ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1966 г.
Выходит 6 раз в год.

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typesscript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenian, SSR
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian, SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

Б. Л. ГОЛИНСКИЙ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ МНОГОЧЛЕНЫ С ОБОБЩЕННЫМ ЯКОБИЕВЫМ ВЕСОМ

Пусть $\{p_n(x)\}_0^\infty$ — ортогональные многочлены (о.н.м.) на отрезке $[-1,1]$ с весом $p(x)$ — неотрицательной суммируемой на отрезке $[-1,1]$ не эквивалентной нулю функцией, а $\{q_n(x)\}_0^\infty$ — о.н.м. на отрезке $[-1,1]$ с весом $q(x)=(1-x^2)\,p(x)$. Обозначим $\varphi(\theta)=p(\cos\theta)|\sin\theta|$. Очевидно, $\varphi(\theta)$ — неотрицательная, не эквивалентная нулю суммируемая 2π-периодическая четная функция. Примем ее за вес, а соответствующие о.н.м. на единичной окружности обозначим через $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$, так что имеют место соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(e^{i\theta})\,\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\,\varphi(\theta)\,d\theta=\delta_{nm}, \tag{1}$$

$$\varphi_n(z)=\varkappa_n z^n+\cdots;\ \varkappa_n>0,\ n=0,1,2,\cdots.$$

О.н.м. $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$ выражаются через о.н.м. $\{p_n(x)\}_0^\infty$ по известным формулам (см. [1], стр. 301):

$$\varphi_{2n}(e^{i\theta})=\frac{1}{2}e^{in\theta}\{\lambda_n p_n(\cos\theta)+i\mu_n q_{n-1}(\cos\theta)\sin\theta\},$$

$$\varphi_{2n-1}(e^{i\theta})=\frac{1}{2}e^{i(n-1)\theta}\{\mu_n p_n(\cos\theta)+i\lambda_n q_{n-1}(\cos\theta)\sin\theta\},$$

где

$$\lambda_n=\sqrt{2\pi}\sqrt{1+a_{2n-1}},\ \mu_n=\sqrt{2\pi}\sqrt{1-a_{2n-1}},\ a_n=\frac{\varphi_{n+1}(0)}{\varkappa_{n+1}}. \tag{2}$$

Обозначим через $\Phi(\theta)$ обобщенный якобиев вес

$$\Phi(\theta)=H(\theta)\prod_{k=1}^{p}|e^{i\theta}-e^{i\theta_k}|^{2\alpha_k}=2^{\sum\limits_{k=1}^{p}\alpha_k}H(\theta)\prod_{k=1}^{p}(1-\cos(\theta-\theta_k))^{\alpha_k}, \tag{2}$$

$$-\infty<\theta<\infty,\ 2\pi m\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_p<2\pi(m+1),\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots,2\alpha_k>-1,$$

$0<H(\theta)$ — 2π-периодическая непрерывная на всей оси функция класс $C_{2\pi}$), удовлетворяющая условию регулярности А. Зигмунда: $\frac{\omega(t,H)}{t}\in L_1(0,\pi)$, $\omega(\delta,H)$ — модуль непрерывности функции $H(\theta)$.

Класс таких функций будем обозначать через $Z_{2\pi}$. Введем пространство $L_{s,\varphi}(0,2\pi)$ и норму в нем:

$$\|f\|_{s,\varphi} \equiv \|f\|_{L_{s,\varphi}(0,2\pi)} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^s \varphi(t)\, dt\right\}^{\frac{1}{s}} < \infty,\ 1 \leqslant s < \infty,$$

$L_{s,1}(0,2\pi) \equiv L_s(0,2\pi)$, $\|f\|_{s,1} \equiv \|f\|_s$; $L_{1,1}(0,2\pi) \equiv L_1(0,2\pi)$, $L_\infty(0,2\pi) \equiv C_{2\pi}$.

Для $f(\theta) \in C_{2\pi}$

$$\|f\|_\infty \equiv \|f\| = \operatorname*{Max}_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |f(\theta)|,\ \omega(\delta, f) = \operatorname*{Max}_{|h| \leqslant \delta} \|f(\theta+h) - f(\theta)\|.$$

О.н.м. на единичной окружности, соответствующие весу $\varphi_\alpha(\theta) = (1-\cos\theta)^\alpha$, обозначим $\{\varphi_{\alpha,n}(e^{i\theta})\}_{n=0}^{\infty}$. При доказательстве леммы-2 настоящей заметки мы воспользовались методом Г. Сегё (см. [2], стр. 75). Этот метод был применен Т. Фреем (см. [3], теорема 4.1) и В. М. Бадковым (см. [4], лемма 1.3). В настоящей работе доказана теорема, позволяющая получить оценки сверху для модулей ортонормальных многочленов, соответствующих весу (3) при $\theta_k - \varepsilon_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_k + \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $k = \overline{1,p}$.

Лемма 1. *Пусть вес* $\varphi(\theta) = (1-\cos\theta)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+\cos\theta)^{\beta+\frac{1}{2}}$. *Тогда для соответствующих о.н.м. на единичной окружности имеем для всех* $n \geqslant 2$

$$|\varphi_{2n-1}^{(\alpha,\beta)}(e^{i\theta})|,\ |\varphi_{2n}^{(\alpha,\beta)}(e^{i\theta})| \leqslant C_1\, u_{n,-\alpha-\frac{1}{2}}(\theta)\, u_{n,-\beta-\frac{1}{2}}(\pi-\theta), \tag{4}$$

где

$$u_{n,\gamma}(\theta) = (\sqrt{1-\cos\theta} + n^{-1})^\gamma,$$

C_1 здесь, в дальнейшем $C_2, C_3, \cdots$ — различные положительные постоянные.

Доказательство. Для веса $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ о.н.м. Якоби удовлетворяют неравенствам (см. [5]):

$$|\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(x)| \leqslant C_2(\alpha,\beta)(\sqrt{1-x}+n^{-1})^{-\alpha-\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x}+n^{-1})^{-\beta-\frac{1}{2}},$$

$$\alpha, \beta > -1,\ n \geqslant 1. \tag{5}$$

Перейдем к о.н.м. Якоби $\{\varphi_n^{(\alpha,\beta)}(e^{i\theta})\}_0^\infty$. По формулам (2) имеем

$$\varphi_{2n}(e^{i\theta}) \equiv \varphi_{2n}^{(\alpha,\beta)}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} e^{in\theta}\, [\lambda_n\, \hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) + i\mu_n\, \hat{p}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos\theta)\sin\theta], \tag{6_1}$$

$$\varphi_{2n-1}(e^{i\theta}) \equiv \varphi_{2n-1}^{(\alpha,\beta)}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} e^{i(n-1)\theta}[\mu_n\, \hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) + i\lambda_n\, \hat{p}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos\theta)\sin\theta]. \tag{6_2}$$

Так как вес $\varphi(\theta)$, рассмотренный в настоящей лемме, положителен (за исключением отдельных точек), то по известной теореме (см. [5], стр. 160) для соответствующих параметров $\{a_n^{(\alpha,\beta)}\}_0^\infty$ имеем

$$|a_n^{(\alpha,\beta)}|<1, \ n=0, 1, 2, \cdots.$$

Поэтому для $|\lambda_n|$ и $|\mu_n|$ в (6_1) и (6_2) имеем

$$|\lambda_n|, |\mu_n|<2\sqrt{\pi}, \ n=1, 2, \cdots.$$

Кроме сказанного, имеем очевидные неравенства

$$\frac{1}{2}\left(\lambda_0+\frac{1}{n-1}\right)<\lambda_0+\frac{1}{n-1}<2\left(\lambda_0+\frac{1}{n}\right)(n\geqslant 2, \lambda_0\geqslant 0). \tag{7}$$

К тому же

$$|\sin\theta|<(\sqrt{1-\cos\theta}+(n-1)^{-1})(\sqrt{1+\cos\theta}+(n-1)^{-1})\ (n>1).$$

Применяя (5), (6) и (7) для $\lambda_0=\sqrt{1-\cos\theta}$, получим (4).

Лемма 2. *Если* $\varphi(\theta)=\varphi_\alpha(\theta)H(\theta)$, *где* $0<H(\theta)\in Z_{2\pi}$, $\varphi_\alpha(\theta)=2^{-\alpha}|e^{i\theta}-1|^{2\alpha}=(1-\cos\theta)^\alpha$, $2\alpha>-1$, *то при всех* $\theta\in[0, 2\pi]$ *и* $n\geqslant 2$

$$|\varphi_n(e^{i\theta})|\leqslant C_3\, u_{n,-\alpha}(\theta). \tag{8}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в случае $H(\theta)\equiv 1$ лемма 2 является частным случаем леммы 1. В случае $\alpha=0$: $\varphi(\theta)\equiv H(\theta)$, $u_{n,0}(\theta)=1$. Известно ([6]), что при $0<\varphi(\theta)\in Z_{2\pi}$ имеем равномерно для $\theta\in[0, 2\pi]$:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^*(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1-0}\pi(re^{i\theta})=\pi(e^{i\theta});\ \varphi_n^*(z)=z^n\,\overline{\varphi_n\left(\frac{1}{\bar z}\right)},$$

$$\pi(z)=\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}S_z(t)\,l_\varphi(t)\,dt\right\},\ z=re^{i\theta},\ S_z(t)=\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z},\ l_\varphi(t)\equiv\ln\varphi(t).$$

Так как (см. [5], стр. 25) $|\pi(e^{i\theta})|^2\leqslant H_0^{-1}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $H_0=\operatorname*{Min}_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}H(\theta)$, то $|\varphi_{0,n}(e^{i\theta})|\leqslant C_3$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Рассмотрим случай, когда $\alpha\neq 0$. В силу леммы 1 имеем для о.н.м., соответствующих весу $\varphi_\alpha(\theta)$, оценку

$$|\varphi_{\alpha,n}(e^{i\theta})|\leqslant C_4\, u_{n,-\alpha}(\theta). \tag{9}$$

Выразим о.н.м. $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$, соответствующие весу $\varphi(\theta)$, через о.н.м. $\{\varphi_{\alpha,k}(e^{i\theta})\}_{k=0}^n$, соответствующие весу $\varphi_\alpha(\theta)$. Легко убедиться в том, что

$$\varphi_n(e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(e^{it})\sum_{k=0}^n\overline{\varphi_{\alpha,k}(e^{it})}\,\varphi_{\alpha,k}(e^{i\theta})\,\varphi_\alpha(t)\,dt=$$

$$=\varphi_{\alpha,n}(e^{i\theta})\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(e^{it})\,\overline{\varphi_{\alpha,n}(e^{it})}\varphi_\alpha(t)\,dt+H^{-1}(\theta)\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(e^{it})\,K_{n-1}\times$$

$$\times (e^{i\theta},\ e^{it}\cdot \varphi_\alpha)[H(\theta)-H(t)]\,\varphi_\alpha(t)\,dt.$$

Обозначим $\underset{\theta\in[0,2\pi]}{\mathrm{Max}}\,|\varphi_n(e^{i\theta})|\,u_{n,\alpha}(\theta)=\rho_n$, а экстремальную точку $\theta_0=\theta(n)\in$ $\in[0,2\pi]$. Очевидно достаточно доказать, что $\rho_n\leqslant C_3$. Имеем

$$\rho_n\leqslant C_5 J_1+C_6 J_2, \tag{10}$$

где

$$J_1=\int_0^{2\pi}|\varphi_n(e^{it})|\,|\varphi_{\alpha,n}(e^{it})|\,\varphi_\alpha(t)\,dt,\ J_2=u_{n,\alpha}(\theta_0)\int_0^{2\pi}|\varphi_n(e^{it})|\,|K_{n-1}(e^{i\theta_0},e^{it};\varphi_\alpha)|\times$$

$$\times|H(\theta_0)-H(t)|\,\varphi_\alpha(t)\,dt,$$

$$K_n(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_n(z)\,\overline{\varphi_k(\zeta)},\ |z|\leqslant 1,\ |\zeta|\leqslant 1,$$

$$J_1=\|\varphi_n\,\varphi_{\alpha,n}\,\varphi_\alpha\|_1=\|\varphi_n\sqrt{\varphi_\alpha}\,\varphi_{\alpha,n}\sqrt{\varphi_\alpha}\|_1\leqslant\|\varphi_n\sqrt{\varphi_\alpha}\|_2=\left\|\varphi_n\sqrt{\varphi}\,\frac{1}{H}\right\|_2\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{1}{\sqrt{H}}\right\|\leqslant C_7. \tag{11}$$

Введем множества $e=[\theta_0-\delta,\ \theta_0+\delta]$, $\delta<\pi$ и $e'=[\theta_0-\pi,\ \theta+\pi]\setminus e$. Интеграл в (10) возьмем по отрезку $[\theta_0-\pi,\ \theta_0+\pi]$ и разложим его на два по e и e', обозначив соответствующие интегралы через $J_2^{(0)}$ и J_2'. Известна формула Кристоффеля—Дарбу ([1], стр. 300)

$$K_{n-1}(e^{it},\ e^{i\theta};\ \varphi)=e^{i\theta}\,\frac{\varphi_n^*(e^{it})\,\overline{\varphi_n^*(e^{i\theta})}-\varphi_n(e^{it})\,\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}}{e^{i\theta}-e^{it}}\ (\theta\neq t).$$

Применим ее для $\varphi(\theta)\equiv\varphi_\alpha(\theta)$ в оценке J_2'. Имеем для $t\in e'$:

$$|e^{i\theta_0}-e^{it}|=2\left|\sin\frac{t-\theta_0}{2}\right|\geqslant\frac{2}{\pi}\,\delta.$$

Учитывая это, а также то, что $|H(\theta)-H(\theta_0)|\leqslant C_8$ $(0\leqslant\theta_0,\ \theta\leqslant 2\pi)$, получим

$$J_2'\leqslant C_9(\delta)\int_{e'}|\varphi_n(e^{it})|\sqrt{\varphi(t)}\,|\varphi_{\alpha,n}(e^{it})|\sqrt{\varphi_\alpha(t)}\,|\varphi_{\alpha,n}(e^{i\theta_0})|\,u_{n,\alpha}(\theta_0)\frac{dt}{\sqrt{H(t)}}. \tag{12}$$

Применяя (9) и рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых получена оценка (11), будем иметь

$$J_2'\leqslant C_{10}(\delta)\,\|\varphi_n\sqrt{\varphi}\|_2\left\|\frac{1}{H}\right\|\leqslant C_{11}(\delta). \tag{13}$$

Рассмотрим интеграл $J_2^{(0)}$. Имеем

$$J_2^{(0)}\leqslant\int_{e_0}|\varphi_n(e^{it})|\,u_{n,\alpha}(\theta_0)\,|K_{n-1}(e^{i\theta_0},\ e^{it};\ \varphi_\alpha)|\,\omega(|t-\theta_0|)\,\varphi_\alpha(t)\,dt. \tag{14}$$

Для оценки правой части (14) рассмотрим раздельно два случая:

(I) случай: $\alpha > 0$. Имеем $\sqrt{\varphi_\alpha(t)} \leqslant u_{n,\alpha}(t)$. Как и прежде, применим формулу Кристоффеля-Дарбу и учтем, что для $t \in e_0$: $|t-\theta_0| \leqslant \pi$ и

$$|e^{it} - e^{i\theta_0}| = 2\left|\sin\frac{t-\theta_0}{2}\right| \geqslant \frac{2}{\pi}|t-\theta_0|.$$

Поэтому

$$J_2^{(0)} \leqslant 2\int_{e_0} |\varphi_n(e^{it})|\, u_{n,\alpha}(t)\, |\varphi_{\alpha,n}(e^{it})| \sqrt{\varphi_\alpha(t)}\, u_{n,\alpha}(\theta_0)\, |\varphi_{\alpha,n}(e^{i\theta})| \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\varphi_\alpha(t)}}{u_{n,\alpha}(t)} \frac{\omega(|t-\theta_0|)}{|t-\theta_0|}\, dt.$$

Применим оценку (9). После этого получим

$$J_2^{(0)} \leqslant C_{12}\rho_n \int_0^\delta \frac{\omega(t, H)}{t}\, dt. \tag{15}$$

Выберем δ так, чтобы

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t, H)}{t}\, dt \leqslant (2C_{12})^{-1}. \tag{16}$$

Объединяя (15), (16), (13), (11) и (10), легко убедиться, что

$$\rho_n \leqslant C_3.$$

(II) случай: $-1 < 2\alpha < 0$. Имеем

$$J_2^{(0)} \leqslant \int_{e_0} |\varphi_n(e^{it})|\, u_{n,\alpha}(t)|\, K_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{it}; \varphi_\alpha)|\, \omega(|t-\theta_0|) \frac{u_{n,\alpha}(\theta_0)}{u_{n,\alpha}(t)} \varphi_\alpha(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \rho_n \int_{e_0} |K_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{it}; \varphi_\alpha)|\omega(|t-\theta_0|) \frac{u_{n,\alpha}(\theta_0)}{u_{n,\alpha}(t)} \varphi_\alpha(t)\, \omega(|t-\theta_0|)\, dt.$$

Применим теперь рассуждения В. М. Бадкова (см. [4]). Докажем сначала, что

$$\left[\frac{1}{2}\left|\sin\frac{t-\theta}{2}\right| + n^{-1}\right] |K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)| \leqslant C_{13}\, u_{n,\alpha}(\theta)\, u_{n,\alpha}(t). \tag{17}$$

Для этого достаточно доказать, что неравенству (17) (с различными постоянными) будут удовлетворять

$$\frac{1}{2}\left|\sin\frac{t-\theta}{2}\right| |K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)| \text{ и } n^{-1}|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)|.$$

Первое вытекает из формулы Кристоффеля-Дарбу и оценки (9).

Применяя ту же оценку, будем иметь

$$n^{-1}|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)| \leqslant C_{14}\, n^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| + \right.\right.$$

$$+k^{-1}\Big)^{-\alpha}\left(\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|+k^{-1}\right)^{-\alpha}\Big\}.$$

Воспользуемся неравенством

$$(b+c)^{-\alpha}\leqslant b^{-\alpha}+c^{-\alpha}\ (0<-\alpha\leqslant 1);\ b,\ c>0:$$

После чего получим

$$n^{-1}\,|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)|\leqslant C_{15}\,n^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{-\alpha}+k^{\alpha}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^{-\alpha}+k^{\alpha}\right)\right\}\leqslant C_{15}\left\{2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{-\alpha}+\right.$$

$$\left.+2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^{-\alpha}n^{\alpha}+2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{-\alpha}n^{\alpha}+n^{2\alpha}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\left\{\left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{-\alpha}+n^{\alpha}\right)\left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^{-\alpha}+n^{\alpha}\right)\right\}. \tag{18}$$

К правой части (18) применим неравенство

$$b^{-\alpha}+c^{-\alpha}\leqslant C_{16}(\alpha)\,(b+c)^{-\alpha}.$$

Это даст, что

$$n^{-1}\,|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)|\leqslant C_{17}(\alpha)\left[\sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|+n^{-1}\right]^{-\alpha}\times$$

$$\times\left[\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\right|+n^{-1}\Big]^{-\alpha}.$$

Поэтому

$$n^{-1}\,|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)|\leqslant C_{18}(\alpha)\,u_{n,-\alpha}(\theta)\,u_{n,-\alpha}(t),$$

что и требовалось доказать. Применим (17), тогда

$$\int_{e_0}|K_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{it}; \varphi_\alpha)|\ \omega(|t-\theta_0|)\ \frac{u_{n-1}(\theta_0)}{u_{n-1}(t)}\,\varphi_\alpha(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C_{18}\int_{e_0}(1-\cos t)^{\alpha}\,u_{n-1,\,2\alpha}(t)\ \frac{\omega(|t-\theta_0|)\,dt}{\frac{1}{2}\left|\sin\frac{t-\theta_0}{2}\right|+n^{-1}}. \tag{19}$$

Интеграл в правой части (19) разложим на два: $J_{1,0}$ и $J_{2,0}$ соответственно по множествам $e_1=e_0\cap\{t\colon t>(n-1)^{-1}\}$ и $e_2=e_0\setminus e_1$. Поскольку $x^{\alpha}\uparrow$ $(x>0,\ \alpha>0)$, то для $t\in e_1$ имеем

$$u_{n-1,\,-2\alpha}(t)\leqslant\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\,t\right)^{-2\alpha}\leqslant C_{19}(\alpha)\,t^{-2\alpha}$$

и

$$J_{1,0} \leqslant \rho_n C_{20}(\alpha) \int\limits_{e_1} \frac{\omega(|t-\theta_0|)\,dt}{\frac{\pi}{2}|t-\theta_0|+(n-1)^{-1}} \leqslant \rho_n C_{21}(\alpha) \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t, H)}{t}\,dt.$$

Для $t \in e_2$: $t < (n-1)^{-1}$ и $u_{n-1,\,-2\alpha}(t) \leqslant C_{22}(n-1)^{2\alpha}$.

Поэтому

$$J_{2,0} \leqslant \rho_n C_{23}(\alpha)(n-1)^{2\alpha+1}\omega(\delta, H) \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha} dt \leqslant \rho_n C_{24}(\alpha)\,\omega(\delta, H).$$

Итак, в случае (II)

$$J_2^{(0)} \leqslant \rho_n \left\{ C_{24}(\alpha)\,\omega(\delta, H) + C_{21}(\alpha) \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t, H)}{t}\,dt \right\},$$

но

$$\omega(\delta, H) \leqslant 2(\ln 2)^{-1} \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t, H)}{t}\,dt.$$

Поэтому

$$J_2^{(0)} \leqslant \rho_n C_{25}(\alpha) \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t, H)}{t}\,dt.$$

Теперь выберем δ из условия, чтобы

$$\int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t, H)}{t}\,dt \leqslant (2C_6 C_{25}(\alpha))^{-1}.$$

Исходя из (10) и (13), получим $\rho_n \leqslant C_{26}$. Лемма 2 полностью доказана.

Лемма 3. (см. [6]). Пусть $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ — два веса, $h(\theta) = \psi(\theta)/\varphi(\theta)$. Тогда найдутся такие натуральные числа N и N_1, что для произвольного многочлена $\pi_N(z)$ с $\pi_N(a) \neq 0$ ($|a| = 1$) имеет место неравенство

$$|\pi_N(a)\,\varphi_n(a)| \leqslant \sum_{\nu=n-N_1}^{n+N} |\psi_\nu(a)|\,\|\psi_\nu \overline{\pi_N} h\|_{2,\psi} +$$

$$+ \|K_{n-N_1-1}(a, z; \psi)\,\pi_{N_1}(z)\,[U(\theta) - U(\alpha)]\|_{2,\psi}, \qquad (20)$$

где

$$U(\theta) = \overline{\pi_N(z)}\,[\pi_{N_1}(z)]^{-1} h(\theta), \quad z = e^{i\theta}, \quad a = e^{i\alpha}.$$

Лемма 4. *Пусть*

$$\varphi(\theta)=H(\theta)\prod_{j=1}^{p}|z-z_j|^{2\alpha_j},\quad \psi(\theta)=H(\theta)\,|z-z_k|^{2\alpha_k},\quad z_j=e^{i\theta_j},\ 2\alpha_j>-1,$$

$$-\infty<\theta<\infty,\ 2\pi m<\theta_1<\theta_2<\cdots\theta_p<2\pi(m+1),\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,$$

$$0<H(\theta)\in C_{2\pi}. \tag{21}$$

Тогда для $\theta_k-\varepsilon_1\leqslant\theta\leqslant\theta_k+\varepsilon_2$ ($[\theta_k-\varepsilon_1,\ \theta_k+\varepsilon_2]$ *не содержит точек, сравнимых по модулю* 2π *с точками* $\theta_j\neq\theta_k$) *имеем*

$$|\varphi_n(e^{i\theta})|\leqslant C_{27}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\sum_{\nu=n-N_1}^{n+N}|\psi_\nu(e^{i\theta})|\ \ (n\geqslant n_0>2), \tag{22}$$

где $N_1=n_1+\cdots+n_{k-1}+n_{k+1}+\cdots+n_p$, $N_2=m_1+\cdots+m_{k-1}+m_{k+1}+\cdots+m_p$, $N=N_1+N_2$,

n_j, m_j — *неотрицательные числа такие, что* $n_j-2\alpha_j\geqslant1$, $n_j+m_j-\alpha_j\geqslant0$, $j=\overline{1,p}$, $\{\psi_\nu(e^{i\theta})\}_0^\infty$ — *о.н.м., соответствующие весу* $\psi(\theta)$.

Доказательство. Введем многочлены

$$\pi_{N_1}(z)=\prod_{j=1}^{p}{}'(z-z_j)^{n_j},\ \pi_{N_2}(z)=\prod_{j=1}^{p}{}'(z-z_j)^{m_j},\ \pi_N(z)=\pi_{N_1}(z)\,\pi_{N_2}(z).$$

Очевидно

$$\overline{\pi_N(z)}=\prod_{j=1}^{p}{}'(e^{-i\theta}-e^{-i\theta_j})^{n_j+m_j}=(-1)^N\prod_{j=1}^{p}{}'(e^{i\theta}-e^{i\theta_j})^{n_j+m_j}\,e^{-iN\theta}\varepsilon,$$

где

$$\varepsilon=e^{-\sum_{j=1}^{p}{}'(m_j+n_j)\theta_j},\quad |\pi_{N_1}(z)|^{-1}=\prod_{j=1}^{p}{}'(e^{i\theta}-e^{i\theta_j})^{-n_j},\ h(\theta)=$$

$$=\prod_{j=1}^{p}{}'|e^{i\theta}-e^{i\theta_j}|^{-2\alpha_j}.$$

Штрих означает, что отсутствует множитель в произведении или слагаемое в сумме, соответствующие значению $j=k$.

По определению

$$U(\theta)=\overline{\pi_N(z)}\,|\pi_{N_1}(z)|^{-1}h(\theta)=(-1)^N e^{-iN\theta}\prod_{j=1}^{p}{}'(e^{i\theta}-e^{i\theta_j})^{m_j}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{p}{}'|e^{i\theta}-e^{i\theta_j}|^{-2\alpha_j}\varepsilon.$$

Так как

$$\prod_{j=1}^{p}{}'(e^{i\theta}-e^{i\theta_j})^{m_j}=2^{N_2}e^{\frac{i}{2}\left[(\pi+\theta)N_2+\sum_{j=1}^{p}{}'m_j\theta_j\right]}\prod_{j=1}^{p}{}'\left(\sin\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)^{m_j},$$

$$\prod_{j=1}^{p}{}' |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{-2\alpha_j} = 2^{-2\sum_{j=1}^{p}{}' \alpha_j} \prod_{j=1}^{p}{}' \left| \sin \frac{\theta - \theta_j}{2} \right|^{-2\alpha_j},$$

то

$$U(\theta) = (-1)^N 2^{N_1 - 2\sum_{j=1}^{p}{}' \alpha_j} e^{-iN\theta + \frac{i}{2}\left[N_2 (\pi + \theta) + \sum_{j=1}^{p}{}' m_j \theta_j \right]} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{p}{}' \left(\sin \frac{\theta - \theta_j}{2} \right)^{n_j} \prod_{j=1}^{p}{}' \left| \sin \frac{\theta - \theta_j}{2} \right|^{-2\alpha_j} \varepsilon.$$

Выберем n_j так, чтобы $n_j - 2\alpha_j > 1$, $j = \overline{1, p}$. Тогда $|U'(\theta)| \leqslant C_{28}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Считая, что θ и $\alpha \in [0, \pi]$ или $\theta, \alpha \in [\pi, 2\pi]$, будем иметь по формуле Лагранжа и неравенству для $\sin \theta$:

$$|U(\theta) - U(\alpha)| \leqslant 2C_{28} \left| \frac{\theta - \alpha}{2} \right| < \pi C_{28} \left| \sin \frac{\theta - \alpha}{2} \right|. \tag{23}$$

На случай, когда $\theta \in [0, \pi]$, $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ или $\theta \in [\pi, 2\pi]$, $\alpha \in [0, \pi]$, оценка (23) получается путем введения промежуточной точки $\theta = \pi$. Итак, можно считать, что

$$|U(\theta) - U(\alpha)| \left| \sin \frac{\theta - \alpha}{2} \right|^{-1} \leqslant C_{29};\ \theta, \alpha \in [0, 2\pi]. \tag{24}$$

То же будет для $\theta, \alpha \in [2\pi m, 2\pi(m+1)]$, $m = \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Применяя формулу Кристоффеля-Дарбу, получим

$$|K_n(e^{i\theta}, e^{i\alpha}, \psi)| \left| \sin \frac{\theta - \alpha}{2} \right| \leqslant |\varphi_{n+1}(e^{i\theta})| \, |\varphi_{n+1}(e^{i\alpha})|. \tag{25}$$

Так как $|\pi_{N_1}(z)| \leqslant C_{30}$ $(2\pi m \leqslant \theta \leqslant 2\pi(m+1))$, то в силу (24) и (25) второе слагаемое в (20) будет меньше, чем

$$C_{31} |\varphi_{n-N_1}(e^{i\alpha})| \, \|\varphi_{n-N_1}(e^{i\theta}) \pi_{N_1}(e^{i\theta})\|_{2, \psi} =$$

$$= C_{31} |\varphi_{n-N_1}(e^{i\alpha})| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_{n-N_1}(e^{i\theta})|^2 \psi(\theta) \, |\pi_{N_1}(e^{i\theta})|^2 \prod_{j=1}^{p} |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{2\alpha_j} d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $2n_j + 2\alpha_j > 0$, то

$$|\pi_{N_1}(e^{i\theta})|^2 \prod_{j=1}^{p}{}' |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{2\alpha_j} \leqslant C_{32}$$

и второе слагаемое правой части (20) меньше, чем $C_{33} |\varphi_{n-N_1}(e^{i\theta})|$. Займемся первым слагаемым правой части (20).

Имеем

$$|\pi_N(e^{i\theta})| = 2^N \prod_{j=1}^{p}{}' \left| \sin \frac{\theta - \theta_j}{2} \right|^{n_j + m_j},$$

$$\|\psi_\nu \bar{\pi}_N h\|_{2,\psi} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi_\nu (e^{i\theta})|^2 |\pi_N (e^{i\theta})|^2 h^2 (\theta) \psi (\theta) d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Но

$$|\pi_N (e^{i\theta})|^2 h^2 (\theta) = 2^{4N-4\sum\limits_{j=1}^{p}{}' \alpha_j} \prod_{j=1}^{p}{}' \left| \sin \frac{\theta - \theta_j}{2} \right|^{2 (n_j + m_j - 2\alpha_j)}.$$

Выберем m_j так, чтобы $n_j + m_j - 2\alpha_j \geqslant 0$. Тогда $|\pi_N (e^{i\theta})|^2 h^2 (\theta) \leqslant C_{34}$. Итак

$$\|\psi_\nu \bar{\pi}_N h\|_{2,\psi} \leqslant C_{34} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi_\nu (e^{i\theta})|^2 \psi (\theta) d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} = C_{34}.$$

Поскольку $|\pi_N (e^{i\theta})| \geqslant C_{35} (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ при $\theta_k - \varepsilon_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_k + \varepsilon_2$, то тем самым лемма 4 доказана.

Теорема. *Пусть вес*

$$\Phi (\theta) = H(\theta) \prod_{j=1}^{p} |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{2\alpha_j}, \ 0 < H (\theta) \in Z_{2\pi}, \ -1 < 2\alpha_j, \ j = \overline{1, p},$$

$$- \infty < \theta < \infty, \ 2\pi m \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_p < 2\pi (m+1), \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Тогда на всяком отрезке $[\theta_k - \varepsilon_1, \theta_k + \varepsilon_2]$, *не содержащем точек, сравнимых по модулю* 2π *с особыми точками* $\theta_j \neq \theta_k$, *имеем для всех* $n \geqslant 2$ *оценки*

$$|\Phi_n (e^{i\theta})| \leqslant C_{36} (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \{ \sqrt{1 - \cos (\theta - \theta_k)} + n^{-1} \}^{-\alpha_k}. \tag{26}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим $n \geqslant n_0 + 1$, где $n_0 = \operatorname{Max} \{N, 2N_1\}$*. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\theta_k = 0$, $\alpha_k = \alpha$. Положим $\psi (\theta) = H (\theta)(1 - \cos \theta)^\alpha$. Тогда по лемме 2

$$|\psi_\nu (e^{i\theta})| \leqslant C_{37} (\lambda_\theta + \nu^{-1})^{-\alpha}, \ \nu \geqslant 2. \tag{27}$$

Применим лемму 4 и оценим слагаемые с индексами $\nu = n + L$, где $L = \overline{0, N}$. Поскольку $\lambda_\theta + (n + L)^{-1} < \lambda_\theta + n^{-1}$, то при $\alpha > 0$ имеем

$$[\lambda_\theta + (n + L)^{-1}]^\alpha < (\lambda_\theta + n^{-1})^\alpha. \tag{28$_1$}$$

Так как $\lambda_\theta + (n + L)^{-1} > \frac{1}{2} (\lambda_\theta + n^{-1})$ при $n > N$, то

$$[\lambda_\theta + (n + L)^{-1}]^{-\alpha} < 2^\alpha (\lambda_\theta + n^{-1})^{-\alpha}. \tag{28$_2$}$$

Оценим слагаемые с индексами $\nu = n - l$, $l = \overline{1, N_1}$. Имеем $\lambda_\theta + (n - l)^{-1} > \lambda_\theta + n^{-1}$. Поэтому

---

* Натуральные числа N и N_1 определены в лемме 4.

$$[\lambda_0 + (n-l)^{-1}]^{-\alpha} < [\lambda_0 + n^{-1}]^{-\alpha}. \tag{28_3}$$

Так как $\lambda_0 + (n-l)^{-1} < 2(\lambda_0 + n^{-1})$, то при $\alpha > 0$, $n \geqslant 2N_1$ имеем

$$|\lambda_0 + (n-l)^{-1}|^{\alpha} < 2^{\alpha} (\lambda_0 + n^{-1})^{\alpha}. \tag{28_4}$$

Для $0 < n \leqslant n_0$ многочлены $|\Phi_n(e^{i\theta})|_0^{n_0}$ ограничены и поэтому можно считать, что неравенство (26) с соответствующей постоянной C_{36} имеет место и для $n \leqslant n_0$.

Применяя лемму 4 и оценки $(28_1)-(28_4)$, получим оценку (26). Тем самым теорема полностью доказана.

Замечание 1. *В случае $H(\theta) \in \text{Lip}\, 1$ ($: f(\theta) \in \text{Lip}\, \alpha$, если $f(\theta) \in C_{2\pi}$ и $\omega(\delta, f) = O(\delta^{\alpha})$, $0 < \alpha \leqslant 1$) теорема является следствием леммы 33.2 из [3], которую автор, однако, не доказывает, сообщая лишь в общих чертах идею доказательства.*

Замечание 2. *Развивая метод П. К. Суетина (см. [8]), Н. П. Кривоногов (см. [9]) получил оценку сверху для $|\Phi_n(e^{i\theta})|$ и $|\Phi_n(e^{i\theta_k})|$, для случая, когда $\alpha_k > 0$ $(k = \overline{1, p})$, а $0 < H(\theta) \in \text{Lip}\, \alpha$ с $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.*

Замечание 3. *Аналог леммы 2 для о.н.м. на отрезке [—1,1] был доказан впервые В. М. Бадковым (см. [4], лемма 1.3). Для его доказательства приходится рассматривать два случая: когда точка, где достигается*

$$\max_{|x| \leqslant 1} \left| p_n(x) \left(\sqrt{1-x} + n^{-1}\right)^{\alpha + \frac{1}{2}} \left(\sqrt{1+x} + n^{-1}\right)^{\beta + \frac{1}{2}} \right|$$

совпадает с концом отрезка [—1,1] и когда она лежит внутри него. Рассмотрение этих случаев (особенно второго) связано со значительными техническими трудностями и применением новых теорем по теории ортогональных многочленов на отрезке [—1,1] (формулы Полларда и др.). Переход к о.н.м. на единичной окружности освобождает нас от необходимости рассмотрения положения экстремальной точки и тем самым делает доказательство леммы 2 технически значительно проще, чем леммы 1.3 из [4]. Теорема настоящей работы, доказательство которой основано на леммах 1—4, является аналогом теоремы 1.1 из [4] и ее доказательство проще, так как здесь не требуется аналога леммы 1.4 из [4], необходимой для случая многочленов, ортонормальных на отрезке [—1,1] и доказываемой технически весьма сложно.

Однако не только этим обусловлена, как нам кажется, важность доказанной теоремы: переход от о.н.м. на отрезке к о.н.м. на единичной окружности с помощью формул (2) возможен только для четных весов. Для произвольного веса требуется самостоятельное доказательство, что и сделано в настоящей работе.

Замечание 4. *Для случая, когда $H(\theta) \in \text{Lip}\, 1$, $H(\theta)$, $H^{-1}(\theta) \in L_1(0, 2\pi)$, $H(\theta_0) > 0$, $p = 1$ и $\alpha_1 = \alpha > 0$ известно (см. [10]), что* *оценка* (26) *для* $\theta=\theta_0$ *точная. Легко доказать точность этой оценки и для* $2\alpha>-1$. *Думается, что это будет так и в нашем случае, когда* $\Phi(\theta)$ *вида* (3), *однако доказать это нам не удалось.*

Харьковский авиационный
институт

Поступила 5.XI.1976

Բ. Լ. ԳՈԼԻՆՍԿԻ. Միավոր շրջանագծի վրա օրթոգոնալ բազմանդամներ ընդհանրացված Յակոբիի կշռով (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցված է, որ եթե $\Phi(\theta)$ *կշիռը ունի հետևյալ տեսքը*

$$\Phi(\theta)=H(\theta)\prod_{j=1}^{p}|e^{i\theta}-e^{i\theta_j}|^{2\alpha_j},\ j=\overline{1,p},\ -\infty<\theta<\alpha,$$

$$2\pi m\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta p<2\pi(m+1),\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots;\ 0<H(\theta)\in Z_{2\pi}$$

$$(:H(\theta)\in C_{2\pi},\ \omega(t,H)\,t^{-1}\in L_1(0,\pi),$$

ապա յուրաքանչյուր $[\theta_k-\varepsilon_1,\ \theta_k+\varepsilon_2]$ *հատվածի վրա* $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2>0)$, *որը չի պարունակում կետեր (համեմատելի* 2π *մոդուլով* $\theta_j\neq\theta_k$ *եզակի կետերի հետ), ունենք բոլոր* $n>1$ *համար հետևյալ գնահատականներ համապատասխան օրթոգոնալ բազմանդամների համար*

$$|\Phi_n(e^{i\theta})|\leqslant C_{36}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\{\sqrt{1-\cos(\theta-\theta_k)}+n^{-1}\}^{-\alpha k}.$$

B. L. GOLINSKII. *Orthogonal polynomials on the unit cyrcle with the generalized Jacoby weight* (summary)

The main result of the paper is as follous.
If the weight is of the form

$$\Phi(\theta)=H(\theta)\prod_{j=1}^{p}|e^{i\theta}-e^{i\theta_j}|^{2\alpha_j},\ j=\overline{1,\ p,}\ -\infty<\theta<\infty,$$

$$2\pi m\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_p<2\pi(m+1),\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots;\ 0<H(\theta)\in Z_{2\pi}$$

$$(:H(\theta)\in C_{2\pi},\ \frac{\omega(t,H)}{t}\in L_1(0,\pi),$$

then on every closed interval $[\theta_k-\varepsilon_1,\ \theta_k+\varepsilon_2]$, $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2>0$, which contains no special points $\theta_j\neq\theta_k$ the modulus of the appropriate orthonormal polynomials has the estimate

$$|\Phi_n(e^{i\theta})|\leqslant C_{36}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\{\sqrt{1-\cos(\theta-\theta_k)}+n^{-1}\}^{-\alpha k}$$

volid for every $n>1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Сеге.* Ортогональные многочлены, М., Физматгиз, 1962.
2. *У. Гренандер, Г. Сеге.* Теплицевы формы и их приложения, ИЛ, М., 1961.
3. *T. Frey.* Publ. math., 7, № 1—4, 1960, 320—352.

4. *В. М. Бадков.* Сходимость в среднем и почти всюду рядов Фурье по многочленам, ортогональным на отрезке, Матем. сб., 95 (137), № 2 (10), 1974, 229—262.

5. *Я. Л. Геронимус.* Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, Физматгиз, М., 1958.

6. *В. М. Бадков.* Об ограниченности в среднем ортонормированных многочленов, Мат. заметки, 13, № 5, 1973, 759—770.

7. *Б. Л. Голинский.* Уточнения асимптотических формул Г. Сеге и С. Н. Бернштейна, Изв. вузов, Математика, № 11 (78), 1968, 70—82.

8. *П. К. Суетин.* Некоторые свойства многочленов, ортогональных на сегменте Сиб. математ. журнал, 10, № 3, 1969, 653—670.

9. *Н. П. Кривоногов.* Некоторые оценки для ортогональных многочленов в случае алгебраических нулей весовой функции, Применение функционального анализа в теории приближений, Калининский госуниверситет, в. 3, 1974, 44—50.

10. *Б. Л. Голинский.* О проблеме В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов, Мат. заметки, 15, № 1, 1974, 21—32.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

А. Ю. ШАХВЕРДЯН

О ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОСОБОМ МНОЖЕСТВЕ ЕМКОСТИ НУЛЬ

Говорим, что функция $u(x)$, определенная в области D конечной комплексной плоскости обобщенно непрерывна в D, если в каждой точке D $u(x)$ имеет конечный или бесконечный предел, совпадающий со значением функции в этой точке. Если E компакт из D, то говорим, что $u \in H_{E,D}$ (или просто H_E, когда D фиксирована), если u гармонична в $D \setminus E$, обобщенно непрерывна в D и множество неустранимых особенностей u в D совпадает с E; в дальнейшем, если это не оговорено, $E \neq \varnothing$. Логарифмическая емкость E обозначается cap (E). Отметим, что для произвольного компакта E непустоту H_E обеспечивают теорема М. В. Келдыша о существовании равномерно непрерывного потенциала ([1]) и теорема Эванса—Сельберга ([2], стр. 75).

Согласно теореме Р. Неванлинны—Д. Линдеберга ([3], стр. 142) из наших определений вытекает, что если $u \in H_E$ и u ограничена в окрестности E, то cap $(E)>0$. В работах Е. П. Долженко и Л. Карлесона (см. [4—6]) полностью исследован вопрос о связи степени гладкости ограниченной функции $u \in H_E$ и хаусдорфовой размерности компакта E. Здесь мы рассматриваем этот же вопрос для случая гармонических функций двух действительных переменных и cap $(E)=0$, причем, что естественно (см. лемму 2), мерой гладкости функции $u \in H_E$ мы считаем скорость роста ее вблизи особого множества E.

Нам будут необходимы следующие обозначения и определения Расстояние между точкой x и множеством E обозначаем $\rho(x, E)$ $C(x, r)$ есть круг с центром x радиуса r. Для $r>0$ рассматриваем множества $D_r = \{x \in D | \rho(x, E) \geqslant r\}$. Если функция u определена и непрерывна вблизи E, то

$$M(r; u) = \max \{|u(x)| \, | x \in \partial D_r\}, \quad m(r; u) = \min \{|u(x)| \, | x \in \partial D_r\}.$$

Пусть

$$d_E(r) = \sup \{\rho(\xi, D_r) | \xi \in E\}.$$

Если α — действительное число, то обозначаем для краткости $l_\alpha(r) = \left(\log \frac{1}{r}\right)^\alpha$, $l_1(r) = l(r)$. Если $h(r)>0$ — ограниченная функция на $(0, 1]$, $\delta>0$, то $h(E; \delta) = \inf \left\{\sum_k h(r_k) | r_k < \delta\right\}$, где нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям E кругами радиусов r_ε. Конечное или бесконечное число $h(E, +0) = h(E)$ есть h-мера Хаусдорфа множества E. Для заданного компакта E и функции σ, $0 < \sigma(\eta) \leqslant \eta$ $\lim\limits_{\eta \to +\infty} \sigma(\eta) = +\infty$ вводим две измеряющие неотрицательные функции

$$h_\sigma^{(1)}(r) = \frac{\sigma(l(r))}{\log \frac{1}{d_E(r)}}, \quad h_\sigma^{(2)}(r) = \sup\left\{\frac{k\sigma(\eta) - l(r)}{\eta - l(r)} \,\middle|\, \eta \geqslant l(d_E^{-1}(r))\right\},$$

где $k = \text{const} > 0$ уточняется дальше. Конечную вполне аддитивную функцию множества μ, заданную на борелевских подмножествах плоскости, $\operatorname{supp}(\mu) = E$ называем распределением массы на E и обозначаем: $\mu(x, r) = \mu(C(x, r))$. Соответствующий логарифмический потенциал обозначаем u_E^μ или просто u^μ:

$$u^\mu(x) = \int\limits_E \log \frac{1}{|\xi - x|}\, d\mu(\xi).$$

Лемма 1. *Пусть E — непустое компактное множество диаметра < 1, μ — распределение массы на E с потенциалом u^μ. Тогда*

1°. *если* $M(r; u^\mu) \leqslant \sigma(l(r))$, *то* $h_\sigma^{(1)}(E) > 0$;

2°. *если* $\sigma(l(r)) \leqslant m(r; u^\mu)$, *то* $h_\sigma^{(2)}(E) \leqslant 5$;

3°. *если* $\sigma(l(r)) = o(m(r; u^\mu))$, *то* $h_\sigma^{(2)}(E) = 0$;

Доказательство. 1°. Так как $\operatorname{diam}(E) < 1$, то для каждой точки $x \in E^c$, достаточно близкой к E $(\rho(x, E) \leqslant 1 - \operatorname{diam}(E))$, функция $\psi(\xi) = -\log|x - \xi|$ $(\xi \in E)$ неотрицательна, и неравенство Чебышева

$$\mu(\psi \geqslant c) \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_E \psi\, d\mu \quad (c > 0) \tag{1}$$

дает нам

$$\mu(x, r) \leqslant [l(r)]^{-1} \cdot u^\mu(x), \ 0 < r \leqslant 1.$$

Если зафиксировать $\xi \in E$ и выбрать $x_\xi \in D_r$ так, что $\rho(\xi, D_r) = |x_\xi - \xi|$, то

$$C(\xi, r) \subset C(x_\xi, 2\rho(\xi, D_r)) \subset C(x_\xi, 2d_E(r))$$

и из предыдущего неравенства вытекает

$$\mu(r, \xi) \leqslant [l(2d_E(r))]^{-1} \cdot M(r; u^\mu).$$

Если $0 < r \leqslant d_E^{-1}(1/4)$, то $\log d_E(r) \geqslant 2 \log 2d_E(r)$ и, следовательно для каждого $\xi \in E$ и каждого такого r

$$\mu(r, \xi) \leqslant 2\,[l(d_E(r))]^{-1} \cdot \sigma(l(r)).$$

Теперь ясно, что для каждого круга C_r радиуса r, $0 < r \leqslant d_E^{-1}(1/4)$ выполнено $\mu(C_r) \leqslant 2h_\sigma^{(1)}(2r)$. Если применить теорему 1 из [6] (стр. 14), то нетрудно убедиться, что $h_\varphi^{(1)}(E)>0$ (в нужной нам части цитируемой теоремы не используются ни монотонность, ни непрерывность измеряющей функции).

2°. Нам удобно сперва рассмотреть случай $\mu(E)=1$.

Если $r>0$ и $x\in D_r$ фиксированы, то из неравенства Чебышева (1), примененного к функции $\psi(\xi)=\log r^{-1}\cdot|x-\xi|$ вытекает

$$1-\mu(x,t)\leqslant\frac{1}{\log\frac{t}{r}}\int\limits_E\log\frac{|\xi-x|}{r}\,d\mu(\xi),\ t\geqslant r,$$

и после простых преобразований будем иметь $\forall r>0\forall x\in\partial D_r\forall t\geqslant r$

$$\mu(x,t)\geqslant\frac{m(r;u^\mu)+\log t}{\log\frac{t}{r}}. \tag{2}$$

Пусть теперь $\xi\in E$ и $t>0$ фиксированы, а $r_t=d^{-1}(t)$, $0<r_t\leqslant t$. Если r, $0<r\leqslant r_t$ произвольно, то $d(r)\leqslant t$ и, следовательно, $\rho(\xi,D_r)\leqslant t$; это означает, что для этих значений r $D_r\cap C(\xi,t)\neq\varnothing$. Так как $\forall x\in C(\xi,t)$ справедливо $C(\xi,2t)\supset C(x,t)$ и, следовательно, $\mu(\xi,2t)\geqslant\mu(x,t)$, то выбирая $x\in\partial D_r\cap C(\xi,t)$ и учитывая (2) и условия леммы будем иметь $\forall r$, $0<r\leqslant r_t$

$$\mu(\xi,2t)\geqslant\frac{\sigma(l(r))-l(t)}{l(r)-l(t)} \tag{3}$$

для каждого $t>0$ и $\xi\in E$. Для того чтобы освободиться от ограничения $\mu(E)=1$ достаточно рассмотреть функцию ν: $\nu(e)=[\mu(E)]^{-1}\times\mu(e)$, где e — борелевское множество.

Тогда

$$\nu(E)=\int\limits_E d\nu \text{ и } \nu(E)=1$$

и нетрудно видеть, что (3) в общем случае записывается в виде

$$k\mu(\xi,2t)\geqslant\frac{k\sigma(l(r))-l(t)}{l(r)-l(t)},$$

где $\xi\in E$, $t>0$, $0<r\leqslant r_t$ — любые, а $k>0$ — конечная постоянная, $k=\mu(E)^{-1}$. То есть $\forall\xi\in E\ \forall t>0$ верно неравенство $k\mu(\xi,2t)\geqslant h_\varphi^{(2)}(t)$. Если теперь $\delta>0$ — произвольное фиксированное число, то, очевидно, $E\subset\bigcup\limits_{\xi\in E}C(\xi,\delta)$ и, согласно общей лемме Л. Альфорса о покрытиях, можно указать не более чем счетное (в данном случае конечное) число кругов $C_n=C(\xi_n,\delta)$, образующих в совокупности покрытие множества E с кратностью не превосходящей некоторой абсолютной постоянной N ($N\leqslant5$; см. [3], стр. 148). Тогда

$$h_\sigma^{(2)}(E,\ \delta/2) \leqslant \sum_n h_\sigma^{(2)}\ (\delta/2) < k\cdot \sum_n \mu\,(C_n) \leqslant 5\,k\mu\,(E) = 5,$$

и устремив $\delta \to +0$, будем иметь нужный результат.

3°. Если $n \geqslant 1$ — фиксированное натуральное число, то согласно условию найдется $r_n > 0$ так, что $\forall r,\ 0 < r \leqslant r_n\ m\,(r;\ u^*) \geqslant n\cdot\sigma\,(l\,(r))$ и из 2° вытекает, что $\forall n \geqslant 1\quad h_{n\sigma}^{(2)}\,(E) \leqslant 5$. Если

$$f_\sigma\,(r,\ \eta) = \frac{k\sigma\,(\eta) - l\,(r)}{\eta - l\,(r)}\,,$$

то $f_{n\sigma} \geqslant n\cdot f_\sigma$, следовательно и $h_{n\sigma}^{(2)} \geqslant n\cdot h_\sigma^{(2)}$, откуда и получим, что $\forall n \geqslant 1,\ \ h_\sigma^{(2)}\,(E) \leqslant 5/n$, что и означает, что $h_\sigma^{(2}\,(E) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* cap $(E) = 0$ *и* $u \in H_E$, *то существует потенциал Эванса-Сельберга множества* E u^μ *так, что в некоторой окрестности* E $|u| = u^\mu + O\,(1)$.

Доказательство. Если предположить, что в некоторой точке $\xi_0 \in E$ $|u\,(\xi_0)| < \infty$, то в силу непрерывности $|u|$ найдется окрестность $C_0 \subset D$ точки ξ_0 такая, что $|u\,(x)| \leqslant 2\,|u\,(\xi_0)|$ для $x \in C_0$, и если рассмотреть сужение функции u в C_0/E, то согласно теореме Р. Неванлинны — Д. Линдеберга u гармонически продолжится в ξ_0, что противоречит условию леммы. Следовательно, $|u| = +\infty$ в каждой точке $\xi \in E$, и если ввести в рассмотрение множества $E_+ = \{\xi \in E | u\,(\xi) = +\infty\}$, $E_- = \{\xi \in E | u\,(\xi) = -\infty\}$, то легко заметить, что $|u|$ супергармонична в некоторой окрестности множества E. Но тогда согласно теореме Ф. Рисса ([2], стр. 48) в некоторой области D', $E \subset D' \Subset D$ $|u\,(x)|$ представляется в виде

$$|u\,(x)| = \int_{D'} \log \frac{1}{|\xi - x|}\,d\mu\,(\xi) + v\,(x)\quad (x \in D'),$$

где $0 < \mu\,(D') < \infty$, а $v\,(x)$ гармонична в D'. Вследствие того, что $|u|$ гармонична в D'/E, представляющая мера сосредоточена на E, то есть в D': $|u| = u_E^\mu + v$ и u_E^μ есть потенциал Эванса-Сельберга множества E. Лемма доказана.

В следующей теореме $\omega\,(\delta;\ u) = \omega\,(\delta;\ u;\ D)$ означает модуль непрерывности функции u, соответствующий хордальной метрике

$$[a,\ b] = \frac{|a - b|}{\sqrt{1 + |a|^2}\ \sqrt{1 + |b|^2}}$$

a, b — точки плоскости) на сфере Римана.

Теорема 1. *Пусть* $u \in H_E$ *и* cap $(E) = 0$. *Тогда*:

1°. *если* $M(r;\ u) = O\,(\sigma\,(l\,(r)))$, *то* $h_\sigma^{(1)}\,(E) > 0$;

2°. *если* $\sigma\,(l\,(r)) = O\,(m\,(r;\ u))$, *то* $h_\sigma^{(2)}\,(E) < \infty$

и если $\sigma\,(l\,(r)) = o\,(m(\,r;\ u))$, *то* $h_\sigma^{(2)}\,(E) = 0$;

3°. *если* $\omega(\delta; u) = O([\sigma(l(\delta))]^{-1})$, *то* $h_\sigma^{(2)}(E) < \infty$,

и если $\omega(\delta; u) = o([\sigma(l(\delta))]^{-1}$, *то* $h_\sigma^{(2)}(E) = 0$.

Доказательство. 1°. Так как $\mathrm{cap}(E)=0$, то E вполне разрывно и, следовательно, если $r_0 > 0$ достаточно мало, то найдется некоторая компонента связности D_0 области $D^c_{r_0}$ так, что $\mathrm{diam}(D_0) < 1$. Если рассмотреть сужение функции u на область D_0, то согласно лемме 2 найдется некоторый потенциал u^μ с носителем массы в $E \cap D_0$ так, что $|u| = u^\mu + O(1)$ в некоторой подобласти D_0, содержащей $E \cap D_0$. Тогда для всех достаточно малых $r > 0$ $M(r; u^\mu) = O(\sigma(l(r)))$ и из леммы 1 вытекает, что $h_\sigma^{(1)}(E \cap D_0) > 0$ и, если учесть, что $d_E \leqslant d_{E \cap D_0}$, то и $h_\sigma^{(1)}(E) > 0$.

2°. Согласно лемме 2 в некоторой окрестности компакта E $|u| = u^\mu + O(1)$, $\mathrm{supp}(\mu) = E$ и нужные неравенства вытекают из пунктов 2° и 3° леммы 1, так как условие $\mathrm{diam}(E) < 1$ при их доказательстве не использовалось.

3°. Имеем

$$\omega(\delta; u) \geqslant \sup\{[u(x), u(y)] \mid |x-y| \leqslant \delta,\ x \in E^c \cap D,\ y \in E\}$$

или

$$2\omega(\delta; u) \geqslant \sup\{|u(x)|^{-1} \mid x \in D \cap D^c_\delta\}.$$

Из принципа минимума для супергармонических функций и леммы 2 вытекает, что правая часть последнего неравенства совпадает с $m(\delta; u)$, то есть $m(\delta; u) \leqslant 2\omega(\delta; u)$ для всех достаточно малых $\delta > 0$ и требуемые неравенства вытекают из леммы 1. Теорема доказана.

Пусть E — компактное множество емкости 0 и $p(r) \geqslant 0$ — невозрастающая функция на $(0,1]$. Скажем, что функция $u \in H(p(r))$, если u обобщенно непрерывна в некоторой области $D \supset E$, гармонична в $D \setminus E$ и $M(r, u) = 0(p(r))$. Говорим, что E есть устранимое множество для $H(p(r))$, если каждая функция из $H(p(r))$ гармонична на E. Следующая теорема для множеств логарифмической меры 0 усиливает соответствующий классический результат ([6], стр. 96).

Теорема 2. *Если* $h(E)=0$, *для* $h(r) = |\log d_E(r)|^{-1} \cdot p(r)$, *то множество* E *устранимо для класса* $H(p(r))$.

Доказательство. Допустим обратное, что существует непустой компакт $E_1 \subseteq E$ такой, что $H_{E_1} \neq \varnothing$ и пусть $u \in H_{E_1}$. Если положить

$$\sigma(l(r)) = -h(r)\log d_E(r)$$

и учесть, что $d_{E_1}(r) \leqslant d_E(r)$ и $M_1(r; u) \leqslant M(r; u)$, где M_1 — соответствующая величина для E_1, то понятно, что

$$M_1(r; u) = O(\sigma(l(r))).$$

Согласно теореме Линдеберга $\mathrm{cap}(E) = 0$, и мы имеем возможность применить теорему 1, из которой вытекает, что $h_\sigma^{(1)}(E_1) > 0$. Но так как $h_\sigma^{(1)}(r) \equiv h(r)$ и $E_1 \subseteq E$, то $h(E) > 0$, что противоречит нашим условиям. Теорема доказана.

В соответствии с определением пористого множества, введенного Е. П. Долженко ([7], стр. 158), будем называть множество E равномерно пористым, если $d_E(r) = O(r)$. Если $E \neq \varnothing$, $E \subset D$, $0 < \alpha < 1$, то $H_E^{(\alpha)}$ пусть означает класс супергармонических в D функций u с непустым множеством точек негармоничности в D из E таких, что $M(r;\ u) = O(l_\alpha(r))$. Имеет место

Теорема 3. *Если E — равномерно пористое множество, то $H_E^{(\alpha)} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $l_{\alpha-1}(E) > 0$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Если $\operatorname{cap}(E) > 0$, то из теоремы Линдеберга о множествах логарифмической меры 0 вытекает, что $l_{\alpha-1}(E) > 0$. Если же допустить, что $\operatorname{cap}(E) = 0$ и $H_E^{(\alpha)} \neq \varnothing$, то рассуждение, проведенное при доказательстве теоремы 1, приведет нас к существованию некоторого распределения массы $\mu \neq 0$ в E такого, что $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\mu)) < 1$ и $u^\mu \in H_E^{(\alpha)}$. Но тогда, если учесть, что $d_E(r) = O(r)$, из леммы 1 вытекает нужное неравенство.

Пусть теперь $l_{\alpha-1}(E) > 0$. Тогда согласно лемме Фростмана ([2], стр. 64) существует распределение массы $\mu \neq 0$ в E такое, что для каждого $r > 0$ и каждого круга C_r радиуса r

$$\mu(C_r) \leqslant 36\, l_{\alpha-1}(r). \tag{4}$$

Если

$$u^\mu(x) = \int\limits_E \log \frac{1}{|\xi - x|}\, d\mu(\xi)$$

— соответствующий потенциал, то после надлежащей замены переменной интегрирования получим

$$u^\mu(x) = c + \int\limits_{\rho(x,\, E)}^{c_1} \frac{\mu(x,\, r)}{r}\, dr,$$

где c, c_1 ограничены при $x \to E$, $c_1 > 0$. Или учитывая (4)

$$-\infty < c < u^\mu(x) \leqslant c + 36 \int\limits_{\rho(x,\, E)}^{+\infty} \frac{l_{\alpha-1}(r)}{r}\, dr.$$

Вычисляя последний интеграл, будем иметь

$$|u^\mu(x)| = O(l_\alpha(\rho(x,\, E))),\quad x \in E^c,$$

откуда

$$M(r;\ u^\mu) = O(l_\alpha(r)),$$

и так как каждая точка $\operatorname{supp}(\mu)$ есть точка негармоничности для u^μ, то теорема доказана.

