ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերի, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indices should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenian, SSR
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Armenian, SSR, USSR

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 1, 1978 Математика

К. А. ЯГДЖЯН

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КЛАССАХ ЖЕВРЕ

Введение

В настоящей работе исследуется задача Коши для многомерных гиперболических скалярных уравнений произвольного порядка, вырождающихся на начальной гиперплоскости. Как известно, вообще говоря, задача Коши для нестрого гиперболических уравнений не является корректной в пространствах Соболева. В связи с этим возможны два подхода в исследовании подобных задач. Один из них заключается в нахождении таких условий на оператор, при которых задача остается корректной в пространствах Соболева. Этому подходу посвящено много работ, причем в некоторых случаях найдены необходимые и достаточные условия. Из них выделим работы [1]—[4], результаты которых будут нами использованы. Другой из подходов состоит в отыскании подходящих пространств функций, в которых задача Коши является корректной. Такими классами функций оказываются классы Жевре.

Последняя задача также достаточно хорошо изучена (см., например, [5]—[9]), однако, в большинстве работ выбор класса Жевре делается в зависимости только от главной части оператора, в то время, как естественнее считать класс Жевре зависящим от всего оператора. В работе [8] именно с этой точки зрения была рассмотрена задача Коши для скалярного уравнения второго порядка на плоскости. В [8] было выявлено, что некоторые гиперболические операторы допускают двойные оценки: с потерей гладкости и без потери гладкости, но с неинтегрируемым весом, что позволило определить классы, в которых задача Коши корректна, если рассматривать младшие члены оператора как возмущение.

В настоящей работе этот метод перенесен на случай многомерных гиперболических уравнений произвольного порядка с характеристиками переменной кратности.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка результата

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$P(x,\ D)\,u=f, \tag{1}$$

где

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \; x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in R^{n+1}, \; D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$x_0 \equiv t$, $a_{(m, 0, \cdots, 0)} = 1$, а оператор P — гиперболический относительно x_0, так как необходимость гиперболичности для корректности в классах Жевре задачи Коши доказана в [5], [9]. Далее обозначаем

$$P_s(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = s} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad P_{s, \beta}^{(\alpha)}(x, \xi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha P_s(x, \xi),$$

а через $G(\gamma)$ — класс бесконечно дифференцируемых, определенных в R^n функций, таких, что для $f \in G(\gamma)$ существуют M и R такие, что

$$\left(\int_{R^n} |D_x^\alpha f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq M R^{|\alpha|} \Gamma(1 + \gamma |\alpha|) \tag{2}$$

для всех α, где $\Gamma(x)$ — гамма функция Эйлера. Топология в $G(\gamma)$ задается обычным образом. Через $G(\delta, \gamma, m)$, $\delta > 0$ обозначаем функции $f(t, x)$, непрерывно отображающие $[0, \delta]$ в $G(\gamma)$, вместе со своими производными по t до порядка m включительно, т. е. $G(\delta, \gamma, m) = E([0, \delta], G(\gamma), m)$ с равномерной по t топологией. Предполагается, что $a_\alpha(x) \in G(1, \gamma, m)$.

Обозначим через Λ псевдодифференциальный оператор (п.д.о.) с символом $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, а через R—оператор интегрирования по t, т. е. для

$$u \in C(R^{n+1}), \; (Ru)(t, x) = \int_0^t u(\tau, x) \, d\tau.$$

Полагая начальные условия однородными, запишем (1) в виде интегро-дифференциальной системы первого порядка:

$$MU \equiv \frac{\partial U}{\partial t} - iA(x, D) \Lambda U - \sum_{k=0}^{m-1} B^k(x, D) R^k U = F, \tag{3}$$

где $U = (U^1, U^2, \cdots, U^m)$, $U^k = \Lambda^{k-1} D_t^{m-k} u$, $F = {}^t(f, 0, \cdots, 0)$,

$$A(x, D) = \|a^{ij}(x, D)\|_{i, j=1}^m, \; a^{i+1, i}(x, D) = 1, \; a^{1i}(x, D) = a^i(x, D),$$

$$\operatorname{ord} a^i(x, D) = 0, \; i = 1, \cdots, m,$$

а остальные $a^{ij}(x, D)$ равны нулю,

$$B^k(x, D) = \|b_k^{ij}(x, D)\|_{i, j=1}^m, \; b_k^{ij}(x, D) = \delta_{1i} b^{kj}(x, D),$$

где $\operatorname{ord} b^{kj} = 0$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_r$ множество дифференцируемых на $[0,1]$ вектор-функций $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$, где $\mu_i \equiv 1$, $i = 1, \cdots, m - r + 1$, удовлетворяющих условиям

$$\mu_i(+0) = 0,\ \dot{\mu}_i(t) \equiv \frac{d\mu_i(t)}{dt} \geqslant 0,\ i = m - r + 2, \cdots, m, \tag{4}$$

$$\dot{\mu}_i/\mu_i \leqslant \text{const}\ \dot{\mu}_{i+1}/\mu_{i+1}, \tag{5}$$

$$\mu_{i+1}(t) \leqslant \text{const}\ \mu_i(t),\ i = m - r + 2, \cdots, m - 1, \tag{6}$$

$$\mu^{\varkappa}_{m-r+2}(t) \leqslant \mu_m(t) \tag{7}$$

с некоторой положительной постоянной $\varkappa$.

Введем теперь два вспомогательных оператора

$$M_1 = \frac{\partial}{\partial t} - iA(x, D)\,\Lambda - \sum_{k=0}^{m-1} \hat{B}^k(x, D)\,R^k, \tag{8}$$

$$M_2 = \frac{\partial}{\partial t} - i\tilde{A}(x, D)\,\Lambda - \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{B}^k(x, D)\,R^k, \tag{9}$$

где $(\tilde{A}(x, D))_{ij} = a^{ij}(x, D)$, если $i \geqslant 2$, либо $j \leqslant m - r + 1$, и $(\tilde{A}(x, D))_{ij} = 0$ — в остальных случаях; $(\hat{B}^k(x, D))_{ij} = \delta_{1i}(B^k)_{ij}$, если

$$j < m - r + 2,\ \text{и}\ (\hat{B}^k(x, D))_{ij} = \delta_{1i}(\hat{B}^k(x_0, D))_{ij},\ t^k \sum_{|\beta| < p} |\hat{B}^{k(\beta)}_{ij} \times$$
$$\times (x_0, \xi)| \leqslant c\mu_j(t),$$

если $j \geqslant m - r + 2$; $(\tilde{B}^k(x, D))_{ij} = 0$, если $j > m - r + 1$ и $(\tilde{B}^k(x, D))_{ij} = \delta_{1i}(B^k)_{ij}$ при $j \leqslant m - r + 1$.

Мы предполагаем, что оператор M является r-правильным в смысле следующего определения.

Определение 1. Оператор M вида (3) называется r-правильным, если

(i) для любого $g(t, x) \in E([0, 1]; \bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(R^n), 0)$ задача Коши

$$M_1 V = G,\ V(0, x) = 0,\ G = {}^t(g, 0, \cdots, 0) \tag{10}$$

имеет единственное решение, принадлежащее $E([0, 1]; \bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(R^n), 1)$;

(ii) решение задачи (10) удовлетворяет энергетическому неравенству

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i(t)\,\|V^i(t)\| \leqslant c\,\lambda^M(t) \int_0^t \lambda^{-M}(\sigma)\,\|g(\sigma)\|\,d\sigma, \tag{11}$$

если

$$\int_0^t \lambda^{-M}(\sigma)\,\|g(\sigma)\|\,d\sigma < \infty, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i(t)\,\|V^i(t)\| = \lambda^M(t)\, o(1),\ \ t \downarrow 0,\ \ \lambda(t) \equiv \mu_m(t) \tag{13}$$

с некоторыми постоянными c, $M \geqslant 0$, не зависящими от V и g;

(iii) для задачи

$$M_2 V = G,\ \ V(0,\ x) = 0,\ \ G = {}^t(g,\ 0, \cdots, 0) \tag{14}$$

имеет место оценка

$$\sum_{k=1}^{m-r+1} \|V^k(t)\| \leqslant c \int_0^t \|g(\tau)\|\, d\tau. \tag{15}$$

Оператор P вида (1) „r-правильный", если соответствующий ему оператор M вида (3) является r-правильным.

Отметим здесь, что кратность корней характеристического полинома r-правильного оператора равна, вообще говоря, r. r-правильными операторами являются, например, операторы, описанные в работах [1]—[4].

Таким образом, вспомогательный оператор M_1 должен допускать двойные оценки: с потерей гладкости и без потери гладкости, но с неинтегрируемым весом (11).

Обозначим через

$$C^k(x,\ D) = B^k(x,\ D) - \hat{B}^k(x,\ D) = \|C_k^{ij}(x,\ D)\|_{i,\ j=1}^{m},$$

где

$$C_k^{ij}(x,\ D) = \delta_{1i}\, \alpha_j^k(x,\ D),\ \ j = m-r+2, \cdots, m, \ \text{и}\ \ C_k^{ij}(x,\ D) = 0$$

для остальных j. Таким образом, $B^k(x,\ D) = \hat{B}^k(x,\ D) + C^k(x,\ D)$.

Сформулируем основное условие:

[A]. Существуют дифференцируемые на $(0,1]$ неотрицательные функции $\alpha_{m-r+2}, \cdots, \alpha_m$ и α и постоянная l такие, что

$$\dot{\alpha}_i(t) \geqslant 0,\ \ \dot{\alpha}(t) \geqslant 0,\ \ i = m-r+2, \cdots, m, \tag{16}$$

$$t^k \alpha_i^{-1}(t)\, \alpha_i^{k(\beta)}(t,\ x,\ \xi) \in G(1,\ \gamma,\ 1),\ \ |\xi| = 1,\ \ |\beta| \leqslant p. \tag{17}$$

$$\alpha_i(t) \leqslant \alpha(t) \leqslant \mathrm{const}\, \dot{\lambda}\lambda^{l-1},\ \ l > 0, \tag{18}$$

$$\mu_i^{-1}(t)\, a^{1i(\beta)}(t,\ x,\ \xi) \in G(1,\ \gamma,\ 1),\ \ |\xi| = 1,\ \ |\beta| \leqslant p, \tag{19}$$

где постоянная p зависит только от n.

Пусть $\hat{r}$ такое, что $\alpha_{m-r+i}(t) \equiv 0$, $i > \hat{r}$, $\hat{r} \leqslant r$.

Теорема 1. *Пусть вспомогательный оператор M является r-правильным, и пусть выполнено условие* [A]. *Предположим, далее, что с некоторыми положительными постоянными δ_1, δ_2*

$$\lim_{t\to 0}\max_{t_1\in[0,t]}\left\{t_1\int_0^{t_1}\alpha(s)\,ds\right\}^{1-\delta_1}\left\{\int_{t_1}^{t}\beta(s)\,ds\right\}^{(\gamma-1)(\hat r-1)-1+\delta_2}=0, \tag{20}$$

где $\beta(t)=\sum_{i=m-r+2}^{m-r+\hat r}\frac{\alpha_i(t)}{\mu_i(t)}$. *Тогда задача Коши*

$$Pu=f,\ D_t^k u=g_k,\ t=0,\ k=0,\cdots,m-1, \tag{21}$$

$f\in G(1,\gamma,0)$, $g_k\in G(\gamma)$, *имеет единственное решение в* $G(1,\gamma,m)$.

Доказательство теоремы 1 будет проведено в § 4 после ряда вспомогательных утверждений.

Следствие 1. Пусть оператор P является r-правильным оператором, причем вместо условий (7), (17), (18) выполнены

$$\alpha_i^k(t)^{-1}\ \alpha_i^{k(\beta)}(t,x,\xi)\in G(1,\gamma,1),\ |\beta|\leqslant p,\ |\xi|=1, \tag{22}$$

$$\alpha_i^k(t)\leqslant\text{const}\ \mu_i(t)\ \mu_i^{l-1}(t) \tag{23}$$

и имеют место (19), (16). Тогда для корректности задачи (21) достаточно выполнения условия

$$\lim_{t\to 0}\max_{t_1\in[0,t]}\left\{t_1^{l+k}\int_0^{t_1}\alpha^k_{m-r+1+i}(s)\,ds\right\}^{k+1-\delta_1}\times$$

$$\times\left\{\int_{t_1}^{t}\frac{\alpha^k_{m-r+1+i}(s)}{\mu_{m-r+1+i}(s)}s^k s\right\}^{(\gamma-1)l-(k+1)+\delta_2}=0, \tag{24}$$

если $\alpha_i^k(t,x,\xi)=\delta_{ii_0}\ \delta_{kk_0}\alpha_i^k(t,x,\xi)$, $i=1,2,\cdots,r-1$, $k=0,\cdots,m-1$.

Определение 2 [2]. Оператор P называется гиперболическим равномерно r-вырождающимся при $t=0$, если P — строго гиперболический при $t>0$, и существует функция $\lambda(t)\in C^1[0,1]$ такая, что $\lambda(0)=0$, $\lambda'(t)\geqslant 0$, $0\leqslant t\leqslant 1$, и характеристические корни полинома $P_m(x,\xi_0,\xi)$ удовлетворяют соотношениям

$$|D_x^\alpha\lambda_i(x,\xi)|\leqslant\text{const}\ \lambda^{\omega_i}\ |\xi|,\ \alpha_0=0,\ i=1,\cdots,r, \tag{24'}$$

причем $1\leqslant\omega_1\leqslant\omega_2\leqslant\cdots\leqslant\omega_r$; $\lambda_i(t=0)\neq 0$ при $r<i\leqslant m$,

$$\left|\frac{D_x^\alpha\lambda_i}{\lambda_i}\right|\leqslant\text{const}\ \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)},\ \alpha_0=1, \tag{24''}$$

$$(\lambda_i-\lambda_j)^2\geqslant\text{const}\ \lambda^{2\omega_j}|\xi|^2,\ j<i\leqslant r, \tag{24'''}$$

$$(\lambda_i-\lambda_j)^2\geqslant\text{const}\ |\xi|^2,\ r\leqslant j<i\ \text{или}\ j\leqslant r<i. \tag{24''''}$$

С помощью теоремы 1 [9] можно получить следующие два следствия.

Следствие 2. Пусть P — оператор с аналитическими коэффициентами, равномерно r-вырождающийся при $t=0$ с $\omega_1=\cdots=\omega_r$, и предположим, что выполнены условия следствия 1. Тогда для того чтобы задача (21) при любых $f \in G(1, \gamma, 0)$ и $g_k \in G(\gamma)$ имела решение $u \in G(1, \gamma, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы имело место (24).

Следствие 3. Пусть P — равномерно r-вырождающийся оператор с аналитическими коэффициентами и $r < 3$. Тогда для того чтобы задача (21) при любых $f \in G(1, \gamma, 0)$ и $g_k \in G(\gamma)$ имела решение $u \in G(1, \gamma, 1)$, необходимо и достаточно выполнение условия (20).

Отметим, далее, что если $\alpha_i(t) \leqslant c\,\mu_i(t)$, т. е. выполнены достаточные условия C^∞-корректности, то (20) не накладывает никаких дополнительных ограничений.

Следствие 4. Пусть P — r-правильный оператор. Тогда при любых младших членах задача (21) имеет решение $u \in G(1, \gamma, 1)$ для произвольных f и g_k из $G(1, \gamma, 0)$ и $G(\gamma)$ соответственно, если $\gamma \leqslant \dfrac{r}{r-1}$.

§ 2. Некоторые свойства r-правильных операторов

Лемма 1. *Пусть* $\nu(t) \in C^1([0, 1])$ *и* $\nu(t) \geqslant 0$, $\nu^{-1}(t) f \in G(1, \gamma, 0)$. *Тогда существует единственное решение задачи* (14) V *и оно непрерывно зависит от* f, *причём* $\nu^{-1}(t)\, V \in G(1, \gamma, 1)$.

Доказательство можно легко провести методом работы [10]. Поэтому мы его опускаем.

Лемма 2. *Для задачи* $M_1 V = {}^t(g, 0, \cdots, 0)$, $V(0, x) = 0$, $g \in G(1, \gamma, 0)$ *существует функция* $\bar V \in G(1, \gamma, 1)$, *такая что* $M_1(V - \bar V) = {}^t(f, 0, \cdots, 0)$, $\lambda^{-M} f \in G(1, \gamma, 0)$ *и* $\bar V(0, x) = 0$.

Доказательство. Пусть $V_1 \in G(1, \gamma, 1)$ и

$$M_2 V_1 = {}^t(g, 0, \cdots, 0), \; V_1(0, x) = 0. \tag{25}$$

Тогда

$$M_1(V - V_1) = (M_2 - M_1)\, V_1, \; \mu_{m-r+2}^{-1}(M_2 - M_1)\, V_1 \in G(1, \gamma, 1). \tag{26}$$

Аналогично

$$M_2 V_k = (M_2 - M_1)\, V_{k-1}, \; V_k(0, x) = 0, \; k = 2, 3, \cdots. \tag{27}$$

Тогда согласно лемме 1 $V_k \in G(1, \gamma, 1)$ и

$$M_1\Big(V - \sum_{k=1}^{N} V_k\Big) = (M_2 - M_1)\, V_N = M_2 V_{N+1} = {}^t(f, 0, \cdots, 0), \tag{28}$$

где $\mu_{m-r+2}^{-N}(M_2 - M_1)\, V_N \in G(1, \gamma, 1)$ и при достаточно большом N

$$\lambda^{-M} f \in G(1, \gamma, 1), \text{ а } V = \sum_{k=1}^{N} V_k.$$

Лемма 3. *Пусть f такая, что $\lambda^{-M} f \in G(1, \gamma, 0)$. Тогда решение задачи*

$$M_1 g = F, \ g(0, x) = 0, \ F = {}^t(f, 0, \cdots, 0) \tag{29}$$

существует, единственно и $\lambda^{-M} g \in G(1, \gamma, 1)$.

Доказательство. Существование $g \in \bigcap_k H^k(R^n)$ и его единственность непосредственно следуют из того, что M_1 является r-правильным оператором. Определим

$$\Phi_m(t) = \max_{\sigma \in [0, t]} \lambda^{-M}(\sigma) \sum_{i_1, \cdots, i_m, j} \mu^j(\sigma) \| D_{i_1} \cdots D_{i_m} g(\sigma) \|, \ m = 0, 1, \cdots. \tag{30}$$

Покажем, что

$$\Phi_m(t) \leqslant N e^{dmt} (1 + t)^m a^m \Gamma(1 + \gamma m), \ m = 0, 1, \cdots. \tag{31}$$

Тогда из (31) будут следовать оставшиеся утверждения леммы. Обозначим

$$v_{i_1 \cdots i_m} = D_{i_1} \cdots D_{i_m} g.$$

Докажем (31) индукцией по m. При $m = 0$ оно очевидно. Сделаем переход от $m-1$ к m. Пусть

$$\sum_{|\beta| \leqslant p} |a_{(\alpha)}^{lj(\beta)}(t, x, \xi)| \leqslant \mu_j(t) M K^{|\alpha|-1} \Gamma(1 + \gamma(|\alpha| - 1)), \tag{32}$$

$$\sum_{|\beta| \leqslant p} |b_{(\alpha)}^{lj(\beta)}(t, x, \xi)| \leqslant \frac{1}{m} M K^{|\alpha|} \Gamma(1 + \gamma |\alpha|), \ j = 1, \cdots, m - r + 1. \tag{33}$$

Подействуем на обе части уравнения (29) оператором $D_{i_1} \cdots D_{i_m}$:

$$D_{i_1} \cdots D_{i_m} \left(\frac{\partial}{\partial t} - iA(x, D) \Lambda - \sum_{k=0}^{m-1} \hat{B}^k R^k \right) g = D_{i_1} \cdots D_{i_m} f. \tag{34}$$

Отсюда

$$M_1 [v_{i_1 \cdots i_m}] - i [D_{i_1} \cdots D_{i_m}, A(t, x, D)] \Lambda g -$$
$$- \sum_{k=0}^{m-1} [D_{i_1} \cdots D_{i_m}, \hat{B}^k] R^k g = D_{i_1} \cdots D_{i_m} f, \tag{35}$$

где $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор двух операторов. Подсчитав коммутатор и учитывая (32), (33) и применяя (11) к (35), получаем

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j(t) \| v_{i_1 \cdots i_m}^j(t) \| \leqslant c \lambda^M(t) \int_0^t \lambda^{-M}(\tau) \{ \| D_{i_1} \cdots D_{i_m} f \| +$$

$$+ M \sum_{\substack{k \\ 1 \leqslant p \leqslant m}} \sum_{l} [\mu^l \| v^l_{i_1 \cdots \hat{i}_p \cdots i_m k} \| + \mu^l \| v^l_{i_1 \cdots \hat{i}_p \cdots i_m} \|] +$$

$$+ MK\Gamma(1+\gamma) \sum_{k,\,p,\,q,\,j} \mu^j \left[\|v^j_{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots\hat{i}_q\ldots i_m k}\| + \|v^j_{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots\hat{i}_q\ldots i_m}\|\right] +$$

$$+ MK^2\Gamma(1+2\gamma) \sum_{k,\,p,\,r,\,q,\,j} \mu_j \left[\|v^j_{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots\hat{i}_q\ldots\hat{i}_r\ldots i_m k}\| + \|v^j_{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots\hat{i}_q\ldots\hat{i}_r\ldots i_m}\|\right] + \cdots$$

$$+ MK^{m-1}\Gamma(1+\gamma(m-1)) \sum_{k,\,j} \mu_j \left[\|v^j_k\| + \|v^j\|\right] +$$

$$+ MK\Gamma(1+\gamma) \sum_p \sum_j \mu_j \|v^j_{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_m}\| +$$

$$+ MK^2\Gamma(1+2\gamma) \sum_{p,\,q,\,j} \mu_j \|v^j_{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots\hat{i}_q\ldots i_m}\| + \cdots +$$

$$+ MK^m\Gamma(1+\gamma m) \sum_j \mu_j \|v^j\|\Big] \, d\tau, \tag{36}$$

где $v_{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_m} = v_{i_1\ldots i_{p-1}\, i_{p+1}\ldots i_m}$,

$$\Phi_m(t) \leqslant dm \int_0^t \Phi_m(\tau)\, d\tau + c \int_0^t \lambda^{-M}(\tau) \sum_{i_1,\ldots,i_m} \|D_{i_1}\cdots D_{i_m} f(\tau)\| \, d\tau +$$

$$+ \frac{d}{n} \int_0^t \sum_{p=1}^m \left[2C_m^{p+1} n\left(\Phi_{m-p}(\tau) + \Phi_{m-p-1}(\tau)\right) + C_m^p\, \Phi_{m-p}\right] (Kn)^p\, \Gamma(1+\gamma p)\, d\tau, \tag{37}$$

где $d = cMn$, и $C_m^{m+1} = 0$. Применяя лемму Гронуолла, получаем

$$\Phi_m(t) \leqslant c \int_0^t \lambda^{-M}(\tau) \sum_{i_1\ldots i_m} \|D_{i_1}\cdots D_{i_m} f(\tau)\|\, e^{dm(t-\tau)}\, d\tau +$$

$$+ \frac{d}{n} \int_0^t e^{dm(t-\tau)} \sum_{p=1}^m \left[2C_m^{p+1} n\left(\Phi_{m-p}(\tau) + \Phi_{m-p-1}(\tau)\right) +\right.$$

$$\left. + C_m^p\, \Phi_{m-p}(\tau)\right] (Kn)^p\, \Gamma(1+\gamma p)\, d\tau. \tag{38}$$

Учтем теперь, что

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m} \|D_{i_1}\cdots D_{i_m} f(t)\| \leqslant \lambda^M(t)\, MK^m\, \Gamma(1+\gamma m), \tag{39}$$

$$C_m^{p+1} n + C_m^p \leqslant \frac{m!}{(m-p)!\,p!}\,(m-p+1)(n+1), \tag{40}$$

поэтому

$$\Phi_m(t) \leqslant \frac{d}{n} \int_0^t e^{dm(t-\tau)}\, K^m\, \Gamma(1+\gamma m)\, d\tau +$$

$$+\frac{2d(n+1)}{n}\int\limits_0^t e^{dm(t-\tau)}\sum_{p=1}^{m} C_m^p\,(m-p+1)(Kn)^p\,Ne^{d(m-p)\tau}\times$$

$$\times(1+\tau)^{m-p}\,a^{m-p}\,\Gamma(1+\gamma p)\,\Gamma(1+\gamma(m-p))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d}{n}\cdot\frac{1}{dm}\,e^{dmt}\,K^m\,\Gamma(1+\gamma m)+$$

$$+\frac{2d(n+1)}{n}Ne^{dmt}\sum_{p=1}^{m}C_m^p\,(1+t)^{m-p+1}a^m\left(\frac{Kn}{a}\right)^p\Gamma(1+\gamma p)\,\Gamma(1+\gamma(m-p))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{nm}\,e^{dmt}\,K^m\,\Gamma(1+\gamma m)+\frac{2d(n+1)}{n}\,Ne^{dmt}\,(1+t)^m\,a^m\,J_0, \tag{41}$$

где обозначено

$$J_0=\sum_{p=1}^{m}C_m^p\left(\frac{Kn}{a}\right)^p\Gamma(1+\gamma p)\,\Gamma(1+\gamma(m-p)). \tag{42}$$

Приведем здесь одно неравенство, которое легко доказывается:

$$J_s\equiv\sum_{p=1}^{m}C_m^p\left(\frac{Kn}{a}\right)^p\Gamma(1+\gamma p)\,\Gamma(1+\gamma(s+m-p))\leqslant\varepsilon\Gamma(1+\gamma(s+m)), \tag{43}$$

где $\varepsilon\to 0$ при $a\to\infty$, равномерно по s и m.

Учитывая (43) из (41), получаем (31), выбирая a и N достаточно большими. Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любого* $f\in G(1,\gamma,0)$ *задача* (29) *имеет единственное решение* $g\in G(1,\gamma,1)$, *непрерывно зависящее от* f.

Доказательство. С помощью леммы 2 задача (29) приводится к новой с быстро убывающей при $t\downarrow 0$ правой частью, а затем применяется лемма 3.

Приведем теперь несколько более общее утверждение.

Следствие. *Пусть* $\nu(t)\in C^1([0,1])$, $\nu(t)>0$, $\dot\nu(t)>0$ *и* $(\dot\nu)^{-1}f\in G(1,\gamma,0)$. *Тогда задача* (29) *имеет единственное решение* g, *непрерывно зависящее от* f *и такое, что* $\nu^{-1}g\in G(1,\gamma,1)$.

Доказательство. Предварительно доказываются леммы, аналогичные лемме 3 для операторов M_1 и M_2, затем делается редукция.

§ 3. Вспомогательные оценки для последовательных приближений

Лемма 4. *Пусть* $\lambda^{-\mu}f\in G(1,\gamma,0)$, $\varepsilon_0(0,x)=0$, *и* $M_1\varepsilon_0=f$,

$$M_1\,\varepsilon_n=\sum_{k=0}^{m-1}C^k\,R^k\,\varepsilon_{n-1},\ \varepsilon_n(0,x)=0,\ n=1,2,\cdots. \tag{44}$$

Определим

$$\Phi^k_{n,s}(t) \equiv \max_{0<\sigma<t} \lambda^{-M}(\sigma) \sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n} \|D_{i_1}\cdots D_{i_s}\varepsilon^k_n(\sigma)\|,\ k=1,\cdots,m, \tag{45}$$

$$\Phi_{n,s}(t) \equiv \sum_{k=1}^{m} \mu_k(t)\,\Phi^k_{n,s}(t). \tag{46}$$

Тогда

$$\Phi_{n,s}(t) \leqslant Na^n e^{dst}(1+t)^s b^s R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat r-1} \alpha_{i_1} R^{i_1+1}\right)\times\cdots\times$$

$$\times\left(\sum_{i_n=1}^{\hat r-1} \alpha_{i_n} R^{i_n+1}\right) b^{\sum\limits_{k=1}^{n} i_k}\,\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{k=1}^{n} i_k\right)\right), \tag{47}$$

$$\Phi^{m-r+1+j}_{n,s}(t) \leqslant Na^n e^{d(s+j)t}(1+t)^{s+j} b^{s+j} R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat r-1} \alpha_{i_1} R^{i_1+1}\right)\times\cdots\times$$

$$\times\left(\sum_{i_n=1}^{\hat r-1} \alpha_{i_n} R^{i_n+1}\right) b^{\sum\limits_{k=1}^{n} i_k}\,\Gamma\left(1+\gamma\left(s+j+\sum_{k=1}^{n} i_k\right)\right), \tag{48}$$

с некоторыми постоянными N, a, b.

Доказательство проводим индукцией по n и s. Выведем предварительно одно общее неравенство, которое нам понадобится в дальнейшем. Подействуем оператором $D_{i_1}\cdots D_{i_m}$ на обе части (44), затем применим (11). Обозначим $v^j_{n,i_1\cdots i_s} = D_{i_1}\cdots D_{i_s}\varepsilon^j_n$. Справа в результате получится сумма, один из членов которой равен

$$c\int_0^t \lambda^{-M}(\tau)\left\| D_{i_1}\cdots D_{i_s}\sum_{k=0}^{m-1} C^k R^k \varepsilon_{n-1}\right\| d\tau. \tag{49}$$

Легко усмотреть, что он оценивается сверху через

$$\frac{d}{n}\int_0^t \sum_{l=m-r+2}^{m-r+\hat r} \alpha_l(\tau)\sum_{p=0}^{s} C^p_s (Kn)^p\,\Gamma(1+\gamma p)\,\Phi^l_{n-p,s-p}(\tau)\,d\tau. \tag{50}$$

Поэтому, как и при выводе (38), получаем

$$\Phi_{n,s}(t) \leqslant \frac{d}{n}\int_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{l=m-r+2}^{m-r+\hat r}\sum_{p=0}^{s} C^p_s (Kn)^p\,\Gamma(1+\gamma p)\,\alpha_l(\tau)\,\Phi^l_{n-1,s-p}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{d}{n}\int_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{p=1}^{s}\left[2C^{p+1}_s\, n\,(\Phi_{s-p}(\tau)+\Phi_{s-p-1}(\tau)) + C^p_s\,\Phi_{s-p}(\tau)\right]\times$$

$$\times (Kn)^p \Gamma(1+\gamma p)\, d\tau, \tag{51}$$

$d = cMn$. Пусть теперь $n = 1$, $s = 0$. Тогда

$$\Phi_{1,0}(t) \leqslant c \int_0^t \lambda^{-M}(\tau) \left| \sum_{k=0}^{m-1} C^k R^k \varepsilon_0 \right| d\tau \leqslant c \times$$

$$\times \int_0^t \alpha_l(\tau) \sum_{l=m-r+2}^{m-r+\hat{r}} \max_{0<\sigma<\tau} \| \lambda^{-M}(\sigma)\, \varepsilon_0^l(\sigma) \| \, d\tau,$$

но $\lambda^{-M} \varepsilon_0 \in G(1, \gamma, 1)$, поэтому

$$\Phi_{1,0}(t) \leqslant c R \left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{i_1} R^{i_1+1} \right) N K^{i_1} \Gamma(1+\gamma i_1). \tag{52}$$

Предположим теперь, что (47) имеет место при $s-1$, $n=1$, и докажем для s. Для этого воспользуемся (51):

$$\Phi_{1,s}(t) \leqslant \frac{d}{n} e^{dst} \tilde{K}^s \bar{N} R \Big(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{i_1} R^{i_1+1} \Big) K^{i_1} \Gamma(1+\gamma(s+i_1)) +$$

$$+ \frac{d}{n} \int_0^t e^{ds t} \bar{N} \bar{K}^s \sum_{p=1}^{s} C_s^p (Kn)^p \bar{K}^{-p} \left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{i_1} R^{i_1+1} \right) \times$$

$$\times \Gamma(1+\gamma(s-p+i_1))\, K^{i_1}\, d\tau +$$

$$+ \frac{4d(n+1)}{n} Na\, b^s e^{dst} R\left(\sum \alpha_{i_1} R^{i_1+1}\right) b^{i_1} \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{s} C_s^p \left(\frac{Kn}{b}\right)^p (1+t)^s\, \Gamma(1+\gamma p) \times$$

$$\times \Gamma(1+\gamma(s-p+i_1)). \tag{53}$$

В силу (43) за счет выбора $\bar{K}$, $\bar{N}$, b, N, a достаточно большими получаем (47) с $n = 1$.

Предположим теперь, что (47) имеет место при $n-1$ для всех s. Докажем, что тогда (47) верно и при n.

При $s = 0$ (47) очевидно. Сделаем индукцию по s. Из (51) имеем

$$\Phi_{n,s}(t) \leqslant \frac{d}{n} \int_0^t e^{ds(t-\tau)} \sum_{l=m-r+2}^{m-r+\hat{r}} \alpha_l\, \Phi_{n-1,s}^{l}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{d}{n} \int_0^t e^{ds(t-\tau)} \sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1} \sum_{p=1}^{s} C_s^p (Kn)^p \Gamma(1+\gamma p)\, \alpha_{m-r+1+i_1}(\tau)\, \Phi_{n-1,s-1}^{m-r+1+i_1}(\tau)\, d\tau +$$

$$+\frac{4d}{n}\int_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{p=1}^{s}\{C_s^{p+1}n+C_s^p\}(Kn)^p\Gamma(1+\gamma p)Na^n e^{d(s-p)\tau}(1+\tau)^{s-p}\times$$

$$\times b^{s-p}R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\cdots\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_n}R^{i_n+1}\right)b^{\sum_{l=1}^{n}i_l}\times$$

$$\times\Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{l=1}^{n}i_l\right)\right)=A_1+A_2+A_3. \tag{54}$$

Далее

$$A_1\leqslant\frac{d}{n}\int_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}(\tau)Na^{n-1}e^{ds\tau}(1+\tau)^s e^{dsi_1}(1+\tau)^{i_1}R^{i_1}\times$$

$$\times b^{s+i_1}R\left(\sum_{i_2=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_2}R^{i_2+1}\right)\cdots\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_n}R^{i_n+1}\right)b^{\sum_{l=1}^{n}i_l}\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{k=1}^{n}i_k\right)\right)d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d(1+t)^{\hat{r}-1}e^{dt(r-1)}}{na}Na^n e^{dst}(1+t)^s b^s R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_n}R^{i_n+1}\right)b^{\sum_{k=1}^{n}i_k}\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{k=1}^{n}i_k\right)\right), \tag{55}$$

$$A_2\leqslant\frac{d}{n}\int_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{p=1}^{s}C_s^p(Kn)^p\Gamma(1+\gamma p)\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}Na^{n-1}e^{d(s-p)\tau}\times$$

$$\times e^{d\tau i_1}(1+\tau)^{s-p+i_1}b^{s-p+i_1}R^{i_1+1}\left(\sum_{i_2=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_2}R^{i_2+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_n}R^{i_n+1}\right)b^{\sum_{l=2}^{n}i_l}\Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{l=1}^{n}i_l\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{de^{dt(r-1)}(1+t)^{r-1}}{na}Na^n e^{dst}(1+t)^s b^s R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_n}R^{i_n+1}\right)b^{\sum_{l=1}^{n}i_l}\sum_{p=1}^{s}C_s^p\left(\frac{Kn}{a}\right)^p\Gamma(1+\gamma p)\Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{k=1}^{n}i_k\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon Na^n e^{dst}(1+t)^s b^s R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{l_n=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{l_n} R^{l_n+1}\right) b^{\sum_{l=1}^{n} i_l} \Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{k=1}^{n} i_k\right)\right), \tag{56}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $a \to \infty$, $b \to \infty$ равномерно по s.

Точно так же

$$A_3 \leqslant 8\,\frac{d\,(n+1)}{n}\, Na^n\, e^{dst}\,(1+t)^s\, b^s\, R\left(\sum_{l_1=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{l_1} R^{l_1+1}\right) \times \cdots$$

$$\times\left(\sum_{l_n=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{l_n} R^{l_n+1}\right) b^{\sum_{k=1}^{n} i_k} \sum_{p=1}^{s} C_s^p \left(\frac{Kn}{b}\right)^p \Gamma\,(1+\gamma p)\, \Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{n=1}^{n} i_k\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1\, Na^n\, e^{dst}\,(1+t)^s\, b^s\, R\,(\sum \alpha_{l_1} R^{l_1+1}) \times \cdots$$

$$\times\,(\sum \alpha_{l_n} R^{l_n+1})\, b^{\sum_{k=1}^{n} i_k}\, \Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{k=1}^{n} i_k\right)\right), \tag{57}$$

где $\varepsilon_1 \to 0$ при $b \to \infty$ равномерно по s.

Из (54)—(57) следует (47). Используя уравнение (44), из (47) получаем (48). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть z — целое неотрицательное число. Тогда существуют постоянные N, a, b, не зависящие от z такие, что для любых k и s имеет место*

$$\Phi_{z+k,\,s}(t) \leqslant Na^{z+k}\, e^{dst}\,(1+t)^s\, b^s\, \underbrace{R\beta\cdots R\beta}_{k} \times$$

$$\times R\left(\sum_{l_1=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{l_1} R^{l_1+1}\right)\times\cdots\times\left(\sum_{l_n=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{l_n} R^{l_n+1}\right) b^{\sum_{l=1}^{z} i_l}\, \Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{l=1}^{z} i_l\right)\right). \tag{58}$$

Доказательство проводим индукцией по k. При $k=0$ это очевидно совпадает с (47). Из (51) имеем

$$\Phi_{z+k,\,0}(t) \leqslant \frac{d}{n}\int_0^t \sum_{l=m-r+2}^{m} \alpha_l \Phi^l_{z+k-1,\,0}(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d}{n}\int_0^t \sum \frac{\alpha_l}{\mu_l}\, \mu_l(\tau)\, \Phi^l_{z+k-1,\,0}(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d}{n}\int_0^t \beta(\tau)\, \Phi_{z+k-1,\,0}(\tau)\, d\tau, \tag{59}$$

откуда следует (58) для $s=0$. Сделаем индукцию по s. Имеем из (51)

$$\Phi_{z+k,s}(t)\leqslant\frac{d}{n}\int\limits_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{l=m-r+\hat r}^{m}\sum_{p=0}^{s}C_s^p(Kn)^p\frac{\alpha_l(\tau)}{\mu_l(\tau)}\mu_l(\tau)\Phi^l_{z+k-1,s-p}(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{4d}{n}\int\limits_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{p=1}^{s}\{C_s^{p+1}n+C_s^p\}(Kn)^p\Gamma(1+\gamma^p)Na^{z+k}\times$$

$$\times e^{d(s-p)\tau}(1+\tau)^{s-p}b^{s-p}\underbrace{R\beta\cdots R\beta}_{k}R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat r-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{i_z=1}^{\hat r-1}\alpha_{i_z}R^{i_z+1}\right)b^{\sum\limits_{l=1}^{z}i_l}\Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{l=1}^{z}i_l\right)\right)\equiv A_1+A_2. \qquad (60)$$

Очевидно, что

$$A_1\leqslant\frac{d}{n}\int\limits_0^t e^{ds(t-\tau)}\beta(\tau)\sum_{p=0}^{s}C_s^p(Kn)^p Na^{z+k-1}e^{d(s-p)\tau}(1+\tau)^{s-p}b^{s-p}\times$$

$$\times\underbrace{R\beta\cdots R\beta}_{k-1}R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat r-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots\times\left(\sum_{i_z=1}^{\hat r-1}\alpha_{iz}R^{i_z+1}\right)b^{\sum\limits_{l=1}^{z}i_l}\times$$

$$\times\Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{l=1}^{z}i_l\right)\right)\leqslant\frac{d}{na}(1+\varepsilon_2)Na^{z+k}e^{dst}(1+t)^s b^s\times$$

$$\times\underbrace{R\beta\cdots R\beta}_{k}R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat r-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\cdots\left(\sum_{i_z=1}^{\hat r-1}\alpha_{i_z}R^{i_z+1}\right)b^{\sum\limits_{l=1}^{z}i_l}\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{l=1}^{z}i_l\right)\right), \qquad (61)$$

где $\varepsilon_2\to 0$ при $b\to\infty$ равномерно по s.

Затем оцениваем A_2 точно так же, как это уже делалось выше. Таким образом, лемма доказана.

Следствие. Пусть k — целое, определяемое по формуле

$$k=k(n)=n-\frac{n}{(\gamma-1)(\hat r-1)}+\theta_n,\ \theta_n\in[0,1). \qquad (62)$$

Тогда при любых n и s имеет место оценка

$$\Phi_{n,s}(t)\leqslant Na^n e^{dst}(1+t)^s b^s\underbrace{R\beta\cdots R\beta}_{k}R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat r-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{i_{n-k}=1}^{\hat r-1}\alpha_{i_{n-k}}R^{i_{n-k}+1}\right)b^{\sum\limits_{l=1}^{n-k}i_l}\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{l=1}^{n-k}i_l\right)\right) \qquad (63)$$

с некоторыми постоянными N, a, b.

Доказательство. Подставляем в (58) $z=n-k$.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Используя теорему 3 и повторяя схему леммы 2, а также учитывая условие (18), нашу первоначальную задачу можно свести к новой, с правой частью $f(t, x)$ такой, что $\lambda^{-M} f \in C(1, \gamma, 0)$ и с $g_i=0$, $i=0, 1, \cdots, m-1$. Затем применим метод последовательных приближений. Решение $U(t, x)$ ищем в виде ряда $U(t, x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(t, x)$, где ε_k задаются посредством (44), $\varepsilon_k \in G(1, \gamma, 1)$. Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^j$ $j=1, \cdots, m-r+1$ равномерно сходится вместе со всеми производными в некоторой полосе $0 \leqslant t \leqslant \delta$, $\delta>0$.

Нетрудно видеть, что

$$R\alpha_{i_1} R^{i_1+1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_{n-k}} R^{i_{n-k}+1}=\int\limits_0^t \alpha_{i_1}(t_1) \int\limits_0^{t_1} \alpha_{i_2}(t_2) \cdots \int\limits_0^{t_{n-k-1}} \alpha_{n-k}(t_{n-k}) \times$$

$$\times dt_1\, dt_2 \cdots dt_{n-k} \frac{t_{n-k}^{i_{n-k}+1}}{(i_{n-k}+1)!} \cdot \frac{(t_{n-k-1}-t_{n-k})^{i_{n-k-1}}}{(i_{n-k-1})!} \times$$

$$\times \frac{(t_{n-k-2}-t_{n-k-1})^{i_{n-k-2}}}{(i_{n-k-2})!} \cdots \frac{(t_1-t_2)^{i_1}}{i_1!}, \tag{64}$$

но

$$\frac{t_l^{i_l}}{i_l} \cdot \frac{(t_{l-1}-t_l)^{i_{l-1}}}{t_{l-1}!} \cdots \frac{(t_1-t_2)^{i_1}}{i_1!} \leqslant \left(\frac{t_1}{\sum\limits_{m=1}^{l} i_m}\right)^{\sum\limits_{m=1}^{l} i_m} \frac{i_1^{i_1} \cdots i_l^{i_l}}{i_1! \cdots i_l!}, \tag{65}$$

поэтому

$$\Phi_{n, s}^j(t) \leqslant N a^n e^{d_s t}(1+t)^s b^s \underbrace{R\beta \cdots R\beta}_{k} \int\limits_0^t \sum \cdots \sum b^{\sum\limits_{l=1}^{n-k} i_l} \times$$

$$\times \Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{l=1}^{n-k} i_l\right)\right) t^{\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l} \alpha(t_{k+1})\{R\alpha\}^{n-k-1}(\text{const})^s \times$$

$$\times \frac{1}{\left(\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)!} \frac{1}{(n-k-1)!} \leqslant$$

$$\leqslant c^n \tilde{c}^s \underbrace{R\beta \cdots R\beta}_{k} \int\limits_0^t \sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1} \cdots \sum_{i_{n-k}=1}^{\hat{r}-1} \alpha(t_{k+1}) t^{\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l}\left\{\int\limits_0^{t_{k+1}} \alpha(\sigma)\, d\sigma\right\}^{n-k-1} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\hat{r}-1+\sum\limits_{k=1}^{n-k-1} i_k\right)\right)}{(n-k-1)!\left(\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)!} dt_{k+1} \leqslant c^n \, \tilde{c}^s \sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1} \cdots \sum_{i_{n-k-1}=1}^{\hat{r}-1} \int\limits_0^t \alpha(t_1) \times$$

$$\times \, t_1^{\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l} \left\{\int\limits_0^{t_1} \alpha(\sigma)\, d\sigma\right\}^{n-k-1} \left\{\int\limits_{t_1}^{t} \beta(\sigma)\, d\sigma\right\}^k dt_1 \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\hat{r}-1\right)+\gamma \sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)}{k!\,(n-k-1)!\left(\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)!}. \tag{66}$$

Далее

$$\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1} \cdots \sum_{i_{n-k-1}=1}^{\hat{r}-1} \frac{\Gamma\left(1+\gamma\,(s+\hat{r}-1)+\gamma \sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)}{k!\,(n-k-1)!\left(\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)!} \leqslant r^{n-k-1}\, 2^{(n-1)+\hat{r}\,(n-k-1)} \times$$

$$\times \sum_{l=n-k-1}^{(\hat{r}-1)(n-k-1)} \frac{\Gamma\,(1+\gamma\,(s+\hat{r}-1+l))}{(n-1+l)!}. \tag{67}$$

Итак

$$\sum_{n=N}^{\infty} \Phi^{j}_{n,\,s}(t) \leqslant c^s \sum_{n=N}^{\infty} c^n \int\limits_0^{t} \alpha(t_1) \left\{ t_1 \int\limits_0^{t_1} \alpha(\sigma)\, d\sigma \right\}^{n-k-1} \left\{\int\limits_{t_1}^{t} \beta(\sigma)\, d\sigma\right\}^k dt_1 \times$$

$$\times \sum_{l=n-k-1}^{(\hat{r}-1)(n-k-1)} \frac{\Gamma\,(1+\gamma\,(s+\hat{r}-1+l))}{(n+l-1)!}. \tag{68}$$

Выбираем $k=0$ при $\gamma \leqslant \frac{\hat{r}}{\hat{r}-1}$, а при $\gamma > \frac{\hat{r}}{\hat{r}-1}$ как указано в (62). При достаточно большом N получаем

$$\sum_{n=N}^{\infty} \Phi^{j}_{n,\,s}(t) \leqslant \tilde{c}^s \sum_{n=N}^{\infty} c^n \int\limits_0^{t} \alpha(t_1) \left\{ t_1 \int\limits_0^{t_1} \alpha(\sigma)\, d\sigma \right\}^{n-k-1} \left\{\int\limits_{t_1}^{t} \beta(\sigma)\, d\sigma\right\}^k dt_1 \times$$

$$\times \frac{\Gamma\,(1+\gamma s+n+1+(\hat{r}-1)(n-k-1))}{\Gamma\,(1+n+1+(\hat{r}-1)(n-k-1))}. \tag{69}$$

Пусть $m=n+1+(\hat{r}-1)(n-k-1)$, тогда

$$\delta_1 = \frac{(\hat{r}-1)1+\theta_n(\gamma-1)+1}{\gamma\,(\hat{r}-1)}, \quad \delta_2 = \frac{[(\hat{r}-1)(1+\theta_n)-1][(\gamma-1)(\hat{r}-1)-1]}{\gamma\,(\hat{r}-1)}+\theta_n,$$

и из (69) следует

$$\sum_{n=N}^{\infty} \Phi^j_{n,\,s}(t) \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} \tilde{c}^s\, c^m \int_0^t \alpha(t_1)\, J^m_m(t_1)\, \frac{\Gamma(1+\gamma s+m)}{\Gamma(1+m)}\, dt_1, \tag{70}$$

где

$$J_m(t_1) = \left\{ t_1 \int_0^{t_1} \alpha(\sigma)\, d\sigma \right\}^{\frac{1}{\gamma(\hat{r}-1)} - \frac{\delta_1}{m}} \left\{ \int_{t_1}^{t} \beta(\sigma)\, d\sigma \right\}^{\frac{(\gamma-1)(\hat{r}-1)-1}{\gamma(\hat{r}-1)} + \frac{\delta_2}{m}}. \tag{71}$$

В силу условия (20) отсюда имеем

$$\sum_{n=N}^{\infty} \Phi^j_{n,\,s}(t) \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} \tilde{c}^s\, (c J_m)^m\, \frac{\Gamma(1+\gamma s+m)}{\Gamma(1+m)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} \tilde{c}^s \int_0^{\infty} e^{-\tau}\, \frac{(c J_m)^m\, \tau^{\gamma s+m}}{m!}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{c}^s \int_0^{\infty} e^{-\tau}\, \tau^{\gamma s}\, e^{\theta\tau}\, d\tau = \tilde{c}^s\, (1-\theta)^{-\gamma s-1}\, \Gamma(1+\gamma s), \tag{72}$$

где $\theta \in [0,\,1)$ за счет выбора δ достаточно малым. Теорема доказана.

Для вывода следствий из теоремы 1 воспользуемся следующей леммой.

Лемма 6. *Пусть P — равномерно r-вырождающийся оператор с $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_r$ и с аналитическими коэффициентами, а $p = (p_0, \cdots, p_n)$ такой, что $0 \leqslant p_k < 1$, и*

$$P^{(\alpha)}_{m,\,\beta}(\hat{x},\, \hat{\xi}) = 0, \tag{73}$$

как только $|\alpha| + \langle \beta - \alpha,\, p \rangle < r\,(1-p_0)$ и

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^r P_m\right)(\hat{x},\, \hat{\xi}) = 0. \tag{74}$$

Предположим далее, что при $|\alpha| + \langle \beta-\alpha,\, p \rangle \leqslant r\,(1-p_0) - \dfrac{(m-s)\,\gamma}{\gamma-1}$, $s < m$

$$P^{(\alpha)}_{s,\,\beta}(\hat{x},\, \hat{\xi}) = 0. \tag{75}$$

Тогда имеют место условия (24).

§ 5. Примеры

Пример 1:

$$(D^2_t - t^{2\lambda} D^2_{x_1} + a t^{\nu} D_{x_1})\, u = f, \tag{76}$$

где μ, ν — положительные числа. Условие (20) имеет вид $\gamma < \frac{2\mu-\nu}{\mu-\nu-1}$ и совпадает с необходимым условием работы [9], когда 2μ, ν — целые.

Пример 2:

$$(D_t^2 - e^{-\frac{2}{t}} D_{x_1}^2 + at^{-2} e^{-\frac{\beta}{t}} D_{x_1}) u = f. \tag{77}$$

Тогда $\mu(t) = \exp\{-t^{-1}\}$, и условие (20) выполнено, если $\beta > \frac{\gamma-2}{\gamma-1}$. При $\beta \geqslant 1$ выполняется необходимое и достаточное условие C^∞-корректности. Критерии работ [5]—[7], [9] неприменимы к уравнению (77).

