ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ էական փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известия АН
Армянской ССР, серия «Математика»

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference lise should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

С. Г. САМКО

К ОПИСАНИЮ ОБРАЗА $I^\alpha(L_p)$ ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА

Пусть

$$(I^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int\limits_{R^n} \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n,$$

$$\gamma_n(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}}\, 2^\alpha \, \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)} \tag{1}$$

есть риссов потенциал с плотностью $\varphi \in L_p(R^n)$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$.

В [1]—[2] было дано описание образа $I^\alpha(L_p) = \{f: f = I^\alpha \varphi,\ \varphi \in L_p\}$ в одномерном ($n = 1$) случае (см. также [3], где это описание распространено на пространства Орлича). Целью настоящей заметки является усиление достаточной части этого описания с одновременным обобщением на многомерный ($n \geqslant 1$) случай. Пусть

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{R^n} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\, dt \tag{2}$$

есть оператор риссова дифференцирования (см. [4]), где $(\Delta_t^l f)(x)$ есть конечная разность функции $f(x)$ порядка $l > \alpha$* с векторным шагом $t \in R^n$, нормировочная постоянная $d_{n,l}(\alpha)$ выбрана так, что в образах Фурье $\widehat{D^\alpha f}(x) = |x|^\alpha \hat{f}(x)$ и интеграл в (2) понимается как условно сходящийся в $L_p(R^n)$: $D^\alpha f = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} D_\varepsilon^\alpha f$, где $D_\varepsilon^\alpha f$ — соответствующий усеченный интеграл:

$$(D_\varepsilon^\alpha f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{|t| > \varepsilon} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\, dt.$$

---

* Если в (2) используется нецентрированная разность $(\Delta_t^l f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k \times$ $\times f(x - kt)$, то условие $l > \alpha$ можно ослабить до $l > 2\left[\frac{\alpha}{2}\right]$ с обязательным выбором $l = \alpha$ при $\alpha = 1, 3, 5, \cdots$.

Покажем, что в описании $I^\alpha(L_p) = \{f\colon f \in L_q,\ D^\alpha f \in L_p\}$, $q = \frac{np}{n - \alpha p}$ в достаточной части можно вместо сходимости усеченной „производной“ $D^\alpha_\varepsilon f$ требовать лишь ограниченности $D^\alpha_\varepsilon f$ в L_p для какой-нибудь последовательности $\varepsilon_k \to 0$, $k = 1, 2, \cdots$.

Теорема. *Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in L_q(R^n)$, $q = np(n - \alpha p)^{-1}$, и чтобы существовала последовательность $\varepsilon_k \to 0$, $k = 1, 2, \cdots$, такая, что $\|D^\alpha_{\varepsilon_k} f\|_p \leqslant c$, где c не зависит от ε_k.*

Доказательство. Необходимость. Условие $f \in L_q$ следует из теоремы С. Л. Соболева [5]. Далее для $f = I^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$, справедливо представление

$$(D^\alpha_\varepsilon f)(x) = \int\limits_{R^n} K_{l,\alpha}(|y|)\, \varphi(x - \varepsilon y)\, dy, \tag{3}$$

где

$$K_{l,\alpha}(|y|) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)\,|y|^n} \int\limits_{|\xi| < |y|} k_{l,\alpha}(\xi)\, d\xi \in L_1(R^n),$$

$$k_{l,\alpha}(x) = (\Delta^l_{\vec{j}}\, k_\alpha)(x),\ k_\alpha(x) = \gamma_n^{-1}(\alpha)|x|^{-\alpha},\ \ \vec{j} = (1, 0, \cdots, 0),$$

которое получается перестановкой порядка интегрирования в композиции $D^\alpha_\varepsilon I^\alpha \varphi$ и заменами переменных. Так как

$$\int\limits_{R^n} K_{l,\alpha}(|y|)\, dy = 1 \tag{4}$$

следствие выбора нормировочных постоянных), то из (3) следует, что $D^\alpha_\varepsilon f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L_p} \varphi$. Тем самым в необходимой части доказано больше, чем ограниченность $\|D^\alpha_\varepsilon f\|_p$. Основную трудность составит доказательство достаточности.

Итак, пусть $f \in L_q$ и

$$\|D^\alpha_{\varepsilon_k} f\|_p \leqslant c < \infty,\ \varepsilon_k \to 0, \tag{5}$$

где c не зависит от ε_k. Пусть $\Delta_{m,\alpha}(x, h) = (\Delta^m_h k_\alpha)(x)$, $m > \alpha$. Можно показать, что $\Delta_{n,\alpha}(x, h) \in L_1(R^1)$ для любого $h \in R^1$ при $m > \alpha$. Считая, что $m > \alpha$, обозначим

$$A\varphi = \int\limits_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x - t, h)\, \varphi(t)\, dt,\ \varphi_\varepsilon = D^\alpha_\varepsilon f.$$

Имеем

$$A\varphi_\varepsilon = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \left\{ \int\limits_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x-t, h) f(t)\, dt \int\limits_{|t-y|>\varepsilon} \frac{dy}{|t-y|^{n+\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^\nu C_e^\nu \nu^\alpha \int\limits_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x-t, h)\, dt \int\limits_{|t-y|>\nu\varepsilon} \frac{f(y)\, dy}{|t-y|^{n+\alpha}} \right\} .$$

Так как $\Delta_{m,\alpha}(x, h) \in L_1$, то здесь допустима перестановка порядка интегрирования, так что

$$A\varphi_\varepsilon = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu C_e^\nu \int\limits_{R^n} f(y)\, dy \int\limits_{|\tau|>\varepsilon} \frac{\Delta_{m,\alpha}(x-y-\nu\tau, h)}{|\tau|^{n+\alpha}} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\gamma_n(\alpha)\, d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{R^n} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f(x-kh-y)\, dy \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu \times$$

$$\times \int\limits_{|\tau|>\varepsilon} \frac{|y-\nu\tau|^{\alpha-n}\, d\tau}{|\tau|^{n+\alpha}} ,$$

откуда после замены $y = \varepsilon \bar{y}$, $\tau = \varepsilon |y| \operatorname{rot}_y \frac{t}{|t|^2}$, где $\operatorname{rot}_y x$ — вращение в R^n, такое, что $\operatorname{rot}_y \vec{j} = y\,|y|^{-1}$, получим

$$A\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)\, d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{R^n} \frac{(\Delta_h^m f)(x-\varepsilon y)}{|y|^n} dy \int\limits_{|t|<|y|} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu \left| |t| \vec{j} - \right.$$

$$\left. - \nu \frac{t}{|t|} \right|^{\alpha-n} dt,$$

что с учетом тождества $\left| |t| \vec{j} - \nu \frac{t}{|t|} \right| = |t - \nu \vec{j}|$ приводит к равенству

$$A\varphi_\varepsilon = \int\limits_{R^n} K_{l,\alpha}(|y|) (\Delta_h^m f)(x-\varepsilon y)\, dy.$$

Правая часть сходится в $L_q(R^n)$ к $(\Delta_h^m f)(x)$ в силу (4). Тогда

$$(\Delta_h^m f)(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_q)}} A\varphi_\varepsilon$$

и тем более

$$(\Delta_h^m f)(x) = w\text{-}\lim_{\substack{\varepsilon_k \to 0 \\ (L_q)}} A\varphi_{\varepsilon_k}, \tag{6}$$

где $w\text{-}\lim\limits_{(L_q)}$ означает слабый предел в $L_q(R^n)$. Покажем, что φ_{ε_k} слабо сходится в $L_p(R^n)$. В силу (5) достаточно (теорема Банаха-Штейнгауза) проверить слабую сходимость φ_{ε_k} в L_p на функционалах $g \in L_{p'}$, образующих плотное множество в $L_{p'}$, например, для финитных $g \in C_0^\infty$. Для таких функций имеем $(0 < \varepsilon_r < \varepsilon_k < 1)$:

$$|(g, \varphi_{\varepsilon_r} - \varphi_{\varepsilon_k})| = |((D^\alpha_{\varepsilon_r} - D^\alpha_{\varepsilon_k})\, g, f)| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_q \cdot \|(D^\alpha_{\varepsilon_r} - D^\alpha_{\varepsilon_k}) g\|_{q'} \leqslant c \|f\|_q \cdot \Big\| \int\limits_{\varepsilon_r < |t| < \varepsilon_k} |(\Delta_t^l g)(x)| \cdot |t|^{-n-\alpha}\, dt \Big\|_{q'} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \|f\|_q \cdot \Big\{ \int\limits_{|x| < l + \sup\limits_{\xi \in \operatorname{supp} g} |\xi|} dx \Big(\int\limits_{\varepsilon_r < |t| < \varepsilon_k} |t|^{-n-\alpha+l}\, dt \Big)^{q'} \Big\}^{\frac{1}{q'}} \to 0$$

при $\varepsilon_k \to 0$, что доказывает фундаментальность последовательности $(g, \varphi_{\varepsilon_k})$ и, следовательно, слабую сходимость φ_{ε_k} в L_p. Так как оператор A ограничен согласно теореме Соболева из L_p в L_q, то из (6) имеем

$$(\Delta_h^m f)(x) \equiv A\varphi, \quad \varphi = w\text{-}\lim_{(L_p)} \varphi_{\varepsilon_k} \in L_p. \tag{7}$$

Очевидно, $(A\varphi)(x) \equiv (\Delta_h^m I^\alpha \varphi)(x)$. Поэтому (7) означает тождественное совпадение конечных разностей функций $f(x)$ и $I^\alpha \varphi$: $\Delta_h^m f \equiv \Delta_h^m I^\alpha \varphi$. Тогда f и $I^\alpha \varphi$ могут отличаться друг от друга разве лишь многочленом, а так как $f \in L_q$, $I^\alpha \varphi \in L_q$, то они совпадают:

$$f = I^\alpha \varphi, \tag{8}$$

что и требовалось (при этом из (8) следует согласно необходимой части, что φ является не только слабым, но и сильным пределом в L_p усечений $\varphi_\varepsilon = D^\alpha_\varepsilon f$). Теорема доказана.

Заметим, что в одномерном $(n = 1)$ случае близкое утверждение содержится в [6]. Заметим также, что в одномерном случае для потенциала „феллеровского типа"

$$M^\alpha \varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x - t)}{|x - t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, образ $M^\alpha(L_p)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, не зависит от c_1, c_2 и совпадает [2] с образом $I^\alpha(L_p)$ операторов лиувиллева дробного интегрирования $I^\alpha_\pm$ (или потенциала Рисса). Поэтому

$$M^\alpha(L_p) \Big\{ f : f \in L_q, \ \Big\| \int\limits_{\varepsilon_k}^{\infty} \frac{f(x) - f(x - t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \Big\|_p \leqslant c < \infty \Big\},$$

где $q = \frac{p}{1 - \alpha p}$ и c не зависит от $\varepsilon_k \to 0$.

Ростовский на-Дону
государственный университет

Поступила 25.IV.1975

Ս. Գ. ՍԱՄԿՈ. Ռիսի պոտենցիալների $I^\alpha(L_p)$ պատկերների նկարագրության վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Հոդվածում տրվում է $I^\alpha_\varphi = \int\limits_{R^n} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{n-\alpha}}$ *Ռիսի պոտենցիալների* $I^\alpha(L_p)$*-ի արժեքների բազմության նկարագրությունը հիպերսինգուլյար ինտեգրալների տերմիններով՝* $f \in I^\alpha(L_p)$ *այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$f \in L_q(R^n), \qquad q = \frac{np}{n - \alpha p} \text{ և } \|D^\alpha_\varepsilon f\|_p \leqslant c,$$

որտեղ c-ն կախված չէ ε-ից,

$$D^\alpha_\varepsilon f = \int\limits_{|z|>\varepsilon} \frac{(\Delta^l_t f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\, dt,$$

$(\Delta^l_t f)(x) - f(x)$ *ֆունկցիայի կենտրոնավորված կամ ոչ կենտրոնավորված տարբերություն է.*

Ավելի վաղ նման նկարագրություն տրված է եղել հեղինակի կողմից $L_p(R^n)$*-ում* $D^\alpha_\varepsilon f$*-ի զուգամիտության տերմիններով։*

S. G. SAMKO. *On the characterization of the range $I_\alpha(Lp)$ of fractional integrals (Riesz potentials)* (summary)

The characterization of the range $I^\alpha(L_p)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, of Riesz potentials $I^\alpha\varphi = \int\limits_{R^n} \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{n-\alpha}}$ in terms of hepersingular integrals (Riesz differentiation) is proposed:

$$f \in I^\alpha(L_p) \quad \text{iff} \quad f \in L_q(R^n), \qquad q = \frac{np}{n - \alpha p},$$

and

$$\|D^\alpha_\varepsilon f\|_p \leqslant c,$$

where c does not depend on ε,

$$D^\alpha_\varepsilon f = \int\limits_{|t|>\varepsilon} \frac{(\Delta^l_t f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\, dt, \quad (\Delta^l_t f)(x)$$

being a finite difference of $f(x)$. Earlier the analogous description was given by the author in terms of the convergence of $D^\alpha_\varepsilon f$ in $L_p(R^n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Г. Самко.* Об операторах типа потенциала, ДАН СССР, 1971, 196, № 2, 299—301.
2. *С. Г. Самко.* О пространстве $I^\alpha(Lp)$ дробных интегралов и об операторах типа потенциала, Изв. АН Арм. ССР, сер. „Математика", VIII, № 5, 1973, 359—383.

3. *С. Г. Самко, А. Ф. Чувенков.* О потенциалах Рисса в пространствах Орлича, В сб. „Матем. анализ и его приложения“, 7, Изд-во РГУ, 1975.

4. *П. И. Лизоркин.* Описание пространств $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов, Матем. сб., 81, № 1, 1970, 79—91.

5. *С. Л. Соболев.* Об одной теореме функционального анализа, Матем. сб., 4, № 3, 1938, 471—497.

6. *P. Heywood.* On the range of some fractional integrals, J. London Math. Soc. (2), 8, 1974, 607--614.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

Ш. А. ГРИГОРЯН

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИЙ ИЗ H^p $(0<p<\infty)$ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

1°. Обозначим через $H^p(D)$ $(0<p<+\infty)$ класс функций, аналитических в единичном круге $D=\{w;\ |w|<1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|g\|_p=\sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}<+\infty.$$

Пусть последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ отличных друг от друга комплексных чисел для некоторого δ $(0<\delta<1)$ удовлетворяет условию

$$\inf_{1\leq k<+\infty}\prod_{j\neq k}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\geqslant\delta>0. \tag{1}$$

Именно с такими последовательностями связана следующая теорема Л. Карлесона ([1], [2], см. также [3]).

Теорема А. *Если последовательность* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ *отличных друг от друга комплексных чисел удовлетворяет условию* (1), *то для любой функции* $g(w)\in H^p(D)$ $(0<p<\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)\,|g(\alpha_k)|^p\leqslant C(\delta)\|g\|_p^p, \tag{2}$$

где $C(\delta)>0$ — *постоянная, не зависящая от* g.

М. М. Джрбашян в работе [4] дал чисто аналитический метод решения задачи кратной интерполяции в $H^2(D)$, там же была установлена следующая важная

Теорема Б. *Если последовательность* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ *удовлетворяет условию* (1), *то для любой функции* $g(w)\in H^2(D)$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{2r+1}|g^{(r)}(\alpha_k)|^2\leqslant C(r,\delta)\|g\|_2^2,\quad r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{3}$$

где $C(r,\delta)>0$ — *постоянная, не зависящая от функции* g.

Отмеченные теоремы имеют важное применение при решении задач как простой, так и кратной интерполяции в классах $H^p(D)$ $(0<p<\infty)$ и лежат в основе доказательства базисности некоторых систем рациональных функций в этих классах ([5], [6]).

Обобщая результаты этих теорем, Ф. А. Шамоян [7] установил аналогичную теорему для функций из $H^p(D)$ $(0 < p < \infty)$.

Теорема В. *Если последовательность* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(|\alpha_k| < 1)$ *удовлетворяет условию* (1), *то для любой функции* $g(w) \in H^p(D)$ $(0 < p < \infty)$ *имеют место неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g^{(r)}(\alpha_k)|^p (1 - |\alpha_k|^2)^{pr+1} \leqslant C_p(r, \delta) \|g\|_p^p, \quad r = 0, 1, 2, \cdots, \tag{4}$$

где $C_p(r, \delta) > 0$ — *постоянные, не зависящие от* g.

В данной заметке мы получим аналог неравенств (4) для функций из H_+^p $(0 < p < \infty)$ — класса аналитических в верхней полуплоскости $G^{(+)} = \{z;\ \operatorname{Im} z > 0\}$ функций, для которых

$$\|f\|_p = \sup_{y>0} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^p \, dy \Big)^{1/p} < + \infty. \tag{5}$$

Как известно (см. [3], стр. 191), для любой функции $f(z) \in H_+^p$ $(0 < p < + \infty)$ почти всюду на вещественной оси $(- \infty, + \infty)$ существуют угловые граничные значения, причем

$$\|f\|_p = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}. \tag{6}$$

В дальнейшем нам понадобится теорема М. Рисса для полуплоскости (см. [8], стр. 176).

Теорема Г. *Если* $h(t) \in L_p(- \infty, + \infty)$ $(1 < p < + \infty)$, *то для функции*

$$F(z) = u(z) + iv(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{t - z} \, dt, \quad z \in G^{(+)}$$

выполняются условия:

1) $\|v\|_p \leqslant M_p^* \|u\|_p$,

2) $F(z) \in H_+^p$,

3) $\|F\|_p \leqslant M_p \|h\|_p$,

где M_p^* и M_p — постоянные, не зависящие от u и h соответственно.

Последовательность $\{z_j\}_1^\infty$ $(\operatorname{Im} z_j > 0)$ отличных друг от друга комплексных чисел отнесем к классу Δ, если при некотором δ $(0 < \delta < 1)$ выполняется условие

$$\inf_{k \geqslant 1} \prod_{j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geqslant \delta > 0. \tag{7}$$

Отметим, что из этого условия автоматически вытекает условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{1 + |z_j|^2} < + \infty, \tag{8}$$

обеспечивающее существование произведения Бляшке для верхней полуплоскости с нулями в точках $z = z_j$

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{z - z_j}{z - \overline{z}_j} \frac{|1 + z_j^2|}{1 + z_j^2} . \qquad (9)$$

2°. Теперь приступим к доказательству нашей теоремы, используя прием, примененный Ф. А. Шамояном в работе [7].

Теорема. *Если* $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta$, *то для любой функции* $f(z) \in H_+^p$ $(0 < p < +\infty)$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} z_k)^{pr+1} |f^{(r)}(z_k)|^p \leqslant A_p(r, \delta) \|f\|_p^p, \quad r = 0, 1, 2, \cdots . \qquad (10)$$

где $A_p(r, \delta) > 0$ *— постоянные, не зависящие от* f.

Доказательство. Сначала же заметим, что из (2) конформным отображением $w = \dfrac{z - i}{z + i}$ полуплоскости $G^{(+)}$ на $|w| < 1$, учитывая тот факт ([9], стр. 189), что при этом функция $g^*(z) = g\left(\dfrac{z - i}{z + i}\right) \times$ $\times (z + i)^{-1} \in H_+^2$, получим неравенство, отмеченное также в заметке [10]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k |g^*(z_k)|^2 \leqslant A(\delta) \|g^*\|_2^2 . \qquad (11)$$

Пользуясь теоремой о факторизации ([3], стр. 191), функцию $f(z) \in H_+^p$ можно представить в виде

$$f(z) = B(z) \cdot \varphi(z), \quad z \in G^{(+)},$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями функции $f(z)$, а $\varphi(z) \in H_+^p$ и $\varphi(z) \neq 0$, $z \in G^{(+)}$.

Следовательно, определив функцию

$$\varphi_*(z) = [\varphi(z)]^{p/2}, \qquad (12)$$

будем иметь $\varphi_*(z) \in H_+^2$ и

$$\|f\|_p^p = \|\varphi\|_p^p = \|\varphi_*\|_2^2 . \qquad (13)$$

Далее, так как $|\varphi_*(x)| \in L_2(-\infty, +\infty)$, то положив

$$h(z) = u(z) + iv(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\varphi_*(t)|}{t - z} dt, \quad z \in G^{(+)}, \qquad (14)$$

по теореме В можем утверждать, что $h(z) \in H_+^2$.

Из (14) следует, что

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi_*(t)|}{(t - x)^2 + y^2} dt \geqslant 0, \quad z = x + iy \in G^{(+)}, \qquad (15)$$

$$u(z) = |u(z)| \leqslant |h(z)|, \quad z \in G^{(+)}, \tag{16}$$

причем (см. [9], стр. 176)

$$\|u\|_2 = \|\varphi\|_2. \tag{17}$$

С другой стороны, так как $h(z) \in H^2_+$, то по теореме Г имеет место неравенство

$$\|v\|_2 \leqslant M_1 \|u\|_2.$$

Отсюда и из (17) получим

$$\|h\|_2 \leqslant M_2 \|\varphi_*\|_2, \tag{18}$$

где $M_2 = 1 + M_1$.

Ввиду того, что $\varphi_*(z) \in H^2_+$, она представима интегралом Пуассона (см. [9], стр. 183)

$$\varphi_*(z) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_*(t)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt, \quad z = x + iy \in G^{(+)}.$$

Отсюда и из (15) следует неравенство

$$|\varphi_*(z)| \leqslant u(z), \quad z \in G^{(+)}. \tag{19}$$

Теперь обозначим через $D_0(z_k) = \{z;\ |z - z_k| \leqslant \theta \operatorname{Im} z_k\}$ $0 < \theta < 1$ круг с центром в точке $z_k \in G^{(+)}$, лежащий внутри $G^{(+)}$. Тогда по интегральной формуле Коши для любого $r \geqslant 1$ и $1 \leqslant k < +\infty$ имеем

$$|f^{(r)}(z_k)| = \left| \frac{r!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_\theta(z_k)} \frac{f(t)}{(t - z_k)^{r+1}}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r!}{\theta^{r+1}} \frac{\max\limits_{t \in \partial D_\theta(z_k)} |f(t)|}{(\operatorname{Im} z_k)^r}.$$

Отсюда, ввиду неравенства

$$|f(z)| \leqslant |\varphi(z)|, \quad z \in G^{(+)},$$

а также используя (12) и (19), получим

$$|f^{(r)}(z_k)| \leqslant \frac{r!}{(\theta \operatorname{Im} z_k)^r} \max_{t \in \partial D_\theta(z_k)} |\varphi(t)| =$$

$$= \frac{r!}{(\theta \operatorname{Im} z_k)^r} \max_{t \in \partial D_\theta(z_k)} |\varphi_*(t)|^{2/p} \leqslant \frac{r!}{(\theta \operatorname{Im} z_k)^r} \max_{t \in \partial D_\theta(z_k)} [u(t)]^{2/p}. \tag{20}$$

Но $u(z)$ — неотрицательная гармоническая функция, и по неравенству Гарнака

$$\max_{t \in \partial D_\theta(z_k)} u(t) \leqslant \frac{1+\theta}{1-\theta} u(z_k) \quad (1 \leqslant k < +\infty).$$

Поэтому из (20), учитывая (16), будем иметь

$$(\operatorname{Im} z_k)^{pr+1} |f^{(r)} z_k|^p \leqslant \left(\frac{r!}{\theta^r}\right)^p \left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)^2 \operatorname{Im} z_k [u(z_k)]^2 \leqslant$$

$$\leqslant A_p(\theta, r) \operatorname{Im} z_k |h(z_k)|^2 \quad (1 \leqslant k < +\infty).$$

Наконец, используя неравенство (11), в силу (18) и (13) для любого $r \geqslant 1$ получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Im}\, z_k)^{pr+1} |f^{(r)}(z_k)|^p \leqslant$$

$$\leqslant A_p(\theta,\ r) \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_k |h(z_k)|^2 \leqslant A_p^*(\theta,\ r,\ \delta) \|h\|_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant A_p^*(\theta,\ r,\ \delta) M_2 \|\varphi_*\|_2^2 = A_p(r,\ \delta) \|f\|_p^p,$$

и теорема доказана.

Շ. Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Կիսահարթությունում $H^p\ (0 < p < \infty)$ դասի ֆունկցիաների մի հատկության մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք T_f *օպերատորը որոշված է* $\mathrm{Im}\, z > 0$ *կիսահարթությունում անալիտիկ ֆունկցիաների* $H^p\ (0 < p < +\infty)$ *դասերի վրա հետևյալ կերպ*

$$T_f = \{f^{(r)}(z_k)\ (\mathrm{Im}\, z_k)^{r+1/p}\}_1^{\infty}, \quad f \in H^p.$$

Այս աշխատանքում ստացված են պայմաններ $\{z_k\}_1^{\infty}\ (\mathrm{Im}\, z_k > 0)$ *հաջորդականության համար, որպեսզի տեղի ունենա հետևյալ առնչությունը* $T_f H^p = l^p$:

SH. A. GRIGORIAN. *On a certain property of functions from* $Hp\ (0 < p < +\infty)$ *on the half-plane* (summary)

Let the operator T_f be defined on the H^p space $(0 < p < +\infty)$ in the half-plane:

$$T_f : \{f^{(r)}(z_k)\ (\mathrm{Im}\, z_k)^{r+1/p}\}_1^{\infty}, \quad f \in H^p.$$

The paper gives some conditions on the sequenec $\{z_k\}_1^{\infty}\ (\mathrm{Im}\, z_k > 0)$ under which $T_f H^p = l^p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Carleson.* An Interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 80, 1958, 921—930.
2. *H. Shapiro, A. Shields.* On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
3. *P. Duren.* Theory of H^p spaces, Ac. Press. New York, London, 1970.
4. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
5. *Г. М. Айрапетян.* О базисности рациональных функций в подпространствах классов Харди $H^p\ (1 < p < \infty)$, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 429—450.
6. *Г. М. Айрапетян.* О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., X, № 2, 1975, 133—152.

7. *Ф. А. Шамоян*. Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в пространствах H^p, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XI, № 2, 1976, 124–131.
8. *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интеграла Фурье, Гостехиздат, 1948.
9. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, И.Л.Л., М., 1963.
10. *А. М. Седлецкий*. Интерполяция в пространствах H^p в полуплоскости, ДАН СССР, 208, № 6, 1973, 1293—1295.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

Б. Т. БАТИКЯН

ПОДАЛГЕБРЫ КОРАЗМЕРНОСТИ 1 (НЕКОММУТАТИВНЫЙ СЛУЧАЙ)

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей e над алгебраически замкнутым полем K, и пусть B — такая подалгебра алгебры A, что $e \in B$ и $\dim_K A/B = 1$. В этой работе мы опишем все подобные подалгебры.

Аналогичное описание для случая коммутативной банаховой алгебры (над полем C комплексных чисел) было получено впервые З. Савоном и А. Варжехой в работе [1]. Результат состоит в следующем. Если B образует подалгебру коразмерности 1 в коммутативной банаховой алгебре A, то линейный функционал ψ, ядром которого служит B, либо имеет вид $\psi = c(\theta - \varphi)$, где c — константа, а θ и φ — суть гомоморфизмы алгебры A в поле C, либо ψ есть точечное дифференцирование, т. е. существует такой комплексный гомоморфизм θ алгебры A, что $\psi(a_1 a_2) = \psi(a_1)\theta(a_2) + \psi(a_2)\theta(a_1)$ для любых $a_1, a_2 \in$ A.