Пользуюсь случаем выразить свою искреннюю признательность академику АН Армянской ССР А. Л. Шагиняну и профессору Е. П. Долженко за внимание к работе и замечания, способствующие ее улучшению.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 25.V.1977

Ա. Յու. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ. *O ունակության եզակիությունների բազմության վրա անընդհատ հարմոնիկ ֆունկցիաների մասին* (*ամփոփում*)

Դիտարկվում են երկու իրական փոփոխականների հարմոնիկ ֆունկցիաներ, որոնք անընդհատ են (կարող են ընդունել նաև $\pm\infty$ *արժեքներ) O ունակություն ունեցող իզոլացված եզակիությունների բազմության վրա։*

A. U. SHAHVERDIAN. *On harmonic functions continuous on an singular set of zero capacity* (summary)

The paper considers harmonic functions of two variables continuous on an isolated singular set of zero capacity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, УМН, 8, 1941, 171—292.
2. *M. Tsuji.* Potential theory in modern function theory, Maruzen Co., LTD, Tokyo, 1959.
3. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
4. Е. *П. Долженко.* О представлении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 5, 1964, 1113—1130.
5. *Е. П. Долженко.* Об особых точках непрерывных гармонических функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 6, 1964, 1251—1270.
6. *Л. Карлесон.* Избранные проблемы теории исключительных множеств, „Мир", М., 1971.
7. *Э. Коллингвуд, А. Ловатер.* Теория предельных множеств, Изд. „Мир", М. 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

В. А. АРЗУМАНЯН

*- ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУПП

0°. Полугруппа S называется *полугруппой с инволюцией* (или **-полугруппой*), если существует отображение *: $S \to S$, называемое инволюцией, такое, что для любых $s, t \in S$, $(s^*)^* = s$, $(st)^* = t^* s^*$. Если S обладает единицей e (или нулем θ), то, очевидно, $e^* = e$ $(\theta^* = \theta)$. Существуют, разумеется, полугруппы без инволюции. Например, в полупрямом произведении $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}_+$ с действием k: $n \to 2^k n$ $(k \in \mathbf{Z}_+$, $n \in \mathbf{Z})$, инволюцию ввести невозможно.

С другой стороны, имеются классические примеры полугрупп ([1]), важнейшими из которых являются инверсные (см. определение ниже) полугруппы (в частности бициклическая), с естественной инволютивной структурой. Свойства таких полугрупп, связанные с существованием на них инволюции, представляют собой несомненный интерес. В отличие от общей линии работ [2, 3], основным объектом изучения которых является *-алгебра $l^1(S)$, мы будем заниматься также положительно определенными функциями на *-полугруппах и их связью с *-представлениями соответствующей полугрупповой алгебры.

Интересные классы *-полугрупп появляются в связи с изучением C^*-алгебр $\mathfrak{M}(X, \mu, T)$, отвечающих эндоморфизмам T пространства Лебега (X, μ) (см. [4]) и алгебре мультипликаторов, изоморфной $L^\infty(X, \mu)$[1]. Так, если $X = [0,1)$ с мерой Лебега μ, T: $x \to 2x \pmod 1$, то при рассмотрении равномерно замкнутой *-алгебры $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X, \mu, T)$ в $L^2(X, \mu)$, порожденной операторами $(M_\varphi f)(x) = \varphi(x) f(x)$ и $(Uf)(x) = f(Tx)$, где $f \in L^2(X, \mu)$, $\varphi \in L^\infty(X, \mu)$, возникают следующие полугруппы:

S_1. Полугруппа S_1 есть полугруппа с образующими u, v, единицей e и единственным соотношением $vu = e$. Такая полугруппа называется *бициклической* ([1]), инволюция в ней вводится так: $u^* = v$. В нашей ситуации она порождается операторами U и U^*.

S_2. Полугруппа S_2 есть минимальная *-полугруппа с нулем θ, натянутая на полугруппу S_1, бесконечную циклическую группу с образующей a, с соотношениями:

$$a^* = a^{-1}, \quad ua = a^2 u, \quad vau = \theta.$$

S_3. Полугруппа S_3 есть минимальная *-полугруппа с нулем θ, натянутая на полугруппу S_1, образующие $a_1, a_2, \cdots$, с соотношениями:

---

[1] См. [8].

$$a_i^* = a_i, \; a_i a_j = a_{\max(i,j)}, \; ua_i = a_{i+1} u, \; va_1 u = \theta.$$

Изучение алгебры $\mathfrak{M}$ сводится, в некотором смысле, к изучению обвертывающей (см. [5]) C *-алгебры $C^*(S_2)$(или $C^*(S_3)$) полугрупповой алгебры $l^1(S_2)$ (или $l^1(S_3)$). Полугруппы S_2 и S_3 принадлежат классу инверсных полугрупп, полугрупповая алгебра которых полупроста (см. предл. п. 1 или теор. п. 2), т. е. C *-оболочка которых сводится к простому пополнению по C *-норме. Различие между полугруппами S_2 и S_3 обусловлено выбором базиса в $L^\infty(X, \mu)$. Кроме того, т.н. *регулярное* представление алгебры $\mathfrak{M}$ можно рассматривать как скрещенное произведение $L^\infty(X, \mu)$ и бициклической полугруппы.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить А. М. Вершика за большой интерес к настоящей работе и полезные замечания, а также С. Керова, указавшего на [3].

1°. Пусть S— *-полугруппа. Под ее представлением понимается морфизм в *-полугруппу $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов некоторого гильбертова пространства H. При этом предполагается, что полный образ S целиком содержится в единичном шаре $B(H)$, образом единицы и нуля (если S обладает ими) служат, соответственно, единичный и нулевой операторы.

Элементы $a \in l^1(S)$ мы будем записывать в следующей форме (см. [2]):

$$a = \sum_{s \in S} \alpha_s s, \; \alpha_s \in \mathbf{C}, \; s \in S,$$

причем $\sum |\alpha_s| < \infty$. $l^1(S)$ — инволютивная банахова алгебра с операциями:

$$a + b = \sum_s (\alpha_s + \beta_s) s, \; \lambda a = \sum_s \lambda\alpha_s s,$$

$$ab = \sum_s \sum_t \alpha_s \beta_t st, \; a^* = \sum_s \bar{\alpha}_s s^*,$$

где $a = \sum \alpha_s s \in l^1(S)$, $b = \sum \beta_s s \in l^1(S)$.

Существует естественное биективное соответствие между всеми представлениями полугруппы S и всеми представлениями ее полугрупповой алгебры $l^1(S)$, сохраняющее невырожденность, цикличность, неприводимость и т. д.

Вопросам полупростоты $l^1(S)$ для различных полугрупп S посвящена бо́льшая часть работы [2]. В настоящей заметке, как и в [3], объектом изучения являются т.н. *инверсные* полугруппы, определяемые (ср. [1]) как полугруппы с инволюцией S, в которых для любого $s \in S$ выполнено $ss^*s = s$, причем элемент s^* является единственным элементом, удовлетворяющим этому соотношению и соотношению $s^*ss^* = s^*$. Любая группа есть инверсная полугруппа с инволюцией, всегда понимаемой как переход к обратному элементу. Как легко проверить, полугруппы S_1, S_2, S_3 также инверсны.

Пусть π — произвольный морфизм инверсной полугруппы S в $B(H)$, где H — некоторое гильбертово пространство. Тогда для любого $s \in S$

$$\|\pi(s)\| = \|\pi(s)^* \pi(s)\|^{\frac{1}{2}} = \|\pi(s^*s)\|^{\frac{1}{2}} = \|\pi(s^*ss^*s)\|^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|\pi(s^*s)^* \pi(s^*s)\|^{\frac{1}{2}} = \|\pi(s^*s)\| = \|\pi(s)\|^2,$$

откуда $\|\pi(s)\| \leqslant 1$. Поэтому любой морфизм инверсной полугруппы в $B(H)$, переводящий единицу (или нуль), если они имеются, в единичный (нулевой) оператор, есть представление.

Известно (см. [1]), что любой морфизм инверсной полугруппы есть снова инверсная полугруппа, следовательно, любое представление инверсной полугруппы есть представление во множество частично-изометрических операторов. С этой точки зрения, представление группы есть, автоматически, унитарное представление.

В исследовании инверсных полугрупп важную роль играет *множество идемпотентов*, совпадающее со множеством всех *эрмитовых* элементов ($s^* = s$) и множеством элементов вида s^*s. Множество идемпотентов $J(S)$ инверсной полугруппы S составляет коммутативную ([1]) полугруппу.

Если S — инверсная полугруппа без нуля, то в ней всегда существует отношение эквивалентности, фактор-множество по которому составляет группу. Именно, пусть $s \overset{R}{\sim} t$ (или $s \sim t$) означает, что существует $f \in J(S)$, такой, что $fsf = ftf$. Легко проверить, что R в самом деле отношение эквивалентности. Очевидно, что если $s \sim t$, то и $s^* \sim t^*$. Для доказательства того, что S/R есть полугруппа (в действительности же группа), достаточно проверить, что для любых $s, t, u \in S$, $s \sim t$ влечет $su \sim tu$. Покажем, вначале, что для любых $s, t \in S$, $f \in J(S)$, $sft \sim st$. Простой подсчет показывает, что $gsftg = gstg$ при $g = (sfs^*)(t^*ft)$. Пусть, теперь, $s \sim t$, $u \in S$, $hsh = hth$. Тогда $su \sim shu$ $(f_1 suf_1 = f_1 shu f_1)$ и $tu \sim thu$ $(f_2 tuf_2 = f_2 thuf_2)$ Если $g = f_1 f_2 h$, то, как легко видеть, $gsug = gtug$, что означает $su \sim tu$.

Определение. *Пусть S — инверсная полугруппа с единицей e. Комплекснозначная функция φ на S называется функцией положительного типа* (ф. п. т.), *или положительно определенной функцией, если для любых $s_1, s_2, \cdots, s_n \in S$ матрица*

$$(\varphi(s_i^* s_j))_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \tag{1}$$

положительно определена (ср. для групп ([5, 6]).

Основные свойства ф.п.т. для групп с небольшими изменениями переносятся на инверсные полугруппы:

1. Сумма двух ф.п.т. есть ф.п.т. Если φ — ф.п.т., то $\lambda\varphi$ — ф.п.т. при $\lambda \geqslant 0$.

2. Положим в (1) $n=2$, $s_1 = s \in S$, $s_2 = e$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} \varphi(s^*s) & \varphi(s) \\ \varphi(s^*) & \varphi(e) \end{pmatrix}$$

положительно определена. Отсюда непосредственно следует, что

$$\varphi(s^*s) \geqslant 0, \ \varphi(s^*) = \overline{\varphi(s)}, \ |\varphi(s)|^2 \leqslant \varphi(e)\varphi(s^*s).$$

Кроме того

$$\varphi(s^*s)^2 \leqslant \varphi(e)\varphi(s^*ss^*s) = \varphi(e)\varphi(s^*s),$$

следовательно, $\varphi(s^*s) \leqslant \varphi(e)$ и, наконец, $|\varphi(s)| \leqslant \varphi(e)^{\frac{1}{2}}\varphi(s^*s)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varphi(e)$. Т.о. $\varphi \in l^\infty(S)$, причем $\|\varphi\|_\infty = \varphi(e)$.

3. Точно так же, для любых $s, t \in S$

$$|\varphi(s^*t)|^2 \leqslant \varphi(s^*s)\varphi(t^*t), \ \varphi(s^*t^*ts) \leqslant \varphi(s^*s).$$

4. Пусть $\varphi \in l^\infty(S)$, ω_φ — непрерывная линейная форма на $l^1(S)$ определяемая формулой

$$\omega_\varphi(a) = \sum \alpha_s \varphi(s), \ a = \sum \alpha_s s \in l^1(S).$$

Тогда для того чтобы ω_φ была положительной формой, необходимо и достаточно, чтобы φ была ф.п.т.

Для доказательства этого достаточно воспользоваться эквивалентным определением ф.п.т.: для любых $s_1, s_2, \cdots, s_n \in S$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \cdots, \alpha_n \in \mathbf{C}$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\alpha}_i \alpha_j \varphi(s_i^* s_j) \geqslant 0.$$

5. Для того чтобы функция φ на S была ф.п.т., необходимо и достаточно, чтобы существовали представление π полугруппы S в H_π и вектор $\xi_0 \in H_\pi$ (который можно считать циклическим), такие, что $\varphi(s) = (\pi(s)\xi_0, \xi_0)$. Тогда $\|\varphi\|_\infty = \|\xi_0\|^2$.

В простом доказательстве этого факта (ср. [5]) используется конструкция ГНС.

6. Пусть φ — ф.п.т. на S. Если $s, t \in S$, то

$$|\varphi(s) - \varphi(t)|^2 \leqslant 2\varphi(e)\,[\varphi(e) - \operatorname{Re}\varphi(s^*t)].$$

7. Функция $\delta(s) = \delta_s^e$ (δ — символ Кронекера) — ф.п.т.

Это следует из легко проверяемого свойства инверсных полугрупп: если $s^*t = e$, то $s = t$.

По аналогии со случаем групп, назовем *регулярным* (левым или правым) представлением инверсной полугруппы с единицей, представление, соответствующее, в силу св. 5 (левое или правое в конструкции ГНС) функции δ из св. 7. Регулярное представление групп всегда точное. Иная картина для общих инверсных полугрупп. Назовем *полуунитарным* элемент t инверсной полугруппы S с единицей e, такой, что $t^*t = e$ и будем говорить, что S *обладает достаточным* *числом полуунитарных элементов*, если для любых $s_1 \neq 0$, s_2, $s_1 \neq s_2$ существует полуунитарный элемент t такой, что $s_1^* s_1 t = t$, $s_1 t \neq s_2$. Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Предложение. *Регулярное представление инверсной полугруппы с единицей инъективно тогда и только тогда, когда она обладает достаточным числом полуунитарных элементов.*

Легко проверить, что все три полугруппы S_1, S_2, S_3 обладают достаточным числом полуунитарных элементов.

2°. Точность регулярного представления групп гарантирует полупростоту групповой алгебры. В 1976 г. вышло две работы ([3, 7]), посвященные доказательству полупростоты полугрупповых алгебр инверсных полугрупп. В [7] теорема о полупростоте доказана в чисто алгебраической ситуации. Следующая теорема доказана в [3].

Теорема (о полупростоте). *Полугрупповая алгебра любой инверсной полугруппы обладает точным семейством неприводимых представлений.*

Доказательство в [7] можно с небольшими изменениями приспособить к доказательству и этой теоремы. Положим, как в [7] для $f \in J(S)$

$$C(f) = \{g \in J(S);\ \text{сущ. } s \in S,\ s^*s = f,\ ss^* = g\},$$

$$D(f) = \{s \in S;\ ss^* \in C(f)\},\quad G(f) = \{s \in S;\ s^*s = ss^* = f\}.$$

Если $f \in J(S)$, то (лемма 2, [7]), для любого $(s \in D(f)$ существует единственный элемент $a_s \in G(f)$, такой, что s записывается в виде $s = t_1^* a_s t_2$, где $t_1 t_1^* = t_2 t_2^* = f$, $t_1^* t_1 = ss^*$, $t_2^* = s^*s$. Заметим, что отсюда сразу следует, что $a_{s^*} = a_{s^*}$.

Пусть теперь $\pi = \pi_f$ — точное представление *группы* $G(f)$ (с единицей f) в гильбертовом пространстве H. Пусть H_g — экземпляры H, перенумерованные элементами $g \in C(f)$ с фиксированными изоморфизмами U_g: $H \to H_g$. Положим $\mathbf{H} = \sum_{g \in C(f)} \oplus H_g$. Действие S на $\mathbf{H}$ определим следующим образом $(h = \{h_g\} \in \mathbf{H})$:

$$(\Pi(s)\,h)_g = \begin{cases} U_g\,\pi(a_{gs})\,U^{-1}_{s^*gs}\,h_{s^*gs}, & \text{если } g = ss^*g \\ 0, & \text{если } g \neq ss^*g. \end{cases}$$

На самом же деле $\Pi = \Pi_f$ — представление S в $\mathbf{H}$. Мы покажем только, что $\Pi(s^*) = \Pi(s)^*$. Действительно

$$(\Pi(s^*)\,h,\ d) = \sum_{g \in C(f)} ((\Pi(s^*)\,h)_g,\ d_g)_g =$$

$$= \sum_{g:\,g = s^*sg} (U_g\,\pi(a_{gs^*})\,U^{-1}_{sgs^*},\ d_g)_g =$$

$$= \sum_{g = s^*sg} (h_{sgs^*},\ U_{sgs^*}\,\pi(a_{sg})\,U_g^{-1}\,d_g)_{sgs^*}.$$

Положим $u = sgs^*$. Тогда $u \in C(f)$, $g = s^*us$, причем $g = s^*sg$ тогда и только тогда, когда $u = ss^*u$, следовательно

$$(\Pi(s^*)h, d) = \sum_{u=ss^*u} (h_u, U_u \pi(a_{us}) U^{-1}_{s^*us} d_{s^*us})_u = (h, \Pi(s) d).$$

Кроме того, если S обладает единицей, то, как легко видеть, ее образом является единичный оператор $\mathbf{H}$. Осталось проверить, что лемма 4 из [7] распространяется и на $l^1(S)$, откуда следует, что семейство представлений $\{\Pi_f;\ f \in J(S)\}$ точно. Поэтому (см. [5]) существует и точное семейство неприводимых представлений.

Отсюда сразу следует, что для любых $s, t \in S$ найдется неприводимое представление π полугруппы S, такое, что $\pi(s) \neq \pi(t)$. Это означает также, что для любых $s, t \in S$ существует чистая ф.п.т. (т. е. в любом разложении $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ в сумму двух ф.п.т. φ_1 и φ_2 пропорциональны φ), такая, что $\varphi(s) \neq \varphi(t)$.

3°. Семейство неприводимых представлений бициклической полугруппы поддается полному описанию (см [3]). Мы приводим другой способ, позволяющий заключить, что все неприводимые представления полугруппы S_1 исчерпываются регулярным представлением (см. п. 1) и одномерными характерами (полным семейством неприводимых представлений группы $\mathbf{Z}$).

Легко проверить, что регулярное представление S_1 (инъективное, как было отмечено ранее) неприводимо и эквивалентно представлению π в $H = l^2(\mathbf{Z}_+)$, определяемому формулой:

$$\pi(u)(\xi_1, \xi_2, \cdots) = (0, \xi_1, \xi_2, \cdots),$$

где $(\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2(\mathbf{Z}_+)$.

Отсюда следует, что $C^*(S_1)$ изоморфна равномерно замкнутой *-подалгебре в H, порожденной $\pi(u)$. Если $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$, то представление

$$\pi_\lambda(u)\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathbf{C}$$

также неприводимо.

Предложение. *Представление π, вместе с семейством представлений $\{\pi_\lambda;\ |\lambda| = 1\}$, образуют полное множество неприводимых представлений полугруппы S_1.*

Действительно, пусть R—отношение эквивалентности, о котором шла речь в п. 1°. Оно может быть описано также следующим образом: $s \sim t$, если $s^*t \in J(S)$. Очевидно, что $S_1/R \simeq \mathbf{Z}$. Кроме того, так как C^*—подалгебра $L \subset C^*(S_1)$, натянутая на все элементы вида $s - t$, где $s \sim t$, является идеалом, то

$$C^*(S_1)/L \cong C^*(\mathbf{Z}).$$

Легко проверить, что $\pi(L)$ содержит все конечномерные проекторы в H, а следовательно, $\pi(L)$ есть идеал всех компактных операторов в $B(H)$. Поэтому (см. [5]) все неприводимые представления алгебры L эквивалентны сужению π на L. С другой стороны, каждое неприводимое представление $C^*(Z)$ есть одно из представлений π_λ. Осталось заметить (см. [5]), что каждое неприводимое представление $C^*(S_1)$ эквивалентно либо неприводимому представлению L, либо неприводимому представлению $C^*(Z)$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16 IX 1977

Վ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ. Ինվերս կիսախմբերի *—ներկայացումները (*ամփոփում*)

*Հոդվածում քննարկվում են որոշ հարցեր կապված ինվերս կիսախմբերի *—ներկայացումների հետ (դրական որոշյալ ֆունկցիաներ, *—ներկայացումներ, կիսապարզություն և այլն)։*

V. A. ARZUMANIAN. **—representations of inverse semigroups* (summary)

Some questions connected with the *—representations of inverse semigroups are discussed (positive definite functions, *—representations, semisimplisity etc.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Клиффорд, Г. Престон.* Алгебраическая теория полугрупп, тт. 1, 2, М., Изд. „Мир“, 1972.
2. *B. A. Barnes* and *J. Duncan.* The Banach Algebra $l^1(S)$, Journ. of Funct. Anal., 18, № 1, 1975, 96—113.
3. *B. A. Barnes.* Representations ot the l^1-algebra of an inverse semigroup, Trans. of AMS, 218, 1976, 561—396.
4. *В. А. Рохлин.* Об основных понятиях теории меры, Матем. сб., 67, № 1, 1949, 107—150.
5. *Ж. Диксмье.* C^*-алгебры и их представления, М. Изд. „Наука“, 1974.
6. *М. А. Наймарк.* Нормированные кольца, М., Изд. „Наука“, 1968.
7. *О. И. Доманов.* О полупростоте и тождествах полугрупповых алгебр инверсных полугрупп, Кольца и модули, мат. иссл. в. 38, Кишинев, „Штиинца“, 1976, 123—131.
8. *В. А. Арзуманян, А. М. Вершик.* Фактор-представления скрещенного произведения коммутативной C^*-алгебры и полугруппы ее эндоморфизмов, ДАН СССР, 238, № 3, 1978, 513—516.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

Р. В. АКОПЯН

К ТЕОРИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ J-НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В этой работе обобщаются и уточняются некоторые результаты заметки [2].

Пусть H — гильбертово пространство, в котором наряду с обычным скалярным произведением (f, g) $(f, g \in H)$ введено индефинитное скалярное произведение

$$[f, g] = (Jf, g), \ J = P_+ - P_-,$$

где $P_\pm$ — взаимно дополнительные ортопроекторы в H.

Для любого линейного оператора A, действующего в плотной области определения $D(A)$, соответствующий J-сопряженный оператор однозначно определяется при помощи равенства

$$[Af, g] = [f, A^+ g], \ f \in D(A).$$

Оператор A называется J-самосопряженным, если $A^+ = A$. В дальнейшем под J-неотрицательным оператором понимается J-самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию

$$[Af, f] \geqslant 0, \ f \in D(A).$$

Для J-неотрицательного оператора A, имеющего хотя бы одну регулярную точку в верхней полуплоскости, известно следующее спектральное разложение [1]

$$A = S + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda),$$

где $E(\lambda)$ — семейство J-ортогональных проекторов, определенных всюду, кроме точки $\lambda = 0$, причем $[E(\lambda) f, f]$ не возрастает при $\lambda < 0$ и не убывает при $\lambda > 0$, а S — J-неотрицательный ограниченный оператор такой, что

$$S^2 = 0, \ SE(\Delta) = E(\Delta) S = 0, \ 0 \overline{\in} \Delta.$$

Для резольвенты оператора A, на области определения $D(A)$ справедливо представление

$$(A - zI)^{-1} = -\frac{I}{z} - \frac{S}{z^2} + \frac{1}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda)}{\lambda - z} \ (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{1}$$

где $[F(\lambda) f, f]$ — локально суммируемая, неотрицательная функция.

1°. Спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A называется регулярной в точке нуль, если существуют пределы

$$s-\lim_{\lambda\to-0} E(\lambda)=E(-0),\quad s-\lim_{\lambda\to+0} E(\lambda)=E(+0).$$

Регулярную в точке нуль спектральную функцию $E(\lambda)$ определяют в нуле, полагая $E(0)=E(-0)$.

Спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A называется регулярной на бесконечности, если существуют пределы

$$s-\lim_{\lambda\to-\infty} E(\lambda)=E(-\infty),\quad s-\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)=E(+\infty).$$

Регулярную на бесконечности спектральную функцию $E(\lambda)$ нормируют, полагая

$$E(-\infty)=0,\quad E(+\infty)=I.$$

Спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A называется регулярной, если она одновременно регулярна и в точке нуль и на бесконечности.

Пусть спектральная функция J-неотрицательного оператора регулярна, тогда пространство H разлагается на J-ортогональную сумму вида

$$H=H_1\,[+]\,H_2\,[+]\,H_3,$$

где

$$H_1=E(0)\,H,\quad H_2=(E(+0)-E(-0))\,H,\quad H_3=(I-E(+0))\,H,$$

причем подпространство H_1 равномерно отрицательно, подпространство H_3 равномерно положительно, и эти подпространства входят в ядро оператора S. Оператор A на подпространстве H_2 совпадает с оператором S. В том случае, когда спектральная функция оператора A регулярная, на подпространстве $H_1\,[+]\,H_3$ можно ввести новое скалярное произведение следующим образом:

$$(f,g)_1=-[f_1,g_1]+[f_2,g_2],$$

если

$$f=f_1+f_2,\quad g=g_1+g_2 \text{ и } f_1,\ g_1\in H_1,\ f_2,\ g_2\in H_3.$$

Очевидно, что метрика, задаваемая этим скалярным произведением эквивалентна старой метрике, причем относительно нового скалярного произведения оператор A является обычным самосопряженным оператором.

Теорема 1. *Для того чтобы спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A была регулярной в точке нуль, необходимо и достаточно, чтобы на ядре оператора S выполнялись условия*

$$\|(A-iy)^{-k}\|\leqslant\frac{M}{y^k}\ (k=1,2,\cdots,),\ \text{при } y\downarrow 0, \tag{2}$$

где M — не зависящая от k константа.

Доказательство. Для некоторого $a > 0$ рассмотрим разложение пространства H на J-ортогональную сумму подпространств

$$H = H_\Delta [+] H_\Delta',$$

где

$$H_\Delta = E(\Delta) H, \quad \Delta = (-a, a),$$

H_Δ' — J-ортогональное дополнение к H_Δ.

Поскольку эти подпространства инвариантны относительно оператора A и спектральная функция оператора A регулярна в точке нуль тогда и только тогда, когда регулярна в точке нуль спектральная функция оператора A_Δ (A_Δ — сужение оператора A на подпространство H_Δ), то достаточно доказать теорему для оператора A_Δ.

Пусть спектральная функция оператора A_Δ — регулярна в точке нуль. Так как A_Δ — ограниченный оператор, то его спектральная функция будет регулярной. Поэтому на подпространстве $H_{\Delta 1} [+] H_{\Delta 3}$ оператор A_Δ — подобен самосопряженному оператору. Отсюда следует необходимость условий теоремы.

Обратно, пусть выполняются условия (2). Докажем, что на ядре оператора S для всех $y > 0$ имеет место

$$\|(A_\Delta - iy)^{-k}\| \leqslant \frac{M}{y^k} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

При $y \downarrow 0$ эти неравенства выполняются по условию, а из (1) для оператора A_Δ имеем (на ядре S)

$$(A_\Delta - iy)^{-1} = -\frac{I}{iy} + \frac{1}{iy} \int\limits_{-a}^{a} \frac{dF(\lambda)}{\lambda - iy}. \tag{4}$$

Поэтому

$$\|(A_\Delta - iy)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{y} + \frac{M_1}{y^2}.$$

Дифференцируя (4), получим

$$\|(A_\Delta - iy)^{-k}\| \leqslant \frac{1}{y_k} + \frac{4 M_1}{y^{k+1}} \quad (k = 2, 3, \cdots).$$

Следовательно, при $y > 4M_1$ будем иметь

$$\|(A_\Delta - iy)^{-k}\| \leqslant \frac{2}{y^k} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

По известной теореме [3] теории полугрупп операторов из (3) получаем, что оператор $-iA_\Delta$ является производящим оператором ограниченной группы операторов e^{-itA_Δ}, т. е.

$$\|e^{-itA_\Delta}\| \leqslant M \text{ при всех } t.$$

Отсюда, согласно теореме Б. С. Надя [4], следует, что на ядре оператора S оператор A подобен самосопряженному.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A была регулярной на бесконечности, необходимо и достаточно чтобы*

$$\|(A-iy)^{-k}\| \leq \frac{M}{y^k} \quad (k=1, 2, \cdots), \text{ при } y \uparrow \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Снова рассмотрим разложение

$$H = H_\Delta [+] H'_\Delta.$$

Обозначим через A'_Δ сужение оператора A на подпространство H'_Δ. Поскольку спектральная функция оператора A регулярна на бесконечности тогда и только тогда, когда регулярна на бесконечности спектральная функция оператора A'_Δ, то достаточно ограничиться рассмотрением оператора A'_Δ. Для оператора A'_Δ неравенства (5) выполняются при всех $y \geqslant 0$, поскольку $(A'_\Delta - iy)^{-1}$ ограничено в окрестности нуля.

Далее повторяется рассуждение теоремы 1.

Объединяя теоремы 1 и 2, получаем

Теорема 3. *Для того чтобы спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A была регулярной, необходимо и достаточно чтобы на ядре оператора S выполнялись условия*

$$\|(A-iy)^{-k}\| \leq \frac{M}{y^k} \quad (k=1, 2, \cdots) \text{ при } y > 0.$$

2°. Приведем пример одномерного возмущения, при котором регулярность в нуле спектральной функции нарушается.

Пусть A — J-положительный оператор ($[Af, f] > 0$, $f \in D(A)$, $f \neq 0$) с регулярной спектральной функцией $E(\lambda)$, тогда пространство H имеет разложение

$$H = H_1 [+] H_2.$$

Так как подпространства H_1 и H_2 инвариантны относительно оператора A, то для любого φ будем иметь

$$((A-iy)^{-1}\varphi, (A-iy)^{-1}\varphi)_1 = -[(A-iy)^{-1}\varphi, (A-iy)^{-1}\varphi] +$$

$$+[(A-iy)^{-1}\varphi, (A-iy)^{-1}\varphi] = -\int_{-\infty}^{0} \frac{d[E(\lambda)\varphi, \varphi]}{\lambda^2+y^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{d[E(\lambda)\varphi, \varphi]}{\lambda^2+y^2}.$$

Введем обозначения:

$$a(y) = -\int_{-\infty}^{0} \frac{d[E(\lambda)\varphi, \varphi]}{\lambda^2+y^2}, \quad b(y) = \int_{0}^{\infty} \frac{d[E(\lambda)\varphi, \varphi]}{\lambda^2+y^2}.$$

Для резольвенты оператора $\widetilde{A} = A + \alpha [\cdot, \varphi] \varphi$ справедлива формула

$$(\tilde{A}-zI)^{-1}=(A-zI)^{-1}-\frac{\alpha\,[\,\cdot\,,(A-\bar{z}I)^{-1}\varphi]}{1+\alpha\,[(A-zI)^{-1}\varphi,\varphi]}(A-zI)^{-1}\varphi\ (\operatorname{Im} z\neq 0). \tag{6}$$

Легко убедиться, что можно реализовать случай, когда спектральная функция $E(\lambda)$ оператора A и вектор φ такие, что имеет место

$$[E(\lambda)\varphi,\varphi]-[E(0)\varphi,\varphi]=\begin{vmatrix} 1 & \text{при} & \lambda\leqslant -e^{-1}, \\ -1/\ln|\lambda| & \text{при} & -e^{-1}<\lambda<0, \\ -1/\ln\lambda & \text{при} & 0<\lambda<e^{-1}, \\ 1 & \text{при} & e^{-1}\leqslant\lambda, \\ 0 & \text{при} & \lambda=0. \end{vmatrix}$$

Положим $[E(\lambda)\varphi,\varphi]-[E(0)\varphi,\varphi]=\sigma(\lambda)$.

Докажем, что $y\|(\tilde{A}-iy)^{-1}\|\to+\infty$, при $y\downarrow 0$. В данном случае из (6) следует, что достаточно показать

$$yb(y)\Big/\int\limits_0^{\infty}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}\to+\infty \quad \text{при} \quad y\downarrow 0.$$

Для $y<e^{-1}$ имеем

$$yb(y)=\int\limits_0^{\infty}\frac{yd\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}=\int\limits_0^{e^{-1}}\frac{yd\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}=\int\limits_0^{y}\frac{yd\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}+\int\limits_y^{e^{-1}}\frac{yd\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2},$$

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}=\int\limits_0^{e^{-1}}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}=\int\limits_0^{y}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}+\int\limits_y^{e^{-1}}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}.$$

Так как

$$\int\limits_0^{y}\frac{yd\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}\geqslant\frac{\sigma(y)}{y}=-\frac{1}{2y\ln y},$$

$$\int\limits_0^{y}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}=\int\limits_0^{y}\frac{d\lambda}{(\lambda^2+y^2)\ln^2\lambda}\leqslant\frac{\pi}{4y\ln^2 y},$$

$$\int\limits_0^{y}\frac{d\lambda}{(\lambda^2+y^2)\ln^2\lambda}=\int\limits_y^{2\sqrt{y}}\frac{d\lambda}{(\lambda^2+y^2)\ln^2\lambda}+\int\limits_{2\sqrt{y}}^{e^{-1}}\frac{d\lambda}{(\lambda^2+y^2)\ln^2\lambda}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{y\ln^2 2\sqrt{y}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{y}}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{2\sqrt{y}\ln^2 2\sqrt{y}}.$$

Таким образом

$$yb(y) \geqslant \frac{1}{2y \ln y}, \quad \int_0^\infty \frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + y^2} \leqslant \frac{M}{y \ln^2 y}.$$

Следовательно

$$yb(y) \Big/ \int_0^\infty \frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + y^2} \to +\infty \text{ при } y \downarrow 0.$$

Этот пример показывает, что лемма 2 из заметки [2] в общем случае неверна.

Пусть S — J-неотрицательный ограниченный оператор такой, что $S^2 = 0$ и $\bar{S} = S + \alpha[\cdot, \varphi]\varphi$ $(\alpha > 0)$.

Поскольку подпространство $V\{\varphi, S\varphi\}$ (линейная оболочка векторов φ и $S\varphi$) приводит оператор S и $\bar{S}$, то, очевидно, что спектральная функция оператора $\bar{S}$ регулярна. В этом случае регулярность спектральной функции сохраняется при любых конечномерных возмущениях.

Однако, регулярность спектральной функции в этом случае уже при ядерных возмущениях, вообще говоря, нарушается.

Действительно, пусть $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \cdots$ — ортонормированный базис пространства H и

$$S\varphi_i = \psi_i, \; S\psi_i = 0, \; J\varphi_i = \psi_i, \; J\psi_i = \varphi_i \; (i = 1, 2, \cdots).$$

Легко проверить, что S — J-неотрицательный оператор и

$$[S\varphi_i, \varphi_i] = [\psi_i, \varphi_i] = (\varphi_i, \varphi_i) = 1, \; [\varphi_i, \varphi_i] = [\psi_i, \psi_i] = 0 \; (i = 1, 2, \cdots,).$$

Пусть $\tilde{S} = S + K$, где

$$K = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i [\cdot, \varphi_i]\varphi_i, \; \alpha_i > 0 \; (i = 1, 2, \cdots) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^\infty \alpha_i < \infty.$$

Нетрудно доказать, что $\tilde{S}$ является J-положительным оператором и подпространства $V\{\varphi_i, \psi_i\}$ приводят оператор $\bar{S}$. На этих подпространствах оператор $\bar{S}$ совпадает с оператором

$$S + \alpha_i[\cdot, \varphi_i] \; (i = 1, 2, \cdots).$$

Найдем собственные векторы и собственные значения оператора $\bar{S}$ в этих подпространствах.

Пусть

$$f = \beta_i\varphi_i + \gamma_i\psi_i \quad \text{и} \quad \bar{S}f = \lambda f,$$

тогда

$$\beta_i \psi_i + \alpha_i \gamma_i \varphi_i = \lambda \beta_i \varphi_i + \lambda \gamma_i \psi_i ,$$

откуда

$$\lambda = \pm \sqrt{\alpha_i} .$$

Соответствующими собственными векторами будут

$$f_{-}^{(i)} = -\sqrt{\alpha_i}\, \varphi_i + \psi_i , \qquad f_{+}^{(i)} = \sqrt{\alpha_i}\, \varphi_i + \psi_i ,$$

причем

$$[f_{-}^{(i)}, f_{-}^{(i)}] = -2\sqrt{\alpha_i} , \ [f_{+}^{(i)}, f_{+}^{(i)}] = 2\sqrt{\alpha_i} .$$

Если бы оператор $\tilde{S}$ имел регулярную спектральную функцию $\tilde{E}\ (\lambda)$, то должны были выполняться следующие соотношения:

$$H = \tilde{H}_1 [+] \tilde{H}_3, \ \tilde{H}_1 = \tilde{E}\,(0)\, H, \ \tilde{H}_3 = (I - \tilde{E}\,(0))\, H,$$

где $\tilde{H}_1$ — равномерно отрицательно, $\tilde{H}_3$ — равномерно положительно, т. е.

$$-[f, f] \geqslant m\,(f, f) \text{ при } f \in \tilde{H}_1 \text{ и } [f, f] \geqslant M\,(f, f)$$

при $f \in \tilde{H}_3$ $(m > 0,\ M > 0)$.

В частности

$$-[f_{-}^{(i)}, f_{-}^{(i)}] \geqslant m\,(f_{-}^{(i)}, f_{-}^{(i)}) \ (i = 1, 2, \cdots,).$$

Вычислим $(f_{-}^{(i)}, f_{-}^{(i)})$, получим

$$(f_{-}^{(i)}, f_{-}^{(i)}) = \alpha_i + 1.$$

Таким образом

$$2\sqrt{\alpha_i} \geqslant m\,(\alpha_i + 1) \ (i = 1, 2, \cdots).$$

Эти неравенства, очевидно, не имеют места при достаточно больших i.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Марку Григорьевичу Крейну за подробное обсуждение результатов этой работы.

Ереванский государственный университет

Поступила 19.XI.1977

Ռ. Վ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ. J-ոչ բացասական օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի տեսության մասին (ամփոփում)

Որոշակի սահմանափակումների դեպքում գրգռման վրա, ապացուցվում է, որ J-ոչ բացասական օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի ռեգուլյարությունը կայուն է վերջավոր չափանի գրգռումների նկատմամբ։

Ընդհանուր դեպքում (առանց սահմանափակման) այդ արդյունքը ճիշտ չէ։ Բերվում է միաչափ գրգռման օրինակ, որի դեպքում սպեկտրալ ֆունկցիայի ռեգուլյարությունը խախտվում է։

R. V. HAKOPIAN. *On the theory of spectral function of J-nonnegative operator* (summary)

It is proved that with certain limitations on the perturbation the regularity of spectral function of J-nonnegative operator is stable under finite-dimensional perturbations.

Without any limitations this result is not correct. An example of one-dimensional perturbation is given which yields the spectral function nonregular.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Langer*. Spektraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren und einige Anwendungen auf die Schar $\lambda^2 I + \lambda B + C$, Habiiltationsschrift Technische Universität, Dresden, 1965.
2. *Р. В. Акопян*. К теории возмущений J-положительного оператора, „Функц. анализ и его прилож." 9, № 2, 1975.
3. *Т. Като*. Теория возмущений линейных операторов, М., Изд. „Мир", 1972.
4. *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн*. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., Изд. „Наука", 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

В. А. ЯВРЯН

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей заметке уточняются результаты работы И. Вайдмана [1]. При доказательстве полученных оценок существенную роль играют следующие теоремы М. Г. Крейна ([2], стр. 240, 256).

Теорема I. *Пусть* $A = A_R + iA_J$ — *вольтерров оператор*, A_R *и* A_J — *самосопряженные операторы и* $A_J \in S_1$, *где* S_1 — *пространство ядерных операторов. Тогда*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{n_+(r, A_R)}{r} = \lim_{r\to+\infty}\frac{n_-(r, A_R)}{r} = \frac{1}{\pi}\inf\sum_{j=1}^{n}|\Delta P_j A_J \Delta P_j|_1. \tag{1}$$

Здесь $n_+(r, B)$ и $n_-(r, B)$ означают соответственно количество характеристических чисел оператора B в интервалах $[0, r]$ и $[-r, 0]$, $|B|_1$ — ядерная норма оператора B, $\{P\}$ — любая максимальная собственная цепочка оператора A, а нижняя грань в правой части формулы (1) берется по всему множеству разбиений $0 = P_0 < P_1 < \cdots < P_n$ $(P_j \in \{P\})$ цепочки $\{P\}$, $\Delta P_j = P_j - P_{j-1}$.

Теорема II. *Пусть* $A = A_R + A_J$ — *вольтерров оператор с конечномерной мнимой компонентой* A_J. *Если отрицательные характеристические числа* $\alpha_j(A_R)$ *оператора* A_R *удовлетворяют условию*

$$\sum_{\alpha_j<0}\frac{1}{\sqrt{\alpha_j(A_R)}} < +\infty,$$

то для его положительных характеристических чисел существует конечный предел

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{n_+(r, A_R)}{\sqrt{r}}. \tag{2}$$

В частности, если A_R имеет только конечное число отрицательных собственных значений, то (2) будет иметь место.

В пространстве $L^2(a, b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ рассмотрим интегральный оператор

$$(Gf)(x) = \int_a^b G(x, t) f(t)\, dt \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{3}$$

где ядро $G(x, t)$ задается формулой:

$$G(x, t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(x) v_k(t), & x \leqslant t \\ \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(t) v_k(x), & x \geqslant t. \end{cases} \tag{4}$$

Предполагаем, что функции $u_k(x)$ и $v_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots, p)$ вещественны и принадлежат пространству $L^2(a, b)$. Легко проверяется, что оператор G принадлежит классу Гильберта-Шмидта.

Теорема 1. *Характеристические числа* $\alpha_n(G)$ *оператора* G *удовлетворяют соотношению*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\alpha_n(G)} = 0^*. \tag{5}$$

Если оператор G неотрицателен, то существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{\alpha_n(G)}}. \tag{6}$$

Соотношение (5) было известно М. Г. Крейну и доказано им путем сведения интегрального уравнения к канонической системе с вырождающимся гамильтонианом. В случае $p=1$ оно приведено еще в 3]. В работе И. Вайдмана [1] вместо (5) установлено, что существует такое $M>0$, что $M|\alpha_n(G)| \geqslant n$. Вместо соотношения (6) в [1] доказано только

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n(G)} < +\infty.$$

Очевидно, что из (6) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n(G)^{1/2+\varepsilon}} < +\infty.$$

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение вольтерров оператор

$$(Kf)(x) = \int_a^x \sum_{k=1}^{p} \left(u_k(t) v_k(x) - u_k(x) v_k(t)\right) f(t)\, dt \quad (a < x < b).$$

Обозначим через K_R и K_J соответственно вещественную и мнимую части оператора K. Легко видеть, что

$$(K_J f)(x) = -\frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{p} \left(u_k(x) \int_a^b v_k(t) f(t)\, dt - v_k(x) \int_a^b u_k(t) f(t)\, dt \right).$$

---

* Если оператор имеет лишь конечное число, скажем N, отличных от нуля собственных значений, то мы полагаем, что $1/\alpha_n(G) = 0$ при $n > N$.

Очевидно, что семейство ортогональных проекторов

$$(P_t f)(x) = \begin{cases} 0, & a \leqslant x \leqslant t \\ f(x), & t < x \leqslant b, \end{cases} \quad P_a = I,\ P_b = 0 \ (a < t < b) \tag{7}$$

служит собственной максимальной цепочкой для оператора K. Мы должны показать, что правая часть (1) для оператора K равна нулю. Заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда оператор K_j имеет вид:

$$(K_j f)(x) = -\frac{1}{2i}\left(u(x)\int_a^b v(t) f(t)\,dt - v(x)\int_a^b u(t) f(t)\,dt\right).$$

Так как K_j — двумерный оператор, то

$$|\Delta P_j K_j \Delta P_j|_1 \leqslant 2\,|\Delta P_j K_j \Delta P_j| = 2\sup\{(\Delta P_j K_j \Delta P_j f, f) : |f| = 1\}. \tag{8}$$

Из того, что функции $u_k(x)$ и $v_k(x)$ принадлежат $L^2(a, b)$, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют ступенчатые функции $\bar u(x)$ и $\bar v(x)$, такие, что

$$|u - \bar u| < \varepsilon,\ |v - \bar v| < \varepsilon,\ |\bar u| \leqslant 2\,|u|,\ |\bar v| \leqslant 2|v|.$$

Пусть функции $\bar u(x)$ и $\bar v(x)$ постоянны в интервалах $\Delta_j = [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$. Рассмотрим разбиение $P_0 > P_1 > \cdots > P_n$ цепочки (7), где $P_k = P_{x_k}$ и оценим правую часть (1). Из (8) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} |\Delta P_j K_j \Delta P_j|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sup_{|f|=1} |(\Delta P_j f, v)(\Delta P_j u, f) - (\Delta P_j f, u)(\Delta P_j v, f)| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sup_{|f|=1} |(\Delta P_j f, v - \bar v)(\Delta P_j (u - \bar u), f) + (\Delta P_j f, v - \bar v)(\Delta P_j \bar u, f) +$$

$$+ (\Delta P_j f, \bar v)(\Delta P_j (u - \bar u), f) - (\Delta P_j f, u - \bar u)(\Delta P_j (v - \bar v), f) -$$

$$- (\Delta P_j f, u - \bar u)(\Delta P_j \bar v, f) - (\Delta P_j, \bar u)(\Delta P_j (v - \bar v), f)|.$$

Здесь учитывалось, что

$$(\Delta P_j f, \bar v)(\Delta P_j \bar u, f) - (\Delta P_j f, \bar u)(\Delta P_j \bar v, f) = 0.$$

Оценим теперь каждое слагаемое в отдельности. Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} |(\Delta P_j f, v - \bar v)(\Delta P_j (u - \bar u), f)| \leqslant |f|^2 \sum_{j=1}^{n} |\Delta P_j (v - \bar v)|\,|\Delta P_j (u - \bar u)| \leqslant$$

$$\leqslant |f|^2 \left(\sum_{j=1}^{n} |\Delta P_j (v - \bar v)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |\Delta P_j (u - \bar u)|^2\right)^{1/2} = |f|^2\,|v - \bar v|^2\,|u - \bar u|^2 < \varepsilon^2 |f|^2.$$

Для второго слагаемого получаем

$$\sum_{j=1}^{n} |(\Delta P_j f, u-\bar{u})(\Delta P_j \bar{u}, f)| \leqslant |f|^2 \sum_{j=1}^{n} |\Delta P_j (u-\bar{u})| \, |\Delta P_j \bar{u}| \leqslant$$
$$\leqslant |f|^2 \, |u-\bar{u}| \, |\bar{u}| \leqslant 2\varepsilon \, |u| \, |f|^2.$$

Таким же образом оцениваются и остальные слагаемые. В результате получаем

$$\sum_{j=1}^{n} |\Delta P_j K_j \Delta P_j|_1 \leqslant 2\varepsilon\, (\varepsilon + 2\,|u| + 2\,|v|).$$

Следовательно, согласно теореме 1 для вещественной части K_R оператора K справедливо соотношение

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{n\ (r,\ K_R)}{r} = 0.$$

Так как оператор $K_R - G$ — конечномерный, а именно $2p$-мерный оператор

$$(K_R f - Gf)(x) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \left(v_k(x) \int_a^b u_k(t)\, f(t)\, dt + u_k(x) \int_a^b v_k(t)\, f(t)\, dt \right),$$

то, если оператор G, а следовательно и оператор K_R, имеет бесконечное число положительных (отрицательных) характеристических чисел, по известным неравенствам Куранта (см. [4], стр. 258) будем иметь

$$\alpha^{+}_{n-2p}(K_R) \leqslant \alpha^{+}_{n}(G) \leqslant \alpha^{+}_{n+2p}(K_R),$$
$$\alpha^{-}_{n+2p}(K_R) \leqslant \alpha^{-}_{n}(G) \leqslant \alpha^{-}_{n-2p}(K_R).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{n\ (r,\ G)}{r} = 0,$$

т. е. имеет место (5).

Если оператор G неотрицателен, то K_R будет иметь только конечное число отрицательных характеристических чисел а следовательно, по теореме II, будет выполняться соотношение (6).

2. Пусть теперь ядро интегрального оператора G имеет более общий вид:

$$R(x,\ t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} u_k^{(1)}(x)\ v_k^{(1)}(t), & x \leqslant t \\ \sum\limits_{k=1}^{m} u_k^{(2)}(x)\ v_k^{(2)}(t), & x \geqslant t, \end{cases} \tag{9}$$

где функции $u_k^{(i)}(x)$, $v_k^{(i)}(x)$ $(k=1, 2, \cdots, m; \quad i=1, 2)$ принадлежат $L^2(a, b)$.

Теорема 2. *Если $s_1(R) \geqslant s_2(R) \geqslant \cdots \geqslant s_n(R) \cdots$ — сингулярные числа оператора R, то существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} ns_n(R).$$

Эта теорема уточняет результат Вайдмана [1], согласно которому последовательность $ns_n(R)$ ограничена.

Для простоты записи доказательство теоремы 2 мы проведем в случае, когда $m=1$, т. е. ядро оператора R имеет вид:

$$R(x, t) = \begin{cases} u_1(x)\, v_1(t), & x \leqslant t \\ u_2(x)\, v_2(t), & x > t. \end{cases}$$

Легко подсчитать, что ядро оператора R^*R дается формулой:

$$(R^*R)(x, t) = v_1(x)\, v_2(t)(w(x) - w(t)) + v_1(x)\, v_1(t)\, w_1(t) +$$
$$+ v_2(x)\, w_2(x)\, v_2(t) \text{ при } t \leqslant x,$$
$$(R^*R)(x, t) = (R^*R)(t, x),$$

где

$$w(x) = \int_a^x u_1(y)\, u_2(y)\, dy, \quad w_1(x) = \int_a^x u_1^2(y)\, dy, \quad w_2(x) = \int_x^b u_2^2(y)\, dy.$$

Таким образом, ядро неотрицательного оператора R^*R имеет вид (4), где соответствующие функции, как легко видеть, принадлежат пространству $L^2(a, b)$. Таким образом, для оператора R^*R справедливо соотношение (6), т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} ns_n(R)$. В случае общего ядра (9) ядро R^*R снова будет иметь вид (4) с $d = 4m^2$.

Замечание. Как показывает доказательство соотношения (6) теоремы 1, оно распространяется и на тот случай, когда $G(x, t)$ p-парное эрмитово ядро, т. е.

$$\bar{G}(x, t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(x)\, v_k(t), & x \leqslant t \\ \sum\limits_{k=1}^{p} \overline{u_k(t)}\; \overline{v_k(x)}, & x > t. \end{cases} \tag{10}$$

Отметим, что роль вольтеррова оператора K будет играть оператор

$$(\bar{K}f)(x) = \int_a^x \sum_{k=1}^{p} (\overline{u_k(t)}\; \overline{v_k(x)} - u_k(x)\, v_k(t))\, f(t)\, dt.$$

Следовательно, теорема 2 справедлива также в том случае, когда $u_k^{(i)}(x)$ и $v_k^{(i)}(x)$ $(k=1, 2, \cdots, m;\ i=1, 2)$ — комплексные функции.

Что касается соотношения (5) теоремы 1, то имеет место следующая

Теорема 3. *Для характеристических чисел интегрального оператора, порожденного p-парным эрмитовым ядром* (10), *справедливо соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r, \bar{G})}{r}=\frac{1}{\pi}\int_a^b\left|\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{p}u_k(x)\,v_k(x)\right|dx.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 7.X.1977

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ. Որոշ ինտեգրալ օպերատորների սեփական արժեքների մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկվում է (4), (9) և (10) կորիզներով որոշված ինտեգրալ օպերատորների սեփական արժեքների վարքը։ Ստացվում են թեորեմ 1—3-ում գրված առնչությունները, որտեղ $\{\alpha_n(G)\}_{n=1}^{\infty}$-*ը* G *օպերատորի խարակտերիստիկ թվերն են, իսկ* $\{s_n(G)\}_{n=1}^{\infty}$-*ը նույն օպերատորի սինգուլյար թվերն են։*

V. A. JAVRIAN. *On the eigenvalues of some integral operators* (summary)

The behaviour of characteristic number of integral operators with kernels having the form (4), (9) or (10), is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Weidmann.* Verteilung der Eigenwerte für eine Klasse von Integraloperatoren in $L^2(a, b)$, Journal für reine und angew. Math., 276, 1975, 213—220.
2. *М. Г. Крейн, И. Ц. Гохберг.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Изд. „Наука", 1965.
3. *М. Г. Крейн.* О неопределенном случае краевой задачи Штурма-Лиувилля в интервале $(0, \infty)$, Изв. АН СССР, сер. матем. 16, 1952, 292—324.
4. *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь.* Лекции по функциональному анализу, М., ИИЛ, 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

Г. З. САРКИСЯН

ЭФФЕКТВНАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРЕДИКАТОВ И ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе Р. Карпа [1] вводится определенное математическое уточнение интуитивного понятия дискретной математической задачи, эффективно разрешимой посредством реально осуществимого алгоритмического процесса; в качестве такого уточнения, в соответствии с тезисом Д. Эдмондса [1], рассматривается понятие предиката, разрешимого на детерминированной машине Тьюринга за полиномиальное время.

В работе Р. Карпа дано также математическое уточнение общего понятия задачи, решение которой связано с определенного типа перебором показательного объема; в качестве такого уточнения рассматривается понятие предиката, разрешимого на недетерминированной машине Тьюринга за полиномиальное время. (Классы предикатов и функций указанных типов мы будем обозначать, также как и в работе Р. Карпа, через P, NP, П).

В настоящее время неизвестно, имеет ли место $P = NP$, хотя естественно предполагать, что $P \neq NP$. Согласно результатам указанной работы Р. Карпа, равенство $P = NP$ равносильно принадлежности классу P некоторых предикатов (называемых полными проблемами), связанных с разрешимостью ряда широко известных задач дискретной математики.

Математические уточнения понятий эффективной разрешимости введенные в работе Р. Карпа, естественны в тех случаях, когда ставится вопрос о свойствах единого алгоритма, разрешающего рассматриваемую задачу для дискретных объектов любой, сколь угодно большой сложности.

Однако можно представить себе и такую ситуацию, когда нас интересует решение рассматриваемой задачи лишь для „дискретных объектов ограниченной сложности; так, например, рассматривая решение каких-либо дискретных задач на вычислительной машине, естественно рассматривать лишь такие задачи, записи которых могут быть хотя бы в принципе введены в вычислительную машину (разница между указанными постановками задач рассмотрена в работе А. Мейера [3]). При такой постановке, по-видимому, более естественно рассматривать не единый алгоритм для решения задачи применительно к любым объектам, а брать в отдельности алгоритмы, решающие задачу для объектов каждой заданной сложности.

В этой работе вводятся математические уточнения указанных выше интуитивных понятий, отличающиеся от уточнений Р. Карпа и основанные на рассмотрении трудности разрешения дискретных задач по отдельности для дискретных объектов каждой фиксированной сложности. В качестве алгоритмического аппарата при рассмотрении разрешимости задач взят аппарат схем из функциональных элементов с обычным пониманием их сложности. Вводятся классы предикатов S и ES, аналогичные классам Р. Карпа P и NP, но отличающиеся от них (например, предикаты класса S могут быть даже не рекурсивными). Устанавливается, что классы S и ES обладают свойствами, аналогичными свойствам классов P и NP.

Остается открытым вопрос о том, имеет ли место $S = ES$, однако доказывается, что если $S \neq ES$ то $P \neq NP$ (вопрос об обратной импликации тоже остается открытым).

Устанавливается также, что если хотя бы один из предикатов, указанных в работе Р. Карпа в качестве полных проблем, принадлежит S, то $S = ES$.

Через $\sum^*$ будем обозначать множество всех конечных слов в алфавите $\{0, 1\}$. Будем рассматривать предикаты, определенные для множества $\sum^*$. Через $l(p)$ будем обозначать длину слова p.

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов (или, сокращенно, ф-схемы), в каком-нибудь фиксированном полном базисе, например, $(\&, V, \neg)$ ([4], [5]).

Посредством $S^l_{k_1,\cdots,k_n}$ будем обозначать функциональную схему с $k_1 + \cdots + k_n$ входами и l выходами. Через $\overline{S}^l_{k_1,\cdots,k_n}$ будем обозначать булев оператор, реализуемый ф-схемой $S^l_{k_1,\cdots,k_n}$, а через $\|S^l_{k_1,\cdots,k_n}\|$ — сложность ф-схемы $S^l_{k_1,\cdots,k_n}$ (т. е. количество ее элементов и входов).

Говоря „полином", в дальнейшем всюду будем иметь в виду полином от одной переменной с целыми коэффициентами.

Определение 1. Предикат $p(x_1,\cdots, x_n)$ называется *F-полиномиально разрешимым*, если существует полином T такой, что для всяких $m_1,\cdots, m_n$ существует ф-схема $S^1_{m_1,\cdots,m_n}$, удовлетворяющая условию

$$\|S^1_{m_1,\cdots,m_n}\| \leqslant T(m_1 + \cdots + m_n)$$

и такая, что при любых $x_1,\cdots, x_n \in \sum^*$, если $l(x_1) = m_1,\cdots, l(x_n) = m_n$, то

$$\overline{S}^1_{m_1,\cdots,m_n}(x_1,\cdots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \neg\, p(x_1,\cdots, x_n); \\ 1, & \text{если } p(x_1,\cdots, x_n). \end{cases}$$

Класс полиномиально разрешимых предикатов будем обозначать через S.

Определение 2. Предикат $q(x_1,\cdots, x_n)$ называется предикатом *F-переборного типа*, если существует F-полиномиально разрешимый предикат $p(y, x_1,\cdots, x_n)$ и полином T, такие что

$$q(x_1, \cdots, x_n) \equiv \exists\, y_{l(y)=T(l(x_1)+\cdots+l(x_n))}\, p(y, x_1, \cdots, x_n).$$

Класс всех предикатов **F**-переборного типа будем обозначать через ES.

Через $D(x, t)$ будем обозначать такую функцию, что для каждого слова $x\,(x \in \sum^*)$ и для каждого натурального числа t имеет место соотношение:

$$D(x, t) = \begin{cases} \underbrace{0\,0 \cdots \cdots \cdots 0}_{2t \text{ раз}}, & \text{если } l(x) > t; \\ x\underbrace{0 \cdots 0}_{t-l(x) \text{ раз}}\ \underbrace{1 \cdots 1}_{l(x) \text{ раз}}\ \underbrace{0 \cdots 0}_{t-l(x) \text{ раз}}, & \text{если } l(x) \leqslant t. \end{cases}$$

Определение 3. Пусть f есть функция типа $(\sum^*)^n \to \sum^*$. Будем говорить, что функция f **F**-*вычислима*, если существует полином T такой, что для всяких $m_1, \cdots, m_n$ существует ф-схема $S^{2t}_{m_1,\cdots,m_n}$, где

$$t = \max_{\substack{l(x_1)=m_1 \\ \cdots\cdots \\ l(x_n)=m_n}} l(f(x_1, \cdots, x_n)),$$

удовлетворяющая условиям

$$\|S^{2t}_{m_1,\cdots,m_n}\| \leqslant T(m_1 + \cdots + m_n) \quad \text{и}$$

$$\forall x_{1\, l(x_1)=m_1}\, \forall x_{2\, l(x_2)=m_2} \cdots \forall x_{n\, l(x_n)=m_n} (\bar{S}^{2t}_{m_1,\cdots,m_n}(x_1, \cdots, x_n) =$$

$$= D(f(x_1, \cdots, x_n), 2t)).$$

Класс всех **F**-вычислимых функций обозначим через F.

Легко видеть, что предикат p принадлежит классу S в том и только в том случае, когда его характеристическая функция принадлежит классу F.

Определение 4. Пусть $p_1(x_1, \cdots, x_n)$ и $p_2(x_1, \cdots, x_r)$ — предикаты, определенные на множестве $\sum^*$. Скажем, что „p_1 **F**-*сводится к* p_2“ ($p_1 \trianglerighteq p_2$), если существуют n-местные функции $f_1, f_2, \cdots, f_r \in F$ такие, что при любых $x_1, \cdots, x_n \in \sum^*$

$$p_2(f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_r(x_1, \cdots, x_n)) \Longleftrightarrow p_1(x_1, \cdots, x_n).$$

Определение 5. Пусть $\{a_0, \cdots, a_m\}$, $\{q_0, \cdots, q_n\}$ — внешний и внутренний алфавит машины Тьюринга A. Зафиксируем некоторое взаимно однозначное соответствие между символами $a_0, \cdots, a_m, q_0, \cdots, q_n$ и некоторыми булевыми векторами длины r. Вектор, соответствующий символу a_i или q_j, будем называть *кодом* этого символа и обозначать через $K_r(a_i)$, или $K_r(q_j)$; условимся, что $K_r(a_0)$ есть нулевой булевый вектор.

Двоичным r-кодом масштаба l конфигурации $a_{j_1} \cdots a_{j_{t-1}} q_i a_{j_t} \cdots a_{j_k}$ машины A, где $k \leqslant l-1$, назовем булев вектор, получаемый посредством соединения кодов

$$K_r(a_{j_1})\,K_r(a_{j_2})\cdots K_r(a_{j_{l-1}})\,K_r(q_l)\,K_r(a_{j_l})\cdots K_r(a_{j_k})\,\underbrace{K_r(a_0)\cdots K_r(a_0)}_{l-k-1 \text{ раз}},$$

этот код будем обозначать через

$$K_r^l(a_{j_1}\cdots a_{j_{l-1}}\,q_l\,a_{j_l}\cdots a_{j_k}).$$

Лемма 1. *Если* $p \in P$, *то* $p \in S$.

Доказательство. Метод доказательства аналогичен доказательству теоремы Кука [2], а именно, строится ф-схема, распознающая истинность p на словах ограниченной длины, аналогично тому, как в теореме Кука вопрос об истинности предиката p на словах ограниченной длины приводился к тождественной истинности некоторой дизъюнктивной нормальной формы.

Для простоты будем считать, что p есть одномерный предикат. Пусть $p \in P$, это значит, что существует детерминированная машина Тьюринга A с алфавитами $\{a_0,\cdots,a_m\}$, $\{q_0,\cdots,q_n\}$, которая распознает предикат p за полиномиальное время, то есть, машина A распознает предикат p, и существует такой полином T, что для каждого слова $x \in \sum^* t(x) \leqslant T(l(x))$, (где $t(x)$— количество шагов работы A, исходя из входного слова x).

Пусть $D_l = (c_{i_1}^l, c_{i_2}^l,\cdots, c_{i_{k_l}}^l)$ при $l = 1, 2,\cdots, t(x)$ суть конфигурации, получаемые в процессе работы машины A при распознавании значения p на слове x.

Нам потребуется ф-схема, которая по каждому W коду конфигурации D_l (где $l < t(x)$) машины A в масштабе

$$d \text{ (где } d = \max_{l(x)=m}\ \max_{l=1,\cdots,t(x)} k_l;\ w =]\log_2(m+n+2)[)$$

дает код непосредственно следующей за D_l конфигурации D_{l+1} в том же масштабе. Пусть $K_w^d(D_l) = K_1K_2\cdots K_d$ для некоторого

$$l < t(x),\ K_w^d\ (D_{l+1}) = K'_1\,K'_2\cdots K'_d.$$

Легко видеть, что при любом i, $1 < i < d-1$ символ K'_i однозначно определяется (на основании программы рассматриваемой машины) символами K_{i-1}, K_i, K_{i+1}, K_{i+2}, кроме того символ K'_1, однозначно определяется символами K_1, K_2, K_3; K'_{d-1} —символами K_{d-2}, K_{d-1}, K_d; K'_d— символами K_{d-1}, K_d. Пользуясь этим, построим ф-схему S_{4w}^w, которая по значениям K_{i-1}, K_i, K_{i+1}, K_{i+2} (или по сокращенными наборами значений для K'_1, K'_{d-1}, K'_d) позволяет найти K'_i. Для одновременного нахождения всех K'_i $i = 1,\cdots, d$ теперь достаточно соединить параллельно d схем S_{4w}^w и для нахождения последней конфигурации, исходя из начальной, нужно взять последовательно $\max\limits_{m=l(x)} t(x)$ схем. Если сложность схемы S_{4w}^{w} обозначим через c (ясно, что S_{4w}^{w} и c зависят только от программы заданной машины, и не зависят от d и от входного слова x), в результате получается ф-схема со сложностью

$$cd \cdot \max_{l(x)=m} t(x);$$

эта схема будет в частности распознавать предикат p на словах длины $l(x)=m$. Так как $d \leqslant l(x)+T(l(x))$ и $t(x) \leqslant T(l(x))$, то сложность ф-схемы не превосходит

$$c \cdot T(l(x))\,[l(x)+T(l(x))].$$

Эта ф-схема представлена в блок-схеме 1 (рис. 1), где каждый

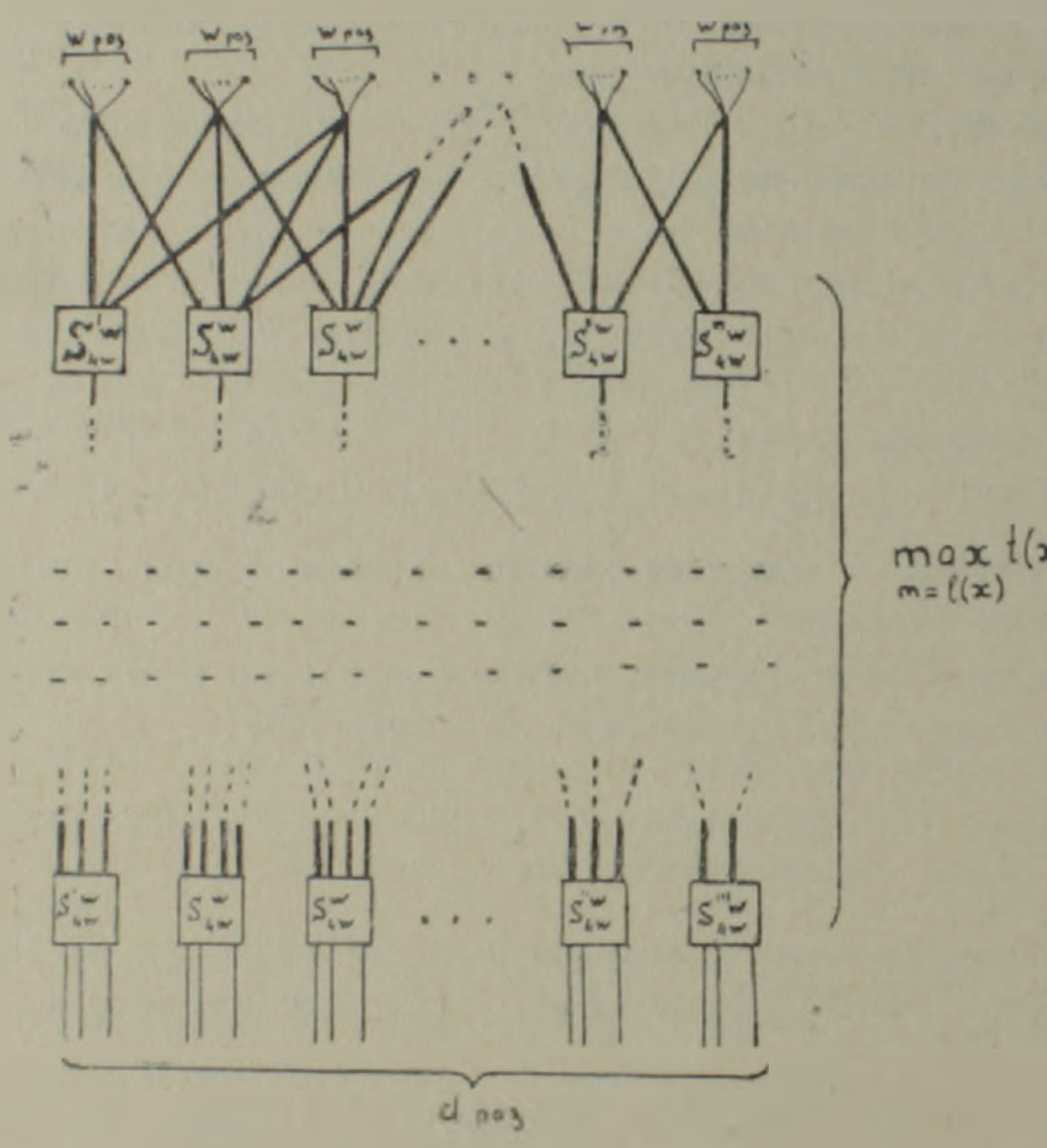

Рис. 1.

вход и выход, нарисованные жирными линиями, надо понимать как пучок, состоящий из w соединений.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Предикат p представим в виде*

$$\exists x_{l(x)=T(l(y))}\, r(x, y) \tag{1}$$

(где $r \in S$, T — некоторый полином) в том и только в том случае, когда его можно представить в виде

$$\exists x_{l(x)\leqslant T'(l(y))}\, r'(x, y), \tag{2}$$

где $r' \in S$, T' — некоторый полином.

Доказательство. Предположим, что p представляется в виде (1)

$$p(y) \equiv \exists x_{l(x)=T(l(y))}\, r(x, y).$$

Легко проверить, что

$$p(y) \equiv \exists x_{l(x) \leqslant T(l(y))}\, r'(x, y),$$

где $r'(x, y) = r(x, y) \,\&\, (l(x) = T(l(y)))$.

Докажем обратное. Пусть

$$p(y) \equiv \exists x_{l(x) \leqslant T(l(y))}\, r(x, y)$$

и пусть x — слово в алфавите $\{0, 1\}$, и $l(x) \leqslant T(l(y))$. Обозначим через $\bar{x}$ слово $x * \underbrace{00 \cdots 0}_{T(l(x)) - l(x) - 1 \text{раз}}$ в алфавите $\{0, 1, *\}$. Перекодируем 0; 1; $*$ в алфавит $\{0, 1\}$ (например, 0 посредством 00, 1 посредством 11, $*$ посредством 01) и код слова, полученный в результате указанной перекодировки букв в слове $\bar{x}$, обозначим через $\bar{x}' \equiv \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{2T(l(y))}$.

Построим двуместную функцию φ, принадлежащую F и такую, что для любых x и y, если $l(x) \leqslant T(l(y))$, и $\bar{x}'$ есть слово, построенное исходя из x и y только что указанным образом, то $\varphi(\bar{x}', y) \equiv x$. Построим также двуместную функцию ψ, принадлежащую F и такую, что $\psi(z, y) = 0$, если $l(z) = 2T(l(y))$ и существует x такой, что $l(x) \leqslant T(l(y))$ и слово $\bar{x}'$, построенное указанным выше образом, исходя из x и y, совпадает с z, в противном случае $\psi(z, y) = 1$.

Легко проверить, что

$$p(y) \equiv \exists z_{l(z) = T'(l(y))}\, r'(z, y),$$

где $T'(n) = 2T(n)$,

$$r'(z, y) \equiv (\psi(z, y) = 0) \,\&\, r(\varphi(z, y), y).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $p \in NP$, то $p \in ES$.*

Доказательство следует из определения класса NP, лемм 1 и 2.

Лемма 4. *Существует предикат p_0 такой, что $p_0 \in S$, но $p_0 \overline{\in} NP$.*

Доказательство. Ясно, что предикаты из классов P и NP рекурсивны.

Положим

$$p_0(x) = \begin{cases} И, & \text{если } x = 2^n - 1 \,\&\, p'(n) \\ Л & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $p'(n)$ — какой-либо нерекурсивный предикат. Не существует машины Тьюринга, распознающей этот предикат. Но для каждого конкретного n существует ф-схема S_n^1, распознающая этот предикат и такая, что $\|S_n^1\| \leqslant 2n$. В самом деле, $p'(n) = И$ или $p'(n) = Л$, когда $p'(n) = Л$, то соответствующую схему можно представить в виде

$x_1 \& \neg x_1$, а когда $p'(n) = И$, то $p_0(x) = И$ при $l(x) = n$ только для $x = \underbrace{0 \cdots 0}_{n \text{ раз}}$ и требуемую схему можно построить в виде $\neg x_1 \& \neg x_2 \& \cdots$ $\cdots \& \neg x_n$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если $f \in \Pi$, то $f \in F$.*

Лемма доказывается таким же образом, как лемма 1, только к выходам схемы, построенной так же, как в доказательстве леммы 1, добавляется еще одна схема $C^{2w \cdot l_f^m}_{w \cdot l_f^m}$, которая преобразует код $K_w^{l_f^m}(f(x))$ в код $K_w^{l_f^m}(f(x))\, K_w^{l_f^m}\underbrace{(1 \cdots 1)}_{l(f(x)) \text{ раз}}$ (здесь $l_f^m = \max\limits_{l(x)=m} l(f(x))$; $w =]\log_2(m + n + 2)[$, где $m + n + 2$ — мощность суммы внешнего и внутреннего алфавитов машины Тьюринга, реализующей функцию f).

Блок-схема ф-схемы, реализующей функцию f, показана на рис. 2.

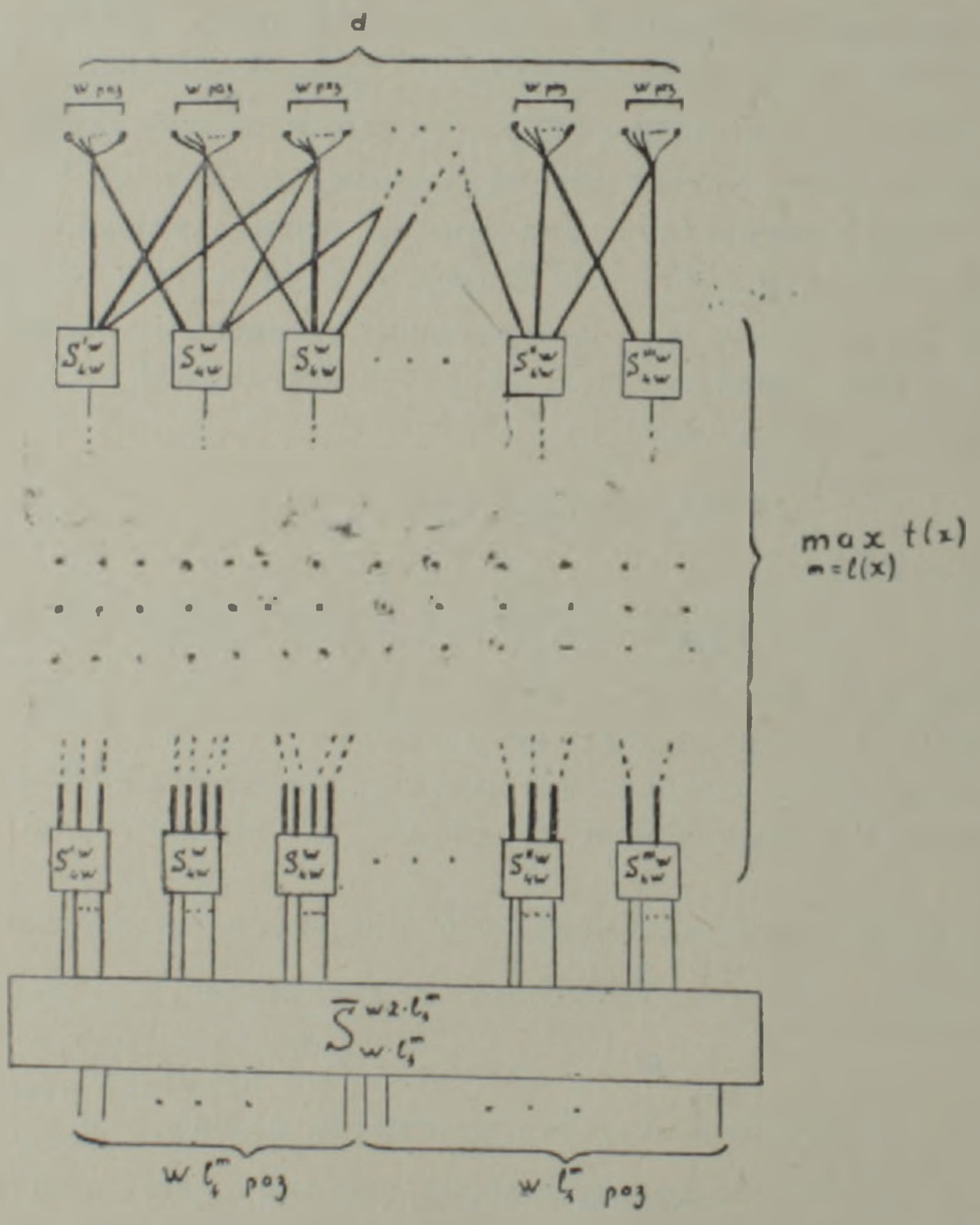

Рис. 2.

Определение 6. Предикат p называется **F**-полиномиально полным, если
1. $p \in ES$;
2. $\forall q\,(q \in ES \supset q \triangleright p)$.

Лемма 6. *Если* $p_1 \infty p_2$, *то* $p_1 \vdash p_2$.

Доказательство проводится на основании леммы 5.

Лемма 7. *Если* $p_1 \vdash p_2$ & $p_2 \in S$, *то* $p_1 \in S$.

Для простоты будем считать, что p_1 и p_2— одноместные предикаты. Пусть $p_1 \vdash p_2$. Это значит, что существует $f \in F$ такая, что

$$p_2(f(x)) <=> p_1(x)$$

и для всякого m существует ф-схема $(S'^{2l_f^m \cdot w}_{l_f^m \cdot w})'$ (где $l_f^m = \max\limits_{l(x)=m} l(f(x))$, реализующая функцию f для слов длины m.

Имеем $p_2 \in S$, а потому для всякого n существует ф-схема S_n^1, распознающая p_2 на словах длины n, при этом

$$\|(S'^{2l_f^m \cdot w}_{l_f^m \cdot w})'\| \leqslant T(l_f^m \cdot w),$$

$$\|S_n^1\| \leqslant T'(n),$$

где T и T' — некоторые полиномы.

Для разных слов x одинаковой длины m, длина $f(x)$ может быть разной, и величина $f(x)$ может изменяться от 0 до $\max\limits_{l(x)=m} l(f(x)) = l_f^m$, поэтому построим ф-схемы $S_0^1, S_w^1, \cdots, S_{wl}^1$, распознающие предикат p_2 на словах длины соответственно $0, w, 2w, \cdots, l_f^m w$.

Блок-схема общей схемы $S^1_{l_f^m \cdot w}$, распознающей $p_2(f(x))$, дана на

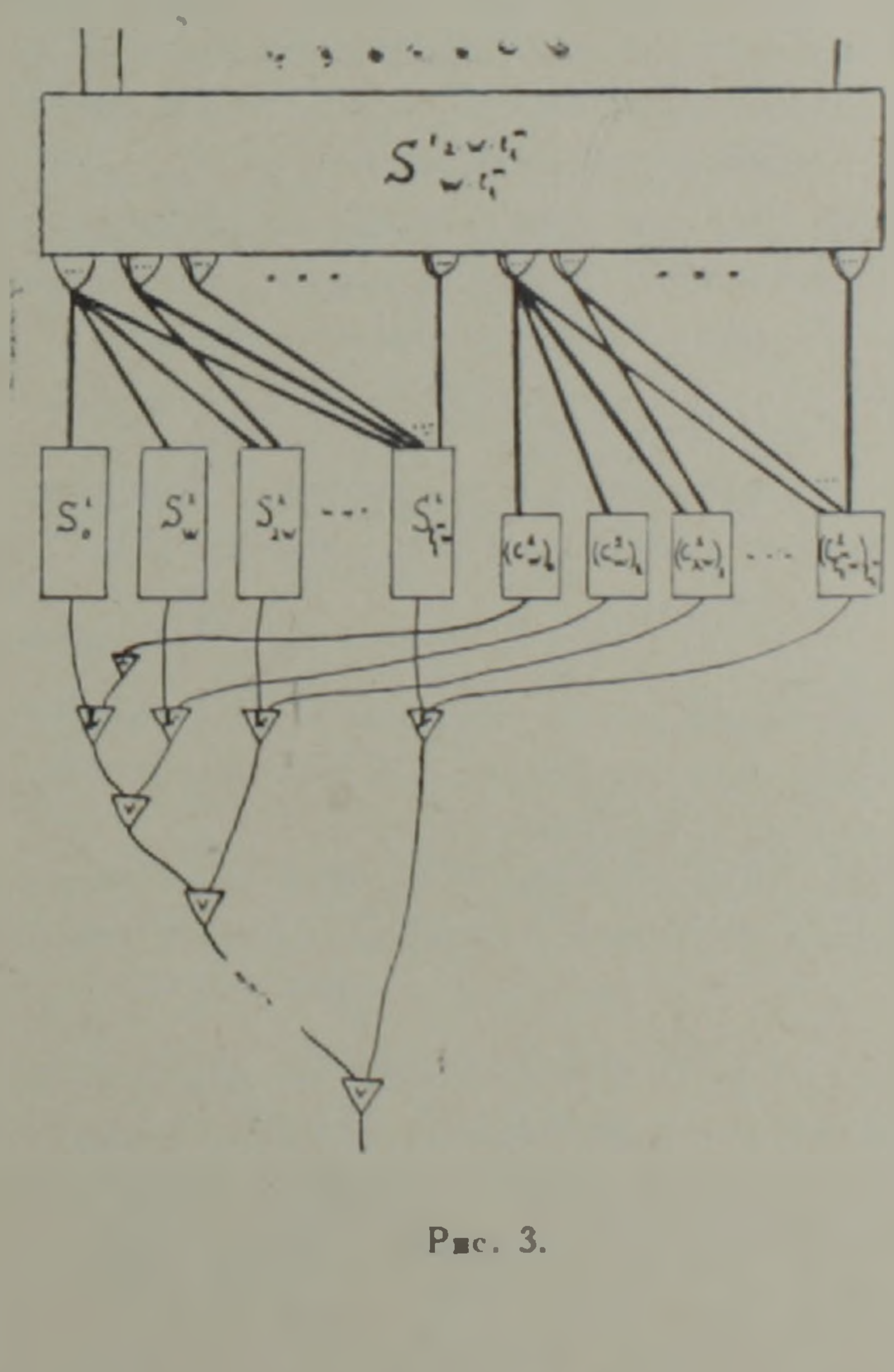

Рис. 3.

рис. 3. Каждая ф-схема $(c^1_{w l^m_f})_i$ проверяет равна ли $w \cdot i$ длина слова $K^{l(f(x))}_w(f(x))$; через c_i обозначим сложность этой схемы.

Сложность общей схемы $S^{l^m_f}_w$ не превосходит

$$T(l^m_f \cdot w) + T'(0) + T'(w) + T'(2w) + \cdots + T'(w \cdot l^m_f) +$$
$$+ c_1 + \cdots + c_{l^m_f} + 2\,l^m_f - 1 = T^*(w \cdot l^m_f),$$

где T^* — некоторый полином.

Лемма доказана.

„Преобразованием Цейтина" будем называть алгоритм Ц, который по всякой схеме s из функциональных элементов &, V, $\neg$ выдает конъюнктивную нормальную форму Ц(s), получаемую по следующим правилам (этот алгоритм введен Г. С. Цейтиным в работе [6], стр. 235—236):

1. Каждому элементу ф-схемы s сопоставляется некоторая пропозициональная переменная, при этом различным элементам сопоставляются различные переменные, входам схемы $x_1, \cdots, x_n$ сопоставляются они сами. Вместо „элемент, которому сопоставлена переменная z", в дальнейшем будем говорить „элемент z".

2. Наряду с пропозициональными переменными, каждому элементу ф-схемы сопоставляется некоторый набор элементарных дизъюнкций, составленных из этих элементов по следующим правилам: если элемент z_i есть элемент, реализующий конъюнкцию, входы которого соединены с выходами элементов z_j и z_h, то элементу z_i сопоставляются три элементарных дизъюнкции

$$(\neg z_j \vee \neg z_h \vee z_i), \ (\neg z_i \vee z_j), \ (\neg z_i \vee), \ (\neg z_h),$$

если элемент z_i есть элемент, реализующий дизъюнкцию, то ему сопоставляются три элементарные дизъюнкции

$$(\neg z_j \vee z_i), \ (\neg z_h \vee z_i), \ (\neg z_i \vee z_j \vee z_h),$$

если элемент z_i есть элемент, реализующий отрицание, вход которого соединен с выходом элемента z_j, то элементу z_i сопоставляются две элементарные дизъюнкции

$$(z_j \vee z_i), \ (\neg z_i \vee \neg z_j).$$

3. Берется конъюнкция всех построенных элементарных дизъюнкций и пропозициональной переменной, сопоставленной выходу схемы s; полученная к.н.ф. и есть Ц(s).

Лемма 8 (см. [6]). *Пусть f—булева функция, реализуемая схемой s, f'—булева функция, реализуемая формулой Ц(s). Тогда*

$$f \not\equiv 0 \iff f' \not\equiv 0.$$

Доказательство легко следует из рассмотрений работы [6].

Будем считать, что зафиксирован какой-либо естественный способ кодирования пропозициональных формул в виде слов в $\sum$ (например, такой же, какой принят в работе Р. Карпа [1]).

Лемма 9. *Для любой схемы s из функциональных элементов* &, $\vee$, $\neg$

$$l(\text{Ц}(s)) \leqslant c_0 \|s\| \cdot \log \|s\|,$$

где c_0 — постоянная, зависящая лишь от принятого способа кодирования пропозициональных формул.

Доказательство очевидно на основании определения преобразования Ц.

Посредством ВЫП будем обозначать одноместный предикат, определенный на словах из Σ^* и такой, что ВЫП (x) имеет место тогда и только тогда, когда x есть код к.н.ф., определяющей булеву функцию, отличную от тождественного нуля.

Теорема 1. *Если $p \in ES$, то $p \vartriangleright$ ВЫП.*

Доказательство. Пусть $p \in ES$. Для простоты будем предполагать, что p — одноместный предикат. Имеем

$$p(y) \equiv \exists x_{l(x) = T(l(y))}\, r(x, y),$$

где $r \in S$, и T — некоторый полином.

Для доказательства теоремы нам нужно доказать существование функции $f \in F$, такой что при любом y

$$\text{ВЫП}(f(y)) \Longleftrightarrow p(y).$$

Опишем как строится слово $f(y_0)$ при заданном $y_0 \in \Sigma^*$. Обозначим $l(y_0)$ через n. Ввиду $r \in S$ существует ф-схема $S^1_{T(n)+n}$, распознающая истинность предиката r на парах слов (x, y), где $l(y) = n$, $l(x) = T(n)$, и такая, что $\|S^1_{T(n)+n}\| \leqslant T_1(n)$, где T_1 — некоторый полином. Теперь построим схему, распознающую предикат $r(x, y_0)$ на всевозможных словах x длины $T(n)$. Для получения этой ф-схемы к каждому входу схемы $S^1_{T(n)+n}$, соответствующему переменной $x_{T(n)+i}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, подключим схему вида $x_1 \& \neg x_1$ или $x_1 \vee \neg x_1$ в случаях, когда соответствующая буква $y_0^{(i)}$ слова $y_0 = y_0^{(1)} y_0^{(2)} \cdots y_0^{(n)}$ есть 0 или 1. Так построенную схему обозначим через $(S^1_{T(n)})'$. Ясно, что $\|(S^1_{T(n)})'\| \leqslant T_2(n)$, где T_2 — некоторый полином.

При помощи преобразования Цейтина построим к.н.ф. $\text{Ц}((S^1_{T(n)})')$. Согласно лемме 9, длина кода $\text{Ц}((S^1_{T(n)})')$ не превосходит

$$c_0 \|(s^1_{T(n)})'\| \cdot]\log (s + \|(s^1_{T(n)})'\|)[\leqslant T_3(n),$$

где T_3 — некоторый полином. Функция, которая данному y_0 ставит в соответствие код формулы $(\text{Ц}(S^1_{T(n)})')$, будет требуемой функцией f. В самом деле, соотношение

$$\text{ВЫП}(f(y_0)) \Longleftrightarrow p(y_0)$$

немедленно следует из построения функции f, принадлежность f классу F вытекает из того, что для каждого фиксированного n и для каждого y_0, где $l(y_0) = n$, код $\text{Ц}((S^1_{T(n)})')$ состоит из двух частей, из которых первая (соответствующая $\underset{\sim}{\text{Ц}}(S^1_{T(n)+n})$) не зависит от y_0 и имеет длину, не превосходящую $T_3(n)$, а вторая, соответствующая частям схемы $\underset{\sim}{\text{Ц}}((S^1_{T(n)})')$, добавленным при переходе от $S^1_{T(n)+n}$ к $S^1_{T(n)}$, получается из y_0 посредством очевидных преобразований, проводимых по отдельности для каждой буквы слова y_0 и реализуемых посредством однотипных функциональных схем с полиномиально ограниченной сложностью.

Теорема доказана.

Следствие 1. Предикат ВЫП F-полиномиально полный.

Следствие 2. Если ВЫП $\rhd p$, то p F-полиномиально полный.

Следствие 3. Если предикат p полон в смысле определения 5 из [1], то p является F-полиномиально полным.

Следствие 4. Если некоторый предикат p полон в смысле определения 5 из [1] и $p \in S$, то $S = ES$.

Доказательство. Пусть p полон в смысле определения 5 из [1], это значит, что

$$\text{ВЫП} \infty p.$$

Согласно лемме 5, ВЫП $\rhd p$, а так как $p \in S$, то, согласно лемме 6, ВЫП $\in S$, следовательно

$$S = ES.$$

Теорема 2. *Если*

$$S \neq ES, \text{ то } P \neq NP.$$

Доказательство. Предположим, что $S \neq ES$, это значит, что ВЫП $\overline{\in} S$, в противном случае, согласно лемме 7, было бы $S = ES$.

Из ВЫП $\overline{\in} S$ следует, что ВЫП $\overline{\in} P$ согласно лемме 1; из этого, в свою очередь, следует, что $P \neq NP$, поскольку ВЫП $\in NP$.

Теорема доказана.

Следствие. Если $P = NP$, то $S = ES$.

Краткое изложение результатов настоящей статьи было опубликовано в [7].

Ереванский государственный
университет

Поступила 6.VII.1976

Գ. Զ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ. Թվաբանական ֆունկցիաների և պրեդիկատների ֆունկցիոնալ տարրերից կազմված սխեմաներով որոշվող արդյունավետ հաշվարկելիություն (*ամփոփում*)

Սահմանվում են թվաբանական պրեդիկատների դասեր S և ES այնպես, որ S-ին պատկանող պրեդիկատները n երկարության երկուական կոդ ունեցող թվերի վրա իրացվում են $T(n)$ բարդության ֆունկցիոնալ սխեմաներով, որտեղ $T(n)$-ը ինչ-որ բազմանդամ է. ES դասերին պատկանող պրեդիկատները ստացվում են սահմանափակ գոյության քվանտորի միջոցով S դասի պրեդիկատներից։ Ապացուցվում է, որ S, ES և [1]-ում սահմանված P, NP դասերը նման հատկություններ ունեն, սակայն $S \neq P$, $ES \neq NP$։ Մասնավորապես ապացուցվում է, որ եթե $S \neq ES$, ապա $P \neq NP$։

C. Z. SARGISIAN. *The effective computability of arithmetic predicates and functions treated on the base of schemes from functional elements* (summary)

The classes S and ES of arithmetic predicates are defined so that predicates from S can be computed on the binary numbers of length n using schemes of functional elements with the complexity $T(n)$ where $T(n)$ is a polynom; the predicates belonging to ES are obtained from these belonging to S by the limited existential quantification. It is proved that S and ES have properties similar to these of the classes P and NP described in [1], however. $P \neq S$, $NP \neq ES$. For example, it is proved that if $S \neq ES$, then $P \neq NP$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. M. Karp.* Reducibility among cambinatorial problems, complexity of computer computations, ed. by R. E. Miller and J. W. Thatcher plenum press, N. Y., 1972, 85—104. (Русский перевод: Карп Р. М. Сводимость комбинаторных проблем, „Кибернетический сборник", вып. 12, М., изд. „Мир", 1975).
2. *S. A. Cook.* The complexity of theorem-proving procedure, Proc. 3d Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, Shaker Heights. Ohio, 1971, 151—159. (Русский перевод: Кук С. А. Сложность процедур вывода теорем. „Кибернетический сборник", вып. 12, М., изд. „Мир", 1975).
3. *A. R. Meyer.* The inherent computational complexity of Theories of Ordered Sets, A Brief Survey, Mass. Inst. of Technology, USA, 1974.
4. *О. Б. Лупанов.* О синтезе некоторых классов управляющих систем, сб. „Проблемы кибернетики", вып. 10, М., Физматгиз, 1963, 63—97.
5. *О. Б. Лупанов.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем—принципе локального кодирования, сб. „Проблемы кибернетики", вып. 14, М., Физматгиз. 1965, 31—110.
6. *Г. С. Цейтин.* О сложности вывода в исчислении высказываний, Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 8, Исследования по конструктивной математике и математической логике II, Л., 1968.
7. *Г. З. Саркисян.* Об одном понятии эффективной разрешимости предикатов, журн. „Молодой научный работник", 2 (22), Ереван, ЕГУ, 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

Ю. Г. ДАДАЯН

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НА РЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

В настоящей статье для решения трехмерных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами строятся вариационно-разностные схемы на регулярной сетке на основе кусочно-линейных базисных функций, удовлетворяющих условиям на разрыве. Показано, что оценки скорости сходимости схем в норме пространств W_2^1 и L_2 обладают предельной точностью.

§ 1. Построение вариационно-разностных схем (ВРС)

1. В ограниченной односвязной области Ω пространства R_3 переменных $(x_1, x_2, x_3)\equiv(x, y, z)$ с границей S рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{3}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+au=f \tag{1}$$

с краевым условием

$$\left(\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i)+\sigma u\right)\Bigg|_S=0,\ \sigma>0, \tag{2}$$

где ν — внешняя нормаль к S.

Пусть внутри Ω задана поверхность Λ, не пересекающаяся с S, которая разбивает Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2—внутреннюю и внешнюю. Будем предполагать, что Λ и S являются гладкими поверхностями класса C^2.

Уравнение (1) удовлетворяет условию эллиптичности, то есть для любой точки $(x, y, z)\in\overline{\Omega}$

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}(x, y, z)\,\xi_i\xi_j\geqslant\mu\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2,\ \mu>0.$$

Предположим следующее:

$$b_i\in C^1(\Omega),\ i=1, 2, 3,\ a\in C(\Omega),\ \sigma\in C^1(S),\ f\in L_2(\Omega).$$

Что же касается коэффициентов a_{ij}, то они терпят разрыв вдоль поверхности Λ; кроме того, $a_{ij}\in C^2(\Omega_l)$, где $ij=1, 2, 3$, $l=1, 2$.

Задача состоит в том, чтобы найти функцию $u(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1), условию (2) на границе S, а также следующим условиям на поверхности Λ разрыва коэффициентов a_{ij}:

$$[u]_\Lambda = u^+ - u^- = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial N}\right]_\Lambda = 0, \tag{3}$$

где

$$\left[\frac{\partial u}{\partial N}\right]_\Lambda = \sum_{i,\, j=1}^{3} \left(a_{ij}^+ \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^+ \cos(n, x_i) - a_{ij}^- \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^- \cos(n, x_i) \right),$$

а n — внешняя относительно области Ω_1 нормаль к Λ. Знак $+$ (или $-$) у функции означает, что берется ее предельное значение на Λ из Ω_1 (или Ω_2).

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{L}(u, \Phi) = \int_\Omega \left(\sum_{i,\, j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \Phi + au\Omega \right) d\Omega +$$

$$+ \int_S \sigma u \Phi dS, \quad (f, \Phi) = \int_\Omega f \Phi d\Omega;$$

здесь и ниже $d\Omega = dxdydz$.

Обобщенным решением нашей краевой задачи назовем функцию u из $W_2^1(\Omega)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\mathbf{L}(u, \Phi) = (f, \Phi) \tag{4}$$

при любой $\Phi \in W_2^1(\Omega)$.

Известно, что обобщенное решение задачи принадлежит пространству W_2^2 в каждой из подобластей Ω_1 и Ω_2, и имеет место оценка [1]

$$\|u\|^2_{2,\,\Omega_1} + \|u\|^2_{2,\,\Omega_2} \leqslant C\|f\|^2_{0,\,\Omega}.^* \tag{5}$$

Предполагается, что выполняется условие коэрцитивности, то есть для любой $u \in W_2^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\mathbf{L}(u, u) \geqslant C\|u\|^2_{1,\,\Omega}.$$

2. Выберем некоторый положительный, достаточно малый, параметр h, называемый шагом сетки.

Рассмотрим в пространстве R_3 кубическую сетку с шагом h. Через $\square_{ijk}$ обозначим ячейку сетки: $ih \leqslant x_1 \leqslant (i+1)h$, $jh \leqslant x_2 \leqslant (j+1)h$, $kh \leqslant x_3 \leqslant (k+1)h$. Каждую ячейку сетки разобьем на шесть треугольных пирамид, которые назовем симплексами и будем обозначать их через Δ_k, где $k = 1, 2, \cdots, 6$ (рис. 1).

* Буквой C с индексами внизу и без них здесь и везде ниже обозначаются различные положительные постоянные в неравенствах, не зависящие от h и рядом стоящих множителей.

Через Ω^h, называемой сеточной областью, обозначим наименьшее объединение симплексов, содержащее $\bar{\Omega}$. Вершины симплексов, составляющих Ω^h, назовем узлами сетки и обозначим через R^h.

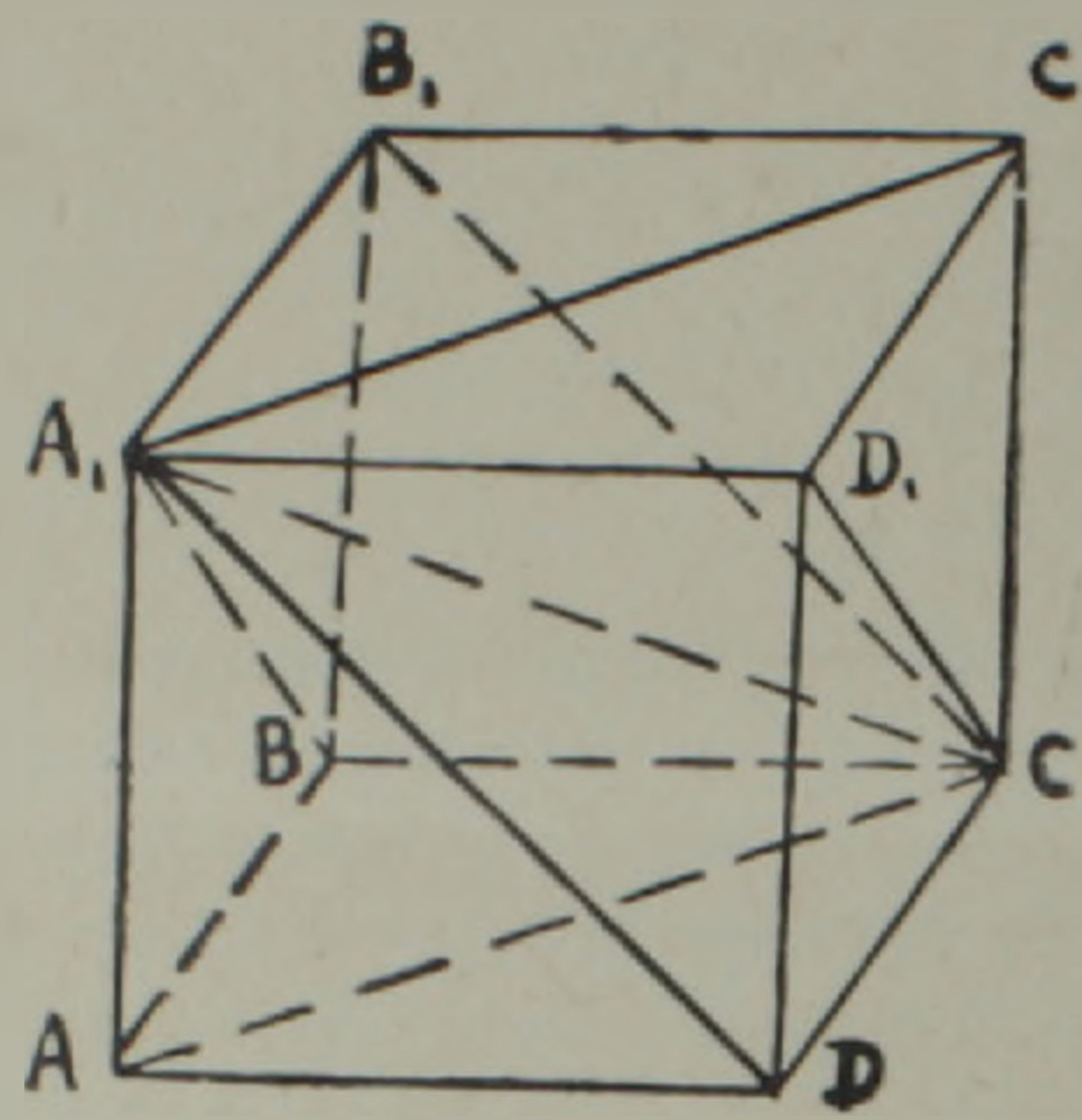

Рис. 1.

Пусть поверхность Λ разбита на конечное число не налегающих друг на друга кусков $\Lambda = \cup \Lambda_m$, и для каждого Λ_m существует область $\Pi_m \subset R_2$ и регулярное отображение: $\Phi_m\ \Pi_m \to R_3$, такое, что $\Phi_m(\Pi_m) = \Lambda_m$. Рассмотрим цилиндры $Q_m^+ = [0, \sqrt{3}h] \times \Pi_m$, $Q_m^- = [-\sqrt{3}h, 0] \times \Pi_m$ и отображения $\Phi_m^*: Q_m \to R_3$, $Q_m = Q_m^+ \cup Q_m^-$:

$$\Phi_m^* (r, t_1, t_2) = \Phi_m (t_1, t_2) + rn^+ (\Phi_m (t_1, t_2)),\ r \in [0, \sqrt{3}h]$$

$$\Phi_m^* (r, t_1, t_2) = \Phi_m (t_1, t_2) + rn^- (\Phi_m (t_1, t_2)),\ r \in [-\sqrt{3}h, 0],\ (t_1, t_2) \in \Pi_m$$

где n^+ и n^- есть единичные векторы конормали к поверхности Λ, для определения которых надо брать предельные значения коэффициентов a_{ij} из Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Множества $\cup \Phi_m^* (Q_m^+)$ и $\cup \Phi_m^* (Q_m^-)$ обозначим через ω_1^h и ω_2^h соответственно. Таким образом, область $\omega^h = \omega_1^h \cup \omega_2^h$ состоит из точек Ω, удаленных от Λ не более, чем на $\sqrt{3}h$ по направлению конормали.

Координаты (r, t_1, t_2) в $Q_m = [-\sqrt{3}h, \sqrt{3}h] \times \Pi_m$, $r \in [-\sqrt{3}h, \sqrt{3}h]$, $(t_1, t_2) \in \Pi_m$ выберем так, чтобы для якобианов отображений Φ^* выполнялось неравенство

$$C_1 \leqslant \left| \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(r, t_1, t_2)} \right| \leqslant C_2.$$

Через Ω_e^h обозначим множество всех тех симплексов, которые имеют непустое пересечение с областью $\Omega_e \setminus \omega_e^h$, где $e = 1, 2$. Пусть $\Omega^h (\Lambda) = \Omega^h \setminus (\Omega_1^h \cup \Omega_2^h)$; ясно, что $\Omega^h (\Lambda) \subset \omega^h$.

Второе из условий (3) в системе координат (r, t_1, t_2) примет вид,

$$A_{11}^{+}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^{+} + A_{12}^{+}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^{+} + A_{13}^{+}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^{+} =$$

$$= A_{11}^{-}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^{-} + A_{12}^{-}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^{-} + A_{13}^{-}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^{-}. \quad (6)$$

При помощи преобразований

$$\left.\begin{aligned} \xi &= t_1 + t_2 - \frac{A_{12}^{+}(0, t_1, t_2) + A_{13}^{+}(0, t_1, t_2)}{A_{11}^{+}(0, t_1, t_2)}\, r \\ \eta &= t_2 - \frac{A_{13}^{+}(0, t_1, t_2)}{A_{11}^{+}(0, t_1, t_2)}\, r \\ \zeta &= r / A_{11}^{+}(0, t_1, t_2) \end{aligned}\right| \text{ если } r \geqslant 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= t_1 + t_2 - \frac{A_{12}^{-}(0, t_1, t_2) + A_{13}^{-}(0, t_1, t_2)}{A_{11}^{-}(0, t_1, t_2)}\, r \\ \eta &= t_2 - \frac{A_{13}^{-}(0, t_1, t_2)}{A_{11}^{-}(0, t_1, t_2)}\, r \\ \zeta &= r / A_{11}^{-}(0, t_1, t_2) \end{aligned}\right| \text{ если } r < 0$$

перейдем к системе (ξ, η, ζ).

При помощи непосредственных вычислений можно убедиться в том, что условие (6) в системе (ξ, η, ζ) примет вид:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^{+} = \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^{-}. \quad (7)$$

Все симплексы, составляющие $\Omega^h(\Lambda)$, пересекаются с поверхностью Λ. Возможны два случая:

а) одна вершина симплекса находится по одну сторону поверхности Λ, а три другие—по другую;

б) две вершины симплекса находятся по одну сторону поверхности Λ, а две другие—по другую.

Проведем новое разбиение области $\Omega^h(\Lambda)$. Для этого рассмотрим некоторый симплекс $ABCA_1$, удовлетворяющий случаю а) (рис. 2). Пусть вершина A_1 принадлежит Ω_1, а три остальные — Ω_2. Проделаем следующее:

1) выделим все те ребра симплекса, которые пересекаются с поверхностью Λ $(AA_1, BA_1$ и $CA_1)$;

2) перейдем от системы (x, y, z) к системе (r, t_1, t_2), а затем к системе (ξ, η, ζ); образы концов отделенных ребер в системе (ξ, η, ζ) соединим отрезком прямой, при этом прообраз точки пересечения отрезка с плоскостью $\zeta = 0$ в системе (x, y, z) назовем точкой разрыва; ясно, что точки разрыва находятся на поверхности Λ, и каждому ребру соответствует одна точка разрыва; обозначим точки разрыва через N_1, N_2 и N_3 соответственно;

3) каждую точку разрыва соединим с концами (соответствующей) отделенного ребра, после чего „стираем“ данное отделенное ребро; отрезком прямой соединим те точки разрыва, которые соответствуют одной грани симплекса;

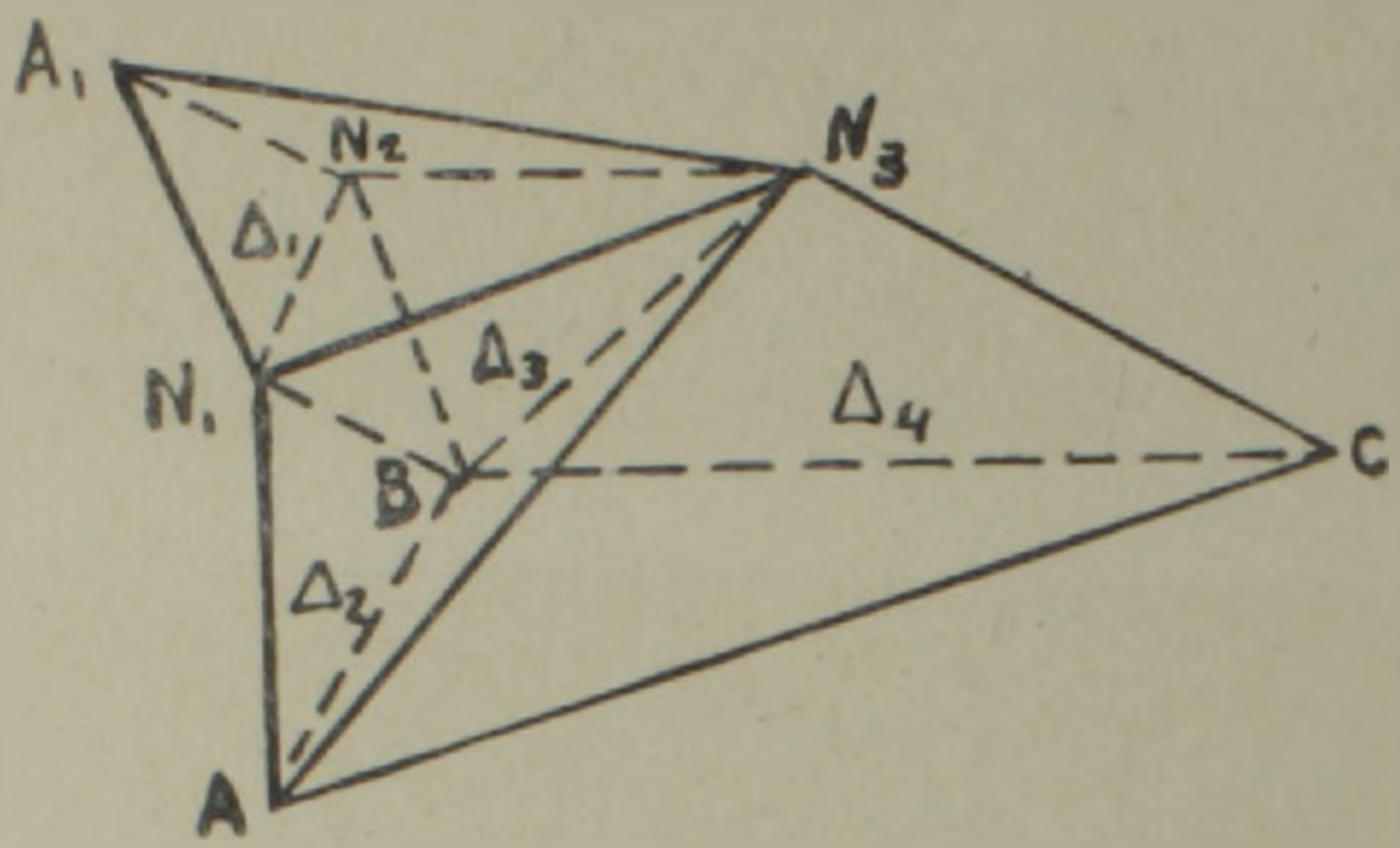

Рис. 2.

4) в результате построений 1)—3) получим треугольную пирамиду $A_1N_1N_2N_3$ и пятигранник $N_1N_2N_3ABC$; разобьем пятигранник на треугольные пирамиды $BN_1N_2N_3$, ABN_1N_3, $ABCN_3$; многогранник $A_1N_1N_2N_3ABC$ назовем „ломаным симплексом“;

5) те же самые преобразования проделаем для каждого симплекса вида а).

Теперь перейдем к случаю б). Рассмотрим, например, симплекс BCA_1B_1 (рис. 3). Пусть вершины A_1 и B_1 принадлежат Ω_1, а B и C—области Ω_2. Предположим, что с поверхностью Λ пересекаются ребра BA_1, BB_1, CB_1 и CA_1. Для этого симплекса проведем преобразования, схожие с преобразованиями 1)—5) для случая а); при этом преобразования 1)—3) остаются в силе. Точки разрыва обозначим через M_1, M_2, M_3 и M_4. Далее,

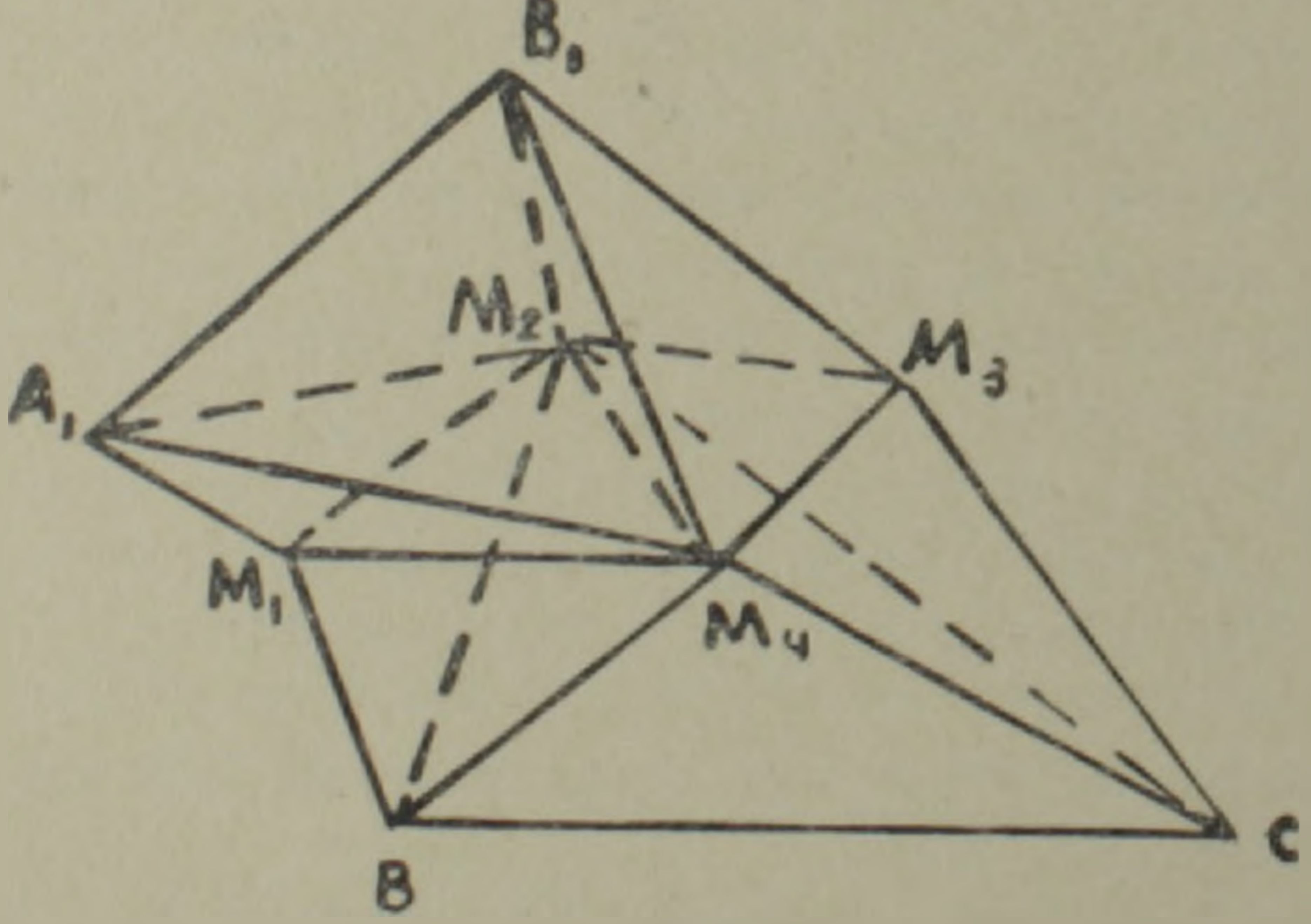

Рис. 3.

4) соединим отрезком прямой те две точки разрыва, которые соответствуют различным граням и расстояние между которыми меньше, чем расстояние между двумя другими (на рис. 3 это точки M_2 и M_4); точки M_2 и M_4 соединим с вершинами B, C, A_1 и B_1, если они не были соединены до этого.

Полученный в результате многогранник, состоящий из шести треугольных пирамид, назовем „ломаным симплексом".

5) те же самые преобразования проделаем для каждого симплекса вида 6).

Замечание 1. Новое разбиение симплексов, имеющих общую грань, надо проводить так, чтобы, во-первых, части, на которые разбиваются симплексы, не пересекались и, во-вторых, не образовывалось „пустот". Ясно, что точка разрыва N_2 совпадает с точкой разрыва M_1, а точка N_3 — с точкой M_4 (рис. 2 и 3).

Замечание 2. Если точка разрыва совпадает с узлом, то дополнительных трудностей в связи с этим не возникает.

3. Перенумеруем все узлы из R^h, и каждому узлу $(x^k, y^k, z^k) \in R^h$ поставим в соответствие функцию $\varphi_k(x, y, z)$, которая равна единице в узле (x^k, y^k, z^k), нулю — в остальных узлах, а в точках разрыва определяется однозначно так же, как это делалось в [2], то есть посредством линейной интерполяции в системе (ξ, η, ζ). После того, как определены значения функции $\varphi_k(x, y, z)$ в узлах и точках разрыва, она восполняется линейно на всех регулярных симплексах и треугольных пирамидах, составляющих „ломаные симплексы", оставаясь при этом непрерывной.

Для произвольной сеточной функции $\underline{\omega} = \{\omega_k\}$, определенной на R^h, поставим ее кусочно-линейное восполнение следующим образом:

$$\bar{\omega}(x, y, z) = \sum_{(x^k, y^k, z^k) \in R^h} \omega_k \varphi_k(x, y, z), \quad \bar{\omega}(x^k, y^k, z^k) = \omega_k. \tag{8}$$

Множество функций вида (8) обозначим через H_h. Ясно, что $H_h \subset \subset W_2^1(\Omega^h)$.

Приближенным решением нашей краевой задачи назовем функцию $\bar{v} \in H_h$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$L(\bar{v}, \bar{\varphi}) = (f, \bar{\varphi}) \tag{9}$$

при произвольной $\bar{\varphi} \in H_h$.

Полученная ВРС является пятнадцатиточечной. Нетрудно проверить, что для уравнения Лапласа она становится семиточечной.

§ 2. Вспомогательные утверждения и оценка скорости сходимости

1. Пусть $Q = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ — симплекс в пространстве переменных (x_1, x_2, x_3). По теореме вложения [3] функция u из $W_2^2(Q)$ при $m = 3$ эквивалентна непрерывной функции и

$$\|u\|_{C(Q)} \leqslant C\,\|u\|_{2,\,Q}\,. \tag{10}$$

Если $u \in W_2^2(Q)$ и принимает нулевые значения в вершинах симплекса Q, то по теореме С. Л. Соболева об эквивалентной нормировке пространств $W_p^l(Q)$ [3] справедливо неравенство

$$\|u\|_{2,\,Q}^2 \leqslant C \sum_{(2)} \int\limits_Q |D^2 u|^2\, dx_1 dx_2 dx_3 \tag{11}$$

и, следовательно,

$$\|u\|_{1,\,Q}^2 \leqslant C \sum_{(2)} \int\limits_Q |D^2 u|^2\, dx_1 dx_2 dx_3, \tag{12}$$

где $D^2 u$ означает (здесь и далее) любую из частных производных порядка два:

$$D^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j\, \partial x_3^k},\ i + j + k = 2,$$

причем символ $\sum\limits_{(2)}$ означает, что суммируются все производные порядка два.

Из неравенств (10) и (11) следует, что

$$\max_{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in Q} |u\,(x_1,\, x_2,\, x_3)|^2 \leqslant C \sum_{(2)} \int\limits_Q |D^2 u|^2\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{13}$$

Пусть линейное преобразование $x_k = x_k'/h$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ переводит симплекс Q в симплекс $\Delta = \{0 \leqslant x_1' \leqslant h,\ 0 \leqslant x_2' \leqslant h - x_1',\ 0 \leqslant x_3' \leqslant x_1'\}$, тогда неравенства (12) и (13) соответственно примут вид

$$\|u\|_{1,\,\Delta}^2 \leqslant Ch^2 \sum_{(2)} \int\limits_\Delta |D^2 u|^2\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3', \tag{14}$$

$$\max_{(x_1',\, x_2',\, x_3') \in \Delta} |u\,(x_1',\, x_2',\, x_3')|^2 \leqslant Ch \sum_{(2)} \int\limits_\Delta |D^2 u|^2\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3'. \tag{15}$$

2. Пусть u есть обобщенное решение нашей задачи. Напомним, что область Ω^h накрывает область Ω. Поэтому для того чтобы построить в Ω^h кусочно-линейное восполнение $\bar{u}$ функции u, ее следует продолжить за пределы Ω. Так как в области Ω_2 функция $u \in W_2^2(\Omega_2)$, то через границу S продолжим ее с сохранением класса и нормы $W_2^2(\Omega_2)$ [4].

Тогда [5]

$$\|u - \bar{v}\|_{1,\,\Omega} \leqslant C\,\|u - \tilde{u}\|_{1,\,\Omega^h}\,. \tag{16}$$

Для оценки правой части неравенства (16) нам понадобится еще два типа продолжений функции u: первое — из Ω_1 в Ω_2 с сохранением класса и нормы $W_2^2(\Omega_1)$, которое обозначим через u_1, второе — из Ω_2 в Ω_1 с сохранением класса и нормы $W_2^2(\Omega_2)$, которое обозначим через u_2.

Лемма. *Пусть $u \in W_2^2(\Omega_k)$, $k=1, 2$. Тогда в области Ω_k^h при достаточно малом h имеет место неравенство*

$$\|u - \bar{u}\|_{1, \Omega_l^h} \leqslant Ch\, \|u\|_{2, \Omega_l} \quad (l = 1, 2). \tag{17}$$

На доказательстве этой леммы останавливаться не будем, так как оно легко проводится с применением неравенства (14).

Теперь оценим разность $u - \bar{u}$ для „ломаных симплексов".

Пусть „ломаный симплекс" Δ состоит из четырех симплексов: Δ_1, Δ_2, Δ_3 и Δ_4 (рис. 2). Обозначим через (ξ_i, η_i, ζ_i), $(i = 1, 2, 3, 4)$ образы вершины A, B, C и A_1 в системе (ξ, η, ζ).

Пусть (ξ_i, η_i, ζ_i), $i = 1, 2, 3, 4$ есть вершины симплекса Δ' и

$$\max_{1 < i, j < 4} |\xi_i - \xi_j| = e_1 h, \quad \max_{1 < i, j < 4} |\eta_i - \eta_j| = e_2 h,$$

$$\max_{1 < i, j < 4} |\zeta_i - \zeta_j| = e_3 h,$$

где e_1, e_2 и e_3 — положительные постоянные, не зависящие от h.

Из условия (7) следует, что функция $u(\xi, \eta, \zeta)$ в $\omega^h(\xi, \eta, \zeta)$ принадлежит W_2^2 ($\omega^h(\xi, \eta, \zeta)$ есть образ ω^h). Через $\bar{u}(\xi, \eta, \zeta)$ обозначим ту линейную функцию, значения которой в точках (ξ_i, η_i, ζ_i), где $i=1$ 2, 3, 4, совпадают со значениями функции $u(\xi, \eta, \zeta)$. Так как $u - \bar{u} \in W_2^2(\Delta')$ и $u(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \bar{u}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, то производя замену переменных — $\xi = e_1 x_1'$, $\eta = e_2 x_2'$, $\zeta = e_3 x_3'$, а затем применяя неравенство (15) и, наконец, возвращаясь к старым переменным, получим

$$\max_{(\xi, \eta, \zeta) \in \Delta'} |u(\xi, \eta, \zeta) - \bar{u}(\xi, \eta, \zeta)|^2 \leqslant Ch \sum_{(2)} \int_{\Delta'} |D^2 u|^2 d\xi d\eta d\zeta.$$

Пусть точки N_k' $(k=1, 2, 3)$ есть образы точек N_k $(k=1, 2, 3)$ в системе координат (ξ, η, ζ). Так как в точках N_k функции $\bar{u}$ и $\bar{\bar{u}}$ совпадают, то из последнего неравенства получим, что

$$|u(N_k') - \bar{u}(N_k)|^2 \leqslant Ch \int_{\Delta'} \sum_{(2)} |D^2 u|^2 d\xi d\eta d\zeta, \quad k=1, 2, 3.$$

Возвращаясь к переменным (x, y, z), приходим к неравенству

$$|u(N_k)-\tilde{u}(N_k)|^2 \leqslant Ch\sum_{(2)}\left(\int_{Q_1}|D^2u|^2\,dxdydz+\int_{Q_2}|D^2u|^2\,dxdydz\right), \quad (18)$$

где $Q_1\subset\Omega_1$, $Q_2\subset\Omega_2$ и $Q_1\cup Q_2$ — прообраз Δ'.

Имеем

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,ABCN_1\Delta_1N_3A_1} = \sum_{i=1}^{4}\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,\Delta_i}. \quad (19)$$

Пусть, например, $A_1N_1 > A_1N_2 > A_1N_3$. Введем обозначение: $h_i = A_1N_i$ $(i=1, 2, 3)$. При помощи линейного преобразования симплекс Δ_1 переведем в симплекс $\Delta_1' = \{0 < x_1' < h_1,\ 0 < x_2' < h_2(h_1-x_1')/h_1,\ 0 < x_3' < h_3x_1'/h_1$, так, чтобы точка A_1 перешла в $(0, 0, 0)$, N_1 — в $(h_1, 0, 0)$, N_2 — в $(0, h_2, 0)$, а N_3 — в $(h_1, 0, h_3)$.

Для первого слагаемого в правой части последнего равенства

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,\Delta_1} = \sum_{k=1}^{3}\int_{\Delta_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_k}\right|^2 dx_1dx_2dx_3 \equiv i_1+i_2+i_3.$$

Оценим i_1:

$$i_1 \leqslant C\left\{\int_{\Delta_1'}\left|\frac{\partial u(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_1'}-\frac{\partial u_1(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_1'}\right|^2 dx_1'\,dx_2'\,dx_3'+\right.$$

$$+\int_{\Delta_1'}\left|\frac{\partial u_1(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_1'}-\frac{\partial\tilde{u}_1(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_1'}\right|^2 dx_1'\,dx_2'\,dx_3'+ \quad (20)$$

$$\left.+\int_{\Delta_1'}\frac{|u(h_1, 0, 0)-\tilde{u}(h_1, 0, 0)|^2}{h_1^2}\,dx_1'dx_2'dx_3'\right\};$$

здесь принято во внимание совпадение функций u_1 и u в точках $(0, 0, 0)$ и $(h_1, 0, 0)$. Оценка первого слагаемого в правой части (20) выведена в [5]. Оценка второго слагаемого и третьего следует из леммы и из неравенства (18) соответственно. Возвращаясь к переменным (x, y, z), получим

$$i_1 \leqslant Ch^2\sum_{(2)}\int_{Q_3}(|D^2u_1|^2+|D^2u_2|^2)\,dxdydz,$$

где $Q_3 = \Delta_1\cup Q_1\cup Q_2$.

Слагаемые i_2 и i_3 оцениваются точно так же. Следовательно

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,\Delta_1} \leqslant Ch^2\sum_{(2)}\int_{Q_3}(|D^2u_1|^2+|D^2u_2|^2)\,dxdydz.$$

Остальные слагаемые в правой части равенства (19) оцениваются аналогично. Поэтому

$$\|u-\bar{u}\|_{1,\,ABCN_1\Lambda_2N_3A_1}\leqslant Ch^2\left(\|u_1\|^2_{2,\,Q^h}+\|u_2\|^2_{2,\,Q^h}\right),$$

где $Q^h = Q_3 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4$.

Суммируя последнее неравенство по всем „ломаным симплексам“, получим

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,\Omega^h(\Delta)}\leqslant Ch^2\left(\|u\|^2_{2,\,\Omega_1}+\|u\|^2_{2,\,\Omega_2}\right). \qquad (21)$$

Из неравенств (17) и (21) следует, что

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,\Omega^h}\leqslant Ch^2\left(\|u\|^2_{2,\,\Omega_1}+\|u\|^2_{2,\,\Omega_2}\right). \qquad (22)$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть u есть обобщенное решение задачи, а $\bar{v}$ — приближенное, определяемое тождеством* (9). *Тогда при достаточно малых h имеют место оценки*

$$\|u-\bar{v}\|_{1,\,\Omega}\leqslant Ch\|f\|_{0,\,\Omega}, \qquad (23)$$

$$\|u-\bar{v}\|_{1,\,\Omega}\leqslant Ch^2\|f\|_{0,\,\Omega}. \qquad (24)$$

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы доказывается просто. Для этого надо воспользоваться неравенствами (16), (22) и (5). Докажем справедливость неравенства (24).

Для простоты изложения предположим, что $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, хотя заметим, что неравенство (24) имеет место и при ненулевых b_1, b_2 и b_3. Тогда для любых функций φ и ψ из $W_2^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\mathbf{L}(\varphi,\ \psi) = \mathbf{L}(\psi,\ \varphi). \qquad (25)$$

Из интегральных тождеств (4) и (9) следует, что

$$\mathbf{L}(u-\bar{v},\ \tilde{\varphi}) = 0$$

при произвольной $\bar{\varphi}$ из H_h.

Преобразуем тождественно последнее равенство:

$$\mathbf{L}(u-\bar{v},\ \Phi) = \mathbf{L}(u-\bar{v},\ \Phi-\bar{\varphi}). \qquad (26)$$

Выберем Φ специальным образом, а именно, возьмем в качестве Φ решение нашей задачи с правой частью $u-\bar{v}$; тогда из неравенств (22) и (5) следует, что

$$\|\Phi-\tilde{\Phi}\|_{1,\,\Omega}\leqslant Ch\|u-\bar{v}\|_{0,\,\Omega}. \qquad (27)$$

Функция Φ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\mathrm{L}(\Phi, \psi) = (u - \tilde{v}, \psi)$$

при произвольной ψ из $W_2^1(\Omega)$.

В последнем тождестве, если положить ψ равным $u-\tilde{v}$, а также, если учесть равенства (25) и (26), получим

$$\|u-\tilde{v}\|^2_{0,\Omega} = \mathrm{L}(u - \tilde{v}, \Phi - \tilde{\varphi}).$$

В качестве $\tilde{\varphi}$ возьмем функцию $\tilde{\Phi} \in H_h$. Тогда

$$\|u - \tilde{v}\|^2_{0,\Omega} = \mathrm{L}(u - \tilde{v}, \Phi - \tilde{\Phi}) \leqslant C\, \|u - \tilde{v}\|_{1,\Omega} \cdot \|\Phi - \tilde{\Phi}\|_{1,\Omega},$$

откуда, с учетом неравенств (23) и (27), получим неравенство (24). Теорема доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность Л. А. Оганесяну за постановку задачи, внимание к работе и ценные замечания.

Ереванский государственный университет

Поступила 15.IX.1977

ՅՈՒ. Գ. ԴԱԴԱՅԱՆ. Եռաչափ տիրույթի կանոնավոր ցանցում խզվող գործակիցներով էլիպտիկ հավասարումների լուծումը վարիացիոն-տարբերական մեթոդով (*ամփոփում*)

Հոդվածում խզվող գործակիցներով էլիպտիկ հավասարումների լուծման համար եռաչափ տիրույթի կանոնավոր ցանցում կառուցվում են վարիացիոն-տարբերական սխեմաներ կտոր առ կտոր գծային լրացումների միջոցով։ Ցույց է տրվում, որ ստացված սխեմաների զուգամիտության արագությունը W_2^1 *տարածությունում* h *կարգի է, իսկ* L_2 *տարածությունում՝* h^2 *կարգի, որտեղ* h*-ը ցանցի քայլի երկարությունն է։*

Yu. G. DADAJAN. *Variational difference method for the solution of elliptic equations in three dimensional domain with discontinuous coefficients on regular set* (summary)

For the solution of elliptic equations in three dimensional domain with discontinuous coefficients variational difference schemes are constructed on regular set by piecewise-linear supplements. It is proved that the speed of convergence of schemes in the norm of W_2^1 space has order h and in the norm of L_2 has order h^2, where h is the step of the set.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. *Ладыженская*. Краевые задачи математической физики, М., Изд. „Наука", 1973.
2. *Ю. Г. Дадаян, Л. А. Оганесян*. Вариационно-разностные схемы на регулярной сетке для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, журн. „Молодой научный работник", Изд. ЕрГУ, 24 (2), Ереван, 1976.
3. *С. Л. Соболев*. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1950.
4. *В. М. Бабич*. К вопросу о распространении функций, УМН, вып. 7, № 2 (54), 1953, 111–113.
5. *Л. А. Оганесян, В. Я. Ривкинд, Л. А. Руховец*. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1, В сб. „Дифференциальные уравнения и их применение", вып. 5, Вильнюс, 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

М. Д. ДАВТЯН

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ДЛЯ ОБОЛОЧКИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Рассмотрим тонкую упругую оболочку $D=\Gamma\times[O, T]$ со срединной поверхностью Γ. Пусть оболочка имеет два края Γ_1 и Γ_2, диффеоморфные окружности.

Введем следующие обозначения:

$U=(u, v, w)$ — вектор смещений,

$\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \omega\\ \omega & \varepsilon_2\end{pmatrix}$ — тензор деформаций,

$T=\begin{pmatrix}T_1 & s\\ s & T_2\end{pmatrix}$ — тензор напряжений.

Как известно (см. [1]) тензоры деформаций и напряжений связаны следующими соотношениями:

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2),\quad T_2=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1),\quad s=\frac{Eh}{1+\nu}\omega \tag{1}$$

или сокращенно, если записать T и ε в виде векторов

$$T=F\varepsilon, \tag{2}$$

где F — положительно определенная матрица.

В (1) h — толщина оболочки, E, ν — упругие постоянные, характеризующие материал оболочки.

Если в качестве координатных линий на поверхности D принять линии кривизны, то между U и ε имеет место следующее соотношение (см. [1])

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v-\frac{w}{R_1},\\ \varepsilon_2&=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u-\frac{w}{R_2},\\ \omega&=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)\end{aligned}\tag{3}$$

или сокращенно

$$\varepsilon = LU, \tag{4}$$

где через L обозначен оператор, определяемый уравнениями (3). В (3) $A(\alpha, \beta)$ и $B(\alpha, \beta)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности D, а $R_1(\alpha, \beta)$ и $R_2(\alpha, \beta)$ — главные кривизны поверхности D.

Мы будем рассматривать случай, когда радиусы кривизны R_1 и R_2 имеют разные знаки: $R_1 R_2 < 0$, т. е. случай поверхности отрицательной кривизны. Исключим, например, w из второго уравнения системы (3) и подставим в первое уравнение. Получим следующую систему уравнений:

$$w = \frac{R_2}{B_1}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{R_2}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}u - R_2\varepsilon_2,$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{R_2}{R_1 B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}v - \frac{R_2}{R_1 AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}u = \varepsilon_1 - \frac{R_2}{R_1}\varepsilon_2, \tag{5}$$

$$\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{B}\right) = \omega.$$

Покажем, что в случае поверхности отрицательной кривизны, последние два уравнения системы (5) при заданных ε_1 и ε_2 образуют гиперболическую систему относительно u и v. Действительно, характеристический определитель этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{A}\xi_1 & -\frac{R_2}{R_1 B}\xi_2 \\ \frac{1}{B}\xi_2 & \frac{1}{A}\xi_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{A^2}\xi_1^2 + \frac{R_2}{R_1 B^2}\xi_2^2.$$

Следовательно, если $\frac{R_2}{R_1} < 0$, то определитель имеет два действительных и различных корня, т. е. система гиперболическая. Система уравнений безмоментной теории оболочек имеет следующий вид (см. [1]):

$$L^* F L U = \Phi, \tag{6}$$

где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ — вектор внешних сил, L^* — формально сопряженный к L оператор, т. е.

$$(LU, V) = (U, L^* V) \tag{6'}$$

для любых бесконечно дифференцируемых векторов U и V, обращающихся в нуль на Γ_1 и Γ_2. Скалярное произведение в (6') имеет вид

$$(f, g) = \iint (f_1 \bar{g}_1 + f_2 \bar{g}_2 + f_3 \bar{g}_3)\, A(\alpha, \beta)\, B(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

и эквивалентно, очевидно, обычному скалярному произведению в $L_2 = H_0$.

Здесь мы докажем однозначную разрешимость системы (6) при граничных условиях

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad v|_{\Gamma_1} = 0, \tag{7}$$

$$u|_{\Gamma_2} = 0, \quad v|_{\Gamma_2} = 0. \tag{8}$$

Граничные условия (7), (8) означают, что оболочка жестко закреплена на краях Γ_1 и Γ_2.

Для доказательства однозначной разрешимости краевой задачи (6), (7), (8) применим метод эллиптической регуляризации (см. [3], [4]). Рассмотрим следующую эллиптическую систему уравнений второго порядка:

$$L^*FLU - h\Delta_1 U = \Phi, \tag{9}$$

где $h > 0$, $\Delta_1 U = (\Delta_1 u, \Delta_1 v, \Delta_1 w)$, $\Delta_1 = \dfrac{1}{AB}\Delta$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2}$ оператор Лапласа. Добавим к (7), (8) следующие граничные условия:

$$w|_{\Gamma_1} = 0, \; w|_{\Gamma_2} = 0. \tag{10}$$

Краевая задача Дирихле (7), (8), (10) для эллиптической системы (9) однозначно разрешима и имеет гладкое решение U_h, если только правые части достаточно гладкие.

Мы получим для U_h оценку, не зависящую от h, а затем перейдем к пределу при $h \to 0$.

Предварительно введем некоторые пространства функций. Пусть $r \geqslant 0$ — целое. Обозначим через $H_r(\Gamma)$ — пространство Соболева функций с нормой

$$[u]_r^2 = \sum_{k=0}^{r} \int_\Gamma \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|^2 dx. \tag{11}$$

Пространство $B_s(D)$ определим как замыкание функций $u(x, t)$ класса C^∞ на D $(x \in \Gamma,\ t \in [0, T])$ по норме

$$\|[u(x, t)]\|_s = \sum_{k=0}^{s} \max\, [D_t^k u(x, t)]_{s-k}, \tag{12}$$

где $s \geqslant 0$ — целое, $[v]_r$ — норма в $H_r(\Gamma)$. $H_s(D)$ — пространство Соболева функций $u(x, t)$, заданных на области D с нормой

$$\|u(x, t)\|_s^2 = \sum_{k_1+k_2=0}^{s} \int_0^T \int_\Gamma |D_x^{k_1} D_t^{k_2} u(x, t)|^2\, dx dt, \tag{13}$$

где $s \geqslant 0$ — целое.

Пространство $H_s(D)$ является подпространством $H_s(D)$, которое получается в результате замыкания по норме (13) функций класса C^∞ на $\overline{D}$, равных нулю в окрестности $t = 0$ для всех $x \in \Gamma$. Аналогично, пространство $B_s(D)$ является подпространством $B_s(D)$, полученное в результате замыкания по норме (12) функций класса C^∞ на $\overline{D}$, равных нулю в окрестности $t = 0$ для всех $x \in \Gamma$.

Имеем

$$L^* FLU_h - h\Delta_1 U_h = \Phi \tag{14}$$

и

$$U_h|_{\Gamma_1} = 0, \ U_h|_{\Gamma_2} = 0. \tag{15}$$

Умножим (14) скалярно на U_h

$$(L^*FLU_h, U_h) - h(\Delta_1 U_h, U_h) = (\Phi, U_h). \tag{16}$$

Проинтегрируем в (16) один раз по частям. В силу (15) внеинтегральные члены пропадут. Получим

$$(FLU_h, LU_h) + h\left(\frac{\partial U_h}{\partial \alpha}, \frac{\partial U_h}{\partial \alpha}\right) + h\left(\frac{\partial U_h}{\partial \beta}, \frac{\partial U_h}{\partial \beta}\right) = (\Phi, U_h). \tag{17}$$

Так как матрица F положительно определенная, то

$$(FLU_h, LU_h) \geqslant c(LU_h, LU_h) = c\|LU_h\|_0^2.$$

Далее, второе и третье слагаемые в (17), очевидно, неотрицательные. Следовательно

$$c\|LU_h\|_0^2 \leqslant (\Phi, U_h). \tag{18}$$

Докажем справедливость следующей оценки:

$$\|[u_h]\|_0 + \|[v_h]\|_0 + \|w_h\|_{-1} \leqslant c_1 \|LU_h\|_0. \tag{19}$$

В (19) $\|[u_h]\|_0$, $\|[v_h]\|_0$ — нормы в $B_0(D)$, а $\|w_h\|_{-1}$ — норма в пространстве Соболева $H_{-1}(D)$. Пространство $H_{-1}(D)$ можно определить, например, как пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathring{H}_1(D)$ со следующей нормой:

$$\|w\|_{-1} = \sup_{g \in \mathring{H}_1(D)} \frac{|(w, g)|}{\|g\|_1}.$$

Из определения нормы $\|w\|_{-1}$ вытекает следующее неравенство:

$$|(w, g)| \leqslant \|g\|_1 \|w\|_{-1}, \tag{20}$$

справедливое для любых $w \in H_{-1}(D)$, $g \in \mathring{H}_1(D)$.

Обозначим компоненты вектора LU_h через ε_{1h}, ε_{2h}, ω_h. В силу (5) имеют место следующие соотношения:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial u_h}{\partial \alpha} - \frac{R_2}{R_1 B}\frac{\partial v_h}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}v_h - \frac{R_2}{R_1 AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}u_h = f_{1h},$$

$$\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u_h}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v_h}{B}\right) = \omega_h, \tag{21}$$

причем

$$f_{1h} = \varepsilon_{1h} - \frac{R_2}{R_1}\varepsilon_{2h}, \tag{22}$$

$$w_h = \frac{R_2}{B}\frac{\partial v_h}{\partial \beta} + \frac{R_2}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}u_h - R_2\varepsilon_{2h}. \tag{23}$$

Система (21) представляет собой систему двух гиперболических уравнений. Следовательно, так как $u_h|_{\Gamma_1} = 0$ и $v_h|_{\Gamma_1} = 0$, то по теореме об однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических уравнений (см., например, [2]) имеет место оценка

$$\|[u_h]\|_0 + \|[v_h]\|_0 \leqslant c\,(\|f_{1h}\|_0 + \|\omega_h\|_0). \tag{24}$$

Далее, из (22) имеем

$$\|f_{1h}\|_0 \leqslant \|\varepsilon_{1h}\|_0 + c\|\varepsilon_{2h}\|_0. \tag{25}$$

Следовательно, из (24) и (25) получим

$$\|[u_h]\|_0 + \|[v_h]\|_0 \leqslant c\,(\|\varepsilon_{1h}\|_0 + \|\varepsilon_{2h}\|_0 + \|\omega_h\|_0). \tag{26}$$

Далее, из (23) имеем

$$\|w_h\|_{-1} \leqslant c\left(\left\|\frac{\partial v_h}{\partial \beta}\right\|_{-1} + \|u_h\|_{-1} + \|\varepsilon_{2h}\|_{-1}\right).$$

Так как

$$\|u_h\|_{-1} \leqslant c\,\|u_h\|_0 \leqslant c\,\|[u_h]\|_0,$$

$$\|\varepsilon_{2h}\|_{-1} \leqslant c\,\|\varepsilon_{2h}\|_0,$$

$$\left\|\frac{\partial v_h}{\partial \beta}\right\|_{-1} \leqslant c\,\|v_h\|_0 \leqslant c\,\|[v_h]\|_0,$$

то используя (26), получим

$$\|w_h\|_{-1} \leqslant c\,(\|[v_h]\|_0 + \|[u_h]\|_0 + \|\varepsilon_{2h}\|_0) \leqslant c_1\,(\|\varepsilon_{1h}\|_0 + \|\varepsilon_{2h}\|_0 + \|\omega_h\|_0). \tag{27}$$

Таким образом, из (26), (27) вытекает оценка (19). Далее в силу (20) и неравенства Коши-Буняковского

$$|(\Phi,\ U_h)| \leqslant \|\Phi_1\|_0\,\|u_h\|_0 + \|\Phi_2\|_0\,\|v_h\|_0 + \|\Phi_3\|_1\,\|w_h\|_{-1}. \tag{28}$$

При выводе (28) предполагалось, что $\Phi_3 \in H_1(D)$. Из (28) при сколь угодном малом α имеем

$$|(\Phi,\ U_h)| \leqslant \alpha\,(\|u_h\|_0 + \|v_h\|_0 + \|w_h\|_{-1})^2 + c_\alpha\,(\|\Phi_1\|_0 + \|\Phi_2\|_0 + \|\Phi_3\|_1)^2. \tag{29}$$

Таким образом, объединяя (18), (19) и (29), получим

$$(\|[u_h]\|_0 + \|[v_h]\|_0 + \|w_h\|_{-1})^2 \leqslant c^2\alpha\,(\|[u_h]\|_0 + \|[v_h]\|_0 + \|w_h\|_{-1})^2 + c_\alpha\,(\|\Phi_1\|_0 + \|\Phi_2\|_0 + \|\Phi_3\|_1)^2.$$

Так как α может быть выбрано достаточно малым, то окончательно получим следующую оценку:

$$\|[u_h]\|_0 + \|[v_h]\|_0 + \|w_h\|_{-1} \leqslant c\,(\|\Phi_1\|_0 + \|\Phi_2\|_0 + \|\Phi_3\|_1). \tag{30}$$

Кроме того, из (29) и (19) вытекает неравенство

$$|(\Phi,\ U_h)| \leqslant \alpha\,c_1^2\,\|LU_h\|_0^2 + c_\alpha\,(\|\Phi_1\|_0 + \|\Phi_2\|_0 + \|\Phi_3\|_1)^2. \tag{31}$$

Следовательно, так как α мало, то из (18) и (31) имеем

$$\|LU_h\|_0 \leqslant c\,(\|\Phi_1\|_0 + \|\Phi_2\|_0 + \|\Phi_3\|_1). \tag{32}$$

Обозначим через H_L — гильбертово пространство, полученное пополнением гладких векторов, равных нулю на Γ_1 и Γ_2, по норме $\|LU\|_0$.

Отметим, что в силу неравенства (19), функции u и v из H_L принадлежат также $B_0(D)$ и, следовательно, удовлетворяют граничным условиям (7) и (8).

В силу (32) последовательность U_h ограничена в пространстве H_L и, следовательно, слабо компактна. Поэтому из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, которую мы для простоты, снова обозначим через U_h. Пусть U_h слабо сходится к некоторому вектору U_0 из H_L. Если теперь (14) умножить скалярно на вектор $\varphi \in C_0^\infty(D)$, перейти к пределу при $h \to 0$, то получим, что вектор U_0 является обобщенным решением уравнения (6)

$$L^*FLU_0 = \Phi.$$

Единственность решения следует из неравенства (32). Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть D — оболочка отрицательной кривизны. Тогда для любых $\Phi_1 \in H_0(D)$, $\Phi_2 \in H_0(D)$, $\Phi_3 \in H_1(D)$ существует единственное решение $u \in B_0(D)$, $v \in B_0(D)$, $w \in H_{-1}(D)$, u и v удовлетворяют граничным условиям* (7), (8).

Замечание. Отметим, что для системы (6) уравнений безмоментной теории оболочек существует естественная эллиптическая регуляризация, а именно, система уравнений моментной теории оболочек. Однако, так как способ эллиптической регуляризации не отражается на окончательном результате, то мы остановились на эллиптической регуляризации вида (9).

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 25.VI.197

Մ. Դ. ԴԱՎԹՅԱՆ. Բացասական կորություն ունեցող թաղանթների համար՝ ոչ մոմենտային թաղանթների տեսության եզրային խնդրի լուծման գոյության և միակության թեորեմ (ամփոփում)

Դիտարկվում է նուրբ առաձգական թաղանթ, շրջանագծին դիֆեոմորֆ Γ_1 և Γ_2 եզրերով և $D=\Gamma\times[0, T]$ միջին մակերևույթով։

Ենթադրվում է, որ թաղանթն ունի բացասական կորություն և կոշտ ամրացված է եզրերում։

Էլիպտիկ ռեգուլյարիզացիայի մեթոդով ապացուցված է եզրային խնդրի միարժեք լուծելիությունը։

M. D. DAVTIAN. *Existence and unigeness theorem for solution of boundary problem in the moment free theory of shells for the shells of negative curvature* (summary)

A thin elastic shell with mean surface $D=\Gamma\times[O, T]$, having two edges Γ_1 and Γ_2, diffeomorf to the circle, is considered.

It is supposed, that the shell has negative curvature and is rigidly fastened at the edges.

By the method of elliptic regularization the uniqueness of the solution of the boundary value problem is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Гольденвейзер.* Теория упругих тонких оболочек, М., Гостехиздат, 1953
2. *Л. Гординг.* Задача Коши для гиперболических уравнений, И.И.Л., 1961.
3. *О. А. Олейник* и *Е. В. Радкевич.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, ВИНИТИ, сер. „Итоги науки", Мат. анализ, 1971
4. *М. Д. Давтян.* Общие краевые задачи для гиперболических уравнений высших порядков с двойными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика", IX, № 4, 1974, 269—284.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

А. М. КЫТМАНОВ, Л. А. АЙЗЕНБЕРГ

О ГОЛОМОРФНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛОМ МАРТИНЕЛЛИ—БОХНЕРА

§ 1. Основные результаты

Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂D. Хорошо известно, что всякую функцию f, непрерывную в замыкании области $\bar{D}$ (т. е. $f \in C(\bar{D})$) и голоморфную в D, можно представить интегралом Мартинелли—Бохнера

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\, U(\zeta, z);\ z \in D, \tag{1}$$

где

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}}\, d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

$d\zeta = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar{\zeta}[k]$ получается из $d\bar{\zeta}$ выбрасыванием дифференциала $d\bar{\zeta}_k$.

В [1] (в разделе „Исторические замечания и нерешенные задачи“) поставлена обратная задача: пусть для функции $f \in C(\bar{D})$ выполняется равенство (1), будет ли f голоморфна в D? При $n=1$ голоморфность f сразу следует из того, что ядро $U(\zeta, z)$ превращается в ядро Коши, которое голоморфно по z. При $n>1$ ядро Мартинелли—Бохнера только гармонично по z, поэтому из вида формулы (1) сразу следует лишь гармоничность в D функции f. Задачу можно переформулировать так: будет ли класс гармонических функций из $C(\bar{D})$, представимых интегралом Мартинелли—Бохнера, совпадать с классом голоморфных в D функций.

Для случая гладких функций f (т. е. $f \in C^{(1)}(\bar{D})$) положительный ответ на этот вопрос был получен в работах [2], [3].

Теорема А [3]. *Если для $f \in C^{(1)}(\bar{D})$ справедливо* (1), *то f голоморфна в D.*

В данной работе задача решается для непрерывных функций.

Теорема 1. *Если $f \in C(\bar{D})$ представляется в D интегралом Мартинелли—Бохнера, то f голоморфна в D в каждом из следующих случаев:*

а) *∂D принадлежит классу $C^{(2)}$,*

б) *$n = 2$, граница ∂D связна и принадлежит $C^{(1)}$.*

Отметим, что из трех утверждений (теорема А и любой из случаев теоремы 1) ни одно не является следствием других и, что каждое из них доказывается своим методом.

Теорема 2. *Пусть $f \in C(\partial D)$ и*

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\, U(\zeta, z) = 0, \quad z \bar{\in} \bar{D}, \tag{2}$$

тогда существует $F \in C(\bar{D})$, голоморфная в D и такая, что сужение F на ∂D совпадает с f, в каждом из случаев а) и б) теоремы 1.

Интегральные критерии существования голоморфного продолжения рассматривались рядом авторов (см., например, [3]—[6]). В работе [4] для функций, удовлетворяющих на ∂D условию Гельдера, такой критерий (в удобной для нас записи) состоит из следующих условий:

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\, U(\zeta, z) = \frac{f(z)}{2}, \quad z \in \partial D,$$

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\, dg \wedge d\bar{\zeta}[k, m] \wedge d\zeta = 0, \quad z \in \partial D,$$

$$k, m = 1, 2, \cdots, n, \ k \neq m, \text{ а } g(\zeta, z) = |\zeta - z|^{2-2n}.$$

(В [5] для $n = 2$ этот критерий был получен для суммируемых функций). Первое из этих условий эквивалентно нашему (см. лемму 2 в [2]).

В [6] (см. также § 3 в [1] и [7]) для существования голоморфного продолжения непрерывной на ∂D функции f требуется ортогональность f всем замкнутым внешним дифференциальным формам из $C^{(\infty)}_{n,\,n-1}(\bar{D})$, а не только ядрам $U(\zeta, z)$. В [3] показано, что $f \in C^{(1)}(\partial D)$ голоморфно продолжается в D, если для нее выполнено условие (2). Таким образом, для указанного класса областей теорема 2 усиливает эти результаты.

Укажем на еще один критерий того, чтобы непрерывная на ∂D функция являлась следом на ∂D функции, голоморфной в D и непрерывной на $\bar{D}$. Пусть $Y_{k,l}(\theta)$ — ортонормальный на единичной сфере в $C^n = R^{2n}$ базис, состоящий из сферических функций (сферических гармоник) ([8], стр. 480), где θ — точка сферы, k — порядок сферической функции, l — номер данной функции среди сферических гармоник порядка k, входящих в базис,

$$l = 1, 2, \cdots, \sigma(k), \ k = 0, 1, 2, \cdots, \sigma(k) = \frac{2(n+k-1)(2n+k-3)!}{k!\,(2n-2)!}.$$

Обозначим $Z_{k,l}(\zeta)= Y_{k,l}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)|\zeta|^k$ — шаровые (однородные гармонические) многочлены ([8], стр. 475), $l=1, 2,\cdots, \sigma(k)$, $k=0, 1, 2,\cdots$. Семейство $\{Z_{k,l}\}$ образует базис в пространстве функций, гармонических в шаре (с естественной топологией равномерной сходимости на компактах).

Следствие. *Пусть ∂D связна и удовлетворяет одному из двух условий:*

а) $\partial D\in C^{(2)}$,

б) $n=2$, *граница* $\partial D\in C^{(1)}$.

Для того чтобы функция $f\in C(\partial D)$ была следом на ∂D голоморфной в D и непрерывной на $\bar D$ функции, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial}{\partial\zeta_j} Z_{k,l}(\zeta)\, d\bar\zeta[j]\wedge d\zeta=0, \tag{3}$$

$$l=1, 2,\cdots, \sigma(k),\ k=0, 1, 2,\cdots.$$

Отметим, что при $n=1$ данное следствие представляет собой известный классический критерий, состоящий в ортогональности $f(\zeta)$ при интегрировании по ∂D всем мономам ζ^k, $k=0, 1, 2,\cdots$ ([9], стр. 202).

§ 2. Доказательство теорем 1, 2 и следствия

Доказательство теорем. Теорема 1 следует из теоремы 2, так как если для функции $f\in C(\bar D)$ выполняется равенство (1), то из формулы скачка интеграла типа Мартинелли—Бохнера (см. [10], теорема 2 и следствие, а также [1], § 2) получаем (2). (Из этой же формулы скачка получаем, что теорема 2 следует из теоремы 1, т. е. они эквивалентны). Поэтому достаточно доказать теорему 2.

Пусть $f\in C(\partial D)$, введем обозначения

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\,U(\zeta, z)=\begin{cases} f^+(z), & z\in D,\\ f^-(z), & z\in \bar D.\end{cases}$$

Если для f выполнены условия теоремы 2, т. е. $f^-\equiv 0$, то по формуле скачка интеграла типа Мартинелли—Бохнера (см. теорему 2 и следствие в [10]) мы получим, что f^+ непрерывно продолжается на $\bar D$ и ее сужение на ∂D совпадает с f. Рассмотрим теперь функцию φ, гармоническую в некоторой окрестности $\bar D$. Существует область J с гладкой границей такая, что $J\supset\bar D$ и φ гармонична на $\bar J$. По формуле Грина (см., например, [11], стр. 297)

$$\varphi(z) = \frac{(n-2)!}{4\pi^n} \int\limits_{\partial J} \left[g(\zeta, z) \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial n} - \varphi(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} \right] d\sigma, \ z \in J,$$

где $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ — производная функции φ по направлению внешней нормали к поверхности ∂J в точке ζ, а $d\sigma$—элемент поверхности ∂J. Заменяя в формуле Грина интеграл подходящими интегральными суммами, а производную—разностным отношением, получим, что в некоторой окрестности $U(\bar{D})$ функция φ равномерно приближается линейными комбинациями дробей вида $g(\zeta, z^k)$, $z^k \in U(\bar{D})$, $k=1, 2, \cdots$. Так как

$$U(\zeta, z) = -\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta_k} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

то из (2) следует, что

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_k} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta = 0 \tag{4}$$

для любой φ, гармонической в окрестности $\bar{D}$.

Рассмотрим последовательность областей D_m, $m=1, 2, \cdots$ с гладкими границами таких, что $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D_m = D$, $\bar{D}_m \subset D_{m+1}$ и

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{\partial D_m} \alpha = \int\limits_{\partial D} \alpha \tag{5}$$

для любой формы α типа $2n-1$ с непрерывными на $\bar{D}$ коэффициентами.

По формуле Стокса

$$(-1)^n \int\limits_{\partial D_m} f^+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_k} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta = \int\limits_{\partial D_m} \varphi \mu_{f^+},$$

где

$$\mu_{f^+} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial f^+}{\partial \bar{\zeta}_k} d\zeta[k] \wedge d\bar{\zeta}.$$

Левый интеграл в этой формуле в силу (4) и (5) стремится к нулю, поэтому

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{\partial D_m} \varphi \mu_{f^+} = 0 \tag{6}$$

для всякой функции φ, гармонической в окрестности $\bar{D}$.

Мы сейчас хотим получить, что условие (6) выполняется для любой φ, непрерывной на $\overline{D}$.

Введем следующие обозначения. Пусть $z^0 \in \partial D$, а $z^+ \in D$, $z^- \in \mathbf{C}^n \setminus \overline{D}$, причем эти точки расположены на нормали к поверхности ∂D в точке z^0 и $|z^+ - z^0| = |z^- - z^0|$. Определим функцию $\rho(z)$ так

$$\rho(z) = \begin{cases} -\inf\limits_{\zeta \in \partial D} |\zeta - z|, & z \in \overline{D}, \\ \inf\limits_{\zeta \in \partial D} |\zeta - z|, & z \in \overline{D}, \end{cases}$$

тогда $D = \{z \in \mathbf{C}^n: \rho(z) < 0\}$.

Если $\partial D \in C^{(2)}$, то можно утверждать следующее (см. § 2 в [12], а также [13]):

а) существует окрестность U границы области ∂D такая, что $\rho \in C^{(2)}(U)$,

б) $|\operatorname{grad} \rho| \equiv 1$ в U,

в) $\dfrac{\partial \rho}{\partial z_k}(z^+) = \dfrac{\partial \rho}{\partial z_k}(z^-) = \dfrac{\partial \rho}{\partial z_k}(z^0)$, $k = 1, 2, \cdots, n$

и $z^{\pm} \in U$.

Обозначим через $N_F^{\pm}$ следующее выражение:

$$N_F^{\pm} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_k} \frac{\partial F^{\pm}}{\partial \overline{z}_k}.$$

Лемма 1. *Пусть $\partial D \in C^{(2)}$ и $F \in C(\partial D)$, тогда*

$$\lim_{z^+,\, z^- \to z^0} (N_F^+(z^+) - N_F^-(z^-)) = 0,$$

этот предел достигается равномерно относительно точки z^0. Если $N_F^+(z)$ непрерывно продолжается на $\overline{D}$, то и $N_F^-(z)$ непрерывно продолжается на $\mathbf{C}^n \setminus D$ и обратно.*

Пользуясь этой леммой завершим доказательство случая а) теоремы 2.

В качестве областей D_m мы возьмем области

$$D_m = \left\{ z \in \mathbf{C}^n: \rho(z) < -\frac{1}{m} \right\},$$

ясно, что требование (5), наложенное на области D_m, выполнено.

Легко проверить, что

$$d\zeta[k] \wedge d\overline{\zeta}\Big|_{\partial D^m} = (2i)^n (-1)^{n+k-1} \frac{\partial \rho}{\partial \overline{\zeta}_k} d\sigma_m,$$

---

* Эта лемма является аналогом (для интеграла типа Мартинелли—Бохнера) теоремы А. М. Ляпунова о скачке нормальной производной потенциала двойного слоя (см. [14], а также [15], стр. 61).

где $d\sigma_m$ — элемент поверхности ∂D_m, поэтому

$$\mu_{f^+}\Big|_{\partial D_m} = (-2i)^n N_f^+ d\sigma_m.$$

Так как $N_f^- \equiv 0$, то по лемме 1 N_f непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и равна на ∂D нулю. Следовательно, условие (6) выполняется для функций из $C(\overline{D})$. Возьмем в качестве такой функции функцию $\overline{f}^+$, тогда по формуле Стокса

$$\int_{\partial D_m} \overline{f}^+ \mu_{f^+} = (-2i)^n \int_{D_m} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f^+}{\partial \overline{\zeta}_k} \right|^2 dv \to 0,$$

при $m \to \infty$, поэтому f^+ — голоморфна в D. Раньше мы показали, что сужение f^+ на ∂D совпадает с f.

Рассмотрим случай б) теоремы 2. Пусть $n=2$, граница ∂D связна и $\partial D \in C^{(1)}$. Мы показали, что если для $f \in C(\partial D)$ выполняется равенство (2), то для f справедливо (4). Рассмотрим функцию

$$\varphi_z(\zeta) = \frac{a(\zeta_1 - z_1) + b(\zeta_2 - z_2)}{b(\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1) - a(\overline{\zeta}_2 - \overline{z}_2)} \frac{1}{|\zeta - z|^2}.$$

Эта функция гармонична по ζ в области $D_1 = \mathbf{C}^n \setminus \{\zeta\colon b(\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1) - a(\overline{\zeta}_2 - \overline{z}_2) = 0\}$. Возьмем шар v, содержащий $\overline{D}$, тогда для фиксированной точки $z \in \overline{V}$ можно найти константы a и b так, чтобы $D_1 \supset \overline{V}$. Легко проверить, что

$$dg \wedge d\zeta = \frac{\partial \varphi_z}{\partial \zeta_1} d\overline{\zeta}_2 \wedge d\zeta - \frac{\partial \varphi_z}{\partial \zeta_2} d\overline{\zeta}_1 \wedge d\zeta.$$

Из (4) мы получим, что

$$\int_{\partial D} f\, dg \wedge d\zeta = 0, \ z \in \overline{V},$$

так как ∂D связна, то интеграл равен нулю для всех $z \in \overline{D}$.

Лемма 2. *Пусть $D \subset \mathbf{C}^n$ — область с границей класса $C^{(1)}$ и $F \in C(\partial D)$, а*

$$\int_{\partial D} F\, dg \wedge d\overline{\zeta}[k, m] \wedge d\zeta = \begin{cases} H_F^+(z), & z \in D, \\ H_F^-(z), & z \in \overline{D}, \end{cases}$$

тогда

$$\lim_{z^+,\, z^- \to z^0} (H_F^+(z^+) - H_F^-(z^-)) = 0,$$

причем этот предел достигается равномерно относительно точки z^0. Если $H_F^+(z)$ непрерывно продолжается на $\overline{D}$, то и $H_F^-(z)$ непрерывно продолжается на $\mathbf{C}^n \setminus D$, и обратно, если H_F^- непрерывно продолжается на $\mathbf{C}^n \setminus D$, то и H_F^+ непрерывно продолжается на $\overline{D}$ (точки z^0 и $z^\pm$ определяются, как в лемме 1).

Используя лемму 2, закончим доказательство теоремы 2. Итак, мы получили, что $H_j^- = 0$, следовательно, по лемме 2 функция H_j^+ непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и на ∂D равняется нулю. Поэтому $H_j^+ = 0$, так как H_j^+ гармонична в D.

Далее

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_1} U(\zeta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial z_2} dg \wedge d\zeta,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_2} U(\zeta, z) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial z_1} dg \wedge d\zeta.$$

Таким образом

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_j} f^+(z) = \pm \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial z_{3-j}} dg \wedge d\zeta = 0, \; z \in D, \; j = 1, 2,$$

т. е. f^+ является голоморфной в D функцией.

Доказательство следствия. Функция $f^-(z)$ гармонична при $z \in \overline{D}$, поэтому для равенства $f^-(z) = 0$, $z \notin \overline{D}$, достаточно, если $\mathbf{C}^n \setminus \overline{D}$ связна, чтобы $f^-(z) = 0$ вне шара B, содержащего $\overline{D}$. При $z \notin B$ функция $g(\zeta, z)$ гармонична по ζ в B и, значит, представима равномерно сходящимся внутри B рядом по базисным гармоническим полиномам $Z_{k,l}$. Следовательно, условие (3) влечет за собой выполнение и (2).

Обратно, если f продолжается в D, как голоморфная функция, непрерывная на $\overline{D}$, то (3) верно ввиду $\bar\partial$-замкнутости подынтегральной внешней дифференциальной формы.

§ 3. Доказательство вспомогательных утверждений

Доказательство леммы 1. Пусть $F \in C(\partial D)$. Ясно, что вторая часть леммы следует из первой.

Так как $N_F^\pm = N_{F+C}^\pm$, где C — произвольная постоянная, то можно считать, что $F(z^0) = 0$.

Отметим, что

$$d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta \Big|_{\partial D} = (2i)^n (-1)^{k-1} \frac{\partial\rho}{\partial \bar\zeta_k} d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности ∂D. Поэтому

$$U(\zeta, z) \Big|_{\partial D} = \frac{(n-1)!}{\pi^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial \zeta_k} \frac{\bar\zeta_k - \bar z_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\sigma.$$

Следовательно,

$$N_F^+(z^+) - N_F^-(z^-) = -\frac{(n-1)!}{\pi^n} \times$$

$$\times \int\limits_{\partial D} F(\zeta) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\rho(z^0)}{\partial z_k} \frac{\partial\rho}{\partial\bar{\zeta}_k} \left[\frac{1}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{1}{|\zeta - z^-|^{2n}} \right] d\sigma +$$

$$+ \frac{n!}{\pi^n} \int\limits_{\partial D} F(\zeta) \left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial\rho(z^0)}{\partial z_k} (\zeta_k - z_k^+) \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial\bar{\zeta}_m} (\bar{\zeta}_m - \bar{z}_m^+)}{|\zeta - z^+|^{2n+2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial\rho(z^0)}{\partial z_k} (\zeta_k - z_k^-) \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial\bar{\zeta}_m} (\bar{\zeta}_m - \bar{z}_m^-)}{|\zeta - z^-|^{2n+2}} \right] d\sigma.$$

Обозначим первый интеграл через J_1, а второй интеграл через J_2.

С помощью унитарного преобразования и сдвига переведем точку z^0 в точку 0, а плоскость, касательную к ∂D в точке z^0 — в плоскость $\alpha = \{w \in \mathbf{C}^n\colon \operatorname{Im} w_n = 0\}$. При этом ∂D в окрестности нуля будет задаваться системой уравнений $'\zeta = 'w$, $\zeta_n = u_n + i\psi(w)$, здесь $'\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n-1})$, $'w = (w_1, w_2, \cdots, w_{n-1})$ и $w = ('w, u_n) \in \alpha$. Функция $\psi(w)$ дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности W точки 0 плоскости α, $z^{\pm} = (0, 0, \cdots, 0, iy_n^{\pm})$.

Поверхность ∂D является поверхностью Ляпунова с показателем Гельдера равным 1, значит, справедливы следующие оценки (см. [11], стр. 314—317, [15], стр. 16—19)*:

$$|\psi(w)| \leqslant C|w|^2, \; w \in W, \tag{7}$$

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right| \leqslant C|w|, \; j = 1, 2, \cdots, n, \; \left|\frac{\partial\psi}{\partial y_j}\right| \leqslant C|w|, \; j = 1, 2, \cdots, n-1,$$

здесь $z_j = x_j + iy_j$.

Отсюда следует, что

$$\left|\frac{\partial\rho}{\partial z_k}\right| \leqslant C_1|w|, \; \left|\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_k}\right| \leqslant C_1|w|, \; w \in W, \tag{8}$$

$k = 1, 2, \cdots, n-1$, так как

$$\frac{\partial\psi}{\partial z_j} = -\frac{\partial\rho}{\partial z_j} : \frac{\partial\rho}{\partial y_n} \text{ и } \left|\frac{\partial\rho}{\partial y_n}\right| \leqslant C_2 \quad \text{при} \quad w \in W,$$

причем константы не зависят от рассматриваемой точки. Далее

$$|\zeta(w)| \leqslant C_3|w|. \tag{9}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем в плоскости α шар B с центром в 0 и выберем $a > 0$ так, чтобы:

* В [11], [15] эти оценки приводятся для пространства R^3, но они легко переносятся и на R^n при $n > 3$.

1) $B \subset W$,

2) $|F(\zeta(w))| < \varepsilon$ при $w \in B$,

3) $B \times [-a, a] \subset U$,

4) $C(2|y_n| + C|w|^2) \leqslant d < 1$ для $|y_n| < a$ и $w \in B$.

Пусть $z = z$, справедливо тождество $|\zeta(w) - z|^2 = |w|^2 + (y_n - \psi(w))^2$. Отсюда

$$\frac{1}{|\zeta - z|^2} = \frac{1}{|w - z|^2} \frac{1}{1 - \frac{2\psi y_n - \psi^2}{|w - z|^2}},$$

но

$$\frac{|2\psi y_n - \psi^2|}{|w - z|^2} \leqslant \frac{C|w|^2(2|y_n| + C|w|^2)}{|w|^2 + y_n^2} \leqslant$$

$$\leqslant C(2|y_n| + C|w|^2) \leqslant d < 1.$$

Следовательно

$$\frac{1}{1 - \frac{2\psi y_n - \psi^2}{|w - z|^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\psi y_n - \psi^2)^k}{|w - z|^{2k}} = 1 + \frac{2\psi y_n - \psi^2}{|w - z|^2} h(w, z),$$

где $h(w, z)$ равномерно ограничена для $w \in B$, $|y_n| \leqslant a$.

Поэтому

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} = \frac{1}{|w - z|^{2n}} \left(1 + \frac{2\psi y_n - \psi^2}{|w - z|^2} h_1\right), \tag{10}$$

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{2n+2}} = \frac{1}{|w - z|^{2n+2}} \left(1 + \frac{2\psi y_n - \psi^2}{|w - z|^2} h_2\right) \tag{11}$$

и функции h_1, h_2 равномерно ограничены при $w \in B$, $|y_n| \leqslant a$.

Оценим интеграл J_1 по части поверхности ∂D, соответствующей шару B, т. е. интеграл J_1^B. Используя (10) и (7), получим

$$\left|\frac{1}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{1}{|\zeta - z^-|^{2n}}\right| \leqslant 2 \frac{|2\psi y_n^+ - \psi^2|}{|w - z^+|^{2n+2}} |h_1| \leqslant C_4 \frac{2|y_n^+| + C|w|^2}{(|w|^2 + y_n^{+2})^n}.$$

Далее, учитывая, что $d\sigma \leqslant d_1 ds$, где ds — элемент плоскости α

$$|J_1^B| \leqslant \varepsilon C_5 \int\limits_B \frac{2|y_n^+| + C|w|^2}{(|w|^2 + y_n^{+2})^n} ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon C_5 \left(2 \int\limits_{R^{2n-1}} \frac{|y_n^+| ds}{(|w|^2 + y_n^{+2})^n} + C \int\limits_B \frac{ds}{(|w|^2 + y_n^{+2})^{n-1}}\right).$$

Первый интеграл есть интеграл Пуассона для полупространства (см., например, [16], стр. 75) и не зависит от y_n^+, а второй интеграл непрерывен в точке 0. Поэтому

$$|J_1^B| \leqslant \varepsilon m,$$

где m не зависит от рассматриваемой точки и функции F.

Интеграл J_1 по оставшейся части границы, очевидно, может быть сделан как угодно малым при $z^{\pm} \to 0$.

Легко проверить, что после унитарного преобразования и сдвига вид интеграла J_2 не изменится. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho(0)}{\partial z_k} (\zeta_k - z_k) \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_m} (\bar{\zeta}_m - \bar{z}_m) =$$

$$= i (\zeta_n - z_n) \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_m} (\bar{\zeta}_m - \bar{z}_m) = i (\zeta_n - z_n) \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_m} \bar{\zeta}_m +$$

$$+ i \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_n} (u_n^2 + \psi^2 + y_n^2 - 2\psi y_n).$$

Интеграл J_2 по части поверхности ∂D, соответствующей шару B, разобъется на три интеграла

$$J_2^1 = \frac{-2in!}{\pi^n} \int_B F(\zeta(w)) \frac{2\psi y_n^{+} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_m} \bar{\zeta}_m y_n^{+}}{|w - z^{+}|^{2n+2}} d\sigma',$$

$$J_2^{\pm} = \pm \frac{in!}{\pi^n} \int_B F(\zeta(w)) \frac{\frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_n} (u_n^2 + \psi^2 + y_n^{\pm 2} - 2\psi y_n^{\pm}) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_m} \bar{\zeta}_m (\zeta_n - z_n^{\pm})}{|w - z^{+}|^{2n+4}} \times$$

$$\times (2\psi y_n^{\pm} - \psi^2) h_2 \, d\sigma', \quad d\sigma' = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi^2}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \psi^2}{\partial y_j}} \, ds.$$

Каждый из этих интегралов, используя (7) — (9) и (11), можно оценить так же, как J_1^B.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2*. Так как $H_F^{\pm} = H_{F+C}^{\pm}$, то можно считать, что $F(z^0) = 0$. Так же, как в лемме 1 сделаем унитарное преобразование и сдвиг. Получим, что ∂D в окрестности нуля будет задаваться системой уравнений

$$'\zeta = 'w, \quad \zeta_n = u_n + i\psi(w)$$

(мы придерживаемся обозначений леммы 1). Причем $\psi(w)$ — непрерывно дифференцируемая в окрестности W точки 0 плоскости z и $\psi(w) = o(|w|)$.

---

* Это доказательство аналогично доказательству теоремы 2 в [10] (см. также [1], § 2).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем в плоскости $\mathfrak{z}$ шар B с центром в 0, такой, что:

1) $B \subset W$,

2) $|F(\zeta(w))| < \varepsilon$ при $w \in B$,

3) $|w - z^+| \leqslant C|\zeta(w) - z^+|$ для $w \in B$.

Условие 3) обеспечивается соотношениями

$$|w - \zeta(w)| = |\psi(w)| = o(|w|),$$

$$|w - z^+| \leqslant |w - \zeta(w)| + |\zeta(w) - z^+| = |\psi(w)| + |\zeta - z^+|.$$

Пусть $B' = \{\zeta \in \partial D\colon \zeta = \zeta(w),\ w \in B\}$.

В силу условия 3), наложенного при выборе шара B, и неравенства $|\zeta(w)| \leqslant C_1|w| \leqslant C_1|w - z^+|$

$$\left|\frac{\bar\zeta_k}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar\zeta_k}{|\zeta - z^-|^{2n}}\right| = \frac{\left||\zeta - z^+| - |\zeta - z^-|\right|}{|\zeta - z^+|\,|\zeta - z^-|} \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{|\zeta_k|}{|\zeta - z^+|^j\,|\zeta - z^-|^{2n-j-1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 C^{2n+1} \frac{2(2n-1)|z^+|}{|w - z^+|^{2n}}. \tag{12}$$

Точно также

$$\left|\frac{\bar z_k^+}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar z_k^-}{|\zeta - z^-|^{2n}}\right| \leqslant d\,\frac{|z^+|}{|w - z^+|^{2n}}. \tag{13}$$

Наконец,

$$d\sigma \leqslant d_1\, ds. \tag{14}$$

Теперь из условия 2), наложенного при выборе шара B и из (12)—(14) получим, что

$$\left|\int_{B'} F(\zeta)\,[dg(\zeta, z^+) \wedge d\bar\zeta\,[k, m] \wedge d\zeta - dg(\zeta, z^-) \wedge d\bar\zeta\,[k, m] \wedge d\zeta]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon d_2 \int_B \frac{|y_n^+|\, ds}{(|w|^2 + y_n^{+2})^n} \leqslant \varepsilon d_3,$$

причем d_3 не зависит от рассматриваемой точки и функции F.

Так же, как в лемме 1, вторая часть леммы 2 следует из первой.

Институт физики
им. Л. В. Киренского
СО АН СССР

Поступила 26. IV. 1977

Ա. Մ. ԿԻՏՄԱՆՈՎ, Լ. Ա. ԱՅԶԵՆԲԵՐԳ. Մարտինելի-Բոխների ինտեգրալով ներկայացվող անընդհատ ֆունկցիաների հոլոմորֆության մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ անընդհատ ֆունկցիան, որը ներկայացվում է Մարտինելի-Բոխների ինտեգրալով սահմանափակ $D \subset C^n$ *տիրույթում, հոլոմորֆ է այդ տիրույթում* հետևյալ ամեն մի դեպքերում. ա) եթե ∂D-ն պատկանում է $C^{(2)}$ դասին, բ) $n=2$, եթե ∂D-ն կապակցված է և պատկանում է $C^{(1)}$-ին: Բերվում է հայտանիշ տիրույթի եզրի վրա տրված f ֆունկցիայի այդ տիրույթում հոլոմորֆ շարունակելիության համար: Այդպիսի շարունակության գոյության համար ինչպես ա), այնպես էլ բ) դեպքում f ֆունկցիան պետք է լինի օրթոգոնալ Մարտինելի-Բոխների $U(\zeta, z)$ կորիզներին, երբ $z \notin \overline{D}$.

A. M. KYTMANOV, L. A. AIZENBERG. *About holomorphness of continuous functions, representable by the Martinelli-Bochner integral* (summary)

In this paper we prove that continuous function, representable in bounded domain $D \subset C^n$ by the Martinelli-Bochner integral, is holomorphic in this domain the following cases; a) boundary ∂D belongs to the class C^2, b) $n=2$, the boundary ∂D is connected and belongs to the class C^1.

A criterion of existence of holomorphic continuation of continuous function f from ∂D in to D is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Айзенберг, Ш. А. Даутов.* Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства, Новосибирск, Изд. „Наука", Сибирское отделение, 1975.
2. *А. М. Аронов.* О функциях, представимых интегралом Мартинелли—Бохнера, сб. „Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных", Красноярск, 1973, 35—39.
3. *А. М. Аронов, А. М. Кытманов.* О голоморфности функций, представимых интегралом Мартинелли—Бохнера, Функциональный анализ и его прил., 9, № 3, 1975, 83—84.
4. *В. С. Виноградов.* Об аналоге интеграла типа Коши для аналитических функций многих комплексных переменных, ДАН СССР, 178, № 2, 1968, 283—285.
5. *В. А. Байков.* Об одной граничной теореме для голоморфных функций двух комплексных переменных, УМН, 24, № 5, 1969, 221—222.
6. *B. Weinstock.* Continuous boundary values of analytic functions of several complex variables, Proc. Amer. Math. Soc., 11, № 2, 1969, 463—466.
7. *А. М. Аронов, Ш. А. Даутов.* Об одном результате Б. Вайнстока, сб. „Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных", Красноярск, 1973, 193—195.
8. *С. Л. Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул, М., Изд. „Наука", 1974.
9. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
10. *Ш. А. Даутов, А. М. Кытманов.* О граничных свойствах интеграла типа Мартинелли—Бохнера, сб. „Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных", Красноярск, 1973, 49—54.
11. *В. С. Владимиров.* Уравнения математической физики, М., Изд. „Наука", 1967.
12. *Е. А. Волков.* О границах подобластей, весовых классах Гельдера и решении в этих классах уравнения Пуассона, Труды матем. института им. Стеклова, 117, М., „Наука", 1972, 75—99.
13. *Н. Ю. Горенский.* Некоторые приложения дифференциальных свойств функции расстояния до открытых множеств в C^n, сб. „Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных", Красноярск, 1973, 203—208.
14. *А. М. Ляпунов.* Собрание сочинений, т. 1, М., Изд. АН СССР, 1954.
15. *Л. Н. Сретенский.* Теория ньютоновского потенциала, М.—Л. Гостехиздат, 1946.
16. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., Изд. „Мир", 1973.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS