ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuseripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference lise should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be ndicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 4, 1977 Математика

Ю. А. КУТОЯНЦ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА КОЭФФИЦИЕНТА СНОСА

Приводится пример диффузионного процесса, для которого оценка максимального правдоподобия параметра коэффициента сноса обладает следующим свойством. При одних значениях этого параметра асимптотическая дисперсия убывает с ростом времени наблюдения T как T^{-N}, при других значениях — как T^{-1}. Число $N \geqslant 1$ можно выбрать произвольным, меняя некоторый параметр задачи.

1°. Пусть задано основное вероятностное пространство $\{\Omega, \mathbf{F}, P\}$; семейство $\{\mathbf{F}_t, t \geqslant 0\}$ σ-подалгебр $\mathbf{F}$ и случайный процесс $\{X_t, \mathbf{F}_t, t \geqslant 0\}$, допускающий дифференциал

$$dX_t = \theta\,|X_t|^\alpha\,dt + dw_t,\ t \geqslant 0,\ X_0 = 1, \tag{1}$$

где $\{w_t, \mathbf{F}_t, t \geqslant 0\}$ — стандартный винеровский процесс; α — известный параметр, $0 \leqslant \alpha < 1$, а параметр $\theta \in R^1$ требуется оценить. Будем исследовать асимптотические свойства оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_T$, получаемой по наблюдениям $X^T = \{X_t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ при $T \to \infty$.

Отметим, что коэффициент сноса $\theta\,|x|^\alpha$ не удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $x = 0$, но тем не менее можно показать [1], что уравнение (1) имеет сильное решение.

Схема наблюдений (1) выбрана для иллюстрации того, как в естественной ситуации скорость убывания дисперсии оценки зависит от значения оцениваемого параметра. Представляет интерес изучение асимптотических свойств оценок, когда дисперсия имеет более чем две скорости убывания. Например, если в уравнении (1) $\theta = 1$ и исследуются свойства оценки параметра $\alpha \in (0,1)$, то, по-видимому, каждое значение α имеет свою скорость убывания дисперсии.

При $\theta < 0$ свойства $\hat{\theta}_T$ исследованы в [2].

В силу непрерывности X_t

$$P\left\{\int_0^T |X_t|^{2\alpha}\,dt < \infty\right\} = 1$$

и меры $P_\theta^{(T)}$, наведенные в пространстве $(C_{[0,\,T]}, B_{[0,\,T]})$ непрерывных на $[0, T]$ функций решениями (1), при разных $\theta \in R^1$ эквивалентны. Обозначим $P^{(T)}$ меру, отвечающую винеровскому процессу. Производная Радона-Никодима меры $P_\theta^{(T)}$ по мере $P^{(T)}$ равна [3]

$$\frac{dP_\theta^{(T)}}{dP^{(T)}}(X^T) = \exp\left\{\theta\int_0^T |X_t|^\alpha\; dX_t - \frac{1}{2}\theta^2\int_0^T |X_t|^{2\alpha}\,dt\right\}.$$

Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}_T$ имеет вид

$$\hat{\theta}_T = \int_0^T |X_t|^\alpha\; dX_t : \int_0^T |X_t|^{2\alpha}\,dt. \tag{2}$$

Положим

$$\sigma_1(\theta) = \theta^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}}(1+\alpha)(1-\alpha)^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}},$$

$$\sigma_2(\theta) = (-2\theta)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\alpha^{-1}\Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right),$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция, и введем функцию

$$\varphi_T(\theta) = \begin{cases}\sigma_1(\theta)\cdot T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}, & \theta > 0\\ \sigma_2(\theta)\cdot T^{-1}, & \theta < 0.\end{cases}$$

Сходимость последовательности функционалов $\eta_T(X^T)$ от решения уравнения (1) по распределению к гауссовой случайной величине с параметрами $(0, \sigma)$ обозначим $\mathrm{L}_\theta\{\eta_T(X^T)\} \Rightarrow N(0, \sigma)$.

2°. Теорема. *При $\theta \neq 0$ оценка $\hat{\theta}_T$ состоятельна, асимптотически эффективна и асимптотически нормальна, точнее,*

$$\mathrm{L}_\theta\{(\hat{\theta}_T - \theta)\,\varphi_T(\theta)^{-1/2}\} \Rightarrow N(0, 1).$$

Доказательство. После подстановки наблюдаемой реализации (1) в (2) получаем

$$\hat{\theta}_T = \theta + \int_0^T |X_t|^\alpha\, dw_t : \int_0^T |X_t|^{2\alpha}\,dt. \tag{3}$$

Предварительно докажем ряд лемм. Отдельно рассмотрим случаи $\theta > 0$ и $\theta < 0$.

Лемма 1. *Если $\theta > 0$, то*

$$P_0\left\{\lim_{T\to\infty} X_T\cdot T^{-\frac{1}{1-\alpha}} = [\theta(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\} = 1.$$

Доказательство имеется в книге [4], часть I, § 17.

Лемма 2. *Если $\theta > 0$, то*

$$P_0\lim_{T\to\infty} T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\int_0^T |X_t|^{2\alpha}\,dt = (1+\alpha)^{-1}\,\theta^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}. \tag{4}$$

Доказательство. По формуле Ито для функции $f(x) = x^2$ имеем

$$X_t^2 = 1 + t + \theta \int_0^t X_s |X_s|^\alpha ds + \int_0^t X_s dw_s.$$

Следовательно

$$MX_t^2 = 1 + t + \theta \int_0^t M(X_s |X_s|^\alpha) ds \leqslant 1 + t +$$

$$+ \theta \int_0^t M |X_s|^{1+\alpha} ds \leqslant 1 + t + \theta \int_0^t (MX_s^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} ds,$$

где мы воспользовались неравенством Йенсена. Введем функцию $g_t = \sup\limits_{0<s<t} MX_s^2$. Очевидно

$$g_t \leqslant 1 + t + \theta \cdot t \cdot g_t^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Поэтому, начиная с некоторого $t_0(\theta)$ для всех $t \geqslant t_0$

$$g_t \leqslant C \cdot t^{\frac{2}{1-\alpha}}, \tag{5}$$

где $C = (3\theta)^{\frac{2}{1-\alpha}}$. Введем функцию

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}, & x \geqslant 1 \\ -\dfrac{(-x)^{1+\alpha}}{1+\alpha}, & x \leqslant -1, \end{cases}$$

а на интервале $(-1, 1)$ положим $\Phi(x) = \varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = \frac{3-2\alpha+3\alpha^2}{8(1+\alpha)} + \frac{3-2\alpha}{4} x^2 - \frac{1-\alpha}{8} x^4.$$

Функция $\Phi(x)$ имеет две непрерывные производные и следовательно процесс $Y_t = \Phi(X_t)$ допускает представление

$$Y_T = \frac{1}{1+\alpha} + \theta \int_0^T \Phi'(X_t) |X_t|^\alpha dt + \frac{1}{2} \int_0^T \Phi''(X_t) dt + \int_0^T \Phi'(X_t) dw_t. \tag{6}$$

Так как при $x \geqslant 1$ имеем $y = (1+\alpha)^{-1} x^{1+\alpha}$, то по лемме 1

$$P_0 \{\lim_{T\to\infty} Y_T \cdot T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = (1+\alpha)^{-1} [\theta(1-\alpha)]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\} = 1. \tag{7}$$

К стохастическому интегралу в (6) применим неравенство Чебышева ($\delta > 0$)

$$P_\theta \left\{ T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \left| \int_0^T \Phi(X_t)\, dw_t \right| > \delta \right\} \leqslant \delta^{-2}\, T^{-2\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \int_0^T M\, \Phi(X_t)^2\, dt.$$

Пусть $\chi_{\{B\}}$ — индикатор события B и $N = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$. Используя оценку (5), получаем

$$T^{-2N} \int_0^T M\, \Phi(X_t)^2\, dt = T^{-2N} \int_0^T M\, |X_t|^{2\alpha}\, \chi\, \{|X_t| \geqslant 1\}\, dt +$$

$$+ T^{-2N} \int_0^T M\, \Phi(X_t)^2\, \chi_{\{|X_t| < 1\}}\, dt \leqslant T^{-2N} \cdot T \cdot g_T^2 + T^{-\frac{1+3\alpha}{1-\alpha}} \to 0$$

при $T \to \infty$. Поэтому

$$P_\theta - \lim_{T\to\infty} T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \int_0^T \Phi(X_t)\, dw_t = 0.$$

Аналогичные вычисления приводят к

$$P_\theta - \lim_{T\to\infty} T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \int_0^T \Phi(X_t)\, dt = 0.$$

Следовательно, после деления (6) на $T^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ с учетом (7) получаем

$$P_\theta - \lim_{T\to\infty} \cdot T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \int_0^T \Phi(X_t)\, |X_t|^\alpha\, dt = \sigma_1(\theta)^{-1}. \tag{8}$$

Введем случайный момент $\tau = \sup\{t:\ X_t \leqslant 1\}$. Так как $P_0\{\lim\limits_{T\to\infty} X_T = \infty\} = 1$, то имеем $P\{\tau < \infty\} = 1$. По определению функции $\Phi(X)$ очевидно $\Phi(x)\, |x|^\alpha - |x|^{2\alpha} = 0$ при $|x| \geqslant 1$ и $|\Phi(x)\, |x|^\alpha - |x|^{2\alpha}| < 1$ при $|x| < 1$, поэтому

$$\left| \int_0^T \Phi(x_t)\, |x_t|^\alpha\, dt - \int_0^T |X_t|^{2\alpha}\, dt \right| < \tau.$$

Теперь из (8) следует (4), так как $P_\theta\{\lim\limits_{T\to\infty} \tau \cdot T^{-N} = 0\} = 1$.

Лемма 3. *Если* $\theta > 0$, *то*

$$\mathbf{L}_\theta \left\{ T^{-\frac{1+\alpha}{2(1-\alpha)}} \int_0^T |X_t|^\alpha \, dw_t \right\} \Rightarrow N(0, \sigma_1(\theta)). \tag{9}$$

Доказательство. По лемме работы [5] условие [4] является достаточным для выполнения (9).

Теперь асимптотическая нормальность $(\hat{\theta}_T - \theta)\,\sigma_1(\theta)^{-1/2}\,T^{\frac{1}{2}N}$ следует из представления

$$(\hat{\theta}_T - \theta)\,\sigma_1(\theta)^{-1/2}\,T^{1/2\,N} = \sigma_1(\theta)^{-1}\,T^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \left(\int_0^T |X_t|^{2\alpha}\, dt \right)^{-1} \times$$

$$\times\, \sigma_1(\theta)^{1/2}\, T^{-\frac{1+\alpha}{2(1-\alpha)}} \int_0^T |X_t|^\alpha \, dw_t$$

и лемм 2 и 3.

Лемма 4. *Если* $\theta > 0$, *то*

$$P_\theta \left\{ \lim_{T \to \infty} \int_0^T |X_t|^\alpha \, dw_t : \int_0^T |X_t|^{2\alpha}\, dt = 0 \right\} = 1.$$

Доказательство. Положим

$$\eta_T = \int_0^T |X_t|^{2\alpha}\, dt - \sigma_1(\theta)^{-1}\, T^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}.$$

По лемме 2

$$P_\theta - \lim_{T \to \infty} \eta_T \cdot T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = 0.$$

Пусть $T_k \to \infty$ — подпоследовательность, для которой

$$P_\theta \{\lim_{k \to \infty} \eta_{T_k} \cdot T_k^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = 0\} = 1.$$

Тогда

$$\int_0^{T_k} |X_t|^{2\alpha}\, dt = (\sigma_1(\theta)^{-1} + \eta_{T_k} \cdot T_k^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}) \cdot T_k^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \geqslant$$

$$\geqslant (\sigma_1(\theta)^{-1} - |\eta_{T_k}| \cdot T_k^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}) \cdot T_k^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \to \infty.$$

Следовательно

$$P_\theta \left\{ \int_0^\infty |X_t|^{2\alpha}\, dt = \infty \right\} = 1.$$

Теперь утверждение леммы 4 следует из леммы 17.4 книги [3].

Представление (3) и лемма 4 устанавливают сильную состоятельность $\hat{\theta}_T$ при $\theta > 0$, т. е.

$$P_\theta \{\lim_{T \to \infty} \hat{\theta}_T = \theta\} = 1. \tag{10}$$

При $\theta < 0$ процесс X_t является эргодическим и для него справедлив усиленный закон больших чисел

$$P_\theta \left\{ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |X_t|^{2\alpha} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\alpha} d\mu_\theta (x) \right\} = 1, \tag{11}$$

где $\mu_\theta(\cdot)$ — эргодическое распределение X_t [6]. Вычисления приводят к

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X|^{2\alpha} d\mu_\theta (x) = \sigma_2 (\theta).$$

Условие (11) по лемме работы [5] обеспечивает

$$\mathbf{L}_\theta \left\{ T^{-1/2} \int_0^T |X_t|^\alpha dw_t \right\} \Rightarrow N (0, \sigma_2 (\theta)).$$

Следовательно, при $\theta < 0$

$$\mathbf{L}_\theta \{ (\hat{\theta}_T - \theta) \sigma_2 (\theta)^{-1/2} T^{1/2} \} \Rightarrow N (0, 1).$$

В силу (11) лемма 4 справедлива и при $\theta < 0$, поэтому (10) имеет место и при $\theta < 0$.

Семейство мер $\{P_\theta^{(T)}, \theta \in \bar{R}^1 \setminus \{0\}\}$ локально асимптотически нормально с нормирующими функциями, квадрат которых совпадает с асимптотической дисперсией $\hat{\theta}_T$. Поэтому оценка $\hat{\theta}_T$ асимптотически (слабо) эффективна при $T \to \infty$ [7].

Замечание. При $\theta > 0$ для любого $N \geq 1$ выбором параметра $\alpha = \dfrac{N-1}{N+1}$ получаем

$$\mathbf{L}_\theta \{(\hat{\theta}_T - \theta) \sigma_1 (\theta)^{-1/2} T^{1/2 N}\} \Rightarrow N (0, 1).$$

В заключение автор выражает глубокую признательность Р. Ш. Липцеру за критическое прочтение рукописи и ряд полезных замечаний.

Институт радиофизики и электроники
АН Армянской ССР

Поступила 15.VII.1975

ՅՈՒ. Ա. ԿՈՒՏՈՅԱՆՑ. Պատահական պրոցեսների պարամետրի գնահատականը (*ամփոփում*)

Ուսումնասիրվում է պատահական [1] պրոցեսը և դիտարկվում է θ *պարամետրի գնահատականը։*

Yu. A. KUTOYANTS. *On the estimation of the trend parameter* (summary)

The stochastic diffusion equation (1) is considered. The maximum likelihood estimate of the parameter θ is under investigation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. К. Звонкин*. Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос, Матем. сб., 93, 1, 1974, 129—149.
2. *А. Ф. Тараскин*. Об асимптотической нормальности стохастических интегралов и оценках коэффициента переноса диффузионного процесса, Математич. физика, респ. межвед. сб., Наукова думка, К., 8, 1970, 149—163.
3. *Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев*. Статистика случайных процессов, Изд. „Наука", М., 1974.
4. *И. И. Гихман, А. В. Скороход*. Стохастические дифференциальные уравнения, Наукова думка, К., 1968.
5. *Ю. А. Кутоянц*. Локальная асимптотическая нормальность для процессов диффузионного типа, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика", X, № 2, 1975, 103—112.
6. *Р. З. Хасьминский*. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, Изд. „Наука", М., 1969.
7. *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский*. Локальная асимптотическая нормальность для неодинаково распределенных наблюдений, Теория вероят. и ее примен., 20, № 2, 1975, 251—266.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 4, 1977 Математика

Р. Л. ШАХБАГЯН

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

0°. В настоящей статье обобщаются результаты работы [1] на тот случай, когда символы рассматриваемых операторов зависят от переменной x.

Для эллиптического уравнения второго порядка с переменным символом ставится краевая задача в полупространстве и строится ее регуляризатор.

1°. Обозначим через H вещественное гильбертово пространство l_2, H_1, по определению, — гильбертово пространство последовательностей вида $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ с конечной нормой $\|x\|_1=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 \sigma_k^{-2}\right)^{1/2}$, где $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — заданная последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-2} < +\infty$.

Обозначим, далее, через H_1^+ полупространство $H_1^+=\{x\in H_1,\ x_1>0\}$. В H_1^+ рассмотрим эллиптический оператор второго порядка с символом вида

$$A(x, \xi, \lambda)=\sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}(x)\,\xi_j \xi_k+\lambda^*,\quad x\in H_1^+,\ \xi\in H, \tag{1}$$

λ — комплексный параметр, принадлежащий $\mathbf{C}_+=\{\lambda\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,\lambda>0\}$, матрица $\|a_{jk}(x)\|$ предполагается симметрической, коэффициенты предполагаются бесконечно дифференцируемыми на H_1 и вещественными.

Условие эллиптичности символа (1) означает, что существует постоянная $\gamma>0$ такая, что

$$\gamma^{-1}\|\xi\|^2\leqslant \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}(x)\,\xi_j\xi_k\leqslant \gamma\|\xi\|^2 \tag{2}$$

$$\forall x\in H_1^+,\ \xi\in H\ \left(\|\xi\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2\right).$$

---

* Для простоты изложения мы опускаем члены первого порядка, а также полагаем $a_{11}=1$, $a_{1n}=0$, $n=2, 3,\cdots$.

Полагаем, далее, что символ $A(x, \xi, \lambda)$ допускает представление

$$A(x, \xi, \lambda) = A_0(\xi, \lambda) + A_1(x, \xi), \tag{3}$$

где $A_0(\xi, \lambda) = (A_2 \xi, \xi) + \lambda$ и A_2 удовлетворяет условию (2)

$$(A_1(x)\xi, \xi) \geqslant 0 \quad \forall x \in H_1^+, \ \xi \in H.$$

Пусть на гиперплоскости $x_1=0$ задан оператор первого порядка с символом

$$B(x', \xi, \lambda) = \xi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(x')\xi_k + \lambda, \tag{4}$$

где

$$x' \in H_1' = \left\{x' = (x_2, x_3, \cdots), \sum_{k=2}^{\infty} x_k^2 \sigma_k^{-2} < +\infty\right\}, \ b = \{b_2(x'), b_3(x'), \cdots\} \in H$$

$$\forall x' \in H_1', \ b_k(x'), \ k = 2, 3, \cdots$$

бесконечно дифференцируемы на H_1'.

2°. Введем функциональные пространства, связанные с изучением краевой задачи.

Пусть C_Φ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных цилиндрических функций.

Пространства $CL^s(H_1)$ и $CL^s(H_1^+)$*. Обозначим

$$\|f\|_{0,R} = \sup_{\|x_1\|<R} |f(x)|, \ 0 < R \leqslant +\infty,$$

$$\|f\|_{s,R} = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \|D^\alpha f\|_{0,R}, \ 0 < R \leqslant +\infty.$$

По определению, функция $f \in CL^s(H_1)$, если $f \in C^s$ (C^s — пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций на H_1) и для нее существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in C_\Phi$ такая, что

а) $$\sup_n \|f_n\|_{s,\infty} \leqslant M < +\infty,$$

в) $$\|f_n - f\|_{s,R} \underset{n\to\infty}{\to} 0, \ \forall R > 0.$$

Сходимость в пространстве $CL^s(H_1)$ вводится следующим образом: $f_n \in CL^s(H_1)$ сходится к f, если для нее выполняются условия а), в).

Функция $f(x)$, по определению, принадлежит пространству $CL^s(H_1^+)$, если она является сужением функции, принадлежащей пространству $CL^s(H_1)$.

3°. Классы $\Sigma_{A_0(\xi,\lambda)}^{q,s}$ и $'\Sigma_{A_0(\xi',\lambda)}^{q,s}$ вводятся точно так же, как в [1].

---

* Подробнее об этих пространствах см. [1], [2].

Напомним вкратце их определение.

Пусть функция $Q(x, \xi, \lambda)$ определена на $H_1(x) \times \{H(\xi) \setminus 0\} \times \mathbf{C}_+(\lambda)$ и $Q \in C^\infty$. Обозначим $G^N(x, z^N, \lambda) = F^{-1}_{\xi^N \to z^N} Q(x, \xi^N, \lambda)$. Предположим, что для любого целого $N > 0$ и $\lambda \in \mathbf{C}_+$ ядро $G^N(x, z^N, \lambda) \in \in L_1(H_z^N)$.

Введем обозначения

$$\|Q(x, \xi, \lambda)\|_0 = \sup_N \|G^N(x, z^N, \lambda)\|_{L_1(H_z^N)}, \tag{5}$$

$$\||Q(x, \xi, \lambda)\||_0^{(q)} = \sup_{\alpha, \beta} \|A_0^{\frac{-q+|\beta|}{2}}(\xi', \lambda) D_x^\alpha \partial_\xi^\beta Q(x, \xi, \lambda)\|_0, \tag{6}$$

где $\operatorname{Re}\lambda \geqslant a > 0$, $\alpha \leqslant \alpha_0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$,

$$\||Q(x, \xi, \lambda)\||_{s, R}^{(q)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \sup_{\substack{\|x\|_1 < R \\ \operatorname{Re}\lambda > 0}} \||D_x^\alpha Q(x, \xi, \lambda)\||_0^{(q)}.$$

Символ $Q(x, \xi, \lambda)$, по определению, принадлежит классу $\Sigma^{q, s}_{A_0(\xi', \lambda)}$ если $\forall \alpha_0, \beta_0, a$ выполняются следующие условия:

$$\||Q(x, \xi, \lambda)\||_{s, \infty}^{(q)} < +\infty \quad \text{и} \quad \forall N \; \||Q(x^N, \xi, \lambda)\||_{s, \infty}^{(q)} < +\infty, \tag{7}$$

$$\lim_{N \to \infty} \||Q(x, \xi, \lambda) - Q(x^N, \xi, \lambda)\||_{s, R}^{(q)} = 0, \quad \forall R, \; 0 < R < +\infty. \tag{8}$$

По определению, $P(x, \xi') \in {}'\Sigma^{q, s}_{A_0(\xi', \lambda)}$ $(\xi = (\xi_1, \xi'))$, если выполнены условия (7), (8), при этом преобразование Фурье берется по $(\xi')^{N-1} = (\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_N)$, а под знаком нормы в (6) стоит дифференцирование по ξ'.

Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — операторы, каноническим образом построенные по символам (1) и (4) соответственно.

Можно доказать (воспроизведя по существу доказательства теорем 3 и 4 из [1]), что операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ допускают замыкания в пространстве $CL^0(H_1^+)$ и $CL^0(H_1)$ соответственно.

4°. Обозначим через $\mathfrak{M}$ оператор, действующий следующим образом:

$$\mathfrak{M}u = \{\hat{A}\, u(x), \; x \in H_1^+, \; \hat{B}u|_{x_1=0}\}, \tag{9}$$

а область определения его замыкания — через $\Omega_{\mathfrak{M}}$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\hat{A}u(x) = f(x), \quad x \in H_1^+, \tag{10}$$

$$\hat{B}u|_{x_1=0} = g(x'), \quad x' \in H_1', \tag{11}$$

где $u \in \Omega_{\mathfrak{M}}$, $f \in CL^0(H_1^+)$, $g(x') \in CL^0(H_1')$.

По аналогии с конечномерным случаем (см. [3]), будем искать правый и левый регуляризатор поставленной задачи в виде

$$R(f, g) = P^{+}\left\{ \hat{A}^{-1}(x, \xi, \lambda)\, lf + \wedge\, \frac{e^{-S(x, \xi', \lambda)\, x_1}}{iS(0, x', \xi', \lambda) + (b(x'), \xi') + \lambda} \times \right.$$

$$\left. \times \left[g(x') - \hat{B}\, u_0|_{x_1=0} \right] \right\}, \tag{12}$$

где

$$S(x, \xi', \lambda) = \left(\sum_{j, k \geq 2} a_{jk}(x)\, \xi_j \xi_k + \lambda \right)^{1/2}, \quad (b(x'), \xi') = \sum_{k \geq 2} b_k(x')\, \xi_k,$$

P^{+} — оператор сужения функции, заданной на H_1, на полупространство H_1^{+}, lf — гладкое продолжение f на пространство H_1 ($lf \in CL^0(H_1)$), а $u_0 = \hat{A}^{-1}(x, \xi, \lambda)\, lf$.

Всюду в дальнейшем предполагается выполненным следующее условие (аналог условия Лопатинского):

$$iS(0, x', \xi', \lambda) + (b(x'), \xi') + \lambda \neq 0 \quad \forall x' \in H_1', \ \|\xi'\| + |\lambda| \neq 0. \tag{13}$$

Лемма 1. *Оператор* $P^{+} \hat{A}^{-1}(x, \xi, \lambda) \circ l$ *отображает пространство*

$$CL^2(H_1^{+}) \text{ в } CL^2(H_1^{+}) \cap \Omega_A,$$

где Ω_A — *область определения замыкания оператора* A.

Доказательство. Рассмотрим вначале оператор $P^{+} \hat{A}^{-1}$ и докажем, что он отображает $CL^2(H_1)$ в $CL^2(H_1^{+})$.

С этой целью возьмем произвольную последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in C_\Phi(H_1)$, сходящуюся к φ в $CL^2(H_1)$. Последовательность

$$\psi_N(x^N) = P^{+}\left\{ (2\pi)^{-n/2} \int_{H^n} e^{i(x^n, \xi^n)} A^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)\, \tilde{\varphi}_n(\xi^n)\, d\xi^n \right\}, \quad N \geq n$$

очевидно принадлежит $C^\infty(H_1^{+})$ и, следовательно, $CL^2(H_1^{+})$.

