ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference lise should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

Х. МАЛОНЕК

ТЕОРЕМЫ ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЁФА ДЛЯ РЕШЕНИЙ КОМПЛЕКСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Предметом настоящей работы является исследование поведения роста непрерывных решений некоторых комплексных дифференциальных неравенств с частными производными в угловом пространстве. Свойства этих решений, изложенные в § 1, делают возможным приводить все рассмотрения к случаю голоморфных функций.

В качестве разультата получены теоремы типа Фрагмена-Линделёфа. При допущении некоторого (зависящего только от угла раствора) максимального роста решений внутри углового пространства из ограниченности на границе следует их ограниченность внутри углового пространства. При этом классический случай голоморфных функций содержится как частный случай.

§ 1. Некоторые свойства решений комплексных дифференциальных неравенств с частными производными

Рассмотрим в области G комплексной плоскости $\mathbf{C}$ однозначные непрерывные решения $w(z)$ комплексных дифференциальных неравенств вида

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant K(z)\,|w(z)| \tag{1}$$

и

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant \tilde{K}(z) \tag{2}$$

(z^* означает сопряженное с z комплексное число).

Производная функции $w(z)$ понимается при этом как обобщенная производная в смысле Соболева. Кроме того допустим, что $K(z)$ и $\tilde{K}(z)$—определенные в $\mathbf{C}$ вещественные и неотрицательные функции, принадлежащие некоторому введенному И. Н. Векуа [9] пространству $L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p>2$. Если $K(z)$ и $\tilde{K}(z)$—заданные только в G функции, то предположим, что они вне G равняются нулю.

Класс дифференциальных неравенств (1) формально совпадает с классом дифференциальных неравенств, однозначными решениями которых являются введенные Л. Берсом [2] аппроксимативно-аналитические функции (approximatively analytic functions). Но, например, Х. Бегер [1] предполагает в случае неограниченной области G, что $K(z)$—вещественные неотрицательные и ограниченные сверху функции, для которых имеет место

$$K(z) = O(|z|^{-\sigma}) \text{ при } |z| \to \infty, \ \sigma > 1. \tag{3}$$

Легко показать, что такие $K(z)$ принадлежат некоторому пространству $L_{p,2}(\mathbf{C})$ (например, если $p = 2\sigma$), однако в каждом $L_{p,2}(\mathbf{C})$-пространстве существуют функции, для которых не выполнено условие (3). Это показывает следующее рассуждение.

По определению [см. [9], стр. 29] $f(z)$ принадлежит $L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p>2$, если она удовлетворяет условиям

1. $f(z) \in L_p(E_1)$, где $E_1 = \{z\colon |z| \leqslant 1\}$ и

2. $f_2(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)|z|^{-2} \in L_p(E_1)$.

Функция, удовлетворяющая этим условиям, но не удовлетворяющая условию (3), была бы, например, постоянная в E_1 и в остальной плоскости $\mathbf{C}$ неограниченная функция f от $|z| = r$, для которой

$$F(r) = \left|f\left(\frac{1}{r}\right)\right|^p r^{1-2p} \ (0 \leqslant r \leqslant 1)$$

является неограниченной, но интегрируемой функцией*. Тем самым класс дифференциальных неравенств (1) при условии

$$K(z) \in L_{p,2}(\mathbf{C}), \ p>2, \tag{4}$$

шире чем класс неравенств, который рассматривал Х. Бегер.

Отметим еще, что функция

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta = T_{\mathbf{C}}\, g, \ (\zeta = \xi + i\eta), \tag{5}$$

где

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{w(z)}\ \dfrac{\partial w(z)}{\partial z^*}, & \text{если } z \in G \setminus N, \\ 0, & \text{если } z \in N, \end{cases}$$

(N означает множество нулей функции $w(z)$ в G), определена, непре-

* $F(r)$ можно представить себе, например, в виде неотрицательной функции которая вне некоторых, содержащихся в $0 \leqslant r \leqslant 1$ интервалах

$$\delta_n \left(\frac{1}{n+1} < \delta_n < \frac{1}{n};\ n = 1, 2, 3, \cdots\right)$$

обращается в нуль. Во внутренности δ_n она является непрерывной функцией, принимающей в качестве максимума зависящие от $f(z)$ ($|z| \geqslant 1$) значения, которые вместе с n неограниченно возрастают. Интегрируемость функции $F(r)$ гарантируется тогда выбором достаточно малых δ_n.

рывна и ограничена на всей плоскости $\mathbf{C}^*$. Из основной леммы Векуа ([9], стр. 156) следует тогда, что $w(z)\, e^{-\omega(z)}$ является голоморфной функцией.

Перейдем теперь к свойствам аппроксимативно-аналитических функций, т. е. непрерывных (однозначных) решений (1) и непрерывных решений (2), которые позволяют приводить все к голоморфному случаю.

Аппроксимативно-аналитические функции допускают, во-первых, факторизацию [2] (в случае ограниченных областей ср. [8]), именно представляются в виде

$$w(z) = \Phi(z) \cdot w_0(z), \tag{6}$$

где $\Phi(z)$ — некоторая голоморфная функция, а $w_0(z) = e^{\omega(z)}$ и $\omega(z)$ определяется как в (5).

В случае непрерывных решений $w(z)$ неравенства (2) можно из них извлечь голоморфное слагаемое $\tilde{\Phi}(z)$, т. е. имеет место

$$w(z) = \tilde{\Phi}(z) + \bar{w}_0(z), \tag{7}$$

при этом

$$\bar{w}_0(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{\frac{\partial w(\zeta)}{\partial \zeta^*}}{\zeta - z}\, d\xi d\eta = T_{\mathbf{C}}\left(\frac{\partial w}{\partial z^*}\right)^{**}$$

и (7) следует в силу леммы Вейля из того факта, что

$$\frac{\partial (w - \tilde{w}_0)}{\partial z^*} = 0.$$

В обоих случаях функции $w_0(z)$ и $\bar{w}_0(z)$ определены, непрерывны и ограничены на всей плоскости $\mathbf{C}$.

В дальнейшем мы укажем некоторые оценки для функций, порожденных оператором $T_{\mathbf{C}}$.

Во-первых, приведем основанную на неравенстве Гельдера оценку при помощи нормы пространства $L_{p,2}(\mathbf{C})$ (см. [9], стр. 30). Мы обозначаем норму через $\|\cdot\|_{p,2}$.

---

* Надо, конечно, при этом предполагать, что быть может несобственный интеграл (5) абсолютно сходится. В нашем случае (4) было бы достаточно предположение, что $\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}$ принадлежит $L_{p,2}(\mathbf{C})$ (w и g полагаем равными 0 вне G), так как измеримая функция $|g(z)|^p$ на E_1 мажорируется интегрируемой функцией $K(z)^p$ и $\left|g\left(\frac{1}{z}\right)\right|^p \cdot |z|^{-2p}$ мажорируется функцией $K\left(\frac{1}{z}\right)^p \cdot |z|^{-2p}$. Тем самым обе функции являются интегрируемыми на E_1. Отсюда вытекает, что $g(z) \in L_{p,2}(\mathbf{C})$ и следовательно существует (5).

** О существовании интеграла ср. примечание 2.

Имеет место следующее

Предложение. Если функция $\varphi(z) \in L_{p,2}(C)$, удовлетворяет условию

$$|\varphi(z)| \leqslant K(z) \quad (\widetilde{K}(z))^*,$$

то выполняется неравенство ([9], стр. 60)

$$|T_C\,\varphi(z)| \leqslant M_p \|\varphi(z)\|_{p,2} \leqslant M_p \|K(z)\|_{p,2}, \tag{8}$$

причем M_p есть зависящая только от p постоянная. Она определяется ([9], стр. 54) таким образом:

$$M_p = \frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi(p-1)}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot 2^{\frac{p-2}{p}}. \tag{9}$$

Другую оценку для $T_C\,\varphi$ в случае, когда $K(z)$ принимает специальный вид (все, конечно, имеет место аналогично для $\widetilde{K}(z)$)

$$K(z) = \begin{cases} K & , \text{ если } |z| \leqslant r_0 \\ K\dfrac{r_0^\gamma}{|z|^\gamma}, & \text{ если } |z| \geqslant r_0 \ (\gamma > 2,\ r_0 > 0,\ K = \text{const}) \end{cases} \tag{10}$$

получается при помощи введения полярных координат. Эта граница вычисляется легче чем в первом случае, так как выражается довольно просто через величины K, r_0 и γ. Кроме того, она при некоторых условиях точнее чем первая граница, как будет показано в дальнейшем на примере.

Пусть $K(z)$ имеет вид (10). Тогда очевидно имеет место

$$|T_C\,\varphi| \leqslant \frac{1}{\pi}\iint\limits_C \frac{K(\zeta)}{|\zeta - z|}\,d\xi d\eta.$$

Если введем интегралы

$$I_1 = \iint\limits_{|\xi| < r_0} \frac{1}{|\zeta - z|}\,d\xi d\eta,$$

$$I_2 = \iint\limits_{|\xi| > r_0} \frac{1}{|\zeta|^\gamma\,|\zeta - z|}\,d\xi d\eta,$$

то тем самым получим

$$|T_C\,\varphi| \leqslant \frac{K}{\pi}\,(I_1 + r_0^\gamma I_2). \tag{11}$$

Легко сообразить, что

$$I_1 \leqslant 2\pi r_0. \tag{12}$$

---

* Как всегда имеется в виду, что $K(z)$ и $\widetilde{K}(z)$ принадлежат $L_{p,2}(C)$, $p > 2$.

Чтобы оценить I_2 рассмотрим круг радиуса $\rho > 0$, центр которого находится в точке z и два множества P и Q точек ζ, причем

$$Q = \{\zeta: |\zeta - z| \leqslant \rho \text{ и } |\zeta| \geqslant r_0\},$$
$$P = \{\zeta: |\zeta - z| \geqslant \rho \text{ и } |\zeta| \geqslant r_0\}.$$

Тогда получим

$$\iint\limits_Q \frac{1}{|\zeta - z||\zeta|^\gamma}\, d\xi d\eta \leqslant \iint\limits_{|\zeta - z| \leqslant \rho} \frac{1}{|\zeta - z|\, r_0^\gamma}\, d\xi d\eta = 2\pi \frac{\rho}{r_0^\gamma},$$

$$\iint\limits_P \frac{1}{|\zeta - z|\,|\zeta|^\gamma}\, d\xi d\eta \leqslant \iint\limits_{|\zeta| > r_0} \frac{1}{\rho\, |\zeta|^\gamma}\, d\xi d\eta = 2\pi \frac{1}{\rho\,(\gamma - 2)\, r_0^{\gamma - 2}}$$

и

$$I_2 = \iint\limits_Q + \iint\limits_P \leqslant \frac{2\pi}{r_0^{\gamma - 2}} \left(\frac{\rho}{r_0^2} + \frac{1}{\rho\,(\gamma - 2)}\right).$$

Как легко проверить, минимальное значение правой части неравенства достигается при $\rho = \frac{r_0}{\sqrt{\gamma - 2}}$, так что мы наконец получим

$$I_2 \leqslant \frac{4\pi}{r_0^{\gamma - 1}\sqrt{\gamma - 2}}. \tag{13}$$

(11), (12) и (13) вместе дают окончательную оценку

$$|T_C \varphi| \leqslant 2Kr_0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\gamma - 2}}\right), \tag{14}$$

если только $|\varphi(z)| \leqslant K(z)$ ((14) аналогично имеет место для $\tilde{K}(z)$).

В конце этого параграфа мы сравним обе оценки (8) и (14) в случае, когда $K(z)$ принимает вид (10). Для простоты считаем при этом $r_0 = 1$. Так как $K(z)$ по-видимому удовлетворяет условиям X. Бегера ($K(z)$ — вещественная, неотрицательная и ограниченная сверху функция, для которой выполняется (3)), то она принадлежит некоторому $L_{p,\,2}$(C)-пространству и (ср. [9], стр. 30)

$$\|K(z)\|_{p,\,2} = \|K(z)\|_p + \|K_2(z)\|_p, \quad p > 2,$$

где $K_2 = K\left(\frac{1}{z}\right)|z|^{-2}$ и $\|\cdot\|_p$ означает норму пространства $L_p(E_1)$.

В силу (10)

$$\|K(z)\|_{p,\,2} = K\pi^{\frac{1}{p}} + K\left(\frac{2\pi}{2 + (\gamma - 2)p}\right)^{\frac{1}{p}} = K\pi^{\frac{1}{p}}\left(1 + \left(\frac{2}{2 + (\gamma - 2)p}\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Вместе с (9) это дает (8) точное значение оценки при помощи $L_{p,\,2}$(C)-нормы, именно

$$|T_C \varphi| \leqslant 3K \cdot 2^{\frac{2p-3}{p}} \left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(1+\left(\frac{2}{2+(\gamma-2)p}\right)^{\frac{1}{p}}\right), \; p>2.$$

Следовательно, (14) лучше чем (8), когда выполняется неравенство

$$2\left(1+\frac{2}{\sqrt{\gamma-2}}\right) < 3\cdot 2^{\frac{2p-3}{p}} \left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(1+\left(\frac{2}{2+(\gamma-2)p}\right)^{\frac{1}{p}}\right). \tag{15}$$

Так как $p>2$, $\gamma>2$ непосредственно видно, что

$$\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p}} > 1 \text{ и } \left(1+\left(\frac{2}{2+(\gamma-2)p}\right)^{\frac{1}{p}}\right) > 1.$$

Следовательно

$$3\cdot 2^{\frac{2p-3}{p}} \left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(1+\left(\frac{2}{2+(\gamma-2)p}\right)^{\frac{1}{p}}\right) > 3\cdot 2^{\frac{2p-3}{p}}.$$

Это неравенство можно еще продолжить, замечая что $2^{\frac{2p-3}{p}} > \sqrt{2}$, так как $p>2$. Значит, если требуем

$$2\left(1+\frac{2}{\sqrt{\gamma-2}}\right) < 3\sqrt{2},$$

то обязательно выполняется (15). Но последнее неравенство ничего другого не означает как то, что

$$\gamma > 2 + \frac{2}{(3-\sqrt{2})^2},$$

то есть по меньшей мере при таких γ оценка вида (14) дает точнее границы для $T_C\,\varphi$, чем всякая оценка (8) при помощи $L_{p,2}(\mathbf{C})$-норм, если только $K(z)$ (аналогично $\widetilde{K}(z)$) имеет вид (10).

§ 2. Оценки в угловых пространствах

В силу изложенных в § 1 свойств аппроксимативно-аналитических функций имеет место следующая

Теорема 1. (Теорема Фрагмена-Линделёфа [6] для аппроксимативно-аналитических функций*. *Пусть в угловом пространстве*

$$G = \{z\colon\ 0 < \arg z < \alpha\pi,\ 0 < \alpha \leqslant 2\} \tag{16}$$

$w = w(z)$ является аппроксимативно-аналитической функцией и удовлетворяет следующим условиям:

Для каждой конечной точки ζ, граничной для области G,

---

* Для голоморфных функций теорема в этом виде была доказана в [5].

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\, |w(z)| \leqslant C, \; C = \text{const}, \; z \in G, \tag{17}$$

и кроме того

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_w(r)}{r^{\frac{1}{a}}} \leqslant 0, \; z = re^{i\varphi}, \tag{18}$$

где

$$M_w(r) = \sup_{|z|=r} |w(z)|.$$

Тогда в области G

$$|w(z)| \leqslant k \cdot C \tag{19}$$

и постоянную k, *зависящую только от* $p > 2$ *и* $K(z)$, *можно оценить следующим образом:*

$$1 \leqslant k \leqslant e^{2M_p \|K(z)\|_{p,\,2}} \tag{20}$$

или в случае, когда $K(z)$ *имеет вид* (10)

$$1 \leqslant k \leqslant e^{4Kr_0\left(1+\frac{2}{\sqrt{\gamma-2}}\right)}. \tag{21}$$

Если $|w(z_0)| = k \cdot C$ *в некоторой точке* $z_0 \in G$, *то* $w(z)$ *является обобщенной константой*.*

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что $w(z) \not\equiv 0$. Тогда существует такая голоморфная функция $\Phi(z)$, что, соответственно (6)

$$w(z) = \Phi(z)\, e^{\omega(z)} \quad (z \in G), \tag{22}$$

причем $\omega(z)$ является определенной в (5) функцией.

В силу (1)

$$|\omega(z)| \leqslant D \quad (z \in \mathbf{C}), \tag{23}$$

где D в случае (4) равно $M_p \|K(z)\|_{p,\,2}$, а в случае (10) мы имеем

$$D = Kr_0\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\gamma-2}}\right).$$

Так как $|\mathrm{Re}\,\omega| \leqslant |\omega| \leqslant D$, то

$$e^{-D} \leqslant e^{\mathrm{Re}\,\omega(z)} \leqslant e^{D} \quad (z \in \mathbf{C}). \tag{24}$$

Пусть

$$S = \inf_{\zeta\in\partial G} e^{\mathrm{Re}\,\omega(z)}, \tag{25}$$

причем ζ — конечная точка и ∂G означает границу области G. Тогда

$$e^{-D} \leqslant S \leqslant e^{D}. \tag{26}$$

---

* Определение обобщенной константы см. [9], стр. 166.

В силу (17), (25) и непрерывности функции $\omega(z)$ тем самым для абсолютной величины голоморфной функции $\Phi(z)$ должно иметь место неравенство (где вместо $\frac{C}{S}$ пишется T)

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\,|\Phi(z)| \leqslant \frac{C}{\inf\limits_{\zeta\in\partial G} e^{\operatorname{Re}\omega(\zeta)}} = T, \tag{27}$$

а соответствующее условие для $|\Phi(z)|$ получается следующим образом:

Условие (18), которое налагает определенное ограничение на возможный рост $|w(z)|$ при $|z|\to\infty$, эквивалентно следующему. Для любого $\varepsilon>0$ существует строго монотонно возрастающая неограниченная последовательность $\{R_n\}$ положительных чисел $R_n = R_n(\varepsilon)$ такая, что

$$|w(z)| < e^{\varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}}, \text{ при } |z| = R_n \ (n=1, 2, 3, \cdots). \tag{28}$$

(22), (24) и (28) вместе дают нам

$$|\Phi(z)|\, e^{-D} < |w(z)| \leqslant e^{\varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}}, \text{ при } |z| = R_n \ (n=1, 2, 3, \cdots),$$

то есть

$$|\Phi(z)| < e^{\varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}+D}, \text{ при } |z| = R_n \ (n=1, 2, 3, \cdots).$$

В силу неравенств

$$\frac{\ln|\Phi(z)|}{|z|^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant \frac{\ln M_\Phi(|z|)}{|z|^{\frac{1}{\alpha}}} < \varepsilon + \frac{D}{|z|^{\frac{1}{\alpha}}}, \text{ при } |z| = R_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

и произвольности ε имеем, что

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{\ln M_\Phi(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant 0, \tag{29}$$

и мы получили искомое условие для $|\Phi(z)|$*.

Наконец, (27) и (29) позволяют нам применить классическую теорему Фрагмена-Линделёфа к голоморфной функции $\Phi(z)$, в силу которой должно иметь место неравенство

$$|\Phi(z)| \leqslant T \tag{30}$$

при всех $z\in G$.

---

* lim inf, конечно, может быть равен $-\infty$.

Чтобы теперь из (30) сделать вывод относительно функции $w(z)$, введем обозначение

$$S' = \sup_{z \in G} e^{\operatorname{Re} \omega(z)} \leqslant e^{D}. \tag{31}$$

Так как $\operatorname{Re} \omega(z)$ является непрерывной в $\overline{G}$ функцией, то

$$S < S'. \tag{32}$$

Оценки (30) и (31) вместе нам дают ($z \in G$)

$$|w(z)| = |\Phi(z)|^{\operatorname{Re} \omega(z)} \leqslant T \cdot S' = \frac{C}{S} \cdot S' = kC,$$

причем $k = \dfrac{S'}{S}$, откуда сразу вытекают оценки (20) и (21) для k, если учесть (26), (31) и (32), а именно

$$1 \leqslant \frac{S'}{S} = k \leqslant e^{2D}$$

(вместо D надо подставить соответствующие значения).

Остается рассмотреть еще случай, когда

$$|w(z_0)| = k \cdot C$$

во внутренней точке $z \in G$. Это означает, что

$$|\Phi(z_0)|\, e^{\operatorname{Re} \omega(z_0)} = k \cdot C = S' \cdot T \quad (z_0 \in G),$$

откуда следует

$$|\Phi(z_0)| = T. \tag{33}$$

Допустим противное. Если $|\Phi(z_0)| > T$, $z_0 \in G$, то это противоречит (30). Если $|\Phi(z_0)| < T$, то должно иметь место

$$e^{\operatorname{Re} \omega(z_0)} > S',$$

что противоречит (31). Следовательно, имеет место (33).

Применяя принцип максимума для голоморфных функций, из (33) получим

$$\Phi(z) \equiv c = \text{const}.$$

Следовательно, $w(z)$ имеет вид

$$w(z) = c \cdot e^{\omega(z)} \quad (z \in G),$$

т. е. действительно является обобщенной константой. Тем самым теорема полностью доказана.

Следствие: Однозначные непрерывные решения дифференциального уравнения типа Векуа

$$\frac{\partial w(z)}{\partial z^*} = A(z)\, w(z) + B(z)\, w^*(z),$$

где A, $B \in L_{p,2}$ (**C**), $p > 2$, очевидно являются аппроксимативно-аналитическими функциями. Они удовлетворяют дифференциальному неравенству вида (1), причем

$$K(z) = |A(z)| + |B(z)|.$$

Применяя теорему 1 к этому классу функций, мы получим теорему Фрагмена-Линделёфа для обобщенных аналитических функций. Другое доказательство такой теоремы путем прямого применения классических методов доказательства на случай обобщенных аналитических функций имеется в [3].

Теорема 2 (Теорема Фрагмена-Линделёфа для однозначных непрерывных решений (2)). *Пусть G есть определенная в* (16) *область из* **C**, *$w = w(z)$—однозначное непрерывное решение* (2), *причем $\widetilde{K}(z) \in L_{p,2}$* (**C**), *$p > 2$. Если $w(z)$ удовлетворяет условиям* (17) *и* (18) *теоремы* 1, *то в области G имеет место неравенство*

$$|w(z)| \leqslant \widetilde{k} + C \tag{34}$$

и постоянную $\widetilde{k}$ можно в общем случае оценить так:

$$0 \leqslant \widetilde{k} \leqslant 2M_p \|\widetilde{K}(z)\|_{p,2}, \tag{35}$$

а если $\widetilde{K}(z)$ имеет специальный вид, аналогичный (10), *то имеет место оценка*

$$0 \leqslant \widetilde{k} \leqslant 4\widetilde{K} r_0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\gamma - 2}}\right). \tag{36}$$

Если имеет место знак равенства в (34) *для хотя бы одной внутренней точки $z_0 \in G$, то $w(z)$ можно представить в виде*

$$w(z) = c + T_{\mathbf{C}}\left(\frac{\partial w}{\partial z^*}\right), \quad c = \text{const}. \tag{37}$$

Доказательство. Как было замечено в § 1, функция $w(z)$ допускает разложение в виде суммы двух слагаемых

$$w(z) = \widetilde{\Phi} + \widetilde{w}_0, \tag{38}$$

причем в силу (7) $\widetilde{\Phi}$ является голоморфной функцией, а $\widetilde{w}_0 = T_{\mathbf{C}}\left(\frac{\partial w}{\partial z^*}\right)$ есть определенная в **C** непрерывная и ограниченная функция.

В силу (2), с использованием (8) и (14), мы получим

$$|\widetilde{w}_0(z)| \leqslant M_p \|\widetilde{K}(z)\|_{p,2} \quad (z \in \mathbf{C}), \tag{39}$$

если $\widetilde{K}(z)$ имеет общий вид (4), и

$$|\widetilde{w}_0(z)| \leqslant 2\widetilde{K} r_0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\gamma - 2}}\right) \quad (z \in \mathbf{C}), \tag{40}$$

если $\breve{K}(z)$ принимает специальный вид (10). Обе границы обозначим буквой $\tilde{D}$.

Подобно доказательству теоремы 1 введем величины

$$\breve{S} = \sup_{\zeta \in \partial G} |\breve{w}_0(\zeta)| \quad (\zeta \text{ — конечно}) \tag{41}$$

и

$$\tilde{S}' = \sup_{z \in G} |\tilde{w}_0(z)|, \tag{42}$$

для которых в силу (39) и (40) имеем

$$\begin{cases} 0 \leqslant \tilde{S} \leqslant \breve{D} \\ 0 \leqslant \tilde{S}' \leqslant \breve{D}. \end{cases} \tag{43}$$

Так как

$$|\breve{\Phi}(z)| = |w(z) - \breve{w}_0(z)| = |w(z)| + |\breve{w}_0(z)|, \; z \in G, \tag{44}$$

то в силу (17), (41) и непрерывности функции $\tilde{w}_0(z)$, имеет место

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} |\breve{\Phi}(z)| \leqslant \overline{\lim_{z \to \zeta}} |w(z)| + \breve{S} \leqslant C + \breve{S}, \tag{45}$$

т. е. голоморфное слагаемое на границе области G ограничено.

С другой стороны, из (18) вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует строго монотонно возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел $\{R_n\}$, такая что имеет место (28). Вместе с (44) это нам дает

$$|\breve{\Phi}(z)| < e^{\varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}} + \breve{D} = e^{\varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 + e^{\ln \breve{D} - \varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}}\right), \text{ при } |z| = R_n \; (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Отсюда, в силу

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln\left(1 + e^{\ln \breve{D} - \varepsilon r^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} = 0,$$

получим аналогично доказательству теоремы 1

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M_{\breve{\Phi}}(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant 0. \tag{46}$$

Для $|\breve{\Phi}(z)|$ (45) и (46) представляют собой условия классической теоремы Фрагмена-Линделёфа, так что внутри области G должно иметь место

$$|\tilde{\Phi}(z)| \leqslant C + \tilde{S}. \tag{47}$$

Тогда внутри $G\ w(z)$ можем оценить так

$$|w(z)| \leqslant |\tilde{\Phi}(z)| + |\tilde{w}_0(z)| \leqslant C + \tilde{S} + \tilde{S}'$$

и, тем самым, получили доказываемое неравенство (34), подставляя $\tilde{S} + \tilde{S}' = \tilde{k}$.

Оценки (35) и (36) для $\tilde{k}$ вытекают тривиальным образом из оценок (41) для $\tilde{S}$ и $\tilde{S}'$.

Если теперь положить $|w(z_0)| = \tilde{k} + C$ для некоторого $z_0 \in G$, то это означает, что

$$|\tilde{\Phi}(z_0)| = C + \tilde{S} \quad (z_0 \in G), \tag{48}$$

так как $|\tilde{\Phi}(z_0)| > C + \tilde{S}$ противоречит (47), а с другой стороны, из

$$|\tilde{\Phi}(z_0)| < C + \tilde{S}$$

следовало бы

$$\tilde{S} + \tilde{S}' + C = |w(z_0)| \leqslant |\tilde{\Phi}(z_0)| + |\tilde{w}_0(z_0)| < C + \tilde{S} + |\tilde{w}_0(z_0)|,$$

то есть $|\tilde{w}_0(z_0)| > \tilde{S}'$.

Но это противоречит (42), так что (48) действительно имеет место. Рассуждая дальше аналогично доказательству теоремы 1, получим (7), и теорема полностью доказана.

Следствие. Пусть $w_j(z)$ есть компонента непрерывного вектора $(w_1(z), w_2(z), \cdots, w_m(z))$ и

$$\frac{\partial w_j(z)}{\partial z^*} = f_j(z, w_1(z), w_2(z), \cdots, w_m(z)) \quad (j = 1, 2, 3, \cdots, m)$$

— некоторая, быть может нелинейная, система комплексных дифференциальных уравнений с частными производными и непрерывными правыми частями. (Системы такого рода рассматривал В. Тучке в [7]).

Если только все f_j обладают равномерно для всех $w_1, w_2, \cdots$ $\cdots, w_m$ некоторой мажорантой $K(z) \in L_{p,2}(\mathbf{C})$, то простым применением теоремы 2 получаем теоремы типа Фрагмена-Линделёфа для решений таких систем (ср. [3]).

Х. Меден рассматривал в [4] случай $j=1$ с условием (3) для функции $f(z, w(z))$.

В заключение хочу выразить благодарность профессору В. Тучке за постоянное внимание и советы при выполнении настоящей работы.

Секция математики университета
им. Мартина Лютера, Халле (ГДР)

Поступила 8.IX.1975

Հ. ՄԱԼՈՆԵԿ. Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի տիպի թեորեմներ մասնական ածանցյալներով կոմպլեքս դիֆերենցիալ անհավասարությունների լուծումների համար (*ամփոփում*)

Դիտարկվում են (1), (2) մասնական ածանցյալներով կոմպլեքս դիֆերենցիալ անհավասարությունների միարժեք անընդհատ լուծումներ։ Այսպիսի լուծումների համար ապացուցվում են երկու թեորեմ, որոնք իրենցից ներկայացնում են հոլոմորֆ ֆունկցիաների համար Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի հայտնի թեորեմի անալոգը։

Նկատենք, որ (1) անհավասարության քննարկված լուծումները համընկնում են Լ. Բերսի ապրոկսիմատիվ անալիտիկ ֆունկցիաների հետ։

H. MALONEK. *Theorems of Phragmen—Lindelöf type for solutions of complex partial differential inequalities* (summary)

The paper investigates continuous solutions of complex partial differential inequalities

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant K(z)|w(z)|$$

and

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant \tilde{K}(z)$$

where $K(z)$ and $\tilde{K}(z)$ are real nonnegative functions, defined in C. $K, K \in L_{p,2}(C)$ ($p > 2$, see I. N. Vekua [9]). For such solutions two theorems are proved which are analogus to the well-known Phragmen-Lindelöf theorems for holomorphic functions.

The solutions of the first inequality are approximatively analytic functions of L. Bers. The case of generalized analytic functions is a special case of approximatively analytic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Begehr*. Zur Wertverteilung approximativ analytischer Funktionen, Arch d. Math., XXIII, 1972, 41—49.
2. *L. Bers*. Theory of pseudo-analytic functions, Institute of Mathematics and Mechanics, New York University, New York, 1953. (Гектографированная разработка лекций).
3. *X. Малонек*. Принцип Фрагмена-Линделёфа для обобщенных аналитических функций, Дипломная работа, Халле—Ереван, 1974.
4. *H. Meden*. Eine Verallgemeinerung des Reziprozitätstheorems für Lösungen auch nichtlinearer partieller komplexer Differentialgleichungen, Math. Nachr., 63, 1974, 223—227.
5. *F. u. R. Nevanlinna*. Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. Sci fenn. 50 Nr. 5, 1922.
6. *E. Phragmén, E. Lindelöf*. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, Acta math., 31, 1908.
7. *W. Tutschke*. Über Fixpunktmethoden in der Theorie partieller komplexer Differentialgleichungen (содержится в J. Naas, Beiträge zur komplexen Analysis und deren Anwendungen in der Differentialgeometrie, Berlin, 1974, 31—41).
8. *W. Tutschke*. Abspaltung holomorpher Faktoren aus Lösungen von Differentialungleichungen, Math. Nachr. (в печати).
9. *И. Н. Векуа*. Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

А. Г. ДЖВАРШЕЙШВИЛИ

О ПОВЕДЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ОКРЕСТНОСТИ ГРАНИЧНЫХ ТОЧЕК И ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

В работе получены граничные теоремы единственности для функций двух переменных, в частности, обобщаются одна теорема А. Зигмунда и Кальдерона (см. [3], стр. 489), а также некоторые результаты Э. Коллингвуда [4] и Бейджмиля [5], [10].

§ 1. Предварительные сведения

Декартовое произведение двух множеств A, B обозначим через $[A\times B]$. Пусть G_k—область в комплексной плоскости z_k, $k=1, 2$. Тогда границей области $G=[G_1, G_2]$ назовем множество $\Gamma=[\Gamma_1, \Gamma_2]$, где Γ_k — граница области G_k. Далее $\vartheta_k=\{z_k, |z_k|<1\}$; $C_k=\{z_k, |z_k|=1\}$. Пусть Γ_k — спрямляемая простая линия, имеющая в точке t_k касательную. Треугольной окрестностью точки t_k назовем множество

$$\Delta_k=\Delta_k(t_k, \varepsilon, \theta)=\left\{z_k;\ z_k=t_k+i\rho\, l^{i(\varphi_k+\psi)};\ 0<\rho<\varepsilon;\ |\psi|\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right\},$$

где φ_k — угол между касательной и положительным направлением оси OX. Обозначим через Γ_k^+ конечную область, ограниченную линией Γ_k, а через Γ_k^- — бесконечную область.

Хордой назовем отрезок прямой линии, соединяющий две точки из Γ_k и лежащий в Γ_k^+. Обозначим через $\varphi_k(t_k)$ ту половину хорды, которая оканчивается в t_k и образует с внутренней нормалью угол равный φ_k. Заметим, что при достаточно малых ε и θ имеем $\Delta_k\subset\Gamma_k^+$. Мы всегда будем полагать, что Γ_k — простая спрямляемая линия. Точка z_k угловым путем сходится к точке t_k, если $\lim|z_k-t_k|=0$, $z_k\in\Delta_k$ и будем писать $z_k\xrightarrow{\wedge}t_k$, $k=1, 2$. Далее $(z_1, z_2)\xrightarrow{\wedge}(t_1, t_2)$, если $z_k\xrightarrow{\wedge}t_k$, $k=1, 2$. Скажем, что точка (z_1, z_2) λ-угловым путем сходится к (t_1, t_2), если $(z_1, z_2)\xrightarrow{\wedge}(t_1, t_2)$, $1/\lambda\leqslant\dfrac{|z_1-t_1|}{|z_2-t_2|}\leqslant\lambda$. Этот вид сходимости коротко обозначим так $(z_1, z_2)_\lambda\xrightarrow{\wedge}(t_1, t_2)$. Γ называется линией Ляпунова, если угол наклона касательной с осью OX, как функция дуги, удовлетворяет условию Липшица. Справедлива

Лемма 1. *Пусть область G_k ограничена линией Ляпунова Γ_k, $k=1, 2$, а функции $z_1=\omega(w_1)$; $z_2=\chi(w_2)$ конформно отображают G_k на ϑ_k, $k=1, 2$. Если для $\lambda>1$ и всех $(\tau_1, \tau_2)\in C=[C_1\times C_2]$ имеем*

$$(w_1,\ w_2)_\lambda \xrightarrow{\wedge} (\tau_1,\ \tau_2);\ (w_1,\ w_2) \in \vartheta = [\vartheta_1 \times \vartheta_2], \tag{1}$$

то найдется такое число $\mu > 1$, *что почти для всех* $(t_1,\ t_2) \in \Gamma$ *будем иметь*

$$(z_1,\ z_2)_\mu \xrightarrow{\wedge} (t_1,\ t_2), \tag{2}$$

где

$$t_1 = \omega(\tau_1);\ t_2 = \chi(\tau_2);\ z_1 = \omega(w_1),\ z_2 = \chi(w_2).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если измеримое множество $e \subset C$ и $|e| = 0$, то соответствующее ему множество $E \subset \Gamma$ посредством конформного преобразования $z_1 = \omega(w_1)$, $z_2 = \chi(w_2)$ будет также иметь меру нуль, и в силу конформности, из соотношения

$$(w_1,\ w_2) \xrightarrow{\wedge} (\tau_1,\ \tau_2);\ (w_1 w_2) \in \vartheta,\ (\tau_1, \tau_2) \in C$$

вытекает соотношение

$$(\omega(w_1),\ \chi(w_2)) \xrightarrow{\wedge} (\omega(\tau_1),\ \chi(\tau_2))$$

почти для всех $(\tau_1,\ \tau_2) \in C$. Далее на основании леммы 2 из [1], стр. 149 почти для всех (τ_1, τ_2) имеем

$$\frac{\omega(w_1) - \omega(\tau_1)}{w_1 - \tau_1} \xrightarrow{\wedge} w'(\tau_1);\quad \frac{\chi(w_2) - \chi(\tau_2)}{w_2 - \tau_2} \xrightarrow{\wedge} \chi'(\tau_2). \tag{3}$$

Так как Γ_k, $k=1$, 2 суть линии Ляпунова, то на основании одной теоремы Кёллога (см. например, [2], стр. 468) функции $\lg \omega'(\tau_1)$ и $\lg \chi'(\tau_2)$ непрерывны соответственно на C_1 и C_2. Следовательно, существуют постоянные числа $0 < m < M$ такие, что для любых $\tau_k \in C_k$, $k = 1, 2$

$$m \leqslant |\omega'(\tau_1)|,\ |\chi'(\tau_2)| \leqslant M. \tag{4}$$

Пусть

$$1/\lambda \leqslant \left|\frac{w_1 - \tau_1}{w_2 - \tau_2}\right| \leqslant \lambda \tag{5}$$

и воспользуемся равенством

$$\frac{z_1 - t_1}{z_2 - t_2} = \frac{\omega(w_1) - \omega(\tau_1)}{\chi(w_2) - \chi(\tau_2)} = \frac{\omega(w_1) - \omega(\tau_1)}{w_1 - \tau_1} \cdot \frac{w_2 - \tau_2}{\chi(w_2) - \chi(\tau_2)} \cdot \frac{w_1 - \tau_1}{w_2 - \tau_2}. \tag{6}$$

В силу (3) и (4) для $\eta \in \left(0,\ \frac{m}{2}\right)$ существуют числа $\delta > 0$, $\theta > 0$ такие, что при $w_k \in \Delta(\tau_k,\ \delta,\ \theta)$ имеем

$$m - \eta \leqslant |\omega'(\tau_1)| - \eta \leqslant \frac{|\omega(w_1) - \omega(\tau_1)|}{|w_1 - \tau_1|} \leqslant |\omega'(\tau_1)| + \eta \leqslant M + \eta, \tag{7}$$

$$m - \eta \leqslant |\chi'(\tau_2)| - \eta \leqslant \frac{|\chi(w_2) - \chi(\tau_2)|}{|w_2 - \tau_2|} \leqslant |\chi'(\tau_2)| + \eta \leqslant M + \eta.$$

Теперь из (5), (6) и (7) получаем

$$\frac{1}{\mu}=\frac{m-\eta}{M+\eta}\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{|z_1-t_1|}{|z_2-t_1|}\leqslant\frac{M+\eta}{m-\eta}\lambda=\mu,$$

где $\mu>1$ и лемма доказана. Аналогично можно показать обратное утверждение, то есть, если имеет место (2), то для всех $(t_1, t_2)\in\Gamma$ можно найти такое $\lambda>1$, что почти для всех $(\tau_1, \tau_2)\in C$ будет иметь место (1). Следовательно, рассматриваемый вид сходимости внутренних точек к граничной является инвариантным относительно конформных отображений.

Пусть f — аналитическая функция в области $G=[G_1\times G_2]$. Скажем, что $\alpha\in G^{\lambda}_{\varphi_1\varphi_2}(f, t_1, t_2)$, $(t_1, t_2)\in\Gamma$, $\lambda>1$, если существует последовательность точек $\{z_{k,n}\}$, $n=\overline{1, \infty}$, $k=1, 2$ таких, что

$$z_{k,n}\in\varphi_k(t_k),\ k=1, 2,\ n=\overline{1, \infty},\ \lim z_{k,n}=t_k,$$

$$1/\lambda\leqslant\frac{|z_1-t_1|}{|z_2-t_2|}\leqslant\lambda;\ \lim_{n\to\infty} f(z_{1,n}, z_{2,n})=\alpha. \tag{8}$$

Скажем, что $\alpha\in C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, t_1, t_2)$, если существует последовательность точек $\{z_{k,n}\}$ таких, что $z_{k,n}\in\Delta_k(t_k)$, $n=\overline{1, \infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|z_{k,n}-t_k|=0$, $k=1, 2$ и выполнены условия (8).

Точку (t_1, t_2) назовем λ-точкой Фату для f, если объединение $C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, t_1, t_2)$ по всевозможным треугольным окрестностям Δ_k, $k=1, 2$ содержит одну точку. Если хотя бы одно множество $C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, t_1, t_2)$ совпадает с расширенной комплексной плоскостью, то (t_1, t_2) будет λ-точкой Плеснера. Дугу $\gamma=[\gamma_1\times\gamma_2]$ назовем λ-дугой Фату для f, если γ есть часть границы односвязной области $g_k\subset\Gamma^{+}_{k}$, $k=1, 2$ и для почти каждой точки $(t_1, t_2)\in\gamma$ найдутся числа $\varepsilon>0$, $\theta>0$ такие, что $\Delta_k\subset g_k$ и множество $C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, t_1, t_2)$ не покрывает всю плоскость. E называется множеством первой категории, если оно является объединением счетного множества нигде не плотных множеств, а множество, не являющееся первой категории, называют множеством второй категории. Дополнение к множеству E обозначим через CE. Измеримое множество $E\subset\gamma=[\gamma_1\times\gamma_2]$ метрически плотно на дуге γ, если для любой дуги $\gamma'=[\gamma'_1\times\gamma'_2]$ имеем $|\gamma'\cap E|>0$.

§ 2. Граничные теоремы единственности

Как известно, в граничных теоремах единственности существенное значение имеет по какому пути внутренняя точка стремится к граничной, вдоль которой функция имеет предел.

Для функции двух комплексных переменных путём, гарантирующим единственность аналитических функций, является λ-угловая сходимость внутренних точек к граничной (см. [3], стр. 478). В данном параграфе в качестве таких путей рассматриваем λ-сходимость вдоль некоторых линий. Тем самым обобщаем вышеуказанный результат Кальдерона-Зигмунда. Кроме этого, обобщены теоремы Коллингвуда [4], Бейджмиля [5], Цудзи [6].

Прежде всего отметим одно свойство λ-сходимости внутренних точек к граничной. На основании леммы 1 этот вид сходимости инвариантен относительно конформных отображений. В силу этого для простоты изложения будем рассматривать декартовое произведение верхних полуплоскостей. Пусть $z_k = x_k + iy_k$ $y_k > 0$, $k = 1, 2$. Для фиксированных углов $\varphi_k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и чисел $\sigma_k > 0$, $a_k < b_k$, $\theta_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $k=1, 2$ введем множества

$$\varphi_k(x_k) = \{z_k,\ z_k = x_k + i\rho\, e^{i\varphi_k};\ 0 < \rho < \sigma_k\}; \tag{1}$$

$$D_k = D(a_k, b_k) = \{z_k;\ z_k = x_k + i\rho\, e^{i\varphi_k};\ 0 < \rho < \sigma_k;\ a_k < x_k < b_k\}, \tag{2}$$

$$\Delta_k = \Delta(x_k) = \{z_k;\ z_k = x_k + i\rho\, e^{i\psi};\ 0 < \rho < \sigma_k, -\theta_k < \psi < \theta_k\}. \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть $f(z_1, z_2)$ определена в области $G = [G_1 \times G_2]$ и числа $\lambda > 1$, $|\varphi_k| \in (0, \pi/3)$ выбраны так, что $\lambda \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 > 1$. Положим, что для каждой точки $x_k \in (a_k, b_k)$ функция f удовлетворяет условию*

$$|f(z_1, z_2)| \leqslant M,$$

где $z_k = x_k + i\rho_k e^{i\varphi_k}$, $1/\lambda \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda$, $\rho_k \in (0, G_k)$. Тогда найдется подинтервал $(a_k', b_k') \subset (a_k, b_k)$ и фиксированные числа $\lambda_1 \in (1, \lambda)$, $\theta_k' = |\varphi_k|$, $\sigma_k' > 0$ так, что для каждой точки $x_k \in (a_k', b_k')$ и произвольных чисел $\rho_k \in (0, \sigma_k')$, $\psi_k \in [-\theta_k', \theta_k']$ имеем

$$|f(z_1, z_2)| \leqslant M,$$

где

$$z_k = x_k + i\rho_k e^{i\psi_k},\ \rho_k \in (0, \sigma_k'),\ 1/\lambda_1 \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda_1;\ \psi_k \in [-\theta_k', \theta_k'].$$

Доказательство. Точки x_k и z_k, связанные равенством (1), назовем соответственными. Пусть $\sigma_k' = \frac{\sigma_k}{2}$, $\theta_k' = |\varphi_k|$, где σ_k, φ_k — числа, фигурирующие в равенствах (1) и (2). Для x_k, σ_k', θ_k' составим множество Δ_k' типа (3). Для σ_k' найдется число $\delta_k = \sigma_k \sin\varphi_k$ такое, что для $z_k \in \Delta_k'(x_k)$ в интервале $(x_k - \delta_k, x_k + \delta_k)$ найдется точка ему соответствующая $\bar{x}_k$. Пусть $z_k \in \Delta_k'(x_k)$, $x_k \in (a_k + \delta_k, b_k - \delta_k)$. Справедливо равенство

$$\frac{|\bar{x}_1 - z_1|}{|\bar{x}_2 - z_2|} = \frac{|\bar{x}_1 - z_1|}{|x_1 - z_1|} \frac{|x_2 - z_2|}{|\bar{x}_2 - z_2|} \frac{|x_1 - z_1|}{|x_2 - z_2|}, \tag{4}$$

где $\bar{x}_k$ и z_k — соответственные точки. Положим, что $\theta_k' = |\varphi_k|$, $z_k \in \Delta_k'(x_k)$ и $|z_k - x_k|$ остается постоянной. Тогда

$$\cos\varphi_k \leqslant \frac{|x_k - z_k|}{|\bar{x}_k - z_k|} \leqslant \frac{1}{\cos\varphi_k}. \tag{5}$$

Из (4) и (5)

$$\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2\,\frac{|x_1 - z_1|}{|x_2 - z_2|} \leqslant \frac{|\bar{x}_1 - z_1|}{|\bar{x}_2 - z_2|} \leqslant \frac{1}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}\cdot\frac{|x_1 - z_1|}{|x_2 - z_2|}.$$

Полагая $\lambda_1 = \lambda\cos\varphi_1\cos\varphi_2$, из неравенства

$$1/\lambda_1 \leqslant \frac{|x_1 - z_1|}{|x_2 - z_2|} \leqslant \lambda_1$$

получим

$$1/\lambda \leqslant \frac{|\bar{x}_1 - z_1|}{|\bar{x}_2 - z_2|} \leqslant \lambda.$$

Таким образом, если

$$x_k \in (a_k + \delta_k,\ b_k - \delta_k),\ 0 < \rho_k < \sigma_k' \leqslant \frac{\sigma_k}{2},\ \psi_k \in [-|\varphi_k|,\ |\varphi_k|];\ 1/\lambda_1 \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda_1,$$

то для всякой точки z_k вида (3) имеем

$$|f(z_1,\ z_2)| \leqslant M$$

и лемма доказана. Скажем, что f—обобщенно непрерывна в области G, если она непрерывна в обычном смысле в точках, где $|f(z_1\ z_2)| < \infty$, если $f(z_1, z_2) = \infty$, то при $(z_{1n},\ z_{2n}) \to (z_1,\ z_2)$ имеем $f(z_{1n},\ z_{2n}) \to \infty$.

Лемма 3. *Пусть f — обобщенно непрерывная при $\varphi_k > 0$, $k = 1, 2$, а числа λ, φ_k, $k = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы 2. Если на $\gamma = [\gamma_1 \times \gamma_2]$, $\gamma_k = [a_k,\ b_k]$ существует множество M второй категории такое, что для $(x_1,\ x_2) \in M$ найдется конечное или бесконечное число β, $\beta \bar{\in} C^{\lambda}_{\varphi_1\varphi_2}(fx_1,\ x_2)$, то существует $\gamma_0 = [\gamma_{10} \times \times \gamma_{20}]$, число $1 < \lambda_1 < \lambda$ такое, что: 1) γ_0 будет λ_1-дугой Фату, 2) M всюду плотно на γ_0.*

Доказательство. Положим $\beta = \infty$. Обозначим через $E_{\varphi_1\varphi_2}(\sigma_1,\ \sigma_2,\ N, f)$ множество тех точек $(x_1, x_2) \in M$, для которых при $0 < \rho_k < \sigma_k$; $1/\lambda \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda$ имеем

$$|f(x_1 + i\rho_1 e^{i\varphi_1};\ x_2 + i\rho_2 e^{i\varphi_2})| \leqslant N.$$

Пусть $\sigma_k^{(m)} \downarrow 0$, $N_m \uparrow \infty$ при $m \to \infty$, $k = 1, 2$. Положим

$$E_m = E_{\varphi_1\varphi_2}(\sigma_1^{(m)},\ \sigma_2^{(m)},\ N_m,\ f).$$

Очевидно равенство

$$M = \bigcup_{m=}^{\infty} E_m.$$

Так как M — множество второй категории, то существуют $\gamma_0 = [\gamma_{10} \times \times \gamma_{20}] \leqslant \gamma$ и множество E_{m_0}, всюду плотное на γ_0. Пусть $(x_1,\ x_2) \in \in E_{m_0} \cap \gamma_0$, тогда для $\rho_k \in (0,\ \sigma_k^{(m_0)})$, $1/\lambda \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda$

$$|f(x_1+i\rho_1 e^{i\varphi_1};\ x_2+i\rho_2 e^{i\varphi_2})| \leqslant N_{m_0}. \tag{6}$$

Для $(x_1, x_2) \in \gamma_0$ составим точки вида

$$z_k = x_k + i\rho_k e^{i\varphi_k};\ 0 < \rho_k < \delta_k^{(m_0)},\ k=1,\ 2. \tag{7}$$

Множество точек (z_1, z_2), где z_k имеет вид (7), а (x_1, x_2) пробегает γ_0, обозначим через $\mathbf{L}_0$, а если (x_1, x_2) пробегает $E_{m_0} \cap \gamma_0$, то это множество обозначим через $\mathbf{H}_0$. Ясно, что $\mathbf{H}_0$ всюду плотно на $\mathbf{L}_0$. Если $(x_1, x_2) \in E_{m_0} \cap \gamma$, $1/\lambda \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda$, то для соответствующих точек вида (7) имеем неравенство (6). Так как f—обобщено непрерывна и множество $\mathbf{H}_0$ всюду плотно на $\mathbf{L}_0$, то для $(x_1, x_2) \in \gamma_0$, $1/\lambda \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda$ и для соответствующих точек вида (7) будем иметь неравенство (6). Пусть z_k имеет вид (7), где x_k пробегает множество $\gamma_{k,0} = (a_{k,0}, b_{k,0})$.

Множество таких точек z_k образует односвязное множество G_k. На основании леммы 2 существуют $\gamma' = [\gamma_1' \times \gamma_2']$, $\gamma_k' \subset \gamma_{k,0}$ и число $\lambda_1 \in (1, \lambda)$ такие, что 1) γ' будет λ_1-дугой Фату в случае $\beta=\infty$, 2) множество M всюду плотно на γ'. Теперь рассмотрим случай $\beta \neq \infty$. Введем функцию $f_1 = 1/f - \beta$, когда $f \neq \beta$ и $f_1 = \infty$, когда $f=\beta$. Ясно, что f_1 обобщенно непрерывна. Далее, по условию $\beta \overline{\in} C^{\lambda}_{\varphi_1\varphi_1}(f_1, x_1, x_2)$. Стало быть $\infty \overline{\in} C^{\lambda}_{\varphi_1\varphi_2}(f_1, x_1, x_2)$, когда $(x_1, x_2) \in M$. В силу вышедоказанного существует число $\lambda_1 \in (1, \lambda)$ и дуга γ', которая есть λ_1-дуга Фату для f_1 и M всюду плотно на γ'. Очевидно, что если γ' есть λ_1-дуга Фату для f_1, то она будет λ-дугой Фату для f. Таким образом лемма доказана.

Скажем, что функция f, определенная в области $G=[G_1 \times G_2]$, ведет себя λ-ограниченно, $\lambda > 1$, в граничной точке $(t_1, t_2) \in [\Gamma_1 \times \Gamma_2]$, если существует конечное или бесконечное число β и треугольная окрестность точки (t_1, t_2) такие, что

$$\beta \overline{\in} C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, t_1, t_2).$$

Лемма 4. *Пусть f — аналитическая функция при $y_k > 0$, $k=1,\ 2$. Если в каждой точке $(x_1, x_2) \in E$, $|E|>0$ ведет себя λ-ограниченно, $\lambda>1$, то почти в каждой точке $(x_1, x_2) \in E$ существует предел*

$$\lim_{(z_1, z_2) \xrightarrow[\lambda]{\wedge} (x_1, x_2)} f(z_1, z_2).$$

Доказательство. Пусть для $(x_1, x_2) \in E$ имеем

$$\beta \overline{\in} C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, x_1, x_2),$$

где β — конечное или бесконечное число. Тогда пользуясь преобразованием

$$z_1 = w_1 + \varepsilon w_2;\ z_2 = \varepsilon w_1 + w_2;\ z_k = x_k + iy_k;\ w_k = u_k + iv_k,$$
$$k=1,\ 2,$$

получим, что из стремления точки (w_1, w_2) угловым путем к (u_1, u_2) следует стремление соответствующей точки (z_1, z_2) угловым путем к (x_1, x_2) и при этом выполнено неравенство

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \leqslant y_1/y_2 \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon},\ 0<\varepsilon<1.$$

Положим

$$\lambda = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \text{ и } F(w_1, w_2) = f(w_1+\varepsilon w_2, \varepsilon w_1 + w_2).$$

Тогда, в силу условия леммы и теоремы (4.22) из [3] (стр. 482), существует угловой предел функции $F(w_1, w_2)$ почти всюду на H, где H—прообраз множества E при указанном преобразовании. Следовательно, f имеет λ-угловой предел почти всюду на E и лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть f — аналитическая функция при $y_k>0$, $k=1, 2$ на $\gamma=[\gamma_1\times\gamma_2]$, $\gamma_k=[a_k, b_k]$, существуют:* 1) *множество $M\subset\gamma$ второй категории;* 2) *фиксированные числа λ, φ_1, φ_2, удовлетворяющие условиям леммы* 2 *и*

$$\bigcap_{(x_1, x_2)\in M} \mathsf{C}\, C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2) \neq \varnothing. \tag{8}$$

Если существуют конечное или бесконечное число α, метрически плотное на γ множество N такие, что

$$\alpha \in \bigcap_{(x_1, x_2)\in N} C^{\lambda_1}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2),\ \lambda_1=\lambda\cos\varphi_1\cos\varphi_2, \tag{9}$$

то $f(z_1, z_2)\equiv\alpha$.

Доказательство. В силу условия теоремы существует конечное или бесконечное число β такое, что для $(x_1, x_2)\in M$

$$\beta \,\overline{\in}\, C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2).$$

На основании леммы 3 существуют $\gamma_0=[\gamma_{10}\times\gamma_{20}]\subset\gamma$ и число $\lambda_1\subset(1, \lambda)$ такие, что γ_0 будет λ_1-дугой Фату и M всюду плотно на γ_0. Теперь, в силу леммы 4, почти всюду на γ_0 существует предел

$$\lim_{(z_1, z_2)\overset{\wedge}{\underset{\lambda_1}{\to}}(x_1, x_2)} f(z_1, z_2), \tag{10}$$

почти для всех $(x_1, x_2)\in\gamma_0$. Так как множество N метрически плотно на γ, то $|\gamma_0\cap N|=|e|>0$. Отсюда и из (9), (10) следует, что почти для всех $(x_1, x_2)\in e\subset N$

$$\lim_{(z_1, z_2)\overset{\wedge}{\underset{\lambda_1}{\to}}(x_1, x_2)} f(z_1, z_2)=\alpha.$$

Теперь на основании одной теоремы из [3], стр. 489 заключаем, что $f(z_1, z_2)\equiv\alpha$ и теорема доказана. Заметим, что в теореме 1 условие (8) можно заменить условием: $C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2)$ не совпадает с расширенной плоскостью. Для изучения этого случая приведем лемму.

Лемма 5. *Пусть* $w = f(z_1, z_2)$ — *аналитическая функция при* $y_k > 0$, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$ *и на* $\gamma = [\gamma_1 \times \gamma_2]$, $\gamma_k = [a_k, b_k]$ *существует множество* M *второй категории такое, что при фиксированных* λ, φ_1, φ_2, *удовлетворяющих условию леммы 2, для любой точки* $(x_1, x_2) \in M$ *множество* $C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2)$ *не совпадает с расширенной плоскостью. Тогда существует множество* $M_0 \subseteq M$ *второй категории на* γ *и*

$$\bigcap_{(x_1, x_2) \in M_0} C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2) \neq \varnothing.$$

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству соответствующей леммы из [12], стр. 47. Опираясь на лемму 5 и используя предыдущее рассуждение, можно доказать следующую теорему

Теорема 2. *Пусть* f — *аналитическая функция при* $y_k > 0$, $k = 1, 2$ *и для* $\gamma = [\gamma_1 \times \gamma_2]$, $\gamma_k = [a_k, b_k]$ *существуют фиксированные числа* λ, φ_1, φ_2, *удовлетворяющие условию леммы 2, множество* $M \subset \gamma$ *второй категории на* γ *такое, что для* $(x_1, x_2) \in M$ *множество* $C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2)$ *не покрывает всю плоскость. Если существуют конечное или бесконечное число* α *и на* γ *метрически плотное множество* N *такие, что*

$$\alpha \in \bigcap_{(x_1, x_2) \in N} C^{\lambda_1}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2), \quad \lambda_1 = \lambda \cos \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

то $f(z_1, z_2) \equiv \alpha$.

Как известно, не всякая полигармоническая функция является действительной (мнимой) частью аналитической функции многих переменных. Хорошо известна следующая (см., например, [8], стр. 49)

Теорема А. *Пусть* $U(z_1, z_2) = U(x_1, y_1, x_2, y_2)$ *дважды непрерывно дифференцируемая функция в* ϑ. *Для того чтобы* $U(z_1, z_2) = \mathrm{Re}\, f(z_1, z_2)$, *где* f — *аналитическая функция в* ϑ, *необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x_k} + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y_k} = 0, \; k = 1,2; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial y_2} =$$
$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial x_2} = 0. \tag{11}$$

Полигармонические функции, удовлетворяющие условиям (11), назовем бигармоническими. Путем непосредственной проверки можно доказать следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть* $W(\omega) = W(\xi, \eta)$ *есть гармоническая функция от* $\omega = \xi + i\eta$, *а* $\omega = f(z_1, z_2) = \xi(z_1, z_2) + i\eta(z_1, z_2)$ *есть аналитическая функция от переменных* $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$. *Тогда функция*

$W = W[f(z_1, z_2)]$ *будет бигармонической функцией от переменных* z_1, z_2.

Теорема 3. *Пусть f — ограниченная аналитическая функция на $\vartheta = [\vartheta_1 \times \vartheta_2]$. Если для $(t_1, t_2) \in e \subset C$; $|e| > 0$ имеем $C^{\lambda}_{\Delta_1 \Delta_2}(f, t_1, t_2) \subseteq E$, где E — замкнутое множество емкости нуль*, то $f(z_1, z_2) \equiv \text{const}$.*

Доказательство. Допустим $f(z_1, z_2) \not\equiv \text{const}$ и $|f| < 1$. На основании одной теоремы Г. К. Эванса [9] ([7], стр. 22) существует распределение $\mu(t)$ единичной массы на E, так что функция

$$U(w) = \int_E \ln \left|\frac{2}{w-t}\right| d\mu(t)$$

будет гармонической и неотрицательной в $|w| < 1$. Кроме того, при $w \to t \in E$, $U(w) \to \infty$. Рассмотрим функцию $U_1(z_1, z_2) = U[f(z_1, z_2)]$, которая в силу леммы 6 будет бигармонической в ϑ. Пусть $V_1(z_1, z_2)$ — бигармоническая функция, сопряженная с $U_1(z_1, z_2)$, то есть выражение

$$\psi(z_1, z_2) = e^{-U_1(z_1, z_2) - iV_1(z_1, z_2)}$$

есть аналитическая функция на ϑ. Заметим, что для

$$(t_1, t_2) \in e, \; C^{\lambda}_{\Delta_1, \Delta_2}(U_1, t_1, t_2) = \{\infty\}, \; U_1(z_1, z_2) \geqslant 0.$$

Следовательно, функция $\psi(z_1, z_2)$ будет ограниченной и для $(t_1, t_2) \in e$ имеем $C^{\lambda}_{\Delta_1 \Delta_2}(\psi, t_1, t_2) = \{0\}$. Отсюда в силу одной теоремы из [3], стр. 489, получаем $\psi(z_1, z_2) \equiv 0$, что противоречит допущению, а потому $f(z_1, z_2) \equiv \text{const}$ и теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть f — аналитическая ограниченная функция при $y_k > 0$, $k = 1, 2$ и существуют точки*

$$z'_{k,n} = a'_{k,n} + ib'_{k,n}, \; z''_{k,n} = a''_{k,n} + ib''_{k,n}, \; k = 1, 2, \; n = \overline{1, \infty}, \; \lim_{n\to\infty} a'_{k,n} = a'_k,$$

$$\lim_{n\to\infty} a''_{k,n} = a''_k, \lim_{n\to\infty} b'_{k,n} = \lim_{n\to\infty} b''_{k,n} = 0, \; k = 1, 2.$$

Если существуют непрерывные линии $\gamma_{k,n}$, соединяющие точки $z'_{k,n}$ и $z''_{k,n}$ так, что для любой точки этой линии

$$\zeta_{k,n} = \alpha_{k,n} + i\beta_{k,n}, \; \lim \beta_{k,n} = 0, \; \lim_{(\beta_{1n}, \beta_{2n})_\lambda \to 0} |f(\zeta_{1n_1}, \zeta_{2n})| = 0,$$

где $(\beta_{1,n}, \beta_{2,n})_\lambda \to 0$ означает

$$\beta_{k,n} \to 0, \; 1/\lambda \leqslant \frac{\beta_{1n}}{\beta_{2n}} \leqslant \lambda,$$

то $f(z_1, z_2) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $\gamma_1 = [a'_1, a''_1]$, $\gamma_2 = [a'_2, a''_2]$. Тогда в силу условия теоремы

---

* Определение множества емкости нуль см., например, [7], стр. 20

$$\bigcap_{(x_1, x_2)\in\gamma} C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2) \neq \varnothing, \ \gamma = [\gamma_1 \times \gamma_2]$$

для любых $\varphi_k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Пусть $a'_k < C'_k < C''_k < a''_k$. Существует номер m_0 такой, что при $m > m_0$, $C'_k \leqslant \alpha_{k,m} \leqslant C''_k$. Далее числа φ_k, $k = 1, 2$ можно выбрать столь малыми, что $\lambda_1 = \lambda \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 > 1$ и точки вида $z_{k,m} = x_{k,m} + i\rho_m e^{i\varphi_k}$ при $m > m_0$ будут лежать на кривых $\gamma_{k,m}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \rho_{k,m} = 0$. Таким образом

$$\bigcap_{C'_k < x_k < C''_k} C^{\lambda_1}_{\varphi_1\varphi_1}(f, x_1, x_2) \ni 0.$$

Следовательно, в силу теоремы 1, $f(z_1, z_2) \equiv 0$ и теорема доказана. Так как λ-сходимость инварианта относительно конформного отображения, когда области ограничены кривыми Ляпунова, то приведенная теорема справедлива для биобластей $G = [G_1 \times G_2]$, если G_k ограничена линией Ляпунова.

§ 3. Теорема Бейджмиля для функций двух переменных

Пусть $0 < \rho < 1$, $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{4}$ — рациональные числа и $S \subset \theta$ — некоторое множество. Относительно множества S разобьем $C = [C_1 \times C_2]$ на подмножества $E_{\rho, \alpha, \beta}$. Скажем, что точка $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ принадлежит множеству $E_{\rho, \alpha, \beta}$, если существуют линии L'_k, L''_k из θ_k, оканчивающиеся в $e^{i\theta_k}$, начинающиеся соответственно в ζ'_k, ζ''_k так, что

$$|\zeta'_k| = |\zeta''_k| = \rho; \ [L'_1 \times L'_2] \subseteq S; \ [L''_1 \times L''_2] \subseteq C S; \ \rho < |z'_k|, \ |z''_k| < 1;$$

$$\theta_k - \pi/4 < \arg z'_k, \ \arg z''_k < \theta_k + \pi/4 \ z'_k \in L'_k, \ z''_k \in L''_k; \ \theta_k - \pi/4 <$$

$$< \arg \zeta'_k < \theta_k + \pi/4 - \alpha < \theta_k + \pi/4 - \beta < \arg \zeta''_k < \theta_k + \pi/4, \ k = 1, 2.$$

Лемма 7. *Пусть $E \subset [0, 1; 0, 1]$ — некоторое множество с внешней лебеговской мерой $|E| > 0$. Тогда существует хотя бы одна точка $(x, y) \in E$ такая, что*

$$|E \cap (x, x+h; y, y+h)| > 0; \ |E \cap (x, x+h, y-h, y)| > 0,$$

$$|E \cap (x-h, x, y, y+h)| > 0; \ |E \cap (x-h, x, y-h, y)| > 0, \ h > 0.$$

Доказательство. Допустим, что не существует точки, удовлетворяющей вышеуказанным условиям. Тогда для всякой точки $(x, y) \in E$ и для $h_n \to 0$ внешняя мера множества $E \cap (x, x+h_n; y, y+h_n)$ будет равна нулю.

На основании теоремы Витали о покрытии множества существует счетная система сегментов $r_p = [x_p, x_p + h_{np}, y_p, y_p + h_{np}]$ таких, что

$$|\Phi| = \left| E \setminus \bigcup_{p=1}^{\infty} (r_p \cap E) \right| = 0.$$

Из последних равенств имеем

$$|E| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} |E \cap r_p| + |\Phi| = 0,$$

что противоречит условию леммы. Следовательно, наше допущение неверно, и лемма доказана.

Лемма 8. *Множество $E_{\rho, \alpha, \beta}$ имеет лебеговскую меру, равную нулю.*

Доказательство. Допустим, что $|E_{\rho, \alpha, \beta}| > 0$. Тогда существует точка $(e^{i\theta_1}; e^{i\theta_2})$, для которой выполнены условия леммы 7. В силу этого существует последовательность точек $\{(e^{i\theta_{1n}}, e^{i\theta_{2n}})\}$ из $E_{\rho, \alpha, \beta}$ таких, что

$$\theta_{k, n} \leqslant \theta_{k, n+1}, \ n = \overline{1, \infty}, \ \lim_{n \to \infty} \theta_{k, n} = \theta_k.$$

Отсюда и из определения множества $E_{\rho, \alpha, \beta}$ для $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n > N$ будем иметь

$$\theta_k - \pi/4 - \varepsilon < \arg \zeta'_{k, n} < \theta_k + \pi/4 - \varepsilon - \alpha <$$

$$< \theta_k + \pi/4 - \varepsilon - \beta < \arg \zeta''_{k, n} < \theta_k + \pi/4 + \varepsilon.$$

Так как рассматриваемые линии непрерывны, то из последних соотношений имеем: для всякого номера $n > N$

$$\mathbf{L}''_{k, n} \cap \mathbf{L}'_{k, n+p} \neq \varnothing, \ k = 1, 2, \ p = \overline{1, \infty}.$$

Пусть $z_k \in \mathbf{L}''_{k, n} \cap \mathbf{L}'_{k, n+p}$, тогда

$$(z_1, z_2) \in [\mathbf{L}'_{1, n+p} \times \mathbf{L}'_{2, n+p}] \subseteq S$$

и

$$(z_1, z_2) \in [\mathbf{L}''_{1, n} \times \mathbf{L}''_{2, n}] \subseteq \mathbf{C}S,$$

что невозможно. Следовательно, $|E| = 0$ и лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $S \subset \vartheta$, тогда на C существует множество C^*; $|C \setminus C^*| = 0$, причем каждая точка $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \in C^*$ обладает следующими свойствами: любые две жордановые линии $\mathbf{L}'_k$, $\mathbf{L}''_k$ из ϑ_k, $\mathbf{L}'_k \cap \mathbf{L}''_k \leqslant e^{i\theta_k}$, оканчивающиеся в $e^{i\theta_k}$, таковы, что либо*

$$[\mathbf{L}'_1 \times \mathbf{L}'_2] \cap S \neq \varnothing, \ [\mathbf{L}''_1 \times \mathbf{L}''_2] \cap S \neq \varnothing,$$

либо

$$[\mathbf{L}'_1 \times \mathbf{L}'_2] \cap \mathbf{C}S \neq \varnothing, \ [\mathbf{L}''_1 \times \mathbf{L}''_2] \cap \mathbf{C}S \neq \varnothing.$$

Доказательство. Для рациональных чисел $0 < \rho < 1$, $0 < \beta < \alpha < \pi/4$ рассмотрим множество $E_{\rho, \alpha, \beta}$, а также $E'_{\rho, \alpha, \beta}$, причем точки множества $E'_{\rho, \alpha, \beta}$ отличаются от $E_{\rho, \alpha, \beta}$ лишь условием

$$[\mathbf{L}_1' \times \mathbf{L}_2'] \subset \mathbf{C}S, \ [\mathbf{L}_1'' \times \mathbf{L}_2''] \subset S.$$

Пусть $E = \bigcup_{\rho} \bigcup_{\alpha} \bigcup_{\beta} (E_{\rho, \alpha, \beta} \cup E'_{\rho, \alpha, \beta})$. В силу леммы 8 имеем $|E| = 0$. Положим $C^* = C \setminus E$ и пусть $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \in C^*$. Рассмотрим жордановы линии $\mathbf{L}_k'$, $\mathbf{L}_k''$; $\mathbf{L}_k' \cap \mathbf{L}_k'' = e^{i\theta_k}$, оканчивающиеся в $e^{i\theta_k}$. Введем множество

$$r_k = \{z_k, \ \rho < |z_k| < 1; \ \theta_k - \pi/4 < \arg z_k < \theta_k + \pi/4\}, \ k = 1, \ 2.$$

Подберем число ρ столь близким к 1, чтобы непрерывная часть дуг $\mathbf{L}_k'$ и $\mathbf{L}_k''$, находящихся в r_k и оканчивающихся в $e^{i\theta_k}$, начинались бы соответственно в точках $\zeta_k' \neq \zeta_k''$. Эти дуги обозначим через l_k', l_k''.

Для определенности предположим, что $\arg \zeta_k' < \arg \zeta_k''$. Тогда можно определить рациональные числа $0 < \beta < \alpha < \pi/4$ так, что будем иметь

$$|\zeta_k'| = |\zeta_k''| = \rho; \ \theta_k - \pi/4 < \arg \zeta_k' < \theta_k + \pi/4 - \alpha < \theta_k + \pi/4 -$$

$$- \beta < \arg \zeta_k'' < \theta_k + \pi/4; \ \rho < |z_k'|, \ |z_k''| < 1,$$

$$\theta_k - \pi/4 < \arg z_k', \ \arg z_k'' < \theta_k + \pi/4$$

для всех $z_k' \in l_k'$, $z_k'' \in l_k''$. Таким образом, если линии l_k' и l_k'' будут удовлетворять хотя бы одному из следующих условий:

$$[l_1' \times l_2'] \subset S; \ [l_1'' \times l_2''] \subset \mathbf{C}\, S,$$

либо

$$[l_1' \times l_2'] \subset \mathbf{C}S; \ [l_1'' \times l_2''] \subset S,$$

то точка $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ по определению будет принадлежать множеству E, что невозможно. Следовательно, выполнено одно из следующих условий:

$$[l_1' \times l_2'] \cap S \neq \varnothing; \ [l_1'' \times l_2''] \cap S \neq \varnothing$$

либо

$$[l_1' \times l_2'] \cap \mathbf{C}S \neq \varnothing; \ [l_1'' \times l_2''] \cap \mathbf{C}\, S \neq \varnothing.$$

Очевидно, что последнее соотношение верно для линий $\mathbf{L}_k'$, $\mathbf{L}_k''$, $k=1, 2$ и, тем самым, лемма доказана.

Опираясь на доказанные леммы, можно установить справедливость теоремы Бейджмиля (см. [10]) для функций двух переменных, а именно имеет место следующая

Теорема 5. *Пусть $f(z_1, z_2)$ — произвольная комплекснозначная функция, определенная в ϑ. Тогда на C найдется множество C^*; $|C \setminus C^*| = 0$ такое, что в каждой точке $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ и для любых непрерывных простых линий $\mathbf{L}_k'$, $\mathbf{L}_k''$, $\mathbf{L}_k' \cap \mathbf{L}_k'' = e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2$, оканчивающихся в $e^{i\theta_k}$, имеем*

$$C_{L_1' L_2'}(f, \theta_1, \theta_2) \cap C_{L_1'' L_2''}(f, \theta_1, \theta_2) \neq \emptyset^*.$$

Доказательство. Пусть Σ есть риманова w-сфера и $\{v_n\}$ — счетная система окрестностей, а $G_1, G_2, \cdots$ — совокупность открытых множеств, каждое из которых можно представить как объединение конечного числа множеств v_n; кроме того

$$\sum = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Введем множество

$$S_n = \{(z_1, z_2); f(z_1, z_2) \in G_n\}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Согласно лемме 9 существует множество C_n^*, $|C - C_n^*| = 0$ такое, что для каждой точки из C_n^* будут выполнены условия леммы 9 относительно множества S_n. Положим

$$C^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^*.$$

Очевидно $|C \setminus C^*| = 0$. Пусть

$$(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \in C^* \text{ и } \mathbf{L}_k', \ \mathbf{L}_k''; \ \mathbf{L}_k' \cap \mathbf{L}_k'' = e^{i\theta_k}$$

— простые непрерывные линии, оканчивающиеся в $e^{i\theta_k}$ так, что

$$C_{L_1' L_2'}(f, \theta_1, \theta_2) \cap C_{L_1'' L_2''}(f, \theta_1, \theta_2) = \emptyset.$$

Так как предельные множества замкнуты, то найдется такой номер n, что

$$C_{L_1' L_2'}(f, \theta_1, \theta_2) \in G_n; \ C_{L_1'' L_2''}(f, \theta_1, \theta_2) \subset \sum \setminus G_n.$$

Следовательно, при подходящем выборе последних частей l_k', l_k'' кривых $\mathbf{L}_k'$, $\mathbf{L}_k''$ можно добиться того, что образы кривых l_k', l_k'' при отображении $w = f(z_1, z_2)$ будут целиком лежать, соответственно, внутри G_n и $\sum \setminus G_n$. Отсюда вытекает, что $[l_1' \times l_2'] \subset S_n$ и $[l_1'' \times l_2''] \subset \complement S_n$. Последние включения невозможны в силу выбора точки $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$, т. е. наше допущение неверно и теорема доказана.

Обобщение другого вида теоремы Бейджмиля имеется в [11].

§ 4. Теорема Линделёфа для функций двух переменных

Плоскостью назовем множество точек (z_1, z_2), удовлетворяющих условию $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma = 0$, где α, β, γ — фиксированные комплексные

---

* $C_{L_1 L_2}(f, x_1, x_2)$ — обычное предельное множество без условия

$$1/\lambda \leqslant \frac{|z_1 - x_1|}{|z_2 - x_2|} < \lambda.$$

числа. Пусть E — некоторое множество и $p_0\ (z_{10},\ z_{20})$ — предельная точка. Рассмотрим некоторую последовательность $p_n\,(z_{1n};\ z_{2n}) \in E$, $p_n \to p_0$. Проведем через точки p_0 и p_n плоскость

$$\pi_n:\ \frac{z_1 - z_{1,0}}{z_{1,n} - z_{1,0}} = \frac{z_2 - z_{2,0}}{z_{2,n} - z_{2,0}},\ n = \overline{1,\infty}.$$

Если при $n \to \infty$ плоскости π_n допускают бесконечное множество предельных плоскостей, зависящих от выбора последовательностей p_n, то p_0 назовем предельной точкой бесконечного порядка. В [13], стр. 200 и [1], стр. 155 доказана следующая

Теорема В. *Пусть f — аналитическая в $\vartheta = [\vartheta_1 \times \vartheta_2]$ и обращающаяся в нуль в точках множества E функция. Если E имеет хотя бы одну предельную точку бесконечного порядка в ϑ, то* $f \equiv 0$.

Введем множества

$$S_k\,(t_k,\ \alpha,\ 1) = \{z_k,\ -\alpha < \arg\,(z_k - t_k) < \alpha;\ 0 < |z_k - t_k| < 1\},\ k = 1,\ 2;$$

$$S = S\ (t,\ \alpha,\ 1) = [S_1 \times S_2],\ t = (t_1,\ t_2);$$

$$S_\lambda = \left\{(z_1,\ z_2);\ 1/\lambda \leqslant \frac{|z_1 - t_1|}{|z_2 - t_2|} \leqslant \lambda:\ (z_1,\ z_2) \in S\right\},\ \lambda > 1;$$

$$R_\delta = \{(z_1,\ z_2),\ \arg z_k = \arg t_k,\ \delta < |t_k - z_k| < 1,\ k = 1,\ 2\},\ \delta > 0.$$

При этом, если $t = 0$, то $\arg t = 0$.

Лемма 10. *Для любого $\delta \in (0,1)$ множество $E_\lambda = R_\delta \cap S_\lambda$ имеет хотя бы одну предельную точку бесконечного порядка.*

Доказательство. Рассмотрим числа $0 < \delta < \eta < r_0 < \mu < 1$;

$$1/\lambda < \delta/\eta < 1/\mu < \lambda;\ r_n \in (\eta, \mu);\ m_n \in (\delta/\eta,\ 1/\mu),\ n = \overline{1,\infty},\ m_n \to 1,\ r_n \to r_0.$$

Положим

$$t_1 = t_2 = 0,\ z_{10} = z_{20} = r_0,\ z_{1,n} = r_n,\ z_{2,n} = m_n \cdot r_n.$$

Очевидно, что

$$p_0\,(z_{10},\ z_{2,0}) \in E_\lambda \text{ и } p_n\,(z_{1n},\ z_{2n}) \in E_\lambda,\ p_n \to p_0.$$

Пусть $\mathbf{k}$ — некоторое число. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{kr_0 - r_0 + r_n}{k\,r_n} = 1.$$

В силу этого, начиная с некоторого номера N, для всех $n \geqslant N$ имеем $\sigma_n \in (\delta/\eta,\ 1/\mu)$. Пусть $m_n = \sigma_{N+n}$, $n = \overline{1,\infty}$. Проведем через точки p_0 и p_n плоскость

$$\pi_n:\ \frac{z_1 - z_{1,n}}{z_{1,0} - z_{1,n}} = \frac{z_2 - z_{2,n}}{z_{2,0} - z_{2,n}},\ n = \overline{1,\infty}.$$

Отсюда получаем

$$\pi_n:\ z_1 = \mathbf{k}\,(z_2 - m_n \cdot r_{N+n}) + r_n.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\pi:\ z_1 = \mathbf{k}\,(z_2 - r_0) + r_0.$$

Меняя значения $\mathbf{k}$, мы будем получать различные предельные плоскости. Стало быть, точка p_0 есть предельная точка бесконечного порядка и лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть* $\{f_{m,n}(z_1, z_2)\}$, $1/\lambda \leqslant m/n \leqslant \lambda$, $\lambda > 1$ *есть двойная последовательность аналитических и ограниченных в совокупности функций в области* G. *Допустим в каждой точке множества* $H \subset G$ *существует*

$$\lim_{(m,\,n)_\lambda \to \infty} f_{m,n}(z_1, z_2),$$

где $(m, n)_\lambda \to \infty$ *означает* $m \to \infty$; $n \to \infty$, $1/\lambda \leqslant m/n \leqslant \lambda$. *Если множество* H *имеет хотя бы одну предельную точку бесконечного порядка, то равномерно внутри* G *существует предел*

$$\lim_{(m,\,n)_\lambda \to \infty} f_{m,n}(z_1, z_2).$$

Доказательство этой леммы опирается на теорему B и лемму 10.

Как известно, при изучении угловых граничных свойств аналитической функции одной переменной важную роль играет теорема Линделёфа (см. [14]; [7], стр. 17). При исследовании аналогичной теоремы для функции двух переменных, в силу увеличения размерности, возникают различные пути обобщения. Приведем некоторые обобщения этой теоремы для функций двух переменных. Справедлива

Теорема 6. *Пусть* f — *аналитическая функция в области* $S = S(0, \alpha, 1)$ *и ограничена в* $S_\lambda = S_\lambda(0, \alpha, 1)$. *Если существует*

$$\lim_{(r_1,\,r_2)_\lambda \to 0} f(r_1, r_2) = C_0,\quad r_1 > 0,\ r_2 > 0,\ \lambda > 1,$$

то для любых $\alpha' \in (0, \alpha)$, $\mu \in (1, \sqrt{\lambda})$ *существует*

$$\lim f(z_1, z_2) = C_0, \tag{$*$}$$

когда $z_1 \to 0$, $z_2 \to 0$ *так, что* $(z_1, z_2) \in S_\mu(0, \alpha', 1)$.

Доказательство. Рассмотрим двойную последовательность аналитических функций

$$f_{m,n}(z_1, z_2) = f\left(\frac{z_1}{m}, \frac{z_2}{n}\right),$$

где

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \sqrt{\lambda};\quad (z_1, z_2) \in S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1).$$

В силу условия теоремы указанная последовательность ограничена в совокупности на области $S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1)$. На основании теоремы Монтеля ([13], стр. 195) семейство $\{f_{m,n}(z_1, z_2)\}$ будет нормальным в $S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1)$. Пусть

$$e = \left\{(z_1, z_2);\ 1/2 < |z_k| < 1,\ \arg z_k = 0,\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \in \frac{|z_1|}{|z_2|} < \sqrt{\lambda},\ k = 1, 2\right\}.$$

Ясно, что $e \subset S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1)$ и по условию теоремы для любой точки $(z_1, z_2) \in e$ имеем

$$\lim_{(m,n)\underset{\sqrt{\lambda}}{\to}\infty} f_{m,n}(z_1, z_2) = C_0.$$

На основании леммы 10 множество e имеет хотя бы одну предельную точку бесконечного порядка внутри $S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1)$.

Пусть

$$H = \left\{(z_1, z_2);\ \frac{1-\varepsilon}{3} \leqslant |z_k| \leqslant 1-\varepsilon;\ -\alpha' \leqslant \arg z_k \leqslant \alpha';\ \lambda_1^{-1} \leqslant \frac{|z_1|}{|z_2|} \leqslant \lambda_1,\right.$$
$$\left. k = 1, 2\right\},$$

где $0 < \alpha' < \alpha$, $1 < \lambda_1 \in \sqrt{\lambda}$, $0 < \varepsilon$. Ясно, что замкнутое множество $H \subset S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1)$. В силу леммы 11, равномерно на множестве H имеем

$$\lim_{(m,n)\underset{\sqrt{\lambda}}{\to}\infty} f_{m,n}(z_1; z_2) = C_0. \tag{12}$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim f(z_1, z_2) = C_0, \tag{13}$$

когда $z_1 \to 0$, $z_2 \to 0$, $(z_1, z_2) \in S_\mu(0, \alpha', 1)$, $1 < \mu < \lambda_1$.

Допустим утверждение (13) неверно. Тогда существуют $\eta > 0$, последовательность точек $(z_{1p}, z_{2p}) \in S_\mu(0, \alpha', 1)$ таких, что $z_{1,p} \to 0$, $z_{2,p} \to 0$, $p \to \infty$ и

$$|f(z_{1,p}, z_{2,p}) - C_0| > \eta. \tag{14}$$

Далее, в силу (12) и для того же $\eta > 0$, существует число $N = N(\eta) > 0$ такое, что при $m > N$, $n > N$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \sqrt{\lambda}$ и любом $(z_1, z_2) \in H$ имеем

$$|f_{m,n}(z_1, z_2) - C_0| < \eta. \tag{15}$$

Для достаточно большого p найдутся числа $m' > N$, $n' > N$ такие, что

$$\frac{1}{m'},\ \frac{1}{n'} \leqslant \min\left\{2,\ \mu - 1,\ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda_1}\right\},$$

$$\frac{1-\varepsilon}{m'+1} \leqslant |z_{1,p}| \leqslant \frac{1-\varepsilon}{m'}; \quad \frac{1-\varepsilon}{n'+1} \leqslant |z_{2p}| \leqslant \frac{1-\varepsilon}{n'}.$$

Пусть $w_1 = m' z_{1p}$, $w_2 = n' z_{2p}$.

Используя вышеприведенные неравенства, можно показать справедливость следующих соотношений:

$$\frac{1}{\mu} \leqslant \frac{|w_1|}{|w_2|} \leqslant \mu; \ \frac{1}{\lambda_1} \leqslant \frac{m'}{n'} \leqslant \lambda_1; \ \frac{1-\varepsilon}{3} \leqslant |w_k| < 1-\varepsilon, \ k=1, 2.$$

Отсюда вытекает, что $(w_1, w_2) \in H$ и выполнены все условия для неравенства (15), то есть

$$|f_{m', n'}(w_1, w_2) - C_0| = |f(z_{1p}, z_{2p}) - C_0| < \eta.$$

Но последнее неравенство противоречит неравенству (4). Стало быть, наше допущение неверно и теорема доказана.

Пусть непрерывная простая линия $L_k \subset S_k(t_k, \alpha, 1)$ оканчивается в точке t_k и $L = [L_1 \times L_2]$. Тогда символ

$$(z_1, z_2)_\lambda \xrightarrow{L} (t_1, t_2), \ \lambda > 1$$

означает

$$z_k \to t_k, \ z_k \in L_k, \ 1/\lambda \leqslant \frac{|z_1 - t_1|}{|z_2 - t_2|} \leqslant \lambda.$$

Справедлива

Теорема 7. *Пусть f — аналитическая функция в $S = S(t, \alpha, 1)$, $t = (t_1, t_2)$ и ограничена в области $S_\lambda = S_\lambda(t, \alpha, 1)$. Если существует*

$$\lim_{(z_1, z_2)_\lambda \xrightarrow{L} (t_1, t_2)} f(z_1, z_2) = C_0,$$

*то существует предел (*).*

Повторяя метод доказательства предыдущей теоремы, можно установить справедливость следующего предложения.

Теорема 8. *Пусть f — аналитическая и ограниченная функция в $S(t, \alpha, 1)$. Если существует*

$$\lim f(z_1, z_2) = C_0,$$

когда $z_k \to t_k$, $z_k \in L_k$, $k=1, 2$, то имеем

$$\lim f(z_1, z_2) = C_0,$$

когда $z_k \to t_k$, $(z_1, z_2) \in S(t, \alpha', 1)$, где $0 < \alpha' < \alpha$.

Тбилисский математический
институт им. Размадзе
АН Грузинской ССР

Поступила 20.I.1975

Ա. Գ. ՋՎԱՐՇԵՅՇՎԻԼԻ. Երկու փոփոխականի անալիտիկ ֆունկցիայի վարքը եզակի կետերի շրջակայքում և միակության թեորեմներ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ստացված են միակության եզրային թեորեմներ երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար, մասնավորապես, ընդհանրացված են Ա. Զիգմունդի և Կալդերոնի, Ցուջիի, Կոլինգվուդի և Բեյգժմիլի թեորեմները։

A. G. DZVARSHEISHVILI. *On the behaviour of the unaltical functions of two variables in the neighborhood of the sinsulat points and the uniqueness* (summary)

Boundary uniqueness theorems for the functions of two variables are obtained. In particular, the generalizations of Zigmund and Calderon, Tsuji, Collingwood and Bagemihl theorems are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г Джваршейшвили.* О граничных свойствах аналитических функций многих переменных, Труды матем. ин-та АН ГССР, т. 29, 1963, 147—167.
2. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1952.
3. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. II, М., 1965.
4. *E. Collingwood.* On the linear and angular cluster sets, Acta Math., 91, 1954, 165—185.
5. *P. Bagmihl.* Some identity and uniqueness theorems, Sci. Fenn. Ser., № 299, 1961.
6. *M. Tsuji.* Theory of meromorphic functions, Jap. J. Math., 19, 1944, 139—154.
7. *К. Носиро.* Предельные множества, И.Л.М., 1963.
8. *Б. А. Фукс.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М.—Л., 1962.
9. *G. Evanc.* Potential and positively infinite singularites, Mh. Math. Phys., 43, 1936, 419—424.
10. *P. Begmihl.* Curvilinear cluster sets, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 41, 1955, 379—382.
11. *G. Young.* A generalisation of Bagmihls theorem, Michigan Math. J., 8, № 2, 1961, 193—200.
12. *А. Г. Джваршейшвили.* Предельные множества и теоремы единственности, Труды матем. ин-та АН ГССР, т. 38, 1970, 44—51.
13. *П. Монтель.* Нормальные семейства аналитических функций, М.—Л., 1936.
14. *Е. Линделёф.* Sur un principe gèneral de l'analyse et ses applications, Acta Soc. Sci. Fenn., 46, № 4, 1915, 1--35.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

С. К. АФЯН

ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим в круге $|z| \leqslant 1$ $(z = x + iy)$ уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(q \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) + a_1 \frac{\partial u}{\partial z} + a_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + a_3 \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + a_4 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + a_5 u + a_6 \bar{u} = h, \quad (1.1)$$

где $u = u(z) = u_1(x, y) + iu_2(x, y)$ — искомая функция; $a_1 = a_1(z)$, $a_2 = a_2(z), \cdots, a_6 = a_6(z)$, $h = h(z)$ — заданные функции класса $C^1(|z| \leqslant 1)$; $q = q(z)$—также заданная из класса $C^1(|z| \leqslant 1)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$|q(z)| \neq 1 \text{ при } |z| < 1 \text{ и } |q(z)| = 1 \text{ при } |z| = 1, \quad (1.2)$$

$$1 - q\bar{q} = q_1(z)(1 - z\bar{z})^\beta \text{ и } 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad (1.3)$$

где

$$q_1(z) \in C^1(|z| \leqslant 1) \text{ и } q_1(z) \neq 0; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \quad (1.5)$$

Уравнение (1) есть комплексная запись некоторой системы дифференциальных уравнений, которая, в силу условия (2), эллиптична внутри круга $|z| < 1$ и вырождается на всей границе $|z| = 1$. Условия (1.2) — (1.4) выражают характер вырождения.

Основная цель этой работы заключается в следующем: выяснить, какие краевые задачи для уравнения (1.1), в зависимости от характера вырождения, являются нетеровыми.

В работе [3] изучена задача Римана-Гильберта для уравнения (1.1) в классе $C^1_\alpha(|z| \leqslant 1) \cap C^2(|z| < 1)$ $(0 < \alpha < 1)$ в том случае, когда $0 < \beta \leqslant 1$. Обозначим через $E_\beta \left(0 < \beta < \frac{1}{2}\right)$ класс функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$u(z) \in C^2(|z| < 1), \ u(z) \in C_\alpha(|z| \leqslant 1), \quad (1.6)$$

$$(1 - z\bar{z})^\beta \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \in C_\alpha(|z| \leqslant 1), \ 0 < \alpha < 1 - 2\beta. \quad (1.7)$$

В настоящей работе рассматривается следующая *задача*: найти решение уравнения (1.1) в классе E_3, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\lim_{z \to t} \operatorname{Re} \left[(1 - z\bar{z})^{\beta} \mu(t) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right] = \gamma(t), \ |t| = 1, \tag{1.8}$$

$$\operatorname{Re} [\lambda(t) u(t)] = \rho(t), \ |t| = 1, \tag{1.9}$$

где $\mu(t)$, $\gamma(t)$, $\lambda(t)$ и $\rho(t)$ — заданные функции класса $C^1(|z|=1)$, причем $\lambda(t)$, $\mu(t)$ и $\mu(t) - \bar{q}(t)\overline{\mu(t)}$ отличны от нуля при любом t, $|t|=1$. Обозначим

$$m = \frac{1}{2\pi} [\arg \overline{\mu(t)}]_{|t|=1}, \ n = \frac{1}{2\pi} [\arg \lambda(t)]_{|t|=1}, \tag{1.10}$$

где символ $[\ ]_{|t|=1}$ означает приращение функции, заключенной в скобках, при однократном обходе единичной окружности в направлении против часовой стрелки.

Не ограничивая общности (см. [1], стр. 229—233), рассмотрим случай, когда краевое условие (1.9) имеет следующий простой вид:

$$\operatorname{Re} [t^{-n} u(t)] = 0 \text{ при } |t| = 1. \tag{1.11}$$

Рассматриваемую задачу будем называть задачей (1.1), (1.8), (1.11).

Индексом $\varkappa$ задачи (1.1), (1.8), (1.11) называется разность $k_0 - k_1$, где k_0 — число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи ($h(z)=0$, $\gamma(t)=0$), а k_1 — число линейно независимых условий, при которых разрешима неоднородная задача.

В работе получен следующий результат:

1. Краевая задача (1.1), (1.8), (1.11) приведена к уравнению вида $u - Au = f$ с вполне непрерывным оператором A,
2. Доказана нетеровость задачи,
3. В случае $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ получена оценка для индекса $\varkappa$.

§ 2. Исследование задачи (1.1), (1.8), (1.11)

Сначала приведем две леммы.

Лемма 2.1. *Если функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \cdots, \varphi_n(z)$ линейно независимы в круге $|z| < 1$, то существуют точки $z_1, z_2, \cdots, z_n$ ($|z_k| < 1$, $k = 1, 2, \cdots, n$) такие, что*

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(z_1) & \varphi_2(z_1) & \cdots & \varphi_n(z_1) \\ \varphi_1(z_2) & \varphi_2(z_2) & \cdots & \varphi_n(z_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(z_n) & \varphi_2(z_n) & \cdots & \varphi_n(z_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство очевидно.

Лемма 2.2. *Пусть $\psi(z)$ — аналитическая в круге $|z|<1$ функция и $q(z)$ — функция из класса $C^1(|z| \leqslant 1)$. Если функция $\psi(z)$ —*

— *$q(z)\overline{\psi(z)}$ непрерывна в круге $|z|\leqslant 1$ и граничное значение принадлежит классу C_α $(|z|=1)$, $0<\alpha<1$, то $\psi(z)$ принадлежит классу C_α $(|z|\leqslant 1)$.*

Доказательство. Пусть $\omega(z)$—некоторая функция из класса C^1 $(|z|\leqslant 1)$ и такая, что $\omega(z)-q\overline{(z)}\,\overline{\omega(z)}\neq 0$ в некоторой окрестности окружности $|z|=1$. Обозначим

$$\operatorname{Re}\{\omega(z)[\psi(z)-q(z)\overline{\psi(z)}]\}_{|z|=r}=f_r(z). \tag{2.1}$$

Отсюда легко получаем

$$\operatorname{Re}\{[\omega(z)-\overline{q(z)}\,\overline{\omega(z)}]\,\psi(z)\}_{|z|=r}=f_r(z). \tag{2.2}$$

Из непрерывности функции $\omega(z)-q\overline{(z)}\,\overline{\omega(z)}$ следует для r достаточно близкого к единице равенство

$$\frac{1}{2\pi}\{\arg[\overline{\omega(z)}-q(z)\omega(z)]\}_{|z|=r}=\frac{1}{2\pi}\{\arg[\overline{\omega(z)}-q(z)\omega(z)]\}_{|z|=1}. \tag{2.3}$$

Это число обозначим через k. Рассмотрим сначала случай, когда $k\geqslant 0$.

В круге $|z|\leqslant r$ при r достаточно близком к единице, функция $\psi(z)$, как решение известной задачи Римана-Гильберта с краевым условием (2.2), представится в виде (см. [2], стр. 151)

$$\psi(z)=Bf_r+d_0^{(r)}\varphi_0^{(r)}(z)+d_1^{(r)}\varphi_1^{(r)}(z)+\cdots+d_{2k}^{(r)}\varphi_{2k}^{(r)}(z), \tag{2.4}$$

где

$$Bf_r=\frac{X_r(z)}{2\pi i}\Bigg[\int\limits_{|t|=r}\frac{f_r(t)\,dt}{(\omega-q\overline{\omega})X_r^+(t)(t-z)}+z^{2k}\int\limits_{|t|=r}\frac{f_r(t)\,dt}{t^{2k}(\omega-\overline{q}\overline{\omega})X_r^+(t)(t-z)}-$$
$$-z^{2k}\int\limits_{|t|=r}\frac{f_r(t)}{t^{2k}(\omega-q\overline{\omega})X_r^+(t)}\frac{dt}{t}\Bigg], \tag{2.5}$$

$$X_r(z)=\exp\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\ln\frac{\overline{\omega}-q\omega}{t^{2\varkappa}(\omega-\overline{q}\overline{\omega})}\cdot\frac{dt}{t-z}\right|, \tag{2.6}$$

$$\varphi_\nu^r(z)=\begin{cases}(z^\nu+z^{2k-\nu})X_r(z) & \text{при } 0\leqslant\nu\leqslant k-1\\ z^kX_r(z) & \text{при } \nu=k\\ (z^\nu-z^{2k-\nu})X_r(z) & \text{при } k+1\leqslant\nu\leqslant 2k,\end{cases} \tag{2.7}$$

а $d_0^{(r)}, d_1^{(r)},\cdots, d_{2k}^{(r)}$— некоторые действительные числа. Легко видеть, что функции $\varphi_0^{(r)}(z),\cdots,\varphi_{2k}^r(z)$ линейно независимы относительно поля действительных чисел. То же самое верно и для предельных функций, когда r стремится к единице. Предельные функции будем обозначать соответственно через $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z),\cdots,\varphi_{2k}(z)$. В силу леммы 2.1 существуют точки $z_0, z_1,\cdots, z_{2k}$ $(|z_j|<1,\ j=0, 1,\cdots, 2k)$, такие, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(z_0) & \varphi_1(z_0) \cdots & \varphi_{2k}(z_0) \\ \varphi_0(z_1) & \varphi_1(z_1) \cdots & \varphi_{2k}(z_1) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \varphi_0(z_{2k}) & \varphi_1(z_{2k}) \cdots & \varphi_{2k}(z_{2k}) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.8}$$

Пусть r такое, что $|z_j| < r$, $j = 0, 1, \cdots, 2k$. Из непрерывности функции $\varphi_j^r(z)$ по r (см. (2.7) и (2.6)) следует непрерывность определителя

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \varphi_0^{(r)}(z_0) & \varphi_1^{(r)}(z_0) & \cdots & \varphi_{2k}^{(r)}(z_0) \\ \varphi_0^{(r)}(z_1) & \varphi_1^{(r)}(z_1) & \cdots & \varphi_{2k}^{(r)}(z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0^{(r)}(z_{2k}) & \varphi_1^{(r)}(z_{2k}) & \cdots & \varphi_{2k}^{(r)}(z_{2k}) \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

от r. Но так как $\Delta \neq 0$, то, взяв r достаточно близким к единице, получим, что Δ_r также отлично от нуля. Подставляя в (2.4) z_ν вместо z ($\nu = 0, 1, \cdots, 2k$), получим

$$d_0^{(r)}\varphi_0^{(r)}(z_\nu) + d_1^{(r)}\varphi_1^{(r)}(z_\nu) + \cdots + d_{2k}^{(r)}\varphi_{2k}^{(r)}(z_\nu) = \psi(z_\nu) - (Bf_r)(z_\nu). \tag{2.10}$$

Пользуясь условием $\Delta_r \neq 0$, из системы (2.10) числа $d_j^{(r)}$ выразим через $\varphi_j^{(r)}(z_\nu)$, $\psi(z_\nu)$ и $(Bf_r)(z_\nu)$ ($j = 0, 1, \cdots, 2k$; $\nu = 0, 1, \cdots, 2k$. Теперь, принимая во внимание непрерывную зависимость от r всех выражений, входящих в $d_j^{(r)}$ ($j = 0, 1, \cdots, 2k$), убедимся, что $d_0^{(r)}, d_1^{(r)}, \cdots$ $\cdots, d_{2k}^{(r)}$ имеют пределы при r стремящемся к единице, которые будем обозначать через $d_0, d_1, \cdots, d_{2k}$. В силу условий леммы существует предел

$$f(z) = \lim_{r \to 1} f_r(z). \tag{2.11}$$

Переходя к пределу в (2.6), (2.5), (2.4) при $r \to 1$, получим

$$X(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \ln \frac{\bar{\omega} - q\omega}{t^{2k}(\omega - \bar{q}\bar{\omega})} \cdot \frac{dt}{t - z}\right], \tag{2.12}$$

$$Bf = \frac{X(z)}{2\pi i}\left[\int_{|t|=1} \frac{f(t)\,dt}{(\omega - \bar{q}\bar{\omega})X^+(t)(t-z)} + z^{2k}\int_{|t|=1} \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t^{2k}(\bar{\omega} - \bar{q}\omega)\overline{X^+(t)}(t-z)} - \right.$$

$$\left. - z^{2k}\int_{|t|=1} \frac{\overline{f(t)}}{t^{2k}(\bar{\omega} - \bar{q}\omega)\overline{X^+(t)}} \cdot \frac{dt}{t}\right], \tag{2.13}$$

$$\psi(z) = Bf + d_0\varphi_0(z) + d_1\varphi_1(z) + \cdots + d_{2k}\varphi_{2k}(z), \tag{2.14}$$

где $X(z) = \lim_{r \to 1} X_r(z)$ и $Bf = \lim_{r \to 1} Bf_r$. Так как интеграл типа Коши отображает C_α ($|z| = 1$) в C_α ($|z| \leqslant 1$), то в силу условий леммы, из (2.12) и (2.13) получим, что $Bf \in C_\alpha$ ($|z| \leqslant 1$). С другой стороны, функции $\varphi_\nu(z)$, как пределы функций (2.7), также принадлежат C_α ($|z| \leqslant 1$). Отсюда и из (2.14) следует утверждение леммы 2.2 в случае $k \geqslant 0$. В случае $k < 0$ вместо (2.14) будем иметь $\psi(z) = Bf$. Из этого, по доказанному выше, следует, что $\psi(z) \in C_\alpha(|z| \leqslant 1)$. Таким образом, лемма 2.2 полностью доказана.

Теперь перейдем к исследованию задачи (1.1), (1.8), (1.11).

Пусть функция $u(z)$ есть произвольное решение задачи (1.1), (1.8), (1.11). Тогда из (1.1) будем иметь (см. [1], стр. 42)

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + q\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = Ku + Th + \psi(z), \tag{2.15}$$

где

$$Ku = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\left(\frac{\partial a_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial a_3}{\partial \bar{\zeta}} - a_5\right)u + \left(\frac{\partial a_2}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial a_4}{\partial \zeta} - a_6\right)\bar{u}\right]\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{a_1(\zeta)\,u(\zeta) + a_4(\zeta)\,\overline{u(\zeta)} - a_1(z)\,u(z) - a_4(z)\,\bar{u}(z)}{(\zeta - z)^2}\,d\xi d\eta -$$

$$- a_2(z)\,\bar{u}(z) - a_3(z)\,u(z), \tag{2.16}$$

$$Th = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta). \tag{2.17}$$

(см. [3], лемма 3) и $\psi(z)$ — некоторая аналитическая в круге $|z| < 1$ функция. Переходя в (2.15) к комплексно сопряженным, получим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{q}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \overline{Ku} + \overline{Th} + \overline{\psi(z)}. \tag{2.18}$$

Умножая обе части (2.18) на $-q$ и складывая соответственно левые и правые части полученного равенства и равенства (2.15), имеем

$$(1 - q\bar{q})\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = Ku - q\,\overline{Ku} + Th - q\,\overline{Th} + \psi(z) - q\,\overline{\psi(z)}. \tag{2.19}$$

В силу условия (1.3) равенство (2.19) принимает вид

$$q_1(z)(1 - z\bar{z})^\beta\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = Ku - q\,\overline{Ku} + Th - q\,\overline{Th} + \psi(z) - q\,\overline{\psi(z)}. \tag{2.20}$$

Пользуясь теоремой 1.32, [1], легко видеть, что K представляет собой линейный (над полем действительных чисел) ограниченный оператор в $C_\alpha(|z| \leqslant 1)$, отображающий это пространство в себя. На основании этого и условия (1.7) из (2.20) имеем, что $\psi(z) - q(z)\overline{\psi(z)}$ принадлежит классу $C_\alpha(|z| \leqslant 1)$, $0 < \alpha < 1 - 2\beta$. Отсюда в силу леммы 2.2 получаем, что $\psi(z)$ также принадлежит классу $C_\alpha(|z| \leqslant 1)$. Из (2.20) будем иметь

$$q_1(z)\,\mathrm{Re}\left[\mu(t)(1 - z\bar{z})^\beta\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right] = \mathrm{Re}\left[\mu(t)\,(Ku - q\overline{Ku} + Th - q\,\overline{Th})\right] +$$

$$+ \mathrm{Re}\left[\mu(t)(\psi - q\bar{\psi})\right].$$

Пользуясь краевым условием (1.8), из предыдущего легко получаем

$$\operatorname{Re}\{[\mu(t)-\overline{q(t)}\,\overline{\mu(t)}]\,\psi(t)\}=q_1(t)\,\gamma(t)-\operatorname{Re}\{[\mu(t)-\overline{q(t)}\,\overline{\mu(t)}]\times$$
$$\times(Ku+Th)(t)\},\ |t|=1. \tag{2.21}$$

Таким образом, $\psi(z)$ является решением задачи Римана-Гильберта (для аналитических функций) с краевым условием (2.21) в классе $C_\alpha(|z|\leqslant 1)$, причем коэффициент $\mu-\bar{q}\bar{\mu}$ отличен от нуля и принадлежит классу $C_\alpha(|t|=1)$ вместе с правой частью (2.21). Принимая во внимание (1.2) и (1.10), легко убедиться, что

$$\frac{1}{2\pi}\{\arg[\mu(t)-\overline{q(t)}\,\overline{\mu(t)}]\}_{|t|=1}=-m. \tag{2.22}$$

Согласно вышесказанному $\psi(z)$ в круге $|z|\leqslant 1$ представится в виде

$$\psi(z)=B(q_1\gamma)-B\{\operatorname{Re}[(\mu-\bar{q}\bar{\mu})\,Th]\}-B\{\operatorname{Re}[(\mu-\bar{q}\bar{\mu})\,Ku]\}+$$
$$+X(z)\sum_{\nu=0}^{2m}c_\nu z^\nu, \tag{2.23}$$

где B — оператор, определяемый формулой (2.13) при $\omega(t)=\mu(t)$, $X(z)$ — функция, определяемая формулой (2.12) также при $\omega(t)=\mu(t)$ и $c_0, c_1,\cdots, c_{2m}$ — некоторые комплексные числа, удовлетворяющие условию (см. [2], стр. 145—151)

$$c_{2m-\nu}=\bar{c}_\nu,\ \nu=0,1,\cdots,2m. \tag{2.24}$$

Подставляя $\psi(z)$ из (2.23) в (2.20) и разделив обе части на $q_1(z)\times\times(1-z\bar{z})^\beta$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}=SKu+STh+F\gamma+\sum_{\nu=0}^{2m}\alpha_\nu h_\nu(z), \tag{2.25}$$

где

$$Sf=q_1^{-1}(z)(1-z\bar{z})^{-\beta}\{f-q\bar{f}-B[\operatorname{Re}((\mu-\bar{q}\bar{\mu})f)]+q\overline{B[\operatorname{Re}((\mu-\bar{q}\bar{\mu})f)]}\}, \tag{2.26}$$

$$F(\gamma)=q_1^{-1}(z)(1-z\bar{z})^{-\beta}[B(q_1\gamma)-q\overline{B(q_1\gamma)}],$$

$$\alpha_\nu=\operatorname{Re}c_\nu \text{ при } 0\leqslant\nu\leqslant m,\ \alpha_\nu=\operatorname{Im}c_\nu \text{ при } m<\nu\leqslant 2m, \tag{2.27}$$

$$h_\nu(z)=\begin{cases} q_1^{-1}(z)(1-z\bar{z})^{-\beta}[X(z)(z^\nu+z^{2m-\nu})-q(z)\overline{X}(z)(\bar{z}^\nu+\bar{z}^{2m-\nu})] \\ \qquad\qquad\text{при } 0\leqslant\nu\leqslant 2m, \\ q_1^{-1}(z)(1-z\bar{z})^{-\beta}[X(z)\,z^m-q(z)\overline{X(z)}\,\bar{z}^m] \\ q_1^{-1}(z)(1-z\bar{z})^{-\beta}[X(z)(z^{\nu+m-1}-z^{3m+1-\nu})-q(z)\overline{X}(z)(\bar{z}^{\nu-m-1}- \\ \qquad -\bar{z}^{3m+1-\nu})] \text{ при } m<\nu\leqslant 2m. \end{cases} \tag{2.28}$$

Докажем теперь, что правая часть (2.25) принадлежит L_p $((z) \leqslant 1)$ при $p = \dfrac{2}{1-\alpha}$. Действительно, согласно свойству интеграла типа Коши, оператор B отображает C_α $(|z|=1)$ в C_α $(|z| \leqslant 1)$. Отсюда и из условия $p\beta < 1$ $\left(p = \dfrac{2}{1-\alpha}\right)$ следует, что операторы S и F будут отображать C_α $(|z| \leqslant 1)$ в L_p $(|z| \leqslant 1)$. Аналогично можно показать, что функции $h_0(z)$, $h_1(z), \cdots, h_{2m}(z)$ принадлежат классу L_p $(|z| \leqslant 1)$, оператор же K, как было отмечено выше, отображает C_α $(|z| \leqslant 1)$ в себя. Поэтому правая часть уравнения (2.25) принадлежит классу L_p $(|z| \leqslant 1)$.

В таком случае из (2.25) следует, что

$$u(z) = TSKu + TSTh + TF\gamma + \sum_{\nu=0}^{2m} \alpha_\nu Th_\nu + \varphi(z), \tag{2.29}$$

где $\varphi(z)$ — некоторая аналитическая в круге $|z| < 1$ функция. Поскольку оператор T действует из L_p $(|z| \leqslant 1)$ в C_α $(|z| \leqslant 1)$, то из (2.29) вытекает, что $\varphi(z)$ принадлежит классу C_α $(|z| \leqslant 1)$. Теперь представим функцию $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) - \frac{z^{2n+1}}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} \left(SKu + STh + F\gamma + \sum_{\nu=0}^{2m} \alpha_\nu h_\nu \right) \frac{d\xi\, d\eta}{1 - z\bar{\zeta}}, \tag{2.30}$$

где $\varphi_0(z)$ — некоторая другая аналитическая в круге $|z| < 1$ функция класса C_α $(|z| \leqslant 1)$. Подставляя выражение (2.30) в (2.29), получим, что функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению

$$u - P_n SKu = \varphi_0(z) + P_n \left(STh + F\gamma + \sum_{\nu=0}^{2m} \alpha_\nu h_\nu \right), \tag{2.31}$$

где

$$P_n f = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + z^{2n+1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{1 - z\bar{\zeta}} \right] d\xi\, d\eta. \tag{2.32}$$

Легко видеть, что для любой функции $f(z)$ класса L_p $(|z| \leqslant 1)$, $p > 2$, выполняется равенство $\mathrm{Re}\,(z^{-n} P_n f) = 0$ при $|z| = 1$. Поэтому, в силу (1.11), из (2.31) следует, что

$$\mathrm{Re}\,[z^{-n} \varphi_0(z)] = 0 \text{ при } |z| = 1. \tag{2.33}$$

Подставляя в (2.31) общее решение задачи Римана-Гильберта (2.33), получим

$$u - P_n SKu = P_n (STh + F\gamma) + \sum_{\nu=0}^{\sigma} \delta_\nu H_\nu(z), \quad \sigma = 2m + 2n + 2, \tag{2.34}$$

где

$$H_\nu(z) = \begin{cases} P_n h_{\nu-1} & \text{при } 1 \leqslant \nu \leqslant 2m+1 \\ z^{\nu-2m-2} - z^{\sigma-\nu} & \text{при } 2m+1 < \nu \leqslant 2m+n+1,\ n \geqslant 1 \\ iz^n & \text{при } \nu = 2m+n+2,\ n \geqslant 0 \\ i\,(z^{\nu-2m-n-3} - z^{2m+3n+3-\nu}) & \text{при } 2m+n+2 < \nu \leqslant \sigma,\ n \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.35}$$

и $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\sigma$ — некоторые вещественные числа.

Таким образом, доказано, что решение $u(z)$ задачи (1.1), (1.8), (1.11) удовлетворяет уравнению (2.34).

Рассмотрим банахово пространство, элементами которого являются функции из класса $C_\alpha(|z|\leqslant 1)$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр и с нормой

$$\|u\| = \max_{|z|<1} |u(z)| + \sup_{|z_1|<1,\ |z_2|<1} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha}. \tag{2.36}$$

Покажем, что линейный оператор $A = P_n SK$, отображающий это пространство в себя, вполне непрерывен. Действительно, поскольку оператор P_n, действующий из $L_1(|z|\leqslant 1)$ в $C_\alpha(|z|\leqslant 1)$ вполне непрерывен (см. [1], стр. 294), а оператор K, отображающий рассматриваемое пространство в себя, ограничен, то достаточно доказать ограниченность оператора S, действующего из $C_\alpha(|z|\leqslant 1)$ в $L_p(|z|\leqslant 1)$, $p = \dfrac{2}{1-\alpha}$.

Последнее же следует из оценки

$$\left[\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{|g(\zeta)|^p}{(1-|\zeta|^2)^{p\beta}}\, d\xi d\eta\right]^{1/p} \leqslant \text{const}\, \|g\|_{C_\alpha(|z|\leqslant 1)} \quad (p\beta < 1)$$

и из того, что оператор B, представляющий из себя сумму интегралов типа Коши, ограничен из $C_\alpha(|z|=1)$ в $C_\alpha(|z|\leqslant 1)$.

Пусть теперь функция $u(z) \in C_\alpha(|z|\leqslant 1)$ является решением уравнения (2.34) внутри круга $|z|<1$ с произвольно выбранными вещественными числами $\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_\sigma$. Тогда $u(z)$ удовлетворяет уравнению (2.20) внутри круга $|z|<1$, где аналитическая функция $\psi(z)$ определяется формулой (2.23). Ясно, что $\psi(z)$ принадлежит классу $C_\alpha(|z|\leqslant 1)$, следовательно, $u(z)$ принадлежит классу E_3. Кроме того, из (2.20) и (2.23) получим, что $u(z)$ является решением задачи (1.1), (1.8), (1.11).

Таким образом, задача (1.1), (1.8), (1.11) эквивалентна уравнению (2.34) в классе $C_\alpha(|z|\leqslant 1)$. Отсюда, в свою очередь следует нетеровость рассматриваемой задачи.

Теперь получим оценку индекса задачи (1.1), (1.8), (1.11). Пусть E—банахово пространство элементов $V=(u, \delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_\sigma)$ с обычными операциями и нормой $\|V\| = \|U\|_{C_\alpha(|z|<1)} + \max\limits_{0<k<\sigma} \delta_k$, где $u \in C_\alpha(|z|\leqslant 1)$, а $\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_\sigma$ — действительные числа. Рассмотрим операторы K_1 и K_2, отображающие E соответственно в пространство E и $C_\alpha(|z|\leqslant 1)$ по следующим законам:

$$K_1 V = (u - P_n SKu,\ \delta_0,\ \delta_1, \cdots, \delta_\sigma),\quad K_2 V = u - \delta_0 H_0(z) - \\ - \delta_1 H_1(z) - \cdots - \delta_\sigma H_\sigma(z).$$

Тогда уравнение (2.34) можно записать в виде

$$K_2 K_1 V = P_n (STh + F\gamma). \tag{2.37}$$

По теореме об индексе суперпозиции двух операторов (см. [4], стр. 45) имеем $\mathrm{ind}\,(K_2 K_1) = \mathrm{ind}\, K_1 + \mathrm{ind}\, K_2$..

Так как оператор $P_n SK$ вполне непрерывен, то $\mathrm{ind}\, K_1 = 0$ (см. [4], стр. 47). С другой стороны легко видеть, что $\mathrm{ind}\, K_2 = \sigma + 1$, следовательно

$$\mathrm{ind}\,(K_2 K_1) = \sigma + 1. \tag{2.38}$$

Пусть теперь линейные функционалы $l_1, l_2, \cdots, l_{k_1'}$, определенные в пространстве $C_\alpha\,(|z| \leqslant 1)$, составляют полную систему линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.37). Тогда для разрешимости уравнения (2.37) необходимы и достаточны следующие условия:

$$l_\nu\,[P_n\,(STh + F\gamma)] = 0, \ \nu = 1, 2, \cdots, k_1'. \tag{2.39}$$

Ясно, что условия (2.39), в свою очередь, будут необходимы и достаточны для разрешимости задачи (1.1), (1.8), (1.11). Обозначим через k_0' число линейно независимых решений однородного уравнения $K_2 K_1 V = 0$. Согласно (2.38)

$$k_0' - k_1' = \sigma + 1. \tag{2.40}$$

Легко видеть, что $k_0 = k_0'$ и $k_1 \leqslant k_1'$, следовательно, на основании (2.40), $\varkappa = k_0 - k_1 \geqslant \sigma + 1$ $(\sigma = 2m + 2n + 1)$.

Таким образом, в случае $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ получаем для индекса нашей задачи оценку

$$\varkappa \geqslant 2m + 2n + 2. \tag{2.41}$$

В остальных случаях исследование задачи можно провести аналогичным образом.

Автор выражает признательность проф. Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и ценные указания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 25.X.1975

Ս. Կ. ԱՖՅԱՆ. Ռիման-Հիլբերտի տիպի խնդիրը վերասերվող էլիպտական սիստեմների մի դասի համար (*ամփոփում*)

Դիտարկվող խնդիրը բերված է $u - Au = f$ տեսքի հավասարման, որտեղ A-ն լրիվին անընդհատ օպերատոր է և խնդրի ինդեքսի համար ստացված է բանաձև

S. K. AFIAN. *The Rieman-Hilbert problem for a class degenerating elliptical systems* (summary)

The problem in the title is reduced to the equation $u - Au = f$, where A is a completely continuous operator A formula for the index of the problem is obtained

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
2. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.
3. *С. К. Афян.* Краевая задача Римана-Гильберта для одного класса вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XI, № 3, 1976, 189—202.
4. *С. Г. Крейн.* Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

Г. Б. МАРАНДЖЯН

c-СТЕПЕНИ МНОЖЕСТВ МИНИМАЛЬНЫХ ИНДЕКСОВ АЛГОРИФМОВ

Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}$ — произвольная допустимая нумерация [1] всех одноместных частично рекурсивных функций. Введем в рассмотрение множество M_Φ минимальных индексов алгорифмов следующим образом:

$$M_\Phi = \{i \mid \forall j\, (\varphi_i = \varphi_j \rightarrow i \leqslant j)\}.$$

Как доказал А. Мейер в работе [2], степень неразрешимости множества M_Φ по Тьюрингу равна O''. В то же время, как доказал П. Янг [2], существуют такие допустимые нумерации Ψ и Ξ, что $M_\Psi <_1 M_\Xi$. Вопрос о том, попадают ли M_Ψ для различных допустимых нумераций Ψ в один и тот же класс по m-сводимости, или сводимости таблицами истинности, был поставлен А. Мейером [2].

Для частного случая, требующего, чтобы m-сводящая функция была также транслятором, ранее был получен отрицательный ответ [3].

Целью настоящей работы является доказательство теоремы, из которой, в частности, следует отрицательный ответ на вопрос А. Мейера об m-эквивалентности множеств минимальных индексов алгорифмов в допустимых нумерациях.

Определение (см. [4]). Будем говорить, что множество A c-сводится к множеству B (обозначение $A \leqslant_c B$), если существует такая общерекурсивная функция f, что

$$\forall x\, (x \in A \leftrightarrow D_{f(x)} \subset B),$$

где D — каноническая нумерация конечных множеств.

Естественным образом вводится понятие c-степени неразрешимости.

Теорема. *Существуют такие допустимые нумерации Ψ и Ξ частично рекурсивных функций, что M_Ψ и M_Ξ находятся в несравнимых c-степенях неразрешимости.*

Доказательство. Зафиксируем такую допустимую нумерацию $\Phi = \{\varphi_i\}$ одноместных частично рекурсивных функций, что φ_0 — нигде не определенная функция. Пусть D — каноническая нумерация конечных множеств, построенная как в [4]. Через $(n)_i$ будем обозначать i-й по возрастанию элемент множества D_n, если же $D_n = \varnothing$ или i превышает количество элементов в D_n, то значение $(n)_i$ полагаем неопределенным.

Согласно $s-m-n$ теореме С. К. Клини можно построить такую общерекурсивную функцию (ОРФ) γ, что

$$\varphi_{\gamma(x, y, z)}(t) \simeq \varphi_x((\varphi_y(z))_t).$$

Без ограничения общности будем полагать, что γ строго монотонна по всем трем аргументам.

Используя теорему 1 из [5], строим такую строго монотонную ОРФ α, чтобы для всех x имело место соотношение

$$\forall t\,(!\varphi_x(t) \to \varphi_x(t) \in M_\Phi) \to \forall t\,(!\varphi_x(t) \to \varphi_x(t) < \alpha(x)).$$

Введем ОРФ α_1 следующим образом:

$$\alpha_1(x, y, z) = \max_{t<z} \alpha(\gamma(x, y, t)).$$

Легко видеть, что α_1 строго монотонна и

$$\forall x \forall y \forall z\,(\forall t\,(\varphi_x((\varphi_y(z))_t) \in M_\Phi) \to \forall t\,(\varphi_x((\varphi_y(z))_t) < \alpha_1(x, y, z))). \quad (1)$$

Обычным образом строим ОРФ δ так, чтобы она была строго монотонна по всем аргументам и $\varphi_{\delta(x, y, z)}$ перечисляла множество $\varphi_x(\varphi_y^{-1}(z))$.

Определим теперь ОРФ α_2 следующим образом:

$$\alpha_2(x, y, z) = \max_{t<z} \alpha(\delta(x, y, t)).$$

Функция α_2 обладает, как нетрудно убедиться, следующим свойством:

$$\forall x \forall y \forall z\,(\varphi_x(\varphi_y^{-1}(z)) \subseteq M_\Phi \to \varphi_x(\varphi_y^{-1}(z)) \subseteq [0, \alpha_2(x, y, z)]). \quad (2)$$

Поскольку нумерация Φ выбрана допустимой, то для нее, очевидно, существует такая ОРФ β, что при любом n

$$[n+1, \beta(n)] \cap M_\Phi \neq \varnothing \quad (3)$$

и $\beta(n) - (n+1)$ строго монотонно возрастает. Заметим, что конструктивно найти пересечение (3), вообще говоря, невозможно в силу теоремы 2 из [5].

Если τ — некоторая ЧРФ, то через $\ulcorner\tau\urcorner$ будем обозначать номер ее задания в Φ каким-либо стандартным образом (например, трансляцией из какой-либо удобной „термальной“ нумерации).

В дальнейшем вместо $\tau(x, y)$ будем при фиксации x писать $\tau_x(y)$.

Используя теорему о рекурсии, определим ОРФ θ, ω, $\breve{\omega}$, τ, $\breve{\tau}$, ρ и ε таким образом, чтобы выполнялись следующие определяющие соотношения

$$\theta(0) = \rho(0) = \varepsilon(0) = 0;$$

$$\tau(0, x) = \breve{\tau}(0, x) = \omega(0, x) = \breve{\omega}(0, x) = x;$$

$$\rho(2n+1) = \alpha_2(\ulcorner\tau_{2n}\urcorner, n, 2^{\tilde{\omega}(2n, \theta(2n)) + 1});$$

$$\rho(2n+2) = \alpha_2(\ulcorner\breve{\tau}_{2n+1}\urcorner, n, 2^{\omega(2n+1, \theta(2n+1)) + 1});$$

$$\varepsilon(x) = \beta(\rho(x));$$

$$\breve{\tau}(2n+1, x) = \tau(2n, x);$$

$$\tau(2n+2,\ x) = \begin{cases} \tau(2n+1,\ x), \text{ если } x \leqslant \omega(2n+1,\ \theta(2n+1)); \\ \left] \dfrac{x-\omega(2n+1,\ \theta(2n+1))}{\varepsilon(2n+2)-\rho(2n+2)+1} \right[+ \theta(2n+1) \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

где $\left]\dfrac{a}{b}\right[$ — наименьшее целое число, не меньшее $\dfrac{a}{b}$;

$$\tilde{\tau}(2n+2,\ x) = \tilde{\tau}(2n+1,\ x);$$

$$\tilde{\tau}(2n+1,\ x) = \begin{cases} \tilde{\tau}(2n,\ x), \text{ если } x \leqslant \tilde{\omega}(2n,\ \theta(2n)); \\ \left] \dfrac{x-\tilde{\omega}(2n,\ \theta(2n))}{\varepsilon(2n+1)-\theta(2n+1)+1} \right[+ \theta(2n) \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$\omega(2n+1,\ x) = \omega(2n,\ x);$$

$$\omega(2n+2,\ x) = \begin{cases} \omega(2n+1,\ x), \text{ если } x \leqslant \theta(2n+1); \\ (x-\theta(2n+1))(\varepsilon(2n+2)-\rho(2n+2)+1)+\omega(2n+ \\ \quad +1,\ \theta(2n+1)) \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$\tilde{\omega}(2n+2,\ x) = \tilde{\omega}(2n+1,\ x);$$

$$\tilde{\omega}(2n+1,\ x) = \begin{cases} \tilde{\omega}(2n,\ x), \text{ если } x \leqslant \theta(2n); \\ (x-\theta(2n))(\varepsilon(2n+1)-\rho(2n+1)+1)+\tilde{\omega}(2n,\ \theta(2n)) \\ \quad \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\theta(2n+1) = \alpha_1(\ulcorner\tilde{\tau}\urcorner_{2n+1},\ n,\ \omega(2n+1,\ \varepsilon(2n+1)));$$

$$\theta(2n+2) = \alpha_1(\ulcorner\tau\urcorner_{2n+2},\ n,\ \tilde{\omega}(2n+2,\ \varepsilon(2n+2))).$$

Заметим, что, по построению, функции ω и $\tilde{\omega}$ неубывающие по обоим аргументам (в частности, по второму аргументу—строго возрастающие). Используя это обстоятельство, можно доказать, что при любых $x,\ y,\ z$ имеем

$$\omega(x,\ y) < z \leqslant \omega(x,\ y+1) \rightarrow \tau(x,\ z) = y+1; \tag{4}$$

аналогичное свойство имеет место при замене в (4) ω на $\tilde{\omega}$ и τ на $\tilde{\tau}$. Доказательство нетрудно провести индукцией по x.

Определим теперь нумерацию Ψ следующим образом.

I. Положим $\psi_0(x) \simeq \varphi_0(x)$.

II. Для $m > 0$ вычисление функции ψ_m производим следующим образом.

1) Проверяем, существует ли такое число k_m, что $m = \omega(2m+2,\ k_m)$. Если для данного m такое число k_m существует, то полагаем

$$\psi_m(x) \simeq \varphi_{k_m}(x).$$

Заметим, что вопрос о существовании такого k_m разрешим, так как по второму аргументу функция ω строго возрастающая.

Если же выясняется, что такого k_m не существует, то переходим к пункту 2).

2) Проверяем, существует ли такое число n, что выполнено условие

$$\omega(2n+2, \theta(2n+1)) < m < \omega(2n+2, \theta(2n+2)). \tag{5}$$

Поскольку это условие рекурсивно, то вопрос о существовании такого n разрешим.

Если указанное n существует, то ищем наименьшее t такое, что

$$\omega(2n+2, t-1) < m < \omega(2n+2, t). \tag{6}$$

Очевидно, что при сделанных предположениях t определится однозначным образом.

После этого начинаем одновременно вычислять $\varphi_n(z)$ для всех z таких, что

$$\breve{\omega}(2n+2, \rho(2n+2)) < z \leqslant \breve{\omega}(2n+2, \varepsilon(2n+2))\ \&\ \exists_y (z = \breve{\omega}(2n+2, y)). \tag{7}$$

Если все вычисления завершаются, то из множества полученных значений $\varphi_n(z)$ отбрасываем те, для которых существует такое $r < \theta(2n+2)$, что

$$D_{\varphi_n(z)} \cap [\omega(2n+2, r)+1,\ \omega(2n+2, r+1)] \tag{8}$$

содержит более одного элемента.

Множество оставшихся чисел вида $(\varphi_n(z))_l$ обозначим через R_{2n+2}. Если $m \in R_{2n+2}$, то положим

$$\psi_m(x) \simeq \varphi_t(x),$$

где t выбрано согласно условию (6).

Во всех случаях, не оговоренных выше, функция ψ_m нигде не определенная. На этом завершается построение нумерации Ψ. Аналогичным образом строится нумерация Ξ с тем отличием, что в построении надо заменить ψ на ξ, $2n+2$ на $2n+1$, и поменять местами ω и $\breve{\omega}$.

Докажем теперь, что нумерация Ψ допустимая (доказательство для Ξ аналогично).

Во-первых, отметим, что Ψ вычислима. Покажем, что Φ 1-сводится к Ψ функцией $\omega(x, x)$.

Заметим сначала, что функция ω построена таким образом, что при любом $n > 0$, если

$$x \in [\theta(n)+1,\ \theta(n+1)],$$

то для всех $k \geqslant n+1$ будем иметь

$$\omega(k,\ x) = \omega(n+1,\ x). \tag{9}$$

Согласно выбору отрезка, в котором находится x, и построению функций θ, ε и ρ, имеем

$$x > \theta(n) > \varepsilon(n) > \rho(n) > 2^n > n+1. \tag{10}$$

Следовательно, из (9), (10) и свойства монотонности ω получим

$$\omega(2\omega(n+1,\ x)+2,\ x) = \omega(n+1,\ x) \tag{10'}$$

и

$$\omega(n+1,\ x) = \omega(x,\ x). \tag{11}$$

Согласно пункту 1) построения нумерации Ψ из (10′) следует

$$\psi_{\omega(2n+1,\ x)}(z) \simeq \varphi_x(z),$$

следовательно, используя (11), получим

$$\psi_{\omega(x,\ x)}(z) \simeq \varphi_x(z)$$

для выбранных $n > 0$ и произвольного x из отрезка $[\theta(n)+1,\ \theta(n+1)]$ Поскольку всякое $x > 0$ принадлежит некоторому отрезку упомянутого вида, и $\omega(0,\ 0) = 0$ по определению, а $\psi_0 = \varphi_0$ по построению Ψ, то тем самым $\psi_{\omega(0,\ 0)} = \varphi_0$, чем и завершается доказательство того, что $\lambda x[\omega(x,\ x)]$ 1-сводит Φ к Ψ.

Замечание. Как можно видеть из построения нумерации Ψ и доказательства ее допустимости, функция, имеющая номер $x+1$ в нумерации Φ получает (благодаря именно этому номеру $x+1$) в нумерации Ψ номер $\omega(x+1,\ x+1)$ и, быть может, еще несколько номеров, но обязательно лежащих в отрезке $[\omega(x+1,\ x),\ \omega(x+1,\ x+1)]$. Таким образом, если $x+1 \in M_\Phi$, то

$$[\omega(x+1,\ x)+1,\ \omega(x+1,\ x+1)] \cap M_\Psi \neq \varnothing \tag{12}$$

и, аналогично

$$[\tilde{\omega}(x+1,\ x)+1,\ \tilde{\omega}(x+1,\ x+1)] \cap M_\Xi \neq \varnothing, \tag{13}$$

хотя указать элемент в пересечении алгорифмически, вообще говоря, невозможно в силу теоремы 2 из [5]. Нетрудно также заметить, что для всех n, x, p имеем

$$x \in [\tilde{\omega}(n,\ p)+1,\ \tilde{\omega}(n,\ p+1)] \cap M_\Xi \to \tilde{\tau}_n(x) \in M_\Phi \tag{14}$$

(а также аналогичное свойство с заменой Ξ на Ψ, $\tilde{\omega}$ на ω и $\tilde{\tau}$ на τ).

Нетрудно заметить также, что можно кусочным заданием построить такие обще рекурсивные функции T и $\tilde{T}$, что для любых m и x

$$x \in [0,\ \omega(m,\ \theta(m+1))] \to T(x) = \tau_m(x), \tag{15}$$

$$x \in [0,\ \tilde{\omega}(m,\ \theta(m+1))] \to \tilde{T}(x) = \tilde{\tau}_m(x).$$

Очевидно, что функция T ($\widetilde{T}$) переводит всякий минимальный номер из Ψ (Ξ) в минимальный номер той же функции в Φ.

Докажем теперь, что M_Ξ не может быть c-сведено к M_Ψ. Обозначим через t и $\widetilde{t}$ какие-либо номера функций T и $\widetilde{T}$ соответственно в нумерации Φ. Допустим, что множество M_Ξ c-сводится к M_Ψ функцией φ_n, где без ограничения общности можно считать, что числ n, $\ulcorner \tau_{2n+1} \urcorner$ и $\ulcorner \widetilde{\tau}_{2n+1} \urcorner$, превышают $\max(t, \widetilde{t})$. (Заметим, что поскольку функции τ_m, $\widetilde{\tau}_m$ отличаются от τ_k, $\widetilde{\tau}_k$ при $m \neq k$, то это требование легко выполняется).

В силу выбора функции β и затем построения ε, имеем

$$[\rho(2n+2)+1,\ \varepsilon(2n+2)] \cap M_\Psi \neq \varnothing.$$

Отсюда, учитывая то, что

$$\theta(2n+2) > \varepsilon(2n+2) > \rho(2n+2), \tag{16}$$

а также свойства (9) и (13) вместе с условиями связанного с ними контекста, можем заключить, что

$$[\widetilde{\omega}(2n+2,\ \rho(2n+2))+1,\ \widetilde{\omega}(2n+2,\ \varepsilon(2n+2))] \cap M_\Xi \neq \varnothing. \tag{17}$$

Пусть число a принадлежит этому пересечению. Поскольку $a \in M_\Xi$, то, согласно предположению о том, что φ_n c-сводит M_Ξ к M_Ψ, $D_{\varphi_n(a)} \neq \varnothing$ и $D_{\varphi_n(a)} \subseteq M_\Psi$. Докажем сначала, что среди элементов списка $D_{\varphi_n(a)}$ должны существовать такие, которые превышают $\omega(2n+2,\ \theta(2n+1))$. В самом деле, если для всех i, для которых определено $(\varphi_n(a))_i$, мы имели бы

$$(\varphi_n(a))_i \leqslant \omega(2n+2,\ \theta(2n+1)),$$

то тогда

$$\varphi_n(a) < 2^{\omega(2n+2,\ \theta(2n+1))+1},$$

откуда следует, по строгой монотонности функции α_2,

$$\rho(2n+2) > \alpha_2(\ulcorner \tau_{2n+1} \urcorner,\ n,\ \varphi_n(a)). \tag{18}$$

Согласно выбору числа a, из (15) и (16) можем заключить

$$\varepsilon(2n+2) \geqslant \widetilde{T}(a) \geqslant \rho(2n+2),$$

откуда, используя (18), получим

$$\widetilde{T}(a) > \alpha_2(\ulcorner \widetilde{\tau}_{2n+1} \urcorner,\ n,\ \varphi_n(a)), \tag{19}$$

а поскольку $\widetilde{t} < \ulcorner \widetilde{\tau}_{2n+1} \urcorner$, то в силу монотонности функции α_2, из (19) последует

$$\widetilde{T}_i(a) > \alpha_2\ (\widetilde{t},\ n,\ \varphi_n(a)). \tag{20}$$

Очевидно, что $\widetilde{T}(\varphi_n^{-1}(\varphi_n(a))) \subset M_\Psi$, следовательно, по (2)

$$\widetilde{T}(\varphi_n^{-1}(\varphi_n(a))) \subseteq [0,\ \alpha_2(\widetilde{t},\ n,\ \varphi_n(a))],$$

чему противоречит (20), так как, очевидно, $a \in \varphi_n^{-1}(\varphi_n(a))$.

Следовательно, среди элементов $D_{\varphi_n(a)}$ должны существовать такие, которые превосходят число $\omega(2n+2,\ \theta(2n+1))$. Пусть i_0 таково, что

$$(\varphi_n(a))_{i_0} > \omega(2n+2,\ \theta(2n+1)). \tag{21}$$

Докажем теперь, что для всех j, для которых определено значение $(\varphi_n(a))_j$, это значение не превосходит $\omega[2n+2,\ \theta(2n+2))$. Пусть, напротив, это неверно. Тогда функция $\lambda j\,[(\varphi_n(a))_j]$, перечисляя (в силу выбора числа a и функции φ_n) некоторое подмножество из M_Ψ, при некотором j_0 превзойдет $\omega(2n+2,\ \theta(2n+2))$, а тогда по (4)

$$T((\varphi_n(a))_{j_0}) > \theta(2n+2) \geqslant \alpha_1(\ulcorner \tau_{2n+2}\urcorner,\ n,\ a) > \alpha_1(t,\ n,\ a),$$

что невозможно в силу (1), следовательно, для всех j, для которых определено $(\varphi_n(a))_j$, имеем

$$(\varphi_n(a))_j \leqslant \omega(2n+2,\ \theta(2n+2)), \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует

$$\omega(2n+2,\ \theta(2n+1)) < (\varphi_n(a))_{i_0} \leqslant \omega(2n+2,\ \theta(2n+2)). \tag{23}$$

Поскольку φ_n, по предположению, c-сводит M_Ξ к M_Ψ, то условие (8) для нее при $z = a$, очевидно, не может иметь места, так как в этом случае оказалось бы, что одновременно более одного номера одной и той же функции являются минимальными в нумерации Ψ.

Следовательно, знанение $\varphi_n(a)$ не отбрасывается, а тогда на месте $(\varphi_n(a))_{i_0}$, согласно процедуре построения Ψ,

1) будет помещена пустая функция, если $(\varphi_n(a))_{i_0}$ не представимо в виде $\omega(2n+2,\ u)$, или

2) в случае, если $(\varphi_n(a))_{i_0}$ равно при некотором u числу $\omega(2n+$ $+2,\ u)$, то на место $(\varphi_n(a))_{i_0}$ помещается некоторая функция φ_n, для которой этот номер не минимален, так как в отрезок $[\omega(2n+2,$ $u-1)+1,\ \omega\ (2n+2,\ u)]$ не может попасть более одного элемента из R_{2n+2}, принадлежащего R_{2n+2} благодаря какому-либо одному значению переменной z из отрезка

$$[\widetilde{\omega}(2n+2,\ \rho(2n+2))+1,\ \widetilde{\omega}(2n+2,\ \varepsilon(2n+2))].$$

Поскольку множество таких z содержит не более чем $\varepsilon(2n+2)-$ $-\rho(2n+2)$ чисел, а отрезок

$$[\omega(2n+2,\ u-1)+1,\ \omega(2n+2,\ u)] \tag{24}$$

содержит более чем $\varepsilon(2n+2)-\rho(2n+2)$ элементов (так как $u >$ $> \theta(2n+1)$), то в отрезке (24) останутся числа, не принадлежащие

R_{2n+2}, а тогда на этих местах будет помещена функция φ_u, так что $\omega(2n+2, u)$ не будет минимальным номером. Таким образом, $D_{\varphi_n(a)}$ в любом случае не может быть подмножеством M_Ψ, что и опровергает предположение, сделанное относительно функции φ_n. Аналогичным образом доказываем, что M_Ψ не c-сводится к M_Ξ. Теорема доказана.

Поскольку m-сводимость является частным случаем c-сводимости, то из доказанной теоремы непосредственно следует отрицательный ответ на вопрос А. Мейера о m-эквивалентности множеств минимальных номеров функций в допустимых нумерациях. Вопрос о tt-эквивалентности остается открытым. Естественным образом возникают вопросы, касающиеся btt-, q- и p-степеней этих множеств.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Поступила 25.XII.1975

Հ. Բ. ՄԱՐԱՆՋՅԱՆ. Ալգորիթմների նվազագույն համարների բազմությունների c-աստիճանների մասին (*ամփոփում*)

Դիցուք $\Phi = \{\varphi_i\}$ *մասնակի ռեկուրսիվ ֆունկցիաների ըստ Հ. Ռոջերսի թույլատրելի համարակալում է։ Նշանակենք* M_Φ *նշանով* $\{i|\forall_j (\varphi_i = \varphi_j \supset i < j)\}$ *բազմությունը։*

Հոդվածում ապացուցված է, որ գոյություն ունեն այնպիսի թույլատրելի Ψ *և* Ξ *համարակալումներ, որ* M_Ψ *և* M_Ξ *բազմությունները անհամեմատելի են* c*—հանգեցման նկատմամբ։*

Այս թեորեմից հետևում է բացասական պատասխան Ա. Մեյերի այն հարցին թե արդյոք բոլոր M_Φ *տիպի բազմություններն են* m*—հանգեցման նկատմամբ համազոր։*

H. B. MARANDJIAN *On c-degrees of sets of minimal indices of algorithms*
(summary)

Let $\Phi = \{\varphi_i\}$ be an acceptable (in the sense of Rogers's) enumeration of al one-place partially recursive functions. Denote by M_Φ the set

$$\{i|\forall j\,(\varphi_i = \varphi_j \supset i \leqslant j)\}.$$

The following theorem is proved:

There exist such acceptable enumerations Ψ, Ξ that M_Ψ and M_Ξ are incomparable with respect to $\leqslant_c$.

This theorem provides negative answer to the question of A. Meyer concerning m-equivalency of sets of minimal indices.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Rogers Jr.* Gödel numberings of partial recursive functions, J. Symbolic Logic, 23, 1958, 331—341.
2. *A. R. Meyer.* Program size in restricted programming Languages, Information and Control, 21, 1972, 382—394.
3. *Г. Б. Маранджян.* Об алгорифмических языках, не допускающих взаимной оптимальной трансляции, ДАН Арм.ССР, LXI, № 4, 1975, 193—197.
4. *Х. Роджерс.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Изд. „Мир", 1972.
5. *Г. Б. Маранджян.* Об алгорифмах минимальной сложности, ДАН СССР, 213, № 4, 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

В. ТУЧКЕ

РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ КОМПЛЕКСНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ОБЛАДАЮЩИЕ ЗАДАННЫМИ РАЗРЫВАМИ ВДОЛЬ ЗАДАННОЙ КРИВОЙ

С помощью криволинейного интеграла типа Коши можно, как известно, определить голоморфную функцию, обладающую заданным разрывом вдоль пути интегрирования γ (см. Н. И. Мусхелишвили [5]). В этой статье строится во всей плоскости некоторое решение $w=(w_1,\cdots, w_m)$ системы

$$\frac{\partial w_j}{\partial z^*}=f_j\,(z,\ w_1,\cdots,\ w_m),\ j=1,\cdots,m, \tag{1}$$

имеющее заданные разрывы вдоль γ.

Во всей плоскости E заданная функция g, удовлетворяющая условию $(\zeta=\xi+i\eta)$

$$\|g\|_{p,\,2}=\left(\iint\limits_{|\zeta|<1}|g\,(\zeta)|^p\,d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\iint\limits_{|\zeta|<1}\left|g\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|^p\frac{1}{|\zeta|^{2p}}\,d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

принадлежит пространству $\mathbf{L}_{p,\,2}(E)$ (см. И. Н. Векуа [1], Р. П. Гильберт [2]).

Правые части f_j системы (1) предполагаются непрерывными. Предполагается далее, что правые части допускают оценку

$$|f_j\,(z,\ w_1,\cdots,\ w_m)|\leqslant K\,(r),$$

зависящую только от $|z|=r$, причем

$$K\in\mathbf{L}_{p,\,2}(E),\ p>2.$$

Аналогично, требуется, чтобы постоянная Липшица $\mathbf{L}=L\,(r)$,

$$|f_j\,(z,\ w_1,\cdots,\ w_m)-f_j\,(z,\ \tilde{w}_1,\ \cdots,\ \tilde{w}_m)|\leqslant L\,(r)\sum_{j=1}^{m}|w_j-\tilde{w}_j|,$$

зависящая также от $|z|=r$, принадлежала пространству $\mathbf{L}_{p,\,2}(E)$, $p>2$.

Вне γ ищется непрерывное решение $w=(w_1,\cdots,w_m)$ системы (1), обладающее заданным разрывом $(d_1,\cdots,d_m)$ вдоль γ. Пусть $(D_1,\cdots,D_m)$—соответствующая голоморфная функция вне γ, осуществляющая тот же разрыв $(d_1,\cdots,d_m)$ вдоль γ.

Определенная во всей плоскости функция, значения которой равняются интегралу

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f_j(\zeta, w_1(\zeta), \cdots, w_m(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta,$$

зависящему от z, обозначается через $T_E f_j$. Применяя теорему 1.23 из книги [1] И. Н. Векуа, из предположения $K \in \mathbf{L}_{p,2}(E)$, $p > 2$, вытекает оценка ($\rho = |\zeta|$)

$$|(T_E f_j)[z]| \leqslant \frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{K(\rho)}{|\zeta - z|} d\xi d\eta \leqslant M(p) \|K\|_{p,2}, \tag{2}$$

причем $M(p)$ является постоянной, зависящей только от p.

Пусть w — данное решение. Очевидно функции

$$w_j - D_j - T_E f_j = \Phi_j \tag{3}$$

являются вне γ, следовательно, почти всюду, голоморфными. С другой стороны, $T_E f_j$ и $w_j - D_j$ непрерывны во всей плоскости (предполагается, что все w_j обладают непрерывными граничными значениями на γ извне и изнутри), следовательно функции Φ_j оказываются непрерывными и следовательно также голоморфными во всей плоскости. Наоборот, каждое решение $(w_1, \cdots, w_m)$ интегральных уравнений (3) при заданных целых функциях Φ_j является решением системы (1), обладающим теми же разрывами как $(D_1, \cdots, D_m)$. Таким образом, системы (1) и (3) (при удобном выборе функций Φ_j) допускают одни и те же решения. Далее, каждое решение w имеет представление

$$w_j = \Phi_j + D_j + w_{0j}, \tag{4}$$

причем Φ_j являются целыми, а w_{0j} непрерывными и (в силу (2)) ограниченными функциями во всей плоскости. При заданных Φ_j решения системы (1) можно, следовательно, искать в пространстве R всех таких w.

В силу (4) имеется взаимно-однозначное отображение между R и пространством R_0 всех $w_0 = (w_{01}, \cdots, w_{0m})$. Пространство R будет пространством типа Банаха, если определить норму* элемента w через

$$\|w_0\| = \max_j \sup_E |w_{0j}|$$

и если, кроме того, определить

$$\lambda w + \bar{\tilde{\lambda}}\, \tilde{w} = (\Phi_1 + D_1 + \lambda w_{01} + \bar{\tilde{\lambda}}\, \tilde{w}_{01}, \cdots, \Phi_m + D_m + \lambda w_{0m} + \bar{\tilde{\lambda}}\, \tilde{w}_{0m})$$

(причем $\bar{w}_j = \Phi_j D_j + \bar{w}_{0j}$). Если оператор T определяется через $w = Tw$, причем

---

* Аналогичное определение нормы использовалось в работе [10] при доказательстве существования решений, обладающих заданной главной частью.

$$W_j(z) = D_j(z) + \Phi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f_j(\zeta, w_1(\rho), \cdots, w_m(\rho))}{\zeta - z}\, d\xi d\eta,$$

то T отображает пространство R в себя. Ввиду

$$w_j - \tilde{w}_j = w_{0j} - \tilde{w}_{0j}$$

из условия Липшица следует $(\tilde{W} = T\tilde{w},\ \rho = |\zeta|)$, что

$$|W_j(z) - \tilde{W}_j(z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\, m \cdot \max_j \sup_E |w_{0j} - \tilde{w}_{0j}| \cdot \iint\limits_E \frac{L(\rho)}{|\zeta - z|}\, d\xi d\eta.$$

Учитывая предположение $L \in \mathbf{L}_{p,\,2}(E)$ и оценку, соответствующую правой части неравенства (2), получаем, что

$$d(W, \tilde{W}) \leqslant m\, M(p)\, \|L\|_{p,\,2}\, d(w, \tilde{w}),$$

причем $d(w, \tilde{w}) = d(w_0, \tilde{w}_0) = \|w_0 - \tilde{w}_0\|$. Из этого неравенства непосредственно следует непрерывность оператора T. В предположении

$$\|L\|_{p,\,2} < \frac{1}{mM(p)} \tag{5}$$

оператор T далее оказывается оператором сжатия. В этом случае существует (по теореме Банаха) неподвижная точка, являющаяся вне γ решением системы (1). Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Если норма постоянной Липшица удовлетворяет условию* (5), *то существует решение системы* (1) *с заданными разрывами вдоль* γ, *одновременно удовлетворяющее интегральному уравнению* (3). *При этом функции* Φ_j — *произвольные целые функции**.

В силу уравнения (3) имеется взаимно однозначное отображение Λ между решениями w и векторами $\Phi = (\Phi_1, \cdots, \Phi_m)$, состоящими из целых функций Φ_j.

Пусть M — произвольное компактное множество плоскости z и $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Тогда число r_0 выбирается настолько большим, чтобы

а) $M \subset \{\zeta: |\zeta| \leqslant r_0\}$,

б) $\displaystyle\iint\limits_{|\zeta| > r_0} \frac{K(\rho)}{|\zeta - z|}\, d\xi d\eta < \frac{\pi}{4}\,(1 - mM(p)\,\|L\|_{p,\,2})\,\varepsilon$

для всех точек z (в силу $K \in \mathbf{L}_{p,\,2}(E)$ такой выбор числа r_0 возможен).

---

* Х. Меден в своей работе [4] доказал существование решений (без особенностей) с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. С помощью этой теоремы получается теорема существования без каких-либо ограничений для постоянной Липшица (или для меры рассматриваемой области). Таким образом, можно также доказать существование решений, обладающих заданными разрывами.

Пусть теперь $\{\Phi^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ — некоторая локально равномерно сходящаяся последовательность векторов, образованная из целых функций. Функциям $\Phi^{(k)}$ в силу (3) соответствуют решения, обозначаемые через $w^{(k)}$. В силу условия Липшица из (3) следует, что

$$|w_j^{(k)}(z)-w_j^{(l)}(z)|\leqslant|\Phi_j^{(k)}(z)-\Phi_j^{(l)}(z)|+$$

$$+\frac{1}{\pi}\,m\cdot\max_j\sup_{|\zeta|<r_0}|w_j^{(k)}-w_j^{(l)}|\cdot\iint\limits_{|\zeta|<r_0}\frac{L(\rho)}{|\zeta-z|}\,d\xi d\eta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|>r_0}\frac{K(\rho)}{|\zeta-z|}\,d\xi d\eta.$$

Применяя вторую часть неравенства (2) в случае функции $L=L(\rho)$ и соотношение б), в силу последнего неравенства получается, что

$$\max_j\sup_{|z|<r_0}|w_j^{(k)}-w_j^{(l)}|\leqslant$$

$$\leqslant(1-mM(p)\,\|L\|_{p,z})^{-1}\max_j\sup_{|z|<r_0}|\Phi_j^{(k)}-\Phi_j^{(l)}|+\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Ввиду локальной равномерной сходимости функций $\Phi_j^{(k)}$ найдется число K_0 такое, что первое слагаемое в правой части последнего неравенства будет меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, если $k,\ l\geqslant k_0$. Это значит, что последовательность $\{w^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ на множестве $\{z\colon |z|\leqslant r_0\}$ и следовательно на множестве M равномерно сходится.

Аналогично из предполагаемой локальной равномерной сходимости последовательности $\{w^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ следует локальная равномерная сходимость соответствующей последовательности $\{\Phi^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Взаимно однозначное отображение Λ между целыми функциями Φ и решениями w является топологическим отображением в смысле топологии локальной равномерной сходимости*.*

Секция математики университета
им. Мартина Лютера (Халле, ГДР)

Поступила 30.IV.1975

Վ. ՏՈՒՉԿԵ. Տված կորի վրա որոշակի խզումներ ունեցող կոմպլեքս մասնական ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում է տված կորի վրա որոշակի խզումներ ունեցող կոմպլեքս մասնական ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների գոյության հարցը:

---

* В. Хепнер в работе [3] рассматривал эту топологию для решений системы Бельтрами в C^n.

Կառուցվում է բոլոր հնարավոր լուծումների բազմությունը։ Ապացույցի հիմքն է հանդիսանում Բանախի թեորեման անշարժ կետի վերաբերյալ։

V. TOUCHKE. *Solutions of nonlinear differential equations with partial complex derivatives possessing prescribed discontinuities along given curves* (summary)

The questions of existence are considered and the set of all possible solution is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.
2. *R. P. Gilbert.* Constructive Methods for Elliptic Equations. Lectures Notes in Mathematics, 365, Springer—Verlag, Berlin (Heidelberg), New York, 1974.
3. *W. Höppner.* Uber globale Losungen von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen in mehreren komplexen Variablen, Dissertationsschrift, Halle, 1974.
4. *H. Meden.* Über die eindeutige Bestimmtheit von Losungen partieller komplexer Differentialgleichungen, Math. Nachr (в печати).
5. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, Изд. второе, Физматгиз, М., 1962.
6. *F. Naas.* Beitvãge zur komplexen Analysis und deren Anwendungen in der Differential geometric, Akademieverlag, Berlin, 1974 (сборник статей).
7. *W. Tutschke.* Über Fixpunktmethoden in der Theorie partieller komplexer Differentialgleichungssysteme (работа содержится в сборнике [6]).
8. *W Tutschke.* Uber die Umwandlung (auch nichtlinearer) partieller komplexer Differentialgleichungssysteme mit mehreren komplexen Variablen in Integro-Differentialgleichungssysteme und deren Losung durchfunktionalanalytische methoden, Math. Nachr., 58, 1973, 87—136.
9. *W. Tutschke.* Topologische Abschätzungsmethoden für Losungen partieller komplexer Differentialgleichungen, Math. Nachr., 63, 1974, 89—95.
10. *W. Tutschke.* Losungen partieller komplexer Differentialgleichungen in mehreren, komplexen Variablen mit vorgeschriebenem Hauptteit, Math. Nachr., 61, 1974, 271—277.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

В. А. ЯВРЯН

О СЛЕДЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1°. В пространстве $L^2(0, b)$ рассмотрим интегральный оператор

$$(Gf)(x) = \int_0^b G(x, t) f(t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant b). \tag{1}$$

Если оператор G имеет след и ядро $G(x, t)$ непрерывно, то, как известно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(G) = \int_0^b G(x, x)\, dx,$$

где $\lambda_n(G)$—собственные значения оператора G. Но это равенство, вообще говоря, не имеет места даже тогда, когда ядро $G(x, t)$ непрерывно в $0 \leqslant x,\ t \leqslant b < \infty$.

В этой заметке рассматривается частный вид интегрального оператора, а именно

$$G(x, t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(x) v_k(t), & x \leqslant t \\ \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(t) v_k(x), & x \geqslant t, \end{cases} \tag{2}$$

где функции $u_k(x)$ и $v_k(x)$, $k = 1, 2, \cdots, p$, принадлежат пространству $L^2(0, b)$, $b \leqslant \infty$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Оператор G, задаваемый формулами* (1) *и* (2), *имеет след в смысле главного значения и*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{|\lambda_n(G)| > \varepsilon} \lambda_n(G) = \int_0^b \sum_{k=1}^{p} u_k(x) v_k(x)\, dx. \tag{3}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение вольтеров оператор

$$(Kf)(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^{p} (u_k(t) v_k(x) - u_k(x) v_k(t)) f(t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant b).$$

Обозначим через K_R и K_I соответственно вещественную и мнимую части оператора K. Легко видеть, что

$$K_R f - Gf = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left(v_k(x) \int_0^b u_k(t) f(t)\, dt + u_k(x)\int_0^b v_k(t) f(t)\, dt\right). \tag{4}$$

Пусть $\lambda_n^+(A)$ ($\lambda_n^-(A)$) — положительные (отрицательные) собственные значения оператора A, занумерованные в порядке убывания (возрастания). Так как разность $K_R - G$ является конечномерным оператором, то согласно одной теореме, доказанной в работе А. С. Маркуса ([1], стр. 115) имеем

$$\mathrm{Sp}\,(K_R - G) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^+(K_R) - \lambda_n^+(G)) + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^-(K_R) - \lambda_n^-(G)).$$

Отсюда, с учетом равенства (4), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^+(K_R) - \lambda_n^+(G)) + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^-(K_R) - \lambda_n^-(G)) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{p}\int_0^b u_k(t)\, v_k(t)\, dt. \tag{5}$$

Так как оператор $K_R - G$ — $2p$-мерный, то по известным неравенствам Куранта (см. [2], стр. 258)

$$\lambda_{n+2p}(G) \leqslant \lambda_n(K_R),\quad \lambda_{n+2p}(K_R) \leqslant \lambda_n(G).$$

Отсюда и из (5) легко получить, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\sum_{|\lambda_n(K_R)|>\varepsilon}\lambda_n(K_R) - \sum_{|\lambda_n(G)|>\varepsilon}\lambda_n(G)\right) = -\sum_{k=0}^{p}\int_0^b u_k(t)\, v_k(t)\, dt. \tag{6}$$

Теперь вычислим мнимую часть оператора K. Имеем

$$(K_I f)(x) = \frac{1}{2i}(K - K^*)\, f = -\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{p}\left(u_k(x)\int_0^b v_k(t)\, f(t)\, dt - v_k(x) \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^b u_k(t)\, f(t)\, dt\right).$$

Итак, мнимая часть оператора K конечномерна. Следовательно, по известной теореме М. Г. Крейна ([3], стр. 240)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\sum_{|\lambda_n|>\varepsilon}\lambda_n(K_R) = 0.$$

Это равенство вместе с (6) дает требуемое соотношение (3).

Заметим, что из (5), вообще говоря, не следует (6).

2°. В предположении, что функции $q(x)$ и $\rho(x) \geqslant 0$, $\rho(x) \not\equiv 0$ являются суммируемыми функциями в любом конечном интервале на положительной полуоси, рассмотрим краевую задачу

$$- y'' + q(x) y = \lambda \rho(x) y, \tag{7}$$

$$W(y, \varphi)|_{x=0} = 0, \ \lim_{x \to \infty} W(y, \psi) = 0. \tag{8}$$

Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные вещественные решения однородного уравнения $-y'' + q(x) y = 0$, а $W(y, z)$ — вронскиан функций y и z. Любое самосопряженное расширение, порожденное дифференциальным выражением $-y'' + q(x) y$ и разделенными граничными условиями, имеет вышеуказанный вид.

Предположим, что имеет место случай круга Вейля, т. е. любые решения уравнения (7) принадлежат $L^2_\rho(0, \infty)$.

Если $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (7), (8), то, как доказано М. Г. Крейном (см. [4]), существует след обратного оператора в смысле главного значения. С помощью теоремы 1 можно вычислить этот след.

Теорема 2. *Если* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *собственные значения задачи* (7), (8), *занумерованные в порядке возрастания модулей, то*

$$\lim_{r \to \infty} \sum_{|\lambda_n| < r} \frac{1}{\lambda_n} = \int_0^\infty \varphi(x) \psi(x) \rho(x) \, dx.$$

Доказательство. Краевая задача (7), (8) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty G(x, t) \rho(t) y(t) \, dt,$$

где

$$G(x, t) = \begin{cases} \varphi(x) \psi(t), & x \leqslant t \\ \varphi(t) \psi(x), & x \geqslant t. \end{cases}$$

После обозначений

$$\varphi(x) \sqrt{\rho(x)} = u(x), \ \psi(x) \sqrt{\rho(x)} = v(x), \ y(x) \sqrt{\rho(x)} = z(x)$$

это интегральное уравнение перейдет в уравнение

$$z(x) = \lambda \int_0^\infty G_1(x, t) z(t) \, dt,$$

где

$$G_1(x, t) = \begin{cases} u(x) v(t), & x \leqslant t \\ u(t) v(x), & x \geqslant t. \end{cases}$$

Следовательно, согласно теореме 1

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{|\lambda_n|<r} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\infty u(x)\, v(x)\, dx = \int_0^\infty \varphi(x)\, \psi(x)\, \rho(x)\, dx.$$

Автор выражает благодарность М. Г. Крейну за ценное обсуждение.

Институт математики
АН Армянской ССР Посутпила 27.III.1976

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ. Որոշ ինտեգրալ օպերատորների հետքի մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում (1) և (2) առնչություններով որոշված ինտեգրալ օպերատորի «գլխավոր իմաստով» հետքի համար ապացուցվում է (3) բանաձևը, որտեղ $\{\lambda_n(G)\}_{n=1}^{\infty}$ — G *օպերատորի սեփական արժեքներն են: Նման բանաձև է ապացուցվում նաև (7), (8) Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորի համար Վեյլի շրջանի դեպքում (տես թեորեմ 2):*

V. A. JAVRIAN. *On the trace of some integral operators* (summary)

The formula (3) is proved, where $\lambda_n(G)$ are the eigenvalues of the operator G given by (1) and (2). For the Sturm—Liouville operators an analogous formula is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. С. Маркус.* Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов, УМН, 19, вып. 4 (118), 1964, 93—123.
2. *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь.* Лекции по функциональному анализу, М., ИИЛ, 1954.
3. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Изд. Наука", 1965.
4. *М. Г. Крейн.* О неопределенном случае краевой задачи Штурма-Лиувилля в интервале (0, ∞). Изв. АН СССР, серия матем., 16, 1952, 292—324.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

В. И. БЕЛЫЙ

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ

В ряде работ М. М. Джрбашяна разработаны методы исследования мероморфных функций, в которых существенную роль играли аналоги классических формул Коши, Шварца и Пуассона для представления аналитических и гармонических в круге функций [1, 2], указано полное структурное описание классов функций, ассоциированных с операторами дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля и их обобщением, предложенным М. М. Джрбашяном [2]. Применение данных методов для изучения аналогичных вопросов в круговом кольце связано с необходимостью получения аналогов интегральных представлений интегро-дифференциальных операторов дробного порядка и обобщенных операторов в круговом кольце; задача о построении таких представлений ставилась М. М. Джрбашяном в 1968 году.

В данной работе предлагаются интегральные представления, ассоциированные с так называемыми союзными ядрами [3], полностью решающие задачу М. М. Джрбашяна. Получены обобщения формулы А. Вилья [4], частными случаями которых являются интегральные представления типа формулы Шварца, ассоциированные с операторами дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, Вейля, М. М. Джрбашяна. Доказывается, что данные интегральные представления являются существенно более широкими, чем формула Вилья.

Пусть G—двусвязная ограниченная область, граница которой составлена замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми L_1 и L_2, G_1—внутренность L_1, G_2—внешность L_2, $G = G_1 \cap G_2$, $0 \in G_1 \setminus G_2$. Всякую регулярную в G функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, где f_1 регулярна в G_1 и имеет в окрестности точки $z=0$ разложение $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, а f_2 регулярна в G_2 и разлагается в окрестности точки $z=\infty$ в ряд $f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$. Рассмотрим пару союзных ядер (см. [3], стр. 168)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad F_*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{-1} z^k \quad (b_k \neq 0, \ k=0, 1, \cdots). \tag{1}$$

Функции (1) регулярны в единичном круге, имеют особенность в точке $z=1$ и допускают аналитическое продолжение по любому пути, не проходящему через 1, ∞, 0. Приведем некоторые известные результаты.

Если D — односвязная область, ограниченная жордановой спрямляемой кривой L и содержащая начало координат, $\varphi(z)$ — регулярная в D, причем в окрестности точки $z=0$ имеет место разложение $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k$, то композиция Адамара

$$\varphi_*(z)=\varphi\circ F\overset{df}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k b_k z^k$$

аналитически продолжима в D, и для всякого $z\in D$ и $\varphi\in E_1$ имеет место формула

$$\varphi_*(z)=\varphi\circ F=\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\zeta)F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{2}$$

Если D — односвязная область со спрямляемой жордановой границей, содержащая $z=\infty$, и $\varphi(z)$ регулярна в D, причем в окрестности точки $z=\infty$ имеет место разложение $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{-k}z^{-k}$, то композиция $\varphi_*(z)=\varphi\circ F\overset{df}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{-k}b_k z^{-k}$ является элементом регулярной в D функции, причем для всякого $z\in D$ и $\varphi\in E_1$

$$\varphi_*(z)=\varphi\circ F=\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\zeta)F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{3}$$

Эти результаты для кусочно-гладкой границы L и функции $\varphi(z)$, регулярной на $\overline{D}$, содержатся в [3], их доказательство остается в силе при сделанных здесь предположениях. В случае, когда $\varphi_*(z)\in E_1$ (а φ может и не принадлежать классу E_1), формулы (2) и (3) допускают обращение

$$\varphi(z)=\varphi_*\circ F_*=\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_*(\zeta)F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\quad (D\ni 0), \tag{2'}$$

$$\varphi(z)=\varphi_*\circ F_*=\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_*(\zeta)F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\quad (D\ni\infty). \tag{3'}$$

Заметим, что интегральные представления (2′) и (3′) возможны для функций $\varphi(z)$, не представимых интегралом Коши по контуру L. Формула интеграла Коши, различные соотношения для дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля в комплексной области [5], [1, гл. IX], операторов М. М. Джрбашяна, обобщающих дробное интегро-дифференцирование [2], и некоторых других получаются из формул (2), (3), (2′), (3′) при соответствующем выборе ядер F и F_*.

Определение 1. Композицией Адамара функции f с союзным ядром F в двусвязной области G назовем функцию

$$f_*(z) = f \circ F \overset{df}{=} f_1 \circ F + f_2 \circ F. \tag{4}$$

Из определения и формул (2), (3), (2′), (3′) следует, что $f_*(z)$ регулярна в G, причем при $z \in G$

$$f_*(z) = f \circ F = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} f_1(\zeta)\, F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} f_2(\zeta)\, F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} f(\zeta)\, F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} f(\zeta)\, F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} - a_0 b_0, \tag{5}$$

если $f(z) \in E_1$ в G (определение класса E_1 в двусвязной области очевидно)*. Аналогично, если $f_*(z) \in E_1$ в G, то $f(z)$ выражается через свои угловые предельные значения формулой

$$f(z) = f_* \circ F_* = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} f_*(\zeta)\, F_*\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} f_*(\zeta)\, F_*\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} - a_0. \tag{5′}$$

Формулы (5) и (5′) позволяют получить в круговом кольце обобщения классической формулы Вилья [4].

Теорема 1. *Если $f(z) \in E_1$ в кольце $G = \{z: r < |z| < \rho\}$, а $F(z)$ и $F_*(z)$ — пара союзных ядер* (1), *то для всякого $z \in G$ справедливо интегральное представление*

$$f_*(z) = f \circ F = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, \mathbf{F}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, \mathbf{F}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} - b_0(a_0 + 2\bar{a}_0), \tag{6}$$

где

$$\mathbf{F}(z) = 2F(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1 - r^{2k}\rho^{-2k}}\, b_k(z^k - z^{-k})$$

— аналог ядра Вилья, а

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta,\ t \in [r, \rho].$$

---

* Все криволинейные интегралы берутся в положительном относительно внутренности кривой направлении.

Если $f(z)$ регулярна в G и $f_*(z)=f\circ F$ принадлежит классу E_1 в G, то при всяком $z\in G$ имеет место интегральное представление

$$f(z)=f_*\circ F_*=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re} f_*(\zeta)]\,\check{\mathbf{F}}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re} f_*(\zeta)]\,\check{\mathbf{F}}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{a_0b_0+2\,\overline{a_0b_0}}{b_0}, \qquad (6')$$

где

$$\check{\mathbf{F}}(z)=2F_*(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\,b_k^{-1}(z^k-z^{-k})$$

— аналог ядра Вилья, а

$$a_0b_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{f_*(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta,\quad t\in[r,\rho].$$

Доказательство. Достаточно доказать формулу (6), так как (6′) получается применением (6) к композиции $f_*\circ F_*$. Принимая во внимание, что для функций класса E_1 в кольце G коэффициенты ряда Лорана могут быть вычислены через радиальные предельные значения $f(z)$ на границе G по формулам

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta;\quad \overline{a}_k=\frac{t^{-2k}}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\overline{f(\zeta)}\,\zeta^{k-1}\,d\zeta;\quad t=r,\rho;\ k=0,\pm1,\cdots,$$

из представления (5) получаем

$$f_*(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re} f(\zeta)]\,F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re} f(\zeta)]\,F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-$$

$$-a_0b_0-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}\overline{f(\zeta)}\,F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\overline{f(\zeta)}\,F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re} f(\zeta)]\,F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re} f(\zeta)]\,F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-a_0b_0-$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{0}\overline{a}_k\,b_{|k|}\,\rho^{2k}z^{-k}-\sum_{k=0}^{\infty}\overline{a}_k\,b_{|k|}\,r^{2k}z^{-k}=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re} f(\zeta)]\,F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re} f(\zeta)]\,F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-a_0b_0-2\,\overline{a}_0b_0+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[f(\zeta)+\overline{f(\zeta)}]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}b_k}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\left[\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k-\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{-k}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[f(\zeta)+\overline{f(\zeta)}]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}b_k}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\left[\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k-\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{-k}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\mathrm{Re}\,f(\zeta)]\,\mathbf{F}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\mathrm{Re}\,f(\zeta)]\,\mathbf{F}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-b_0(a_0+2\bar{a}_0),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Поскольку в теореме 1 G—круговое кольцо, требование возможности аналитического продолжения союзных ядер F и F_* из единичного круга в плоскость без точек 0, 1, ∞ является излишним.

Для функции $f(z)$, регулярной в двусвязной области можно построить более общий аналог композиции Адамара. Для этого рассмотрим две пары союзных ядер:

$$F^{(1)}(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k,\ F_*^{(1)}(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_k^{-1}z^k,\ b_k\neq 0,\ k=1,2,\cdots,$$

$$F^{(2)}(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_{-k}z^k,\ F_*^{(2)}(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_{-k}^{-1}z^k,\ b_{-k}\neq 0,\ k=1,2,\cdots.$$

Как и раньше, функцию $f(z)$ представим в виде $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, где f_1 и f_2— те же, что и в определении 1.

Определение 2. Композицией Адамара функции f с ядрами $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ в двусвязной области G назовем функцию

$$f_*(z)=f_1\circ(F^{(1)},F^{(2)})\overset{df}{=}f_1\circ F^{(1)}+f_2\circ F^{(2)}. \tag{7}$$

Регулярность функции $f_*=f\circ(F^{(1)},F^{(2)})$ в области G очевидным образом следует из определения 2. Кроме того, учитывая формулы (2), (2′), (3), (3′) для функции $f\in E_1$ в G и $z\in G$ будем иметь

$$f_*(z)=f\circ(F^{(1)},F^{(2)})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}f_1(\zeta)F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}f_2(\zeta)F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}f(\zeta)F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}f(\zeta)F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-a_0. \tag{8}$$

Совершенно аналогично, если $f_*=f\circ(F^{(1)},F^{(2)})\in E_1$ в G и f регулярна в G, то

$$f(z)=f_*\circ(F_*^{(1)},F_*^{(2)})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}f_*(\zeta)F_*^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} f_*(\zeta)\, F_{\bullet}^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\,. \tag{8'}$$

Основываясь на интегральных представлениях (8) и (8′), получаем следующее усиление теоремы 1.

Теорема 2. *Если $f(z)\in E_1$ в кольце $G=\{z\colon r<|z|<\rho\}$; $F^{(1)}(z)$ $F_{\bullet}^{(1)}(z)$ и $F^{(2)}(z)$, $F_{\bullet}^{(2)}(z)$ — две пары союзных ядер, не обязательно продолжаемых аналитически за пределы единичного круга, то для всякого $z\in G$ справедливо интегральное представление*

$$f_*(z)=f\circ(F^{(1)},F^{(2)})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re} f(\zeta)]\,\mathbf{F}^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re} f(\zeta)]\,\mathbf{F}^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-(a_0+2\bar{a}_0), \tag{9}$$

где

$$\mathbf{F}^{(1)}(z)=2F^{(1)}(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\,(b_{-k}z^{k}-b_k z^{-k}), \tag{10}$$

$$\mathbf{F}^{(2)}(z)=2F^{(2)}(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\,(b_k z^{k}-b_{-k} z^{-k}), \tag{11}$$

— аналоги ядер Вилья и

$$a_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta,\quad t\in[r,\rho].$$

Если же $f(z)$ регулярна в G, а $f_*(z)=f\circ(F^{(1)},F^{(2)})\in E_1$ в G, то при $z\in G$ справедливо интегральное представление

$$f(z)=f_*\circ(F_{\bullet}^{(1)},F_{\bullet}^{(2)})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re} f_*(\zeta)]\,\check{\mathbf{F}}^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re} f_*(\zeta)]\,\check{\mathbf{F}}^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-(a_0+2\bar{a}_0), \tag{9'}$$

где

$$\check{\mathbf{F}}_1(z)=2F_{\bullet}^{(1)}(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\; b_{-k}^{-1}z^{k}-b_k^{-1}z^{-k}), \tag{10'}$$

$$\check{\mathbf{F}}_2(z)=2F_{\bullet}^{(2)}(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\,(b_k^{-1}z^{k}-b_{-k}^{-1}z^{-k}), \tag{11'}$$

— аналоги ядер Вилья и

$$a_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{f_*(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{z(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta,\quad t\in[r,\rho].$$

Доказательство. Как и в теореме 1, достаточно убедиться в справедливости формулы (9). Преобразовывая правую часть (8), находим

$$f_*(z) = f \circ (F^{(1)}, F^{(2)}) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \overline{f(\zeta)}\, F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \overline{f(\zeta)}\, F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} - a_0 =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} - a_0 -$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{-1} \bar{a}_k\, b_{-k}\, \rho^{2k} z^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k\, b_{-k}\, r^{2k} z^{-k} - 2\bar{a}_0 =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} - (a_0 + 2\bar{a}_0) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} [f(\zeta) + \overline{f(\zeta)}] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k} \rho^{-2k}}{1 - r^{2k} \rho^{-2k}} \left[b_{-k} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k} - b_k \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{-k} \right] -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} [f(\zeta) + \overline{f(\zeta)}] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k} \rho^{-2k}}{1 - r^{2k} \rho^{-2k}} \left[b_{-k} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k} - b_k \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k} \right] \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, \mathbf{F}^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, \mathbf{F}^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} - (a_0 + 2\bar{a}_0),$$

что и требовалось доказать.

Укажем характерные частные случаи формул (6—6′) и (9—9′), а также некоторые следствия теорем 1 и 2.

1°. *Формула Вилья.* Пусть в теореме 1 $F(z) = \dfrac{1}{1-z}$ или в теореме 2 $F^{(1)}(z) = F^{(2)}(z) = \dfrac{1}{1-z}$. Тогда $F_*(z) = F_*^{(1)}(z) = F_*^{(2)}(z) = \dfrac{1}{1-z}$ и формулы (6—6′) и (9—9′) превращаются в формулу Вилья [4]

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(\rho e^{it})\, \Phi\left(\frac{z}{\rho e^{it}}\right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{it})\, \Phi\left(\frac{re^{it}}{z}\right) dt - \bar{a}_0,$$

где

$$\Phi(z)=\frac{1+z}{1-z}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}(z^k+z^{-k});\ a_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R;\ r<R<\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta.$$

2°. *Аналог дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля.* Пусть в теореме 1

$$F(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+k)}z^k,\ |z|<1,$$

$$F_*(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+\alpha+k)}z^k,\ |z|<1,$$

где α — произвольное действительное число, не принимающее целых отрицательных значений. Тогда оператор $f_*=f\circ F$ в кольце $r<|z|<\rho$ является аналогом интегро-дифференцирования по Риману-Лиувиллю порядка α функций, регулярных в единичном круге (см., например, [6], [5], [2]). Ядро $\check{\mathbf{F}}$ в интегральном представлении (6′) в этом случае имеет вид

$$\check{\mathbf{F}}(z)=\frac{2\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+k)}(z^k-z^{-k}).$$

Пример функции $\frac{1}{1-z}$, не принадлежащей классу E_1 в кольце $r<|z|<1$, но представимой по формуме (6′) через предельные значения $\operatorname{Re} f_*$ при всяком нецелом $\alpha<0$, показывает, что формулы (6—6′) и (9—9′) являются принципиально более широким классом интегральных представлений.

3°. *Аналог дробного интегро-дифференцирования в смысле Вейля.* Выбирая в качестве союзных ядер в теореме 1 функции

$$F(z,\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(in)^{\beta}}z^n;\ F_*(z,\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}(in)^{\beta}z^n,$$

где β — действительное число, для функций в кольце, коэффициент a_0 лорановского разложения которых равен нулю, получим обобщение формулы Вилья, являющееся представлением функции через действительную часть аналогов дробных производных и интегралов в смысле Вейля. Если $r=0$, $\rho=1$ и функция $f(z)$ регулярна в замкнутом единичном круге, причем $f(0)=0$, получим новое обобщение формулы Шварца:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re} f^{(\beta)}(e^{it})F_*(ze^{-it})\,dt,$$

где $f^{(\beta)}(e^{it})$ — оператор дробного интегро-дифференцирования по Вейлю функции $\varphi(t) = f(e^{it})$, $t \in (-\infty, \infty)$.

4°. *Аналог интегро-дифференциального оператора М. М. Джрбашяна* [2]. Пусть $\omega(x)$ — неотрицательная непрерывная на $[0, 1)$ функция, для которой $\omega(0) = 1$; $\int\limits_0^1 \omega(x)\,dx < \infty$, и при любом $r \in [0, 1)$

$$\int\limits_r^1 \omega(x)\,dx > 0.$$

Положим $\Delta_0 = 1$,

$$\Delta_k = k \int\limits_0^1 \omega(x)\, x^{k-1}\, dx \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k z^k, \quad F_*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{-1} z^k. \tag{12}$$

Известно [2], что степенные ряды (12) имеют единичный радиус сходимости. Композиция регулярной в кольце $r < |z| < \rho$ функции $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$ с ядром $F(z)$, определяемая формулой (4), является аналогом оператора М. М. Джрбашяна [2] $L^{\omega}[f(z)]$. (Если $f(z)$ регулярна в единичном круге, то $f \circ F \equiv L^{\omega}[f(z)]$), а формулы (6—6′) с ядрами (12) дают обобщение на случай кругового кольца интегральных представлений М. М. Джрбашяна типа формулы Шварца (см. [2], теорема 3).

Теорема 2 позволяет получать для конкретных союзных ядер интегральные представления с „несимметричным" изменением ряда Лорана функции, регулярной в кольце.

В качестве следствия теорем 1 и 2 легко вывести интегральные формулы для гармонических в кольце функций, аналогичные формуле Пуассона.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР, г. Донецк

Поступила 20.I.1975

Վ. Ի. ԲԵԼԻ. Շրջանային օղակում ռեգուլյար ֆունկցիաների ինտեգրալային ներկայացումների խնդրի վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Շրջանային օղակում ռեգուլյար ֆունկցիաների համար նշված են որոշ ինտեգրալային ներկայացումներ, որոնք հանդիսանում են Վիլլյաի բանաձևի ընդհանրացումներ: Որպես մասնավոր դեպքեր ստացված են միավոր շրջանում կոտորակային ինտեգրո-դիֆերենցման տարբեր տեսքերի օպերատորներով ներկայացումների անալոգները:

V. I. BELYI. *On the problem of the integral, representation for functions regular in the ring* (summary)

Some integral representations are pointed out for the regular in the ring functions. These representations generalise the Villat's formula. Analogues of the integral representations associated with various operators of fractional integration and differentiation in the unit disk are obtained for special cases.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. „Наука", 1966.
2. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, серия матем., 32, № 5, 1968, 1075—1111.
3. *В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев.* Конструктивная теория функций комплексного переменного, М—Л, „Наука", 1964.
4. *H. Villat.* Le probleme de Dirichlet dans une aire annulaire, Rend. Circolo Mathem. di Palermo, XXXIII, 1912, 134—174.
5. *W. E. Sewell.* Generalized derivatives and approximation by polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 41, № 1, 1937, 84—123.
6. *Н. Я. Сонин.* О дифференцировании с произвольным указателем Матем. сб., 6, вып. 1, 1972, 134—176.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

От редакции. В расцвете творческих сил безвременно ушел из жизни талантливый, многообещающий математик, всеми нами любимый Тер-Исраелян Левон Аветикович.

Настоящая статья—его последняя научная работа, сданная в редакцию незадолго до его кончины.

Л. А. ТЕР-ИСРАЕЛЯН

О НАИЛУЧШЕЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НА СОПРИКАСАЮЩИХСЯ МНОЖЕСТВАХ

В работе [1] автором были получены верхние оценки для наилучшей рациональной аппроксимации на замкнутых множествах, представляющих собой две области, границы которых в точке соприкосновения образуют друг с другом положительные углы. Сравнение этого результата с основной теоремой работы А. А. Гончара [2] показывает, что переход от двух отрезков с общим концом к двум углам с общей вершиной не ухудшает асимптотики наилучшего рационального приближения. Дальнейшими исследованиями в этом направлении, очевидно, является переход к двум множествам, границы которых в точке соприкосновения имеют *общую касательную.* Поскольку схема, примененная автором в [1], довольно просто и естественно связывает быстроту стягивания полюсов аппроксимирующих функций к точке соприкосновения областей аппроксимации с конфигурацией границ в окрестности этой точки, то следует ожидать, что она приведет к „неплохим" верхним оценкам и в случае приближения на таких множествах.

Рассмотрим множества следующего специального вида:

$$E_\alpha = \{z \in \mathbf{C}:\ |z| \leqslant 1,\ |\mathrm{Re}\, z| \geqslant |\mathrm{Im}\, z|^\alpha\},\ \alpha \in (1, \infty),$$

и функцию f, непрерывную в полукруге $\Delta = \{z \in \mathbf{C}:\ |z| \leqslant 2,\ \mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$, голоморфную во внутренних точках Δ, $f(0)=0$ и $f(z)=0$, когда $\mathrm{Re}\, z<0$.

Пусть

$$R_n(f, E_\alpha) = \inf_{\{r_n\}} \sup_{z \in E_\alpha} |f(z) - r_n(z)|,$$

где $\{r_n\}$ — множество рациональных функций порядка не выше n, и

$$M(r) = \max_{|z| \leqslant r} |f(z)|,\ r \leqslant 2.$$

Теорема. *Для всякого* $\alpha \in (1, \infty)$ *имеем* $R_n(f, E_\alpha) = O(\rho_n)$

$$\rho_n = \min_{x \in (2, \infty)} \left(M\left(\frac{s}{x^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right) \ln x + x r^{n/x}\right),\ \textit{где}\ s = s(\alpha) > 0,\ r = r(\alpha) \in (0, 1).$$

Доказательство. Разобьем границу полукруга Δ на диаметр γ и полуокружность Γ, т. е.

$$\partial\Delta = \gamma \cup \Gamma,$$

$$\gamma = \{z \in \mathbf{C}:\ \mathrm{Re}\, z = 0,\ |\mathrm{Im}\, z| \leqslant 2\},$$

$$\Gamma = \{z \in \mathbf{C}:\ |z| = 2,\ \mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}.$$

Тогда функция f на множестве E_2 может быть представлена в виде суммы двух функций

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \ \text{ и } \ f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta:$$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),\ z \in E_2,$$

рациональной аппроксимацией каждой из которых мы и займемся.

1°. Выбрав некоторое $d \in (0, 1)$, найдем натуральное R такое, чтобы

$$|\zeta_{k+1} - \zeta_k| < d,\ k = 0, 1, \cdots, R,$$

где

$$\zeta_k = 2e^{-i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{R}k} \in \Gamma.$$

Точками $\{\zeta_k\}_{k=0}^{R}$ полуокружность Γ разобьется на дуги $l_k\,(k = 0, 1, \cdots, R-1)$, на которых определим кусочно-рациональную функцию $Q_m(\zeta, z)$:

$$Q_m(\zeta, z) = -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\zeta - \zeta_k)^j}{(z - \zeta_k)^{j+1}},\ \zeta \in l_k,$$

которая осуществляет равномерную аппроксимацию ядра Коши для $\zeta \in \Gamma$, $z \in E_2$:

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - Q_m(\zeta, z)\right| < \frac{d^m}{1 - d}.$$

Отсюда получим

$$\left|f_1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta\right| < \frac{M(2)}{2(1-d)}\, d^n,\ z \in E_2.$$

А так как порядок рациональной функции

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta$$

не превосходит mR, то

$$R_n(f_1, E_2) = O\left(d^{\frac{n}{R}}\right). \tag{1.1}$$

2°. Выберем положительное число K и натуральное n_0 так, чтобы выполнялись условия

$$1.\quad \frac{K}{n_0^{\frac{1}{\alpha-1}}}=2,$$

$$2.\quad \frac{2}{(\alpha-1)K^{\alpha-1}}=p<1,$$

и рассмотрим последовательность $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ точек на γ:

$$\xi_k=i\,\frac{K}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}.$$

Элементы этой последовательности, а также $\{-\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ будут служить полюсами аппроксимации функции f_2.

Обозначим

$$\gamma_k=\{z\in\mathbf{C}\colon \operatorname{Re} z=0,\ |\xi_{k+1}|<|z|\leqslant|\xi_k|\},$$

$$\Gamma_n=\gamma\setminus\Big(\bigcup_{k=0}^{n-1}\gamma_k\Big).$$

Теперь определим функцию $Q_m(\zeta, z)$ для $\zeta\in\gamma$:

$$Q_m(\zeta,z)=\begin{cases}-\sum\limits_{j=1}^{m-1}\dfrac{(\zeta-\xi_k)^j}{(z-\xi_k)^{j+1}}, & \zeta\in\gamma_k,\ \operatorname{Im}\zeta>0\\[2mm] -\sum\limits_{j=1}^{m-1}\dfrac{(\zeta+\xi_k)^j}{(z+\xi_k)^{j+1}}, & \zeta\in\gamma_k,\ \operatorname{Im}\zeta<0,\end{cases}$$

для которой имеют место неравенства

$$\left|\frac{1}{\zeta-z}-Q_m(\zeta,z)\right|\leqslant\frac{2(k+n_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(1-p)K^{\alpha}}p^m,\quad \zeta\in\gamma_k,\ z\in E_\alpha. \tag{2.1}$$

Последние неравенства сразу вытекают из выбора постоянных K и p и следующего очевидного соотношения:

$$\frac{1}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}-\frac{1}{(k+1+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\leqslant\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(k+n_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}.$$

Далее, из (2.1) имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\int\limits_{\gamma_k}f(\zeta)\,Q_m(\zeta,z)\,d\zeta\right|\leqslant\frac{2pM(2)}{1-p}\,p^m,\quad z\in E_\alpha.$$

Теперь введем рациональную функцию

$$r_{k,m}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bigcup\limits_{j=0}^{k-1}\gamma_j}f(\zeta)\,Q_m(\zeta,z)\,d\zeta$$

и оценим для $z\in E_\alpha$ разность $|f_2(z)-r_{k,m}(z)|$,

$$|f_2(z)-r_{k,m}(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\Gamma_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|+\frac{pM(2)}{\pi(1-p)}\,kp^m,\ z\in E_\alpha. \tag{2.2}$$

Осталось получить верхнюю оценку для первого слагаемого в правой части неравенства (2.2). Для этого мы используем тот же прием, основанный на голоморфности f в Δ, который был применен в [1] для оценки аналогичного интеграла.

Пусть $|z|\leqslant\frac{1}{2}|\xi_k|,\ z\in E_\alpha$. Тогда, обозначив $\delta_k=\{z\in\mathbf{C}:\ |z|=|\xi_k|$ $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}\}$, получим

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\leqslant 2\pi M(|\xi_k|)+\left|\int\limits_{\delta_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leqslant 3\pi M\left(\frac{K}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right).$$

Теперь для $|z|>\frac{1}{2}|\xi_k|,\ z\in E_\alpha$ имеем

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\leqslant M\left(\frac{K}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right)\int\limits_{\Gamma_k}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|}.$$

Несложный подсчет показывает, что порядок интегрального сомножителя в правой части неравенства будет $O\left(\ln\frac{1}{|\varepsilon_k|}\right)$. Итак, для $z\in E_\alpha$

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\leqslant C_1M\left(\frac{K}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right)\ln k, \tag{2.3}$$

где $C_1=C_1(\alpha)$.

Теперь, подставляя (2.3) в (2.2), получим

$$|f_2(z)-r_{k,m}(z)|\leqslant C\left[M\left(\frac{K}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right)\ln k+kp^m\right],\ z\in E_\alpha, \tag{2.4}$$

где $C=C(\alpha)$.

Из сопоставления последнего неравенства с (1.1) нетрудно заметить, что главной частью в оценке $R_n(f, E_\alpha)$ будет $R_n(f_2, E_\alpha)$, и переходя в (2.4) от натуральных k и m к непрерывному параметру $x\in[2, \infty)$, получим утверждение теоремы.

Этот результат и теорема, полученная в [1], объединены общим методом выбора полюсов аппроксимации вблизи точки $z=0$, который можно описать следующим образом.

Пусть E—множество, на котором осуществляется приближение, симметричное относительно мнимой оси и содержащее на этой оси лишь точку $z=0$. Если ξ_n — n-ый выбранный полюс, то за ξ_{n+1} берется проекция на мнимую ось точки E, наиболее близкой к ξ_n. В [1], когда границу E представляли собой вблизи $z=0$ отрезки прямой, последовательность $|\xi_n|$ стремилась к нулю со скоростью геометрической прогрессии. В случае же, рассмотренном в настоящей работе, абсолютные величины полюсов аппроксимирующих рациональных функций стремятся к нулю уже гораздо медленнее, так как точки множества E „ближе примыкают" к мнимой оси в окрестности $z=0$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 18.II.1976

Լ. Ա. ՏԵՐ-ԻՍՐԱՅԵԼՅԱՆ. Ռացիոնալ ֆունկցիաներով լավագույն մոտարկման մասին հպվող բազմությունների վրա (*ամփոփում*)

Հոդվածում ստացված են վերին գնահատականներ լավագույն ռացիոնալ մոտարկման համար հատուկ տեսքի բազմությունների վրա։

L. A. TER-ISRAJELIAN. *On the best rational approximation in contacting domains* (summary)

The paper gives upper estimates for the best rational approximation in the special sets.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Тер-Исраелян.* О равномерной аппроксимации рациональными функциями, Изв. АН Арм.ССР. сер. „Математика", IX, № 3, 1974, 236—241.
2. *А. А. Гончар.* О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями, Матем. сб., 73 (115), 1967, 630—638.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS