

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Դիտավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

Ա. Ա. ԲԱԼԱԼՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ա. Բ. ՆՆՐՍԵՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տույս, ական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ, հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները չրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի հաճախ նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի խակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրառվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, ուրտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika“ are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika“
Academy of Sciences of Armenia,
24, Berekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

С. О. СИНАНЫН

О КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ, ПОРОЖДЕННОЙ МЕТРИКОЙ ПРОСТРАНСТВА L^p

§ 2. Введение

Пусть E — нигде не плотный компакт на комплексной плоскости, $C(E)$ — пространство непрерывных на E функций с равномерной метрикой, $R(E)$ — подпространство, порожденное аналитическими на E функциями (или, что то же самое, рациональными функциями, полюса которых лежат вне E). А. Г. Витушкином было получено необходимое и достаточное условие на E для того, чтобы $R(E) = C(E)$ ([1]).

Когда $R(E) \neq C(E)$ естественно ожидать, что некоторые свойства аналитических функций (при дополнительных ограничениях на множество E) могут передаваться функциям из $R(E)$.

Здесь рассматривается свойство единственности аналитических функций: из обращения в нуль на некоторой (произвольной) порции множества E функции $f \in R(E)$ следует равенство нулю такой функции на E . Чтобы $R(E)$ оказалось носителем свойства единственности, E должно быть в некотором смысле достаточно „массивным“ множеством (для компенсации отсутствия внутренних точек).

Существование такого примера следует из работ М. В. Келдыша. По предложению С. Н. Мергеляна аналогичный (более сильный) пример был построен в интегральной метрике ([3]). В некотором смысле точный пример был построен А. А. Гончаром ([2]).

Через $L_p(E)$, $p \geq 1$, обозначим банахово пространство заданных на E измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой:

$$\left\{ \int_E |f(z)|^p dm(z) \right\}^{1/p},$$

где m — плоская мера Лебега.

$R_p(E)$ — подпространство, полученное при замыкании множества аналитических на E функций (или, что то же самое, рациональных функций, полюса которых лежат вне E). При $1 \leq p < 2$ всегда $R_p(E) = L_p(E)$ ([3]).

В работах [4], [2] имеется описание нигде не плотных компактов E , для которых $R_p(E) = L_p(E)$, $p \geq 2$. Если $R_p(E) \neq L_p(E)$, $p \geq 2$, то свойство единственности аналитических функций (при дополнительных ограничениях на множество E) может быть „унаследовано“ функциями из $R_p(E)$, $p \geq 2$ ([3]). Отсюда как следствие получается, что функции из $R(E)$ также обладают свойством единственности. Для $R_p(E)$, $p \geq 2$, Бреннан получил более сильный результат ([5]).

Таким образом, указанное свойство единственности непосредственно не привязано к свойству непрерывности функций и к равномерной метрике.

В работе рассматривается более общая метрика, которая в состоянии сохранить свойство единственности аналитических функций.

Пусть $\psi(z) > 0$ почти всюду на E , $\psi \in L_1(E)$. Через $L^p(\psi)$, $p \geq 1$, обозначим банахово пространство заданных на E измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой:

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(z)|^p \cdot \psi(z) dm(z) \right)^{1/p},$$

$R^p(\psi)$ — подпространство, полученное замыканием множества аналитических на E функций (или, что то же самое, рациональных функций, полюса которых лежат вне E). Будет доказано, что при естественном ограничении на функцию ψ , метрика этого пространства в состоянии передать свойство единственности.

§ 2. Построение множества единственности

Пусть функция $\psi_1 > 0$ почти всюду на единичном квадрате $\Delta = \{z: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1; 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$. Кроме этого $\psi_1 \in L_1(\Delta)$ и

$$\int_{\Delta} \log \psi_1(z) dm(z) > -\infty. \quad (1)$$

Теорема. *Существует такое нигде не плотное компактное множество E , $E \subset \Delta$, что функции из $R^2(\psi)$, где ψ — сужение функции ψ_1 на E , обладают свойством единственности аналитических функций: из обращения в нуль произвольной функции $f \in R^2(\psi)$ на некоторой порции множества E следует, что $f = 0$.*

1°. Построение множества E . Рассмотрим последовательность нечетных натуральных чисел: $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. В дальнейшем на эту последовательность будет наложен ряд ограничений. Положим $N_k = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Разделим квадрат Δ параллельными к сторонам прямыми на n_1^2 равных квадратов (первого ранга). Обозначим полученный центральный открытый квадрат через $\Delta_1^{(1)}$, а остальные квадраты через $\delta_i^{(1)}$, $1 \leq i < N_1^2$. Каждый из квадратов $\delta_i^{(1)}$ в свою очередь разделим параллельными к сторонам прямыми на n_2^2 равных квадратов (второго ранга). Центральный в $\delta_i^{(1)}$ открытый квадрат обозначим через $\Delta_i^{(2)}$, а все остальные квадраты (второго ранга) — через $\delta_j^{(2)}$, $1 \leq j < N_2^2$. Пусть квадраты k -го ранга $\delta_p^{(k)}$, $\Delta_j^{(k)}$; $1 \leq p < N_k^2$, $1 \leq j < N_{k-1}^2$, уже построены. Разделим каждый из квадратов $\delta_p^{(k)}$, $1 \leq p < N_k^2$, параллельными к сторонам прямыми на n_{k+1}^2 равных квадратов. Полученный в $\delta_p^{(k)}$ центральный открытый квадрат обозначим через $\Delta_p^{(k+1)}$, а остальные квадраты $((k+1)$ -го ранга) — через $\delta_j^{(k+1)}$, $1 \leq j < N_{k+1}^2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность открытых квадратов $\{\Delta_i^{(k)}\}$. Определим

$$E = \Delta \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_l \Delta_l^{(k)} \right). \quad (2)$$

2°. Пусть $f \in R^2(\psi)$, а $\{R_\varepsilon(z)\}$ — последовательность рациональных функций, полюса которых лежат вне E и удовлетворяют условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_E |f(z) - R_\varepsilon(z)|^2 \cdot \psi(z) dm(z) = 0. \quad (3)$$

$R(z)$ можно представить в виде

$$R(z) = R_\varepsilon(z) = P(z) + \sum_{k=j}^M \sum_l R_{k,l}(z),$$

где $R_{k,l}(z)$ — сумма простейших рациональных дробей с единственным полюсом в центре квадрата $\Delta_l^{(k)}$, $P(z)$ — многочлен. Можно считать, что

$$\frac{B}{4} < \int_E |R_\varepsilon(z)|^2 \cdot \psi(z) dm(z) < B,$$

где

$$B = 2 \cdot \int_E |f(z)|^2 \cdot \psi(z) dm(z).$$

Предполагается, что функция f равна нулю на некоторой порции множества E . Нужно доказать (при некоторых ограничениях на последовательность $\{n_k\}$), что $f = 0$.

Основная схема доказательства состоит в следующем: сумма простейших дробей высших рангов мала за исключением множества малой площади. Остальная часть рациональной функции $R_\varepsilon(z)$ близка к нашей функции и аналитична на конечносвязной области. Коридоры этой области достаточно широки (в сравнении с кривой, соединяющей две произвольные точки области), поэтому малость функции на части области передается на всю область.

§ 3. Основные леммы

3°. Дальнейшие оценки основаны на следующих двух леммах. Эти леммы получаются с помощью классической теоремы Сегё.

Теорема Сегё. Пусть $d\theta$ — линейная мера Лебега на единичной окружности $|z| = 1$ и $h \in L^1(d\theta)$, $h \geq 0$. Через A_0 обозначим множество аналитических на единичном круге функций, которые обращаются в нуль в начале координат. Тогда расстояние от единичной функции до A_0 задается формулой

$$\inf_{f \in A_0} \frac{1}{2\pi} \int |1 - f|^p \cdot h d\theta = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int \log h d\theta \right\}.$$

Обозначим через $K(\zeta, r)$ круг $\{z: |z - \zeta| < r\}$.

Лемма 1. Пусть ψ — почти всюду положительная на кольце $\sigma = \{z: R_0 < |z| < R\}$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\psi \in L_1(\sigma); \quad \int_{\sigma} \log \psi(z) dm(z) > -\infty.$$

Тогда для произвольной аналитической в круге функции, обращающейся в нуль в некоторой точке круга $K(0, R_0)$, имеет место неравенство

$$\int_{\sigma} |1 - f|^p \psi dm \geq \frac{1}{C}, \quad \text{где } 0 < p < \infty, \quad (4)$$

$$\frac{1}{C} = \pi \int_{R_0}^R (r - R_0) \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\pi(r - R_0)} \cdot \int_{|z|=r} |\log \psi(z)| \cdot |dz| \right\} dr.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{\sigma} |1 - f|^p \psi dm = \int_{R_0}^R dr \int_{|z|=r} |1 - f(z)|^p \cdot \psi(z) |dz|.$$

Функция $w = \frac{r \cdot (z - \zeta)}{r^2 - \bar{\zeta} \cdot z}$ конформно отображает круг $K(0, r)$ в единичный круг $K(0, 1)$ так, что точка $z = \zeta$ переходит в $w = 0$. Обратным будет отображение $z = \frac{r(rw + \zeta)}{r + \bar{\zeta} \cdot w}$. Для производных

$$\frac{dz}{dw} = \frac{r \cdot (r^2 - |\zeta|^2)}{(r + w\bar{\zeta})^2}, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{r(r^2 - |\zeta|^2)}{r^2 - \bar{\zeta} \cdot z}$$

имеем оценки

$$\left| \frac{dz}{dw} \right| > \frac{r - R_0}{2} \quad \text{при } |w| = 1,$$

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| < \frac{2}{r - R_0} \quad \text{при } |z| = r.$$

Благодаря этим оценкам и теореме Сегё, имеем

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} |1 - f(z)|^p \cdot \psi(z) |dz| &= \int_{|w|=1} |1 - \tilde{f}(w)|^p \cdot \psi \left(\frac{r(rw + \zeta)}{r + \bar{\zeta} \cdot w} \right) \cdot \left| \frac{dz}{dw} \right| \cdot |dw| > \\ &> \frac{r - R_0}{2} \cdot \int_0^{2\pi} |1 - \tilde{f}(e^{i\theta})|^p \cdot \psi \left(\frac{r(re^{i\theta} + \zeta)}{r + \bar{\zeta} \cdot e^{i\theta}} \right) d\theta \geq \\ &\geq \pi(r - R_0) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \psi \left(\frac{r(re^{i\theta} + \zeta)}{r + \bar{\zeta} \cdot e^{i\theta}} \right) d\theta \right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log \psi d\theta &= \int_{|w|=1} \log \psi \left(\frac{r(w + \zeta)}{r + \bar{\zeta} \cdot w} \right) |dw| = \\ &= \int_{|z|=r} \log \psi(z) \cdot \left| \frac{dw}{dz} \right| \cdot |dz| \geq - \int_{|z|=r} |\log \psi(z)| \cdot \left| \frac{dw}{dz} \right| \cdot |dz| \geq \\ &\geq - \frac{2}{r - R_0} \cdot \int_{|z|=r} |\log \psi(z)| \cdot |dz|, \end{aligned}$$

то получается утверждение леммы.

Лемма 2. Для произвольной аналитической в круге $K(0, R)$ функции имеет место неравенство

$$|f(\zeta)|^p < C \cdot \int_{\sigma} |f(z)|^p \cdot \psi(z) dm(z), \quad |\zeta| \leq R_0. \quad (5)$$

Для доказательства достаточно применить лемму 1 к функции $1 - \frac{f(z)}{f(\zeta)}$.

§ 4. Дальнейшие оценки

4°. Пусть $M = M(\varepsilon)$ — номер наивысшего ранга квадратов $\Delta_l^{(k)}$, содержащих полюса функции $R_\varepsilon(z)$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует такое число $M_1 = M_1(\varepsilon) > M$, что

$$\int_{D_{M_1+1}} |R_\varepsilon(z)|^2 \psi(z) dm(z) < B,$$

где

$$D_m = \Delta \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} \bigcup_l \Delta_l^{(k)} \right).$$

Через $a_{l,k}$ обозначим центр квадрата $\Delta_l^{(k)}$, через $\sigma_{l,k}$ — кольцо, вписанное в $\delta_l^{(k-1)} \setminus \Delta_l^{(k)}$ (с центром в точке $a_{l,k}$) и радиусами

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot N_k}}, \frac{1}{\sqrt{2 \cdot N_{k-1}}}.$$

Применим лемму 2 к кольцу σ_{l, M_1} , $R = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot N_{M_1-1}}}$, $R_0 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot N_{M_1}}}$.

Получим

$$|R_\varepsilon(\zeta)|^2 < C_{l, M_1} \cdot \int_{\sigma_{l, M_1}} |R_\varepsilon(z)|^2 \psi(z) dm(z),$$

где

$$\frac{1}{C_{l, M_1}} = \pi \int_{R_0}^R (r - R_0) \cdot \exp \left\{ - \frac{1}{\pi (r - R_0)} \cdot \int_{|z - a_{l, M_1}|=r} |\log \psi(z)| \cdot |dz| \right\} dr.$$

Из последней оценки следует, что после выбора N_{M-1} число N_M можно выбрать настолько большим, чтобы

$$\int_{U_{\Delta_i^{(M)}}} |R_\varepsilon|^2 \psi dm < \frac{B}{M_1^2}.$$

Тогда

$$\int_{D_{M_1}} |R_\varepsilon|^2 \psi dm < \left(1 + \frac{1}{M_1^2}\right) \cdot B.$$

Многократно повторяя это рассуждение, получим

$$\int_{D_{M+1}} |R_\varepsilon|^2 \psi dm < \prod_{k=M+1}^{M_1-1} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \cdot B.$$

Откуда

$$\int_{D_{M+1}} |R_\varepsilon|^2 \psi dm < 3 \cdot B. \quad (6)$$

5°. Для наглядности будем пользоваться чертежами 1 и 2.

Правую нижнюю вершину квадрата $\delta_i^{(M-1)}$ обозначим через $z_{i, M-1}$ и рассмотрим кольцо $\sigma_i^{(M-1)}$ с центром в этой точке, которое внешним образом касается четырех квадратов $\Delta_j^{(M)}$ (M -го ранга) и не содержит подобные квадраты (чертеж 1). Ширина кольца берется равной $\frac{S_M}{MN_M}$, где $\frac{S_M}{M}$ — целое число, $\left(\frac{S_M}{M \cdot N_M} \gg \frac{1}{N_M}\right)$. Концентрические квадраты $\tilde{\Delta}_i^{(M-1)}$, $\tilde{\Delta}_i^{(M-2)}$ со сторонами $\frac{S_M}{N_M}$, $\frac{S'_M}{N_M}$, соответственно, и S_M выбираются такими, чтобы имело место расположение, указанное на чертеже 2.

$$\Delta_i^{(M)} \subset \tilde{\Delta}_i^{(M-1)} \subset \tilde{\Delta}_i^{(M-2)} \subset \delta_i^{(M-1)}, \quad 1 \leq i < N_{M-1}^2,$$

$$\frac{S_M}{N_M} \ll \frac{1}{N_{M-1}}, \quad S'_M \gg S_M.$$

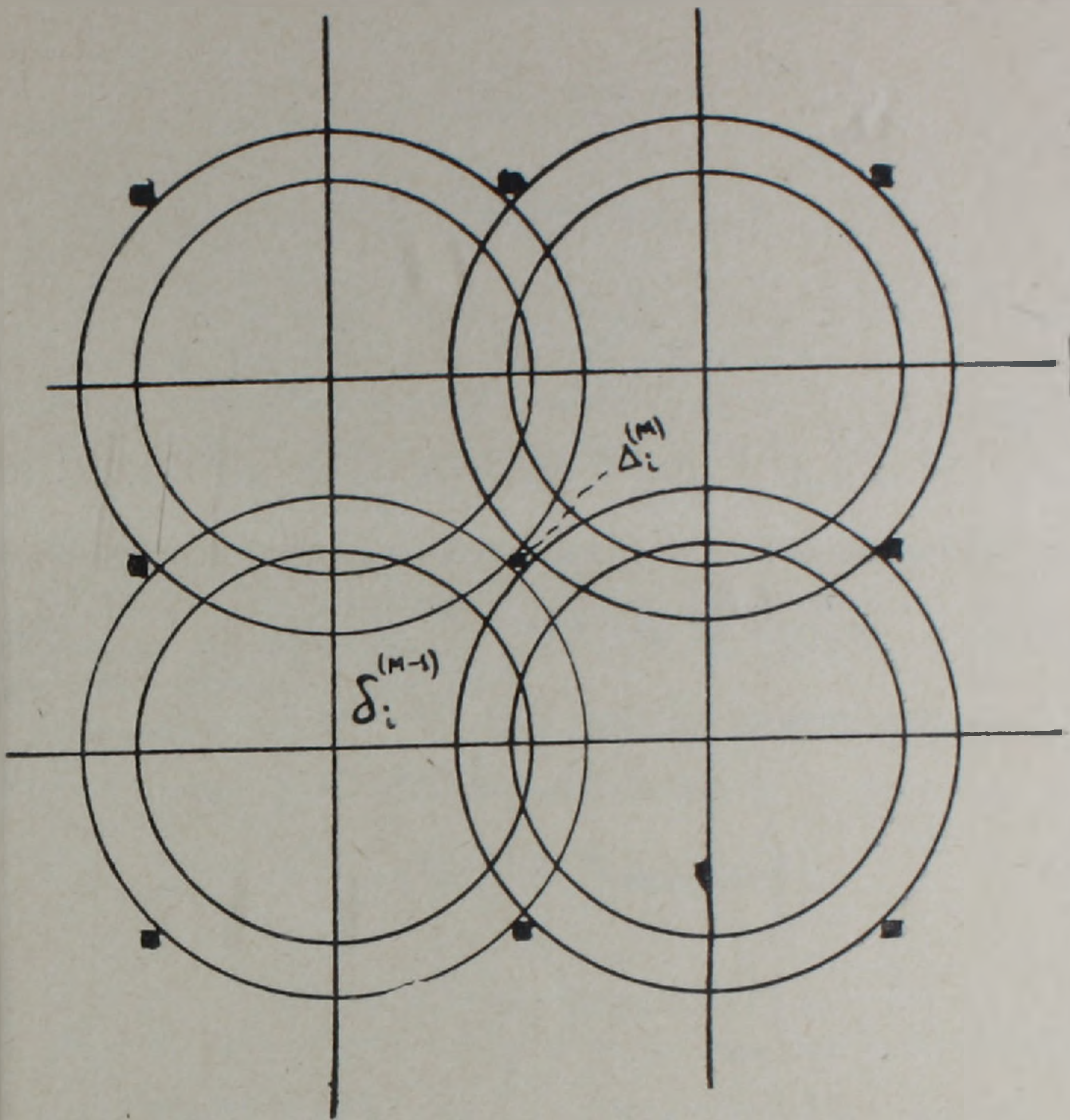
Согласно лемме 2 для ζ , принадлежащей кругу, окруженному кольцом $\sigma_i^{(M-1)}$, имеем

$$|R_\varepsilon(\zeta)|^2 < C_i^{(M-1)} \cdot \int_{\sigma_i^{(M-1)}} |R_\varepsilon|^2 \psi dm < C_{M-1} \cdot B,$$

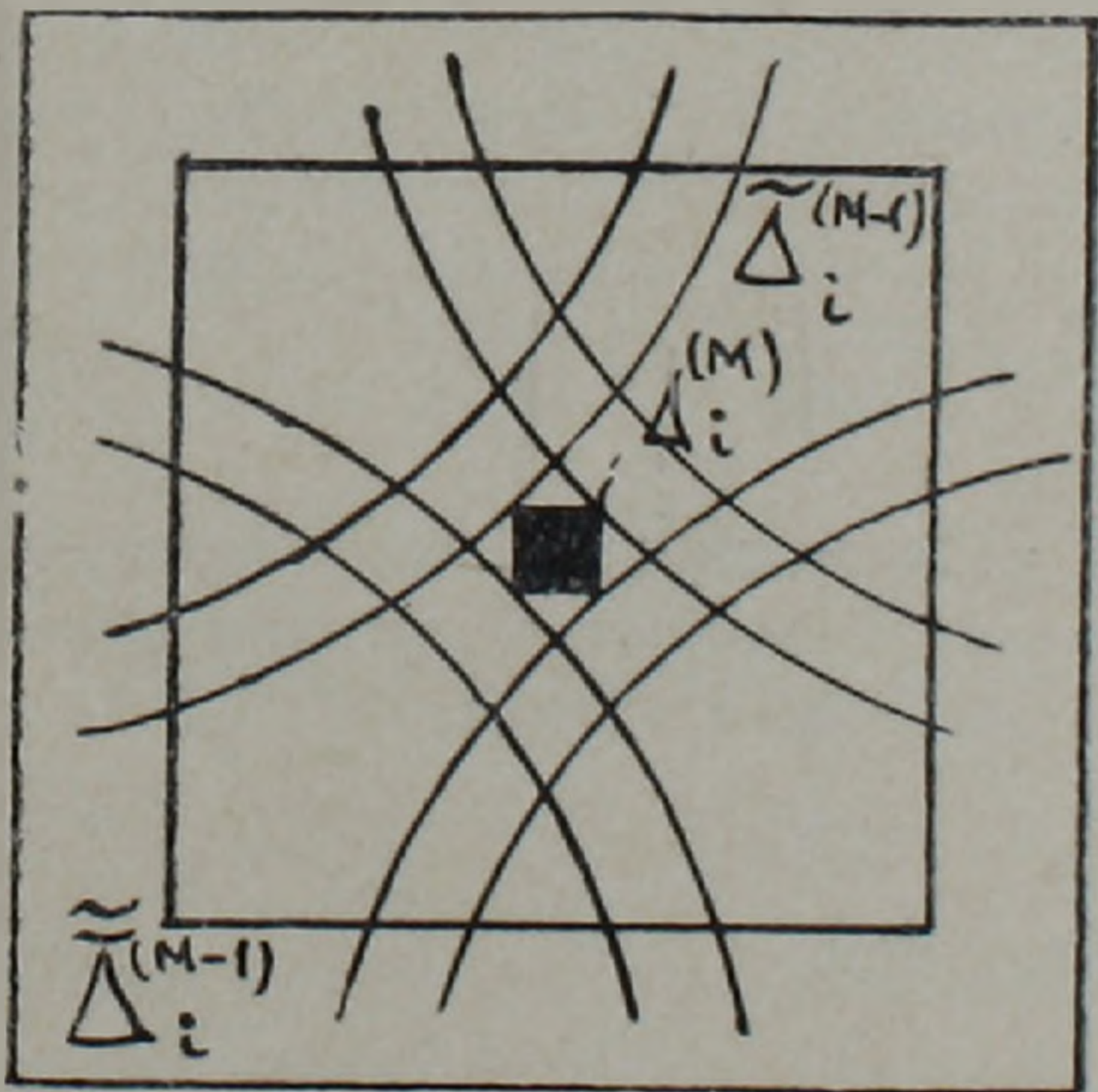
где $C_{M-1} = 3 \cdot \sup_i C_i^{(M-1)}$ определяется числами N_{M-1} и S_M . Можно

считать, что $\zeta \in \Delta \setminus \bigcup_j \tilde{\Delta}_j^{(M)}$. Из формулы

$$R_{M,i}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{\Delta}_i^{(M)}} \frac{(R(t))}{t-z} dt$$



Чертеж 1.



$$\Delta_i^{(M)} \subset \tilde{\Delta}_i^{(M-1)} \subset \tilde{\tilde{\Delta}}_i^{(M-1)} \subset \delta_i^{(M-1)}$$

Чертеж 2.

для

$$z \in \Delta \setminus \bigcup_j \tilde{\Delta}_j^{(M)}$$

имеем

$$\begin{aligned} |R_{M, i}(z)| &< \frac{C_{M-1} \cdot \sqrt{B}}{2\pi} \cdot \int_{\tilde{\Delta}_i^{(M)}} \frac{|dt|}{|t-z|} < \\ &< C_{M-1} \sqrt{B} \frac{4 S_M}{N_M} \bigg/ \frac{2\pi \cdot S'_M}{N_M} = \frac{2 C_{M-1} \cdot S_M}{\pi \cdot S'_M} \cdot \sqrt{B}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\sum_i |R_{M, i}(z)| < \frac{2 C_{M-1} S_M}{\pi \cdot S'_M} \cdot N_{M-1}^2 \sqrt{B}, \quad z \in \Delta \setminus \bigcup_j \tilde{\Delta}_j^{(M)}. \quad (7)$$

6°. Обозначим

$$\Phi_m(z) = \Phi_m^{(\epsilon)}(z) = R(z) - \sum_{k=m}^M \sum_l R_{k, l}(z). \quad (8)$$

Согласно неравенству Коши и (6), (7) имеем

$$\begin{aligned} (E_M = D_{M+1} \setminus \bigcup_l \tilde{\Delta}_l^{(M)}), \\ \left\{ \int_{E_M} |\Phi_M|^2 \psi \, dm \right\}^{1/2} &< \left\{ \int_{E_M} |R|^2 \psi \, dm \right\}^{1/2} + \\ &+ \left\{ \int_{E_M} \left| \sum_l R_{M, l}(z) \right|^2 \psi \, dm \right\}^{1/2} < \sqrt{3B} + \\ &+ N_{M-1}^2 \frac{2 C_{M-1} S_M}{\pi \cdot S'_M} \sqrt{B} = \left(1 + N_{M-1}^2 \cdot \frac{2 C_{M-1} \cdot S_M}{\pi \sqrt{3} \cdot S'_M} \right) \sqrt{3B}. \end{aligned}$$

Так как Φ_M аналитична на множестве $\bigcup_l \tilde{\Delta}_l^{(M)}$, то опять согласно лемме 2 и благодаря тому, что площадь этого множества можно сделать достаточно маленькой (за счет выбора N_M), можно добиться выполнения неравенства

$$\int_{D_M} |\Phi_M|^2 \psi \, dm < \left(1 + N_{M-1}^2 \frac{C_{M-1} \cdot S_M}{S'_M} \right)^2 \cdot 3B. \quad (9)$$

Теперь Φ_M находится в такой же ситуации, что R_ϵ , только номер ранга на единицу меньше. Поэтому многократно повторяя аналогичные рассуждения, мы придем к следующим леммам.

Лемма 3.

$$\int_{D_M} |\Phi_M|^2 \psi \, dm < A \cdot B, \quad (10)$$

где

$$A = 3 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + N_{k-1}^2 \cdot \frac{C_{k-1} \cdot S_k}{S'_k} \right).$$

Лемма 4. Для $z \in \Delta \setminus \left(\bigcup_{k=m}^M \bigcup_i \tilde{\Delta}_i^{(M)} \right)$ имеем

$$\sum_{k=m}^M \sum_i |R_{k,i}(z)| < \frac{2C_{m-1} \cdot S_m}{S'_m} \cdot N_{m-1}^2 \sqrt{B}. \quad (11)$$

(Конечно, предполагается, что последовательности

$$\left\{ \frac{S'_m}{N_m} \right\} \text{ и } \left\{ \frac{C_{m-1} \cdot S_m}{S'_m} \cdot N_{m-1}^2 \right\}$$

достаточно быстро стремятся к нулю).

7°. Пусть $\delta_{i_0}^{(k_0)}$ — наибольший квадрат среди квадратов $\{\delta_i^{(k)}\}$ (с наименьшим верхним индексом), для которого на множестве $\delta_0 = E \cap \delta_{i_0}^{(k_0)}$ предельная функция f равна нулю.

Применим леммы 3 и 4, взяв вместо Δ квадрат $\delta_{i_0}^{(k_0)}$, а вместо B — число $\alpha(\varepsilon) = \int_{\delta_{i_0}^{(k_0)}} |R_\varepsilon|^2 \psi dm$. Тогда будем иметь:

а) сумма

$$\sum_{k=k_0}^M \sum_i |R_{k,i}(z)|,$$

где $\Delta_i^{(k)} \subset \delta_{i_0}^{(k_0)}$, равномерно вне $\delta_{i_0}^{(k_0)}$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ (лемма 4);
б)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta_{i_0}^{(k_0)}} |\Phi_{\varepsilon}^{(\varepsilon)}|^2 \psi dm = 0 \quad (\text{лемма 3}).$$

Поэтому с самого начала можно считать, что рациональные функции R_ε не имеют полюсов на квадрате $\delta_{i_0}^{(k_0)}$.

8°. Через $\Delta_{l,m}^{(k)}$ обозначим концентрический с $\Delta_l^{(k)}$ квадрат, длина стороны которого больше стороны последнего на величину $\frac{2S'_{m-1}}{N_{m-1}}$, $k \leq m-1$. Δ_m концентричный с Δ квадрат со стороной дли-

$$\text{ны } 1 - \frac{2S'_{m-1}}{N_{m-1}}.$$

Введем в рассмотрение область

$$D_m^* = \Delta_m \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} \bigcup_i \Delta_{l,m}^{(k)} \right),$$

где знак (*) означает, что сумма распространяется по тем индексам, для которых квадраты $\Delta_l^{(k)}$ находятся во внешности $\delta_{i_0}^{(k_0)}$. K_0 — концентриче-

ский с $\delta_{l_0}^{(k_0)}$ круг радиуса $r_0 = \frac{1}{8 N_{k_0-1}}$ и с центром z_0 . Основной областью в нашем рассмотрении будет

$$\bar{D}_m = D_m^* \setminus K_0. \quad (12)$$

Рассмотрим гармоническую в этой области функцию ω_m , которая удовлетворяет граничному условию

$$\omega_m(z) = \begin{cases} 1 & \text{для } z \in \partial K_0, \\ 0 & \text{для } z \in \partial D_m^*. \end{cases} \quad (13)$$

Согласно лемме 3 и предположению, что рациональные функции R_i не имеют полюсов на $\delta_{l_i}^{(k_0)}$, имеем

$$\int_{D_m \cup \delta_{l_0}^{(k_0)}} |\Phi_m|^2 \psi dm < 2A \cdot B.$$

С помощью леммы 2 теперь нетрудно получить оценку

$$|\Phi_m(z)| < A_m \cdot \sqrt{B}, \quad z \in D_m^*, \quad (14)$$

где постоянная A_m зависит только от S_{m-1}' и N_{m-1} .

Опять с помощью лемм 2, 4 будем иметь

$$|\Phi_m^{(\varepsilon)}(z)| < C_0 \cdot \left\{ \alpha(\varepsilon) + \frac{2 C_{m-1} \cdot S_m}{S_m'} \cdot N_{m-1}^2 \sqrt{B} \right\}, \quad z \in K_0.$$

Поэтому для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$|\Phi_m^{(\varepsilon)}(z)| < B_m \cdot \frac{S_m}{S_m'}, \quad z \in K_0, \quad (15)$$

где

$$B_m = 3 C_0 \cdot C_{m-1} \cdot N_{m-1}^2 \sqrt{B}.$$

Согласно принципу максимума для субгармонических функций (для области $\bar{D}_m$) имеем

$$\log |\Phi_m^{(\varepsilon)}(z)| < (1 - \omega_m(z)) \cdot \log(A_m \sqrt{B}) + \omega_m(z) \cdot \log\left(B_m \cdot \frac{S_m}{S_m'}\right), \quad (16)$$

где $z \in \bar{D}_m$.

9°. Займемся оценкой гармонической функции ω_m . Существенным является то обстоятельство, что ширина коридоров области $\bar{D}_m$ больше, чем $\frac{1}{2 N_{m-2}}$.

Через F_m обозначим подмножество тех точек $\bar{D}_m$, расстояние которых до границы этой области не менее, чем $\frac{S_{m-1}'}{N_{m-1}}$. (Нетрудно проверить, что $m(E \setminus F_m) \rightarrow 0$, $m(F_m \setminus E) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$).

Пусть $\zeta \in F_m$. Выберем такие круги

$$K_1(z_1, r), K_2(z_2, r), \dots, K_p(z_p, r),$$

где

$$r = \frac{1}{4N_{m-2}},$$

что

$$|z_k - z_{k+1}| = \frac{r}{2}, \quad 1 \leq k \leq p, \quad |z_0 - z_1| = \frac{3}{2}r_0, \quad \zeta \in K_p.$$

Точка ζ удалена от границы круга K_p на расстояние, не менее, чем

$$\frac{S'_{m-1}}{N_{m-1}} \cdot K_i \subset F_m, \quad i=1, 2, \dots, p-1; \quad K_p \subset \bar{D}_m.$$

Легко видеть, что количество кругов можно взять не более, чем $16N_{m-2}$.

Введем в рассмотрение гармонические функции $\mu_0(z), \mu_1(z), \mu_2(z), \dots, \mu_p(z)$.

$$\mu_0(z) = \log \frac{|z - z_0|}{2r_0} / \log \frac{1}{2}.$$

$\mu_0(z) = 1$ при $|z - z_0| = r_0$ и $\mu_0(z) = 0$ при $|z - z_0| = 2r_0$. На круге $K(z_1, r')$, $r' = \frac{r}{8}$, имеем

$$\mu_0(z) > \log \left(\frac{3}{4} + \frac{r}{2r_0} \right) / \log \frac{1}{2} = \lambda_1,$$

$$\mu_1(z) = \lambda_1 \cdot \log \frac{|z - z_1|}{r} / \log \frac{1}{8}.$$

$\mu_1(z) = \lambda_1$ при $|z - z_1| = \frac{r}{8}$ и $\mu_1(z) = 0$ при $|z - z_1| = r$. На круге $K(z_2, r')$ имеем

$$\mu_1(z) > \lambda_1 \cdot \log \frac{\frac{r}{2} + \frac{r}{8}}{r} / \log \frac{1}{8} = \lambda_1 \cdot \log \frac{5}{8} / \log \frac{1}{8} = \lambda_1 \lambda_2,$$

$$\mu_k(z) = \lambda_1 \cdot \lambda_2^{k-1} \cdot \log \frac{|z - z_k|}{r} / \log \frac{1}{8}, \quad 1 \leq k \leq p,$$

$\mu_k(z) = \lambda_1 \cdot \lambda_2^{k-1}$ при $|z - z_k| = \frac{r}{8}$ и $\mu_k(z) = 0$ при $|z - z_k| = r$. Поэтому

для $z \in K(z_k, r')$ имеем $\mu_k(z) > \lambda_1 \cdot \lambda_2^k$.

Совершая последовательный переход по кругам $K_0, K_1, \dots, K_p$, и каждый раз применяя принцип максимума для гармонических функций, в силу последних оценок получим

$$\omega_m(z) > \mu_p(z) \quad \text{для} \quad z \in K(z_p, r).$$

Кроме этого

$$\begin{aligned} \mu_p(\zeta) &> \lambda_1 \cdot \lambda_2^{p-1} \cdot \log \frac{|\zeta - z_p|}{r} \Big/ \log \frac{1}{8} > \\ &> \lambda_1 \cdot \lambda_2^{p-1} \cdot \log \frac{r - \frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}}{r} \Big/ \log \frac{1}{8} > \lambda_1 \cdot \lambda_2^{p-1} \cdot \frac{S_{m-1}}{n_{m-1}} \\ (p < 16 N_{m-2}). \end{aligned}$$

Таким образом, для любой точки ζ , $\zeta \in F_m$, имеем

$$\log |\Phi_m^{(z)}(\zeta)| < \log(A_m \sqrt{B}) + \lambda_1 \cdot \lambda_2^{p-1} \cdot \log \left(B_m \cdot \frac{S_m}{S_m} \right). \quad (17)$$

Каждый раз после выбора $N_1, N_2, \dots, N_{m-1}$, число N_m , затем S_m выбирается настолько большим, чтобы правая часть неравенства (17) стремилась к $-\infty$ при $m \rightarrow \infty$. Остается учесть лемму 4.

Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.V.1977

Ս. Շ. ՍԻՆԱՆՅԱՆ. L^p տարածության մետրիկայով առաջացած Գուսիանալիտիկության մասին (ամփոփում)

Դիտարկվում է կոմպլեքս հարթության վրա որոշված դրական ֆունկցիա, որը բավարարում է բնական պայմանի (պայմանավորված Սեզյոյի կլասիկ թեորեմայով): Ապացուցվում է այնպիսի ամենուրեք նոսր կոմպակտի պոլյուսներ, որ այդ կոմպակտի վրա դիտարկված ֆունկցիայի սահմանափակումը հանդիսանում է այնպիսի կշռային ֆունկցիա, որը ապահովում է L^p տարածության մետրիկայի միջոցով անալիտիկ ֆունկցիաների միակության հատկության փոխանցումը:

S. O. SINANIAN. *On quasianalyticity generated by the metric of the L^p space* (summary)

A positive function defined on the complex plain and satisfying some natural condition coming from the classical Sege theorem is considered.

The existence of a nowhere dense compact is proved, such that the metric of the L^p space (with weighting function, which is the restriction of the considered function on the compact) ensures the transmission of the uniqueness property of analytical functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Г. Витушкин. Условие на множество, необходимое и достаточное для возможности равномерного приближения аналитическими (или рациональными) функциями всякой непрерывной на этом множество функции, ДАН СССР, 128, № 1, 1959, 17—20.
2. М. С. Мельников, С. О. Синанян. Вопросы теории приближений функций одного комплексного переменного, Современные проблемы математики, том 4, 1975, 143—250.
3. С. О. Синанян. Свойство единственности аналитических функций на замкнутых множествах без внутренних точек, Сиб. матем. журнал, 6, № 6, 1965, 1365—1381.
4. С. О. Синанян. Аппроксимация аналитическими функциями и полиномами в среднем по площади, Мат. сб., 69, № 4, 1966, 546—578.
5. J. Brennan. Approximation in the mean and quasianalyticity, J. Funct. Anal., 12, № 3, 1973, 307—320.

О. А. МУРАДЯН

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ И ВЕЛИЧИНАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ АППРОКСИМИРУЮЩИХ АГРЕГАТОВ В ЗАДАЧЕ МЮНЦА

В работе [1] нами рассмотрены дополнения к аппроксимационной теореме Мюнца, связанные с учетом величин коэффициентов, аппроксимирующих полиномов. При этом аппроксимация ведется на компактах более общих, чем $[0,1]$.

Как известно [2], возможность учета величин коэффициентов аппроксимирующих полиномов связана с такими теоремами единственности теории аналитических функций, в которых заключение $F(z) \equiv 0$ выводится из того, что $F(z)$ достаточно быстро убывает на некотором множестве точек. В работе [1] нами были в этой связи получены некоторые теоремы единственности для $F(z)$, являющихся обобщенными преобразованиями Меллина, естественно возникающими при изучении аппроксимационных задач типа задачи Мюнца.

В настоящей статье, непосредственно дополняющей работу [1], мы рассмотрим ряд отличных от принятых в [1] ситуаций для подобных теорем единственности; это позволит, в частности, произвести учет величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в задаче Мюнца и в тех случаях, когда допустимый рост коэффициентов оказывается более медленным, чем указанный в [1].

Известна следующая теорема ([3], стр. 19).

Пусть $g(x)$ — функция ограниченной вариации на $(-\infty, +\infty)$, постоянная вне некоторого конечного интервала. Если (C, a) — наименьший интервал, вне которого $g(x)$ постоянна, то для преобразования Лапласа

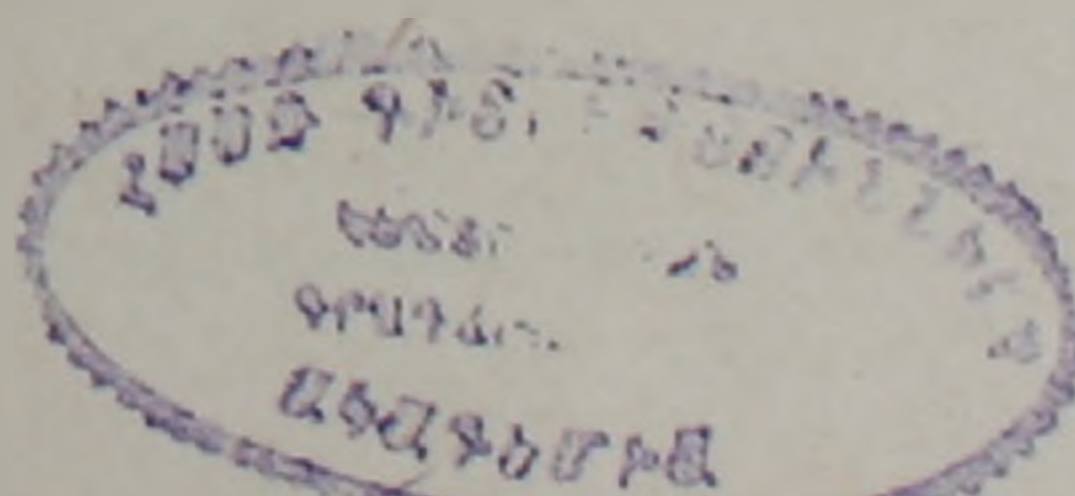
$$F(z) = \int_c^a e^{zt} dg(t)$$

имеем

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln F(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln [F(x)]}{x} = c, \quad (1)$$

(x — вещественное).

Мы дадим сейчас обобщение этой теоремы для распределений масс на некоторых компактах и получим отсюда соответствующее предложение для преобразований Меллина. Наше изложение будет связано с первым из пределов (1).



Пусть E — какое-то замкнутое множество в конечной комплексной плоскости, не обязательно ограниченное и, следовательно, не обязательно компактное, μ — комплексная бэровская мера на E с конечной вариацией.

Рассмотрим обобщенное преобразование Лапласа–Стилтьеса:

$$E(z) = \int_E e^{uz} d\mu(u). \quad (2)$$

Предположим, что

$$a = \sup_{u \in E} \operatorname{Re} u < +\infty. \quad (3)$$

Тогда при $z = x > 0$ $|e^{ux}| \leq e^{ax}$ и интеграл (2) абсолютно сходится, причем

$$|F(x)| \leq Ce^{ax}, \quad C = \int_E |d\mu|. \quad (4)$$

Из (4) следует, что

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(x)|}{x} \leq a. \quad (5)$$

Обозначим последний $\overline{\lim}$ через A :

$$A = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln F(x)}{x} \leq a. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть Ω_A — открытое множество, определяемое равенством

$$\Omega_A = \{z: \operatorname{Re} z > A\} \setminus E, \quad (7)$$

$$E_A = \{z: \operatorname{Re} z > A\} \cap E. \quad (8)$$

Предположим, что Ω_A — связно, т. е. является областью и граница $\partial\Omega_A$ области Ω_A содержит E_A .

Тогда вариация меры μ по множеству E_A равна нулю

$$\int_{E_A} |d\mu| = 0. \quad (9)$$

Заметим, что теорема, цитированная нами в начале этого параграфа, является частным случаем вышеуказанного результата, когда $E \subset (-\infty, \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим обращение преобразования (2)

$$\Phi(\zeta) = \int_0^\infty e^{\zeta x} F(x) dx. \quad (10)$$

Интеграл (10) абсолютно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > A$. Действительно, для точки ζ , $\operatorname{Re} \zeta > A$. Возьмем $\varepsilon > 0$, $A + \varepsilon < \operatorname{Re} \zeta$. В силу (6) имеет место неравенство

$$F(x) \leq C e^{(A+\varepsilon)x}, \quad x > 0, \quad (11)$$

с некоторым $C > 0$. Поэтому

$$\int_0^{\infty} |e^{-x\zeta}| |F(x)| dx \leq C \int_0^{\infty} e^{-x(\operatorname{Re} \zeta - (A+\varepsilon))} dx$$

и абсолютная сходимость выяснена. Ясно также, что $\Phi(\zeta)$ аналитична в указанной полуплоскости. Далее

$$\Phi(\zeta) = \int_0^{\infty} e^{-x\zeta} dx \int_E e^{ux} d\mu(u) = \int_0^{\infty} dx \int_E e^{x(u-\zeta)} d\mu(u). \quad (12)$$

В полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > a$ получаем

$$\int_0^{\infty} dx \int_E |e^{x(a-\operatorname{Re} \zeta)}| |d\mu(u)| \leq \int_E |d\mu(u)| \int_0^{\infty} e^{x(a-\operatorname{Re} \zeta)} dx < \infty. \quad (13)$$

Значит в указанной полуплоскости повторный интеграл абсолютно сходится и можно переставить пределы (теорема Фубини). Получаем

$$\Phi(\zeta) = \int_E d\mu(u) \int_0^{\infty} e^{-x(\zeta-u)} dx \int_E \frac{d\mu(u)}{\zeta-u}. \quad (14)$$

Представление (14) выведено нами в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > a > A$. Но совершая аналитическое продолжение, получим, что то же представление будет иметь место и в области Ω_A . При этом, как было доказано выше, функция $\Phi(\zeta)$ аналитична не только в Ω_A , но и в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > A$. Чтобы завершить доказательство теоремы, воспользуемся следующей теоремой из работы [2] (теорема 8).

Теорема (*). Пусть ε — компакт и μ — некоторая бэровская комплексная мера на ε . Положим:

$$c_n = \int_{\varepsilon} z^n d\mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и пусть

$$R = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} > 0.$$

Положим

$$Q = \{z: |z| > R\} \setminus \varepsilon$$

и

$$\varepsilon_1 = \{z: |z| > R\} \cap \varepsilon.$$

Если Q — область, т. е. является связным множеством и ε_1 полностью входит в состав границы Q , то на ε_1 мера μ отсутствует

$$\int_{\varepsilon_1} |d\mu| = 0.$$

Отобразим полуплоскость $\operatorname{Re} u \leq A$ на единичный круг $|t| \leq 1$

$$t = \frac{u - A + 1}{u - A - 1}. \quad (15)$$

При отображении (15) множество E перейдет в компакт ε , E_A в ε_1 , причем ε_1 — вне единичного круга, точка ζ в точку

$$z = \frac{\zeta - A + 1}{\zeta - A - 1}$$

и интеграл (14) преобразуется следующим образом:

$$\varphi(z) = \Phi(\zeta) = (z - 1) \int_{\varepsilon} \frac{2d\nu(t)(t - 1)}{t - z}, \quad (16)$$

где $d\nu(t)$ — пересажженная с помощью отображения (15) на ε мера $d\mu$. Положим $d\nu_1(t) = (t - 1)d\nu(t)$ и рассмотрим интеграл типа Коши

$$\psi(z) = \int_{\varepsilon} \frac{d\nu_1(t)}{t - z}. \quad (17)$$

В силу свойств $\Phi(\zeta)$, $\psi(z)$ аналитична вне круга $|z| \leq 1$, причем относительно части ε_1 множества ε , лежащей вне единичного круга, выполнены условия теоремы (*).

Если положить

$$c_n = \int_{\varepsilon} t^n d\nu_1, \quad (18)$$

то аналитичность интеграла (17) при $|z| > 1$ равносильна тому, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1. \quad (19)$$

Поэтому, применяя теорему (*), заключаем, что вариация ν на ε_1 равна нулю. Теорема доказана.

Замечание 1. Доказательство было проведено для $A > -\infty$. В случае $A = -\infty$ теорема также верна, в этом случае условия на Q_A и E_A сводятся к тому, что E не разбивает плоскость и нигде не плотна. Доказательство теоремы в этом случае отличается от проведенного сейчас некоторыми не очень существенными деталями. Это доказательство содержится по существу в доказательстве теоремы 7 работы 1. Заметим также, что получить результат для $A = -\infty$ из разобранного здесь случая $A > -\infty$ предельным переходом нельзя.

Нетрудно построить такое E , которое не разбивает плоскость и нигде не плотно, но при любом $A > -\infty$ не выполняются требуемые в теореме 1 условия относительно $\mathfrak{Q}_A$ и E_A .

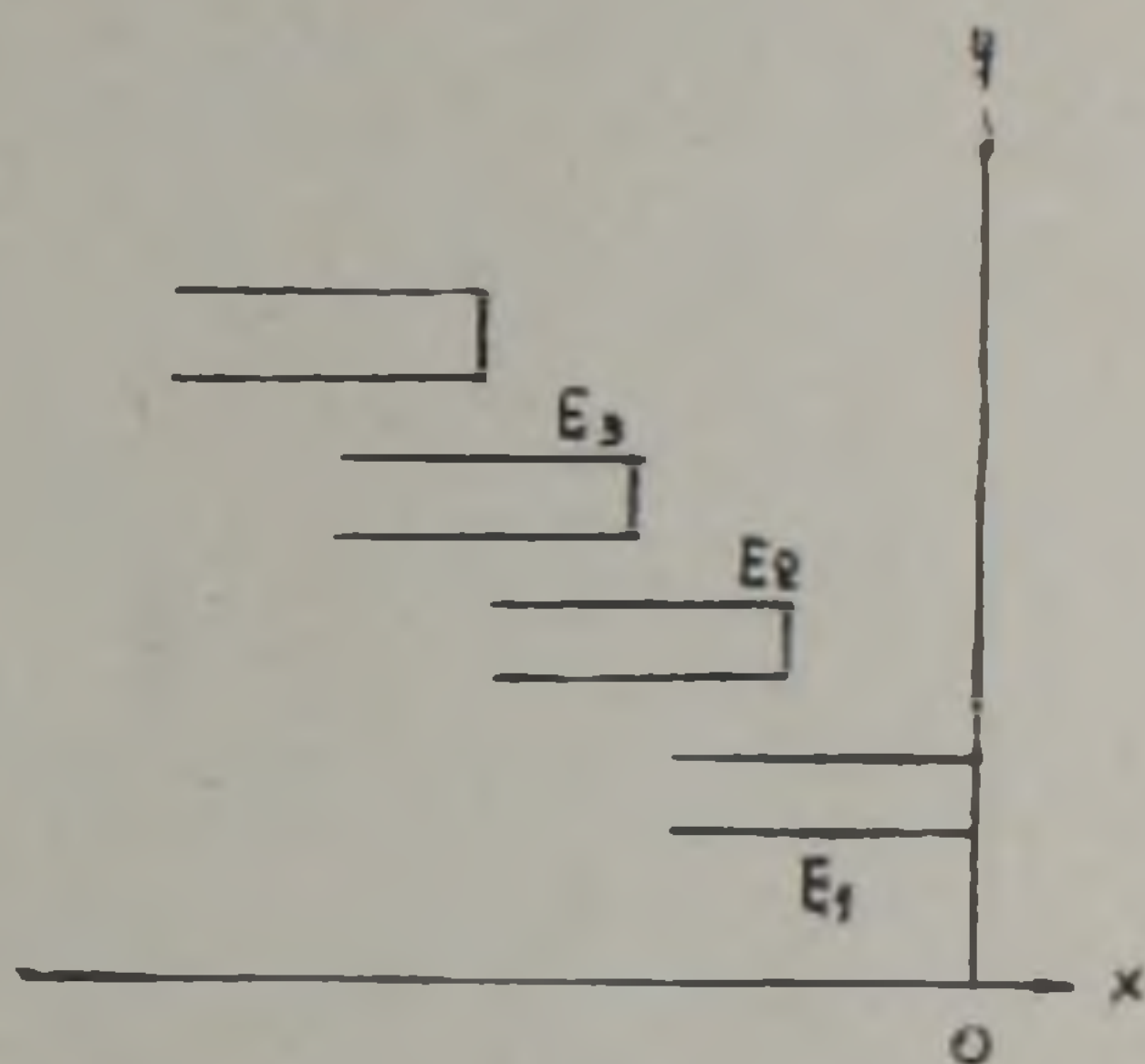
Приведем соответствующий пример. Построим множества E_n , $n = -1, -2, \dots$ следующим образом:

$$E_n^1 = [x + i|n|, n - 1 \leq x \leq n + 1],$$

$$E_n^2 = \left\{ x + i \left(|n| + \frac{1}{2} \right), n - 1 \leq x \leq n + 1 \right\},$$

$$E_n^3 = \left\{ n + 1 + iy, |n| \leq y \leq |n| + \frac{1}{2} \right\},$$

$$E_n = E_n^1 \cup E_n^2 \cup E_n^3.$$



Если положить теперь $E = \bigcup E_n$, то E — замкнутое множество, не разбивает плоскость и однако при любом $A < 0$ множества $\mathfrak{Q}_A$ и E_A , задаваемые формулами (7) и (8), не таковы, как это требует теорема 1.

Обозначим через $S_\mu \subset E$ замкнутый носитель меры μ , совокупность точек роста меры. Положим

$$a_0 = \sup_{\mu \in S_\mu} \operatorname{Re} \mu. \quad (20)$$

Очевидно, $a_0 \leq a$ (в теореме 1 достаточно было предполагать $a_0 < +\infty$).

Следствие. В условиях теоремы 1

$$A = a_0. \quad (21)$$

Действительно, по доказанному $a_0 \leq A$. С другой стороны, неравенства (4) и (5), где, очевидно, можно заменить a на a_0 , показывают, что $A \leq a_0$.

Пусть Γ — компакт конечной комплексной плоскости. Будем считать, что устройство Γ позволяет выделить на $\Gamma \setminus \{0\}$ однозначную ограниченную ветвь функции $\arg t$, и пусть

$$b = \sup_{t \in \Gamma \setminus \{0\}} |\arg t| < +\infty, \quad (22)$$

$$a = \sup_{t \in \Gamma} \ln |t|, \quad c = \inf_{t \in \Gamma} \ln |t|. \quad (23)$$

Пусть μ — бэровская мера на Γ ; рассмотрим функцию

$$\Gamma(z) = e^{z \ln t} d\mu(t) = \int t^z d\mu \quad (24)$$

преобразование Меллина (обобщенной меры) μ ; в случае $0 \in \Gamma$ полагаем $\mu\{0\} = 0$ (ср. [1]).

Теорема 2. Пусть Γ — компакт, удовлетворяющий условию (22), μ — комплексная бэровская мера на Γ , $F(z)$ — преобразование Меллина (24) для μ . Пусть

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(x)|}{x} = A. \quad (25)$$

(Очевидно, $A \leq a = \sup_{t \in \Gamma} \ln |t|$). Обозначим

$$Q_A = \{t: \ln |t| > A\} \setminus \Gamma, \\ \Gamma_A = \{t: \ln |t| > A\} \cap \Gamma, \quad (26)$$

и предположим, что Q_A связно и граница области Q_A содержит Γ_A . Тогда

$$\int_{\Gamma_A} |d\mu| = 0.$$

Теорема 2 немедленно следует из теоремы 1, если сделать замену переменного $u = \ln t$. Относительно случая $A = -\infty$, здесь можно сказать то же, что в предыдущей теореме.

Дальнейшие формулировки будем ради краткости приводить лишь для преобразований Меллина. Будем сейчас считать $c > -\infty$.

Теорема 3. Пусть компакт Γ удовлетворяет условию (22), не разбивает плоскости и не имеет внутренних точек, а последовательность комплексных точек $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z_n} = D \geq 0, \quad (27)$$

$$\pi D > b, \quad (28)$$

$$|z_n - z_m| \geq (n - m) d, \quad d > 0. \quad (29)$$

Если для преобразования Меллина (24)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(z_n)|}{|z_n|} < c, \quad (30)$$

то $F(z) \equiv 0$ и мера $\mu \equiv 0$. В то же время существуют функции вида (24) такие, что для любой последовательности $\{z_n\}$, для которой $z_n \rightarrow \infty$, $\arg z_n \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(z_n)|}{|z_n|} = c. \quad (31)$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что случай $c = -\infty$ ($0 \in \Gamma$) рассмотрен нами ранее — в теореме 7 работы [1]. Согласно известным теоремам В. Бернштейна—Н. Левинсона ([3], [4]) имеем

$$A = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(x)|}{x} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(z_n)|}{|z_n|}.$$

Применимость этих теорем для нашего преобразования Меллина легко проверяется, см. [1]. Условия на $\mathcal{Q}_A$ и Γ_A из теоремы 2 очевидно выполнены, ибо $A < c$.

Возьмем теперь $t_0 \in \Gamma$, $\ln |t_0| = c$ и рассмотрим функцию

$$F(z) = t_0^z = e^{z[c + i \arg t_0]}.$$

Для этой функции имеет место (31).

Обозначим через Γ^c множество (c из (23))

$$\Gamma^c = \{t \in \Gamma: \ln t = c\}. \quad (32)$$

Теорема 4. Пусть $\{z_n\}$ — такая же, как в теореме 3,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(z_n)|}{|z_n|} \leq c, \quad (33)$$

$$\int_{\Gamma^c} |d\mu| = 0, \quad (34)$$

и выполнены условия теоремы 2 относительно Q_c и Γ_c ($A = c$). Тогда $\mu \equiv 0$.

Действительно, по теореме 2

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma^c} |d\mu| = 0.$$

Так как имеет место и 33, то

$$\int_{\Gamma} |d\mu| = 0,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что геометрические условия в теоремах 3 и 4 различны. Используя конструкцию, близкую к описанной в замечании 1, легко построить компакт Γ , не разбивающий плоскость и нигде не

плотный, но такой, что при любом $A > c$ условия теоремы 4 не выполнены. С другой стороны, окружность радиуса e^c с присоединенным прямолинейным отрезком удовлетворяет условиям теоремы 4, но не 3.

Для случая, когда Γ расположен на луче, последние два результата можно несколько улучшить.

Теорема 5. Пусть Γ лежит на некотором луче, выходящем из начала координат. Пусть последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\arg z_n \rightarrow 0, \quad (35)$$

$$|z_n - z_m| \geq |n - m| d, \quad d > 0, \quad (36)$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|z_n|} = \infty. \quad (37)$$

Если для функции $F(z)$ вида (24) имеет место (30) (может быть и $c = -\infty$), то $F(z) \equiv 0$ и $\mu \equiv 0$. То же заключение сохраняется, если выполнены (33) и (34).

Замечание 2. Условия (26) и (27) всегда влекут расходимость ряда (37). Теперь же мы заменяем условие (27) более слабым условием (37). Заметим также, что при $c = -\infty$ теоремы 5 и 6 работы [1] дают более сильный результат.

Доказательство. Если компакт лежит на луче $\arg t = \theta \neq 0$, то при помощи функции

$$t = t' e^{i \arg t} = t' e^{i\theta}, \quad t \in \Gamma, \quad t' \in [0, \infty]$$

можно отобразить Γ на положительную ось (см. [1], теорема 5). Поэтому достаточно рассмотреть случай $\Gamma \subset (0, \infty)$.

В этом случае

$$F(iy) = \int_\Gamma t^{iy} d\mu = O(1) \quad (38)$$

и можно воспользоваться теоремой XXXVII на стр. 107 из [4].

Замечание 3. Следует указать, что в цитированной теореме из книги [4] кроме условий (27), (28) указано еще условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z_n} \geq 0, \quad (39)$$

которого у нас нет. Возможность обойтись без этого условия была отмечена без доказательства в работе Боаса, хотя в более поздней его книге [3] это условие вновь появилось. Можно доказать, что если последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям (35), (36), (37), то из нее можно выбрать подпоследовательность $z_{n_1}, z_{n_2}, \dots, z_{n_j}, \dots$ с возможной перенумерацией, такую, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{n_l}|} = \infty, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{i}{z_{n_l}} = 0. \quad (40)$$

Это было отмечено в нашей диссертации [6]; см. также [7], стр. 605 и след.

В работе А. Ф. Леонтьева [7] была доказана следующая весьма глубокая

Т е о р е м а. Пусть E — конечная аналитическая дуга, удовлетворяющая условию: угол между касательной к E в любой точке и вещественной осью по абсолютной величине меньше $\frac{\pi}{4}$. Пусть последовательность $\{z_k\}$, $z_k > 0$, удовлетворяет условиям:

$$z_{k+1} - z_k \geq h > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k} = \infty.$$

Тогда для преобразования Лапласа меры μ , $S(\mu) \subseteq E$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(z_n)|}{z_n} = a_0$$

$$(a_0 = \sup \operatorname{Re} S(\mu)).$$

Формально наша теорема 5 не содержится в этом результате, так как у нас z_k — комплексные. Нам показалось полезным провести непосредственное доказательство теоремы 5, так как оно много проще рассуждений из [7].

Отметим в качестве следствий из теорем 1—5 несколько ранее полученных различными математиками результатов.

С л е д с т в и е 2. (Боас [5]). Пусть $f(t)$ — интегрируемая на $[z, \beta]$, $0 \leq \alpha < \beta$ функция, $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 5 и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \int_{\alpha}^{\beta} t^{z_n} f(t) dt \right|}{|z_n|} \leq \ln z, \quad (41)$$

тогда $f(t) \equiv 0$ почти везде.

Это просто частный случай теоремы 5, когда мера μ — абсолютно непрерывная относительно лебеговой.

С л е д с т в и е 4. (Микусинский [8]). Если

$$\int_{\alpha}^{\beta} t^{n z} f(t) dt = O(\alpha + \varepsilon)^n \quad (42)$$

при $\forall \varepsilon > 0$, то $f(t) \equiv 0$ почти везде.

Здесь $z_n = nd$, (42) влечет (41).

Следствие 4. (Лерх [9]). Если $(\alpha > 0)$

$$\int_a^{\beta} t^{\alpha} f(t) dt = 0, \quad n=1, 2, \dots, \quad (43)$$

то $f(t) \equiv 0$ почти везде.

Следствие 5. (Рыль-Нарджевский [10]). Пусть Γ — спрямляемая кривая, имеющая не более одной общей точки с кругом $|z| \leq \rho$, $f(t)$ интегрируемая на Γ функция.

Если

$$\int_{\Gamma} f(t) t^n dt = O(\rho^n), \quad (44)$$

то $f(t) \equiv 0$ почти везде.

В качестве примера использования полученных теорем в вопросах учета величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов приведем следующий результат. (Придерживаемся терминологии из [1], [2]). Добавим к величинам a, b, c из (22) и (23), характеризующим геометрию компакта Γ , величину

$$\beta = \inf_{t \in \Gamma^c} |\arg t|, \quad (45)$$

и пусть

$$\Gamma^c = \{t, t \in \Gamma, \ln t = c\} \quad (c = \inf_{t \in \Gamma} \ln |t|).$$

Рассмотрим вопросы усиленной полноты системы

$$t^{z_1}, t^{z_2}, t^{z_3}, \dots, t^{z_n}, \dots \quad (46)$$

в пространстве $C(\Gamma)$ непрерывных на Γ функций с равномерной метрикой.

Теорема 6. Пусть компакт Γ , удовлетворяющий условию (22), не разбивает плоскость и не имеет внутренних точек, причем $0 \in \Gamma$. Если $\{z_n\}$ — последовательность точек, удовлетворяющая условиям (26), (27), (28), то для $\forall \omega(t) \in C(\Gamma)$, $\forall \delta > 0$ и $\forall \varepsilon > 0$ можно найти $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ такие, что имеют место неравенства

$$\left\| \omega - \sum_1^n \lambda_k t^{z_k} \right\| < \varepsilon, \quad \sum e^{-(c-\delta)(z_j)} |\lambda_j| < \varepsilon. \quad (47)$$

Если последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям

$$z_n = x_n + iy_n \rightarrow \infty, \quad x_n > 0, \quad \frac{|y_n|^2}{x_n} \rightarrow 0 \quad (48)$$

и мы обозначим

$$\delta_n = \frac{|y_n|}{x_n} \rightarrow 0, \quad (49)$$

то существует функция $\omega(t) \in C(\Gamma)$, для которой при любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ не могут одновременно иметь места неравенства

$$\left\| \omega(t) - \sum_1^n \lambda_k t^k \right\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \sum_1^n e^{(c + \beta_0 j) |z_j|} \|\lambda_j\| < \varepsilon. \quad (50)$$

Доказательство. Возьмем линейный функционал $l(\varphi)$ над $C(\Gamma)$ и рассмотрим преобразование Меллина $F(z)$ для меры μ , представляющий этот функционал.

Проверка полноты системы (46) в $C(\Gamma)$, описываемой неравенствами (47), согласно изложенной в [1], [2] теории приводит к неравенствам

$$|l(t^{z_j})| = |F(z_j)| \leq e^{(c - \delta) |z_j|}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (51)$$

из которых должно следовать, что $l \equiv 0$. Но (51) дают

$$\overline{\lim}_{z_j} \frac{\ln |F(z_j)|}{|z_j|} \leq c - \delta < c \quad (52)$$

и $l \equiv 0$. Следовательно, по теореме 3, $\mu \equiv 0$. А это означает в силу теоремы 3 [2], что система (46) полна в смысле (47).

Рассмотрим теперь точку $t_0 \in \Gamma$, $\ln |t_0| = c$, $|\arg t_0| = \beta$ и сосредоточим в этой точке меру $\mu > 0$, массу которой определим позднее. Преобразование Меллина для μ имеет вид

$$F(z) = \mu e^{z(c + i\beta)}$$

и

$$|F(z_j)| = \mu e^{cx_j - l\beta y_j} \leq \mu e^{x_j(c + \beta_0 j)}. \quad (53)$$

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{e^{x_j(c + \beta_0 j)}}{e^{l z_j |c + \beta_0 j|}} &= \lim_{j \rightarrow \infty} e^{(c + \beta_0 j)(x_j - \sqrt{x_j^2 + y_j^2})} = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} e^{(c + \beta_0 j) \frac{1}{2} x_j \frac{|y_j|^2}{x_j^2}} = 1, \end{aligned}$$

то при достаточно малом μ будут, хотя $l \neq 0$, выполняться неравенства

$$|l(t^{z_j})| = |F(z_j)| \leq e^{(c + \beta_0 j) |z_j|} \quad (54)$$

и, следовательно, для системы (46) не имеет места (50) в силу теорем из [1], [2].

Օ. Ա. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ. Միակության որոշ բեռեմների և Մյունցի խնդրի մեջ մոտարկող բազմանդամների գործակիցների մեծության վերաբերյալ (ամփոփում)

Աշխատանքում ուսումնասիրված են միակության բեռեմների համար մի շարք իրավիճակներ, որոնք տարբեր են [1]-ում ընդունվածներից: Կատարված է Մյունցի խնդրում մոտարկող ադրեգատների գործակիցների հաշվարկ նաև այն դեպքում, երբ գործակիցների թույլատրելի աճը ավելի դանդաղ է, քան [1]-ում:

O. A. MURADIAN. *On some uniqueness theorems and the values of coefficients of approximating aggregates in the Müntz problem (summary)*

This paper studies some situations different from those in the theorems on uniqueness. The magnitude of coefficients of approximating aggregates in Müntz problem is taken into account as well as the cases when the admissible rate of growth of coefficients appears to be lower than that of [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Օ. Ա. Մուրադյան. О росте коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в теореме Мюнца, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика“, VIII, № 1, 1973, 70—87.
2. С. Я. Хавинсон. О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика“, VI, №№ 2—3, 1971, 221—234.
3. R. P. Boas. Entire functions, New York, 1954.
4. N. Levinson. Gap and density theorems, New York, 1941.
5. R. P. Boas. Remarks on a moment problem, *Studia Math.*, 13, 1952, 59—61.
6. Օ. Ա. Մուրադյան. Диссертация, КГУ, 1975.
7. А. Ф. Леонтьев. О росте целой функции экспоненциального типа на последовательности точек, Матем. сб., 96, 138, № 4, 1975, 601—613.
8. J. G. Mikusinski. A theorem on moments, *Studia Math.*, 12, 1951, 191—193.
9. M. Lerch. Sur un point de la theorie des fonctions generatrices d'Able, *Acta Math.*, 27, 1903, 339—352.
10. C. Ryll-Nardzewski. Certains theorems des moments, *Studia Math.*, 12, 1951, 225—226.

Б. С. РУБИН

ОБЩИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НА НЕТЕРОВОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

В настоящей статье исследуются на нетеровость операторы типа потенциала

$$(K_{\gamma}^{\alpha, \nu})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{c(x, y)}{|x-y|^{1-\alpha}} \ln^{\gamma} \frac{\gamma}{|x-y|} \varphi(y) dy, \quad (1)$$

$$-\infty < a < b < \infty, \varphi \in L_p(a, b), 1 < p < \infty, \gamma > b-a.$$

Для $\nu = 0$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ операторы типа (1) рассматривались в работах [1], [2]. Случай $\nu > 0$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ был изучен в [3]*. В данной статье предлагается единый метод исследования операторов (1) для произвольного вещественного ν и $\alpha \in [0, 1]**$. Этот метод заключается в применении операции дифференцирования произвольного порядка по параметру α и основывается на свойствах высших трансцендентных функций типа функций Вольтерра ([4])***.

§ 1. Некоторые вспомогательные результаты

Введем обозначения:

$$\varphi \underset{a}{*} \psi = \int_a^x \varphi(y) \psi(x-y) dy, \quad \varphi \overset{b}{*} \psi = \int_x^b \varphi(y) \psi(y-x) dy,$$

* Из устного сообщения автору известно, что случай $\alpha = 1$, $\nu > 0$ рассматривался А. А. Килбасом методом, аналогичным методу работы [3].

** При $\alpha = 0$ предполагается, что $\nu < -1$ и множитель $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ опускается; при $\alpha = 1$ предполагается, что $\nu > 0$.

*** Интегральные преобразования, ядрами которых являются функции Вольтерра, рассматривались М. М. Джрбашьяном в монографии [5].

$$(I^\nu \psi)(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^\infty \frac{\psi(y) dy}{(y-x)^{1-\nu}}, & \nu > 0, \\ (-1)^{[-\nu]+1} \frac{d^{[-\nu]+1}}{dx^{[-\nu]+1}} (I^{\nu+[-\nu]+1} \psi)(x), & \nu < 0. \end{cases}$$

При $a = 0$ будем писать просто $\varphi * \psi$. Для того чтобы подчеркнуть, что оператор I^ν применяется по некоторой переменной t , будем писать I_t^ν . Все функции для простоты предполагаются вещественными. Соотношения, в которых участвуют функции из $L_r(a, b)$, понимаются в смысле „почти всюду“.

Применим к равенству

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha-1} * \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\beta-1} = \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha+\beta-1} \quad (0 < \alpha, \beta < 1)$$

оператор $A^\nu f = |I_\beta^{-\nu} [(I_\alpha^\nu f)(\alpha, \beta)]| (1-\alpha)$. Вводя обозначение

$$\mu_{t,\nu}(x) = \left(I_t^\nu \left[\frac{1}{\Gamma(t)} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{t-1} \right] \right)(t),$$

получаем

$$\frac{1}{\gamma} \mu_{\alpha,\nu} * \mu_{1-\alpha,-\nu} = 1. \quad (1.1)$$

Поведение в нуле функции $\mu_{t,\nu}(x)$ характеризуется равенством ([4], стр. 231):

$$\mu_{t,\nu}(x) = \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{t-1} \left(\ln \frac{\gamma}{x}\right)^{-\nu} \left\{ \frac{1}{\Gamma(t)} + \nu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(t)} \right) \ln^{-1} \frac{\gamma}{x} + \right. \\ \left. + O\left(\ln^{-2} \frac{\gamma}{x}\right) \right\}, \quad (1.2)$$

которое позволяет распространить соотношение (1.1) по непрерывности на случаи $\alpha = 0, \nu > 0$ и $\alpha = 1, \nu < 0$.

Из (1.1) вытекает легко проверяемая

Лемма 1.1. Соотношения $\{f = \varphi * \mu_{\alpha,\nu}, \varphi \in L(a, b)\}$ и

$$\left\{ f * \frac{1}{\gamma} \mu_{1-\alpha,-\nu} = \varphi * \frac{1}{\gamma} \mu_{1-\alpha,-\nu}, \varphi \in L(a, b) \right\}$$

эквивалентны.

Далее введем обозначение:

$$u_{\alpha,\nu} = u_{\alpha,\nu}(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ln^{-\nu} \frac{\gamma}{x}, & \alpha > 0, -\infty < \nu < \infty, \\ \nu \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{-1} \ln^{-\nu-1} \frac{\gamma}{x}, & \alpha = 0, 0 < \nu < \infty. \end{cases}$$

Лемма 1.2. Пусть функция $c = c(x)$ непрерывна на $[0, b-a]$ и непрерывно дифференцируема на

$$(0, b-a], \quad c^0 = \lim_{x \rightarrow 0} c(x), \quad \zeta = \frac{cu_{\gamma, \nu}}{\mu_{\gamma, \nu}} - c^0.$$

Тогда для любой функции $\varphi \in L(a, b)$ справедливо равенство

$$\varphi *_{a} cu_{\gamma, \nu} = (c^0 \varphi + \varphi *_{a} \psi) *_{a} \mu_{\gamma, \nu}, \quad (1.3)$$

где

$$\psi(x) = -\frac{1}{\gamma} \int_0^x \zeta'(y) dy \int_0^y \mu_{\gamma, \nu}(t) \frac{d}{dx} \mu_{1-\gamma, -\nu}(x-t) dt \in L(0, b-a).$$

Доказательство. Убедимся сначала, что $\psi(x) \in L(0, b-a)$. В силу (1.2) при $\alpha > 0, \nu > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{b-a} |\psi(x)| dx &\leq \text{const} \cdot \int_0^{b-a} |\zeta'(y)| dy \int_0^y \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \int_y^{b-a} \frac{\ln^{-\nu} \frac{\gamma}{t} \ln^{\nu} \frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1+\alpha}} dx = \\ &= \text{const} \int_0^{b-a} |\zeta'(y)| dy \int_0^y \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \times \\ &\times \int_y^{b-a} \frac{\left| \ln \frac{t}{x-t} + \ln \frac{\gamma}{t} \right|^{[\nu]} \left[\left(\ln^{\nu-[\nu]} \frac{\gamma}{x-t} - \ln^{\nu-[\nu]} \frac{\gamma}{t} \right) + \ln^{\nu-[\nu]} \frac{\gamma}{t} \right]}{\ln^{\nu} \frac{\gamma}{t} (x-t)^{1+\alpha}} dx \leq \\ &\leq \text{const} \sum_{i=0}^{[\nu]} \binom{[\nu]}{i} \int_0^{b-a} |\zeta'(y)| dy \int_0^y \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \times \\ &\times \int_y^{b-a} \frac{\left| \ln \frac{t}{x-t} \right|^i \left(\left| \ln \frac{t}{x-t} \right|^{\nu-[\nu]} + \ln^{\nu-[\nu]} \frac{\gamma}{t} \right)}{\ln^{\nu-[\nu]+i} \frac{\gamma}{t} (x-t)^{1+\alpha}} dx \leq \\ &\leq \text{const} \sum_{i=0}^{[\nu]} \binom{[\nu]}{i} \int_0^{b-a} |\zeta'(y)| dy \int_0^y \frac{dt}{t} \int_{\frac{y}{t}}^{\frac{b-a}{t}} \frac{\left| \ln \frac{1}{\xi-1} \right|^{i+\nu-[\nu]} + \left| \ln \frac{1}{\xi-1} \right|^i}{(\xi-1)^{1+\alpha}} d\xi = \\ &= \text{const} \sum_{i=0}^{[\nu]} \binom{[\nu]}{i} \int_0^{b-a} |\zeta'(y)| dy \left(\int_1^{\frac{b-a}{y}} \ln \xi + \int_{\frac{b-a}{y}}^{\infty} \ln \frac{b-a}{y} \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{\left| \ln \frac{1}{\xi-1} \right|^{l+v-[v]} + \left| \ln \frac{1}{\xi-1} \right|^l}{(\xi-1)^{1+\alpha}} d\xi \leq$$

$$\leq \text{const} \sum_{i=0}^{[v]} \binom{[v]}{i} \int_0^{b-a} |\zeta'(y)| dy \int_1^\infty \frac{\left(\left| \ln \frac{1}{\xi-1} \right|^{l+v-[v]} + \left| \ln \frac{1}{\xi-1} \right|^l \right) \ln \xi}{(\xi-1)^{1+\alpha}} d\xi < \infty.$$

Для случаев $\alpha=0$, $v>0$ и $\alpha>0$, $v<0$ выкладки проводятся аналогично.

Воспользуемся леммой 1.1, полагая $f = \varphi *_{\alpha} \mu_{\alpha, v}$:

$$f *_{\alpha} \frac{1}{\gamma} \mu_{1-\alpha, -v} = \left[\varphi *_{\alpha} (c^{\circ} \mu_{\alpha, v} + \psi \mu_{\alpha, v}) \right] *_{\alpha} \frac{1}{\gamma} \mu_{1-\alpha, -v} =$$

$$= c^{\circ} \varphi *_{\alpha} 1 + \varphi *_{\alpha} (\psi \mu_{\alpha, v} *_{\alpha} \frac{1}{\gamma} \mu_{1-\alpha, -v}).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$\psi \mu_{\alpha, v} *_{\alpha} \frac{1}{\gamma} \mu_{1-\alpha, -v} = \psi * 1,$$

откуда вытекает, что

$$f *_{\alpha} \frac{1}{\gamma} \mu_{1-\alpha, -v} = (c^{\circ} \varphi + \varphi *_{\alpha} \psi) *_{\alpha} 1.$$

Но тогда в силу леммы 1.1, $f = (c^{\circ} \varphi + \varphi *_{\alpha} \psi) *_{\alpha} \mu_{\alpha, v}$, что и требовалось доказать.

Из леммы 1.2, учитывая равенство нулю спектрального радиуса оператора Вольтерра [6], получаем критерий разрешимости в $L_p(a, b)$ интегральных уравнений первого рода вида $\varphi * \mu_{\alpha, v} = \Phi$.

Теорема 1.1. Пусть функция $c(x)$ ($c(0) \neq 0$) удовлетворяет условиям леммы 1.2. Для того чтобы уравнение $\varphi *_{\alpha} \mu_{\alpha, v} = \Phi$ было разрешимо в $L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi \in \{f | f = \varphi *_{\alpha} \mu_{\alpha, v}, \varphi \in L_p(a, b)\}.$$

При выполнении этого условия решение φ единственно и находится по формуле:

$$\varphi = (c^{\circ} I + V_{\psi})^{-1} \frac{d}{dx} \left(\Phi *_{\alpha} \frac{1}{\gamma} \mu_{1-\alpha, -v} \right),$$

где $V_{\psi} \varphi = \varphi *_{\alpha} \psi$, I — тождественный оператор.

Описание класса правых частей Φ в терминах свертки с функцией $\frac{1}{\gamma} \mu_{1-\alpha, -v}$ содержится в лемме 1.1, которая является обобщением теоремы Тамаркина ([10]) для уравнений вида $\varphi *_{\alpha} \mu_{\alpha, v} = f$.

Отметим еще два утверждения, которые вытекают из леммы 1.2 и играют в дальнейшем важную роль. Пусть $g(x) \in L(0, b-a)$, $1 \leq p \leq \infty$. Введем банахово пространство

$$L_p(a, b) * g = \{f | f = \varphi * g, \varphi \in L_p(a, b); \|f\| = \|\varphi\|_{L_p(a, b)}\}.$$

Лемма 1.3. Справедливы следующие утверждения:

а) Если $c^\circ \neq 0$, то $L_p(a, b) * cu_{1, \nu} = L_p(a, b) * u_{1, \nu}$.

б) Если $c^\circ = 0$, то имеет место вложение

$$L_p(a, b) * cu_{1, \nu} \rightarrow L_p(a, b) * u_{1, \nu} = L_p(a, b) * u_{1, \nu},$$

причем оператор вложения вполне непрерывен.

Утверждение а) вытекает из обратимости в $L_p(a, b)$ оператора $W: \varphi \rightarrow c^\circ \varphi + \varphi * \psi$ ([6]). Утверждение б) очевидно.

В заключение заметим, что все приведенные в этом параграфе результаты для сверток $*_a$ верны и для сверток $*_b$.

§ 2. Свертки со степенно-логарифмическими ядрами и сингулярные интегральные операторы

1°. Введем обозначения:

$$I_{a+}^{\alpha, \nu} \varphi = \varphi * \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ln^\nu \frac{1}{x}, \quad I_{b-}^{\alpha, \nu} \varphi = \varphi * \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ln^\nu \frac{1}{x}. \quad (2.1)$$

При $\nu = 0$ будем писать просто $I_{a+}^\alpha \varphi$, $I_{b-}^\alpha \varphi$. В случае $\alpha = 0$ множитель $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ в выражениях (2.1) будем опускать и брать $\nu < -1$.

При $\alpha = 1$ будем предполагать, что $\nu > 0$.

Рассмотрим сингулярные операторы

$$(S_{a, \alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{y-a}{x-a} \right)^\alpha \frac{\varphi(y)}{y-x} dy, \quad (S_{b, \alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{b-y}{b-x} \right)^\alpha \frac{\varphi(y)}{y-x} dy, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (S_{a, \alpha-1} \varphi)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{y-a}{x-a} \right)^{\alpha-1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy, \quad (S_{b, \alpha-1} \varphi)(x) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{b-y}{b-x} \right)^{\alpha-1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эти операторы ограничены в $L_p(a, b)$: первые два при $\frac{1}{p} - 1 < \alpha < \frac{1}{p}$, вторые два — при $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p} + 1$ ([7]).*

В настоящем параграфе выводятся ряд соотношений, связывающих операторы (2.1) с операторами (2.2), (2.3).

Поменяем порядок интегрирования в композициях $I_{a+}^\alpha S_{a,a}$, $I_{b-}^\alpha S_{b,b}$, $I_{a+}^\alpha S_{a,a-1}$, $I_{b-}^\alpha S_{b,b-1}$. Применяя формулы 3.228 (2) и 3.228 (1) из [8], получаем следующее утверждение:

Теорема 2.1. Пусть $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда при $0 \leq \alpha < \frac{1}{p}$ **

$$I_{b-}^\alpha \varphi = I_{a+}^\alpha (\cos(\alpha\pi) \varphi + \sin(\alpha\pi) S_{a,a} \varphi), \quad (2.4)$$

$$I_{a+}^\alpha \varphi = I_{b-}^\alpha (\cos(\alpha\pi) \varphi - \sin(\alpha\pi) S_{b,b} \varphi), \quad (2.5)$$

а при $\frac{1}{p} < \alpha \leq 1$

$$I_{b-}^\alpha \varphi = I_{a+}^\alpha (\cos(\alpha\pi) \varphi - \sin(\alpha\pi) S_{a,a-1} \varphi) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(t) (t-a)^{\alpha-1} dt, \quad (2.6)$$

$$I_{a+}^\alpha \varphi = I_{b-}^\alpha (\cos(\alpha\pi) \varphi + \sin(\alpha\pi) S_{b,b-1} \varphi) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(t) (b-t)^{\alpha-1} dt. \quad (2.7)$$

Равенства (2.4), (2.5) были получены ранее в работе [1]. Для достаточно гладких функций они выполняются при $0 \leq \alpha < 1$, а равенства (2.6), (2.7) — при $0 < \alpha < 2$.

2°. Используя результаты § 1, получим аналог теоремы 2.1 для степенно-логарифмических ядер.

Пусть

$$(P_{a,\varepsilon}^+ f)(x_1) = \{f(x_1), x_1 \in [a, a+\varepsilon]; 0, x_1 \notin [a, a+\varepsilon]\}, \quad 0 \leq \alpha < \alpha + \varepsilon < \frac{1}{p};$$

$$(P_{a,\varepsilon}^- f)(x_1) = \{f(x_1), x_1 \in [x-\varepsilon, a]; 0, x_1 \notin [x-\varepsilon, a]\}, \quad \frac{1}{p} < x - \varepsilon < a \leq 1;$$

$$\tilde{I}_\pm^\alpha f = c_\alpha \gamma^\alpha \left(I_{a_1}^\alpha \frac{\Gamma(a_1)}{\gamma_{a_1}} P_{a,\varepsilon}^\pm f \right)(x); \quad c_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha > 0; \\ 1, & \alpha = 0 \end{cases}.$$

* Указанные условия являются не только достаточными, но и необходимыми для ограниченности операторов (2.2), (2.3) ([7]).

Поэтому „плохой“ случай $\alpha = \frac{1}{p}$ в данной статье не рассматривается.

** При $\alpha = 0$ равенства (2.4), (2.5) понимаются в предельном смысле, то есть $\varphi = \varphi$.

Через V_1, V_2 и т. д. будем обозначать вполне непрерывные в $L_p(a, b)$ вольтерровские операторы.

Рассмотрим соотношение (2.4). Заменяем в нем x на x_1 и применим по a_1 оператор I_+^ν .

а) Преобразуем сначала левую часть получающегося равенства. Пусть $\nu > 0$ (при $\alpha = 0$ будем брать $\nu > 1$). Тогда

$$\tilde{I}_+^\nu I_{b-}^{\alpha_1} \varphi = c_\alpha \int_x^b \frac{\varphi(y) dy}{(y-x)^{1-\alpha}} \int_0^\varepsilon \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{y-x}{\gamma} \right)^t dt = \varphi * \left[\frac{\ln^{-\nu} \frac{\gamma}{x}}{x^{1-\alpha}} - \frac{\lambda_{-\nu}(x)}{x^{1-\alpha-\varepsilon}} \right] c_\alpha,$$

где

$$\lambda_{-\nu}(x) = \frac{x^{-\varepsilon}}{\Gamma(\nu)} \ln^{-\nu} \frac{\gamma}{x} \int_{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{x}}^\infty e^{-\tau} \tau^{\nu-1} d\tau = O\left(\ln^{-1} \frac{\gamma}{x}\right)$$

при $x \rightarrow 0$ ([8], формула 8.357).

В силу леммы 1.3 и равенства (2.4)

$$c_\alpha \varphi * \frac{\lambda_{-\nu}(x)}{x^{1-\alpha-\varepsilon}} = I_{b-}^{\alpha+\varepsilon} V_1 \varphi = I_{a+}^{\alpha+\varepsilon} N_{\alpha+\varepsilon} V_1 \varphi = I_{a+}^{\alpha+\nu} V_2 N_{\alpha+\varepsilon} V_1 \varphi,$$

где $N_t = \cos(t\pi) I + \sin(t\pi) S_{a,t}$, I — тождественный оператор. Таким образом, получаем

$$\tilde{I}_+^\nu I_{b-}^{\alpha_1} \varphi = I_{b-}^{\alpha+\nu} - I_{a+}^{\alpha+\nu} V_3, \text{ где } V_3 = V_2 N_{\alpha+\varepsilon} V_1. \quad (2.8)$$

Пусть теперь $\nu < 0$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{I}_+^\nu I_{b-}^{\alpha_1} \varphi &= c_\alpha \gamma^\alpha (-1)^{[-\nu]+1} \frac{d^{[-\nu]+1}}{d\alpha^{[-\nu]+1}} I_{a_1}^{1+\nu+[-\nu]} \frac{\Gamma(x_1)}{\gamma^{\alpha_1}} P_{\alpha, \varepsilon}^+ I_{b-}^{\alpha_1} \varphi = \\ &= c_\alpha \gamma^\alpha (-1)^{[-\nu]+1} \frac{d^{[-\nu]+1}}{d\alpha^{[-\nu]+1}} \left\{ \varphi * \left(\frac{x}{\gamma} \right)^\alpha \left[\frac{\ln^{-1-\nu-[-\nu]} \frac{\gamma}{x}}{x} - \frac{\lambda_{1+\nu+[-\nu]}(x)}{x^{1-\varepsilon}} \right] \right\} = \\ &= I_{b-}^{\alpha+\nu} \varphi - c_\alpha \varphi * \frac{\ln^{[-\nu]+1} \frac{\gamma}{x}}{x^{1-\alpha-\varepsilon}} \lambda_{1+\nu+[-\nu]}(x). \end{aligned}$$

Применяя лемму 1.3 и соотношение (2.4), получаем

$$c_\alpha \varphi * \frac{\ln^{[-\nu]+1} \frac{\gamma}{x}}{x^{1-\alpha-\varepsilon}} \lambda_{1+\nu+[-\nu]}(x) = I_{b-}^{\alpha} V_4 \varphi = I_{a+}^{\alpha+\nu} V_5 N_\alpha V_4,$$

откуда вытекает равенство, аналогичное (2.8).

б) Преобразуем теперь выражение

$$\tilde{I}_+^\nu \cos(\alpha_1 \pi) I_{a+}^{\alpha_1} \varphi = c_a \gamma^\alpha \varphi * \frac{1}{x} I_{\alpha_1}^\nu P_{\alpha, \varepsilon}^+ \cos(\alpha_1 \pi) \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha_1}.$$

Пусть $\nu > 0$. Интегрируя по частям, получаем

$$I_{\alpha_1}^\nu P_{\alpha, \varepsilon}^+ \cos(\alpha_1 \pi) \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha_1} = \left(\frac{x}{\gamma}\right)^\alpha \ln^{-\nu} \frac{\gamma}{x} [\cos \alpha \pi - \tilde{\lambda}(x)],$$

где

$$\tilde{\lambda}(x) = \int_{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{x}}^{\infty} e^{-t} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} dt + \int_0^{\varepsilon} \sin(\tau + \alpha) \pi d\tau \int_{\tau \ln \frac{\gamma}{x}}^{\infty} e^{-t} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} dt \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Отсюда, в силу леммы 1.3

$$\tilde{I}_+^\nu \cos(\alpha_1 \pi) I_{a+}^{\alpha_1} = I_{a+}^{\alpha_1 - \nu} (\cos(\alpha \pi) I + V_6). \quad (2.9)$$

Для $\nu < 0$ аналогичное соотношение получается так же, как и в случае а).

в) Рассмотрим, наконец, выражение $\tilde{I}_+^\nu I_{a+}^{\alpha_1} \sin(\alpha_1 \pi) S_{a, \alpha_1} \varphi$. Как и в случае б), все рассуждения мы проведем для $\nu > 0$. Незначительное увеличение выкладок для $\nu < 0$ с принципиальными трудностями не связано.

Произведем интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_+^\nu I_{a+}^{\alpha_1} \sin(\alpha_1 \pi) S_{a, \alpha_1} \varphi &= S_{a, \alpha} \varphi * \frac{c_a}{x^{1-\alpha}} \int_0^{\varepsilon} \sin(\alpha + \xi) \pi \left(\frac{x}{\gamma}\right)^\xi \frac{\xi^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} d\xi + \\ &+ \int_0^{\varepsilon} \left[S_{t+a}^\nu \varphi * \frac{1}{x^{1-\alpha}} \ln^{-\nu} \frac{\gamma}{x} \lambda(x, t) \right] dt, \text{ где } S_{t+a}^\nu \varphi = \frac{d}{dt} (S_{t+a} \varphi), \\ \lambda(x, t) &= \frac{c_a}{\Gamma(\nu)} \int_{t \ln \frac{\gamma}{x}}^{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{x}} e^{-\tau} \tau^{\nu-1} \sin\left(\alpha + \tau \ln^{-1} \frac{\gamma}{x}\right) \pi d\tau \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поскольку выражение, аналогичное первому слагаемому, уже рассматривалось в пункте б), то в силу леммы 1.3 имеем

$$\tilde{I}_+^\nu I_{a+}^{\alpha_1} \sin(\alpha_1 \pi) S_{a, \alpha_1} = I_{a+}^{\alpha_1 - \nu} (\sin(\alpha \pi) S_{a, \alpha} + V_7 + \int_0^{\varepsilon} V_t S_{t+a} dt), \quad (2.10)$$

где V_t — оператор-функция, вполне непрерывная в $L_p(a, b)$ при $t > 0$ (при $t = 0$ на основании первого утверждения леммы 1.3 полная непрерывность не имеет места).

Обращаясь к выкладкам леммы 1.2, легко убедиться, что оператор-функция V_t непрерывна по t в операторной топологии на $(0, \varepsilon]$ и ограничена равномерно по t на $[0, \varepsilon]$. Отсюда, в силу неравенства

$$\|S'_{t+\alpha}\| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau^{t+\alpha-\frac{1}{p}} \left| \frac{\ln \tau}{\tau-1} \right| d\tau$$

([3], лемма 3.3), вытекает полная непрерывность в $L_p(a, b)$ оператора $\int_0^b V_t S'_{t+\alpha} dt$.

Объединяя результаты, полученные в пунктах а), б), в), приходим к соотношению

$$I_{b-}^{\alpha, \nu} = I_{a+}^{\alpha, \nu} (\cos(\alpha\pi) I + \sin(\alpha\pi) S_{a, \alpha} + T), \quad (2.11)$$

где T — вполне непрерывный в $L_p(a, b)$ оператор.

Если к (2.11) применить слева и справа оператор $A: f(x) \rightarrow f(a+b-x)$, то получим аналог соотношения (2.5).

Для случая $\frac{1}{p} < \alpha \leq 1$ соответствующие соотношения получают-

ся аналогичным образом из (2.6), только с помощью оператора $\tilde{I}_-$.

Подводя итог проделанным рассуждениям, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 2.2. Пусть $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $-\infty < \nu < \infty^*$. Тогда при $0 \leq \alpha < \frac{1}{p}$

$$I_{b-}^{\alpha, \nu} \varphi = I_{a+}^{\alpha, \nu} (\cos(\alpha\pi) \varphi + \sin(\alpha\pi) S_{a, \alpha} \varphi + T_1 \varphi), \quad (2.12)$$

$$I_{a+}^{\alpha, \nu} \varphi = I_{b-}^{\alpha, \nu} (\cos(\alpha\pi) \varphi - \sin(\alpha\pi) S_{b, \alpha} \varphi + T_2 \varphi), \quad (2.13)$$

а при $\frac{1}{p} < \alpha \leq 1$

$$I_{b-}^{\alpha, \nu} \varphi = I_{a+}^{\alpha, \nu} (\cos(\alpha\pi) \varphi - \sin(\alpha\pi) S_{a, \alpha-1} \varphi + T_3 \varphi) + B_1 \varphi, \quad (2.14)$$

$$I_{a+}^{\alpha, \nu} \varphi = I_{b-}^{\alpha, \nu} (\cos(\alpha\pi) \varphi + \sin(\alpha\pi) S_{b, \alpha-1} \varphi + T_4 \varphi) + B_2 \varphi, \quad (2.15)$$

где T_i ($i = 1, 2, 3, 4$) вполне непрерывные в $L_p(a, b)$ операторы,

$$B_1 \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(t) (\tilde{I}_-^{\nu} (t-a)^{\alpha-1})(x) dt; \quad B_2 \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \\ \times \int_a^b \varphi(t) (\tilde{I}_-^{\nu} (b-t)^{\alpha-1})(x) dt.$$

Из соотношений (2.12), (2.13) получаем

* См. сноску на стр. 447.

Следствие 1. При $0 \leq \alpha < \frac{1}{p}$ банаховы пространства $I_{a+}^{\alpha, \nu}(L_p(a, b))$ и $I_{b-}^{\alpha, \nu}(L_p(a, b))$ совпадают с точностью до эквивалентности норм.

Для случая $\frac{1}{p} < \alpha \leq 1$ подобное утверждение не выполняется.

Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.1. Пусть $\frac{1}{p} < \alpha \leq 1$. Для того чтобы выполнялось равенство

$$I_{a+}^{\alpha, \nu} \varphi = k, \text{ где } \varphi \in L_p(a, b), k = \text{const},$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi = 0$ и $k = 0$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. В силу леммы 1.2

$$I_{a+}^{\alpha, \nu} \varphi = (I + V) \varphi * \mu_{\alpha, \nu} = k,$$

где V — вполне непрерывный в $L_p(a, b)$ вольтерровский оператор.

Свертывая это равенство с функцией $\frac{1}{\gamma} \mu_{1-\alpha, -\nu}$, на основании соотношения (1.1) получаем

$$\int_a^x (\varphi + V\varphi)(t) dt = \frac{k}{\gamma} \int_0^{x-a} \mu_{1-\alpha, -\nu}(t) dt,$$

откуда $(I + V) \varphi = \frac{k}{\gamma} \mu_{1-\alpha, -\nu}(x-a)$. В силу (1.2) $\mu_{1-\alpha, -\nu}(x-a) \in \bar{L}_p(a, b)$, поэтому $k = 0$. Но тогда и $\varphi = 0$, как решение однородного уравнения Вольтерра.

Доказанная лемма очевидно справедлива и для правосторонних интегралов $I_{b-}^{\alpha, \nu}$.

Лемма 2.1 дает нам возможность ввести новые банаховы пространства X_+ , X_- как прямые суммы

$$X_+ = I_{a+}^{\alpha, \nu}(L_p(a, b)) \oplus R, \quad X_- = I_{b-}^{\alpha, \nu}(L_p(a, b)) \oplus R,$$

где R — одномерное вещественное пространство. Нормы в этих пространствах определим следующим образом:

$$\|f\|_{X_+} = \|I_{a+}^{\alpha, \nu} \varphi + h\|_{X_+} = \|\varphi\|_{L_p(a, b)} + |h|,$$

$$\|f\|_{X_-} = \|I_{b-}^{\alpha, \nu} \varphi + h\|_{X_-} = \|\varphi\|_{L_p(a, b)} + |h|.$$

Корректность такого определения вытекает из леммы 2.1.

Теперь на основании соотношений (2.14), (2.15) можно сформулировать

Следствие 2. Пространства X_+ и X_- совпадают с точностью до эквивалентности норм.

§ 3. Операторы типа потенциала

В настоящем параграфе будет получено утверждение о нетеровости оператора типа потенциала (1).

Относительно функции $s(x, y)$ введем следующие предположения:

$$1) \quad s(x, y) = \{u(x, y), x > y; v(x, y), x < y\}.$$

2) Функции $u(x) = u(x, x-0)$, $v(x) = v(x, x+0)$ непрерывны на $[a, b]$.

3) При $\alpha < 1$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют на $[a, b]$ по переменной x условию Гельдера порядка $\lambda > \alpha$ равномерно по y .

4) При $\alpha = 1$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы по x , причем справедливы неравенства:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq \frac{\text{const}}{(x-y)^{1-\varepsilon_1}}, \quad \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq \frac{\text{const}}{(y-x)^{1-\varepsilon_1}}, \quad \varepsilon_1 > 0;$$

$$|u(x, y) - u(y, y)| \leq \text{const} (x-y)^{\varepsilon_2}, \quad |v(x, y) - v(y, y)| \leq \text{const} (y-x)^{\varepsilon_2}, \\ \varepsilon_2 > 0.$$

Действие оператора (1) будем рассматривать из пространства $L_p(a, b)$ $1 < p < \infty$ в специальное банахово пространство X , которое в силу следствий 1, 2 из теоремы 2.2 вводится следующим образом:

$$X = \begin{cases} I_{a+}^{\alpha, \gamma}(L_p(a, b)) = I_{b-}^{\alpha, \gamma}(L_p(a, b)), & 0 \leq \alpha < \frac{1}{p}, \\ X_+ = X_-, & \frac{1}{p} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Представим оператор (1) в виде: $K^{\alpha, \gamma} = K_0^{\alpha, \gamma} + T_1^{\alpha, \gamma} + T_2^{\alpha, \gamma}$, где $K_0^{\alpha, \gamma} \varphi = I_{a+}^{\alpha, \gamma} u\varphi + I_{b-}^{\alpha, \gamma} v\varphi$,

$$(T_1^{\alpha, \gamma} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{u(x, y) - u(y, y)}{(x-y)^{1-\alpha}} \ln^{\gamma} \frac{\gamma}{x-y} \varphi(y) dy,$$

$$(T_2^{\alpha, \gamma} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{v(x, y) - v(y, y)}{(y-x)^{1-\alpha}} \ln^{\gamma} \frac{\gamma}{y-x} \varphi(y) dy.$$

Лемма 3.1. Операторы $T_{1,2}^{\alpha, \gamma}$ вполне непрерывны из $L_p(a, b)$ в X .

Доказательство. В работе [2] были выведены следующие соотношения:

$$T_1^{\alpha, 0} = I_{a+}^{\alpha} M_1^{\alpha}, \quad T_2^{\alpha, 0} = I_{b-}^{\alpha} M_2^{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1), \quad (3.1)$$

где

$$(M_1^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^x \varphi(s) ds \int_s^x \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha} (x-t)^{1+\alpha}} dt,$$

$$(M_2^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \int_x^b \varphi(s) ds \int_x^s \frac{v(x, s) - v(t, s)}{(s-t)^{1-\alpha} (t-x)^{1+\alpha}} dt,$$

— вполне непрерывные в $L_p(a, b)$ операторы.

Преобразовывая равенства (3.1) с помощью оператора $\tilde{I}_+$, аналогично тому, как это делалось в § 2 с равенствами (2.4), (2.5) (см. также [3], § 4), получаем

$$T_1^{\alpha, \nu} = I_{a+}^{\alpha, \nu} M_1^{\alpha, \nu}, \quad T_2^{\alpha, \nu} = I_{b-}^{\alpha, \nu} M_2^{\alpha, \nu} \quad (0 \leq \alpha < 1), \quad (3.2)$$

где $M_{1,2}^{\alpha, \nu}$ — некоторые вполне непрерывные в $L_p(a, b)$ операторы.

Для $0 \leq \alpha < \frac{1}{p}$ утверждение леммы вытекает непосредственно из (3.2). В случае $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ введем операторы вложения

$$i(I_{a+}^{\alpha, \nu}(L_p(a, b)) \rightarrow X), \quad j(I_{b-}^{\alpha, \nu}(L_p(a, b)) \rightarrow X): if = f + 0, \quad jf = f + 0.$$

Тогда получаем

$$T_1^{\alpha, \nu}(L_p(a, b) \rightarrow X) = i I_{a+}^{\alpha, \nu} M_1^{\alpha, \nu}, \quad T_2^{\alpha, \nu}(L_p(a, b) \rightarrow X) = j I_{b-}^{\alpha, \nu} M_2^{\alpha, \nu},$$

откуда следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь предельный случай $\alpha = 1$. Так как

$$(T_1^{1, \nu} \varphi)(a) = 0, \quad \text{то} \quad T_1^{1, \nu} \varphi = I_{a+}^1 \tilde{A} \varphi,$$

где оператор

$$\tilde{A} : \varphi(x) \rightarrow \frac{d}{dx} (T_1^{1, \nu} \varphi)(x)$$

ограничен в $L_p(a, b)$ в силу предположений относительно функции $s(x, y)$. Отсюда, учитывая вложение $I_{a+}^1(L_p(a, b)) \rightarrow I_{a+}^{1, \nu}(L_p(a, b))$ (см. лемму 1.3), а также ограниченность оператора $i(I_{a+}^{1, \nu}(L_p(a, b)) \rightarrow X)$, получаем полную непрерывность оператора $T_1^{1, \nu}$ из $L_p(a, b)$ в X . Для оператора $T_2^{1, \nu}$ все рассуждения проводятся аналогично.

Из доказанной леммы вытекает, что нетеровость оператора $K^{\alpha, \nu}$ эквивалентна нетеровости модельного оператора $K_0^{\alpha, \nu}$, который в силу теоремы 2.2 представим в виде:

$$K_0^{\alpha, \nu} = I_{a+}^{\alpha, \nu} N^{\alpha} + B^{\alpha}, \quad (3.3)$$

где

$$N^{\alpha} \varphi = \begin{cases} (u + v \cos \alpha \pi) \varphi + \sin(\alpha \pi) S_{\alpha, \alpha} v \varphi + T_1 v \varphi, & 0 \leq \alpha < \frac{1}{p}, \\ (u + v \cos \alpha \pi) \varphi - \sin(\alpha \pi) S_{\alpha, \alpha-1} v \varphi + T_3 v \varphi, & \frac{1}{p} < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

$$B^{\alpha} = \left\{ 0, 0 \leq \alpha < \frac{1}{p}; B_1, \frac{1}{p} < \alpha \leq 1 \right\}$$

(по поводу остальных обозначений см. (2.12), (2.14)).

Из (3.3) видно, что вопрос о нетеровости оператора $K_0^{\alpha, \nu} (L_p(a, b) \rightarrow X)$ сводится к вопросу о нетеровости сингулярного интегрального оператора $N^{\alpha} (L_p(a, b) \rightarrow L_p(a, b))$. Применяя к нашему случаю результаты из [9], получаем основную теорему настоящей статьи.

Теорема 3.1. Для того чтобы оператор типа потенциала $K^{\alpha, \nu}$ был нетеровым из $L_p(a, b)$ в X , необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$1) \inf |u(x) + v(x) e^{i \alpha \pi \operatorname{sgn}(\alpha - \frac{1}{p})}| > 0, x \in [a, b];$$

2) функция

$$G(x) = \begin{cases} \frac{u(x) + v(x) e^{i \alpha \pi \operatorname{sgn}(\frac{1}{p} - \alpha)}}{u(x) + v(x) e^{i \alpha \pi \operatorname{sgn}(\alpha - \frac{1}{p})}}, & x \in (a, b], \\ 1, & x \in [-\infty, \infty] \setminus (a, b], \end{cases}$$

является ω -неособенной, где

$$\omega = \left\{ (p, -\alpha p), 0 \leq \alpha < \frac{1}{p}; (p, (1-\alpha)p), \frac{1}{p} < \alpha \leq 1 \right\}.$$

При выполнении этих условий

$$\operatorname{Ind} K^{\alpha, \nu} = -\operatorname{ind}_{\omega} G(x) - \frac{1 - \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{p} - \alpha\right)^*}{2}.$$

Заметим, что в крайних точках $\alpha = 0, 1$ необходимые и достаточные условия нетеровости заключаются в выполнении неравенств

$$c(x, x-0) + c(x, x+0) \neq 0 \text{ при } \alpha = 0, c(x, x-0) - c(x, x+0) \neq 0$$

$$\text{при } \alpha = 1 \text{ и } \operatorname{Ind} K^{\alpha, \nu} = \{0, \alpha = 0; -1, \alpha = 1\}.$$

В заключение отметим следующий интересный факт, вытекающий из теоремы 3.1.

* $\operatorname{Ind} K^{\alpha, \nu} = \dim \ker K^{\alpha, \nu} - \dim \operatorname{coker} K^{\alpha, \nu}.$

Теорема 3.2. Введение в ядро оператора типа потенциала

$$(K^{\alpha, \nu})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{c(x, y)}{|x - y|^{1-\alpha}} \varphi(y) dy$$

множителя $\ln^{\nu} \frac{1}{|x - y|}$, ослабляющего или усиливающего (в зависимости от знака ν) особенность ядра на диагонали, изменяя образ оператора, не влияет на его нетеровость в том смысле, что нетеровость оператора $K^{\alpha, \nu}$ из $L_p(a, b)$ в X эквивалентна нетеровости в $L_p(a, b)$ сингулярного интегрального оператора

$$N_0^{\alpha} \varphi = \begin{cases} (u + v \cos \alpha\pi) \varphi + \sin(\alpha\pi) S_{\alpha, \alpha} v\varphi, & 0 \leq \alpha < \frac{1}{p}, \\ (u + v \cos \alpha\pi) \varphi - \sin(\alpha\pi) S_{\alpha, \alpha-1} v\varphi, & \frac{1}{p} < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

не зависящего от ν .

Ростовский государственный
университет

Поступила 20.IV.1976

Բ. Ս. ՌԱԲԻՆ. Վերջավոր հատվածի վրա որոշված աստիճանա-լոգարիթմական կորիզ-
ներով պոտենցիալի տիպի օպերատորների նյութերականությունն ուսումնասիրելու բնօրինակ
մեթոդ (ամփոփում)

Հորվածում ստացված է նյութերականության հայտանիշ աստիճանա-լոգարիթմական կո-
րիզներով օպերատորների համար, որոնք գործում են $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$ տարածություն-
ների որոշակի ձևով կառուցված X բանախյան տարածության մեջ: Ուսումնասիրության մեթոդը
հիմնված է ըստ աստիճանի ցուցչի կամայական դիֆերենցիալ գործողության և վոլտերայի
տիպի բարձրագույն տրանսցենդենտ ֆունկցիաների հատկությունների վրա:

B. S. RUBIN. A Neterity criterion for potential-type operators with
power-logarithmic kernels on a finite segment (summary)

In this paper Neterity criterion is obtained for the potential type operators with power-logarithmic kernels, acting from $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$ into special Banach space X . The method is based on arbitrary order differentiation with respect to the power and on properties of Volterra type functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Г. Самко. Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования, Дифференц. уравнения, IV, № 2, 1968.
2. Б. С. Рубин. Об операторах типа потенциала на отрезке вещественной оси, Изв. вузов, Матем., № 6, 1973.
3. Б. С. Рубин. Операторы типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами в случае неотрицательного показателя степени при логарифме, Изв. СХНЦВШ, Сер. естеств. наук, № 3, 1976.
4. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье, СМБ.М., Изд. „Наука“, 1967.

5. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука“, 1966.
6. П. П. Забрейко. О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра, Лит. Матем. сб., 7, № 2, 1967.
7. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник. О сингулярных интегральных уравнениях с неограниченными коэффициентами, Матем. исследования, 5, вып. 3, 1970.
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
9. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник. О спектре сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p с весом, ДАН СССР, 185, № 4, 1969.
10. I. D. Tamarkin. On integrable solutions of Abel's integral equation, Annals of Math., (2), 31, 1930.

Г. В. ВИРАБЯН

О КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

Ряд задач математической физики, связанный с теорией малых колебаний континуумов (гидродинамическая устойчивость, теория волноводов, малые колебания вращающейся жидкости и др.), приводят к изучению квадратичного операторного пучка

$$L(\lambda) \equiv \lambda^2 I + \lambda \cdot B + C \quad (1)$$

в гильбертовом пространстве H .

Для этого пучка ставится вопрос о так называемой двукратной полноте системы собственных и присоединенных элементов (С.П.Э.), впервые введенной и изученной в работе [1] М. В. Келдыша.

В дальнейших работах как советских, так и зарубежных авторов, были установлены различные критерии о кратной полноте системы С.П.Э.

Однако во всех, по крайней мере известных нам, работах квадратичные операторные пучки с непрерывным спектром не рассмотрены.

В настоящей работе для одного класса самосопряженных квадратичных операторных пучков вводится понятие непрерывного спектра и делается попытка построения спектральной теории этих пучков при наличии непрерывного спектра.

0°. Здесь и всюду в дальнейших параграфах будем рассматривать квадратичный операторный пучок (1), где относительно линейных ограниченных операторов B и C , переводящих гильбертово пространство H в себя, предполагается, что

1. Оператор B самосопряженный: $B = B^*$.
2. Оператор C равномерно отрицательно определенный:

$$C \leq -\alpha \cdot I \quad (0 < \alpha).$$

Обозначим через H гильбертово пространство, которое представляет ортогональную сумму двух копий гильбертова пространства H

$$H = H \oplus H \quad (2)$$

со скалярным произведением

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle \equiv (-Cu_1, v_1) + (u_2, v_2), \quad (3)$$

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H, \quad (4)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — исходное скалярное произведение гильбертова пространства H .

В пространстве H рассмотрим матричный оператор

$$\Pi = \begin{pmatrix} O & I \\ -C & -B \end{pmatrix}, \quad (5)$$

который порождается квадратичным операторным пучком (1) при его линейаризации [2]. В работе М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [2] установлена тесная спектральная связь квадратичного операторного пучка (1) и ассоциированного с ним оператора (случай, когда оператор B — самосопряженный, C — положительно определенный компактный оператор). В частности показано, что собственные значения пучка (1) и оператора Π совпадают вместе с их собственными и алгебраическими кратностями и что, если у оператора Π в гильбертовом пространстве H имеется полная система корневых векторов, то у операторного пучка (1) имеется двукратно полная система С.П.Э. и наоборот. Так что полноту системы корневых векторов оператора Π можно брать как новое определение двукратной полноты С.П.Э. квадратичного операторного пучка (1), которое эквивалентно первоначальному определению М. В. Келдыша [1].

Исходя из вышеприведенного, нам представляется естественным следующее определение непрерывного спектра для операторного пучка (1).

Определение 1. Мы скажем, что квадратичный операторный пучок (1) имеет чисто непрерывный (простой) спектр в гильбертовом пространстве H , если спектр самосопряженного оператора Π чисто непрерывен (и простой) в гильбертовом пространстве $H = H \oplus H$. Заметим, что при сделанных выше предположениях 1 и 2, оператор Π оказывается самосопряженным по отношению скалярного произведения (3). В самом деле, для произвольных векторов

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ и } \hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

пространства H имеем

$$\begin{aligned} \langle \Pi \hat{u}, \hat{v} \rangle &= (-Cu_2, v_1) + (-Cu_1 - Bu_2, v_2) = \\ &= (-Cu_1, v_2) + (u_2, -Cv_1 - Bv_2) = \langle \hat{u}, \Pi \hat{v} \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

§ 1. О собственных дифференциалах квадратичного пучка $L(\lambda)$

Пусть квадратичный операторный пучок (1) в гильбертовом пространстве H имеет чисто непрерывный спектр. Тогда оператор Π в гильбертовом пространстве $H = H \oplus H$ будет иметь чисто непрерывный спектр.

Пусть спектр оператора Π в H и, следовательно, спектр квадратичного пучка $L(\lambda)$ находится в промежутке $[m, M]$.

Определение 2. Если непрерывная в промежутке $[m, M]$ функция $u(\lambda) \neq 0$ со значениями из гильбертового пространства H , для любого промежутка Δ из $[m, M]$ удовлетворяет соотношению

$$C[\Delta u(\lambda)] + B \left[\int_{\Delta} \lambda du(\lambda) \right] + \int_{\Delta} \lambda d \left[\int_m^{\lambda} \lambda du(\lambda) \right] = 0, \quad (7)$$

то $u(\lambda)$ будем называть собственным дифференциалом или дифференциальным решением для квадратичного операторного пучка (1). Мы скажем, что система собственных дифференциалов $\{u_p(\lambda)\}_1^\infty$ пучка (1) образует полную в H систему, если из ортогональности $(v, u_p(\lambda)) = 0$, $p = 1, 2, 3, \dots$, $v \in H$ следует $v = 0$.

Наконец, систему собственных дифференциалов пучка (1) назовем двукратно полной, если соответствующая система собственных дифференциалов оператора Π полна в ортогональной сумме гильбертовых пространств $H = H \oplus H$.

Имеет место следующая

Теорема 1.1. Если спектр квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ чисто непрерывный, то у этого пучка имеется двукратно полная система собственных дифференциалов в гильбертовом пространстве H .

Доказательство. Из условия теоремы следует, что самосопряженный оператор Π в гильбертовом пространстве H имеет чисто непрерывный спектр и следовательно обладает полной системой собственных дифференциалов $\{\hat{u}(\lambda)\}$ в H .

Для каждого собственного дифференциала $\hat{u}(\lambda) = \begin{pmatrix} u_1(\lambda) \\ u_2(\lambda) \end{pmatrix}$, $u_1(\lambda) \in H$, $u_2(\lambda) \in H$ этой системы и для произвольного отрезка Δ из $[m, M]$ имеем

$$\Pi[\Delta \hat{u}(\lambda)] = \int_{\Delta} \lambda d \hat{u}(\lambda), \quad (8)$$

или, что то же самое

$$\begin{pmatrix} \Delta u_2(\lambda) \\ -C\Delta u_1(\lambda) - B\Delta u_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Delta} \lambda du_1(\lambda) \\ \int_{\Delta} \lambda du_2(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Отсюда получаем систему равенств

$$\begin{aligned} \Delta u_2(\lambda) &= \int_{\Delta} \lambda du_1(\lambda), \\ -C\Delta u_1(\lambda) - B\Delta u_2(\lambda) &= \int_{\Delta} \lambda du_2(\lambda). \end{aligned} \quad (10)$$

Из первого равенства системы (10) находим

$$u_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda \, du_1(\lambda) + u_2(m). \quad (11)$$

Подставляя последнее во второе равенство системы (10), получим

$$C[\Delta u_1(\lambda)] + B \left[\int_{\Delta} \lambda d_1(\lambda) \right] + \int_{\Delta} \lambda d \left[\int_m^{\lambda} \lambda d u_1(\lambda) \right] = 0. \quad (12)$$

Далее из непрерывности $\hat{u}(\lambda)$ в H и из того, что $\hat{u}(\lambda) \neq \hat{0}$, очевидным образом следует непрерывность функции $u_1(\lambda)$ в H и что $u_1(\lambda) \neq 0$.

Таким образом, мы доказали, что первые компоненты собственных дифференциалов оператора Π являются собственными дифференциалами для квадратичного пучка $L(\lambda)$.

Покажем, что полученная система собственных дифференциалов $\{u_1(\lambda)\}$ образует полную систему в гильбертовом пространстве H . В самом деле, пусть элемент $v \in H$ и

$$(v, u_1(\lambda)) = 0 \quad (13)$$

для всех $u_1(\lambda) \in \{u_1(\lambda)\}$.

Тогда

$$0 = (v, u_1(\lambda)) = (-C C^{-1} v, u_1(\lambda)) + (0, u_2(\lambda)) = \langle \hat{v}, \hat{u}(\lambda) \rangle, \quad (13^*)$$

где

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} C^{-1} v \\ 0 \end{pmatrix} \in H, \quad \hat{u}(\lambda) \in \{\hat{u}(\lambda)\}.$$

Но система собственных дифференциалов $\{\hat{u}(\lambda)\}$ оператора Π полна в гильбертовом пространстве H , и поэтому $\hat{v} = \hat{0}$, т. е. $v = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.1. Через систему собственных дифференциалов квадратичного пучка $L(\lambda)$ можно восстановить соответствующую систему собственных дифференциалов оператора Π в H .

Доказательство. Пусть $u(\lambda)$ — собственный дифференциал квадратичного пучка $L(\lambda)$ в H . Это значит непрерывная, отличная от тождественного нуля функция со значениями из гильбертового пространства H , удовлетворяет соотношению

$$C[\Delta u(\lambda)] + B \left[\int_{\Delta} \lambda du(\lambda) \right] + \int_{\Delta} \lambda d \left[\int_m^{\lambda} \lambda d u(\lambda) \right] = 0 \quad (14)$$

для произвольного промежутка Δ из $[m, M]$.

Положим

$$\hat{u}(\lambda) = \begin{pmatrix} u(\lambda) \\ \int_m^\lambda \lambda du(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Тогда очевидно, что векторнозначная функция $\hat{u}(\lambda)$ непрерывна в гильбертовом пространстве H , тождественно отлична от нуля, и в силу соотношения (15), для любого отрезка Δ из $[m, M]$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \Pi[\Delta \hat{u}(\lambda)] &= \begin{pmatrix} O & I \\ -C & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u(\lambda) \\ \int_\Delta \lambda du(\lambda) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \int_\Delta \lambda du(\lambda) \\ -C[\Delta u(\lambda)] - B\left[\int_\Delta \lambda du(\lambda)\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_\Delta \lambda du(\lambda) \\ \int_\Delta \lambda d\left[\int_m^\lambda \lambda du(\lambda)\right] \end{pmatrix} = \int_\Delta \lambda d\hat{u}(\lambda). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, $\hat{u}(\lambda)$ является собственным дифференциалом оператора Π в H . Теорема доказана.

Обозначим через E_λ спектральное семейство проекторов оператора Π в H , и пусть $P(Q)$ — оператор, проектирующий гильбертовое пространство H в $H \oplus O$ ($O \oplus H$).

Теорема 3.1. *Всякий собственный дифференциал квадратичного пучка $L(\lambda)$, равный нулевому элементу при $\lambda = m$, имеет вид*

$$u(\lambda) = PE_\lambda \hat{u}(M), \text{ где } \hat{u}(M) = \begin{pmatrix} u(M) \\ \int_m^M \lambda du(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $u(\lambda)$ — собственный дифференциал квадратичного операторного пучка (1). Тогда согласно вышедшей

ной теореме 2.1 векторнозначная функция $\hat{u}(\lambda) = \begin{pmatrix} u(\lambda) \\ \int_m^\lambda \lambda du(\lambda) \end{pmatrix}$ бу-

дет собственным дифференциалом оператора Π в H . Поскольку

$\hat{u}(m) = \begin{pmatrix} u(m) \\ \int_m^m \lambda du(\lambda) \end{pmatrix} = \hat{0}$, то по теореме 4.1 (см. [3], стр. 363) имеем

$$\hat{u}(\lambda) = E_\lambda \hat{u}(M) = \begin{pmatrix} PE_\lambda \hat{u}(M) \\ QE_\lambda \hat{u}(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\lambda) \\ \int_m^\lambda \lambda du(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Отсюда заключаем $u(\lambda) = PE_\lambda \hat{u}(M)$, что и требовалось доказать.

§ 2. О собственных функционалах квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$

В работах Р. А. Александрияна [4], [5] в связи с исследованием спектральных разложений дифференциальных операторов гиперболического типа, порожденных задачей малых колебаний вращающейся жидкости, впервые сформулировано важное понятие собственного функционала и, в частности, установлена одна общая теорема (см. [6]) о спектральном разложении по системе собственных функционалов для произвольного самосопряженного оператора с чисто непрерывным спектром.

Цель настоящего параграфа — перенесение вышеупомянутой теоремы Р. А. Александрияна на квадратичные операторные пучки $L(\lambda)$ с чисто непрерывным спектром.

Пусть $\mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}$ — инвариантное относительно оператора

$$L(\lambda_0) = \lambda_0^2 I + \lambda_0 B + C \quad (\mathcal{Q}_{L(\lambda_0)} \subseteq \mathcal{Q}_{L(\lambda_0)})$$

линейное топологическое пространство, состоящее из всюду плотного в H множества элементов и более сильной топологией, чем топология исходного гильбертового пространства H . Обозначим через $\mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}^*$ сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов над топологическим пространством $\mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}$. Тогда очевидно включение

$$\mathcal{Q}_{L(\lambda_0)} \subseteq H \subseteq \mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}^*. \quad (18)$$

Определение 3. Линейный непрерывный функционал $t_{\lambda_0} \in \mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}^*$ назовем собственным функционалом квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$, соответствующее собственному значению $\lambda = \lambda_0$, если для любого элемента $\varphi \in \mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}$ выполняется соотношение

$$t_{\lambda_0}(\lambda_0^2 \varphi + \lambda_0 B\varphi + C\varphi) = 0. \quad (19)$$

Предположим, что спектр квадратичного пучка $L(\lambda)$ простой и чисто непрерывный. Тогда в силу определения 1 спектр самосопряженного оператора P в гильбертовом пространстве H простой и чисто непрерывный. Поэтому на основании общей теоремы Р. А. Александрияна [6] существует линейное топологическое пространство $\mathcal{Q}_P$, состоящее из всюду плотного в H множества элементов, сходимость в котором влечет сходимость в H и семейство функционалов $T_\lambda \in \mathcal{Q}_P^*$ со следующими свойствами:

$$1^\circ. \Pi \Omega_\Pi \subset \Omega_\Pi \text{ (инвариантность)}, \quad (20)$$

$$2^\circ. T_\lambda (\Pi \hat{\varphi}) = \lambda \cdot T_\lambda (\hat{\varphi}), \quad \hat{\varphi} \in \Omega_\Pi \text{ (диагональность)}, \quad (21)$$

$$3^\circ. \langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cdot T_\lambda (\hat{\varphi}) d\rho(\lambda), \quad \hat{f} \in H, \quad \hat{\varphi} \in \Omega_\Pi \quad (22)$$

(формула разложения),

$$4^\circ. \|\hat{f}\|_H^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |T_\lambda(\hat{f})|^2 d\rho(\lambda), \quad \hat{f} \in \Omega_\Pi \quad (23)$$

(полнота).

Здесь $\rho(\lambda) = \langle E_\lambda \hat{g}, \hat{g} \rangle$, где E_λ — спектральная функция оператора Π в H , $\hat{g}$ — порождающий элемент.

Обозначим через Ω_1 (Ω_2) множество первых (вторых) компонент всевозможных векторов $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ из линейного пространства Ω_Π .

Очевидно, что Ω_1 (Ω_2) является линейным многообразием в гильбертовом пространстве H . В самом деле, пусть $\varphi_1, \psi_1 \in \Omega_1$. Тогда они являются первыми компонентами векторов $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ из Ω_Π и, следовательно, для любых чисел α, β

$$\alpha \hat{\varphi} + \beta \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \alpha\varphi_1 + \beta\psi_1 \\ \alpha\varphi_2 + \beta\psi_2 \end{pmatrix} \in \Omega_\Pi, \quad (24)$$

т. е. $\alpha\varphi_1 + \beta\psi_1 \in \Omega_1$.

Положим

$$\hat{\Omega}_1 = \left\{ \hat{\varphi}; \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_1 \in \Omega_1 \right\}; \hat{\Omega}_2 = \left\{ \hat{\psi}; \hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \psi_2 \in \Omega_2 \right\}. \quad (25)$$

Относительно линейного пространства Ω_Π предположим, что оно представляется как ортогональная сумма подпространств Ω_i ($i = 1, 2$)

$$\Omega_\Pi = \Omega_1 \oplus \Omega_2. \quad (26)$$

В пространстве Ω_2 определим сходимость следующим образом. Мы скажем

$$\varphi^{(n)} \rightarrow 0 \text{ в } \Omega_2 \text{ } (\varphi^{(n)} \in \Omega_2), \text{ если } \hat{\varphi}_1^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0},$$

$$\hat{\varphi}_2^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ C\varphi_n \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0} \text{ и } \hat{\varphi}_3^{(n)} = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0} \text{ в } \Omega_\Pi.$$

Пространство Ω_2 с такой сходимостью обозначим через Ω_L . Поскольку сходимость в Ω_L сильнее, чем сходимость исходного гильбертова пространства H , то имеет место следующее оснащение:

$$1^\circ. \Pi \Omega_n \subset \Omega_n \text{ (инвариантность),} \quad (20)$$

$$2^\circ. T_\lambda (\Pi \hat{\varphi}) = \lambda \cdot T_\lambda (\hat{\varphi}), \quad \hat{\varphi} \in \Omega_n \text{ (диагональность),} \quad (21)$$

$$3^\circ. \langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cdot T_\lambda (\hat{\varphi}) d\rho(\lambda), \quad \hat{f} \in H, \quad \hat{\varphi} \in \Omega_n \quad (22)$$

(формула разложения),

$$4^\circ. \|\hat{f}\|_H^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |T_\lambda (\hat{f})|^2 d\rho(\lambda), \quad \hat{f} \in \Omega_n \quad (23)$$

(полнота).

Здесь $\rho(\lambda) = \langle E_\lambda \hat{g}, \hat{g} \rangle$, где E_λ — спектральная функция оператора Π в H , $\hat{g}$ — порождающий элемент.

Обозначим через Ω_1 (Ω_2) множество первых (вторых) компонент всевозможных векторов $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ из линейного пространства Ω_n .

Очевидно, что Ω_1 (Ω_2) является линейным многообразием в гильбертовом пространстве H . В самом деле, пусть $\varphi_1, \psi_1 \in \Omega_1$. Тогда они являются первыми компонентами векторов $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ из Ω_n и, следовательно, для любых чисел α, β

$$\alpha \hat{\varphi} + \beta \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \alpha \varphi_1 + \beta \psi_1 \\ \alpha \varphi_2 + \beta \psi_2 \end{pmatrix} \in \Omega_n, \quad (24)$$

т. е. $\alpha \psi_1 + \beta \psi_1 \in \Omega_1$.

Положим

$$\hat{\Omega}_1 = \left\{ \hat{\varphi}; \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_1 \in \Omega_1 \right\}; \quad \hat{\Omega}_2 = \left\{ \hat{\psi}; \hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \psi_2 \in \Omega_2 \right\}. \quad (25)$$

Относительно линейного пространства Ω_n предположим, что оно представляется как ортогональная сумма подпространств Ω_i ($i = 1, 2$)

$$\Omega_n = \Omega_1 \oplus \Omega_2. \quad (26)$$

В пространстве Ω_2 определим сходимость следующим образом. Мы скажем

$$\varphi^{(n)} \rightarrow 0 \text{ в } \Omega_2 \text{ } (\varphi^{(n)} \in \Omega_2), \text{ если } \hat{\varphi}_1^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0},$$

$$\hat{\varphi}_2^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ C\varphi_n \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0} \text{ и } \hat{\varphi}_3^{(n)} = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0} \text{ в } \Omega_n.$$

Пространство Ω_2 с такой сходимостью обозначим через Ω_L . Поскольку сходимость в Ω_L сильнее, чем сходимость исходного гильбертова пространства H , то имеет место следующее оснащение:

Пусть φ — произвольный элемент из Ω_L .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} t_\lambda^{(1)}(L_\lambda(\varphi)) &= t_\lambda^{(1)}(\lambda^2\varphi + \lambda B\varphi + C\varphi) = T_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^2\varphi + \lambda B\varphi + C\varphi \end{pmatrix} = \\ &= T_\lambda \begin{pmatrix} \lambda\varphi_1 - \varphi_2 \\ \lambda\varphi_2 + B\varphi_2 + C\varphi_1 \end{pmatrix} = -T_\lambda(\Pi\hat{\varphi}) + \lambda T_\lambda(\hat{\varphi}) = 0, \\ t_\lambda^{(2)}(L_\lambda(\varphi)) &= T_\lambda \begin{pmatrix} \lambda L_\lambda(\psi) \\ CL_\lambda(\psi) \end{pmatrix} = \lambda T_\lambda \begin{pmatrix} L_\lambda(\psi) \\ \frac{1}{\lambda} CL_\lambda(\psi) \end{pmatrix} = \\ &= \lambda T_\lambda \begin{pmatrix} \psi_2 - \lambda\psi_1 \\ -C\psi_1 - B\psi_2 - \lambda\psi_2 \end{pmatrix} = \lambda T_\lambda(\Pi\hat{\psi} - \lambda\hat{\psi}) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\varphi_1 = \varphi, \varphi_2 = \lambda\varphi, \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \Omega_n,$$

$$\psi_1 = -\frac{1}{\lambda} L_\lambda(\psi), \psi_2 = 0, \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \Omega_n.$$

Здесь был использован тот факт, что $T_\lambda \in \Omega_n^*$ является собственным функционалом оператора Π . Таким образом, системы вышестроенных линейных непрерывных функционалов $t_\lambda^{(1)}, t_\lambda^{(2)} \in \Omega_L^*$ являются системами собственных функционалов для квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$.

Пусть теперь f — произвольный элемент гильбертового пространства H , а φ — произвольный элемент линейного пространства Ω_L . Составим векторы

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \in H \quad \text{и} \quad \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in \Omega_n, \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in H \quad \text{и} \quad \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \lambda\varphi \\ C\varphi \end{pmatrix} \in \Omega_n.$$

Тогда в силу соотношения (22) имеем

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= (-C0, 0) + (f, \varphi) = \langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cdot \overline{T_\lambda(\hat{\varphi})} d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cdot \overline{t_\lambda^{(1)}(\varphi)} d\rho(\lambda), \end{aligned} \quad (32_1)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}, \hat{\psi} \rangle &= -(Cg_1, \lambda\varphi) + (g_2, C\varphi) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda) \cdot \overline{T_\lambda(\hat{\psi})} d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda) \cdot \overline{t_\lambda^{(2)}(\varphi)} d\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (32_2)$$

Таким образом, произвольный элемент f гильбертова пространства H , рассматриваемый как линейный функционал, представляется в виде интеграла Лебега-Стилтьеса через систему собственных функционалов $t_\lambda^{(1)} \in \Omega_L^*$ квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$, а также выполняется равенство (32₂).

Наконец, докажем полноту вышестроенных систем (28) собственных функционалов. На основании (23) для вектора $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in \Omega_n$, где $\varphi \in \Omega_L$, имеем

$$\|\hat{\varphi}\|_H^2 = \|\hat{\varphi}\|_H^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |T_\lambda(\hat{\varphi})|^2 d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t_\lambda(\varphi)|^2 d\rho(\lambda), \quad (33_1)$$

$$\|C\varphi\|_H^2 + |\lambda|^2 \cdot \|(-C)^{1/2}\varphi\|_H^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |t_\lambda^{(2)}(\varphi)|^2 d\rho(\lambda). \quad (33_2)$$

Из формулы (33) видно, что если $t_\lambda^{(1)}(\varphi) = 0$ или $t_\lambda^{(2)}(\varphi) = 0$ для всех λ , то $\varphi = 0$.

Резюмируя вышеизложенное, при наличии предположения (26), мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1.2. Если спектр квадратичного операторного пучка простой и чисто непрерывный в гильбертовом пространстве H , то существует линейное пространство Ω_L , состоящее из всюду плотного в H множества элементов, сходимость в котором влечет сходимость в H , и семейство функционалов $t_\lambda^{(1)}, t_\lambda^{(2)} \in \Omega_L^*$ со следующими свойствами:

1°. $L(\lambda)\Omega_L \subset \Omega_L$ (инвариантность),

2°. $t_\lambda^{(i)}(L_\lambda(\varphi)) = 0$, $\varphi \in \Omega_L$, ($i = 1, 2$) (диагональность),

3°. $(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cdot \overline{t_\lambda^{(1)}(\varphi)} d\rho(\lambda)$, $f \in H$, $\varphi \in \Omega_L$,

$(g_1, -iC\varphi) + (g_2, C\varphi - \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda) t_\lambda^{(2)}(\varphi) d\rho(\lambda)$; $g_1, g_2 \in H$, $\varphi \in \Omega_L$

(формулы разложения),

4°. $\|\varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |t_\lambda^{(1)}(\varphi)|^2 d\rho(\lambda)$,

$\|C\varphi\|^2 + |\lambda|^2 \cdot \|(-C)^{1/2}\varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |t_\lambda^{(2)}(\varphi)|^2 d\rho(\lambda)$ (полнота).

§ 3. О построении собственных функционалов квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$

В работах Р. А. Александрияна [5] предложена достаточно общая конструкция построения полной совокупности собственных функционалов для произвольного самосопряженного оператора A с простым и непрерывным спектром исключительно в терминах резольвенты R_λ этого оператора. Эта формула в общем случае имеет вид [7]

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{((R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau})g, \varphi)}{((R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau})g, g)} \quad (34)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{Q}_A$ и для некоторого множества λ полной спектральной меры.

$\mathcal{Q}_A$ — некоторое линейное пространство, состоящее из всюду плотного множества элементов гильбертова пространства H , g — порождающий элемент. Если спектр оператора A лебеговский, т. е. спектральная плотность $\rho(\lambda) = (E_\lambda g, g)$ абсолютно непрерывна по мере Лебега, то формула (34) принимает вид

$$T_\lambda(\varphi) = \frac{1}{2\pi i \rho'(\lambda)} \lim_{\tau \rightarrow +0} ((R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau})g, \varphi). \quad (35)$$

Цель настоящего параграфа — нахождение аналогичной конструкции построения полной совокупности собственных функционалов для квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$.

Пусть спектр квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ простой и чисто непрерывный. Тогда спектр матричного оператора Π будет простым и чисто непрерывным в гильбертовом пространстве H . Поэтому полная система собственных функционалов оператора Π получается по формуле Р. А. Александрияна (34)

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\langle (R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau}) \overset{\Delta}{g}, \overset{\Delta}{\varphi} \rangle}{\langle (R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau}) \overset{\Delta}{g}, \overset{\Delta}{g} \rangle}, \quad \overset{\Delta}{\varphi} \in \mathcal{Q}_\Pi, \quad (36)$$

$\overset{\Delta}{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ — порождающий элемент в H .

Перейдем к построению резольвенты ассоциированного с квадратичным пучком $L(\lambda)$ матричного оператора Π в ортогональной сумме гильбертовых пространств $H \oplus H = H$.

Рассмотрим уравнение для резольвенты

$$\Pi \overset{\Delta}{u} - z \overset{\Delta}{u} = \overset{\Delta}{v}, \quad \text{где} \quad \overset{\Delta}{u} = R_z \overset{\Delta}{v}, \quad (37)$$

z — не вещественно.

В раскрытом виде оно имеет вид

$$\begin{cases} u_2 - z \cdot u_1 = v_1, \\ -Cu_1 - Bu_2 - zu_1 = v_2. \end{cases} \quad (38)$$

Применим к обеим сторонам первого равенства этой системы оператор C , а второе равенство с обеих сторон умножим на $-z$, получим

$$\begin{cases} Cu_2 - z \cdot Cu_1 = Cv_1, \\ Cu_1 + z \cdot Bu_2 + z^2 u_2 = -zv_2. \end{cases} \quad (39)$$

Подставляя Cu_1 из первого равенства системы (39) во второе, получим

$$L(z) u_2 = Cv_1 - z \cdot v_2. \quad (40)$$

Из соотношений (38) и (40) находим

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{z} v_1 + \frac{1}{z} L^{-1}(z)(Cv_1 - z \cdot v_2), \\ u_2 = L^{-1}(z)(Cv_1 - zv_2). \end{cases} \quad (41)$$

Последнее означает, что

$$R_z \hat{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} I + \frac{1}{z} L^{-1}(z) C & -L^{-1}(z) \\ L^{-1}(z) C & -zL^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Подставляя в выражение резольвенты (42) соответственно $z = \lambda \pm i\tau$ и составляя их разность, после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} & R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau} = \\ & = \begin{vmatrix} \frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} [I - L^{-1}(\lambda - i\tau)] + \frac{1}{\lambda + i\tau} [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] C, & - \\ & - [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \\ [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] C, & -2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) + (\lambda - i\tau)[L^{-1} \times \\ & \times (\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (43)$$

После подстановки выражения (43) в (36) мы получаем формулу, определяющую систему собственных функционалов в виде

$$\begin{aligned} & T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \times \\ & \times \left\{ \frac{-\frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2, -C\varphi_1 \right) +}{-2i\tau L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2, -Cg_1 \right) +} \right. \\ & \left. + \frac{(-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau)g_2), \varphi_2)}{+(-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau)g_2), g_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

В случае, когда спектр оператора лебеговский, формула (44) принимает вид

$$T_{\lambda}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i \rho'(\lambda)} \lim_{\tau \rightarrow +0} \left\{ \left(-\frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \times \right. \right. \\ \times \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2 \right), -C\varphi_1 \Big) + (-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \times \\ \times (Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2), \varphi_2) \Big\}. \quad (45)$$

Теперь уже на основании (28) можно записать формулы, дающие систему собственных функционалов квадратичного операторного пучка

$$t_{\lambda}^{(1)}(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \times \\ \times \left\{ \frac{([L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2), -C\varphi)}{\left(-2i\tau L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2 \right), g_1 \right) +} + \right. \\ \left. + \frac{\left(-\frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1, \varphi \right)}{+(-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2), g_2)} \right\}. \quad (44_1)$$

$$t_{\lambda}^{(2)}(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \times \\ \times \left\{ \frac{\left(-\frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2 \right), -\lambda C\varphi_1 \right) +}{\left(-2i\tau L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2 \right), g_2 \right) +} + \right. \\ \left. + \frac{(-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2), (C\varphi - \varphi))}{-(-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2), g_2)} \right\}. \quad (44_2)$$

А в случае лебегового спектра

$$t_{\lambda}^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i \rho'(\lambda)} \lim_{\tau \rightarrow +0} \left\{ \left(-C[L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1, \varphi \right) \right\}, \quad (45_1)$$

$$t_{\lambda}^{(2)}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i \rho'(\lambda)} \lim_{\tau \rightarrow +0} \left\{ \left([L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1, -\lambda C\varphi \right) + \right.$$

$$+ ([L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (i - i\tau)g_2) - 2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau)g_2, C\varphi) \Big| .$$

(45₂)

В заключение отметим, что здесь мы не касались вопросов характера спектра и структуры собственных функционалов (характера непрерывности функционалов). Эти важные вопросы требуют отдельного изучения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 7.III.1977

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲԻԱՆ, Անընդհատ սպեկտրով Գառակուսային օպերատորային փնջերի մասին
(ամփոփում)

Ինքնահամալուծ քառակուսային օպերատորային փնջերի մի դասի համար մուծված են անընդհատ սպեկտրի, դիֆերենցիալ լուծումների և սեփական ֆունկցիոնալի գաղափարները: Պարզ անընդհատ սպեկտրի առկայության դեպքում ապացուցված են թեորեմների սեփական դիֆերենցիալների և սեփական ֆունկցիոնալների կրկնապատիկ լրիվության վերաբերյալ: Ստացված է նաև բանաձև ֆունկցիոնալների կառուցման համար:

G. V. VIRABIAN. *On quadratic operator bundles with continuous spectrum*
(summary)

For a class of selfconjugated quadratic operator bundles the notions of continuous spectrum, the differential solutions and eigenfunctionals are introduced.

Under the condition of the existence of a simple doubly continuous spectrum on double completeness of eigenfunctionals and eigendifferentials are proved.

A formula for construction of eigenfunctionals is also obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, № 77, 1951.
2. М. Г. Крейн и Г. К. Лангер. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов. Труды межд. симп. по прим. т.ф.к.п. в механике сплошной среды, Изд. „Наука“, 1965.
3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. V, 1947.
4. Р. А. Александрян. К вопросу о зависимости качественных свойств решений некоторых смешанных задач от вида области, Диссертация, МГУ, 1949.
5. Р. А. Александрян. Исследование спектральных свойств операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. А. Соболева. Докторская диссертация, МГУ, 1962.
6. Р. А. Александрян. Об одном способе построения полной системы собственных функционалов самосопряженных операторов с лебеговым спектром, ДАН Арм.ССР, XL, № 5, 1965.
7. Р. А. Александрян. О спектральном разложении произвольных самосопряженных операторов по собственным функционалам, ДАН СССР, 162, № 1, 1965.

А. А. ВАГАРШАКЯН

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ МЮНЦА-САСА

В настоящей статье мы будем рассматривать систему функций $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k=1}^{\infty}$, где $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Через $C_0(E)$ обозначим пространство непрерывных функций, определенных на E и стремящихся к нулю при $x \rightarrow \infty$, $x \in E$. В известной теореме Мюнца-Саса (см. [1]) утверждается, что для полноты вышеприведенной системы в пространстве $C_0[0, \infty)$ необходима расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = \infty$$

и достаточна расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = \infty.$$

Тот случай, когда некоторые λ_n в последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ встречаются несколько раз, был рассмотрен М. М. Джрбашяном [5]. До сих пор не получено условие, необходимое и достаточное для полноты системы Мюнца в пространстве $C_0[0, \infty)$. Отметим, что наилучшее необходимое условие получено А. М. Седлецким [4].

В настоящей статье обобщается теорема Мюнца-Саса в двух направлениях. В первом параграфе мы рассматриваем вопрос о полноте системы $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $C_0(E)$, где λ_k — действительные числа, причем $\inf_k \lambda_k > 0$, а E — счетное замкнутое множество. Во втором параграфе рассматривается вопрос о полноте системы

$$\left\{ \frac{e^{-\lambda_k t}}{(1+t)^{\alpha}} \right\}_{k=1}^{\infty} \quad (1)$$

в пространствах $C_0[0, \infty)$ и $L_p[0, \infty)$, где $\alpha > 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$. При некоторых ограничениях на α получены необходимые и достаточные условия для полноты системы (1) в $C_0[0, \infty)$ и $L_p[0, \infty)$.

1°. Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть множество E содержит бесконечно много точек и удовлетворяет следующему условию: для любой точки $x \in E$, или $(x, \infty) \cap E = \emptyset$, или существует такая точка $y \in E$, $x < y$, что $(x, y) \cap E = \emptyset$. Пусть $\{\lambda_k\}$ — действительные числа и $\inf_k \lambda_k > 0$. Тогда для полноты системы $\{e^{-\lambda_k t}\}$ в пространстве

$C_0(E)$ необходимо и достаточно, чтобы $\{e^{-\lambda_k t}\}$ содержала бесконечно много функций.

Доказательство. Так как множество E содержит бесконечно много точек, то пространство $C_0(E)$ бесконечномерно и, следовательно, для полноты системы $\{e^{-\lambda_k t}\}$ в $C_0(E)$ необходимо, чтобы она содержала бесконечно много функций.

Докажем достаточность. Пусть система $\{e^{-\lambda_k t}\}$ содержит бесконечно много функций. В случае, когда $\lambda_k \rightarrow +\infty$ система $\{e^{-\lambda_k t}\}$ полна в $C_0[0, \infty)$ и, следовательно, она полна в $C_0(E)$. Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda_k \rightarrow \infty$. Достаточно доказать, что для любой конечной меры μ на E из условий

$$\int_E e^{-\lambda_k t} \mu(dt) = 0, \quad k=1, 2, \dots \quad (2)$$

следует, что $\mu \equiv 0$. Обозначим $x_0 = \inf \{x/x \in E\}$. Так как E — замкнутое множество, то $x_0 \in E$. По условию теоремы существует $y_0 \in E$ такое, что $x_0 < y_0$ и $(x_0, y_0) \cap E = \emptyset$. Тогда в силу (2) имеем

$$e^{-\lambda_k x_0} \mu(\{x_0\}) + \int_{(y_0, \infty) \cap E} e^{-\lambda_k t} \mu(dt) = 0.$$

Следовательно

$$|\mu(\{x_0\})| = \left| \int_{(y_0, \infty) \cap E} e^{-\lambda_k(t-x_0)} \mu(dt) \right| \leq e^{-\lambda_k(y_0-x_0)} |\mu|. \quad (3)$$

Правая часть неравенства (3) при $\lambda_k \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Поэтому $\mu(\{x_0\}) = 0$.

Заметим, что множество E , которое удовлетворяет условиям теоремы, является вполне упорядоченным множеством. Применяя трансфинитную индукцию легко убедиться, что $\mu \equiv 0$. Теорема доказана.

Множество $E \subset [0, \infty)$ не удовлетворяет условиям теоремы 1, если оно состоит из конечного числа точек, или содержит монотонно убывающую последовательность.

Теорема 2. Пусть множество E содержит монотонно убывающую последовательность. Тогда существует последовательность $\lambda_k \rightarrow \infty$, такая, что система $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k=1}^{\infty}$ не полна в пространстве $C_0(E)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда E содержит последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая монотонно убывая стремится к нулю. Выберем из этой последовательности подпоследовательность $\{x_{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$x_{p_1} = x_1,$$

$$x_{p_{2n}} < \frac{\ln \frac{4}{3}}{\ln 8} x_{p_{2n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$x_{p_{2n+1}} < \frac{\ln \frac{4}{3}}{(2n^2 + 3) \ln 2} x_{p_{2n}}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (5)$$

Рассмотрим следующие функции:

$$\varphi_n(t) = \exp \{-x_{p_{2n+1}} t\} - \frac{1}{2} \exp \{-x_{p_{2n+2}} t\}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Мы имеем

$$\varphi_n \left(\frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \exp \left\{ -x_{p_{2n+2}} \frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right\} > \frac{1}{4}.$$

Далее, в силу (4) имеем

$$\varphi_n \left(\frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \exp \left\{ -x_{p_{2n+2}} \frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right\} < -\frac{1}{4}.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k^2} \varphi_k(t).$$

Пусть $n \geq 1$ — некоторое целое число. Тогда в силу (5)

$$\begin{aligned} f \left(\frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right) &= 4^{-n^2} \varphi_n \left(\frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} 4^{-k^2} \varphi_k \left(\frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right) + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} 4^{-k^2} \varphi_k \left(\frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right) \geq 4^{-n^2-1} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} 4^{-k^2-n^2-1} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} 4^{-k^2} \right) \geq 4^{-n^2-1} - \frac{1}{3} (4^{-n^2-1} + 4^{-(n+1)^2+1}) > 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается оценка

$$\begin{aligned} f \left(\frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right) &= 4^{-n^2} \varphi_n \left(\frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} 4^{-k^2} \varphi_k \left(\frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right) + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} 4^{-k^2} \varphi_k \left(\frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right) \leq -4^{-n^2-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 4^{-k^2-n^2-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 4^{-k^2} < 0. \end{aligned}$$

Из приведенных оценок следует, что функция $f(t)$ обращается в нуль в интервалах

$$\left(\frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}}, \frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Обозначим эти нули через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, что $\lambda_n \rightarrow \infty$. На пространстве $C_0(E)$ рассмотрим линейный функционал

$$L(g) = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n^2} \left(g(x_{p_{2n+1}}) - \frac{1}{2} g(x_{p_{2n+2}}) \right).$$

Заметим, что $L(g)$ — непрерывный функционал. На функциях $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ он обращается в нуль

$$L(e^{-\lambda_k t}) = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n^2} \varphi_n(\lambda_k) = f(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, система $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k=1}^{\infty}$ не полна в $C_0(E)$.

Если монотонно убывающая последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq E$ не стремится к нулю, т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 > 0$, то тогда мы строим функцию

$f(t)$ для последовательности $\{x_k - x_0\}_{k=1}^{\infty}$ и в дальнейших рассуждениях вместо $f(t)$ рассматриваем функцию $e^{-x_0 t} f(t)$.

2°. Обозначим через $H_p^{(k)}$, $1 \leq p < \infty$, $k = 1, 2, \dots$, пространство аналитических функций $f(z)$, определенных на единичном круге и таких, что $f^{(k)}(z)$ принадлежит пространству Харди H_p в круге. Аналогично определяется пространство аналитических функций $f(z)$, определенных на правой полуплоскости $\{z | \operatorname{Re} z > 0\}$ и таких, что $f^{(k)}(z)$ принадлежит пространству Харди H_p в полуплоскости. В последнем случае мы скажем, что $f \in H_p^{(k)}(0, \infty)$.

Теорема 3. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность различных точек в правой полуплоскости. Для того чтобы система

$$\left\{ \frac{e^{-\lambda_k t}}{(1+t)^{\alpha}} \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad (6)$$

где $\alpha \geq 1$, не была полна в пространстве $C_0[0, \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty \quad (7)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln d(ix, \{\lambda_k\})}{1+x^2} dx > -\infty, \quad (8)$$

где $d(ix, \{\lambda_k\}) = \inf_k |ix - \lambda_k|$.

Доказательство. Заметим, что для неполноты системы (6) в пространстве $C_0[0, \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная мера $\mu \neq 0$ такая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda_k t}}{(1+t)^{\alpha}} \mu(dt) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{(1+t)^{\alpha}} \mu(dt). \quad (9)$$

Докажем, что $(1+\lambda)^{-2} f(\lambda) \in H_1^{(1)}(0, \infty)$. Имеем

$$\left(\frac{f(\lambda)}{(1+\lambda)^2} \right)' = -2 \frac{f(\lambda)}{(1+\lambda)^3} + \frac{f'(\lambda)}{(1+\lambda)^2}. \quad (10)$$

Так как $f(\lambda)$ ограниченная функция, то первое слагаемое в (10) принадлежит $H_1(0, \infty)$. Далее

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f'(x+iy)}{(1+x+iy)^2} \right| dy &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f'(x+iy)|}{1+y^2} dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \times \\ &\times \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)^{2\alpha}} e^{-xt} \mu(dt) \right) dy \leq \\ &\leq \pi |\mu| \max_{t>0} \frac{t}{(1+t)^2} < \infty, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Так как $(1+\lambda)^{-2}$ не имеет нулей, то нули функции $f(\lambda)$ удовлетворяют тем же условиям, что и нули функции из класса $H_1^{(1)}(0, \infty)$. В работе С. А. Виноградова и Н. А. Широкова [2] доказано, что нули $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $f \in H_1^{(1)}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 - |z_k| < \infty \quad (11)$$

и

$$\int_0^{2\pi} \ln d(e^{i\theta}, \{z_k\}) d\theta > -\infty, \quad (12)$$

где $d(e^{i\theta}, \{z_k\}) = \inf_k |e^{i\theta} - z_k|$. Из приведенного результата легко следует, что нули $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ аналитической функции $f \in H_1^{(1)}(0, \infty)$ удовлетворяют условиям (7) и (8).

Теперь докажем достаточность. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в правой полуплоскости, которая удовлетворяет условиям (7) и (8).

Заметим, что если $f(\lambda)$ — аналитическая функция, определенная в правой полуплоскости и $f \in H_2^{(j)}(0; \infty)$, $j = 0, 1, \dots, k$, причем $k \geq \alpha + 2$, то она допускает представление (9) с конечной мерой μ . Действительно, так как $f \in H_2(0, \infty)$, то в силу теоремы Р. Пэли и Н. Винера функции $f(\lambda)$ допускает представление

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} g(t) dt,$$

где $g(t) \in L_2(0, \infty)$. Далее, так как $f(z) \in H_2^{(k)}(0, \infty)$, то $t^k g(t) \in L_2(0, \infty)$. Ясно, что $f(\lambda)$ допускает представление (9) с конечной мерой μ , если сходится интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1+t) |g(t)| dt &\leq 2 \int_0^1 |g(t)| dt + \int_1^{\infty} (1+t)^2 |g(t)| dt \\ &\leq 2 \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_1^{\infty} \frac{(1+t)^{2\alpha}}{t^{2k}} dt \right)^{1/2} \left(\int_1^{\infty} |t^k g(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как $k \geq \alpha + 2$, то правая часть приведенного неравенства конечна.

В работе Б. И. Коренблюма [3] доказано, что если $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в единичном круге, удовлетворяет условиям (11) и (12), то существует функция $f(z) \in \bigcap_{k=0}^{\infty} H_2^{(k)}$, которая обращается в нуль в точках $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$. Из приведенного результата Б. И. Коренблюма следует, что если $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в правой полуплоскости, которая удовлетворяет условиям (7) и (8), то существует функция $f(\lambda) \in \bigcap_{k=0}^{\infty} H_2^{(k)}(0, \infty)$, которая обращается в нуль в точках $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Но мы уже заметили, что $f(\lambda) \in \bigcap_{k=0}^{\infty} H_2^{(k)}(0, \infty)$ допускает представление (9) с конечной мерой μ .

Теорема 4. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в правой полуплоскости. Для того чтобы система

$$\left\{ \frac{e^{-\lambda_k t}}{(1+t)^{\alpha}} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

где $\alpha > 1 + \frac{1}{q}$, $1 \leq q < \infty$, не была полна в пространстве $L_q(0, \infty)$,

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln d(ix, \{\lambda_k\})}{1 + x^2} dx > -\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим функции $f(\lambda)$, допускающие представление

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{(1+t)^{\alpha}} g(t) dt, \quad (13)$$

где $g(t) \in L_p(0, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Как и в теореме 3 для доказательства необходимости достаточно заметить, что производная функции $(1+\lambda)^{-2} f(\lambda)$ принадлежит пространству $H_1(0, \infty)$. Действительно, если $x > 0$, то имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{f(x+iy)}{(1+x+iy)^2} \right)' \right| dy &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+iy)|}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f'(x+iy)|}{(1+x)^2 + y^2} dy \leq \\ &\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^{3/2}} \right) \left(\int_0^{\infty} \frac{|g(t)|}{(1+t)^{\alpha}} dt \right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f'(x+iy)|}{1+y^2} dy \leq \\ &\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^{3/2}} \right) \left(\int_0^{\infty} |g(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^{\alpha q}} \right)^{1/q} + \\ &+ \pi \left(\int_0^{\infty} |g(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{\infty} \frac{t^q}{(1+t)^{\alpha q}} dt \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Так как $\alpha > 1 + \frac{1}{q}$, то правая часть вышеприведенного неравенства конечна.

Докажем достаточность. Как и в теореме 3 достаточно доказать, что если $f(z)$ — аналитическая функция, определенная в правой полуплоскости и $f^{(j)}(z) \in H_2(0, \infty)$, $j = 0, 1, \dots, k$, для некоторого числа $k \geq 0$, то $(1+z)^{-1} f(z)$ допускает представление (13), где $g(t) \in L_p(0, \infty)$. Пусть $f^{(j)}(z) \in H_2(0, \infty)$, $j = 0, 1, \dots, k$. Тогда $f(z)$ допускает представление

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} h(t) dt,$$

где $h(t) \in L_2(0, \infty)$, $j = 0, 1, \dots, k$. Мы имеем

$$\frac{f(z)}{1+z} = \int_0^{\infty} e^{-(z+1)t} dt \int_0^{\infty} e^{-zx} h(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-zx} \left(\int_0^x e^{-x+t} h(t) dt \right) dx.$$

Следовательно, для того чтобы $(1+z)^{-1} f(z)$ допускала представление (13), достаточно, чтобы сходиллся интеграл

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{\infty} (1+x)^{2p} \left(\int_0^x e^{-x+t} |h(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \times \right. \\ & \times \left. \left(\int_0^x e^t |h(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left(\int_0^1 e^t |h(t)| dt + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_1^x e^t |h(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p} \leq 2^2 \max_{0 < x < 1} \int_0^x e^t |h(t)| dt + \\ & + \left(\int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left(\int_0^1 e^t |h(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p} + \\ & + \left(\int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left(\int_1^x e^t |h(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Так как первые два слагаемых в правой части вышеприведенного неравенства конечны, то остается оценить последний интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left(\int_1^x e^t |h(t)| dt \right)^p dx \leq \int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left(\int_1^x \frac{e^t}{t^k} t^k |h(t)| dt \right)^p dx \leq \\ & \leq \int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left(\int_1^x \frac{e^{2t}}{t^{2k}} dt \right)^{p/2} \left(\int_1^x t^{2k} |h(t)|^2 dt \right)^{p/2} dx \leq \\ & \leq \left(\int_1^{\infty} t^{2k} |h(t)|^2 dt \right)^{p/2} \left(\int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left(\int_1^x \frac{e^{2t}}{t^{2k}} dt \right)^{p/2} dx \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

Заметим, что функция $t^{-2k} e^{2t}$ стремится к бесконечности, и кроме этого

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{e^{2t}}{t^{2k}} \right) = \frac{2e^{2t}}{t^{2k+1}} (t-k) \geq 0, \quad t \geq k.$$

Следовательно, функция $t^{-2k} e^{2t}$ монотонно возрастает при $t > k$. Поэтому существует число $M < \infty$ такое, что

$$\int_1^{\infty} (1+x)^{ap} e^{-xp} \left(\int_1^x \frac{e^{2t}}{t^{2k}} dt \right)^{p/2} dx \leq M \int_1^{\infty} \frac{(1+x)^{ap}}{x^{(k-\frac{1}{2})p}} dx.$$

Легко заметить, что если $k > a + \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$, то последний интеграл сходится. Теорема доказана.

Замечание 1. Теоремы 3 и 4 верны и в случае, когда в последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеются повторяющиеся члены. В этом случае, следуя обозначениям М. М. Джрбашяна, вместо системы (6) нужно рассматривать систему

$$\left\{ \frac{t^{s_k-1} e^{-\lambda_k t}}{(1+t)^a} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

где s_k — число появления λ_k в множестве $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$.

Замечание 2. Теорема 3 верна, если вместо системы (6) рассматривать систему

$$\{e^{-\lambda_k t} h(t)\}_{k=1}^{\infty}, \quad (14)$$

где $h(t)$ — непрерывная функция на $[0, \infty)$ и удовлетворяет неравенствам

$$\frac{A}{(1+t)^m} \leq h(t) \leq \frac{B}{1+t}, \quad 0 < t < \infty,$$

где A, B, m — некоторые положительные числа. Теорема 4 верна, если вместо $h(t)$ рассматривать систему (14), где $h(t)$ — измеримая функция на $[0, \infty)$ и почти всюду удовлетворяет неравенствам

$$\frac{A}{(1+t)^m} \leq h(t) \leq \frac{B}{(1+t)^a},$$

где A, B, m — положительные числа, а $a > 1 + \frac{1}{q}$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 11.XII.1976

Ա. Ա. ՎԱԳԱՐՇԱԿՅԱՆ. Մյունց-Սաշի թեորեմի որոշ ընդհանրացումների մասին (ամփոփում)

Հոդվածում բերվում են Մյունց-Սաշի թեորեմի երկու ընդհանրացումը:

A. A. VAGARSHAKIAN. On some extensions of Müntz-Szász theorem (summary)

Two extensions of Müntz-Szász theorem are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной области, М., 1964.
2. С. А. Виноградов, Н. А. Широков. Нули аналитической функций с производной из H^1 , Зап. науч. семинаров ЛОМИ, III, т. 30, 1972.
3. Б. И. Коренблюм. О функциях, голоморфных в круге и гладких вплоть до границы, ДАН СССР, 200, № 1, 1971.
4. А. М. Седлецкий. К проблеме Мюнца—Саса для пространства $C[0, 1]$. Труды Моск. энергетического института, т. 260, 1975.
5. М. М. Джрбашян. О полноте и замыкании неполной системы функций $(e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1})_{k=1}^{\infty}$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Ս. Շ. Սինանյան. L^p տարածության մետրիկայով առաջացած քվադրանալիտիկության մասին	423
Օ. Ա. Մուրադյան. Միակության որոշ թեորեմների և Մյունցի խնդրի մեջ մոտարկող գործակիցների մեծության վերաբերյալ	435
Բ. Ս. Ռուբին. Վերջավոր հատվածի վրա որոշված աստիճանալոգարիթմական կորիզներով պոտենցիալի տիպի օպերատորների նյոտերականությունն ուսումնասիրելու ընդհանուր մեթոդ	447
Գ. Վ. Վիրաբյան. Անընդհատ սպիկտրով քառակուսային օպերատորային փնջերի մասին	462
Ա. Ա. Վաղարշակյան. Մյունց-Սասի թեորեմի որոշ ընդհանրացումների մասին	476

С О Д Е Р Ж А Н И Е

С. О. Синанян. О квазианалитичности, порожденной метрикой пространства L^p	423
О. А. Мурадян. О некоторых теоремах единственности и величинах коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в задаче Мюнца	435
Б. С. Рубин. Общий метод исследования на нетеровость операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами на конечном отрезке	447
Г. В. Виравян. О квадратичных операторных пучках с непрерывным спектром	462
А. А. Вагаршакян. О некоторых обобщениях теоремы Мюнца—Саса	476

C O N T E N T S

S. O. Sinanian. On quasianalyticity generated by the metric of the L^p space	423
O. A. Muradian. On some uniqueness theorems and the values of coefficients of approximating aggregates in the Müntz problem	435
B. S. Rubin. A Neterity criterion for potential-type operators with power-logarithmic kernels on a finite segment	447
G. V. Virabian. On quadratic operator bundles with continuous spectrum	462
A. A. Vagarshakian. On some extensions of Müntz-Szász theorem	476

Գ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր
«Մաթեմատիկա» ամսագրի 1977 թ., XII, №№ 1—6

Ա. Ա. Անդրյան. Ընդհանուր եզրային խնդիր բաղադրյալ տիպի սխտեմի համար	5, 380
Ս. Կ. Աֆյան. Ռիման-Հիլբերտի տիպի խնդիրը վերասերվող էլիպտական սխտեմների մի դասի համար	2, 120
Գ. Ա. Բախտյան. Դեֆեկտային արժեքների և վերադրման մակերևութների կառուցվածքը	1, 46
Բ. Թ. Բատիկյան. 1 կոշտափողկանություն ունեցող հաշիվների մասին (ոչ տեղափոխական դեպք)	5, 341
Վ. Ի. Բելի. Շրջանային օղակում սեղույլար ֆունկցիաների ինտեգրալային ներկայացումների խնդրի վերաբերյալ	2, 147
Լ. Հ. Դալստյան. Անալիտիկ j -փոքր մատրից ֆունկցիաները և Շուրի պրոբլեմը	3, 204
Լ. Գ. Դերգուրյան. է. Հանգուտի թևերի մի ընդհանրացումը	3, 229
Շ. Հ. Դերգուրյան. Կիսահարթությունում $H^p(0 < p < +\infty)$ դասի ֆունկցիաների մի հատկության մասին	3, 335
Դ. Շ. Դուսեյնով. Յակոբիի անվերջ մատրիցի ցրման խնդիրը	5, 365
Վ. Ա. Կակիշև. Ռիմանի խնդրի տիպի ինտեգրո-դիֆերենցիալ օպերատոր պարունակող երկշափ եզրային խնդիր	3, 189
Ն. Ա. Կարապետյան. Սինգուլյար ֆունկցիոնալ օպերատորների մի դասի մասին	3, 165
Յու. Ա. Կուտոյան. Պատահական պրոցեսների պարամետրի գնահատականը	4, 245
Ա. Ն. Հայրապետյան. Մֆերիկ ածանցյալով, մակերեսով հանրագումարելի մերոմորֆ ֆունկցիաների լոկալ եզրային հատկությունների մասին	3, 234
Ռ. Գ. Հայրապետյան. Խառը խնդիր երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումների համար	1, 32
Հ. Մ. Հայրապետյան. Բազմապատիկ ինտեգրույալի մասին և ուղղորդված ֆունկցիաների մի բիրտրոֆոնալ սխտեմի բազիսությունը Հարդիի դասերում	3, 234
Գ. Կ. Հովհաննիսյան. Անկախ փոփոխական մեծություններից կազմած շարքերի վերաբերյալ	5, 355
Հ. Մալոնեկ. Յրագմեն-Լինդելոֆի տիպի թևերներ մասնական ածանցյալներով կոմպլեքս դիֆերենցիալ անհավասարությունների լուծումների համար	2, 89
Ս. Ն. Մանուկյան. Կոնստրուկտիվ փակ կորի նկատմամբ արտաքին և ներքին կետի գաղափարների մի հատկության մասին	3, 303
Հ. Բ. Մարանչյան. Ալգորիթմների նվազագույն համարների բազմությունների շահատիճանների մասին	2, 130
Հ. Ա. Մարտիրոսյան. Պուանկարեի խնդիրը Լիպսիցի համակարգերի համար հարթության վրա	4, 310
Ֆ. Է. Մելիք-Աղամյան. Հիլբերտյան տարածությունում կանոնիկ դիֆերենցիալ օպերատորների վերաբերյալ	1, 10
Ի. Պ. Միլովիդովա. Թվարանական թվային շարքի միջինների հաջորդականության սահմանային կետերի բազմության վերաբերյալ	5, 385
Հ. Ս. Միխայլևյան. D-թևերներ վիլանդյան խմբերի որոշ դասերում	5, 399
Հ. Մ. Մուշեղյան. Տեղափոխությունների նկատմամբ շարքերի ունիվերսալության մասին	4, 278
Յ. Ա. Մուրադյան. Միակության որոշ թևերների և Մյունցի խնդրի մեջ մոտարկող բազմանդամների գործակիցների մեծությունների վերաբերյալ	6, 435
Վ. Ա. Յավրյան. Որոշ ինտեգրալ օպերատորների հետքի մասին	2, 143

Ռ. Լ. Շահբաղյան. Էլիպտական խնդիր պարամետրով անվերջ թվով անկախ փոփոխականներից կախված երկրորդ կարգի հավասարումների համար	4, 252
Ա. Է. Ջրբաշյան. Դիրիխլեի վերջավոր ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների ենթադասերի զրոների մասին	1, 54
Մ. Մ. Ջրբաշյան, Բ. Ա. Սանակյան. Թեյլոր-Մակլորենի տիպի բանաձևերի ընդհանուր դասեր	1, 65
Ա. Գ. Չվարշելշվիլի. Երկու փոփոխականի անալիտիկ ֆունկցիայի վարքը հզակի կետերի շրջակայքում և միակության թեորեմներ	2, 102
Լ. Մ. Ռայխ. J-երմիտյան օպերատորների բիինվոլյուտիվ ինքնահամալուծ բիբնդյանումների վերաբերյալ	3, 178
Ք. Ս. Ռուբին. Վերջավոր հատվածի վրա որոշված աստիճանալուծարիթմական կորիզներով պոտենցիալ տիպի օպերատորների նյութերականությունն ուսումնասիրելու ընդհանուր մեթոդ	6, 447
Ս. Գ. Սամկո. Ռիսի պոտենցիալների $L^p(L_p)$ պատկերների նկարագրության վերաբերյալ	5, 329
Ս. Ս. Սինեցյան. L^p տարածության մետրիկայով առաջացած քվադրանալիտիկության մասին	6, 423
Ա. Ա. Վաղարշակյան. Նեվանլինայի ֆակտորիզացիոն թեորեմի ընդհանրացումը	1, 3
Ա. Ա. Վաղարշակյան. Միակության թեորեմ սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների համար և նրա կիրառությունը մոտարկումների տեսության մեջ	5, 345
Ա. Ա. Վաղարշակյան. Մյունց-Սասի թեորեմի որոշ ընդհանրացումների մասին	6, 476
Դ. Վ. Վիրաբյան. Անընդհատ սպեկտրով քառակուսային օպերատորային փնջերի մասին	6, 462
Լ. Ա. Տեր-Իսրայելյան. Ռադիոնալ ֆունկցիաներով լավագույն մոտարկման մասին հսկող բազմությունների վրա	2, 157
Վ. Տուչկե. Տված կորի վրա որոշակի խզումներ ունեցող կոմպլեքս մասնական ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումներ	2, 138

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика“
за 1977 г., XII, №№ 1—6

<i>Р. Г. Айрапетян.</i> Смешанная задача для гиперболических уравнений второго порядка	1, 32
<i>А. Н. Айрапетян.</i> О локальных граничных свойствах мероморфных функций, суммируемых по площади со сферической производной	3, 234
<i>Г. М. Айрапетян.</i> Кратная интерполяция и базисность некоторых биортонормальных систем рациональных функций в классах H_p Харди	4, 262
<i>А. А. Андрян.</i> Общая граничная задача для систем уравнений составного типа	5, 380
<i>С. К. Афян.</i> Задача типа Римана-Гильберта для одного класса вырождающихся эллиптических систем	2, 120
<i>Г. А. Барсесян.</i> Дефектные значения и структура поверхностей вложения	1, 46
<i>Б. Т. Батикян.</i> Подалгебры коразмерности 1 (некоммутативный случай)	5, 341
<i>В. И. Белый.</i> К вопросу об интегральных представлениях регулярных функций в круговом кольце	2, 147
<i>А. А. Вагааршакян.</i> Обобщение факторизационной теоремы Неванлинны	1, 3
<i>А. А. Вагааршакян.</i> Теорема единственности для ограниченных аналитических функций и ее приложение в теории аппроксимации	5, 345
<i>А. А. Вагааршакян.</i> О некоторых обобщениях теоремы Мюнца-Саса	6, 476
<i>Г. В. Вирабян.</i> О квадратичных операторных пучках с непрерывным спектром	6, 462
<i>Л. А. Галстян.</i> Аналитические j -растягивающие матрицы-функции и проблема Шура	3, 204
<i>Л. Д. Григорян.</i> Обобщение одной теоремы Э. Ландау	3, 229
<i>Ш. А. Григорян.</i> Об одном свойстве функций из H^p ($0 < p < +\infty$) в полуплоскости	5, 335
<i>Г. Ш. Гусейнов.</i> Задача рассеяния для бесконечной матрицы Якоби	5, 365
<i>А. Г. Джваршейшвили.</i> О поведении аналитических функций двух переменных в окрестности особых точек и теоремы единственности	2, 102
<i>А. Э. Джрбашян.</i> О нулях подклассов аналитических функций с конечным интегралом Дирихле	1, 54
<i>М. М. Джрбашян, Б. А. Саакян.</i> Общие классы формул типа Тейлора-Маклорена	1, 66
<i>В. А. Какичев.</i> Двумерная краевая задача типа задачи Римана, содержащая интегро-дифференциальные операторы	3, 189
<i>Н. К. Карапетянц.</i> Об одном классе сингулярных функциональных операторов	3, 165
<i>Ю. А. Кутоянц.</i> Об одном свойстве оценки параметра коэффициента сноса	4, 245
<i>Х. Малонек.</i> Теоремы типа Фрагмена-Линделёфа для решений комплексных дифференциальных неравенств с частными производными	2, 89
<i>С. Н. Манукян.</i> Об одном свойстве понятий внешней и внутренней точки относительно конструктивной замкнутой кривой	3, 303
<i>Г. Б. Маранджян.</i> с-степени множеств минимальных индексов алгоритмов	2, 130

Г. А. Мартиросян. Задача Пуанкаре для эллиптических систем на плоскости	4, 310
Ф. Э. Мелик-Адамян. О канонических дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве	1, 10
Г. С. Микаэлян. D-теоремы в некоторых классах виландтовых групп	5, 399
И. П. Миловидова. О множестве предельных точек последовательности средних арифметических числового ряда	5, 385
О. А. Мурадян. О некоторых теоремах единственности и величинах коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в задаче Мюнца	6, 454
Г. М. Мушегян. Об универсальности рядов относительно перестановок	4, 27 ⁸
Г. К. Оганесян. О рядах из независимых случайных величин	5, 358
А. М. Райх. О резольвентах бинволютивно самосопряженных бирасширений J -эрмитова оператора	3, 178
Б. С. Рубин. Общий метод исследования на нетеровость операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами на конечном отрезке	6, 447
С. Г. Самко. К описанию образа $I^{\alpha}(L_p)$ дробных интегралов (потенциалов Рисса)	5, 329
С. О. Синанян. О квазианалитичности, порожденной метрикой пространства L''	6, 423
А. А. Тер-Исраелян . О наилучшей рациональной аппроксимации на соприкасающихся множествах	2, 15 ⁷
В. Тучкс. Решения нелинейных дифференциальных уравнений с частными комплексными производными, обладающие заданными разрывами вдоль заданной кривой	2, 138
Р. А. Шахбабян. Эллиптическая задача с параметром для уравнения второго порядка с бесконечным числом независимых переменных	4, 252
В. А. Яврян. О следе некоторых интегральных операторов	2, 145

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR,
 seria "Matematika", 1977, vol. XII, №№ 1—6

<i>S. K. Afian.</i> The Rieman-Hilbert problem for a class degenerating elliptical systems	2, 120
<i>A. A. Andrian.</i> General boundary value problem for systems of composite type	5, 380
<i>G. A. Barseghian.</i> Deficient values and the structure of covering surfaces . .	1, 46
<i>B. T. Batikian.</i> Subalgebras of codimension 1 (noncommutative case)	5, 341
<i>V. I. Belyi.</i> On the problem of the integral, representation for functions regular in the ring	2, 147
<i>V. A. Cakichev.</i> Two dimensional Rieman type boundary problem with integro-differential operators	3, 189
<i>A. E. Djrbashian.</i> On the zeros of functions belonging to subclasses of analytic functions with finite Dirichlet integral	1, 46
<i>M. M. Djrbashian, B. A. Saakian.</i> General classes of formulas of Taylor-Macloren type	1, 66
<i>A. G. Dzvarsheishvili.</i> On the behaviour of the analytical functions of two variables in the neighborhood of the singular points and the uniqueness theorems	1, 102
<i>L. H. Galstian.</i> Analytic j -stretch matrix-functions and the problem of Shure .	3, 204
<i>L. D. Grigorian.</i> A generalisation of a theorem of E. Landau's	3, 229
<i>Sh. A. Grigorian.</i> On a certain property of functions from on the half-plane H^p ($0 < p < +\infty$)	5, 335
<i>G. Sh. Guseinov.</i> Scattering problem for the infinite Jacobi matrix	5, 365
<i>R. G. Hairapetian.</i> On the mixed problem for hyperbolic equations of second order	1, 32
<i>A. N. Hairapetian.</i> On local boundary properties of meromorphic functions with summable spheric derivatives	3, 234
<i>H. M. Hairapetian.</i> The multiple interpolation and the basisness of some systems of rational functions in Hardy H_p classes	4, 262
<i>G. K. Hovanesian.</i> On series of independent random variables	5, 358
<i>V. A. Javrian.</i> On the trace of some integral operators	2, 143
<i>N. K. Karapetian.</i> On a class of singular functional operators	3, 165
<i>Yu. A. Kutoyants.</i> On the estimation of the trend parameter	4, 245
<i>H. Malonek.</i> Theorems of Phragmen-Lindelöf type for solutions of complex partial differential inequalities	2, 89
<i>S. N. Manukian.</i> On a property of the notions of interior and exterior point with respect to constructive closed curve	4, 303
<i>H. B. Marandjian.</i> On c -degrees of sets of minimal indices of algorithms .	2, 130
<i>H. A. Martirosian.</i> Poincare's problem for the elliptic system on the plane	4, 310
<i>F. E. Melik-Adamian.</i> On canonical differential operators in Hilbert space	1, 10
<i>G. S. Mikaelian.</i> D -theorems in some classes of Vilandt groups	5, 399

<i>I. P. Milovidova.</i> On the set of limiting points for the sequence of strithmetical means numerical series	5, 385
<i>G. M. Moushegian.</i> On the series, universal with respect to transpositions	4, 278
<i>O. A. Muradian.</i> On some uniqueness theorems and the values of coefficients of approximating aggregates in the Müntz problem	6, 435
<i>L. M. Raikh.</i> About the resolvent of biinvolute self-adjoint biextension of J-hermit operator	3, 178
<i>B. S. Rubin.</i> A Neterity criterion for potential-type operators with powerl logarithmic kernels on a finite segment	6, 447
<i>S. G. Samko.</i> On the characterization of the range $I^{\alpha}(L_p)$ of fractional integrals (Riesz potentials)	5, 329
<i>R. L. Shachbagian.</i> Elliptical problem with a parameter for the second order differential equations with infinite number of independent variables	4, 252
<i>S. O. Sinanian.</i> On quasianaluticity generated by the metric of the L_p space	6, 423
L. A. Ter-Israjelian. On the best rational approximation in contacting domains	2, 157
<i>V. Touchke.</i> Solution of nonlinear differential equations with partial complex derivatives possessing prescribed discontinuities along given curves	2, 138
<i>A. A. Vagarshakian.</i> A generalization of Nevanlinna's factorization theorem	1, 3
<i>A. A. Vagarshakian.</i> A uniqueness theorem for bounded analytic functions and its application in the theory of approximation	5, 345
<i>A. A. Vagarshakian.</i> On some extensions of Müntz-Szász theorem	6, 476
<i>G. V. Virabian.</i> On quadratic operator bundles with continuous spectrum	6, 462