Дифференцируя функцию ψ_N по переменной x_k, $1 \leqslant k \leqslant N$, получим

$$\frac{\partial \psi_N}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} P^{+} \hat{A}^{-1} \varphi_n = P^{+} \hat{A}^{-1} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k} \right) +$$

$$+ P^{+} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \hat{A}^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)\, \varphi_n \right). \tag{14}$$

Поскольку символ $A^{-1} \in \Sigma_{A_0}^{-2+\varepsilon, s}$ ($\varepsilon > 0$, s — любое), то в силу определения класса $\Sigma_{A_0}^{q, s}$ имеем

$$\sum_{|\alpha| \leqslant s} \| D_x^\alpha (A^{-1}(x, \xi^n, \lambda) - A^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)) \|_0 \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0, \tag{15}$$

откуда, в частности, следует, что

$$\lim_{N\to\infty} \psi_N(x^N) = P^+ \hat{A}^{-1}(x, \xi^n, \lambda)\,\varphi_n \equiv \psi(x) \text{ в } CL^0(H_1^+).$$

В самом деле, имеем

$$|\psi_N(x^N) - \psi(x)| = |P^+ \hat{A}^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)\,\varphi_n - P^+ \hat{A}^{-1}(x, \xi^n, \lambda)\,\varphi_n| \leqslant$$
$$\leqslant K\|A^{-1}(x, \xi^n, \lambda) - A^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)\|_0 \underset{N\to\infty}{\to} 0,$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная. Отсюда следует, что

$$\|\psi_N(x^N) - \psi(x)\|_{C(S_R^+)} \underset{N\to\infty}{\to} 0 \quad \forall R > 0 \tag{16}$$

$$(S_R = \{x \in H_1,\ x_1 > 0,\ \|x\|_1 < R\}).$$

Далее мы имеем, что $\varphi_n \to \varphi$ в $CL^1(H_1)$. Поэтому, воспользовавшись (15) для $s = 1$, получим

$$\left\| P^+ \hat{A}^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_k} - P^+ \hat{A}^{-1}(x, \xi^n, \lambda)\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_k}\right\|_{C(S_R^+)} \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

и

$$\left\| P^+ \frac{\partial}{\partial x_k}\hat{A}^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)\,\varphi_n - P^+ \frac{\partial}{\partial x_k}\hat{A}^{-1}(x, \xi^n, \lambda)\,\varphi_n\right\|_{C(S_R^+)} \underset{N\to\infty}{\to} 0,$$

откуда следует, что

$$\left\|\frac{\partial\psi_N}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right\|_{C(S_R^+)} \underset{N\to\infty}{\to} 0,\ \forall R > 0,\ k = 1, 2, \cdots. \tag{17}$$

Из (16) и (17) непосредственно вытекает сходимость последовательности ψ_N к ψ в $CL^1(H_1^+)$.

Совершенно аналогично доказывается сходимость этой последовательности в $CL^2(H_1^+)$. Для этого необходимо еще раз продифференцировать соотношение (14), воспользоваться сходимостью φ_n к φ в $CL^2(H_1)$ и условием (15) для $s = 2$.

Заметим теперь, что функция $\psi(x) \equiv P^+ \hat{A}^{-1}(x, \xi^n, \lambda)\,\varphi_n$ зависит от n и, следовательно, нам необходимо совершить предельный переход по n и, тем самым, установить сходимость этой последовательности в $CL^2(H_1^+)$.

Поскольку, как уже отмечалось выше, $A^{-1} \in \sum_{A_0}^{-2+\varepsilon, s}$, то

$$P^+ \hat{A}^{-1}(x, \xi, \lambda)\,\varphi_n \to P^+ \hat{A}^{-1}(x, \xi, \lambda)\,\varphi \text{ в } CL^0(H_1^+).$$

Чтобы убедиться в сходимости этой последовательности в $CL^2(H_1^+)$ необходимо воспользоваться формулой (14), заменив в ней x^N на x.

Таким образом, доказано, что

$$P^+ \hat{A}^{-1} : CL^2(H_1) \to CL^2(H_1^+).$$

Для завершения доказательства леммы заметим, что оператор продолжения l отображает пространство $CL^2(H_1^+)$ в $CL^2(H_1)$ и, поскольку $\psi(x) \equiv \psi^{(n)}(x) \in \Omega_A$ и $\psi^{(n)} \to P^+ \hat{A}^{-1}(x, \xi, \lambda)$ в пространстве $CL^2(H_1^+)$, то

$$P^+ \hat{A}^{-1} \circ l: CL^2(H_1^+) \to CL^2_*(H_1^+) \cap \Omega_A.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Аналогично доказательству леммы 1 можно установить, что оператор $P^+ \hat{A}^{-1} \circ l$ осуществляет непрерывное отображение пространства $CL^0(H_1^+)$ в себя.

Замечание 2. Можно доказать, что оператор $P^+ \hat{A}^{-1} \circ l$ на самом деле не зависит от оператора продолжения l.

Из доказанной леммы, теоремы 3.3 из [4] и замечания 1 вытекает следующая

Теорема 1. *Для любого $\lambda \in \mathbf{C}_+$ существует счетно-аддитивная мера $\mu(x, dz, \lambda)$ в H_1 такая, что для произвольной функции $f \in CL^0(H_1^+)$ имеет место представление*

$$P^+ \hat{A}^{-1} lf(x) = P^+ \int_{H_1} lf(x-z)\, \mu(x, dz, \lambda). \tag{18}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости утверждения теоремы достаточно заметить, что $A^{-1} \in \sum_{A_0}^{-2+\varepsilon, 0} \subset \sum_{A_0}^{0, 0}$ и воспользоваться теоремой (3.3) из [4].

Перейдем к рассмотрению второго слагаемого, входящего в выражение для регуляризатора R задачи (10), (11), а именно, рассмотрим оператор

$$P^{+\wedge} \frac{e^{-S(x, \xi', \lambda) x_1}}{iS(0, x', \xi', \lambda) + (b(x'), \xi') + \lambda} [g - Bu_0|_{x_1=0}]. \tag{19}$$

Символ этого оператора обозначим через $B_1(x, \xi', \lambda)$.

Лемма 2. *Оператор $P^+ \hat{B}_1$ непрерывно отображает пространство $CL^0(H_1')$ в пространство $CL^0(H_1^+)$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}_{n=2}^{\infty}$ цилиндрических функций, $\varphi_n \in C_\Phi(H_1')$ сходится к $\varphi(x')$ в $CL^0(H_1')$.

Рассмотрим последовательность функций

$$\psi_N(x^N) = P^+ \hat{B}_1 \varphi_n = P^+ [(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_{H^{n-1}} e^{i((x')^{n-1}, (\xi')^{n-1})} \times$$

$$\times B_1(x^N, (\xi')^{n-1}, \lambda)\, \tilde{\varphi}_n((\xi')^{n-1})\, d(\xi')^{n-1} \equiv \hat{G}_\lambda \varphi_n, \quad N \geqslant n.$$

Операторы $\hat{G}_N$ являются операторами типа поверхностного потенциала.

Для $S(x, \xi', \lambda)$ имеем, в силу вышеуказанных условий, равномерную по x оценку

$$|S(x, \xi', \lambda)| \leqslant K(\|\xi'\| + \sqrt{|\lambda|}),$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная. Поскольку $\operatorname{Re} S > 0$, то при $x_1 > 0$ символ $B_1(x, \xi', \lambda) \in {}'\Sigma_{\Lambda_0}^{-1+\varepsilon, s}$ ($s \geqslant 0$ — любое, $\varepsilon > 0$).

Рассмотрим ядра операторов $\hat{G}_N$:

$$G_N(x^N, (z')^{n-1}, \lambda) = P^+ F^{-1}_{(\xi')^{n-1} \to (z')^{n-1}} B_1(x^N, (\xi')^{n-1}, \lambda).$$

Очевидно

$$\int\limits_{H^{n-1}} |G_N(x^N, (z')^{n-1}, \lambda)| \, d(z')^{n-1} \leqslant M < +\infty, \ \forall x^N \in R^N, \ n. \tag{20}$$

Далее, поскольку $\partial^{\alpha}_{\xi'} B_1(x, (\xi')^{n-1}, \lambda)$ также принадлежит пространству $L_1(H^{n-1}_{(\xi')^{n-1}})$ для любого мультииндекса α, то, в частности

$$\sup_{k \geqslant 2} \int\limits_{H^{n-1}} |z_k^2 G_N(x^N, (z')^{n-1}, \lambda)| \, d(z')^{n-1} \leqslant M < +\infty, \tag{21}$$

для любых $x^N \in R^n$, N и n.

Наконец, легко убедиться в том, что

$$\sup_{\|x\|_1 < R} \int\limits_{H^{n-1}} |G_N(x^N, (z')^{n-1}, \lambda) - G_{N+k}(x^{N+k}, (z')^{n-1}, \lambda)| \, d(z')^{n-1} \underset{k,\, N \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{22}$$

Это утверждение следует из условия, что символы класса ${}'\Sigma_{\Lambda_0}^{q, s}$ „слабо" зависят от далеких переменных.

Из условий (20)—(22) вытекает сходимость последовательности $\{\psi_N(x^N)\}$ при $N \to \infty$. Обозначим ее предел через $\psi^{(n)}(x)$:

$$\psi^{(n)}(x) = \lim_{N \to \infty} \psi_N(x^N).$$

Устремляя теперь n к ∞, получим, что

$$\lim_{n \to \infty} \psi^{(n)}(x) = P^+ \hat{B}_1(x, \xi', \lambda) \varphi$$

(предел понимается в смысле пространства $CL^0(H_1^+)$.

Лемма доказана.

Замечание 3. Условия (20)—(22) обеспечивают существование семейства мер $\mu(x, dz', \lambda)$, определенных на H_1'.

5°. В этом пункте будет доказан основной результат настоящей статьи, а именно

Теорема 2. *Пусть операторы* $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *с символами* (1) *и* (4) *удовлетворяют условиям* (2), (3) *и* (13). *Тогда, при достаточно больших* λ, *оператор* R, *задаваемый формулой* (12), *является двусторонним регуляризатором задачи* (10), (11), *точнее имеет место представление*

$$\mathfrak{M} \circ R = E + T, \text{ где } \|T\|_{C(H_1^+)} < 1 \tag{23}$$

и

$$R \circ \mathfrak{M} = E + T_1, \text{ где } \|T_1\|_{C(H_1^+)} < 1. \tag{24}$$

Доказательство теоремы основано на формуле композиции, установленной в [3] для псевдодифференциальных операторов с символами, принадлежащими классам $\sum_{A_0}^{q,s}$ и $'\sum_{A_0}^{q,s}$, а именно (см. [2], теорема 2.3, а также [4], теорема 4.1) имеет место

Теорема 3. *Пусть* $Q_1(x, \xi, \lambda) \in \sum_{A_0}^{q_1, s}$ *и* $Q_2(x, \xi, \lambda) \in \sum_{A_0}^{q_2, l}$, *где* l *достаточно велико. Тогда оператор* $\hat{Q} = \hat{Q}_1 \circ \hat{Q}_2$ *порождается символом* $Q(x, \xi, \lambda)$, *принадлежащем классу* $\sum_{A_0}^{q,s}$, *где* $q = q_1 + q_2$, *при этом имеет место разложение*

$$Q(x, \xi, \lambda) = \sum_{|\alpha| < r} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha Q_1(x, \xi, \lambda) D_x^\alpha Q_2(x, \xi, \lambda) + Q_3(x, \xi, \lambda), \tag{25}$$

где остаточный член $Q_3(x, \xi, \lambda)$ *принадлежит классу* $\sum_{A_0}^{q_3, s}$ *для любого* $q_3 > q_1 + q_2 - r$.

Замечание 4. Формула (25) остается справедливой и в том случае ([2], теорема 2.4), когда $Q_1(x, \xi, \lambda) \in {}'\sum_{A_0}^{q_1, s}$,

$$Q_2(x, \xi', \lambda) = S^{q_2}(x, \xi', \lambda) \quad (S^{q_2} \in {}'\sum_{A_0}^{q_2+s, l}).$$

Заметим также, что эта формула верна и в случае, когда $Q_2 = \xi_1^2 + S^2$.

Доказательство теоремы 2. Ограничимся доказательством утверждения (23), поскольку (24) проверяется аналогично.

Пусть вначале $f \in CL^2(H_1^+)$. В силу леммы 1 $P^+ \hat{A}^{-1} l f \in CL^2(H_1^+)$.

Рассмотрим композицию $\hat{A} \circ P^+ \hat{A}^{-1} l f$. Ввиду того, что $\hat{A}$ — дифференциальный оператор второго порядка, то в силу формулы композиции (25), имеем представление

$$\hat{A} \circ P^+ (\hat{A}^{-1} l f) = P^+ (\hat{A} \circ \hat{A}^{-1} l f) = P^+ (E + \hat{C}_{-1} + \hat{C}_{-2}) l f, \tag{26}$$

где

$$C_{-i} = \sum_{|\alpha| = i} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha A(x, \xi, \lambda) D_x^\alpha A^{-1}(x, \xi, \lambda) \quad (i = 1, 2). \tag{27}$$

Легко проверяется, что символы C_{-i}, $i=1, 2$ принадлежат классам $\sum_{A_0}^{-i+\varepsilon, s}$. Действительно, $\frac{\partial A(x, \xi, \lambda)}{\partial \xi_k} \in \sum_{A_0}^{1+\varepsilon, s}$, $\frac{\partial A^{-1}}{\partial x_k} \in \sum_{A_0}^{-2+\varepsilon, s}$, откуда следует, что $C_{-1} \in \sum_{A_0}^{-1+\varepsilon, s}$. Аналогично устанавливается, что $C_{-2} \in \sum_{A_0}^{-2+\varepsilon, s}$.

Покажем теперь, что символы C_{-i} удовлетворяют оценке

$$\|C_{-i}(x, \xi, \lambda)\|_0 \leqslant M |\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{i}{2}+\varepsilon}, \quad i=1, 2. \tag{28}$$

Это вытекает из следующей теоремы, доказанной в работе [2]

Теорема 4 ([2], теорема 1.2). Пусть $P(x, \xi') \in {}'\sum_{A_0}^{p, s}$, тогда символ

$$Q(x, \xi, \lambda) = \frac{P(x, \xi')}{(\xi_1 + iS(x, \xi', \lambda))^k S^{\rho}(x, \xi', \lambda)} \tag{29}$$

принадлежит классу $\sum_{A_0}^{q, s}$ с $q = p - k - \rho - \varepsilon$, где $k > 0$ — целое число, а ε — произвольное положительное число. При этом справедлива оценка

$$\|A_0^{-\frac{q}{2}}(\xi', \lambda)\, Q(x, \xi, \lambda)\|_0 \leqslant M |\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{\varepsilon_1}{2}}, \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon, \ \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant a > 0. \tag{30}$$

Легко убедиться в том, что символы C_{-1} и C_{-2} представимы в виде произведения символов вида (29) и, в силу сформулированной теоремы 3, для них имеют место оценки (28).

Таким образом, для любого $f \in CL^2(H_1^+)$ имеем представление

$$\hat{A} \circ P^+ \hat{A}^{-1} lf = P^+ f + \hat{T}_2 f, \tag{31}$$

где через $\hat{T}_2$ обозначен оператор $\hat{C}_{-1} + \hat{C}_{-2}$.

В силу (28)

$$\|\hat{T}_2 f\|_{C(H_1^+)} \leqslant M |\mathrm{Re}\,\lambda|^{\varepsilon - \frac{1}{2}} \|f\|_{C(H_1^+)}, \tag{32}$$

откуда следует, что при достаточно большом $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ норма оператора $\hat{T}_2$ меньше 1.

Далее, для произвольного $f \in CL^0(H_1^+)$, необходимо взять последовательность $\{f_n\}$, $f_n \in CL^2(H_1^+)$, сходящуюся к f в $CL^0(H_1^+)$.

Для каждой функции f_n, $n=1, 2, \cdots$, неравенство (32) нами установлено, совершая в нем предельный переход, легко убедиться в его справедливости для $f \in CL^0(H_1^+)$.

Совершенно аналогично, применяя оператор $\hat{A}$ ко второму слагаемому представления (12), можно убедиться, что для него имеет место оценка, аналогичная неравенству (32) (здесь мы пользуемся тем обстоятельством, что оператор, построенный по произведению символов AB_1 суть нулевой оператор.

Используя формулу композиции, можно далее убедиться, что граничное условие (11) выполняется с точностью до оператора с малой нормой.

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР Поступила 16.VI.1976

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ. Էլիպտական խնդիր պարամետրով անվերջ թվով անկախ փոփոխականներից կախված երկրորդ կարգի հավասարումների համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում ընդհանրացվում են [1] աշխատանքում ստացված արդյունքները այն դեպքի համար, երբ դիտարկվող օպերատորների սիմվոլները կախված են x-ից։

Փոփոխական սիմվոլով երկրորդ կարգի էլիպտական տիպի հավասարման համար դրվում է եզրային խնդիր կիսատարածությունում և կառուցվում նրա ռեգուլյարիզատորը։

R. L. SHACHBAGIAN. *Elliptical problem with a parameter for the second order differential equations with infinite number of independent variables*
(summary)

The results of [1] are generalized to the case, when the symbols of the operators considered depend on x.

For the second order elliptical equation with variable symbol the boundary problem in the half space is considered and its regularizator is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Л. Шахбагян.* Краевая задача в полупространстве для эллиптических операторов второго порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика", XI, № 1, 1976, 82—96.
2. *М. И. Вишик, А. В. Марченко.* Краевые задачи для эллиптических и параболических операторов второго порядка на бесконечномерных многообразиях с краем, Матем. сб., 90, № 3, 1973, 331—371.
3. *М. С. Агранович, М. И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, XIX, вып. 3 (117), 1964, 52—161.
4. *П. М. Блехер, М. И. Вишик.* Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях, Матем. сб., 86, № 3, 1971, 446—494.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 4, 1977 Математика

Г. М. АЙРАПЕТЯН

КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И БАЗИСНОСТЬ НЕКОТОРЫХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В КЛАССАХ H_p ХАРДИ

В работах М. М. Джрбашяна, посвященных вопросам представления ядра Коши и решению интерполяционных задач в классе H_2 Харди ([1], [2]), были построены биортогональные системы, порожденные произвольной последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$, подчиненной условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2) < \infty. \tag{1}$$

С системой рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \quad (k=1,\ 2,\cdots) \tag{2}$$

и $s_k \geqslant 1$ кратность появления числа α_k в совокупности $\{\alpha_j\}_1^k$, при условии (1) ассоциируется система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ аналитических и ограниченных в круге $|z|<1$ функций, биортогональная с нею на единичной окружности.

Путем определенной модификации системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ в работе [2] была построена другая система $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, также биортогональная с системой $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$. При помощи этой новой системы М. М. Джрбашяну удалось установить результаты о существовании и явном представлении посредством системы $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ решений интерполяционной задачи вида

$$f(z)\in H_2,\ f^{(s_j-1)}(\alpha_j)=w_j \ (j=1,\ 2,\cdots) \tag{3}$$

для узлов α_j ограниченной кратности $s=\sup s_k<\infty$ и при соблюдении условия обобщенной отделимости

$$\inf_{k\geqslant 1} \prod_{\alpha_j\neq\alpha_k} \left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right| = \delta > 0. \tag{4}$$

Каждая из биортогональных систем $\{r_k(z)\}$ и $\{\Omega_k(z)\}$ не замкнута в метрике пространств Харди H_p $(1\leqslant p<\infty)$. В связи с этим М. М. Джрбашяном в работе [2] был поставлен вопрос об исследовании базисности этих систем в подпространстве $\lambda_p\{\alpha_k\}\subset H_p$ $(1<p<\infty)$ их замкнутой линейной оболочки.

В работе автора [3] была установлена базисность этих систем в подпространствах $\lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1<p<\infty)$ в том частном случае, когда все числа последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$ отличны друг от друга и удовлетворяют условию (4) отделимости Л. Карлесона [4]. В другой работе автора [5] доказывается, что условие (4) вместе с условием

$$\sup_{k\geq 1} s_k = s < \infty \tag{5}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ образовали безусловный базис в $\lambda_2\{\alpha_k\}$. Там же было доказано, что решение интерполяционной задачи (3) можно представить посредством системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ в виде

$$f(z) = \sum_1^\infty w_j\,\Omega_j(z). \tag{6}$$

Отметим, что базисность систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ в $\lambda_2\{\alpha_k\}$ при $s_k=1$ $(k=1, 2,\cdots)$ была установлена раньше в работах [6] и [7]. В связи с этим отметим также работы [8] и [9].

В настоящей статье исследуются вопросы базисности систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ в подпространствах $\lambda_p\{\alpha_k\}$, а также интерполяционная задача в пространствах H_p $(0<p<\infty)$.

Метод исследования этих задач аналогичен методу, который применял автор в работе [3]. Мы существенно опираемся на результаты и оценки статей М. М. Джрбашяна [1] и [2] в классе H_2, а также на одну оценку Ф. А. Шамояна [10] в классе H_p $(0<p<\infty)$.

В § 1 статьи даются формулировки ряда лемм и теорем, на которые мы существенно опираемся в дальнейшем. Здесь приводятся также определения функций $\Omega_k(z)$ $(k=1, 2,\cdots)$ и $\Omega_k^{(n)}(z)$ $(k=1, 2,\cdots)$, $(n=1, 2,\cdots)$, которые необходимы, когда мы рассматриваем интерполяцию в классе H_p $(0<p\leqslant 1)$.

В § 2 исследуется интерполяционная задача

$$f(z)\in H_p,\ f^{(s_j-1)}(\alpha_j) = w_j\ (j=1, 2,\cdots) \tag{7}$$

при $0<p<\infty$. В теореме 1 доказывается, что если последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям (4) и (5) (коротко это будем обозначать $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_s$), то для любой последовательности $\{w_j\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{j=1}^\infty |w_j|^p(1-|\alpha_j|^2)^{p(s_j-1)+1}<\infty, \tag{8}$$

функция

$$f(z) = \sum_1^\infty w_j\,\Omega_j(z) \tag{9}$$

при $1<p<\infty$ принадлежит классу H_p и является решением интерполяционной задачи (7). В теореме 2 этого параграфа доказывается, что если $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_s$, то функция

$$f(z)=\sum_1^\infty w_j\,\Omega_j^{(n)}(z)$$

при $2/(n+1)\leqslant p\leqslant 1$ принадлежит классу H_p и является решением интерполяционной задачи (7).

Отметим, что если $\sup\{s_k\}=s<\infty$, то условие $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_s$ также необходимо для того, чтобы интерполяционная задача (7) имела решение для произвольной последовательности $\{w_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию (8). Указанная необходимость условия $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_s$ в случае $s_k=1$ $(k=1, 2,\cdots)$ установлена в работах [11], [12], и общий случай может быть легко получен на основании этих результатов цитированных работ.

В § 3 доказывается, что условие $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_s$ необходимо и достаточно для того, чтобы системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ образовали базис в подпространствах $\lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1<p<\infty)$.

§ 1. Предварительные сведения и леммы

1. 1. (а). Пусть $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_j|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут быть и числа произвольной кратности.

Обозначим через $s_k\geqslant 1$ и $p_k(n)$ кратность появления числа α_k соответственно на отрезках $\{\alpha_j\}_1^\infty$ и $\{\alpha_j\}_1^n$. Впредь будем предполагать, что наша последовательность удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_1^\infty(1-|\alpha_k|^2)<+\infty. \tag{1.1}$$

Из этого условия очевидно следует, что при любом целом k $(1<k<\infty)$ $s_k\leqslant p_k=p_k(\infty)<\infty$.

В этом предположении нашу последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ отнесем к классу Δ_s, если

$$\sup s_k=s<+\infty \tag{1.2}$$

и при некотором δ $(0<\delta<1)$ соблюдается условие Л. Карлесона

$$\inf_{k>1}\prod_{\alpha_j\neq\alpha_k}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|=\delta. \tag{1.3}$$

(б). С последовательностью $\{\alpha_j\}_1^\infty$ ассоциируем ее функцию Бляшке

$$B(z)=\prod_{j=1}^\infty\frac{\alpha_j-z}{1-\bar{\alpha}_jz}\,\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}, \tag{1.4}$$

а также функции

$$B_n(z)=\prod_{j=1}^n\frac{\alpha_j-z}{1-\bar{\alpha}_j z}\,\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}\quad(n=1, 2,\cdots).$$

Следуя работе [1], введем в рассмотрение системы функций

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\ z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad (k=1, 2,\cdots), \tag{1.5}$$

$$\Omega_k(z)=\frac{B(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k-s_k+1-\nu}}\quad (k=1, 2,\cdots), \tag{1.6}$$

а также

$$\Omega_{n,k}(z)=\frac{B_n(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k(n)-s_k}\frac{a_{n,\nu}(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k(n)-s_k+1-\nu}}\quad (k=1, 2,\cdots, n), \tag{1.7}$$

где

$$a_\nu(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{(z-\alpha_k)^{p_k}}{B(z)}\right\}_{z=\alpha_k}\quad (\nu=0, 1, 2,\cdots), \tag{1.8}$$

$$a_{n,\nu}(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{(z-\alpha_k)^{p_k(n)}}{B_n(z)}\right\}_{z=\alpha_k}\quad (\nu=0, 1, 2,\cdots). \tag{1.9}$$

Нам необходимо рассматривать также систему функций

$$\Omega_k^{(n)}(z)=\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)^n\Omega_k(z)\ (n=1, 2,\cdots),\ (k=1, 2,\cdots). \tag{1.10}$$

Отметим, что при $n=0$ $\Omega_k^{(0)}(z)=\Omega_k(z)$, $(k=1, 2,\cdots)$.

1.2. (а). Доказательства следующих лемм не отличаются от доказательств лемм 1.2, 1.3, 1.6 работы [2].

Лемма А. *Системы функций* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_k^n(z)\}_1^\infty$ *биортогональны на окружности* $|t|=1$ *в смысле*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} r_0(t)\,\overline{\Omega_k^{(n)}}(t)\,|dt|=\delta_{k,\nu},\ (n=0, 1,\cdots). \tag{1.11}$$

Лемма Б. *Пусть* $\{w_k\}_1^m$ $(1\leqslant m<\infty)$ — *произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда регулярная и ограниченная в круге* $|z|<1$ *функция*

$$S_m(z)=\sum_{k=1}^m w_k\,\Omega_k^{(n)}(z)$$

удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$S_m^{(s_\nu-1)}(\alpha_\nu)=w_\nu\quad (1\leqslant\nu\leqslant m),\ (n=0, 1, 2,\cdots).$$

Лемма В. *Если* $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_s$, *то для коэффициентов* (1.8) *справедливы неравенства*

$$|a_\nu(\alpha_k)|\leqslant a(\delta, s)(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu},$$

где $a(\delta, s)$ — *некоторая постоянная, не зависящая от* k.

Следующая лемма доказана в работе [1] .

Лемма Г. *Для произвольных значений переменных z и ζ и для любого n $(1 \leqslant n < \infty)$ справедливо тождество*

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta} z} = \sum_{k=1}^{n} \Omega_{n,k}(z) \overline{r_k(\zeta)} + \frac{\overline{B_n(\zeta)}\, B_n(z)}{1-\bar{\zeta} z}. \tag{1.12}$$

Приведем теперь неравенство из работы [10] в его эквивалентной формулировке.

Теорема А. *Для любой функции $f(z) \in H_p$ $(0 < p < \infty)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^p (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1} \leqslant C \|f\|_p^p, \tag{1.13}$$

где C не зависит от f и $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_s$.

(б). Обозначим через $H_p(D^{(+)})$ класс голоморфных в $D^{(+)} = \{z; |z| < 1\}$ функций, принадлежащих известному классу H_p Харди, а через $H_p(D^{(-)})$ — класс голоморфных в $D^{(-)} = \{z; |z| > 1\}$ функций, представимых в виде

$$F(z) = \tilde{F}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^{(-)},$$

где $\tilde{F}(z) \in H_p(D^{(+)})$.

Для каждой функции $f(z) \in H_p(D^{(+)}) (1 \leqslant p < \infty)$ рассмотрим последовательность функций

$$R_n(f; z) = \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D^{(+)}, \tag{1.14}$$

а также функцию

$$R(f; z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D^{(+)}. \tag{1.15}$$

Справедлива следующая (см. [3])

Лемма Д. *Пусть $f(z) \in H_p(D^{(+)})$ $(1 < p < \infty)$ — произвольная функция. Тогда*

1° $R_n(f; z) \in H_p(D^{(+)})$, $(n = 1, 2, \cdots)$, $R(f; z) \in H_p(D^{(+)})$,

2° $\lim\limits_{n \to \infty} \|R_n(f; z) - R(f; z)\|_p = 0$.

(в). Введем в рассмотрение следующий класс функций (см. [13], [14]).

Обозначим через $\lambda_p\{\alpha_k\}$ класс функций, определенных вне точек окружности $|z| = 1$ и удовлетворяющих условиям

1. $f(z) \in H_p(D^{(+)})$, $z \in D^{(+)}$,

2. $f(z) = B(z)\tilde{f}(z)$, $\tilde{f}(\infty) = 0$, $\tilde{f}(z) \in H_p(D^{(-)})$, $z \in D^{(-)}$.

3. Угловые граничные значения функций $f(z)$ изнутри и извне окружности $|z| = 1$ почти всюду совпадают.

Следующие леммы доказаны в работах [14] и [3].

Лемма Е. *Для того чтобы функция* $f(z) \in H_p(D^{(+)})(1 < p < \infty)$ *принадлежала классу* $\lambda_p\{\alpha_k\}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^{(+)}.$$

Лемма К. *Любая функция* $f(z) \in H_p(D^{(+)})$ $(1 < p < \infty)$ *представима в виде*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где

$$f_1(z) \in \lambda_p\{\alpha_k\}, \quad f_2(z) = B(z) f_2^*(z),$$

$$f_2^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} \in H_p(D^{(+)}).$$

§ 2. Интерполяция с кратными узлами в классах H_p $(0 < p < \infty)$

2.1. (а). Пусть $\{w_k\}_1^\infty$ — некоторая последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_1^\infty |w_k|^p (1 - |\alpha_k|^2)^{p(s_k - 1) + 1} < \infty. \tag{2.1}$$

Если $1 < p < \infty$, то справедлива слелующая

Теорема 1. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_s$, *то функция*

$$f(z) = \sum_1^\infty w_k \Omega_k(z) \tag{2.2}$$

принадлежит классу $H_p(D^{(+)})$ *и для нее выполняются интерполяционные условия*

$$f^{(s_k - 1)}(\alpha_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$S_n(z) = \sum_1^n w_k \Omega_k(z). \tag{2.4}$$

Пользуясь теоремой Хана-Банаха, можем утверждать, что

$$\|S_m(z) - S_n(z)\|_p = \sup_{\substack{g \in L_q \\ \|g\| \leqslant 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} [\overline{S_m(t)} - \overline{S_n(t)}]\, g(t)\, |dt| \right|, \tag{2.5}$$

где $q = p/(p-1)$. Но по (2.4) имеем

$$\|S_m - S_n\|_p = \sup_{\substack{g \in L_q \\ \|g\| \leqslant 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} g(\zeta) \sum_{n+1}^{m} \overline{w_k}\, \overline{\Omega_k(\zeta)} |d\zeta| \right| =$$

$$= \sup \left| \sum_{k=n+1}^{m} \overline{w_k} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} g(\zeta) \overline{\Omega_k(\zeta)}\, |d\zeta| \right| =$$

$$= \sup \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\overline{w_k}}{(s_k-1)} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{\overline{a_\nu(\alpha_k)}}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{g(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{|d\zeta|}{(\overline{\zeta} - \overline{\alpha_k})^{p_k - s_k + 1 - \nu}} \right| =$$

$$= \sup \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{w_k}{(s_k-\nu)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{\overline{a_\nu(\alpha_k)}}{(p_k - s_k - \nu)!}\, g_*^{(p_k - s_k - \nu)}(\overline{\alpha_k}) \right|,$$

где

$$g_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^{-1} g(1/\zeta)}{B(1/\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H_q D^{(+)}). \tag{2.6}$$

Учитывая теперь лемму B и теорему Рисса [15], будем иметь

$$|S_n - S_m| \leqslant a(\delta, s) \sup_{\substack{g_* \in H_q \\ \|g_*\| \leqslant A_q}} \left| \sum_{k=n+1}^{m} \overline{w}_k \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} (1 - |\alpha_k|^2)^{p_k - \nu} \frac{1}{(p_k - s_k - \nu)!} \times \right.$$

$$\left. \times\, g_*^{(p_k - s_k - \nu)}(\overline{\alpha}_k) \right| \leqslant a(\delta, s) \sup \sum_{k=n+1}^{m} |\overline{w}_k| (1 - |\alpha_k|^2)^{s_k - 1 + 1/p} \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} \times$$

$$\times (1 - |\alpha_k|^2)^{p_k - s_k - \nu + 1/q}\; |g_*^{(p_k - s_k - \nu)}(\alpha_k)| \leqslant a(\delta, s) \left\{ \sum_{k=n+1}^{m} \times \right.$$

$$\left. \times |\overline{w}_k|^p (1 - |\alpha_k|^2)^{p(s_k - 1) + 1} \right\}^{1/p} \sup \left\{ \sum_{k=n+1}^{m} \left| \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} (1 - |\alpha_k|^2)^{p_k - s_k - \nu + 1/q} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, \|g_*^{(p_k - s_k - \nu)}(\overline{\alpha}_k)\| \right|^q \right\}^{1/q}.$$

Но замечая, что

$$\left| \sum_{k=0}^{p_k - s_k} (1 - |\alpha_k|^2)^{p_k - \nu - s_k + 1/q} |g_*^{(p_k - s_k - \nu)}(\overline{\alpha}_k)| \right|^q \leqslant s^{q/p} \sum_{k=0}^{p_k - s_k} \times$$

$$\times (1 - |\alpha_k|^2)^{q(p_k - s_k - \nu) + 1} \left| g_*^{(p_k - s_k - \nu)}(\overline{\alpha}_k) \right|^q \leqslant$$

$$\leqslant s^{q/p} \sum_{\nu=1}^{s} (1-|\alpha_k|^2)^{q(j-1)+1} \, |g_{\nu}^{(j-1)}(\alpha_k)|^q,$$

из теоремы А получаем

$$\|S_n - S_m\| \leqslant a(\delta, s)\, s^{1/p} \left\{ \sum_{k=n+1}^{m} |\bar{w}_k|^p (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1} \right\}^{1/p} \times$$

$$\times \sup \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=n+1}^{m} (1-|\alpha_k|^2)^{q(j-1)+1} \, |g_{\nu}^{(j-1)}(\bar{\alpha}_k)|^q \leqslant A_q C_s^{1+1/p} a(\delta, s) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=n+1}^{m} |w_k|^p (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1} \right\}^{1/p}$$

и, тем самым первое, утверждение теоремы доказано.

Теперь (2.3) немедленно следует из леммы Б.

Теорема 2. *Если $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_s$ и при фиксированном p, $2/n+1 \leqslant p \leqslant 1$, последовательность $\{w_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию* (2.1), *то ряд*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \Omega_k^{(n)}(z) \tag{2.7}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри круга $|z| < 1$ и определяет функцию $f(z) \in H_p(D^{(+)})$, которая удовлетворяет следующим интерполяционным данным:

$$f^{(s_j-1)}(\alpha_j) = w_j \ (j=1, 2, \cdots). \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть F—некоторое замкнутое множество из $|z| < 1$. Обозначая

$$k_0 = \max_{\alpha_k \in F} \{k\},$$

будем иметь $k_0 < \infty$, и поэтому

$$\inf_{\substack{k > k_0+1 \\ z \in F}} |z-\alpha_k|^n = \rho^s > 0 \ (n=1, 2, \cdots, s),$$

где ρ есть расстояние между множествами F и $\bar{E} = \overline{\{\alpha_k\}}_{k_0+1}^\infty$. Но тогда из леммы В и (2.10) следует, что

$$|w_k \Omega_k^{(n)}(z)| = \left| w_k \frac{B(z)}{(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\bar{\alpha}_k z} \right)^n \frac{a_\nu(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k-s_k+1-\nu}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Aa(\delta, s)}{\rho^s} |w_k| \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} (1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu+n} <$$

$$< \frac{A\cdot s\cdot a\,(\delta,\, s)}{\rho^{k_s}}\, |w_k|\, (1-|\alpha_k|^2)^{s_k+n},$$

где $A = \max |B(z)/(1-|z|)|$, $z \in F$.

Но если $2/n+1 \leqslant p \leqslant 1$, то применяя неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_k^p \quad (a_k \geqslant 0), \tag{2.9}$$

получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|\, (1-|\alpha_k|^2)^{s_k+n}\right) <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p\, (1-|\alpha_k|^2)^{ps_k+pn} < \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p\, (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1},$$

тем самым равномерная и абсолютная сходимость ряда доказана.

Обозначим через $M_p(r, f)$ величину

$$M_p(r, f) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta \tag{2.10}$$

и докажем, что

$$\sup_{0<r<1} M_p(r, f) < \infty.$$

Учитывая (2.9), для каждой функции $\Omega_k^{(n)}(z)$ $(k=1, 2, \cdots)$ будем иметь

$$M_p(r, \Omega_k^{(n)}) \leqslant \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)|^p\, (1-|\alpha_k|^2)^{p\cdot n} \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{(1-z\bar{\alpha}_k)^{p(p_k-s_k+n+1-\nu)}} \leqslant$$

$$\leqslant a^p(\delta, s) \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} (1-|\alpha_k|^2)^{p(p_k-\nu+n)} (1-|\alpha_k|^2)^{-p(p_k-s_k+n+1-\nu)+1} =$$

$$= a^p(\delta, s) \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)} = s a^p(\delta, s)(1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1}$$

и, тем самым, для любого $0 \leqslant r < 1$ имеем

$$M_p(r, f) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p\, M_p(r, \Omega_k^{(n)}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p\, (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1},$$

так что функция $f(z)$ из (2.7) принадлежит классу H_p. Утверждение (2.8) следует из леммы Б.

§ 3. О базисности систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$

3.1. (а). Лемма 3.1. *Системы функций* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *принадлежат классу* $\lambda_p\{\alpha_k\}$.

Действительно, применяя лемму E, имеем

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{r_k(z)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z} = (s_k-1)! \int\limits_{|t|=1} \frac{t^{s_k-1}}{(1-t\bar{\alpha}_k)^{s_k}}\,\frac{1}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z} = 0,$$

так как

$$\frac{t^{s_k-1}}{(1-t\bar{\alpha}_k)^{s_k}}\cdot\frac{1}{B(t)(t-z)} = o\left(|t|^{-2}\right) \text{ при } t\to\infty.$$

Аналогично доказывается, что $\Omega_k(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$.

Лемма 3.2. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (1.2). *Тогда для каждого* k $(k=1, 2,\cdots)$

$$C_1(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-s_k} \leqslant \|r_k\|_p \leqslant C_2(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-s_k}, \tag{3.1}$$

где $0<C_1<C_2<\infty$ — *постоянные, не зависящие от* k.

Доказательство. Для каждой функции $r_k(z)$ $(k=1, 2,\cdots)$ при $s_k>1$ имеем

$$\|r_k\|_p = \frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|1-\zeta\bar{\alpha}_k|^{ps_k-2}}\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{2^{ps_k-2}}{(1-\zeta\bar{\alpha}_k|^2(1-|\alpha_k|^2)^{ps_k-2}}\right\}^{1/p} \leqslant C_2(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-s_k},$$

где $C_2 = s!\,2^{ps-2}$. Но при $s_k=1$

$$\|r_k(z)\| = \sup_{\substack{g\in L_q\\ \|g\|\leqslant 1}}\left|\int\frac{g(\zeta)}{\zeta-\alpha_k}\,d\zeta\right| \leqslant C\|g\|(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-1} \leqslant C(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-1},$$

где C не зависит от k. Тем самым, второе неравенство леммы доказано Обозначая теперь $\varphi_k=\arg\bar{\alpha}_k$, оценим величину $\|r_k\|_p$ снизу. Имеем

$$\|r_k\|_p \geqslant \frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{(\vartheta-\varphi_k)<1-|\alpha_k|^2}\frac{d\vartheta}{\left[(1-|\alpha_k|^2)^2+4\sin^2\dfrac{\vartheta-\varphi_k}{2}\right]^{\frac{ps_k}{2}}}\right\}^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant 5^{-s_k}\,\frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\vartheta-\varphi_k|<1-|\alpha_k|^2}\frac{d\vartheta}{(1-|\alpha_k|^2)^{ps_k}}\right\}^{1/p} > C_1(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-s_k}.$$

(б). Лемма 3.3. *Если кратность узлов* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ *не ограничена, то есть*

$$\sup_{k>1} s_k = \infty,$$

то системы функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *не являются базисом в* $\lambda_p\{\alpha_k\}\cdot(1<p<\infty)$.

Доказательство. Обозначая опять $\varphi_k = \arg\bar{\alpha}_k$, будем иметь

$$\|r_k\|_p = \frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{(1-\zeta\bar{\alpha}_k|^{ps_k}}\right\}^{1/p} =$$

$$= \frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{|1-|\alpha_k|\,e^{i(\vartheta-\varphi_k)}|^{ps_k}}\right\}^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\vartheta-\varphi_k|<1-|\alpha_k|}\frac{d\vartheta}{\left[(1-|\alpha_k|^2)^2+4|\alpha_k|\sin^2\frac{\vartheta-\varphi_k}{2}\right]^{ps_k}}\right\}^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\vartheta-\varphi_k|<1-|\alpha_k|}\frac{d\vartheta}{[(1-|\alpha_k|^2)^{ps_k}\cdot 2^{\frac{ps_k}{2}}}\right\}^{1/p} = \frac{(s_k-1)!}{2^{\frac{s_k}{2}}(1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1/p}}, \tag{3.2}$$

теперь предполагая, что $\{r_k(z)\}_1^\infty$ является базисом в $\lambda_p\{\alpha_k\}$, по теореме Банаха [16] должны иметь

$$\|r_k\|_p\cdot\|\Omega_k\| < C, \tag{3.3}$$

где C не зависит от k и

$$\|\Omega_k\| = \sup_{\substack{f\in\lambda_p\{\alpha_k\}\\ \|f\|<1}}\left|\frac{1}{2\pi}\int f(\zeta)\,\overline{\Omega_k(\zeta)}\,|d\zeta|\right|.$$

Учитывая теорему Рисса [15] и лемму K, получим

$$\|\Omega_k\|_q = \sup_{\substack{f\in L_p\\ \|f\|<1}}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}f(\zeta)\,\overline{\Omega_k(\zeta)}\,|d\zeta|\right| =$$

$$= \sup_{\substack{f\in H_p\\ \|f\|<A_p}}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}f(\zeta)\,\overline{\Omega_k(\zeta)}\,|d\zeta|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{f\in\lambda_p\{\alpha_k\}\\ \|f\|<A_p(1+A_p)}}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}f(\zeta)\,\overline{\Omega_k(\zeta)}\,|d\zeta|\right|,$$

где A_p не зависит от k и $1/p+1/q=1$. Так что из (3.3) следует

$$\|r_k\|_p\,\|\Omega_k\|_q < C. \tag{3.4}$$

Но учитывая, что при $s_k = p_k$

$$\Omega_k(z) = \frac{(1-|\alpha_k|^2)^{p_k}}{(p_k-1)!}\,\frac{1}{\prod\limits_{\alpha_j\neq\alpha_k}\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\,\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}}\,\frac{B(z)}{z-\alpha_k}, \tag{3.5}$$

как и в лемме 3.2 будем иметь (здесь $|\alpha_k|>1/2$)

$$\|\Omega_k\|_q > \frac{(p_k-1)!}{5}(1-|\alpha_k|)^{-1/p+p_k} > \frac{(p_k-1)!}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{p_k}(1-|\alpha_k|)^{-1/p+p_k}. \quad (3.6)$$

Теперь из (3.2) и (3.6) для упомянутых k получим

$$\|r_k\|_p\,\|\Omega_k\|_q \geqslant C_0\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{p_k}{2}},$$

что противоречит (3.4).

Лемма 3.4. *Если $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ и $f^{(s_k-1)}(\alpha_k)=0$ $(k=1, 2,\cdots)$, то $f(z)\equiv 0$.*

Доказательство. Для любой функции $f(z)\in H_p$ имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{1-\overline{\zeta}\, z}\,|d\zeta|.$$

Применяя лемму Г, получим

$$f(z)=\frac{B_n(z)}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

остается применить леммы Д и Е.

3.2(а). Для любой функции $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ введем в рассмотрение ряд

$$\sum_1^\infty c_k(f)\, r_k(z), \quad (3.7)$$

где

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\,\overline{\Omega_k(\zeta)}\,|d\zeta| \ (k=1, 2,\cdots). \quad (3.8)$$

Из леммы В легко получить, что

$$|c_k(f)|\leqslant a(\delta, s)\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu}\,|g_*^{(p_k-\nu-s_k)}(\overline{\alpha}_k)| \ (k=1, 2,\cdots), \quad (3.9)$$

где $g_*(z)$ определяется по формуле (2.7).

Лемма 3.5. *Если $f\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ и $c_k(f)=0$ $(k=1, 2,\cdots)$, то $f(z)\equiv 0$.*

Доказательство. Согласно определению класса $\lambda_p\{\alpha_k\}$ на окружности $|t|=1$ имеем

$$f(t)=\frac{B(t)}{t}\tilde{f}\left(\frac{1}{t}\right), \text{ где } \tilde{f}(z)\in H_p(D^{(+)}).$$

Применяя лемму Е, получаем

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{\overline{f(t)}}{\overline{B}(t)} \frac{dt}{t-z} = \int\limits_{|t|=1} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^{(+)},$$

где

$$\overline{B}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{\alpha}_k - z}{1 - \alpha_k z} \frac{|\alpha_k|}{\overline{\alpha}_k},$$

так что $\overline{f}(z) \in \lambda_p \{\overline{\alpha}_k\}$. Теперъ согласно условию леммы имеем

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} f \overline{\Omega}_k |dt| =$$

$$= \frac{1}{(s_k - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} \frac{a_\nu(\alpha_k)}{(p_k - s_k - \nu)!} \overline{f}^{(p_k - s_k - \nu)}(\overline{\alpha}_k) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots). \qquad (3.10)$$

Учитывая, что $a_0(\alpha_k) \neq 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$, из (3.10) заключаем, что $\overline{f}^{s_k - 1}(\overline{\alpha}_k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$. Так что в силу леммы 3.4 будем иметь

$\overline{f}(z) \equiv 0$ и, тем самым, лемма доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы система* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *образовала базис в* $\lambda_p \{\alpha_k\}$ $(1 < p < \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_s$.

Доказательство. Для каждой функции $f(z) \in \lambda_p \{\alpha_k\}$ рассмотрим последовательность функций

$$S_m(z) = \sum_{1}^{m} c_k(f) r_k(z), \qquad (3.11)$$

где $c_k(f)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ определяется по формуле (3.7). По теореме Хана-Банаха имеем

$$\|S_m - S_n\| = \sup_{\substack{g \in L_q \\ \|g\| \le 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} [\overline{S_m(t)} - \overline{S_n(t)}] \, g(t) \, |dt| \right| =$$

$$= \sup \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{n+1}^{m} (s_k - 1)! \, c_k(f) \int\limits_{|t|=1} g(t) \frac{dt}{(t - \alpha_k)^{s_k}} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{G \in H_q \\ \|G\| \le A_q}} \left| \sum_{n+1}^{m} c_k(f) \, G^{(s_k - 1)}(\alpha_k) \right|,$$

где

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{g(t)}{t-z} dt \in H_q(D^{(+)}).$$

Учитывая теперь оценки (3.9), как и в заключительной части теоремы 1 докажем, что последовательность (3.11) фундаментальна в $\lambda_p\{\alpha_k\}$. Но так как $\lambda_p\{\alpha_k\}$ — замкнутое подпространство класса $H_p(D^{(+)})$, то заключаем, что

$$\left\|\sum_1^n c_k(f)\, r_k(z) - f_0(z)\right\|_p \to 0, \quad f_0(z) \in \lambda_p\{\alpha_k\}. \tag{3.12}$$

Но тогда $c_k(f_0) = c_k(f)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ и по лемме 3.5 $f(z) \equiv f_0(z)$. Тем самым, достаточность теоремы доказана.

Теперь предположим, что $\{r_k(z)\}_1^\infty$ является базисом в $\lambda_p\{\alpha_k\}$. Тогда как и в лемме 3.3 будем иметь

$$\|\Omega_k\|_q \leqslant C\|r_k\|_p^{-1},$$

где C $(0 < C < \infty)$ не зависит от k. Применяя опять это неравенство для тех k, для которых $s_k = p_k$, согласно лемме 3.2 и (3.5) имеем

$$\frac{1}{(p_k-1)!}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{\alpha_j\neq\alpha_k}\left|\dfrac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|} < C,$$

так что

$$\prod_{\alpha_j\neq\alpha_k}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right| > \frac{1}{Cs!}.$$

Теперь, учитывая лемму 3.3, завершаем доказательство теоремы.

(в). Теорема 4. *Для того чтобы система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ образовала базис в $\lambda_p\{\alpha_k\}$, необходимо и достаточно чтобы $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_s$.*

Доказательство. Необходимость условия доказывается так же как и в теореме 3.

Рассмотрим последовательность функций

$$S_m(z) = \sum_1^m f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\,\Omega_k(z) \quad (m = 1, 2, \cdots). \tag{3.13}$$

Так как по теореме А для точек α_k $(k=1, 2, \cdots)$ выполняется неравенство

$$\sum_1^\infty |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^p (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1} < C\|f\|_p,$$

то тем же способом, как и в теореме 1 доказывается фундаментальность последовательности (3.13). Так как каждая функция $\Omega_k(z)$ принадлежит классу $\lambda_p\{\alpha_k\}$, то предел последовательности (3.13) $\tilde{f}(z)$ также принадлежит классу $\lambda_p\{\alpha_k\}$ и выполняются условия

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \tilde{f}^{(s_k-1)}(\alpha_k) \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Учитывая лемму 3.4, завершаем доказательство теоремы.

В заключение выражаю благодарность профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 13.XII.1976

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Բազմապատիկ ինտերպոլյացիա և ռացիոնալ ֆունկցիաների մի բիօրթոգոնալ սիստեմի բազիսությունը Հարդիի H_p դասերում *(ամփոփում)*

Հոդվածում բերվում է H_p $(0< p <\infty)$ *տարածություններում բազմապատիկ ինտերպոլյացիայի խնդրի լուծումը։ Գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի հետևյալ ֆունկցիաների սիստեմը*

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad (k=1,\ 2,\cdots)$$

(որտեղ $|\alpha_k|<1$ $(k=1, 2, \cdots)$ *և* s_k*-ն* α_k*-ի հանդես գալու կարգն է* $\{\alpha_j\}_1^k$*-ում), ինչպես նաև նրա հետ բիօրթոգոնալ* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *սիստեմը կազմեն բազիս իրենց գծային թաղանթի փակման մեջ* H_p $(1< p <\infty)$*-ում։*

H. M. HAIRAPETIAN. *The multiple interpolation and the basisness of some systems of rational functions in Hardy H_p classes* (summary)

The multiple interpolation problem on the classes H_p $(0<p<\infty)$ is solved. The nacessary and sufficient conditions for the system of functions

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad (k=1,\ 2,\cdots)$$

(where $|\alpha_k|<1$ $(k=1, 2, \cdots)$, s_k is the multiplisity of α_k in $\{\alpha_j\}_1^k$) and its biorthogonal system $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ to form basae for their linear hulle in H_p $(1<p<\infty)$ are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
2. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
3. *Г. М. Айрапетян.* О базисе рациональных функций в подпространствах Харди H_p $(1<p<\infty)$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем, VIII, № 6, 1973, 429—450.
4. *L. Carleson.* Interpolation by boynded analytic function and the Corona problem, Ann Math., 76, № 3, 1962.
5. *Г. М. Айрапетян.* О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., X, № 2, 1975, 133—152.
6. *В. Э. Кацнельсон.* Об условии базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов, Функциональный анализ и его приложения, I., вып. 2, 1967, 39—51.
7. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.* Базисы из собственных векторов вполне неунитарных сжатий и характеристическая функция, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 1, 1970, 90—133.

8. *Ю. Ф. Карабейник.* О безусловных базисах в гильбертовом пространстве, Мат. заметки, 19, № 2, 1976, 259—267.
9. *В. И. Васючин.* Базисы из рациональных функций и кратная интерполяция. Записки научных семинаров ЛОМИ, 1976, 56.
10. *Ф. А. Шамоян.* Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в пространствах H_p, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XI, № 2, 1976, 124—131.
11. *H. S. Shapiro, A. L. Shields.* On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
12. *В. Кабайла.* Интерполяционные последовательности для классов H_p в случае $p<1$, Lict. matem. rink., III, 1, 1963, 141—147.
13. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IV, № 1, 1969, 9—31.
14. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967.
15. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
16. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа, М., 1965.

Примечание при корректуре

Поскольку при $\sup\limits_{k>1} \{s_k\} = +\infty$ система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не является базисом в $\lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1<p<\infty)$, то в силу одной теоремы из работы С. А. Виноградова „Базисы из показательных функций и свободная интерполяция в банаховых пространствах с L^p-нормой“ (ЛОМИ, т. 65, VII, 1976), множество $\{(f^{(s_k-1)}(\alpha_k))_{k=1}^\infty;\ f\in H^p\}$ не совпадает ни с каким весовым пространством l^p.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 4, 1977 Математика

Г. М. МУШЕГЯН

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ РЯДОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕСТАНОВОК

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается некоторый класс систем измеримых, конечных и определенных на [0, 1] функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, по которым существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который универсален относительно перестановок в смысле сходимости почти всюду в пространстве измеримых функций.

В этом направлении интересные результаты получены А. М. Олевским [4] и Н. Б. Погосяном [6], для четкой формулировки которых приведем следующее

Определение. Скажем, что ряд $\sum\limits_{n} f_n(x)$, составленный из измеримых конечных функций, является π-универсальным, если для любой измеримой (не обязательно конечной) функции $g(x)$ существует такая перестановка $\pi = \{n_k\}$ чисел натурального ряда, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x) = g(x)$$

почти всюду.

Теорема (А. М. Олевский). Существуют ортонормальная система $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно ограниченных функций, полиномы которой всюду плотны в пространстве $C[0,1]$, и функция $f \in L_p$ $(1 \leqslant p < 2)$, ряд Фурье которой π-универсален.

Как известно, вопрос о существовании тригонометрического ряда, почти всюду сходящегося к бесконечности, не решен.

В связи с этим П. Л. Ульяновым построен пример ортогонального ряда, обладающего этим свойством и являющегося рядом Фурье в несобственном смысле от $f \in L$ (см. [7]). Он же поставил вопрос о существовании сходящегося к $+\infty$ ряда по ограниченной системе (см. [5], стр. 28). Пример, реализующий положительный ответ, принадлежит Р. И. Осипову и А. А. Талаляну (см. [9]). Далее Ф. Г. Арутюняном [3] был указан тригонометрический ряд, который после некоторой перестановки слагаемых сходится к $+\infty$. Аналогичный пример для системы Хаара был приведен А. М. Олевским (см. [4]).

По системе Уолша и по базисам пространства $C\,[0,1]$ такой пример построен Р. И. Овсепяном [10].

В работе [13] А. А. Талаляном было установлено существование ряда $\sum a_n \varphi_n(x)$, где $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольный базис пространства L_p, который универсален относительно перестановок в смысле сходимости по мере и в смысле суммируемости почти всюду методами Чезаро положительного порядка. Первый пример ортогонального ряда, который при двух различных перестановках почти всюду сходится к различным функциям, был приведен П. Л. Ульяновым (см. [14]).

П. Л. Ульяновым был поставлен вопрос (см. [8]): существует ли π-универсальный ряд по любой полной ортонормированной системе? В том случае, когда полная ортонормированная система ограничена, положительный ответ на этот вопрос дан Н. Б. Погосяном (см. [6]).

В настоящей работе по некоторым системам строятся π-универсальные ряды, существование которых не следует из ранее известных результатов (система Хаара, базисы пространства $C\,[0,1]$ и т. д.). Одновременно приводится новое доказательство некоторых ранее известных теорем (например, для тригонометрической системы и системы Уолша).

При доказательстве используются свойства систем типа (χ), приведенные Ф. Г. Арутюняном в [1].

§ 2. Вспомогательные определения и обозначения

Пусть $\{\psi_k(x)\}$ — некоторая система функций, определенных на $[0,1]$. Рассмотрим полиномы

$$P_k(x) = \sum_{l=n_k}^{m_k} a_l \psi_l(x);\ k = 1, 2, \cdots, N \text{ и } Q(x) = \sum_{k=1}^{N} b_k P_k(x).$$

Обозначим

$$\underline{\mathrm{ind}}\, P_k(x) = n_k,\ \overline{\mathrm{ind}}\, P_k(x) = m_k,$$

$$\underline{\mathrm{ind}}\, Q(x, \{\psi_k\}) = \min\{n_k,\ 1 \leqslant k \leqslant N\},\ \underline{\mathrm{ind}}\, Q(x, \{\psi_k\}) = \min\{n_k,\ 1 \leqslant k \leqslant N\},$$

$$|U[P_k(x, \{\psi_k\})]| = \sup_{n_k \leqslant j \leqslant m_k} \left| \sum_{l=n_k}^{j} a_l \psi_l(x) \right|,\ |U[Q(x, \{P_k\})]| =$$

$$= \sup_{1 \leqslant j \leqslant N} \left| \sum_{l=1}^{j} b_l P_l(x) \right|,$$

$$|U[Q(x, \{\psi_n\})]| = |U[Q(x, \{P_k\})]| + \sup_{1 \leqslant j \leqslant N} |U[P_j(x, \{\psi_k\})]|.$$

Через A обозначим класс систем, измеримых, почти всюду конечных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, определенных на $[0,1]$ таких, что для произвольного интервала $(a, b) \subset [0,1]$ и чисел $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, $N > 0$ существуют множества $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$ и полином

$$P(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

обладающие свойствами:

1° $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ являются объединениями конечного числа интервалов $E^{(1)} \cap E^{(2)} = \varnothing$, $E^{(1)} \cup E^{(2)} \subset (a, b)$, $\mu(E^{(l)}) \geqslant 2^{-1}(1-2^{-1}\delta)(b-a)$, $l=1, 2$;

2° $\mu\{x\colon x \in E^{(l)}, |P(x)-(-1)^l| < \varepsilon\} \geqslant 2^{-1}(1-\delta)(b-a)$, $l=1, 2$;

3° $\mu\{x\colon x \in [0, 1] \setminus (a, b), |P(x)| < \varepsilon\} \leqslant (1-b+a)\delta$;

4° $m \geqslant N$.

В настоящей работе будет доказана следующая

Теорема 1. *Пусть последовательности* $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$\varepsilon_k > 0,\ \delta_k > 0,\ k = 1, 2, \cdots, \sum_{k=i}^{\infty} \varepsilon_k < 1, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < 1. \tag{1}$$

Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_k(x, \{\varphi_k\}),\ \text{где}\ P_k(x) = \sum_{l=n_k}^{m_k} a_l \varphi_l(x), \tag{2}$$

удовлетворяет следующим условиям:

I. $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *система из класса* A, *для полиномов* $P_k(x)$ *имеют место условия* 1°, 2°, 3°, *где* $\varepsilon = \varepsilon_k$, $(a, b) = (a_k, b_k)$, $\delta = \delta_k$, $N = \overline{\operatorname{ind}}\, P_{k-1}(x)$, $E^{(1)} = E_k^{(1)}$, $E^{(2)} = E_k^{(2)}$;

II. $\mu\left\{\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} (a_k, b_k)\right\} = 1$;

III. *если* $r < k$ *и* $l = 1$ *или* 2, *то имеет место одно из следующих соотношений:*

$$\text{либо } (a_k, b_k) \subset E_r^{(l)},\ \text{либо } (a_k, b_k) \cap E_r^{(l)} = \varnothing;$$

IV. $\lim\limits_{k \to \infty} (b_k - a_k) = 0$;

V. $\lim\limits_{k \to \infty} |\cup [\alpha_k P_k(x, \{\varphi_k\})]| = 0$ *почти всюду на* $[0,1]$;

VI. *ряд* (2) *расходится почти всюду на* $[0,1]$.

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=n_k}^{m_k} \alpha_k a_i \varphi_i(x)$$

π-*универсален.*

В формулировке теоремы 1, полагая $P_k(x, \{\varphi_k\}) = \chi_k(x)$, где $\{\chi_k(x)\}$ система Хаара, получим, что произвольный почти всюду на $[0,1]$ расходящийся ряд Хаара

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x),$$

для которого имеет место условие

$$\mu\{x: \lim_{k\to\infty} a_k \chi_k(x) = 0\} = 1,$$

π-универсален.

§ 3. Вспомогательные утверждения

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть* $d>0$, $0<\varepsilon<\frac{d}{2}$, $0<\delta<1$, $N>0$ — *некоторые числа, а* (a, b) — *интервал из* $[0,1]$. *Тогда в условиях теоремы* 1, *существуют множество* G *и подсумма ряда* (2)

$$Q(x) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{k_l} P_{k_l}(x),$$

которая после некоторой перестановки π *его слагаемых удовлетворяет условиям:*

а) $d-\varepsilon < Q_\pi(x) < d+\varepsilon$ *при* $x\in G$,

б) $|\cup[Q_\pi(x, \{\varphi_k\})]| < d+\varepsilon$ *при* $x\in G$,

в) $\mu\{x: x\in[0,1]\setminus(a, b), |\cup[Q(x, \{\varphi_k\})]| > \varepsilon\} > (1-b-a)(1-\delta)$,

г) $G\subset(a, b)$, $\mu(G) > (b-a)(1-\delta)$,

д) $N < \underline{\text{ind}}\{Q(x, \{\varphi_k\})$.

Обозначим

$$\tilde{P}_k(x) = \begin{cases} (-1)^l & \text{при } x\in E_k^{(l)},\ l=1,2, \\ 0 & \text{при } x\notin E_k^{(1)}\cup E_k^{(2)}. \end{cases} \tag{3}$$

Из условий теоремы 1 следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{P}_k(x) \tag{4}$$

расходится почти всюду на $[0,1]$.

Справедливо следующее

Предложение 1. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tilde{P}_k(x)$$

расходится почти всюду на E, то существует множество E_1, $E_1 \subset E$, $\mu(E_1) = \mu(E)$, на котором имеют место следующие два условия:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tilde{P}_k(x) = +\infty \text{ и } \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tilde{P}_k(x) = -\infty. \tag{5}$$

Доказательство предложения 1 легко получить, используя определения класса A и условий I—IV теоремы 1. Для этого достаточно рассуждения, примененные для функций Хаара в работе [5] провести для системы $\{\tilde{P}_k(x)\}$, что делается почти дословно.

Предложение 2. *Для произвольного открытого множества C и чисел $d > 0$, $0 < \gamma < \frac{d}{2}$, $0 < \eta < 1$, $N' > 0$ существуют множества F_1, F_2 и полином*

$$T(x) = \sum_{k=N'+1}^{m} b_k \tilde{P}_k(x), \text{ где } b_k = \begin{cases} \text{либо } \alpha_k \\ \text{либо } 0 \end{cases} \tag{6}$$

такие, что

1) *F_1 и F_2 являются открытыми множествами, имеющими конечное число составляющих интервалов,*

2) $|U[T(x, \{\tilde{P}_k\})]| < d + \gamma$ *при* $x \in [0,1]$,

3) $d \leqslant T(x) < d + \gamma$ *при* $x \in F_1 \subset C$; $-d-\gamma < T(x) < -d$ *при* $x \in F_2 \subset C$,

4) $|U[T(x, \{\tilde{P}_k\})]| = 0$ *при* $x \in \bar{C}$,

5) $\mu(F_1) \geqslant \frac{1-\eta}{2}\mu(C)$, $\mu(F_2) > \frac{1-\eta}{2}\mu(C)$.

Доказательство. Выберем числа $M > N'$, R так, чтобы

$$R > 1, \left(\frac{3d\eta}{R} + \frac{\gamma}{R} + \frac{2\gamma\eta}{R^2}\right)\left(d + \frac{\gamma}{R}\right)^{-1} < \eta, \quad \sum_{k=M}^{\infty} \delta_k < \frac{\eta}{R}\mu(C). \tag{7}$$

Пусть $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда (4),

$$E_k^{(1)}(\alpha) = \{x: \alpha_k \tilde{P}_k(x) > 0\}, \quad E_k^{(2)}(\alpha) = \{x: \alpha_k \tilde{P}_k(x) < 0\},$$

$$E_k(\alpha) = E_k^{(1)}(\alpha) \cup E_k^{(2)}(\alpha).$$

Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{k=M}^{\infty} b_k \tilde{P}_k(x), \tag{8}$$

где

$$b_k = \begin{cases} a_k \text{ при } k \in \{k: E_k(a) \subset C, |a_k| < \frac{\gamma}{R}, |S_n(x)| < d \text{ при всех } x \in E_k(a), \\ \quad \text{и } 1 \leqslant n < k-1\}, \\ 0 - \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (9)$$

Из предложения 1 следует, что ряд (8) сходится почти всюду на [0,1], и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \widetilde{P}_k(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in} C; \; d < \left| \sum_{k=M}^{\infty} b_k \widetilde{P}_k(x) \right| < d + \frac{\gamma}{R}$$

почти всюду на C.

Следовательно, существует число $M' > M$ такое, что

$$\mu\left\{x: d \leqslant \left| \sum_{k=M}^{M'} b_k \widetilde{P}_k(x) \right| < d + \frac{\gamma}{R}\right\} > \mu(C)\left(1 - \frac{\eta}{R}\right), \quad (10)$$

$$\left| \sum_{k=M}^{M'} b_k \widetilde{P}_k(x) \right| \leqslant \begin{cases} d \text{ при } x \in C \setminus (F^{(1)} \cup F^{(2)}) \\ 0 \text{ при } x \overline{\in} C, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$F^{(1)} = \left\{x: d \leqslant \sum_{k=M}^{M'} b_k \widetilde{P}_k(x) < d + \frac{\gamma}{R}\right\},$$

$$F^{(2)} = \left\{x: -d - \frac{\gamma}{R} < \sum_{k=M}^{M'} b_k \widetilde{P}_k(x) \leqslant -d\right\}.$$

Из определения функций $\widetilde{P}_k(x)$ имеем, что $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ являются объединением конечного числа интервалов. Из (10) вытекает, что имеет место хотя бы одно из следующих неравенств:

$$\mu(F^{(1)}) \geqslant \frac{1}{2}\mu(C)\left(1 - \frac{\eta}{R}\right), \quad \mu(F^{(2)}) \geqslant \frac{1}{2}\mu(C)\left(1 - \frac{\eta}{R}\right). \quad (12)$$

Пусть для определенности имеет место первое неравенство в (12). Покажем, что $\mu(F^{(2)}) > \frac{1-\eta}{2}\mu(C)$. Из 1° и (9) имеем

$$\left| \int_0^1 b_k \widetilde{P}_k(x)\, dx \right| < \frac{\gamma}{R} \left| \mu(E_k^{(1)}) - \mu(E_k^{(2)}) \right| < \frac{\gamma}{R}\delta_k. \quad (13)$$

Положим

$$T(x) = \sum_{k=M}^{M'} b_k \widetilde{P}_k(x), \; \mu(F^{(2)}) = \frac{1-\nu}{2}\mu(C). \quad (14)$$

Из (13) и (7) имеем

$$\int_0^1 T(x)\,dx = \int_{F^{(1)}} T(x)\,dx + \int_{F^{(2)}} T(x)\,dx + \int_{C\setminus\{F^{(1)}\cup F^{(2)}\}} T(x)\,dx < \frac{\gamma\eta}{R^2}\mu(C).$$

Учитывая (10), (11), (14), получим

$$\frac{d}{2}\left(1-\frac{\eta}{R}\right)\mu(C)-\left(d+\frac{\gamma}{R}\right)\frac{1}{2}\mu(C)(1-\nu)-d\mu(C)\frac{\eta}{R}<\frac{\gamma\eta}{R^2}\mu(C).$$

Отсюда и из (7) следует

$$\nu<\frac{\dfrac{3\eta d}{R}+\dfrac{\gamma}{R}+\dfrac{2\gamma\eta}{R^2}}{d+\dfrac{\gamma}{R}}<\eta \text{ и } \mu(F^{(2)})>\frac{1-\eta}{2}\mu(C).$$

Полагая, что в (12) справедливо второе неравенство, аналогично получили бы $\mu(F^{(1)})>2^{-1}\mu(C)(1-\eta)$. Следовательно, предложение 2 доказано.

Отметим, что способ построения полинома

$$\sum_{k=M}^{M'} b_k\,\breve{P}_k(x)$$

не нов, он был применен в работах [1] и [11].

Пусть полином $T_1(x)$ удовлетворяет условиям предложения 2, где $C_1=(a,b)$, $d=d$, $\gamma=\gamma_1=\varepsilon\cdot 2^{-3}$, $\eta=\delta\cdot 2^{-3}$. $F^{(1)}=F_1^{(1)}$, $F^{(2)}=F_1^{(2)}$, а число N' выбрано так, что

$$\alpha^\circ)\ N\leqslant N',\ \sum_{N'}^{\infty}\mu\{x\colon x\in(0,1),\ |P_k(x)-\breve{P}_k(x)|\geqslant\varepsilon_k\}<\sum_{N'}^{\infty}\delta_k<\frac{\delta}{2^2}(b-a),$$

$$\sum_{k=N'}^{\infty}\varepsilon_k<\varepsilon\cdot 4^{-1},$$

$$\beta^\circ)\ \mu\left[\bigcup_{N'}^{\infty}\left\{x\colon x\in[0,1],\ |\cup[a_k\,P_k(x,\{\varphi_k\})]|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right]>\frac{\delta}{2^2}(b-a).$$

Предположим, что уже определены полиномы $\{T_r(x)\}_1^{l-1}$, множества $\{C_r, F_r^{(1)}, F_r^{(2)}\}_{r=1}^{l-1}$, которые удовлетворяют требованиям предложения 2, где для $T_r(x)$, $d=d$, $\gamma=\gamma_r=\varepsilon 2^{-(r+2)}$, $\eta=\eta_r=\delta 2^{-(r+2)}$ $N=\overline{\text{ind}}\ T_{r-1}(x)$, $F^{(1)}=F_r^{(1)}$, $F^{(2)}=F_r^{(2)}$, а множества C_r определяются из следующих условий:

α) если $r_0>1$, существует число r', $r'<r_0$ и l' ($l'\leqslant 1$ или 2) такие, что

$$C_{r_0}=F_{r'}^{(l')} \text{ и } \sum_{k=1}^{r} T_k(x)<d-\varepsilon\frac{2^r-1}{2^{r+2}} \text{ при любых } r \text{ и } x,\ r<r_0,\ x\in F_{r'}^{(l')},$$

β) при любых фиксированных r, r_0, l, $1 \leqslant r < r_0 < i$, $l = 1$ или 2 имеет место одно из следующих соотношений:

$$\text{либо } C_{r_0} \subset F_r^{(l)}, \text{ либо } C_{r_0} \cap F_r^{(l)} = \varnothing,$$

γ) если $C_{r_0} = F_{r'}^{(l')}$, то $r' = \min\left\{r \colon r < r_0, F_r^{(2)} \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^{r_0-1} C_j\right) = \varnothing\right\}$ и

$$l' = \begin{cases} 1, \text{ при } \sum_{k=1}^{r} T_k(x) < d - \varepsilon \dfrac{2^r - 1}{2^{r+2}} \text{ на } F_r^{(1)}, \text{ для любого } r,\ 1 \leqslant r < r_0, \\ 2 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Из условия α) и из того, что $\varepsilon < \dfrac{d}{2}$ имеем

$$\sum_{r=1}^{r} T_k(x) < \frac{d}{2}, \text{ при } r,\ 1 \leqslant r < i - 1\ x \in C_{i-1},$$

учитывая условие 3) предложения 2, получим, что

$$\sum_{k=1}^{i-1} T_k(x) < \frac{d}{2}, \text{ при } x \in F_{i-1}^{(2)}, \tag{15}$$

откуда следует существование числа r_i, где

$$r_i = \min\left\{r \colon r \leqslant i - 1,\ F_r^{(2)} \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^{i-1} C_j\right) = \varnothing\right\}.$$

Положим

$$C_i = \begin{cases} F_{r_i}^{(1)}, \text{ при } \sum_{k=1}^{r_i} T_k(x) < \dfrac{d}{2} \text{ на } F_{r_i}^{(1)} \\ F_{r_i}^{(2)}, \text{ при } \sum_{k=1}^{r_i} T_k(x) > d - \varepsilon \text{ на } F_{r_i}^{(1)}. \end{cases} \tag{16}$$

Применяя предложение 2, где $d = d$, $\gamma = \varepsilon \cdot 2^{-(i+2)}$, $\eta = \delta \cdot 2^{-(i+2)}$, $N = \overline{\operatorname{ind}}\, T_{i-1}(x)$, $C = C_i$, определим полином $T_i(x)$.

Продолжая этот процесс, получим последовательности

$$\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \ \{C_k, F_k^{(1)}, F_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}.$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(x) \tag{17}$$

сходится почти всюду на $[0,1]$.

Сходимость ряда (17) на множестве

$$\left\{(a, b) \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} C_i\right\} \cup \{[0,1] \setminus (a, b)\}$$

следует из условия 4) предложения 2, а на множестве

$$\bigcup_{l=1}^{\infty}\{C_l\setminus(F_l^{(1)}\cup F_l^{(2)})\}$$

из условия 3) предложения 2 и из α).

Предположим, что на множестве E, $E\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=k}^{\infty}(F_l^{(1)}\cup F_l^{(2)})$ ряд (17) расходится. Ясно, что $E\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=k}^{\infty}C_l$.

Отсюда, учитывая α), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{r}T_k(x)<d-\varepsilon\,\frac{2^r-1}{2^{r+2}},\ \text{при}\ x\in E,\ r=1,\ 2,\cdots. \tag{18}$$

Пусть

$$T_k(x)=\sum_{l=n_k}^{m_k}b_l\,\tilde{P}_l(x).$$

Из условия 2) предложения 2 и из (18) при $x\in E$ получим

$$\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ n_r\leqslant l\leqslant m_r}}\left|\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=n_r}^{l}b_l\tilde{P}_l(x)\right|\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{r}T_k(x)+\right.$$

$$\left.+\max_{n_r\leqslant l\leqslant m_r}\left|\sum_{l=n_r}^{l}b_l\,\tilde{P}_l(x)\right|\right\}<3d. \tag{19}$$

Так как $\left\{\sum_{k=1}^{r}T_k(x)\right\}_{r=1}^{\infty}$ — некоторая расходящаяся подпоследовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=n_k}^{m_k}b_l\,\tilde{P}_l(x), \tag{20}$$

то ряд (20) расходится на E. Из предложения 1 и из (19) следует, что $\mu(E)=0$, и ряд (17) почти всюду на $[0,1]$ сходится. Отсюда, учитывая, что $d-\frac{\varepsilon}{4}<|T_k(x)|<d+\frac{\varepsilon}{4}$ на $F_k^{(1)}\cup F_k^{(2)}$, получим $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=k}^{\infty}(F_l^{(1)}\cup F_l^{(2)}\right)=0$. Из определения чисел η_r и из условия 5) предложения 2 имеем

$$\sum_{l=1}^{\infty}\mu\{C_l\setminus(F_l^{(1)}\cup F_l^{(2)})\}\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mu(C_l)\,\delta}{2^{l+2}}<\frac{b-a}{2^2}\delta. \tag{21}$$

Из условия γ) следует, что если при некотором r и l

$$\sum_{l=1}^{r}T_l(x)<d-\varepsilon,$$

при $x \in F_r^{(l)}$, то существует j, $j > r$, для которого $C_j = F_r^{(l)}$. Отсюда, учитывая, что $C_1 = (a, b)$, легко убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$(a, b) \setminus \bigcup_{l=k}^{\infty} (F_l^{(1)} \cup F_l^{(2)}) \subset \left\{x\colon d - \frac{\varepsilon}{4} < \sum_{l=1}^{k-1} T_l(x) < d + \frac{\varepsilon}{4}\right\} \cup$$

$$\cup \bigcup_{l=1}^{\infty} \{C_l \setminus (F_l^{(1)} \cup F_l^{(2)})\}.$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty} \mu \left\{x\colon d - \varepsilon < \sum_{l=1}^{k-1} T_l(x) < d + \varepsilon\right\} \leqslant (b-a) - \frac{b-a}{4}\delta - \lim_{k\to\infty} \mu \times$$

$$\times \left\{\bigcup_{l=k}^{\infty} (F_l^{(1)} \cup F_l^{(2)})\right\} = \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)(b-a).$$

Следовательно, можно указать число M такое, что

$$\mu \left\{x\colon d - \frac{\varepsilon}{4} < \sum_{l=1}^{M} T_l(x) < d + \frac{\varepsilon}{4}\right\} \geqslant \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)(b-a).$$

Рассмотрим следующий полином:

$$\tilde{R}(x) = \sum_{k=1}^{M} \tilde{T}_k(x), \quad \text{где} \quad \tilde{T}_k(x) = \begin{cases} (-1)^{l+1} \cdot d, & \text{при } x \in F_k^{(l)},\ l = 1 \text{ или } 2 \\ 0 & \text{при } x \bar{\in} F_k^{(1)} \cup F_k^{(2)}. \end{cases} \tag{22}$$

Учитывая, что $\varepsilon < \dfrac{d}{2}$, получим

$$\tilde{R}(x) = d, \quad \text{при} \quad x \in E = \left\{x\colon d - \frac{\varepsilon}{4} < \sum_{l=1}^{M} T_l(x) < d + \frac{\varepsilon}{4}\right\}. \tag{23}$$

Легко убедиться, что существует единственная последовательность натуральных чисел

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_s \leqslant M \text{ такая, что } E = \bigcup_{i=1}^{s} F_{n_i}^{(1)}. \tag{24}$$

Ясно, что для полинома $\tilde{R}(x)$ в условиях α), β), γ) неравенство

$$\sum_{k=1}^{r} T_k(x) < d - \varepsilon \frac{2^r - 1}{2^{r+2}} \quad \text{примет вид} \quad \sum_{k=1}^{r} \tilde{T}_k(x) \leqslant 0.$$

Через $Rl(x)$, $1 \leqslant l \leqslant M$, обозначим частные суммы полинома (22) и докажем следующее

Предложение 3. *Пусть $F_{n_l}^{(1)}$ — множество из объединения* (24),

$$1 < n_i \leqslant s,\ k' \leqslant \max\{k: \bar{T}_k(x) = -d, \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_i}\}.$$

Тогда существует число n_j, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $n_j < n_i$, $F^{(1)}_{n_j} \subset F^{(1)}_k$,

2) *если при некотором j_1, $1 < j_1 \leqslant s$ имеет место $F^{(1)}_{n_{j_1}} \subset F^{(2)}_k$ и $n_{j_1} \neq n_i$, то $n_{j_1} > n_i$,*

3) $\bar{T}_{k^{(i)}_\alpha}(x) = d$ *на* $F^{(1)}_{n_i}$; $T_{k^{(j)}_\beta}(x) = d$ *на* $F^{(1)}_{n_j}$; $r_i = r_j + 2$, *где*

$$\{k^i_\alpha\}^{r_i}_{\alpha=1} = \{k: k' < k \leqslant n_i \mid \tilde{T}_k(x)| = d, \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_i}\},$$

$$\{k^{(j)}_\beta\}^{r_j}_{\beta=1} = \{k: k' \leqslant k \leqslant n_i,\ |\bar{T}_k(x)| = d, \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_j}\}.$$

Доказательство. Так как $\bar{T}_1(x) = -d$ при $x \in F^{(1)}_{n_i}$, то существование числа k' очевидно. Из условия α) имеем $\bar{R}_{k'-1}(x) \leqslant 0$, при $x \in F^{(1)}_k \cup F^{(2)}_{k'}$, откуда легко убедиться, что множество $\{k^{(i)}_\alpha\}$ непусто. Из определения числа k' следует, что

$$\tilde{T}_{k^{(i)}_\alpha}(x) = d \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_i},\ 1 \leqslant \alpha \leqslant r_i. \tag{25}$$

Отсюда

$$\tilde{R}_{k^{(i)}_{r_i}}(x) = \bar{R}_{k'-1}(x) + \tilde{T}_{k'}(x) + \sum_{\alpha=1}^{r_i} \tilde{T}_{k^{(i)}_\alpha}(x) = d \quad \text{при} \quad x \in F^{(1)}_{n_i}$$

и

$$\bar{R}_{k'-1}(x) = -(r_i - 1)\,d + d = -r_i d + 2d \leqslant 0 \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_i} \text{ и } r_i \geqslant 2. \tag{26}$$

Ясно, что

$$\bar{R}_{k'-1}(x) = -(r_i - 3)\,d \text{ при } x \in F^{(1)}_{k'};\ \bar{R}_{k'}(x) = (-r_i + 1)\,d, \text{ при } x \in F^{(2)}_{k'}. \tag{27}$$

В том случае, когда $r_i = 2$, положим $n_j = k'$ и условия 1) и 3) доказаны. Пусть $r_i > 2$. Примем $k^{(j)}_1 = k' < k^{(i)}_1$. Предположим уже определены числа $k^{(j)}_1 < \cdots < k^{(j)}_l$, $l < r_i - 2$, причем $k^{(j)}_l < k^{(i)}_l$. Через $k^{(j)}_{l+1}$ обозначим число, удовлетворяющее условию $C^{(j)}_{k_{l+1}} = F^{(1)}_{k_l}$. Существование числа $k^{(j)}_{l+1}$ следует из (27). Из условия γ) следует, что $k^{(j)}_{l+1} < k^{(i)}_{l+1} \leqslant r_i - 2$. Пусть определены числа $k^{(j)}_l$, $l = 1, 2, \cdots, r_i - 2$. Ясно, что

$$F_{k_1^{(j)}}^{(1)} \supset F_{k_2^{(j)}}^{(1)} \supset \cdots \supset F_{k_{r_l-2}^{(j)}}^{(1)} \text{ и из (27) } \widetilde{R}_{k^{(j)}_{r_l-2}}(x) = d \text{ при } x \in F^{(1)}_{k^{(j)}_{r_l-2}}.$$

Полагая $n_j = k^{(j)}_{r_l-2}$, легко убедиться, что условия 1) и 3) предложения 3 выполнены.

Предположим, что $F^{(1)}_{n_{j_1}} \subset F^{(2)}_{k'}$ и $F^{(1)}_{n_{j_1}} \cap F^{(1)}_{n_l} = \varnothing$. Обозначим

$$\{k_m^{(j_1)}\}_{m=1}^{\sigma} = \{k\colon k' < k, |\widetilde{T}_k(x)| = d, \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_{j_1}}\};\ k_1^{(j)} < k_2^{(j_1)} < \cdots < k_\sigma^{(j_1)}.$$

Так как $k_1^{(j_1)} = k_1^{(l)}$, $F^{(1)}_{n_l} \cap F_{n_{j_1}}$, то учитывая, что из определения числа k' имеем $T_k(x) = d$ при $x \in F^{(1)}_{n_l}$ и $k \in \{k\colon k' < k, \widetilde{T}_k(x) \neq 0, \text{ на } F^{(1)}_{n_l}\}$, легко убедиться в существовании числа l_0, $l_0 \leqslant r_l$, для которого имеет место условие

$$k^{(l)}_{l_0} = k^{(j_1)}_{l_0},\ \widetilde{T}_{k^{(l)}_{l_0}}(x) = -\widetilde{T}_{k^{(l)}_{l_0}}(t) \text{ при } x \in F^{(l)}_{n_l}, \quad t \in F^{(1)}_{n_{j_1}}.$$

Отсюда

$$k^{(l)}_m = k^{(j_1)}_m \text{ при } m < l_0, \text{ и } \widetilde{R}_{k^{(l)}_{l_0}}(x) = R_{k^{(j_1)}_{l_0}}(x) + 2d, \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_l},\ t \in F^{(1)}_{n_{j_1}}. \tag{29}$$

Если $l_0 = r_l$, то из условия γ) из (29) получим, что $r_l < \sigma$ и

$$k^{(l)}_{l_0+1} < k^{(j_1)}_{l_0+1}, \cdots, k^{(l)}_{r_l} < k^{(j_1)}_{r_l} \text{ и } n_{j_1} > n_l.$$

Предложение 3 доказано.

Предположим, что построена некоторая подсумма полинома (24), которая после некоторой перестановки слагаемых имеет вид

$$\widetilde{Q}_{l-1}(x) = \sum_{\nu=1}^{t_{i-1}} \widetilde{T}_{n_\nu}(x), \text{ где } 1 \leqslant n_\nu < M,\ 1 \leqslant i \leqslant s \tag{30}$$

и удовлетворяет следующим условиям:

1′) $|\cup[\widetilde{Q}_{l-1}(x, \{T_{n_\nu}\})]| = d_{l-1}$ при $x \in \bigcup_{j=1}^{l-1} F^{(1)}_{n_j}$,

2′) $\widetilde{Q}_{i-1}(x) = b$ при $x \in \bigcup_{j=1}^{l-1} F^{(1)}_{n_j} = E_{i-1}$,

3′) если $\widetilde{T}_{k_0}(x) = 0$ на E_{l-1}, то $k_0 \overline{\in} \{n_\nu\}_{\nu=1}^{t_{i-1}}$,

4′) если $\widetilde{T}_{k_0}(x) \not\equiv 0$ на E_{i-1}, то существует число ν' такое, что $k = n_{\nu'}$, $1 \leqslant \nu' \leqslant t_{i-1}$,

5′) $\widetilde{T}_{n_\nu}(x) = 0$ при $x \overline{\in} (a, b)$.

Заметим, что при $i = 1$, $\widetilde{Q}_1(x) = \widetilde{T}_1(x)$, $F^{(1)}_{n_l} = F^{(1)}_1$ и все условия 1′) —

5') выполнены.

Рассмотрим множество $F_{n_i}^{(1)}$. Пусть k', n_j, $k_1^{(i)}<k_2^{(i)}<\cdots<k_{r_i}^{(i)}$ и $k_1^{(j)}<k_2^{(j)}<\cdots<k_{r_j}^{(j)}$ — числа, фигурирующие в формулировке предложения 3. Пусть

$$\tilde{T}_{n_\nu}(x)=\begin{cases}\bar{T}_{k_{r_j}^{(j)}}(x)+\bar{T}_{n_\nu}(x)+\bar{T}_{k_{r_j-1}^{(j)}}(x), & \text{при } n_\nu=k' \\ \bar{T}_{n_\nu}(x)+\tilde{T}_{k_l^{(i)}}(x), & \text{при } n_\nu=k_l^{(i)} \\ \bar{T}_{n_\nu}(x) \text{ — в остальных случаях.} & \end{cases} \tag{31}$$

Из условий предложения 3 следует, что

$$\tilde{T}_{n_\nu}(x)=\bar{T}_{n_\nu}(t), \text{ при } x\in F_{n_i}^{(1)}\cup F_{n_j}^{(1)}, \ t\in F_{n_j}^{(1)}, \ 1\leqslant\nu\leqslant m_{i-1}. \tag{32}$$

Составим новый полином

$$\tilde{Q}_{i-1}(x)=\sum_{\nu=1}^{t_{i-1}}\tilde{T}_{n_\nu}(x). \tag{33}$$

Из (32) следует, что полином (33) удовлетворяет условиям 1')—5'), где система $\{\bar{T}_{n_\nu}(x)\}$ заменена системой $\{\tilde{T}_{n_\nu}(x)\}$. Учитывая, что все частичные суммы полинома $\tilde{T}_{n_\nu}(x)$ на $F_{n_i}^{(1)}$ принимают значения нуль или $\bar{T}_{n_\nu}(y)$, $y\in F_{n_j}^{(1)}$, то в (33) вместо $\tilde{T}_{n_\nu}(x)$, подставляя его выражение (31), раскрывая скобки, не нарушая порядок следования и перенумеровав, получим полином

$$\bar{Q}_i(x)=\sum_{\nu=1}^{t_i}\tilde{T}_{n_\nu}(x). \tag{34}$$

Из предложения 3 легко следует, что полином (34) удовлетворяет всем условиям 1')—5'), где $i-1$ заменено на i.

Продолжая этот процесс, получим полином

$$\tilde{Q}_s(x)=\sum_{\nu=1}^{t_s}\bar{T}_{n_\nu}(x),$$

который удовлетворяет условиям 1')—5'), где $i-1$ заменено числом s. Рассмотрим полином

$$Q_s(x)=\sum_{\nu=1}^{t_s}T_{n_\nu}(x). \tag{35}$$

Из (22) и из условий предложения 2, используя определения чисел n', t_r, будем иметь

1″) $|U[Q_s(x, \{T_{n_\nu}(x)\})]| \leqslant d + \frac{\varepsilon}{2}$, при $x \in \bigcup_{j=1}^{s} F_{n_j}^{(1)} = E_s$,

2″) $d \leqslant Q_s(x) < d + \frac{\varepsilon}{2}$, при $x \in E_s$,

3″) $|U[Q_s(x, \{T_{n_\nu}(x)\})]| = 0$, при $x \bar{\in} (a, b)$,

4″) $n_\nu > N'$.

Полагая в условиях предложения 2

$$T_{n_\nu}(x) = \sum_{k=N_\nu}^{N'_\nu} b_k \bar{P}_k(x)$$

и подставляя в (35), получим

$$Q_s(x) = \sum_{\nu=1}^{t_s} \sum_{k=N_\nu}^{N'_\nu} b_k \bar{P}_k(x). \tag{36}$$

В полиноме (36), заменяя $\widetilde{P}_k(x)$ на $P_k(x)$ и учитывая условия предложения 1, а также $\alpha°$), $\beta°$) и из внутренней суммы в (36) отбрасывая те слагаемые, для которых $b_k \neq \alpha_k$, получим полином

$$Q_\pi(x, \{\varphi_k\}) = \sum_{\nu=1}^{t_s} {\sum_{k=N_\nu}^{N'_\nu}}' \sum_{l=n_k}^{m_k} \alpha_k a_l \varphi_l(x)^*,$$

который удовлетворяет требованиям леммы 1, где

$$G = E_s \setminus \left(\left[\bigcup_{N'}^{\infty} \{x: |P_k(x) - \bar{P}_k(x)| \geqslant \varepsilon_k\} \right] \cup \right.$$

$$\left. \cup \left[\bigcup_{N'}^{\infty} \left\{ x: x \in [0,1], |U[\alpha_k P_k(x, \{\varphi_k\})]| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \right] \right).$$

§ 4. Доказательство теоремы

Вначале укажем такой подряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \alpha_k P_k(x, \{\varphi_l(x)\})^{**} \tag{37}$$

ряда (2), который после некоторой перестановки слагаемых принимает вид

---

* знак (′) на средней сумме означает, что k не принимает те значения, для которых $b_k \neq \alpha_k$, в этом случае $b_k = 0$ (см. (6)).

** знак (′) означает, что k не обязан принимать все целочисленные значения.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\, t_n\, Q_{r,i}^{(n)}(x,\{\varphi_i\}) \tag{38}$$

и удовлетворяет условиям

I°. $\mu\{x\colon t_n|Q_{r,i}^{(n)}(x)-\chi(\Delta_n^r)|\geqslant\sigma_n\}<\sigma_n;\ n=1,2,\cdots;\ r=1,\cdots,2^n,$ $i=1,2,$

где $(\Delta_n^r)_{r=1}^{2^n}$ есть интервалы Хаара n-ого разбиения, а $\chi(\Delta_n^r)$ — характеристическая функция множества Δ_n^r.

II°. $1>\sigma_n>0,\ \sum_1^{\infty}2^n\sigma_n<+\infty,\ t_n>0,\ t_n\downarrow 0,\ \sum_1^{n}t_n=+\infty,$

III°. $\mu\{x\colon x\in\Delta_n^r,\ |U[t_n Q_{r,i}^{(n)}(x,\{\varphi_k\})]|\geqslant t_n+\sigma_n\}<\sigma_n,$

IV°. $\mu\{x\colon x\,\overline{\in}\,\Delta_n^r,\ |U[t_n Q_{r,i}^{(n)}(x,\{\varphi_k\})]|\geqslant\sigma_n\}<\sigma_n,$

V°. множество сегментов

$$\{[\underline{\mathrm{ind}}\,Q_{r,i}^{(n)}(x,\{\varphi_k\}),\ \overline{\mathrm{ind}}\,Q_{r,i}^{(n)}(x,\{\varphi_k\})]\},\ n=1,2,\cdots;\ r=1,2,\cdots,2^n;$$
$$i=1,2$$

попарно не пересекаются, то есть

$$[\underline{\mathrm{ind}}\,Q_{r_1,i_1}^{(n_1)}(x,\{\varphi_k\}),\ \overline{\mathrm{ind}}\,Q_{r_1,i_1}^{(n_1)}(x,\{\varphi_k\})]\cap$$
$$\cap[\underline{\mathrm{ind}}\,Q_{r_2,i_2}^{(n_2)}(x,\{\varphi_k\}),\ \overline{\mathrm{ind}}\,Q_{r_2,i_2}^{(n_2)}(x,\{\varphi_k\})]=\varnothing,$$

если нарушается хотя бы одно из следующих равенств: $n_1=n_2$, $r_1=r_2$, $i_1=i_2$.

Предположим, что уже построены полиномы

$$\{Q_{r,i}^{(n)}(x,\{\varphi_k\}),\ n=1,2,\cdots,m;\ r=1,2,\cdots,2^n,\ i=1,2.$$

Полагая $d=t_n$, $\varepsilon=\sigma_n$, $\delta=\sigma_n$, $(a,b)=\Delta_n^r$ и применяя лемму 1, построим полиномы $Q_{r,1}^{(m+1)}(x,\{\varphi_k\})$ и $Q_{r,2}^{(m+1)}(x\{\varphi_k\})$, которые удовлетворяют условиям а) — д), причем это можно делать так, чтобы имели место неравенства

$$\max\{\overline{\mathrm{ind}}\,Q_{r,i}^{(n)}(x,\{\varphi_k\})\colon n=1,2,\cdots,m;\ 1\leqslant r\leqslant 2^n,\ i=1,2\}<$$
$$<\underline{\mathrm{ind}}\,Q_{r,1}^{(m+1)}(x,\{\varphi_k\})<\overline{\mathrm{ind}}\,Q_{r,1}^{(m+1)}(x,\{\varphi_k\})<\underline{\mathrm{ind}}\,Q_{r,2}^{(m+1)}(x,\{\varphi_k\})<$$
$$<\overline{\mathrm{ind}}\,Q_{r,2}^{(m+1)}(x,\{\varphi_k\}<\underline{\mathrm{ind}}\,Q_{r+1,1}^{(m+1)}(x,\{\varphi_k\})<\overline{\mathrm{ind}}\,Q_{r+1,1}^{(m+1)}(x,\{\varphi_k\})<$$
$$<\underline{\mathrm{ind}}\,Q_{r+1,2}^{(m+1)}(x,\{\varphi_k\}),\ r=1,2,\cdots,2^{m+1}.$$

Продолжая этот процесс, построим подряд (38). Ряд (2) разобьем на два ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \alpha_k \sum_{l=n_k}^{m_k} a_l \varphi_l(x) + \sum_{k=1}^{\infty}{}'' \alpha_k \sum_{l=n_k}^{m_k} a_l \varphi_l(x) \tag{39}$$

так, чтобы первый ряд после некоторой перестановки совпал с рядом (38). Из условия V следует, что

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ n_k<l<m_k}} \alpha_k a_l \varphi_l(x) = 0 \text{ почти всюду на } [0,1].$$

Отсюда легко убедиться, что для заданной измеримой функции $g(x)$ (необязательно конечной)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2} (-1)^i t_n Q_{r,i}^{(n)}(x, \{\varphi_l\}) \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}{}'' \sum_{i=n_k}^{m_k} \alpha_k a_l \varphi_l(x)$$

можно перемешать и указать порядок следования слегаемых так, чтобы полученный ряд сходился к $g(x)$. В полученном ряде вместо $Q_{r,i}^{(n)}(x, \{\varphi_l\})$, подставляя свое выражение по системе $\{\varphi_l(x)\}$ и учитывая условия III и IV, получим, что существует такая перестановка слагаемых ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=n_k}^{m_k} \alpha_k a_l \varphi_l(x),$$

при которой он сходится к $g(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Условие IV теоремы можно заменить требованием

$$i) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 P_k^2(x) = +\infty \text{ почти всюду на } [0,1] \text{ и } \int_0^1 \widetilde{P}_k(x)\,dx = 0.$$

Действительно, из условий теоремы и из (3) следует сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left[P_k^2(x) - \widetilde{P}_k^2(x)\right] \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \left|\alpha_k \left[P_k(x) - \widetilde{P}_k(x)\right]\right| \text{ почти всюду на } [0,1].$$

Остается убедиться в почти всюду расходимости ряда $\sum \alpha_k \widetilde{P}_k(x)$, что можно получить из расходимости ряда $\sum \alpha_k^2 P_k^2(x)$ на подмножестве полной меры отрезка $[0,1]$. Достаточно провести доказательство так, как это сделано в работах [2] и [12] в случае, когда $\{\widetilde{P}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть система Хаара.

Докажем, что по любой системе функций из класса, рассмотренного в работе Ф. Г. Арутюняна [1], существует ряд, удовлетворяющий условиям нашей теоремы.

Обозначим через r множество двоично рациональных точек отрезка $[0,1]$.

Определение 4.1. Полином

$$T(t)=\sum_{k=p+1}^{p+q} a_k \chi_k(t) \tag{40}$$

по системе Хаара назовем свободным, если $a_i a_j \chi_i(t)\chi_j(t)=0$ для всех $t\in[0,1]\setminus r$, $p+1\leqslant i\neq j\leqslant p+q$.

Определение 4.2. Пусть J — произвольный интервал из $[0,1]$. Условимся писать $T\in J\{\chi_k\}$ (T определяется по формуле (40)), если $T(t)$ свободный полином и $a_k\chi_k(t)=0$ для всех $t\in\bar{J}$, $p+1\leqslant k\leqslant p+q$ (через $\bar{J}$ обозначено замыкание интервала J).

Пусть N — натуральное число, T определяется по формуле (40), J — произвольный интервал из $[0,1]$, ω — положительное число, $0<\omega<1$,

$$T_1(t)=\sum_{p_1+1}^{p_1+q_1}\beta_k\chi_k(t).$$

Определение 4.3. Скажем, что $T_1\in Z_N(J,\omega)$ или соответственно $T_1\in Z(T,J,\omega)$, если выполнены условия

а) $T_1\in J(\chi_k)$,

б) $\underline{\mathrm{ind}}[T_1\{\chi_k\}]>N$ или соответственно $\underline{\mathrm{ind}}[T_1,\{\chi_k\}]>\overline{\mathrm{ind}}[T,\{\chi_k\}]$,

в) $|\overline{T_1(t)}|\leqslant 1$ для всех $t\in[0,1]$,

г) $\mu(\{t: |T_1(t)|=1\})\geqslant\omega\mu(J)$.

Пусть, далее, $0<\delta<1$ — n-натуральное число. Обозначим через $\Delta_{n,\delta}^{(1)}$ и $\Delta_{n,\delta}^{(2)}$ интервалы, центры которых совпадают соответственно с центрами интервалов

$$\Delta_n^{(1)}=\{x:\chi_n(x)>0\}^{(0)},\quad \Delta_n^{(2)}=\{x:\chi_n(x)<0\}^{(0)*}$$

и для которых, кроме того, выполняется соотношение

$$\frac{\mu(\Delta_{n,\delta}^{(1)})}{\mu(\Delta_n^{(1)})}=\frac{\mu(\Delta_{n,\delta}^{(2)})}{\mu(\Delta_n^{(2)})}=1-\delta.$$

Если $0<\delta<1$, то положим

$$\chi_n^{(\delta)}(t)=\chi_n(t)\ \text{при}\ t\in\{[0,1]\setminus(\bar{\Delta}_n^{(1)}\cup\bar{\Delta}_n^{(2)})\cup\Delta_{n,\delta}^{(1)}\cup\Delta_{n,\delta}^{(2)}$$

и интерполируем линейно и непрерывно на отрезках, лежащих вне указанного множества.

В случае $\delta=0$ положим $\chi_n^{(0)}(t)=\chi_n(t)$ для всех $t\in[0,1]$.

Пусть свободный полином T определяется по формуле (40). Положим

---

* Знак (0) означает внутренность множества.

$$T^{\delta}(t)=\sum_{k=p+1}^{p+q} a_k \chi_k^{(\delta)}(t).$$

Определение 4.4. Система измеримых функций $\{\varphi_k\}$, определенных на $[0,1]$, называется системой типа (χ), если существуют положительные числа M и ω, $0<\omega\leqslant 1$, такие, что для любых чисел $\varepsilon>0$, $0<\delta<1$ интервала $J\subset[0,1]$, натуральных чисел n и N существуют полиномы $T(t)$, $P(t)$ соответственно по системам $\{\chi_k\}$ и $\{\varphi_k\}$, число δ', $0\leqslant\delta'\leqslant\delta$, которые удовлетворяют условиям:

а) $T\in Z_n(J,\omega)$,

б) $\underline{\text{ind}}\,[P,\{\varphi_k\}]>N$,

в) $|P(t)-T^{(\delta')}(t)|<\varepsilon$, $t\in[0,1]$,

г) $|\cup[P(t,\{\varphi_k\})]|\leqslant M$, $t\in[0,1]$.

Отметим, что как было показано в работе [1] системами типа $\{\chi\}$, в частности, являются: тригонометрическая система, базисы пространства $C[0,1]$, система Уолша.

Справедливо следующее

Предложение 4. *Если $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$—система типа (χ), то для произвольных чисел $\varepsilon>0$, $1>\delta>0$, N и интервала (a,b) существуют множества $E^{(1)}$, и $E^{(2)}$ и полином $P(x,\{\varphi_k\})$, обладающие свойствами*

1″) *$E^{(1)}$, $E^{(2)}$ являются объединениями конечного числа интервалов*

$$E^{(1)}\cap E^{(2)}=\varnothing,\ E^{(1)}\cup E^{(2)}\subset(a,b),\ \mu(E^{(l)})>(1-\delta)\frac{b-a}{2},\ l=1,2,$$

2″) $|P(x,\{\varphi_k\})-(-1)^l|<\varepsilon$, *при* $x\in E^{(l)}$, $l=1,2$,

3″) $|P(x)<\varepsilon$, *при* $x\in[0,1]\setminus[a,b]$,

4″) $|P(x)|\leqslant 1+\varepsilon$, $|\cup[P(x,\{\varphi_k\})]|<M+3$, *при* $x\in[0,1]$,

5″) $\underline{\text{ind}}\ P(x,\{\varphi_k\})\geqslant N$.

Доказательство. Согласно определению 4.4 существуют полиномы $T_1(x,\{\chi_k\})$, $T_1^{(\delta_1)}(x,\{\chi_k\})$, $P_1(x,\{\varphi_k\})$, удовлетворяющие всем условиям а)—г), где ε и δ соответственно заменены на $\frac{\varepsilon}{2}$ и $\frac{\delta}{2\cdot 12}$.

Пусть уже определены полиномы

$$\{T_i(x,\{\chi_k\}),\ T_i^{(\delta_i)}(x,\{\chi_k\}),\ P_i(x,\{\varphi_k\})\}_{i=1}^{m},$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{I}')\ T_i(x)=0,\ \text{при}\ x\in\left\{x;\ x\in(a,b),\ \left|\sum_{j=1}^{i-1}T_j(x)\right|\neq 1\right\}\cup\bigcup_{j=1}^{i-1}\{x:\ T_j(x)\neq T_j^{(\delta_j)}(x)\},$$

$$\text{II}')\quad \left|\sum_{i=1}^{m} T_i(x)\right| \leqslant 1, \left|\sum_{i=1}^{m} T_i^{(\delta_l)}(x)\right| \leqslant 1, \text{ при } x \in (a, b),$$

$$\text{III}')\quad \left|\sum_{i=1}^{m} T_i(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} T^{(\delta_l)}(x)=0 \text{ при } x \overline{\in} (a, b),$$

IV′) полиномы $T_i(x, \{\chi_k\})$, $T_i^{(\delta_l)}(x, \{\chi_k^{(\delta)}\})$, $P_i(x, \{\varphi_k\})$ удовлетворяют условиям а) — г) определения 4.4, где ε, δ заменены числами $\frac{\varepsilon}{2^{l+1}}$, $\frac{\delta}{12\cdot 2^{l+1}}$, а вместо J взято открытое множество G_{l-1}, являющееся объединением конечного числа интервалов и удовлетворяющее условиям

$$G_{l-1} \subset (a, b) \diagdown \left(\left\{x: \left|\sum_{j=1}^{l-1} T_j(x)\right| = 1\right\} \cup \bigcup_{j=1}^{l-1} \{x: T_j(x) \neq T_j^{(\delta_j)}(x)\}\right) = E_{l-1},$$

$$\mu(G_{l-1}) = \mu(E_{l-1}),\ \mu(G_{l-1}) \leqslant (b-a)\left(1-\frac{\omega}{2}\right)^{l-1}$$

и на каждом составляющем интервале множества G_{l-1}, полином $\sum_{j=1}^{l-1} T_j(x)$ принимает постоянное значение.

Заметим, что в случае $m=1$ условия I′—IV′ выполнены. Через G_m обозначим открытое множество, состоящее из объединения конечного числа интервалов, удовлетворяющее условиям

$$G_m \subset (a, b) \diagdown \left(\left\{x: \left|\sum_{j=1}^{m} T_j(x)\right| = 1\right\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{x: T_j(x) \neq T_j^{(\delta_j)}(x)\}\right) = E_m,$$

$$\mu(G_m) = \mu(E_m),\ \mu(G_m) \leqslant (b-a)\left(1-\frac{\omega}{2}\right)^{m},$$

и на каждом составляющем интервале которого функция принимает постоянное значение. Пусть $\{\lambda_i^m\}_{i=1}^{s_m}$ — последовательность составляющих интервалов множества G_m. Согласно определению 4.4, для интервалов λ_i^m, $i=1, 2, \cdots, s_m$ можно определить полиномы

$$T_{m,i}(x, \{\chi_k\}),\ T_{m,i}^{(\delta_l)}(x, \{\chi_k\}),\ P_{m,i}(x, \{\chi_k\}),$$

которые удовлетворяют всем условиям а)—г), где ε, δ, J соответственно заменены через

$$\frac{\varepsilon}{s_m\cdot 2^{m+2}},\ \frac{\delta}{12\cdot 2^{m+2}},\ J = \lambda_i^m, \text{ а числа } n \text{ и } N$$

выбраны так, чтобы имели место условия:

$$\overline{\text{ind}}\, T_m(x, \{\chi_k\}) < \underline{\text{ind}}\, T_{m,i}(x, \{\chi_k\}) < \overline{\text{ind}}\, T_{m,i}(x, \{\chi_k\}) <$$
$$< \underline{\text{ind}}\, T_{m,\,i+1}(x, \{\chi_k\}),$$
$$\overline{\text{ind}}\, P_m(x, \{\varphi_k\}) < \underline{\text{ind}}\, P_{m,i}(x, \{\varphi_k\}) <$$
$$< \overline{\text{ind}}\, P_{m,i}(x, \{\varphi_k\}) < \underline{\text{ind}}_{\varphi_k}\, P_{m,i+1}(x, \{\varphi_k\}),$$
$$i = 1, 2, \cdots, s_m - 1.$$

В каждом интервале λ_i^m выберем произвольную точку x_i и рассмотрим полиномы

$$T_{m+1}(x) = \sum_{i=1}^{s_k}\left[1 - \left|\sum_{j=1}^{m} T_j(x_i)\right|\right] T_{m,i}(x),$$
$$T_{m+1}^{(\delta_m+1)}(x) = \sum_{i=1}^{s_m}\left(1 - \left|\sum_{j=1}^{m} T_j(x_i)\right|\right) T_{m,i}^{(\delta_m+1)}(x), \tag{43}$$
$$P_{m+1}(x) = \sum_{i=1}^{s_m}\left(1 - \left|\sum_{j=1}^{m} T_j(x_i)\right|\right) P_{m,i}(x).$$

Так как $T_{m,i}(x)$ есть свободный полином Хаара на $\lambda_i^{(m)}$, то из условия г) определения 4.3 имеем

$$\mu\{x:\ T_{m,i}(x) = 1\} \geqslant \mu(\lambda_i^m)\frac{\omega}{2},\ \mu\{x:\ T_{m,i}(x) = -1\} \geqslant \mu(\lambda_i^{(m)})\frac{\omega}{2}\cdot$$

Отсюда и из определения полинома $T_{m+1}(x)$ легко убедиться в справедливости условия

$$\mu\left\{x: \left|\sum_{i=1}^{m+1} T_i(x)\right| = 1,\ x \in G_m\right\} \geqslant \mu(G_m)\frac{\omega}{2},$$

откуда

$$\mu\left\{x: \left|\sum_{i=1}^{m+1} T_i(x)\right| \neq 1,\ x \in G_m\right\} \leqslant \mu(G_m)\left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \leqslant (b-a)\left(1 - \frac{\omega}{2}\right)^{m+1}.$$

Так как множества

$$\left\{x: \left|\sum_{i=1}^{m+1} T_i(x)\right| = 1\right\} \text{ и } \sum_{j=1}^{m+1}\{x:\ T_j(x) \neq T_j^{(\delta_j)}(x)\}$$

представлены в виде объединения конечного числа отрезков (открытых, полуоткрытых, замкнутых), то отсюда следует существование открытого множества G_{m+1}, состоящего из конечного числа интервалов, так что

$$G_{m+1} \subset (a, b) \setminus \left(\left\{x: \left|\sum_{i=1}^{m+1} T_i(x)\right| = 1\right\} \cup \bigcup_{i=1}^{m+1}\{x:\ T_j(x) \neq T_j^{(\delta_j)}(x)\}\right) = E_m,$$

$$\mu(G_{m+1})=\mu(E_m),\ \mu(G_{m+1})\leqslant(b-a)\left(1-\frac{\omega}{2}\right)^{m+1},$$

и на каждом составляющем интервале множества G_{m+1} функция $\sum_{j=1}^{m+1} T_j(x)$ принимает постоянное значение. Условия (I′—IV′) проверяются непосредственно.

Выберем число m настолько большим, чтобы

$$(b-a)\left(1-\frac{\omega}{2}\right)^m<(b-a)\frac{\delta}{24}.$$

Из (42)

$$\left\{x:\left|\sum_{j=1}^{m} T_j(x)\right|=1\right\}\supset[(a,\ b)\setminus E_m]\setminus\bigcup_{j=1}^{m}\{x:\ T_j(x)\neq T_j^{(\delta_j)}(x)\}.$$

Учитывая, что $T_j(x)$ — свободный полином на $(a,\ b)$ и $\delta_j=\frac{\delta}{12\cdot 2^{j+1}}$, будем иметь

$$\mu\,|x:\ T_j(x)\neq T_j^{(\delta_j)}(x)|\leqslant\frac{\delta(b-a)}{12\cdot 2^{j+1}}.$$

Стало быть

$$\mu\left\{x:\left|\sum_{j=1}^{m} T_j(x)\right|=1\right\}\geqslant(b-a)\left(1-\frac{\delta}{24}\right)-\frac{\delta(b-a)}{12}=(b-a)\left(1-\frac{\delta}{8}\right). \tag{44}$$

Ясно, что имеет место хотя бы одно из следующих неравенств:

$$\mu\left\{x:\sum_{j=1}^{m} T_j(x)=1\right\}\geqslant\frac{b-a}{2}\left(1-\frac{\delta}{8}\right),\ \mu\left\{x:\sum_{j=1}^{m} T_j(x)=-1\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{b-a}{2}\left(1-\frac{\delta}{8}\right). \tag{45}$$

Пусть имеет место первое из них.

Множества, стоящие под знаками μ в (45), обозначим соответственно через E_1 и E_2. Так как $T_j(x)$ — свободный полином Хаара на $(a,\ b)$, то

$$\int_a^b\sum_{j=1}^{m} T_j(x)\,dx=0,\ \int_a^b\sum_{j=1}^{m} T_j(x)\,dx=\int_{E_1}\sum_{j=1}^{m} T_j(x)\,dx+\int_{E_2}\sum_{j=1}^{m} T_j(x)\,dx+$$
$$+\int_{(a,\ b)\setminus(E_1\cup E_2)}\sum_{1}^{m} T_j(x)\,dx=0,\ \mu(E_1)-\mu(E_2)-$$
$$-\mu\left[(a,\ b)\setminus\left\{x:\left|\sum_{j=1}^{m} T_j(x)\right|=1\right\}\right]\leqslant 0.$$

Отсюда и из (44), (45) имеем

$$\mu(E_2) \geqslant \frac{b-a}{2}\left(1-\frac{\delta}{8}\right)-(b-a)\frac{\delta}{8}=\frac{b-a}{2}\left(1-\frac{3\delta}{8}\right). \qquad (46)$$

Так как при $l=1$ или 2

$$\left\{x: \sum_{j=1}^{m} T_j^{(\delta_j)}(x)=(-1)^{l+1}\right\} \supset \left\{x: \sum_{j=1}^{m} T_j(x)=(-1)^{l+1}\right\} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \{x: T_j(x) \neq$$

$$\neq T_j^{(\delta_j)}(x)\},$$

то учитывая (45) и (46), получим

$$\mu\left\{x: \sum_{j=1}^{m} T_j^{(\delta_j)}(x)=(-1)^{l+1}\right\} \geqslant \frac{b-a}{2}\left(1-\frac{3\delta}{8}\right)-\frac{b-a}{12} \geqslant \frac{b-a}{2}\left(1-\frac{\delta}{2}\right).$$

Внутренность множества $\left\{x: \sum\limits_{1}^{m} T_j^{(\delta_j)}(x)=(-1)^{l+1}\right\}$ обозначим через $E^{(l)}$.

Учитывая, что $|T_j^{(\delta_j)}(x)-P_j(x)|<\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ при $x\in[0,1]$, легко убедиться, что условия 1″), 2″), 3″), 5″) выполнены. Остается проверить вторую часть условия 4″), так как первая часть очевидна.

Поскольку

$$P(x, \{\varphi_k\})=\sum_{i=1}^{m} P_i(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_l}\left(1-\left|\sum_{k=1}^{i} T_k(x_j)\right|\right)P_{l,j}(x),$$

то для произвольного $x\in[0,1]$ имеем

$$|U[P(x, \{\varphi_k\})]| \leqslant \sup_{1<l<m}\left|\sum_{i=1}^{l} P_i(x)\right| + \sup_{1<l<m}\left|\sum_{j=1}^{s_l}\times\right.$$

$$\times\left(1-\left|\sum_{k=1}^{l} T_k(x_j)\right|\right)|P_{l,j}(x)| + \sup_{1<l<m}\ \sup_{1<j<s_l}\times$$

$$\times\left|1-\left|\sum_{k=1}^{i} T_k(x_j)\right|\right|\cdot\|U[P_{l,j}(x)]\| < (1+\varepsilon)+(1+\varepsilon)+M \leqslant M+3$$

и предложение 4 доказано.

Убедимся, что по системе $\{\varphi_k(x)\}$ типа (χ) существует π-универсальный ряд. Пусть последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < 1,\ \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < 1,\ \varepsilon_k \downarrow 0,\ \delta_k \downarrow 0. \qquad (46')$$

Предположим, что построены полиномы $\{P_n^i(x),\ n=1,\cdots,m;\ i=1,\cdots,\sigma_n\}$, которые удовлетворяют условиям предложения 4, где

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_n}{\sigma_n},\ \delta = \delta_n,\ (a,\ b) = (a_n^{(l)},\ b_n^{(l)}),\ [(a_1^{(1)},\ b_1^{(1)}) = (0,1),\ \sigma_1 = 1],$$

а число N выбрано так, чтобы

$$\overline{\text{ind}}\ P_{j_1}^{(i_1)}(x) \leqslant \underline{\text{ind}}\ P_{j_2}^{(i_2)}(x) \quad \text{при } j_2 > j_1, \text{ а в случае,}$$
$$\text{когда } j_2 = j_1,\ i_2 > i_1.$$

При этом имеют место следующие дополнительные условия:

i) $\bigcup\limits_{l=1}^{\sigma_j} [a_j^{(l)},\ b_j^{(l)}] = [0,1],\ (a_j^{(l)},\ b_j^{(l)}) \cap (a_j^{(k)},\ b_j^{(k)}) = \varnothing$, при $i \neq k,\ j = 1, \cdots, m$,

ii) для любых чисел $j_1,\ j_2,\ i_1,\ i_2,\ 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m_1;\ 1 \leqslant i_1 \leqslant \sigma_{l-1}\ 1 \leqslant \leqslant i_2 \leqslant \sigma_{i_2}$ имеет место одно из следующих соотношений:

$$\text{либо } (a_{j_2}^{(i_2)},\ b_{j_2}^{(i_2)}) \subset E_{j_1,\ i_1}^{(l)}, \text{ либо } (a_{j_2}^{(i_2)},\ b_{j_2}^{(i_2)}) \cap E_{j_1,\ i_1}^{(l)} = \varnothing,$$

где через $E_{j,\ i}^{(l)}$ $l = 1$ или 2 обозначено множество E^l, соответствующее полиному $P_j^{(i)}(x)$ в предложении 4,

iii) $\mu(a_j^{(i)},\ b_j^{(i)}) \leqslant \dfrac{1}{2^{j-1}},\ 1 \leqslant j \leqslant m.$

Учитывая, что множества $E_{j,\ i}^{(l)}$ имеют конечное число составляющих интервалов, легко убедиться, что существует последовательность интервалов $\{(a_{m+1}^{(l)},\ b_{m+1}^{(l)}),\ i = 1,\ 2, \cdots, \sigma_{m+1}\}$, удовлетворяющая всем трем предыдущим условиям, где число m заменено на $m+1$.

Полагая

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{m+1}}{\sigma_{m+1}},\ \delta = \delta_{m+1},\ (a,\ b) = (a_{m+1}^{(l)},\ b_{m+1}^{(l)}),\ i = 1, 2, \cdots, \sigma_{m+1},$$

согласно предложению 4 последовательно определим полиномы

$$P_{m+1}^{(1)}(x,\ \{\varphi_k\}),\ P_{m+1}^{(2)}(x,\ \{\varphi_k\}),\ \cdots,\ P_{m+1}^{\sigma_{m+1}}(x,\ \{\varphi_k\}),$$

так, чтобы имело место условие

$$\overline{\text{ind}}\ P_m^{(\sigma_m)}(x,\ \{\varphi_k\}) < \underline{\text{ind}}\ P_{m+1}^{(i)}(x,\ \{\varphi_k\}) < \overline{\text{ind}}\ P_{m+1}^{(i)}(x,\ \{\varphi_k\}) <$$
$$< \underline{\text{ind}}\ P_{m+1}^{(i+1)}(x,\ \{\varphi_k\}) \text{ при любом } i,\ i = 1,\ 2, \cdots, \sigma_{m+1} - 1.$$

Предположим, что уже построена последовательность

$$\{P_n^{(i)}(x,\ \{\varphi_k\}),\ i = 1,\ 2, \cdots, \sigma_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{47}$$

Имеем

$$1 - \varepsilon < \left| \sum_{i=1}^{\sigma_n} P_n^i(x) \right| < 1 + \varepsilon \text{ на } E_n = \bigcup_{i=1}^{\sigma_n} (E_{n,\ i}^{(1)} \cup E_{n,\ i}^{(2)}) \text{ и } \mu(E_n) > 1 - \delta_n. \tag{48}$$

Пусть последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = +\infty$,

тогда из (48) следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} \alpha_n^2 \left[P_n^i (x, \{\varphi_k\})\right]^2 = +\infty \text{ почти всюду на } [0,1]. \tag{49}$$

Легко убедиться, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} \alpha_n P_n^i (x, \{\varphi_n\}) \tag{50}$$

удовлетворяет условиям I — V теоремы. Подставляя в (50) вместо $P_n^i (x, \{\varphi_k\})$ его выражение из (49), согласно замечанию будем иметь, что полученный ряд π-универсален.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 13.II.1977

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ. Տեղափոխությունների նկատմամբ շարքերի ունիվերսալության մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում բերվում է ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների մի դաս (C[0,1]-ի բոլոր բազիսները պարունակող), որոնցով գոյություն ունեն տեղափոխությունների նկատմամբ ունիվերսալ շարքեր։

G. M. MOUSHEHGIAN. *On the series, universal with respect to transpositions* (summary)

The paper describes a class of functional sequences, which includes all basae from C (0,1] and in which serias universal with respect to transpositions existe.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами, Мат. сборник, 90 (132), 4, 1973, 483—500.
2. *Ф. Г. Арутюнян.* О рядах по системе Хаара, ДАН Арм.ССР, 42, № 3, 1966, 134—140.
3. *Ф. Г. Арутюнян.* Система представления, ДАН Арм.ССР, VII, № 2, 1973, 65—71.
4. *А. М. Олевский.* О некоторых особенностях рядов Фурье в пространстве L_p ($p < 2$), Мат. сборник, 77 (119): 2, 1968, 251—259.
5. *А. А. Талалян* и *Ф. Г. Арутюнян.* О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$, Мат. сборник, 66 (108), 1965, 240—247.
6. *Н. Б. Погосян.* Представление измеримых функций ортогональными рядами, Мат. сборник, 98 (140), № 1 (9), 1975, 102—112.
7. *П. Л. Ульянов.* О безусловной сходимости и суммируемости, Изв. АН СССР, серия матем., 22, 1958, 811—840.

8. *Р. Кук*. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., Физматгиз, 1960, 453.
9. *Р. И. Осипов, А. А. Талалян*. О сходимости ортогональных рядов к $+\infty$, Матем. заметки, 2, № 5, 1967, 483—494.
10. *Р. И. Овсепян*. О представлении функций ортогональными рядами, ДАН Арм. ССР, VII, № 1, 1973, 3—8.
11. *М. Б. Петровская*. О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 773—798.
12. *R. F. Gundy*. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, Trans. Amer. Soc., 124, № 2, 1966, 128—248.
13. *А. А. Талалян*. Представление измеримых функций рядами, УМН, XV, вып. 5, 1960, 77—141.
14. *П. Л. Ульянов*. О безусловной сходимости и суммируемости, Изв. АН СССР, сер. матем., 22, № 6, 1958, 811—840.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 4, 1977 Математика

С. Н. МАНУКЯН

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОНЯТИЙ ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНСТРУКТИВНОЙ ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ

Рассматриваемые понятия конструктивного анализа определяются таким же образом, как в [1]—[5].

Цель дальнейших рассмотрений заключается в доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Существует несамопересекающаяся замкнутая конструктивная кривая S, не имеющая угловой функции относительно некоторой точки $x \ni y$, удаленной от S.*

Таким образом, можно построить конструктивную замкнутую самонепересекающуюся кривую, для которой некоторая точка, удаленная от нее, не является ни внешней, ни внутренней относительно этой кривой.

Для доказательства теоремы нам потребуются некоторые дополнительные утверждения.

Пусть Φ—точное невырожденное дизъюнктное бесконечное сегментное покрытие сегмента $a \Delta b$. Говорим, что сегменты Φ_i и Φ_j покрытия Φ являются связными, если существует конечная последовательность сегментов $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \cdots, \Phi_{i_s}$, такая, что

1. $(\Phi_{i_1} = \Phi_i \& \Phi_{i_s} = \Phi_j) \vee (\Phi^{i_1} = \Phi_j \& \Phi_{i_s} = \Phi_i)$;

2. для всякого t, где $1 \leqslant t < s$,

$$\text{Эп}\,(\Phi_{i_t}) = \text{Эл}\,(\Phi_{i_{t+1}}).$$

Лемма. *Каково бы ни было бесконечное сегментное точное невырожденное дизъюнктное покрытие Φ сегмента $a \Delta b$, невозможен алгорифм θ такой, что для всяких натуральных чисел i, j $\theta\,(i * j)$, и $\theta\,(i * j) = \Lambda$, если Φ_i и Φ_j связные, $\theta\,(i * j) \neq \Lambda$, если Φ_i и Φ_j не связные.*

Доказательство. Пусть Φ—покрытие сегмента $a \Delta b$, обладающее перечисленными свойствами; для простоты положим $a \in \Phi_0$.

Пусть существует алгорифм θ со свойствами, указанными в формулировке леммы. Тогда при помощи алгорифма θ можно построить алгорифм ω, такой что при любом натуральном n имеют место следующие условия:

1) ω перерабатывает n в рациональную точку вида $a + m \times \times (b - a) \cdot 2^{-n}$, где m—некоторое натуральное число, $m \leqslant 2^n$;

2) Каждый из сегментов Φ_r и Φ_s, объединению которых принадлежит $\omega(n)$, связен с Φ_0.

3) Каждый из сегментов Φ_r и Φ_s, объединению которых принадлежит $\omega(n) + (b-a)\cdot 2^{-n}$ не связен с Φ_0.

В самом деле, для построения алгорифма ω с требуемыми свойствами достаточно положить

$$\omega(n) = a + 2^{-n} \cdot (b-a) \cdot (\mu k_{k < 2^n} [\theta (K(a +$$

$$+ (b-a) \cdot k \cdot 2^{-n}) * 0) \neq \Lambda] - 1),$$

где через K обозначен один из характеристических алгорифмов покрытия Φ.

Легко видеть, что при всяком n будет $\omega(n+1) = \omega(n)$ или $\omega(n+1) = \omega(n) + (b-a)\cdot 2^{-(n+1)}$. Отсюда следует, что всегда $0 \leqslant \leqslant \omega(n+p) - \omega(n) < 2^{-n} \cdot (b-a)$, а потому последовательность ω конструктивно сходится. Построим FR-число x такое, что $\omega(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Тогда, как легко проверить, для всякого FR-числа $y \in a\Delta b$ оказывается: если $y < x$, то каждый из сегментов Φ_i и Φ_j, объединению которых принадлежит y, связен с Φ_0, если же $y > x$, то каждый из сегментов Φ_i и Φ_j, объединению которых принадлежит y, не связен с Φ_0. (Действительно, если $y < x$, то $\omega(n) > y$ при некотором n, и сегменты Φ_i и Φ_j связаны с Φ_0; если же $y > x$, то $\omega(n) + 2^{-n} \cdot (b-a) < y$ при некотором n, тогда Φ_i и Φ_j не могут быть связаными с Φ_0). Рассмотрим теперь сегменты Φ_r и Φ_j, объединению которых принадлежит x. Построим сегменты Φ_{r_1} и Φ_{s_1}, соседние, соответственно, с Φ_r и Φ_s и отличные от Φ_r и Φ_s (такие сегменты можно построить в силу утверждения из [1], стр. 463). Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min (|\Phi_r|, |\Phi_s|, |\Phi_{r_1}|, |\Phi_{s_1}|).$$

Рассматривая в роли y число $x - \varepsilon$, легко показать, что каждый из сегментов Φ_r и Φ_s связен с Φ_0. Рассматривая в роли y число $x + \varepsilon$, легко показать, что каждый из сегментов Φ_r и Φ_s не связен с Φ_0. Полученное противоречие завершает доказательство.

Доказательство теоремы. Согласно [1] построим сегментное дизъюнктное невырожденное точное бесконечное покрытие Φ сегмента $0\Delta 1$, обладающее свойствами $0 \in \Phi_0$, $1 \in \Phi_1$. Построим алгорифмы ξ и η такие, что (1) $\xi(0)=0$; (2) для всякого i, если $i \neq 0$, то Эп $(\Phi_{\xi(i)}) =$ Эл (Φ_i); (3) $\eta(1) = 1$; (4) для всякого i, если $i \neq 1$, то Эл $(\Phi_{\eta(i)}) =$ Эп (Φ_i) (возможность построения таких алгорифмов следует из [1], стр. 463).

Пользуясь теоремой из [6], построим несамопересекающиеся и не пересекающиеся друг с другом конструктивные простые дуги F' и F'', заданные на сегменте $0\Delta 1$, содержащиеся в замкнутом квадрате $0\Delta 1 \times 0\Delta 1$ и такие, что F' соединяет точку $0\square 0$ с точкой $1\square 1$, а F'' соединяет точку $0\square 1$ с точкой $1\square 0$.

Через U' и V' (соответственно U'' и V'') обозначим левую и правую компоненты кривой F' (соответственно F'').

Построим алгорифм A, такой что

$$Ai = \frac{1}{3} \cdot \min\left(|\Phi_i|, |\Phi_{\eta(i)}|\right) \text{ при любом натуральном } i.$$

Построим конструктивные последовательности функций φ', ψ', φ'', ψ'' такие, что при любом $i > 1$ функции φ'_i, ψ'_i заданы на сегменте

$$\text{Эл}\,(\Phi_i)\ \Delta\ \frac{\text{Эл}\,(\Phi_i) + \text{Эп}\,(\Phi_i)}{2}$$

и удовлетворяют при всяком t, принадлежащем этому сегменту, следующим условиям:

$$\varphi'_i(t) = A_i \cdot U'\left(\frac{2\,(t - \text{Эл}\,(\Phi_i))}{|\Phi_i|}\right) - A_i \cdot V'\left(\frac{2\,(t - \text{Эл}\,(\Phi_i))}{|\Phi_i|}\right) + $$
$$+ \text{Эп}\,(\Phi_i);$$

$$\psi'_i(t) = A_i \cdot U'\left(\frac{2(t - \text{Эл}\,(\Phi_i))}{|\Phi_i|}\right) + A_i \cdot V'\left(\frac{2\,(t - \text{Эл}\,(\Phi_i))}{|\Phi_i|}\right) - A_i;$$

функции φ''_i, ψ''_i при $i > 1$ заданы на том же сегменте и удовлетворяют таким же условиям, с заменой U' на U'' и V' на V''.

Построим K' и K''—конструктивные последовательности кривых—таким образом, что при любом $i > 1$ кривые K'_i и K''_i определены на сегменте $\text{Эл}\,(\Phi_i)\ \Delta\ \frac{\text{Эл}\,(\Phi_i) + \text{Эп}\,(\Phi_i)}{2}$ равенствами

$$K'_i\,(t) = \varphi'_i\,(t) \,\sigma\, \psi'_i\,(t),$$
$$K''_i\,(t) = \varphi''_i\,(t) \,\sigma\, \psi''_i\,(t).$$

Нетрудно убедиться в том, что K'_i и K''_i при каждом $i > 1$ суть несамопересекающиеся и не пересекающие друг друга кривые, такие что K'_i соединяет точку $\text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma\, (-A_i)$ с точкой $\text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma\, A_i$, K''_i соединяет точку $(\text{Эп}\,(\Phi_i) - A_i) \,\sigma\, 0$ с точкой $(\text{Эп}\,(\Phi_i) + A_i) \,\sigma\, 0$, причем обе кривые K'_i и K''_i не выходят за пределы замкнутого квадрата с вершинами

$$(\text{Эп}\,(\Phi_i) - A_i) \,\sigma\, 0,\ \text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma\, A_i,\ (\text{Эп}\,(\Phi_i) + A_i) \,\sigma\, 0,\ \text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma\, (-A_i)$$

(в этом замечании термин „замкнутый квадрат“ употреблен не в том смысле, в каком этот термин был определен в [3], однако он истолковывается очевидным образом).

Теперь построим последовательности кривых L', L'', R', R'' таким образом, что при любом $i > 1$

$$L'_i = \Lambda O_{\frac{\text{Эл}\,(\Phi_i) + \text{Эп}\,(\Phi_i)}{2}\ \Delta\ \text{Эп}\,(\Phi_i)}\ (\text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma\, A_i\ \Delta\ \text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma$$

$$\sigma\, (2 - \text{Эп}\,(\Phi_i))\ *\ \text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma\, (2 - \text{Эп}\,(\Phi_i))\ \Delta\ (4 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) \,\sigma$$

$$\supset (2 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) * (4 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) \supset (2 - \text{Эп}\,(\Phi_i))\, \Delta\, (4 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) \supset$$
$$\supset (\text{Эп}\,(\Phi_i) - 2) * (4 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) \supset (\text{Эп}\,(\Phi_i) - 2)\, \Delta\, (\text{Эп}\,(\Phi_i)) \supset$$
$$\supset (\text{Эп}\,(\Phi_i) - 2) * \text{Эп}\,(\Phi_{\eta(i)}) \supset (\text{Эп}\,(\Phi_i) - 2)\, \Delta\, \text{Эп}\,(\Phi_{\eta(i)}) \supset$$
$$\supset (-A_{\eta(i)});$$

$$L''_i = \Lambda O_{\frac{\text{Эл}\,(\Phi_i) + \text{Эп}\,(\Phi_i)}{2}\,\Delta\,\text{Эп}\,(\Phi_i)} ((\text{Эп}\,(\Phi_i) + A_i) \supset 0\Delta$$
$$\Delta\, (\text{Эп}\,(\Phi_{\eta(i)}) - A_{\eta(i)}) \supset 0);$$

далее при любом $i > 1$ кривая R'_i (соответетственно R''_i) получается посредством склеивания кривых K'_i и L'_i (соответственно, K''_i и L''_i), и, наконец

$$R'_0 = \Lambda O_{\Phi_0} (0\supset 0\Delta 0 \supset (-A_{\eta(0)}) * 0 \supset (-A_{\eta(0)})\, \Delta$$
$$\Delta\, \text{Эп}\,(\Phi_{\eta(0)}) \supset (-A_{\eta(0)})),$$
$$R''_0 = \Lambda O_{\Phi_0} (0\supset 0\Delta\, (\text{Эп}\,(\Phi_{\eta(0)}) - A_{\eta(0)}) \supset 0),$$
$$R'_1 = \Lambda O_{\Phi_1} (1 \supset (-A_1)\, \Delta\, 1 \supset 0),$$
$$R''_1 = \Lambda O_{\Phi_1} ((1 - A_1) \supset 0\, \Delta 1 \supset 0).$$

Очевидно, что для каждой из последовательностей R' и R'' удовлетворены условия „Теоремы о склеивании“ (см., например, [1], стр. 479), а потому можно построить кривые H' и H'', заданные на $0\Delta 1$ и такие, что для всякого i имеют место равенства $H'(t) = R'_i(t)$, $H''(t) = R''_i(t)$ при каждом $t \in \Phi_i$. Легко проверить, что H' и H'' суть простые дуги, не пересекающиеся друг с другом, не содержащие точек открытого квадрата $1 \triangledown 3 \supset (-1) \triangledown 1$ и такие, что $H'(0) = H''(0) = 0\supset 0$, $H'(1) = H''(1) = 1\supset 0$.

Построим, наконец, кривую S на сегменте $0\Delta 1$, такую что при любом $x \in 0\Delta 1$

$$S(x) = H'(2x) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

$$S(x) = H''(2 - 2x) \text{ при } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1.$$

Ясно, что S — несамопересекающаяся замкнутая кривая, определенная на $0\Delta 1$.

Докажем, что S не имеет угловой функции относительно точки $2\supset 0$ (то, что точка $2\supset 0$ удалена от S, следует из построения S). Этим будет, очевидно, завершено доказательство теоремы.

Допустим, что S имеет угловую функцию φ относительно $2\supset 0$. Из определения кривой H' и кривых K'_i при $i > 1$ следует, что для любого $i > 1$ при

$$x \in \frac{1}{2} \cdot Эл\,(\Phi_i) \Delta \frac{1}{4} \cdot (Эл\,(\Phi_i) + Эп\,(\Phi_i))$$

значения $\varphi(x)$ находятся в промежутке вида

$$\left(2\pi q + \frac{3\pi}{4}\right) \nabla \left(2\pi q + \frac{5\pi}{4}\right)$$

при некотором целом q; с другой стороны, на сегменте

$$\frac{1}{4} \cdot (Эл\,(\Phi_i) + Эп\,(\Phi_i)) \Delta \frac{1}{2} Эп\,(\Phi_i))$$

кривая S представляет собой линейный образ цепочки отрезков

$$Эп\,(\Phi_i) \,\sigma A_i \Delta Эп\,(\Phi_i) \,\sigma\, (2 - Эп\,(\Phi_i)) * Эп\,(\Phi_i) \,\sigma$$
$$\sigma\, (2 - Эп\,(\Phi_i)) \Delta (4 - Эп\,(\Phi_i)) \,\sigma\, (2 - Эп\,(\Phi_i)) * (4 -$$
$$- Эп\,(\Phi_i)) \,\sigma\, (2 - Эп\,(\Phi_i)) \Delta (4 - Эп\,(\Phi_i)) \,\sigma\, (Эп\,(\Phi_i) -$$
$$- 2)) * (4 - Эп\,(\Phi_i)) \,\sigma\, (Эп\,(\Phi_i) - 2) \Delta (Эп\,(\Phi_{\eta(i)}) \,\sigma$$
$$\sigma\, (Эп\,(\Phi_i) - 2)) * (Эп\,(\Phi_{\eta(i)}) \,\sigma\, (Эп\,(\Phi_i) - 2)) \Delta$$
$$\Delta Эп\,(\Phi_{\eta(i)}) \,\sigma\, (- A_{\eta(i)}).$$

Отсюда вытекает, что для всякого $i > 1$ осуществимо целое q, такое что имеют место соотношения

$$2\pi q + \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2} Эл\,(\Phi_i)\right) \leqslant 2\pi q + \frac{5\pi}{4},$$

$$2\pi (q-1) + \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2} Эп\,(\Phi_i)\right) \leqslant 2\pi (q-1) + \frac{5\pi}{4}.$$

Но тогда для всякой системы натуральных чисел $(i_1, i_2, \cdots. i_k)$, больших 1 и удовлетворяющих условию $Эп\,(\Phi_{i_j}) = Эл\,(\Phi_{i_{j+1}})$ при $1 \leqslant j < k$, осуществимо целое число q, такое что

$$2\pi (q-j) + \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2} \cdot Эл\,(\Phi_{i_j})\right) \leqslant 2\pi (q-j) + \frac{5\pi}{4}$$

при всех j от 1 до k. Следовательно, для всякой системы сегментов $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \cdots, \Phi_{i_k}$, удовлетворяющей указанным условиям, имеем

$$2\pi (k-1) - \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2} \cdot Эл\,(\Phi_{i_1})\right) -$$
$$- \varphi\left(\frac{1}{2} Эл\,(\Phi_{i_k})\right) \leqslant 2\pi (k-1) + \frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь только что установленными соотношениями, мы можем теперь построить алгорифм θ, применимый ко всякому слову вида $i * j$, где i и j — натуральные числа и такой, что при любых натуральных i и j $\theta(i * j) = \Lambda$, если Φ_i и Φ_j связны, и $\theta(i * j) \neq \Lambda$ — в противном случае. Для этого достаточно построить алгорифм ξ^*, такой что при любых натуральных i и j

$$\xi^*(i * 0) = i,$$
$$\xi^*(i * (j+1)) = \xi(\xi^*(i * j)),$$

после чего алгорифм θ определяется следующими соотношениями:

$$\theta(i * i) = \Lambda;\ \theta(i * j) = \theta(\xi(i) * j) = \theta(\eta(i) * j) =$$
$$= \theta(i * \xi(i)) = \theta(i * \eta(i)),$$

если $i > 1$, $j > 1$ и осуществимо натуральное число

$$k \leqslant \left[D^+ \left(\left(\left| \frac{\varphi\left(\frac{1}{2}\,\text{Эл}(\Phi_i)\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\,\text{Эл}(\Phi_j)\right)}{2\pi} \right| + 2 \right) * 0 \right) \right],$$

такое что

$$\text{Эл}(\Phi_{\xi^*(i * k)}) = \text{Эл}(\Phi_j) \vee \text{Эл}(\Phi_{\xi^*(j * k)}) =$$
$$= \text{Эл}(\Phi_i),\ \text{то}\ \theta(i * j) = \Lambda,$$

если $i > 1$, $j > 1$, и невозможно натуральное число k с указанными свойствами, то $\theta(i * j) = 1$. Легко проверить, что построенный таким образом алгорифм θ удовлетворяет перечисленным выше условиям. Однако такой алгорифм невозможен в силу леммы.

Доказательство теоремы окончено.

Аналогичным образом можно показать, что всякая точка, принадлежащая открытому квадрату $1 \triangledown 3\tau\ (-1) \triangledown 1$, обладает таким же свойством, какое мы установили в отношении точки $2\triangledown 0$. С другой стороны, можно показать, что существуют точки, внешние относительно кривой S, а также и точки, внутренние относительно нее.

Формулировка основной теоремы настоящей статьи была опубликована в [7].

Вычислительный центр
АН Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Поступила 9.XI.1975

Ս. Ն. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ. Կոնստրուկտիվ փակ կորի նկատմամբ արտաքին և ներքին կետի գաղափարների մի հատկության մասին (*ամփոփում*)

Ապացուցվում է, որ գոյություն ունի ինքն իր հետ չհատվող կոնստրուկտիվ փակ կոր, որի համար նրանից հեռացված ինչ-որ կետ ոչ արտաքին է և ոչ ներքին։

S. N. MANUKIAN. *On a property of the notion of interior and exsterior point with respect to constructive closed curve* (summary)

It is proved, that there exists a constructive closed curve without selfintersections with respect to which some distant point is neither interior nor exterior.

ЛИТЕРТУРА

1. *И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин.* О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойстнах конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 458—502.

2. *И. Д. Заславский.* Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 385—457.

3. *И. Д. Заславский, С. Н. Манукян.* О разбиениях плоскости конструктивными кривыми, Труды ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ „Математические вопросы кибернетики", т. V, 1968, 26—138.

4. *Б. А. Кушнер.* Лекции по конструктивному математическому анализу, М., Изд. „Наука", 1973.

5. *С. Н. Манукян.* О конструктивных всюду плотных простых дугах, Известия АН Арм.ССР, сер. „Математика", VIII, № 4, 1973, 291—305.

6. *С. Н. Манукян.* О некоторых топологических особенностях конструктивных простых дуг, „Исследования по теории алгорифмов и математической логике", ВЦ АН СССР, том 2, 1976, М., 122—129.

7. *С. Н. Манукян.* Некоторые конструктивные кривые со специфическими геометрическими свойствами, Четвертая всесоюзная кофференция по математической логике, тезисы докладов и сообщений, 84, Кишинев, 1976.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 4, 1977 Математика

Г. А. МАРТИРОСЯН

ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Введение

В области $D^+ = \{|z| > 1\}$ рассмотрим эллиптическую систему

$$A_0 u_{xx} + A_1 u_{xy} + A_2 u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где A_0, A_1, A_2 — постоянные, вообще говоря комплексные, квадратные матрицы порядка n; $u(z) = (u_1(z), \cdots, u_n(z))$ — искомая комплексная вектор-функция.

Обозначим через $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ корни характеристического уравнения

$$\det(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2) = 0,$$

а через $k_1, \cdots, k_m$ — соответствующие кратности, причем

$$\operatorname{Im} \lambda_j > 0 \text{ при } j = 1, \cdots, \nu,$$
$$\operatorname{Im} \lambda_j < 0 \text{ при } j = \nu + 1, \cdots, m.$$

Предположим, что система (1) правильно эллиптическая, т. е.

$$k_1 + \cdots + k_\nu = k_{\nu+1} + \cdots + k_m = n. \tag{2}$$

Будем говорить, что функция $\varphi(z)$, заданная в области $|z| \geqslant 1$ принадлежит классу $H^*(t_1, \cdots, t_e)$ ($t_1, \cdots, t_e$ — некоторые фиксированные точки на окружности $\Gamma = \{|z| = 1\}$), если $\varphi(z)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки и представляется в виде

$$\varphi(z) = \frac{\varphi^*(z)}{(z - t_1)^\alpha \cdots (z - t_e)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

где $\varphi^*(z)$ удовлетворяет условию H (Гельдера) (см. [1], стр. 18) в любом кольце $1 \leqslant |z| \leqslant R$.

Далее скажем, что функция $\varphi(z)$, заданная в области $|z| \geqslant 1$, принадлежит классу $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$, если $\varphi(z)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки, а частные производные первого порядка $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ принадлежат классу $H^*(t_1, \cdots, t_e)$.

В настоящей работе рассматривается следующая граничная задача: найти в области D^+ дважды непрерывно дифференцируемое решение системы (1), принадлежащее классу $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$\alpha(t)\, u_x(t) + \beta(t)\, u_y(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{4}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — квадратные комплексные матрицы порядка n, заданные на Γ и удовлетворяющие условию Липшица на каждой замкнутой дуге $t_k t_{k+1}$ $(k = 1, \cdots, e;\ t_{k+1} = t_1)$, а в точках t_k могут иметь разрывы первого рода; $f(t)$ — заданная вектор-функция на Γ, принадлежащая классу H_ε (см. [1], стр. 32 или [2], стр. 92), т. е. $f(t)(t - t_1)^\varepsilon \cdots (t - t_e)^\varepsilon$ удовлетворяет условию H на Γ для любого положительного числа ε.

В ходе решения задачи (1), (4) будем ставить некоторые условия на $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и докажем, что при выполнении этих условий задача (1), (4) нетерова, т. е. однородная задача ($f(t) \equiv 0$), имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача (1), (4) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется конечное число условий ортогональности на $f(t)$.

В § 1 доказываются две леммы и приводится общее решение системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$. В работе Н. Е. Товмасяна (см. [3], стр. 5) и в монографии А. В. Бицадзе (см. [4], стр. 111) приведены общие представления решений системы (1). Для нашей цели нам нужно построить общее решение системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$ и в специальном виде. Затем в § 2 граничная задача (1), (4) приводится к задаче Гильберта с разрывными коэффициентами (см. [2], стр. 95—127). В § 3 дается эффективное решение граничной задачи (1), (4) в случае, когда $\alpha(t)$, $\beta(t)$ кусочно-постоянные комплексные матрицы с двумя точками разрыва.

§ 1. Общее решение системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$

Для построения общего решения системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots$ $\cdots, t_e)$ докажем следующие две леммы.

Лемма 1. *Если $\varphi(z)$ — аналитическая функция класса $H^*(t_1, \cdots, t_e)$ в области $|z| \leq 1$*, то*

$$\lim_{z \to t_0} (1 - |z|)^r \varphi^{(r)}(z) = 0; \quad t_0 \in \Gamma, \quad t_0 \neq t_k \ (k = 1, \cdots, e), \tag{5}$$

где $r = 1, 2, \cdots$.

Лемма 2. *Если $\varphi(z)$ — аналитическая функция класса $H^*(t_1, \cdots, t_e)$ в области $|z| < 1$, то функция $(1 - |z|)^r \varphi^{(r)}(z)$ также принадлежит классу $H^*(t_1, \cdots, t_e)$.*

Эти леммы дают возможность построить общее решение системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$, так чтобы произвольные функции, входящие в общее решение, принадлежали классу $H^*(t_1, \cdots, t_e)$, а граничные значения $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ на Γ имели простой вид.

---

* Класс функций $H^*(t_1, \cdots, t_e)$ в области $|z| < 1$ определяется аналогично.

Перейдем к доказательству лемм 1 и 2.

1°. Доказательство леммы 1. Пусть $\varphi(z)$ — аналитическая функция класса $H^*(t_1, \cdots, t_e)$. Если $t_0 \neq t_k$ $(k=1, \cdots, e)$, то в достаточно малой окрестности этой точки $\varphi(z)$ принадлежит классу H.

По интегральной формуле Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \quad |z|<1, \tag{6}$$

где γ — окружность радиуса $(1-|z|)$ и с центром z. Отсюда имеем

$$\varphi^{(r)}(z) = \frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{(t-z)^{r+1}}\,dt.$$

Поэтому, так как $\varphi(z) \in H$ и $|t-z| = 1-|z|$ при $t \in \gamma$, будем иметь следующую оценку:

$$|(1-|z|)^r \varphi^{(r)}(z)| \leqslant C(1-|z|)^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1. \tag{7}$$

Отсюда вытекает равенство (5).

2°. Доказательство леммы 2. Вначале покажем, что если $\varphi(z)$ — аналитическая функция класса H в области $\{|z|\leqslant 1\}$, то $(1-|z|)^r \times \varphi^{(r)}(z) \in H$.

Пусть z_1, z_2 — произвольные точки круга $\{|z|<1\}$ $(r_1 = |z_1| < 1$, $r_2 = |z_2|<1)$. Для определенности предположим, что $r_1 > r_2$.

Возможны два случая:

1) $1-r_1 \leqslant 2|z_1 - z_2|$,

отсюда

$$1-r_2 \leqslant |z_1-z_2| + (1-r_1) \leqslant 3|z_1-z_2|.$$

Из этих неравенств, в силу (7) получим опенку

$$|\varphi^{(r)}(z_1)(1-|z_1|)^r - \varphi^{(r)}(z_2)(1-|z_2|)^r| \leqslant C|z_1-z_2|^{\alpha}; \tag{8}$$

2) $$1-r_1 > 2|z_1-z_2|. \tag{9}$$

Оценим разность

$$\varphi^{(r)}(z_1)(1-|z_1|)^r - \varphi^{(r)}(z_2)(1-|z_2|)^r = J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \varphi^{(r)}(z_2)[(1-r_1)^r - (1-r_2)^r], \quad J_2 = [\varphi^{(r)}(z_1) - \varphi^{(r)}(z_2)](1-r_1)^r.$$

По формуле Лагранжа имеем

$$(1-r_1)^r - (1-r_2)^r = r(1-r^*)^{r-1}(r_2-r_1),$$

где $r_2 < r^* < r_1$.

Отсюда на основании (7) и (9) для J_1 будем иметь

$$|J_1| = |r\varphi^{(r)}(z_2)(1-r^*)^{r-1}(r_2-r_1)| \leqslant r(r_1-r_2)|\varphi^{(r)}(z_2)(1-r_2)^{r-1}| \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{r_1-r_2}{1-r_2}(1-r_2)^{\alpha} = C\left(\frac{r_1-r_2}{1-r_2}\right)^{1-\alpha}(r_1-r_2)^{\alpha} < C|z_1-z_2|^{\alpha}.$$

Теперь оценим J_2. В силу (6) имеем

$$\varphi^{(r)}(z_j) = \frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_2)}{(\zeta - z_j)^{r+1}}\, d\zeta \ (j=1,\ 2),$$

где γ — окружность с центром z_2 и радиусам $1-r_2$ (из (9) ясно, что z_1 лежит внутри γ).

Поэтому

$$\varphi^{(r)}(z_1) - \varphi^{(r)}(z_2) = \frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}[\varphi(\zeta)-\varphi(z_2)] \times$$

$$\times \frac{(z_1-z_2)\left[\sum\limits_{k=0}^{r}(\zeta-z_2)^{r-k}(\zeta-z_1)^k\right]}{[(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)]^{r+1}}\, d\zeta. \tag{10}$$

В силу неравенств (9), при $\zeta \in \gamma$ имеем

$$|\zeta - z_1| > \frac{1}{2}(1-r_2); \ |\zeta - z_1| < 2(1-r_2). \tag{11}$$

Так как $|\lambda - z_2| = 1-r_2$; $|\varphi(\zeta)-\varphi(z_2)| < C(1-r_2)^\alpha$, при $\zeta \in \gamma$, то из соотношений (10), (11) для J_2 получим следующую оценку:

$$|J_2| < C_0(1-r_1)^r(1-r_2)^\alpha\, |z_1 - z_2|\, \frac{(1-r_2)^r(1-r_2)}{(1-r_2)^{2r+2}} =$$

$$= C_0\left(\frac{1-r_1}{1-r_2}\right)^r\left(\frac{|z_1-z_2|}{1-r_2}\right)^{1-\alpha}|z_1-z_2|^\alpha < C_1|z_1-z_2|^\alpha.$$

Из оценок, полученных для J_1 и J_2, вытекает оценка

$$|J_1 + J_2| < C\,|z_1 - z_2|.$$

Отсюда и из (8) имеем

$$(1-|z|)^r\varphi^{(r)}(z) \in H. \tag{12}$$

Пусть теперь $\varphi(z) \in H^*(t_1, \cdots, t_e)$. Ясно, что лемму 2 достаточно доказать для $e=1$.

Утверждение леммы 2 будет доказано, если покажем, что

$$\psi(z) \overset{\text{def}}{=} (z-t_1)^{\alpha+\varepsilon}(1-|z_2|)^r\varphi^{(r)}(z)$$

принадлежит классу H, где ε — произвольное положительное число.

В силу (3) ($e=1$) для $\psi(z)$ получим сумму, в которой каждое слагаемое имеет вид

$$\text{const}\,(1-|z|)^{r-k}\varphi^{*\,(r-k)}(z)\left(\frac{1-|z|}{z-t_1}\right)^k(z-t_1)^\varepsilon,$$

а так как $\varphi^*(z) \in H$, то согласно (12)

$$(1-|z|)^{r-k}\varphi^{*\,(r-k)}(z) \in H.$$

Таким образом, осталось доказать, что

$$(z-t_1)^{\varepsilon}\left(\frac{1-|z|}{z-t_1}\right)^k \in H$$

или, что то же самое

$$(z-t_1)^{\delta}\,\frac{1-|z|}{z-t_1}\in H, \left(\delta=\frac{\varepsilon}{k}\right),$$

которое проверяется непосредственно.

Итак, лемма 2 доказана.

Замечание 1. Утверждения лемм 1 и 2 остаются в силе, если вместо функции $\psi(z)$ взять аналитическую функцию относительно аргумента $z+\bar{\mu}\bar{z}$ или $\bar{z}+\mu z$, где μ, $\tilde{\mu}$ — произвольные комплексные числа ($|\tilde{\mu}|<1$, $|\mu|<1$; $|z|>1$).

3°. Теперь построим общее решение системы (1). Без ограничения общности будем предполагать, что $A_2=-E$, где E — n-мерная единичная матрица.

В обозначениях

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}=v_k;\ \frac{\partial u_k}{\partial y}=v_{n+k},\ (k=1,\cdots,n) \tag{13}$$

система (1) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial y}=A\,\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{14}$$

где

$$v=(v_1,\cdots,v_{2n});\ A=\begin{Vmatrix}0 & E\\ A_0 & A_1\end{Vmatrix}. \tag{15}$$

Как известно, существует такая неособая матрица B, что преобразование искомого вектора $v(z)$

$$v=B\omega,\ \omega=(\omega_1,\cdots,\omega_{2n}) \tag{16}$$

приводит систему (16) к каноническому виду

$$\frac{\partial\omega_{e_j+k}}{\partial y}=\lambda_j\,\frac{\partial\omega_{e_j+k}}{\partial x}-\alpha_{j,\,k-1}\,\frac{\partial\omega_{e_j+k-1}}{\partial x}, \tag{17}$$

где $k=k_1,\cdots,k_j$; $e_1=0$; $e_l=k_1+\cdots+k_{l-1}$; $\alpha_{j0}=0$, $\alpha_{jk}=0$ или 1, при $k\geqslant 1$.

Известно, что если решение $u(z)$ системы (1) ограничено в окрестности $z=\infty$, то u_x и u_y исчезают в бесконечности, т. е. стремятся к нулю при $z\to\infty$. Поэтому, согласно обозначению (13) и преобразованию (16), решения системы (17) мы должны искать в классе функций $H^*(t_1,\cdots,t_e)$, исчезающих в бесконечности.

Общее решение уравнений системы (17), соответствующее индексу $k=1$, в области D^+, дается формулой

$$\omega_{e_j+1}(z) = \varphi_{e_j+1}(z + \mu_j \bar{z}), \quad j \leqslant \nu, \tag{18}$$

где $\mu_j = \dfrac{i - \lambda_j}{i + \lambda_j}$, причем $|\mu_j| < 1$, а $\varphi_{e_j+1}(z + \mu_j \bar{z})$ — произвольная аналитическая функция относительно аргумента $z + \mu_j \bar{z}$, при $|z| > 1$, исчезающая в бесконечности, т. е. $\varphi_{e_j+1}(\zeta)$—аналитическая функция в области D_j, являющейся образом D^+ при отображении $\zeta = z + \mu_j \bar{z}$.

В случае $\operatorname{Im} \lambda_j < 0$

$$\omega_{e_j+1}(z) = \varphi_{e_j+1}(\mu_j z + \bar{z}), \quad j > \nu, \tag{19}$$

где на этот раз $\mu_j = \dfrac{i + \lambda_j}{i - \lambda_j}$ $(j > \nu)$; $|\mu_j| < 1$, а $\varphi_{e_j+1}(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция в области D_j (D_j—образ D^+ при отображении $\zeta = \mu_j z + \bar{z}$), исчезающая в бесконечности.

Пусть $\tilde{f}(z + \tilde{\mu}\bar{z})$, $\tilde{\varphi}(z + \tilde{\mu}\bar{z})$, $f(\mu z + \bar{z})$, $\varphi(\mu z + \bar{z})$ — некоторые аналитические функции своих аргументов, при $|z| > 1$, где

$$\tilde{\mu} = \frac{i - \tilde{\lambda}}{i + \tilde{\lambda}} \ (\operatorname{Im} \tilde{\lambda} > 0), \quad \mu = \frac{i + \lambda}{i - \lambda} \ (\operatorname{Im} \lambda < 0),$$

λ, $\tilde{\lambda}$ — некоторые комплексные числа). Ясно, что $|\tilde{\mu}| < 1$, $|\mu| < 1$. Легко убедиться, что в области D^+ общие решения уравнений

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} = (\bar{z} - \tilde{f}(z + \tilde{\mu}\bar{z}))^r \, \tilde{\varphi}(z + \tilde{\mu}\bar{z}), \tag{20}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \omega}{\partial x} = (z - f(\mu z + \bar{z}))^r \, \varphi(\mu z + \bar{z}), \quad (r = 0, 1, 2, \cdots)$$

даются формулами

$$\tilde{\omega}(z) = \tilde{\psi}(z + \tilde{\mu}\bar{z}) - \frac{1}{(r+1)(i + \tilde{\lambda})} (\bar{z} - \tilde{f}(z + \tilde{\mu}\bar{z}))^{r+1} \tilde{\varphi}(z + \tilde{\mu}\bar{z}),$$

$$\omega(z) = \psi(\mu z + \bar{z}) + \frac{1}{(r+1)(i - \lambda)} (z - f(\mu z + \bar{z}))^{r+1} \varphi(\mu z + \bar{z}), \tag{21}$$

где $\tilde{\psi}(z + \tilde{\mu}\bar{z})$ и $\psi(\mu z + \bar{z})$ — произвольные аналитические функции своих аргументов при $|z| > 1$.

Чтобы получить общее решение системы (17) поступаем следующим образом: подставив $\omega_{e_j+1}(z)$ ((18), (19)) в (17) (при $k = 2$) и используя формулу (21) при $r = 0$, получим $\omega_{e_j+2}(z)$, подставив которое в (17) (при $k = 3$) и используя формулу (21) при $r = 1$, получим $\omega_{e_j+3}(z)$ и т. д.

Таким образом, решение системы (17) получается в следующем виде:

$$\omega_{e_j+k}(z)=\varphi_{e_j+k}(z+\mu_j\bar z)+\sum_{r=1}^{k-1}\gamma_{jkr}\,[(\bar z-f_j(z+\mu_j\bar z))^r\varphi'_{e_j+k-r}\times$$

$$\times(z+\mu_j\bar z)]_x^{(r-1)},\ j\leqslant\nu,$$

$$\omega_{e_j+k}(z)=\varphi_{e_j+k}(\mu_j z+\bar z)+\sum_{r=1}^{k-1}\sigma_{jkr}[(z-f_j\ \ (\mu_j z+\bar z))^r\varphi'_{e_j+k-r}\times$$

$$\times(\mu_j z+\bar z)]_x^{(r-1)},\ j>\nu, \tag{22}$$

где

$$\gamma_{jkr}=\alpha_{j,\,k-1},\cdots,\alpha_{j,\,k-r}\frac{2i\,(-1)^r}{r!\,(i+\lambda_j)^{r+1}},\ j\leqslant\nu, \tag{23}$$

$$\sigma_{jkr}=\alpha_{j,\,k-1},\cdots,\alpha_{j,\,k-r}\frac{2i}{r!\,(i-\lambda_j)^{r+1}},\ j>\nu,$$

$\varphi_{e_j+k}(\zeta)$ — произвольные аналитические функции в области D_j, а $f_j(\zeta)$ — произвольные фиксированные аналитические функции в области D_j, исчезающие в бесконечности.

В (22) через $\varphi'(\zeta)$ обозначена производная функции $\varphi(\zeta)$ относительно своего аргумента, а символом $[f(z,\bar z)]_x^{(r)}$—производная порядка r функции $f(z,\bar z)$ относительно x. В правой части выражения (22), при $k=1$ суммирование происходит от 1 до 0. В этих случаях в (22) и в дальнейшем будем считать, что сумма равна нулю.

Теперь определим функции $f_j(\zeta)$, входящие в формулу (22) так, чтобы функции

$$\bar z-f_j(z+\mu_j\bar z),\ j\leqslant\nu;\ \ z-f_j\ \ (\mu_1 z+\bar z),\ j>\nu$$

стремились к нулю при $|z|\to 1$.

Рассмотрим аналитические функции

$$\zeta=\psi_j(z)\overset{\text{def}}{=}z+\frac{\mu_j}{z},\ |z|\geqslant 1,\ j\leqslant\nu,$$

$$\zeta=\psi_j(z)\overset{\text{def}}{=}\mu_j z+\frac{1}{z},\ |z|\leqslant 1,\ j>\nu.$$

Ясно, что

$$\psi_j\colon D^+\to D_j,\ j\leqslant\nu,$$

$$\psi_j\colon D^-\to D_j,\ j>\nu;\ D^-=\{|z|<1\},$$

более того, оба отображения являются взаимно однозначными, следовательно, существуют обратные отображения:

$$h_j\colon D_j \to D^+,\ j \leqslant \nu,\ h_j\colon D_j \to D^-,\ j > \nu,$$

а это означает, что

$$h_j\left(z+\frac{\mu_j}{z}\right) \equiv z,\ |z| \geqslant 1,\ j \leqslant \nu,\ h_j\left(\mu_j z+\frac{1}{z}\right) \equiv z,\ |z| \leqslant 1,\ j > \nu.$$

Теперь легко убедиться, что функции

$$f_j(z+\mu_j \bar{z}) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{h_j(z+\mu_j z)},\ j \leqslant \nu,\ |z| > 1,$$

$$f_j(\mu_j z+\bar{z}) \overset{\text{def}}{=} h_j(\mu_j z+\bar{z}),\ j > \nu,\ |z| > 1 \tag{24}$$

удовлетворяют нужным нам требованиям.

В дальнейшем в формуле (22) в качестве функций $f_j(\zeta)$ будем брать функции, определенные равенством (24).

Из определения функций $f_j(\zeta)$ следуют равенства

$$\bar{z} - f_j(z+\mu_j \bar{z}) = (|z|-1)\,\gamma_j(z, \bar{z}),\ j \leqslant \nu;\ z - f_j(\mu_j z+\bar{z}) =$$
$$= (|z|-1)\,\gamma_j(z, \bar{z}),\ j > \nu,$$

где $\gamma_j(z, \bar{z})$ ограничены в окрестности окружности Γ.

Далее, в силу лемм 1, 2 и замечания 1 не трудно убедиться, что в общем решении (22) $\omega_{e_j+k}(z)$ принадлежат классу $H^*(t_1, t_2, \cdots, t_e)$ и исчезают в бесконечности тогда и только тогда, когда $\varphi_{e_j+k}(\zeta)$ принадлежат классу $H^*(t_1, \cdots, t_e)$ и исчезают в бесконечности, причем

$$\omega_{e_j+k}(t) = \varphi_{e_j+k}(t+\mu_j \bar{t}),\ j \leqslant \nu,\ t \in \Gamma,$$

$$\omega_{e_j+k}(t) = \varphi_{e_j+k}(\mu_j t+\bar{t}),\ j > \nu,\ t \in \Gamma. \tag{25}$$

Теперь, исходя из общего решения (22) системы (17), на основании (13), (16) найдем общее решение системы (14) в классе

$$H^*(t_1, \cdots, t_e).$$

Обозначим через $b_k = (b_{1k} \cdots b_{2n,\,k})$ k-ый столбец матрицы B и введем векторы

$$\delta_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix};\quad \theta_k = \begin{pmatrix} b_{n+1,\,k} \\ \vdots \\ b_{2n,\,k} \end{pmatrix},\ k=1, \cdots, 2n. \tag{26}$$

Так как матрица A имеет вид (15), а преобразование $v = B\omega$ приводит систему (14) к системе (17), то векторы δ_k и θ_k связаны соотношениями

$$\theta_{e_{j+1}} = \lambda_j \delta_{e_{j+1}},\ \theta_{e_j+r} = \lambda_j \delta_{e_j+r} + a_{jr}\,\delta_{l_j+r+1},\ r=1, \cdots, k_j-1. \tag{27}$$

В силу (13) и (16), из (22) непосредственно получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{k_j} \delta_{e_j+k} \Big\{ \varphi_{e_j+k}(z+\mu_j \bar{z}) &+ \sum_{r=1}^{k-1} \gamma_{jkr} [(\bar{z} - f_j(z+\mu_j \bar{z}))^r \times \\
\times \varphi'_{e_j+k-r}(z+\mu_j \bar{z})]_x^{(r-1)} \Big\} &+ \sum_{j=\nu+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} \delta_{e_j+k} \Big\{ \varphi_{e_j+k}(\mu_j z+\bar{z}) + \\
&+ \sum_{r=1}^{k-1} \sigma_{jkr} [(z - f_j(\mu_j z+\bar{z}))^r \varphi'_{e_j+k-r}(\mu_j z+\bar{z})]_x^{(r-1)} \Big\},
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{k_j} \theta_{e_j+k} \Big\{ \varphi_{e_j+k}(z+\mu_j \bar{z}) &+ \sum_{r=1}^{k-1} \gamma_{jkr} [(\bar{z} - f_j(z+\mu_j \bar{z}))^r \times \\
\times \varphi'_{e_j+k-r}(z+\mu_j \bar{z})]_x^{(r-1)} \Big\} &+ \sum_{j=\nu+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} \theta_{e_j+k} \Big\{ \varphi_{e_j+k}(\mu_j z+\bar{z}) + \\
&+ \sum_{r=1}^{k-1} \sigma_{jkr} [(z - f_j(\mu_j z+\bar{z}))^r \varphi'_{e_j+k-r}(\mu_j z+\bar{z})]_x^{(r-1)} \Big\}.
\end{aligned}
$$

Далее, решая систему (28) относительно $u(z)$ в классе ограниченных и непрерывных функций, получим общее решение системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$.

Так как аналитические функции $\varphi_{e_j+k}(\zeta)$ исчезают в бесконечности, то

$$
\varphi_{e_j+k}(\zeta) = \frac{a_{e_j+k}}{\zeta} + \psi_{e_j+k}(\zeta), \quad \zeta \in D_j, \tag{29}
$$

где a_{e_j+k} — некоторые комплексные постоянные, а $\psi_{e_j+k}(\zeta)$ — аналитические функции в области D_j, удовлетворяющие условию:

$$
|\psi_{e_j+k}(\zeta)| \leqslant \frac{\text{const}}{|\zeta|^2}, \quad \zeta \in D_j. \tag{30}
$$

Подставим выражения $\varphi_{n_j+k}(\zeta)$ из (29) в (28) и полученное выражение разобьем на две части следующим образом:

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = V_{10}(z) + V_1(z); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = V_{20}(z) + V_2(z), \tag{31}
$$

где

$$
\begin{aligned}
V_{10}(z) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{k_j} \delta_{e_j+k} \Big\{ \frac{a_{e_j+k}}{z+\mu_j \bar{z}} &- \sum_{r=1}^{k-1} \gamma_{jkr}\, a_{e_j+k-r} \Big[\frac{\bar{z}^r}{(\mu_j \bar{z}+z)^2} \Big]_x^{(r-1)} + \\
+ \sum_{j=\nu+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} \delta_{e_j+k} \Big\{ \frac{a_{e_j+k}}{\mu_j z+\bar{z}} &- \sum_{r=1}^{k-1} \sigma_{jkr}\, a_{e_j+k-r} \Big[\frac{z^r}{(\mu_j z+\bar{z})^2} \Big]_x^{(r-1)} \Big\},
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$V_{20}(z)=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j}\theta_{e_j+k}\left\{\frac{a_{e_j+k}}{z+\mu_j\bar z}-\sum_{r=1}^{k-1}\gamma_{jkr}\,a_{e_j+k-r}\left[\frac{\bar z^r}{(z+\mu_j\bar z)^2}\right]_x^{(r-1)}\right\}+$$

$$+\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}\theta_{e_j+k}\left\{\frac{a_{e_j+k}}{\mu_j z+\bar z}-\sum_{r=1}^{k-1}\sigma_{jkr}\,a_{e_j+k-r}\left[\frac{z^r}{(\mu_j z+\bar z)^2}\right]_x^{(r-1)}\right\},$$

а функции $V_1(z)$ и $V_2(z)$, на основании (24) и (30), удовлетворяют неравенству (30).

Так как $V_{10}(z)$ и $V_{30}(z)$ получаются из (28) при

$$\varphi_{e_j+k}(\zeta)=\frac{a_{e_j+k}}{\zeta}\quad\text{и}\quad f_j(\zeta)=0,$$

то из вывода формул (22) и (28) следует, что $2n$-мерная вектор-функция $V_0(z)=(V_{10}(z),\ V_{20}(z))$ удовлетворяет системе (14). Следовательно

$$\frac{\partial V_{20}}{\partial x}=\frac{\partial V_{10}}{\partial y};\quad\frac{\partial V_2}{\partial x}=\frac{\partial V_1}{\partial y}. \tag{33}$$

Отсюда, так как $V_1(z)$, $V_2(z)$ удовлетворяют неравенству (30), то для системы

$$\frac{\partial\bar u_0}{\partial x}=V_1(z);\quad\frac{\partial\tilde u_0}{\partial y}=V_2(z)$$

существует непрерывное ограниченное решение, которое дается формулой

$$\bar u_0(z)=\int_{\infty}^{z}V_1(z)\,dx+V_2(z)\,dy. \tag{34}$$

Следовательно, система (31) в классе ограниченных и непрерывных функций будет иметь решение тогда и только тогда, когда в классе ограниченных и непрерывных функций имеет решение следующая система:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=V_{10}(z),\qquad \frac{\partial u_0}{\partial y}=V_{20}(z). \tag{35}$$

Легко проверить, что общее решение системы (35) в односвязной области $D^+-[1,\infty)$ выражается формулой

$$u_0(z)=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\left\{\left[\frac{i-\lambda_j}{2i}\,a_{e_j+k}+\frac{\alpha_{j,k-1}}{2i}\,a_{e_j+k-1}\right]\ln(z+\mu_j\bar z)+\right.$$

$$+\alpha_{j,k-1}a_{e_j+k-1}\frac{y}{z+\mu_j\bar{z}}-\sum_{r=2}^{k-1}\gamma_{jkr}a_{e_j+k-r}\left[\frac{\bar{z}^r}{(z+\mu_j\bar{z})^2}\right]_x^{(r-2)}\Bigg\}+$$

$$+\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\Bigg\{\left[\frac{i-\lambda_j}{2i}a_{e_j+k}-\frac{\alpha_{j,k-1}}{2i}a_{e_j+k-1}\right]\ln(\mu_j z+\bar{z})+$$

$$+\alpha_{j,k=1}a_{e_j+k-1}\frac{y}{\mu_j z+\bar{z}}-\sum_{r=2}^{k-1}\sigma_{jkr}a_{e_j+k-r}\left[\frac{z^r}{(\mu_j z+\bar{z})^2}\right]_x^{(r-2)}\Bigg\}+C_0. \tag{36}$$

Функция $u_0(z)$ в области D^+ будет ограничена и непрерывна тогда и только тогда, когда имеют место следующие равенства:

$$\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\left[(i+\lambda_j)a_{e_j+k}+\alpha_{j,k-1}a_{e_j+k-1}\right]=0,$$

$$\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\left[(i-\lambda_j)a_{e_j+k}-\alpha_{j,k-1}a_{e_j+k-1}\right]=0. \tag{37}$$

Таким образом, в силу (28), (31), (34), (36) общее решение системы (1) в классе $H_1^{\bullet}(t_1,\cdots,t_e)$ будет иметь следующий вид:

$$u(z)=u_0(z)+\int_{\infty}^{z}V_1(z)\,dx+V_2(z)\,dy, \tag{38}$$

где $u_0(z)$ определяется формулой (36) (постоянные a_j удовлетворяют равенствам (37)), а $V_1(z)$, $V_2(z)$ определяются из формул (28), (31), (32).

§ 2. Приведение граничной задачи (1), (4) к задаче Гильберта с разрывными коэффициентами

Вычисляя $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ на границе Г и подставляя их в условие (4), получим некоторую граничную задачу в классе $H^*(t_1,\cdots,t_e)$ для аналитических функций $\psi_{e_j+k}(\zeta)$, которую легко свести к задаче Гильберта.

На основании формул (25), (13), (16), (26) из (28), (29) для граничных значений u_x, u_y будем иметь

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_\Gamma=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{x=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\left[\frac{a_{e_j+k}}{t+\mu_j\bar{t}}+\psi_{e_j+k}(t+\mu_j\bar{t})\right]+\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\times$$

$$\times\left[\frac{a_{e_j+k}}{\mu_j t+\bar{t}}+\psi_{e_j+k}(\mu_j t+\bar{t})\right],\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_\Gamma=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j}\theta_{e_j+k}\left[\frac{a_{e_j+k}}{t+\mu_j\bar{t}}+\right.$$

$$+\psi_{e_j+k}(t+\mu_j\bar t)\Bigg]+\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}\theta_{e_j+k}\left[\frac{a_{e_j+k}}{\mu_j t+\bar t}+\psi_{e_j+k}(\mu_j t+\bar t)\right].$$

Подставляя полученные значения в граничное условие (4), получим

$$\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j}b_{e_j+k}(t)\,\psi_{e_j+k}(t+\mu_j\bar t)+\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}b_{e_j+k}(t)\,\psi_{e_j+k}(\mu_j t+\bar t)=g(t), \tag{39}$$

где

$$b_r(t)\overset{\text{def}}{=}\alpha(t)\,\delta_r+\beta(t)\,\theta_r,\quad r=1,\cdots,2n,$$

$$g(t)\overset{\text{def}}{=}f(t)-\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j}a_{e_j+k}\frac{b_{e_j+k}(t)}{t+\mu_j\bar t}-\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}a_{e_j+k}\frac{b_{e_j+k}(t)}{\mu_j t+\bar t}. \tag{40}$$

Далее, легко убедиться в том, что функции

$$F_{e_j+k}(z)\overset{\text{def}}{=}\psi_{e_j+k}\left(z+\frac{\mu_j}{z}\right),\ j\leqslant\nu,\ |z|>1,$$

$$F_{e_j+k}(z)\overset{\text{def}}{=}\psi_{e_j+k}\left(\mu_j z+\frac{1}{z}\right),\ j>\nu,\ |z|<1 \tag{41}$$

являются аналитическими функциями соответственно в областях D^+ и D^-.

В силу (2) можно ввести следующие обозначения:

$$\tilde F(z)\overset{\text{def}}{=}(F_1(z),\cdots,F_n(z)),\ |z|>1,$$

$$F(z)\overset{\text{def}}{=}(F_{n+1}(z),\cdots,F_{2n}(z)),\ |z|<1, \tag{42}$$

$$\chi(z)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases} z\tilde F(z), & |z|>1\\ z^{-2}F(z), & |z|<1,\end{cases}$$

$$\tilde B_0(t)=\|b_1(t),\cdots,b_n(t)\|,\quad B_0(t)=\|b_{n+1}(t),\cdots,b_{2n}(t)\|.$$

Предположим также, что

$$\det\tilde B_0(t)\neq0;\ \det B_0(t)\neq0\ \text{при любом}\ t\in\Gamma. \tag{43}$$

В обозначениях (41), (42) граничная задача (39) примет вид

$$\chi^+(t)=-t^3\tilde B_0^{-1}(t)\,B_0(t)\,\chi^-(t)+t\,\tilde B_0^{-1}(t)\,g(t). \tag{44}$$

Из условий, которым удовлетворяют матрицы $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и вектор $f(t)$, на основании (43) имеем, что граничная задача (44) есть задача Гильберта с разрывными коэффициентами (см. [2], стр. 35, 119).

Таким образом, решение задачи (1), (4) привели к хорошо изученной задаче Гильберта с разрывными коэффициентами для кусочно-аналитической вектор-функции, исчезающей в бесконечности.

Используя результаты теории задачи Гильберта с разрывными коэффициентами получим, что при выполнении условий (43) задача (1), (4) является нетеровой.

Приведенный метод решения задачи (1), (4) можно применить для решения следующей задачи:

$$\alpha(t)\, u_x(t) + \beta(t)\, u_y(t) + q(t)\, u(t) = f(t), \quad t \in \Gamma.$$

§ 3. Частный случай задачи (1), (4)

Предположим, что $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — кусочно-постоянные матрицы с двумя точками разрыва $t_1, t_2 \in \Gamma$. Тогда матрицы $\overline{B}_0(t)$ и $B_0(t)$ тоже будут кусочно-постоянными.

Пусть

$$\overline{B}_0(t) = \begin{cases} \overline{B}_1, & t \in \Gamma_1 \\ \overline{B}_2, & t \in \Gamma_2, \end{cases} \quad B_0(t) = \begin{cases} B_1, & t \in \Gamma_1, \\ B_2, & t \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{45}$$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \overline{B}_1 \chi(z), & |z| > 1 \\ -B_1 \chi(z), & |z| < 1, \end{cases} \tag{46}$$

где Γ_1 — часть окружности, заключенная между t_1, t_2, а Γ_2 — остальная часть.

В § 2 задачу (1), (4) привели к задаче (44). Задача Гильберта (44) в обозначениях (45), (46) примет вид

$$\Phi^+(t) = t^3 \Phi^-(t) + t g(t), \quad t \in \Gamma_1,$$

$$\Phi^+(t) = t^3 \overline{B}_1 \overline{B}_2^{-1} B_2 B_1^{-1} \Phi^-(t) + t \overline{B}_1 \overline{B}_2^{-1} g(t), \ t \in \Gamma_2. \tag{47}$$

Так как в силу условий (43) матрица

$$P \overset{\text{def}}{=} \widetilde{B}_1 \overline{B}_2^{-1} B_2 B_1^{-1}$$

неособая, то существует неособая матрица Q, которая приводит P к жордановой форме, т. е.

$$\overline{P} \overset{\text{def}}{=} Q^{-1} P Q = \begin{Vmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ \varepsilon_1 & \sigma_2 & & & \\ & \varepsilon_2 & \sigma_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_{n-1} & \sigma_n \end{Vmatrix}, \quad \sigma_k \neq 0 \ (k = 1, \cdots, n), \tag{48}$$

где $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ — собственные значения матрицы P (некоторые σ_k могут совпадать), а ε_j $(j = 1, \cdots, n-1)$ равны либо нулю, либо единице.

Введем функцию

$$T(z) = Q^{-1}\Phi(z). \tag{49}$$

Относительно кусочно-аналитической вектор-функции $T(z)$, исчезающей в бесконечности, из (47) получим граничную задачу, которая для компонентов вектор-функций $T(z) = (T_1(z), \cdots, T_n(z))$, в силу (48) имеет вид

$$\begin{cases} T_1^+(t) = t^3\, T_1^-(t) + h_1(t), & t \in \Gamma_1 \\ T_1^+(t) = \sigma_1 t^3\, T_1^-(t) + h_1(t), & t \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{50}$$

$$\begin{cases} T_{k+1}^+(t) = t^3\, T_{k+1}^-(t) + h_{k+1}(t), & t \in \Gamma_1 \\ T_{k+1}^+(t) = \sigma_{k+1}\, T_{k+1}^-(t) + \varepsilon_k t^3\, T_k^-(t) + h_{k+1}(t), & t \in \Gamma_2 \ (k = 1, \cdots, n-1), \end{cases} \tag{51}$$

где $h_1(t), \cdots, h_n(t)$ — компоненты вектор-функций

$$h(t) = \begin{cases} t\, Q^{-1}\, g(t), & t \in \Gamma_1 \\ tQ^{-1}\, \bar{B}_1\, \bar{B}_2^{-1}\, g(t), & t \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{52}$$

Граничная задача (50) является задачей сопряжения для кусочно-аналитической функции $T_1(z)$, исчезающей в бесконечности (см. [1], стр. 253—271).

Вычисляя индекс $\varkappa_1$ задачи (50), получим:

$$\varkappa_1 = -3, \text{ если } \sigma_1 > 0$$

и

$$\varkappa_2 = -2 \text{ — в остальных случаях.}$$

Следовательно, решение задачи (50) существует тогда и только тогда, когда соблюдены условия разрешимости

$$\int_\Gamma \frac{t^j\, h_1(t)}{x_1^+(t)}\, dt = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, -\varkappa_1 - 1, \tag{53}$$

где $x_1^+(t)$ — граничное значение канонической функции $X_1(z)$ задачи (50) (см. [1], стр. 257, 260).

При соблюдении этих условий решение (единственное) дается формулой (см. [1], стр. 261)

$$T_1(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_1(t)\, dt}{X_1^+(t)(t - z)}. \tag{54}$$

Подставляя $T_1(z)$ из (54) в (51) при $k = 1$, получим аналогичную задачу сопряжения для кусочно-аналитической функции $T_2(z)$, исчезающей в бесконечности и т. д.

При соблюдении соответствующих условий разрешимости (аналогичных (53)) для вычисления $T_{k+1}(z)$ получим рекуррентную формулу

$$T_{k+1}(z) = \frac{X_{k+1}(z)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{h_{k+1}(t) + \varepsilon_k t^3 \, T_k^-(t)}{X_{k+1}^+(t)(t-z)} \, dt, \tag{55}$$

$$(k = 1, \cdots, n-1)$$

где $X_{k+1}(z)$ — каноническая функция соответствующей задачи сопряжения.

Пусть r — ранг матрицы алгебраической системы (37), а n_0 — число действительных положительных чисел среди $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$.

Тогда для индекса $\varkappa_0$ задачи (1), (4) получим

$$\varkappa_0 = n - r - n_0.$$

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и постоянное внимание при её выполнении.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса
Поступила 24.I. 1976

Հ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Պուանկարեի խնդիր էլիպտիկ համակարգերի համար հարթության վրա (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է կոմպլեքս հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի էլիպտիկ համակարգ, որի համար դրվում է խզվող եզրային պայմաններով եզրային խնդիր։ Համակարգի լուծման համար ստացված ներկայացման օգնությամբ ուսումնասիրվող խնդիրը բերվում է Հիլբերտի խնդրին։

Իսկ երբ եզրային պայմանի գործակիցները կտոր առ կտոր հաստատուն մատրիցներ են, տրվում է խնդրի լուծման էֆեկտիվ մեթոդ։

H. A. MARTIROSIAN. *Pouancare's problem for the elyptic sistem on the plane* (summary)

A boundary problem for second order ellyptic system with constant complex coefficients is considered.

By means of a spicially developed representation for the solution the problem isr educed to Gilbert's problem with discontinous coefficients.

In the case, in which the coefficients ara piece wiseconstant matricies, an ellective solution is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, Изд. „Наука“, 1968.
2. *Н. П. Векуа.* Системы сингулярных интегральных уравнений, Н., 1970.
3. *Н. Е. Товмасян.* Об одном методе решения краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сборник, т. 89 (131), 1972, 599.
4. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Н., 1966.
5. *Н. Е. Товмасян.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, том II, №№ 1, 2, 1966.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS