уравнений, о которых было сказано в замечании 6. Пусть дифференциальные выражения Λ и Λ^* определены по формулам (1.53) и (1.63) соответственно, при этом предполагается, что коэффициенты выражения Λ подчинены только условиям $P_k^{(k)}(x) \in L_1(0, l)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-2)$. Рассмотрим следующие две краевые задачи (краевые условия берутся в точке $x = 0$):

$$\Lambda(Y_1) - \lambda^n Y_1 = 0, \tag{1.81}$$

$$U_\nu(Y_1) = 0,\ \nu = 0, 1, \cdots, s;\ s \leqslant n-2, \tag{1.82}$$

$$\Lambda^*(Y_2) - \lambda^n Y_2 = 0, \tag{1.83}$$

$$U_\nu^*(Y_2) = 0,\ \nu = 0, 1, \cdots, n-2-s, \tag{1.84}$$

при этом краевые условия (1.82) и (1.84) выбираются так*, чтобы для любых функций $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$, удовлетворяющих соответственно условиям (1.82) и (1.84), имело место соотношение

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=\nu}^{n-1} (-1)^{j-\nu} \frac{\partial^{j-\nu}}{\partial t^{j-\nu}} [Y_2(t)\, P_{j+1}(t)]|_{t=0} \right\} Y_1^{(\nu)}(0) = 0.$$

Пусть матрица-функция $F(x, t)$, имеющая по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-1$, удовлетворяет следующим условиям **:

а) $$\Lambda_x[F(x, t)] = \Lambda_t^*[F(x, t)]; \tag{1.85}$$

б) $F(x, t)$ относительно t удовлетворяет условиям (1.84)

$$U_{\nu, t}^*(F) = 0,\ \nu = 0, 1, \cdots, n-2-s; \tag{1.86}$$

в) Интегральное уравнение

$$H(x, t) = \int_0^x H(x, u)\, F(u, t)\, du$$

при каждом x $(0 \leqslant x \leqslant l)$ имеет только тривиальное решение $H(x, t) = 0$.

Матрицу-функцию $K(x, t)$ определим как решение интегрального уравнения

$$K(x, t) = F(x, t) + \int_0^x K(x, u)\, F(u, t)\, du. \tag{1.87}$$

В силу условия в) решение $K(x, t)$ существует и имеет по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-1$ (см. [2]). С учетом (1.86) из (1.87) следует, что

$$U_{\nu, t}^*(K) = 0,\ \nu = 0, 1, \cdots, n-2-s. \tag{1.88}$$

Пусть $Y(x, \lambda)$ — некоторое решение краевой задачи (1.81), (1.82). Согласно выбору краевых условий (1.82) и (1.84) из (1.88) вытекает, что

---

* Можно взять, например, $U_\nu(Y_1) \equiv Y_1^{(\nu)}(0) = 0$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-2)$ $U_0^*(Y_2) \equiv Y_2(0) = 0$.

** Можно взять, например, $F(x, t) = Y_1(x, \lambda_0)\, Y_2(t, \lambda_0)$, где $Y_1(x, \lambda)$ и $Y_2(x, \lambda)$ — некоторые решения краевых задач (1.81), (1.82) и (1.83), (1.84) соответственно.

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left\{\sum_{j=\nu}^{n-1}(-1)^{j-\nu}\frac{\partial^{j-\nu}}{\partial t^{j-\nu}}\left[K(x,t)\,P_{j+1}(t)\right]|_{t=0}\right\}Y^{(\nu)}(0,\lambda)=0. \qquad (1.89)$$

Теперь из соотношений (1.65), взяв $S=I$, определим матрицы-функции $\bar{P}_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n-2)$ и по формуле (1.54) составим дифференциальное выражение $\bar{\Lambda}$. Покажем, что функция $\tilde{Y}(x, \lambda)$, определяемая по формуле

$$\tilde{Y}(x,\lambda)=Y(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)\,Y(t,\lambda)\,dt, \qquad (1.90)$$

является решением уравнения

$$\bar{\Lambda}(\tilde{Y})-\lambda^n\tilde{Y}=0. \qquad (1.91)$$

Для этого достаточно показать, что матрицы-функции $Y(x, \lambda)$ и $K(x, t)$ удовлетворяют условиям леммы. Отметим, что согласно формуле (1.89) и определению матриц-функций $\tilde{P}_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n-2)$ соотношения (1.65) и (1.66) выполнены. Остается показать справедлинось соотношения (1.64). С учетом формул (1.85), (1.89) и (1.65) имеем

$$\bar{\Lambda}_x[K(x,t)]-\Lambda_t^*[K(x,t)]=\bar{\Lambda}_x[F(x,t)]-\Lambda_t^*[F(x,t)]+$$

$$+\tilde{\Lambda}_x\left[\int_0^x K(x,u)\,F(u,t)\,du\right]-\int_0^x K(x,u)\,\Lambda_t^*[F(u,t)]\,du=$$

$$=\tilde{\Lambda}_x[F(x,t)]-\Lambda_x[F(x,t)]+\tilde{\Lambda}_x\left[\int_0^x K(x,u)\,F(u,t)\,du\right]-$$

$$-\int_0^x K(x,u)\,\Lambda_u[F(u,t)]\,du=\int_0^x\{\bar{\Lambda}_x[K(x,u)]-\Lambda_u^*[K(x,u)]\}\,F(u,t)\,du.$$

Таким образом, получили уравнение

$$\tilde{\Lambda}_x[K(x,t)]-\Lambda_t^*[K(x,t)]=\int_0^x[\tilde{\Lambda}_x[K(x,u)]-\Lambda_u[K(x,u)]]\,F(u,t)\,du. \qquad (1.92)$$

Однако согласно условию в), уравнение (1.92) имеет только тривиальное решение. Значит условие (1.64) леммы тоже выполнено. Таким образом построены уравнения (1.81) и (1.91) с неаналитическими коэффициентами, решения которых связаны соотношением (1.90).

2°. Приведем аналоги формул (1.10) и (1.55) для дифференциальных уравнений в пространстве вектор-функций. Рассмотрим следующие уравнения относительно вектор-функций $\hat{y}(x)$ и $\hat{y}_1(x)$:

$$\hat{y}^{(n)} + P_{n-2}(x)\,\hat{y}^{(n-2)} + \cdots + P_0(x)\,\hat{y} - \lambda^n \hat{y} = \hat{f}(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.1}$$

$$\hat{y}^{(\nu)}(0) = \hat{a}_\nu,\ \nu = 0,\ 1, \cdots,\ n-1, \tag{2.2}$$

$$\hat{y}_1^{(n)} + \overset{-}{P}_{n-2}(x)\,\hat{y}_1^{(n-2)} + \cdots + P_0(x)\,\hat{y}_1 - \lambda^n \hat{y}_1 = \hat{f}_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.3}$$

$$\hat{y}_1^{(\nu)}(0) = \hat{a}_\nu,\ \nu = 0,\ 1, \cdots,\ n-1. \tag{2.4}$$

Вместе с этими уравнениями рассмотрим следующие операторные уравнения:

$$Y^{(n)} + P_{n-2}(x)\,Y^{(n-2)} + \cdots + P_0(x)\,Y - \lambda^n Y = F(x), \tag{2.5}$$

$$Y^{(\nu)}(0) = A_\nu,\ \nu = 0,\ 1, \cdots,\ n-1, \tag{2.6}$$

$$\overset{-}{Y}^{(n)} + \tilde{P}_{n-2}(x)\,\overset{-}{Y}^{(n-2)} + \cdots + \overset{-}{P}_0(x)\,\overset{-}{Y} - \lambda^n \overset{-}{Y} = \overset{-}{F}(x), \tag{2.7}$$

$$\overset{-}{Y}^{(\nu)}(0) = \overset{-}{A}_\nu,\ \nu = 0,\ 1, \cdots,\ n-1, \tag{2.8}$$

в которых матрицы $F(x)$, $\overset{-}{F}(x)$ и A_ν, $\tilde{A}_\nu$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$ являются диагональными и удовлетворяют соотношениям $F(x)\,\overset{\wedge}{1} = \hat{f}(x)$, $\overset{-}{F}(x)\,\overset{\wedge}{1} = \hat{f}_1(x)$, $A_\nu\,\overset{\wedge}{1} = \hat{a}_\nu$, $\tilde{A}_\nu\,\overset{\wedge}{1} = \hat{a}_\nu$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$, где $\overset{\wedge}{1}$ — единичный вектор. Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения

$$\overset{\wedge}{\varphi}^{(n)} - \lambda^n \overset{\wedge}{\varphi} = 0,\ \overset{\wedge}{\varphi}(0) = \overset{\wedge}{1},\ \overset{\wedge}{\varphi}^{(\nu)}(0) = 0,\ \nu = 0,\ 1, \cdots,\ n-1.$$

Заметим, что

$$\overset{\wedge}{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda)\,\overset{\wedge}{1}, \tag{2.9}$$

где $\varphi(x, \lambda)$ определяется по формуле (1.4).

Теорема 3. *Пусть* $\hat{y}(x, \lambda)$ — *решение уравнения* (2.1), (2.2). *Если уравнение* (2.5) *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *то существует единственная диагональная матрица-функция* $E(x, t)$ $(0 \leqslant t \leqslant x \leqslant l)$ *такая, что имеет место формула*

$$\hat{y}(x, \lambda) = A_0\,\overset{\wedge}{\varphi}(x, \lambda) + \int_0^x E(x, t)\,\overset{\wedge}{\varphi}(t, \lambda)\,dt,\ 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{2.10}$$

При этом $E(x, t)$ *обладает всеми свойствами, высказанными в теореме* 1 *относительно* $K(x, t)$.

Доказательство. Пусть $Y(x, \lambda)$ — решение уравнения (2.5). (2.6). Тогда, согласно теореме 1, справедлива формула

$$Y(x, \lambda) = A_0 \Phi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \Phi(t, \lambda)\, dt. \qquad (2.11)$$

Если обе части формулы (2.11) применить к вектору $\hat{1}$ и учесть соотношения $\hat{y}(x, \lambda) = Y(x, \lambda)\,\hat{1}$, $\overset{\wedge}{\varphi}(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda)\,\hat{1}$, то получим

$$\hat{y}(x, \lambda) = A_0 \overset{\wedge}{\varphi}(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \overset{\wedge}{\varphi}(t, \lambda)\, dt. \qquad (2.12)$$

Определим диагональную матрицу $E(x, t)$ по формуле

$$E(x, t)\,\hat{1} = K(x, t)\,\hat{1}. \qquad (2.13)$$

В силу (2.9) из (2.13) следует, что $E(x, t) \overset{\wedge}{\varphi}(t, \lambda) = K(x, t) \overset{\wedge}{\varphi}(t, \lambda)$. Поэтому формула (2.12) принимает вид (2.10). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть* $\hat{y}(x, \lambda)$ *и* $\hat{y}_1(x, \lambda)$ — *решения уравнений* (2.1), (2.2) *и* (2.3), (2.4) *соответственно. Если уравнения* (2.5), (2.6) *и* (2.7), (2.8) *удовлетворяют условиям теоремы* 2, *то существует единственная диагональная матрица-функция* $E(x, t)(0 \leqslant t \leqslant x \leqslant l)$ *такая, что имеет место формула*

$$\hat{y}_1(x, \lambda) = \bar{A}_m A_m^{-1} \hat{y}(x, \lambda) + \int_0^x E(x, t) \hat{y}(t, \lambda)\, dt,\ 0 \leqslant x \leqslant l.$$

При этом $E(x, t)$ *обладает всеми свойствами, высказанными в теореме* 2 *относительно* $K(x, t)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26.V.1977

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար ձևափոխության օպերատորների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ օպերատորային հավասարումը $Y(x)$ *մատրից-ֆունկցիայի նկատմամբ.*

$$Y^{(n)} + P_{n-2}(x)\, Y^{(n-2)} + \cdots + P_0(x)\, Y - \lambda^n Y = F(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l:$$

Ինչպես $Y(x, \lambda)$*-ն այդ հավասարման լուծումն է, որը բավարարում է* $Y^{(\nu)}(0, \lambda) = A_\nu$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$ *սկզբնական պայմաններին, նշանակենք*

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} e^{\omega_s \lambda x},\quad \omega_s = e^{i\frac{2\pi}{n}s},\ s = 0, 1, \cdots, n-1:$$

Հոդվածում ապացուցվում է, որ եթե $P_k^{(k)}(z)$ $(k=0, 1, \cdots, n-2)$ մատրից-ֆունկցիաները անալիտիկ են $0, l, l(1-\omega_1)^{-1}, l(1-\omega_{n-1})^{-1}$ գագաթներն ունեցող քառանկյուն տիրույթում և պատկանում են H_1 դասին, իսկ $F(x)\in L_1(0, l)$, ապա գոյություն ունի $K(x, t)$ $(0 \leqslant t \leqslant x \leqslant l)$ մատրից-ֆունկցիա այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ բանաձևը

$$Y(x, \lambda)=\varphi(x, \lambda)A_0+\int_0^x \varphi(t, \lambda)K(x, t)\,dt,\ 0\leqslant x\leqslant l:$$

I. G. KHACHATRIAN. *On the transformation operators for high order differential equations* (summary)

The following operator equation with respect to matrix-function $Y(x)$ is considered:

$$Y^{(n)}+P_{n-2}(x)\,Y^{(n-2)}+\cdots+P_0(x)\,Y-\lambda^n Y=F(x),\ 0\leqslant x\leqslant l.$$

Let $Y(x, \lambda)$ be the solution of this equation, satisfying initial conditions

$$Y^{(\nu)}(0, \lambda)=A_\nu \quad (\nu=0, 1, \cdots, n-1).$$

Put

$$\varphi(x, \lambda)=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} e^{\omega_s \lambda x},\ \omega_s=e^{i\frac{2\pi}{n}s},\ s=0, 1, \cdots, n-1.$$

It is proved, that if the matrix-functions $P_k^{(k)}(z)$ $(k=0, 1, \cdots, n-2)$ belong to the class H_1 of analytic functions in the quadrangle with the vertices $0, l, l(1-\omega_1)^{-1}, l(1-\omega_{n-1})^{-1}$, and $F(x)\in L_1(0, l)$, then there exists a matrix-function $K(x, t)$ $(0\leqslant t\leqslant x\leqslant l)$, such that the formula

$$Y(x, \lambda)=\varphi(x, \lambda)A_0+\int_0^x \varphi(t, \lambda)K(x, t)\,dt,\ 0\leqslant x\leqslant l$$

is valid.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Я. Повзнер.* О дифференциальных уравнениях типа Штурма-Лиувилля полуоси, Матем. сб. 23 (65), 1948, 3—52.
2. *И. М. Гельфанд* и *Б. М. Левитан.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР, серия матем., 15, № 1951, 309—360.
3. *Б. Я. Левин.* Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, 106, № 2, 1956, 187—190.
4. *В. А. Марченко.* Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, Киев, 197.
5. *М. К. Фаге.* Решение одной задачи Коши путем увеличения числа независимых переменных, Труды 3 Всесоюз. матем. съезда, 1, 1956, 71—72.
6. *М. К. Фаге.* Операторно-аналитические функции одной независимой переменной, Труды ММО, 7, 1958, 227—268.

7. *М. К. Фаге.* Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной, Труды ММО, 8, 1959, 3—48.
8. *Л. А. Сахнович.* Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами, Матем. сб., 46 (88), № 1, 1958, 61—76.
9. *В. И. Мацаев.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, ДАН СССР, 130, № 3, 1960, 499—502.
10. *Л. А. Сахнович.* Необходимые условия наличия оператора преобразования для уравнения четвертого порядка, УМН, 16, вып. 5, 1961, 199—204.
11. *Л. А. Сахнович.* Метод оператора преобразования для уравнений высших порядков, Матем. сб., 55 (97), № 3, 1961, 347—360.
12. *Л. А. Сахнович.* Об обратной задаче для уравнений четвертого порядка, Матем. сб., 56 (98), № 2, 1962, 137—146.
13. *А. Ф. Леонтьев.* Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и ее применения к некоторым вопросам теории функций, Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 456—487.
14. *Ю. Н. Валицкий.* Об операторе преобразования для интегро-дифференциальных операторов типа Вольтерра, Сб. „Матем. физика", Киев, 1965, 23—36.
15. *А. П. Хромов.* Об одном представлении ядер резольвент вольтерровских операторов и его применениях, Матем. сб., 89 (131), № 2 (10), 1972, 207—226.
16. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
17. *С. А. Виноградов, В. П. Хавин.* Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций, Записки научн. сем. ЛОМИ, 47, 1974, 15—44.

536—5

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII. № 3, 1978 Математика

С. К. ПОГОСЯН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЛОГАРИФМА СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ

Введение

Рассмотрим конфигурационную непрерывную систему одинаковых частиц, находящихся в некоторой ограниченной области (сосуде) $\Lambda \subset R^\nu$ ν-мерного пространства и взаимодействующих с помощью парного потенциала $U(x)$, $x \in R^\nu \setminus \{0\}$. Пространством состояний такой системы служит пространство $C(\Lambda)$ всех конечных подмножеств (конфигураций) сосуда Λ с некоторой, естественно определенной в $C(\Lambda)$, σ-алгеброй $\mathbf{A}(\Lambda)$ и лебеговой мерой с элементом dc (подробнее см. в [3]). Аналогично этому через $C(R^\nu)$ мы будем обозначать пространство всех конечных конфигураций $c \subset R^\nu$ с σ-алгеброй $\mathbf{A}(R^\nu)$ и лебеговой мерой с элементом dc такими, что их сужения на пространство $C(\Lambda) \subset C(R^\nu)$, где $\Lambda \subset R^\nu$ — произвольный ограниченный сосуд, совпадают с σ-алгеброй $\mathbf{A}(\Lambda)$ и лебеговой мерой на $C(\Lambda)$. Распределение вероятностей на $C(\Lambda)$, задаваемое плотностью относительно лебеговой меры на $C(\Lambda)$

$$p_{\Lambda, \beta, z}(c) = \frac{z^{N(c)}\, e^{-\beta H(c)}}{\Xi(\Lambda, \beta, z)}, \tag{0.1}$$

называется распределением Гиббса. Здесь $N(c)$ — число точек в конфигурации c, $H(c)$ — энергия этой конфигурации, задаваемая формулой

$$H(c) = \sum_{\{x, y\} \subset c,\ x \neq y} U(x - y), \tag{0.2}$$

z (активность) и β (обратная температура) — некоторые положительные параметры и, наконец, нормирующий множитель (статистическая сумма) $\Xi(\Lambda, \beta, z)$ равен

$$\Xi(\Lambda, \beta, z) = \int_{C(\Lambda)} z^{N(C)}\, e^{-\beta H(C)}\, dc. \tag{0.3}$$

Как известно, при довольно общих предположениях относительно потенциала U и расширяющейся последовательности сосудов $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \Lambda_3 \subset \cdots$ верна следующая асимптотика (теорема Ван-Хова или теорема Ли и Янга)

$$\ln \Xi(\Lambda_k) = c_0 |\Lambda_k| + o(|\Lambda_k|), \quad k \to \infty, \tag{0.4}$$

где $c_0 = c_0(U, \beta, z)$ — константа, зависящая от параметров z, β и потенциала U, а $|\Lambda_k|$ — ν-мерный объем сосуда Λ_k, $k=1, 2, \cdots$.

В предлагаемой работе, вводя некоторые дополнительные предположения о потенциале взаимодействия, а также о границе сосуда Λ, мы получаем—при малых значениях параметра z—дальнейшие члены в асимптотике (0.4). В статье [2] точно описан класс потенциалов $U(x)$, $x \in R^\nu \setminus \{0\}$, для которых верны приводимые ниже теоремы. Этот класс состоит, грубо говоря, из функций $U(x)$, $x \in R^\nu \setminus |0|$, $k+1$-раз дифференцируемых, $k=0, 1, 2, \cdots$, при всех $x \neq 0$, достаточно быстро убывающих на бесконечности вместе со своими производными

$$(D^\alpha U)(x) = \left. \frac{\partial^{|\alpha|} U}{\prod_1^\nu \partial (\xi^{(i)})^{\alpha_i}} \right|_{\xi = x}, \quad |\alpha| \leqslant k+1,$$

где $\xi = (\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(\nu)})$ — некоторая прямоугольная система координат в R^ν, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu)$— мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$, и принимающих в некоторой окрестности нуля достаточно большие положительные значения и при том так, что для любого мультииндекса α, $|\alpha| \leqslant k+1$ выполняется оценка

$$|(D^\alpha U)(x)| \leqslant C |U(x)|^\gamma, \quad |x| > d, \ d > 0, \tag{0.5}$$

где d, C и γ — некоторые константы (вообще говоря, зависящие от k).

Перейдем теперь к описанию рассматриваемого нами класса сосудов. Обозначим через $\Gamma = \Gamma(\Lambda)$ границу выпуклого ограниченного сосуда Λ, которую мы будем предполагать $k+2$-гладким, $k=0, 1, 2, \cdots$ $\cdots$, $\nu-1$-мерным подмногообразием в R^ν. Для любой точки $x \in \Gamma(\Lambda)$ через $T_\Gamma(x)$ обозначим касательную гиперплоскость к Γ в точке x и выберем затем прямоугольную систему координат $(\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(\nu-1)}, \eta)$ в R^ν с началом в точке x так, что ось η направлена по внутренней нормали к поверхности Γ в точке x, а оси $\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(\nu-1)}$ лежат в гиперплоскости $T_\Gamma(x)$ и их направления совпадают с направлениями главных кривизн поверхности Γ в точке x. Далее, полагая $(\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(\nu-1)}, \eta) = (\xi, \eta)$, обозначим через $(\varkappa_\Gamma)_i(x)$, $i = 1, \cdots, \nu-1$, $x \in \Gamma$ главные кривизны поверхности Γ в точке x и через $D_\Gamma(x) \subset T_\Gamma(x)$ -- множество

$$D_\Gamma(x) = \{\xi \in T_\Gamma(x): |\xi| < \hat{\delta}_\Gamma\}, \tag{0.6}$$

где $\hat{\delta}_\Gamma = \inf_{x \in \Gamma} \{|2 \max (\varkappa_\Gamma)_i(x)|^{-1}\}$ и $|\xi|$ — эвклидова норма вектора $\xi \in R^{\nu-1}$. Пусть $E_\Gamma(x)$ — связная компонента множества $\{(\xi, \eta) \in \Gamma: \xi \in D_\Gamma(x)\}$, содержащая точку $x \in \Gamma$. Очевидно, для любого $x \in \Gamma$, $E_\Gamma(x)$ задается уравнением

$$\eta = f_{\Gamma, x}(\xi), \ \xi \in D_\Gamma(x), \tag{0.7}$$

где $f_{\Gamma, x}$ — $k+2$-гладкая функция на $D_\Gamma(x)$ со следующим разложением в ряд Тейлора по ξ

$$f_{\Gamma, x}(\xi) = \sum_{|s| \leqslant k+1} a_{\Gamma, s}(x)\, \xi^s + r_{\Gamma, k+2}(\xi, x), \tag{0.8}$$

где $s_1 = (s_1, \cdots, s_{\nu-1})$ — мультииндекс,

$$a_{\Gamma, s}(x) = \frac{f^{(s)}_{\Gamma, x}(0)}{s!} \tag{0.9}$$

и использованы обозначения:

$$\xi^s = \prod_{l=1}^{\nu-1} (\xi^{(l)})^{s_l}, \ f^{(s)}_{\Gamma, x}(0) = \left. \frac{\partial^{|s|} f_{\Gamma, x}}{\prod_{l=1}^{\nu-1} \partial (\xi^{(l)})^{s_l}} \right|_{\xi=0},$$

$$|s| = \sum_1^{\nu-1} s_l \ \text{ и } \ s! = \prod_1^{\nu-1} s_l!,$$

наконец, остаточный член $r_{\Gamma, k+2}(\xi, x)$ допускает оценку, равномерную по $x \in \Gamma$

$$|r_{\Gamma, k+2}(\xi, x)| \leqslant F_\Gamma(\nu, k) |\xi|^{k+2}, \tag{0.10}$$

где $|\xi|$ — эвклидова норма вектора $\xi \in R^{\nu-1}$ и

$$F_\Gamma(\nu, k) = (\nu - 1)^{k+2} \sup_{x \in \Gamma} \{ \sup_{\xi \in D_p(x), |s| = k+2} |f^{(s)}_{\Gamma, x}(\xi)| \}. \tag{0.11}$$

Введем для любого выпуклого ограниченного сосуда $\Lambda \subset R^\nu$ величину $L_\nu(\Lambda) = |\Lambda|^{1/\nu}$, называемую средним линейным размером сосуда Λ, и, дополнительно предполагая границу $\Gamma(\Lambda)$ $k+2$-гладкой, положим

$$I_k(\Lambda) = \sup_{x \in \Gamma} \max \{ |a_{\Gamma, s}(x)| (L_\nu(\Lambda))^{|s|-1}, \ |s| \leqslant k+1; \ F_\Gamma(\nu, k) (L_\nu(\Lambda))^{k+1} \} \tag{0.12}$$

Заметим, что для двух гомотетичных сосудов Λ и $\tilde{\Lambda}$ (т. е. получающихся один из другого линейным растяжением или сжатием относительно некоторого центра) величины $I_k(\Lambda)$ и $I_k(\tilde{\Lambda})$ совпадают.

Пусть $\mathbf{V}^k_a$, $a > 0$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ — класс выпуклых ограниченных сосудов $\Lambda \subset R^\nu$ с $k+2$-гладкой границей Γ, удовлетворяющих условию

$$I_k(\Lambda) \leqslant a. \tag{0.13}$$

Из $\Lambda \in \mathbf{V}^k_a$ вытекает следующая оценка для величины $\delta_\Gamma = \delta_{\Gamma(\Lambda)}$:

$$\delta_\Gamma \geqslant \frac{L_\nu(\Lambda)}{4a}. \tag{0.14}$$

Действительно, если заметить, что коэффициенты при квадратичных членах в разложении (0.8) равны половинам кривизн, то из (0.12) и (0.13) следует, что

$$(\varkappa_\Gamma)_i(x) \leqslant 2a\,(L_\nu(\Lambda))^{-1},\ i=1,\cdots,\nu-1,$$

откуда и вытекает (0.14).

Функционал $\Phi(\Lambda)$, определенный на совокупности всех ограниченных сосудов $\Lambda \subset R^\nu$ (или на некоторой части этой совокупности, инвариантной относительно гомотетичных преобразований R^ν) мы назовем k—однородным, k-вещественное число, если при любых Λ и $\lambda>0$

$$\Phi(E_\lambda(\Lambda)) = \lambda^k \Phi(\Lambda),$$

где E_λ: $x \to \lambda x$ — гомотетия R^ν с коэффициентом λ.

Обозначим через $Z_+^{\nu-1}$ полугруппу (относительно покоординатного сложения всех мультииндексов $(s_1,\cdots,s_{\nu-1})$, а через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(Z_+^{\nu-1})$ — совокупность всех неотрицательных целочисленных финитных функций, определенных на $Z_+^{\nu-1}$, и для любого $\mathbf{Z} \subset Z_+^{\nu-1}$ положим $\mathfrak{M}(\mathbf{Z}) = \{m \in \mathfrak{M}: \sup pm \subseteq \mathbf{Z}\}$. Пусть, далее, $\mathbf{Z}_k = \{s \in Z_+^{\nu-1}: 2 \leqslant |s| \leqslant k+1\}$ и, наконец,

$$\mathfrak{M}_l(\mathbf{Z}_k) = \left\{ m \in \mathfrak{M}(\mathbf{Z}_k): \sum_s (|s|-1)\,m(s) = l \right\},\ l=1,\ 2,\cdots.$$

Теорема 1. *Пусть потенциал U удовлетворяет указанным выше условиям и активность z достаточно мала. Тогда для любого сосуда Λ из класса $\mathbf{V}_a^k$, $1 \leqslant k \leqslant \nu$ величина $\ln \Xi(\Lambda, \beta, z)$ имеет следующее разложение:*

$$\ln \Xi(\Lambda, \beta, z) = c_0(U)|\Lambda| + \sum_{l=1}^{k} c_l(\Lambda; U, \beta, z) + R_k(\Lambda; U, \beta, z), \quad (0.15)$$

где $c_0(U) = c_0(U, \beta, z)$ — та же константа, что и в (0.4), а величины $c_l(\Lambda; U, \beta, z)$, $l=1,\cdots,k$ являются соответственно $\nu-l$-однородными функционалами от Λ и имеют вид:
в случае $1 \leqslant l \leqslant \nu-1$

$$c_l(\Lambda; U, \beta, z) = \frac{1}{\nu-l} \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{n=1}^{l-j} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{m \in \mathfrak{M}_l(\mathbf{Z}_k)} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle \times$$

$$\times\, g^j_{n,m}(x) \prod_{s \in Z_+^{\nu-1}} (a_{\Gamma,s}(x))^{m(s)}\, d\sigma(x), \quad (0.16)$$

где $|m| = \sum_{s \in \Lambda} m(s)$, $n(x)$ — *внешняя единичная нормаль в точке* $x \in \Gamma$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — *скалярное произведение в* R^ν, $d\sigma$ — *элемент* $\nu-1$-*мерной площади* Γ (*индуцированный вложением* $\Gamma \subset R^\nu$), *а явный вид коэф-*

фициентов $g^j_{n,\,m}(x) = g^j_{n,\,m}(x;\ U,\ \beta,\ z)$, $j = 0,\ 1,\cdots,\ l-1$, $m \in \mathfrak{M}_l(\mathbf{Z}_k)$ *будет указан ниже:*
в случае $l = \nu$

$$c_\nu(\Lambda;\ U,\ \beta,\ z) = \ln(L_\nu(\Lambda)) \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{n=1}^{\nu-j} \frac{(-1)^n}{n!} \times$$

$$\times \sum_{\substack{m \in \mathfrak{M}_l(\mathbf{Z}_k): \\ |m| = j+n}} \int_{\Gamma(\Lambda)} < n(x),\ x > g^j_{n,\,m}(x) \left(\prod_s (a_{\Gamma,\,s}(x))^{m(s)}\right) d\sigma(x), \quad (0.17)$$

а величина $R_k(\Lambda,\ U)$ *допускает оценку*

$$|R_k(\Lambda,\ U)| \leqslant \begin{cases} \mathbf{D}_1 (L_\nu(\Lambda))^{\nu-k-1} & \text{при } k < \nu-1 \\ \mathbf{D}_2 \ln(L_\nu(\Lambda)) & \text{при } k = \nu-1 \\ \mathbf{D}_3 & \text{при } k = \nu, \end{cases} \quad (0.18)$$

где $\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i(U,\ \beta,\ z,\ a)$, $i = 1,\ 2,\ 3$ — *положительные константы зависящие от потенциала* U *и параметров* β, z, a.

Отметим, однако, что в случае эвклидова-инвариантного потенциала U^* коэффициенты $g^j_{n,\,m}(x)$ не зависят от $x \in \Gamma$, и поэтому выражения для $c_l(\Lambda,\ U)$, $l = 1,\cdots,\ k$ можно упростить по сравнению с общим случаем. Для примера приведем выражения для $c_1(\Lambda,\ U)$ и $c_2(\Lambda,\ U)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, и потенциал* U *дополнительно обладает свойством эвклидовой инвариантности. Тогда величины* $c_1(\Lambda;\ U,\ \beta,\ z)$ *и* $c_2(\Lambda;\ U,\ \beta,\ z)$ *в* (0.15) *примут вид*

$$c_1(\Lambda;\ U,\ \beta,\ z) = d_1(U,\ \beta,\ z) \cdot S(\Gamma(\Lambda)), \quad (0.19)$$

$$c_2(\Lambda;\ U,\ \beta,\ z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu-2} [d_2(U,\ \beta,\ z)\ M(\Gamma(\Lambda)) + \bar{d}_2(U,\ \beta,\ z)\ \bar{M}(\Gamma(\Lambda))], \\ \dfrac{1}{2}\, d_2(U,\ \beta,\ z)\ M(\Gamma(\Lambda)) \ln|\Lambda|, \end{cases} \quad (0.20)$$

где d_1, d_2 *и* $\bar{d}_2$ — *константы, зависящие от потенциала* U *и параметров* β *и* z, $S(\Gamma(\Lambda))$ — *площадь поверхности* $\Gamma(\Lambda)$, *а величины* M *и* $\tilde{M}$ *равны*

$$M(\Gamma(\Lambda)) = \int_{\Gamma(\Lambda)} < n(x),\ x > \left(\sum_{i=1}^{\nu-1} (\varkappa_\Gamma)_i^2(x)\right) d\sigma(x), \quad (0.21)$$

$$M(\Gamma(\Lambda)) = \int_{\Gamma(\Lambda)} < n(x),\ x > \left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant \nu-1} (\varkappa_\Gamma)_i(x)(\varkappa_\Gamma)_j(x)\right) d\sigma(x). \quad (0.22)$$

---

* То есть $U(x) = U(|x|)$.

Аналогичные разложения верны и в решетчатом случае. (Подробнее это составит содержание отдельной публикации). Заметим, что в решетчатом случае второй член асимптотики был явно вычислен Добрушиным [5] и независимо получен в недавней работе Фишера и Кагиналпа [6].

Наметим теперь вкратце основную линию наших построений. В § 1 мы выделим некоторый класс функций $\psi(c)$, $c \in C(R^*)$, называемых нами кластерными, и рассмотрим его важный подкласс, состоящий из функций, названных нами кластерно-гладкими. Мы покажим (теорема 4), что для таких функций и любого ограниченного сосуда Λ существует интеграл

$$Q(\Lambda, \psi) = \int_{C(\Lambda)} \psi(c)\, dc \tag{0.23}$$

и, в случае сосуда с достаточно гладкой границей, этот интеграл имеет асимпотическое разложение вида (0.15) с коэффициентами $g^l_{n,m}(x)$, зависящими от ψ. Далее, как показано в работе [2], при указанных выше предположениях относительно потенциала взаимодействия U и малых значениях активности z найдется такая измеримая функция $\psi_{z,\beta}(c)$, $c \in C(R^*)$, называемая функцией Урселла, которая является кластерно-гладкой и такой, что для любого ограниченного сосуда $\Lambda \subset R^*$

$$\ln \Xi(\Lambda, \beta, z) = Q(\Lambda, \psi_{z,\beta}). \tag{0.24}$$

Тем самым теорема 1 окажется следствием теоремы 4.

Далее, в § 2 мы приведем упрощения соответствующих коэффициентов разложения для величины $Q(\Lambda, \psi)$ при условии эвклидовой инвариантности функции ψ (теорема 5) и получим отсюда теорему 2.

В заключение заметим, что существует следующее представление для интеграла $Q(\Lambda, \psi)$*:

$$Q(\Lambda, \psi) = \int_{\Lambda} dx \int_{C(\Lambda)} \frac{\psi(x \cup c)}{N(c)+1}\, dc, \tag{0.25}$$

которое легко следует из тождества

$$\int_{C(\Lambda)} \Big(\sum_{c_1 \subset c} \varphi(c_1) \Big) f(c)\, dc = \int_{C(\Lambda)} \varphi(c_1)\, dc_1 \int_{C(\Lambda)} f(c_1 \cup c_2)\, dc_2 \tag{0.26}$$

(см. [3]). В дальнейшем мы будем также часто пользоваться формулой

$$\int_{C(\Lambda)} \int_{C(\Lambda)} \psi(c_1 \cup c_2)\, dc_1 dc_2 = \int_{C(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)} \psi(c)\, dc, \tag{0.27}$$

---

* Впредь, для удобства мы будем писать xUc вместо $\{x\} \cup c$.

где Λ_1, $\Lambda_2 \subset R^\nu$ — произвольные сосуды, удовлетворяющие условию $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$. (Эта формула следует из определения меры dc).

§ 1. Кластерно-гладкие функции и разложение $Q(\Lambda, \psi)$ для этих функций

Для любого вектора $s \in R^\nu$ через $\tau_s(c)$ обозначим сдвиг конфигурации $c \in C(R^\nu)$ на вектор s: $\tau_s(c) = \{x + s: x \in c\}$. Функцию $\psi(c)$, $c \in C(R^\nu)$ назовем трансляционно-инвариантной, если для любых $c \in C(R^\nu)$ и $s \in R^\nu$ выполняется равенство $\psi(\tau_s(c)) = \psi(c)$. Введем обозначения: через W_c, $c \in C'(R^\nu)$, где $C'(R^\nu) = C(R^\nu) \setminus \{\varnothing\}$, обозначим совокупность всех цепей (цепью мы называем совокупность неориентированных ребер, соединяющих последовательно все точки (вершины) данного множества) с множеством вершин c, через $\mathbf{F}(\gamma)$, $\gamma \in W_c$ — множество ребер цепи γ и через $[x_1, x_2]$, $x_1, x_2 \in c$ — ребро с концами x_1 и x_2. Заметим попутно, что число элементов множества W_c равно $\frac{N(c)!}{2}$. Далее, пусть M^+ есть класс всех неотрицательных, ограниченных и суммируемых функций на неотрицательной вещественной полуоси $[0, \infty)$. Для любого положительного числа p через M_p^+ обозначим класс функций f на R^ν, определяемых по формуле: $f(x) = \tilde{f}(|x|)(1+|x|)^{-p}$, $x \in R^\nu$, $\tilde{f} \in M^+$, и через $\mathbf{N}_p^i \subset M_p^+$, $i = 1, 2, \cdots$ обозначим подмножество

$$\mathbf{N}_p^i = \left\{ q \in M_p^+ : \int_{R^\nu} q(x)\,dx < \frac{1}{i}, \sup_{x \in R^\nu} q(x) < 2^{-i} \right\}.$$

Лемма 1. *Пусть* $q \in \mathbf{N}_p^1$, *тогда уравнение*

$$\int_{R^\nu} f(y)\, q(x-y)\, dy = f(x) - q(x) \tag{1.1}$$

имеет единственное решение $f \equiv Vq$, *причем* $Vq \in M_p^+$ *и*

$$\int_{R^\nu} (Vq)(x)\,dx = \int_{R^\nu} q(x)\,dx \left| 1 - \int_{R^\nu} q(x)\,dx \right|^{-1}. \tag{1.2}$$

Доказательство леммы дано в приложении. Заметим, что если $q \in \mathbf{N}_p^n$, то определены функции $V^k q \in M_p^+$, $k = 1, \cdots, n$, причем

$$\int_{R^\nu} (V^k q)(x)\,dx = \int_{R^\nu} q(x)\,dx \left| 1 - k \int_{R^\nu} q(x)\,dx \right|^{-1}, \quad k = 1, \cdots, n.$$

Для любой функции $q \in M_p^+$, $p > \nu$ и любого положительного числа A обозначим через $\mathbf{L}_{q,A}^p$ класс функций $\psi(c)$, $c \in C'(R^\nu)$, удовлетворяющих оценке

$$|\psi(c)| \leqslant A \sum_{\gamma \in W'_c} \prod_{[x_1, x_2] \in F(\gamma)} q(x_1 - x_2), \quad c \in C^l(R^\nu). \tag{1.3}$$

Функцию $\psi(c)$, $c \in C^l(R^\nu)$ назовем кластерной, если она принадлежит классу $\mathbf{L}^p_{q, A}$ при некоторых $A > 0$, $p > \nu$ и $q \in M^+_p$.

Лемма 2. Пусть $\psi \in \mathbf{L}^p_{q, A}$, *где* $q \in \mathbf{N}^1_p$, *тогда для любого (ограниченного или неограниченного) сосуда* $\Lambda \subset R^\nu$ *интеграл*

$$\omega_\Lambda(c) = \int_{C(\Lambda)} \psi(c \cup \bar{c})\, d\bar{c}, \quad c \in C^l(R^\nu) \tag{1.4}$$

сходится и $\omega_\Lambda \in \mathbf{L}^p_{V^q, A_1}$, *где константа* A_1 *равна*

$$A_1 = A \left(1 - \int_{R^\nu} q(x)\, dx\right)^{-2}. \tag{1.5}$$

Доказательство леммы 2 состоит в дословном повторении рассуждений доказательсгва теоремы 2 из [2]. Сформулируем ряд следствий. Для любого сосуда $\Lambda \subset R^\nu$ введем оператор H_Λ, определенный на множестве $\mathbf{L}^p_{q, A}$ кластерных функций таких, что $q \in \mathbf{N}^1_p$ и действующий по формуле

$$(H_\Lambda \psi)(c) = \omega_\Lambda(c), \quad c \in C^l(R^\nu). \tag{1.6}$$

Следствие 1. Пусть $\psi \in \mathbf{L}^p_{q, A}$, где $q \in \mathbf{N}^1_p$ тогда при любом $x \in R^\nu$

$$\int_{C(R^\nu)} \frac{\psi(x \cup c)}{N(c)+1}\, dc < A_1, \tag{1.7}$$

где константа A_1 определена в (1.5).

Следствие 2. Пусть $\psi \in \mathbf{L}^p_{q, A}$, где $q \in \mathbf{N}^1_p$, тогда для любого ограниченного сосуда $\Lambda \subset R^\nu$ интеграл $Q(\Lambda, \psi)$ сходится и удовлетворяет оценке

$$|Q(\Lambda, \psi)| \leqslant A_1 |\Lambda|, \tag{1.8}$$

где константа A_1 введена в (1.5).

Следствие 3. Пусть $\psi \in \mathbf{L}^p_{q, A_0}$ где $q \in \mathbf{N}^n_p$, n-натуральное число, тогда для произвольных сосудов $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n \subset R^\nu$ функция $H_{\Lambda_n} H_{\Lambda_{n-1}} \ldots H_{\Lambda_1} \psi$ принадлежит классу $\mathbf{L}^p_{V^n q, A_n}$, где константа A_n имеет вид

$$A_n = A_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left[1 - \int_{R^\nu} q(x)\, dx \left(1 - k \int_{R^\nu} q(x)\, dx\right)^{-1}\right]^{-2}. \tag{1.9}$$

Заметим, что при $n = 1$ мы приходим к утверждению леммы 2, а далее следует применить математическую индукцию.

Следствие. 4. Пусть $\psi \in \mathbf{L}^p_{q,\,A_0}$, где $q \in \mathbf{N}^{n+1}_p$, n-натуральное число, тогда для произвольных сосудов $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n \subset R^\nu$ и любой точки $x \in R^\nu$ имеет место оценка

$$\int\limits_{c \cap S_x(r) \neq \varnothing} (H_{\Lambda_n} \cdots H_{\Lambda_1} |\psi|)(x \cup c)\, dc \leqslant A_{n+1} \lambda_{n+1}(r), \tag{1.1}$$

где $S'_x(r) = R^\nu \setminus S_x(r)$, $S_x(r)$ — шар радиуса $r > 0$ с центром в точке x, A_{n+1} — константа, введенная в (1.9), а функция $\lambda_{n+1}(r)$, $r \geqslant 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ равна

$$\lambda_{n+1}(r) = \int\limits_{y \in R^\nu : |y| > r} (l^{n+1} q)(y)\, dy. \tag{1.11}$$

Аналогично, если $\psi \in \mathbf{L}^p_{q,\,A_0}$ и $q \in \mathbf{N}^1_p$, то для любого $x \in R^\nu$

$$\int\limits_{c \cap S_x(r) \neq \varnothing} |\psi(x \cup c)|\, dc \leqslant A_1 \lambda_1(r). \tag{1.10'}$$

Доказательство. Пользуясь следствием 3 и формулой (0.27), получаем

$$\int\limits_{c \cap S'_x(r) \neq \varnothing} (H_{\Lambda_n} \cdots H_{\Lambda_1} |\psi|)(x \cup c)\, dc = \int\limits_{C'(S'_x(r))} dc_1 \times$$

$$\times \int\limits_{C(S_x(r))} (H_{\Lambda_n} \cdots H_{\Lambda_1} |\psi|)(x \cup c_1 \cup c_2)\, dc_2 = \int\limits_{C'(S'_x(r))} (H_{S_x(r)} (H_{\Lambda_n} \cdots$$

$$\cdots H_{\Lambda_1} |\psi|)\, x \cup c)\, dc = \int\limits_{S'_x(r)} dy \int\limits_{C(S'_x(r))} (N(c)+1)^{-1} (H_{S_x(r)} H_{\Lambda_n} \cdots$$

$$\cdots H_{\Lambda_1} |\psi|)(x \cup y \cup c)\, dc \leqslant \int\limits_{S'_x(r)} (H_{R^\nu} H_{\Lambda_n} \cdots H_{\Lambda_1} |\psi|)(x,\, y)\, dy \leqslant A_{n+1} \lambda_{n+1}(r).$$

Замечание 1. Если функция $\psi \in \mathbf{L}^p_{q,\,A}$ трансляционно-инвариантна и $q \in \mathbf{N}^1_p$, то интеграл

$$c_0(\psi) = c_0(x, \psi) = \int\limits_{R^\nu} \frac{\psi(x \cup c)\, dc}{N(c)+1} \tag{1.12}$$

не зависит от точки $x \in R^\nu$.

Обозначим через $V(\Lambda)$ приграничную полосу в сосуде Λ ширины 1: $V(\Lambda) = \{x \in \Lambda : \rho(x, \Lambda') < 1\}$, где $\Lambda' = R^\nu \setminus \Lambda$, а $\rho(x, \Lambda') = \inf\limits_{y \in \Lambda'} |x - y|$ — расстояние точки x до границы $\Gamma(\Lambda)$.

Теорема 3. *Пусть функция* $\psi \in \mathbf{L}^p_{q,\Lambda_0}$, *где* $q \in \mathbf{N}^1_p$ *и* $p \geqslant 2\nu+1$ — *трансляционно-инвариантна. Тогда для любого выпуклого ограниченного сосуда* $\Lambda \subset R^\nu$ *имеет место равенство*

$$Q(\Lambda, \psi) = c_0(\psi)\,|\Lambda| + R(\Lambda), \tag{1.13}$$

где $c_0(\psi)$ *определяется формулой* (1.12), *а слагаемое* $R(\Lambda)$ *допускает оценку*

$$|R(\Lambda)| \leqslant K\,|V(\Lambda)|,$$

где $K = K(q, A_0) > 0$ — *константа.*

Доказательство. В силу (0.25) и замечания 1 имеем

$$Q(\Lambda, \psi) = \int\limits_{\Lambda} dx \int\limits_{R^\nu} \frac{\psi(x \cup c)}{N(c)+1}\,dc - \int\limits_{\Lambda} dx \int\limits_{c \cap \Lambda' \neq \varnothing} \frac{\psi(x \cup c)}{N(c)+1}\,dc = c_0(\psi)\,|\Lambda| + R(\Lambda),$$

где через $R(\Lambda)$ обозначено второе слагаемое. Отсюда, пользуясь (1.10′) и монотонностью функции $\lambda_1(r)$, получаем, что

$$|R(\Lambda)| \leqslant A_1 \int\limits_{V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, \Lambda'))\,dx + A_1 \int\limits_{\Lambda \setminus V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, \Lambda'))\,dx \leqslant$$

$$\leqslant A_1 \lambda_1(0) \cdot |V(\Lambda)| + A_1 \int\limits_{\Lambda \setminus V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, \Lambda'))\,dx. \tag{1.14}$$

Пусть, далее, $S_x(\rho(x, \Lambda')) \subset R^\nu$ — шар радиуса $\rho(x, \Lambda')$ с центром в точке x, тогда, как легко видеть, при любых $x \in \Lambda \setminus V(\Lambda)$ и $y \in$ $\in V(\Lambda) \cap S_r(\rho(x, \Lambda'))$ имеет место неравенство

$$\lambda_1(\rho(x, \Lambda')) \leqslant \lambda_1(\rho(x, y)).$$

откуда вытекает, что для любого $x \in \Lambda \setminus V(\Lambda)$

$$\lambda_1(\rho(x, \Lambda')) \leqslant |V(\Lambda) \cap S_x(\rho(x, \Lambda'))|^{-1} \int\limits_{V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, y))\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \omega_\nu^{-1} \int\limits_{V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, y))\,dy,$$

где ω_ν — объем шара в R^ν радиуса 1/2. Отсюда для второго слагаемого в (1.14) получаем оценку

$$\int\limits_{\Lambda \setminus V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, \Lambda'))\,dx \leqslant \omega_\nu^{-1} \int\limits_{V(\Lambda)} dy \int\limits_{\Lambda \setminus V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, y))\,dx \leqslant \omega_\nu^{-1}\,|V(\Lambda)| \times$$

$$\times \int\limits_{R^\nu} \lambda_1(|x|)\,dx.$$

Последний интеграл в (1.15) сходится, в силу условия теоремы $p \geqslant 2\nu + 1$. Таким образом, из (1.14) и (1.15) следует, что

$$|R(\Lambda)| \leqslant K |V(\Lambda)|,$$

где

$$K = K(q, A_0) = A_1 \left(\lambda_1(0) + w_\nu^{-1} \int_{R^\nu} \lambda_1(|x|)\, dx \right).$$

Теорема доказана.

Оказывается, что при дополнительных предположениях относительно функции φ и сосуда Λ можно уточнить вид остаточного члена $R(\Lambda)$ в формуле (1.13). Для этого заметим, что на множестве $C^N(R^\nu)$, $N = 1, 2, \cdots$ (N-точечных конфигураций в R^ν) можно ввести топологию, а также структуру бесконечно-дифференцируемого $\nu \times N$-мерного многообразия. Рассмотрим с этой целью какую-нибудь ортогональную систему координат в $R^\nu - (\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(\nu)})$ и построим с ее помощью систему координат $\{\xi_i^{(\alpha)}: i = 1, \cdots, N;\ \alpha = 1, \cdots, \nu\}$ в $(R^\nu)^N$ (N-ая декартовая степень R^ν), где $\xi_i^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \cdots, \nu$ — координаты компоненты $x_i \in R^\nu$ в наборе $(x_1, \cdots, x_N) \in (R^\nu)^N$. Пусть $((R^\nu)^N)' \subset (R^\nu)^{\times N}$ — совокупность наборов $(x_1, \cdots, x_N)$, состоящих из различных точек: $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Тогда каноническое отображение $\pi: ((R^\nu)^N)' \to C^N(R^\nu)$, действующее по формуле $(x_1, \cdots, x_N) \to \{x_i\}_1^N = c$, позволяет ввести систему координат в достаточно малой окрестности $O(c_0)$ любой конфигурации $c_0 \in C^N(R^\nu)$. А именно, пусть $O(c_0)$ столь мала, что ее полный прообраз $\pi^{-1}(O(c_0))$ состоит ровно из $N!$ связных компонент, и пусть G — одна из них. Обозначим через π_G ограничение отображения π на G. Очевидно, π_G — взаимно-однозначное отображение, в силу чего существует обратное π_G^{-1}: $O(c_0) \to G \subset ((R^\nu)^{\times N})'$, порождающее систему координат $\{\gamma_{ix}^{(\alpha)}: \alpha = 1, \cdots, \nu;\ x \in c\}$ в окрестности $O(c_0)$ по формуле

$$\{\gamma_{ix}^{(\alpha)} = \gamma_{ix}^{(\alpha)}(c) = \xi_i^{(\alpha)} - (\xi_i^{(\alpha)})_0,$$

где

$$(\xi_i^{(1)}, \cdots, \xi_i^{(\nu)}) = (\pi_G^{-1}(c))_i = x, \text{ а } ((\xi_i^{(1)})_0, \cdots, (\xi_i^{(\nu)})_0) = (\pi_G^{-1}(c_0))_i,$$

$$i = 1, \cdots, N.$$

Далее для любой k-гладкой, $k = 0, 1, \cdots$ функции $\psi(c)$, $c \in C^N(R^\nu)$ и произвольной, определенной на конфигурации $c_0 \in C^N(R^\nu)$, функции $m = m_{c_0} = \{m^{(\alpha)}(x) \in Z_+^1: \alpha = 1, \cdots, \nu;\ x \in c_0\}$, определим величину

$$(D^m \psi)(c_0) = \left. \frac{\partial^{|m|} \psi}{\prod_{\alpha, x} \partial (\gamma_{ix}^{(\alpha)})^{m^{(\alpha)}(x)}} \right|_{\gamma_{ix}^{(\alpha)} = (\gamma_{ix}^{(\alpha)})_0,\ \alpha = 1, \cdots, \nu;\ x \in c_0} \qquad (1.16)$$

где $\{(\gamma_{ix}^{(\alpha)})_0;\ \alpha = 1, \cdots, \nu;\ x \in c_0\}$ — координаты точки $c_0 \in C^N(R^\nu)$ в локальной системе координат, а $|m| = \sum_{\alpha, x} m^{(\alpha)}(x)$. Функцию $\psi(c)$, $c \in$

$\in C^{\prime}(R^{\nu})$ назовем k-гладкой, $k=0, 1, \cdots$, если k-гладкими ее сужения на подпространства $C^{N}(R^{\nu})$ для всех $N=1, 2, \cdots$, а величину $(D^{m_c}\psi)(c)$, $c\in C^{\prime}(R^{\nu})$, положим равной $(D^{m_c}\psi_{N(c)})(c)$, где $\psi_{N(c)}$ — сужение функции ψ на подпространство $C^{N(c)}(R^{\nu})$. Для любых чисел k, $k=0, 1, \cdots$, $A>0$ и любой функции $q\in M_{p}^{+}$, $p>\nu$ через $\mathrm{L}^{p}_{k, q, A}$ обозначим класс k-гладких функций $\psi(c)$, $c\in C^{\prime}(R^{\nu})$, все частные производные $D^{m}\psi$, $|m|\leqslant k$ которых принадлежат классу $\mathrm{L}^{p}_{q, A}$. Функцию $\psi(c)$, $c\in C^{\prime}(R^{\nu})$ назовем кластерно-k-гладкой, если $\psi\in\mathrm{L}^{p}_{k, q, A}$ при некоторых $p>\nu$, $q\in M_{p}^{+}$, $A>0$ и $k=0, 1, \cdots$.

Лемма 3. *Пусть* $\psi\in\mathrm{L}^{p}_{k, q, A_0}$, *где* $q\in\mathrm{N}^{n}_{p}$, *и пусть* $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$ — *произвольные сосуды в* R^{ν}, *тогда* 1) *функция* $H_{\Lambda_1}\cdots H_{\Lambda_n}\psi$ *принадлежит классу* $\mathrm{L}^{n}_{k, V^{n}q, A_n}$, 2) *для любой точки* $x_0\in R^{\nu}$ *и* $r>0$ *имеет место оценка*

$$\int_{c\cap S_x(r)=\varnothing}|(D^{m}(H_{\Lambda_{n-1}}\cdots H_{\Lambda_1}\psi))(x_n\cup c)|\,dc\leqslant A_{n+1}\lambda_n(r) \tag{1.17}$$

при $|m|\leqslant k$ *и* $m^{(\alpha)}(x_0)=0$, $\alpha=1, \cdots, \nu$, *где смысл обозначений тот же, что и в* (1.10).

Утверждения этой леммы непосредственно вытекают из следствий 3 и 4.

Введем обозначения: $(x)_n=(x_1, \cdots, x_n)\in(R^{\nu})^{n}$, $(\xi)_n=(\xi_1, \cdots, \xi_n)\in\in(R^{\nu-1})^{n}$, $(\eta)_n=(\eta_1, \cdots, \eta_n)\in(R^{1})^{n}$ и $(x)_n=((\xi)_n, (\eta)_n)$, где $x_i=(\xi_i, \eta_i)$, $i=1, \cdots, n$. Кроме того, для любого единичного вектора $v\in R_v$ положим

$$R^{\nu}_{v}=\{x\in R^{\nu}: \langle x, v\rangle<0\}\ \text{и}\ \omega_v(c)=(H_R, \psi)(c),\ c\in C^{\prime}(R^{\nu}).$$

При доказательстве теоремы 4 нам понадобится также следующая лемма

Лемма 4. *Пусть* $\xi_0=0$, $\xi_1, \cdots, \xi_n\in R^{\nu-1}$, $n=1, 2, \cdots, (k+1)(\nu+2)$, *а* $r=(r_1, \cdots, r_n)$ — *произвольный мультииндекс такой, что* $|r_i|\leqslant k+1$. *Тогда при* $p>\nu+(k+1)^{2}(k+2)(\nu+2)$ *имеет место оценка*

$$\int_{(R^{\nu-1})^{n}}\prod_{i=1}^{n}(1+|\xi_i-\xi_{i-1}|)^{-p}\,|\mathbf{K}_{m, r}((\xi)_n)|\,d(\xi)_n\leqslant\mathbf{K}_1, \tag{1.18}$$

где $K_1=K_1(k)>0$ — *константа, а величина* $K_{m, r}((\xi)_n)$ *равна*

$$\mathbf{K}_{m, r}((\xi)_n)=\sum_{m_i\in\mathfrak{M}(Z_k^{\nu-1}):\,|m_i|=r_i+1,\ i=1, \cdots, n;\ m_1+\cdots+m_n=m}\ \prod_{i=1}^{n}\ \prod_{s\in Z_{+}^{\nu-1}}\frac{\xi_i^{s\cdot m_i(s)}}{m_i!}, \tag{1.19}$$

где $m!=\prod_{s\in Z_{+}^{\nu-1}}m_i(s)!$.

Доказательство. Как легко видеть

$$\int\limits_{(R^\nu-1)_n} \prod_1^n (1+|\xi_l-\xi_{l-1}|)^{-p} |\mathbf{K}_{m,r}((\xi)_n)|\, d(\xi)_n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{m_i \in \mathfrak{M}^r(Z_k):\ |m_i|=r_i+1,\\ i=1,\cdots,n;\ m_1+\cdots+m_n=m}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{m_i!} \int\limits_{(R^\nu-1)^n} \prod_1^n (1+|\xi_l-\xi_{l-1}|)^{-p} \times$$

$$\times \prod_1^n |\xi_l|^{(k+1)(r_l+1)}\, d(\xi)_n. \tag{1.20}$$

С другой стороны

$$\prod_1^n |\xi_l|^{(k+1)(r_l+1)} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n |\xi_l|^{n(k+1)(r_l+1)} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^l |\xi_j-\xi_{j-1}|\right)^{n(k+1)(r_l+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sum_{\substack{t_1,\cdots,t_l>0:\\ t_1+\cdots+t_l=n(k+1)(r_l+1)}} \frac{[n(k+1)(r_l+1)]!}{t_1!\cdot\cdots\cdot t_l!} \prod_{j=1}^l |\xi_j-\xi_{j-1}|^{t_j}.$$

Следовательно

$$\int\limits_{(R^\nu-1)n} \prod_{l=1}^n (1+|\xi_l-\xi_{l-1}|)^{-p} \prod_{i=1}^n |\xi_l|^{(k+1)(r_l+1)} d(\xi)_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sum_{\substack{t_1,\cdots,t_l>0:\\ t_1+\cdots+t_l=n(k+1)(r_l+1)}} \frac{[n(k+1)(r_l+1)]!}{t_1!\cdot\cdots\cdot t_l!} \int\limits_{(R^\nu-1)n} \prod_{j=1}^l (1+|\xi_j-\xi_{j-1}|)^{t_j-p} \times$$

$$\times \prod_{j=l+1}^n (1+|\xi_j-\xi_{j-1}|)^{-p}\, d(\xi)_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{l=1}^n l^{n(k+1)(r_l+1)}\right)\left(\int\limits_{R^\nu-1} (1+|\xi|)^{-\nu}\, d\xi\right)^n < \infty$$

для всех $n=1, 2, \cdots, (k+1)(\nu+2)$, откуда с учетом (1.20) следует оценка (1.18). Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть $\Lambda \subset R^\nu$ — сосуд класса $\mathbf{V}_a^k$, $1 \leqslant k \leqslant \nu$ а ψ — трансляционно-инвариантная, кластерно-$k+1$-гладкая функция из класса $\mathbf{L}^r_{k+1,q,A_a}$, где $p \geqslant \nu + (k+1)^2(k+2)(\nu+2)$, а $q \in \mathbf{N}_p^3$ такая, что ее верхняя грань $\sup\limits_{x \in R^\nu} q(x)$ достаточно мала. Тогда величина $Q(\Lambda, \psi)$ имеет следующее разложение*

$$Q(\Lambda, \psi) = c_0(\psi)|\Lambda| + \sum_{l=1}^k c_l(\Lambda, \psi) + R_k(\Lambda, \psi). \tag{1.21}$$

где $c_0(\psi)$ определено в (1.12), величины $c_l(\Lambda, \psi)$ равны: при $1 \leqslant l \leqslant \nu-1$

$$c_l(\Lambda, \psi)=\frac{1}{\nu-l}\sum_{j=0}^{l-1}\sum_{n=1}^{l-j}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{\substack{m\in\mathfrak{M}_l(Z_k)\\ |m|=j+n}}\int_{\Gamma(\Lambda)}\langle n(x), x\rangle g^j_{n,m}(x, \psi)\times$$

$$\times\left(\prod_s (a_{\Gamma, s}(x))^{m(s)}\right) d\sigma(x), \qquad (1.22)$$

при $l=\nu$

$$c_\nu(\Lambda, \psi)=\ln(L_\nu(\Lambda))\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{n=1}^{\nu-j}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{\substack{m\in\mathfrak{M}_l(Z_k):\\ |m|=j+n}}\int_{\Gamma(\Lambda)}\langle n(x), x\rangle g^j_{n,m}(x)\times$$

$$\times\left(\prod_s (a_{\Gamma, s}(x))^{m(s)}\right) d\sigma(x), \qquad (1.23)$$

где $n(x)$ — *внешняя единичная нормаль к* $\Gamma(\Lambda)$ *в точке* x

$$g^j_{n,m}(x, \psi)=\sum_{|r|=j}\int_{(T_\Gamma(x))^n}(D^r_\eta\ \omega_{n(x)})(x, (\xi)_n, (0)_n)\,\mathbf{K}_{m,r}((\xi)_n)\,d(\xi)_n \qquad (1.24)$$

и, наконец, величина $R_k(\Lambda, \psi)$ *допускает оценку*

$$|R_k(\Lambda, \psi)|\leqslant\begin{cases}B_{10}(q, A_0, a)(L_\Lambda(\Lambda))^{\nu-k-1} & \text{если } k<\nu-1\\ B_{11}(q, A_0\ a)\ln L_\nu(\Lambda) & \text{если } k=\nu-1\\ B_{12}(q, A_0, a) & \text{если } k=\nu,\end{cases} \qquad (1.25)$$

где B_{10}, B_{11}, B_{12} — *положительные константы.*

Замечание 1. Величины $g^j_{n,m}(x; U, \beta, z)$, участвующие в (0.16) и (0.17), равны: $g^j_{n,m}(x; U, \beta, z)=g^j_{n,m}(x, \psi_{z,\beta})$, где $\psi_{z,\beta}$ — функция Урселла, соответствующая потенциалу U (см. введение).

Прежде чем приступить к доказательству самой теоремы сформулируем и покажем несколько вспомогательных лемм. В силу трансляционной инвариантности, впредь, не ограничивая общности, будем считать, что Λ содержит начало координат пространства R^ν, Рассмотрим семейство сосудов $\{\Lambda_L=E_L\,\Lambda_1\colon L\geqslant 1\}$, где E_L — гомотетия пространства R^ν с коэффициентом L, а $\Lambda_1=E_{(L_\nu(\Lambda))^{-1}}\Lambda$.

Лемма 5. *В условиях теоремы* 4 *производная интеграла* $Q(\Lambda_L, \psi)$ *по* L *имеет вид*

$$\frac{d}{dL}Q(\Lambda_L, \psi)=L^{-1}\int_{\Gamma_L}\langle n(x), x\rangle\,\omega_L(x)\ d\sigma_L(x), \qquad (1.26)$$

где $n(x)$ — *внешняя единичная нормаль к границе* $\Gamma(\Lambda)$ *сосуда* Λ, *а* $\omega_L\equiv\omega_{\Lambda_L}$.

Доказательство. Пусть $K_{\Delta L}=\Lambda_{L+\Delta L}\setminus\Lambda_L$, $\Delta L>0$, тогда из (0.27) получим, что

$$Q(\Lambda_{L+\Delta L}, \psi) = \int\limits_{C(K_{\Delta L})} \omega_L(c)\, dc = Q(\Lambda_L, \psi) + \int\limits_{K_{\Delta L}} \omega_L(x)\, dx + R, \quad (1.27)$$

где $R = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \int\limits_{C^n(K_{\Delta L})} \omega_L(c)\, dc$. Но, как легко видеть

$$R = o(\Delta L), \text{ при } \Delta L \to 0. \quad (1.28)$$

Действительно, в силу леммы 2

$$|R| \leqslant A_1 \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_{C^n(K_{\Delta L})} \sum_{\gamma \in W_c} \prod_{|x_i - x_j| \in F(\gamma)} (Vq)(x_1 - x_2)\, dc \leqslant \frac{A_1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} M_1^n |K_{\Delta L}|^n, \quad (1.29)$$

где $M_1 = \sup\limits_{x \in R^\nu} (Vq)(x)$, а $|K_{\Delta L}|$ — ν-мерный объем множества $K_{\Delta L}$, который равен

$$|K_{\Delta L}| = (L + \Delta L)^\nu |\Lambda| - L^\nu |\Lambda| = \nu L^{\nu-1} \Delta L + o(\Delta L), \text{ при } \Delta L \to 0. \quad (1.30)$$

Из (1.29) и (1.30) следует (1.28). Преобразуем теперь второе слагаемое в (1.27), имеем

$$\int\limits_{K_{\Delta L}} \omega_L(x)\, dx = \int\limits_{L}^{L+\Delta L} du \int\limits_{\Gamma_u} \omega_L(x) \langle n(x), x \rangle\, d\sigma_u(x) = \quad (1.31)$$

$$= \Delta L \frac{1}{L} \int\limits_{\Gamma_L} \omega_L(x) \langle n(x), x \rangle\, d\sigma_L(x) + o(\Delta L), \text{ при } \Delta L \to 0.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью подынтегральной функции по u, что следует из непрерывности функции ψ. Таким образом, из (1.31), (1.28) и (1.27) окончательно получаем

$$\frac{d}{dL} Q(\Lambda_L, \psi) = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{1}{\Delta L} [Q(\Lambda_{L+\Delta L}, \psi) - Q(\Lambda_L, \psi)] =$$

$$= L^{-1} \int\limits_{\Gamma_L} \langle n(x), x \rangle\, \omega_L(x)\, d\sigma_L(x),$$

что и требовалось доказать.

Для любых $L \geqslant 1$ и $x \in \Gamma_L$ обозначим

$$\tilde{D}_L(x) = \{\xi \in T_{\Gamma_L}(x): |\xi| < \delta_{\Gamma_1} L^{1/\nu+2}\},$$

где для δ_{Γ_1}, в силу (0.14) и $L_\nu(\Lambda_1) = 1$, имеет место оценка

$$\delta_{\Gamma_1} \geqslant \frac{1}{4a}. \quad (1.32)$$

Положим также

$$\Phi_L(x) = \{\xi,\ \eta) \in R^\nu:\ \xi \in \bar{\mathrm{D}}_L(x),\ 0 < \eta < f_{L,x}(\xi)\},$$

где $f_{L,x} = f_{\Gamma_L,x}$ (см. (0.7)). Заметим, что функции $f_{L,x}$ и $f_{1,x'}$ при $x' = E_L^{-1}(x)$, $x \in \Gamma_L$ связаны соотношением

$$f_{L,x}(\xi) = L\, f_{1,x'}(L^{-1}\xi),\ \xi \in \mathrm{D}_L(x). \tag{1.33}$$

Формула (0.8) для случая $f_{L,x}$ примет вид

$$f_{L,x}(\xi) = p_{L,x}(\xi) + r_{k,L}(\xi,\ x),\ \xi \in \bar{\mathrm{D}}_L(x),$$

где многочлен Тейлора $p_{L,x}(\xi)$ функции $f_{L,x}(\xi)$ равен

$$p_{L,x}(\xi) = \sum_{|s|<k+1} a_{L,s}(x)\cdot\xi^s \tag{1.34}$$

с коэффициентами $a_{L,s}(x) = a_{\Gamma_L,s}(x)$, $x \in \Gamma_L$, введенным в (0.9), а остаточный член $r_{L,k} = r_{\Gamma_L,k}$, в силу (0.11) и (1.33), допускает оценку

$$|r_{L,k}(\xi,\ x)| \leqslant F(k)\, L^{-k-1}|\xi|^{k+2}, \tag{1.35}$$

где $F(k) = F_{\Gamma_1}(\nu,\ k)$. Далее, пусть

$$\mathrm{P}(x) = \{(\xi,\ \eta) \in R^\nu:\ \xi \in T_{\Gamma_L}(x),\ 0 < \eta < p_{L,x}(\xi)\}.$$

Лемма 6. *В предположениях теоремы 4 для функции* $\omega_L(x)$ $x \in \Gamma_L$, $L \geqslant 1$ *имеет место равенство*

$$\omega_L(x) = \sum_{n=0}^{(k+1)(\nu+2)} (-1)^n \int_{C^n(\mathrm{P}(x))} \omega_{n(x)}(x \cup c)\, dc + J(x,\ L,\ k), \tag{1.36}$$

где $n(x)$ *— внешняя единичная нормаль к* Γ_1 *в точке* x, *а слагаемое* $J(x,\ L,\ k)$ *допускает оценку*

$$|J(x,\ L,\ k)| \leqslant BL^{-k-1} \tag{1.37}$$

с константой $B = B(q,\ A_0,\ a) > 0$.

Доказательство. Пользуясь тождеством (0.24), легко показать, что имеет место равенство

$$\omega_L(x) = \int_{C(\Lambda_L'(x))} (-1)^{N(C)}\, \omega_{n(x)}(x \cup c)\, dc, \tag{1.38}$$

где $\Lambda_L'(x) = \bar{K}^\nu_{n\cdot(x)} \setminus \Lambda_L(x)$. Отсюда

$$\omega_L(x) = \int_{C(\Phi_L(x))} (-1)^{N(C)}\, \omega_{n(x)}(x \cup c)\, dc + J_1(x,\ L) \tag{1.39}$$

где $J_1(x,\ L)$ имеет вид

$$J_1(x, L) = \int\limits_{\substack{c \subset \Lambda_L'(x) \\ c \cap \Phi_L'(x) \neq \varnothing}} (-1)^{N(c)}\, \omega_{n(x)}(x \cup c)\, dc$$

и удовлетворяет оценке

$$|J_1(x, L)| \leqslant B_1 L^{-k-1}, \tag{1.4}$$

где $B_1 = B_1(q, A_0, a) > 0$, а $\Phi_L'(x) = \Lambda_L'(x) \setminus \Phi_L(x)$. В самом деле, (1.10) получаем, что

$$|J_1(x, L)| \leqslant A_2 \lambda_2(\delta_{\Gamma_1} L^{\frac{1}{\nu+1}}) \leqslant A_2(1 + \delta_{\Gamma_1} L^{\frac{1}{\nu+2}})^{-p} \int\limits_{R^\nu} (1 + |y|)^p (V^2 q)(y)\, dy,$$

откуда, обозначая последний интеграл (сходящийся в силу $V^2 q \in M_p^+$ через $K_1(q)$ и пользуясь (1.32), находим, что

$$|J_1(x, L)| \leqslant A_2 K_1(q)(4a)^p L^{-\frac{p}{\nu+2}} \leqslant B_1 L^{-k-1}.$$

Пусть, далее, для любых $L \geqslant 1$ и $x \in \Gamma_L$

$$\mathbf{P}_L(x) = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{P}(x): \xi \in \bar{\mathbf{D}}_L(x)\},$$

$$\mathbf{A}_L(x) = \Phi_L(x) \setminus \mathbf{P}_L(x) \text{ и } B_L(x) = \mathbf{P}_L(x) \setminus \Phi_L(x),$$

тогда, так как $\Phi_L(x) = (\mathbf{P}_L(x) \cup \mathbf{A}_L(x)) \setminus \mathbf{B}_L(x)$, то в силу (0.27)

$$\int\limits_{C(\Phi_L(x))} (-1)^{N(c)}\, \omega_{n(x)}(x \cup c)\, dc = \int\limits_{C(\mathbf{P}_L(x) \cup \mathbf{A}_L(x))} (-1)^{N(c)}\, \omega_{n(x)}(x \cup c)\, dc + J_2(x, L). \tag{1.41}$$

где

$$J_2(x, L) = -\int\limits_{C'(\mathbf{B}_L(x))} (-1)^{N(c_1)}\, dc_1 \int\limits_{C(\Phi_L(x))} (-1)^{N(c_2)}\, \omega_{n(x)}(x \cup c_1 \cup c_2)\, dc_2,$$

причем имеет место оценка

$$|J_2(x, L)| \leqslant B_2 L^{-k-1}, \tag{1.42}$$

где $B_2 = B_2(q, A_0, a) > 0$. Действительно, с помощью (0.26) и (0.27) находим, что

$$|J_2(x, L)| \leqslant \int\limits_{C(\mathbf{B}_L(x))} (H_{\Phi_L(x)}\, H_{R^\nu n(x)}\, |\psi|)(x \cup c)\, dc =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{B}_L(x)} dy \int\limits_{C(\mathbf{B}_L(x))} (N(c)+1)^{-1} (H_{\Phi_L(x)}\, H_{R^\nu n(x)}\, |\psi|)(x \cup y \cup c)\, dc \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B_L(x)} (H_{B_L(x) \cup \Phi_L(x)} H_{R^{\nu}_n(x)} |\psi|)(x, y)\, dy,$$

отсюда, пользуясь следствием 3, оценкой (1.35), по аналогии с (1.40) получаем при $p > \nu + k + 1$ оценку (1.42).

Аналогично

$$\int\limits_{C(P_L(x) \cup A_L(x))} (-1)^{N(c)} \omega_n(x)(x \cup c)\, dc = \int\limits_{C(P_L(x))} (-1)^{N(c)} \omega_n(x)(x \cup c)\, dc + J_3(x, L), \tag{1.43}$$

где величина $J_3(x, L)$ равна

$$J_3(x, L) = \int\limits_{C'(A_L(x))} (-1)^{N(C_1)}\, dc_1 \int\limits_{C(P_L(x))} (-1)^{N(C_2)} \omega_n(x)(x \cup c_1 \cup c_2)\, dc_2$$

и удовлетворяет оценке

$$|J_3(x, L)| \leqslant B_3 L^{-k-1} \tag{2.44}$$

с константой $B_3 = B_3(q, A_0, a) > 0$. Таким образом, из (1.39)—(1.44) вытекает равенство

$$\omega_L(x) = \int\limits_{C(P_L(x))} (-1)^{N(c)} \omega_n(x)(x \cup c)\, dc + J_4(x, L), \quad x \in \Gamma_L, \tag{1.45}$$

причем

$$|J_4(x, L)| \leqslant B_4 L^{-k-1}, \tag{1.46}$$

где $B_4 = B_4(q, A_0, a) > 0$. Пусть теперь

$$J_5(x, L, k) = \sum_{n=(k+1)(\nu+2)+1}^{\infty} (-1)^n \int\limits_{C^n(P_L(x))} \omega_n(x)(x \cup c)\, dc, \quad x \in \Gamma_L, \tag{1.47}$$

тогда, учитывая, что

$$|P_L(x)| \leqslant K_2(a) L^{-\frac{1}{\nu+2}}, \tag{1.43}$$

где $|P_L(x)|$ — ν-мерный объем области $P_L(x)$, с помощью леммы 2 получаем, что

$$|J_5(x, L, k)| \leqslant A_1 \sum_{n=(k+1)(\nu+2)+1} \times$$

$$\times \int\limits_{C^n(P_L(x))} \sum_{\tau \in W_c \cup x} \prod_{[x_1, x_2] \in F(\tau)} (Vq)(x_1 - x_2)\, dc \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_1}{2} \sum_{n=(k+1)(\nu+2)+1}^{\infty} M_1^n (n+1) |P_L(x)|^n \leqslant B_5 L^{-k-1}, \tag{1.49}$$

где $M_1 = \sup_{x \in R^\nu} (Vq)(x)$, а $B_5 = B_5(q, A_0, a) > 0$ — константа.

Таким образом, из (1.45) — (1.49) следует равенство

$$\omega_L(x) = \sum_{n=0}^{(k+1)(\nu+2)} (-1)^n \int_{C^n(P_L(x))} \omega_{n(x)}(x \cup c)\, dc + J_6(x, L),\ x \in \Gamma_L,$$

причем

$$|J_6(x, L)| \leqslant B_6 L^{-k-1},$$

где $B_6 = B_6(q, A_0, a)$ — константа.

Отсюда утверждения леммы (1.36) и (1.37) получаются повторением рассуждений, с помощью которых были выше получены (1.39) и (1.40). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть выполнены все условия теоремы* 4, *тогда для функции* $\omega_L(x)$, $x \in \Gamma_L$, $L \geqslant 1$, *имеет место разложение*

$$\omega_L(x) = \sum_{l=0}^{k} \tilde{c}_l(x, \Lambda_L, \psi) + J(x, L, k), \tag{1.50}$$

где величина $J(x, L, k)$ *допускает оценку*

$$|J(x, L, k)| \leqslant B_7 L^{-k-1}, \tag{1.51}$$

а величины $\tilde{c}_l(x, \Lambda_L, \psi)$ *равны*

$$c_0(x, \Lambda_L, \psi) = \int_{C(R^\nu n(x))} \psi(x \cup c)\, dc, \tag{1.52}$$

$$\tilde{c}_l(x, \Lambda_L, \psi) = \sum_{l=0}^{l-1} \sum_{n=1}^{l-j} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\substack{m \in \mathfrak{M}_l(Z_k) \\ |m| = l+n}} \left(\prod_s (a_{L,s}(x))^{m(s)} \right) g^l_{n,m}(x), \tag{1.53}$$

$l = 1, \cdots, k$,

где величина $g^l_{n,m}(x)$ *определена в* (1.24).

Доказательство. Пусть

$$J_n(x, L) = \int_{C_0(P(x))} \omega_{n(x))}(x \cup c)\, dc,\ n = 1, 2, \cdots,$$

тогда, разлагая функцию $\omega_{n(x))}(x, (\xi)_n, (\eta)_n)$ в ряд Тейлора по переменным $(\eta)_n$ в окрестности точки $(x, (\xi)_n, (0)_k)$ и полагая для $n = 1, 2, \cdots$,

$$J_n(x, L, k) = \frac{1}{n!} \sum_{|r| < k} \frac{1}{r!} \int_{(T_\Gamma(x))^n} d(\xi)_n \int_0^{\rho_{L,x}(\xi_1)} d\eta_1 \cdots \int_0^{\rho_{L,x}(\xi_n)} \times$$

$$\times (D_{\eta}^{r}\, \omega_{n\ (x)})\ (x,\ (\xi)_n,\ (0)_n)(\tau_l)_n^r\, d\tau_{ln}$$

и

$$J_n^{\cdot}\ (x,\ L,\ k)=\frac{1}{n!}\sum_{|r|=n+1}\frac{1}{r!}\int\limits_{(T_{\Gamma}(x))n} d\,(\xi)_n \int\limits_0^{p_{L,\,x}(\xi_1)} d\tau_{l_1}\cdots\cdots\int\limits_0^{p_{L,\,x}(\xi_n)}\times$$

$$\times (D_{\eta}^{r}\, \omega_{n\ (x)})(x,\ (\xi)_n,\ \theta\ (\tau_l)_n)\ (\tau_l)_n^r\, d\tau_{ln},$$

где $r=(r_1,\cdots,r_n)$ — мультииндекс, $(\eta)_n^r=\prod\limits_{i=1}^{n}\tau_{li}^{r_i}$, а $\theta\ (\tau_l)_n=(\theta\tau_{l_1},\cdots,\theta\tau_{l_n})$,

в силу (1.36), мы приходим к равенству

$$\omega_L\ (x)=\tilde{c}_0\ (x,\ A_L,\psi)+\sum_{n=1}^{(k+1)(\nu+2)}(-1)^n\ J_n^{\cdot}\ (x,\ L,\ k)+\sum_{n=1}^{(k+1)(\nu+2)}(-1)^n J_n^{\cdot}(x,\ L,\ k). \tag{1.54}$$

Преобразуем первую сумму в (1.54), с этой целью проинтегрируем по переменным $(\tau_l)_n$ в $J_n^{\cdot}(x,\ L,\ k)$

$$J_n^{\cdot}\ (x,\ L,\ k)=\frac{1}{n!}\sum_{|r|<k}\left(\prod_1^n (r_l+1)!\right)^{-1}\int\limits_{(T_{\Gamma}(x))n}\times$$

$$\times (D_{\eta}^{r}\, \omega_{n\ (x)})(x,\ (\xi)_n,\ (0)_n)\prod_1^n (p_{L,\,x}(\xi_i))^{r_l+1}\, d\,(\xi)_n\,. \tag{1.55}$$

С другой стороны из (1.34) нетрудно получить, что

$$\prod_1^n (p_{L,\,x}(\xi_l))^{r_l+1}=\prod_1^n (r_i+1)!\sum_{m\in\mathfrak{M}_l(Z_k):\atop |m|=|r|+n}\left(\prod_s (a_{L,\,s}(x))^{m\ (s)}\right)\mathbf{K}_{m,\,r}((\xi)_n), \tag{1.56}$$

где величина $\mathbf{K}_{m,\,r}((\xi)_n)$ введена в (1.19), или, в силу (1.33), формулу (1.56) можно переписать в виде

$$\prod_1^n (p_{L,\,x}(\xi_i))^{r_i+1}=\prod_1^n (r_i+1)!\sum_{l=|r|+n}^{k(|r|+n)} L^{-l}\sum_{m\in\mathfrak{M}_l(Z_k):\atop |m|=|r|+n}\times$$

$$\times\left(\prod_s (a_{l,\,s}(x'))^{m\ (s)}\right)\mathbf{K}_{m,\,r}((\xi)_n), \tag{1.57}$$

где $x'=E_{L^{-1}}(x)$. Подстановка (1.56) в (1.55) дает

$$\sum_{n=1}^{(k+1)(\nu+2)}(-1)^n\ J_n^{\cdot}\ (x,\ L,\ k)=\sum_{l=1}^{k}\tilde{c}_l\ (x,\ A_L,\ \psi)+\tilde{J}'\ (x,\ L,\ k), \tag{1.58}$$

где величины $\tilde{c}_l$, $l=1,\cdots,k$ определены в (1.53), а слагаемое $\tilde{J}'\ (x,\ L,\ k)$, в силу (1.57), допускает оценку

$$|\tilde{J}'(x, L, k)| \leqslant B_8 L^{-k-1}, \tag{1.59}$$

где $B_8 = B_8(q, A_0, \alpha) > 0$. Для завершения доказательства леммы осталось убедиться, что аналогичная оценка имеет место и для второй суммы в (1.54). С этой целью заметим, что для любых $x_1, x_2 \in R^\nu$

$$(Vq)(x_1 - x_2) \leqslant M_1 (1 + |x_1 - x_2|)^{-p} \leqslant M_1 (1 + |\xi_1 - \xi_2|)^{-p},$$

где $M_1 = \sup_{x \in R^\nu} (1 + |x|)^p (Vq)(x)$, а $x_i = (\xi_i, \eta_i)$, $\xi_i \in R^{\nu-1}$, $\eta_i \in R^1$, $i = 1, 2$.

Отсюда, с помощью лемм 3 и 4, а также формулы (1.57), по аналогии с (1.49), получаем оценку

$$\left| \sum_{n=1}^{(k+1)(\nu+2)} (-1)^n J_n^{\cdot}(x, L, k) \right| \leqslant B_9 L^{-k-1}, \tag{1.60}$$

где $B_9 = B_9(q, A_0, \alpha) > 0$. Таким образом, лемма 7 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Заметим, что в силу (1.57)

$$\tilde{c}_l(x, \Lambda_L, \psi) = L^{-l} \tilde{c}_l(x', \Lambda_1, \psi), \tag{1.61}$$

где $x' = E_{L^{-1}}(x)$. Далее, из (1.26) и (1.50) вытекает соотношение

$$\frac{d}{dL} Q(\Lambda_L, \psi) = \sum_{l=0}^{k} L^{-1} \int_{\Gamma_L} \tilde{c}_l(x, \Lambda_L, \psi) \langle n(x), x \rangle d\sigma_L(x) +$$

$$+ L^{-1} \int_{\Gamma_L} J(x, L, k) \langle n(x), x \rangle d\sigma_L(x),$$

откуда интегрированием по L, с учетом (1.61), получаем

$$Q(\Lambda, \psi) = \int_{\Gamma(\Lambda)} \tilde{c}_0(x, \Lambda_L, \psi) \langle n(x), x \rangle d\sigma(x) + \sum_{l=1}^{k} c_l(\Lambda, \psi) + R_k(\Lambda, \psi), \tag{1.62}$$

где коэффициенты $c_l(\Lambda, \psi)$, $l = 1, \cdots, k$ введены в (1.22) и (1.23), а величина $R_k(\Lambda, \psi)$ равна

$$R_k(\Lambda, \psi) = Q(\Lambda_1, \psi) - \sum_{l=1}^{k} c_l(\Lambda_1, \psi) - \int_{\Gamma_1} \tilde{c}_0(x, \Lambda_1, \psi) \langle n(x), x \rangle d\sigma_1(x) +$$

$$+ \int_1^{\cdot} L^{-1} dL \int_{\Gamma_L} J(x, L, k) \langle n(x), x \rangle d\sigma_L(x).$$

Оценим $R_k(\Lambda, \psi)$ для случая $k = \nu$ (случай $k < \nu$ рассматривается аналогично). Так как $|\Lambda_1| = 1$, то в силу (1.8)

$$|Q(\Lambda_1, \psi)| \leqslant A_1. \tag{1.63}$$

Далее, нетрудно убедиться, пользуясь леммой 4, а также (0.12) и (0.13), в существовании константы $K_2(a)>0$ такой, что

$$|\bar{c}_l(x, \Lambda_1, \psi)| \leqslant K_2(a), \ l=1, \cdots, k.$$

Откуда получаем, что

$$\left|\int_{\Gamma_1} c_l(x, \Lambda_1, \psi)<n(x), x> d\sigma_1(x)\right| \leqslant K_2(a) \left|\int_{\Gamma_1}<n(x), x> d\sigma_1(x)\right| = \nu \cdot K_2(a) \tag{1.64}$$

для всех $l=1, \cdots, \nu$. Здесь в последнем равенстве мы воспользовались формулой Гаусса-Остроградского, согласно которой

$$\int_{\Gamma(\Lambda)}<n(x), x> d\sigma(x) = \nu|\Lambda|,$$

где $\Lambda \subset R^\nu$ — произвольный выпуклый ограниченный сосуд с гладкой границей $\Gamma(\Lambda)$. Таким образом, из (1.63), (1.64) и (1.51) следует, что

$$|R_\nu(\Lambda, \psi)| \leqslant B_{12}(q, A_2, a),$$

где $B_{12}>0$. Остается заметить, что из сравнения (1.62) и (1.13) вытекает, что

$$\int_{\Gamma(\Lambda)} \tilde{c}_0(x, \Lambda, \psi)<n(x), x> d\sigma(x) = c_0(\psi).$$

Теорема доказана.

§ 2. Разложение $(Q\Lambda, \psi)$ для эвклидово-инвариантных, кластерно-гладких функций

В этом параграфе мы докажем утверждения, аналогичные утверждениям теоремы 2, но для величин $c_1(\Lambda, \psi)$ и $c_2(\Lambda, \psi)$, где ψ — эвклидово-инвариантная, кластерно-гладкая функция (теорема 5). Теорема 2 будет непосредственно вытекать из теоремы 5 в силу того, что функция Урселла $\psi_{z,\beta}$, соответствующая эвклидово-инвариантному потенциалу взаимодействия, очевидно, сама обладает тем же свойством.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4, *где условие трансляционной инвариантности заменено более сильным — эвклидовой инвариантностью. Тогда величины* $c_1(\Lambda, \psi)$ *и* $c_2(\Lambda, \psi)$, *введенные в* (1.22) *равны*

$$c_1(\Lambda, \psi) = d_1(\psi)\, S(\Gamma(\Lambda)), \tag{2.1}$$

$$c_2(\Lambda, \psi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu-2}\left[d_2(\psi)\, M(\Gamma(\Lambda)) + \bar{d}_2(\psi)\, \tilde{M}(\Gamma(\Lambda))\right], & \text{если } \nu>2 \\ \dfrac{1}{2}\, d_2(\psi)\, M(\Gamma(\Lambda)) \ln|\Lambda|, & \text{если } \nu=2, \end{cases} \tag{2.2}$$

где

$$d_1(\psi) = -\frac{1}{2}\int\limits_{R^{\nu-1}} \langle \xi, e\rangle^2\, \omega_v(0, \xi)\, d\xi, \tag{2.3}$$

$$d_2(\psi) = \frac{1}{8}\int\limits_{R^{\nu-1}}\int\limits_{R^{\nu-1}} \langle \xi_1, e\rangle^2 \langle \xi_2, e\rangle^2\, \omega_v(0, \xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

$$\bar{d}_2(\psi) = \frac{1}{4}\int\limits_{R^{\nu-1}}\int\limits_{R^{\nu-1}} \langle \xi_1, e_1\rangle^2 \langle \xi_2, e_2\rangle^2\, \omega_v(0, \xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{2.3}$$

а величины M *и* $\bar{M}$ *равны*

$$M(\Gamma(\Lambda)) = \int\limits_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x\rangle \left(\sum_{i=1}^{\nu-1} (\varkappa_\Gamma)_i^2(x)\right) d\sigma(x), \tag{2.6}$$

$$\bar{M}(\Gamma(\Lambda)) = \int\limits_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x\rangle \left(\sum_{1<i<j<\nu-1} (\varkappa_\Gamma)_i(x)(\varkappa_\Gamma)_j(x)\right) d\sigma(x). \tag{2.7}$$

При этом использованы обозначения: $e, v \in R^{\nu-1}$ *— произвольные единичные векторы* $e_1, e_2 \in R^{\nu-1}$ *— произвольная пара ортонормированных векторов (очевидно, интегралы* (2.3), (2.4) *и* (2.5) *не зависят от выбора этих векторов).*

Доказательство. Заметим, что из эвклидовой инвариантности функции ψ следует, что при любом $\Lambda \subset R^\nu$ функция ω_Λ и ее частные производные также обладают этим свойством. Таким образом, величина $g'_{n,m}(x, \psi)$, введенная в (1.24), не зависит от точки $x \in \Gamma(\Lambda)$, поэтому

$$c_1(\Lambda, \psi) = -\frac{1}{\nu-1}\sum_{|s|=2}\frac{1}{s!}\int\limits_{T_\Gamma(x)} \omega_{n(x)}(x, \xi)\, \xi^s\, d\xi \cdot \int\limits_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x\rangle f^{(s)}_{\Gamma, x}(0)\, d\sigma(x).$$

Отсюда, ввиду того, что оси $\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{\nu-1}$ направлены по главным направлениям поверхности $\Gamma(\Lambda)$ в точке x, получаем, что

$$c_1(\Lambda, \psi) = -\frac{1}{2(\nu-2)}\sum_{i=1}^{\nu-1}\int\limits_{T_\Gamma(x)} \omega_{n(x)}(x, \xi)(\xi^{(i)})^2\, d\xi \cdot \int\limits_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x\rangle (\varkappa_\Gamma)_i(x)\, d\sigma(x) =$$

$$= d_1(\psi)\,\frac{1}{\nu-1}\int\limits_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x\rangle \left(\sum_{i=1}^{\nu-1} (\varkappa_\Gamma)_i(x)\right) d\sigma(x).$$

Теперь заметим, что согласно формуле Минковского для площади поверхности выпуклого тела с достаточно гладкой границей при $\nu \geqslant 2$ имеем

$$\frac{1}{\nu-2}\int\limits_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x\rangle \left(\sum_{i=1}^{\nu-1} (\varkappa_\Gamma)_i(x)\right) d\sigma(x) = S(\Gamma(\Lambda)),$$

что и заканчивает доказательство (2.1). Установим теперь справедливость (2.2). Пусть $\nu > 2$, тогда

$$c_2(\Lambda, \psi) = \frac{1}{\nu-2}\Big\{ - \sum_{|s|=3} \frac{1}{s!} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x\rangle f^{(s)}_{\Gamma, x}(0)\, d\sigma(x) \times$$

$$\times \int_{T_{\Gamma}(x)} \omega_{n(x)}(x, \xi)\, \xi^s\, d\xi + \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2;\ |s_1|=|s_2|=2} \frac{1}{s_1!\ s_2!} \times$$

$$\times \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x\rangle f^{(s_1)}_{\Gamma, x}(0)\, f^{(s_2)}_{\Gamma, x}(0)\, d\sigma(x) \times$$

$$\times \int_{T^{\vee}_{\Gamma}(x)} \int_{T^{\wedge}_{\Gamma}(x)} \omega_{n(x)}(x, \xi_1, \xi_2)\, \xi_1^2\, \xi_2^2\, d\xi_1\, d\xi_2 -$$

$$- \sum_{s_1, s_2;\ |s_1|=|s_2|=2} \frac{1}{s_1!\ s_2!} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x\rangle f^{(s_1)}_{\Gamma, x}(0)\, f^{(s_2)}_{\Gamma, x}(0)\, d\sigma(x) \times$$

$$\times \int_{T_{\Gamma}(x)} (D_{\eta}\, \omega_{n(x)})(x, \xi)\, \xi^{s_1+s_2}\, d\xi \Big\}.$$

С другой стороны, из эвклидовой инвариантности функции ψ, как легко видеть, вытекают соотношения

$$\int_{T_{\Gamma}(x)} \omega_{n(x)}(x, \xi)\, \xi^s\, d\xi = 0 \text{ при } |s| = 3 \text{ и } D_{\eta}\, \omega_{\tau(x)}(x, \xi) = 0.$$

Следовательно

$$c_2(\Lambda, \psi) = \frac{1}{8(\nu-2)} \sum_{i, j=1}^{\nu-1} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x\rangle (\varkappa_{\Gamma})_i(x)(\varkappa_{\Gamma})_j(x)\, d\sigma(x) \times$$

$$\times \int_{T^{\vee}_{\Gamma}(x)} \int_{T^{\wedge}_{\Gamma}(x)} \omega_{n(x)}(x, \xi_1, \xi_2)(\xi_1^{(i)})^2\ (\xi_2^{(j)})^2\, d\xi_1\, d\xi_2 = \frac{1}{4(\nu-2)} M(\Gamma(\Lambda)) \times$$

$$\times \int_{T^{\vee}_{\Gamma}(x)} \int_{T^{\wedge}_{\Gamma}(x)} \omega_{n(x)}(x, \xi_1, \xi_2) \langle e, \xi_1\rangle \cdots \langle e, \xi_2\rangle^2\, d\xi_1 d\xi_2 + \frac{1}{8(\nu-2)} \bar{M}(\Gamma(\Lambda)) \times$$

$$\times \int_{T^{\vee}_{\Gamma}(x)} \int_{T^{\wedge}_{\Gamma}(x)} \omega_{n(x)}(x, \xi_1, \xi_2) \langle e_1, \xi_1\rangle \cdots \langle e_2, \xi_2\rangle \cdots d\xi_1\, d\xi_2,$$

Аналогичным образом устанавливается справедливость соотношения (2.2) в случае $\nu = 2$. Теорема доказана.

Приложение

Здесь мы приведем доказательство леммы 1. Пусть M есть пространство всех суммируемых и ограниченных функций на $[0, \infty)$, и пусть M_p — банахово пространство функций на R^{ν}, представимых в виде $f(x) = \bar{f}(|x|)(1+|x|)^{-p}$, $x \in R^{\nu}$, $\bar{f} \in M$, с нормой

$$\|f\| = \max\left\{ \sup_{x\in R^\nu} |f(x)|, \int_{R^\nu} |f(x)|\,dx \right\} f \in M_p.$$

Для любого $q \in M_p$ через A_q обозначим оператор, действующий в пространстве M_p по формуле

$$(A_q f)(x) = \int_{R^\nu} f(x)\, q(x-y)\, dy.$$

Нетрудно убедиться, что при любом $q \in M_p$, A_q является линейным, ограниченным оператором, причем

$$\|A_q\| \leqslant \|q\|. \tag{1}$$

Уравнение (1.1) теперь можно записать в виде следующего операторного уравнения:

$$(E - A_q) f = q,$$

где E—единичный оператор. В силу (1) при $\|q\| < 1$ оператор $E - A_q$ имеет обратный $(E - A_q)^{-1}$, так что для завершения доказательства достаточно заметить, что $M_p^+ \subset M_p$ и $A_q(M_p^+) \subset M_p^+$ при любом $q \in M_p^+$.

В заключение приношу глубокую благодарность Р. А. Минлосу за постановку задачи и внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.IX.1977

Ս. Կ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ. Ստատիստիկ գումարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկ վերլուծությունը *(ամփոփում)*

Սահմանափակ ուռուցիկ $\Lambda \subset R^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ տիրույթում գտնվող միանման մասնիկների կոնֆիգուրացիոն անընդհատ սիստեմի դեպքում ստացված է այդ սիստեմի ստատիստիկ գումարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկ վերլուծությունը։

S. K. POGOSIAN. *The asymptotical expansion of the partition function logarithm* (Summary)

For the case of continious configurational system of idenfical particals in the convex bounded region the asymtotic expansion of the partition function logarithm is obtained

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Рюэль.* Статистическая механика. Строгие результаты, Изд. „Мир", 1971.
2. *Р. А. Минлос, С. К. Погосян.* Оценки функций Урселла, групповых функций и их производных. Теоретическая и математическая физика, 31, № 2, 1977.
3. *Р. А. Минлос.* Лекции по статистической физике, УМН, 23, 139, 1968.
4. *В. Бляшке.* Круг и шар, Изд. „Наука", 1967.

5. *Р. Л. Добрушин*. Асимптотическое поведение гиббсовских распределений для решетчатых систем в зависимости от формы сосуда, Теоретическая и математическая физика, 12, № 1, 1972.
6. *M. E. Fisher* and *G. Caginalp*. Wall and Boundery Free Energies 1. Feromagnetic Scalar Spin Systems (препринт).

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Մ. Ջրբաշյան. *Մի անվերջ արտադրյալի մասին* 177
Ռ. Ա. Ալեքսանդրյան, Ռ. Զ. Մկրտչյան. *Անվերջ բազմապատիկությամբ սպեկտրով ինքնահամալուծ օպերատորի սեփական էլեմենտների լրիվության հայտանիշ* . . 209
Ի. Գ. Խաչատրյան. *Բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար ձևափոխության օպերատորների մասին* 215
Ս. Կ. Պողոսյան. *Ներատիստիկ գումարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկ վերլուծությունը* 238

СОДЕРЖАНИЕ

М. М. Джрбашян. Об одном бесконечном произведении 177
Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. Критерий полноты системы собственных элементов самосопряженного оператора с бесконечнократным спектром . 209
И. Г. Хачатрян. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков 215
С. К. Погосян. Асимптотическое разложение логарифма статистической суммы 238

CONTENTS

M. M. Jrbashian. On a certain infinite product 177
R. A. Alexandrian, R. S. Mcrtchian. A completeness criterium for a system of eigenelements of a selfadjained operator with spectrum possessing infinite multiplicities 209
I. G. Khachatrian On the transformation operators for high order differential equations 215
S. K. Pogosian. The asimptotical expasion of the partition function logarithm 238