В дальнейшем Е. А. Гориным [2] было показано, что результат Савона и Варжехи является по существу алгебраическим и сохраняется, например, для любых коммутативных алгебр с единицей над алгебраически замкнутым полем. В работе [3] А. Вилански рассмотрел случай некоммутативных алгебр. Здесь, в частности, сформулированы условия, при выполнении которых приведенное выше описание подалгебр коразмерности 1 остается справедливым и в некоммутативном случае.

Мы покажем, что каждой подалгебре $B \subset A$ коразмерчости 1 можно сопоставить некоторое специальное представление алгебры A в алгебру $M(2, K)$ всех матриц второго порядка над полем K. Явный вид функционала ψ, для которого $B = \ker \psi$, будет зависеть от степени приводимости этого представления.

Положим $I = \{b \in B : ab \in B$ для любого $a \in A\}$. Очевидно, I образует двусторонний идеал в алгебре B и левый идеал в алгебре A. Заметим, что $\dim B/I = 1$. Действительно, если $b \overline{\in} I$, то найдется такое $a \in A$, что $ab \overline{\in} B$, т. е. $ab = b_1 + \lambda a$, $\lambda \in K$. Но тогда $b - \lambda e \in I$, другими словами $B = I \oplus K$.

Обозначим через τ естественный эпиморфизм алгебры A на двумерное пространство A/I. Каждому элементу $a \in A$ поставим в соответствие линейный оператор T_a, действующий на пространстве A/I по следующему правилу: $T_a \tau(a') = \tau(aa')$, $a' \in A$. Отображение $\pi : a \to T_a$ и осуществляет требуемое двумерное представление алгебры A. При этом образ $\pi(A)$ алгебры A содержит нетривиальную подалгебру коразмерности 1, а именно $\pi(B)$, и если ψ' — такой линейный функционал на $\pi(A)$, что $\ker\psi' = \pi(B)$, то $\psi'(\pi(a)) = \psi(a)$ с точностью до нормировки.

Рассмотрим теперь следующие возможности:

1) представление π неприводимо. Тогда по теореме Бернсайда (см. [4], стр. 495) $\pi(A) = M(2, K)$, и, следовательно, $\pi(B)$ совпадает либо с алгеброй M_1 всех нижних треугольных матриц, либо с алгеброй всех верхних треугольных матриц. Пусть для определенности $\pi(B) = M_1$. Если

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

то $\psi(a) = \beta$. Положим $\alpha = \theta(a)$ и $\delta = \varphi(a)$. Для любых a_1, $a_2 \in A$ имеем $\psi(a_1a_2) = \psi(a_1)\varphi(a_2) + \psi(a_2)\theta(a_1)$. При этом линейные функционалы θ и φ, как легко видеть, удовлетворяют соотношениям $\theta(a_1a_2) = \theta(a_1)\theta(a_2) + \theta(a_1a_0')\theta(a_0a_2)$ и $\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) + \varphi(a_1a_0)\varphi(a_0'a_2)$, где a_0 и a_0' — соответственно, прообразы матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

2) представление π приводимо, но не вполне приводимо. Мы можем предположить, что $\pi(A) \subset M_1$. Тогда

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

и поэтому отображения $\theta: a \to \alpha$ и $\varphi: a \to \delta$ являются гомоморфизмами алгебры A в поле K.

Пусть сперва $\pi(A) = M_1$. Как уже отмечалось, алгебра $\pi(B)$ содержит единичную матрицу и образует подалгебру коразмерности 1 в $\pi(A)$. Отсюда следует, что $\pi(B)$ либо есть алгебра M_2, состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

либо алгебра $M_2^{(k)}$, содержащая все такие матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

что $\gamma = k(\alpha - \delta)$, $k \in K$.

Если $\pi(B) = M_2$, то $\ker\psi = \ker(\theta - \varphi)$, т. е. найдется такое $\lambda \in K$, что $\psi = \lambda(\theta - \varphi)$.

Допустим, что $\pi(B) = M_2^{(k)}$. Внутренний автоморфизм алгебры M_1, порожденный матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & -1 \end{pmatrix},$$

переводит $M_2^{(k)}$ в алгебру M_3 всех диагональных матриц. Следовательно, можно предположить, что $\pi(B) = M_3$. В этом случае функционал ψ является (θ, φ)-дифференцированием, т. е.

$$\psi(a_1a_2) = \psi(a_1)\theta(a_2) + \psi(a_2)\varphi(a_1).$$

Пусть теперь $\pi(A) \neq M_1$. Тогда, поскольку алгебра $M_2^{(k)}$ вполне приводима, $\pi(A)$ может совпадать только с алгеброй M_2, а $\pi(B)$ — с алгеброй M_4, состоящей из матриц, кратных единичной. В этом случае $\theta = \varphi$, и ψ является точечным дифференцированием, соответствующим гомоморфизму θ;

3) представление π вполне приводимо. Тогда

$$\pi(A) = M_3, \quad \pi(B) = M_4 \quad \text{и} \quad \psi = \lambda(\theta - \varphi).$$

Подведем итоги.

Теорема. *Пусть* $\dim A/B = 1$, ψ — *K-линейный функционал на* A, *для которого* $B = \ker \psi$, *и* π — *описанное выше представление. Тогда*

1) *если представление* π *неприводимо, то найдутся такие K-линейные функционалы* θ *и* φ, *что для любых* $a_1, a_2 \in A$ *будем иметь* $\psi(a_1a_2) = \psi(a_1)\varphi(a_2) + \psi(a_2)\theta(a_1)$.

При этом в A *существуют такие фиксированные ненулевые элементы* a_0 *и* a_0', *что*

$$\theta(a_1a_2) = \theta(a_1)\theta(a_2) + \theta(a_1a_0')\theta(a_0a_2)$$

и

$$\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) + \varphi(a_1a_0)\varphi(a_0'a_2).$$

2) *если представление* π *приводимо, но не вполне приводимо, то либо* $\psi = \lambda(\theta - \varphi)$, *где* θ *и* φ — *гомоморфизмы, либо* ψ *есть* (θ, φ)-*дифференцирование, либо* ψ-*точечное дифференцирование;*

3) *если представление* π *вполне приводимо, то* $\psi = \lambda(\theta - \varphi)$, *где* θ *и* φ — *гомоморфизмы.*

Из полученных результатов легко следует описание подалгебр коразмерности 1 для коммутативного случая. Действительно, из всех перечисленных подалгебр алгебры $M(2, K)$ коммутативными являются подалгебры M_2, M_3 и M_4. Поэтому, если алгебра A коммутативна, то $\pi(B) = M_4$, а $\pi(A)$ совпадает либо с M_2 (тогда ψ есть точечное дифференцирование), либо с M_3 $(\psi = \lambda(\theta - \varphi))$ (ср. [2]).

Следующие замечания относятся к тому случаю, когда B образует подалгебру конечной (не обязательно равной 1) коразмерности в алгебре A.

Замечание. Пусть $\dim A/B = n$. Вновь рассмотрим идеал $I = \{b \in B : ab \in B$ для всех $a \in A\}$. Если обозначить через σ естественный эпиморфизм A на A/B, то каждому $b \in B$ можно сопоставить линейный оператор R_b на пространстве A/B: $R_b\sigma(a) = \sigma(ab)$. Фактор-пространство B/I изоморфно пространству операторов $\{R_b\}$, поскольку $R_b = 0$ тогда и только тогда, когда $b \in I$. Следовательно, $l = \dim B/I \leqslant n^2$, и $\dim A/I = l + n$. Точно также, как и выше, устанавливается, что подалгебре B отвечает представление A в алгебру $M(l+n, K)$.

В коммутативном случае совокупность операторов $\{R_b\}$ образует алгебру. Известно, что размерность любой коммутативной подалгебры $M(n, K)$ не превосходит числа

$$r(n) = \begin{cases} m^2 + 1, & \text{если } n = 2m, \\ m(m-1), & \text{если } n = 2m-1 \end{cases}$$

(см. [5]).

Следовательно, $l = \dim B/I \leqslant r(n)$. Это означает, что в коммутативном случае подалгебре коразмерности n отвечает представление, размерность которого не превосходит $r(n) + n$.

Замечание. В работе [2] доказано следующее утверждение усть A — коммутативная алгебра над алгебраически замкнутым полем K, B — подалгебра в A и $\dim A/B = n$. Тогда существует неуплотняемая цепочка подалгебр

$$B = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = A$$

длины n, причем $\dim A_{i+1}/A_i = 1$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

В случае некоммутативной алгебры подобной цепочки может не существовать. Например, в алгебре $M(4, K)$ имеется подалгебра коразмерности 3, но не существует подалгебр коразмерности 2 или коразмерности 1.

Автор благодарит Е. А. Горина за постановку задачи и ценные советы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 1.V.1976

Բ. Թ. ԲԱՏԻԿՅԱՆ. 1 կոչափողականություն ունեցող ենթահանրահաշիվների մասին (ոչ տեղափոխական դեպք) *(ամփոփում)*

Նկարագրվում են միավորով օժտված զուգորդական հանրահաշվի բոլոր 1 կոչափողականություն ունեցող ենթահանրահաշիվները։

B. T. BATIKIAN. *Subalgebras of condimension 1 (nocommutative case)* (summary)

All subalgebras of codimension 1 of associative algebras with identity are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Z. Sawon, A. Warsecha.* On the general form of subalgebras of codimension 1 of B-algebras with 1, Studia Math., 29, 1968, 249—260.
2. *Е. А. Горин.* Подалгебры конечной коразмерности, Мат. заметки, 6, № 3, 1969, 321—328.
3. *A. Wilansky.* Subspaces, subalgebras and ideals of codimension one in complex, algebras, J. Lond. Math. Soc. (2), 9, 1974, 87—92.
4. *С. Ленг.* Алгебра, Изд. „Мир", М., 1968.
5. *N. Jacobson.* Schur's theorems on commutative matrices, Bull. Amer. Math. Soc. 50, 1944, 431—436.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

А. А. ВАГАРШАКЯН

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ

В статье С. Я. Хавинсона [1] доказан следующий результат Пусть последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $|z_k| < 1$ такова, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) = \infty$$

и

$$\frac{|z_{k+1}| - |z_k|}{(1 - |z_{k+1}|)(1 - |z_k|)} \geqslant \delta > 0,$$

где $\delta > 0$ от k не зависит. Если $f(z)$ — ограниченная в круге $|z| <$ аналитическая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{k \to \infty} (1 - |z_k|) \ln |f(z_k)| = -\infty,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Аналогичный результат, при несколько других предположения на последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, был получен И. В. Ушаковой [2], [3] В дальнейшем И. В. Ушакова [4] обобщила эти результаты на более широкие классы функций.

Теоремы вышеприведенного типа свазаны с такими аппроксимационными процессами, в которых учитываются не только отклонения приближающего полинома от приближаемой функции, но и величины коэффициентов приближающих полиномов.

Основы теории, связывающей теоремы полноты, с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, с теоремами единственности, были даны в работах Дейвиса, Фань-Цзи [5] и С. Я. Хавинсона [6].

В настоящей статье доказаны новые теоремы единственности для ограниченных аналитических функций, аналогичные теоремам И. В. Ушаковой и С. Я. Хавинсона. Используя результаты Дейвиса, Фань-Цзи, С. Я. Хавинсона, эти теоремы применяются в теории аппроксимации.

1°. Введем несколько обозначений. Пусть $\alpha \geqslant 0$, а $E \subseteq \partial D$ — некоторое множество, где $D = \{z/|z| < 1\}$. Рассмотрим всевозможные покрытия множества E счетным набором шаров радиусов r_i:

$$\bigcup_i S_i \supseteq E$$

и положим

$$M_\alpha(E) = \inf\left(\sum_i r_i^\alpha\right),$$

где infimum берется по всем таким покрытиям. Подробно о величинах $M_\alpha(E)$ можно познакомиться в книге Л. Карлесона [9]. Заметим, что $M_\alpha(E)$—неотрицательная, монотонно возрастающая, счетно полуаддитивная функция множеств. В случае, когда $\alpha = 0$ для любого непустого множества $F \subseteq \partial D$ имеем $M_0(F) \geqslant 1$, а в случае $\alpha > 1$, $M_\alpha(\partial D) = 0$.

Пусть $1 \leqslant \beta < \infty$ и $0 < A < \infty$. Обозначим

$$\Delta_\beta(y) = \left\{ x \in D / \left| y - \frac{x}{|x|} \right|^\beta < A(1 - |x|) \right\},$$

где $y \in \partial D$.

Лемма 1. *Пусть* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $1 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$, *а* $u(x)$ — *неотрицательная гармоническая функция, определенная на* D. *Тогда для множества*

$$F = \{y \in \partial D / \sup_{x \in \Delta_\beta(y)} ((1 - |x|)^\alpha u(x)) = \infty\}$$

имеет место

$$M_{\beta(1-\alpha)}(F) = 0.$$

Обратно, для любого $F \subset \partial D$ *такого, что* $M_{\beta(1-\alpha)}(F) = 0$, *существует неотрицательная гармоническая функция* $u(x)$ *такая, что в любой точке* $y \in F$ *имеет место*

$$\sup_{x \in \Delta_\beta(y)} ((1 - |x|)^\alpha u(x)) = \infty.$$

Доказательство леммы 1, в несколько более общей форме, можно найти у автора [7].

Лемма 2. *Пусть* $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ — *последовательность в* D, *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |z_k|) < \infty.$$

Тогда существует множество $E \subseteq \partial D$ *такое, что*

$$M_{\beta(1-\alpha)}(E) = 0,$$

где

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 1 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$$

и

$$\sum_{\Delta_\beta(y) \ni z_k} (1 - |z_k|)^\alpha < \infty$$

для любого $y \in \partial D \setminus E$.

Доказательство. Для точек $0 \neq z \in D$ положим

$$C(z) = \{y \in \partial D / z \in \Delta_\beta(y)\}.$$

Через $\chi(z, y)$ мы обозначим характеристическую функцию множества $C(z)$, определенную на ∂D. Введем функцию

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha} \chi(z_k, y), \quad y \in \partial D.$$

Легко заметить, что

$$f(y) = \sum_{\Delta_{\beta}(y) \ni z_k} (1 - |z_k|)^{\alpha}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что для множества $E = \{y \in \partial D / f(y) = \infty\}$, $M_{\beta(1-\alpha)}(E) = 0$. Предположим, что это не так, т. е. $M_{\beta(1-\alpha)}(E) > 0$. Согласно теореме Безиковича (см. Л. Карлесон [9], стр. 18) существует компактное множество $F \subseteq E$ такое, что $M_{\beta(1-\alpha)}(F) > 0$. Далее, по теореме Фростмана (см. Л. Карлесон [9], стр. 14) существует константа a такая, что для любого компактного множества F существует неотрицательная мера μ, обладающая свойствами:

$$\mu(S_r) \leqslant r^{\beta(1-\alpha)}$$

для любого интервала $S_r \subset \partial D$ длины $2r$ и

$$\mu(F) \geqslant a M_{\beta(1-\alpha)}(F).$$

Следовательно, мы имеем

$$\infty = \int_F f(y)\,\mu(dy) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha} \int_F \chi(z_k, y)\,\mu(dy) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) \right) \sup_{z \in D} \frac{\mu(C(z))}{(1 - |z|)^{1-\alpha}}.$$

Заметим, что $C(z)$ — интервал на ∂D с центром в точке $\frac{z}{|z|}$ и длиной $2 A^{\frac{1}{\beta}} (1 - |z|)^{\frac{1}{\beta}}$. Следовательно

$$\infty \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) \right) \sup \frac{A^{1-\alpha} \mu(S_r)}{r^{\beta(1-\alpha)}} \leqslant A^{1-\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) \right) < \infty,$$

где suprеmum берется по всем интервалам длины $2r$. Из полученного противоречия вытекает, что $M_{\beta(1-\alpha)}(E) = 0$.

Лемма 3. *Пусть* $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность в* D, *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |w_k|)^{\alpha} < \infty,$$

где $0 < \alpha < 1$, *а* $B(z, w_k)$ — *произведение Бляшке с нулями в точках* $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$. *Тогда для любого множества* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, *удовлетворяющего условиям*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|)^{\alpha} = \infty$$

и

$$\inf_{i \neq j} \left| \frac{1}{(1-|z_i|)^{\alpha}} - \frac{1}{(1-|z_j|)^{\alpha}} \right| > 0,$$

имеет место

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (1-|z_n|)^{\alpha} \ln |B(z_n, w_k)| > -\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\pi(z) = \frac{z}{|z|} (1-(1-|z|)^{\alpha}),$$

где $0 \neq z \in D$ и $\pi(0) = 0$. Заметим, что $\pi(z)$ отображает единичный круг на себя и для любого $z \in D$, $|\pi(z)| \leqslant |z|$. Пусть w и z—точки из D, удовлетворяющие условию

$$\min\{|w|, |z|\} \geqslant 1-(2(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Докажем, что имеет место неравенство

$$\left| \frac{|\pi(w)|-|\pi(z)|}{1-|\pi(w)||\pi(z)|} \right| \leqslant \left| \frac{|w|-|z|}{1-|w||z|} \right|. \tag{1}$$

Обозначим $x = 1-|w|$ и $y = 1-|z|$. Тогда неравенство (1) примет вид

$$\left| \frac{x^{\alpha}-y^{\alpha}}{x^{\alpha}+y^{\alpha}-x^{\alpha}y^{\alpha}} \right| \leqslant \left| \frac{x-y}{x+y-xy} \right|, \tag{2}$$

где $0 < x,\ y < (2(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$. Сначала рассмотрим случай, когда $x > y$. Неравенство (2) можно записать в виде

$$(x^{\alpha}-y^{\alpha})(x+y-xy) \leqslant (x-y)(x^{\alpha}+y^{\alpha}-x^{\alpha}y^{\alpha}),$$

или

$$2x^{\alpha}y + xy^{\alpha+1} + x^{\alpha+1}y^{\alpha} \leqslant 2xy^{\alpha} + x^{\alpha+1}y + x^{\alpha}y^{\alpha+1}.$$

Так как $xy^{\alpha+1} \leqslant x^{\alpha+1}y$, то достаточно доказать, что

$$2x^{\alpha}y + x^{\alpha+1}y^{\alpha} \leqslant 2xy^{\alpha} + x^{\alpha}y^{\alpha+1},$$

или, что то же самое

$$2y^{1-\alpha} - y \leqslant 2x^{1-\alpha} - x. \tag{3}$$

Заметим, что функция $f(t) = 2t^{1-\alpha} - t$ имеет неотрицательную производную при $0 < t < (2(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$, и поэтому в этом интервале $f(t)$ — неубывающая функция. Из приведенного замечания и из неравенств

$$0 < y < x < (2(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$$

следует неравенство (3). Аналогично рассматривается случай, когда $0 < x < y < (2(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$.

Не теряя общности, можно предположить, что

$$\min\{|w_k|, |z_k|\} > 1 - (2(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

Тогда в силу (1) имеем

$$|B(|\pi(z)|, |\pi(w_k)|)| = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{|\pi(w_k)| - |\pi(z)|}{1 - |\pi(w_k| |\pi(z)|} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{|w_k| - |z|}{1 - |w_k| |z|} \right| \leqslant |B(z, w_k)| \tag{4}$$

при $|z| > 1 - (2(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$. Заметим, что последовательности $\{\pi(w_k)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\pi(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \pi(w_k)|) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |w_k|)^{\alpha} < \infty;$$

2. $$\inf_{i \neq j} \left| \frac{|\pi(z_i)| - |\pi(z_j)|}{(1 - |\pi(z_i)|)(1 - |\pi(z_j)|)} \right| =$$

$$= \inf_{i \neq j} \left| \frac{1}{(1 - |z_i|)^{\alpha}} - \frac{1}{(1 - |z_j|)^{\alpha}} \right| > 0;$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\pi(z_n)|) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)^{\alpha} = \infty.$$

Из условия 1 следует, что произведение Бляшке с нулями $\{|\pi(w_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ сходится $B(z, |\pi(w_k)|) \neq 0$, из 2 и 3 следует, что последовательность $\{|\pi(z_n)|\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы И. В. Ушаковой и С. Я. Хавинсона [1] (эта теорема приведена во введении настоящей статьи). Следовательно мы имеем

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (1 - |\pi(z_n)|) \ln |B(|\pi(z_n)|, |\pi(w_k)|)| > -\infty.$$

Пользуясь неравенством (4), получим

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (1 - |z_n|)^{\alpha} \ln |B(z_n, w_k)| > -\infty.$$

2°. Теперь докажем основной результат настоящей статьи.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$, *числа* $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$, $2 < A < \infty$ *и множество* $E \subseteq \partial D$ *таковы, что для любой точки* $y \in E$ *существует подпоследовательность* $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, *удовлетворяющая условиям:*

1. $$\left|y-\frac{z_{n_k}}{|z_{n_k}|}\right|^{\beta}<A(1-|z_{n_k}|);$$

2. $$\inf_{i\neq j}\left|\frac{1}{(1-|z_{n_i}|)^{\alpha}}-\frac{1}{(1-|z_{n_j}|)^{\alpha}}\right|>0;$$

3. $$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_{n_k}|)^{\alpha}=\infty,$$

а множество E *удовлетворяет условию*

$$M_{\beta(1-\alpha)}(E)>0.$$

Если $f(z)$ — *ограниченная, аналитическая на* D *функция и*

$$\lim_{n\to\infty}(1-|z_n|)^{\alpha}\ln|f(z_n)|=-\infty, \tag{5}$$

то $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, т. е. существует последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям теоремы и ограниченная аналитическая функция $f(z)\not\equiv 0$, для которой имеет место (5). Не теряя общности, можно считать $|f(z)|\leqslant 1$, $|z|<1$. Из факторизационной теоремы Неванлинны следует, что

$$f(z)=z^{p}B(z,\ w_k)\exp\left\{-\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\mu(d\theta)+iC\right\},$$

где p — натуральное число, $B(z,\ w_k)$ — произведение Бляшке, составленное по нулям функции $f(z)$, μ — конечная положительная мера, а C — действительное число. Следовательно, имеем

$$(1-|z|)^{\alpha}\ln|f(z)|=p(1-|z|)^{\alpha}\ln|z|+(1-|z|)^{\alpha}\ln|B(z,\ w_k)|-$$
$$-(1-|z|)^{\alpha}u(z), \tag{6}$$

где $u(z)$ — неотрицательная гармоническая функция. Из леммы 1 следует, что существует множество $F_1\subset\partial D$ такое, что

$$M_{\beta(1-\alpha)}(F_1)=0 \tag{7}$$

и для любой точки $y\in\partial D\setminus F_1$

$$\sup_{\Delta_{\beta}(y)\ni z}(1-|z|)^{\alpha}u(z)<\infty. \tag{8}$$

Так как

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|)^{\alpha}\ln|z|=0,$$

то нам остается оценить второе слагаемое в (6). Из леммы 2 следует, что существует множество $F_2\subset\partial D$ такое, что

$$M_{\beta(1-\alpha)}(F_2)=0, \tag{9}$$

и для любого $y\in\partial D\setminus F_2$

$$\sum(1-|w_k|)^{\alpha}<\infty, \tag{10}$$

где сумма берется по тем w_k, которые удовлетворяют уловию

$$\left| y - \frac{w_k}{|w_k|} \right|^{\beta} \leqslant A\, 2^{\beta+1} (1 - |w_k|). \tag{11}$$

Далее, так как

$$v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z|^2}{\left| z - \frac{w_k}{|w_k|} \right|^2} (1 - |w_k|)$$

—неотрицательная гармоническая функция на D, то из леммы 1 вытекает, что существует множество $F_3 \subset \partial D$ такое, что

$$M_{\beta(1-\alpha)}(F_3) = 0, \tag{12}$$

и для любой точки $y \in \partial D \setminus F_3$

$$\sup_{\Delta_\beta(y) \ni z} (1 - |z|)^{\alpha} v(z) < \infty. \tag{13}$$

В силу (7), (9) и (12) имеем

$$M_{\beta(1-\alpha)}(F) = 0,$$

где $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$. Так как $M_{\beta(1-\alpha)}(E) > 0$, то существует точка $y \in E \setminus F$. Разобьем произведение Бляшке $B(z, w_k)$ на три множителя

$$B(z, w_k) = B_1(z)\, B_2(z)\, B_3(z),$$

где $B_1(z)$—произведение Бляшке, составленное по тем w_k, которые удовлетворяют условию $|y - w_k| \geqslant \frac{1}{4}$, $B_2(z)$ составлена по тем w_k, которые удовлетворяют условию (11) и $|y - w_k| < \frac{1}{4}$, а $B_3(z)$ составлена по остальным точкам w_k. Заметим, что

$$\lim_{z \to y} (1 - |z|)^2 \ln |B_1(z)| = 0. \tag{14}$$

Прежде чем продолжать изучение произведения Бляшке, докажем одно неравенство. Для любых точек $z, w \in D$ имеем

$$\ln \left| \frac{w - z}{1 - \overline{w} z} \right|^2 = - \ln \left(1 + \frac{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)}{|w - z|^2} \right) \geqslant -$$

$$- \frac{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)}{|w - z|^2}. \tag{15}$$

Последнее неравенство имеет место, так как $\ln(1 + x) \leqslant x$, $x > 0$. Далее заметим, что если

$$2(1 - |w|) \leqslant \left| z - \frac{w}{|w|} \right|, \tag{16}$$

то справедливо неравенство

$$\left|z-\frac{w}{|w|}\right| \leqslant |z-w| + \left|w-\frac{w}{|w|}\right| =$$

$$= |z-w| + (1-|w|) \leqslant |z-w| + \frac{1}{2}\left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Следовательно

$$2\,|z-w| \geqslant \left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Поэтому, если z и w удовлетворяют неравенству (16), то в силу (15) имеем

$$\ln\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|^2 \geqslant -4\,\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{\left|z-\frac{w}{|w|}\right|^2}. \tag{17}$$

Теперь предположим, что w удовлетворяет условию

$$A\,2^{\beta+1}(1-|w|) < \left|y-\frac{w}{|w|}\right|^{\beta}, \tag{18}$$

где $y \in \partial D$ — заранее фиксированная точка, $z \in \Delta_\beta(y)$ и $|y-w|$, $|y-z| < \frac{1}{4}$.

Тогда имеет место неравенство

$$2(1-|w|) \leqslant \left|z-\frac{w}{|w|}\right|. \tag{19}$$

Действительно, если

$$4(1-|w|) \leqslant \left|\frac{w}{|w|}-\frac{z}{|z|}\right|,$$

то неравенство (19) очевидно, так как

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{w}{|w|}-\frac{z}{|z|}\right| \leqslant \left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Предположим, что

$$\left|\frac{w}{|w|}-\frac{z}{|z|}\right| < 4(1-|w|).$$

Тогда имеем

$$A\,2^{\beta+1}(1-|w|) \leqslant \left|y-\frac{w}{|w|}\right|^{\beta} \leqslant 2^{\beta-1}\left(\left|y-\frac{z}{|z|}\right|^{\beta} + \left|\frac{z}{|z|}-\frac{w}{|w|}\right|^{\beta}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\beta-1}(A(1-|z|) + 4(1-|w|)).$$

Следовательно вспоминая, что $A > 2$, получим

$$2(1-|w|) \leqslant 4\,\frac{A-1}{A}(1-|w|) \leqslant 1-|z|.$$

Далее

$$2(1-|w|)\leqslant 1-|z|\leqslant\left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Таким образом, мы доказали, что если $z\in\Delta_\beta(y)$, w удовлетворяют условию (18) и $|y-z|<\frac{1}{4}$, $|y-w|<\frac{1}{4}$, то имеет место (16), следовательно имеет место и неравенство (17). Так как нули произведения Бляшке $B_3(z)$ удовлетворяют условию

$$A\,2^{\beta+1}(1-|w_k|)<\left|y-\frac{w_k}{|w_k|}\right|^\beta$$

и $|y-w_k|<\frac{1}{4}$, то из вышеприведенных оценок следует, что для

$$z\in\Delta_\beta(y)\cap\left\{z/|y-z|<\frac{1}{4}\right\}$$

имеет место

$$\ln|B_3(z)|\geqslant-2\sum\frac{(1-|w_k|^2)(1-|z|^2)}{\left|z-\frac{w_k}{|w_k|}\right|^2}\geqslant-4v(z). \qquad (20)$$

Пусть $\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность, соответствующая точке y, о которой говорится в формулировке теоремы. Из леммы 3 следует, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(1-|z_{n_k}|)^\alpha\ln|B_2(z_{n_k})|>-\infty. \qquad (21)$$

Таким образом, из оценок (13), (14), (20), (21) имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(1-|z_{n_k}|)^\alpha\ln|B(z_{n_k}, w_m)|>-\infty.$$

Наконец, учитывая (8), получим

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(1-|z_{n_k}|)^\alpha\ln|f(z_{n_k})|>-\infty,$$

что противоречит (5). Теорема доказана.

Аналог теоремы 1 верен и в крайнем случае, когда $\alpha=0$, $\beta=1$. В этом случае имеет место

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ *и множество* $E\subset\partial D$ *положительной меры таковы, что для любой точки* $y\in E$ *существует бесконечная подпоследовательность* $\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, *удовлетворяющая условиям*

$$\left|y-\frac{z_{n_k}}{|z_{n_k}|}\right|\leqslant A(1-|z_{n_k}|),\quad k=1,\ 2,\cdots,$$

где $A < \infty$ от k не зависит. Тогда из того, что для ограниченной аналитической функции $f(z)$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0,$$

следует, что $f(z) \equiv 0$.

Доказательство вытекает из того, что ограниченная аналитическая функция, не равная тождественно нулю, почти всюду на ∂D имеет некасательные граничные значения, которые не могут обращаться в нуль на множестве положительной лебеговой меры.

Замечание. Вторая часть леммы 1 показывает, что доказанные выше теоремы в некотором смысле точны.

3°. Приведем приложение доказанных теорем в теории аппроксимации. Приведенная ниже конструкция достаточно универсальна и ее можно применять во многих случаях. Для иллюстрации этого метода мы рассмотрим вопросы приближения функций из L_p, $1 \leq p < \infty$, рациональными функциями с фиксированными полюсами. Сначала сформулируем некоторые общие теоремы, доказательство которых можно найти у С. Я. Хавинсона [8].

Пусть X—нормированное пространство, а $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$—норма в n-мерном пространстве $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in E^n$, причем для любого $m > n$ и любых $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \underbrace{0, \cdots, 0}_{m-n}).$$

Пространство, сопряженное к E^n обозначим $(E^n)^*$, а через p^*—норму в нем.

Определение. Мы скажем, что система $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$, $o(p)$ полна в X, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого элемента $x \in X$ существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ такие, что

$$\|x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j\| < \varepsilon$$

и

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) < \varepsilon.$$

Теорема (С. Я. Хавинсон). Для того чтобы система $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ была $o(p)$ полна в X необходимо и достаточно, чтобы для любого линейного функционала $l \in X^*$ из неравенства

$$p^*(l(\varphi_1), l(\varphi_2), \cdots, l(\varphi_n)) \leqslant 1, \ n = 1, 2, \cdots$$

следовало бы, что $l \equiv 0$.

Теорема 3. *Пусть последовательность $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что $|z_{2k}| < 1$, $|z_{2k+1}| > 1$, $k = 1, \cdots$. Предположим, что $\{z_{2k}\}_{k=1}^\infty$ и $\left\{\frac{1}{z_{2k+1}}\right\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Далее пусть c_k—положительные числа, такие, что $c_k \to \infty$. Тогда для любой функции*

$f(e^{i\theta}) \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, и любого числа $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ такая, что

$$\int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\theta}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z_k - e^{i\theta}} \right|^p d\theta < \varepsilon$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \exp\left\{ -\frac{c_k}{|1 - |z_k||^{\alpha}} \right\} < \varepsilon.$$

Доказательство. В пространстве L_p, $1 \leqslant p < \infty$, рассмотрим систему $\left\{ \frac{1}{z_k - e^{i\theta}} \right\}_{k=1}^{\infty}$. В E^n введем норму

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \exp\left\{ -\frac{c_k}{|1 - |z_k||^{\alpha}} \right\}.$$

Заметим, что

$$p^*(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(|\lambda_k| \exp\left\{ \frac{c_k}{|1 - |z_k||^{\alpha}} \right\} \right).$$

Пусть $l \in L_p^*$. Тогда существует функция $g \in L_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, такая, что

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta = l(f), \ f \in L_p.$$

Пусть

$$1 \geqslant p^*\left(l\left(\frac{1}{z_1 - e^{i\theta}} \right), \cdots, l\left(\frac{1}{z_n - e^{i\theta}} \right) \right) =$$

$$= \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| l\left(\frac{1}{z_k - e^{i\theta}} \right) \right| \exp\left\{ \frac{c_k}{|1 - |z_k||^{\alpha}} \right\}.$$

Обозначая

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\overline{g(e^{i\theta})}}{z - e^{i\theta}}\, d\theta,$$

получим

$$|F(z_k)| \leqslant \exp\left\{ -\frac{c_k}{|1 - |z_k||^{\alpha}} \right\}, \ k = 1, 2, \cdots. \tag{22}$$

Функция $F(z)$ аналитическая на D и принадлежит H_q. Из факторизационной теоремы Неванлинны следует, что функцию $F(z)$ можно представить в виде

$$F(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)},$$

где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ —аналитические функции и $|F_1(z)| \leqslant 1$, $|F_2(z)| \leqslant 1$. Из неравенства (22) следует, что

$$(1-|z_{2k}|)^{\alpha} \ln |F_1(z_{2k})| \leqslant (1-|z_{2k}|)^{\alpha} \ln |F(z_{2k})| \leqslant -\frac{c_k}{(1-|z_{2k}|)^{\alpha}}.$$

Поэтому в силу теоремы 1 имеем $F(z) \equiv 0$ при $|z| < 1$. Аналогично доказывается, что $F(z) \equiv 0$ при $|z| > 1$. Следовательно, функция $g(e^{i\vartheta})$, которая порождает функционал l, равна нулю почти всюду. Поэтому $l \equiv 0$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 4. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такова, что* $|z_{2k}| < 1$, $|z_{2k+1}| > 1$, $k = 1, \cdots$ *и подпоследовательности* $\{z_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\left\{\frac{1}{\bar{z}_{2k+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям теоремы 2, а* c_k — *положительные числа и* $c_k \to \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует последовательность* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, *такая, что*

$$\int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\vartheta}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z_k - e^{i\vartheta}} \right|^p d\vartheta < \varepsilon$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{c_k} < \varepsilon.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 1.IX.1976

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Միակության թեորեմ սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների համար և նրա կիրառությունը մոտարկումների տեսության մեջ *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում են միակության նոր թեորեմներ սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների համար և բերվում են այդ թեորեմների որոշ կիրառություններ մոտարկումների տեսության մեջ։

A. A. VAGARSHAKIAN. *A uniqueness theorem for bounded analytic functions and its application in the theory of approximation* (summary)

In this paper new theorems of uniquens for bounded analytic functions are proved. An application in the theory of approximation is indicated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Я. Хавинсон.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН, XVIII, 2 (110), 1963.
2. *Н. В. Ушакова.* Теория единственности для функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге, ДАН СССР, 130, № 1, 1960.
3. *Н. В. Ушакова.* Некоторые теоремы единственности для функций, мероморфных в еди-

ничном круге. Тезисы докл. V Всесоюзной конференции по теории функций. Ереван, 1960.

4. *И. В. Ушакова.* Некоторые теоремы единственности для функций, субгармонических и мероморфных в единичном круге, ДАН СССР, 137, № 6, 1961.
5. *Ky Fan* and *Ph. Davis.* Complete sequences and approximation in normed linear spaces, Duke Math. journ., 24, № 2, 1957.
6. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые вопросы полноты систем, ДАН СССР, 137, № 4, 1961.
7. *А. А. Вагаршакян.* Граничные свойства некоторых классов гармонических функций, Известия АН Арм. ССР, сер. «Математика», X, № 1, 1975.
8. *С. Я. Хавинсон.* О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов, Известия АН Арм. ССР, сер. «Математика», VI, №№ 2—3, 1971.
9. *Л. Карлесон.* Избранные проблемы теории исключительных множеств, Изд. «Мир», М., 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

Г. К. ОГАНЕСЯН

О РЯДАХ ИЗ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В работе [1] доказана следующая

Теорема. *Пусть ряд из независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями*

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ. *Если*

$$P(|\xi| \geqslant y) = O(e^{-y^q}).$$

при некотором $q > 2$, *то у величин* $\{\xi_n\}$ *существуют все моменты и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M\xi_n^2)^{\beta} < +\infty$$

при всех $\beta > \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{q-1}$.

В настоящей работе доказывается одно обобщение сформулированной теоремы. В частности, это обобщение содержит следующий результат: *пусть ряд из независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями*

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ. *Если*

$$P(|\xi| \geqslant y) = O(e^{-e^{y}}),$$

то у величин $\{\xi_n\}$ *существуют все моменты и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M\xi_n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\log^{2+\varepsilon}\left(\frac{1}{M\xi_n^2}\right)} < +\infty$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Для формулировки нашей теоремы введем функции $H(y)$ и $H^*(y)$. Пусть $H(y)$—положительная, непрерывная, строго возрастающая функция на $[0, +\infty)$. Функция $H^*(y)$ определяется соотношением $H(H^*(y)) = y + 1$ или же $H^*(y) = H^{-1}(y+1)$.

Предположим, что при некотором $\alpha \leqslant 1$

$$\frac{H^*(y)}{y^\alpha}\downarrow \tag{1}$$

справедливо.

Теорема 1. *Пусть ряд из независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями*

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ. Если

$$P(|\xi| \geqslant y) = O(e^{-yH(y)}), \tag{2}$$

то у величин $\{\xi_n\}$ существуют все моменты и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M(\xi_n^2))^{\frac{1}{2}} \frac{1}{H^*\left(\frac{1}{\sqrt{M\xi_n^2}}\right)\log^{1+\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{M(\xi_n^2)}}} < +\infty$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Предварительно докажем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть случайная величина ξ удовлетворяет условию (2). Если*

$$\Phi(z) = Me^{z\xi},$$

то

$$|\Phi(z)| \leqslant ce^{|z|\cdot H^*(|z|)}.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$|\Phi(z)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy}\, dP(\xi < y)\right| \leqslant \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|z||y|}\, dP(\xi < g)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \int_{0}^{+\infty} e^{|z||y|}\, dP(|\xi| \geqslant y) = 1 - e^{|z|y} P(|\xi| \geqslant g)\Big|_0^{\infty} +$$

$$+ |z| \int_{0}^{\infty} e^{|z|y} P(|\xi| \geqslant y)\, dy.$$

Положим $|z| = r$ и, используя условие (2), имеем

$$|\Phi(z)| \leqslant c_1 [1 + r \int_{0}^{+\infty} e^{ry - yH(y)}\, dy].$$

При $y \geqslant H^*(r)$ выполняется неравенство

$$ry - yH(y) \leqslant -y,$$

используя этот факт, получаем

$$|\Phi(z)| \leqslant c_1\Big[1 + r\int\limits_0^{H^*(r)} e^{ry - yH(y)}\,dy + r\int\limits_{H^*(r)}^{+\infty} e^{ry - yH(y)}\,dy\Big] \leqslant$$

$$\leqslant c_1[1 + e^{rH^*(r)} - 1 + r] \leqslant c_2 e^{rH^*(r)}.$$

Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть $\varphi(t)$ — неубывающая на $[0; +\infty)$ функция. Пусть, далее, $H^*(t)$ — монотонно возрастающая, положительная, непрерывная функция, удовлетворяющая условию (1). Если*

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{\varphi(t)}{H^*(t)\,t^2\log^{1+\varepsilon} t}\,dt < +\infty, \tag{3}$$

то

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{tH^*(t)\log^{1+\varepsilon} t}\,d\varphi(t) < +\infty. \tag{4}$$

Доказательство. Введем обозначение $h(t) \equiv \dfrac{\int\limits_0^t H^*(x)\,dx}{x}$. Из условия (1) следует неравенство

$$\frac{1}{\alpha+1} H^*(t) \leqslant h(t) \leqslant H^*(t). \tag{5}$$

Из неравенства (5) при помощи несложных выкладок убеждаемся, что $h(t)$ монотонно возрастающая, положительная, дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{h(t)}{t^2}\downarrow.$$

Используя эти свойства $h(t)$, из (3) получим

$$\left|\int\limits_2^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t\log^{1+\varepsilon} t}\,d\,\frac{1}{h(t)}\right| < +\infty. \tag{6}$$

Из (6) следует, что если $r \geqslant r_1$, то

$$1 \geqslant -\int\limits_r^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t\log^{1+\varepsilon} t}\cdot d\,\frac{1}{h(t)} \geqslant -\varphi(r)\int\limits_r^{\infty} \frac{1}{t\log^{1+\varepsilon} t}\,d\,\frac{1}{h(t)} =$$

$$= \varphi(r)\,\frac{1}{h(r)\,r\log^{1+\varepsilon} r} - \varphi(r)\int\limits_r^{\infty} -\frac{1}{h(t)\,t^2\log^{1+\varepsilon} t}\,dt -$$

$$- \varphi(r) \int\limits_r^\infty \frac{1+\varepsilon}{h(t)\, t \log^{1+\varepsilon} t}\, dt.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\varphi(r)}{h(r)\, r \log^{1+\varepsilon} r} < M \text{ для } r > r_1. \tag{7}$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_2^r \frac{1}{h(t)\, t \log^{1+\varepsilon} t}\, d\varphi(t) = \frac{\varphi(r)}{h(r)\, r \log^{1+\varepsilon} r} -$$

$$- \int\limits_2^r \varphi(t) \frac{1}{t \log^{1+\varepsilon} t}\, d\frac{1}{h(t)} + \int\limits_2^r \varphi(t) \frac{1}{h(t)\, t^2 \log^{1+\varepsilon} t}\, dt +$$

$$+ \int\limits_2^r \varphi(t) \frac{1+\varepsilon}{h(t)\, t^2 \log^{2+\varepsilon} t}\, dt.$$

Из (3), (6), (7) следует, что правая часть этого равенства ограничена. Следовательно, ограничена и левая часть. Из неравенства (5) вытекает справедливость неравенства (4), что и требовалось доказать.

Введем обозначение $N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(r)}{r}\, dr$, где $n(r)$ число нулей функции $\Phi(z) = Me^{z^2}$ в круге $|z| \leqslant r$.

Лемма 3. *Пусть $H(t)$ — положительная, монотонно возрастающая, непрерывная функция, которая при некотором $\alpha < 1$ удовлетворяет условию (1).*

Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — последовательность нулей функции $\Phi(z) = Me^{z^2}$ с учетом их кратности. Если

$$|\Phi(z)| \leqslant ce^{|z| H^*(|z|)}, \tag{8}$$

то

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{H^*(|z_k|) |z_k| \log^{1+\varepsilon} |z_k|} < +\infty. \tag{9}$$

Доказательство: Из формулы Иенсена следует (см. [2], стр. 220)

$$N(t) \leqslant c_1 t H^*(t).$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_0^\infty \frac{N(t)}{H^*(t)\, t^2 \log^{1+\varepsilon} t}\, dt \leqslant c_1 \int\limits_0^\infty \frac{1}{t \log^{1+\varepsilon} t}\, dt < +\infty.$$

Если теперь в лемме 2 вместо $\varphi(t)$ возьмем $N(t)$, то получим

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{H^*(t)\, t \log^{1+\varepsilon} t}\, dN(t) < +\infty.$$

Отсюда имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{n(t)}{H^*(t)\, t^2 \log^{1+\varepsilon} t}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{H^*(t)\, t \log^{1+\varepsilon} t}\, dN(t) < +\infty.$$

Следовательно, если в лемме 2 вместо $\varphi(t)$ взять $n(t)$, то получим

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{H^*(t)\, t \log^{1+\varepsilon} t}\, dn(t) < +\infty.$$

Далее имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{H^*(|z_k|)\, |z_k| \log^{1+\varepsilon} |z_k|} = \lim_{r\to\infty} \int_0^{r} \frac{1}{H^*(t)\, t \log^{1+\varepsilon} t}\, dn(t) =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{H^*(t)\, t \log^{1+\varepsilon} t}\, dn(t) < +\infty.$$

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем произвольное число n. Тогда случайная величина ξ допускает разложение

$$\xi = \xi_n + \eta_n, \text{ где } \eta_n = \sum_{k>n} \xi_k.$$

По теореме Леви-Райкова (см. [3], стр. 77) следует, что для случайной величины ξ_n также имеет место соотношение (2). Пусть $\Phi(z)$— характеристическая функция ξ, $f_n(z)$ и $\psi_n(z)$ — характеристические функции величин ξ_n и η_n, соответственно. Из равенства

$$\Phi(z) = f_n(z)\, \Psi_n(z)$$

следует, что все нули функции $f_1(z)$ являются нулями функции $\Phi(z)$. В силу сказанного имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{H^*(|z_{n_k}|)\, |z_{n_k}| \log^{1+\varepsilon} |z_{n_k}|} < +\infty \tag{10}$$

и

$$M(\xi_n^2) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{n_k}|^2} < +\infty, \tag{11}$$

где $\{z_{n_k}\}_1^{\infty}$ — последовательность нулей функций с учетом кратности Введем обозначение

$$P(x)=\{H^{*}(x^{-\frac{1}{2}})\log^{1+\varepsilon}(x^{-\frac{1}{2}})\}^{-1}x^{\frac{1}{2}}.$$

Воспользовавшись условием (1), получим $P(x)\cdot x^{-1}\downarrow$. Отсюда следует, что $P(x)$ — полуаддитивная функция (см. [4], стр. 105). Из (10), (11) вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{M(\xi_n^2)}}{H^{*}\left(\frac{1}{\sqrt{M(\xi_n^2)}}\right)\log^{1+\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{M(\xi_n^2)}}}=\sum_{n=1}^{\infty}P(M(\xi_n^2))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|z_{n_k}|^2}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\frac{1}{|z_{n_k}|^2}\right)=$$

$$=\sum_{n,\ k=1}^{\infty}\frac{1}{H^{*}(|z_{n_k}|)|z_{n_k}|\log^{1+\varepsilon}|z_{n_k}|}<+\infty.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть ряд из независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями*

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$$

сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ. *Если*

$$P(|\xi|\geqslant y)=O(e^{-y^q})$$

при некотором $q>2$, *то у величин* $\{\xi_n\}$ *существуют все моменты и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(\xi_n^2)^{\frac{1}{2}\frac{q}{q-1}}}{\log^{1+\varepsilon}\frac{1}{M(\xi_n^2)}}<+\infty.$$

Отсюда следует, что если для сходящегося почти всюду на [0, 1] ряда по системе Радемахера

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n r_n(t)$$

выполняется условие

$$P(|f(t)|\geqslant y)=O(e^{-y^q})\ (q>2),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^{\frac{q}{q-1}}}{\log^{1+\varepsilon}\frac{1}{|a_n|}}<+\infty.$$

Следствие 2. *Пусть ряд из независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями*

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ. *Если*

$$P(|\xi| > y) = O(e^{-e^{y}}),$$

то у величин $\{\xi_n\}$ *существуют все моменты и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M(\xi_n^2))^{\frac{1}{2}}}{\log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{M(\xi_n^2)}\right)} < +\infty.$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю, профессору Е. М. Никишину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 21.XII.1975

Գ. Կ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Անկախ փոփոխական մեծություններից կազմված շարքերի վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում է մի թեորեմ անկախ փոփոխական մեծություններից կազմված շարքերի վերաբերյալ։ Այդ թեորեմում ընդհանրացվում և ուժեղացվում է Ե. Մ. Նիկիշինի մի արդյունքը։

G. K. HOVANESSIAN. *On series of independent random variables*
(summary)

A theorem about series of independent random variables is proved. This theorem generales and strengthens a result of E. M. Nickishin.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. М. Никишин.* Об одном свойстве сумм независимых величин, Матем. заметки, 16. вып. 5, 1974.
2. *А. Н. Маркушевич.* Теория аналитических функций, т. 2, М., Изд. «Наука», 1968.
3. *Ю. В. Линник, И. В. Островский.* Разложения случайных величин и векторов, М., Изд. «Наука», 1972.
4. *Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа.* Неравенства, М., ИИЛ, 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

Г. Ш. ГУСЕЙНОВ

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ МАТРИЦЫ ЯКОБИ

Изучается прямая и обратная задача теории рассеяния для уравнения

$$\begin{cases} b_1 y_1 + a_1 y_2 = \lambda y_1, \\ a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n \quad (n = 2, 3, 4, \cdots), \end{cases} \tag{1}$$

где

$$a_n > 0, \ \operatorname{Im} b_n = 0 \ (n = 1, 2, 3, \cdots), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\,(|1 - a_n| + |b_n|) < \infty. \tag{2}$$

Формальное решение обратной задачи рассеяния для (1) с $b_n \equiv 0$ рассмотрено в работе [1] при условии, что $a_n \to 1$ при $n \to \infty$ достаточно быстро. В настоящей работе изучена задача рассеяния в классе коэффициентов a_n, b_n, удовлетворяющих условию (2).

Задача рассеяния для дискретных уравнений, но в других постановках изучалась также в работах [2], [3], [4].

§1. Специальное решение

Рассмотрим дискретное уравнение

$$\begin{cases} b_1 y_1 + a_1 y_2 = \lambda y_1, \\ a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n \quad (n = 2, 3, 4, \cdots), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\{y_n\}_1^{\infty}$ — искомое решение, λ—комплексный параметр и

$$a_n > 0, \ \operatorname{Im} b_n = 0 \ (n = 1, 2, 3, \cdots), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\,(|1 - a_n| + |b_n|) < \infty. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1) эквивалентно нахождению вектора $\{y_n\}_0^{\infty}$, удовлетворяющего уравнению

$$a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots; \ a_0 = 1) \tag{1.3}$$

и начальному условию

$$y_0 = 0. \tag{1.3'}$$

Обозначим

$$\sigma(n) = \sum_{p=n}^{\infty} (|1 - a_p| + |b_p|).$$

В уравнении (1.1) положим $\lambda = 2\cos z$, где $z = \xi + i\tau$. Через ξ всюду в дальнейшем будем обозначать только вещественный параметр.

Теорема 1.1. *При условии* (1.2) *уравнение* (1.3) *имеет единственное решение, допускающее представление*

$$f_n(\xi) = \alpha_n e^{in\xi}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{im\xi}\right), \tag{1.4}$$

где α_n и A_{nm} *являются вещественными числами и* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$; $A_{nm} = 0$ *при* $m \leqslant 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nm} = 0$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$.

Далее

A) α_n *и* A_{nm} *удовлетворяют соотношениям*

$$a_n^2 A_{n+1,\, m} - A_{nm} + b_n A_{n,\, m+1} + A_{n-1,\, m+2} - A_{n,\, m+2} = 0 \tag{1.5}$$

$$(n,\ m = 1, 2, 3, \cdots),$$

$$a_n^2 = 1 + A_{n,\,2} - A_{n-1,\,2} - b_n A_{n,\,1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{1.6}$$

$$b_n = A_{n,\,1} - A_{n-1,\,1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{1.7}$$

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = a_{n-1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{1.8}$$

Наоборот, если A_{nm} *удовлетворяет* (1.5), (1.6), (1.7), *а* α_n (1.8), *то функция* $f_n(\xi)$, *построенная по формуле* (1.4) *с помощью* α_n *и* A_{nm}, *является решением уравнения* (1.3).

B) α_n *и* A_{nm} *определяются однозначно по* a_n *и* b_n *по формулам*

$$\alpha_n = \left(\prod_{p=n}^{\infty} a_p\right)^{-1} (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1.9}$$

$$A_{n,\,1} = -\sum_{p=n+1}^{\infty} b_p \ (n=0, 1, 2, \cdots), \tag{1.10}$$

$$A_{n,\,2} = \sum_{p=n+1}^{\infty} (1 - a_p^2) + \sum_{p=n+1}^{\infty} \sum_{s=p+1}^{\infty} b_p b_s \ (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1.11}$$

$$A_{n,\,2k+1} = -\sum_{p=n+1+k}^{\infty} b_p - \sum_{q=1}^{k} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} b_p A_{p,\,2q} + \tag{1.12}$$

$$+\sum_{q=0}^{k-1} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} (1 - a_{p-1}^2) A_{p,\,2q+1} \ (n=0, 1, 2;\ k=1, 2, 3, \cdots),$$

$$A_{n,\,2k} = \sum_{p=n+k}^{\infty} \sum_{q=p+1}^{\infty} b_p b_q + \sum_{p=n+k}^{\infty} (1 - a_p^2) + \sum_{q=1}^{k-1} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} (1 - a_{p-1}^2) A_{p,\,2q} -$$

$$-\sum_{q=1}^{k-1} \sum_{p=n+k-q}^{\infty} b_p A_{p,\,2q+1} \ (n=0, 1, 2, \cdots;\ k=2, 3, 4, \cdots). \tag{1.13}$$

Имеет место оценка

$$|A_{nm}| \leqslant C\,\sigma\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right), \tag{1.14}$$

где через $[\cdot]$ обозначена целая часть, а C — положительная постоянная, не зависящая ни от n и ни от m.

C) *Решение $f_n(\xi)$ обладает следующими свойствами:*

1. *$f_n(\xi)$ непрерывна на вещественной оси $-\infty < \xi < \infty$ и допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ и там при каждом n относительно z имеет асимптотику*

$$f_n(z) = a_n e^{inz}[1 + O(e^{-\tau})] \quad (z = \xi + i\tau, \ \tau > 0), \tag{1.15}$$

где $O(e^{-\tau}) \to 0$ при $\tau \to \infty$ равномерно по $n \, (n \geqslant 0)$.

2. *$f_n(z)$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ относительно n имеет асимптотику*

$$f_n(z) = e^{inz}[1 + o(1)], \tag{1.16}$$

где $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно z, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

3. $$f_n(z + 2\pi) = f_n(z).$$

Доказательство. Утверждение A) проверяется непосредственной подстановкой (1.4) в (1.3). Формулы (1.9)—(1.13) вытекают из (1.5)—(1.8). Докажем оценку (1.14).

Ищем A_{nm} в виде ряда

$$A_{nm} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{nm}^{(l)} \quad (m > 3),$$

где

$$A_{n,\,2k+1}^{(0)} = -\sum_{p=n+1+k}^{\infty} b_p \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

$$A_{n,\,2k}^{(0)} = -\sum_{p=n+k}^{\infty} \sum_{q=p+1}^{\infty} b_p b_q + \sum_{p=n+k}^{\infty} (1 - a_p^2) \quad (k = 2, 3, 4, \cdots),$$

$$A_{n,\,2k+1}^{(l)} = -\sum_{q=1}^{k} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} b_p A_{p,\,2q}^{(l-1)} + \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} (1 - a_{p-1}^2) A_{p,\,2q+1}^{(l-1)},$$

$$(l = 1, 2, 3, \cdots; \quad k = 1, 2, 3, \cdots),$$

$$A_{n,\,2k}^{(l)} = -\sum_{q=1}^{k-1} \sum_{p=n+k-q}^{\infty} b_p A_{p,\,2q+1}^{(l-1)} + \sum_{q=1}^{k-1} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} (1 - a_{p-1}^2) A_{p,\,2q}^{(l-1)}$$

$$(l = 1, 2, 3, \cdots; \ k = 2, 3, 4, \cdots).$$

Введем обозначение

$$\eta(n) = \sum_{p=n}^{\infty} |1 - a_p^2|, \quad \eta_1(n, k) = \sum_{p=n}^{\infty} (n-k)|1 - a_p^2| \quad (k \leqslant n),$$

$$\zeta(n) = \sum_{p=n}^{\infty} |b_p|, \quad \zeta_1(n, k) = \sum_{p=n}^{\infty} (n-k)|b_p| \quad (k \leqslant n).$$

Нетрудно убедиться, что

$$|A^{(l)}_{n,\,2k+1}|,\quad |A^{(l)}_{n,\,2k}| \leqslant$$

$$\leqslant (\eta(n+k) + \zeta(n+k) + \zeta^2(n+k)) \frac{(\eta_1(n+1,\,n) + \zeta_1(n+1,\,n))^l}{\left[\frac{l}{2}\right]!},$$

откуда и следует оценка (1.14)

Утверждение С) следует из представления (1.4) и оценки (1.14).

§ 2. Прямая задача рассеяния

Определение 2.1. Пусть $\{\psi_n(\lambda)\}_0^\infty$ и $\{g_n\}_0^\infty$ — два решения уравнения (1.3) с одним и тем же λ. Их вронскианом называется величина

$$a_n[\psi_n(\lambda)\, g_{n+1}(\lambda) - \psi_{n+1}(\lambda)\, g_n(\lambda)] = W[\psi_n(\lambda),\ g_n(\lambda)]. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\{\psi_n(\lambda)\}_0^\infty$ *и* $\{g_n(\mu)\}_0^\infty$ *— два решения уравнения* (1.3). *Имеет место тождество*

$$a_{n-1}[\psi_{n-1}(\lambda)\, g_n(\mu) - \psi_n(\lambda)\, g_{n-1}(\mu)] - a_n[\psi_n(\lambda)\, g_{n+1}(\mu) - \psi_{n+1}(\lambda)\, g_n(\mu)] =$$
$$= (\lambda - \mu)\, \psi_n(\lambda)\, g_n(\mu). \tag{2.2}$$

Доказательство. Так как

$$a_{n-1}\psi_{n-1}(\lambda) + b_n\psi_n(\lambda) + a_n\psi_{n+1}(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda),$$

$$a_{n-1}g_{n-1}(\mu) + b_n g_n(\mu) + a_n g_{n+1}(\mu) = \mu g_n(\mu),$$

то умножая первое из этих тождеств на $g_n(\mu)$, а второе — на $\psi_n(\lambda)$ и вычитая второе из первого, получим тождество (2.2).

Полагая в (2.2) $\mu = \lambda$, получаем

Следствие 2.1. Вронскиан двух решений уравнения (1.1) от n не зависит.

Из (2.1) очевидным образом следует

Лемма 2.2. *Для того чтобы решения* $\{\psi_n(\lambda_0)\}_0^\infty$ *и* $\{g_n(\lambda_0)\}_0^\infty$ *являлись линейно независимыми необходимо и достаточно, чтобы* $W[\psi_n(\lambda_0),\ g_n(\lambda_0)] \neq 0$.

Из вещественности a_n и b_n следует, что вместе с $\{f_n(\xi)\}_0^\infty$ решением уравнения (1.3) является и $\{\overline{f_n(\xi)}\}_0^\infty = \{f_n(-\xi)\}_0^\infty$. Так как вронскиан двух решений не зависит от n, то он совпадает со своим значением при $n \to \infty$. Поэтому, принимая во внимание (1.16), находим, что

$$W[f_n(\xi),\ f_n(-\xi)] = -2i\sin\xi. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\{\varphi_n(\xi)\}_0^\infty$ решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_0(\xi) = 0, \quad \varphi_1(\xi) = 1. \tag{2.4}$$

Лемма 2.3. *При всех* $\xi \neq k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ *справедливо тождество*

$$-\frac{2i\sin\xi}{f_0(\xi)}\varphi_n(\xi) = f_n(-\xi) - S(\xi)f_n(\xi), \qquad (2.5)$$

где

$$S(\xi) = \frac{f_0(-\xi)}{f_0(\xi)} \qquad (2.6)$$

и функция $S(\xi)$ *обладает свойствами*

$$S(\xi) = S(-\xi) = [S(\xi)]^{-1}, \qquad (2.7)$$

$$S(\xi + 2\pi) = S(\xi). \qquad (2.8)$$

Доказательство. Из (2.3) и леммы (2.2) следует, что при $\xi \neq k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ пара $\{f_n(\xi)\}_0^\infty$, $\{f_n(-\xi)\}_0^\infty$ образует фундаментальную систему решений уравнения (1.3). Поэтому

$$\varphi_n(\xi) = C_1 f_n(\xi) + C_2 f_n(-\xi). \qquad (2.9)$$

Отсюда, в силу (2.3)

$$C_1 = \frac{W[\varphi_n(\xi), f_n(-\xi)]}{-2i\sin\xi}, \qquad C_2 = \frac{W[\varphi_n(\xi), f_n(\xi)]}{2i\sin\xi}.$$

Далее

$$W[\varphi_n(\xi), f_n(-\xi)] = a_0[\varphi_0(\xi)f_1(-\xi) - \varphi_1(\xi)f_0(-\xi)] = -f_0(-\xi);$$

и

$$W[\varphi_n(\xi), f_n(\xi)] = -f_0(\xi).$$

Поэтому тождество (2.5) следует из (2.9).

Заметим, что $f_0(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

Лемма 2.4. *Функция* $f_0(z)$ *в полосе* $\Pi_+ = \left\{z = \xi + i\tau : -\frac{\pi}{2} \leqslant \xi \leqslant \frac{3\pi}{2}, \tau > 0\right\}$ *может иметь только конечное число, причем простых нулей в точках* $z_j = i\tau_j$ $(j = 1, \cdots, N_0)$, $z_j = \pi + i\tau_j$ $(j = N_0 + 1, \cdots, N)$. *Имеет место равенство*

$$-\frac{2\sin z_j}{\dot{f}_0(z_j)f_1(z_j)} = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2(z_j)} \overset{\text{def}}{=} M_j^2 \; (j = 1, \cdots, N), \qquad (2.10)$$

где точкой над функцией обозначена производная по z.

Доказательство. Сначала выясним распределение нулей функции $f_0(z)$ в верхней полуплоскости. Пусть $f_0(z_0) = 0$, где $z_0 = \xi_0 + i\tau_0$, $\tau_0 > 0$. Тогда $\{f_n(z_0)\}_1^\infty$ будет экспоненциально убывающим при $n \to \infty$ решением уравнения (1.1). Из симметричности этого уравнения следует, что $\lambda_0 = 2\cos z_0$ может быть только вещественным, следовательно, $\xi_0 = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. Таким образом, функция

$f_0(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ может иметь нули только на прямых $\operatorname{Re} z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. Покажем, что нули простые.

Из уравнения (1.3) имеем соотношения

$$a_{n-1} f_{n-1}(z) + b_n f_n(z) + a_n f_{n+1}(z) = 2\cos z\, f_n(z),$$

$$a_{n-1} \dot{f}_{n-1}(z) + b_n \dot{f}_n(z) + a_n \dot{f}_{n+1}(z) = -2\sin z\, f_n(z) + 2\cos z\, \dot{f}_n(z).$$

Умножим первое из этих тождеств на $\dot{f}_n(z)$, а второе—на $f_n(z)$ и вычтем второе из первого. В результате мы получим

$$a_{n-1}[f_{n-1}(z)\dot{f}_n(z) - \dot{f}_{n-1}(z) f_n(z)] -$$

$$- a_n[f_n(z)\dot{f}_{n+1}(z) - \dot{f}_n(z) f_{n+1}(z)] = 2\sin z\, f_n(z).$$

Сложив эти тождества при $n = 1, 2, 3, \cdots$ и принимая во внимание, что $f_n(z) \to 0$, $\dot{f}_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$, $\operatorname{Im} z > 0$, получим

$$f_0(z)\dot{f}_1(z) - - \dot{f}_0(z) f_1(z) = 2\sin z \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(z).$$

Полагая здесь $z = z_0$, мы получим

$$-\dot{f}_0(z_0) f_1(z_0) = 2\sin z_0 \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(z_0).$$

Отсюда следует, что $\dot{f}_0(z_0) \neq 0$ (так как $f_1(z_0) \neq 0$, в противном случае в силу $f_0(z_0) = 0$, мы получили бы $f_n(z_0) \equiv 0$) и одновременно мы получаем формулу (2.10).

Покажем теперь, что $f_0(z)$ в полосе Π_+ может иметь только конечное число нулей. Из (1.15) следует, что $f_0(z) \to \alpha_0$ при $\tau \to \infty$. Поэтому нули функции $f_0(z)$ в полосе Π_+ образуют ограниченное множество, которое может иметь предельные точки только в точках $z = 0$ и $z = \pi$. Следовательно, если $f_0(0) \neq 0$, $f_0(\pi) \neq 0$, то в силу аналитичности, множество нулей функции $f_0(z)$ в полосе Π_+ конечно.

Покажем, что независимо от значения функции $f_0(z)$ в точках $z = 0$ и $z = \pi$ множество ее нулей в Π_+ конечно. Будем это доказывать аналогично тому, как это сделано для уравнения Штурма-Лиувилля в [5]. Обозначим через δ точную нижнюю границу расстояний между двумя соседними нулями функции $f_0(z)$, лежащих на прямой $\operatorname{Re} z = 0$ или $\operatorname{Re} z = \pi$. Достаточно показать, что $\delta > 0$. Предположим противное. Тогда мы можем выделить такие последовательности нулей $\{s\pi + i\tau_k\}$, $\{s\pi + i\tau_k'\}$ (здесь $s = 0$ или $s = \pi$) функции $f_0(z)$, что $\lim\limits_{k \to \infty}(\tau_k' - \tau_k) = 0$, $\tau_k' > \tau_k \geqslant 0$ и $\max\limits_k \tau_k' < M$. Из (1.16) следует, что при достаточно большом n_0 равномерно относительно $\tau \geqslant 0$ и $n \geqslant n_0$ будем иметь

$$f_n(s\pi + i\tau) > \frac{(-1)^{sn}}{2} e^{-n\tau}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(s\pi + i\tau_k) f_n(s\pi + i\tau'_k) > \frac{1}{4}\sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-n}(\tau_k + \tau'_k) > \tag{2.11}$$

$$> \frac{1}{4}\sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-2nM} = \frac{1}{4}\,\frac{e^{-2n_0 M}}{1-e^{-2n_0 M}}.$$

С другой стороны, так как собственные векторы симметрического уравнения (1.1), отвечающие различным собственным значениям ортогональны, имеем

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s\pi + i\tau_k) f_n(s\pi + i\tau'_k) + \sum_{n=1}^{n_0-1} f_n^2(s\pi + i\tau_k) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{n_0-1} f_n(s\pi + i\tau_k)\left[f_n(s\pi + i\tau'_k) - f_n(s\pi + i\tau_k)\right] +$$

$$+ \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(s\pi + i\tau_k) f_n(s\pi + i\tau'_k).$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$ и принимая во внимание, что при $1 \leqslant n \leqslant n_0 - 1$

$$\lim_{k\to\infty}\left[f_n(s\pi + i\tau_k) - f_n(s\pi + i\tau'_k)\right] = 0,$$

мы получим

$$0 \geqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(s\pi + i\tau_k) f_n(s\pi + i\tau'_k). \tag{2.12}$$

Неравенства (2.11) и (2.12) противоречат друг другу. Поэтому наше предположение неверно, т. е. $\delta > 0$, следовательно функция $f_0(z)$ в полосе Π_+ может иметь только конечное число нулей.

§ 3. Формула разложения и спектр

Обозначим

$$J = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Тогда уравнения (1.1) могут быть записаны в виде

$$Jy = \lambda y.$$

Матрица J, как известно, называется бесконечной матрицей Якоби.

Обозначим через $l^2(1, \infty)$ гильбертово пространство векторов $y = \{y_n\}_1^{\infty}$, таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n .$$

Далее, обозначим через L минимальный самосопряженный оператор, порожденный матрицей (3.1) в $l^2(1, \infty)$. Резольвента оператора L определяется по формуле

$$R_{nm}(z) = -\frac{1}{f_0(z)} \begin{cases} f_n(z)\,\varphi_m(z) & \text{при } m \leqslant n-1, \\ f_m(z)\,\varphi_n(z) & \text{при } m \geqslant n \quad (n,\ m = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases} \tag{3.2}$$

и удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} b_1 R_{1,\,m}(z) + a_1 R_{2,\,m}(z) - 2\cos z\, R_{1,\,m}(z) = \delta_{1,\,m}, \\ a_{n-1} R_{n-1,\,m}(z) + b_n R_{nm}(z) + a_n R_{n+1,\,m}(z) - 2\cos z\, R_{nm}(z) = \delta_{nm}, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$(n,\ m = 1, 2, 3, \cdots),$$

где δ_{nm}—символ Кронеккера.

Из результатов предыдущих параграфов следует, что векторы $\{u_n(\xi)\}_1^{\infty}$, $\{u_n(z_j)\}_1^{\infty}$, определенные по формулам

$$u_n(\xi) = f_n(-\xi) - S(\xi) f_n(\xi) \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi), \tag{3.4}$$

$$u_n(z_j) = M_j f_n(z_j) \quad (j = 1, \cdots, N), \tag{3.5}$$

являются ограниченными решениями уравнения (1.1).

В этом параграфе мы покажем, что они образуют полный набор нормированных собственных векторов этого уравнения.

Теорема 3.1. *Имеет место формула разложения по собственным векторам*

$$\delta_{nm} = \sum_{j=1}^{N} u_n(z_j)\overline{u_m(z_j)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} u_n(\xi)\overline{u_m(\xi)}\, d\xi \quad (n,\ m = 1, 2, 3, \cdots), \tag{3.6}$$

причем решения $\{u_n(\xi)\}_1^{\infty}$, $\{u_n(z_j)\}_1^{\infty}$ *при* $n \to \infty$ *обладают асимптотиками*

$$u_n(\xi) = e^{-in\xi} - S(\xi)\, e^{in\xi} + o(1) \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi), \tag{3.7}$$

$$u_n(z_j) = M_j e^{inz_j}[1 + o(1)] \quad (j = 1, \cdots, N). \tag{3.8}$$

Доказательство. Наметим только путь вывода формулы (3.6). Пусть $\{h_n\}_1^{\infty}$ — произвольная финитная последовательность. Из уравнения (3.3) следует, что имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{R}_{nm}(\lambda)\, h_m = -\frac{h_n}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{3.9}$$

где

$$\tilde{R}_{nm}(\lambda) = R_{nm}(z) = R_{nm}\left(\arccos\frac{\lambda}{2}\right).$$

В λ-плоскости берем квадрат с центром в начале координат и со сторонами, имеющими длину, равную $2R$, где R—достаточно большое положительное число. Обозначим контур этого квадрата через Γ_R. Если взять от обоих частей (3.9) интеграл по контуру Γ_R, то при $R \to \infty$ мы получим

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{R}_{nm}(\lambda)\, h_m \right] d\lambda = -h_n. \tag{3.10}$$

С другой стороны, мы имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{R}_{nm}(\lambda)\, h_m \right] d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-2}^{2} d\lambda \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} [\widetilde{R}_{nm}(\lambda - i0) - \right.$$
$$\left. - R_{nm}(\lambda + i0)]\, h_m \right\} + \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{R}_{nm}(\lambda)\, h_m \right\}_{\lambda=\lambda_j}. \tag{3.11}$$

Переходя в (3.11) к пределу при $R \to \infty$, принимая во внимание (3.10) и используя формулы (3.2) и (3.4), (3.5), мы получим формулу (3.6).

Асимптотические формулы (3.7), (3.8) вытекают из (3.4), (3.5), соответственно, в силу (1.16).

Теорема 3.2. *При условии* (1.2) *оператор L имеет непрерывный спектр, заполняющий сегмент* $[-2, 2]$ *и конечное число простых собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра. Если $b_n \equiv 0$, то собственные значения лежат попарно симметрично относительно точки $\lambda = 0$.*

Доказательство. Покажем, что собственные значения оператора L являются простыми. Действительно, пусть собственному значению $\lambda_0 = 2\cos z_0$ отвечают два собственных вектора $\{\psi_n(z_0)\}_1^\infty$ и $\{g_n(z_0)\}_1^\infty$. Так как вронскиан двух решений не зависит от n, переходя к пределу в формуле

$$a_n [\psi_n(z_0)\, g_{n+1}(z_0) - \psi_{n+1}(z_0)\, g_n(z_0)] = W[\psi_n(z_0),\ g_n(z_0)]$$

при $n \to \infty$, получим $W[\psi_n(z_0),\ g_n(z_0)] = 0$, следовательно, в силу леммы 2.2 $\{\psi_n(z_0)\}_1^\infty$ и $\{g_n(z_0)\}_1^\infty$ линейно зависимы.

Теперь покажем, что для того чтобы некоторое число $\lambda_0 = 2\cos z_0$ $\operatorname{Im} z_0 > 0$ было собственным значением оператора L, необходимо и достаточно, чтобы $f_0(z_0) = 0$.

Действительно, пусть $f_0(z_0) = 0$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Тогда $\{f_n(z_0)\}_1^\infty$ является решением уравнения (1.1) и в силу (1.16) $f_n(z_0)$ экспоненциально убывает при $n \to \infty$. Следовательно, $\{f_n(z_0)\}_1^\infty \in l^2(1, \infty)$ является, собственным вектором оператора L, соответствующим собственному значению $\lambda_0 = 2\cos z_0$.

Наоборот, пусть $\lambda_0 = 2\cos z_0$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$ — собственное значение и $\{y_n(z_0)\}_0^\infty$ — соответствующий собственный вектор краевой задачи (1.3)

(1.3′), следовательно, $y_0(z_0)=0$. Покажем, что $f_0(z_0)=0$. Допустим противное, пусть $f_0(z_0)\neq 0$. Тогда в силу равенства $W[f_n(z_0),\ \varphi_n(z_0)]=f_0(z_0)$, векторы $\{f_n(z_0)\}_0^\infty$, $\{\varphi_n(z_0\})_0^\infty$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.3). Поэтому

$$y_n(z_0)=C_1 f_n(z_0)+C_2\varphi_n(z_0)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\tag{3.12}$$

где C_1 и C_2—постоянные и хотя бы одна из них отлична от нуля.

Так как $\{y_n(z_0)\}_1^\infty\in l^2(1,\ \infty)$, $\{f_n(z_0)\}_1^\infty\in l^2(1,\ \infty)$, а $\{\varphi_n(z_0)\}_1^\infty\overline{\in}\, l^2(1,\ \infty)$, то $C_2=0$, следовательно $C_1\neq 0$. Поэтому полагая в (3.12) $n=0$, получим, что $f_0(z_0)=0$.

Так как, в силу леммы 2.4, функция $f_0(z)$ в полосе Π_+ может иметь только конечное число нулей в точках $z_j=i\tau_j$ $(j=1,\ \cdots,\ N_0)$, $z_j=\pi+i\tau_j$ $(j=N_0+1,\ \cdots,\ N)$, то оператор L может иметь только конечное число собственных значений в точках $\lambda_j=2\cos z_j\in(2;\ \infty)$ $(j=1,\ \cdots,\ N_0)$, $\lambda_j=2\cos z_j\in(-\infty,\ -2)$ $(j=N_0+1,\ \cdots,\ N)$.

Записав формулы (3.6) в виде интеграла Стильтьеса, мы получим, что

$$h_n=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}h_m\varphi_m(\lambda)\right\}\varphi_n(\lambda)\,d\rho(\lambda),\tag{3.13}$$

где $\{\varphi_n(\lambda)\}_0^\infty$—решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_0(\lambda)=0$, $\varphi_1(\lambda)=1$, а $\rho(\lambda)$—спектральная плотность оператора L, причем

$$d\rho(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\sqrt{4-\lambda^2}\,d\lambda}{\left|f_0\left(\arccos\dfrac{\lambda}{2}\right)\right|^2} & \text{при } -2\leqslant\lambda\leqslant 2,\\[2ex] \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{4\sin^2 z_j\,\delta(\lambda-2\cos z_j)\,d\lambda}{M_j^2\,\dot{f}_0^2(z_j)} & \text{при } \lambda\overline{\in}[-2,\ 2].\end{cases}\tag{3.14}$$

Полагая

$$H(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n\varphi_n(\lambda),$$

из (3.13) имеем

$$h_n=\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda)\varphi_n(\lambda)\,d\rho(\lambda)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).\tag{3.15}$$

Умножая обе части равенства (3.15) на $\overline{h}_n$ и суммируя по n в пределах от 1 до ∞, мы получим равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty}|h_n|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|H(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda).$$

Из вида спектральной плотности (3.14) следует, что непрерывный спектр оператора L состоит из отрезка $[-2, 2]$.

Последняя часть теоремы 3.2 вытекает из того, что при $b_n \equiv 0$ в силу (1.10), (1.12) $A_{n,\,2k+1} \equiv 0$, следовательно, $f_0(z)$ является периодической функцией с периодом π.

§ 4. Обратная задача рассеяния

В § 3 (см. теорему 3.1) мы видели, что набор величин $\{S(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$; $z_1, \cdots, z_N$; $M_1, \cdots, M_N\}$ полностью определяет асимптотику при $n \to \infty$ всех нормированных собственных функций уравнения (1.1).

Определение (4.1). Совокупность величин $\{S(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ $z_1, \cdots, z_N$; $M_1, \cdots, M_N\}$ называется данными рассеяния матрицы Якоби (3.1).

Обратная задача рассеяния состоит в определении матрицы Якоби (3.1), т. е. уравнения (1.1) по данным рассеяния.

1. При решении обратной задачи важную роль играет так называемое уравнение И. М. Гельфанда—Б. М. Левитана или уравнение В. А. Марченко, выводом которого мы сейчас займемся.

Подставляя в (2.5) вместо $f_n(\xi)$ его выражение (1.4), мы получим

$$-\frac{2i\sin\xi}{\alpha_n f_0(\xi)}\varphi_n(\xi) + 2i\sin n\xi = [1 - S(\xi)]\,e^{in\xi} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\,e^{-i(n+k)\xi} - \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\,e^{i(n+k)\xi} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}[1 - S(\xi)]\,e^{i(n+k)\xi}.$$

Умножая обе части этого равенства на $\frac{1}{2\pi}e^{i(n+m)\xi}$ и интегрируя по ξ в пределах $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\left[-\frac{2i\sin\xi}{\alpha_n f_0(\xi)}\varphi_n(\xi) + 2i\sin n\xi\right]e^{i(n+m)\xi}\,d\xi = \tag{4.1}$$

$$= F^{(1)}_{2n+m} + (1 - \delta_{om})\,A_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\,F^{(1)}_{k+m+2n},$$

где

$$F^{(1)}_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1 - S(\xi)]\,e^{im\xi}\,d\xi.$$

Покажем, что интеграл в левой части равенства (4.1) может быть вычислен с помощью контурного интегрирования. Действительно, функция

$\left[-\frac{2i\sin z}{\alpha_n f_0(z)}\varphi_n(z)+2i\sin nz\right]e^{i(n+m)z}$ периодична с периодом 2π, аналитична в верхней полуплоскости, причем имеет лишь простые полюса в нулях функции $f_0(z)$ и, возможно особенности в точках $z=k\pi$ ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$) (так как возможно, что $f_0(k\pi)=0$ ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$).

С помощью уравнения

$$a_{n-1,\,T}\,y_{n-1}+b_{n,\,T}\,y_n+a_{n,\,T}\,y_{n+1}=\lambda y_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

где

$$a_{n,\,T}=\begin{cases}a_n & \text{при } n\leqslant T,\\ 1 & \text{при } n>T;\end{cases}\qquad b_{n,\,T}=\begin{cases}b_n & \text{при } n\leqslant T,\\ 0 & \text{при } n>T,\end{cases}$$

можно показать, что функция $\frac{\sin z}{f_0(z)}$ не имеет особенности в точках $z=k\pi$ ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$). Поэтому левая часть (4.1) равна

$$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma_R}\left[-\frac{2i\sin z}{\alpha_n f_0(z)}\varphi_n(z)+2i\sin nz\right]e^{i(n+m)z}\,dz+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2+iR}\left[-\frac{2i\sin z}{\alpha_n f_0(z)}\varphi_n(z)+2i\sin nz\right]e^{i(n+m)z}\,dz, \tag{4.2}$$

где $R>0$ — достаточно большое число, а Γ_R — замкнутый прямоугольный контур, состоящий из отрезков: $-\frac{\pi}{2}\leqslant\xi\leqslant\frac{3\pi}{2}$, $\tau=0$; $\xi=-\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\tau\leqslant R$; $\xi=\frac{3\pi}{2}$, $0\leqslant\tau\leqslant R$; $-\frac{\pi}{2}\leqslant\xi\leqslant\frac{3\pi}{2}$, $\tau=R$ и охватывающий все нули функции $f_0(z)$, лежащие в полосе Π_+. Первое слагаемое в (4.2) есть сумма вычетов подынтегральной функции, а последнее, в свою очередь, принимая во внимание, что

$$\varphi_n(z_j)=\frac{1}{f_1(z_j)}f_n(z_j),$$

равно

$$-F^{(0)}_{2n+m}-\sum_{k=1}^{\infty}A_{nk}F^{(0)}_{k+m+2n},$$

где

$$F^{(0)}_m=\sum_{j=1}^{N}M_j^2e^{imz_j}.$$

Далее, так как при $\operatorname{Im} z\to\infty$ $\varphi_n(z)=\frac{\alpha_0}{\alpha_n}e^{-i(n-1)z}[1+o(1)]$, $f_0(z)=$

$= \alpha_0 [1 + o(1)]$, то второе слагаемое в (4.2) при $R \to \infty$ дает $\left(\frac{1}{\alpha_n^2} - 1\right)\delta_{0m}$.

Поэтому, в результате, из (4.1) мы получим

$$F_{2n+m} + A_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} F_{k+m+2n} = 0 \;\; (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots;\ m = 1,\ 2,\ 3, \cdots),$$

$$\frac{1}{\alpha_n^2} = 1 + F_{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} F_{k+2n} \;\; (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots), \tag{4.3}$$

где

$$F_m = F_m^{(0)} + F_m^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} M_j^2 e^{imz_j} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - S(\xi)]\, e^{im\xi}\, d\xi. \tag{4.3'}$$

Таким образом, мы получили, что A_{nm} удовлетворяет уравнениям (4.3), причем F_m построены только по данным рассеяния. Уравнение (4.3) называется основным уравнением обратной задачи.

С помощью уравнения (4.3) нетрудно доказывается следующая

Лемма 4.1. *Для функции* $f_0(\xi)$ *справедливо представление*

$$f_0(\xi) = \begin{cases} (1 - e^{-i\xi})\, A_1(\xi), & \text{если } f_0(0) = 0, \\ (1 + e^{i\xi})\, A_2(\xi), & \text{если } f_0(\pi) = 0, \end{cases}$$

где функции $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$ *непрерывны на вещественной оси* $-\infty < \xi < \infty$, *периодичны с периодом* 2π, *допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость и* $A_1(0) \neq 0$, $A_2(\pi) \neq 0$.

2. Покажем теперь, что основное уравнение (4.3) при каждом фиксированном n ($n = 0, 1, 2, \cdots$) имеет единственное решение.

Пусть при некотором n ($n = 0, 1, 2, \cdots$) однородное уравнение

$$h_m + \sum_{k=1}^{\infty} h_k F_{k+m+2n} = 0 \;\; (m = 1,\ 2,\ 3, \cdots) \tag{4.4}$$

имеет ненулевое решение $h = \{h_m\}_1^\infty$ из $l^2(1, \infty)$. В силу вещественности F_m без ограничения общности, можно считать, что h_m вещественны. Продолжим вектор h на все пространство $l^2(-\infty, \infty)$, полагая $h_0 = h_{-1} = h_{-2} = \cdots = 0$, и обозначим

$$\sum_{m=1}^{\infty} h_m e^{im\xi} = H(\xi). \tag{4.5}$$

Функция $H(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость.

В силу обычного равенства Парсеваля

$$\sum_{m=1}^{\infty} h_m^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\xi)|^2\, d\xi. \tag{4.6}$$

Умножим (4.4) на h_m и просуммируем по m в пределах от 1 до ∞:

$$\sum_{m=1}^{\infty} h_m^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_m\, h_k\, F_{k+m+2n} = 0.$$

Подставив сюда вместо F_m его выражение (4.3′) и принимая во внимание (4.5), (4.6) и (2.7), мы получим

$$\sum_{j=1}^{N} M_j^2 e^{2inz_j} H^2(z_j) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(-\xi) - S(\xi)\, e^{2in\xi}\, H(\xi)|^2\, d\xi = 0.$$

Отсюда, в силу положительности всех слагаемых и периодичности подынтегральной функции, имеем

$$H(z_j) = 0 \quad (j = 1, \cdots, N), \tag{4.7}$$

$$H(-\xi) - S(\xi)\, e^{2in\xi}\, H(\xi) = 0 \quad (-\infty < \xi < \infty). \tag{4.8}$$

Пусть сначала $f_0(0) \neq 0$, $f_0(\pi) \neq 0$. Подставив в (4.8) вместо функции $S(\xi)$ ее выражение (2.6), получим

$$\frac{e^{-in\xi} H(-\xi)}{f_0(-\xi)} = \frac{e^{in\xi} H(\xi)}{f_0(\xi)} \quad (-\infty < \xi < \infty). \tag{4.9}$$

Функция $\dfrac{e^{inz} H(z)}{f_0(z)}$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, в силу (4.7) она не имеет особенностей в точках $z = z_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ и непрерывна на вещественной оси. Из (4.9) следует, что по принципу симметрии она аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость, следовательно, эта функция—целая. Так как $\dfrac{e^{inz} H(z)}{f_0(z)} \to 0$ при $\operatorname{Im} z \to \infty$, то эта функция тождественно равна нулю, следовательно, $H(z) \equiv 0$, значит $h_m \equiv 0$.

Если хотя бы одно из чисел $f_0(0)$, $f_0(\pi)$ обращается в нуль, то следует умножить обе части (4.9) на $i(1 - e^{-i\xi})(1 + e^{i\xi}) = -2\sin\xi$ и дальше (принимая во внимание лемму 4.1), мы рассуждаем для $n \geq 1$ как и в первом случае. При $n = 0$, в силу того, что при $\operatorname{Im} z \to \infty$ $f_0(z) = \alpha_0 + o(1)$, $H(z) = h_1 e^{iz}[1 + o(1)]$, мы получим, что

$$-2\sin z \frac{H(z)}{f_0(-z)} \equiv i\frac{h_1}{\alpha_0}.$$

С другой стороны, в силу (4.9) функция $-2\sin\xi \dfrac{H(\xi)}{f_0(-\xi)}$ нечетная, следовательно, $H(\xi) \equiv 0$.

Таким образом, уравнение (4.3) при каждом n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ имеет единственное решение.

3. Уравнение (4.3) позволяет нам формально решить обратную задачу рассеяния. Действительно, пусть совокупность величин $\{S(\xi);$

$z_1, \cdots, z_N$; $M_1, \cdots, M_N\}$ является данным рассеяния для задачи (1.1) + + (1.2). Построим с помощью данных рассеяния последовательность F_m по формуле (4.3′) и рассмотрим уравнение (4.3) с неизвестными A_{nm}. Как выше показано, это уравнение имеет единственное решение A_{nm}. По A_{nm} мы определяем b_n, a_n по формулам (1.7), (1.6) соответственно.

Однако, эти рассуждения носят условный характер, так как мы заранее предполагаем, что совокупность величин $\{S(\xi); z_1, \cdots, z_N; M_1, \cdots, M_N\}$ является данными рассеяния. Поэтому возникает вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий на совокупность величин $\{S(\xi); z_1, \cdots, z_N; M_1, \cdots, M_N\}$ для того, чтобы она являлась данными рассеяния для некоторого уравнения вида (1.1) с коэффициентами из класса (1.2). Эта задача нами будет рассмотрена в другом месте.

В заключение приношу глубокую благодарность своему научному руководителю Б. М. Левитану за внимание к настоящей работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 9.XI.1975

Գ. Շ. ԳՈՒՍԵՅՆՈՎ. Յակոբիի անվերջ մատրիցի ցրման խնդիր *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում են Յակոբիի անվերջ մատրիցի ցրման ուղիղ և հակադարձ խնդիրները։

G. Sh. GUSEINOV. *Scattering problem for the infinite Jacobi matrix*
(summary)

The direct and the inverse scattering problems for the infinite Jacobi matrix s discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. M. Case* and *S. C. Chin.* The discrete version of the Marchenko equations in the inverse scattering problem, J. Math. Phys., 14, № 11, 1973, 1643—1647.
2. *В. Г. Таркопольский.* Задача рассеяния для разностного уравнения, ДАН СССР, 136, № 4, 1961, 779—782.
3. *М. С. Эскина.* Прямая и обратная задача рассеяния для уравнения в частных разностях, ДАН СССР, 166, № 4, 1966, 809—812.
4. *С. В. Манаков.* О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах, ЖЭТФ, 67, вып. 2 (8), 1974, 543—555.
5. *В. А. Марченко.* Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, Киев, „Наукова Думка", 1972.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

А. А. АНДРЯН

ОБЩАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

В выпуклой области D, ограниченной замкнутой ляпуновской кривой Γ, рассмотрим систему уравнений составного типа вида

$$\frac{\partial v_0}{\partial \bar{z}} - q(x, y) \frac{\partial v_0}{\partial z} = \sum_{j=1}^{m} a^j(x, y)\, v_j + a^0(x, y)\, v_0 + b^0(x, y)\, \bar{v}_0 + F, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} - \lambda_j(x, y) \frac{\partial v_j}{\partial y} = \sum_{l=1}^{m} b_l^j(x, y)\, v_l + \mathrm{Re}\,(c_j(x, y)\, v_0) + f_j, \tag{2}$$

$$|j = 1, \cdots, m|$$

где $z = x + iy$, $q(x, y)$—комплекснозначная, а $\lambda_1(x, y), \cdots, \lambda_m(x, y)$— — действительные функции, принадлежащие классу $C^1(D+\Gamma)$ и $q(x, y)| \leqslant \mathrm{const} < 1$, а $\lambda_i(x, y) \neq \lambda_j(x, y)$ при $i \neq j$; остальные коэффициенты системы (1)—(2) предполагаем принадлежащими классу $C^1(D+\Gamma)$, причем функции $b_i^j(x, y)$ $(i, j = 1, \cdots, m)$ являются действительными; $F(x, y) \in C_\alpha(D+\Gamma)$, $f_j(x, y) \in C^1(D+\Gamma)(j=1, \cdots, m)$—заданные, а $v_j(x, y) \in C^1(D) \cap C_\alpha(D+\Gamma)$ $(j = 0, 1, \cdots, m)$—искомые функции, причем функции $v_1(x, y), \cdots, v_m(x, y)$, $f_1(x, y), \cdots, f_m(x, y)$ являются действительными.

Предположим, что каждая характеристика семейства характеристик $\varkappa_j(x, y) = \mathrm{const}$ $(j = 1, \cdots, m)$ системы (2), проходящая через область D, пересекает ее границу Γ ровно в двух точках и имеются лишь две характеристики этого семейства, которые касаются границы Γ, соответственно, в точках M_j и N_j, причем касательные в этих точках параллельны. Не ограничивая общности, будем считать, что M_j следует за M_{j+1}, N_j — за N_{i-1}, а N_n следует за M_1, M_n—за N_1.

Положительно ориентированные дуги $\overset{\frown}{M_j N_j}$ и $\overset{\frown}{N_j M_j}$ обозначим, соответственно, через Γ_j^1 и Γ_j^2.

Рассмотрим следующую граничную задачу.

Граничная задача А. Найти решение системы (1) — (2), удовлетворяющее граничным условиям

$$\mathrm{Re}\,[a_0(t)\, v_0(t)] + \sum_{j=1}^{m} a_{0j}(t)\, v_j(t) = h_0(t),\ t \in \Gamma, \tag{3}$$

$$\mathrm{Re}\,[a_k(t)\, v_k(t)] + \sum_{j=1}^{m} a_{kj}(t)\, v_j(t) = h_k(t),\ t \in \Gamma_k^1, \tag{4}$$

$$(k = 1, \cdots, m),$$

где $a_k(t)$ — комплекснозначные, а $a_{kj}(t)$ — действительные функции, непрерывные по Гельдеру, соответственно, на Γ при $k=0$ и на Γ^1_k при $k=1,\cdots,m$; $h_0(t)\in C_\alpha(\Gamma)$, а $h_k(t)\in C^1_\alpha(\Gamma^1_k)$ $(k=1,\cdots,m)$ — заданные действительные функции.

Пусть $P^{(k)}=\|P^{(k)}_{je}\|$, $k=1,\cdots,m$ и $Q^{(k)}(t)=\|Q^{(k)}_{je}\|$, $k=1,\cdots,m-1$ — квадратные матрицы, соответственно, порядка $m-k+2$ и $k+1$, где

$$P^{(k)}_{j1}(t)=a_{j-1}(t),\quad P^{(k)}_{je}(t)=a_{j-1,e}(t),\ j=1,\cdots,m-$$
$$-k+2,\ e=2,\cdots,m-k+1;$$

$$Q^{(k)}_{11}(t)=a_0(t),\ Q^{(k)}_{1,e+1}=a_{0,m-k+e}(t),\ Q^{(k)}_{j+1,1}(t)=a_{m-k+e}(t),$$
$$Q^{(k)}_{j+1,e+1}(t)=a_{m-k+j,m-k+e}(t),\ j,e=1,\cdots,m.$$

Относительно коэффициентов граничных условий (3)—(4) предположим следующее, что

$$\det P^{(1)}(t)\neq 0 \text{ при } t\in\Gamma^1_1\cap\Gamma^2_m,$$

$$\det P^{(k)}(t)\neq 0 \text{ при } t\in\Gamma^1_{m-k+1}\cap\Gamma^2_{m-k+2},\ k=2,\cdots,m,$$

$$a_0(t)\neq 0 \text{ при } t\in\Gamma^2_1\cap\Gamma^2_m,$$

$$\det Q^{(k)}(t)\neq 0 \text{ при } t\in\Gamma^1_{m-k+1}\cap\Gamma^2_{m-k},\ k=1,\cdots,m-1,$$

$$a_{0,m-k+1}(t)=\cdots=a_{m-k,m-k+1}(t)=0,\ a_{m-k+1,m-k+1}(t)=1$$

$$\text{в точках } N_k,\ k=1,\cdots,m,$$

$$a_{0,m-k+1}(t)=a_{m-k+2,m-k+1}(t)=0,\ a_{m-k+1,m-k+1}(t)=1$$

$$\text{в точках } M_k,\ k=1,\cdots,m.$$

В этих предположениях в работе [1] для главной части системы (1)—(2) доказана следующая

Теорема 1. *Граничная задача A является нетеровой, а ее индекс равен*

$$\varkappa=\frac{1}{\pi}\left[\arg\overline{b_0(t)}\right]_\Gamma+1,$$

где $b_0(t)$ — вполне определенная функция.

В настоящей работе теорема 1 устанавливается и для общей системы (1)—(2), а также строится сопряженная граничная задача к задаче A и условия разрешимости неоднородной задачи A формулируются в терминах сопряженной задачи.

Исследование граничной задачи A. Через H_0 обозначим подпространство в $C_\alpha(D+\Gamma)$, состоящее из функций, аналитических в области D. А через H_j обозначим подпространство в

$C_\zeta\,(D+\Gamma)$, состоящее из функций, постоянных вдоль j-ой характеристики системы (2) $(j=1,\cdots,m)$.

Все операторы, которые встречаются ниже, являются линейными.

Условимся через A с различными индексами обозначать вполне непрерывный оператор в $C_\zeta\,(D+\Gamma)$, а через B с различными индексами—вполне непрерывный оператор из H_j в $C_\zeta\,(D+\Gamma)(j=1,\cdots,m)$.

Уравнение [1] эквивалентно уравнению следующего вида (см. [2]):

$$v_0\,(\zeta)=\varphi\,(\zeta)+A_1\left(\sum_{j=1}^{m}a^j\,v_j+a^0v_0+b^0\,\overline{v}_0+F\right), \tag{5}$$

где $\varphi\,(\zeta)\;(\zeta=\xi+i\eta)$ — решение однородного уравнения Бельтрами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}}-q\,(\xi,\,\eta)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=0.$$

Решая уравнение (5) относительно $v_0\,(\zeta)$, получим (см. [2])

$$v_0=\varphi+A_2\varphi+A_3\left(\sum_{j=1}^{m}a^j\,v_j\right)+A_3F, \tag{6}$$

где A_2, A_3 — некоторые вполне непрерывные операторы.

Система (2) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений (см. [3]):

$$v_j\,(\xi,\,\eta)=\psi_j\,(\xi,\,\eta)-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}\int\limits_{l_j(\xi,\,\eta)}\sum_{i=1}^{m}b_i^j\,(x,\,y)\,v_i\,(x,\,y)\,ds_{xy}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}\int\limits_{l_j(\xi,\,\eta)}\mathrm{Re}\,(c_j(x,\,y)\,v_0\,(x,\,y))\,ds_{xy}-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}\int\limits_{l_j(\xi,\,\eta)}f_j\,(x,\,y)\,ds_{xy}, \tag{7}$$

$$(j=1,\cdots,m)$$

где $l_j\,(\xi,\,\eta)$ — часть j-й характеристики системы (2), соединяющая точку $(\xi,\,\eta)$ с Γ_j^1, а $\psi_j\,(\xi,\,\eta)$ — решение однородного уравнения

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi}-\lambda_j\,(\xi,\,\eta)\frac{\partial\psi_j}{\partial\eta}=0.$$

Систему интегральных уравнений (7) разрешим относительно функций $v_1\,(\xi,\,\eta),\cdots,v_n\,(\xi,\,\eta)$. Это решение записывается в виде (см. [3])

$$v_j\,(\xi,\,\eta)=\psi_j\,(\xi,\,\eta)+\int\limits_{l_j(\xi,\,\eta)}\mathrm{Re}\,(c_j\,(x,\,y)\,v_0\,(x,\,y))\,ds_{xy}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}B_{ij}\,\psi_i\,(\xi,\,\eta)+A_{j1}\,v_0\,(\xi,\,\eta)+C_{j1}\,(f_1,\cdots,f_m), \tag{8}$$

$$(j=1,\cdots,m)$$

где $C_{j1}: C_\alpha(D+\Gamma) \to C_\alpha(D+\Gamma)$ — ограниченный оператор для $j=1, \cdots, m$.

Теперь подставим $v_0(\zeta)$ из (6) в (8). Тогда система уравнений (8) примет вид

$$v_j = \psi_j + \int\limits_{l_j(\xi,\eta)} \operatorname{Re}(c_j(x, y)\varphi(x, y))\,ds_{xy} + \sum_{l=1}^{m} B_{lj}\psi_l +$$

$$+ A_{j2}\varphi + A_{j3}(v_1, \cdots, v_m) + C_{j2}(f_1, \cdots, f_m, F), \tag{9}$$

где $C_{j2}: C_\alpha(D+\Gamma) \to C_\alpha(D+\Gamma)$ — ограниченный оператор для $j=1, \cdots, m$.

Пусть

$$G_1 = \bigoplus_{j=1}^{m+1} C_\alpha(D+\Gamma),\ G_2 = \bigoplus_{j=0}^{m+1} H_j,\ F_1 = C_\alpha(D+\Gamma) \oplus \left[\bigoplus_{j=1}^{m} C^1(D+\Gamma)\right],$$

$$F_2 = C_\alpha(\Gamma) \oplus \left[\bigoplus_{j=1}^{m} C_\alpha^1(\Gamma_j^1)\right]$$

— соответственно банаховы пространства вектор-функций

$$v = (v_0, v_1, \cdots, v_m),\ w = (\varphi, \psi_1, \cdots, \psi_m),\ f = (F, f_1, \cdots, f_m),$$

$$h = (h_0, h_1, \cdots, h_m).$$

Подставим выражение v_j $(j=0, 1, \cdots, m)$ из формул (6), (9) в граничные условия (3), (4). Результат подстановки запишем в виде одного уравнения

$$Tw = L_1 v + L_2 w + M_1 f + h, \tag{10}$$

где

$$Tw = \Big(\operatorname{Re}[a_0(t)\varphi(t)] + \sum_{j=1}^{m} a_{0j}(t)\psi_j(t), \cdots, \operatorname{Re}[a_m(t)\varphi(t)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} a_{mj}(t)\psi_j(t)\Big);$$

L_1, L_2, M_1 — некоторые операторы, причем L_1, L_2 — вполне непрерывные (см. [4]), а M_1 — ограниченный.

Из утверждения теоремы 1 следует, что T — нетеровый оператор с индексом, равным $\varkappa$.

Далее систему уравнений (6), (9) также запишем в виде одного уравнения

$$Ev = N_1 v + N_2 w + M_2 f, \tag{11}$$

где E — единичный, N_1 — вполне непрерывный, а N_2, M_2 — ограниченные операторы, причем размерность ядра сопряженного оператора к M_2 равна нулю.

Таким образом, мы получили, что граничная задача A для системы (1), (2) эквивалентна системе линейных уравнений (10), (11) в банаховом пространстве.

Как показано в работе [4], система уравнений вида (10), (11) является нетеровой, а ее индекс равен $\operatorname{ind} E + \operatorname{ind} T = \varkappa$.

Итак, теорема 1 установлена и для общей системы (1), (2).

Далее, аналогично тому как это сделано в работе [4], можно построить сопряженную граничную задачу к граничной задаче A и получить условия разрешимости неоднородной задачи A в терминах сопряженной задачи.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 20.IV.1976

Ա. Ա. ԱՆԴՐՅԱՆ. Ընդհանուր եզրային խնդիր բաղադրյալ տիպի սիստեմի համար *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է ընդհանուր եզրային խնդիր առաջին կարգի բաղադրյալ տիպի սիստեմի համար։ Պահանջվում է, որ իրական բաղադրիչները լինեն տարբեր։ Այդ խնդրի համար կառուցվում է լրիվ տեսությունը։

A. A. ANDRIAN. *General boundary value problem for systems of composite type* (summary)

For the first order systems of composite type with arbitrary number of different characteristics on the plane the general boundary value problem is considered. The complete theory of the problem is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. М. Муртазаев.* Граничная задача для системы уравнений составного типа со многими вещественными характеристиками, ДАН Тадж. ССР, XIII, № 12, 1970, 12—15.
2. *А. Д. Джураев.* Системы уравнений составного типа, М., 1972.
3. *А. А. Андрян.* Об одной граничной задаче для систем уравнений гиперболического типа, Изв. АН Арм.ССР, „Математика" X, № 4, 1975, 329—341.
4. *А. А. Андрян.* Некоторые граничные задачи для систем уравнений составного типа, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", XI, № 4, 1976, 332—344.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

И. П. МИЛОВИДОВА

О МНОЖЕСТВЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЧИСЛОВОГО РЯДА

Введение

Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

с действительными членами. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} Pa_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \tag{2}$$

получается из ряда (1) в результатс некоторой перестановки членов. Обозначим через s_k — k-ую частную сумму ряда (2), а через $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ — n-ую среднюю арифметическую ряда (2). Мы будем рассматривать вопрос о множестве предельных точек последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$ средних арифметических ряда (2) и свойства этих множеств. Для описания свойств этих множеств мы докажем две теоремы. В работе [1] мы получили те же самые свойства для последовательностей частных сумм ряда (2).

§ 1. Теорема о множестве предельных точек последозательности средних арифметических ряда

Теорема 1. *Множество F—предельных точек последовательности средних арифметических ряда* (2) *есть либо точка, либо отрезок вещественной оси, конечный или бесконечный.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1 докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть F—множество предельных точек последовательности средних арифметических ряда* (2), *получаемого перестановкой членов из условно сходящегося ряда, и пусть a и b — две точки этого множества. Тогда*

$$[a, b] \subset F \tag{3}$$

Доказательство. Если включение (3) неверно, то существует точка c, такая, что $c \in (a, b)$, $c \bar{\in} F$. Так как множество F замкнуто, то существует такой интервал (a', b'), что $a < a' < b' < b$, $(a', b') \cap F = \varnothing$. Возьмем число ε_0, удовлетворяющее условиям

$$0 < \varepsilon_0 < b' - a'. \tag{4}$$

Докажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} (\sigma_{n+1} - \sigma_n) = 0$. Действительно, так как ряд (1) условно сходится, то n-ая частная сумма s_n ряда (2) удовлетворяет соотношению $s_{n+1} - s_n = a_n' \to 0$ при $n \to \infty$. Так как метод средних арифметических регулярен, то отсюда вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (s_{k+1} - s_k) \right| = 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (s_{k+1} - s_k) = \frac{1}{n} \sum_{k'=2}^{n+1} s_{k'} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} s_k -$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k - \frac{s_1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sigma_{n+1} - \sigma_n - \frac{s_1}{n} = (\sigma_{n+1} - \sigma_n) - \frac{\sigma_{n+1}}{n} - \frac{s_1}{n}.$$

Отсюда и из соотношения (5) вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sigma_{n+1} - \sigma_n - \frac{1}{n} \sigma_{n+1} - \frac{1}{n} s_1 \right) = 0. \tag{6}$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} a_n' = 0$, то из регулярности метода средних арифметических вытекает, что

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j' = \lim_{k \to \infty} \frac{s_k}{k} = 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число k_0, что $\left| \frac{s_k}{k} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ для $k > k_0$. Следовательно, для любого $n > k_0$

$$|\sigma_n| < \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k_0} s_k \right| + \frac{\varepsilon}{2n} \sum_{k=k_0+1}^{n} k < \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k_0} s_k \right| + \frac{\varepsilon n}{2}. \tag{7}$$

Далее, для ε найдется такое натуральное число n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство $\left| \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{k_0} s_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} n$, откуда и из соотношения (7) вытекает, что для $n > n_0$ $\left| \frac{1}{n} \sigma_n \right| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sigma_n = 0$. Учитывая это и принимая во внимание соотношение (6), получаем $\lim\limits_{n \to \infty} (\sigma_{n+1} - \sigma_n) = 0$. Это значит, что для ε_0, удовлетворяющего неравенству (4), найдется такое натуральное число N, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$|\sigma_{n+1} - \sigma_n| < \varepsilon_0. \tag{8}$$

Возьмем на интервале (a', b') какой-нибудь отрезок $[a'', b'']$ длины ε_0 (это можно сделать в силу соотношения (4)). Так как a и b — предельные точки для последовательности средних арифметических ряда (2), то отсюда и из неравенства (8) следует, что на отрезке $[a'', b'']$ находятся величины σ_n для бесчисленного множества различных номеров n; а в таком случае на $[a'', b''] \subset (a', b')$ лежит предельная точка последовательности σ_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

Следовательно, наш вывод, что интервал (a', b') не содержит ни одной предельной точки множества F — предельных точек последовательности средних арифметических ряда (2) неверен; к этому выводу мы пришли, исходя из предположения, что включение (3) неверно. Следовательно, оно верно и лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Покажем, что множество F замкнуто и связно, а так как всякое замкнутое связное множество точек на прямой есть либо точка, либо отрезок этой прямой (конечный или бесконечный), то отсюда будет вытекать утверждение теоремы 1. Замкнутость множества F следует из того, что множество предельных точек любой последовательности замкнуто. Докажем, что множество F связано. В самом деле, если оно состоит из одной точки, то теорема доказана. Если же существуют две точки a и b, $a < b$, такие, что $a \in F$, $b \in F$, то из леммы вытекает, что F — связное множество и доказательство теоремы 1 завершено.

§ 2. Теорема о некоторых перестановках членов ряда

Теорема 2. *Если ряд* (1) *с действительными членами условно сходится, и если задан отрезок* $[a, b]$ *действительной оси, то члены ряда* (1) *можно переставить так, что у ряда* (2), *полученного в результате этой перестановки, множество предельных точек последовательности средних арифметических совпадает с отрезком* $[a, b]$.

Доказательство. Так как ряд (1) условно сходится, то его можно разбить на три ряда:

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i = \infty \quad (d_i > 0;\ i = 1, 2, 3, \cdots), \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty \quad (c_i > 0;\ i = 1, 2, 3, \cdots), \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = -\infty \quad (b_i < 0;\ i = 1, 2, 3, \cdots), \tag{11}$$

не содержащих общих членов. Отсюда следует, что

$$\lim_{i\to\infty} b_i = \lim_{i\to\infty} d_i = 0. \tag{12}$$

Пусть a_1 — первый член ряда (1), и пусть ε_1 такое положительное число, что удовлетворяется неравенство

$$2\,|a_1 - a| < \varepsilon_1. \tag{13}$$

Переставляя члены ряда (1), будем строить ряд (2), обозначая через s'_n его n-ую частную сумму, а через σ'_n — его среднее арифметическое порядка n. Таким образом

$$\sigma'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s'_k . \tag{14}$$

Положим $a'_1 = a_1$. Пусть натуральное число ω_1 так велико, что удовлетворяется неравенство

$$\frac{3\varepsilon_1 + |b - a|}{\omega'} < \varepsilon_1 \tag{15}$$

($\varepsilon_1 > 0$ удовлетворяет соотношению (13)). Из ряда (10) возьмем в определяемый ряд (2) ω' членов $c_j^{(0)}$ $(1 \leqslant j \leqslant \omega')$ так, чтобы

$$\left|\sum_{j=1}^{\omega'} c_j^{(0)}\right| < \frac{\varepsilon_1}{2} - |a_1 - a| \tag{16}$$

(это возможно сделать, так как ряд (10) сходится)*. В силу неравенства (16)

$$\left| a - \left(a_1 + \sum_{j=1}^{\omega'} c_j^{(0)}\right)\right| \leqslant |a - a_1| + \left|\sum_{j=1}^{\omega'} c_j^{(0)}\right| < |a - a_1| +$$

$$+ \frac{\varepsilon_1}{2} - |a_1 - a| = \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot$$

Полагая

$$\omega' + 1 = m_1, \tag{17}$$

отсюда имеем: $|s_{m_1} - a| < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Из соотношений (17) и (15) получаем: $\frac{3\varepsilon_1 + |b - a|}{m_1} < \varepsilon_1$. Оценим $|\sigma'_{m_1} - a|$. Из определения σ'_{m_1} и соотношений (16) и (17) имеем

$$|\sigma'_{m_1} - a| = \left|\frac{1}{m_1}\left[m_1 a_1 + \sum_{j=1}^{\omega'} (m_1 - j)\, c_j^{(0)}\right] - a\right| < |a_1 - a| +$$

---

* Здесь и всюду в дальнейшем, при построении ряда (2) из рядов (9), (10), (11) мы берем члены, еще не использованные в процессе построения ряда (2).

$$+\frac{1}{m_1}\left|\sum_{i=1}^{\omega'}\sum_{j=1}^{i}c_j^{(0)}\right| < |a_1-a| + \frac{1}{m_1}m_1\left|\sum_{j=1}^{\omega'}c_j^{(0)}\right| < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

и, следовательно,

$$|\sigma'_{m_1}-a| < \varepsilon_1. \qquad (18)$$

Рассмотрим последовательность чисел, удовлетворяющих условию

$$b-a > \varepsilon_1 > 2\varepsilon_2 > 2^2\varepsilon_3 > \cdots > 2^{k-1}\varepsilon_k > 2^k\varepsilon_{k+1} > \cdots > 0, \qquad (19)$$

где ε_1 удовлетворяет неравенству (13). Пусть заданы натуральные числа m_k $(k=1, 2, 3, \cdots, r)$ и n_k $(k=1, 2, 3, \cdots, r-1)$ такие, что удовлетворяются неравенства

$$m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \cdots < m_k < n_k < m_{k+1} < \cdots < m_r,$$

$$\frac{3\varepsilon_k + |b-a|}{m_k} < \varepsilon_k \ (k=1, 2, \cdots, r). \qquad (20)$$

Предположим, что у ряда (2) уже определены члены от номера 1 до номера m_r так, что

$$|\sigma'_{m_k}-a| < \varepsilon_k \ (k=1, 2, \cdots, r), \qquad (21)$$

$$|s'_{m_k}-a| < \frac{\varepsilon_k}{2} \ (k=1, 2, \cdots, r). \qquad (22)$$

Заметим, что из соотношений (21) и (22) при $k=r$ в силу неравенств $|\sigma'_{n_r}-s'_{m_r}| \leqslant |\sigma'_{m_r}-a| + |s'_{n_r}-a|$ вытекает, что

$$|\sigma'_{m_r}-s'_{m_r}| < \frac{3}{2}\varepsilon_r. \qquad (23)$$

Частная сумма s'_{m_r} может лежать на числовой оси : 1) левее точки a, 2) на отрезке $[a, b]$, 3) правее точки b. В третьем случае из неравенства (22) следует, что

$$|s'_{m_r}-b| < \frac{\varepsilon_r}{2}. \qquad (24)$$

В случае 1 и 2, если не выполняется неравенство (24), определяемый ряд (2), после того, как задана частная сумма s'_{m_r}, строим следующим образом. В качестве следующих членов определяемого ряда (2) возьмем из ряда (10) столько положительных членов по модулю меньших $\frac{\varepsilon_r}{2}$* (обозначим их через $d_1^{(r)}, d_2^{(r)}, \cdots, d_{\nu_r}^{(r)}$), чтобы выполнялись неравенства

$$0 < b - s'_{m_r} - \sum_{k=1}^{\nu_r} d_k^{(r)} < \frac{\varepsilon_r}{2}.$$

---

* Это возможно в силу соотношения (12).

Итак

$$0 < b - s'_{m_r+v_r} < \frac{\varepsilon_r}{2} \tag{25}$$

(если неравенство (24) выполняется, то полагаем $v_r = 0$). Пусть

$$\left| \sum_{k=2}^{m_r+v_r} (k-1)\, a_k \right| + 1 = M. \tag{26}$$

Возьмем натуральное число

$$\omega_r > 1 \tag{27}$$

настолько большим, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\frac{M}{m_r + v_r + \omega_r} < \frac{\varepsilon_r}{4} \cdot \tag{28}$$

В силу сходимости ряда (10) из него можно взять ω_r членов, не вошедших в частную сумму $s'_{m_r+v_r}$ (обозначим их через $c_k^{(r)}$, $k=1, 2, \cdots, \omega_r$) так, что

$$c_k^{(r)} < 0, \sum_{k=1}^{\omega_r} c_k^{(r)} < \min\left(\frac{\varepsilon_r}{4},\ b - s'_{m_r+v_r},\ \frac{\varepsilon_r}{2} - |b - s'_{m_r}|\right) \cdot \tag{29}$$

После члена с номером $m_r + v_r$ поместим взятые нами члены $c_k^{(r)}$ $(k = 1, 2, \cdots, \omega_r)$ в определяемый ряд (2) в том порядке, в каком они расположены в ряде (10). Положим

$$m_r + v_r + \omega_r = n_r. \tag{30}$$

Таким образом, мы определили члены определяемого ряда (2) для значений n, удовлетворяющих неравенству

$$m_r < n \leqslant n_r. \tag{31}$$

Отметим при этом, что члены ряда (2) для n, удовлетворяющих неравенству (31) есть либо $d_k^{(r)} > 0$ $(k=1, 2, \cdots, v_r)$, либо $c_k^{(r)} > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, \omega_r)$. Из соотношений (27) и (30) ясно, что $m_r < n_r$. Из неравенств (25), (29) соотношения (30) и построения ряда (2) следует, что

$$0 < b - s'_{n_r} < \frac{\varepsilon_r}{2}, \tag{32}$$

или в силу соотношения (30)

$$0 < b - s'_{m_r} - \sum_{k=1}^{v_r} d_k^{(r)} - \sum_{k=1}^{\omega_r} c_k^{(r)} < \frac{\varepsilon_r}{2} \cdot$$

Отсюда и из соотношения (22) имеем

$$0 < \sum_{k=1}^{v_r} d_k^{(r)} + \sum_{k=1}^{\omega_r} c_k^{(r)} < b - s'_{m_r} < |b - a| + \frac{\varepsilon_r}{2} \cdot \tag{33}$$

Из соотношения (32) вытекает, что

$$|b - s'_{n_r}| < \frac{\varepsilon_r}{2}. \tag{34}$$

Заметим, что из неравенства (33) и построения определяемого ряда (2) следует, что

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a'_{m_r+i}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{v_r} d_j^{(r)} + \sum_{j=1}^{\omega_r} c_j^{(r)} < |b-a| + \frac{\varepsilon_r}{2} \tag{35}$$

$$(1 \leqslant k \leqslant v_r + \omega_r).$$

Оценим разность $s'_{n_r} - \sigma'_{n_r}$. Учитывая соотношения (26), (23), (29), (30) и определение $c_k^{(r)}$ и ω_r после (28) получаем $c_k^{(r)} > 0$, $k = 1, 2, \cdots, \omega_r$ и

$$|\sigma'_{n_r} - s'_{n_r}| = |\sigma'_{m_r+v_r+\omega_r} - s'_{m_r+v_r+\omega_r}| =$$

$$= \frac{1}{m_r + v_r + \omega_r}\left| \sum_{k=1}^{m_r+v_r+\omega_r} s'_k - (m_r + v_r + \omega_r)\, s'_{m_r+v_r+\omega_r} \right| =$$

$$= \frac{1}{m_r + v_r + \omega_r} \cdot \left| \sum_{k=1}^{m_r+v_r} s'_k + \omega_r s'_{m_r+v_r} + \sum_{i=1}^{\omega_r} (\omega_r - i + 1)\, c_i^{(r)} - \right.$$

$$\left. - (m_r + v_r + \omega_r) \left(s'_{m_r+v_r} + \sum_{i=1}^{\omega_r} c_i^{(r)} \right) \right| <$$

$$\leqslant \frac{1}{m_r + v_r + \omega_r} \left\{ \left| \sum_{k=2}^{m_r+v_r} (k-1)\, a'_k \right| + \left| \sum_{i=1}^{\omega_r} (m_r + v_r + i - 1)\, c_i^{(r)} \right| \right\},$$

откуда

$$|s'_{n_r} - \sigma'_{n_r}| < \frac{M}{m_r + v_r + \omega_r} + \sum_{k=1}^{\omega_r} c_k^{(r)} < \frac{\varepsilon_r}{2}. \tag{36}$$

Отсюда и из соотношений (34) следует, что

$$|\sigma'_{n_r} - b| < \varepsilon_r. \tag{37}$$

Принимая во внимание (22) и (37), естественно ввести следующее

Определение 1. Построение частных сумм определяемого ряда (2) для номера n, удовлетворяющих неравенству

$$m_r < n \leqslant n_r, \tag{38}$$

назовем r-ым обходом отрезка $[a, b]$ слева направо из точки s_{m_r}.

Докажем теперь, что все обобщенные частные суммы σ'_n определяемого ряда (2) с номерами n, удовлетворяющими неравенству (38), лежат на отрезке $[a - 3\varepsilon_r,\ b + 3\varepsilon_r]$. Действительно, в силу соотношения

$$\sigma_n' = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k' \tag{39}$$

для этих номеров n

$$\sigma_n' = s_{m_r}' + (\sigma_n' - s_{m_r}') = (s_{m_r}' - a) + a - \sum_{k=1}^{m_r} \frac{k-1}{n} a_k' + \sum_{k=m_r+1}^{n}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k'. \tag{40}$$

Полагая в (39) $n = m_r$, получаем

$$|\sigma_{m_r}' - s_{m_r}'| = \left|\sum_{k=1}^{m_r}\left(1 - \frac{k-1}{m_r}\right) a_k' - \sum_{k=1}^{m_r} a_k'\right| = \frac{1}{m_r}\left|\sum_{k=1}^{m_r} (k-1)\, a_k'\right| \cdot$$

Отсюда и из соотношения (23) вытекает, что

$$\frac{1}{m_r}\left|\sum_{k=1}^{m_r} (k-1)\, a_k'\right| < \frac{3}{2}\varepsilon_r.$$

Из последнего неравенства и из (38)

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_r} (k-1)\, a_k'\right| \leqslant \frac{1}{m_r}\left|\sum_{k=1}^{m_r} (k-1)\, a_k'\right| < \frac{3}{2}\varepsilon_r. \tag{41}$$

В силу (33), (35) и замечания после неравенства (31) имеем для номеров n, удовлетворяющих этому неравенству

$$0 \leqslant \sum_{k=m_r+1}^{n}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k' \leqslant \sum_{k=m_r+1}^{n} a_k' < \sum_{k=1}^{v_r} d_k^{(r)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{w_r} c_k^{(r)} < |b - a| + \frac{\varepsilon_2}{2} \cdot \tag{42}$$

В силу (22), (41) и (42) для номеров n, удовлетворяющих неравенству (38), из (40) вытекает

$$a - \frac{\varepsilon_r}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_r < \sigma_n' < a + |b - a| + 3\varepsilon_r, \text{ то есть}$$

Все обобщенные частные суммы σ_n' *определяемого ряда* (2), *полученные при* r*-ом обходе отрезка* $[a, b]$ *слева направо* (*см. определение* 1), *лежат на отрезке* $[a - 3\varepsilon_r, b + 3\varepsilon_r]$.

После r-го обхода отрезка $[a, b]$ слева направо, строим далее ряд (2) следующим образом. Из ряда (1) берем первый член, не использованный при построении ряда (2) (обозначим его через $a^{(r)}$) и помещаем его на $(n_r + 1)$-ое место в ряде (2). В силу неравенства (34) имеем

$$|s_{n_r+1}-b| = |s'_{n_r} + a^{(r)} - b| \leqslant \frac{\varepsilon_r}{2} + |a^{(r)}|. \tag{44}$$

Из определения σ'_n (см. 14)) и неравенств (37) и (44) вытекает

$$|\sigma'_{n_r+1} - b| = \left|\frac{n_r}{n_r+1}\cdot\frac{1}{n_r}\left(\sum_{i=1}^{n_r} s'_i + s'_{n_r+1}\right) - b\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n_r+1}\left(n_r|\sigma'_{n_r} - b| + |s'_{n_r+1} - b|\right) < |a^{(r)}| + \frac{3}{2}\varepsilon_r. \tag{45}$$

Частная сумма s'_{n_r+1} удовлетворяет одному из двух неравенств: случай 1

$$s'_{n_r+1} \geqslant a, \tag{46}$$

случай 2

$$s'_{n_r+1} < a. \tag{47}$$

В случае 1 определяемый ряд (2) строим далее так. Из ряда (11) в ряд (2) помещаем члены $b_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \cdots, u_r)$, не вошедшие в частную сумму s'_{n_r+1}, такие, что

$$|b_i^{(r)}| < \frac{\varepsilon_r}{2} \quad (i = 1, 2, \cdots, u_r), \tag{48}$$

причем u_r выбираем так, что

$$s'_{n_r+1} + \sum_{i=1}^{u_r-1} b_i^{(r)} \geqslant a,$$

$$s'_{n_r+1} + \sum_{i=1}^{u_r} b_i^{(r)} < a \tag{49}$$

(это возможно сделать в силу определения ряда (11) и соотношения (12). В случае 2 полагаем $u_r = 0$. В случае 1 из неравенств (48), (49) и построения определяемого ряда (2) вытекает, что

$$0 < a - s'_{n_r+1+u_r} < \frac{\varepsilon_r}{2}\cdot \tag{50}$$

Очевидно, что в случае 2, когда $u_r = 0$, из (47) получаем $s_{n_r+1+u_r} < a$, а из (34) и определения $a^{(r)}$ имеем

$$0 < a - s'_{n_r+1+u_r} < b - s'_{n_r+1+u_r} < |a^{(r)}| + \frac{\varepsilon_r}{2}\cdot$$

Из двух последних неравенств и соотношения (50), справедливого для случая 1, следует, что во всех случаях выполняются неравенства

$$0 < a - s'_{n_r+1+u_r} < |a^{(r)}| = \frac{\varepsilon_r}{2}\cdot \tag{51}$$

После члена с номером $n_r + 1 + u_r$ определяемый ряд (2) строим следующим образом. Из ряда (9) берем в ряд (2) члены, не вошедшие в частную сумму $s'_{n_r+1+u_r}$, $\tilde{d}_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \cdots, t_r)$ так, чтобы удовлетворялись неравенства

$$|\tilde{d}_i^{(r)}| < \frac{\varepsilon_{r+1}}{2} \; (i = 1, 2, \cdots, t_r), \tag{52}$$

$$0 < a - \left(s'_{n_r+1+u_r} + \sum_{i=1}^{t_r} \tilde{d}_i^{(r)} \right) < \frac{\varepsilon_{r+1}}{2} \tag{53}$$

(в силу свойств ряда (9), соотношения (12) и неравенства (51) это возможно сделать). Пусть натуральное число p_r так велико, что удовлетворяются неравенства

$$\frac{3\varepsilon_{r+1} + |b - a|}{p_r} < \varepsilon_{r+1}, \tag{54}$$

$$\frac{1}{p_r} \left| \sum_{i=2}^{n_r+1+u_r+t_r} (i-1)\, a'_i \right| < \frac{\varepsilon_{r+1}}{4}. \tag{55}$$

После того, как построена частная сумма определяемого ряда (2) с номером $n_r + 1 + u_r + t_r$, в ряд (2) помещаем p членов ряда (10), не вошедших в сумму $s'_{n_r+1+u_r+t_r}$ (обозначим их через $\tilde{c}_i^{(r)}$, $i = 1, 2, \cdots, p_r$), причем p_r выбираем так, чтобы выполнялись условия:

$$\sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)} < \frac{\varepsilon_{r+1}}{4}, \tag{56}$$

$$0 < a - \left(s'_{n_r+1+u_r} + \sum_{i=1}^{t_r} \tilde{d}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)} \right) < \frac{\varepsilon_{r+1}}{2} \tag{57}$$

(это возможно сделать в силу соотношений (10) и (53). Из неравенств (51), (57) и положительности $\tilde{d}_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \cdots, t_r)$ и $\tilde{c}_i^{(r)} (i = 1, 2, \cdots, p_r)$ вытекает, что

$$0 < \sum_{i=1}^{t_r} \tilde{d}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)} < \frac{\varepsilon_r}{2} + |a^{(r)}| + \frac{\varepsilon_r}{2} = |a^{(r)}| + \varepsilon_r, \tag{58}$$

так как $\varepsilon_{r+1} < \varepsilon_r$ (см. (19)). Положим

$$n_r + 1 + u_r + t_r + p_r = m_{r+1}. \tag{59}$$

Из (57) и (59) и построения определяемого ряда имеем

$$|s'_{m_{r+1}} - a| < \frac{\varepsilon_{r+1}}{2}. \tag{60}$$

Из соотношения (39) (в котором полагаем $n = m_{r+1}$) неравенств (55), (56) и соотношения (59) следует, что

$$|\sigma'_{m_{r+1}} - s'_{m_{r+1}}| = \frac{1}{m_{r+1}} \left| \sum_{i=2}^{m_{r+1}} (i-1)\, a'_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m_{r+1}} \left| \sum_{i=2}^{n_r+1+u_r+t_r} (i-1)\, a'_i \right| + \sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)} < \frac{\varepsilon_{r+1}}{2}. \tag{61}$$

В силу неравенств (60) и (61) имеем

$$|\sigma'_{m_{r+1}} - a| \leqslant |\sigma'_{m_{r+1}} - s'_{m_{r+1}}| + |s'_{m_{r+1}} - a| < \varepsilon_{r+1}. \tag{62}$$

Принимая во внимание (37) и (62) естественно ввести следующее

Определение 2. Построение определяемого ряда (2) для частных сумм с номерами n, удовлетворяющими неравенству

$$n_r < n \leqslant m_{r+1}, \tag{63}$$

назовем r-ым *обходом отрезка* $[a, b]$ *справа налево* из точки s'_{n_r}.

Оценим теперь σ'_n для номеров n, удовлетворяющих неравенству (63). В силу соотношения (39)

$$\sigma'_n = s'_{n_r} + \sigma'_n - s'_{n_r} = s'_{n_r} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a'_k - \sum_{k=1}^{n_r} a'_k =$$

$$= (s'_{n_r} - b) + b - \sum_{k=1}^{n_r} \frac{k-1}{n} a'_k + \sum_{k=n_r+1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a'_k. \tag{64}$$

Из (39) при $n = n_r$ и неравенства (36) имеем

$$|\sigma'_{n_r} - s'_{n_r}| < \frac{\varepsilon_r}{2}.$$

Отсюда получаем, в частности

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_r} (k-1)\, a'_k \right| < \frac{\varepsilon_r}{2} \quad (n_r < n \leqslant m_{r+1}). \tag{65}$$

В соотношении (64) оценим последнюю сумму. Из (59) и построения определяемого ряда (2) (см. определение $a^{(r)}$ после (43), рассуждения после (47)) имеем

$$\left| \sum_{k=n_r+1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a'_k \right| \leqslant \sum_{k=n_r+1}^{n} |a'_k| < |a^{(r)}| + \sum_{k=n_r+2}^{m_{r+1}} |a'_k| =$$

$$= |a^{(r)}| + \sum_{i=1}^{u_r} |b_i^{(r)}| + \sum_{i=1}^{t_r} \tilde{d}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)} \quad (n_r < n \leqslant m_{r+1}). \tag{66}$$

Из (44), (51) и построения ряда (2) (см. рассуждения после (47)) имеем

$$\sum_{i=1}^{u_r} |b_i^{(r)}| = |s'_{n_r+1+u_r} - s'_{n_r+1}| \leqslant |s'_{n_r+1+u_r} - a| +$$

$$+ |b - s'_{n_r+1}| + |a-b| < |a-b| + 2\,|a^{(r)}| + \varepsilon_r. \tag{67}$$

Из соотношения (66), в силу неравенств (58) и (67), получаем

$$\left|\sum_{k=n_r+1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a'_k\right| < |a-b| + 4\,|a^{(r)}| + 2\varepsilon_r; \ (n_r < n \leqslant m_{r+1}). \tag{68}$$

Из соотношения (64), в силу неравенств (34), (65) и (68), имеем

$$\sigma'_n > -\frac{\varepsilon_r}{2} + b - \frac{\varepsilon_r}{2} - |a-b| - 4\,|a^{(r)}| - 2\varepsilon_r = a - 4\,|a^{(r)}| - 3\varepsilon_r, \tag{69}$$

$$n_r < n \leqslant m_{r+1}.$$

В силу определения $a^{(r)}$ после (43), построения определяемого ряда (2) (см. рассуждения после (47), (51), (55)) и условия (58), имеем $b_i^{(r)} < 0$ $(i = 1, 2, \cdots, u_r)$ и неравенства

$$\sum_{k=n_r+1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a'_k < |a^{(r)}| + \sum_{k=n_r+2}^{n_r+u_r+1} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) b_{k-n_r-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{t_r} \tilde{d}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)} < |a^{(r)}| + \left(\sum_{i=1}^{t_r} \tilde{d}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)}\right) < \tag{70}$$

$$< 2\,|a^{(r)}| + \varepsilon_r, \ n_r < n \leqslant m_{r+1}.$$

Из (64), в силу неравенств (70), (34) и (65), имеем

$$\sigma'_n < |s'_{n_r} - b| + b + \left|\sum_{k=1}^{n_r} \frac{k-1}{n} a'_k\right| + 2\,|a^{(r)}| +$$

$$+ \varepsilon_r < b + 2\,|a^{(r)}| + 2\varepsilon_r \ (n_r < n \leqslant m_{r+1}). \tag{71}$$

Из соотношений (69) и (71) следует, что

При r-ом обходе отрезка $[a, b]$ справа налево (см. определение 2 после (59)) средние арифметические суммы для определяемого ряда (2) лежат на отрезке $[a - 4\,|a^{(r)}| - 3\varepsilon_r,\ b + 4\,|a^{(r)}| + 3\varepsilon_r]$. (72)

Из утверждений (43) и (72) следует, что

Все средние арифметические суммы σ'_n определяемого ряда (2), полученные при r-ом обходе отрезка $[a, b]$ слева направо и при r-ом обходе отрезка $[a, b]$ справа налево, не выходят за пределы отрезка $[a, b]$ дальше чем на $4\,|a^{(r)}| + 3\varepsilon_r$. (73)

Заметим, что $s'_{n_{r+1}}$ и $\sigma'_{m_{r+1}}$ для определяемого ряда (2) удовлетворяют соответственно неравенствам (60) и (62), то есть неравенствам (22) и (21), в которых полагаем $k=r+1$. Далее, натуральное число m_{r+1}, в силу соотношения (59) и (54) удовлетворяет неравенству (20) для $k=r+1$. Тогда у нас выполняются все условия, которые позволяют нам сделать следующий $(r+1)$-ый обход отрезка $[a, b]$ слева направо из точки $s'_{m_{r+1}}$ и справа налево из точки $s'_{n_{r+1}}$ с помощью частных сумм определяемого ряда (2). Сделаем эти обходы. Далее, делая последовательно $(r+2)$, $(r+3)$, $(r+4)$ и т. д. обходы отрезка $[a, b]$ слева направо и справа налево, мы полностью определяем ряд (2). Докажем теперь, что каждая точка отрезка $[a, b]$ является предельной для последовательности средних арифметических сумм σ'_n построенного ряда (2). Действительно, так как соотношения (21) и (37) выполняются соответственно для любых натуральных k и r, то в силу (19) и построения ряда (2) вытекает, что точки a и b являются предельными для последовательности средних арифметических сумм σ'_n ряда (2), и этот ряд получается перестановкой членов из условно сходящегося ряда (1). В таком случае из леммы, доказанной после формулировки теоремы 1, вытекает, что каждая точка отрезка $[a, b]$ является предельной для последовательности средних арифметических построенного ряда (2). Поэтому для доказательства теоремы 2 остается показать, что все предельные точки последовательности средних арифметических σ'_n для построенного ряда (2) лежат на отрезке $[a, b]$. В самом деле, возьмем произвольное $\sigma>0$. Из (19) следует, что $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon_r=0$; кроме того $a^{(r)}$ $(r=1, 2, 3, \cdots)$ являются различными членами условно сходящегося ряда (1) и, следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} a^{(r)}=0$. Тогда найдется такое натуральное N, что

$$4\,|a^{(r)}|+3\,\varepsilon_r<\frac{\sigma}{2},\quad r>N. \tag{74}$$

Из (74), утверждения (73) и построения ряда (2) вытекает, что начиная с N-го обхода отрезка $[a, b]$ слева направо и справа налево, все средние арифметические σ'_n ряда (2) лежат на отрезке $\left[a-\frac{\sigma}{2},\ b+\frac{\sigma}{2}\right]$, а так как σ — произвольное положительное число, то все предельные точки последовательности σ'_n $(n=1, 2, \cdots)$ лежат на отрезке $[a, b]$, и теорема 2 доказана*.

Московский станкоинструментальный
институт

Поступила 23.III.1976

---

* Теорема имеет место и для случая, когда отрезок $[a, b]$ бесконечный. Если, например, отрезок $[a, b]=[a, \infty)$, то ряд (2) строится следующим образом. Пусть $b_1>a$. Возьмем систему отрезков $[a, b_1]$, $[a, b_1+1]$, $[a, b_1+2], \cdots$, $[a, b_1+n], \cdots$. Част-

Ի. Պ. ՄԻԼՈՎԻԴՈՎԱ. Թվային շարքի թվաբանական միջինների հաջորդականության սահմանային կետերի բազմության վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում են իրական անդամներով պայմանական զուգամետ շարքեր։ Ապացուցվում է, որ եթե այդպիսի շարքի անդամները որևէ ձևով տեղափոխվեն, ապա տեղափոխված շարքի միջին թվաբանականների սահմանային կետերի բազմությունը հանդիսանում է կետ, կամ իրական առանցքի հատված (վերջավոր կամ անվերջ)։

Ապացուցվում է նաև, որ եթե ուղղի վրա տված է հատված, վերջավոր կամ անվերջ, ապա պայմանական զուգամետ շարքի անդամները կարելի է այնպես տեղափոխել, որ ստացված շարքի միջին թվաբանականների սահմանային կետերի բազմությունը համընկնի տվյալ հատվածի հետ։

I. P. MILOVIDOVA. *On the set of limiting points for the sequence of arithmetical means for numerical series* (summary)

In the paper conditionally convergent series with real elements are considered. it is proved that if elements of any such series undergo permutation, then the set of limiting points of the arithmetical means for the resulting series is either a point or an interval on, finite or infinite.

Also, every conditionally convergent series may be permitted in such a way, that the set of all limiting points of arithmetic means for the resulting series will coincide with any prescribed interval.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. П. Миловидова.* Ряды с комплексными членами, область сходимости которых есть прямая, Изв. Вуз-ов, Матем., 1971, № 10, 47—56.

ную сумму s'_{m_1} строим так же, как и для случая конечного отрезка $[a, b]$. Затем делаем последовательно обходы первого отрезка системы слева направо и справа налево; обход второго отрезка системы, третьего и т. д.

Если $[a, b] = (-\infty, +\infty)$, то берем систему отрезков $[0, 1]$, $[-1,0]$, $[0,2]$, $[-2,0]$, $[0,3]$, $[-3,0], \cdots$, полагаем $s'_{m_1} = a_1$ и делаем последовательно обходы каждого отрезка слева направо и справа налево.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

Г. С. МИКАЕЛЯН

D-ТЕОРЕМЫ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ВИЛАНДТОВЫХ ГРУПП

Введение

В статье применяется аксиоматический подход к силовской теории бесконечных групп. В § 1 приводятся определения основных понятий и основные результаты. В частности, на языке классов групп формулируются и обобщаются понятия D-теоромы (см. [5]) и θ-виландтовой подгруппы. Последнее является обобщением понятия нильпотентной холловской П-подгруппы группы, рассматриваемом Виландтом [2]. Приводятся некоторые D-теоремы, имеющие место в θ-виландтовых группах. В § 2 проводится некоторое необходимое в дальнейшем исследование силовских классов групп. Здесь, в частности, строится оператор силовского замыкания Syl. В § 3 устанавливаются некоторые свойства θ-виландтовых групп, необходимые также и в доказательствах основных результатов, которые приводятся в последнем параграфе.

§ 1. D-теоремы в θ-виландтовых группах

При изучении теорем типа Силова Ф. Холл в своей работе [5] ввел в рассмотрение следующие классы групп: E_{Π} — класс групп, в которых существуют холловские П-подгруппы; C_{Π} — класс E_{Π}-групп, в которых холловские П-подгруппы сопряжены; D_{Π} — класс C_{Π}-групп, в которых каждая П-подгруппа содержится в некоторой холловской П-подгруппе (здесь и в дальнейшем через П обозначается некоторое множество простых чисел). С другой стороны известно, что различные теоремы типа Силова можно получать, заменяя класс П-групп некоторым „хорошим“ классом групп **X** (см., например, [3]). Но тогда, естественно, следуя Ф. Холлу, ввести и исследовать классы групп $E_{\mathbf{X}}$, $C_{\mathbf{X}}$ и $D_{\mathbf{X}}$. Сразу же отметим, что для большинства классов **X**, для которых имеет место какая-нибудь нетривиальная теорема типа Силова, класс $E_{\mathbf{X}}$ совпадает с классом всех групп, а классы $C_{\mathbf{X}}$ и $D_{\mathbf{X}}$ совпадают. Рассматриваемые нами классы (силовские классы) также являются такими и мы ограничимся исследованием только класса $D_{\mathbf{X}}$.

Пусть **X** — абстрактный класс групп — класс групп, содержащий вместе с каждой группой все ей изоморфные.

Определение. Группа принадлежит к классу $D_{\mathbf{X}}$ тогда и только тогда, когда каждая ее **X**-подгруппа порождает **X**-подгруппу вместе с некоторым сопряженным любой **X**-подгруппы этой группы. Если $G \in D_{\mathbf{X}}$, то скажем еще, что в G справедлива $D_{\mathbf{X}}$-теорема.

Классическими примерами $D_{\mathbf{X}}$-теорем, при подходящих выборах класса **X**, являются упомянутая теорема Силова и известная теорема Ф. Холла о холловских П-подгруппах конечных разрешимых групп. Ряд интересных D-теорем содержится в работе [5].

В работе [2] Виландт показал, что конечная группа, обладающая нильпотентной холловской П-подгруппой, содержится в классе $D_{\mathbf{X}}$, если в качестве **X** взять класс всех П-групп. Но нильпотентная холловская П-подгруппа группы разлагается в прямое произведение своих p-подгрупп, $p \in \Pi$, т. е. является θ-разложимой при некотором частном выборе расщепляемой системы абстрактных классов групп θ. Учитывая еще, что p-компоненты нильпотентной холловской П-подгруппы являются максимальными p-подгруппами и в исходной конечной группе, мы приходим к следующему определению.

Определение. Подгруппу A группы G назовем θ-виландтовой в G, если она θ-разложима и каждая ее максимальная **X**-подгруппа такова и в G для всех $\mathbf{X} \in \theta$. Группу, обладающую θ-виландтовой подгруппой, назовем θ-виландтовой.

Теперь нильпотентные холловские П-подгруппы группы становятся θ-виландтовыми, если в качестве класса $\mathbf{X} \in \theta$ взять класс p-групп для некоторого простого числа p, при этом предполагая, что для различных классов **X** эти числа различны. Максимальные **X**-подгруппы группы, т. е. **X**-подгруппы группы, не содержащиеся в других **X**-подгруппах этой группы, также являются θ-виландтовыми подгруппами для всякого класса **X**, если взять $\theta = \{\mathbf{X}\}$.

Итак, на языке классов мы имеем формулировки и обобщения понятий D-теоремы и нильпотентной холловской П-подгруппы. Но эти понятия связаны между собой: например, в теореме Виландта—из существования в конечной группе нильпотентной холловской П-подгруппы следует выполняемость в ней некоторой D-теоремы. Поэтому можно ожидать, что аналогичная импликация имеет место и в упомянутом общем случае и тогда естественно поставить вопрос: не справедлива ли какая-нибудь D-теорема в θ-виландтовых группах? (Отметим, что аналогичный вопрос, связанный с холловскими подгруппами групп, поставлен во II части работы [2]).

Конечно, не реальна попытка установления $D_{\mathbf{X}}$-теорем в произвольных θ-виландтовых группах, без каких-либо ограничений на θ и на группы. Обычно, при аксиоматическом подходе к силовской теории групп, на классы из θ накладываются некоторые естественные ограничения. Чаще всего это—силовские классы: классы групп, замкнутые относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов, расширений и локальной теоремы. Рассмотрением таких классов и мы ограничиваемся и под θ всюду будем понимать некоторую расщепляемую систему силовских классов (см. [3]).

Отметим, что хотя такое ограничение на классы из θ и довольно сильное, но все же у нас сохраняется большая возможность выбора различных расщепляемых систем силовских классов. В самом деле, если $\mathbf{X}$ — произвольный класс групп, а A — простая конечная группа, не лежащая в $\mathbf{X}$, то, применяя лемму 3, легко доказать, что $A \overline{\in} \mathrm{Syl}\,\mathbf{X}$, где через $\mathrm{Syl}\,\mathbf{X}$ обозначается силовское замыкание класса $\mathbf{X}$ — минимальный силовский класс, содержащий $\mathbf{X}$ (легко сообразить, что он однозначно определен). Отсюда следует, что два класса групп, один из которых содержит простую конечную группу, не лежащую в другом, порождают различные силовские классы. А это дает нам возможность построить большую серию различных расщепляемых систем силовских классов.

Ясно, что при установлении $D_{\mathbf{X}}$-теорем в θ-виландтовых группах в качестве класса $\mathbf{X}$ нужно брать некоторый, зависящий от θ, класс групп. Этот класс должен быть связан с θ примерно так же, как и класс П-групп — с системой классов p-групп по всем $p \in \Pi$. Ясно также, что чем шире класс $\mathbf{X}$, тем сильнее соответствующая $D_{\mathbf{X}}$-теорема. В этом отношении самым широким классом $\mathbf{X}$, для которого мы устанавливаем $D_{\mathbf{X}}$-теорему в соответствующих θ-виландтовых группах, является класс

$$\mathbf{X} = \mathrm{Syl}\,(\cup\theta).$$

Следует отметить, что для полного соблюдения той связи между $\mathbf{X}$ и θ, которая отмечалась выше, нужно было в установленных нами $D_{\mathbf{X}}$-теоремах взять $\mathbf{X} = \overline{\mathrm{Syl}\,(\cup\theta)}$ (см. § 3). Однако, при таком широком выборе класса $\mathbf{X}$ установить $D_{\mathbf{X}}$-теоремы в θ-виландтовых группах видимо очень трудно, если это вообще возможно (см. также замечание после теоремы 4).

Обычно, для перенесения силовских теорем на бесконечные группы, на эти группы необходимо налагать некоторые условия конечности. Чаще всего — это конечность числа сопряженных подгрупп рассматриваемого типа данной группы (см., например, [10]). При таком ограничении на θ-виландтовые подгруппы группы у нас получается следующая теорема. (Напомним, что под фактором группы, как обычно, понимается фактор-группа любой ее подгруппы).

Теорема 1. *Пусть локально конечная группа G обладает θ-виландтовой подгруппой с конечным числом сопряженных. Тогда, если в каждом конечном факторе группы G справедлива $D_{\mathbf{X}}$-теорема для всякого $\mathbf{X} \in \theta$, то $G \in D_{\mathrm{Syl}\,(\cup\theta)}$.*

Другим условием конечности, налагаемым на бесконечную группу при установлении в ней силовских теорем, является конечность индекса соответствующего радикала (см., например, [11], [12]). Для формулировки полученного в этом плане результата напомним, что

θ-радикалом группы называется ее максимальная инвариантная θ-разложимая подгруппа. Он однозначно определяется (см. [3]) и обозначается через $R_\theta(G)$.

Теорема 2. *Пусть локально конечная θ-виландтовая группа G обладает θ-радикалом конечного индекса. Тогда, если в каждой конечной подгруппе группы G справедлива D_X-теорема для всех $\mathbf{X} \in \theta$, то $G \in D_{\mathrm{Syl}U\theta}$.*

Наконец, сопряженность в группе силовских подгрупп или баз, картеровых подгрупп и т. д. очень часто зависит от силовского или нормального нормализатора некоторой подгруппы или базы данного типа рассматриваемой группы. Такая связь установлена в теоремах 3, 4. Отметим, что этот подход в теореме 3 комбинируется с подходом, применяемом в теореме 2. Приведем необходимое

Определение. Нормальный нормализатор подмножества A группы G обозначим через $N_G[A]$ и определим равенством:

$$N_G[A] = \bigcap_{g \in G} g^{-1} N_G(A)\, g.$$

Далее, назовем группу θN-группой, если все ее $\mathbf{X}$-подгруппы являются N-группами (см. [1]) для всех $\mathbf{X} \in \theta$.

Теорема 3. *Пусть периодическая группа G обладает такой θ-виландтовой подгруппой A, что $G = G/N_G[A]$ является локально конечной θN-группой с θ-радикалом конечного индекса. Тогда если в каждой конечной подгруппе группы G справедлива D_X-теорема для всех $\mathbf{X} \in \theta$, то $G \in D_{\mathrm{Syl}(U\theta)}$.*

Пусть число силовских классов в θ больше 1 или же θ составлен из одного, но силовского класса периодических групп. Тогда справедлива

Теорема 4. *Если группа G обладает такой θ-виландтовой подгруппой A, что $G = G/N_G[A]$ — конечная θN-группа, в каждой подгруппе которой справедлива D_X-теорема для всех $\mathbf{X} \in \theta$, то $G \in D_{\mathrm{Syl}(U\theta)}$.*

Отметим, что в работе [7] П. А. Гольберг доказал, что если некоторая группа G обладает разлагающейся в прямое произведение своих p-компонент, $p \in \Pi$, холловской Π-подгруппой A с конечным числом сопряженных, то в ней для всякой Π-подгруппы B существует такой элемент g, что $g^{-1} Bg \subseteq A$, т. е. $G \in D_X$, где $\mathbf{X}$ — класс всех Π-групп. Заменяя классы из θ некоторыми классами p-групп, при этом предполагая, что для различных классов берутся различные простые числа p, мы сможем получить эту теорему из леммы 13 настоящей статьи, которая носит редукционный характер—выполняемость D_X-теоремы в группе сводится к D_X-теореме для некоторого конечного фактора этой группы (в ситуации теоремы Гольберга в указанном факторе работает теорема Виландта). Однако, при сделанном выше выборе классов из θ, приведенную теорему Гольберга нельзя вывести из теоремы 4, как и теорему Виландта из леммы 8. Это было бы возможно, если бы в предположениях теоремы 4 справедлив был бы результат $G \in D_{\overline{\mathrm{Syl}(U\theta)}}$, что, по-видимому, не так.

Далее, в условиях теоремы 4 предполагается, что если $\theta = \{\mathbf{X}\}$, то $\mathbf{X}$ — силовский класс периодических групп. Отметим, что при таком частном выборе θ известна теорема Б. И. Плоткина [3], в которой $\mathbf{X}$—произвольный силовский класс, и отсутствует условие $\overline{G} \in \{\mathbf{X}\} N$ теоремы 4. Однако в ней предположение теоремы 4 о том, что каждая подгруппа группы $\overline{G}$ лежит в $D_{\mathbf{X}}$ усиливается и заменяется аналогичным предположением относительно всех конечных факторов группы G.

§ 2. Силовское замыкание классов групп

После появления работы Ф. Холла [6], в теории групп широко и с успехом применяется язык операторов. При этом под теоретико-групповым оператором понимается функция, сопоставляющая каждому классу групп некоторый второй класс групп. Значение оператора U на классе $\mathbf{X}$ обозначается через $U\mathbf{X}$. По традиции определяются операторы S, H, E, L — если $\mathbf{X}$ произвольный класс групп, то $S\mathbf{X}$— класс всех подгрупп, а $H\mathbf{X}$ — голоморфных образов $\mathbf{X}$-групп, $E\mathbf{X}$ — класс всех расширений $\mathbf{X}$-групп при помощи $\mathbf{X}$-групп, $L\mathbf{X}$—класс всех групп, обладающих локальными системами из $\mathbf{X}$-групп. Оператор Syl сопоставляет каждому классу $\mathbf{X}$ его силовское замыкание Syl $\mathbf{X}$. Как суперпозиция функций определяется произведение операторов, причем в произведении UV сначала применяется оператор U. Например, (см. [4])

$$\mathrm{Syl}\ \mathbf{A} = HSRN,$$

где $\mathbf{A}$ — класс абелевых групп, RN—класс RN-групп (см. [1]). Для всякого оператора U помимо степени $U^2 = U \cdot U$ определяются также все степени U^γ — для всякого порядкового числа γ подставляется $U^1 = U$ и если для всех $\mu < \gamma$ все U^μ уже определены, то для произвольного класеа $\mathbf{X}$ предполагается $U^\gamma \mathbf{X} = \bigcup\limits_{\mu<\gamma} U^\mu \mathbf{X}$, если γ — предельно и $U^\gamma = U \cdot U^{\gamma-1}$, если $\gamma - 1$ существует. Для всякого оператора U определяется также оператор $\overline{U}$: $\overline{U}\,\mathbf{X}$ есть объединение всех классов $U^\gamma\,\mathbf{X}$, где γ пробегает класс всех порядковых чисел.

Пусть $\mathbf{X}$—произвольный класс групп, U, V—теоретико-групповые операторы. Для всякого порядкового числа γ определим классы $\mathbf{X}^\gamma_{U,V}$ следующим образом: $\mathbf{X}^0_{U,V} = U\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^1_{U,V} = VU\mathbf{X}$. Далее, если для всех порядковых чисел $\mu < \gamma$ классы $\mathbf{X}^\mu_{U,V}$ уже определены, то положим $\mathbf{X}^\gamma_{U,V} = \bigcup\limits_{\mu<\gamma} \mathbf{X}^\mu_{U,V}$, если γ—предельное. Если же $\gamma - 1$ существует и является предельным, то подставим $\mathbf{X}^\gamma_{U,V} = U\mathbf{X}^{\gamma-1}_{U,V}$, а если существует $\gamma - 2$, то $\mathbf{X}^\gamma_{U,V} = V\mathbf{X}^{\gamma-1}_{U,V}$ при $\mathbf{X}^{\gamma-1}_{U,V} = U\mathbf{X}^{\gamma-2}_{U,V}$ и $\mathbf{X}^\gamma_{U,V} = U\mathbf{X}^{\gamma-1}_{U,V}$ при $\mathbf{X}^{\gamma-1}_{U,V} = V\mathbf{X}^{\gamma-2}_{U,V}$.

Лемма 1. *Для всякого порядкового числа γ и всякого класса групп $\mathbf{X}$ из $S\mathbf{X} = \mathbf{X}$ следует*

$$S\mathbf{X}^{\gamma} = \mathbf{X}^{\gamma}, \tag{1}$$

где всюду в дальнейшем принято обозначение

$$\mathbf{X}^{\gamma} = \mathbf{X}^{\gamma}_{E,\, L}$$

для всех порядковых чисел γ.

Доказательство. Проведем индукцию по γ. Пусть $\gamma = 0$ и $G \in E\mathbf{X}$, G/B, $B \in \mathbf{X}$. Если A—произвольная подгруппа в G, то ввиду теоремы об изоморфизме и из условия леммы получаем $A \cap B$, $A/A \cap \cap B \in \mathbf{X}$ и $A \in E\mathbf{X}$. Пусть для всех порядковых чисел $\mu < \gamma$ (1) верно. Тогда случай предельного γ тривиален, а случай $\mathbf{X}^{\gamma} = E\mathbf{X}^{\gamma-1}$ проверяется аналогично случаю $\gamma = 0$, если же $\mathbf{X}_{\gamma} = L\mathbf{X}^{\gamma-1}$ и $[G_{\alpha}/\alpha \in I]$—локальная система из $\mathbf{X}^{\gamma-1}$-групп $\mathbf{X}^{\gamma}$-группы G, то система $[A \cap G_{\alpha}|\alpha \in I]$ будет локальной для A, и применяя индукцию, получаем $A \in L\mathbf{X}^{\gamma-1}$.

Лемма 2. *Для всякого порядкового числа γ и всякого класса $\mathbf{X}$ из $H\mathbf{X} = \mathbf{X}$ следует $H\mathbf{X}^{\gamma} = \mathbf{X}^{\gamma}$.*

Доказательство проводится аналогично предыдущему.

Лемма 3. *Для всякого класса групп $\mathbf{X}\,\overline{EL}\mathbf{X} = \bigcup\limits_{\gamma} \mathbf{X}^{\gamma}$, где γ пробегает класс всех порядковых чисел.*

Доказательство очевидно.

Выше была подчеркнута большая роль силовских классов при изучении теорем типа Силова. Поэтому важно иметь описание оператора Syl. Такое описание дается в следующей теореме.

Теорема 5. $\mathrm{Syl} = \overline{EL}HS$, *т. е. для всякого класса групп $\mathbf{X}$ $\mathrm{Syl}\,\mathbf{X} = \overline{EL}HS\mathbf{X}$.*

Доказательство. Ясно, что $\overline{EL}HS\mathbf{X} \subseteq \mathrm{Syl}\,\mathbf{X}$. С другой стороны нетрудно заметить, что $HS\mathbf{X} = SHS\mathbf{X} = HHS\mathbf{X}$ и применяя леммы 1, 2, 3, получаем

$$S\,\overline{EL}HS\mathbf{X} = H\overline{EL}HS\mathbf{X} = \overline{EL}HS\mathbf{X},$$

Покажем, что $L\,\overline{EL}\,HS\mathbf{X} = \overline{EL}HS\mathbf{X}$. Пусть $G \in L\,\overline{EL}HS\mathbf{X}$ и $[G_{\alpha}/\alpha \in I]$—ее локальная система из групп, принадлежащих классу $\overline{EL}HS\mathbf{X}$. По лемме 3 каждое G_{α} содержится в некотором классе $(HS\mathbf{X})^{\gamma(\alpha)}$. Так как I—множество, то существует некоторое порядковое число γ больше всех $\gamma(\alpha)$ для всякого $\alpha \in I$. Тогда $G_{\alpha} \in (HS\mathbf{X})^{\gamma}$ для всякого $\alpha \in I$, т. е. $G \in \overline{EL}\,HS\mathbf{X}$.

Очевидно также, что $E\,\overline{EL}\,HS\mathbf{X} \subseteq \overline{EL}\,HS\mathbf{X}$. Таким образом, $\overline{EL}\,HS\mathbf{X}$ является силовским классом. Теорема доказана.

Теперь приведем пример силовского класса, лежащего между силовскими классами периодических групп и всех групп[*]. Сначала отметим, что нам не удалось решить следующую проблему:

Проблема. Существует ли силовский класс, лежащий между классами всех p-групп и локально конечных p-групп, где p — простое число?

Обозначим через P класс периодических групп. Покажем, что класс $\mathrm{Syl}\,(\mathbf{A} \cup P)$ не совпадает с классом всех групп и, тем самым, будет промежуточным силовским классом между P и классом всех групп. Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cup P$. Тогда $H\mathbf{X} = \mathbf{X}$ и по лемме 3

$$\mathrm{Syl}\,\mathbf{X} = \bigcup_{\gamma} \mathbf{X}^{\gamma},$$

где γ пробегает класс всех порядковых чисел. Индукцией по γ покажем, что никакая свободная группа ранга больше 1 не содержится в $\mathbf{X}^{\gamma}$. При $\gamma = 0$ это очевидно. Пусть оно верно для всех $\mu < \gamma$. Тогда при предельном γ все ясно. Если же $\gamma - 1$ существует, то возможны два случая:

1) $\mathbf{X}^{\gamma} = \acute{L}\mathbf{X}^{\gamma-1}$, и G свободная $\mathbf{X}^{\gamma}$-группа. Тогда для некоторого $A \lhd G\ A$, $G/A \in \mathbf{X}^{\gamma-1}$. Ввиду индуктивного предположения и теоремы Нильсена—Шрейера $A = 1$, что приводит к противоречию с индуктивным предположением.

2) $\mathbf{X}^{\gamma} = \grave{L}\mathbf{X}^{\gamma-1}$. Этот случай аналогичен предыдущему.

В заключение приведем еще одну лемму, необходимую в дальнейшем.

Лемма 4. *$\mathrm{Syl}\,(\cup\theta) \cap \overline{Y} = Y$, где $Y \in \theta$, а через $\overline{Y}$ обозначен класс всех групп, любой элемент которых порождает циклическую Y-подгруппу.*

Доказательство. По лемме 3 $\mathrm{Syl}\,(\cup\theta) = \bigcup\limits_{\gamma} \mathbf{X}^{\gamma}$, где $\mathbf{X} = \cup\theta$. Индукцией по γ покажем, что $\mathbf{X}^{\gamma} \cap \overline{Y} = Y$. При $\gamma = 0$ и предельном γ все очевидно. Пусть $\gamma - 1$ существует и $\mathbf{X}^{\gamma} = \acute{L}\mathbf{X}^{\gamma-1}$. Тогда для некоторого $A \lhd G\ A$, $G/A \in \mathbf{X}^{\gamma-1}$. Из $G \in \overline{Y}$ следует, что $A \in \overline{Y}$, $G/A \in \overline{Y}$. Применяя индукцию, получаем A, $G/A \in Y$, т. е. $G \in Y$. Аналогично рассматривается случай $\mathbf{X}^{\gamma} = \grave{L}\mathbf{X}^{\gamma-1}$.

§ 3. Некоторые свойства θ-виландтовых групп

В настоящем параграфе устанавливаются некоторые свойства θ-виландтовых групп. Все эти свойства необходимы также при доказательстве основных результатов статьи.

Лемма 5. *Пусть G — конечна и для всех $\mathbf{X} \in \theta$, $G \in D_{\mathbf{X}}$. Тогда, если A — θ-виландтова подгруппа в G, а B — ее инвариантная Y-подгруппа для некоторого $Y \in \theta$, то A/B — θ-виландтова в G/B.*

---

[*] Этот пример автору сообщил Б. И. Плоткин.

Доказательство. Ясно, что $B \subseteq A$ и A/B θ-разложима. Очевидно также, что каждая максимальная Y-подгруппа группы A/B такова и в G/B. Пусть C/B — максимальная $\mathbf{X}$-подгруппа в A/B, $\mathbf{X} \in \theta$, $\mathbf{X} \neq Y$. Тогда, ввиду $\overline{\mathbf{X}} \cap \overline{Y} = 1$ можно применить лемму Шура, согласно которой $C = B_1B$, где $B_1 \simeq C/B$, т. е. $B_1 \in \mathbf{X}$. Пусть B_2 — содержащая B_1X-подгруппа в A. Тогда из равенств $B_1B = B_2B$ и $B_2 \cap B = 1$ получае м$B_2 = B_1$, т. е. B_1 является максимальной $\mathbf{X}$-подгруппой в A и, следовательно, в G.

Покажем, что B_1B/B — максимальная $\mathbf{X}$-подгруппа в G/B. Пусть $B'/B \in \mathbf{X}$ и $B'/B \supseteq B_1B/B$. Тогда по той же лемме Шура $B' = B''B$, где $B'' \simeq B'/B$. Следовательно, $B_1B \subseteq B''B$. Но из $G \in D_{\mathbf{X}}$ следует $g^{-1} B'' g \subseteq B_1$, $g \in G$ и мы получаем:

$$g^{-1} B'' Bg = g'B'' g B \subseteq B_1B.$$

Сравнение порядков групп B_1B и $B''B$ и полученные включения дают нам: $B_1B = B''B = B'$, что и требовалось показать. Лемма доказана.

Обозначим через $\Pi\theta$ класс θ-разложимых групп.

Лемма 6. *Если каждая подгруппа конечной θ-виландтовой группы G является $D_{\mathbf{X}}$-группой для всех $\mathbf{X} \in \theta$, то $G \in D_{\Pi\theta}$.*

Доказательство. Индукцией по порядку группы докажем, что если A — θ-виландтова подгруппа, а H — произвольная $\Pi\theta$-подгруппа в G, то для некоторого $g \in G$

$$g^{-1} Hg \subseteq A. \tag{2}$$

Ясно, что для некоторого $\mathbf{X} \in \theta$ инвариантная $\mathbf{X}$-подгруппа B группы H нетривиальна. Сначала предположим, что $B \lhd G$. Тогда, по лемме 5, A/B — θ-виландтова подгруппа в G/B. Рассуждения, аналогичные сделанным в доказательстве предыдущей леммы, показывают, что каждая максимальная Y-подгруппа группы G/B является образом некоторой максимальной Y-подгруппы группы G при естественном гомомоморфизме $G \to G/B$, для всякого $Y \in \theta$. Отсюда и из того, что $G' \in D_Y$, $Y \in \theta$, для каждой подгруппы G' из G, получаем $G'B/B \in D_Y$. Таким образом, группа G/B удовлетворяет всем условиям леммы. Применяя индукцию, получаем $g^{-1} HBg \subseteq A$, $g \in G$, т. е. (2) в случае $B \lhd G$ доказано.

Предположим, что не $B \lhd G$. Пусть $A_{\mathbf{X}}$ и $M_{\mathbf{X}}$ — максимальные $\mathbf{X}$-подгруппы соответственно в группах A и $M = N_G(B)$. Тогда из $G \in D_{\mathbf{X}}$ следует

$$B \subseteq M_{\mathbf{X}} \subseteq g^{-1} A_{\mathbf{X}}\, g, \tag{3}$$

где $g \in G$. Обозначим $A^* = M \cap g^{-1} Ag$. A^* θ-разложима. Далее, для всякого $Y \in \theta$ ее максимальная Y-подгруппа, будет такой же и в группе M. Действительно, при $Y = \mathbf{X}$ это следует из (3), если же $Y \neq \mathbf{X}$, то ввиду θ-разложимости A, из (3) получаем $g^{-1} A_Y g \subseteq M$. Таким образом, A^* θ-виландтова подгруппа в M и группа M удовлетворяет всем требованиям леммы. Но, так как $|M| < |G|$ и $H \subseteq M$, то согласно индукции $H\subseteq g_1^{-1}A^*g_1$, или $H\subseteq (gg_1)^{-1}A(gg_1)$, где $g_1\in M$. Включение (2) доказано и в этом случае.

Теперь, для доказательства леммы достаточно заметить, что если H_1 и H_2 — $\Pi\theta$-подгруппы группы G, то по (2)

$$g_1^{-1}H_1g_1,\ g_2^{-1}H^2g_2\subseteq A,\ g_1,\ g_2\in G$$

и отсюда получаем $G\in D_{\Pi\theta}$, ввиду $A\in\Pi\theta$.

Лемма 7. *Пусть A — θ-виландтова подгруппа $D_{\Pi\theta}$-группы G и $\mathbf{X}$ — класс групп, обладающий тем свойством, что в A содержится некоторая сопряженная каждой $\mathbf{X}$-подгруппе группы G. Тогда этим же свойством обладает и класс $L\mathbf{X}$.*

Доказательство. Пусть H — $L\mathbf{X}$-подгруппа в G, $\{H_\alpha|\alpha\in I\}$ — ее локальная система из $\mathbf{X}$-подгрупп. Ясно, что каждая H_α θ-разложима. По теореме 3 Плоткина [3] H θ-разложима. Остается заметить, что θ-виландтова подгруппа группы максимальна в группе как $\Pi\theta$-подгруппа.

Лемма 8. *Пусть каждая подгруппа конечной группы G является D_Y-группой для всех $Y\in\theta$. Тогда, если G обладает θ-виландтовой подгруппой A, то для всякой ее $\mathbf{X}^\gamma$-подгруппы H существует такой элемент $g\in G$, что*

$$g^{-1}Hg\subseteq A,\tag{4}$$

где $\mathbf{X}=\cup\theta$, а классы $\mathbf{X}^\gamma$ образуются так, как в лемме 1.

Доказательство. Применим совместную индукцию по порядку n группы и по порядковому числу γ. При $n=1$ утверждение леммы тривиально, а при $\gamma=0$ оно следует из того, что $G\in D_Y$ для сякого $Y\in\theta$. Пусть оно верно для всех пар (μ, n) и из справедливости для пары (μ, k) следует его справедливость для пары $(\mu+1, k)$ для всех $k<n$, $\mu<\gamma$. Пусть группа G имеет порядок n. Ясно, что если γ предельное, то все очевидно. Пусть $\gamma-1$ существует, тогда возможны два случая.

1). $\mathbf{X}^\gamma=L\mathbf{X}^{\gamma-1}$. Достаточно в этом случае применить леммы 6, 7. Ввиду конечности группы G этот случай легко сходится к индукции и непосредственно.

2). $\mathbf{X}^\gamma=E\mathbf{X}^{\gamma-1}$. Тогда $H/C\simeq D$, где C, $D\in\mathbf{X}^{\gamma-1}$. Если $C=1$, то $H\in\mathbf{X}^{\gamma-1}$ и достаточно применить индукцию. Пусть $C\neq1$. Тогда по индукции C θ-разложима и, следовательно, обладает нетривиальной нормальной Y-подгруппой B для некоторого $Y\in\theta$. Разберем два случая:

а) $B\lhd G$. Тогда, по лемме 5 A/B будет θ-виландтовой подгруппой группы G/B, в которой, как показано при доказательстве леммы 6, каждая подгруппа является D_Z-группой для всех $Z\in\theta$. Пусть F/B — произвольная $\mathbf{X}^{\gamma-1}$-подгруппа в G/B. Тогда, если $\gamma-2$ существует, то ясно, что $\mathbf{X}^{\gamma-1}=L\mathbf{X}^{\gamma-2}$ и F/B обладает локальной системой из $\mathbf{X}^{\gamma-2}$-групп. Отсюда следует $F/B\in\mathbf{X}^{\gamma-2}$, т. е. $F\in\mathbf{X}^{\gamma-1}$. Но $\gamma-1<\gamma$. По индукции для некоторого $g\in G$ получаем $g^{-1}Fg\subseteq A$ или $g^{-1}F/Bg\subseteq$

$\subseteq A/B$, где $\bar{g} = gB$. Если же $\gamma - 2$ не существует, то при предельном $\gamma - 1$ $F/B \in \mathbf{X}^{\mu}$ $\mu < \gamma - 1$ и, следовательно, $F \in \mathbf{X}^{\gamma-1}$, а при $\gamma - 1 = 0$ $F/B \in Z$ для некоторого $Z \in \theta$. Если $Z = Y$, то $F \in Y$, а если $Z \neq Y$, то $F = F'B$, где $F' \simeq F/E \in Z$. По предположению для некоторого $g \in G$ $g^{-1} F' g \subseteq A$ или $\bar{g}^{-1} F/B\, \bar{g} \subseteq A/B$, где $\bar{g} = gB$. Итак, мы показали, что группа G/B удовлетворяет условиям леммы и для ее $\mathbf{X}^{\gamma-1}$-подгрупп верно заключение этой леммы. Так как $B \neq 1$ $H/B \in$ $\in \mathbf{X}^{\gamma}$ по лемме 2, то применяя индукцию получаеми $\bar{g}^{-1} H/B\, \bar{g} \subseteq A/B$ или $g^{-1} Hg \subseteq A$, $g \in G$.

б) не $B \lhd G$. В обозначениях леммы 6 группа M будет удовлетворять всем условиям нашей леммы. Пусть D ее $\mathbf{X}^{\gamma-1}$-подгруппа. Она будет такой же подгруппой и для G и по индукции

$$g_1^{-1} D g_1 \subseteq A,\ g_1 \in G,$$

т. е. D θ-разложима. Но тогда, ввиду того, что M удовлетворяет всем условиям леммы 6, получаем $g_2^{-1} D g_2 \subseteq A^*$, $g_2 \in M$. Таким образом, в группе M порядка $|M|$ для $\mathbf{X}^{\gamma-1}$-подгрупп верно (4). По индукции оно верно и для $\mathbf{X}^{\gamma}$-подгрупп группы M. Но $H \subseteq M$ и остальная часть доказательства проводится так же, как и в лемме 6. Лемма доказана.

Лемма 9. $\Sigma \cap \mathrm{Syl}\,(\cup\,\theta) \subseteq \Pi\theta$, *где через* Σ *обозначен класс циклических групп.*

Доказательство. Легко показать, что если существует бесконечная циклическая $\mathrm{Syl}\,(\cup\,\theta)$-группа, то θ составлена из одного класса. Поэтому предположим, что A — конечная циклическая группа из класса $\mathrm{Syl}\,(\cup\,\theta)$. Очевидно, достаточно показать, что если A — циклическая p-группа, p — простое, то $A \in Y$ для некоторого $Y \in \theta$. Пользуясь леммой 3, берем представление $\mathrm{Syl}\,(\cup\,\theta) = \bigcup\limits_{\gamma} \mathbf{X}^{\gamma}$, где $\mathbf{X} = \cup\,\theta$ и применяя индукцию по γ покажем. что если A — циклическая p-группа из класса $\mathbf{X}^{\gamma}$, то $A \in Y$ для некоторого $Y \in \theta$. При $\gamma = 0$ и при предельных γ все очевидно. Пусть $\gamma - 1$ существует. Тогда возможны два случая:

1) $\mathbf{X}^{\gamma} = L\mathbf{X}^{\gamma-1}$. Этот случай тривиален.

2) $\mathbf{X}^{\gamma} = E\mathbf{X}^{\gamma-1}$. Тогда $A/B \simeq C$,

где B и C — циклические p-группы из класса $\mathbf{X}^{\gamma-1}$.

По индукции B и C принадлежат некоторым классам $Y, Z \in \theta$, Но так как θ — расщепляемая система силовских классов, то $Y = Z$ и, следовательно, $A \in Y$.

Лемма 10. *Если A — θ-виландтова подгруппа группы G, H — ее $\mathrm{Syl}\,(\cup\,\theta)$-подгруппа, то из $H \subseteq N_G(A)$ следует $H \subseteq A$.*

Доказательство. Ясно, что если $A_{\mathbf{X}}$ — $\mathbf{X}$-сомножитель в A, $\mathbf{X} \in \theta$, то она максимальна как $\mathbf{X}$-подгруппа в G и $N_G(A) \subseteq N_G(A_{\mathbf{X}})$. Теперь, для доказательства леммы достаточно воспользоваться предыдущей леммой, при этом имея ввиду, что $\mathbf{X}$-элементы нормализатора максимальной $\mathbf{X}$-подгруппы лежат в этой подгруппе для всякого силовского класса $\mathbf{X}$.

Лемма 11. *θ-виландтова подгруппа θ-виландтовой группы содержит ее θ-радикал.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для всякого класса $\mathbf{X} \in \theta$ произведение $\mathbf{X}$-сомножителей θ-радикала и θ-виландтовой подгруппы принадлежит классу $\mathbf{X}$ и, следовательно, содержится в последней.

Лемма 12. *Пусть G — локально конечная группа, каждая конечная подгруппа которой содержится в классе $D_{\mathbf{X}}$ для всех $\mathbf{X} \in \theta$. Тогда, если A ее θ-виландтова подгруппа конечного индекса, то $\overline{A} = A/R_\theta(G)$ будет θ-виландтовой подгруппой группы*

$$\overline{G} = G/R_\theta(G).$$

Доказательство. Ясно, что $\overline{A}$ θ-разложима и ее максимальная $\mathbf{X}$-подгруппа имеет вид $BR_\theta(G)/R_\theta(G) = \overline{B}$, где $B\mathbf{X}$ — сомножитель в A, $\mathbf{X} \in \theta$. Покажем, что $\overline{B}$ — максимальная как $\mathbf{X}$-подгруппа и в группе $\overline{G}$. Пусть

$$\overline{B} \subseteq \overline{C} = C/R_\theta(G) \in \mathbf{X}.$$

Очевидно, можно предполагать, что

$$C = F \cdot R_\theta(G), \tag{5}$$

где F — конечная группа. Обозначим

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \mathrm{Syl}\,(\cup\theta \setminus \mathbf{X}).$$

Пусть $\widetilde{\mathbf{X}}$ — элемент в C. Тогда, по теореме об изоморфизмах

$$\{c\}/\{c\} \cap R_\theta(G) \in \mathbf{X}.$$

Но, по лемме 2 из [8], $\mathbf{X} \cap \widetilde{\mathbf{X}} = 1$. Следовательно, $c \in R_\theta(G)$, т. е. все $\widetilde{\mathbf{X}}$-элементы группы C образуют подгруппу в ней, что будет верно и для ее подгруппы F. Далее, из $F \in \mathrm{Syl}\,(\mathbf{X} \cup \widetilde{\mathbf{X}})$ следует, что для всякого $b \in F$ $\{b\}\widetilde{F}/\widetilde{F} \in \mathbf{X}$, где $\widetilde{F}$ — максимальная $\widetilde{\mathbf{X}}$-подгруппа в F. Применяя здесь лемму 4, получаем $F/\widetilde{F} \in \mathbf{X}$, так как $F/\widetilde{F} \in \widetilde{\mathbf{X}}$. Отсюда лемма Шура нам дает $F = E \cdot \widetilde{F}$, где $E \in \mathbf{X}$. Теперь, имея ввиду (5), получаем

$$C = E\widetilde{F}R_\theta(G) = ER_{\mathbf{X}}(G)\,R_{\theta'}(G),$$

где $\theta' = \theta \setminus \{\mathbf{X}\}$. Но по лемме из [9] $C \in D_{\mathbf{X}}$, так как $ER_{\mathbf{X}}(G) \in \mathbf{X}$, то для некоторого $x \in C$ $x^{-1}ER_{\mathbf{X}}(G)\,x \subseteq B$ или

$$C = x^{-1} C_x \subseteq BR_\theta(G).$$

Отсюда мы получаем $\overline{C} = \overline{B}$, т. е. $\overline{B}$ максимальна в $\overline{G}$ как $\mathbf{X}$-подгруппа. Но это вместе с θ-разложимостью $\overline{A}$ и означает, что $\overline{A}$ θ-виландтова в $\overline{G}$.

§ 4. Доказательства D-теорем

В этом параграфе приводятся доказательства теорем 1—4.

Доказательство теоремы 1. Пусть A — θ-виландтова подгруппа группы G, обладающая конечным числом сопряженных. Тогда по лемме 11 $R_\theta(G) \subseteq A$ и по лемме 1 работы Б. И. Плоткина [3] группа $A/R_\theta(G)$ конечна. По известной лемме Дизмана конечной будет и нормальный делитель

$$\overline{B} = \{g^{-1}Ag \mid g \in G\}/R_\theta(G)$$

группы $\overline{G} = G/R_\theta(G)$. Пусть H Syl $(\cup\theta)$-подгруппа в G. Тогда из конечности числа $|G : N_G(A)|$ следует конечность $|\overline{G} : N_{\overline{G}}(\overline{A})|$ а из этого — конечность индекса $|\overline{H} : N_{\overline{G}}(\overline{A}) \cap \overline{H}|$, где $\overline{H} = HR_\theta(G)/R_\theta(G)$. Но по лемме 10 $\overline{H} \cap N_{\overline{G}}(\overline{A})$ содержится в конечной группе $\overline{A}$. Следовательно, $\overline{H}$ конечна, и поэтому конечна группа $\overline{H}\overline{B}$, которая вместе с тем и θ-виландтова, согласно лемме 12. Теперь, применяя относительно группы $\overline{H}\overline{B}$ лемму 8, получаем $\overline{g}^{-1}\overline{H}\overline{g} \subseteq \overline{A}$, $\overline{g} \in \overline{H}\overline{B}$. Переход к прообразам и по существу завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2. Пусть A — θ-виландтова подгруппа группы G. Тогда по лемме 11 $R_\theta(G) \subseteq A$. По условию группа

$$A_{\mathbf{X}} R_\theta(G)/R_\theta(G) \simeq A_{\mathbf{X}}/R_{\mathbf{X}}(G),$$

где $\mathbf{X} \in \theta$, конечна. Из конечности группы $G/R_\theta(G)$ следует, что существует конечное число классов из θ, для которых не $A_{\mathbf{X}} \lhd G$. Пусть такими классами являются $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$. Тогда

$$A_{\mathbf{X}_i} = B_i R_{\mathbf{X}_i}(G), \tag{6}$$

где B_i — конечная группа, $i = 1, \cdots, n$.

Пусть C Syl $(\cup\theta)$-подгруппа в G. Ввиду $CR_\theta(G) \in$ Syl $(\cup\theta)$ можно считать, что $R_\theta(G) \subseteq C$. Предположим, что $C = C' R_\theta(G)$, где C' конечна. Обозначим еще $D = D' R_\theta(G)$, где $D' = \{C', B_1, \cdots, B_n\}$. Ясно, что D' конечна. Она и θ-виландтова. Действительно, пусть B_i' — содержащая B_i максимальная $\mathbf{X}_i$-подгруппа группы D'. Тогда учитывая (6), получаем

$$A_{\mathbf{X}_i} \subseteq B_i' R_{\mathbf{X}_i}(G), \quad B_i' R_{\mathbf{X}_i}(G) \in \mathbf{X}_i,$$

а отсюда ввиду того, что $A_{\mathbf{X}_i}$ максимальна в G как $\mathbf{X}_i$-подгруппа получаем $A_{\mathbf{X}_i} = B_i' R_{\mathbf{X}_i}(G)$, т. е. $B_i' \subseteq A_{\mathbf{X}_i}$, $i = 1, \cdots, n$. Но тогда, очевидно. $\{B'_1, \cdots, B'_n\}$ будет θ-разложимой, как подгруппа группы A. Прибавляя к ней $\mathbf{X}$-подгруппы группы D' для классов $\mathbf{X} \neq \mathbf{X}_i$, $i=1, \cdots, n$, мы получаем θ-виландтову подгруппу A' группы D'.

Теперь, по лемме 8 для некоторого $g \in D'$ $g^{-1} C' g \subseteq A'$. Отсюда

$$g^{-1} Cg = g^{-1} C' g R_0(G) \subseteq A' R_0(G) = A.$$

Это и требовалось доказать.

Следствие. Пусть локально конечная группа G обладает θ-виландтовой подгруппой конечного индекса. Тогда, если каждая конечная подгруппа G является $D_{\mathbf{X}}$-группой для всех $\mathbf{X} \in \theta$, то все ее $\mathrm{Syl}(\cup\theta)$-подгруппы θ-разложимы.

Доказательство. Не сложно показать, что в предположениях следствия θ-радикал группы G имеет в ней конечный индекс. Остается воспользоваться доказательством теоремы 2.

Для доказательства теоремы 3 нам нужна следующая лемма. Пусть $\mathbf{X}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов и

$$\Pi\theta \subseteq \mathbf{X} \subseteq \overline{\mathrm{Syl}(\cup\theta)},$$

Лемма 13. *Пусть периодическая группа G обладает такой θ-виландтовой подгруппой A, что $G = G/N_G[A]$ является θN-группой, в которой θ-виландтовы подгруппы суть максимальные $\mathbf{X}$-подгруппы. Тогда из $\overline{G} \in D_{\mathbf{X}}$ следует $G \in D_{\mathbf{X}}$.*

Доказательство. Отметим сначала, что группа

$$\overline{A} = AN_G[A]/N_G[A]$$

является θ-виландтовой подгруппой группы $\overline{G}$, как следует из включения $N_G[A] \subseteq N_G(A_{\mathbf{X}})$ и леммы 2 работы [8], согласно которой образ максимальной $\mathbf{X}$-подгруппы $A_{\mathbf{X}}$ группы A и, следовательно G, будет такой же подгруппой в $\overline{G}$ при естественном гомомофизме $G \to \overline{G}$. Теперь, если H — $\mathbf{X}$-подгруппа в G, то $\overline{H} = HN_G[A]/N_G[A]$ будет $\mathbf{X}$-группой и по условию $\overline{g}^{-1}\,\overline{H}\,\overline{g} \subseteq \overline{A}$, где $\overline{g} \in \overline{G}$. Переходя к прообразам, получаем $g^{-1} Hg \subset A \cdot N_G[A]$, т. е. если $h \in H$, то $g^{-1} hg = ab$, где $a \in A$, $b \in N_G[A]$. Таким образом, $g^{-1} hg \in N_G(A)$ и остается воспользоваться леммой 10.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что $\overline{G}$ — θ-виландтова. Обозначим $\overline{A} = AN_G[A]/N_G[A]$. Пусть $A_{\mathbf{X}}$ — максимальная $\mathbf{X}$-подгруппа в A и пусть

$$\overline{A}_{\mathbf{X}} = A_{\mathbf{X}} N_G[A]/N_G[A] \subset \overline{B} = B/N_G[A] \in \mathbf{X}. \tag{7}$$

Так как $\overline{C}$ — θN-группа и включение в (7) строгое, то для некоторого $\overline{b} \in \overline{B} \setminus \overline{A}_{\mathbf{X}}$ будет $\overline{b}^{-1}\,\overline{A}_{\mathbf{X}}\overline{b}^{1} = \overline{A}_{\mathbf{X}}$. Отсюда для каждого $a \in A_{\mathbf{X}}$

получаем $a'c = b^{-1}ab$, где $a' \in A_X$, $b \in B$, $c \in N_G[A]$. По лемме 2 из [8] можно предполагать, что $\{b\} \in \mathbf{X}$. Теперь ясно, что $b^{-1}ab \in N_G(A_X)$ и, следовательно, $b^{-1}ab \in A_X$. Таким образом, $b \in N_G(A_X)$ и снова $b \in A_X$, так как $\{b\} \in \mathbf{X}$. Полученное противоречие и показывает, что $\overline{A}_X$ максимальна в $\overline{G}$ как **X**-подгруппа, и, следовательно, $\overline{G}$ θ-виландтова.

Группа $\overline{G}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2. По этой теореме $\overline{G} \in D_{\mathrm{Syl}\,(\cup\theta)}$. С другой стороны, по следствию из теоремы 2 в $\overline{G}$ θ-виландтовы подгруппы являются максимальными Syl $(\cup\theta)$-подгруппами. К группе G можно применить лемму 13, которая нам и дает $G \in D_{\mathrm{Syl}\,(\cup\theta)}$.

Доказательство теоремы 4. По лемме 10 A содержит все Syl $(\cup\theta)$-элементы группы $N_G[A]$. Тогда группа $K = A \cap N_G[A]$ составлена из всех Syl $(\cup\theta)$-элементов группы $N_G[A]$ и характеристична в ней. Следовательно $K \lhd G$. Ясно, что группа A/K конечна и содержит конечное число сопряженных в G/K, в силу изоморфизма $A/K \simeq AN_G[A]/N_G[A]$. По лемме Дицмана $\{g^{-1}Ag/g \in G\}K/K$ будет конечным нормальным делителем в G/K. Тогда очевидно, для всякой Syl $(\cup\theta)$-подгруппы B группы G $G_1 = B\{g^{-1}Ag/g \in G\}$ — периодическая группа, так как при $|\theta| > 1$ классы из θ периодичны по лемме 1 из (8), а при $|\theta| = 1$ Syl $(\cup\theta)$ — класс периодических групп по предположению. Теперь, учитывая

$$N_{G_1}[A] = N_G[A] \cap G_1,$$

получаем

$$G_1/N_{G_1}[A] \simeq G_1N_G[A]/N_G[A].$$

Таким образом, группа G_1 удовлетворяет всем условиям теоремы 3. По этой теореме для некоторого $g \in G_1$ $g^{-1}Bg \subseteq A$. Теорема доказана.

Армянский государственный пединститут
им. Х. Абовяна

Поступила 15.III.1977

Հ. Ս. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. *D-թեորեմներ վիլանդյան խմբերի որոշ դասերում (ամփոփում)*

Հոդվածում կիրառվում է աքսիոմատիկ մեթոդ խմբերի սիլովյան տեսության մեջ։ Մտցվում են D-թեորեմներ և θ-վիլանդյան խմբի գաղափարներն ու ապացուցվում D-թեորեմներ θ-վիլանդյան խմբերի որոշ դասերում։

G. S. MIKAELIAN. *D-theorems in some classes of Vilandt groups* (summary)

The axiomatic approach to the Silov group theory is used. In terms of classes of groups the notions of D-theorem and of θ-Vilandt group is established and generalized.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Курош.* Теория групп, М., Изд. „Наука", 1967.
2. *H. Wilandt.* Zum Satz von Sylow, Math. Z., 60, 1954, 407—408; 71, 1959, 461—462.
3. *Б. И. Плоткин.* Абстрактные силовские свойства, Тр. Уральск. Электромех. ин-та инж. ж-д. трансп., 1959, вып. 2, 7—14.
4. *Б. И. Плоткин.* Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы, Избранные вопросы алгебры и логики, Сборник, посвященный памяти А. И. Мальцева, Новосибирск, 1973.
5. *Ph. Hall.* Theorems lieke Sylow, Proc. London Math. Sol., 6, 1956, 286—304.
6. *Ph. Hall.* On non-strictly simple groups, Proc. Cambr. Phil. Soc., 59, 1963, 531—553.
7. *П. А. Гольберг.* К теореме Виландта, УМН, 14, № 1, 1959, 153—156.
8. *Г. С. Микаелян.* О силовских базах бесконечных групп относительно расщепляемой системы силовских классов, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", VI, № 5, 1971, 394—405.
9. *Г. С. Микаелян.* О *Q*-картеровых подгруппах локально конечных групп, ДАН Арм.ССР, V, № 1, 1972, 7—9.
10. *А. П. Дицман, А. Г. Курош, А. И. Узков.* Sylowsche Untergruppen von unendlichen Gruppen, Мат. сб., 3., 1938, 179—185.
11. *П. А. Гольберг.* *S*-радикал и силовские базы бесконечных групп, Мат. сб., 50, 1960, 25—42.
12. *S. E. Stonehewer.* Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble groups, Proc. London Math. Soc., 14, 1964, 520—536.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Գ. Սամկո. *Ռիսի պոտենցիալների $I^\alpha(L_p)$ պատկերների նկարագրության վերաբերյալ* 329

Շ. Հ. Գրիգորյան. *Կիսահարթությունում $H^p(0<p<+\infty)$ դասի ֆունկցիաների մի հատկության մասին* 335

Բ. Թ. Բատիկյան. *1 կոչափողականություն ունեցող ենթահանրահաշիվների մասին (ոչ տեղափոխական դեպք)* 341

Ա. Ա. Վաղարշակյան. *Միակության թեորեմ սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների համար և նրա կիրառությունը մոտարկումների տեսության մեջ* . . . 345

Գ. Կ. Հովհաննիսյան. *Անկախ փոփոխական մեծություններից կազմած շարքերի վերաբերյալ* 358

Գ. Շ. Գուսեյնով. *Յակոբիի անվերջ մատրիցի ցրման խնդիրը* . . . 365

Ա. Ա. Անդրյան. *Ընդհանուր եզրային խնդիր բաղադրյալ տիպի սիստեմի համար* . 380

Ի. Պ. Միլովիդովա. *Թվային շարքի թվաբանական միջոցների հաջորդականության սահմանային կետերի բազմության վերաբերյալ* 385

Հ. Ս. Միքայելյան. *D-թեորեմներ վիլանդյան խմբերի որոշ դասերում* . . . 399

СОДЕРЖАНИЕ

С. Г. Самко. К описанию образа $I^\alpha(L_p)$ дробных интегралов (потенциалов Рисса) 329

Ш. А. Григорян. Об одном свойстве функций из $H^p(0<p<+\infty)$ в полуплоскости 335

Б. Т. Батикян. Подалгебры коразмерности 1 (некоммутативный случай) . . . 341

А. А. Вагаршакян. Теорема единственности для ограниченных аналитических функций и ее приложение в теории аппроксимации 345

Г. К. Оганесян. О рядах из независимых случайных величин 358

Г. Ш. Гусейнов. Задача рассеяния для бесконечной матрицы Якоби 365

А. А. Андрян. Общая граничная задача для систем уравнений составного типа 380

И. П. Миловидова. О множестве предельных точек последовательности средних арифметических числового ряда 385

Г. С. Микаелян. D-теоремы в некоторых классах виландтовых групп 39

CONTENTS

S. G. Samko. On the characterization of the range $I^\alpha(L_p)$ of fractional integrals (Riesz potentials) 329

Sh. A. Grigorian. On a certain property of functions from $H^p(0<p<+\infty)$ on the half-plane 335

B. T. Batikian. Subalgebras of codimension 1 (nocommutative case) 341

A. A. Vagarshakian. A uniqueness theorem for bounded anelytic functions and its application in the theory of approximation 345

G. K. Hovanessian. On series of independent random variables 358

G. Sh. Guseinov. Scattering problem for the infinite Jacobi matrix 365

A. A. Andrian. General boundary value problem for systems of composite type 380

I. P. Milovidova. On the set of limiting points for the sequence of arithmetical means numerical series 385

G. S. Mikaelian. D-theorems in some classes of Vilandt groups 399