Пример 3:

$$\left[D_t^4 + \sum_{\substack{l+|k|=4\\ l<4}} a_{lk}(t, x) D_t^l D_x^k + \sum_{l+|k|\leq 3} a_{lk}(t, x) t^{\nu_{lk}} D_t^l D_x^k \right] u = f, \tag{78}$$

где $x \in R^n$, $k = (k_1, \cdots, k_n)$, $a_{lk} \in G(1, \gamma, 4)$ и $\nu_{jk} = \text{const}$, $\nu_{j0} = 0$, $j = 1, 2, 3$. И пусть $\lambda_i(t, x, \xi)$, $i = 1, \cdots, 4$, — вещественные корни относительно ξ_0 характеристического уравнения

$$\xi_0^4 + \sum_{l+|k|=4,\ l<4} a_{lk}(t, x) \xi_0^l \xi^k = 0, \tag{79}$$

причем $\lambda_i(t, x, \xi) \sim t^p$, где $|\xi| = 1$, $p \geqslant 0$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $t > 0$, $i \neq j$. Тогда условия (24) эквивалентны следующим неравенствам:

$$\nu_{0k} > \frac{3p\gamma - 4p - \gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 3; \quad \nu_{0k} > \frac{2p\gamma - 4p - 2\gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 2; \tag{80}$$

$$\nu_{1k} > \frac{2p\gamma - 3p - \gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 2; \quad \nu_{1k} > \frac{p\gamma - 3p - 2\gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 1; \tag{81}$$

$$\nu_{2k} > \frac{p\gamma - 2p - \gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 1; \quad \nu_{0k} > \frac{p\gamma - 4p - 3\gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 1. \tag{82}$$

Согласно теореме 1 [9] и лемме 6 настоящей работы условия (80)—(82) являются также необходимыми для разрешимости задачи Коши в случае, когда a_{lk} аналитичны.

Отметим, что неположительность правых частей неравенств (80)—(82) означает, что соответствующие коэффициенты свободны от ограничений. Таким образом, нетрудно найти те значения γ, при которых условия накладываются только на часть коэффициентов. В частности, при $1 < \gamma \leqslant \frac{4p}{3p-1}$ все коэффициенты свободны от ограничений, причем последнее неравенство совпадает с необходимым условием слабой $\gamma^{(1)}$-регулярной гиперболичности работы [9].

При $\gamma \to +\infty$ условия (80)—(82) переходят в необходимые и достаточные условия C^∞-корректности работы [2].

Пример 4:

$$u_{ttt}-(t^{p}+t^{2p}+t^{3p})\,u_{ttx}+(t^{3p}+t^{4p}+t^{5p})\,u_{txx}-$$
$$-t^{6p}\,u_{xxx}+b(t)\,u_{xx}=f. \tag{83}$$

Для этого уравнения $\mu_1=1$, $\mu_2=t^{p}$, $\mu_3=t^{3p}$. Согласно следствию 1 из теоремы 1 для того, чтобы задача Коши для уравнения (83) была разрешима в классе Жевре с показателем γ достаточно, чтобы $|b(t)|\leqslant \mathrm{const}\cdot t^{\nu}$, где

$$\nu>\frac{6p\gamma-9p-2\gamma}{2(\gamma-1)}. \tag{84}$$

Следовательно, задача Коши для (83) будет слабо $\gamma^{(\gamma)}$-регулярной, если

$$\gamma\leqslant\frac{9p}{2(3p-1)}\quad(3p-1>0). \tag{85}$$

В то же время, согласно теоремам 1, 2 работы [9], для слабой $\gamma^{(\gamma)}$-корректности задачи Коши необходимо, чтобы

$$\nu>\frac{2p\gamma-3p-\gamma}{\gamma-1}, \tag{86}$$

а для слабой $\gamma^{(\gamma)}$-регулярности необходимо, чтобы

$$\gamma\leqslant\frac{3p}{2p-1}. \tag{87}$$

Вопрос о том, какое из условий (84), (86) ((85), (87)) или, может быть, некоторое другое условие на $b(t)$ (γ), является необходимым и одновременно достаточным для $\gamma^{(\gamma)}$-корректности ($\gamma^{(\gamma)}$-регулярности) задачи Коши остается открытым. Отметим, что следствия 2, 3 здесь неприменимы из-за нарушения условия $\omega_1=\omega_2=\omega_3$.

Пример 5: Вышеизложенная схема, незначительно измененная, применима также к уравнению

$$u_{tt}-t^{2\mu}\,u_{xx}-e^{-\frac{2}{t}}\,u_{yy}+at^{\nu}\,u_x+bt^{-2}\,e^{-\frac{\beta}{t}}\,u_y=f \tag{88}$$

и гарантирует корректность задачи Коши, если $\beta>\dfrac{\gamma-2}{\gamma-1}$ и $\nu\geqslant\mu-2$, $\gamma<\dfrac{2\mu-\nu}{\mu-\nu-1}$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.V.1977

Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Թույլ հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդիր Ժևրեի դասերում *(ամփոփում)*

Հոդվածում տրված են սկզբնական հիպերհարթության վրա վերածվող կամայական կարգի բազմաչափ սկալյար հավասարման համար Ժևրեի դասերում Կոշու խնդրի բավարար պայմանները։ Մի շարք դեպքերում ցածր կարգի ածանցյալների գործակիցների համար ստացված պայմանները համընկնում են [9] աշխատանքում նշված անհրաժեշտ պայմանների հետ։

K. H. YAGDJIAN. *The Cauchy problem for weakly hyperbolic equation in the classes of Gevrey functions* (summary)

In the paper the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations with initial conditions given on the hyperplane of degeneration is considered. For a given operator a class of Gevrey functions for which initial value problem is solvable is determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян.* О корректности задачи Коши для одного класса гиперболических уравнений, Изв. АН Арм. ССР, „Математика", VIII, № 3, 1973, 255—273.
2. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", IX, № 2, 1974, 149—165.
3. *Г. Р. Оганесян.* Задача Коши для слабо гиперболических псевдодифференциальных систем первого порядка с данными на гиперплоскости вырождения, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", X, № 2, 1975, 97—102.
4. *А. О. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений высокого порядка, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", X, № 2, 1975, 163—169.
5. *В. Я. Иврий.* Корректность в классах Жевре задачи Коши для нестрого гиперболических операторов, Мат. сб., 96, № 3, 1975, 390—413.
6. *М. Д. Бронштейн.* Параметрикс задачи Коши для гиперболических операторов с характеристиками переменной кратности, Функц. анализ и прил., 10, вып. 4, 1976, 83—84.
7. *S. Steinberg.* Existence and uniqueness of solutions of hyperbolic equations which are not necessarily strictly hyperbolic, J. of Differential Equat., 17, № 1, 1975, 119—153.
8. *А. Б. Нерсесян.* О бесконечно дифференцируемых решениях задачи Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", IV, № 3, 1969, 182—191.
9. *В. Я. Иврий.* Условия корректности в классах Жевре задачи Коши для гиперболических операторов с характеристиками переменной кратности, Сибирск. мат. журн., XVII, № 6, 1976, 1256—1270.
10. *S. Mizohata.* Analyticity of solutions of hyperbolic systems with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 14, № 3, 1961, 547—559.

ДОБАВЛЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Для операторов с характеристиками постоянной кратности получены (В. Я. Иврий, Сиб. мат. журн. XVII, № 3, 1976, 547—563 и K. Hikosaburo, PRIMS 12, Suppl., 1977, 233—245) необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши в классах Жевре.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII, № 1, 1978 Математика

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, Л. С. КОЧИНЯН, С. Ц. САРКИСЯН

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ТИПА ПИКАРА

1°. Пусть f — мероморфная в $\mathbf{C}$ функция, не равная тождественно постоянной. Будем без пояснений использовать стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений [1], в частности, через $n(r, a, f)$ обозначается число a-точек функции f в круге $\{z: |z| \leqslant r\}$. Пусть φ — непрерывная функция, φ: $\mathbf{R}_+ \to \overline{\mathbf{C}}$. Нас будут интересовать условия, при которых можно утверждать, что уравнение

$$f(z) = \varphi(|z|) \tag{1}$$

имеет хотя бы один корень в $\mathbf{C}$. Оказывается, что случай, когда (1) не имеет корней в $\mathbf{C}$, возможен лишь тогда, когда $\varphi(r)$ при $r \to \infty$ достаточно быстро стремится к предельному значению, которое является пикаровским исключительным значением для f. Условие, что в правой части (1) стоит функция от $|z|$, а не просто от z, очень существенно, как показывают известные примеры (например, $f(z) = e^z + z$, $\varphi(z) = z$).

Приведем сначала формулировки полученных результатов.

Теорема 1. *Пусть f—произвольная мероморфная функция и $f \not\equiv$ постоянной. Если не существует предела функции φ при $r \to \infty$, то уравнение* (1) *имеет хотя бы один корень в* $\mathbf{C}$. *Если при этом функция f трансцендентная, то уравнение* (1) *имеет неограниченное множество корней.*

Если $\varphi(r) \to a$ при $r \to \infty$, то не уменьшая общности, можно считать, что $a = \infty$. В самом деле, если $a \neq \infty$, то мы рассмотрели бы уравнение $f_1(z) = \varphi_1(|z|)$, где $f_1 = (f - a)^{-1}$, $\varphi_1 = (\varphi - a)^{-1}$. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что если φ имеет предел при $r \to \infty$, то он равен ∞.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Если f имеет непустое конечное множество полюсов, то уравнение* (1) *имеет по крайней мере один корень. Если f имеет бесконечное число полюсов, то уравнение* (1) *имеет неограниченное множество корней.*

Теорема 3. *Пусть $\varphi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Если f — целая функция и*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \{T(r, f) - \ln|\varphi(r)|\} > 5 \ln 2, \tag{2}$$

то уравнение (1) *имеет по крайней мере один корень. Если f имеет не более конечного числа полюсов и*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{T(r, f) - \ln|\varphi(r)|}{\ln r} = \infty, \tag{3}$$

то уравнение (1) *имеет неограниченное множество корней в* **C**.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(r)\to\infty$ *при* $r\to\infty$. *Если* f *имеет не более конечного числа полюсов и*

$$\varliminf_{r\to\infty} |\ln M(r, f) - \ln|\varphi(r)|| > 0, \tag{4}$$

то уравнение (1) *имеет непустое множество корней, причем неограниченное, если* f — *трансцендентная функция.*

Замечание. В теоремах 1—4 говорится о неограниченных, а не просто о бесконечных множествах корней в **C**, так как очевидно, что уравнение (1) может иметь неизолированные корни. Например, если

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z-1+\frac{1}{z-1}\right),$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{r^2}{2}-1 & \text{при } 0\le r\le 2, \\ 1 & \text{при } 2\le r<\infty, \end{cases}$$

то множество корней (1) является окружностью $\{z: |z-1|=1\}$.

Очевидно, если бы в (4) стоял верхний предел вместо нижнего, то теорема 4 содержала бы теорему 3. Хотя нам не удалось так усилить теорему 4, все же условие (4) можно ослабить. Этот и другие вопросы, касающиеся точности полученных достаточных условий, будут обсуждены в конце статьи, где будут также указаны некоторые открытые вопросы.

Постановка задачи, рассматриваемой в этой статье, принадлежит Б. Я. Левину (1962 г.). Ему же принадлежит идея, лежащая в основе доказательства теоремы 3. Авторы приносят Б. Я. Левину искреннюю благодарность.

Уравнение (1) с $\varphi(|z|) = |z|^2$ впервые рассматривалось в статье С. Ц. Саркисяна [2], который применил полученные результаты при изучении обобщенных систем Коши—Римана и М. Б. Балка [7], изучавшего распределение значений бианалитических функций.

2°. При доказательстве всех четырех теорем будет использована следующая лемма.

Лемма 1. *Если для некоторого* ρ, $0<\rho<\infty$, *выполняется* $n(\rho, \varphi(\rho), f)>0$, *то уравнение* (1) *имеет по крайней мере один корень. Если существует последовательность* (ρ_n), *стремящаяся к* ∞, *такая, что* $n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f)\to\infty$ *при* $n\to\infty$, *то множество корней уравнения* (1) *неограничено.*

Доказательство. Пусть $f = g_1/g_2$, где g_1 и g_2 — целые функции без общих нулей. Функцию φ также можно представить в виде

$\varphi = \varphi_1/\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 непрерывны и ограничены на $\mathbf{R}_+$ и одновременно не обращаются в нуль. В самом деле, нетрудно построить непрерывную на $\mathbf{R}_+$ функцию φ_1 такую, что $\varphi_1(r)=\varphi(r)$, если $|\varphi(r)|\leqslant 1$, и $|\varphi_1(r)|=1$, если $|\varphi(r)|>1$. Определим φ_2 так: $\varphi_2(r)=1$, если $|\varphi(r)|\leqslant \leqslant 1$, $\varphi_2(r)=\varphi_1(r)/\varphi(r)$, если $|\varphi(r)|>1$. Очевидно, φ_2 также непрерывная функция на $\mathbf{R}_+$, причем если $\varphi_1(r)=0$, то $\varphi_2(r)=1$, а если $\varphi_2(r)=0$, то $|\varphi_1(r)|=1$. Тождество $\varphi=\varphi_1/\varphi_2$ легко проверяется. Введем непрерывную в $\mathbf{C}$ функцию $G(z)=\varphi_2(|z|)\,g_1(z)-\varphi_1(|z|)\,g_2(z)$. Легко видеть, что множество корней уравнения (1) совпадает с множеством нулей функции G.

Пусть $n(\rho, \varphi(\rho), f)>0$. Предположим, что уравнение (1) не имеет корней. Тогда функция $\psi(r)=\dfrac{1}{2\pi}\Delta_r \operatorname{Arg} G$, где через $\Delta_r \operatorname{Arg} G$ обозначено приращение $\operatorname{Arg} G$ на окружности $\{z: |z|=r\}$, определена и непрерывна на $]0, \infty[$.

Поскольку функция ψ принимает лишь целочисленные значения, то она тождественно равна постоянной. Но по принципу аргумента, примененному к целой функции $\varphi_2(\rho)\,g_1(z)-\varphi_1(\rho)\,g_2(z)$, имеем $\psi(\rho)= = n(\rho, \varphi(\rho), f)>0$. Поэтому $\psi(r)\equiv\psi(\rho)>0$. Из того, что $\psi(1/n)>0$, по принципу аргумента вытекает, что целая функция $\varphi_2(1/n)\,g_1(z)-\varphi_1(1/n)\,g_2(z)$ имеет в круге $\{z: |z|<1/n\}$ по крайней мере один нуль z_n. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве $\varphi_2(1/n)\,g_1(z_n)-\varphi_1(1/n)\,g_2(z_n)=0$, получим, что $G(0)=0$, т. е. уравнение (1) имеет корень при $z=0$, вопреки предположению. Тем самым первое утверждение леммы 1 доказано.

Пусть $n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f)\to\infty$ и $\rho_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Предположим, что все корни уравнения (1) лежат в круге $\{z: |z|<R<\infty\}$. Тогда функция $\psi(r)$ определена на $]R, \infty[$ и тождественно равна постоянной на этом интервале. Но при $\rho_n>R$ имеем $\psi(\rho_n)=n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f)\to\infty$, и мы приходим к противоречию.

3°. Доказательство теоремы 1. Так как функции φ непрерывна и не имеет предела при $r\to\infty$, то множество предельных точек $\varphi(r)$ при $r\to\infty$ бесконечно. Поэтому существует такое $a\in\bar{\mathbf{C}}$, что $\varphi(\rho_n)\to a$ при $n\to\infty$ и уравнение $f(z)=a$ имеет хотя бы один корень и бесконечное число корней, если f — трансцендентная функция. Не уменьшая общности, можно считать, что $a=\infty$. Пусть z_0 — полюс f. Из известных теорем о локальном поведении аналитических функций следует, что существует такая проколотая окрестность U точки z_0 и такое M, что для всех $m\geqslant M$ множество $U\cap\{z: |f(z)|=m\}$ является замкнутой жордановой кривой $\Gamma(m)$, обходящей z_0, и приращение $\operatorname{Arg} f$ по $\Gamma(m)$ равно $-2\pi\lambda$, где λ — порядок полюса f в z_0. Возьмем настолько большое ρ, что $|\varphi(\rho)|>M$ и $U\subset\{z: |z|<\rho\}$. Очевидно, что на $\Gamma(m)$ с $m=|\varphi(\rho)|$ существует корень уравнения $f(z)= =\varphi(\rho)$. Следовательно, $n(\rho, \varphi(\rho), f)>0$ и по лемме 1 уравнение (1) имеет хотя бы один корень.

В случае, когда f—трансцендентная функция, возьмем наперед заданное число n полюсов $z_1, \cdots, z_n$ и такое M, что для всех $m \geqslant M$ можно построить описанные выше кривые $\Gamma_1(m), \cdots, \Gamma_n(m)$, $\Gamma_j(m)$ обходит z_j. Возьмем настолько большое ρ_n, что $\rho_n > n$, $|\varphi(\rho_n)| \geqslant M$ и все кривые $\Gamma_j(M)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, лежат в круге $\{z: |z| < \rho_n\}$. Тогда уравнение $f(z) = \varphi(\rho_n)$ имеет по крайней мере по одному корню на каждой кривой $\Gamma_j(m)$, где $m = |\varphi(\rho_n)|$, следовательно, $n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f) \geqslant n$. По лемме 1 уравнение (1) имеет неограниченное множество корней.

Доказательство теоремы 2 точно такое, как доказательство теоремы 1, с тем различием, что информация о наличии полюсов у функции f введена в условие теоремы. Теорема 2 для $\varphi(|z|) = |z|^2$ по существу была доказана в [7], лемма 1, и в [8], теорема 1. Использованный М. Б. Балком метод может быть легко приспособлен и для доказательства наших теорем 1 и 2.

4°. Доказательство теоремы 3. Пусть $f(0) \neq \infty$. Если выполнено условие (2), то существует положительное число η и последовательность (r_n), монотонно стремящаяся к ∞, такие, что для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняются неравенства

$$T(r_n, f) > \ln|\varphi(r_n)| + 5\ln 2 + \eta, \tag{5}$$

$$|\varphi(r_n)| > \frac{1}{4}\cdot \tag{6}$$

Обозначим $r_n' = \min\{r \geqslant r_n: |\varphi(r)| = 2|\varphi(r_n)|\}$. Обозначим через E_n кривую $E_n = \{a = \varphi(r): r_n \leqslant r \leqslant r_n'\}$. Очевидно, что $E_n \subset \{a: |a| \leqslant 2|\varphi(r_n)|\}$. По известной теореме Д. Пойа ([3], стр. 294) трансфинитный диаметр d_n множества E_n не меньше $|\varphi(r_n)|/4$, так как длина отрезка, соединяющего точки $\varphi(r_n)$ и $\varphi(r_n')$, не меньше $|\varphi(r_n)|$. Согласно известному соотношению $d_n = \exp(-\gamma_n)$, где γ_n — постоянная Робэна для множества E_n, имеем $\gamma_n \leqslant \ln(4/|\varphi(r_n)|)$.

Пусть $\mu_n(a)$ — распределение Робэна единичной массы на E_n. По формуле О. Фростмана ([1], гл. VI, § 4) имеем

$$\int_{E_n} \ln\frac{1}{|f(0) - a|}\, d\mu_n(a) + N(r, \infty, f) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{E_n} \ln\frac{1}{|f(re^{i\vartheta}) - a|}\, d\mu_n(a) + \int_{E_n} N(r, a, f)\, d\mu_n(a). \tag{7}$$

Из свойств распределения Робэна следует, что для

$$u_n(z) = \int_{E_n} \ln\frac{1}{|z - a|}\, d\mu_n(a) \tag{8}$$

выполняется

$$u_n(z) = \gamma_n \text{ при } z \in E_n, \quad u_n(z) \leqslant \gamma_n \text{ при } z \in E_n. \tag{9}$$

При $|z| \geqslant 4\,|\varphi(r_n)|$ и $a \in E_n$ имеем $|z/(z-a)| \leqslant 2$, следовательно, с учетом (6) и (8)

$$u_n(z) = -\ln|z| + \int_{E_n} \ln\left|\frac{z}{z-a}\right| d\mu_n(a) \leqslant -\ln^+|z| + \ln 2. \tag{10}$$

Из (9) следует, что для всех $z \in \mathbf{C}$ выполняется

$$u_n(z) \leqslant \gamma_n \leqslant \ln(4/|\varphi(r_n)|).$$

Так как при $|z| \leqslant 4\,|\varphi(r_n)|$ выполняется

$$\ln \frac{4}{|\varphi(r_n)|} + \ln^+|z| \leqslant \ln 16,$$

то из (10) получаем, что

$$u_n(z) \leqslant -\ln^+|z| + \ln 16.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{E_n} \ln\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}\, d\mu_n(a) \leqslant -m(r,f) + \ln 16. \tag{11}$$

Далее

$$\int_{E_n} \ln\frac{1}{|f(0)-a|}\, d\mu_n(a) \geqslant \ln\frac{1}{|f(0)|+2\,|\varphi(r_n)|}. \tag{12}$$

Из (7), (11) и (12) получаем

$$\int_{E_n} N(r,a,f)\, d\mu_n(a) \geqslant T(r,f) + \ln\frac{1}{|f(0)|+2\,|\varphi(r_n)|} - \ln 16 = \tag{13}$$

$$= T(r,f) - \ln|\varphi(r_n)| - 5\ln 2 - \ln\left(1 + \frac{|f(0)|}{2\,|\varphi(r_n)|}\right).$$

Учитывая (5), получаем

$$\int_{E_n} N(r_n,a,f)\, d\mu_n(a) > \eta - \ln\left(1 + \frac{|f(0)|}{2\,|\varphi(r_n)|}\right),$$

следовательно, при достаточно больших r_n выполняется

$$\int_{E_n} N(r_n,a,f)\, d\mu_n(a) > 0. \tag{14}$$

Тогда существует $a_n \in E_n$ такое, что $N(r_n, a_n, f) > 0$. Отсюда вытекает, что $n(r_n, a_n, f) > 0$. Пусть ρ_n, $r_n \leqslant \rho_n \leqslant r_n'$, таково, что $a_n = \varphi(\rho_n)$. Тогда $n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f) \geqslant n(r_n, \varphi(\rho_n), f) > 0$ и по лемме 1 уравнение (1) имеет по крайней мере один корень.

Если $f(0) = \infty$ и

$$f(z) = c_\lambda z^{-\lambda} + c_{\lambda-1} z^{-\lambda-1} + \cdots, \quad c_\lambda \neq 0,$$

$\lambda \in \mathbf{N}$, то в (7) вместо интеграла в левой части равенства стоит $\ln(1/|c_\lambda|)$ и в правой части неравенства (12) вместо $-\ln(|f(0)| + 2|\varphi(r_n)$ будет стоять $-\ln|c_\lambda|$. Очевидно, это не повлияет на справедливость дальнейших рассуждений.

Замечание. Если $f(0) = 0$, то из (13) легко получаем, что уравнение (1) имеет корень, если существует хотя бы одно r такое, что $|\varphi(r)| > 1/4$ и $T(r, f) - \ln|\varphi(r)| > 5 \ln 2$.

Пусть теперь f имеет не более конечного числа полюсов и выполняется (3). Если $f(0) \neq \infty$, то возьмем такое $\delta > 0$, что $|f(z)| \leqslant M$ при $|z| \leqslant \delta$ и такое r_0, что $|\varphi(r)| > M$ при $r \geqslant r_0$.

Возьмем последовательность (r_n), $r_n \geqslant r_0$, $r_n \to \infty$, такую, что

$$\frac{T(r_n, f) - \ln|\varphi(r_n)|}{\ln r_n} \to \infty \tag{15}$$

при $n \to \infty$.

Повторяя прежние рассуждения, приходим к (13), откуда, учитывая (15), получаем

$$K_n = \frac{1}{\ln r_n} \int\limits_{E_n} N(r_n, a, f)\, d\mu_n(a) \to \infty \tag{16}$$

при $n \to \infty$.

Но у нас $E_n \cap \{|a| \leqslant M\} = \varnothing$, поэтому для любого $a \in E_n$

$$N(r_n, a, f) \leqslant n(r_n, a, f) \ln \frac{r_n}{\delta}\,. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что

$$\frac{\ln(r_n/\delta)}{\ln r_n} \int\limits_{E_n} n(r_n, a, f)\, d\mu_n(a) \geqslant K_n \to \infty.$$

Очевидно, существует ρ_n, $r_n \leqslant \rho_n \leqslant r_n'$, такое, что

$$n(r_n, \varphi(\rho_n), f) \geqslant \frac{K_n \ln r_n}{\ln(r_n/\delta)} \to \infty.$$

Тем более $n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f) \to \infty$ и из леммы 1 следует, что уравнение (1) имеет неограниченное множество корней.

Если $f(0) = \infty$, то мы не можем получить (17), поэтому несколько видоизменим рассуждения. Пусть на окружности $\{z: |z| = \delta\}$ выполняется $|f(z)| \leqslant \mu$.

Запишем формулу Фростмана (7) (в которой первое слагаемое слева равно $-\ln|c_\lambda|$) для $r>\delta$ и для $r=\delta$ и из первого равенства вычтем второе. Тогда получим

$$N(r,\infty,f)-N(\delta,\infty,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_{E_n}\ln\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}\,d\mu_n(a)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_{E_n}\ln\frac{1}{|f(\delta e^{i\theta})-a|}\,d\mu_n(a)+\int\limits_{E_n}\{N(r,a,f)-N(\delta,a,f)\}\,d\mu_n(a). \tag{18}$$

Так как

$$N(r,a,f)-N(\delta,a,f)\leqslant n(r,a,f)\ln\frac{r}{\delta},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_{E_n}\ln\frac{1}{|f(\delta e^{i\theta})-a|}\,d\mu_n(a)\geqslant\ln\frac{1}{\mu+2|\varphi(r_n)|},$$

то учитывая (11), получим

$$\ln\frac{r_n}{\delta}\int\limits_{E_n}n(r_n,a,f)\,d\mu_n(a)\geqslant T(r_n,f)-\ln|\varphi(r_n)|-5\ln 2-$$

$$-\ln\left(1+\frac{\mu}{2|\varphi(r_n)|}\right)-N(\delta,\infty,f),$$

после чего, используя (15), как выше, приходим к соотношению $n(\rho_n,\varphi(\rho_n),f)\to\infty$ при $n\to\infty$ и доказываем теорему.

5°. Доказательство теоремы 4. Сначала докажем такую лемму.

Лемма 2. *Пусть F — неубывающая выпуклая на $[x_0,\infty[$ функция, $F(x)\to\infty$ при $x\to+\infty$, h и τ_1 — постоянные, $0<h\leqslant\tau_1<\infty$. Обозначим $E=\left\{x\in[x_0,\infty[:F\left(x+\dfrac{h}{F'(x)}\right)<F(x)+\tau_1\right\}$, где под F' понимаем левостороннюю производную при $x>x_0$ и правостороннюю при $x=x_0$. Тогда*

$$d_*(E)=\varliminf_{x\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{E\cap[x_0,x]\}}{x}\geqslant 1-\frac{h}{\tau_1}. \tag{19}$$

Доказательство. Обозначим $A=[x_0,\infty[\setminus E$, $A(r)=A\cap[x_0,r]$, $A_1(r)=A\cap]r,\infty[$. Пусть $r_1=\min\{r:r\in A\}$. Обозначим через r_1' корень уравнения $F(x)=F(r_1)+\tau_1$. Очевидно, этот корень единственный, $r_1'>r_1$ и $r_1+h/F'(r_1)\geqslant r_1'$. Пусть выбраны $r_1,\cdots,r_{n-1}$ и $r_1',\cdots,r_{n-1}'$. Тогда выбираем $r_n=\min\{r:r\in A_1(r_{n-1}')\}$ и r_n' такое, что

$$F(r_n') = F(r_n) + \eta, \tag{20}$$

и выводим, что

$$r_n < r_n' \leqslant r_n + \frac{h}{F'(r_n)}. \tag{21}$$

Из (20) следует, что $F(r_n) \geqslant (n-1)\eta + F(x_0)$, значит, r_n монотонно стремится к ∞ при $n \to \infty$. Фиксируем x, $x > x_0$. Пусть $r_n \leqslant x$, $r_{n+1} > x$. Тогда $A(x) \subset \bigcup_{j=1}^{n} [r_n, r_n']$ и

$$\operatorname{mes} A(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} (r_n' - r_n) \leqslant h \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{F'(r_j)}, \tag{22}$$

в силу (21). Поскольку F — выпуклая функция, то

$$F'(r_{j+1})(r_{j+1} - r_j) \geqslant F(r_{j+1}) - F(r_j) \geqslant \eta, \; j \in \mathbf{N},$$

$$\frac{1}{F'(r_{j+1})} \leqslant \frac{r_{j+1} - r_j}{\eta}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{F'(r_j)} = \frac{1}{F'(r_1)} + \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^{n-1} (r_{j+1} - r_j) = \frac{1}{F'(r_1)} + \frac{r_n - r_1}{\eta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{F'(r_1)} + \frac{x - r_1}{\eta}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) получаем, что

$$\varlimsup_{x \to \infty} \frac{\operatorname{mes} A(x)}{x} \leqslant \frac{h}{\eta},$$

откуда сразу следует (19).

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 4. Предположим, что f — трансцендентная функция. Не уменьшая общность, можно считать, что все полюсы f, если они имеются, лежат в круге $\{z: |z| < 1\}$. Разложив f в ряд Лорана в $\{z: |z| \geqslant 1\}$ и обозначив через f_0 правильную часть этого разложения, а через ω — главную часть, видим, что $f = f_0 + \omega$, где f_0 — трансцендентная целая функция, а ω — рациональная функция, аналитическая при $|z| \geqslant 1$ и имеющая нуль в ∞.

Будем обозначать $M(r) = M(r, f)$, $M_0(r) = M(r, f_0)$. Очевидно, что $M(r) = M_0(r) + o(1)$, $r \to \infty$. Из (4) получаем, что существует такое положительное число η, что для всех r, начиная с некоторого, выполняется $M_0(r) > e^{\eta} |\varphi(r)|$. Обозначим $\rho = \rho(r) = \min\{x \geqslant r: |\varphi(x)| = M_0(r)\}$. Пусть $\nu(r)$ — центральный индекс функции f_0, $\zeta = \zeta(r) = r\exp(i\theta(r))$ — такая точка, что $|f_0(\zeta(r))| = M_0(r)$. Обозначим через $D(r)$ сектор

$$D(r) = \{z: \left| |z| - r \right| < r\nu(r)^{-1}, \; |\arg z - \theta(r)| < \nu(r)^{-15/16}\}.$$

Известно ([4], стр. 101, теорема 29), что для всех $r \geqslant 1$, кроме, возможно, множества E_1 интервалов конечной логарифмической длины (т. е. $\int_{E_1} d \ln r < \infty$) при $z \in D(r)$ выполняется

$$f_0(z) = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\nu(r)} f_0(\zeta)(1 + \omega_r(z)), \ |\omega_r(z)| < K\nu(r)^{-1/16}, \qquad (24)$$

где K — некоторая постоянная. Зафиксируем число h, $0 < h < 1$, $h < \eta/2$. Пусть $q = q(r) = [\nu(r)^{1/32}]$, $\psi(r) = \arg(f_0(\zeta(r))/\varphi(\rho(r)))$, $|\psi(r)| \leqslant \pi$. Тогда легко видеть, что при всех достаточно больших r

$$\Delta(r) = \left\{ z : \left| |z| - r \right| < hr\nu(r)^{-1}, \left| \arg z - \theta(r) + \frac{\psi(r)}{\nu(r)} \right| < \right.$$
$$\left. < \frac{(2q(r)-1)\pi}{\nu(r)} \right\} \subset D(r).$$

Следовательно, для $r \bar{\in} E_2$, где E_2 — некоторое множество конечной логарифмической меры, при $z \in \Delta(r)$ выполняется (24).

Для некоторого измеримого множества $E \subset [1, \infty[$ величина

$$d_*(E) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_1^r \chi(t, E)\, dt,$$

где $\chi(t, E)$—характеристическая функция множества E, называется нижней плотностью E, а величина

$$dl_*(E) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \chi(t, E)\, d \ln t$$

— нижней логарифмической плотностью E.

Покажем, что на некотором множестве E_3 таком, что $dl_*(E_3) > 0$, выполняется

$$r\left(1 + \frac{h}{\nu(r)}\right) < \rho(r), \ r \in E_3. \qquad (25)$$

В силу монотонности $M_0(r)$ для этого достаточно показать, что

$$M_0\left(r\left(1 + \frac{h}{\nu(r)}\right)\right) < M_0(\rho(r)), \ r \in E_3. \qquad (26)$$

Но для всех достаточно больших r

$$M_0(\rho(r)) > e^{\eta} |\varphi(\rho(r))| = e^{\eta} M_0(r).$$

Значит, (26) будет доказано, если мы покажем, что

$$M_0\left(r\left(1 + \frac{h}{\nu(r)}\right)\right) < e^{\eta} M_0(r), \ r \in E_3. \qquad (27)$$

Обозначим $\Psi(t) = \ln M_0(e^t)$, $t \in \mathbf{R}$. По теореме Адамара о трех кругах $\Psi(t)$ — возрастающая выпуклая функция. Тогда по лемме 2 неравенство

$$\Psi\left(t + \frac{2h}{\Psi'(t)}\right) < \Psi(t) + \tau_1 \tag{28}$$

выполняется на некотором множестве E_4, таком, что $d_*(E_4) \geqslant 1 - (2h)/\tau_1 > 0$. Заменяя в (28) $t = \ln r$ и обозначая через E_5 образ E_4 при отображении $t \to e^t$, получим, что $dl_*(E_5) = d_*(E_4) > 0$ и при $r \in E_5$ выполняется

$$M_0\left(r\left(1 + \frac{2h}{\frac{d\ln M_0(r)}{d\ln r}}\right)\right) \leqslant M_0\left(\exp\left\{\ln r + \frac{2h}{\frac{d\ln M_0(r)}{d\ln r}}\right\}\right) < e^{\tau_1} M_0(r), \tag{29}$$

где под $d\ln M_0(r)/d\ln r$ понимаем левостороннюю производную. Известно, что вне некоторого множества конечной логарифмической меры

$$\nu(r) = (1 + o(1))\frac{d\ln M_0(r)}{d\ln r}, \quad r \to \infty$$

(см. [5], часть 1, п. 4; [6], стр. 171, теорема 1.3.18). Тогда вне некоторого множества E_6 конечной логарифмической меры

$$\nu(r) > \frac{1}{2}\frac{d\ln M_0(r)}{d\ln r}, \quad r \overline{\in} E_6. \tag{30}$$

Приняв $E_3 = E_5 \setminus E_6$, из (29) и (30) получим (27), а следовательно, и (25). Из (25) вытекает, что

$$\Delta(r) \subset \{z: |z| < \rho(r)\}. \tag{31}$$

Будем теперь рассматривать только значения $r \in E_7 = E_3 \setminus E_2$, $dl_*(E_7) > 0$. Покажем, что для всех достаточно больших $r \in E_7$ уравнение $f(z) = \varphi(\rho(r))$ имеет в $\Delta(r)$ ровно $2q(r) - 1$ корней. Пусть $\varphi(\rho(r)) = M_0(r)\exp(i\psi_1(r))$. Используя (24), запишем

$$f(z) - \varphi(\rho(r)) = f_0(z) - M_0(r)e^{i\psi_1(r)} + \omega(z) =$$
$$= \left\{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\nu(r)} e^{i\psi(r)} - 1\right\} M_0(r)e^{i\psi_1(r)} +$$
$$+ \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\nu(r)} f(\zeta)\,\omega_r(z) + \omega(z).$$

Обозначим

$$\Phi_1(z) = \left\{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\nu(r)} e^{i\psi(r)} - 1\right\} M_0(r)e^{i\psi_1(r)},$$

$$\Phi_2(z) = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\nu(r)} f(\zeta)\,\omega_r(z) + \omega(z).$$

В $\Delta(r)$ функция Φ_1 имеет ровно $2q - 1$ нулей, —столько, сколько раз обращается в нуль

$$\exp\{i((\varkappa-\theta(r))\nu(r)+\psi(r))\}-1 \text{ при}$$

$$\left|\varkappa-\theta(r)+\frac{\psi(r)}{\nu(r)}\right|<\frac{(2q-1)\pi}{\nu(r)}.$$

Так как $f(z)-\varphi(\rho(r))=\Phi_1(z)+\Phi_2(z)$, то нам достаточно показать, что на $\partial\Delta(r)$ выполняется $|\Phi_2(z)|<|\Phi_1(z)|$ и применить теорему Руше. При $z\in\partial\Delta(r)$, $|z|=r+hr\nu(r)^{-1}$ имеем $(r\to\infty)$

$$\left|\frac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)}\right|\leqslant\frac{\left(1+\frac{h}{\nu(r)}\right)^{\nu(r)}K\nu(r)^{-1/16}+O\left(\frac{1}{r}\right)}{\left(1+\frac{h}{\nu(r)}\right)^{\nu(r)}-1}=$$

$$=(1+o(1))(e^h K\nu(r)^{-1/16}+O(1/r))(e^h-1)^{-1}=o(1).$$

Аналогично при $z\in\partial\Delta(r)$, $|z|=r-hr\nu(r)^{-1}$ имеем

$$\left|\frac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)}\right|\leqslant(1+o(1))(e^{-h}K\nu(r)^{-1/16}+O(1/r))(1-e^{-h})^{-1}=o(1).$$

Если

$$z\in\partial\Delta(r),\ \arg z=\theta(r)-\frac{\psi(r)}{\nu(r)}\pm(2q-1)\frac{\pi}{\nu(r)},$$

то

$$\left|\frac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)}\right|\leqslant\frac{\left(\frac{|z|}{r}\right)^{\nu(r)}K\nu(r)^{-1/16}+O\left(\frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{|z|}{r}\right)^{\nu(r)}+1}\leqslant$$

$$\leqslant K\nu(r)^{-1/16}+O\left(\frac{1}{r}\right)=o(1).$$

Значит, при $z\in\partial\Delta(r)$ имеем $|\Phi_2(z)/\Phi_1(z)|=o(1)<1$ для всех достаточно больших r. Следовательно, $f(z)=\varphi(\rho(r))$ имеет в $\Delta(r)$ ровно $2q(r)-1$ корней, и с учетом (31) получаем

$$n(\rho(r),\ \varphi(\rho(r)),\ f)\geqslant 2q(r)-1.$$

Теперь возьмем любую последовательность $r_n\to\infty$, $r_n\in E_\gamma$, положим $\rho_n=\rho(r_n)$ и, принимая во внимание, что $q(r_n)\to\infty$, найдем, что $n(\rho_n,\ \varphi(\rho_n),\ f)\to\infty$. Из леммы 1 следует, что уравнение (1) имеет неограниченное множество корней.

Если f имеет хотя бы один полюс, то наличие у уравнения (1) по крайней мере одного корня следует из теоремы 2. Остается рассмотреть случай, когда f — многочлен. В этом случае также опираемся на теорему Руше, но предыдущие рассуждения существенно упрощаются, так как вместо (24) мы можем воспользоваться соотношением $f(z)=a_\nu z^\nu(1+o(1))$ при $z\to\infty$ и, более того, в (4) заменить нижний предел верхним.

Замечание. В случае, когда f — трансцендентная функция, условие (4) можно заменить следующим более слабым: для любого, ε, $1 > \varepsilon > 0$, и произвольного $E \subset [1, \infty[$, такого, что $dl_*(E) \geqslant 1-\varepsilon$, выполняется

$$\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ r\in E}} \{\ln M(r, f) - \ln|\varphi(r)|\} > 0.$$

Доказательство проводится как выше, но h берем столь малым, чтобы выполнялось $(2h)/r_1 < \varepsilon$. Тогда $d_*(E_4) \geqslant 1-\varepsilon$ и в дальнейших рассуждениях ничего менять не надо.

6°. Условия теоремы 3, по-видимому далеки от неулучшаемых. Если бы в теореме 4 можно было в условии (4) заменить нижний предел верхним (как шаг в этом направлении см. замечание в конце 5°), то теорема 4 полностью покрыла бы теорему 3. Во всяком случае, вероятно, в (2) можно заменить 5 ln 2 нулем.

Пример $f = z^{-n}$, $\varphi(r) = r$ с $T(r, f) = n\ln^+ r$ показывает, что в (3) нельзя справа поставить какое-либо конечное число и утверждать, что уравнение (1) имеет неограниченное множество корней (в нашем примере все n корней уравнения (1) лежат на единичной окружности).

В теореме 4 нельзя вместо (4) требовать лишь $\ln M(r, f) > \ln|\varphi(r)|$ для всех достаточно больших r. На это указывает пример:

$$f(z) = ie^z, \ \varphi(r) = \exp\left\{r\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\pi}{2r}\right)\right\},$$

для которого при всех $r \geqslant 0$ выполняется $\ln M(r, f) > \ln\varphi(r)$, но уравнение (1) не имеет ни одного корня.

Львовский государственный университет
им. И. Франко,
Всесоюзный научно-исследовательский
институт радиофизических измерений

Поступила 17.I.1977

Ա. Ա. ԳՈԼԴԲԵՐԳ, Լ. Ս. ՔՈՉԻՆՅԱՆ, Ս. Ծ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ. Պիկարի տիպի մի շարք թեորեմների մասին (*ամփոփում*)

Դիտարկվում է $f(z) = \varphi(|z|)$ հավասարումը, որտեղ f-ը վերջավոր հարթության մեջ մերոմորֆ ֆունկցիա է, իսկ φ-ն $\varphi: R_+ \to \overline{C}$ անընդհատ արտապատկերում է։ Ստացված են մի շարք բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում նշված հավասարումն ունի մեկ արմատ կամ անվերջ բազմությամբ արմատներ։

A. A. GOLDBERG, L. S. KOCHINIAN, S. C. SARKISIAN. *On some theorems of Picard's type* (summary)

The equation $f(z) = \varphi(|z|)$ is considered where f is a function meromorphic in the finite plane and $\varphi(r)$ is a continuous mapping $\varphi: R_+ \to \overline{C}$. A number of sufficien conditions has been received for the mentioned equation to have at least one root or an infinite set of roots.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, ГИТТЛ, М.—Л., 1941.
2. *С. Ц. Саркисян.* О разрушении решений систем уравнений с частными производными, ДАН Арм.ССР, 36, № 5, 1963, 271—276.
3. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, Изд. „Наука", изд. 2, М., 1966.
4. *G. Valiron.* Lectures on the general theory of integral functions, Ed. Privat, Toulouse, 1923.
5. *G. Valiron.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions a correspondance régulière, Ann. fac. sci. univ. Toulouse, 5, 1913, 117—257.
6. *Ш. И. Стрелиц.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений, Изд. „Минтис", Вильнюс, 1972.
7. *М. Б. Балк.* Теорема Пикара для целых бианалитических функций, ДАН СССР, 152, № 6, 1963, 1282—1285.
8. *М. Б. Балк.* Уточнение теоремы Пикара для некоторых классов бианалитических функций, Лит. мат. сб., № 4, № 3, 1964, 297—301.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 1, 1978 Математика

Р. А. АВЕТИСЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПРОСТЫХ ДРОБЕЙ

В 1921 году Вольфом ([1], см. также [2], стр. 35—36) была доказана следующая

Теорема. Пусть G — ограниченная жорданова область, и пусть функция $f(z)$ аналитична в соответствующей замкнутой области $\overline{G}$. Тогда функция $f(z)$ может быть разложена внутри G в ряд вида

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z_k-z};\quad \sum_{k=1}^{\infty}|A_k|<+\infty, \tag{1}$$

который сходится к $f(z)$ внутри G равномерно на любом компактном подмножестве G.

Данжуа [3] показал, что в условиях теоремы Вольфа точки z_k можно выбрать таким образом, чтобы представление (1) имело место в $\overline{G}$ и $\{z_k\}'=\partial G$.

Естественно возникает вопрос об отказе от условия аналитичности f в некоторой окрестности области G. Первой работой в этом направлении была статья Т. А. Леонтьевой [4]. В ней показано, что голоморфная внутри единичного круга функция

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

представима в виде (1) внутри единичного круга, если $a_n=O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$, $\alpha>0$ и ряд (1) сходится равномерно, если $a_n=O\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right)$, $\alpha>0$. В той же работе в сноске сказано, что С. Я. Хавинсон показал, что даже в случае единичного круга не любую функцию, аналитическую и непрерывную вплоть до границы в нем, можно представить в виде (1) равномерно в замкнутом единичном круге.

В настоящей работе также дается некоторое обобщение теоремы Вольфа в случае единичного круга. Для этого введем соответствующие обозначения. Пусть E есть замкнутый единичный круг $\overline{D}$ или отрезок $[-1,1]$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Обозначим через $A(E)$ множество функций, непрерывных на E и аналитических во внутренних точках E. Для $f\in A(E)$ мы скажем, что $f'\in A(E)$, если f' допускает непрерывное продолжение на E. Если E — отрезок $[-1,1]$, то под f'

понимаем обычную производную.

Пусть $K(E)$ есть множество функций из $A(E)$ таких, что

1. $f' \in A(E)$,

2. Существуют $\delta_k > 0$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k = \delta < +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{f'}(\beta_{k-1}) \cdot \delta_k \cdot \log \frac{1}{\delta_k}}{\beta_k} < +\infty, \tag{2}$$

где $\omega_{f'}(\delta)$ — модуль непрерывности производной функции $f(e^{it})$, если E есть $\overline{D}$, а в случае отрезка $[-1.1]$ — модуль непрерывности функции f',

$$\beta_0 = \delta, \ \beta_k = \delta_{k+1} + \delta_{k+2} + \cdots, \ k = 1, 2, \cdots.$$

В данной работе доказана следующая основная

Теорема 1. *Пусть $f \in K(\overline{D})$. Тогда функция f разлагается в $\overline{D}$ в ряд вида* (1), *причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{|z_k| - 1} < +\infty.$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится одно очевидное замечание к теореме Вольфа.

Замечание 1. Если G есть жорданова область со спрямляемой границей, то коэффициенты A_k, $k = 1, 2, \cdots$ могут быть выбраны в разложении (1) таким образом, чтобы было справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \leqslant c_1 \max_{z \in \overline{G}} |f(z)|, \tag{3}$$

где $c_1 = 5$ дл. γ, $\gamma = \partial G$.

1°. Приступим теперь к доказательству теоремы 1. Для этого нам понадобятся 2 леммы.

Лемма 1. *Пусть $f' \in A(\overline{D})$. Тогда функция f может быть непрерывно дифференцируема продолжена в комплексную плоскость* **C**, *причем так, что*

$$|\overline{\partial} \tilde{f}(z)| \leqslant c_2 \, \omega_{f'}(|z| - 1), \ |z| \geqslant 1, \tag{4}$$

где $\tilde{f}$ есть продолжение функции f, $\omega_{f'}(\delta)$ есть модуль непрерывности производной функции $f(e^{it})$, c_2 — постоянная, не зависящая от f, и

$$\overline{\partial} f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right), \ z = x + iy.$$

Доказательство. Продолжение функции f удобно записать в полярных координатах $z=re^{it}$. Продолжим функцию f во всю комплексную плоскость по формуле

$$\tilde{f}(re^{it})=\begin{cases} f(re^{it}), & r\leqslant 1\\ \dfrac{1-i}{2}f(e^{i(t+\ln r)})+\dfrac{1+i}{2}f(e^{i(t-\ln r)}), & r>1.\end{cases}$$

Тогда очевидно, что функция $\tilde{f}$ будет непрерывна во всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Дифференцируемость функции $\tilde{f}$ внутри и вне единичного круга следует из того, что $f'\in A(\overline{D})$. Для проверки дифференцируемости на границе единичного круга заметим, что из того, что $f'\in A(\overline{D})$, следует

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}=\begin{cases} e^{it}f'(r\cdot e^{it}), & r\geqslant 1\\ \dfrac{1-i}{2}\cdot\dfrac{i}{r}e^{i(t+\ln r)}f'(e^{i(t+\ln r)})-\dfrac{1+i}{2}\cdot\dfrac{i}{r}\cdot e^{i(t-\ln r)}\cdot f'(e^{i(t-\ln r)}), & r\geqslant 1.\end{cases}$$

Отсюда вытекает непрерывность функции $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial r}$ во всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, а с ней и непрерывная дифференцируемость функции $\tilde{f}$ по r.

Аналогично проверяется и непрерывная дифференцируемость функции $\tilde{f}$ по t.

Для завершения доказательства леммы 1 нам осталось доказать неравенство (4). Пусть $z=re^{it}$ и $r>1$. Тогда

$$|\bar{\partial}\tilde{f}(z)|=\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}+\frac{i}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1-i}{2}\cdot\frac{1}{r}\cdot[f(e^{i(t+\ln r)})]'-\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1}{r}\cdot[f(e^{i(t-\ln r)})]'+\right.$$

$$\left.+\frac{1-i}{2}\cdot\frac{i}{r}\cdot[f(e^{i(t+\ln r)})]'-\frac{1+i}{2}\,\frac{i}{r}[f(e^{i(t-\ln r)})]'\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\omega_{f'}(\ln r)\leqslant c_2\omega_f(r-1).$$

Лемма 2. *Пусть*

$$\Delta_k=\{z;\ \beta_k\leqslant|z|\leqslant\beta_{k-1}\},\ k=1,\ 2,\cdots.$$

Тогда для любого $z\in\mathbf{C}$ будет справедливо неравенство

$$\iint\limits_{\Delta_k}\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\xi d\eta\leqslant c_3\cdot\delta_k\cdot\log\frac{1}{\delta_k},\ \zeta=\xi+i\eta, \tag{5}$$

где c_3 — постоянная, не зависящая от k.

Доказательство. Введем обозначение

$$\varphi_k(z) = \iint_{\Delta_k} \frac{1}{|\zeta - z|} d\xi d\eta.$$

Тогда функция φ_k непрерывна во всей комплексной плоскости C, так как является сверткой локально-интегрируемой функции $\frac{1}{|\zeta|}$ с ограниченной функцией, имеющей компактный носитель. Поэтому функция φ_k достигает своего максимума в некоторой точке z_0. Ясно, что $z_0 \in \Delta_k$. Обозначим через $D(z_0, 3\delta_k)$ круг радиуса $3\delta_k$ с центром в точке z_0. Тогда

$$\iint_{\Delta_k} \frac{1}{|\zeta - z|} d\xi d\eta \leqslant \iint_{D(z_0, 3\delta_k)} \frac{1}{|\zeta - z_0|} d\xi d\eta + \iint_{\Delta_k \setminus D(z_0, 3\delta_k)} \frac{1}{|\zeta - z_0|} d\xi d\eta. \tag{6}$$

Вычислим интеграл по $D(z_0, 3\delta_k)$

$$\iint_{D(z_0, 3\delta_k)} \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} d\xi d\eta = \int_0^{2\pi} \int_0^{3\delta_k} \frac{1}{r} \cdot r \cdot dr \cdot d\tau = 6\pi \cdot \delta_k.$$

Заметим, что во втором интеграле правой части неравенства (6) имеем

$$|\zeta - z_0| \geqslant a_1 (\varphi - t_0),$$

$t_0 = \arg z_0$, $\varphi = \arg \zeta$, $a_1 > 0$ и не зависит от k. Следовательно после замены переменной $\zeta = re^{i\varphi}$ получим

$$\iint_{\Delta_k \setminus D(z_0, 3\delta_k)} \frac{1}{|\zeta - z_0|} d\xi d\eta \leqslant \frac{1}{a_1} \int_{1+\beta_k}^{1-\beta_{k-1}} \int_{t_0+\delta_k}^{2\pi + t_0 - \delta_k} \frac{1}{\varphi - t_0} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \leqslant a_2 \cdot \delta_k \cdot \log \frac{1}{\delta_k}.$$

Отсюда и следует доказательство леммы 2.

Приступим теперь к доказательству теоремы 1. Пусть $f \in K(\overline{D})$. Тогда по лемме 1 функцию $f(z)$ можно считать непрерывно-дифференцируемо продолженной в круг $D(0, 1+\delta)$, причем таким образом, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\max\limits_{z \in \Delta_k} |\overline{\partial} f(z)| \cdot \delta_k \cdot \log \frac{1}{\delta_k}}{\beta_k} < +\infty.$$

Тогда по обобщенной формуле Коши, когда точка $z \in D(0, 1+\delta)$, имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = 1+\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{D(0, 1+\delta)} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

Положим

$$\psi_1(z)=\int\limits_{|\zeta|=1+\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad \psi_2(z)=\iint\limits_{D(0,\,1+\delta)}\frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta.$$

Функция ψ_1 аналитична в круге $D(0,\,1+\delta)$, и следовательно по теореме Вольфа ее можно представить в $\overline{D}$ в виде (1) и так выбрать коэффициенты A_k, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A_k|}{|z_k|-1}<+\infty.$$

Следовательно, вопрос сводится к представлению в виде (1) функции

$$\psi_2(z)=\iint\limits_{D(0,\,1+\delta)}\frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi d\eta.$$

Для этого разложим кольцо

$$\Delta_0=\{z;\ 1\leqslant|z|\leqslant 1+\delta\}$$

на кольца

$$\Delta_k=\{z;\ 1+\beta_k\leqslant|z|\leqslant 1+\beta_{k-1}\},\ k=1,\ 2,\cdots.$$

Тогда

$$\psi_2(z)=\iint\limits_{D(0,\,1+\delta)}\frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi d\eta=\sum_{k=1}^{\infty}\iint\limits_{\Delta_k}\frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi d\eta.$$

Положим

$$q_k(z)=\iint\limits_{\Delta_k}\frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi d\eta.$$

Очевидно, что каждая из функций $g_k(z)$ будет непрерывной в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и аналитической в круге $D(0,\ 1+\beta_k)$. Следовательно, по теореме Вольфа ее можно представить в виде (1) равномерно в $\overline{D}$. Причем очевидно, что в представлении (1), соответствующем функции g_k, точки z_k^n, $n=1,2,\cdots$, можно выбрать таким образом· чтобы

$$|z_k^n|-1\geqslant\frac{\beta_k}{2},\quad n=1,\ 2,\cdots.$$

Но из (2) и леммы 2 получаем следующие оценки:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_k^n|\leqslant c_1\max_{z\in D(0,\,1+\beta_k)}|g_k(z)|\leqslant c_1\max_{z\in C}\iint\limits_{\Delta_k}\frac{|\bar\partial f(\zeta)|}{|\zeta-z|}\,d\xi d\eta\leqslant$$

$$\leqslant c_1\cdot c_2\max_{\zeta\in\Delta_k}|\bar\partial f(\zeta)|\cdot\max_{z\in C}\iint\limits_{\Delta_k}\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\xi d\eta\leqslant$$

$$\leqslant c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \max_{\zeta \in \Delta_k} |\bar{\partial} f(\zeta)| \cdot \delta_k \cdot \log \frac{1}{\delta_k} \cdot$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_k^n|}{|z_k^n|-1} \leqslant 2c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\max_{\zeta \in \Delta_k} |\bar{\partial} f(\zeta)| \cdot \delta_k \cdot \log \frac{1}{\delta_k}}{\beta_k} < +\infty.$$

Отсюда и следует теорема 1.

Из теоремы 1 легко можно получить 2 следствия.

Следствие 1. Пусть $f' \in A(\bar{D})$. Допустим, что существует такое число $0 < q < 1$, что $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \omega_{f'}(q^k) < +\infty$ (где $\omega_{f'}$ — модуль непрерывности функции $f'(e^{it})$). Тогда f представляется в $\bar{D}$ в виде (1), причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{|z_k|-1} < +\infty. \tag{7}$$

Действительно, первый пункт условия (2) выполнен. Вторая часть условия (2) будет выполняться, если положить $\delta_k = q^k$, так как очевидно, что в этом случае сходимость ряда из условия (2) эквивалентна сходимости ряда (7). Следовательно $f \in K(\bar{D})$. Такими будут, например, функции, у которых модуль непрерывности производной имеет порядок

$$\omega_{f'}(\delta) = O\left(\frac{1}{\log^{2+\varepsilon}\frac{1}{\delta}}\right), \ \varepsilon > 0.$$

Обозначим через $\mathrm{Lip}_\alpha(D)$ класс функций, удовлетворяющих в круге D условию Липшица с показателем α, где $0 < \alpha \leqslant 1$. Из следствия 1 непосредственно вытекает

Следствие 2. Если $f' \in \mathrm{Lip}_\alpha(D)$, то f представляется в D в виде (1), причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{(|z_k|+1)^{1+p}} < +\infty, \ 0 \leqslant p < \alpha.$$

В случае единичного круга, используя интегральную формулу Шварца, можно методом Вольфа получить следующее

Утверждение 1. *Если функция f аналитична в некоторой окрестности единичного круга, то ее можно представить в D в виде*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{z_k+z}{z_k-z} + ic, \ c = \mathrm{Im}\, f(0), \tag{8}$$

где c_k вещественны и могут быть выбраны таким образом, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leqslant b_1 \cdot \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

Из утверждения 1, следуя доказательству теоремы 1, может быть получена следующая

Теорема 2. *Любая функция* $f \in K(\overline{D})$ *разлагается в* $\overline{D}$ *в ряд вида* (8), *причем* c_k *вещественны и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{|z_k|-1} < +\infty.$$

Доказательство теоремы 1 показывает, что важно, чтобы $\bar{\partial} f(z)=0$ не во всем круге D, а на его границе. Поэтому по аналогичной схеме можно доказать утверждения о представлении в виде (1) не только аналитических функций. Введем соответствующие обозначения. Пусть E есть отрезок $[-1.1]$, тогда верна следующая

Теорема 3. *Пусть* $f \in K([-1,1])$. *Тогда функция* f *представляется на отрезке* $[-1.1]$ *в виде* (1), *причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{\rho(z_k)} < +\infty, \quad \rho(z_k) = \inf_{t \in [-1,1]} |z_k - t|.$$

Доказательству теоремы 3 предпошлем 2 леммы. В статье [5] доказана следующая

Лемма 3. *Пусть* $f \in C^1([-1,1])$, *тогда* f *можно непрерывно-дифференцируемо продолжить во всю комплексную плоскость* $\mathbf{C}$, *причем так, что*

1. $\bar{\partial} f(z) = 0$, *когда* $\operatorname{Im} z = 0$,
2. $\omega_{\bar{\partial} f}(\delta) \leqslant c_4 \cdot \omega_{f'}(\delta)$.

Лемма 4. *Пусть имеем прямоугольники в* R^2

$$\Pi_1^k = [-(1+\beta_k), (1+\beta_k)] \times [\beta_k, \beta_{k-1}], \; \Pi_2^k = [-(1+\beta_k), (1+\beta_k)] \times [-\beta_{k-1}, -\beta_k],$$

$$\Pi_3^k = [-(1+\beta_{k-1}), -(1+\beta_k)] \times [-\beta_k, \beta_{k-1}],$$

$$\Pi_4^k = [(1+\beta_k), (1+\beta_{k-1})] \times [-\beta_{k-1}, \beta_{k-1}].$$

Тогда для произвольного $z \in \mathbf{C}$ *справедливо неравенство*

$$\iint_{\Pi_l^k} \frac{1}{|\zeta - z|} \, d\xi d\eta \leqslant c_5 \cdot \delta_k \cdot \log \frac{1}{\delta_k}, \tag{9}$$

c_5 *не зависит от* l *и* k.

Доказательство. Так как доказательство всех четырех случаев аналогично, то достаточно доказать эту оценку для первого прямоугольника. Обозначим через

$$\varphi(z) = \iint\limits_{\Pi_1^k} \frac{1}{|\zeta - z|} d\xi d\eta.$$

Очевидно, что $\varphi(z)$ — непрерывная функция и достигает своего максимума в некоторой точке $z_0 = \xi_0 + i\eta_0$ и $z_0 \in \Pi_1^k$. Поэтому

$$\iint\limits_{\Pi_1^k} \frac{1}{|\zeta - z|} d\xi d\eta \leqslant \iint\limits_{\Pi_1^k} \frac{1}{|\zeta - z|} d\xi d\eta = \int\limits_{-(1+\beta_k)}^{(1+\beta_k)} \int\limits_{\beta_k} \frac{1}{\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}} d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_{\beta_k}^{\beta_{k-1}} \ln\left((1 + \beta_k - \xi_0) + \sqrt{(1 + \beta_k - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}\right) d\eta +$$

$$+ \int\limits_{\beta_k}^{\beta_{k-1}} \ln\left(-(1 + \beta_k + \xi_0) + \sqrt{(1 + \beta_k + \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}\right)^{-1} d\eta = P + Q.$$

Оценим P

$$|P| \leqslant \int\limits_{\beta_k}^{\beta_{k-1}} \left|\ln\left((1 + \beta_k - \xi_0) + \sqrt{(1 + \beta_k - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}\right)\right| d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\beta_k}^{\beta_{k-1}} |\ln|\eta - \eta_0|| \, d\eta = - \int\limits_{\beta_k}^{\beta_{k-1}} \ln|\eta - \eta_0| \, d\eta = - \int\limits_{\beta_k}^{\eta_0} \ln(\eta_0 - \eta) \, d\eta -$$

$$- \int^{\beta_{k-1}} \ln(\eta - \eta_0) \, d\eta = (\eta_0 - \beta_k) \ln(\eta_0 - \beta_k)^{-1} + (\beta_{k-1} - \eta) \ln(\beta_{k-1} - \eta)^{-1} +$$

$$+ 2\delta_k \leqslant 4 \cdot \delta_k \cdot \log \frac{1}{\delta_k} \cdot$$

Последнее неравенство имеет место в силу того, что производные функции

$$\varphi_1(\eta) = (\eta - \beta_k) \ln(\eta - \beta_k)^{-1}, \quad \varphi_2(\eta) = (\beta_{k-1} - \eta) \ln(\beta_{k-1} - \eta)^{-1}$$

являются соответственно положительной и отрицательной на отрезке $[\beta_k, \beta_{k-1}]$ и, следовательно, функции φ_1 и φ_2 соответственно возрастают или убывают на $[\beta_k, \beta_{k-1}]$. Например,

$$\varphi_1'(\eta) = \ln \frac{1}{\eta - \beta_k} - 1 \geqslant \ln \frac{1}{\delta_k} - 1 > 0.$$

Для Q имеем

$$Q = \int\limits_{\beta_k}^{\beta_{k-1}} \ln\left(-(1 + \beta_k + \xi_0) + \sqrt{(1 + \beta_k + \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}\right)^{-1} d\eta =$$

$$= \int\limits_{\beta_k}^{\beta_{k-1}} \ln \frac{1+\beta_k+\xi_0+\sqrt{(1+\beta_k+\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}}{(\eta-\eta_0)^2}\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\beta_k}^{\beta_{k-1}} \ln \frac{b_2}{(\eta-\eta_0)^2} \leqslant b_3 \cdot \delta_k \cdot \log \frac{1}{\delta_k}.$$

Отсюда и следует лемма 4.

Доказательство теоремы 3. По лемме 3 функцию f можно считать непрерывно-дифференцируемо продолженной во всю плоскость, причем так, что для функции $\bar{\partial} f(z)$ выполняется второй пункт условия (2).

Пусть $\delta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k$. Возьмем прямоугольник с центром в точке 0 и вершинами

$A = (-(1+\delta), -\delta)$, $B = (-(1+\delta), \delta)$, $C = ((1+\delta), \delta)$, $D = ((1+\delta), -\delta)$.

Обозначим его внутренность через Π. Тогда по интегральной формуле Коши, когда $z \in \Pi$ будем иметь

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \Pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Pi} \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta.$$

Положим

$$\psi_1(z) = \int\limits_{\partial \Pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \psi_2(z) = \iint\limits_{\Pi} \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta.$$

Функция ψ_1 является аналитической в Π. Следовательно, по теореме Вольфа ее можно представить на отрезке $[-1.1.]$ в виде (1), причем так выбрать коэффициенты A_k в разложении функции ψ_1, чтобы они удовлетворяли условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{\rho(z_k)} < +\infty.$$

Следовательно, вопрос опять сводится к представлению в виде (1) функции

$$\psi_2(z) = \iint\limits_{\Pi} \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta.$$

Для этого будем следовать схеме доказательства теоремы 1. Пусть $\Pi_0 = \Pi$, возьмем прямоугольники Π_k, $k = 1, 2, \cdots$ с центрами в точке 0 и вершинами

$$a_k' = (-(1+\beta_k), -\beta_k),\ b_k' = (-(1+\beta_k), \beta_k),\ c_k' = ((1+\beta_k), \beta_k).$$
$$d_k' = ((1+\beta_k), -\beta_k).$$

Тогда

$$\psi_2(z) = \iint\limits_{\Pi} \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \iint\limits_{\Pi_{k-1}/\Pi_k} \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta.$$

Положим

$$g_k(z) = \iint\limits_{\Pi_{k-1}/\Pi_k} \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta.$$

Каждая из функций g_k аналитична в прямоугольнике Π_k и непрерывна во всей плоскости. Следовательно, по теореме Вольфа ее можно представить на отрезке $[-1.1]$ в виде

$$g_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_k^n}{z_k^n - z}. \tag{10}$$

При этом можно выбрать точки z_k^n, $n = 1, 2, \cdots$ таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\rho(z_k^n) \geqslant \frac{\beta_k}{2},\ n = 1, 2, \cdots.$$

В силу замечания 1 и леммы 3, можно выбрать коэффициенты A_k^n в представлении (10) таким образом, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_k^n| \leqslant c_1 \max_{z \in C} |g_k(z)| \leqslant c_1 \max_{z \in C} \iint\limits_{\Pi_{k-1}/\Pi_k} \frac{|\bar{\partial} f(\zeta)|}{|\zeta - z|}\, d\xi d\eta \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \cdot c_4 \cdot c_5 \cdot \omega_{f'}(\beta_{k-1}) \cdot \delta_k \cdot \log \frac{1}{\delta_k}.$$

Следовательно, в силу условия (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_k^n|}{\rho(z_k^n)} \leqslant 2 \cdot c_1 \cdot c_4 \cdot c_5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{f'}(\beta_{k-1}) \cdot \delta_k \cdot \log \frac{1}{\delta_k}}{\beta_k} < +\infty.$$

Таким образом, при $z \in [-1, 1]$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_k^n}{z_k^n - z}$$

сходится равномерно и абсолютно к функции ψ_2. Теорема 3 доказана.

Конечно здесь также имеют место следствия, аналогичные следствиям 1 и 2 из теоремы 1.

2°. Как было отмечено ранее, не любую функцию $f \in A(\overline{D})$ можно представить в $\overline{D}$ в виде (1) с условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty.$$

Однако, если не требовать условия равномерной сходимости ряда (1) в $\overline{D}$, то легко может быть доказано следующее:

Утверждение 2. *Пусть G — жорданова область со спрямляемой границей и $f \in A(\overline{G})$. Тогда функция f может быть разложена внутри G в ряд вида* (1), *причем* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty$.

Обозначим через A_p множество функций, аналитических в единичном круге и таких, что $a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, где a_n — коэффициенты Тейлора функции f.

Покажем, что в этих обозначениях основная теорема статьи [4] следует из утверждения 2 и следствия 2. Действительно, первое утверждение этой теоремы непосредственно следует из утверждения 2, так как если $f \in A_p$ и $p > 1$, то $f \in A(\overline{D})$.

Пусть $f \in A_p$ и $p > 2$. Тогда $p = 2 + \alpha$, где $\alpha > 0$. Покажем, что $f' \in \mathrm{Lip}_\beta(D)$ для любого числа β такого, что $0 < \beta < \alpha$. Проще всего это сделать, воспользовавшись двумя теоремами Харди и Литтльвуда (см. [6], стр. 397—399). Действительно, из этих теорем следует, что $f' \in \mathrm{Lip}_\beta(D)$, если

$$|f''(z)| \leqslant \frac{M}{(1-r)^{1-\beta}}, \quad z = re^{it}.$$

Но если функция f имеет коэффициенты Тейлора $a_n = O\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right)$, где $\alpha > 0$, то функция f'' будет иметь коэффициенты Тейлора $a_n'' = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Если теперь взять числа q и m такими, чтобы

$$q > 0, \ m > 0, \ \frac{1}{q} + \frac{1}{m} = 1, \ q \cdot \alpha > 1,$$

из неравенства Гельдера немедленно следует

$$|f''(z)| \leqslant M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^\alpha} \leqslant M \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{m \cdot n}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q \cdot \alpha}}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{M_1}{(1-r)^{1-\frac{1}{q}}}.$$

Так как для любого β такого, что $0 < \beta < \alpha$, можно выбрать g таким, чтобы $\beta = \frac{1}{q}$, то отсюда и следует основная теорема статьи [4].

В заключение выражаю благодарность члену-корреспонденту АН Армянской ССР Н. У. Аракеляну, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.VI.1977

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Ֆունկցիաները պարզ կոտորակների շարքերով ներկայացնելու մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում տրվում է Վոլֆի թեորեմի ընդհանրացում միավոր շրջանի դեպքում: Ապացուցվում է, որ որոշ պայմանների դեպքում ածանցյալի վրա, անալիտիկ ֆունկցիան միավոր շրջանում կարելի է ներկայացնել հավասարաչափ պարզ կոտորակների շարքի տեսքով:

R. A. AVETISIAN. *On representation of functions in series of simple fractions* (summary)

The article contains a generalization of Volff's theorem for the case of unit circle. It is proved that under some conditions on the derivative an analytic function in unit circle can be represented uniformly as a series of simple fractions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wolf.* Sur les series $\Sigma A_k/(z - \alpha_k)$, Paris Comptes Rendus, 173, 1921, 1327—1328.
2. *Дж. Л. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИИЛ., М., 1961.
3. *A. Denjoy.* Sur les singularites des series de fractions rationnelles, Palermo Rendiconti 50, 1926, 1—95.
4. *Т. А. Леонтьева.* О представлении функций в единичном круге рядами рациональных функций, Матем., сб. 81 (126), № 2. 1971, 313—326.
5. *Н. У. Аракелян.* Равномерное приближение целыми функциями с оценкой их роста, Сибирский матем. журнал, 1963, т. 4, № 5.
6. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, Изд. „Наука", М., 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 1, 1978 Математика

И. В. КОВАЛИШИНА, Г. М. ЧУБКОВА-ВИДОВА

ПРОБЛЕМА НЕВАНЛИННЫ-ПИКА ДЛЯ НЕВАНЛИННОВСКИХ СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Введение

Основы общей теории аналитических J-нерастягивающих матриц-функций впервые были изложены В. П. Потаповым в его диссертации, опубликованной в 1955 году [4]. Аналитические J-нерастягивающие матрицы-функции сразу же нашли применение в теории линейных операторов в гильбертовом пространстве: введенная В. С. Лившицем характеристическая матрица-функция несамосопряженного оператора является J-нерастягивающей.

Следующим этапом в развитии теории явились исследования В. П. Потапова и его сотрудников по аналитической теории электрических цепей [6]. Одним из важнейших установленных здесь фактов является то, что при естественном дополнительном требовании вещественности $w(\lambda)$ на вещественной оси объекты теории становятся физичными: каждая такая рациональная J-растягивающая матрица-функция при $J=\begin{vmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{vmatrix}$ является проходной матрицей пассивного $4m$-полюсника с сосредоточенными параметрами, и наоборот. Тем самым теория J-растягивающих матриц-функций стала одним из математических проявлений закона сохранения энергии.

С другой стороны, в конце 60-х годов профессором В. П. Потаповым был намечен перспективный план исследований по применению теории аналитических J-растягивающих матриц-функций к решению классических задач анализа. Под этим общим названием объединены задачи Шура, Неванлинны—Пика, Лёвнера, Каратеодори, Каратеодори — Фейера, проблемы моментов Стилтьеса, Гамбургера, Хаусдорфа, задачи о продолжении эрмитово-положительных функций, абсолютно монотонных функций и др.

Исследования, проведенные по этому плану, показали, что все эти разнородные по своей постановке задачи следует рассматривать как задачи теории J-растягивающих матриц-функций. В самом деле, для всех этих задач характерно появление в заключительной фазе или на решающем этапе исследования функций $w(z)$ определенного класса (чаще всего неванлинновских), являющихся либо прямо либо опосредствовано решением поставленной задачи. В случае множественности решений совокупность всех таких функций $w(z)$ описывается дробно-линейным преобразованием

$$w(z)=[a(z)\,\omega(z)+b(z)][c(z)\,\omega(z)+d(z)]^{-1}$$

матрица коэффициентов которого

$$\mathbf{A}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}$$

строится по данным задачи и является одним из объектов теории J-растягивающих матриц-функций, а параметр является произвольной неванлинновской функцией.

Ценность исследований в области электрических цепей и классических задач состоит не только в построении аналитической теории электрических цепей и решений всех классических задач методами теории J-растягивающих матриц-функций, но также и в обогащении самой теории новыми фактами.

Так теория электрических цепей привела к появлению групповой элементарной матрицы-функции и ее частных случаев — вещественной, симплектической и реактивной матриц-функций. Описание структуры групповой матрицы-функции, и особенно ее частных случаев, потребовало преодоления значительных аналитических трудностей. Решение задач Шура, Каратеодори и проблемы моментов привело к созданию целой теории еше одного J-растягивающего объекта — так называемого кратного множителя [7].

Настоящая работа состоит из двух частей: в первой — изучается частный случай групповой элементарной матрицы-функции $\mathbf{A}(z)$ порядка $2m$, обладающей дополнительно свойством симплектичности, то есть матрицы-функции, удовлетворяющей следующим трем условиям:

1) $\mathbf{A}(z)\,J_2\mathbf{A}^*(z)-J_2>0,\ \operatorname{Jm} z>0,\ J_2=\begin{bmatrix} 0 & -iI_m \\ iI_m & 0 \end{bmatrix},$

2) $\mathbf{A}(z)\,J_2\mathbf{A}^*(z)=J_2,\ \operatorname{Jm} z=0,$

3) $\mathbf{A}'(z)\,J_2\,\mathbf{A}(z)=J_2.$

Матрицу-функцию $\mathbf{A}(z)$ будем называть *элементарной симплектичной.*

Полученные здесь результаты о структуре, отщеплении, параметризации $\mathbf{A}(z)$ полного ранга являются вкладом в общую теорию J-растягивающих матриц-функций и, кроме того, могут быть полезными в теории электрических цепей.

Вторая часть работы посвящена постановке и решению частной проблемы Неванлинны — Пика для матриц m-го порядка, когда в узлах интерполяции заданы значения искомой функции $w(z)$

$$w(z_j)=w_j\quad(j=1,\ 2,\cdots)$$

и значения ее производных

$$\dot{w}(z_j) = \dot{w}_j.$$

Итоги проведенного в этой части исследования являются еще одним свидетельством мощности методов теории J-растягивающих матриц-функций, позволяющих совершенно *единообразно* решить любую классическую задачу.

§ 1. Элементарные симплектические матрицы-функции

Пусть J_2-растягивающая в верхней полуплоскости матрица-функция $w(z)$ имеет полюсы в точках

$$z_1,\ \bar{z}_1;\ z_2,\ \bar{z}_2,\ \cdots,\ z_n,\ \bar{z}_n$$

порядков $s_1, s_2, \cdots, s_n$ соответственно, и пусть

$$w(z) = \frac{2i\tau_k c_k}{(z-z_k)^{s_k}} + \frac{d_k}{(z-z_k)^{s_k-1}} + \cdots \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

$$w(z) = -\frac{2i\tau_k \bar{c}_k}{(z-\bar{z}_k)^{s_k}} + \frac{\bar{d}_k}{(z-\bar{z}_k)^{s_k-1}} + \cdots,\ Jm\, z_k = \tau_k \neq 0$$

ее лорановы разложения.

Тогда основное матричное неравенство [7] для $w(z)$ имеет вид (см. стр. 64)

Элементарная симплектическая матрица-функция $\omega(z)$ с полюсами в точках $z_k, \bar{z}_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$, нормированная равенством $\omega(\infty) = I$, может быть записана следующим образом

$$\omega(z) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k a_k}{z-z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \bar{a}_k}{z-\bar{z}_k}, \quad z_k = \sigma_k + i\tau_k,\ \tau_k \neq 0, \tag{1}$$

а ее структура характеризуется теоремой:

Теорема 1. *Матрица-функция* (1) *является элементарной в том и только в том случае, когда выполнены следующие два условия:*

$$A = \begin{bmatrix} 2\tau_1 a_1^* J_2 a_1 & 2\tau_1 a_1^* J_2 \bar{b}_1 & \cdots & \dfrac{4\tau_1\tau_n a_1^* J_2 a_n}{\frac{z_n-\bar{z}_1}{i}} & -\dfrac{4\tau_1\tau_n a_1^* J_2 \bar{a}_n}{\frac{\bar{z}_n-\bar{z}_1}{i}} \\ -2\tau_1 \bar{a}_1^* J_2 b_1 & -2\tau_1 \bar{a}_2^* J_2 \bar{a}_1 & \cdots & -\dfrac{4\tau_1\tau_n \bar{a}_1^* J_2 a_n}{\frac{z_n-z_1}{i}} & \dfrac{4\tau_1\tau_n \bar{a}_1^* J_2 a_n}{\frac{\bar{z}_n-z_1}{i}} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \dfrac{4\tau_n\tau_1 a_n^* J_2 a_1}{\frac{z_1-\bar{z}_n}{i}} & -\dfrac{4\tau_n\tau_1 a_n^* J_2 \bar{a}_1}{\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_n}{i}} & \cdots & 2\tau_n a_n^* J_2 a_n & 2\tau_n a_n^* J_2 \bar{b}_n \\ -\dfrac{4\tau_n\tau_1 \bar{a}_n^* J_2 v_1}{\frac{z_1-z_n}{i}} & \dfrac{4\tau_n\tau_1 \bar{a}_n^* J_2 \bar{a}_1}{\frac{\bar{z}_1-z_n}{i}} & \cdots & -2\tau_n \bar{a}_n^* J_2 b_n & -2\tau_n \bar{a}_n^* J_2 \bar{a}_n \end{bmatrix} \geqslant 0$$

$$
\begin{vmatrix} A & B \\ B^* & C \end{vmatrix} =
\left[\begin{array}{cccccc|c}
2\tau_1\dot{c}_1 J_2 c_1 & 2\tau_1\dot{c}_1 J_2 \bar{d}_1 & \cdots & \dfrac{4\tau_1\tau_n\dot{c}_1 J_2 c_n}{\frac{z_n-\bar{z}_1}{i}} & - & \dfrac{4\tau_1\tau_n\dot{c}_1 J_2 \bar{c}_n}{\frac{\bar{z}_n-\bar{z}_1}{i}} & \dfrac{2\tau_1\dot{c}_1}{\bar{z}-\bar{z}_1} \\
-2\tau_1\bar{\dot{c}}_1 J_2 d_1 & -2\tau_1\bar{\dot{c}}_1 J_2\bar{c}_1 & \cdots & -\dfrac{4\tau_1\tau_n\bar{\dot{c}}_1 J_2 c_n}{\frac{z_n-z_1}{i}} & & \dfrac{4\tau_1\tau_n\bar{\dot{c}}_1 J_2\bar{c}_n}{\frac{\bar{z}_n-z_1}{i}} & -\dfrac{2\tau_1\bar{\dot{c}}_1}{\bar{z}-z_1} \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\
\dfrac{4\tau_n\tau_1\dot{c}_n J_2 c_1}{\frac{z_1-\bar{z}_n}{i}} & -\dfrac{4\tau_n\tau_1\dot{c}_n J_2\bar{c}_1}{\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_n}{i}} & \cdots & 2\tau_n\dot{c}_n J_2 c_n & & 2\tau_n\dot{c}_n J_2\bar{d}_n & \dfrac{2\tau_n\dot{c}_n}{\bar{z}-\bar{z}_n} \\
-\dfrac{4\tau_n\tau_1\bar{\dot{c}}_n J_2 c_1}{\frac{z_1-z_n}{i}} & \dfrac{4\tau_n\tau_1\bar{\dot{c}}_n J_2\bar{c}_1}{\frac{\bar{z}_1-z_n}{i}} & \cdots & -2\tau_n\bar{\dot{c}}_n J_2 d_n & & -2\tau_n\bar{\dot{c}}_n J_2\bar{c}_n & -\dfrac{2\tau_n\bar{\dot{c}}_n}{\bar{z}-z_n} \\
\hline
-\dfrac{2\tau_1 c_1}{z_1-z} & \dfrac{2\tau_1\bar{c}_1}{\bar{z}_1-z} & \cdots & -\dfrac{2\tau_n c_n}{z_n-z} & & \dfrac{2\tau_n\bar{c}_n}{\bar{z}_n-z} & \dfrac{w(z)J_2 w^*(z)-J_2}{\frac{z-\bar{z}}{i}}
\end{array}\right] \geqslant 0
$$

Справедливо и дуальное неравенство.

$$(B)\begin{cases}\overline{a}_k^{*} J_2 a_k = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)\\ [2\tau_1 J_2 a_1, -2\tau_1 J_2 \overline{a}_1, \cdots, 2\tau_n J_2 a_n, -2\tau_n J_2 \overline{a}_n] = [I, I, \cdots, I, I]A,\end{cases}$$

где

$$b_k = I + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{2i\tau_j a_j}{z_k - z_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{2i\tau_j \overline{a}_j}{z_k - \overline{z}_j}.$$

При этом J_2-форма элементарной функции представляется в виде

$$(C)\ \frac{\omega^*(z) J_2 \omega(z) - J_2}{\frac{z-\overline{z}}{i}} = \left[\frac{I}{\overline{z}-\overline{z}_1}, \frac{I}{\overline{z}-z_1}, \cdots, \frac{I}{\overline{z}-\overline{z}_n}, \frac{I}{\overline{z}-z_n}\right] A \begin{bmatrix}\frac{I}{z-z_1}\\ \frac{I}{z-\overline{z}_1}\\ \sim\sim\\ \frac{I}{z-z_n}\\ \frac{I}{z-\overline{z}_n}\end{bmatrix}.$$

Имеет место также

Теорема 2. (об отщеплении элементарных множителей). *Пусть матрица-функция $w(z)$ имеет полюсы в точках*

$$z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \cdots, z_n, \overline{z}_n \quad (\mathrm{Im}\, z_k = \tau_k \neq 0)$$

со следующими лорановыми разложениями:

$$w(z) = \frac{2i\tau_k c_k}{(z-z_k)^{s_k}} + \frac{d_k}{(z-z_k)^{s_k-1}} + \cdots,$$

$$w(z) = -\frac{2i\tau_k \overline{c}_k}{(z-\overline{z}_k)^{s_k}} + \frac{\overline{d}_k}{(z-\overline{z}_k)^{s_k-1}} + \cdots,$$

и пусть матрицы $X_1, X_2, \cdots, X_{2n-1}, X_{2n}$ найдены из уравнения

$$AQ = Z$$

$$\begin{bmatrix} 2\tau_1 c_1^* J_2 c_1 & 2\tau_1 c_1^* \overline{d}_1 \cdots & \frac{4\tau_1\tau_n c_1^* J_2 c_n}{\frac{z_n - \overline{z}_1}{i}} & -\frac{4\tau_1\tau_n c_1^* J_2 \overline{c}_n}{\frac{\overline{z}_n - \overline{z}_1}{i}} \\ -2\tau_1 \overline{c}_1^* J_2 d_1 & -2\tau_1 \overline{c}_1^* J_2 \overline{c}_1 \cdots & -\frac{4\tau_1\tau_n \overline{c}_1^* J_2 c_n}{\frac{z_n - z_1}{i}} & \frac{4\tau_1\tau_n \overline{c}_1^* J_2 \overline{c}_n}{\frac{\overline{z}_n - z_1}{i}} \\ \sim\sim\sim & \sim\sim\sim & \sim\sim\sim & \sim\sim\sim \\ \frac{4\tau_n\tau_1 c_n^* J_2 c_1}{\frac{z_1 - \overline{z}_n}{i}} & -\frac{4\tau_n\tau_1 c_n^* J_2 \overline{c}_1}{\frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_n}{i}} \cdots & 2\tau_n c_n^* J_2 c_n & 2\tau_n c_n^* J_2 \overline{d}_n \\ -\frac{4\tau_n\tau_1 \overline{c}_n^* J_2 c_1}{\frac{z_1 - z_n}{i}} & \frac{4\tau_n\tau_1 \overline{c}_n^* J_2 \overline{c}_1}{\frac{\overline{z}_1 - z_n}{i}} \cdots & -2\tau_n \overline{c}_n^* J_2 d_n & -2\tau_n \boldsymbol{c}^* J_2 \overline{c}_n \end{bmatrix} \times$$

$$\times\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,\,2n-1} & q_{1,\,2n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2,\,2n-1} & q_{2,\,2n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{2n-1,\,1} & q_{2n-1,\,2} & \cdots & q_{2n-1,\,2n-1} & q_{2n-1,\,2n} \\ q_{2n,\,1} & q_{2n,\,2} & \cdots & q_{2n,\,2n-1} & q_{2n,\,2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\tau_1 c_1^* \\ -2\tau_1 \overline{c_1^*} \\ \vdots \\ 2\tau_n c_n^* \\ -2\tau_n \overline{c_n^*} \end{bmatrix}$$

по формулам

$$\begin{aligned} &q_{11} + q_{12} + \cdots + q_{1,\,2n-1} + q_{1,\,2n} = X_1, \\ &q_{21} + q_{22} + \cdots + q_{2,\,2n-1} + q_{2,\,2n} = X_2, \\ &\sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \\ &q_{2n-1,\,1} + q_{2n-1,\,2} + \cdots + q_{2n-1,\,2n-1} + q_{2n-1,\,2n} = X_{2n-1}, \\ &q_{2n,\,1} + q_{2n,\,2} + \cdots + q_{2n,\,2n-1} + q_{2n,\,2n} = X_{2n}. \end{aligned}$$

Тогда

1) *матрица-функция*

$$\omega(z) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k c_k X_{2k-1} J_2}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \bar{c}_k X_{2k} J_2}{z - \bar{z}_k}$$

является элементарной;

2) $\omega(z)$ *отщепляется от* $w(z)$ *слева*

$$w(z) = \omega(z) \cdot w_1(z);$$

3) *при этом отщеплении порядки полюсов в точках*

$$z_1,\ \bar{z}_1,\ z_2,\ \bar{z}_2, \cdots, z_n,\ \bar{z}_n$$

у частного $w_1(z)$ *понижаются на единицу;*

4) *порядки полюсов обратной матрицы* $w_1^{-1}(z)$ *не повышаются.*

Замечание 1. Пусть

$$\omega(z) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k a_k}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \bar{a}_k}{z - \bar{z}_k} = \frac{2i\tau_k a_k}{z - z_k} + b_k + \cdots$$

— элементарная матрица-функция и (см. стр. 54) соответствующее ей основное матричное неравенство отщепления.

Сейчас третье условие леммы о блок-матрице [4] имеет вид

$$C - X^* A X = 0$$

и означает, что построенный по формулам теоремы 2 элементарный множитель

$$\hat{\omega}(z) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \hat{a}_k}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \bar{\hat{a}}_k}{z - \bar{z}_k}$$

$$
\begin{vmatrix} A & B \\ B^* & C \end{vmatrix} =
\left[\begin{array}{ccccc|c}
2\tau_1 a_1^* J_2 a_1 & 2\tau_1 a_1^* J_2 \bar{b}_1 & \cdots & \dfrac{4\tau_1\tau_n a_1^* J_2 a_n}{\frac{\bar{z}_n - z_1}{i}} & -\dfrac{4\tau_n\tau_1 a_1^* J_3 \bar{a}_n}{\frac{\bar{z}_n - z_1}{i}} & \dfrac{2\tau_1 a_1^*}{\bar{z} - \bar{z}_1} \\
-2\tau_1 \bar{a}_1^* J_2 b_1 & -2\tau_1 \bar{a}_1 J_2 \bar{a}_1 & \cdots & -\dfrac{4\tau_1\tau_n \bar{a}_1^* J_2 a_n}{\frac{z_n - z_1}{i}} & \dfrac{4\tau_1\tau_n \bar{a}_1^* J_2 \bar{a}_n}{\frac{\bar{z}_n - z_1}{i}} & -\dfrac{2\tau_1 \bar{a}_1^*}{\bar{z} - z_1} \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \\
\dfrac{4\tau_n\tau_1 a_n^* J_2 a_1}{\frac{z_1 - \bar{z}_n}{i}} & -\dfrac{4\tau_n\tau_1 a_n^* J_2 \bar{a}_1}{\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_n}{i}} & \cdots & 2\tau_n a_n^* J_2 a_n & 2\tau_n a_n^* J_2 \bar{b}_n & \dfrac{2\tau_n a_n^*}{\bar{z} - z_n} \\
-\dfrac{4\tau_n\tau_1 \bar{a}_n^* J_2 a_1}{\frac{z_1 - z_n}{i}} & \dfrac{4\tau_n\tau_1 \bar{a}_n^* J_2 \bar{a}_1}{\frac{\bar{z}_1 - z_n}{i}} & \cdots & -2\tau_n \bar{a}_n^* J_2 b_n & -2\tau_n \bar{a}_n^* J_2 \bar{a}_n & -\dfrac{2\tau_n \bar{a}_n^*}{\bar{z} - z_n} \\
\hline
-\dfrac{2\tau_1 a_1}{z_1 - z} & \dfrac{2\tau_1 \bar{a}_1}{\bar{z}_1 - z} & \cdots & -\dfrac{2\tau_n a_n}{z_n - z} & \dfrac{2\tau_n \bar{a}_n}{\bar{z}_n - z} & \dfrac{\omega(z) J_2 \omega^*(z) - J_2}{\frac{z - \bar{z}}{i}}
\end{array}\right] \geqslant 0 \qquad (2)
$$

совпадает с $\omega(z)$:

$$\omega(z) = \hat{\omega}(z).$$

Замечание 2. Умножим неравенство (2) для элементарной матрицы-функции справа на

$$T = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & \cdots & S_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix},$$

слева на T^*, где $S_1, S_2, \cdots, S_{2n}$ — произвольные неособенные матрицы порядка $2m \times 2m$. Описанная в теореме 2 процедура приводит к построению элементарного множителя $\bar{\omega}(z)$, совпадающего с $\omega(z)$.

Действительно, перепишем неравенство (2) в виде

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C - X^* AX \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0.$$

По замечанию I блок $C - X^* AX = 0$, поэтому

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} = \operatorname{rang} A.$$

В новом неравенстве

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B}^* & C \end{pmatrix} = T^* \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^*AS & S^*B \\ B^*S & C \end{pmatrix} \geq 0$$

в силу неособенности T

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B}^* C \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* C \end{pmatrix}$$

и неособенности S

$$\operatorname{rang} \bar{A} = \operatorname{rang} A.$$

Следовательно, и сейчас справедливо равенство

$$C - \bar{X}^* \bar{A} \tilde{X} = 0,$$

что и требовалось.

Среди групповых элементарных матриц-функций

$$\omega(z) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k a_k}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \bar{a}_k}{z - \bar{z}_k}$$

особое значение имеют так называемые элементарные матрицы-функции *полного ранга*.

Имеет место общий факт:

Для любой J_2 — растягивающей матрицы-функции

$$w(z)\ \left(J_2=\begin{vmatrix} 0 & -iI_m \\ iI_m & 0\end{vmatrix}\right)$$

ранг старшего коэффициента лоранового разложения в окрестности некоторого полюса z_k не превосходит m, т. е. если

$$w(z)=\frac{2i\tau_k C_k}{(z-z_k)^{s_k}}+\cdots,$$

то $\operatorname{rang} C_k \leqslant m$.

C_k будем называть коэффициентом полного ранга, если $\operatorname{rang} C_k = m$.

Элементарную матрицу-функцию

$$\omega(z)=I+\sum_{k=1}^{n}\frac{2i\tau_k a_k}{z-z_k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2i\tau_k \bar{a}_k}{z-\bar{z}_k}$$

будем называть матрицей-функцией полного ранга, если $\operatorname{rang} a_k = m$ $(k=1,2,\cdots,n)$.

Существование и структура элементарной матрицы-функции полного ранга устанавливаются следующей теоремой:

Теорема 3. (*о параметризации*). *Если элементарная симплектическая матрица-функция*

$$\omega(z)=I+\sum_{k=1}^{n}\frac{2i\tau_k a_k}{z-z_k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2i\tau_k \bar{a}_k}{z-\bar{z}_k}$$

является функцией полного ранга, то для нее единственным образом определяются „параметры“

$$w_1,\ w_2,\cdots;\ w_n,\ \dot{w}_1,\dot{w}_2,\cdots,\dot{w}_n,$$

являющиеся квадратными матрицами m-ого порядка, удовлетворяющими условию

$$A_{2n}=\begin{vmatrix}
\frac{w_1-\dot{w}_1}{z_1-\bar{z}_1} & \dot{w}_1 & \frac{w_1-\dot{w}_2}{z_1-\bar{z}_2} & \frac{w_1-w_2}{z_1-z_2} & \cdots & \frac{w_1-\dot{w}_n}{z_1-\bar{z}_n} & \frac{w_1-w_n}{z_1-z_n} \\
\ddot{w}_1 & \frac{\dot{w}_1-w_1}{\bar{z}_1-z_1} & \frac{\dot{w}_1-\dot{w}_2}{\bar{z}_1-\bar{z}_2} & \frac{\dot{w}_1-w_2}{\bar{z}_1-z_2} & \cdots & \frac{\dot{w}_1-w_n}{\bar{z}_1-\bar{z}_n} & \frac{\dot{w}_1-w_n}{\bar{z}_1-z_n} \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\
\frac{w_n-\dot{w}_1}{z_n-\bar{z}_1} & \frac{w_n-w_1}{z_n-z_1} & \frac{w_n-\dot{w}_2}{z_n-\bar{z}_2} & \frac{w_n-w_2}{z_n-z_2} & \cdots & \frac{w_n-\dot{w}_n}{z_n-\bar{z}_n} & \dot{w}_n \\
\frac{\dot{w}_n-\dot{w}_1}{\bar{z}_n-\bar{z}_1} & \frac{\dot{w}_n-w_1}{\bar{z}_n-z_1} & \frac{\dot{w}_n-\dot{w}_2}{\bar{z}_n-\bar{z}_2} & \frac{\dot{w}_n-w_2}{\bar{z}_n-z_2} & \cdots & \ddot{w}_n & \frac{\dot{w}_n-w_n}{\bar{z}_n-z_n}
\end{vmatrix}>0,$$

такие, что $\omega(z)$ допускает представление

$$\omega(z) = I + iJ_2 [I, I, \cdots, I, I] H \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z - z_1} \\ \dfrac{I}{z - \bar{z}_1} \\ \sim \sim \\ \dfrac{I}{z - z_n} \\ \dfrac{I}{z - \bar{z}_n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где

$$H = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^* \\ I \end{bmatrix} & & & & & \\ & \begin{bmatrix} w_1 \\ I \end{bmatrix} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \begin{bmatrix} w_n^* \\ I \end{bmatrix} & \\ & & & & & \begin{bmatrix} w_n \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix} A_{2n}^{-1} \begin{bmatrix} [w_1, I] & & & & & \\ & [w_1^*, I] & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & [w_n, I] & \\ & & & & & [w_n^*, I] \end{bmatrix}.$$

Обратно, любая матрица-функция указанного вида является элементарной симплектической матрицей-функцией полного ранга.

Представление (3) *назовем параметризацией элементарной матрицы-функции полного ранга.*

Доказательство.

1°. Пусть $\omega(z)$ — элементарная симплектическая матрица-функция полного ранга.

Запишем для $\omega(z)$ основное матричное неравенство [7] (см. стр.58).

Пусть неособенные матрицы $S_k^{(1)}$ и $S_k^{(2)}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ таковы, что

$$S_k^{(1)} 2\tau_k a_k = \begin{pmatrix} w_k & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_k^{(2)} 2\tau_k \bar{a}_k = \begin{pmatrix} w_k^* & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим (4) слева на матрицу

$$T = \begin{bmatrix} S_1^{(1)} (\mu_1 - z_1)^{s_1} & & & & & \\ & -S_1^{(2)} (\mu_2 - \bar{z}_1)^{s_1} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & S_n^{(1)} (\mu_{2n-1} - z_n)^{s_n} & & \\ & & & & & -S_n^{(2)} (\mu_{2n} - \bar{z}_n)^{s_n} & \\ & & & & & & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$
\begin{pmatrix} A & B \\ B^{*} & C \end{pmatrix} =
\left[
\begin{array}{cccc|c}
\dfrac{\omega(\mu_1) J_2 \omega^{*}(\mu_1) - J_2}{\dfrac{\mu_1 - \bar{\mu}_1}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_1) J_2 \omega^{*}(\mu_2) - J_2}{\dfrac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{i}} & \cdots & \dfrac{\omega(\mu_1) J_2 \omega^{*}(\mu_{2n}) - J_2}{\dfrac{\mu_1 - \bar{\mu}_{2n}}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_1) - \omega(z)}{\dfrac{\mu_1 - z}{i}} \\
\dfrac{\omega(\mu_2) J_2 \omega^{*}(\mu_1) - J_2}{\dfrac{\mu_2 - \bar{\mu}_1}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_2) J_2 \omega^{*}(\mu_2) - J_2}{\dfrac{\mu_2 - \bar{\mu}_2}{i}} & \cdots & \dfrac{\omega(\mu_2) J_2 \omega^{*}(\mu_{2n}) - J_2}{\dfrac{\mu_2 - \bar{\mu}_{2n}}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_2) - \omega(z)}{\dfrac{\mu_2 - z}{i}} \\
\sim\sim\sim & \sim\sim\sim & \sim\sim\sim & \sim\sim\sim & \sim\sim\sim \\
\dfrac{\omega(\mu_{2n}) J_2 \omega^{*}(\mu_1) - J_2}{\dfrac{\mu_{2n} - \bar{\mu}_1}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_{2n}) J_2 \omega^{*}(\mu_2) - J_2}{\dfrac{\mu_{2n} - \bar{\mu}_1}{i}} & \cdots & \dfrac{\omega(\mu_{2n}) J_2 \omega^{*}(\mu_{2n}) - J_2}{\dfrac{\mu_{2n} - \bar{\mu}_{2n}}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_{2n}) - \omega(z)}{\dfrac{\mu_{2n} - z}{i}} \\
\hline
 & * & & & \dfrac{\omega^{*}(z) J_2 \omega(z) - J_2}{\dfrac{z - \bar{z}}{i}}
\end{array}
\right] > 0. \tag{4}
$$

справа на T^* и перейдем к пределу при

$$\mu_{2k-1} \to z_k,\ \mu_{2k} \to \bar z_k \quad (k=1,\, 2, \cdots,\, n).$$

Новое неравенство имеет вид

$$T\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} T^* = \begin{pmatrix} \tilde A & \tilde B \\ \tilde B^* & C \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{cccccccccc|c}
\frac{w_1 - w_1^*}{z_1 - \bar z_1} & 0 & \dot w_1 & 0 & \cdots & \frac{w_1 - w_n^*}{z_1 - \bar z_n} & 0 & \frac{w_1 - w_n}{z_1 - z_n} & 0 & & \begin{bmatrix} w_1 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{z - z_1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\dot w_1^* & 0 & \frac{w_1^* - w_1}{\bar z_1 - z_1} & 0 & \cdots & \frac{w_1^* - w_n^*}{\bar z_1 - \bar z_n} & 0 & \frac{w_1^* - w_n}{\bar z_1 - z_n} & 0 & & \begin{bmatrix} w_1^* & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{z - \bar z_1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & & \sim \sim \sim \sim \\
\frac{w_n - w_1^*}{z_n - \bar z_1} & 0 & \frac{w_n - w_1}{z_n - z_1} & 0 & \cdots & \frac{w_n - w_n^*}{z_n - \bar z_n} & 0 & \dot w_n & 0 & & \begin{bmatrix} w_n & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{z - z_n} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\frac{w_n^* - w_1^*}{\bar z_n - \bar z_1} & 0 & \frac{w_n^* - w_1}{\bar z_n - z_1} & 0 & \cdots & \dot w_n^* & 0 & \frac{w_n^* - w_n}{\bar z_n - z_n} & 0 & & \begin{bmatrix} w_n^* & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{z - \bar z_n} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
 & & & & * & & & & & & \frac{\omega^*(z) J_2 \omega(z) - J_2}{\frac{z - \bar z}{i}}
\end{array}\right] > 0.$$

Формулы теоремы 2 (см. замечание 2) приведут к построению элементарной матрицы-функции $\tilde\omega(z)$, совпадающей с $\omega(z)$.

Для этого введем обозначения

$$\tilde B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} w_1^* & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} w_n & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ & & & \begin{bmatrix} w_n^* & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I}{z - z_1} \\ \frac{I}{z - \bar z_1} \\ \sim \sim \\ \frac{I}{z - z_n} \\ \frac{I}{z - \bar z_n} \end{bmatrix} = \tilde Z \begin{bmatrix} \frac{I}{z - z_1} \\ \frac{I}{z - \bar z_1} \\ \sim \sim \\ \frac{I}{z - z_n} \\ \frac{I}{z - \bar z_n} \end{bmatrix}; \quad \tilde X = \tilde Q \cdot \begin{bmatrix} \frac{I}{z - z_1} \\ \frac{I}{z - \bar z_1} \\ \sim \sim \\ \frac{I}{z - z_n} \\ \frac{I}{z - \bar z_n} \end{bmatrix}.$$

Известно [7], что уравнение $A\tilde X = \tilde B$, следовательно и

$$\tilde A \tilde Q = \tilde Z$$

имеет решение, но тогда оно будет иметь и решение вида

$$Q_0=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,4n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{4n-1,1} & q_{4n-1,2} & \cdots & q_{4n-1,4n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Равенство

$$\tilde{A}\,\tilde{Q}_0=\tilde{Z}$$

равносильно

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1-\dot w_1}{z_1-\bar z_1} & w'_1 & \cdots & \frac{w_1-\dot w_n}{z_1-\bar z_n} & \frac{w_1-w_n}{z_1-z_n} \\ \dot w'_1 & \frac{\dot w_1-w_1}{\bar z-z_1} & \cdots & \frac{\dot w_1-\dot w_n}{\bar z_1-\bar z_n} & \frac{\dot w_1-w_n}{\bar z_1-z_n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \frac{w_n-\dot w_1}{z_n-\bar z_1} & \frac{w_n-w_1}{z_n-z_1} & \cdots & \frac{w_n-\dot w_n}{z_n-\bar z_n} & w'_n \\ \frac{\dot w_n-\dot w_1}{\bar z_n-\bar z_1} & \frac{\dot w_n-w_1}{\bar z_n-z_1} & \cdots & \dot w'_n & \frac{\dot w_n-w_n}{\bar z_n-z_n} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,4n-1} & q_{1,4n} \\ q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{3,4n-1} & q_{3,4n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{4n-3,1} & q_{4n-3,2} & \cdots & q_{4n-3,4n-1} & q_{4n-3,4n} \\ q_{4n-1,1} & q_{4n-1,2} & \cdots & q_{4n-1,4n-1} & q_{4n-1,4n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [w_1\ I] & & & & \\ & [\dot w_1, I] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [w_n, I] & \\ & & & & [\dot w_n, I] \end{bmatrix}.$$

Последнее соотношение распадается на два равенства

$$A_{2n}\cdot\begin{bmatrix} q_{11} & q_{13} & \cdots & q_{1,4n-1} \\ q_{31} & q_{33} & \cdots & q_{3,4n-1} \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{4n-3,1} & q_{4n-3,3} & \cdots & q_{4n-3,4n-1} \\ q_{4n-1,1} & q_{4n-1,3} & \cdots & q_{4n-1,4n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_1 & & & & \\ & \dot w_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & w_n & \\ & & & & \dot w_n \end{bmatrix},$$

$$A_{2n}\cdot\begin{bmatrix} q_{12} & q_{14} & \cdots & q_{1,4n} \\ q_{32} & q_{34} & \cdots & q_{3,4n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{4n-3,2} & q_{4n-3,4} & \cdots & q_{4n-3,4n} \\ q_{4n-1,2} & q_{4n-1,4} & \cdots & q_{4n-1,4n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & & & & \\ & I & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I & \\ & & & & I \end{bmatrix}.$$

Из второго вытекает, что матрица A_{2n} неособенная, поэтому

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,4n-1} & q_{1,4n} \\ q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{3,4n-1} & q_{3,4n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{4n-3,1} & q_{4n-3,2} & \cdots & q_{4n-3,4n-1} & q_{4n-3,4n} \\ q_{4n-1,1} & q_{4n-1,2} & \cdots & q_{4n-1,4n-1} & q_{4n-1,4n} \end{bmatrix}=A_{2n}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} [w_1, I] & & & & \\ & [\dot w_1, I] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [w_n, I] & \\ & & & & [\dot w_n, I] \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Используя правило построения элементарной матрицы-функции $\bar\omega(z)$, отщепляющейся от $\omega(z)$ [7], положим

$$[2\tau_1\tilde{a}_1,\ -2\tau_1\tilde{\tilde{a}}_1,\ \cdots,\ 2\tau_n\tilde{a}_n,\ -2\tau_n\tilde{\tilde{a}}_n] = J_2\,[I,\ I, \cdots,\ I,\ I]\,\tilde{H},$$

где

$$\tilde{H} = \tilde{Q}_0^{*}\,\tilde{\bar{A}}\,\tilde{Q}_0 = \begin{bmatrix} q_{11}^{*} & 0 & \cdots & q_{4n-1,1}^{*} & 0 \\ q_{12}^{*} & 0 & \cdots & q_{4n-1,2}^{*} & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{1,4n}^{*} & 0 & \cdots & q_{4n-1,4n}^{*} & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{w_1-w_1^{*}}{z_1-\bar{z}_1} & 0 & \dot{w}_1 & 0 & \cdots & \frac{w_1-w_n^{*}}{z_1-\bar{z}_n} & 0 & \frac{w_1-w_n}{z_1-z_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{w}_1^{*} & 0 & \frac{w_1^{*}-w_1}{\bar{z}_1-z_1} & 0 & \cdots & \frac{w_1^{*}-w_n^{*}}{\bar{z}_1-\bar{z}_n} & 0 & \frac{w_1^{*}-w_n}{\bar{z}_1-z_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \frac{w_n-w_1^{*}}{z_n-\bar{z}_1} & 0 & \frac{w_n-w_1}{z_n-z_1} & 0 & \cdots & \frac{w_n-w_n^{*}}{z_n-\bar{z}_n} & 0 & \dot{w}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{w_n^{*}-w_1^{*}}{\bar{z}_n-\bar{z}_1} & 0 & \frac{w_n^{*}-w_1}{\bar{z}_n-z_1} & 0 & \cdots & \dot{w}_n^{*} & 0 & \frac{w_n^{*}-w_n}{\bar{z}_n-z_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,4n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{4n-1,1} & q_{4n-1,2} & \cdots & q_{4n-1,4n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q_{11}^{*} & q_{31}^{*} & \cdots & q_{4n-3,1}^{*} & q_{4n-1,1}^{*} \\ q_{12}^{*} & q_{32}^{*} & \cdots & q_{4n-3,2}^{*} & q_{4n-1,2}^{*} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{1,4n-1}^{*} & q_{3,4n-1}^{*} & \cdots & q_{4n-3,4n-1}^{*} & q_{4n-1,4n-1}^{*} \\ q_{1,4n}^{*} & q_{3,4n}^{*} & \cdots & q_{4n-3,4n}^{*} & q_{4n-1,4n}^{*} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{w_1-w_1^{*}}{z_1-\bar{z}_1} & \dot{w}_1 & \cdots & \frac{w_1-w_n^{*}}{z_1-\bar{z}_n} & \frac{w_1-w_n}{z_1-z_n} \\ \dot{w}_1^{*} & \frac{w_1^{*}-w_1}{\bar{z}_1-z_1} & \cdots & \frac{w_1^{*}-w_n^{*}}{\bar{z}_1-\bar{z}_n} & \frac{w_1^{*}-w_n}{\bar{z}_1-z_n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \frac{w_n-w_1^{*}}{z_n-\bar{z}_1} & \frac{w_n-w_1}{z_n-z_1} & \cdots & \frac{w_n-w_n^{*}}{z_n-\bar{z}_n} & \dot{w}_n \\ \frac{w_n^{*}-w_1^{*}}{\bar{z}_n-\bar{z}_1} & \frac{w_n^{*}-w_1}{\bar{z}_n-z_1} & \cdots & \dot{w}_n^{*} & \frac{w_n^{*}-w_n}{\bar{z}_n-z_n} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,4n-1} & q_{1,4n} \\ q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{3,4n-1} & q_{3,4n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{4n-3,1} & q_{4n-3,2} & \cdots & q_{4n-3,4n-1} & q_{4n-3,4n} \\ q_{4n-1,1} & q_{4n-1,2} & \cdots & q_{4n-1,4n-1} & q_{4n-1,4n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} w_1^* \\ I \end{vmatrix} & & & & \\ & \begin{vmatrix} w_1 \\ I \end{vmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{vmatrix} w_n^* \\ I \end{vmatrix} & \\ & & & & \begin{vmatrix} w_n \\ I \end{vmatrix} \end{bmatrix} A_{2n}^{-1} \begin{bmatrix} [w_1, I] & & & & \\ & [w_1^*, I] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [w_n, I] & \\ & & & & [w_n^*, I] \end{bmatrix}.$$

Здесь мы использовали соотношение (5).

Теперь строим матрицу-функцию

$$\tilde{\omega}(z) = I + i\,[2\tau_1 \tilde{a}_1, -2\tau_1 \tilde{\tilde{a}}_1, \cdots, 2\tau_n \tilde{a}_n, -2\tau_n \tilde{\tilde{a}}_n] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_1} \\ \sim\ \sim \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_n} \end{bmatrix} = I + i J_2\, [I, I, \cdots, I\ I]\, \tilde{H} \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_1} \\ \sim\ \sim \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_n} \end{bmatrix},$$

и эта матрица-функция, в силу замечания 2, равна $\omega(z)$

$$\tilde{\omega}(z) = \omega(z).$$

2°. Пусть теперь $z_1, z_2, \cdots, z_n$ — произвольный набор точек из верхней полуплоскости, а матрицы

$$w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n,\ \dot{w}_1,\ \dot{w}_2,\ \cdots,\ \dot{w}_n$$

удовлетворяют условию

$$A_{2n} = \begin{vmatrix} \dfrac{w_1 - \dot{w}_1}{z_1 - \bar{z}_1} & w_1 & \cdots & \dfrac{w_1 - \dot{w}_n}{z_1 - \bar{z}_n} & \dfrac{w_1 - w_n}{z_1 - z_n} \\ \dot{w}_1 & \dfrac{\dot{w}_1 - \dot{w}_1}{\bar{z}_1 - z_1} & \cdots & \dfrac{\dot{w}_1 - \dot{w}_n}{\bar{z}_1 - \bar{z}_n} & \dfrac{\dot{w}_n - w_n}{\bar{z}_1 - z_n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \frac{w_n - w_1^*}{z_n - \bar{z}_1} & \cdots & \frac{w_n - w_1}{z_n - z_1} & \frac{w_n - w_n^*}{z_n - \bar{z}_n} & \dot{w}_n \\ \frac{w_n^* - w_1^*}{\bar{z}_n - \bar{z}_1} & \cdots & \frac{w_n^* - w_1}{\bar{z} - z_1} & \dot{w}_n^* & \frac{w_n^* - w_n}{\bar{z}_n - z_n} \end{vmatrix} > 0.$$

Рассмотрим матрицу

$$H = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^* \\ I \end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} w_1 \\ I \end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{bmatrix} w_n^* \\ I \end{bmatrix} & \\ & & & & \begin{bmatrix} w_n \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix} A_{2n}^{-1} \begin{bmatrix} [w_1, I] & & & & \\ & [w_1^*, I] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [w_n, I] & \\ & & & & [w_n^*, I] \end{bmatrix}$$

и построим матрицу-функцию

$$\omega(z) = I + i\,[2\tau_1 a_1, -2\bar{\tau}_1 \bar{a}_1, \cdots, 2\tau_n a_n, -2\bar{\tau}_n \bar{a}_n] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{I}{z - z_1} \\ \frac{I}{z - \bar{z}_1} \\ \sim\sim \\ \frac{I}{z - z_n} \\ \frac{I}{z - \bar{z}_n} \end{bmatrix} = I + iJ_2[I, I, \cdots, I, I]\, H \begin{bmatrix} \frac{I}{z - z_1} \\ \frac{I}{z - \bar{z}_1} \\ \sim\sim \\ \frac{I}{z - z_n} \\ \frac{I}{z - \bar{z}_n} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Покажем, что $\omega(z)$—элементарная матрица-функция полного ранга.

Для этого вычислим J_2-форму, используя тождество для матрицы H

$$H \begin{bmatrix} I \\ I \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I \\ I \end{bmatrix} J_2 [I, I, \cdots, I, I]\, H = -i\,(HZ - \bar{Z} H), \tag{7}$$

легко следующее из тождества для A^{2n}:

$$
\begin{bmatrix} w_1 & & & & & \\ & w_1^* & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & w_n & \\ & & & & & w_n^* \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \\ I \end{bmatrix}
[I, I, \cdots, I, I] -
\begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \\ I \end{bmatrix}
[I, I, \cdots, I, I] \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} w_1^* & & & & & \\ & w_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & w_n^* & \\ & & & & & w_n \end{bmatrix} = ZA_{2n} - A_{2n}\overline{Z},
$$

где

$$
Z = \begin{bmatrix} z_1 I & & & & & \\ & \bar{z}_1 I & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & z_n I & \\ & & & & & \bar{z}_n I \end{bmatrix}.
$$

$$
\omega^*(z)\, J_2\, \omega(z) - J_2 = -i\left[\frac{I}{z-\bar{z}_1}, \frac{I}{z-z_1}, \cdots, \frac{I}{z-\bar{z}_n}, \frac{I}{z-z_n}\right] \times
$$

$$
\times H \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \\ I \end{bmatrix} + i\,[I, I, \cdots, I, I]\, H \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_n} \end{bmatrix} -
$$

$$
-i\left[\frac{I}{z-\bar{z}_1}, \frac{I}{z-z_1}, \cdots, \frac{I}{z-\bar{z}_n}, \frac{I}{z-z_n}\right](HZ - \overline{Z}H) \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_n} \end{bmatrix} =
$$

$$= \frac{z-\bar z}{i}\left[\frac{I}{z-\bar z_1},\ \frac{I}{z-z_1},\cdots,\frac{I}{z-\bar z_n},\ \frac{I}{z-z_n}\right] H \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_1} \\ \sim\ \sim \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_n} \end{bmatrix},$$

откуда, в силу неотрицательности H, следует элементарность $\omega(z)$.

Симплектичность $\omega(z)$ также легко проверяется.

Убедимся теперь, что $\omega(z)$ полного ранга. В самом деле, из тождества (7), переписанного с учетом (6) в виде

$$\begin{bmatrix} 2\tau_1 a_1^* \\ -2\tau_1 \bar a_1^* \\ \sim\ \sim\ \sim \\ 2\tau_n a_n^* \\ -2\tau_n \bar a_n^* \end{bmatrix} J_2 \left[2\tau_1 a_1,\ -2\tau_1 \bar a_1, \cdots 2\tau_n a_n,\ -2\tau_n \bar a_n\right] =$$

$$= \begin{bmatrix}
\frac{z_1-\bar z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1^* \\ I\end{bmatrix}\alpha_{11}[w_1, I] & 0 & \cdots & \frac{z_n-\bar z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1^* \\ I\end{bmatrix}\alpha_{1,2n-1}[w_n, I] & \frac{\bar z_n-\bar z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1^* \\ I\end{bmatrix}\alpha_{1,2n}[w_n^*, I] \\
0 & \frac{\bar z_1-z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1 \\ I\end{bmatrix}\alpha_{22}[w_1^*, I] & \cdots & \frac{z_n-z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1 \\ I\end{bmatrix}\alpha_{2,2n-1}[w_n, I] & \frac{\bar z_n-z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1 \\ I\end{bmatrix}\alpha_{2,2n}[w_n^*, I] \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\
\frac{z_1-\bar z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n^* \\ I\end{bmatrix}\alpha_{2n-1,1}[w_1, I] & \frac{\bar z_1-\bar z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n^* \\ I\end{bmatrix}\alpha_{2n-1,2}[w_1^*, I] & \cdots & \frac{z_n-\bar z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n^* \\ I\end{bmatrix}\alpha_{2n-1,2n-1}[w_n, I] & 0 \\
\frac{z_1-z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n \\ I\end{bmatrix}\alpha_{2n,1}[w_1, I] & \frac{\bar z_1-z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n \\ I\end{bmatrix}\alpha_{2n,2}[w_1^*, I] & \cdots & 0 & \frac{\bar z_n-z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n \\ I\end{bmatrix}\alpha_{n,2n}[w_n^*, I]
\end{bmatrix},$$

где

$$A_{2n}^{-1}=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,\,2n-1} & \alpha_{1,\,2n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,\,2n-1} & \alpha_{2,\,2n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \alpha_{2n-1,\,1} & \alpha_{2n-1,\,2} & \cdots & \alpha_{2n-1,\,2n-1} & \alpha_{2n-1,\,2n} \\ \alpha_{2n,\,1} & \alpha_{2n,\,2} & \cdots & \alpha_{2n,\,2n-1} & \alpha_{2n,\,2n} \end{bmatrix},$$

вытекают равенства

$$2\tau_1\, a_1^*\, J_2\, a_1=\begin{bmatrix} w_1^* \\ I \end{bmatrix} \alpha_{11}\, [w_1,\, I]$$

$$\sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim$$

$$2\tau_n\, a_n^*\, J_2\, a_n=\begin{bmatrix} w_n^* \\ I \end{bmatrix} \alpha_{2n-1,\,2n-1}\, [w_n,\, I],$$

из которых следует, что $\operatorname{rang} a_k = m$ $(k=1,\,2,\cdots,\,n)$.

3°. Докажем, наконец, единственность представления (3). Допуская, что $\omega(z)$ имеет два представления

$$\omega(z)=I+iJ_2\,[I,\,I,\,\cdots,\,I,\,I]\,H\begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_1} \\ \sim\sim \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_n} \end{bmatrix},$$

$$\omega(z)=I+iJ_2\,[I,\,I,\cdots,\,I,\,I]\,\tilde H\begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_1} \\ \sim\sim \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_n} \end{bmatrix},$$

получаем, в силу равенства J_2-форм,

$$\left[\frac{I}{\bar z-\bar z_1},\ \frac{I}{\bar z-z_1},\cdots,\ \frac{I}{\bar z-\bar z_n},\ \frac{I}{\bar z-z_n}\right] H \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_1} \\ \sim\sim \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_n} \end{bmatrix}=$$

$$= \left[\frac{I}{z-\bar{z}_1}, \frac{I}{z-\bar{z}_1}, \cdots, \frac{I}{z-\bar{z}_n}, \frac{I}{z-\bar{z}_n}\right] \widetilde{H} \begin{bmatrix} \frac{I}{z-z_1} \\ \frac{I}{z-\bar{z}_1} \\ \sim \sim \\ \frac{I}{z-z_n} \\ \frac{I}{z-\bar{z}_n} \end{bmatrix},$$

из которого следует, что

$$fHg^* = f\widetilde{H}g^*,$$

т. е. $H = \widetilde{H}$, откуда $A_{2n} = \widetilde{A}_{2n}$, что и требовалось.

§ 2. Проблема Неванлинны-Пика

Постановка задачи следующая: дана последовательность точек

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n, \cdots \left(\frac{z_k - \bar{z}_k}{2i} > 0\right)$$

из открытой верхней полуплоскости и две последовательности квадратных матриц m-го порядка

$$\begin{matrix} w_1, & w_2, \cdots, & w_n, \cdots \\ \dot{w}_1, & \dot{w}_2, \cdots, & \dot{w}_n, \cdots . \end{matrix} \left(\frac{w_k - w_k^*}{2i} > 0\right)$$

из открытой верхней матричной полуплоскости; ищется неванлинновская, симметрическая матрица-функция $w(z)$, т. е. голоморфная в верхней полуплоскости матрица-функция, удовлетворяющая условиям

$$\frac{w(z) - w^*(z)}{2i} \geqslant 0,\ \operatorname{Im} z > 0$$

$$w'(z) = w(z),$$

такая, что

$$w(z_1) = w_1,\ w(z_2) = w_2, \cdots,\ w(z_n) = w_n, \cdots$$
$$\dot{w}(z_1) = \dot{w}_1,\ \dot{w}(z_2) = \dot{w}_2, \cdots,\ \dot{w}(z_n) = \dot{w}_n, \cdots .$$

2°.1. Сначала решается усеченная задача для n наборов z_k, w_k, $\dot{w}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Справедлива

Теорема 4. *Для того чтобы матрица-функция $w(z)$ была решением проблемы Неванлинны-Пика для конечного числа наборов z_k, w_k, $\dot{w}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, необходимо и достаточно, чтобы матрица-функция $w(z)$ удовлетворяла основному матричному неравенству*

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\frac{w_1-\overset{*}{w}_1}{z_1-\bar z_1} & \dot w_1 & \cdots & \frac{w_1-\overset{*}{w}_n}{z_1-\bar z_n} & \frac{w_1-w_n}{z_1-z_n} & \frac{w_1-w^*(z)}{z_1-\bar z} \\
\dot{\overset{*}{w}}_1 & \frac{\overset{*}{w}_1-w_1}{\bar z_1-z_1} & \cdots & \frac{\overset{*}{w}_1-\overset{*}{w}_n}{\bar z_1-\bar z_n} & \frac{\overset{*}{w}_1-w_n}{\bar z_1-z_n} & \frac{\overset{*}{w}_1-w^*(z)}{\bar z_1-\bar z} \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\
\frac{w_n-\overset{*}{w}_1}{z_n-\bar z_1} & \frac{w_n-w_1}{z_n-z_1} & \cdots & \frac{w_n-\overset{*}{w}_n}{z_n-\bar z_n} & \dot w_n & \frac{w_n-w^*(z)}{z_n-\bar z} \\
\frac{\overset{*}{w}_n-\overset{*}{w}_1}{\bar z_n-\bar z_1} & \frac{\overset{*}{w}_n-w_1}{\bar z_n-z_1} & \cdots & \dot{\overset{*}{w}}_n & \frac{\overset{*}{w}_n-w_n}{\bar z_n-z_n} & \frac{\overset{*}{w}_n-w^*(z)}{\bar z_n-\bar z} \\
- & - & - & - & - & - \\
\frac{w(z)-\overset{*}{w}_1}{z-\bar z_1} & \frac{w(z)-w_1}{z-z_1} & \cdots & \frac{w(z)-\overset{*}{w}_n}{z-\bar z_n} & \frac{w(z)-w_n}{z-z_n} & \frac{w(z)-w^*(z)}{z-\bar z}
\end{array}\right] =
$$

$$
= \begin{bmatrix} A_{2n} & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geqslant 0. \qquad (8)
$$

Необходимость теоремы следует из неравенства Шварца-Пика [5], записанного для точек

$$
z_1,\ \mu_1,\ z_2,\ \mu_2, \cdots,\ z_n,\ \mu_n,\ z
$$

после перехода к пределу при $\mu_k \to \bar z_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ и принципа симметрии для неванлинновских матриц-функций

$$
w^*(\bar z) = w(z).
$$

Достаточность легко усматривается из неотрицательности блок-миноров

$$
\left[\begin{array}{cc|c}
\frac{w_k-\overset{*}{w}_k}{z_k-\bar z_k} & \dot w_k & \frac{w_k-w^*(z)}{z_k-\bar z} \\
\dot{\overset{*}{w}}_k & \frac{\overset{*}{w}_k-w_k}{\bar z_k-z_k} & \frac{\overset{*}{w}_k-w^*(z)}{\bar z_k-\bar z} \\
- & - & - \\
\frac{w(z)-\overset{*}{w}_k}{z-\bar z_k} & \frac{w(z)-w_k}{z-z_k} & \frac{w(z)-w^*(z)}{z-\bar z}
\end{array}\right] \geqslant 0.
$$

Справедлива и дуальная теорема.

Будем решать ОМН (8) при условии, что $A_{2n} > 0$. Имеет место

Теорема 5. *Общее решение* $w(z)$ *неравенства* (8) *представляется в виде дробно-линейного преобразования произвольной неособенной, неванлинновской, симметрической пары* $[p(z), q(z)]$

$$
\left([p, q] \begin{bmatrix} p^* \\ q^* \end{bmatrix} > 0,\ [p, q]\, J_2 \begin{vmatrix} p^* \\ q^* \end{vmatrix} \geqslant 0,\ [p, q]\, J_2 \begin{vmatrix} p' \\ q' \end{vmatrix} = 0 \right)
$$

$$
w(z) = [p(z)\, b(z) + q(z)\, d(z)]^{-1}\, [p(z)\, a(z) + q(z)\, c(z)],
$$

матрица коэффициентов которого строится по матрице $A_{2n}>0$

$$\mathbf{A}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z)\\ c(z) & d(z)\end{bmatrix}=I+iJ_2\,[I, I,\cdots, I, I]\,H\begin{bmatrix}\dfrac{I}{z-z_1}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_1}\\ \sim\sim\\ \dfrac{I}{z-z_n}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_n}\end{bmatrix}, \tag{9}$$

где

$$H=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1^*\\ I\end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} w_1\\ I\end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{bmatrix} w_n^*\\ I\end{bmatrix} & \\ & & & & \begin{bmatrix} w_n\\ I\end{bmatrix}\end{bmatrix} A_{2n}^{-1}\begin{bmatrix}[w_1, I] & & & & \\ & [w_1^*, I] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [w_n, I] & \\ & & & & [w_n^*, I]\end{bmatrix},$$

и является элементарной симплектической матрицей-функцией полного ранга с полюсами в узлах интерполяции.

Доказательство.

1) Предположим сначала, что неванлинновская, симметрическая матрица-функция $w(z)$ удовлетворяет неравенству (8)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} & & & & & & \dfrac{w_1-w^*(z)}{z_1-\bar z}\\ & & & & & & \dfrac{w_1^*-w^*(z)}{\bar z_1-\bar z}\\ & & & A_{2n} & & & \sim\sim\sim\sim\\ & & & & & & \dfrac{w_n-w^*(z)}{z_n-\bar z}\\ & & & & & & \dfrac{w_n^*-w^*(z)}{\bar z_n-\bar z}\\ \hline \dfrac{w(z)-w_1^*}{z-\bar z_1} & \dfrac{w(z)-w_1}{z-z_1} & \ldots & \dfrac{w(z)-w_n^*}{z-\bar z_n} & \dfrac{w(z)-w_n}{z-z_n} & & \dfrac{w(z)-w^*(z)}{z-\bar z}\end{array}\right]\geqslant 0.$$

По лемме о неотрицательной блок-матрице оно эквивалентно неравенству

$$\frac{w(z)-w^*(z)}{z-\bar z}-\left[\frac{w(z)-w_1^*}{z-\bar z_1},\ \frac{w(z)-w_1}{z-z_1},\ldots,\frac{w(z)-w_n^*}{z-\bar z_n},\ \frac{w(z)-w_n}{z-z_n}\right]\times$$

$$\times A_{2n}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{w_1-w^*(z)}{z_1-\bar z}\\ \dfrac{w_1^*-w^*(z)}{\bar z_1-\bar z}\\ \sim\ \sim\ \sim\\ \dfrac{w_n-w^*(z)}{z_n-\bar z}\\ \dfrac{w_n^*-w^*(z)}{\bar z_n-\bar z}\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

т. е.

$$[w, I]\,\frac{J_2}{\dfrac{z-\bar z}{i}}\begin{bmatrix}w^*\\ I\end{bmatrix}-[w, I]\left[\frac{I}{z-\bar z_1},\ \frac{I}{z-z_1},\ldots,\frac{I}{z-\bar z_n},\ \frac{I}{z-z_n}\right]\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ -w_1^*\end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix}I\\ -w_1\end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{bmatrix}I\\ -w_n^*\end{bmatrix} & \\ & & & & \begin{bmatrix}I\\ -w_n\end{bmatrix}\end{bmatrix} A_{2n}^{-1}\begin{bmatrix}[I, -w_1] & & & & \\ & [I, w_1^*] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [I, -w_n] & \\ & & & & [I, -w_n^*]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{I}{\bar z-z_1}\\ \dfrac{I}{\bar z-\bar z_1}\\ \sim\ \sim\\ \dfrac{I}{\bar z-z_n}\\ \dfrac{I}{\bar z-\bar z_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w^*\\ I\end{bmatrix}\geqslant 0. \qquad (10)$$

Построим матрицу-функцию (9).

В силу теоремы 3 $\mathbf{A}(z)$ является элементарной симплектической матрицей-функцией полного ранга с J_2-формой

$$\frac{\mathbf{A}^*(z)\,J_2\,\mathbf{A}(z)-J_2}{\dfrac{z-\bar z}{i}}=\left[\frac{I}{\bar z-\bar z_1},\ \frac{I}{\bar z-z_1},\ldots,\frac{I}{\bar z-\bar z_n},\ \frac{I}{\bar z-z_n}\right]\times$$

$$\times H\begin{bmatrix}\dfrac{I}{z-z_1}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_1}\\ \sim\ \sim\\ \dfrac{I}{z-z_n}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_n}\end{bmatrix}.$$

Обратная матрица $A^{-1}(z)$ может быть вычислена по принципу симметрии

$$A^{-1}(z)=J_2A^*(\bar z)J_2=I-iJ_2\left[\frac{I}{z-\bar z_1},\frac{I}{z-z_1},\dots,\frac{I}{z-\bar z_n},\frac{I}{z-z_n}\right]H\begin{bmatrix}I\\ I\\ \vdots\\ I\\ I\end{bmatrix}$$

и ее J_2-форма имеет вид

$$\frac{J_2-A^{-1}(z)J_2A^{-1*}(z)}{\frac{z-\bar z}{i}}=\left[\frac{I}{z-\bar z_1},\frac{I}{z-z_1},\dots,\frac{I}{z-\bar z_n},\frac{I}{z-z_n}\right]\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ -w_1^*\end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix}I\\ -w_1\end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{bmatrix}I\\ -w_n^*\end{bmatrix} & \\ & & & & \begin{bmatrix}I\\ -w_n\end{bmatrix}\end{bmatrix}A_{2n}^{-1}\begin{bmatrix}[I,-w_1] & & & & \\ & [I,-w_1^*] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [I,-w_n] & \\ & & & & [I,-w_n^*]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{I}{\bar z-z_1}\\ \frac{I}{\bar z-\bar z_1}\\ \sim\sim\\ \frac{I}{\bar z-z_n}\\ \frac{I}{\bar z-\bar z_n}\end{bmatrix}.$$

Сравнивая последнее выражение с ядром второго члена неравенства (10), замечаем, что они равны.

Таким образом, введение матрицы $A(z)$ позволяет переписать неравенство (10) в весьма компактной форме

$$[w,I]\,\frac{A^{-1}(z)J_2A^{-1*}(z)}{\frac{z-\bar z}{i}}\begin{bmatrix}w^*\\ I\end{bmatrix}\geqslant 0. \tag{11}$$

2) Определим теперь пару матриц $[p(z),q(z)]$, полагая

$$[p(z),q(z)]=[w(z),I]\,A^{-1}(z). \tag{12}$$

Очевидно, $p(z)$, $q(z)$ голоморфны в верхней полуплоскости, а из неравенств

$$[p,q]\begin{bmatrix}p^*\\ q^*\end{bmatrix}=[w,I]\,A^{-1}(z)\,A^{-1*}(z)\begin{bmatrix}w^*\\ I\end{bmatrix}>0,$$

$$[p,q]\,J_2\begin{bmatrix}p^*\\ q^*\end{bmatrix}=[w,I]\,A^{-1}(z)\,J_2\,A^{-1*}(z)\begin{bmatrix}w^*\\ I\end{bmatrix}\geqslant 0,\ \frac{z-\bar z}{i}>0,$$

$$[p,q]\,J_2\begin{bmatrix}p'\\ q'\end{bmatrix}=[w,I]\,A^{-1}(z)\,J_2\,A^{-1'}(z)\begin{bmatrix}w'\\ I\end{bmatrix}=[w,I]\,J_2\begin{bmatrix}w'\\ I\end{bmatrix}=0$$

следует, что пара $[p(z),q(z)]$ неособенная, неванлинновская и симметрическая.

Разбив матрицу-функцию $\mathbf{A}(z)$ на блоки

$$\mathbf{A}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}$$

соответственно матрице $J_2=\begin{bmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{bmatrix}$, из (12) получим

$$[w(z), I]=[p(z), q(z)]\,\mathbf{A}(z)=[p(z), q(z)]\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}=$$

$$=[p(z)\,a(z)+q(z)c(z) \;\; p(z)\,b(z)+q(z)\,d(z)],$$

откуда

$$w(z)=[p(z)\,b(z)+q(z)\,d(z)]^{-1}\,[p(z)\,a(z)+q(z)\,c(z)]. \tag{13}$$

Первая часть теоремы доказана.

Здесь установлено, что любое решение усеченной проблемы Неванлинны-Пика представляется в виде (13), где $[p(z), q(z)]$ — некоторая неособенная, неванлинновская, симметрическая пара.

3) Обратно, пусть $[p(z), q(z)]$ — произвольная неособенная, неванлинновская, симметрическая пара голоморфных матриц-функций и пусть матрица-функция

$$\mathbf{A}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}$$

определена соотношением (9).

Рассмотрим пару

$$[u(z), v(z)]=[p(z), q(z)]\,\mathbf{A}(z).$$

Показано, что матрица-функция

$$v(z)=p(z)\,b(z)+q(z)\,d(z)$$

обратима в верхней полуплоскости.

Поэтому имеет смысл функция

$$w(z)=v^{-1}u=[pb+qd]^{-1}[pa+qc].$$

Она удовлетворяет неравенству

$$v\,[w, I]\,\mathbf{A}^{-1}(z)\,J_2\,\mathbf{A}^{-1*}(z)\begin{bmatrix} w^* \\ I \end{bmatrix}v^*=$$

$$=[u, v]\,\mathbf{A}^{-1}(z)\,J_2\,\mathbf{A}^{-1*}(z)\begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix}=[p, q]\,J_2\begin{bmatrix} p^* \\ q^* \end{bmatrix}\geqslant 0,$$

т. е.

$$[w, I]\,\mathbf{A}^{-1}(z)\,J_2\,\mathbf{A}^{-1*}(z)\begin{bmatrix} w^* \\ I \end{bmatrix}\geqslant 0,$$

эквивалентному, в силу (11), неравенству (8).

Тем самым доказано, что дробно-линейное преобразование (13) с произвольной неособенной, неванлинновской, симметрической парой $[p(z), q(z)]$ в качестве параметра является общим решением усеченной задачи Неванлинны-Пика. Справедлива и дуальная теорема.

Из теоремы 5 вытекает, что усеченная задача Неванлинны-Пика, удовлетворяющая условию $A_{2n}>0$, адекватна заданию параметризованной элементарной симплектической матрицы-функции $\mathbf{A}(z)$ (9) с полюсами в узлах интерполяции.

2°.2. Параллельно рассматривается и пошаговое решение задачи. Устанавливаются следующие факты:

1) Если

$$b_1(z)=I+iJ_2[I, I]\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1^*\\ I\end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix}w_1\\ I\end{bmatrix}\end{bmatrix}A_2^{-1}\begin{bmatrix}[w_1, I] & \\ & [w_1^*, I]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{I}{z-z_1}\\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_1}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_1(z) & b_1(z)\\ c_1(z) & d_1(z)\end{bmatrix},$$

где

$$A_2=\begin{bmatrix}\dfrac{w_1-w_1^*}{z_1-\bar{z}_1} & \dot{w}_1\\ \dot{w}_1^* & \dfrac{w_1^*-w_1}{\bar{z}_1-z_1}\end{bmatrix}>0$$

— элементарная симплектическая матрица-функция полного ранга, а $[p(z), q(z)]$ — произвольная неособенная, неванлинновская, симметрическая пара, то дробно-линейное преобразование

$$w(z)=[p(z)\,b_1(z)+q(z)\,d_1(z)]^{-1}[p(z)\,a_1(z)+q(z)\,c_1(z)]=$$
$$=b_1(z)\{[p(z), q(z)]\}$$

определяет матрицу-функцию $w(z)$, являющуюся общим видом неванлинновских, симметрических матриц-функций, удовлетворяющих условию

$$w(z_1)=w_1,\ \dot{w}(z_1)=\dot{w}_1^*.$$

2) Общий вид неванлинновских, симметрических матриц-функций, удовлетворяющих любому конечному числу первых условий

$$w(z_1)=w_1;\ w(z_2)=w_2;\cdots;\ w(z_n)=w_n;$$
$$\dot{w}(z_1)=\dot{w}_1;\ \dot{w}(z_2)=\dot{w}_2;\cdots,\dot{w}(z_n)=\dot{w}_n,$$

представим в форме суперпозиции дробно-линейных преобразований

$$w(z)=b_1(z)\{b_2(z)\{\cdots\{b_n(z)\{[p_n(z), q_n(z)]\}\}\cdots\}\},$$

где $[p_n(z), q_n(z)]$ — произвольная неособенная, неванлинновская, симметрическая пара. Матрица коэффициентов результирующего дробно-

---

* Это утверждение является частным случаем теоремы 5 при $n=1$.

линейного преобразования равна произведению элементарных симплектических множителей полного ранга

$$b_n(z)\cdot b_{n-1}(z)\cdots b_2(z)\, b_1(z) = \mathbf{A}_n(z),$$

$$b_k(z) = I + iJ_2\,[I,\, I]\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k^{(k)*} \\ I \end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix} w_k^{(k)} \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{w_k^{(k)} - w_k^{(k)*}}{z_k - \bar z_k} & \dot w_k^{(k)} \\ \dot w_k^{(k)*} & \dfrac{w_k^{(k)*} - w_k^{(k)}}{\bar z_k - z_k} \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} [w_k^{(k)},\, I] & \\ & [w_k^{(k)*},\, I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z - z_k} \\ \dfrac{I}{z - \bar z_k} \end{bmatrix},$$

где матрицы $w_k^{(k)}$ последовательно находятся по формулам

$$w_k^{(k)} = b_{k-1}^{-1}(z_k)\,\{b_{k-2}^{-1}(z_k)\,\{\cdots\{b_1^{-1}(z_k)\,\{w_k\}\}\cdots\}\},\quad \dot w_k(z_k) = \dot w_k^{(k)}$$

$$(k = 2, 3, \cdots, n),\quad w_1^{(1)} = w_1.$$

Отметим, что положительность информационных блоков $A_2, A_4, \cdots, A_{2n}$ обеспечивает неособенность матриц

$$\begin{bmatrix} \dfrac{w_k^{(k)} - w_k^{(k)*}}{z_k - \bar z_k} & \dot w_k^{(k)} \\ \dot w_k^{(k)*} & \dfrac{w_k^{(k)*} - w_k^{(k)}}{\bar z_k - z_k} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, постановке любой задачи Неванлинны-Пика, удовлетворяющей условию $A_{2n} > 0$, соответствует бесконечное произведение простейших множителей полного ранга

$$\cdots b_n(z)\, b_{n-1}(z)\cdots b_2(z)\, b_1(z),$$

n-ые частичные произведения которого

$$\mathbf{A}_n(z) = b_n(z)\, b_{n-1}(z)\cdots b_2(z)\, b_1(z)$$

являются матрицами коэффициентов дробно-линейных преобразований произвольных неособенных, неванлинновских, симметрических пар $[p_n(z), q_n(z)]$, дающих общее решение соответствующей усеченной проблемы.

Справедливо и обратное утверждение. В самом деле, зададим произвольное бесконечное произведение простейших симплектических множителей полного ранга

$$\cdots b_n(z)\cdots b_2(z)\, b_1(z),$$

$$b_k(z) = I + \frac{2i\,\tau_k a_k}{z - z_k} - \frac{2i\,\tau_k \bar a_k}{z - \bar z_k} = I + iJ_2\,[I,\, I]\times$$

$$\times\left[\begin{bmatrix} w_k^{(k)*} \\ I \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} w_k^{(k)} \\ I \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} \dfrac{w_k^{(k)}-w_k^{(k)*}}{z_k-\bar{z}_k} & \dot{w}_k^{(k)} \\ \dot{w}_k^{(k)*} & \dfrac{w_k^{(k)*}-w_k^{(k)}}{\bar{z}_k-z_k} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} [w_k^{(k)}, I] & \\ & [w_k^{(k)*}, I] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_k} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_k} \end{bmatrix}.$$

Определим две последовательности квадратных матриц m-го порядка по следующему правилу: рассмотрим k-ое частичное произведение

$$\begin{vmatrix} a_k(z) & b_k(z) \\ c_k(z) & d_k(z) \end{vmatrix} = \mathbf{A}_k(z) = b_k(z)\cdots b_2(z)\, b_1(z)$$

и дробно-линейное преобразование произвольной неособенной, неванлинновской, симметрической пары $[p(z), q(z)]$,

$$w(z) = [p(z)\, b_k(z) + q(z)\, d_k(z)]^{-1}\, [p(z)\, a_k(z) + q(z)\, c_k(z)].$$

Обозначим

$$w(z_j) = w_j \qquad\qquad (j=1, 2, \cdots, k).$$
$$\lim_{z\to z_j}\frac{w(z)-w_j}{z-z_j} = \dot{w}_j,$$

Считая далее $k=1, 2, \cdots$, получаем последовательности

$$w_1,\ w_2; \cdots,\ w_n, \cdots$$
$$\dot{w}_1,\ \dot{w}_2, \cdots;\ \dot{w}_n, \cdots.$$

Теперь формулируем проблему Неванлинны-Пика: найти неванлинновскую, симметрическую матрицу-функцию $w(z)$, удовлетворяющую условиям

$$w(z_k) = w_k;\ \dot{w}(z_k) = \dot{w}_k \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Тем самым показано, что *проблема Неванлинны-Пика со строго положительными информационными блоками A_{2n} $(n=1, 2, \cdots)$ адекватна изучению бесконечного произведения простейших множителей полного ранга.*

2'.3. Далее рассмотрим так называемые круги Вейля.

С помощью $\mathbf{A}(z)$ неравенство (9) переписывается в виде

$$[w(z), I]\,\frac{\mathbf{A}^{-1}(z)\, J_2\, \mathbf{A}^{-1*}(z)}{\dfrac{z-\bar{z}}{i}}\begin{bmatrix} w^*(z) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

или

$$[w(z), I]\begin{bmatrix} -R & S^* \\ S & -T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^*(z) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0, \qquad (14)$$

где

$$\mathbf{A}^{-1}(z)\, J_2\, \mathbf{A}^{-1*}(z) = \begin{bmatrix} -R & S^* \\ S & -T \end{bmatrix} = W$$

— матрица Вейля.

Как и в предыдущих задачах [1], [2], [3] неравенство (14) переписывается в виде $w(z) = SR^{-1} + \sqrt{SR^{-1}S^* - T}\cdot v \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}$, $vv^* < I$. С геометрической точки зрения это отношение означает, что решение усеченной проблемы Неванлинны-Пика при любом фиксированном z_0 $\left(\frac{z_0 - \bar{z}_0}{i} > 0\right)$ принадлежит матричному кругу $\mathbf{R}(z_0)$ с центром $c = SR^{-1}$ и радиусами:

левым

$$\rho_g = SR^{-1}S^* - T = \left\{\frac{z_0 - \bar{z}_0}{i}\left[\frac{I}{\bar{z}_0 - \bar{z}_1}, \frac{I}{\bar{z}_0 - z_1}, \ldots, \frac{I}{\bar{z}_0 - \bar{z}_n}, \frac{I}{\bar{z}_0 - z_n}\right] \times \right.$$

$$\left. \times A_{2n}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{I}{z_0 - z_1} \\ \frac{I}{z_0 - \bar{z}_1} \\ \sim \sim \\ \frac{I}{z_0 - z_n} \\ \frac{I}{z_0 - \bar{z}_n} \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

и правым

$$\rho_d = R^{-1} = \left\{\frac{z_0 - \bar{z}_0}{i}\left[\frac{I}{z_0 - z_1}, \frac{I}{z_0 - \bar{z}_1}, \ldots, \frac{I}{z_0 - z_n}, \frac{I}{z_0 - \bar{z}_n}\right] A_{2n}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{I}{\bar{z}_0 - z_1} \\ \frac{I}{\bar{z}_0 - \bar{z}_1} \\ \sim \sim \\ \frac{I}{\bar{z}_0 - z_n} \\ \frac{I}{\bar{z}_0 - \bar{z}_n} \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

соответственно.

Из симплектичности $\mathbf{A}(z)$ следует, что

$$\rho_g = \bar{\rho}_d.$$

Рассматривая пошаговое решение общей проблемы Неванлинны-Пика с геометрической точки зрения, мы связываем с каждой усеченной задачей круг Вейля $\mathbf{R}_n$. Поэтому нас будет интересовать поведение кругов $\mathbf{R}_n(z)$ с ростом n. Имеют место следующие утверждения: центры $c = S_n R_n^{-1}$ стремятся к конечному пределу; радиусы ρ_g и ρ_d монотонно убывают; каждый круг Вейля вложен в предыдущий.

В силу основной теоремы С. А. Орлова [6], ранги левого и правого радиусов предельного круга не зависят от выбора $z \neq z_k$.

Для вполне неопределенной проблемы Неванлинны-Пика (оба радиуса имеют неособенные пределы) справедлива теорема, являющаяся обобщением известного критерия Данжуа. Здесь используется разложение элементарных множителей на произведение двучленных множителей [4].

$$b_k(z) = I + \frac{2i\tau_k a_k}{z - z_k} - \frac{2i\tau_k \bar{a}_k}{z - \bar{z}_k} = b_{k1}(z)\, b_{k2}(z) =$$

$$= \left(I + \frac{2i\tau_k}{z - z_k} P_{k1}\right)\left(I - \frac{2i\tau_k}{z - \bar{z}_k} P_{k2}\right),$$

где

$$P_{k1}^2 = P_{k1};\ P_{k1} J_2 \geqslant 0;\ P_{k2}^2 = P_{k2};\ P_{k2} J_2 \leqslant 0.$$

Для удобства записи перейдем в единичный круг и будем считать; что двучленные множители нормированы к модулю в т. $\zeta = 0$. Тогда

$$b_k(\zeta) = \left\{I - \left(\frac{1 - \bar{\zeta}_k \zeta}{\zeta_k - \zeta} \cdot \frac{\zeta_k}{|\zeta_k|}\right) P_{k1}\right\}\left\{I - \left(1 - \frac{\zeta_k - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_k \zeta} \cdot \frac{|\zeta_k|}{\zeta_k}\right) P_{k2}\right\}$$

и имеет место

Теорема 6. (*критерий Данжуа*). *Для того чтобы проблема Неванлинны-Пика была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{(1 - |\zeta_k|)\, P_{k1} + \left(1 - \frac{1}{|\zeta_k|}\right) P_{k2}\right\} \quad (|\zeta_k| < 1).$$

Одесский электротехнический институт
связи им. А. С. Попова,

Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Поступила 20.IV.1976

Ի. Վ. ԿՈՎԱԼԻՇԻՆԱ, Գ. Մ. ՉՈՒԲԿՈՎԱ-ՎԻԴՈՎԱ. Նևանլիննա-Պիկի պրոբլեմը վերին կիսահարթությունում Նևանլիննյան. սիմետրիկ մատրից-ֆունկցիաների համար (*ամփոփում*)

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է Նևանլիննա-Պիկի խնդիրը $w(z)$ m-րդ կարգի Նևանլիննյան մատրից-ֆունկցիաների համար

$$\frac{w(z) - w^*(z)}{z - \bar{z}} \geqslant 0,$$

որոնք բավարարում են լրացուցիչ սիմետրիկության պայմանի

$$w'(z) = w(z).$$

Խնդիրը լուծվում է անալիտիկ J-ձգվող մատրից-ֆունկցիաների տեսության մեթոդներով։

I. V. KOVALISHINA. G. M. CHUBKOVA-VIDOVA. *Nevanlinne-Peak problem for nevanlinne's symmetric matrix-functions in the upper halfplane* (summary)

This article deals with Nevanlinne-Peak problem for nevanlinna matrix-functions $w(z)$ of m-th order $\left(\frac{w(z) - w^{*}(z)}{z - \bar{z}} > 0\right)$, satisfying an additional symmetry condition $w'(z) = w(z)$.

This problem is solved by the methods of the theory of analitic J-stretching matrix-function.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика, ДАН Арм.ССР, LIX, № 1, 1974.
2. *И. В. Ковалишина.* J-растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори, ДАН Арм.ССР, LIX, № 3, 1974.
3. *И. В. Ковалишина.* J-растягивающие матрицы-функции и классическая проблема моментов, ДАН Арм.ССР, LX, № 1, 1975.
4. *В. П. Потапов.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Труды ММО, том 4, 1955.
5. *В. П. Потапов.* Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций, ДАН Арм.ССР, XIVIII, № 5, 1969.
6. *А. В. Ефимов, В. П. Потапов.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей, УМН, XXVIII, вып. 1 (169), 1973.
7. *И. В. Ковалишина.* Аддитивное разложение произвольной реактивной матрицы-функции, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика", VI, № 1, 1971.
8. *С. А. Орлов.* О сходимости и характере расходимости монотонных семейств аналитических J-сжимающих матриц-функций, ДАН Арм.ССР, LIX, № 4, 1974.
9. *Г. М. Чубкова-Видова.* Об элементарных множителях J-несжимающих, симплектических матриц-функций в верхней полуплоскости, журн. „Молодой научный работник", (ЕГУ), 2 (22), 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա - XIII, № 1, 1978 Математика

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

1°. В журнале „Математика" была опубликована статья [1], содержащая непосредственное обобщение одного из основных результатов более ранней нашей работы [2].

В заметке [3], представленной к печати несколько позже и вышедшей почти одновременно с [1], также был обобщен один результат работы [2].

В конце работы [1] было помещено примечание при корректуре, где, в частности, утверждалось: „это обобщение (т. е. заметка [3]) не содержит, однако, результатов работы [1]".

Это утверждение неверно, так как, — как выяснилось впоследствии, — из общей формулы заметки [3] в принципе можно получить соответствующий результат работы [1].

2°. В формулировке надлежащих условий, обеспечивающих справедливость основной формулы (3.18)—(3.19) нашей работы [1], имеется упущение.

Ситуация такова:

а) Если параметры $\{\rho_j\}_0^n$ и $\{\mu_j\}_0^n$ связаны соотношением

$$\mu_j = \rho_j^{-1} \quad (0 \leqslant j \leqslant n),$$

то, как формулировка теоремы в [1], так и вывод формулы (3.18)—(3.19) не нуждаются в коррективах.

б) Если же

$$\mu_j - \rho_j^{-1} > 0 \quad (0 \leqslant j \leqslant n),$$

то в формулировке теоремы на разлагаемую функцию $f(x)$ из класса $C_{n+1}\{[0, l), <\lambda_j>, <\rho_j>, <\mu_j>\}$ нужно налагать дополнительные условия

$$D^{(\mu_j - \rho_j^{-1} - k)} \Delta^{(j)} f(0) = 0, \tag{*}$$

где

$$p_j - 1 < \mu_j - \rho_j^{-1} \leqslant p_j \ (p_j \geqslant 1 - \text{целое})$$
$$(1 \leqslant k \leqslant p_j, \ 0 \leqslant j \leqslant n).$$

Отметим также, что, как и в случае а), если при данном j $(0 \leqslant j \leqslant n)$ мы имеем $\mu_j = \rho_j^{-1}$, то для этого индекса условия (*) просто снимаются.

Указанное упущение тем более досадно, что доказательство наших формул (3.18)—(3.19) остается тем же, если только воспользоваться давно известной нам формулой

$$D^{\alpha} D^{-\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{p} \{D^{\alpha-k} f(0)\} \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

где $p \geqslant 1$ — любое целое число и $0 \leqslant p-1 < \alpha \leqslant p$ (см. [4], стр. 570).

В заключение отметим, что на отсутствие неких дополнительных условий в формулировке теоремы работы [1] обратил внимание Г. В. Бадалян в своем письме в редакцию.

Настоящим мы в явной форме корректируем свой результат.

М. Джрбашян, Б. Саакян

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян, Б. А. Саакян.* Общие классы формул типа Тейлора-Маклорена, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", XII, № 1, 1977, 66—83.
2. *М. М. Джрбашян, Б. А. Саакян.* Классы формул и разложения типа Тейлора-Маклорена, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН СССР, Сер. математическая, 39, № 1, 1975, 69—122.
3. *Г. В. Бадалян.* К вопросу обобщений формулы Тейлора, ДАН СССР, 232, № 2, 1977, 265—268.
4. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука", 1966, 1—675.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS